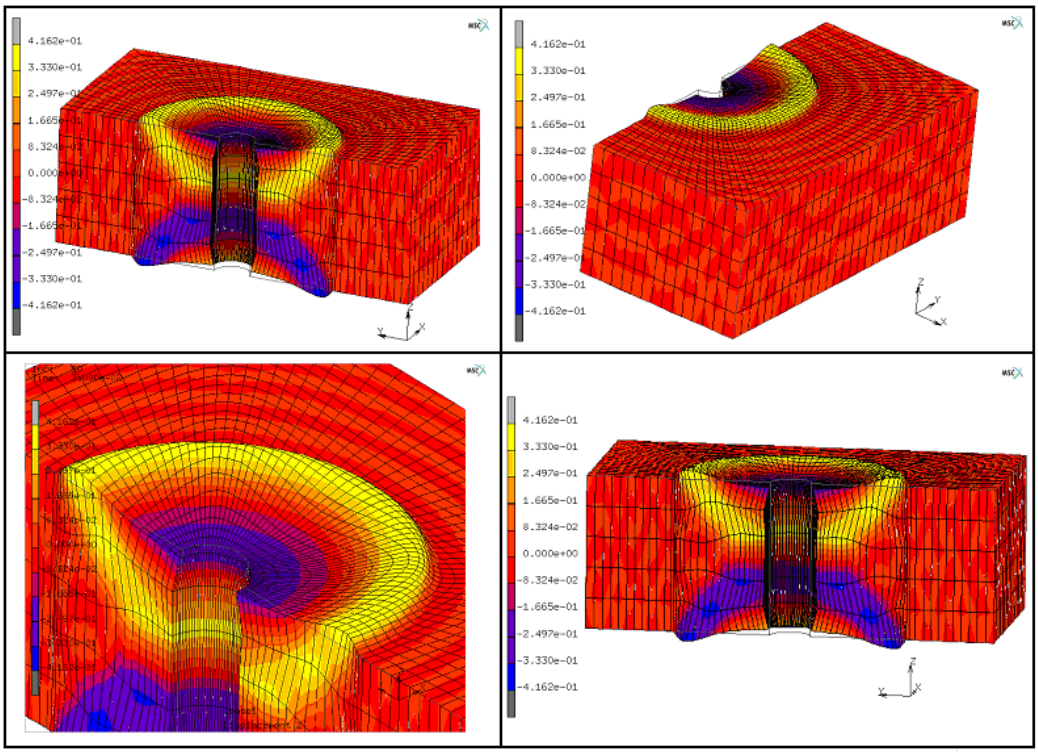
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΝΑΤΙΝΑΞΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ»

ΕΡΝΕΣΤΟΣ Ν. ΣΑΡΡΗΣ



ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Δρ. Ζαχαρίας Αγιουτάντης, Καθηγητής (Επιβλέπων)
Δρ. Γεώργιος Εξαδάκτυλος, Αναπληρωτής καθηγητής
Δρ. Κωνσταντίνος Προβιδάκης, Αναπληρωτής καθηγητής

Χανιά, Σεπτέμβριος 2004

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε αριθμητική προσομοίωση μιας ανατίναξης, με σκοπό την μελέτη δημιουργίας και διάδοσης των τασικών κυμάτων που παράγονται κατά την διάρκεια μιας ανατίναξης με βασικό στόχο την αναπαραγωγή των συνθηκών που επικρατούν την στιγμή της ανατίναξης αλλά και την μελέτη δημιουργίας ρωγμών σε μια ελεγχόμενη ανατίναξη.

Η μελέτη δημιουργίας και διάδοσης των τασικών κυμάτων είναι υψίστης σημασίας στην μεταλλευτική τεχνολογία. Τα καταστατικά μοντέλα διάδοσης τασικών κυμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο υπολογισμού της έντασης του τασικού παλμού και έμμεσα στον υπολογισμό θρυμματισμού του πετρώματος αλλά και για να προβλέψουν τις διάφορες επιδράσεις από αυτά, για διάφορα σχέδια ανατίναξης.

Για την προσομοίωση της ανατίναξης δημιουργήθηκαν διάφορα δισδιάστατα μοντέλα τα οποία επιλύθηκαν με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με το λογισμικό πακέτο "Marc, Mentat-2000".

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε με σκοπό την μελέτη του σύνθετου δυναμικού φαινομένου της ανατίναξης με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Για την πραγματοποίηση της παρούσας εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου:

- Στον **κ. Αγιουτάντη Ζαχαρία**, Καθηγητή και επιβλέποντα, για την επιλογή του θέματος, την άριστη συνεργασία που είχαμε, καθώς επίσης και για την αμέριστη συμπαράσταση του με τις συμβουλές αλλά και για την διόρθωση της εργασίας αυτής.

- Στον **κ. Εξαδάκτυλο Γεώργιο**, Καθηγητή και συνεπιβλέποντα, για τις πολύτιμες συμβουλές σε θέματα θραυστομηχανικής καθώς επίσης και στο χρόνο που διέθεσε για την διόρθωση και εξέταση της εργασίας αυτής.

- Στον **κ. Προβιδάκη Κωνσταντίνο**, Αναπληρωτή καθηγητή, για τον χρόνο που διέθεσε για την διόρθωση και την εξέταση της εργασίας αυτής.

Στην προσπάθεια για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής συνέβαλαν και αρκετοί άλλοι συνεργάτες που θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Όλο το εργαστήριο Εφαρμοσμένης Μηχανικής του Γενικού Τμήματος και ιδιαίτερα την **Δρ. Μαρία Σταυρουλάκη**
Τους επιστημονικούς συνεργάτες του εργαστηρίου Μηχανικής Πετρωμάτων **κ. Στέλιο Μαυριγιαννάκη** και **κα. Ειρήνη Καλογήρου**

Την **Δρα. Σταυρουλάκη** και τον **κ. Μαυριγιαννάκη**, διότι ποτέ κανένα πρόβλημα στο λογισμικό "MARC-MENTAT 2000" δεν ήταν ποτέ δύσκολο και την **κα. Καλογήρου** για τα σχόλια, διορθώσεις, παρατηρήσεις και συμπαράσταση της κατά την συγγραφή του κειμένου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 …… 1

Εισαγωγή …….. 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 …….. 4

Μηχανική των Εκρήξεων ……..... 4

2.1 Εισαγωγή …… 4

2.2 Μοντέλο Έκρηξης ……..... 4

2.3 Θεωρία Έκρηξης …… 5

2.4 Θερμοϋδροδυναμική Θεωρία Έκρηξης ……. 6

2.5 Θραύση του Πετρώματος με Χρήση Εκρηκτικών Υλών - Σύντομη Περιγραφή του Φαινομένου …… 9

2.6 Κρουστική Φάση …… 10

2.6.1 Αποζευγμένη γόμωση ……. 12

2.6.2 Πίεση στα τοιχώματα του διατρήματος …… 13

2.6.2.1. Προσδιορισμός πίεσης έκρηξης και πίεσης στα τοιχώματα του διατρήματος με την θεωρία της ιδανικής ανατίναξης ……... 14

2.6.2.2. Προσδιορισμός της πίεσης έκρηξης και πίεσης στα τοιχώματα με την θεωρία τη μη ιδανικής ανατίναξης ……. 14

2.6.3 Ελαστικά μοντέλα αλληλεπίδρασης εκρηκτικού-πετρώματος …… 17

2.6.4 Θραύση του πετρώματος γύρω από τον θάλαμο έκρηξης …… 20

2.6.4.1 Ζώνη θρυμματισμού …….. 21

2.6.4.2 Μεταβατική ζώνη …….. 25

2.6.4.3 Ελαστική ζώνη …… 26

2.6.5 Θραύση από ανάκλαση …… 29

2.7 Ωστική Φάση ……..... 33

2.7.1 Συνθήκες στατικής εντατικής κατάστασης (χωρίς παρουσία ακτινικών ρωγμών) 35

2.7.2 Συνθήκες στατικής εντατικής κατάστασης (παρουσία ακτινικών ρωγμών) …… 36

2.7.3 Περίπτωση ανισότροπου πετρώματος ……..... 39

2.8 Επιλογή της Εκρηκτικής Ύλης ……. 39

2.9 Επίδραση των Χαρακτηριστικών του Πετρώματος στην Ανατίναξη 41
2.9.1 Αντοχή 41
2.9.2 Ελαστικές ιδιότητες του πετρώματος 43
2.9.3 Ταχύτητα διάδοσης του ηχητικού κύματος στο πέτρωμα 44
2.9.4 Πορώδες 44
2.9.5 Εντατικό πεδίο περιβάλλοντος χώρου 45
2.9.6 Ασυνέχειες 45
2.10 Μέθοδοι Ελεγχόμενης Ανατίναξης 46
2.11 Μηχανισμός Ελεγχόμενης Ανατίναξης 47
2.12 Ειδική Μέθοδος Εξόρυξης Διακοσμητικών Όγκων 52

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 54

Η Μέθοδος Των Πεπερασμένων Στοιχείων 54
3.1 Εισαγωγή 54
3.2 Περιγραφή της Μεθόδου 54
3.2.3 Βασική ιδέα 54
3.2.2 Διάρθρωση της Μεθόδου 56
3.3 Διακριτοποίηση 57
3.4 Είδη Στοιχείων 60
3.5 Διαίρεση του Πεδίου 62
3.6 Συναρτήσεις Παρεμβολής και Πεπερασμένα Στοιχεία 66
3.7 Καταστατικές εξισώσεις στοιχείου και σύνθεση του τελικού συστήματος εξισώσεων ... 69
3.8 Επιβολή των Συνοριακών Συνθηκών 74
3.9 Επίλυση των εξισώσεων 77
3.10 Μοντέλα Συμπεριφοράς Υλικών 78
3.10.1 Ελαστική Συμπεριφορά σε δυο Διαστάσεις 79
3.10.2 Τύποι Στατικών Προβλημάτων 80
3.10.3 Δυναμικά Προβλήματα 82
3.11 Ερμηνεία των Αποτελεσμάτων 82

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 83

Πεπερασμένα Στοιχεία Στη Δυναμική Ανάλυση 83
4.1 Εισαγωγή 83

4.2 Δυναμικές Εξισώσεις – Μητρώα Μάζας και Απόσβεσης 84
4.3 Απόσβεση 88
4.4 Χρονική-Ιστορική Ανάλυση και Μέθοδοι Άμεσης Χρονικής Ολοκλήρωσης 90
4.4.1 Μέθοδος κεντρικών διαφορών 93
4.4.2 Μέθοδος Houbolt 96
4.4.3 Μέθοδος Newmark 97
4.5 Ανάλυση Ευστάθειας 100
4.6 Συμπεράσματα για την Ιστορική Χρονική Ανάλυση 101
4.6.1 Επιλογή μεθόδου 102
4.6.2 Επιλογή στοιχείων και διακριτοποίηση 103
4.7 Μη Γραμμικά Δυναμικά Προβλήματα 103
4.7.1 Έμμεσες μέθοδοι ολοκλήρωσης 104
4.7.2 Έλεγχος ισοζυγίου ενέργειας 105
4.7.3 Άμεσες μέθοδοι 107

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 108

Ελαστοπλαστική Συμπεριφορά και Προβλήματα Επαφής 108
5.1 Εισαγωγή 108
5.2 Γενικά 108
5.2.1 Ελαστικό-Τέλεια Πλαστικό Υλικό 109
5.2.2 Ελαστικό-Πλαστικό Υλικό με Κράτυνση 110
5.2.3 Ελαστικό-Πλαστικό Υλικό με Χαλάρωση 111
5.3 Συμπεριφορά Υλικών σε Περισσότερες Διαστάσεις 111
5.4 Δημιουργία Ελαστοπλαστικών Καταστατικών Μοντέλων 112
5.5 Δημιουργία Ελαστοπλαστικού Καταστατικού Μητρώου 117
5.6 Συναρτήσεις Ορίων Διαρροής 121
5.6.1 Κριτήριο Von Mises 122
5.6.2 Κριτήριο Mohr-Coulomb 124
5.6.3 Κριτήριο Drucker-Prager 126
5.6.4 Κριτήριο Hoek-Brown 128
5.7 Προβλήματα Επαφής 129
5.7.1 Μαθηματική Σύνθεση Προβλημάτων Επαφής 130
5.8 Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Επαφής 135

5.8.1 Πολλαπλασιαστές Lagrange …… 135
5.8.2 Μέθοδος Ποινών …….. 135
5.8.3 Μέθοδος Απευθείας Περιορισμών …….. 136

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 …….. 137

Ανάλυση Ανατίναξης με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων ……..... 137
6.1 Εισαγωγή …… 137
6.2 Ορισμός Γεωμετρίας ……. 138
6.3 Έλεγχος Σύγκλισης …… 139
6.4 Τύποι Φόρτισης ……. 143
6.5 Διακριτοποίηση και Αριθμητική Αστάθεια Στοιχείων …….. 146
6.6 Επιλογή Μεθόδου Δυναμικής Ανάλυσης …….. 147
6.6.1 Μέθοδος Newmark …….. 147
6.6.2 Μέθοδος Houbolt ……. 150
6.6.3 Μέθοδος Κεντρικών Διαφορών …… 152
6.7 Επιλογή Συνάρτησης Διαρροής ……. 155
6.7.1 Συνθήκη διαρροής Von Mises ……. 155
6.7.2 Συνθήκη διαρροής Mohr-Coulomb (linear) ……. 155
6.8 Επεξεργασία Μοντέλων …… 159
6.8.1 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (S=B) …… 160
6.8.2 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (S=2B) …….. 165
6.8.3 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (Εξάπλωση τάσεων σε άπειρο μέσο) …….. 170
6.8.4 Μοντελοποίηση συμμετρίας πολλαπλής σειράς έναυσης ελαστικού υλικού (S=2B) . 176
6.8.5 Μοντελοποίηση αλληλεπίδρασης πολλαπλής σειράς έναυσης ελαστικού υλικού (S=2B) …… 180
6.8.6 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστοπλαστικού υλικού (S=B) …… 185
6.8.7 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστοπλαστικού υλικού (S=2B) …….. 188
6.8.8 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστοπλαστικού υλικού (Εξάπλωση τάσεων σε άπειρο μέσο) …….. 191
6.8.9 Μοντελοποίηση συμμετρίας πολλαπλής σειράς έναυσης ελαστοπλαστικού υλικού (S=2B) …… 197

6.8.10 Μοντελοποίηση αλληλεπίδρασης πολλαπλής σειράς έναυσης ελαστοπλαστικού υλικού (S=2B) …… 201
6.8.11 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (S=2B) με επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής …….. 206
6.8.12 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (S=B) με επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής …….. 211
6.8.13 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (Εξάπλωση τάσεων σε άπειρο μέσο) με επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής ……... 214
6.8.14 Μοντελοποίηση συμμετρίας πολλαπλής σειράς έναυσης ελαστικού υλικού με επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής …….. 220
6.9 Εύρεση Συντελεστών Έντασης των Τάσεων με την Βοήθεια του Λογισμικού Franc2D 225
6.9.1 Προσέγγιση θραύσης με τους συντελεστές έντασης των τάσεων ……. 225
6.9.2 Αριθμητική προσομοίωση διάδοσης ρωγμής …… 229
6.9.2.1 Αριθμητική προσομοίωση διάδοσης μιας επιλεκτικής ρωγμής …….. 229
6.9.2.2 Αριθμητική προσομοίωση διάδοσης τριών επιλεκτικών ρωγμών ……... 233

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 …… 236

Συμπεράσματα και Προτάσεις ……..... 236
7.1 Εισαγωγή …… 236
7.2 Συμπεράσματα …….. 236
7.3 Προτάσεις …….. 251

Βιβλιογραφία……. 253

1. Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια οι μελετητικές ικανότητες του ανθρώπου έχουν εξελιχθεί σε πολύ μεγάλο βαθμό και σε συνδυασμό με την ραγδαία εξέλιξη των υπολογιστών και των λογισμικών πακέτων, έχουν φέρει μεγάλες αλλαγές στον τρόπο μελέτης και αντιμετώπισης ενός σχεδιασμού υπαίθριας ή υπόγειας ανατίναξης.

Η μηχανική των ανατινάξεων είναι αναπόσπαστο κομμάτι της μεταλλευτικής τεχνολογίας αφού τόσο σε υπαίθρια όσο και σε υπόγεια έργα είναι απαραίτητο εργαλείο μέσα από το οποίο γίνεται μείωση του κόστους εκμετάλλευσης ή άλλης δραστηριότητας όπως προσπέλασης, καθώς επίσης και μείωση κόστους επεξεργασίας (διακοσμητικοί όγκοι) και συντήρησης (σήραγγες).

Ο σχεδιασμός διέπεται από επιστημονικές γνώσεις και τεχνολογικές εξελίξεις. Στην προσπάθεια σχεδιασμού μιας ανατίναξης ή ακόμα και βελτίωσής της, είναι αναγκαίο, μαζί με την εμπειρία να ενσωματώνεται και η διαθέσιμη τεχνολογία. Για τον σωστό σχεδιασμό σε δύσκολες περιοχές (π.χ κατοικημένες), είναι απαγορευτικό να παρουσιάζονται υψηλές δονήσεις στο έδαφος, καθιστώντας τις απαιτήσεις του σχεδιασμού υψηλότερες για τους προφανείς λόγους ασφαλείας των πολιτών και των κατασκευών.

Στη μελέτη του σχεδιασμού μιας ανατίναξης υπάρχουν τρεις τρόποι ανάλυσης:

- **Εμπειρικός:** ο εμπειρικός τρόπος ανάλυσης βασίζεται σε εμπειρικές παρατηρήσεις από την μελέτη και παρακολούθηση παρόμοιων ανατινάξεων. Από την παρακολούθηση αυτή εξάγονται διάφορα χρήσιμα στοιχεία που αφορούν την συμπεριφορά της βραχομάζας σε διάφορους γεωλογικούς σχηματισμούς αλλά και συμπεράσματα για την συμπεριφορά και τις ιδιότητες της εκρηκτικής ύλης, για να καθίσταται δυνατή η επιλογή της σε διάφορες άλλες εφαρμογές. Οι εμπειρικές μέθοδοι δεν μπορούν να προβλέψουν με μεγάλη ακρίβεια την συμπεριφορά της βραχομάζας κατά την διάρκεια μιας ανατίναξης σε κάθε γεωλογική μορφή. Αυτό είναι και το μεγάλο μειονέκτημα των εμπειρικών μεθόδων: Δεν μπορούν να δώσουν σαφή στοιχεία για διάφορες περιπτώσεις. Τα συμπεράσματα που εξάγονται είναι ειδικά για κάθε περίπτωση.
- **Αναλυτικός:** ο αναλυτικός τρόπος, βασίζεται στην επίλυση μαθηματικών σχέσεων κλειστής μορφής που είναι σε θέση να αποδώσουν το εντατικό και

παραμορφωσιακό πεδίο κάποιας βραχομάζας σε κάθε σημείο της με μεγάλη ακρίβεια. Η εφαρμογή αυτών των εξισώσεων είναι δυνατή σε υπεραπλουστευμένα γεωμετρικά προβλήματα. Γενικά οι αναλυτικές μέθοδοι δεν μπορούν να βοηθήσουν στη μελέτη προβλημάτων δύσκολης γεωμετρίας και πολύπλοκων γεωλογικών συνθηκών. Η χρήση τους είναι συνήθως ενδεικτική και εφαρμόζεται συνήθως για μικρή περιοχή προβλημάτων ανάλυσης (λύσεις Kirsh και λύσεις Mitchell).

- **Αριθμητικός:** ο αριθμητικός τρόπος ανάλυσης έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια μαζί με την ραγδαία εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η ταυτόχρονη εξέλιξη των αριθμητικών μεθόδων με τους υπολογιστές οφείλεται στον μεγάλο όγκο μαθηματικών σχέσεων που πρέπει να επιλυθούν και στον μεγάλο όγκο αποτελεσμάτων που παράγουν. Η λύση κάποιων σχέσεων θα ήταν αδύνατη χωρίς την χρήση υπολογιστή αν ληφθεί υπόψη ότι ένα αριθμητικό πρόβλημα απαιτεί την ταυτόχρονη επίλυση αρκετών χιλιάδων εξισώσεων.

Μια από τις πιο συχνά εφαρμοζόμενες αριθμητικές μεθόδους είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Η μέθοδος αυτή θεωρεί το υπό μελέτη πρόβλημα κυρίως σαν ένα συνεχές μέσο με σταθερές ή διαφοροποιημένες ιδιότητες που παρίστανται με κάποιας μορφής γεωμετρία και υπόκειται σε συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Το μέσο αυτό διαιρείται σε μεγάλο αριθμό μικρότερων στοιχείων, τα οποία έχουν συγκεκριμένη γεωμετρική μορφή και μαθηματική έκφραση (διακριτοποίηση). Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι κάθε στοιχείο που σχηματίζεται κατά την διακριτοποίηση, έχει συγκεκριμένη συμπεριφορά στις εξωτερικές συνθήκες που δρουν σε αυτό. Αυτή η συμπεριφορά εξαρτάται από τις παραμέτρους του υλικού και ορίζεται από συγκεκριμένες μαθηματικές σχέσεις. Ο συνδυασμός της συμπεριφοράς όλων των στοιχείων οδηγεί στην επίλυση του προβλήματος και στην τελική αναπαράσταση των μεταβολών που παρουσιάζονται στο φυσικό πρόβλημα. Εδώ δεν πρέπει να παραληφθεί να αναφερθεί ότι πίσω από αυτή την απλή επεξήγηση της μεθόδου υπάρχει μεγάλο μαθηματικό υπόβαθρο που στο μέγεθος αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι αδύνατο να αναπτυχθεί.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της συμπεριφοράς της βραχομάζας και των τασικών παλμών (κύματα) από δυναμική καταπόνηση, που παράγονται κατά την διάρκεια μιας ανατίναξης καθώς και η επίδραση ρωγμών στις ελεγχόμενες ανατινάξεις σε ελαστικό και ελαστοπλαστικό μέσο. Για την επίτευξη

αυτού έγινε προσομοίωση ανατίναξης μονής και πολλαπλής σειράς έναυσης με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στο λογισμικό πακέτο 'Msc Marc-Mentat 2000'.

Στην δυναμική ανάλυση που έγινε, αρχικά μελετάται η σύγκλιση λύσης των αναλυτικών σχέσεων του Kirsh για διάφορους αριθμούς στοιχείων καθώς και η αριθμητική αστάθεια που μπορεί να προκύψει από την διακριτοποίηση. Στη συνέχεια πραγματοποιείται διερεύνηση των διαφόρων μαθηματικών συναρτήσεων για την επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης και την εφαρμογή της για την επίλυση των αριθμητικών μοντέλων. Η ανάλυση των μοντέλων πραγματοποιήθηκε σε δυο διαστάσεις με την εφαρμογή δυναμικού φορτίου για διάφορους χρόνους διάρκειας παλμών σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης κατόπιν ελέγχου και για συνθήκες επίπεδης τάσης όπου δεν προέκυψε καμία διαφορά. Τέλος γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την ανάλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

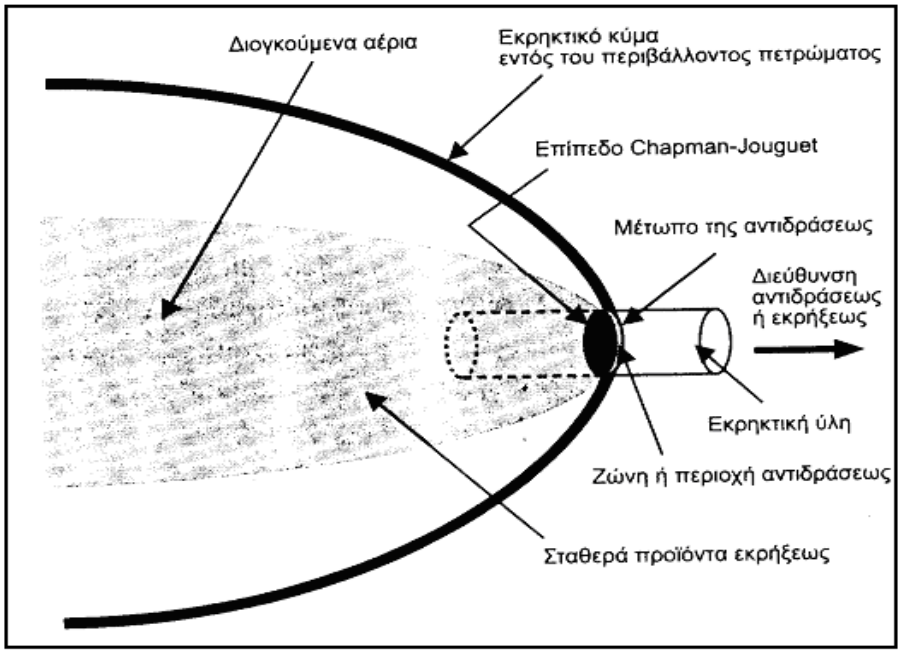
2. Μηχανική των Εκρήξεων

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη περιγραφή γύρω από την θεωρία των εκρηκτικών υλών και της τεχνικής των ανατινάξεων. Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στους μηχανισμούς θραύσης του πετρώματος από τη δυναμική φόρτιση, που προκαλείται κατά την διάρκεια μιας ανατίναξης, όπου είναι και το κυρίως αντικείμενο της εργασίας αυτής.

2.2 Μοντέλο Έκρηξης

Για την παρακολούθηση και μελέτη της έκρηξης χρησιμοποιείται συχνά το μοντέλο του σχήματος 2.1 που αναφέρεται στην περίπτωση έκρηξης στήλης με διαρρηκτική εκρηκτική ύλη.



Σχήμα 2.1: Μοντέλο έκρηξης διαρρηκτικής εκρηκτικής ύλης (Τσουτρέλης, 1997)

Η έκρηξη στο σχήμα αυτό κινείται από αριστερά προς δεξιά. Η όλη χημική αντίδραση λαμβάνει χώρα μέσα στην **πρωτογενή ζώνη αντίδρασης,** η οποία αρχίζει από το **μέτωπο της αντίδρασης** και ολοκληρώνεται στο επίπεδο Chapman-Jouquet, πάνω στο

οποίο αναπτύσσεται σταθερή κατάσταση. Η ζώνη αυτή για την περίπτωση της νιτρογλυκερίνης, έχει πάχος περίπου 0.2 mm και στο τέλος της ζώνης αυτής έχει πίεση 220 kbar (22GPa). Η θερμοκρασία είναι άνω των 3000 ^{0}K αλλά και η πυκνότητα κατά 30% μεγαλύτερη από ότι αρχικά. Στο ίδιο σχήμα διακρίνεται το **εκρηκτικό κύμα** που σχηματίζεται πάνω στο πέτρωμα, που περιβάλλει το διάτρημα καθώς και η φάση της ωστικής πίεσης που σχηματίζεται μεταγενέστερα από τα αέρια προϊόντα της έκρηξης (Τσουτρέλης, 1997).

2.3 Θεωρία Έκρηξης

Οι εκρηκτικές ύλες ανάλογα με τον τρόπο αντίδρασης τους χωρίζονται σε δυο κατηγορίες. (Α) Στις βραδύκαυστες που εναύονται με θερμικό τρόπο και η αυτοδιάδοση της αντίδρασης τους πραγματοποιείται με αγωγιμότητα. (Β) Στις διαρρηκτικές που διεγείρονται με κρουστικό τρόπο και η αυτοδιάδοση της αντίδρασης τους πραγματοποιείται με κρουστικό κύμα. Η πρώτη μορφή της αντίδρασης ονομάζεται κατάκαυση και λαμβάνει χώρα σε υποηχητική ταχύτητα και πιέσεις μέχρι και 3.5 kbar. Η δεύτερη μορφή της αντίδρασης καλείται εκρηκτική αντίδραση και λαμβάνει χώρα σε υπερηχητική ταχύτητα και πιέσεις μέχρι και 200 kbar (Τσουτρέλης, 1997).

Η έκρηξη είναι η πιο βίαια και ταχεία αντίδραση που μπορεί να συμβεί. Πραγματοποιείται με την διάδοση ενός κρουστικού κύματος μέσα από την μάζα της εκρηκτικής ύλης, το οποίο προκαλεί την διέγερση της. Η διέγερση αυτή είναι μια εξώθερμη χημική αντίδραση (οξείδωση), που εκλύει ενέργεια της τάξης του 1 cal/g με πολύ μεγάλους ρυθμούς έκλυσης. Μέρος της ενέργειας αυτής αυτοκαταναλίσκεται για να διατηρήσει σταθερά χαρακτηριστικά του αντιδρώντος κύματος (reactive wave) που διεγείρει την εκρηκτική ύλη και εξασφαλίζεται η αυτοδιάδοση της αντίδρασης. Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω η αντίδραση είναι μια οξείδωση, στην οποία τα μόρια ασταθών χημικών ουσιών διασπώνται και σχηματίζουν σταθερότερα μόρια όπως CO_2, H_2O, CO, NO_x με παράλληλη έκλυση ενέργειας (Τσουτρέλης, 1997).

2.4 Θερμοϋδροδυναμική Θεωρία Έκρηξης

Τα πιο χαρακτηριστικά μεγέθη της αντίδρασης έκρηξης είναι η πυκνότητα, η ταχύτητα, η πίεση, η θερμοκρασία της έκρηξης καθώς και η διατιθέμενη ενέργεια για την εκτέλεση ωφέλιμου μέσα στην ζώνη αντίδρασης και ακριβώς πίσω της. Από αυτά τα μεγέθη, η πυκνότητα και η ταχύτητα έκρηξης μπορούν να προσδιοριστούν πειραματικά, ενώ τα άλλα μεγέθη μπορούν να υπολογιστούν από υδροδυναμικές και θερμοδυναμικές σχέσεις. Η θερμοϋδροδυναμική θεωρία βασίζεται (Τσουτρέλης, 1997):

- σε ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές,
- σε δυο πειραματικές παρατηρήσεις,
- σε γνωστούς νόμους της θερμοδυναμικής,
- στις εξισώσεις Rankine και Hugoniot για κρουστικά κύματα που αναφέρονται στην διατήρηση της μάζας, ορμής και ενέργειας καθώς και
- στο διάγραμμα πίεσης-όγκου για την περίπτωση έκρηξης.

Κατά την ανάπτυξη της σχετικής θεωρίας γίνονται αποδεκτές οι εξής παραδοχές (Τσουτρέλης, 1997):

A. Η κυλινδρική γόμωση είναι σε τομή με άπειρη διάμετρο ώστε να αποκλείονται οι πλευρικές απώλειες μορίων.

B. Μέσα στην εκρηκτική ύλη, η έκρηξη οδεύει προς μια κατεύθυνση και το επίπεδο του μετώπου της έκρηξης παραμένει πάντοτε κάθετο (σύμφωνα με φωτογραφήσεις του μετώπου έκρηξης, είναι καμπύλο) στον άξονα γόμωσης.

C. Η διατήρηση της αυτοδιάδοσης της έκρηξης επιτυγχάνεται, διότι μέρος της εκλυόμενης ενέργειας κατά την αντίδραση διατίθεται για την ενίσχυση του αρχικού κρουστικού κύματος ώστε να διατηρείται σταθερό και ικανό να διεγείρει την εκρηκτική ύλη που βρίσκεται μπροστά από αυτό. Για να δειχθούν σχηματικά τα προηγούμενα που αναφέρθηκαν, παρατηρείται το μοντέλο έκρηξης του Langweiler (Τσουτρέλης, 1997).

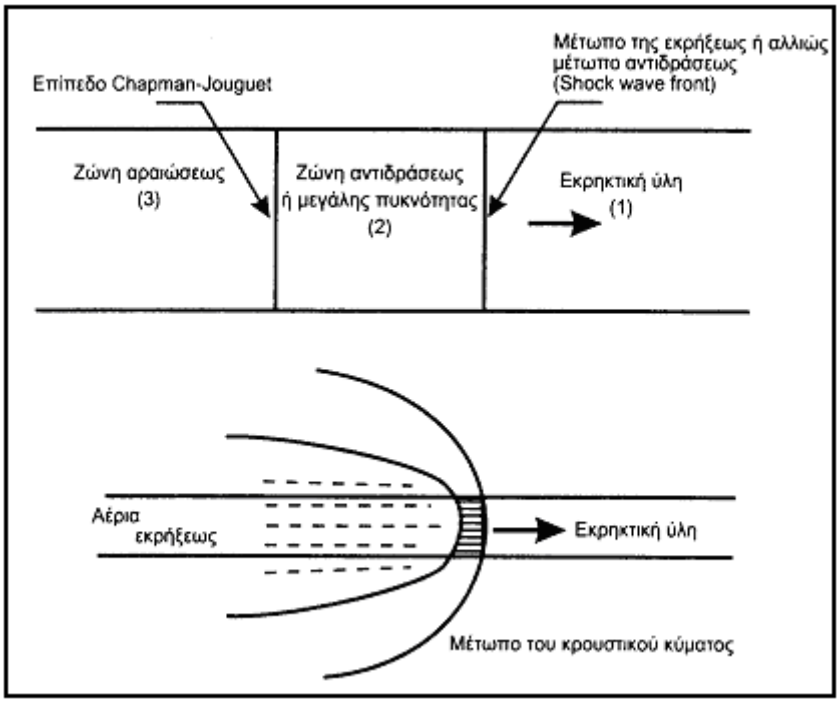
Σύμφωνα με το μοντέλο του σχήματος 2.2, διακρίνονται τρεις ζώνες:

A. Τη ζώνη 1, όπου η εκρηκτική ύλη δεν έχει αντιδράσει.

B. Τη ζώνη 2, εκρηκτικής αντίδρασης, μέσα στην οποία πραγματοποιείται η αντίδραση. Αρχίζει από το μέτωπο αντίδρασης και ολοκληρώνεται στο επίπεδο Chapman-Jouquet. Η περιοχή αυτή είναι πολύ μικρή σε μήκος και χαρακτηρίζεται από μεγάλη αύξηση πίεσης, θερμοκρασίας και πυκνότητας σε χρόνους μsec.

C. Τη ζώνη 3, αραίωσης που χαρακτηρίζεται από πολύ μικρή πυκνότητα σε σχέση προς εκείνη της ζώνης αντίδρασης.

Στην περιοχή αυτή έχει ολοκληρωθεί η χημική αντίδραση και υπάρχουν μόνο μόρια αερίων.

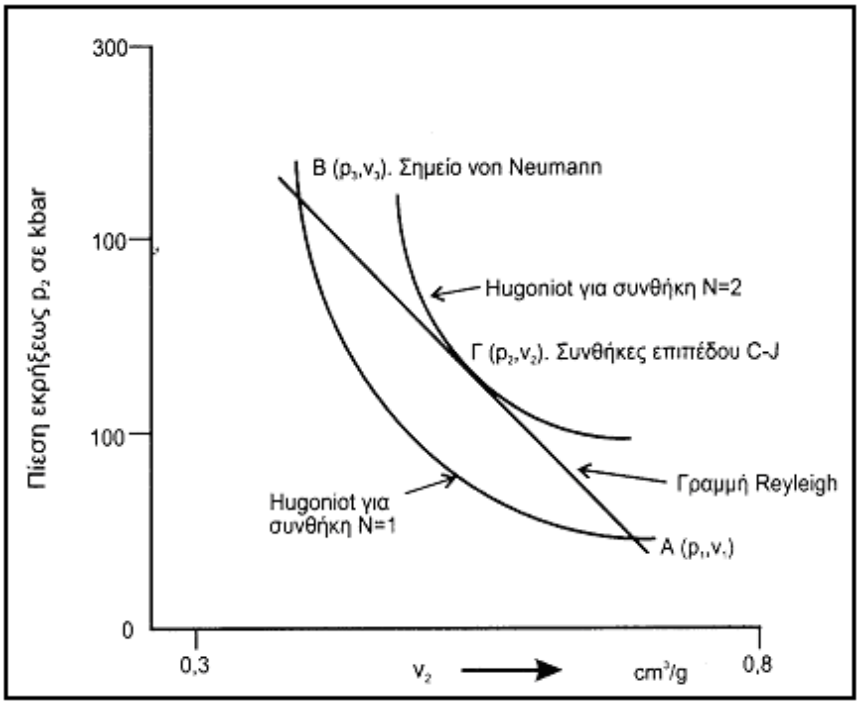


Σχήμα 2.2: Μοντέλο έκρηξης Langweiler (Τσουτρέλης, 1997)

Οι τρείς αυτές ζώνες διαχωρίζονται μεταξύ τους σε δύο παράλληλα μέτωπα (Τσουτρέλης, 1997):

- Το μέτωπο έκρηξης (shock wave front), στο οποίο το εκρηκτικό κύμα (πύρινα βλήματα μορίων) προσβάλλει την εκρηκτική ύλη.
- Το μέτωπο αραίωσης (Chapman-Jouquet), στο οποίο διαχωρίζεται η ζώνη αντίδρασης από την ζώνη αραίωσης, όπου έχει ολοκληρωθεί η χημική αντίδραση για την περίπτωση ιδανικής έκρηξης.

Για την κατανόηση του μηχανισμού της έκρηξης λαμβάνεται το διάγραμμα Rankine-Hugoniot για έκρηξη στο οποίο έχουν χαραχθεί οι αδιαβατικές καμπύλες Hugoniot για N=0 και N=1, όπου εκφράζουν αντίστοιχα την αρχική και τελική κατάσταση της εκρηκτικής ύλης δηλαδή οι ενεργειακές σχέσεις για μηδενική και πλήρη μετατροπή.



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα Rankine-Hugoniot για έκρηξη (Τσουτρέλης, 1997)

Εάν πάνω στην καμπύλη της αρχικής κατάστασης (N=1) ληφθεί το σημείο A (p_1,V_1) που εκφράζει την κατάσταση ενός σωματιδίου της εκρηκτικής ύλης πριν την αντίδραση του, πρέπει να προσδιοριστεί πάνω στην καμπύλη (N=1) της τελικής σταθερής κατάστασης (επί του επιπέδου Chapman-Jouquet), η νέα και μοναδική θέση Γ (p_2,V_2) μετά την ολοκλήρωση της αντίδρασης του. Το ζητούμενο σημείο Γ(p_2,V_2) είναι το σημείο της επαφής της καμπύλης Hugoniot για N=2 και της γραμμής Rayleigh, η οποία χαράσσεται από το σημείο A (p_1,V_1) προς το σημείο B (p_3,V_3) που καλείται και αιχμή Von Neumann. Σύμφωνα με το διάγραμμα για N=1, η εκρηκτική ύλη συμπιέζεται από τις συνθήκες της αρχικής κατάστασης A μέχρι τις συνθήκες του σημείου B από την διέλευση του κρουστικού κύματος, που αντιστοιχούν στην διέγερση της. Στη συνέχεια αρχίζει η αντίδραση της και η πίεση υποβιβάζεται από το σημείο B στο Γ, που αντιστοιχεί στην πίεση της σταθεράς κατάστασης p_2 του επιπέδου Chapman-Jouquet. Η πίεση στο σημείο B είναι η μέγιστη που αναπτύσσεται κατά την διάρκεια της έκρηξης και αντιστοιχεί στην αιχμή Von Neumann με τιμή διπλάσια της πίεσης έκρηξης p_2. Η διαφορά μεταξύ τους εκφράζει την καταναλισκόμενη ενέργεια για την αυτοδιέγερση της εκρηκτικής ύλης (Τσουτρέλης, 1997).

2.5 Θραύση του Πετρώματος με Χρήση Εκρηκτικών Υλών - Σύντομη Περιγραφή του Φαινομένου

Η αποδοτική χρήση των εκρηκτικών υλών για την θραύση του πετρώματος καθώς και η επίτευξη ανατινάξεων υπό αυστηρά ελεγχόμενες συνθήκες προϋποθέτουν γνώση του μηχανισμού με τον οποίο θραύεται το πέτρωμα υπό την επίδραση των εκρηκτικών υλών. Πρόκειται για ένα σύνθετο μηχανισμό που για περιγραφικούς λόγους μπορεί να θεωρηθεί ότι λαμβάνει χώρα σε δυο διακεκριμένες φάσεις. Η **πρώτη φάση** οφείλεται στο κρουστικό κύμα που δημιουργήθηκε από την έκρηξη και η **δεύτερη φάση**, που δημιουργείται χρονικά από την δράση των αερίων της έκρηξης. Ο διαχωρισμός αυτός σε δυο φάσεις του μηχανισμού θραύσης του πετρώματος δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Και οι δυο φάσεις αποτελούν τμήματα της ίδιας συνάρτησης πίεσης-χρόνου $p = f(t)$, αν ληφθεί υπόψη ότι το πέτρωμα που υποβάλλεται σε πίεση από τα αέρια, γύρω από το θάλαμο της έκρηξης έχει προηγουμένως υποστεί συγκεκριμένες μεταβολές ως αποτέλεσμα της δράσης του κρουστικού κύματος μέσα σε αυτό (Jimeno et al., 1995 και Τσουτρέλης, 2001).

Η παράθεση σε ορισμένες φάσεις της διαδικασίας θραύσης του πετρώματος σε ποσοτικούς χαρακτηρισμούς του μηχανισμού δεν είναι πάντα εφικτό διότι η πειραματική παρακολούθηση του φαινομένου της έκρηξης είναι αρκετά δύσκολη διαδικασία λόγω της ανάπτυξης, για βραχύτατο χρονικό διάστημα ενός ισχυρού εντατικού πεδίου γύρω από τον θάλαμο της έκρηξης. Το πρόβλημα γίνεται ακόμα πιο δύσκολο διότι, τόσο οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των εκρηκτικών υλών που καθορίζουν την επίδραση της σε κάθε μια από τις δυο φάσεις θραύσης, όσο και οι μηχανικές και δομικές ιδιότητες των πετρωμάτων οι οποίες προσδιορίζουν την εξορυξιμότητα τους με την χρήση των εκρηκτικών, κυμαίνονται ευρύτατα με αποτέλεσμα να δημιουργούνται περίπλοκες συνθήκες που καθιστούν δυσχερή την εξαγωγή αριθμητικών δεδομένων.

Στο σημείο αυτό διευκρινίζεται ότι από ενεργειακής πλευράς, η ενέργεια που περιέχεται στην κρουστική φάση της έκρηξης μιας εκρηκτικής ύλης είναι ποσοτικώς πολύ μικρότερη της ενέργειας που περιέχεται στην ωστική φάση που ακολουθεί, χωρίς να μπορεί να διατυπωθεί με βεβαιότητα ότι και το αποδιδόμενο έργο είναι πραγματικά ανάλογο των διατιθέμενων σε κάθε φάση ποσών ενέργειας (Τσουτρέλης, 2001).

2.6 Κρουστική Φάση

Όταν μια εκρηκτική ύλη διεγείρεται μέσα σε ένα διάτρημα, η χημική αντίδραση που προκαλείται διαδίδεται με ταχύτητα 3000-6000 m/s ανάλογα με τον τύπο του εκρηκτικού, την πυκνότητα γόμωσης και την διάμετρο του διατρήματος. Στην ζώνη αντίδρασης η πίεση έκρηξης για διαρρηκτικές εκρηκτικές ύλες με πληρότητα γόμωσης θαλάμου έκρηξης 100% κυμαίνεται από 0.5-20 GPa, ενώ σε πιο συνήθη εκρηκτικά μεταξύ 0.5-10 GPa. Η θερμοκρασία μπορεί να φτάσει μέχρι 3000-4000 ^{0}K. Σε αυτή την περίπτωση το τοίχωμα (πέτρωμα) που περιβάλλει τον θάλαμο έκρηξης υποβάλλεται σε μια δυναμική καταπόνηση, κατά τον χρόνο διέλευσης της αντίδρασης, που είναι της τάξης των μερικών δεκάδων μέχρι μερικών εκατοντάδων (μsec) και είναι ανάλογος με τα χαρακτηριστικά της εκρηκτικής ύλης και του πετρώματος. Σε αυτό το σημείο δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να συγχέεται η πίεση έκρηξης (detonation pressure) με την πίεση στα τοιχώματα του θαλάμου του διατρήματος (borehole pressure). Για την εύρεση της πίεσης στα τοιχώματα του διατρήματος θα γίνει ειδική αναφορά στη συνέχεια (Αγιουτάντης, 1996).

Στην εντατική κατάσταση που υποβάλλεται το πέτρωμα κατά την έκρηξη μιας ποσότητας εκρηκτικής ύλης μέσα σε αυτό ή στην επιφάνεια του οφείλεται η θραύση κατά την κρουστική φάση. Είναι γνωστό ότι οι πολύ διαρρηκτικές εκρηκτικές ύλες, στις οποίες σημαντικό μέρος της ενέργειας τους περιέχεται στην κρουστική φάση, είναι οι πλέον κατάλληλες για εξόρυξη σκληρών και συνεκτικών πετρωμάτων. Το ANFO, του οποίου το κρουστικό κύμα είναι σχετικά ασθενές, το περισσότερο μέρος της ενέργειας του περιέχεται στην ωστική φάση και είναι κατάλληλο για ενδιάμεσα, πορώδη και ρωγματωμένα πετρώματα. Οι παρατηρήσεις αυτές έχουν οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι οι καλύτερες συνθήκες μετάδοσης της κρουστικής ενέργειας που εκλύεται κατά την εκρηκτική αντίδραση ενός εκρηκτικού στο πέτρωμα, επιτυγχάνονται όταν ισχύει η σχέση 2.1 (Τσουτρέλης, 2001):

$$\rho_e D = \rho c_p \tag{2.1}$$

Από την σχέση 2.1 προκύπτει ότι οι βέλτιστες συνθήκες μετάδοσης της κρουστικής ενέργειας επιτυγχάνονται όταν το γινόμενο πυκνότητας εκρηκτικού (ρ_e) και ταχύτητα έκρηξης αυτού (D) εξισωθεί με το γινόμενο πυκνότητας πετρώματος (ρ) και ταχύτητας διάδοσης του διαμήκους ηχητικού κύματος σε αυτό (c_ρ). Το γινόμενο της πυκνότητας επί την ταχύτητα διάδοσης του κύματος σε ένα υλικό αποδίδεται και με τον όρο ακουστική

συμβατότητα του υλικού (acoustic impendance) από πλευράς μεταφοράς ενέργειας. Στα πετρώματα κυμαίνεται μεταξύ 3-16x10^6 kg.m^{-2}.s^{-1} ενώ στα εκρηκτικά από 1.8-11.6x10^6 kg.m^{-2}.s^{-1}.Η τιμή αυτή στα εκρηκτικά μειώνεται κατά 10-20% σε περίπτωση έναυσης τους με εκρηκτική θρυαλλίδα. Στον πίνακα 2.1 κάποιες ενδεικτικές τιμές του γινομένου αυτού (Τσουτρέλης, 2001).

Πίνακας 2.1: Τιμές ακουστικής συμβατότητας εκρηκτικών, πετρωμάτων και υλικών (Τσουτρέλης, 2001)

Εκρηκτικές Ύλες		Πετρώματα και Υλικά	
Είδος	$\rho_e.D$ **(kg.m^{-2}.s^{-1})**	**Είδος**	$\rho.c_p$ **(kg.m^{-2}.s^{-1})**
ANFO	2.9	Βασάλτης	15.4
Ζελατίνη	11.6	Γρανίτης	11.2
Ζελατινοδυναμίτιδα	8	Ψαμμίτης	5.8
Δυναμίτιδα	4.6	Μάργα	2.2
Αμμωνίτιδα	3.8	Ασβεστόλιθος	5
X	X	Σκυρόδεμα	10.2
X	X	Νερό	1.4
X	X	Αέρας	0.006

Το συμπέρασμα που εξάγεται για την σχέση 2.1 προκύπτει από την θεωρία της ελαστικότητας που καθορίζει ότι, όταν ένα κύμα προσκρούσει σε μια διεπιφάνεια, τότε για κάθετη πρόσπτωση η μεταδιδόμενη τάση του κύματος στο άλλο μέσο δίδεται από την σχέση (Τσουτρέλης, 2001):

$$\sigma_t = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}\sigma_1 \qquad (2.2)$$

όπου σ_t :μεταδιδόμενη τάση του κύματος στο μέσο 2,

σ_1: τάση στο μέσο 1 την στιγμή της πρόσπτωσης (σ_1= πίεση έκρηξης p_d),

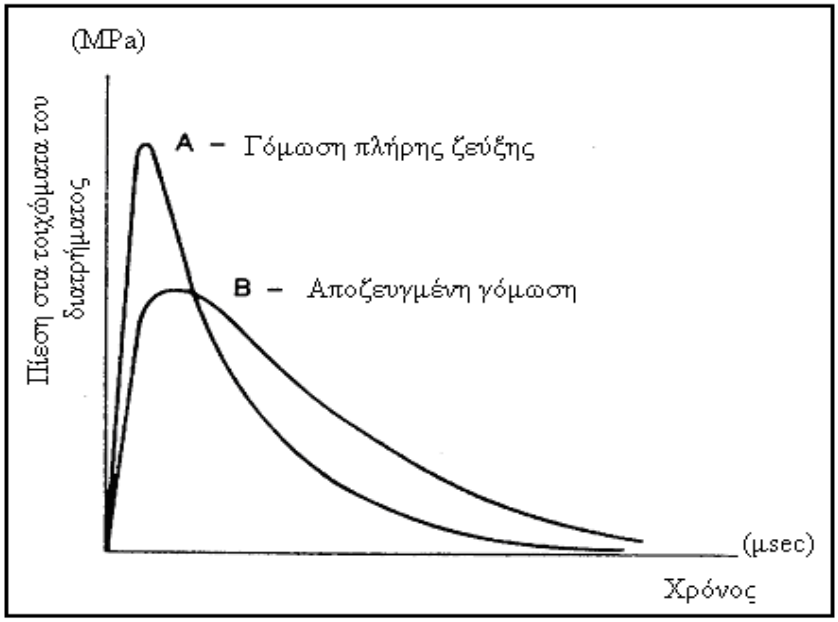
ρ_1,ρ_2: πυκνότητες υλικών (ρ_1= γόμωσης, ρ_2= πετρώματος),

c_1,c_2: ταχύτητες διάδοσης του ηχητικού κύματος (c_1 = D, c_2 = c_p)

Η άποψη αυτή είναι αμφιλεγόμενη διότι πειραματικά δεδομένα δείχνουν ότι δεν ισχύει ακριβώς η ελαστική σχέση 2.2 για περιπτώσεις πολύ έντονων κρουστικών φαινομένων διάρκειας (μsec). Αργότερα καθώς το κρουστικό κύμα απομακρύνεται από την διεπιφάνεια του θαλάμου έκρηξης-πετρώματος και αρχίζει να διαδίδεται μέσα στο πέτρωμα συνεχίζει να μειώνεται ή ένταση του και μετατρέπεται σταδιακά σε πραγματικό ελαστικό θλιπτικό κύμα τύπου P (Τσουτρέλης, 2001).

2.6.1 Αποζευγμένη γόμωση

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια πλήρης αναφορά για την αποζευγμένη γόμωση (decoupled charge). Με τον όρο αποζευγμένη γόμωση θεωρείται η γόμωση όπου η διάμετρος της εκρηκτικής ύλης d_1 είναι πολύ μικρότερη από την διάμετρο του διατρήματος d_2. Ο λόγος d_1/d_2 καλείται και λόγος ζεύξης (coupling ratio) και εκφράζεται σε ποσοστό (%). Ο αντίστροφος λόγος d_1/d_2 καλείται λόγος απόζευξης (decoupling ratio) Αποτέλεσμα αυτού, ο λόγος ζεύξης $\Delta = d_1/d_2$ να είναι μικρότερος από τη μονάδα και ανάλογα με την περίπτωση να κυμαίνεται από 10-70%. Η εκρηκτική ύλη είναι συσκευασμένη σε φυσίγγια. Η αποζευγμένη γόμωση αποσκοπεί στην μείωση της πίεσης που θα ασκηθεί στο τοίχωμα του διατρήματος κατά την έκρηξη με παρεμβολή διάκενου αέρα. Στο σχήμα 2.4 φαίνεται το προφίλ πίεσης πάνω στα τοιχώματα του διατρήματος συναρτήσει του χρόνου για αποζευγμένη γόμωση καθώς και γόμωση σε πλήρη ζεύξη (Τσουτρέλης, 1997).



Σχήμα 2.4: Πίεση πάνω στα τοιχώματα διατρήματος για αποζευγμένη και σε πλήρη ζεύξη γόμωση (Jimeno et al., 1995)

Όπως έχει αναφερθεί, η μείωση αυτή μπορεί να εκφραστεί με την εμπειρική σχέση (Crosby and Bauer, 1982):

$$p_{dc} = p_d \Delta^{2.6} \tag{2.3}$$

Όπου p_{dc}: πίεση έκρηξης που αναπτύσσεται στο τοίχωμα του διατρήματος με αποζευγμένη γόμωση, p_d: κανονική πίεση έκρηξης που θα αναπτυχθεί στο τοίχωμα από την ίδια εκρηκτική ύλη όταν ο βαθμός ζεύξης είναι 100%, Δ: λόγος ζεύξης. Κατά τους ίδιους ερευνητές στην περίπτωση διακεκομμένης γόμωσης, η σχέση 2.3 τροποποιείται:

$$p_{dc} = p_d [\sqrt{c}\ \Delta]^{2.6} \tag{2.4}$$

όπου c = το ποσοστό της εκρηκτικής ύλης που έχει γομωθεί (Τσουτρέλης, 2001).

Η αποζευγμένη γόμωση χρησιμοποιείται στην ελεγχόμενη ανατίναξη, σε υπαίθριες και υπόγειες ανατινάξεις, όπου το περιβάλλον πέτρωμα πρέπει να προστατευτεί από την έκρηξη (ρωγματώσεις) προκειμένου να διατηρήσει στο μέγιστο δυνατό τα αρχικά του μηχανικά χαρακτηριστικά. Ο τύπος του εκρηκτικού που χρησιμοποιείται είναι της οικογένειας των δυναμιτών με διαμέτρους 11-30 mm. Εκτεταμένη χρήση της αποζευγμένης γόμωσης γίνεται επίσης στην εξόρυξη διακοσμητικών λίθων (μάρμαρα-γρανίτες). Ο τύπος του εκρηκτικού που χρησιμοποιείται είναι πυρίτιδα ή εκρηκτική θρυαλλίδα. Για τις ελεγχόμενες ανατινάξεις θα γίνει αναφορά στη συνέχεια.

2.6.2 Πίεση στα τοιχώματα του διατρήματος

Η πίεση πάνω στα τοιχώματα περιγράφει το έργο του εκρηκτικού που αναπτύσσεται κατά την διαδικασία θραύσης του πετρώματος και αντιστοιχεί στην πίεση πίσω από την ζώνη αντίδρασης. Αυτό το δεδομένο δείχνει απευθείας την μεταφορά της εκρηκτικής ενέργειας στο πέτρωμα και είναι συνάρτηση της αποδοτικότητας του εκρηκτικού. Έτσι είναι η σημαντικότερη πληροφορία στην αξιολόγηση απόδοσης του εκρηκτικού και στην πρόβλεψη των αποτελεσμάτων μιας ανατίναξης. Παρόλη την σημαντικότητα αυτής της παραμέτρου, απευθείας μέτρηση της δεν μπορεί να γίνει εύκολα λόγω της απώλειας της ορατότητας. Υπάρχουν όμως διάφορες εμπειρικές σχέσεις ή θεωρίες εκρήξεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να την υπολογίσουν. Όμως η ακρίβεια τέτοιων εκτιμήσεων παραμένει άγνωστη (Αγιουτάντης, 1996).

2.6.2.1. Προσδιορισμός πίεσης έκρηξης και πίεσης στα τοιχώματα του διατρήματος με την θεωρία της ιδανικής ανατίναξης

Η ιδανική έκρηξη θεωρεί ότι η ροή είναι μονοδιάστατη. Θεωρείται επίσης ότι η ταχύτητα έκρηξης που επιτυγχάνεται είναι ίση προς την μέγιστη θεωρητική ταχύτητα αντίδρασης της εκρηκτικής ύλης. Το επίπεδο μέτωπο έκρηξης είναι μια ασυνεχής απότομη αλλαγή. Η χημική αντίδραση της έκρηξης είναι πλήρης και ο παλμός που παράγεται από αυτήν είναι σταθερός και ανεξάρτητος από τον χρόνο. Το κριτήριο ιδανικής έκρηξης απαιτεί μια σταθερή λύση, το σημείο cj. Η σχέση που δίνει την πίεση είναι:

$$p_{cj} = \frac{\rho_o D_{cj}^2}{\gamma + 1} \tag{2.5}$$

όπου P_{cj}: πίεση έκρηξης (Pa) ,D_{cj}: ταχύτητα έκρηξης (m/s), ρ_o: πυκνότητα του εκρηκτικού που δεν αντέδρασε (kg/m^3) και γ: λόγος ειδικής θερμότητας (Esen et al., 2003)

Η πίεση στα τοιχώματα είναι η πίεση από τα αέρια της έκρηξης που διαδίδονται στον αρχικό όγκο του διατρήματος. Είναι ίση με την πίεση των προϊόντων της αντίδρασης μετά την ολοκλήρωση της σε σταθερό όγκο. Η πίεση στα τοιχώματα είναι θεωρητικά το 45% της πίεσης έκρηξης θεωρώντας πλήρη αντίδραση στο μέτωπο έκρηξης. Δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί διότι για μια μη ιδανική ανατίναξη, ο χρόνος ολοκλήρωσης της αντίδρασης μπορεί να αυξηθεί σε περίοδο μέσα σε μεγάλα διατρήματα. Σύμφωνα με τον Persson η πίεση στα τοιχώματα P_b (Pa), για διάτρημα σε πλήρη ζεύξη (100%) εκτιμάται (Esen et al., 2003):

$$p_b = \frac{p_{cJ}}{2} \tag{2.6}$$

2.6.2.2. Προσδιορισμός της πίεσης έκρηξης και πίεσης στα τοιχώματα με την θεωρία της μη ιδανικής ανατίναξης

Έχει διαπιστωθεί ότι τα εμπορικά εκρηκτικά παρουσιάζουν μη ιδανική συμπεριφορά αφού η ταχύτητα έκρηξης εξαρτάται από την διάμετρο της γόμωσης και τον περιορισμό του εκρηκτικού. Δηλαδή η μη ιδανική έκρηξη θεωρεί ότι η ταχύτητα που επιτυγχάνεται είναι μικρότερη από την ιδανική έκρηξη. Η θεωρία της μη ιδανικής ανατίναξης εξηγείται από την δισδιάστατη θεωρία ανατίναξης. Πολλοί ερευνητές έχουν προτείνει διάφορα μοντέλα. Αναφέρεται το μοντέλο του Esen για την πρόβλεψη της

απόδοσης του εκρηκτικού καθώς και την πίεση πάνω στα τοιχώματα. Ο Esen εισάγει στο μοντέλο του την θερμότητα μιας πλήρης αντίδρασης και την ταχύτητα έκρηξης, οι οποίες δυο παράμετροι υπολογίζονται με βάση την θεωρία της ιδανικής ανατίναξης. Άλλες παράμετροι που εισάγονται στο μοντέλο είναι η πυκνότητα του εκρηκτικού, η διάμετρος γόμωσης, το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας και ο δυναμικός λόγος Poisson. Το μοντέλο χρησιμοποιεί πειραματικές τιμές ταχύτητας έκρηξης και διαμέτρους γόμωσης για συγκεκριμένο εκρηκτικό. Προσδιορίζεται ένα διάγραμμα πίεσης – όγκου και με βάση την εξίσωση (Esen et al., 2003):

$$p = \frac{\frac{1}{2}(D^2 - u^2) + q_n(10^6)}{V\left(\frac{1}{(\gamma - 1) + 1}\right)} \tag{2.7}$$

όπου P: πίεση (Pa), D: Ταχύτητα έκρηξης με βάση την θεωρία της μη ιδανικής ανατίναξης (m/s), u: ταχύτητα των σωματιδίων (m/s), V: ειδικός όγκος (kg/m^3), γ: λόγος ειδικής θερμότητας, q_n: θερμότητα πλήρης αντίδρασης (MJ/kg). Η πίεση έκρηξης υπολογίζεται όταν ο λόγος των όγκων $V/V_0 = 1$ όπου $V_o = 1/\rho_o$. Το μοντέλο έδειξε ότι προσεγγίζει την ταχύτητα έκρηξης σε πολύ λογικές τιμές. Η πίεση στα τοιχώματα δίδεται από την σχέση (Esen et al., 2003):

$$(p_b)_{de} = p_b\left(\sqrt{C\frac{r_e}{r_b}}\right)^a \tag{2.8}$$

όπου $(P_b)_{dc}$: πίεση στα τοιχώματα του διατρήματος με αποζευγμένη γόμωση (Pa), P_b: πίεση στα τοιχώματα (Pa), C: το ποσοστό του διατρήματος που είναι γομωμένο. Το C είναι επίσης ένας συντελεστής $C = 1.r_e$ που είναι η ακτίνα γόμωσης, r_b: η ακτίνα του διατρήματος (mm), α: είναι μια σταθερά που παίρνει τις τιμές 2, 2.4, 2.6 (Atlas Powder co., 1987).

Άλλοι ερευνητές αναφέρουν πειραματικά αποτελέσματα από slurries με πίεση έκρηξης 38 και 50 kbar, μετρήθηκαν πιέσεις στα τοιχώματα 19 και 25 kbar. Σε ANFO με πίεση έκρηξης 34 kbar, μετρήθηκε πίεση στα τοιχώματα 18 kbar. Η πίεση που αναπτύσσεται πάνω στο τοίχωμα είναι 1/3-1/4 μικρότερη από την πίεση έκρηξης ανάλογα

με τις ιδιότητες του εκρηκτικού και του πετρώματος. Αξίζει να αναφέρουμε ότι οι παραπάνω ερευνητές δεν αναφέρουν μαθηματικό υπολογισμό της πίεσης πάνω στα τοιχώματα. Μια καλή εκτίμηση είναι να θεωρηθεί ότι η αναπτυσσόμενη πίεση στο τοίχωμα του θαλάμου είναι της τάξης του 50 % της πίεσης έκρηξης. Αξίζει να αναφέρθει ότι οι ερευνητές αυτοί υπολογίζουν ικανοποιητικά την πίεση έκρηξης από την σχέση (Τσουτρέλης, 2001):

$$p_d = \frac{\rho_e D^2}{4} [kPa] \tag{2.9}$$

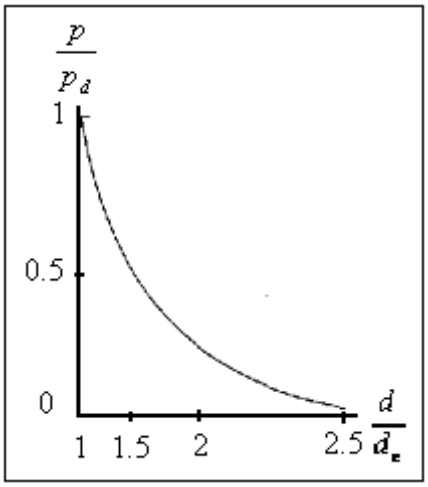
όπου ρ_e: πυκνότητα εκρηκτικής ύλης σε g/cm^3 και D: ταχύτητα έκρηξης σε m/sec

Με βάση το σχήμα 2.5, η πίεση που θα ασκηθεί στο τοίχωμα του θαλάμου είναι αρκετά μικρότερη από την πίεση έκρηξης λόγω της παρεμβολής διάκενου αέρα μεταξύ της ζώνης αντίδρασης και του τοιχώματος. Το διάκενο αυτό προκαλεί στα μόρια που προήλθαν από την χημική αντίδραση του εκρηκτικού, απώλεια κινητικής ενέργειας με αποτέλεσμα να προσκρούουν στο περιβάλλον τοίχωμα με μικρότερη ταχύτητα.

Η μαθηματική διατύπωση της καμπύλης του σχήματος 2.5 δίδεται από την σχέση (Berta, 1990):

$$n_1 = \frac{1}{e^{\frac{d}{d_e}} - (e-1)} \tag{2.8}$$

όπου η_1: λόγος p/p_d (πίεση τοιχωμάτων προς πίεση έκρηξης), e: 2.72, d: διάμετρος διατρήματος, d_e: διάμετρος εκρηκτικού



Σχήμα 2.5: Μεταβολή ασκούμενης πίεσης στα τοιχώματα σε συνάρτηση με τον βαθμό απόζευξης της γόμωσης (Τσουτρέλης, 2001)

Η πίεση έκρηξης που θα ασκηθεί στο τοίχωμα του διατρήματος στην περίπτωση αποζευγμένης γόμωσης δίδεται από την εμπειρική σχέση:

$$p = p_d \Delta^{2.6} \tag{2.11}$$

όπου Δ: λόγος ζεύξης.

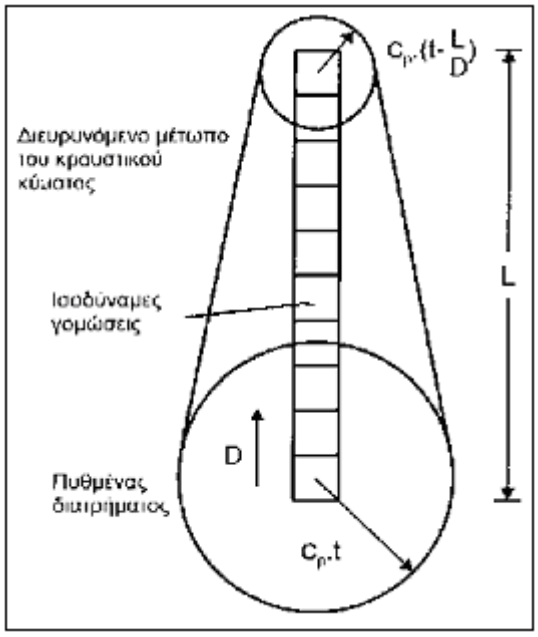
2.6.3 Ελαστικά μοντέλα αλληλεπίδρασης εκρηκτικού-πετρώματος

Η έκρηξη ενός εκρηκτικού σε έναν υπόνομο αντιστοιχεί σε δυναμική φόρτιση πάνω στα τοιχώματα του διατρήματος. Η πίεση που αναπτύσσεται σε κάθε σημείο του τοιχώματος από την άσκηση της πίεσης έκρηξης κατά την διέλευση του μετώπου της εκρηκτικής αντίδρασης του εκρηκτικού, θα διοχετευτεί στη συνέχεια στο περιβάλλον πέτρωμα υπό μορφή θλιπτικού τασικού κύματος (compressive stress wave) με ταχύτητα διάδοσης του ηχητικού κύματος στο πέτρωμα. Παράλληλα η πίεση στο τοίχωμα (p_b) από την αρχική τιμή της θα μειωθεί απότομα μετά την διέλευση του μετώπου της εκρηκτικής αντίδρασης λόγω αξονικής και πλευρικής διόγκωσης του θαλάμου. Η μείωση αυτή ακολουθεί προσεγγιστικά την σχέση (Brady και Brown, 1994):

$$p_t = p_b e^{-\beta t} \tag{2.12}$$

όπου p_t: Στιγμιαία τιμή της πίεσης στο τοίχωμα του διατρήματος μετά από χρόνο t από τότε που σημειώθηκε η μέγιστη τιμή πίεσης στο τοίχωμα p_b, β: σταθερά.

Η σχέση 2.12 είναι γνωστή και ως η σχέση του Sharpe. Ισχύει για την περίπτωση σφαιρικής γόμωσης, ενώ στην εξόρυξη οι γομώσεις είναι κυλινδρικές και η έκρηξη λαμβάνει χώρα σταδιακά σε όλες τις περιπτώσεις από το ένα άκρο στο άλλο. Λύση στο πρόβλημα της κυλινδρικής γόμωσης πρότειναν οι Starfield και Pugliese (1968) θεωρώντας ότι η κυλινδρική γόμωση μπορεί να χωριστεί σε διακριτά συνεχόμενα στοιχεία, κάθε ένα από το οποίο απεικονίζει μια ισοδύναμη σφαιρική γόμωση. Από όλα όσα έχουν αναφερθεί παραπάνω, προκύπτει το μοντέλο του σχήματος 2.3 το οποίο περιγράφει ικανοποιητικά την διάδοση του κρουστικού κύματος που προήρθε από κυλινδρική γόμωση (Brady και Brown, 1994).



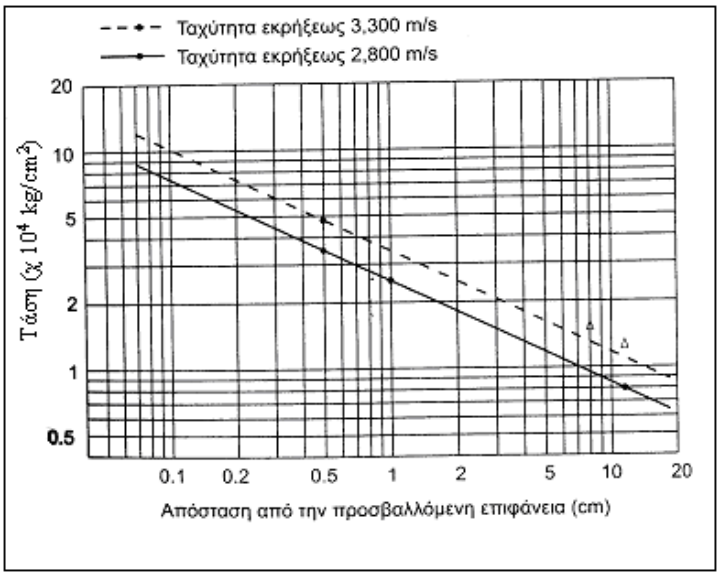
Σχήμα 2.6: Μοντέλο έκρηξης και διάδοσης κρουστικού κύματος στο πέτρωμα για κυλινδρική γόμωση (Brady και Brown, 1994)

Όταν γίνεται η έναυση στον πυθμένα του διατρήματος ισχύει :

$$D = 2c_p \tag{2.13}$$

Η γωνία του κώνου του κρουστικού κύματος που σχηματίζεται με τον άξονα του διατρήματος εξαρτάται από τα σχετικά μεγέθη της ταχύτητας έκρηξης (D) και της ταχύτητας διάδοσης του κρουστικού κύματος εντός του πετρώματος (c_p), η οποία σε σκληρά πετρώματα κυμαίνεται από 4000-5000m/sec. Στην περίπτωση ανατίναξης σε τέτοιου είδους πετρώματα με εκρηκτικό χαμηλής ισχύος, τότε το κρουστικό κύμα μπορεί να έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από την ταχύτητα έκρηξης και να προηγηθεί, εξαναγκάζοντας το πέτρωμα γύρω από το διάτρημα σε συνθήκες προέντασης (Brady και Brown, 1994).

Το κρουστικό κύμα που δημιουργήθηκε στο τοίχωμα του διατρήματος από την πρόσκρουση των μορίων των προϊόντων της χημικής αντίδρασης, διαδίδεται στην συνέχεια μέσα στη μάζα του πετρώματος. Λόγω της διαρκώς διευρυνόμενης επιφάνειας που καλύπτει χωρίς προσθήκη νέας ενέργειας και λόγω της εσωτερικής αντίστασης του πετρώματος, η ένταση του μειώνεται με εκθετικό τρόπο όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7 σε συνάρτηση με την απόσταση από το σημείο γένεσης του κύματος (Τσουτρέλης, 2001).



Σχήμα 2.7: Μεταβολή της έντασης του διαδιδόμενου στο πέτρωμα κρουστικού κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση από το σημείο έκρηξης (Τσουτρέλης, 2001)

Ισχύει η σχέση (Τσουτρέλης, 2001):

$$p_r = p_b \left(\frac{a}{r} \right)^n \quad \gamma\iota\alpha \quad r \succ a \tag{2.14}$$

όπου p_r: μέγιστη τάση του θλιπτικού κύματος εντός του πετρώματος και σε απόσταση r από το κέντρο του θαλάμου έκρηξης, p_b: μέγιστη τιμή της πίεσης του εκρηκτικού κύματος που μεταδόθηκε στο τοίχωμα του θαλάμου έκρηξης, α: ακτίνα του θαλάμου έκρηξης, η: συντελεστής απόσβεσης.

Ο συντελεστής απόσβεσης είναι συνάρτηση των ιδιοτήτων του πετρώματος και των εκρηκτικών υλών. Λαμβάνει τις τιμές μεταξύ 1.3-2 για κυλινδρικές γομώσεις και συνήθη εκρηκτικά στην εξόρυξη (ANFO-Slurries). Στον πίνακα 2.2 δίνονται μερικές τιμές της μέγιστης πίεσης έκρηξης και του συντελεστή απόσβεσης όπως προέκυψαν από πειραματικές δοκιμές σε διάφορα πετρώματα με δυο είδη εκρηκτικά (Magnafrac 1000 και ANFO). [Το Magnafrac 1000 είναι εκρηκτικό της οικογένειας των γαλακτωμάτων]

Η διάδοση του κρουστικού κύματος που προέρχεται από την έκρηξη βάζει το περιβάλλον πέτρωμα σε ισχυρή δυναμική εντατική κατάσταση, που σαν συνέπεια αυτής το πέτρωμα θραύεται σύμφωνα με τους τρόπους που θα αναπτυχθούν στη συνέχεια (Τσουτρέλης, 2001).

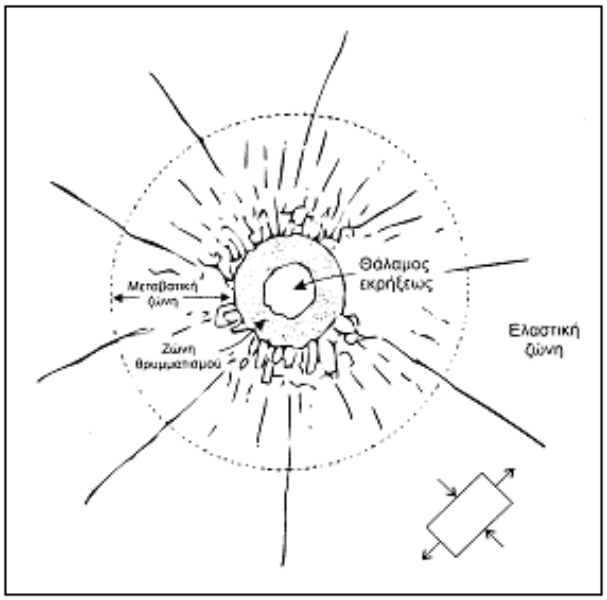
Πίνακας 2.2:Τιμές πίεσης έκρηξης που μεταδόθηκε στο τοίχωμα του θαλάμου έκρηξης και του συντελεστή απόσβεσης (Τσουτρέλης, 2001).

Υλικό	Magnafrac 1000		ANFO	
	P_b (kbar)	n	P_b (kbar)	n
Ασβεστόλιθος	54.2	1.52	26.4	1.35
Γρανίτης	49	1.77	24	1.56
Αργιλικός Σχιστόλιθος	52.3	1.5	25.8	1.34
Σκυρόδεμα	37.6	1.79	19.3	1.6

2.6.4 Θραύση του πετρώματος γύρω από τον θάλαμο έκρηξης

Γύρω από τον θάλαμο έκρηξης σχηματίζονται τρεις ζώνες θραύσης. Ξεκινώντας από το κέντρο του διατρήματος αυτές είναι (Τσουτρέλης, 2001):

- Ζώνη θρυμματισμού ή ζώνη σύνθλιψης (crushing zone)
- Μεταβατική ζώνη (Transient zone)
- Ελαστική ζώνη (Elastic-seismic zone)



Σχήμα 2.8: Ζώνες θραύσης του πετρώματος γύρω από τον θάλαμο έκρηξης (Τσουτρέλης, 2001)

2.6.4.1 Ζώνη θρυμματισμού

Στη ζώνη θρυμματισμού που αρχίζει από το τοίχωμα του θαλάμου της έκρηξης, η μεγάλη ένταση του κρουστικού κύματος υπερβαίνει κατά πολύ την δυναμική αντοχή του πετρώματος σε θλίψη. Η δυναμική αντοχή του πετρώματος γύρω από τον θάλαμο της έκρηξης αναφέρεται σε τριαξονικές συνθήκες επειδή βρίσκεται σε περιοριστικές συνθήκες γύρω από την μάζα του πετρώματος. Το πέτρωμα σε αυτή τη ζώνη θραύεται κατά ένα περίπλοκο τρόπο που οδηγεί τελικά σε λεπτομερή θρυμματισμό του (μυλονίτη). Η οποιαδήποτε αντοχή του πετρώματος μέσα στη ζώνη αυτή δεν παίζει κανένα ρόλο λόγω της μεγάλης έντασης του κρουστικού κύματος. Για τον λόγο αυτό το πέτρωμα θεωρείται ότι συμπεριφέρεται σαν ρευστό. Το πάχος ανάπτυξης της ζώνης αυτής που αυξάνει με την πίεση έκρηξης (POD) και τον λόγο ζεύξης μπορεί να φτάσει μέχρι 8 φορές την διάμετρο του διατρήματος για πολύ διαρρηκτικές εκρηκτικές ύλες σε πορώδη πετρώματα (Τσουτρέλης, 2001).

Κάποιοι ερευνητές θεωρούν ότι η ακτίνα της ζώνης αυτής (r_c) είναι της τάξης του διπλάσιου της ακτίνας (α) του θαλάμου έκρηξης. Αναφέρουν ότι η ζώνη αυτή έχει πάχος μέχρι δυο φορές από την διάμετρο του διατρήματος. Υποστηρίζουν ότι στη θραύση σε αυτή την ζώνη καταναλώνεται το 30% της μεταφερόμενης κρουστικής ενέργειας στο πέτρωμα, ενώ από πλευρά ποσότητας θραύσης του πετρώματος σε μια κανονική ανατίναξη είναι μόνο το 0.1 % του συνολικού όγκου εξόρυξης ανά υπόνομο (Brady και Brown, 1994).

Στην συνέχεια γίνεται μια σύντομη ανάπτυξη σε κάποια μοντέλα που έχουν προταθεί για την πρόβλεψη της διεύρυνσης της ζώνης θρυμματισμού, τα οποία θεωρούν ιδανική ανατίναξη και η πρόβλεψη γίνεται με ημί-εμπειρικές σχέσεις.

- **Θεώρηση σύμφωνα με Il'yushin και Vovk et al**.

Οι Il'yushin, 1999 και Vovk et al, 1993 θεωρούν την συμπεριφορά του υλικού στη ζώνη σύνθλιψης ισότροπη, ασυμπίεστο κοκκώδες μέσο με συνεκτικότητα. Η ακτίνα της ζώνης θρυμματισμού δίδεται από την σχέση:

$$r_c = r_0 \left(\frac{p_d}{-(\frac{k}{f}) + [\sigma_c + (\frac{k}{f})] L^{2f/(1+f)}} \right)^{\frac{1}{2y}} \sqrt{L} \quad [mm] \qquad (2.15)$$

όπου

$$L = \frac{\frac{E}{(1+u)}}{\sigma_c[1+\ln(\frac{\sigma_c}{T})]} \tag{2.16}$$

με r_o: ακτίνα διατρήματος (mm), P_b: πίεση στα τοιχώματα (Pa), γ: σταθερά αδιαβατικής διάδοσης του εκρηκτικού, κ: συνεκτικότητα (Pa), f: συντελεστής εσωτερικής τριβής, σ_c: αντοχή σε μονοαξονική θλίψη (Pa), T: ελαστική τάση (Pa), E: μέτρο του Young (Pa), v: λόγος Poisson.

Η πίεση στα τοιχώματα του διατρήματος δίδεται από την σχέση 2.6. Το μοντέλο αυτό υστερεί στα αέρια που είναι και ο κύριος μηχανισμός αστοχίας. Έχει εφαρμογή σε συνθήκες πολύ σκληρών πετρωμάτων. Δίνει όμως υπερεκτίμηση στην διεύρυνση της ζώνης σύνθλιψης (Esen et al., 2003).

- **Θεώρηση κατά Szuladzinski**

Η μοντελοποίηση της ζώνης θρυμματισμού και των ρωγμών, σύμφωνα με τον Szuladzinski, 1993, γίνεται στην εγγύτερη περιοχή του διατρήματος από απότομη μεταβολή της τάσης με **δυναμική ανάλυση**. Το μοντέλο θεωρείται ελαστικό με ικανότητα θρυμματισμού και ορισμένη δύναμη αστοχίας. Η σχέση που προτάθηκε για την εκτίμηση της ακτίνας της ζώνης σύνθλιψης δίδεται από την σχέση:

$$r_c = \sqrt{\frac{2r_0^2 \rho_0 Q_{ef}}{F_c^{'}}} \quad [mm] \tag{2.17}$$

όπου r_c :ακτίνα ζώνης, r_o: ακτίνα διατρήματος (mm), ρ_o: πυκνότητα εκρηκτικού (g/mm^3), Q_{ef}: ενεργή ενέργεια εκρηκτικού (nmm/g) υποτιθέμενη στα 2/3 της θερμότητας της πλήρους αντίδρασης (nmm/g) και F'_c: δυναμική θλιπτική δύναμη τάση (MPa) που είναι 8 φορές μεγαλύτερη από την στατική τάση σ_c: αντοχή σε μονοαξονική θλίψη (MPa) (Esen et al., 2003).

- **Θεώρηση κατά Djordjevic**

Το μοντέλο που προτάθηκε από τον Djordjevic, 1999, βασίζεται στην θεωρία αστοχίας του Griffith. Η ακτίνα της ζώνης θρυμματισμού δίδεται από την σχέση:

$$r_c = \frac{r_0}{\sqrt{\frac{24T}{p_b}}} \quad [mm] \tag{2.18}$$

όπου r_o: ακτίνα διατρήματος (mm), T: ελαστική τάση (Pa), P_b:πίεση στα τοιχώματα (Pa). Η πίεση στα τοιχώματα του διατρήματος δίδεται από την σχέση 2.6 (Esen et al., 2003).

- **Θεώρηση κατά Kanchibotla et al**.

Το μοντέλο αυτό υπολογίζει την ακτίνα της ζώνης θρυμματισμού σαν συνάρτηση της ακτίνας του διατρήματος, της πίεσης έκρηξης και της αντοχής σε μονοαξονική θλίψη του υλικού, δίδεται από την σχέση (Kanchibotla et al, 1999):

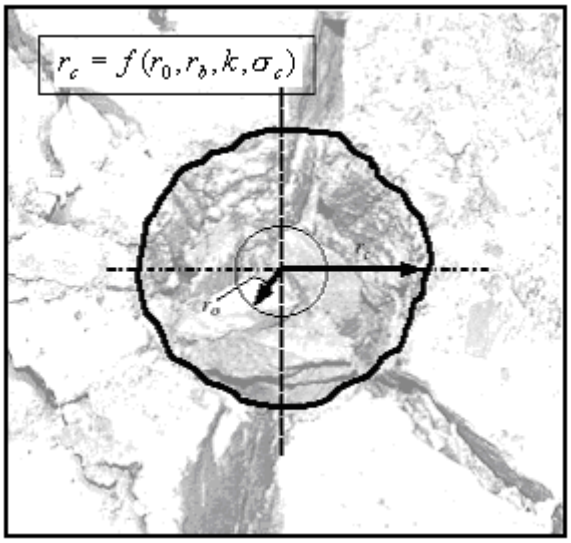
$$r_c = r_0 \sqrt{\frac{p_d}{\sigma_c}} \tag{2.19}$$

όπου r_o: ακτίνα διατρήματος (mm), P_d: πίεση έκρηξης (Pa), σ_c: αντοχή σε μονοαξονική θλίψη (Pa). Η πίεση έκρηξης υπολογίζεται από την σχέση 2.5. Το μοντέλο αυτό δεν είχε σκοπό να δώσει ακριβείς εκτιμήσεις της διεύρυνση της ζώνης θρυμματισμού αλλά να χρησιμοποιηθεί σαν εμπειρικό εργαλείο για να υπολογίζει τον όγκο των λεπτομερών υλικών που παράγονται από την ανατίναξη (Esen et al., 2003).

Γενικά η ακρίβεια των παραπάνω μοντέλων που υπολογίζουν την ακτίνα της ζώνης θρυμματισμού με τις εναύσεις ή τις πιέσεις πάνω στα τοιχώματα σαν δεδομένες παραμέτρους δεν είναι ικανοποιητική διότι η βασική παραδοχή τους είναι η ιδανική συμπεριφορά ανατίναξης. Από την άλλη μεριά οι προσεγγίσεις των δυναμικών τιμών που προέρχονται από στατικές τιμές μπορούν να επηρεάσουν τα αποτελέσματα λόγω έλλειψης δεδομένων. Στις περισσότερες περιπτώσεις η ακτίνα δεν μπορεί να μετρηθεί απευθείας με ακρίβεια και σε ειδικές περιπτώσεις μόνο, τα πειραματικά δεδομένα συμφωνούν με τα μοντέλα.

Το τελευταίο μοντέλο που έχει αναπτυχθεί από τους Esen, Onedera, Bilgin (2003) επιτρέπει την απευθείας μέτρηση της ακτίνας σε κλίμακα μοντέλου. Επιπλέον μια νέα προσέγγιση επιτρέπει την προσέγγιση της πραγματικής συμπεριφοράς της έκρηξης χρησιμοποιώντας μη ιδανικό μοντέλο έκρηξης επιτρέποντας με τον τρόπο αυτό την εκτίμηση της πίεσης στα τοιχώματα σαν συνάρτηση του εκρηκτικού, τις ιδιότητες του

πετρώματος και της διαμέτρου του διατρήματος. Στον προσδιορισμό της ζώνης θρυμματισμού, σημαντική είναι η θλιπτική τάση και η ακαμψία του πετρώματος. Αφού η **διαδικασία είναι δυναμική**, το μοντέλο πρέπει να περιλαμβάνει τις δυναμικές ιδιότητες του πετρώματος. Πολλές από τις δυναμικές αυτές ιδιότητες δεν μπορούν να μετρηθούν απευθείας και δεν υπάρχουν έτοιμες σε πίνακες ή να υπάρχουν κατάλληλοι πολλαπλασιαστές για αναγωγές. Σκοπός του νέου μοντέλου είναι να συνδυάσει και να χρησιμοποιήσει τόσο τις δυναμικές και τις στατικές τιμές που είναι διαθέσιμες. Η διεύρυνση της ζώνης σύνθλιψης (ακτίνα) είναι συνάρτηση του τύπου του εκρηκτικού και των ιδιοτήτων του πετρώματος (Esen et al., 2003).



Σχήμα 2.9: Παράμετροι που επηρεάζουν την διάδοση της ακτίνας ζώνης θρυμματισμού (Esen et al., 2003)

$$r_c = f(r_0, r_b, k.\sigma_c) \tag{2.20}$$

όπου r_o: αρχική ακτίνα του διατρήματος (mm), P_b: πίεσης στα τοιχώματα (Pa) που υπολογίζεται από την θεωρία της μη ιδανικής ανατίναξης, K: η ακαμψία του πετρώματος (Pa), σ_c : αντοχή μονοαξονικής θλίψης (Pa) (Esen et al., 2003).

Με μετρήσεις και προσδιορισμό στατικών και δυναμικών παραμέτρων του πετρώματος εφαρμόζεται διαστατική ανάλυση και προκύπτουν δυο αδιάστατοι δείκτες :

$$\pi_1 = \frac{r_o}{r_c} \tag{2.21}$$

$$\pi_2 = \frac{(p_b)^3}{(k)x\sigma_c^2} \tag{2.22}$$

Οι δείκτες αυτοί ονομάζονται (czi) crushing zone index. Η σχέση μεταξύ αυτών των δεικτών είναι:

$$\frac{r_o}{r_c} = 1.231(czi)^{-0.219} \text{ ή } \rho_c = 0.812 r_o (czi)^{0.219} \tag{2.23}$$

Ο δείκτης (czi) φαίνεται να προσεγγίζει την δυναμική διαδικασία που γίνεται στην ζώνη σύνθλιψης λαμβάνοντας υπόψη την πίεση στα τοιχώματα καθώς επίσης και τις ιδιότητες του πετρώματος και την ακτίνα του διατρήματος.

Παρατήρηση: επειδή είναι αδύνατο ο λόγος μεταξύ της r_o= αρχική ακτίνα του διατρήματος και της ακτίνα της ζώνης σύνθλιψης r_c να είναι μεγαλύτερος του 1, οι παραπάνω σχέσεις περιορίζονται για μικρές τιμές του (czi) <2.6. Αυτές οι τιμές γενικά ανταποκρίνονται σε πολύ μικρές πιέσεις στα τοιχώματα που συνήθως παράγονται πάνω σε τοιχώματα πολύ σκληρών πετρωμάτων από χαμηλής ενεργητικότητας εκρηκτικά (Esen et al., 2003).

2.6.4.2 Μεταβατική ζώνη

Ο χώρος γύρω από την ζώνη σύνθλιψης αποτελεί την μεταβατική ζώνη. Η ζώνη αυτή όπως και η προηγούμενη είναι μικρού πάχους που είναι 4-6 φορές μεγαλύτερο από εκείνο της ακτίνας του θαλάμου της έκρηξης. Στη ζώνη αυτή το πέτρωμα συμπεριφέρεται σαν ένα μη γραμμικό ελαστικό στερεό σώμα, το οποίο υπόκειται σε πολύ έντονες παραμορφώσεις. Νέες ρωγμές δημιουργούνται και διαδίδονται μέσα στη ζώνη αυτή από την διέλευση του κρουστικού κύματος, οι οποίες είναι μεν πολλές σε αριθμό αλλά μικρού μήκους σε τριχοειδής μορφή και σχεδόν ακανόνιστες σε διεύθυνση, με κάποια επικράτηση ακτινικών (Τσουτρέλης, 2001).

Γενικά η θραύση του πετρώματος και σε αυτή τη ζώνη είναι μικρή σε έκταση, διότι η διάδοση μιας ρωγμής γίνεται με ταχύτητα V_t που αντιστοιχεί μόλις στο 10-30 % της ταχύτητας διάδοσης c_p του κρουστικού κύματος στο πέτρωμα. Κατά συνέπεια, γρήγορα η αιχμή του κύματος αλλά και ολόκληρο το κρουστικό κύμα απομακρύνεται από την αιχμή της ρωγμής.

Πίνακας 2.3: Ταχύτητες διάδοσης ρωγμής σε διάφορα υλικά κατά την διέλευση του κρουστικού κύματος εντός αυτών (Τσουτρέλης, 2001).

Υλικό	Ταχύτητα διάδοσης ρωγμής V_t (m/sec)	Ταχύτητα διάδοσης του ήχου c_p (m/sec)	V_t / c_p
Γυαλί	1500	5180	0.289
Ακρυλικό	400	2300	0.174
Γρανίτης	130-230	5500-6000	0.024-0.038
Διαβάσης	245	6260	0.039
Αργιλικός Σχιστόλιθος	580-670	5450-6310	0.106
Ασβεστόλιθος	700-4000	5160-5875	0.136-0.681

Ερευνητές που συγκέντρωσαν στοιχεία από διάφορες πηγές, ο λόγος V_t / c_p κυμαίνεται από 0.020 - 0.681. Στον πίνακα 2.3 δίνονται μερικές χαρακτηριστικές τιμές.

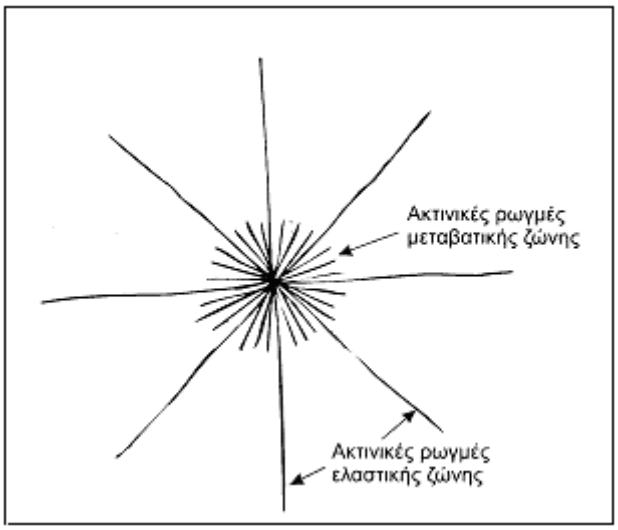
Ένας άλλος σημαντικός λόγος δημιουργίας, στη ζώνη αυτή, περιορισμένου θρυμματισμού είναι η εξασθένηση της έντασης του κρουστικού κύματος καθώς απομακρύνεται από το τοίχωμα του θαλάμου της έκρηξης (σχέση 2.14). Η αντοχή του πετρώματος είναι ουσιαστική στη ζώνη αυτή από ότι η προηγούμενη, αλλά μέχρι το εξωτερικό της όριο, που επέρχεται ισορροπία μεταξύ δυναμικής αντοχής του πετρώματος σε θλίψη και της ακτινικής θλιπτικής συνιστώσας τάσης του κρουστικού κύματος. Η ένταση του κύματος υπερβαίνει την δυναμική αντοχή του πετρώματος σε θλίψη και κατά συνέπεια η θραύση είναι εντονότερη (Τσουτρέλης, 2001).

2.6.4.3 Ελαστική ζώνη

Στην ελαστική ζώνη η κατάσταση που επικρατεί είναι πιο σαφής και ο μηχανισμός θραύσης μπορεί να ερμηνευτεί εφαρμόζοντας την θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας. Η ζώνη αυτή εξ ορισμού αρχίζει από την απόσταση εκείνη από όπου η ένταση της ακτινικής θλιπτικής συνιστώσας του κρουστικού κύματος είναι μικρότερη της δυναμικής αντοχής του πετρώματος σε θλίψη. Η ζώνη αυτή εκτείνεται στο άπειρο αν θεωρηθεί συνεχές υλικό (απεριόριστο) ή αν υπάρχει διακοπή της συνέχειας του υλικού τότε μέχρι το τέλος του. Συνεπώς οποιαδήποτε θραύση παρατηρείται στην ζώνη αυτή θα οφείλεται στην

εφαπτομενική εφελκυστική συνιστώσα της τάσης που δημιουργεί ο ακτινικός κρουστικός θλιπτικός παλμός καθώς περνάει από το πέτρωμα.

Συμπαγής άρρηκτος γρανίτης αστοχεί σε εφελκυσμό όταν δεχτεί ένταση της τάξης των 30 MPa που αντιστοιχεί σε ανηγμένη παραμόρφωση 0.1-0.2%, ενώ ένα πέτρωμα ρωγματωμένο απαιτεί ένταση της τάξης του 1/4 έως του 1/10 της προηγούμενης τιμής για να ρωγματωθεί περισσότερο. Ειδικότερα στο εσωτερικό τμήμα της ζώνης αυτής, το οποίο περιβάλλει την μεταβατική ζώνη, παρατηρείται ο σχηματισμός περιορισμένου αριθμού ακτινικών ρωγμών (radial cracks) συνήθως 4-8. Οι ρωγμές αυτές οφείλονται όπως αναφέρθηκε πιο πριν στην εφελκυστική συνιστώσα της τάσης του κρουστικού κύματος, που επιδράει περιφερειακά όπως φαίνεται στο σχήμα 2.10, και θραύει το πέτρωμα σε εφελκυσμό σχηματίζοντας ακτινικές ρωγμές διότι η αντοχή του πετρώματος σε εφελκυσμό είναι κατά πολύ μικρότερη από την αντοχή σε θλίψη (Τσουτρέλης, 2001).



Σχήμα 2.10: Σχηματισμός ακτινικών ρωγμών γύρω από τον θάλαμο της έκρηξης οφειλόμενες σε εφαπτομενικές εφελκυστικές τάσεις του κρουστικού παλμού (Τσουτρέλης, 2001)

Πειραματικές παρατηρήσεις σε δοκίμια πετρώματος, σκυροδέματος και Plexiglas δείχνουν ότι οι ακτινικές ρωγμές αρχίζουν από το τέλος της μεταβατικής ζώνης και αποτελούν συνέχεια μερικών από εκείνων των μικρορωγμών της μεταβατικής ζώνης που έχουν ακτινικό προσανατολισμό.

Με την αύξηση της απόστασης από τον θάλαμο της έκρηξης και την εξασθένηση της έντασης του κρουστικού κύματος, μειώνεται η εφελκυστική τάση που ασκείται περιφερειακά με συνέπεια οι ακτινικές ρωγμές να μην μπορούν να αναπτυχθούν

περισσότερο. Συνήθως φτάνουν σε μήκος μέχρι 6-8 φορές εκείνου της διαμέτρου του διατρήματος. Η ταχύτητα σχηματισμού είναι της τάξης των 10-30% εκείνης της διάδοσης του κρουστικού κύματος στο πέτρωμα και κατά συνέπεια το κρουστικό κύμα γρήγορα ξεπερνάει την ρωγμή και απομακρύνεται από αυτή. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα αυτή του σχηματισμού είναι ίδια με την ταχύτητα σχηματισμού των ρωγμών στην μεταβατική ζώνη (Τσουτρέλης, 2001).

Η ακτινική ρωγμάτωση θεωρείται από πρακτικής πλευράς ως η κυριότερη μορφή θραύσης του γύρω πετρώματος από τον θάλαμο έκρηξης λόγω του κρουστικού κύματος. Οι ακτινικές ρωγμές εξαρτώνται από (Τσουτρέλης, 2001):

- την αύξηση της έντασης πάνω στο τοίχωμα από την αντίδραση έκρηξης
- τη χαμηλή αντοχή σε εφελκυσμό του πετρώματος
- τη μικρή τιμή του συντελεστή απόσβεσης της σχέσης 2.14

Όλοι αυτοί οι λόγοι οδηγούν σε αύξηση του αριθμού και του μήκους των ακτινικών ρωγμών. Το ποσό της συνολικής ενέργειας η_2 της εκρηκτικής ύλης που μεταφέρεται στο πέτρωμα είναι (Τσουτρέλης, 2001):

- Α) Για λόγο ζεύξης 100%

$$n_2 = 1 - \frac{(l_e - l_r)^2}{(l_e + l_r)^2} \tag{2.24}$$

όπου

$$l_e = \rho_e D \tag{2.25}$$

και

$$l_r = \rho c_p \tag{2.26}$$

- Β) Για αποζευγμένη γόμωση

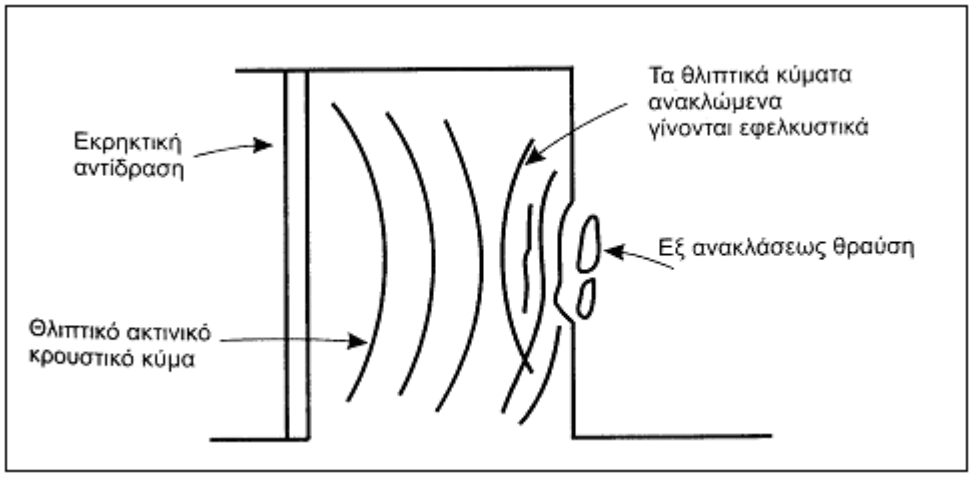
Για την περίπτωση αποζευγμένης γόμωσης το ποσοστό ενέργειας που μεταφέρεται στο πέτρωμα μειώνεται σύμφωνα με την σχέση 2.11.

Πειραματικές μετρήσεις έδειξαν ότι αν 10 kg εκρηκτικής ύλης με ισχύ 4.31 MJ/kg εκραγούν μέσα σε ένα διάτρημα, θα μεταφερθεί ενέργεια στο πέτρωμα 37.06 MJ. Στην περίπτωση που η γόμωση είναι αποζευγμένη με διάμετρο διατρήματος 51mm και διάμετρο εκρηκτικού 44mm θα μεταφερθεί στο πέτρωμα ενέργεια 25.2 MJ. Οι δυο αυτές τιμές επιβεβαιώνουν τα όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω περί έντασης πάνω στα τοιχώματα του θαλάμου έκρηξης (Κατσαμπάνης, 2001).

2.6.5 Θραύση από ανάκλαση

Στην περίπτωση όπου το πέτρωμα γύρω από τον θάλαμο έκρηξης είναι απεριόριστο (περιπτώσεις προ-χαλάρωσης), τότε η προκαλούμενη θραύση και ρωγμάτωση του πετρώματος είναι συνέπεια της δράσης του κρουστικού κύματος και η διαδικασία ολοκληρώνεται με όλα όσα έχουν ήδη αναφερθεί. Στην περίπτωση που το πέτρωμα δεν είναι απεριόριστο (περίπτωση βαθμίδας) γύρω από τον θάλαμο έκρηξης και υπάρχουν ελεύθερες επιφάνειες, τότε σε κάθε μια από αυτές εμφανίζεται μια ιδιόμορφη θραύση που ξεκινάει από έξω προς τα μέσα με τις επιφάνειες θραύσης παράλληλες προς την ελεύθερη επιφάνεια. Η θραύση αυτή είναι γνωστή ως **απολέπιση (spalling)** ή θραύση **κατά πλάκας (slabbing).** Η θραύση αυτή μελετήθηκε εκτενώς από τους Duvall και Atchinson (1957) και θεωρούνται οι πρώτοι που διατύπωσαν την θεωρία της θραύσης του πετρώματος από ανάκλαση (Τσουτρέλης, 2001).

Κατά την θεωρία αυτή, στην περιοχή της ελεύθερης επιφάνειας, όταν αυτή απέχει μικρή απόσταση από τον θάλαμο της έκρηξης, το πέτρωμα θραύεται σε εφελκυσμό που είναι συνέπεια του δημιουργούμενου από την ανάκλαση θλιπτικού κύματος. Ο μηχανισμός αυτός φαίνεται στο σχήμα 2.11. Το κύμα αυτό αν και έχει μέγιστη ένταση πολύ μικρότερη του προσπίπτοντος θλιπτικού κύματος πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, είναι ικανό να θραύσει το πέτρωμα διότι έχει πολύ μικρότερη αντοχή σε εφελκυσμό παρά σε θλίψη (Τσουτρέλης, 2001).



Σχήμα 2.11: Θραύση του πετρώματος λόγω ανάκλασης (Τσουτρέλης, 2001)

Σύμφωνα με την κυματική θεωρία, κατά την διέλευση κυματικού παλμού από ένα υλικό σε ένα άλλο, μέρος του κυματικού παλμού ανακλάται και μέρος διέρχεται στο άλλο

υλικό. Για την απλουστευμένη περίπτωση της κάθετης πρόσπτωσης ισχύουν οι σχέσεις (Τσουτρέλης, 2001):

$$\sigma_r = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}\sigma \quad ή \quad \sigma_r = \frac{1-n}{1+n}\sigma \tag{2.27}$$

$$\sigma_t = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}\sigma \quad ή \quad \sigma_r = \frac{2n}{1+n}\sigma \tag{2.28}$$

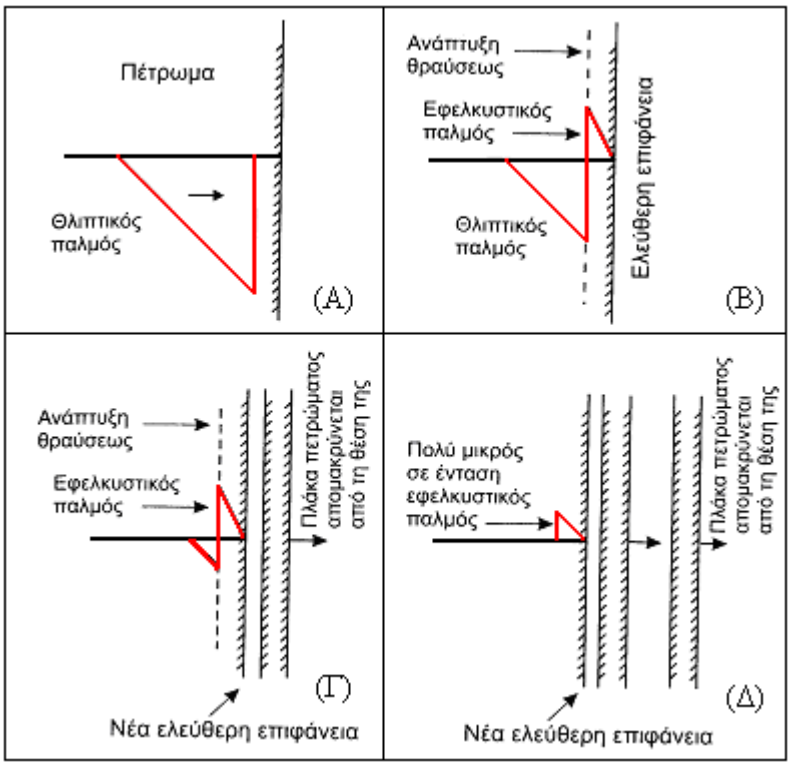
$$n = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \tag{2.29}$$

όπου σ: ένταση του προσπίπτοντος κύματος του υλικού 1, σ_r: ένταση του ανακλώμενου κύματος στο υλικό 1, σ_t: ένταση του διερχόμενου κύματος στο υλικό 2, ρ_1,ρ_2: πυκνότητες υλικών 1,2, c_1,c_2: ταχύτητες διάδοσης του διαμήκους ηχητικού κύματος στα υλικά 1,2.

Επειδή στην περίπτωση πετρώματος (υλικό 1) και αέρα (υλικό 2) ισχύει:

$$\rho_2 c_2 \prec\prec \rho_1 c_1 \tag{2.30}$$

Το πρόσημο της τάσης (σ_r) θα είναι αντίθετο με της τάσης (σ). Αυτό σημαίνει ότι το θλιπτικό κύμα που προσπίπτει σε ελεύθερη επιφάνεια, παράγει εφελκυστικό κύμα από ανάκλαση. Το φαινόμενο της θραύσης από ανάκλαση για την περίπτωση επίπεδου θλιπτικού κύματος τριγωνικής μορφής, που καθώς προχωράει στο πέτρωμα συναντά ελεύθερη επιφάνεια φαίνεται στο σχήμα 2.12 (Τσουτρέλης, 2001).



Σχήμα 2.12: Θραύση του πετρώματος σε παράλληλες πλάκες κατά την ανάκλαση θλιπτικού κύματος σε ελεύθερη επιφάνεια (Τσουτρέλης, 2001)

- Η εικόνα (α) δείχνει το θλιπτικό κρουστικό κύμα που κινείται από αριστερά προς δεξιά ακριβώς πριν συναντήσει την ελεύθερη επιφάνεια.
- Η εικόνα (Β) δείχνει την κατάσταση που προκύπτει μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, όταν το εφελκυστικό κύμα που δημιουργήθηκε έχει ένταση σ_t ίση με την δυναμική αντοχή σε εφελκυσμό του πετρώματος, δηλαδή:

$$\sigma_t = T_o \tag{2.31}$$

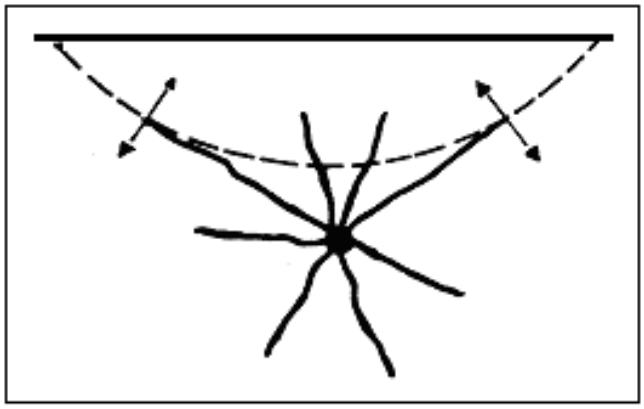
Όταν ισχύσει η παραπάνω σχέση τότε ακριβώς θραύεται παράλληλα προς την ελεύθερη επιφάνεια η πρώτη πλάκα, που απομακρύνεται λόγω παγίδευσης κινητικής ενέργειας. Μετά την απομάκρυνση της πρώτης πλάκας σχηματίζεται νέα ελεύθερη επιφάνεια στην οποία θα ανακλαστεί το υπόλοιπο του κρουστικού παλμού.

- Η εικόνα (γ) δείχνει ότι η ένταση που προκύπτει από το εφελκυστικό κύμα είναι μεγαλύτερη από την αντοχή του πετρώματος σε εφελκυσμό, οπότε και σχηματίζεται δεύτερη πλάκα παράλληλη προς την επιφάνεια, που επίσης απομακρύνεται σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω. Η δεύτερη αυτή ελεύθερη επιφάνεια θα αποτελέσει την

νέα ελεύθερη επιφάνεια στην οποία θα ανακλαστεί και το υπόλοιπο τμήμα του θλιπτικού κύματος που κινείται από αριστερά προς δεξιά.

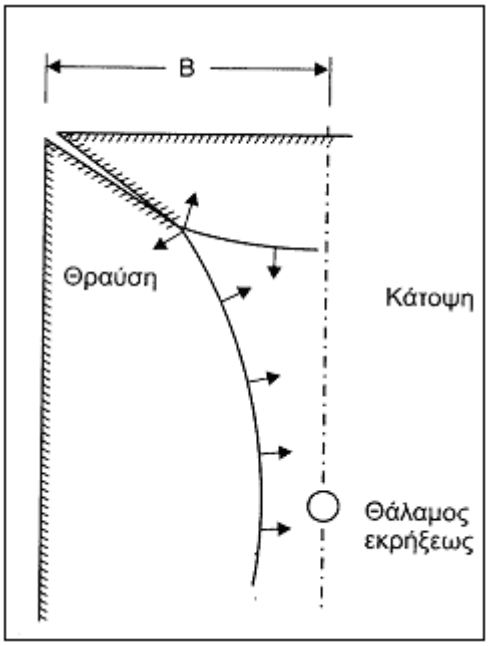
- Η εικόνα (δ) δείχνει ότι ανάλογα με την ένταση του εφελκυστικού κύματος που θα δημιουργηθεί, είναι δυνατό να συνεχιστεί ο μηχανισμός της θραύσης από ανάκλαση ή να διακοπεί. Αυτό γίνεται όταν η ένταση του γίνει μικρότερη από την δυναμική αντοχή του πετρώματος σε εφελκυσμό.

Αν και περισσότερη θραύση του πετρώματος δεν μπορεί να προκληθεί από το εφελκυστικό κύμα που επιστρέφει, πειραματικές μετρήσεις δείχνουν ότι υφίσταται αλληλοεπίδραση μεταξύ του συστήματος των ακτινικών ρωγμών γύρω από τον θάλαμο της έκρηξης και του εφελκυστικού κύματος, η οποία εκδηλώνεται με την παρουσία ακτινικών ρωγμών μεγαλύτερου μήκους προς τη διεύθυνση της ελεύθερης επιφάνειας σε σχέση προς τις άλλες διευθύνσεις. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 2.13 (Τσουτρέλης, 2001).



Σχήμα 2.13: Επέκταση του μήκους ακτινικών ρωγμών λόγω επίδρασης του εφελκυστικού κύματος (Τσουτρέλης, 2001)

Η εκλεκτική αυτή επέκταση οφείλεται στο εφελκυστικό κύμα χαμηλής έντασης (στο στάδιο αυτό), που αδυνατεί να προκαλέσει νέα ρωγμάτωση στο πέτρωμα αλλά μπορεί, σύμφωνα με την θραυστομηχανική, να επεκτείνει κατάλληλα προσανατολισμένες ρωγμές. Πρόσθετη θραύση του πετρώματος λόγω εφελκυστικού κύματος παρατηρείται όταν υπάρχουν τεμνόμενες ελεύθερες επιφάνειες, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.14. Η θραύση οφείλεται στη συμβολή των εφελκυστικών κυμάτων που δημιουργήθηκαν κατά την ανάκλαση του κρουστικού κύματος στις επιφάνειες αυτές.



Σχήμα 2.14: Ρωγμάτωση του πετρώματος από την συμβολή δυο εφελκυστικών κυμάτων κατά την πρόσπτωση του θλιπτικού σε δυο τεμνόμενες ελεύθερες επιφάνειες (Τσουτρέλης, 2001)

Είναι ενδεχόμενο και άλλοι μηχανισμοί να συμβάλλουν στην εκλεκτική επέκταση των ακτινικών ρωγμών δεδομένου ότι το μήκος τους είναι αρκετά μεγαλύτερο από ότι μπορεί να δικαιολογηθεί από τους μηχανισμούς θραύσης που έχουν αναφερθεί προηγουμένως. Οι ρωγμές αυτές για ένα πολύ μικρό διάστημα βρίσκονται υπό την επίδραση σύνθετου εντατικού πεδίου, που οφείλεται στα αέρια ψηλής πίεσης που δημιουργούνται στον θάλαμο έκρηξης και στο επιστρέφων εφελκυστικό κύμα. Στην αλληλοεπίδραση αυτή μπορεί να αποδοθεί η εκλεκτική ανάπτυξη των ακτινικών ρωγμών (σε μήκος), πριν ακόμα αρχίσει η κυρίως ενέργεια των αερίων έκρηξης.

Η δυναμική φάση της θραύσης του πετρώματος ολοκληρώνεται με την επιστροφή από την ελεύθερη επιφάνεια του κρουστικού κύματος στο χώρο της υπονόμου που εξερράγη. Η διεργασία αυτή για μια ταχύτητα διάδοσης c_p=4000m/sec ολοκληρώνεται σε χρόνο μόλις 0.5 msec/m. Δηλαδή απαιτούνται 2-3 msec για συνήθη φορτία (Τσουτρέλης, 2001).

2.7 Ωστική Φάση

Η χημική ενέργεια που εκλύεται κατά την χημική αντίδραση μιας εκρηκτικής ύλης κατανέμεται στην ενέργεια που περιέχεται στο κρουστικό κύμα και στην ενέργεια των

αέριων προϊόντων, που είναι σε ψηλή πίεση. Τα αέρια αυτά είναι CO_2 H_2O, N_2, O_2 και έχουν μεγάλη κινητική ενέργεια. Από άποψη κινητικής υπολογίζεται ότι μόνο το 10-20% της συνολικής ενέργειας περιέχεται στο κρουστικό κύμα, ενώ το υπόλοιπο βρίσκεται συνδεδεμένο με τα αέρια έκρηξης. Άρα είναι λογικό να αναμένεται ότι η συνεισφορά της ωστικής φάσης στην θραύση του πετρώματος είναι σημαντική (Τσουτρέλης, 2001).

Ο τρόπος με τον οποίο θραύεται το πέτρωμα σε αυτή την φάση εκδηλώνεται με την διεύρυνση των ήδη υφιστάμενων ρωγμών καθώς και με την δημιουργία νέων σε θεωρούμενες σχεδόν στατικές συνθήκες. Ο μηχανισμός θραύσης δεν είναι σαφής διότι η κατάσταση που επικρατεί στην περιοχή του θαλάμου έκρηξης αμέσως μετά την διέλευση του κρουστικού κύματος, δεν παρέχει την δυνατότητα πειραματικής μελέτης του μηχανισμού θραύσης υπό την πίεση των αερίων έκρηξης.

Σε αντίθεση με τα χαρακτηριστικά του κρουστικού κύματος που μπορούν να μετρηθούν σε διάφορες αποστάσεις από το θάλαμο έκρηξης και με προέκταση να καθοριστούν κάποιες παράμετροι γύρω από την περιοχή του θαλάμου έκρηξης, το εντατικό πεδίο που δημιουργήθηκε από την πίεση των αερίων είναι μικρό σε έκταση, διότι μειώνεται πολύ πιο γρήγορα σε συνάρτηση με την απόσταση συγκρινόμενο με το κρουστικό. Η ανίχνευση του με αισθητήρες πίεσης πέραν της μεταβατικής ζώνης είναι δυσχερής (Τσουτρέλης, 2001).

Οι σημερινές γνώσεις προέρχονται κυρίως από θεωρητικούς υπολογισμούς και πειραματικά δεδομένα που δίνουν ποιοτικούς όμως χαρακτηρισμούς. Θεωρείται ότι η μέγιστη πίεση (p_g) των αερίων της έκρηξης για πλήρη ζεύξη του εκρηκτικού με το διάτρημα είναι της τάξης του 10-20% της πίεσης έκρηξης που μεταδόθηκε στο τοίχωμα και σημειώνεται σε ελάχιστο χρονικό διάστημα μετά από την στιγμή διέλευσης του κρουστικού κύματος. Οι υφιστάμενες ρωγμές (υπό πίεση τάξης μεγέθους κbar) επεκτείνονται με συγκέντρωση τάσεων στην αιχμή τους και παράλληλα διευρύνονται, με αποτέλεσμα οι μικρορωγμές να γίνουν μεγαλορωγμές. Η έκταση της θραύσης εξαρτάται (Τσουτρέλης, 2001):

- από την πίεση των αερίων,
- από το ικανοποιητικό μήκος της επιγόμωσης,
- την ύπαρξη ασυνεχειών και τον προσανατολισμό τους, που μπορεί να είναι τέτοιος ώστε να διοχετευτούν από μέσα τους, τα αέρια έκρηξης και να μειωθεί η απόδοση τους για την παραγωγή ωφέλιμου έργου.

2.7.1 Συνθήκες στατικής εντατικής κατάστασης (χωρίς παρουσία ακτινικών ρωγμών)

Στην απλούστερη αλλά όχι συνήθη περίπτωση, γίνεται δεκτό ότι το πέτρωμα που βρίσκεται γύρω από το θάλαμο έκρηξης ακτίνας (α) δεν είναι ρωγματωμένο. Ο θάλαμος είναι υπό στατική πίεση. Τότε η εντατική κατάσταση που επικρατεί σε οποιοδήποτε σημείο, σε απόσταση (r) από το κέντρο του διατρήματος, δίνεται από τις γνωστές σχέσεις του Kirsch (Brady και Brown, 1994).

$$\sigma_{rr} = p_g \frac{a^2}{r^2} \quad \text{(ακτινική)} \tag{2.32}$$

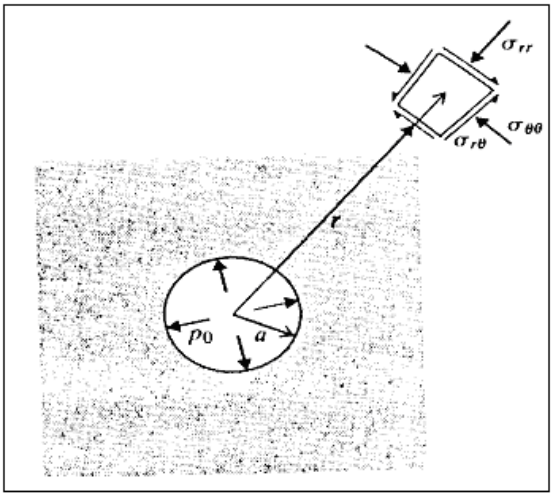
$$\sigma_{\theta\theta} = -p_g \frac{a^2}{r^2} \quad \text{(εφαπτομενική)} \tag{2.33}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{(διατμητική)} \tag{2.34}$$

Οι οποίες σχέσεις όταν r = α (επί του συνόρου του θαλάμου έκρηξης) απλοποιούνται:

$$\sigma_{rr} = p_g \tag{2.35}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p_g \tag{2.36}$$



Σχήμα 2.15: Συνθήκες στατικής εντατικής κατάστασης γύρω από διάτρημα με εσωτερική πίεση (p_g) χωρίς ακτινικές ρωγμές (Brady και Brown, 1994)

Σε αυτή την περίπτωση, η θραύση του πετρώματος είναι συνέπεια της πίεσης των αερίων της έκρηξης μόνο όταν οι τάσεις που δρουν στην επιφάνεια του πετρώματος σ_{rr} και $\sigma_{\theta\theta}$ υπερβούν τις αντίστοιχες αντοχές του πετρώματος.

2.7.2 Συνθήκες στατικής εντατικής κατάστασης (παρουσία ακτινικών ρωγμών)

Αυτή είναι η πιο συνήθης περίπτωση, κατά την οποία γύρω από τον θάλαμο έκρηξης έχουν σχηματιστεί ακτινικές ρωγμές από την διέλευση του κρουστικού παλμού που προηγείται, τότε είναι δυνατό να διακριθούν δυο υποπεριπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, γίνεται δεκτό ότι τα αέρια της έκρηξης δεν έχουν ακόμη εισχωρήσει μέσα στις ρωγμές. Στην δεύτερη περίπτωση, γίνεται δεκτό ότι έχουν εισχωρήσει και ασκούν εσωτερική πίεση στις παρειές της ρωγμής (Brady και Brown, 1994).

Στην πρώτη υποπερίπτωση, αφού δεν έχουν εισχωρήσει τα αέρια, δεν μπορεί να ασκούνται εφαπτομενικές εφελκυστικές τάσεις στη ζώνη ρωγμάτωσης. Σε οποιοδήποτε σημείο εντός της ζώνης αυτής, ακτίνας (r_c), η εντατική κατάσταση σε τυχαίο σημείο προσδιορίζεται από τις σχέσεις:

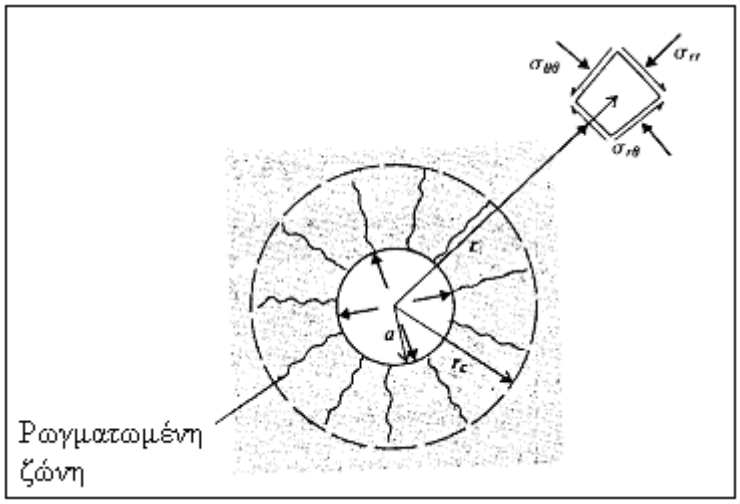
$$\sigma_{rr} = p_g \frac{a^2}{r^2} \tag{2.37}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 0 \qquad \text{για} \qquad r \geq a \tag{2.38}$$

στη εξωτερική περίμετρο της ζώνης αυτής θα ισχύει:

$$\sigma_{rr} = p_g \frac{a}{r_c} \tag{2.39}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p_g \frac{a}{r_c} \tag{2.40}$$



Σχήμα 2.16: Συνθήκες στατικής εντατικής κατάστασης γύρω από διάτρημα με εσωτερική πίεση (p_g) με ακτινικές ρωγμές (Brady και Brown, 1994)

Οι παραπάνω σχέσεις 2.37-2.40 δείχνουν ότι οι ακτινικές ρωγμές γύρω από ένα διάτρημα, μπορούν να επεκταθούν όταν η εντατική κατάσταση στο όριο της ζώνης ρωγμάτωσης ικανοποιεί το κριτήριο αστοχίας του πετρώματος (Brady και Brown, 1994).

Στην δεύτερη υποπερίπτωση θεωρώντας ότι ο όγκος των ρωγμών είναι αμελητέος, η εντατική κατάσταση στο όριο της ζώνης ρωγμάτωσης δίνεται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{rr} = p_g \tag{2.41}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p_g \tag{2.42}$$

Η πραγματική εικόνα φαίνεται να είναι μεταξύ των δυο υποπεριπτώσεων, οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις 2.40-2.42. Η παρουσία περιφερειακών εφελκυστικών τάσεων γύρω από το διάτρημα παρέχει ένα ικανοποιητικό περιβάλλον για την επέκταση των ήδη υφιστάμενων ρωγμών. Ειδικά για την επέκταση των υφιστάμενων ακτινικών ρωγμών που δημιουργήθηκαν από την διέλευση του κρουστικού κύματος, έχουν διατυπωθεί πολλές θεωρίες. Μερικές από αυτές είναι (Brady και Brown, 1994):

- Οι ρωγμές που είναι ευνοϊκά προσανατολισμένες, επεκτείνονται και ανάλογα με το φορτίο μπορεί να φτάσουν μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια. Οι συνθήκες αυτές προϋποθέτουν υψηλές πιέσεις από τα αέρια έκρηξης και η ανατίναξη να είναι

επιφανειακή-Βαθμίδας. Η ρωγμάτωση του πετρώματος προς την ελεύθερη επιφάνεια γίνεται με ρυθμό 3 msec ανά μέτρο φορτίου

- Η απαιτούμενη ελάχιστη πίεση αερίων (κρίσιμη πίεση) για την επέκταση ρωγμών δεδομένου μήκους, αυξάνει με τον αριθμό των διατεταγμένων ρωγμών γύρω από τον θάλαμο έκρηξης. Η ελάχιστη πίεση αντιστοιχεί στην περίπτωση δυο ρωγμών αντιδιαμετρικά τοποθετημένες, ενώ για την επέκταση μιας ρωγμής απαιτείται πίεση όση για τέσσερις ρωγμές συμμετρικά διατεταγμένες. Το μήκος της ρωγμής επηρεάζει επίσης την κρίσιμη πίεση στην περίπτωση ρωγμών μικρότερου μήκους από εκείνο της διαμέτρου του θαλάμου έκρηξης. Στην περίπτωση αυτή η κρίσιμη πίεση αυξάνει σημαντικά καθώς μειώνεται το μήκος της ρωγμής, ενώ για ρωγμές με μεγαλύτερο μήκος από εκείνο της διαμέτρου του θαλάμου εκρήξεως δεν παρατηρείται μεταβολή της κρίσιμης πίεσης.

Ο συσχετισμός της κρίσιμης πίεσης με τον αριθμό και το μήκος των ακτινικών ρωγμών οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για να επιτευχθεί η μέγιστη δυνατή επέκταση των ρωγμών υπό την πίεση των αερίων έκρηξης, πρέπει οι ρωγμές να είναι λίγες και αραιά διατεταγμένες μεταξύ τους, αλλά και να έχουν μεγάλο μήκος. Συνεπώς οι ζώνες θρυμματισμού και η μεταβατική που έχουν πυκνές και μικρού μήκους ρωγμές, αποτελούν εμπόδιο για την επέκταση των ρωγμών με την πίεση των αερίων. Από αυτό το λόγο προήλθε και η άποψη ότι, όταν γίνεται χρήση πολύ διαρρηκτικών εκρηκτικών, η θραύση οφείλεται κυρίως στο κρουστικό κύμα και η συνεισφορά της πίεσης των αερίων της έκρηξης είναι περιορισμένη (Τσουτρέλης, 2001).

Από πλευράς χρονικής διάρκειας, η κρουστική και η ωστική φάση θραύσης σημειώνεται σε 2-3 msec από την στιγμή της έναυσης, όπου τα τοιχώματα του θαλάμου δέχονται την ισχυρή κρούση από τα μόρια των προϊόντων της έκρηξης. Από το ισχυρό αυτό δυναμικό πεδίο και εντός 3-4 msec το πέτρωμα ρωγματώνεται από το θάλαμο μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια. Η άσκηση της πίεσης από τα αέρια πίεσης διαρκεί για διάστημα 20-30 msec ενώ στη συνέχεια διαφεύγουν από την επιγόμωση και τις ρωγμές. Τέλος άλλα 60-80 msec διαρκεί το υπόλοιπο της θραύσης και μετακίνησης του πετρώματος από την φυσική του θέση. Στην περίπτωση ταυτόχρονης έκρηξης μιας σειράς υπονόμων, η συνολική χρονική διάρκεια για την ολοκλήρωση της θραύσης μειώνεται κατά 10-30 msec λόγω αλληλεπίδρασης μεταξύ των υπονόμων.

2.7.3 Περίπτωση ανισότροπου πετρώματος

Η προηγούμενη περιγραφή του τρόπου θραύσης του πετρώματος λόγω πίεσης από τα αέρια της έκρηξης, αναφέρεται σε περίπτωση ιδανικού πετρώματος, στο οποίο απουσιάζουν κάθε μορφής ασυνέχειες που προσδίδουν στο πέτρωμα ανισοτροπία. Οι ασυνέχειες αυτές ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους και τον προσανατολισμό τους σε σχέση με το διάτρημα επηρεάζουν τη ρωγμάτωση του πετρώματος ως εξής (Τσουτρέλης, 2001):

- Εάν οι ασυνέχειες είναι μεγάλες και τέμνουν κάθετα ή υπό γωνία το διάτρημα, θα προκαλέσουν διαρροή των αερίων προς την κατεύθυνση τους με αποτέλεσμα την διεύρυνση τους αλλά και τη μείωση της ενέργειας για την θραύση του πετρώματος.
- Οριζόντιες ή σχεδόν οριζόντιες ασυνέχειες με τα παραπάνω χαρακτηριστικά είναι συνήθως υπεύθυνες για την εκτόξευση θραυσμάτων του πετρώματος σε μεγάλες αποστάσεις.
- Μεγάλες ασυνέχειες παράλληλες προς τον άξονα του διατρήματος μπορεί να προκαλέσουν ανάκλαση του κρουστικού κύματος στην επιφάνεια τους πριν αυτό φτάσει στην ελεύθερη επιφάνεια. Τέτοια εσωτερική ανάκλαση προκαλεί εντονότερο θρυμματισμό κοντά στο διάτρημα και λιγότερο στη περιοχή της ελεύθερης επιφάνειας. Οι ακτινικές ρωγμές διακόπτονται απότομα από τις ασυνέχειες .
- Λεπτές ασυνέχειες που είναι παράλληλες προς τον άξονα του διατρήματος, είναι δυνατό να προκαλέσουν εσωτερικές ανακλάσεις του κρουστικού κύματος αλλά απλά να διευρυνθούν από το επιστρέφων εφελκυστικό κύμα. Στην περίπτωση αυτή εμποδίζεται η επίδραση του εφελκυστικού κύματος πάνω στις ακτινικές ρωγμές με αποτέλεσμα να μην ολοκληρώνεται η θραύση του πετρώματος.

2.8 Επιλογή της Εκρηκτικής Ύλης

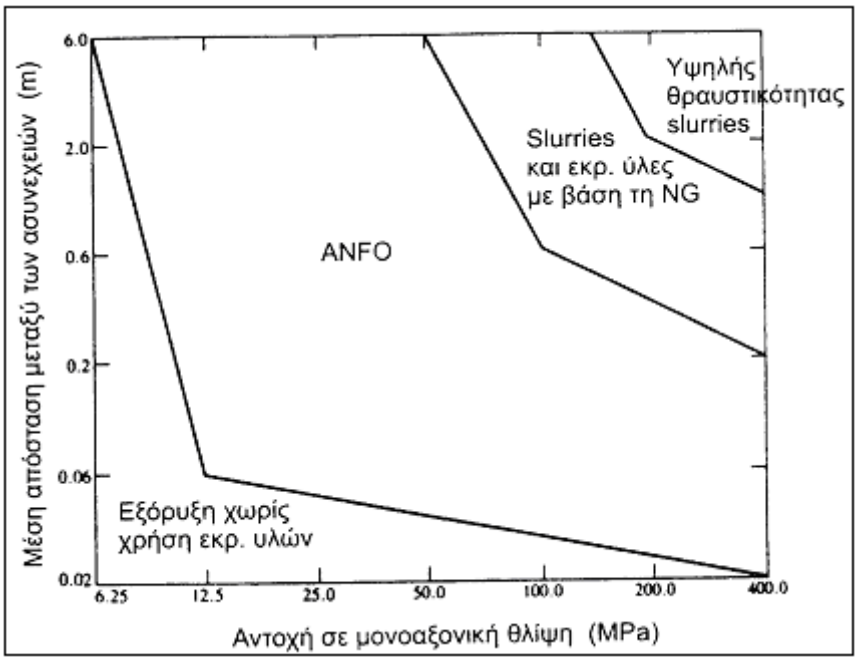
Για να επιτευχθούν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε μια ανατίναξη είναι απαραίτητη η κατάλληλη επιλογή του εκρηκτικού, η οποία επιλογή βασίζεται (Brady και Brown, 1994):

- στις ιδιότητες του πετρώματος
- στα επιδιωκόμενα αποτελέσματα από μια ανατίναξη
- τις συνθήκες του χώρου ανατίναξης

Ανάλογα με τα στοιχεία αυτά επιλέγεται το εκρηκτικό από το ευρύ φάσμα των εμπορικών εκρηκτικών που υπάρχει στο εμπόριο. Η συμπεριφορά του πετρώματος κατά την διάρκεια μιας ανατίναξης εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του εκρηκτικού αλλά και από τα χαρακτηριστικά του ιδίου του πετρώματος. Τα χαρακτηριστικά της εκρηκτικής ύλης εκφράζονται συνήθως από την ισχύ, που αποτελεί και το μέτρο της ικανότητας της να παράγει ωφέλιμο έργο στο περιβάλλον πέτρωμα. Η ισχύς αυτή προέρχεται από την κρουστική φάση, όσο και από την ακολουθούσα ωστική φάση της έκρηξης.

Ο όρος **θραυστικότητα** (brissance) χρησιμοποιείται για να περιγράψει την δυνατότητα του εκρηκτικού να ρωγματώσει το πέτρωμα. Η θραυστικότητα εξαρτάται από την πίεση έκρηξης, που με την σειρά της είναι συνάρτηση της ταχύτητας έκρηξης και της πυκνότητας της εκρηκτικής ύλης. Εκρηκτικές ύλες με ταχύτητες έκρηξης μεγαλύτερες ή της τάξης των 5000m/sec θεωρούνται υψηλής θραυστικότητας, ενώ μικρότερες των 2.500m/sec ως χαμηλής θραυστικότητας (Brady και Brown, 1994):

Ένας εμπειρικός συσχετισμός επιλογής της κατάλληλης εκρηκτικής ύλης για διάφορα πετρώματα με κριτήρια της αντοχή τους σε μονοαξονική θλίψη και την πυκνότητα των ασυνεχειών τους , που εκφράζεται με την μέση απόσταση μεταξύ των ασυνεχειών δίδεται από το σχήμα 2.17.



Σχήμα 2.17: Εμπειρικός συσχετισμός εκρηκτικής ύλης και ιδιοτήτων του πετρώματος (Brady και Brown, 1994)

Από το σχήμα 2.17 παρατηρείται ότι το ANFO καλύπτει πετρώματα με ευρύτατο φάσμα ιδιοτήτων. Ο λόγος αυτός εξηγεί γιατί το ANFO καλύπτει το 75-85% των συνολικά καταναλισκόμενων εκρηκτικών υλών.

2.9 Επίδραση των Χαρακτηριστικών του Πετρώματος στην Ανατίναξη

Η εξόρυξη του πετρώματος με εκρηκτικές ύλες επηρεάζεται από ένα ευρύ φάσμα ιδιοτήτων του πετρώματος, των οποίων η ποσοτική επίδραση δεν μπορεί να αποδοθεί με σαφήνεια σε όλες τις περιπτώσεις. Καμία από τις γνωστές γεωμηχανικές ταξινομήσεις της μάζας δεν μπορεί να προβλέψει ικανοποιητικά την συμπεριφορά του πετρώματος σε συνθήκες ανατίναξης (Τσουτρέλης, 2001). Οι κυριότερες ιδιότητες του πετρώματος που επηρεάζουν την εξορυξιμότητα με εκρηκτικές ύλες είναι: (Α) η αντοχή, (Β) οι ελαστικές ιδιότητες (Γ) η ταχύτητα διάδοσης του ηχητικού κύματος στο πέτρωμα, (Δ) το πορώδες, (Ε) η ορυκτολογική του σύνθεση και το μέγεθος του κόκκου, (Στ) το επιτόπου εντατικό πεδίο και (Η) η γεωλογική δομή (ασυνέχειες). Στη συνέχεια αναπτύσσονται οι πιο βασικές από τις προαναφερθέντες.

2.9.1 Αντοχή

Η αντοχή του πετρώματος είναι και το βασικότερο κριτήριο για την επιλογή της εκρηκτικής ύλης αλλά και τον καθορισμό της ειδικής κατανάλωσης της. Για την ίδια ειδική κατανάλωση εκρηκτικής ύλης, ένα πέτρωμα υψηλής αντοχής σε θλίψη θα δώσει φτωχότερο θρυμματισμό σε σύγκριση με ένα πέτρωμα μικρότερης αντοχής. Η αντοχή σε μονοαξονική θλίψη (σ_c) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο ευκολίας δημιουργίας νέων ρωγμών στο πέτρωμα. Στο πίνακα 2.4 δίδεται η σχέση μεταξύ μιας κλίμακας, η οποία κάνει μια κατάταξη για διάφορα πετρώματα ανάλογα με την αντοχή τους, σε κατηγορίες και της απαιτούμενης ειδικής κατανάλωσης της εκρηκτικής ύλης για να επιτευχθεί σε όλες τις περιπτώσεις ο ίδιος ικανοποιητικός θρυμματισμός (Τσουτρέλης, 2001).

Πίνακας 2.4: Σχέση μεταξύ αντοχής του πετρώματος και της ειδικής κατανάλωσης (Τσουτρέλης, 2001)

Πέτρωμα	Κατηγορία πετρώματος ανάλογα με την αντοχή του	Ειδική κατανάλωση εκρηκτικού (Kg/m^3)
Άργιλος, χαλικοπαγή και κροκαλοπαγή	III-IV	0.3-0.5
Μαργα, λιγνίτης, γύψος, λιθάνθρακας, τόφφοι, κίσσηρης	V-VI	0.35-0.55
Ψαμμίτες, κροκαλοπαγή, αργιλικοί ασβεστόλιθοι, ανυδρίτης, αργιλικός σχιστόλιθος	VII-VIII	0.45-0.6
Γρανίτης, γνεύσιος, σερπεντινίτης, δολομίτης, μάρμαρα.	IX-X	0.6-0.7
Γρανίτης, γνεύσιος, ανδεσίτης, βασάλτης, τραχείτης	XI-XII	0.7-0.75
Σκληρός γνεύσιος, πορφυρίτης, τραχείτης, χαλαζίτης, διορίτης	XIII-XIV	0.85
Ανδεσίτης, βασάλτης, γάββρος, διαβάσης	XV-XVI	0.9

Ένα πρόβλημα που προκύπτει σε περιπτώσεις εξόρυξης με την χρήση εκρηκτικών είναι η αβεβαιότητα προσδιορισμού των μηχανικών χαρακτηριστικών της συμπεριφοράς του πετρώματος, όταν αυτό υποβάλλεται σε εξαιρετικά υψηλούς ρυθμούς φόρτισης, όπως συμβαίνει μετά την πρόσκρουση του εκρηκτικού κύματος πάνω στο πέτρωμα για πολύ μικρό χρονικό διάστημα της τάξης του 1msec. Σε συνθήκες απότομης φόρτισης για βραχύ χρονικό διάστημα, η δυναμική αντοχή του πετρώματος σε θραύση αυξάνεται από 5-13 φορές σε σχέση με την αντίστοιχη αντοχή σε στατική αντοχή. Αν γίνει αποδεκτό ότι γύρω

από το διάτρημα, το πέτρωμα υπό την επίδραση του τασικού πεδίου που προκαλείται από το κρουστικό κύμα, θραύεται κυρίως σε θλίψη και έτσι προκύπτει ότι η ένταση του κύματος που θα μεταφερθεί στο πέτρωμα δεν πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερη από την δυναμική αντοχή του πετρώματος σε θλίψη για να αποφευχθεί η απορρόφηση μεγάλου μέρους της ενέργειας για την πραγματοποίηση ωφέλιμού έργου σε κονιοποίηση του πετρώματος (Τσουτρέλης, 2001).

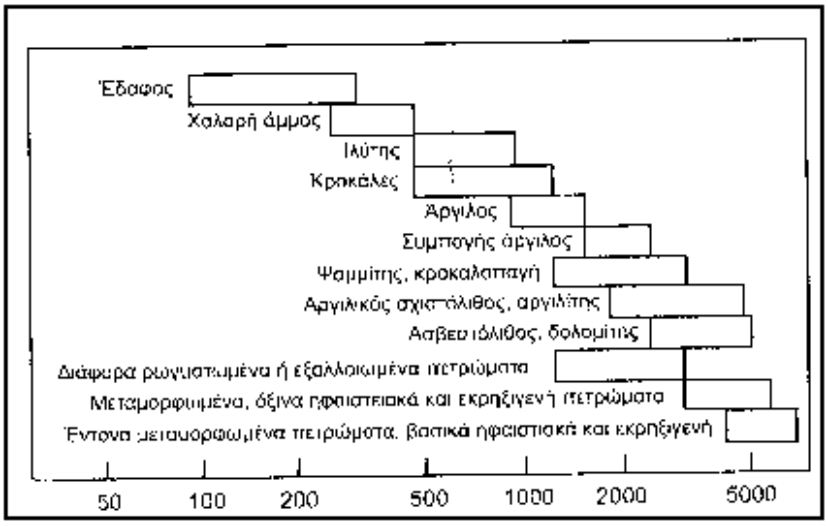
Αν θεωρηθεί δεδομένο ότι σημαντικό μέρος της θραύσης του πετρώματος οφείλεται στην υποβολή του σε εφελκυστικές δυναμικές τάσεις (θραύση από ανάκλαση και σχηματισμός ακτινικών ρωγμών), δεν πρέπει να αγνοείται η δυναμική αντοχή του πετρώματος σε εφελκυσμό που είναι κατά πολλές φορές μικρότερη της αντίστοιχης αντοχής του σε θλίψη. Για τον λόγο αυτό η σημασία της θραύσης και ρωγμάτωσης του πετρώματος από εφελκυσμό είναι μεγαλύτερη στα πετρώματα που έχουν υψηλές τιμές αντοχής σε σύγκριση με μαλακότερα πετρώματα, τα οποία προκαλούν μεγαλύτερη απόσβεση του κρουστικού κύματος. Πετρώματα με χαμηλή αντοχή σε εφελκυσμό είναι πιο επιρρεπή στην ανάπτυξη ακτινικών ρωγμών γύρω από τον θάλαμο της έκρηξης (Τσουτρέλης, 2001).

2.9.2 Ελαστικές ιδιότητες του πετρώματος

Το μέτρο ελαστικότητας συνδέεται με την ακαμψία του πετρώματος και την ανθεκτικότητα του σε εξωτερικές επιδράσεις. Πετρώματα με υψηλές τιμές μέτρου ελαστικότητας απαιτούν ισχυρή κρουστική φάση για να επιτευχθεί επιθυμητός θρυμματισμός και πίεση αερίων έκρηξης μικρότερη του 5% του μέτρου ελαστικότητας για να μην απωλεσθεί μεγάλο ποσοστό ενέργειας γύρω από τον θάλαμο έκρηξης. Ο λόγος Poisson στα πετρώματα κυμαίνεται από 0.15-0.4. Καθώς μειώνεται ο λόγος αυτός, μειώνεται και η ψαθυρότητα του πετρώματος. Ο θρυμματισμός βελτιώνεται με εκρηκτικά υψηλής ταχύτητας και πίεσης έκρηξης. Πετρώματα που έχουν χαμηλή αντοχή σε θλίψη χαρακτηρίζονται συνήθως από κάποια πλαστική συμπεριφορά, η οποία απορροφά ταχύτερα το κρουστικό κύμα σε σύγκριση με τα ψαθυρά πετρώματα με αποτέλεσμα να προκαλείται πολύ περιορισμένη θραύση λόγω ανάκλασης και κακός θρυμματισμός. Σε τέτοιες περιπτώσεις γίνεται χρήση εκρηκτικών με σημαντική ωστική ενέργεια (Τσουτρέλης, 2001).

2.9.3 Ταχύτητα διάδοσης του ηχητικού κύματος στο πέτρωμα

Η ταχύτητα διάδοσης του ηχητικού κύματος στο πέτρωμα αντιστοιχεί προς την ταχύτητα διάδοσης του κρουστικού κύματος στη μάζα του πετρώματος. Στο σχήμα 2.18 φαίνονται τιμές για διάφορα πετρώματα και εδάφη.



Σχήμα 2.18: Ταχύτητα διάδοσης ηχητικού κύματος σε διάφορα πετρώματα και εδάφη (Τσουτρέλης, 2001)

Τα χαρακτηριστικά του πετρώματος όπως ο βαθμός ρωγμάτωσης του, το πορώδες του, η διαπερατότητα του και η περιεκτικότητα του σε νερό επηρεάζουν τον ρυθμό απόσβεσης του κρουστικού κύματος. Πετρώματα με υψηλή ταχύτητα διάδοσης του ηχητικού κύματος απαιτούν εκρηκτικές ύλες με μεγάλες ταχύτητες έκρηξης. Αν εξετασθεί από πλευρά μεταφοράς ενέργειας στο πέτρωμα, κατά την κρουστική φάση θεωρείται ότι επιτυγχάνεται ικανοποιητική απόδοση όταν εξασφαλίζεται σχετική συμβατότητα μεταξύ εκρηκτικής ύλης και πετρώματος (Τσουτρέλης, 2001).

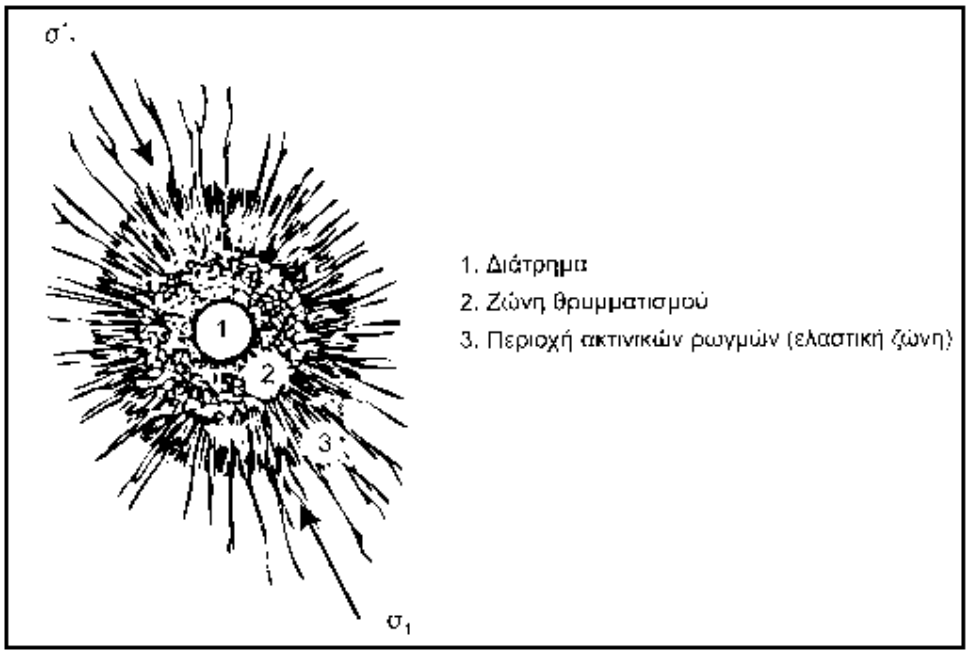
2.9.4 Πορώδες

Το πορώδες του πετρώματος επηρεάζει την απόδοση της ανατίναξης. Πετρώματα με υψηλό πορώδες απορροφούν γρήγορα μεγάλο μέρος της εκρηκτικής ενέργειας γύρω από τον θάλαμο της έκρηξη προκαλώντας έντονη περιφερειακή ρωγμάτωση με αποτέλεσμα να παραχθούν λεπτά θραύσματα και να αναλωθεί σημαντική ενέργεια. Για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων επιλέγονται εκρηκτικές ύλες που περιέχουν σημαντικό ποσοστό της ενέργειας τους στην ωστική φάση και με συνδυασμό καλής επιγόμωσης και κατάλληλο φορτίο για να μην απελευθερωθούν τα αέρια της έκρηξης, επιτυγχάνεται αποδοτική

ανατίναξη. Τέλος αξίζει να αναφερθεί ότι πορώδη πετρώματα με γεμάτους τους πόρους τους νερό, θραύονται ευκολότερα (Τσουτρέλης, 2001).

2.9.5 Εντατικό πεδίο περιβάλλοντος χώρου

Στην ειδική περίπτωση όπου το φυσικό εντατικό πεδίο γύρω από ένα διάτρημα δεν είναι το ίδιο, η ανάπτυξη των ακτινικών ρωγμών δεν είναι συμμετρική. Οι ρωγμές που βρίσκονται στην κατεύθυνση της μεγαλύτερης κύριας τάσης τείνουν να αναπτυχθούν παράλληλα προς αυτή και έχουν πάντοτε μεγαλύτερο μήκος. Στο σχήμα 2.19 φαίνεται η εκλεκτική αυτή ανάπτυξη των ακτινικών ρωγμών σε μια ανατίναξη προς την διεύθυνση ενέργειας της μεγαλύτερης κύριας τάσης σ_1 (Hoek και Brown, 1982).



Σχήμα 2.19: εκλεκτική ανάπτυξη ακτινικών ρωγμών κατά την διεύθυνση της μέγιστης κύριας τάσης (Τσουτρέλης, 2001)

Συνεπώς η διεύθυνση της μέγιστης κύριας τάσης στον χώρο της ανατίναξης επηρεάζει την γεωμετρία των ακτινικών ρωγμών γύρω από τον υπόνομο και κατά συνέπεια την περίπτωση εφαρμογής μεθόδων ελεγχόμενης ανατίναξης.

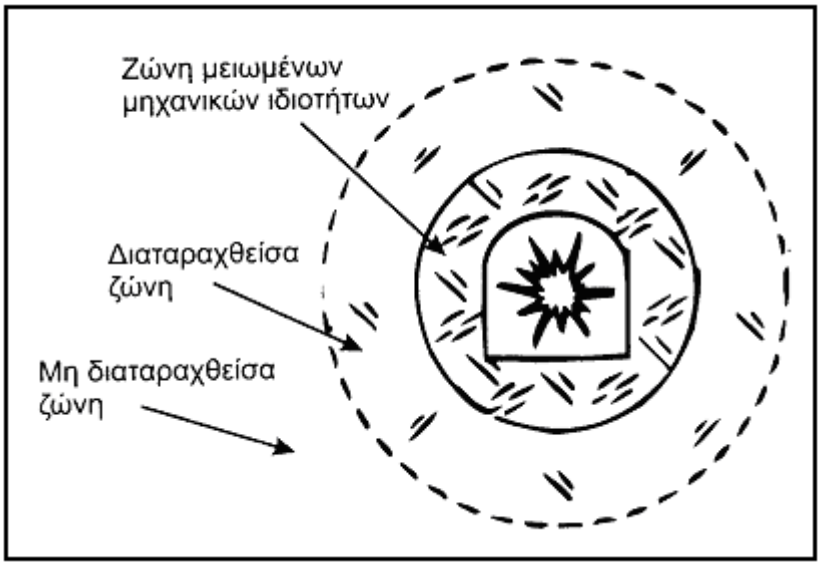
2.9.6 Ασυνέχειες

Τα δομικά χαρακτηριστικά του πετρώματος αναφέρονται συνήθως ως ασυνέχειες και υπάρχουν πάντοτε στα πετρώματα σε μάκρο ή μίκρο μέγεθος. Η ύπαρξη των ασυνεχειών επηρεάζει θετικά την εξορυξιμότητα στις ανατινάξεις όταν έχουν ευνοϊκό προσανατολισμό

σε σχέση με το κρουστικό κύμα και τον τρόπο δράσης των αερίων της έκρηξης. Οι ασυνέχειες επηρεάζουν όμως και αρνητικά την εξορυξιμότητα όταν αυτές δεν έχουν ευνοϊκή διεύθυνση. Η επίδραση αυτή πρέπει να αναζητείται και να ερμηνεύεται με βάση τον μηχανισμό θραύσης του πετρώματος με χρήση διαρρηκτικών εκρηκτικών υλών. Οι ασυνέχειες χωρίζονται σε διάφορες περιπτώσεις, όμως δεν κρίνεται σκόπιμο να εξεταστούν λεπτομερώς.

2.10 Μέθοδοι Ελεγχόμενης Ανατίναξης

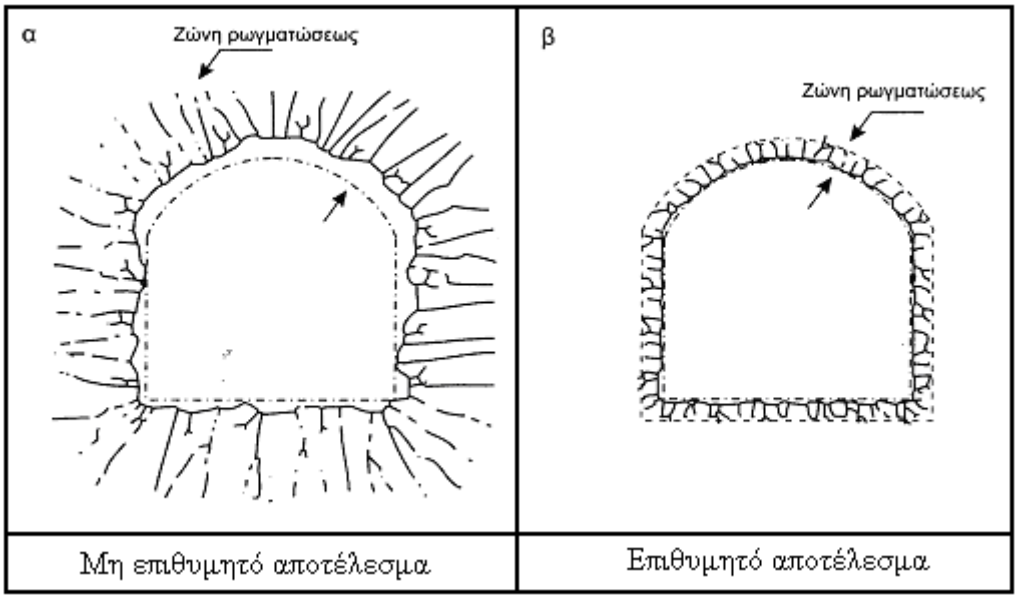
Οι μέθοδοι της ελεγχόμενης ανατίναξης χρησιμοποιούνται εκτεταμένα σε επιφανειακά και υπόγεια έργα όπως φράγματα, σήραγγες, διαμόρφωση υψηλών πρανών, διάνοιξη θεμελίων και μεταλλευτικών προσπελάσεων. Σκοπός της ελεγχόμενης ανατίναξης είναι η μείωση της υπερθραύσης αλλά και της ρωγμάτωσης του πετρώματος γύρω από την περίμετρο μιας εκσκαφής. Χαρακτηριστικά όπως φαίνεται στο σχήμα 2.20, οι μηχανικές ιδιότητες του περιβάλλοντος πετρώματος γύρω από μια σήραγγα αλλοιώνονται σαν συνέπεια μιας υπόγειας ανατίναξης (Τσουτρέλης, 2001).



Σχήμα 2.20: Αλλοίωση των μηχανικών αντοχών του πετρώματος κατά την διάρκεια μιας υπόγειας ανατίναξης (Τσουτρέλης, 2001)

Με τις μεθόδους ελεγχόμενης ανατίναξης είναι δυνατόν να αποφευχθεί εκτεταμένη ρωγμάτωση σε περιμετρικές εκσκαφές. Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 2.21

όπου είναι εμφανής η ζημιά που μπορεί να προκαλέσει μια υπόγεια ανατίναξη στο περιβάλλον πέτρωμα, αλλά και η επιθυμητή συνέπεια από μια ελεγχόμενη ανατίναξη.



Σχήμα 2.21: Σύγκριση της έκτασης ρωγμάτωσης του περιβάλλοντος πετρώματος με συμβατική τεχνική ανατίναξης (α) και ελεγχόμενης (β) (Τσουτρέλης, 2001)

Πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα η συμβολή των μεθόδων ελεγχόμενης ανατίναξης σε κατοικημένες περιοχές, όπου αντιμετωπίζεται επιτυχώς το πρόβλημα της μείωσης των δονήσεων που παράγονται από ανατινάξεις. Η ανάπτυξη των μεθόδων ελεγχόμενης ανατίναξης δεν κρίνεται σκόπιμο να πραγματοποιηθεί. Θα δοθεί όμως ιδιαίτερη έμφαση στο θεωρητικό υπόβαθρο του μηχανισμού μιας ελεγχόμενης ανατίναξης. Απλά αναφέρεται ότι στη διεθνή βιβλιογραφία διακρίνονται πέντε μεθόδοι ελεγχόμενης ανατίναξης (Jimeno et al., 1995):

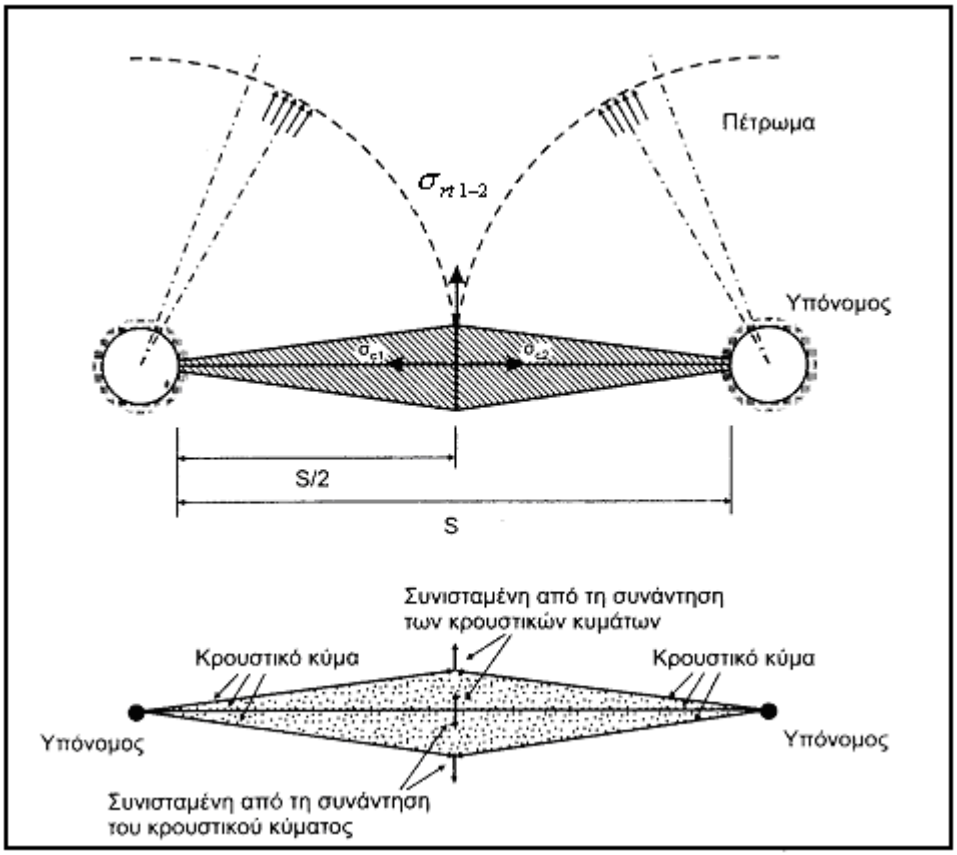
- Μέθοδος πρότμησης
- Μέθοδος απαλής ανατίναξης
- Μέθοδος ελαφρού φορτίου
- Μέθοδος πυκνής διάτρησης και
- Μέθοδος λείων τοιχωμάτων.

2.11 Μηχανισμός Ελεγχόμενης Ανατίναξης

Όταν μια υπόνομος εκραγεί τότε, σύμφωνα με όλα όσα αναφέρθηκαν, δημιουργείται γύρω από το διάτρημα ένα ισχυρό δυναμικό εντατικό πεδίο, το οποίο προκαλεί έντονο

κατακερματισμό του πετρώματος μέχρι κονιοποίησης του σε μια μικρού πάχους ζώνη. Οι μεγάλες ρωγμές που σχηματίζονται πέραν από την ζώνη αυτή οφείλονται στην δράση της εφελκυστικής συνιστώσας τάσης του θλιπτικού κρουστικού κύματος (Jimeno et al., 1995).

Για να ερμηνευτεί ο τρόπος θραύσης του πετρώματος σε συγκεκριμένη διεύθυνση έχει προταθεί το μοντέλο θραύσης του σχήματος 2.22. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, όταν δυο παράπλευρα διατρήματα ευρισκόμενα σε μικρή απόσταση μεταξύ τους εκραγούν ταυτόχρονα τότε, στο μέσο της ευθείας γραμμής που τα συνδέει, επέρχεται συνάντηση των δυο κρουστικών κυμάτων με αποτέλεσμα να δημιουργείται κάθετα προς αυτά μια εφελκυστική τάση που προκαλεί την θραύση του πετρώματος (Jimeno et al., 1995).



Σχήμα 2.22: Θραύση του πετρώματος μεταξύ δυο διατρημάτων στην περίπτωση ελεγχόμενης ανατίναξης (Jimeno et al., 1995)

Μετά την κρουστική φάση της έκρηξης, ακολουθεί η ωστική φάση στην οποία τα μόρια των προϊόντων της αντίδρασης διατηρούν ακόμη σημαντική κινητική ενέργεια, διεισδύουν στην ρωγμή που δημιουργήθηκε μεταξύ των δυο διατρημάτων και την επεκτείνουν με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί το επίπεδο κοπής μεταξύ των δυο υπονόμων.

Από τα προαναφερθέντα προκύπτει η ανάγκη κατάλληλης επιγόμωσης για αποφυγή ταχείας διαφυγής των αερίων έκρηξης στην ατμόσφαιρα.

Αν γίνει δεκτό ότι ο σχηματισμός του επιπέδου πρότμησης οφείλεται σε θραύση από εφελκυσμό, η στατική λύση του προβλήματος η οποία σύμφωνα με την θεωρία των παχέων κυλίνδρων, προκύπτει ότι η εφελκυστική τάση σ_t που δημιουργείται σε απόσταση r από το κέντρο κυλίνδρου ακτίνας r_h ευρισκόμενου υπό πίεση p δίδεται από την σχέση:

$$\sigma_t = -p\left(\frac{r_h}{r}\right)^2 \tag{2.43}$$

Η ολική εφελκυστική δύναμη F_r, που αναπτύσσεται κατά μήκος της απόστασης S μεταξύ των δυο υπονόμων ανά μονάδα μήκους του διατρήματος είναι:

$$F_r = -\int_r^S p\left(\frac{r_h}{r}\right)^2 dr = pr_h\left(\frac{1-r_h}{S}\right) \tag{2.44}$$

Επειδή η δύναμη που αναπτύσσεται και από την άλλη υπόνομο είναι ίδια, η συνολική δύναμη που ασκείται κατά μήκος της απόστασης μεταξύ των δυο υπονόμων F_t θα είναι:

$$F_t = 2pr_h\left(\frac{1-r_h}{S}\right) \tag{2.45}$$

παραλείποντας τον όρο (r_h / S) που στην πράξη κυμαίνεται μεταξύ 1/25 και 1/30 προκύπτει:

$$F_t = 2pr_h \tag{2.46}$$

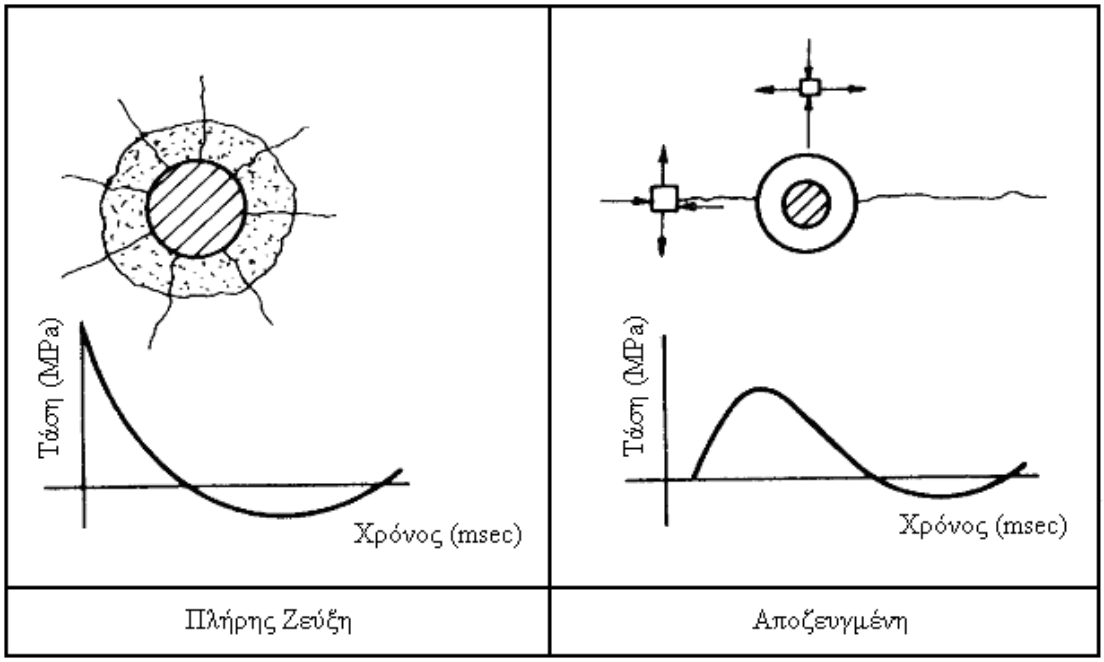
Η δύναμη που ανθίσταται στην θραύση του πετρώματος ανά μονάδα μήκους του διατρήματος είναι:

$$F_r = \sigma_t(S - 2.r_h) \tag{2.47}$$

εξισώνοντας την 2.46 και 2.47 προκύπτει η θραύση του πετρώματος κατά την επιθυμητή διεύθυνση η οποία είναι:

$$S = 2r_h \frac{p + \sigma_t}{\sigma_t} \tag{2.48}$$

Η σχέση 2.48 παρέχει την βασική παράμετρο για τον σχεδιασμό μιας ελεγχόμενης ανατίναξης. Προϋπόθεση εφαρμογής της σχέσης για την επίτευξη επιθυμητών αποτελεσμάτων είναι η τάση (MPa) ή πίεση p να μην ξεπερνάει την αντοχή του πετρώματος σε θλίψη (MPa) ώστε να περιοριστεί ο σχηματισμός της ζώνης της έντονης ρωγμάτωσης γύρω από το πέτρωμα. Στο σχήμα 2.23 παρατηρείται η επίδραση της τάσης συναρτήσει του χρόνου για την περίπτωση πλήρης ζεύξης και αποζευγμένης γόμωσης (Τσουτρέλης, 2001).



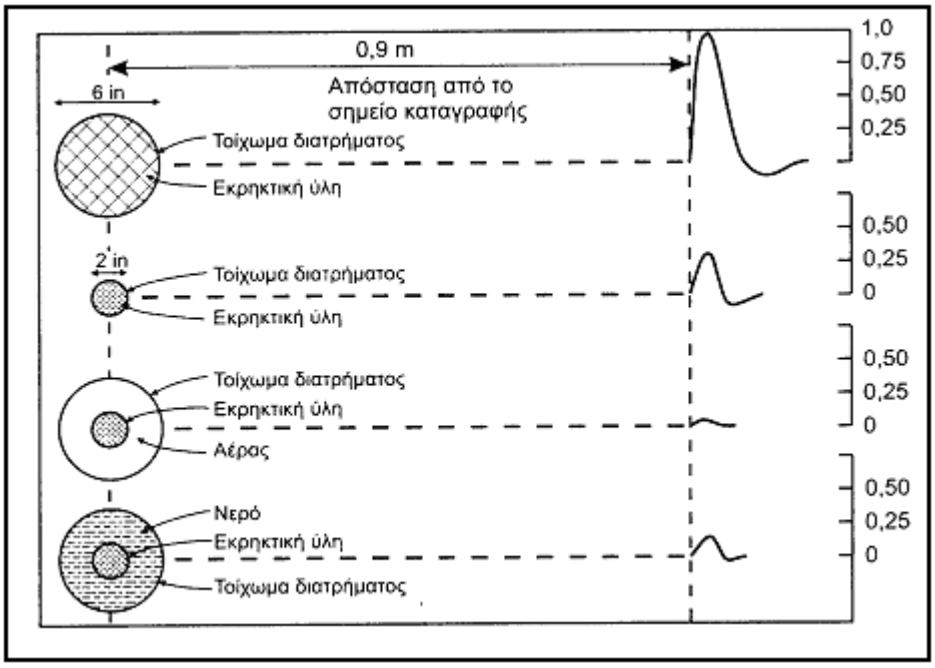
Σχήμα 2.23: Μείωση πίεσης συναρτήσει του χρόνου (Jimeno et al., 1995)

Για να περιοριστεί η θραύση του πετρώματος γύρω από το διάτρημα πρέπει να μειωθεί η επαγόμενη πίεση πάνω στο τοίχωμα του διατρήματος από την έκρηξη της εκρηκτικής ύλης έχοντας υπόψη ότι η πίεση αυτή είναι της τάξης των 50% της πίεσης έκρηξης. Υφίστανται διάφοροι τρόποι μείωσης της πίεσης πάνω στο τοίχωμα ώστε να

ευρεθεί σε συμφωνία με την αντοχή του πετρώματος για την αποφυγή της υπερθραύσης. Οι τρόποι αυτοί είναι (Τσουτρέλης, 2001):

- Μείωση της πυκνότητας γόμωσης αλλά και της ισχύος της αραιώνοντας το εκρηκτικό με αδρανές υλικό (σφαιρίδια πολυστερίνης, ροκανίδι). Με τον τρόπο αυτό μειώνεται η πυκνότητα γόμωσης αλλά και η ταχύτητα έκρηξης με αποτέλεσμα η ελάττωση της πίεσης έκρηξης να είναι σημαντική και κατ' επέκταση η πίεση στα τοιχώματα να είναι μειωμένη.
- Χρήση διατρημάτων μικρότερης διαμέτρου από εκείνη που η εκρηκτική ύλη πετυχαίνει μέγιστη ταχύτητα έκρηξης.
- Με παρεμβολή διάκενου αέρα μεταξύ εκρηκτικού και τοιχώματος, το οποίο λειτουργεί ως μέσο μείωσης της πίεσης έκρηξης (τεχνική αποζευγμένης γόμωσης).

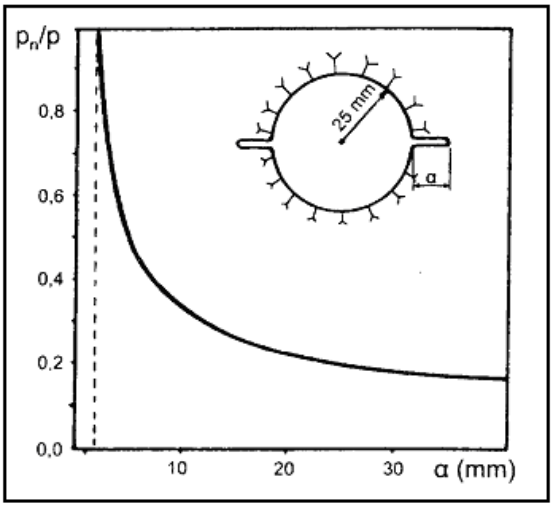
Στο σχήμα 2.24 φαίνεται το αποτέλεσμα της χρησιμοποίησης αποζευγμένης γόμωσης με διάκενο αέρα και νερό καθώς και το μέγεθος της πίεσης που ασκείται πάνω στο τοίχωμα σε σχέση με μια κανονική ανατίναξη.



Σχήμα 2.24: Σύγκριση κανονικής και αποζευγμένης γόμωσης με παρεμβολή αέρα και νερού (Τσουτρέλης, 2001)

2.12 Ειδική Μέθοδος Εξόρυξης Διακοσμητικών Όγκων

Για την εξόρυξη διακοσμητικών όγκων έχουν προταθεί διάφοροι μέθοδοι εξόρυξης. Οι μέθοδοι αυτοί βασίζονται στην παρατήρηση ότι ένα διάτρημα που φέρει αντιδιαμετρικά σε όλο του το μήκος δυο εγκοπές και τεθεί σε εντατική κατάσταση από μια έκρηξη τότε, σύμφωνα με την θραυστομηχανική, κατά την διεύθυνση των εγκοπών αυτών αναπτύσσεται ευκολότερα μια ρωγμή. Σύμφωνα με το σχήμα 2.25 για την κοπή του πετρώματος και ανάλογα με το βάθος των εγκοπών απαιτείται πολύ μικρότερη πίεση στο διάτρημα από ότι χωρίς την παρουσία τους (Τσουτρέλης, 2001).



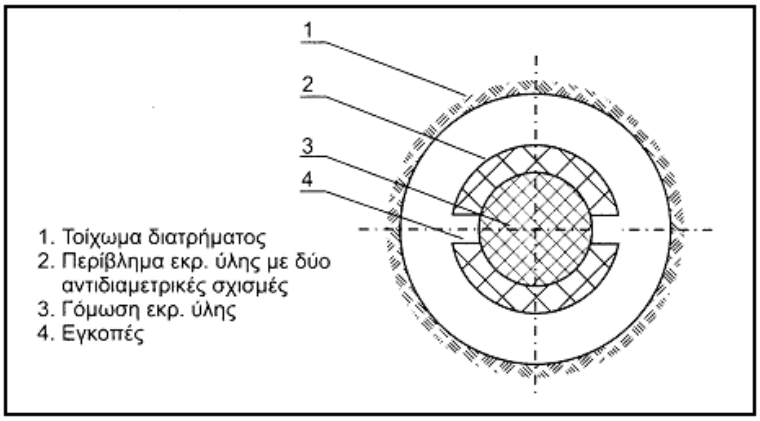
Σχήμα 2.25: Απαιτούμενη πίεση για την κοπή πετρώματος κατά μήκος αντιδιαμετρικών κοπών (Τσουτρέλης, 2001)

Η διάνοιξη των εγκοπών αυτών, που προετοιμάζουν το επίπεδο κοπής, και η θραύση του πετρώματος εκλεκτικά κατά μήκος τους μπορεί να γίνει με δυο τρόπους (Τσουτρέλης, 2001):

- Με ειδικά φυσίγγια εκρηκτικής ύλης
- Με μηχανική όρυξη των εγκοπών και στη συνεχεία με χρήση εκρηκτικής ύλης.

Ο πρώτος τρόπος πραγματοποιείται με:

- χρήση φυσιγγίων με μεταλλικό ή πλαστικό περίβλημα που φέρουν δυο αντιδιαμετρικές σχισμές και κατάλληλη γόμωση. Στο σχήμα 2.26 φαίνεται σε τομή η εικόνα ενός τέτοιου φυσιγγιου.



Σχήμα 2.26: Φυσίγγιο με αντιδιαμετρικές εγκοπές σχισμές για διάνοιξη εγκοπών στο πέτρωμα και κοπή του (Τσουτρέλης, 2001)

Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται συγκέντρωση ενέργειας της εκρηκτικής ύλης στο πέτρωμα που βρίσκεται απέναντι των επιθυμητών θέσεων διάνοιξης των εγκοπών ενώ προστατεύεται από το περίβλημα το υπόλοιπο τοίχωμα του διατρήματος.

- Με χρήση ειδικά διαμορφωμένης γόμωσης αποτελούμενης από συνδυασμό ασθενούς ισχύς εκρηκτική θρυαλλίδα και χαμηλής ισχύος και ταχύτητας εκρηκτικού.

Ο δεύτερος τρόπος πραγματοποιείται με χρήση ειδικών κοπτικών άκρων που διανοίγουν δυο αντιδιαμετρικές εγκοπές παράλληλα με το διάτρημα. Μετά την διάνοιξη των εγκοπών αυτών γίνεται χρήση εκρηκτικής θρυαλλίδας για την κοπή του πετρώματος στο επίπεδο που προσδιόρισε η εγκοπή (Τσουτρέλης, 2001).

3. Η Μέθοδος Των Πεπερασμένων Στοιχείων

3.1 Εισαγωγή

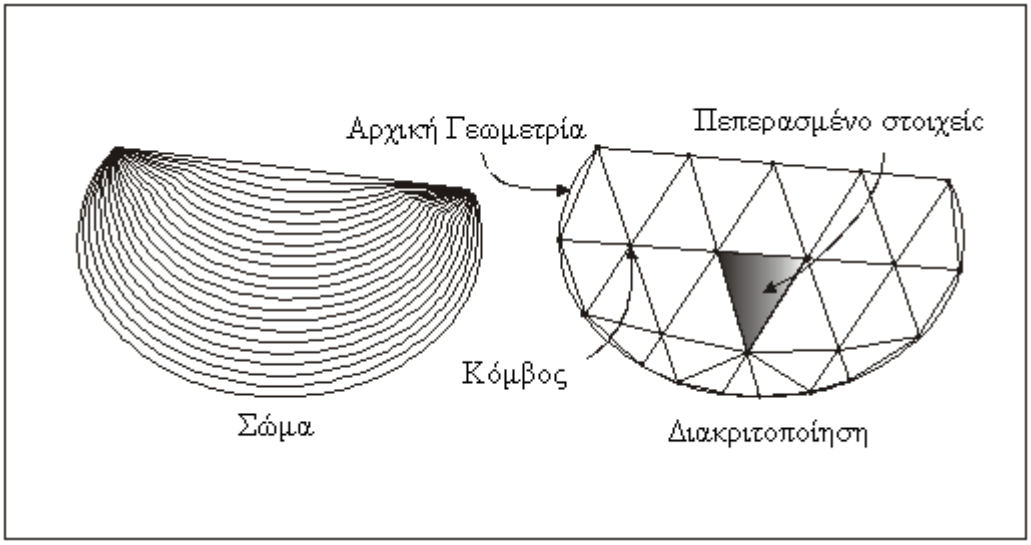
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια σχετικά νέα τεχνική η οποία πρωτοεμφανίστηκε τη δεκαετία του 1950. Από τότε βρίσκεται σε συνεχή εξέλιξη αφού η μέθοδος συνδέεται με την ραγδαία εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Σήμερα αποτελεί ένα αρκετά περίπλοκο εργαλείο επίλυσης προβλημάτων σε πολλούς θεωρητικούς και εφαρμοσμένους επιστημονικούς τομείς (Fagan, 1992).

Η ευρύτατη χρήση της μεθόδου από τους μηχανικούς και τους επιστήμονες βασίζεται στην ικανότητα των πεπερασμένων στοιχείων να περιγράφουν και να αναλύουν προβλήματα που είναι εξαιρετικά πολύπλοκα και πολλές φορές, αδύνατο να επιλυθούν αναλυτικά. Η αναλυτική επίλυση ενός προβλήματος βασίζεται στην ανάπτυξη ενός μαθηματικού μοντέλου το οποίο μπορεί να αποδώσει τις ζητούμενες μεταβλητές σε οποιοδήποτε σημείο του υπό ανάλυση σώματος. Δυστυχώς η επίλυση αυτή μπορεί να γίνει μόνο για ορισμένα υπεραπλουστευμένα μοντέλα. Προβλήματα που αφορούν περίπλοκη γεωμετρία, ιδιότητες και συνοριακές συνθήκες είναι αδύνατον να επιλυθούν με αναλυτικές μεθόδους. Σε αυτήν τη περίπτωση οι αναλυτές πρέπει να καταφύγουν στην χρήση αριθμητικών μεθόδων μία εκ των οποίων είναι και αυτή των πεπερασμένων στοιχείων (Αγιουτάντης, 2002).

3.2 Περιγραφή της Μεθόδου

3.2.1 Βασική ιδέα

Οι βασικές αρχές που διέπουν την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δεν είναι ιδιαίτερα περίπλοκες. Για να γίνει κατανοητή η μέθοδος ας υποτεθεί ότι υπάρχει ένα σώμα στο οποίου ζητείται να βρεθεί η κατανομή μίας άγνωστης μεταβλητής όπως η μετατόπιση. Αρχικά το σώμα διαιρείται σε σύνολο μικρότερων γεωμετρικών μορφών γνωστών ως **«στοιχεία» (elements)**. Τα στοιχεία αυτά θεωρούνται συνδεμένα μεταξύ τους σε συγκεκριμένα σημεία τα οποία ονομάζονται **«κόμβοι» (nodes)**. Η διαδικασία του διαμερισμού του σώματος σε μικρότερα στοιχεία ονομάζεται διακριτοποίηση (Fagan, 1992).



Σχήμα 3.1: Διακριτοποίηση σώματος (Fagan, 1992)

Ανάλογα με τον αριθμό και το είδος των στοιχείων που έχουν επιλεχθεί να περιγράψουν το σώμα, η ζητούμενη άγνωστη μεταβλητή θεωρείται ότι επιδρά σε κάθε στοιχείο με κάποιο προκαθορισμένο τρόπο. Τελικά η κατανομή της άγνωστης μεταβλητής δια μέσου του σώματος προσεγγίζεται ικανοποιητικά εάν το σώμα έχει διακριτοποιηθεί σωστά (βλέπε σχήμα 3.1). Η κατανομή των μεταβλητών σε κάθε στοιχείο ορίζεται από μαθηματικές σχέσεις όπως είναι οι τριγωνομετρικές και οι πολυωνυμικές συναρτήσεις. Οι πολυωνυμικές χρησιμοποιούνται περισσότερο γιατί είναι απλός και εύχρηστος ο μαθηματικός τους χειρισμός και μπορούν να αποδώσουν με αρκετή ακρίβεια τις μετατοπίσεις των κόμβων (Fagan, 1992).

Μετά από την διαδικασία της διακριτοποίησης, υπολογίζονται οι εξισώσεις ισορροπίας που διέπουν το κάθε στοιχείο με βάση τη μέθοδο των μετατοπίσεων όπου και σχηματίζεται ένα σύστημα εξισώσεων. Το σύστημα αυτό περιγράφει τη συμπεριφορά όλων των στοιχείων του σώματος και κατά συνέπεια όλο το σώμα. Το σύστημα αυτών των εξισώσεων έχει την γενική μορφή:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \tag{3.1}$$

όπου [K] είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, (μητρώο ακαμψίας) του σώματος, {U} είναι το διάνυσμα των αγνώστων μετατοπίσεων στους κόμβους και {F} είναι το διάνυσμα που περιγράφει τις δυνάμεις που ασκούνται στους κόμβους.

Λύνοντας την εξίσωση (3.1) ως προς το διάνυσμα των μετατοπίσεων θα προκύψουν οι τιμές των αγνώστων μεταβλητών. Πριν όμως πραγματοποιηθεί η αναστροφή του μητρώου

ακαμψίας και η επίλυση της εξίσωσης, πρέπει να οριστούν οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται στο σώμα.

Σε προβλήματα τάσεων η εφαρμογή συνοριακών συνθηκών εμποδίζει το σώμα να συμπεριφέρεται σαν στερεό οπότε και να μετατοπίζεται κατά την εφαρμογή δυνάμεων. Η λύση της εξίσωσης (3.1) δεν είναι μια απλή διαδικασία. Η δυσκολία συναντάται στον μεγάλο αριθμό εξισώσεων που χρειάζονται για να περιγράψουν τον μεγάλο αριθμό κόμβων. Για παράδειγμα κάποια σώματα για να περιγραφούν σωστά χρειάζονται αρκετές χιλιάδες εξισώσεις. Είναι κατανοητό ότι η αναστροφή του μητρώου ακαμψίας δεν είναι εύκολη διαδικασία. Τα τελευταία χρόνια με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και τη δημιουργία ειδικών μαθηματικών μεθόδων έχει γίνει εφικτή η επίλυση αυτών των εξισώσεων σε ικανοποιητικά χρονικά όρια (Fagan 1992).

Από την στιγμή που θα λυθεί η εξίσωση (3.1) και θα βρεθούν οι άγνωστες μετατοπίσεις για κάθε κόμβο, είναι εύκολος ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και των τάσεων στα στοιχεία. Από την εύρεση των αγνώστων μετατοπίσεων γίνεται ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και των τάσεων σε όλο το σώμα (Fagan 1992).

Στη συνέχεια θα δοθεί μια αναλυτικότερη περιγραφή της μεθόδου με ιδιαίτερη έμφαση στον τρόπο χρήσης της από τους μηχανικούς και λιγότερο στις μαθηματικές αρχές που διέπουν τη μέθοδο. Αξίζει να αναφερθεί ότι το μαθηματικό υπόβαθρο των πεπερασμένων στοιχείων είναι τεράστιο και είναι αδύνατο να περιγραφεί με λεπτομέρεια αλλά και ξεφεύγει από το αντικείμενο μελέτης αυτής. Σκοπός είναι να δοθούν κάποιες βάσεις για την χρήση της μεθόδου και να γίνει μια προσπάθεια έτσι ώστε ο αναγνώστης να μην χρειαστεί να ανατρέξει σε διάφορα βοηθήματα για να κατανοήσει κάποιες βασικές έννοιες. Η μαθηματική ανάλυση της μεθόδου σε βάθος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε αυτούς που ασχολούνται με τον προγραμματισμό και την εξέλιξή της.

3.2.2 Διάρθρωση της Μεθόδου

Η διαδικασία που ακολουθείται σε μία ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε κάποιο λογισμικό πακέτο αποτελείται από τρία στάδια (Spyrakos 1996).

- Την **προ-επεξεργασία (pre-processing)** η οποία αποτελεί το βασικότερο μέρος ορισμού από το χρήστη των παραμέτρων της ανάλυσης. Σε αυτό το στάδιο γίνεται η διακριτοποίηση και η δημιουργία του προς ανάλυση μοντέλου. Εισάγονται οι εξισώσεις που διέπουν τους κόμβους, με την κατάλληλη επιλογή των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν (τριγωνικά, τετραγωνικά). Τέλος εισάγονται τα χαρακτηριστικά των υλικών και οι συνοριακές συνθήκες.

- Την **επεξεργασία (processing)** που αποτελεί το καθαρά μαθηματικό μέρος της μεθόδου και κατά κύριο λόγο εκτελείται από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή με τη βοήθεια του λογισμικού. Σε αυτό το στάδιο πραγματοποιείται ο υπολογισμός των μητρώων και των διανυσμάτων κάθε στοιχείου ξεχωριστά. Στη συνέχεια πραγματοποιείται η σύνδεση των επί μέρους πινάκων και διανυσμάτων ώστε να δημιουργηθούν οι εξισώσεις που περιγράφουν όλο το προς ανάλυση μοντέλο. Από τις εξισώσεις αυτές δημιουργείται το μητρώο ακαμψίας και τα διανύσματα όλου του μοντέλου. Σε αυτά εισάγονται και οι συνοριακές συνθήκες που επιδρούν στο μοντέλο. Στο τελευταίο μέρος αυτού σταδίου πραγματοποιείται η επίλυση των εξισώσεων και η εύρεση των αγνώστων μεταβλητών στους κόμβους.
- Την **μετά-επεξεργασία (post-processing)** όπου λαμβάνει χώρα η επεξεργασία των αποτελεσμάτων για να παρασταθούν στο μοντέλο οι τάσεις και οι παραμορφώσεις. Συνήθως αυτές, εκτός από τις αριθμητικές τους τιμές, μπορούν να παρασταθούν και γραφικά ώστε να είναι καλύτερα κατανοητές από τον μελετητή.

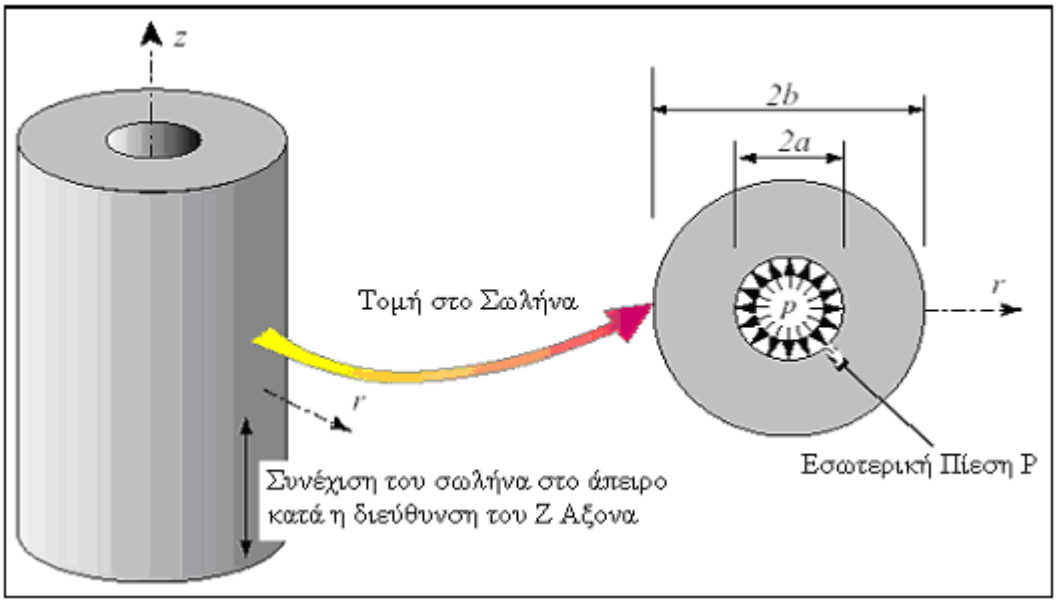
3.3 Διακριτοποίηση

Η διακριτοποίηση αποτελεί το πρώτο βήμα στην διαδικασία ανάλυσης με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αφού είναι γνωστή η προς ανάλυση γεωμετρία. Σκοπός της διακριτοποίησης είναι ο διαμερισμός του υπό εξέταση σώματος σε μικρότερα στοιχεία με τέτοιο τρόπο, ώστε η άγνωστη μεταβλητή να εκπροσωπείται με ικανοποιητικό τρόπο δια μέσου του σώματος.

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην διαδικασία της διακριτοποίησης ώστε το μοντέλο που θα δημιουργηθεί να προσφέρει όσο το δυνατόν καλύτερη ακρίβεια στον μικρότερο δυνατό χρόνο, δηλαδή, οικονομία πεπερασμένων στοιχείων άρα και χρόνου ανάλυσης. Η απαλοιφή του προβλήματος αυτού (του χρόνου επίλυσης) μπορεί να επιτευχθεί από τη χρήση απλοποιημένης γεωμετρίας και την παρουσία συμμετρίας μέσα στο μοντέλο. (βλέπε σχήματα 3.2 και 3.3) (Fagan 1992).

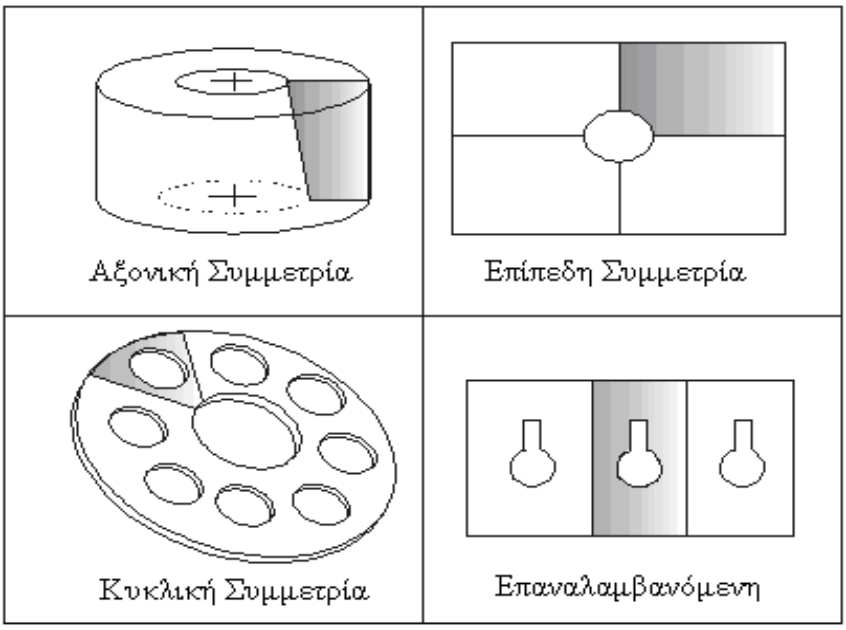
Όλα τα σώματα και οι κατασκευές στην πραγματικότητα αποτελούνται από τρεις διαστάσεις. Πολλές φορές όμως για λόγους απλότητας και ευκολίας, προβλήματα τριών διαστάσεων ανάγονται στο επίπεδο με μικρή μείωση της ακρίβειας της ανάλυσης. Αν η γεωμετρία και τα φορτία που ασκούνται σε κάποιο σώμα μπορούν να παρασταθούν σε ένα επίπεδο τότε το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί σε δύο διαστάσεις.

Τέτοιου είδους σώματα είναι αυτά που διαθέτουν μια μεγάλη διάσταση σε σχέση με τις άλλες και σε αυτή τη διάσταση, η γεωμετρία και τα φορτία που ασκούνται σε αυτή δεν μεταβάλλονται σημαντικά, τότε η ανάλυση αυτών μπορεί να γίνει με την θεώρηση επίπεδης τάσης ή επίπεδης παραμόρφωσης. (Οι δυο αυτές θεωρήσεις λύσεων αναπτύσσονται αναλυτικά πιο κάτω, Βλέπε 3.10.1)



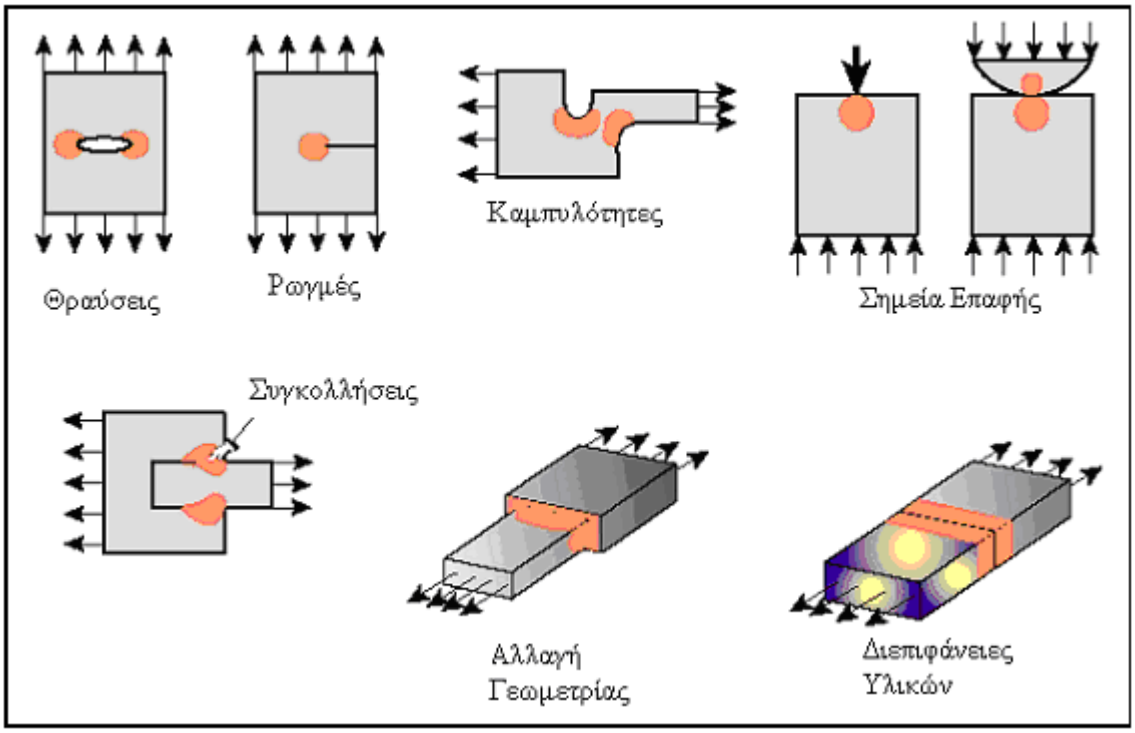
Σχήμα 3.2: Απλοποίηση γεωμετρίας από 3D σε 2D για εξοικονόμηση χρόνου επίλυσης (Felippa, 2003)

Εκτός από τη γεωμετρική απλοποίηση που μπορεί να πραγματοποιηθεί σε κάποιο υπό μελέτη σώμα υπάρχει και η απλοποίηση λόγω συμμετρίας. Υπάρχουν κυρίως τέσσερα είδη συμμετρίας που συναντώνται στα προβλήματα μηχανικής, η **αξονική**, η **επίπεδη**, η **κυκλική** και η **επαναλαμβανόμενη**. Τα πιο πάνω φαίνονται στο σχήμα 3.3. Αν η γεωμετρία του σώματος και οι εξωτερικοί παράγοντες όπως είναι τα φορτία που δέχεται το σώμα παρουσιάζουν κάποιο από τα παραπάνω είδη συμμετρίας, μπορεί να αναλυθεί μέρος του σώματος που παρουσιάζει συμμετρία και όχι ολόκληρο. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στο μέρος του σώματος που αναλύεται ώστε πραγματικά να αντικατοπτρίζεται η συμμετρία του σώματος (Fagan 1992).



Σχήμα 3.3: Είδη συμμετρίας (Fagan 1992)

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίδεται στην περιοχή όπου περιμένουμε μεγάλη μεταβολή των μεταβλητών. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται διάφορα προβλήματα και που πρέπει να δοθεί έμφαση στην διακριτοποίηση τους

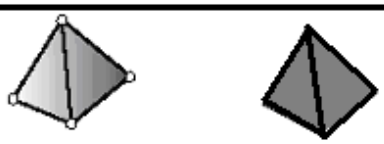
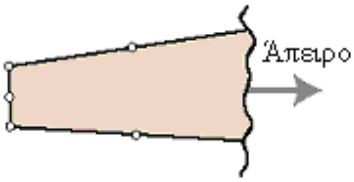


Σχήμα 3.4: Περιοχές έμφασης της διακριτοποίησης (Felippa, 2003)

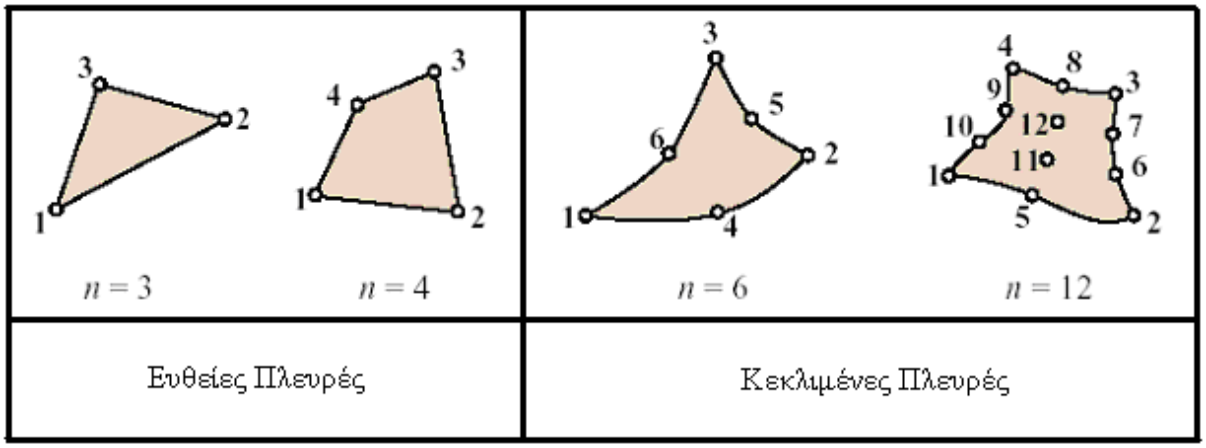
3.4 Είδη Στοιχείων

Από τη στιγμή που θα αποφασισθεί το σώμα ή μέρος του σώματος που θα αναλυθεί πρέπει να επιλεγεί το κατάλληλο ή τα κατάλληλα είδη στοιχείων τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την διακριτοποίηση του. Τα βασικά στοιχεία που χρησιμοποιεί η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζονται στον πίνακα 3.1. Τα στοιχεία διακρίνονται από απλά σημεία μέχρι και γεωμετρικά σχήματα τριών διαστάσεων.

Πίνακας 3.1: Βασικά στοιχεία ανάλυσης (Felippa, 2003)

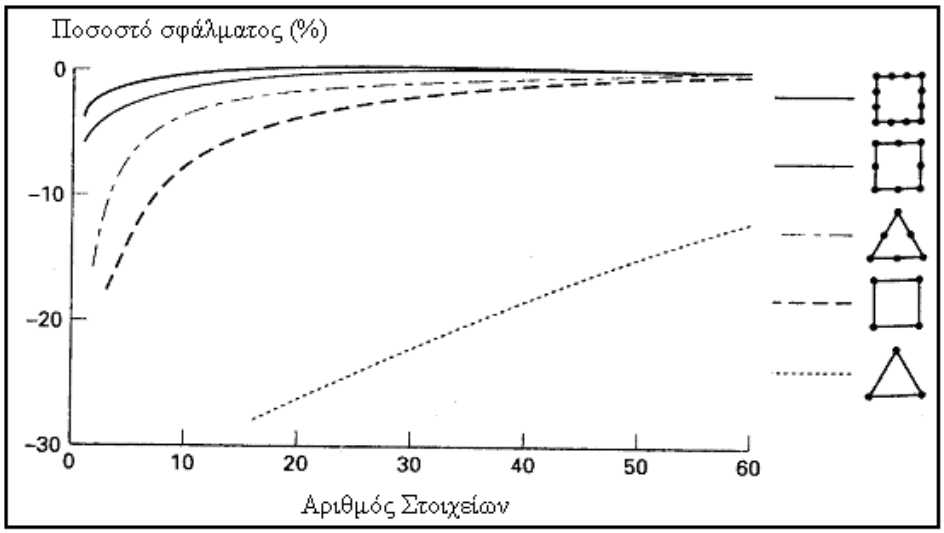
Διάσταση	Γεωμετρία Στοιχείου	Τύπος
1D		Δοκός
2D		Πλάκα
2D		Κελύφη
3D		3D Σώματα
2D		Ειδικά στοιχεία Θραυστομηχανικής (ρωγμές)
2D		Ειδικά στοιχεία συνεχούς μέσου

Οι πλευρές των στοιχείων μπορούν να είναι ευθείες ή κεκλιμένες με περισσότερους κόμβους από ότι οι ακμές τους. Στο σχήμα 3.5 φαίνονται τέτοιου τύπου στοιχεία.



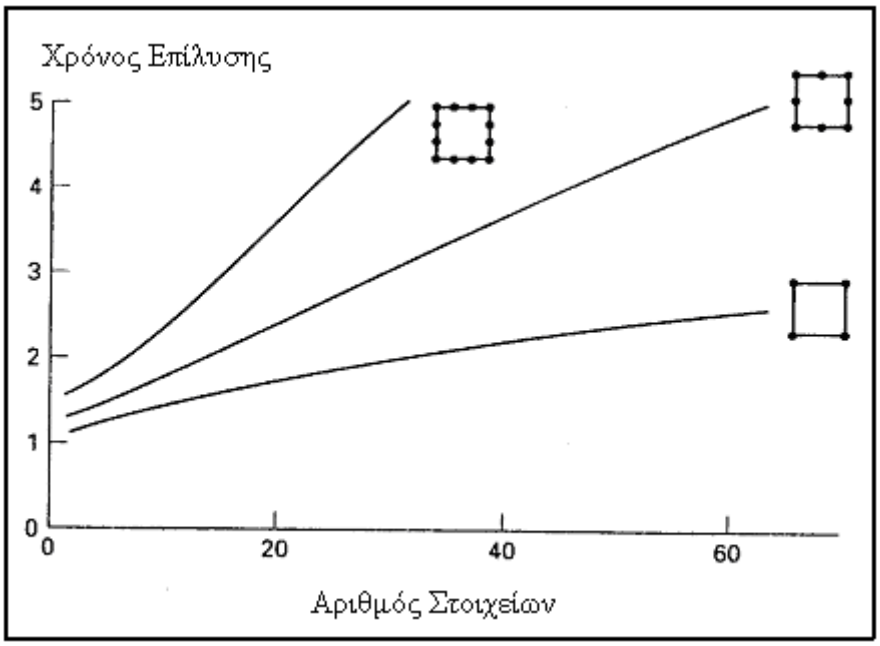
Σχήμα 3.5: Είδη στοιχείων (Felippa, 2003)

Όταν χρησιμοποιούνται στοιχεία με κεκλιμένες πλευρές ο χρόνος και η πολυπλοκότητα της επίλυσης αυξάνονται σημαντικά. Αυτό συμβαίνει γιατί η μέθοδος λειτουργεί προσεγγίζοντας τη μεταβολή που υφίσταται κάποια μεταβλητή μέσα στο σώμα με κάποια γνωστή συνάρτηση (συνήθως πολυωνυμικού χαρακτήρα) δια μέσου κάθε πεπερασμένου στοιχείου. Όμως και η γεωμετρία του κάθε κεκλιμένου στοιχείου περιγράφεται με κάποια πολυωνυμική συνάρτηση. Στην περίπτωση που η πολυωνυμική συνάρτηση που περιγράφει την μεταβλητή είναι του ιδίου βαθμού με αυτή που περιγράφει τη γεωμετρία τότε τα στοιχεία αυτά ονομάζονται ισοπαραμετρικά. Είναι λοιπόν λογικό, χρησιμοποιώντας στοιχεία με κεκλιμένες πλευρές να περιγράφεται με μεγαλύτερη ακρίβεια η γεωμετρία του υπό μελέτη σώματος, αλλά ταυτόχρονα αυξάνει ο βαθμός των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Στο γράφημα 3.1 φαίνεται η ακρίβεια επίλυσης με διάφορα είδη στοιχείων



Γράφημα 3.1: Ακρίβεια επίλυσης για διαφορετικούς τύπους στοιχείων (Fagan, 1992)

Με την αύξηση του βαθμού των πολυωνυμικών συναρτήσεων έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της πολυπλοκότητας του υπό επίλυση συστήματος εξισώσεων αλλά και του χρόνου επίλυσης. Στο γράφημα 3.2 φαίνεται ο χρόνος επίλυσης συναρτήσει του αριθμού στοιχείων για τετραγωνικά στοιχεία.



Γράφημα 3.2: Χρόνος επίλυσης συναρτήσει αριθμού στοιχείων (Fagan, 1992)

Από το παραπάνω γράφημα είναι προφανές ότι όσο περισσότερους κόμβους έχει ένα στοιχείο αυξάνεται και ο βαθμός των πολυωνυμικών συναρτήσεων άρα και ο χρόνος επίλυσης του συστήματος. Η επιλογή του καταλληλότερου στοιχείου γίνεται ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια αλλά και του επιθυμητού χρόνου επίλυσης για συγκεκριμένα προβλήματα. Περισσότερα για την κατάλληλη επιλογή στοιχείων αναπτύσσονται παρακάτω.

3.5 Διαίρεση του Πεδίου

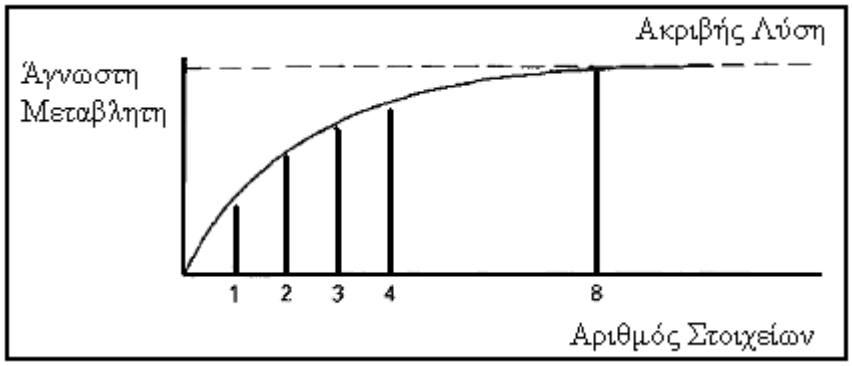
Ο σημαντικότερος ίσως παράγοντας για την επιτυχή προσομοίωση της συμπεριφοράς ενός σώματος είναι η κατάλληλη διαίρεση του σώματος (πεδίου) σε επιμέρους τμήματα (στοιχεία). Οι παράμετροι που λαμβάνονται υπόψη είναι:

- Επιλογή γεωμετρικής μορφής του στοιχείου (π.χ τετραγωνικό)
- Επιλογή αριθμού κόμβων του στοιχείου (π.χ τετρακομβικό ή οκτακομβικό)
- Επιλογή συναρτήσεων μορφής του κάθε στοιχείου
- Επιλογή πυκνότητας καννάβου

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή επιλέγονται μικρότερα στοιχεία στην περιοχή όπου αναμένεται μεταβολή υπολογιζόμενων μεταβλητών. Παρουσιάζεται λοιπόν το πρόβλημα ως προς το πιο είναι το πιο κατάλληλο στοιχείο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση που πραγματοποιείται. Το πρόβλημα φαίνεται να περιπλέκεται αν ληφθεί υπόψη ότι τα μεγάλα λογισμικά πακέτα των πεπερασμένων στοιχείων διαθέτουν πάνω από εκατό πενήντα διαφορετικά είδη στοιχείων. Παρόλα αυτά η επιλογή του κατάλληλου στοιχείου δεν είναι τόσο δύσκολη (Αγιουτάντης, 2002).

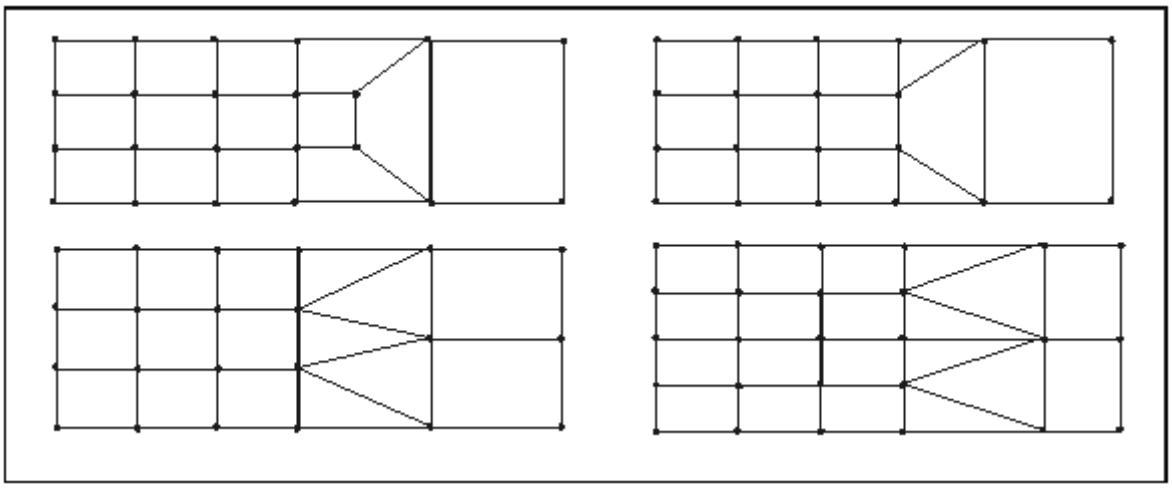
Αρχικά αναγνωρίζεται το είδος του προβλήματος που πρόκειται να αναλυθεί (τάσης, παραμόρφωσης), και εξαιρούνται ορισμένα στοιχεία. Στη συνέχεια επιλέγονται οι διαστάσεις που θα λάβει χώρα η ανάλυση (3D,2D,1D) οπότε ο αριθμός των πιθανών στοιχείων μειώνεται περισσότερο. Τέλος πρέπει να αναγνωριστεί από το μελετητή η μηχανική συμπεριφορά του υπό ανάλυση σώματος. Έτσι κάποιο σώμα μπορεί να θεωρηθεί ράβδος σε στρέψη ή δοκός σε κάμψη, κλπ. οπότε, τα στοιχεία που μπορούν να εφαρμοστούν έχουν φτάσει να είναι περίπου δύο ή τρία. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι το στοιχείο που θα επιλεγεί θα πρέπει συνήθως να είναι το απλούστερο δυνατό, θα περιέχει όμως όλους τους βαθμούς ελευθερίας (περιστροφές, παραμορφώσεις) που απαιτούνται για να αναλυθεί σωστά το πρόβλημα.

Από τη στιγμή που θα επιλεγεί το κατάλληλο στοιχείο, δημιουργείται το ερώτημα του μεγέθους και του αριθμού των στοιχείων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Είναι εύκολα κατανοητό ότι ο αριθμός τους είναι αντιστρόφως ανάλογος του μεγέθους τους, δηλαδή όσο αυξάνονται τα στοιχεία θα πρέπει να μικραίνει το μέγεθος τους. Εύκολα μπορεί κανείς να υποθέσει ότι όσο μικρότερα είναι τα στοιχεία τόσο πιο κοντά στην πραγματική λύση βρίσκεται η ανάλυση. Όσο όμως μικρότερα γίνονται τα στοιχεία τόσο αυξάνει ο αριθμός τους άρα και οι εξισώσεις που τα περιγράφουν. Αποτέλεσμα αυτού είναι η αύξηση του χρόνου ανάλυσης. Επίσης μετά από ένα αριθμό στοιχειών η ακρίβεια της λύσης προσεγγίζει ασυμπτωτικά την πραγματική τιμή της (Βλέπε γράφημα 3.3). Στο γράφημα 3.3 παρατηρείται ότι η ακρίβεια από το 4° στο 8° στοιχείο δεν μεταβλήθηκε πάνω από 5%. Είναι φανερό ότι μετά από κάποιο σημείο, όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων απλά μεγαλώνει ο χρόνος της ανάλυσης χωρίς να αυξάνει ιδιαίτερα η ακρίβεια (Desai, 1979, Fagan, 1996). Η αντιμετώπιση του προβλήματος του χρόνου επίλυσης γίνεται με επίλυση του προβλήματος δυο φορές με συγκεκριμένο αριθμό στοιχείων και στη συνέχεια με λεπτομερέστερη υποδιαίρεση ώστε να γίνει σύγκλιση ταχύτητας λύσης.

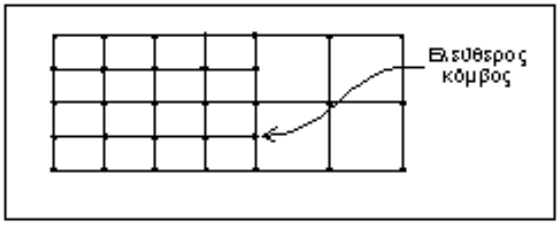


Γράφημα 3.3: Ταχύτητα σύγκλισης (Fagan, 1992)

Είναι πολύ σημαντικό σε κάθε ανάλυση που πραγματοποιείται, να συνδέεται η ακρίβεια που ζητείται από την μέθοδο με αυτήν που εφαρμόζεται στην πράξη. Επιπλέον δεν υπάρχει λόγος τα στοιχεία που περιγράφουν το πρόβλημα να έχουν όλα τις ίδιες διαστάσεις. Είναι προτιμότερο να έχουν διαφορετικές διαστάσεις με σκοπό την πύκνωση του πλέγματος (mesh) στα σημεία που αναμένεται γρήγορη μεταβολή της άγνωστης μεταβλητής και την αραίωση του πλέγματος σε άλλα σημεία Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί κατά την διαδικασία της πύκνωσης και της αραίωσης ώστε να μην μείνουν ελεύθεροι κόμβοι (Αγιουτάντης, 2002).



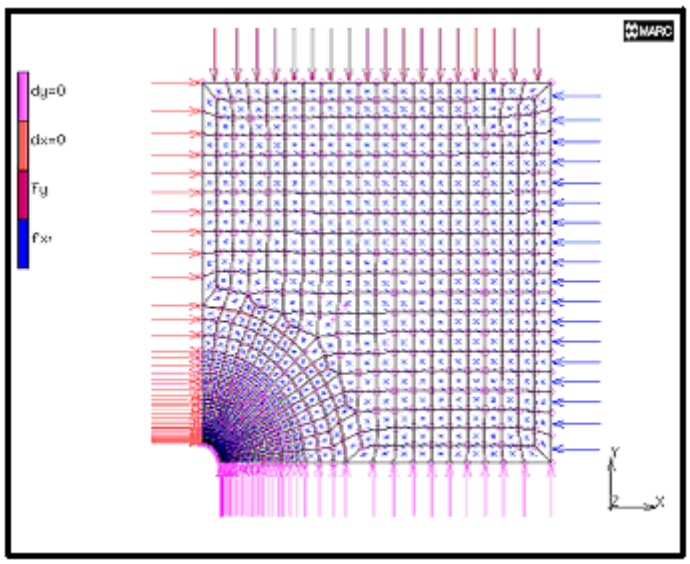
Σχήμα 3.6: Σωστός τρόπος αραίωσης του πλέγματος (Fagan, 1992)



Σχήμα 3.7: Λανθασμένη αραίωση πλέγματος (Fagan, 1992)

Ένα άλλο πρόβλημα που παρουσιάζεται κατά την διακριτοποίηση κάποιου σώματος είναι η παραμόρφωση (distortion) και η μεταβολή του σχήματος των στοιχείων. Για να πραγματοποιηθεί μια σωστή και ακριβής ανάλυση τα στοιχεία πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο ομοιόμορφα μεταξύ τους. Πρέπει να αποφεύγονται στοιχεία μακριά και στενά ή με πολύ μεγάλες ή μικρές εσωτερικές γωνίες.

Ο έλεγχος της παραμόρφωσης επιτυγχάνεται υπολογίζοντας το λόγο της μεγαλύτερης προς την μικρότερη διάσταση του στοιχείου (aspect ratio). Ένας άλλος τρόπος ελέγχου της παραμόρφωσης είναι η μέτρηση των εσωτερικών γωνιών. Για τριγωνικό στοιχείο οι εσωτερικές γωνίες πρέπει, να βρίσκονται μεταξύ 45° και 75°, ενώ σε τετράπλευρο οι γωνίες πρέπει να κυμαίνονται μεταξύ 45° και 135° (Fagan, 1992).



Σχήμα 3.8: Διακριτοποίηση (αραίωση πλέγματος) και επιβολή συνοριακών συνθηκών

Τέλος, όταν τα στοιχεία περιέχουν ενδιάμεσους κόμβους και οι πλευρές τους καμπυλώνονται για να αποδώσουν καλύτερα την γεωμετρία του σώματος, οι ενδιάμεσοι κόμβοι δεν πρέπει να μετατοπίζονται πολύ προς τα άκρα του στοιχείου γιατί τότε αυξάνεται το σφάλμα της μεθόδου. Οι κόμβοι αυτοί πρέπει να παραμένουν κοντά στη μέση της κάθε πλευράς (Desai, 1979, Fagan, 1992).

Όπως έχει αναφέρει προηγουμένως, από την στιγμή που θα αποδοθούν οι εξισώσεις για κάθε στοιχείο, συνδυάζονται για να δημιουργήσουν το σύστημα των εξισώσεων για ολόκληρο το μοντέλο. Το σύστημα αυτό συνήθως επιλύεται με δύο τρόπους.

Την **απαλοιφή Gauss** και την μέθοδο του **μετώπου κύματος** (wave front method). Αυτές οι μέθοδοι δεν κρίνεται σκόπιμο να αναλυθούν εδώ αν και σε άλλα κεφάλαια θα αναλύσουμε κάποιες μεθόδους. Αξίζει να αναφερθεί ότι τα μεγάλα λογισμικά πακέτα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιούν κατά κύριο λόγο την μέθοδο μετώπου κύματος για την επίλυση των εξισώσεων γιατί η μέθοδος αυτή απαιτεί λιγότερο χώρο μνήμης του υπολογιστή. Αυτό συμβαίνει γιατί με τη μέθοδο αυτή δεν σχηματίζεται ολόκληρο το μητρώο ακαμψίας του μοντέλου όπως συμβαίνει με τη μέθοδο Gauss, αλλά κάθε στοιχείο αναλύεται ξεχωριστά. Τα δεδομένα του στοιχείου που έχει αναλυθεί απαλείφονται από το μητρώο ακαμψίας και καταχωρούνται αλλού για να χρησιμοποιηθούν όταν χρειαστούν.

Όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος απαλοιφής Gauss η αρίθμηση των κόμβων πρέπει να πραγματοποιείται κατά μήκος της μικρότερης διάστασης του υπό ανάλυση σώματος. Αντίθετα η αρίθμηση των κόμβων στη μέθοδο μετώπου κύματος μπορεί να γίνει με οποιοδήποτε τρόπο αρκεί η αρίθμηση των στοιχείων να πραγματοποιείται κατά μήκος της μικρότερης διάστασης (Fagan, 1992).

3.6 Συναρτήσεις Παρεμβολής και Πεπερασμένα Στοιχεία

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων λειτουργεί θεωρώντας μια γνωστή κατανομή διαμέσου κάθε στοιχείου για τις άγνωστες μεταβλητές. Οι εξισώσεις που ορίζουν την προσεγγιστική κατανομή των μεταβλητών ονομάζονται συναρτήσεις παρεμβολής και μπορούν να διατυπωθούν με οποιαδήποτε μαθηματική μορφή. Στην πράξη όμως χρησιμοποιείται η πολυωνυμική. Η επιλογή αυτή είναι αρκετά δημοφιλής λόγο της ευκολίας του μαθηματικού χειρισμού της. Η μορφή αυτή είναι αρκετά απλή για να παραγωγιστεί και να ολοκληρωθεί. Επίσης η ακρίβεια της ανάλυσης μπορεί να βελτιωθεί με την αύξηση του βαθμού των πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Είναι φανερό ότι όσο υψηλότερου βαθμού είναι τα πολυώνυμα τόσο πιο κοντά στην πραγματική λύση βρίσκεται η ανάλυσή. Όμως με την αύξηση του βαθμού του πολυωνύμου αυξάνει και ο αριθμός των υπολογισμών που πρέπει να πραγματοποιηθούν για να αναλυθεί το μοντέλο. Χαρακτηριστικά μπορεί να αναφερθεί ότι η ανάλυση στοιχείου που περιγράφεται με δευτέρου βαθμού πολυώνυμο απαιτεί τριπλάσιο υπολογιστικό χρόνο από ότι ένα γραμμικά ορισμένο στοιχείο.

Για τον λόγο αυτό πολλές φορές προτιμάται η χρήση πυκνότερου πλέγματος στοιχείων χαμηλότερου βαθμού, από ότι αραιότερο πλέγμα στοιχείων μεγαλύτερου βαθμού (Desai 1986, Fagan 1992). Η γραμμική συνάρτηση μετατόπισης λαμβάνει την μορφή:

$$u(x)=\alpha_1+x\cdot\alpha_2 \tag{3.2}$$

όπου α_1, α_2 είναι σταθερές που υπολογίζονται αντικαθιστώντας $u(x)=u(x_i)$ και $u(x)=u(x_j)$.
Η δευτεροβάθμια μορφή της συνάρτησης είναι:

$$u(x,y)=\alpha_1+x\cdot\alpha_2+x^2\cdot\alpha_3 \tag{3.3}$$

Οι σταθερές (α_i) υπολογίζονται από τη γεωμετρία του στοιχείου το οποίο περιγράφει η συνάρτηση. Όσο αυξάνει ο βαθμός του πολυωνύμου τόσο αυξάνει και ο αριθμός των σταθερών όρων, κατά συνέπεια το ίδιο συμβαίνει και στους κόμβους του.

Η επέκταση της ιδέας αυτής στις άλλες διαστάσεις είναι απλή. Για παράδειγμα η γραμμική συνάρτηση παρεμβολής στις δύο διαστάσεις λαμβάνει την μορφή:

$$u(x,y)=\alpha_1+x\cdot\alpha_2+y\cdot\alpha_3 \tag{3.4}$$

Αυτή έχει τρεις σταθερές ($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) άρα το στοιχείο που αντιπροσωπεύει την παραπάνω συνάρτηση απαιτείται να έχει τρεις κόμβους και να βρίσκεται στο επίπεδο. Το στοιχείο αυτό είναι το απλό τριγωνικό που χρησιμοποιείται ευρέως στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ομοίως, η συνάρτηση:

$$u(x,y)=\alpha_1+x\cdot\alpha_2+y\cdot\alpha_3+x\cdot y.\alpha_4 \tag{3.5}$$

διαθέτει τέσσερις σταθερούς όρους, άρα και τέσσερις κόμβους. Το στοιχείο αυτό είναι το απλό τετραπλευρικό στοιχείο.

Η γενική μορφή των πολυωνύμων παρεμβολής για την περιγραφή της άγνωστης μεταβλητής όπως προκύπτει από τα παραπάνω είναι:

$$u(x,y)=\alpha_1+x\cdot\alpha_2+y\cdot\alpha_3+\alpha_4\cdot x^2+\alpha_5\cdot x\cdot y+\alpha_6 y^2+\ldots+\alpha_m\cdot y^n$$

$$u(x,y)=\alpha_{m+1}+x\cdot\alpha_{m+2}+y\cdot\alpha_{m+3}+\alpha_{m+4}\cdot x^2+\alpha_{m+5}\cdot x\cdot y+\alpha_{m+6} y^2+\ldots+\alpha_{2m}\cdot y^n \tag{3.6α}$$

όπου:

$$m = \sum_{i=1}^{n+1} i$$

Η εξίσωση (3.6α) μπορεί να παρασταθεί σε μορφή πινάκων:

$$\{u(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [\varphi]\{\alpha] = \begin{bmatrix} \{\varphi_1\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\varphi_1\}^T \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\{\varphi\}^T = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ \ldots y^n] \qquad (3.6\beta)$$

$$\{\alpha\}^T = [\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ \ldots \ \alpha_{2m}]$$

Όπου $\{\varphi\}^T$ είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων και $\{\alpha\}^T$ το διάνυσμα των συντελεστών των αγνώστων, οι οποίοι είναι γνωστοί και ως γενικευμένες συντεταγμένες. Καθώς τα μοντέλα μετατόπισης που εκφράζουν οι παραπάνω εξισώσεις διατυπώνονται μέσω γενικευμένων μεταβλητών (α), αναφέρονται ως μοντέλα μετατόπισης γενικευμένων συντεταγμένων. Η μορφή αυτή των μοντέλων μετατόπισης αποτελεί τη βασική μορφή των μοντέλων μετατόπισης που χρησιμοποιεί, κατά την εφαρμογή της, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Desai, 1979)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι δεν είναι δυνατόν να γίνει επιλογή ενός μοντέλου μετατόπισης που να περιγράφει επακριβώς την πραγματική κατανομή των μετατοπίσεων σε κάθε στοιχείο. Επομένως το μοντέλο μετατόπισης που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση θα πρέπει να πληρεί κάποιες προϋποθέσεις ώστε να διασφαλίζεται η σύγκλιση της λύσης στην πραγματική τιμή (Desai, 1979).

1η προϋπόθεση: Τα μοντέλα μετατόπισης πρέπει να είναι συνεχή στο εσωτερικό των στοιχείων ενώ παράλληλα, οι μετατοπίσεις γειτονικών σημείων πρέπει να είναι συμβατές μεταξύ τους.

2η προϋπόθεση: Τα μοντέλα μετατόπισης πρέπει να περιλαμβάνουν και τις μετατοπίσεις στερεού άκαμπτου σώματος.

3η προϋπόθεση: Τα μοντέλα μετατόπισης πρέπει να περιλαμβάνουν και την περίπτωση κατά την οποία όλα τα σημεία ενός στοιχείου υφίστανται την ίδια παραμόρφωση.

Τα στοιχεία που ικανοποιούν την πρώτη προϋπόθεση καλούνται **προσαρμοσμένα** ή **σύμμορφα**. Τα στοιχεία που δεν πληρούν την προϋπόθεση αυτή ονομάζονται **ασύμμορφα**. Τα στοιχεία που πληρούν τόσο την δεύτερη όσο και την τρίτη καλούνται **πλήρη.** Για να έχει κάποιο νόημα η χρήση διαφορικών αρχών για την διατύπωση των εξισώσεων, που αποτελούν την μαθηματική έκφραση της μεθόδου, θα πρέπει να διασφαλίζεται η συνέχεια και η μη-μηδενικότητα των παραγώγων της μετατόπισης έως και τη μεγαλύτερη τάξη, που εμφανίζεται στις εκφράσεις της διαφορικής αρχής (Desai, 1979).

3.7 Καταστατικές εξισώσεις στοιχείου και σύνθεση του τελικού συστήματος εξισώσεων

Μία από τις κυριότερες εφαρμογές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η ανάλυση προβλημάτων εντατικού πεδίου. Η μέθοδος μπορεί εύκολα να αντιμετωπίσει την εφαρμογή αρκετών μορφών φόρτισης. Μερικές από αυτές είναι οι συγκεντρωμένες δυνάμεις, οι κατανεμημένες πιέσεις, οι εσωτερικές δυνάμεις σώματος (βαρυτικές), οι αρχικές παραμορφώσεις και οι επιβαλλόμενες μετατοπίσεις.

Όπως συμβαίνει σε όλες τις αναλύσεις ελαστικότητας έτσι και στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων εφαρμόζεται η αρχή της υπέρθεσης (superposition). Με την αρχή αυτή γίνεται εφικτή η ανάλυση οποιουδήποτε συνδυασμού εφαρμοζόμενων φορτίων και την παράσταση τους τελικά σε μετατοπίσεις κόμβων. Από τις μετατοπίσεις αυτές υπολογίζονται οι παραμορφώσεις και στη συνέχεια οι τάσεις. Για να πραγματοποιηθεί αυτού του είδους η ανάλυση έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι, με πιο συχνά χρησιμοποιούμενη τη μέθοδο ελαχιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας του συστήματος (Fagan, 1992).

Σύμφωνα με αυτή, η δυναμική ενέργεια (Π), ισούται με την ενέργεια παραμόρφωσης του σώματος (Λ), αφαιρώντας το έργο (W) που παράγεται από την εφαρμογή των εξωτερικών φορτίσεων στο σώμα.

$$\Pi = \Lambda - W \tag{3.7}$$

Για απειροστό στοιχείο, όγκου (dV), η ενέργεια παραμόρφωσης υπολογίζεται ως:

$$d\Lambda = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\} - \frac{1}{2}\{\varepsilon_0\}^T\{\sigma\} \tag{3.8}$$

Όπου $\{\varepsilon\}$ είναι το διάνυσμα των ολικών παραμορφώσεων, $\{\varepsilon_0\}$ το διάνυσμα των αρχικών παραμορφώσεων και $\{\sigma\}$ το διάνυσμα των τάσεων. Πρέπει να σημειωθεί ότι το $\{\varepsilon\}$ αποτελείται από τις ολικές παραμορφώσεις και περιλαμβάνει τις τιμές των αρχικών παραμορφώσεων. Η ολική ενέργεια παραμόρφωσης για πεπερασμένο όγκο υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την σχέση (3.8) ως προς τον όγκο:

$$\Lambda = \int_V \frac{1}{2}\left(\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{\varepsilon_0\}^T \{\sigma\} \right) dV \tag{3.9}$$

Για ανάλυση που λαμβάνει χώρα στην επίπεδη παραμόρφωση και σύμφωνα με την σύνδεση τάσης-παραμόρφωσης μέσω των ελαστικών σταθερών ισχύει:

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\} \tag{3.10α}$$

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\} \tag{3.10β}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - [D]\{\varepsilon_0\} \tag{3.11}$$

όπου

$$[D] = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.11) στη σχέση (3.9):

$$\Lambda = \frac{1}{2}\int_V \left(\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} - 2\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_0\}^T [D]\{\varepsilon_0\} \right) dV \tag{3.13}$$

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων διαιρεί τον όγκο σε έναν αριθμό μικρότερων στοιχείων και προσεγγίζει τις μετατοπίσεις διαμέσου κάθε στοιχείου ξεχωριστά σύμφωνα με τη σχέση:

$$\{u\} = [N]\{U\} \tag{3.14}$$

Όπου [N] το μητρώο συναρτήσεων τις γεωμετρίας των στοιχείων και {U} το διάνυσμα των μετατοπίσεων. Πιο συγκεκριμένα στις δύο διαστάσεις:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = [N]\{U\} \tag{3.15}$$

Οι παραμορφώσεις είναι απλές συναρτήσεις των μετατοπίσεων αυτών. Σύμφωνα λοιπόν με τη βασική θεωρία ελαστικότητας, στο επίπεδο ισχύει:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.16}$$

Εάν οι παραμορφώσεις αυτές διατυπωθούν σε μορφή διανύσματος όπως στη σχέση (3.10α), μπορούν στη συνέχεια να συσχετιστούν με τη μετατόπιση κόμβων σύμφωνα με τη σχέση:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\} \tag{3.17}$$

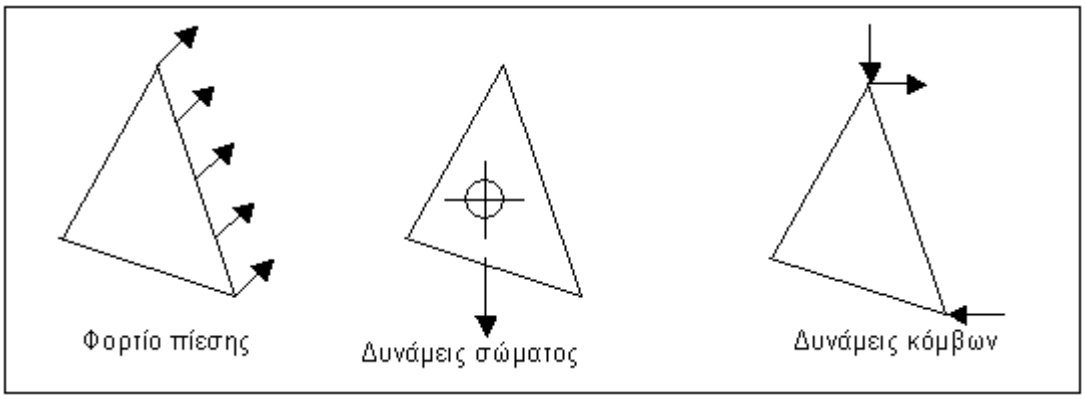
Όπου [B] ο πίνακας που προκύπτει από την κατάλληλη διαφόριση των συναρτήσεων γεωμετρίας.

Συνδέοντας τη σχέση (3.13) τη σχέση (3.17) υπολογίζεται η ενέργεια παραμόρφωσης $\Lambda^{(e)}$ για κάθε στοιχείο ξεχωριστά:

$$\Lambda^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{V^{(e)}} \begin{pmatrix} \{U^{(e)}\}^T[B^{(e)}]^T[D^{(e)}][B^{(e)}]\{U^{(e)}\} - 2\{U^{(e)}\}^T[B^{(e)}]^T[D^{(e)}]\{\varepsilon_0{}^{(e)}\} + \\ + \{\varepsilon_0^{(e)}\}^T[D^{(e)}]\{\varepsilon_0^{(e)}\} \end{pmatrix} dv \tag{3.18}$$

Αθροίζοντας, στη συνέχεια, τις ενέργειες παραμόρφωσης για κάθε στοιχείο μπορεί να υπολογιστεί η ενέργεια παραμόρφωσης ολόκληρου του σώματος (Fagan, 1992).

Το έργο που παράγεται σε κάποιο στοιχείο από τα επιβαλλόμενα φορτία, μπορεί να διαχωριστεί σε τρεις κατηγορίες. Το έργο που παράγεται από τις κατανεμημένες πιέσεις που ασκούνται στο σώμα, από τις εσωτερικές δυνάμεις του σώματος και τέλος από τα φορτία που που βρίσκονται συγκεντρωμένα στους κόμβους.



Σχήμα 3.9: Είδη επιβαλλόμενων φορτίων στα στοιχεία (Fagan, 1992)

Γενικά το έργο που παράγεται ισούται με το μέγεθος της δύναμης πολλαπλασιασμένο με το μέτρο της απόστασης που το σώμα στο οποίο ασκήθηκε η δύναμη κινήθηκε. Εάν οι δυνάμεις σώματος ανά μονάδα όγκου συμβολιστούν X, Y, Z τότε για ένα στοιχείο το έργο που παράγεται από τις δυνάμεις αυτές ισούται με:

$$W_B^{(e)} = \int_{V^{(e)}} (uX^{(e)} + vY^{(e)} + wZ^{(e)})dV \tag{3.19}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.14) η σχέση (3.19) παίρνει τη μορφή:

$$W_B^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \{U^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} X^{(e)} \\ Y^{(e)} \\ Z^{(e)} \end{Bmatrix} dV \tag{3.20}$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζεται το έργο που παράγεται από τις πιέσεις που ασκούνται σε κάποια επιφάνεια του στοιχείου και δίνεται από τη σχέση:

$$W_P^{(e)} = \int_{S^{(e)}} \{U^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS \tag{3.21}$$

Όπου p_x, p_y, p_z η κατανομή των πιέσεων παράλληλα στους άξονες συντεταγμένων του στοιχείου. Το πρόσημο των πιέσεων είναι θετικό όταν η φορά τους είναι ομόρροπη με τον θετικό άξονα των συντεταγμένων (Fagan 1992).

Ο υπολογισμός του έργου που παράγουν τα φορτία που συγκεντρώνονται στους κόμβους του στοιχείου είναι πιο απλός. Εάν $\{P^{(e)}\}$ είναι κάποιο διάνυσμα των κομβικών φορτίων τότε το έργο που παράγεται ισούται με:

$$W_C^{(e)} = \{U^{(e)}\}^T\{P^{(e)}\} \tag{3.22}$$

Τελικά η δυναμική ενέργεια ενός στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi^{(e)} = \Lambda^{(e)} - W_B^{(e)} - W_P^{(e)} - W_C^{(e)} \tag{3.23}$$

Η δυναμική ενέργεια ολόκληρου του συστήματος υπολογίζεται από το άθροισμα των επιμέρους δυναμικών ενεργειών των στοιχείων.

$$\Pi = \sum_{e=1}^{E} \Pi^{(e)} \tag{3.24}$$

Για να βρίσκεται το σώμα σε ισορροπία πρέπει η δυναμική του ενέργεια να λαμβάνει μια ελάχιστη τιμή. Η μαθηματική έκφραση της αρχής αυτής είναι:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U_S\}} = 0 \tag{3.25}$$

Όπου $\{U_S\}$ είναι το διάνυσμα όλων των βαθμών ελευθερίας του μοντέλου και αποτελείται από όλα τα διανύσματα των μετατοπίσεων των κόμβων, των στοιχείων.

Επιλύνοντας της σχέσεις (3.23), (3.24) και (3.25) λαμβάνεται η γενική μορφή:

$$[K]\{U_S\} = \{F\} \tag{3.26}$$

Όπου [K] είναι το μητρώο ακαμψίας του μοντέλου, $\{U_S\}$ το διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων των στοιχείων και {F} το διάνυσμα των δυνάμεων που ασκούνται στους κόμβους (Desai, 1979, Fagan, 1996).

Συνοψίζοντας μπορεί να ειπωθεί ότι αρχικά η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων υπολογίζει το μητρώο ακαμψίας και τα διανύσματα του κάθε στοιχείου ξεχωριστά. Στη συνεχεία τα συνθέτει και δημιουργεί το μητρώο ακαμψίας και τα διανύσματα δυνάμεων ολόκληρου του μοντέλου. Η σύνθεση αυτή προκύπτει μέσω κατάλληλης υπέρθεσης των εξισώσεων κάθε στοιχείου. Η υπέρθεση αυτή πρέπει να υπακούει στο νόμο της συμβατότητας ή συνέχειας. Επιλύνοντας το ολικό σύστημα των εξισώσεων που διέπουν το μοντέλο υπολογίζονται οι μετατοπίσεις στους κόμβους.

3.8 Επιβολή των Συνοριακών Συνθηκών

Από τη στιγμή που οι καταστατικές εξισώσεις των στοιχείων έχουν δημιουργηθεί και έχουν συσχετισθεί, για το σχηματισμό του συστήματος των εξισώσεων όλου του μοντέλου και για να περιγραφεί πλήρως το πρόβλημα πρέπει να ενσωματωθούν και οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται στο σώμα. Το σύστημα των εξισώσεων δεν είναι δυνατόν να λυθεί χωρίς την εφαρμογή τους γιατί τότε το μητρώο ακαμψίας δεν μπορεί να αντιστραφεί. Δηλαδή οι συνοριακές συνθήκες είναι περιοριστικές δυνάμεις, υπεύθυνες για την ισορροπία του σώματος (Αγιουτάντης, 2002).

Η φυσική σημασία τις αδυναμίας αντιστροφής του μητρώου ακαμψίας χωρίς την εφαρμογή συνοριακών συνθηκών στα προβλήματα τάσεων, είναι η ανεξέλεγκτη κίνηση με τη μορφή άκαμπτου σώματος. Παράδειγμα ελλιπούς περιορισμού αποτελεί η τρισδιάστατη ανάλυση όπου ένας κόμβος ορίζεται ώστε να μην μπορεί να μετακινηθεί προς καμία διεύθυνση. Το μοντέλο όμως μπορεί να περιστραφεί γύρω από τον κόμβο αυτό.

Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τύποι συνοριακών συνθηκών (Αγιουτάντης, 2002):

- **Συνοριακές συνθήκες Dirichlet**, άλλως γεωμετρικές συνθήκες και είναι ο προσδιορισμός της ζητούμενης παραμέτρου (μετατόπιση). Οι συνθήκες αυτές είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} u_x &= u_0 \\ u_y &= v_0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

όπου u_x και u_y: οι μετατοπίσεις στους κόμβους, u_0 και v_0: οι αντίστοιχες συνιστώσες μετατοπίσεων που επιβάλλονται στον κόμβο.

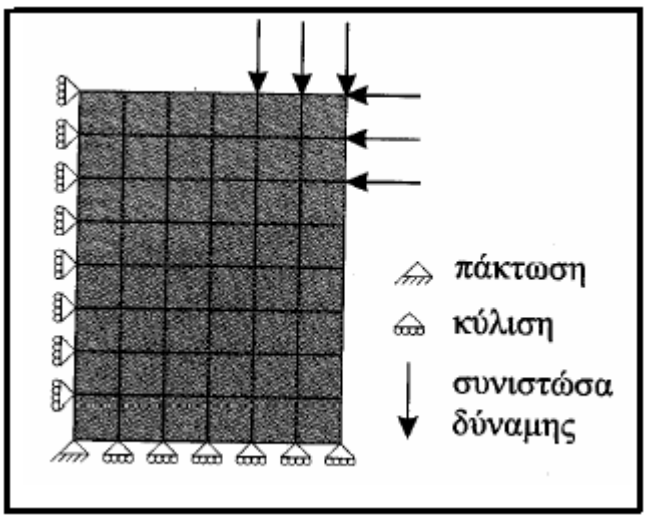
- **Συνοριακές Συνθήκες Neumann**, άλλως φυσικές συνοριακές συνθήκες και είναι ο προσδιορισμός της ζητούμενης παραμέτρου (παράγωγος μετατόπισης). Οι συνθήκες αυτές είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} f_x &= f_0 \\ f_y &= w_0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

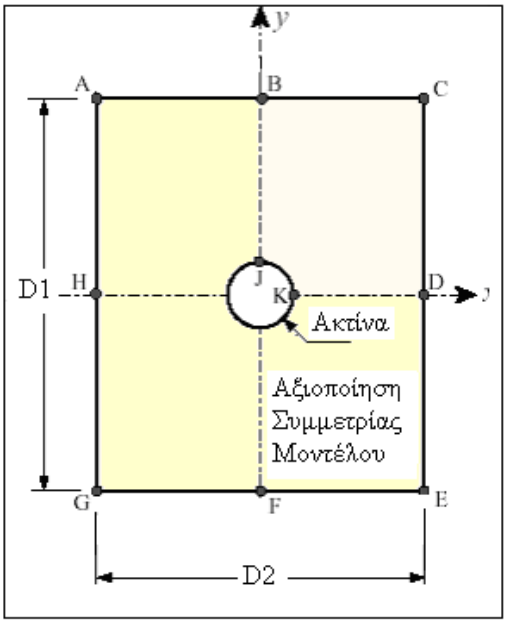
όπου f_x και f_y:είναι οι κομβικές δυνάμεις, f_0 και w_0: οι αντίστοιχες συνιστώσες δυνάμεων που επιβάλλονται στον κόμβο.

- **Μικτές συνοριακές συνθήκες** που είναι ο προσδιορισμός και των δυο παραπάνω παραμέτρων.

Ο τυπικός συμβολισμός τους φαίνεται στο σχήμα 3.10. Αξίζει να αναφέρουμε ότι με την αξιοποίηση της συμμετρίας και την σωστή εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών μειώνεται σημαντικά ο αριθμός των κόμβων ενός προβλήματος άρα και ο χρόνος επίλυσης.



Σχήμα 3.10: Τυπικός συμβολισμός συνοριακών συνθηκών (Αγιουτάντης, 2002)



Σχήμα 3.12: Αξιοποίηση συμμετρίας (Felippa, 2003)

Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της ενσωμάτωσης των συνοριακών συνθηκών στο σύστημα των εξισώσεων έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι. Μία από αυτές είναι η αναδιαμόρφωση των εξισώσεων και διαμερισμός του μητρώου ακαμψίας ώστε όλοι οι προκαθορισμένοι βαθμοί ελευθερίας να βρίσκονται μαζί. Δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

Όπου $\{U_1\}$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων βαθμών ελευθερίας, $\{U_2\}$ το διάνυσμα των προκαθορισμένων βαθμών ελευθερίας, $\{F_1\}$ το διάνυσμα των γνωστών δυνάμεων στους κόμβους και $\{F_2\}$ οι άγνωστες δυνάμεις αντίδρασης στους κόμβους. Η εξίσωση (3.29) μπορεί να λάβει τη μορφή:

$$[K_{11}]\{U_1\} + [K_{12}]\{U_2\} = \{F_1\} \tag{3.30α}$$

$$[K_{21}]\{U_1\} + [K_{22}]\{U_2\} = \{F_2\} \tag{3.30β}$$

Στη συνέχεια η εξίσωση (3.30) μπορεί να διαμορφωθεί:

$$[K_{11}]\{U_1\} = \{F_1\} - [K_{12}]\{U_2\} = \{F_1^*\} \tag{3.31}$$

Το διάνυσμα $\{U_2\}$ είναι γνωστό, άρα το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (3.31) μπορούν να παρασταθούν με ένα απλό διάνυσμα $\{F_1^*\}$ και η εξίσωση που προκύπτει μπορεί να λυθεί ως προς το άγνωστο διάνυσμα $\{U_1\}$. Από τη στιγμή που θα βρεθούν οι άγνωστοι βαθμοί ελευθερίας, εφαρμόζονται στη σχέση (3.30β) για τον υπολογισμό των δυνάμεων αντίδρασης (Fagan, 1996).

Λαμβάνοντας υπόψη και τις συνοριακές συνθήκες, το τελικό σύστημα των εξισώσεων είναι της μορφής:

$$[\overline{K}]\{\overline{U}_S\} = \{\overline{F}\} \tag{3.32}$$

3.9 Επίλυση των εξισώσεων

Η εξίσωση (3.32) αποτελεί ένα σύστημα γραμμικών ή και μη γραμμικών εξισώσεων. Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί αναλυτικότερα ως εξής:

$$\begin{array}{l} K_{11}\cdot U_1 + K_{12}\cdot U_2 + \ldots + K_{1n}\cdot U_n = F_1 \\ K_{21}\cdot U_1 + K_{22}\cdot U_2 + \ldots + K_{2n}\cdot U_n = F_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ K_{n1}\cdot U_1 + K_{n2}\cdot U_2 + \ldots + K_{nn}\cdot U_n = F_n \end{array} \tag{3.33}$$

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων υπάρχουν αρκετές μαθηματικές μέθοδοι. Από τις βασικότερες είναι η μέθοδος απαλοιφής του Gauss, η μέθοδος Cholesky, αλλά η πιο συχνά εφαρμοζόμενη στα σημερινά μεγάλα λογισμικά πακέτα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η μέθοδος μετώπου κύματος. Η τελευταία έχει την δυνατότητα να επιλύει αρκετά μεγάλα συστήματα εξισώσεων χωρίς να καταλαμβάνει υπερβολικά μεγάλη υπολογιστική μνήμη στο υπολογιστή (Fagan, 1992).

Από τη στιγμή που θα επιλυθούν οι εξισώσεις αυτές, έχουν προσδιοριστεί οι τιμές των μετατοπίσεων στους κόμβους. Οι τιμές αυτές ονομάζονται πρωτεύοντα μεγέθη. Από τα πρωτεύοντα αυτά μεγέθη είναι εύκολος ο υπολογισμός των δευτερευόντων μεγεθών όπως είναι οι παραμορφώσεις και οι τάσεις. Πρακτικής σημασίας για τον μηχανικό είναι τα δευτερεύοντα μεγέθη.

3.10 Μοντέλα Συμπεριφοράς Υλικών

Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου συμπεριφοράς του υλικού, καθώς και η επιλογή των τιμών των σταθερών του μοντέλου αυτού, συνιστά έναν από τους σημαντικότερους παράγοντες για την επιτυχημένη προσομοίωση της συμπεριφοράς φυσικών υλικών (Αγιουτάντης, 2002).

Το απλούστερο μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι το γραμμικά ελαστικό μοντέλο. Το μοντέλο αυτό δεν θεωρείται το πλέον κατάλληλο για την περιγραφή της συμπεριφοράς πετρωμάτων και εδαφικών υλικών σε μια, ή περισσότερες διαστάσεις. Το υλικό θεωρείται ότι παραμορφώνεται γραμμικά και ισότροπα, όπως δίνεται από την ακόλουθη σχέση (Αγιουτάντης, 2002):

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathrm{E}}{1+\nu}\left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{\kappa\kappa}\delta_{ij}\right] \tag{3.34}$$

όπου:

σ_{ij} = ο τανυστής των τάσεων που υποδεικνύει την εντατική κατάσταση στο σώμα [MPa],

E = το μέτρο ελαστικότητας του υλικού [MPa],

ν = ο λόγος Poisson του υλικού,

ε_{ij} = ο τανυστής των παραμορφώσεων,

δ_{ij} = ο μοναδιαίος τανυστής (δέλτα του Kronecker).

Για την περίπτωση της παραμόρφωσης σε μια διάσταση, είναι:

$$\sigma = \mathrm{E}\varepsilon \tag{3.35}$$

όπου:

σ = η τάση που επιβάλλεται στο υλικό [MPa],

E = το μέτρο ελαστικότητάς του [MPa],

ε = η ανηγμένη παραμόρφωση που αυτό επιδέχεται.

Επιπλέον αυτών, μπορούν εύκολα να χρησιμοποιηθούν άλλα καταστατικά μοντέλα συμπεριφοράς, όπως μοντέλα μη ισοτροπικής (ορθοτροπικής ή ανισοτροπικής) ελαστικής συμπεριφοράς, καθώς και μοντέλα μη ελαστικής συμπεριφοράς. Επίσης, καθώς η διαίρεση του πεδίου δημιουργεί συνεχή αλλά διακριτά τμήματα του σώματος, είναι δυνατόν να οριστούν διαφορετικά μοντέλα υλικού σε διάφορα σημεία του σώματος (Αγιουτάντης, 2002).

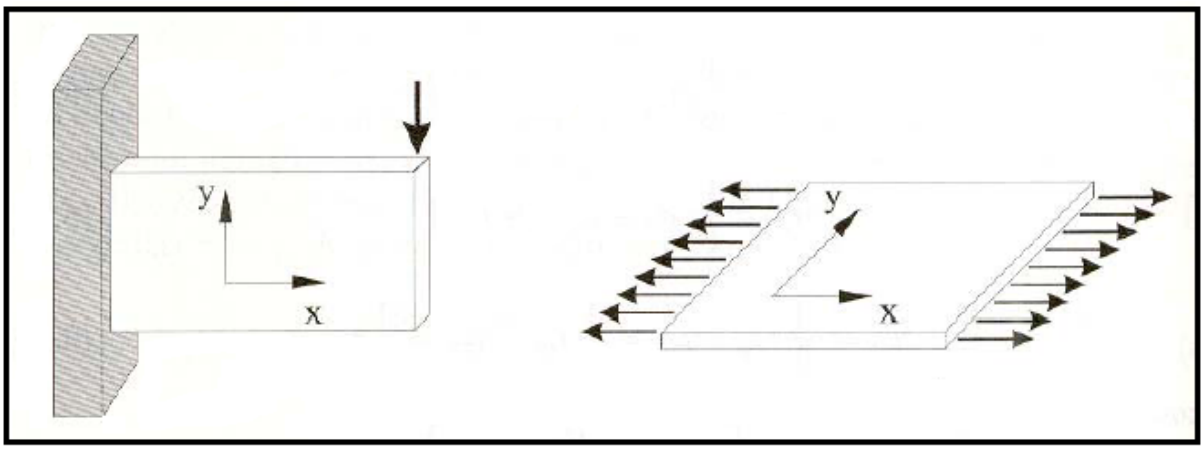
3.10.1 Ελαστική Συμπεριφορά σε δυο Διαστάσεις

Ο προσδιορισμός της εντατικής κατάστασης ενός σώματος για τις περισσότερες εφαρμογές είναι ένα δύσκολο τρισδιάστατο πρόβλημα. Σε αρκετές όμως περιπτώσεις προβλημάτων που εξετάζονται από τη Μηχανική Πετρωμάτων (π.χ. υποστήριξη στοών, εντατική κατάσταση πρανών, θεμελιώσεις), το γεωμετρικό σχήμα του σώματος και ο τρόπος φόρτισης του επιτρέπουν τη μελέτη σε δύο διαστάσεις (x, y) . Στις επόμενες παραγράφους εξετάζεται η θεώρηση της επίπεδης τάσης **(plane stress)**, και της επίπεδης παραμόρφωσης **(plane strain)**, όπου ένα σώμα θεωρείται ότι βρίσκεται σε διαξονική ή επίπεδη εντατική κατάσταση. Στις δύο αυτές θεωρήσεις, οι μόνες σημαντικές τάσεις και παραμορφώσεις είναι αυτές που ανήκουν στο επίπεδο (χ,y) και εκφράζονται από τις σχέσεις (Αγιουτάντης, 2002):

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\chi} \\ \sigma_{y} \\ \tau_{\chi y} \end{Bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\chi} \\ \varepsilon_{y} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.36}$$

- **Θεώρηση Επίπεδης Τάσης**

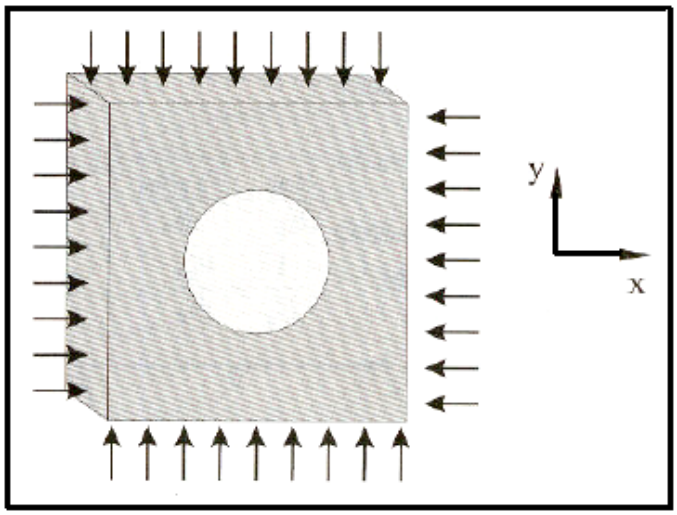
Στην περίπτωση που η τρίτη διάσταση (Z) ενός σώματος είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες δύο (π.χ. λεπτή επίπεδη πλάκα) και τα φορτία που δέχεται το σώμα ανήκουν στο επίπεδο των δύο σημαντικών διαστάσεων (επίπεδο x, y), μπορεί να θεωρηθεί ότι οι συνιστώσες τάσης κατά τον τρίτο άξονα είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με τις συνιστώσες κατά το επίπεδο φόρτισης (Σχήμα 3.13). Η θεώρηση αυτή ονομάζεται θεώρηση της επίπεδης τάσης ή επίπεδης έντασης .(Αγιουτάντης, 2002).



Σχήμα 3.12:Παραδοχή επίπεδης τάσης (Αγιουτάντης, 2002)

- **Θεώρηση Επίπεδης Παραμόρφωσης**

Στην περίπτωση που η τρίτη διάσταση (z) ενός σώματος δεν είναι μικρή, σε σύγκριση με τις άλλες δύο (x, y) όπως θεωρήθηκε προηγουμένως, και τα φορτία που δέχεται το σώμα είναι πάνω στο επίπεδο (x, y), τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι η συνιστώσα του διανύσματος μετατοπίσεων (u) είναι μηδενική κατά την τρίτη διάσταση ($u_z = 0$ και επομένως $\varepsilon_z = 0$) (Σχήμα 3.13), καθώς επίσης ότι τα διανύσματα μετατόπισης στο επίπεδο (x, y) είναι ανεξάρτητα από την τρίτη διάσταση, δηλαδή $u_x = f(x,y)$ και $u_y = f(x,y)$. Η θεώρηση αυτή ονομάζεται θεώρηση της επίπεδης παραμόρφωσης (Αγιουτάντης, 2002).



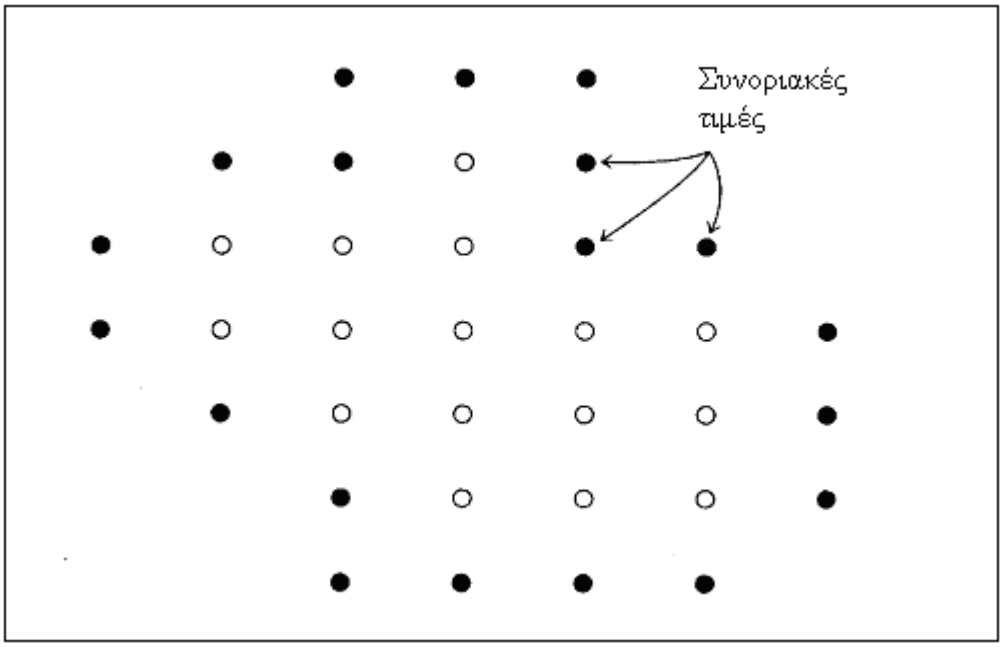
Σχήμα 3.13: Παραδοχή επίπεδης παραμόρφωσης (Αγιουτάντης, 2002)

3.10.2 Τύποι Στατικών Προβλημάτων

Γενικά διακρίνονται τρεις τύποι προβλημάτων τα οποία ζητείται να επιλυθούν με αριθμητικές μεθόδους (Αγιουτάντης, 2002):

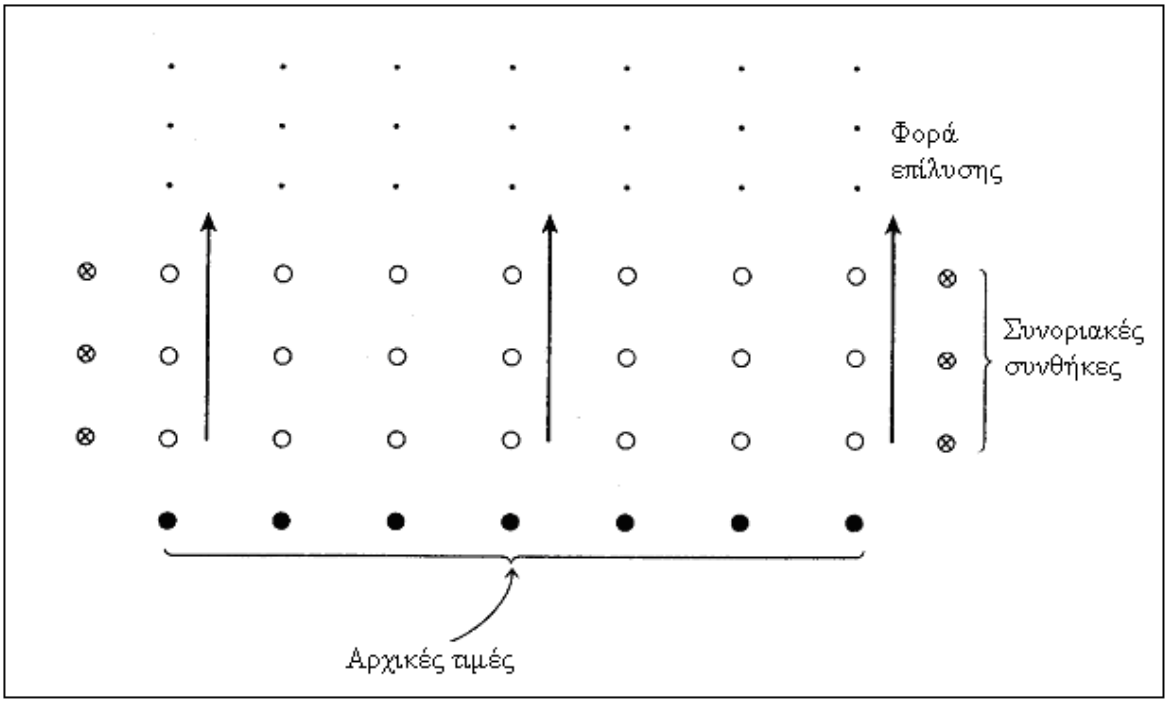
- Τα προβλήματα **συνοριακών τιμών** (boundary value problems)
- Τα προβλήματα **αρχικών τιμών** (initial value problems)
- Τα **μικτά προβλήματα** (initial-boundary value problems)

Στην πρώτη περίπτωση, δίνεται η κατάσταση του πεδίου (σώματος) με την μορφή συνοριακών συνθηκών στα όρια του πεδίου και ζητείται η επίλυση του προβλήματος για όλο το πεδίο ή συγκεκριμένη περιοχή του πεδίου. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μια κλασική μέθοδο για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Η αρχή της μεθόδου φαίνεται στο σχήμα 3.14:



Σχήμα 3.14: Πρόβλημα συνοριακών τιμών (Press et al., 1992)

Στην δεύτερη περίπτωση, δίνονται οι αρχικές τιμές (αρχικές συνθήκες) ενός προβλήματος και ζητείται να υπολογιστεί η κατάστασή του μετά από ορισμένο χρόνο ή ορισμένη μεταβολή της κατάστασής του. Η αρχή της μεθόδου φαίνεται στο σχήμα 3.15.



Σχήμα 3.15: Πρόβλημα αρχικών τιμών (Press et al., 1992)

Η τρίτη περίπτωση αποτελεί μικτή περίπτωση.

3.10.3 Δυναμικά Προβλήματα

Τα δυναμικά προβλήματα είναι προβλήματα αρχικών τιμών τα οποία εξετάζονται σε στάδια, με την έννοια ότι οι αρχικές τιμές ενός σταδίου (n) είναι οι τιμές που προέκυψαν από την επίλυση του προηγούμενου σταδίου (n-1). Ένα πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί δυναμικό είτε όταν οι συνοριακές συνθήκες μεταβάλλονται με το χρόνο, είτε όταν η συμπεριφορά του ίδιου του υλικού μεταβάλλεται με το χρόνο (transient analysis) (Αγιουτάντης, 2002).

3.11 Ερμηνεία των Αποτελεσμάτων

Από τη στιγμή που όλες οι εξισώσεις λυθούν αρχίζει η διαδικασία της ερμηνείας των αποτελεσμάτων. Η διαδικασία αυτή της ερμηνείας μπορεί να αποδειχθεί αρκετά δύσκολη λόγω του τεραστίου όγκου τιμών που εξάγονται από την επίλυση του μοντέλου. Τα σημερινά λογισμικά πακέτα διαθέτουν αρκετές λειτουργίες ώστε η διαδικασία αυτή να γίνει αρκετά πιο εύκολα και γρήγορα.

Τα περισσότερα πακέτα διαθέτουν διαγράμματα ισοϋψών καμπυλών για τις διάφορες μεταβλητές που μελετούνται. Επίσης είναι εφικτή η πραγματοποίηση διαγραμμάτων των μεταβλητών σε τομές του μοντέλου που ο μελετητής ορίζει. Μια άλλη πολύ σημαντική λειτουργία είναι δυνατότητα κίνησης (animation) του μοντέλου ανάλογα με τα φορτία που επιβάλλονται ώστε να είναι ευκολότερη η κατανόηση της συμπεριφοράς του σώματος.

4. Πεπερασμένα Στοιχεία Στη Δυναμική Ανάλυση

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για την δυναμική ανάλυση. Παράγονται τα μητρώα μάζας και απόσβεσης του συστήματος και στη συνέχεια γίνεται ανάπτυξη στις μεθόδους άμεσης και έμμεσης χρονικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης. Η ανάπτυξη θα γίνει μόνο στις μεθόδους που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση των μοντέλων.

Αν η συχνότητα μιας διέγερσης εφαρμοστεί σε ένα υλικό και είναι μικρότερη κατά το ένα τρίτο της χαμηλότερης φυσικής συχνότητας ταλάντωσης του υλικού τότε η επίδραση της αδράνειας θεωρείται αμελητέα και το πρόβλημα καλείται ημιστατικό. Δηλαδή η σχέση $[K]\{D\} = \{R\}$ παρέχει αρκετή ακρίβεια για όλα τα φορτία του πίνακα {R} αφού οι μετατοπίσεις {D} μεταβάλλονται αργά με τον χρόνο (Cook et al., 1988)

Η επίδραση της αδράνειας γίνεται σημαντική όταν οι συχνότητες διέγερσης πάρουν τιμές μεγαλύτερες από το ένα τρίτο της χαμηλότερης φυσικής συχνότητας του υλικού ή όταν το υλικό ταλαντώνεται ελεύθερα. Το μητρώο μάζας ενός στοιχείου μπορεί να γραφεί [m] και για όλο το υλικό [M]. Η επίδραση της απόσβεσης αν είναι σημαντική μπορεί να συμπεριληφθεί στα μητρώα απόσβεσης [c] για ένα στοιχείο και [C] για όλο το υλικό (Cook et al., 1988).

Τα προβλήματα στη δυναμική μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες:

- κατηγορία προβλημάτων διάδοσης κυμάτων (wave propagation) και
- κατηγορία προβλημάτων δυναμικών κατασκευών (structural dynamics)

Στα προβλήματα διάδοσης κυμάτων όπου είναι και το αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας, το φορτίο είναι αποτέλεσμα σύγκρουσης ή έκρηξης και η διέγερση που παράγεται είναι υψηλής συχνότητας. Στα προβλήματα αυτά μελετάται η επίδραση των τασικών κυμάτων που παράγονται από την έκρηξη. Επιπλέον η χρονική διάρκεια της ανάλυσης είναι συνήθως πολύ μικρή και η επίδραση του χρόνου είναι σημαντική και στην επιστροφή του κύματος (ενδεχομένως από ανάκλαση) στο υλικό (Cook et al., 1988).

Στην δυναμική ανάλυση ζητείται ο προσδιορισμός κίνησης του υλικού κάτω από προκαθορισμένα φορτία συναρτήσει του χρόνου. Ο προσδιορισμός αυτός καλείται

χρονική ιστορική ανάλυση (time-history analysis). Υπάρχουν δυο μέθοδοι προσδιορισμού της χρονικής ιστορικής ανάλυσης: η ιδιομορφική μέθοδος ανάλυσης (modal analysis) και οι μέθοδοι άμεσης χρονικής ολοκλήρωσης (direct integration).

Για την επίλυση των εξισώσεων στην δυναμική ανάλυση με τις μεθόδους άμεσης ολοκλήρωσης, απαιτούνται τα μητρώα απόσβεσης, μάζας και ακαμψίας του υλικού. Ο σχηματισμός των μητρώων αυτών δεν απαιτείται να παραχθούν από διακριτοποίηση πεπερασμένων στοιχείων. Παλαιότερα τα μητρώα αυτά παράγονταν από διακριτοποίηση πεπερασμένων διαφορών, όμως με την ανάπτυξη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, σήμερα τα μητρώα αυτά παράγονται από διακριτοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία. Η αλλαγή επιλογής μεθόδου για την κατάστρωση των μητρώων οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι πιο ευέλικτη στη δημιουργία του καννάβου, προσφέροντας μεγαλύτερη πύκνωση στοιχείων και κόμβων σε επιθυμητά σημεία αυξάνοντας με αυτό τον τρόπο την ακρίβεια της επίλυσης.

Όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται για να ορίσει ένα συνεχές μηχανικό σύστημα σε ένα διακριτό σύστημα, έτσι και οι μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης χρησιμοποιούνται για να αλλάξουν ένα συνεχές δυναμικό φαινόμενο σε ένα βήμα προς βήμα δυναμικό φαινόμενο. Τα κύρια σχήματα χρονικής ολοκλήρωσης παράγονται από αφαίρεση αναπτυγμάτων Taylor ή χρονικές μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων (Cook et al., 1988).

4.2 Δυναμικές Εξισώσεις – Μητρώα Μάζας και Απόσβεσης

Οι εξισώσεις που διέπουν την δυναμική απόκριση ενός μέσου ή υλικού μπορούν να παραχθούν με την προϋπόθεση ότι το παραγόμενο έργο από τις εξωτερικές δυνάμεις απορροφάται από το έργο που παράγεται από τις εσωτερικές, αδρανειακές και τις ιξώδεις δυνάμεις για κάθε μικρή επιτρεπτή κίνηση έτσι ώστε η κάθε μικρή κίνηση να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και την συμβατότητα. Για ένα μοναδικό πεπερασμένο στοιχείο ισχύει (Cook et al., 1988):

$$\int_{Ve} \{\delta u\}^T \{F\} dV + \int_{Se} \{\delta u\}^T \{\Phi\} ds + \sum_{i=1}^{n} \{\delta u\}_i^T \{p\}_i =$$

$$\int_{Ve} (\{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} + \{\delta u\}^T \rho \{\ddot{u}\} + \{\delta u\}^T k_d \{\dot{u}\}) dV \qquad (4.1)$$

όπου $\{\delta u\}$ και $\{\delta\varepsilon\}$: οι μικρές μετατοπίσεις και παραμορφώσεις αντίστοιχα του στοιχείου, $\{F\}$: οι δυνάμεις του σώματος, $\{\Phi\}$: οι προκαθορισμένοι επιφανειακοί ελκυστές, $\{p\}_i$: τα συγκεντρωμένα φορτία που επιδρούν στο σύνολο των n σημείων του στοιχείου, $\{\delta u\}_i^T$: η μετατόπιση του σημείου όπου εφαρμόζεται φορτίο $\{p\}_i$, ρ: η πυκνότητα του υλικού, k_d: είναι παράμετρος απόσβεσης του υλικού που είναι ανάλογη του ιξώδους.

Κάνοντας χρήση του κλασσικού συμβολισμού, οι μετατοπίσεις {u} που είναι συναρτήσεις του χρόνου και του χώρου δίνονται από την ακόλουθη σχέση μαζί με τις δυο πρώτες χρονικές παραγώγους τους:

$$\{u\} = [N]\{d\} \qquad \{\dot{u}\} = [N]\{\dot{d}\} \qquad \{\ddot{u}\} = [N]\{\ddot{d}\} \tag{4.2}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, οι συναρτήσεις μορφής [N], είναι συναρτήσεις του χώρου και των βαθμών ελευθέριας των κόμβων του στοιχείου μόνο. {d} είναι συναρτήσεις του χρόνου μόνο. Συνδυάζοντας τις σχέσεις 4.1 και 4.2 λαμβάνεται (Cook et al., 1988):

$$\begin{aligned}&\{\delta d\}^{\mathrm{T}}[\int_{Ve}[B]^T\{\sigma\}dV + \int_{Ve}\rho[\mathrm{N}]^T[\mathrm{N}]dV\{\ddot{d}\} + \int_{Ve}k_d[\mathrm{N}]^T[\mathrm{N}]dV\{\dot{d}\} - \\ &\int_{Ve}[\mathrm{N}]^T\{F\}dV - \int_{Se}[\mathrm{N}]^T\{\Phi\}dS - \sum_{i=1}^{n}\{p\}_i] = 0\end{aligned} \tag{4.3}$$

όπου έχει θεωρηθεί ότι τα σημεία εφαρμογής των συγκεντρωμένων φορτίων $\{p\}_i$ είναι στα σημεία των κόμβων του στοιχείου. Αφού $\{\delta d\}$ είναι αυθαίρετο, η σχέση 4.3 μπορεί να γραφεί:

$$[m]\{\ddot{d}\} + [c]\{\dot{d}\} + \{r^{\mathrm{int}}\} = \{r^{ext}\} \tag{4.4}$$

όπου τα μητρώα απόσβεσης και μάζας του στοιχείου δίδονται από τις σχέσεις:

$$[c] = \int_{Ve} k_d[N]^T[N]dV \tag{4.5}$$

$$[m] = \int_{Ve} \rho [N]^T [N] dV \tag{4.6}$$

οι εσωτερικές δυνάμεις και εξωτερικά φορτία της σχέσης 4.4 δίδονται από τις σχέσεις:

$$\{r^{\text{int}}\} = \int_{Ve} [B]^T \{\sigma\} dV \tag{4.7}$$

$$\{r^{ext}\} = \int_{Ve} [N]^T \{F\} dV + \int_{Se} [N]^T \{\Phi\} dS + \sum_{n=1}^{n} \{p\}_i \tag{4.8}$$

Η σχέση 4.4 είναι ένα σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξίσωσεων δευτέρας τάξης στο χρόνο και καλείται ημιδιακριτοποίηση στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων διότι παρόλο που οι μετατοπίσεις {d} είναι διακριτές συναρτήσεις του χώρου, είναι ακόμη συνεχείς συναρτήσεις στο χρόνο.

Οι μέθοδοι της δυναμικής ανάλυσης εστιάζονται στο πώς να λύσουν την εξίσωση αυτή (σχέση 4.4). Οι μέθοδοι ιδιομορφικής ανάλυσης (modal) έχουν ως σκοπό να διαχωρίσουν την εξίσωση σε επιμέρους τμήματα όπου μπορεί να γίνει η ανεξάρτητη επίλυση τους. Οι μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης διακριτοποιούν την σχέση 4.4 στο χρόνο για να πετύχουν μια σειρά ταυτόχρονων αλγεβρικών εξισώσεων (Cook et al., 1988).

Τα μητρώα μάζας [M] και απόσβεσης [C] του υλικού καθώς και το μητρώο εσωτερικών δυνάμεων $\{R^{\text{int}}\}$ καταστρώνονται με επέκταση των θεμελιωδών μητρώων του στοιχείου [m], [c] και $\{r^{\text{int}}\}$ έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο μέγεθος των διαστάσεων. Όταν υπολογίζονται οι σχέσεις 4.5 και 4.6 και χρησιμοποιούνται οι ίδιες συναρτήσεις μορφής [N] όπως χρησιμοποιήθηκαν και στις σχέσεις μετατόπισης 4.2, για την κατάστρωση του μητρώου ακαμψίας του υλικού, τα αποτελέσματα καλούνται **σύμφωνα μητρώα μάζας** [m] και **απόσβεσης** [c] (consistent mass, and damping matrices). Τα μητρώα αυτά είναι συμμετρικά. Όταν ρ και κ_d είναι μη μηδενικά στοιχεία τότε τα σύμφωνα μητρώα μάζας και απόσβεσης είναι θετικά ορισμένα (Cook et al., 1988).

Το διάνυσμα εσωτερικών δυνάμεων στην σχέση 4.7 παριστάνει φορτία στους κόμβους που προκαλούνται από την διάταση του υλικού. Οι σχέσεις 4.4 και 4.7 ισχύουν για γραμμική και μη γραμμική συμπεριφορά υλικού. Το διάνυσμα {σ}

μπορεί να παριστάνει μη γραμμική συνάρτηση της τάσης ή ρυθμό τάσης. Για γραμμική ελαστική συμπεριφορά το διάνυσμα της τάσης είναι (Cook et al., 1988):

$$\{\sigma\} = [E][B]\{d\} \tag{4.9}$$

και η σχέση 4.7 παίρνει την μορφή:

$$\{r^{\text{int}}\} = [k]\{d\} \tag{4.10}$$

όπου το [k] είναι το μητρώο ακαμψίας και ορίζεται από την σχέση:

$$[k] = \int_{Ve} [B]^T [E][B] dV \tag{4.11}$$

όταν γίνεται εφαρμογή της σχέσης 4.11, η σχέση 4.4 λαμβάνει την μορφή:

$$[m]\{\ddot{d}\} + [c]\{\dot{d}\} + [k]\{d\} = \{r^{ent}\} \tag{4.12}$$

όπου φαίνεται ότι τα εξωτερικά φορτία είναι σε ισορροπία με συνδυασμό των αδρανειακών δυνάμεων, δυνάμεων απόσβεσης και ελαστικών δυνάμεων. Για μια κατασκευή ή υλικό συγκεκριμένων διαστάσεων η σχέση 4.12 γίνεται (Cook et al., 1988):

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{R^{ext}\} \tag{4.13}$$

όπου $\{R^{ext}\}$ ανταποκρίνεται στα φορτία R του στατικού προβλήματος, αλλά είναι γενικά μια συνάρτηση του χρόνου. Επιστρέφοντας στην σχέση 4.4 οι σχέσεις ενός υλικού συγκεκριμένων διαστάσεων μπορεί να γραφεί με την εναλλακτική μορφή:

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + \{R^{\text{int}}\} = \{R^{ext}\} \tag{4.14}$$

όπου δεν απαιτείται τα υλικό να είναι γραμμικά ελαστικό.

4.3 Απόσβεση

Η πραγματική απόσβεση στις κατασκευές και στα υλικά δεν είναι ιξώδης. Η απόσβεση σε αυτές τις περιπτώσεις οφείλεται σε μηχανισμούς όπως υστέρηση μέσα στο υλικό και παρεμβολές των συνδέσμων του. Αυτοί οι μηχανισμοί δεν είναι καλά κατανοητοί και επιπλέον είναι δύσχρηστο να συνδυαστούν με τις εξισώσεις δυναμικής ή όταν συνδυάζονται με εξισώσεις δυναμικής, είναι δύσκολη η αριθμητική επίλυση τους. Για την λύση του προβλήματος αυτού, γίνεται δεκτό από θεωρητικές και πειραματικές δοκιμές ότι ο μηχανισμός απόσβεσης ενός υλικού μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από ιξώδη απόσβεση στα περισσότερα προβλήματα (Cook et al., 1988).

Ο χειρισμός της απόσβεσης στην υπολογιστική ανάλυση μπορεί να χωριστεί σε δυο κατηγορίες μεθόδων (Cook et al., 1988):

- **Μέθοδοι φαινομενολογικής απόσβεσης**, οι οποίες μοντελοποιούν τη φυσική μείωση μηχανισμών όπως ελαστοπλαστική απώλεια υστέρησης, τριβή ή μικρορωγμές.
- **Μέθοδοι φασματικής απόσβεσης,** όπου η ιξώδης απόσβεση εισάγεται σαν λόγος κρίσιμης απόσβεσης. Κρίσιμη απόσβεση υφίσταται όταν ο λόγος ξ, γίνει ξ=1, που εκφράζει την μετάβαση από την αδράνεια στην αντίδραση της ταλάντωσης.

Οι μέθοδοι φαινομενολογικής απόσβεσης απαιτούν λεπτομερή μοντέλα του μηχανισμού μείωσης και συνήθως καταλήγουν σε μη γραμμική ανάλυση, όμως σπάνια χρησιμοποιούνται. Με την προσέγγιση της φασματικής απόσβεσης, πειραματικές παρατηρήσεις της αντίδρασης του υλικού από την ταλάντωση, χρησιμοποιούνται για να οριστεί το κλάσμα της κρίσιμης απόσβεσης σαν συνάρτηση της συχνότητας. Ο λόγος απόσβεσης (ξ), εξαρτάται από το υλικό και το επίπεδο της τάσης. Μια γνωστή σχέση φασματικής απόσβεσης είναι η σχέση Rayleigh η αλλιώς αναλογική απόσβεση (proportional damping) και σχηματίζει το μητρώο της απόσβεσης [C] του υλικού σαν γραμμικό συνδυασμό του μητρώου ακαμψίας και του μητρώου μάζας του υλικού. Η σχέση Rayleigh είναι (Cook et al., 1988):

$$[C] = a[K] + \beta[M] \tag{4.15}$$

όπου α: σταθερά αναλογικής απόσβεσης του μητρώου ακαμψίας και β: σταθερά αναλογικής απόσβεσης του μητρώου μάζας. Ο πίνακας [C] δίδεται από την σχέση 4.15 και είναι ένας ορθογώνιος πίνακας απόσβεσης και επιτρέπει τον διαχωρισμό των περιπτώσεων (uncoupled modes) από τα ιδιοδιανύσματα που συνδέονται με το ιδιοπρόβλημα της μη απόσβεσης. Η σχέση μεταξύ των α, β και του κλάσματος της κρίσιμης απόσβεσης ξ σε συχνότητα ω δίδεται από την ακόλουθη σχέση (Cook et al., 1988):

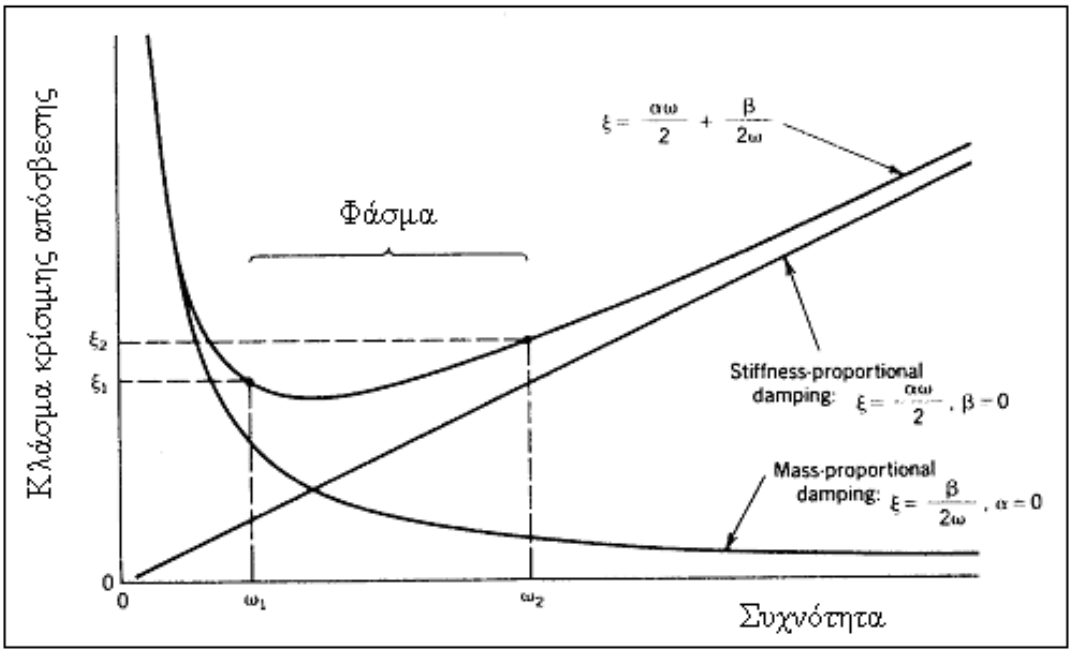
$$\xi = \frac{1}{2}\left(\alpha\omega + \frac{\beta}{\omega}\right) \tag{4.16}$$

οι σταθερές α και β προσδιορίζονται επιλέγοντας τα κλάσματα της κρίσιμης απόσβεσης ξ_1 και ξ_2 για δυο διαφορετικές συχνότητες ω_1 και ω_2. Επιλύνοντας ταυτόχρονα τις δυο σχέσεις για α και β λαμβάνεται (Cook et al., 1988):

$$a = \frac{2(\xi_2\omega_2 - \xi_1\omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \tag{4.17α}$$

$$\beta = \frac{2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \tag{4.17β}$$

Στο σχήμα 4.1, φαίνεται το κλάσμα της κρίσιμης απόσβεσης συναρτήσει της συχνότητας. Η απόσβεση αποδιδόμενη στο α[K], αυξάνει με την αύξηση της συχνότητας ενώ η απόσβεση που αποδίδεται στο β[M], αυξάνει με την μείωση της συχνότητας. Για υλικά που μπορεί να έχουν κίνηση άκαμπτου σώματος είναι σημαντικό το μητρώο μάζας στην αναλογική απόσβεση να μην είναι υπερβολικό. Θετικές τιμές του β μικρότερες από 0.1 ανα μονάδα χρόνου είναι αποδεκτές (Cook et al., 1988).



Σχήμα 4.1: Κλάσμα κρίσιμης απόσβεσης συναρτήσει της συχνότητας για απόσβεση Rayleigh, καθώς επίσης και η συνεισφορά των μητρώων ακαμψίας (Cook et al., 1988)

Συνήθως οι συχνότητες ω_1 και ω_2 επιλέγονται περικλείουν το υπό σχεδίαση φάσμα, επιπλέον το ω_1 σαν η χαμηλότερη φυσική συχνότητα του υλικού και ω_2 η μέγιστη συχνότητα αντίδρασης ή φόρτισης. Για παράδειγμα στη σεισμική ανάλυση η μέγιστη συχνότητα λαμβάνεται η τιμή των 30 Hz διότι το περιεχόμενο του φάσματος του σεισμικού σχεδιασμού ανωτέρω της τιμής αυτής δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον. Φυσικά είναι δυνατό να κατασκευαστούν και πιο γενικά μητρώα αναλογικής απόσβεσης για διάφορες συχνότητες για τις οποίες τα κλάσματα κρίσιμης απόσβεσης μπορούν να προσδιοριστούν όμως, σπάνια χρησιμοποιούνται στην πράξη (Cook et al., 1988).

4.4 Χρονική-Ιστορική Ανάλυση και Μέθοδοι Άμεσης Χρονικής Ολοκλήρωσης

Στις μεθόδους άμεσης χρονικής ολοκλήρωσης ή αλλιώς μέθοδοι βήμα προς βήμα, χρησιμοποιείται η προσέγγιση των πεπερασμένων διαφορών για την αντικατάσταση του χρόνου στην σχέση 4.13 από διαφορές ή μετατοπίσεις {D} για διάφορες χρονικές στιγμές. Η προσέγγιση με πεπερασμένες διαφορές πραγματοποιείται για να λύνει προβλήματα αρχικών τιμών και χωρίζονται σε

έμμεσες (implicit) και άμεσες (explicit) μεθόδους. Η άμεση ολοκλήρωση είναι μια εναλλακτική έναντι των ιδιομορφικών μεθόδων. Για πολλά προβλήματα δυναμικής ανάλυσης όπως προβλήματα διάδοσης κυμάτων, συμπεριλαμβανομένων και περίπλοκων μη-γραμμικών, η άμεση χρονική ολοκλήρωση είναι η πιο κατάλληλη. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης αλλά η επιλογή της πιο κατάλληλης είναι αποκλειστικά εξαρτώμενη από τον τύπο του προβλήματος (Cook et al., 1988).

Στην άμεση ολοκλήρωση, η προσέγγιση είναι να γραφεί η εξίσωση κίνησης για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, όπως:

$$[M]\{\ddot{D}\}_n + [C]\{\dot{D}\}_n + [K]\{D\}_n = \{R^{ext}\}_n \tag{4.18}$$

όπου ο δείκτης n υποδηλώνει χρόνο nΔt με Δt το μέγεθος του χρονικού βήματος. Η απουσία του χρονικού βήματος από τα μητρώα $[M]$, $[C]$ και $[K]$ δηλώνει γραμμικότητα στο πρόβλημα. Για προβλήματα όπου το υλικό δεν είναι γραμμικό, ο πίνακας $[K]$ είναι συνάρτηση των μετατοπίσεων, άρα και του χρόνου. Σύμφωνα με αυτό η εξίσωση 4.14 λαμβάνει την μορφή:

$$[M]\{\ddot{D}\}_n + [C]\{\dot{D}\}_n + \{R^{\text{int}}\}_n = \{R^{ext}\}_n \tag{4.19}$$

όπου $\{R^{\text{int}}\}_n$: το διάνυσμα εσωτερικών δυνάμεων σε χρόνο nΔt εξαιτίας της παραμόρφωσης του υλικού. Το διάνυσμα αυτό προκύπτει από την σύνθεση των εσωτερικών δυνάμεων του στοιχείου $\{r^{\text{int}}\}_n$ όπως δίδεται από την σχέση 4.7 χρησιμοποιώντας το διάνυσμα των τάσεων $\{\sigma\}_n$. Για μη γραμμικά προβλήματα το $\{R^{\text{int}}\}_n$ είναι μη γραμμική συνάρτηση του $\{D\}_n$. Για γραμμικά προβλήματα ισχύει:

$$\{R^{\text{int}}\}_n = [K]\{D\}_n \tag{4.20}$$

Στην σχέση 4.19, τα μητρώα [M] και [C] λαμβάνονται σαν χρονικά εξαρτώμενα παρόλο που κάποια προβλήματα μπορεί να είναι μη γραμμικά (Cook et al., 1988).

Στη συνέχεια το μητρώο [M] θα θεωρείται θετικά ορισμένο εκτός και αν οριστεί αλλιώς και το [K] θα είναι θετικά ημί-ορισμένο μητρώο που σημαίνει ότι

επιτρέπει κίνηση άκαμπτου σώματος (rigid body motion). Οι διάφορες μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης των σχέσεων 4.18 και 4.19 μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε έμμεσες και άμεσες. Οι **έμμεσες** έχουν την γενική μορφή:

$$\{D\}_{n+1} = f(\{D\}_n, \{\dot{D}\}_n, \{\ddot{D}\}_n, \{D\}_{n-1}, ...) \tag{4.21}$$

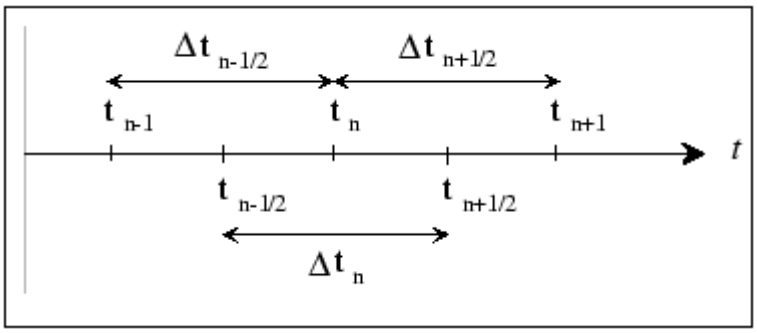
επιτρέποντας τον προσδιορισμό $\{D\}_{n+1}$ σε όρους αποκλειστικά ιστορικής πληροφορίας περιέχοντας τις μετατοπίσεις και χρονικές παραγώγους των μετατοπίσεων σε χρόνο nΔt και πιο πριν. Οι **άμεσες** μέθοδοι έχουν την γενική μορφή:

$$\{D\}_{n+1} = f(\{\dot{D}\}_{n+1}, \{\ddot{D}\}_{n+1}, \{D\}_n, ...) \tag{4.22}$$

και αφού ο υπολογισμός του $\{D\}_{n+1}$ απαιτεί γνώση της χρονικής παραγώγου του $\{D\}_{n+1}$ που είναι γνωστή. Οι έμμεσες και άμεσες μέθοδοι έχουν αξιοσημείωτες διαφορές στις ιδιότητες τους που παρουσιάζουν σημαντικές πρακτικές επιπλοκές. Μέθοδοι που έχουν γενική μορφή όπως τις σχέσεις 4.21 και 4.22 καλούνται πολυβηματικές μέθοδοι (multistep methods). Όταν το δεξιό μέρος των σχέσεων 4.21 και 4.22 περιέχει χρονικές πληροφορίες για πιο πριν από την χρονική στιγμή nΔt ονομάζονται μέθοδοι ενός βήματος (single-step methods). Επίσης όταν ισχύει το ίδιο αλλά για χρόνο (n-1)Δt τότε καλούνται μέθοδοι δυο βημάτων (two-step methods). Συνήθως οι μέθοδοι ενός βήματος είναι εύκολες στον χειρισμό αρχικών συνθηκών ενώ οι πολυβηματικές μέθοδοι απαιτούν ειδικές διαδικασίες που είναι δύσχρηστες και μπορεί να παρουσιάσουν ανακρίβειες. Προβληματικές διαδικασίες στις αρχικές συνθήκες μπορεί να μειώσει την ακρίβεια και την ευστάθεια της λύσης. Οι προβληματικές αυτές διαδικασίες εισαγωγής αρχικών συνθηκών δεν θα αναπτυχθούν στην εργασία αυτή, επίσης δεν κρίνεται σκόπιμο να αναπτυχθούν όλες οι μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης. Στη συνέχεια αναλύονται τα στοιχειώδη των τριών πιο βασικών μεθόδων που κρίνεται αναγκαίο για τους σκοπούς της εργασίας αυτής (Cook et al., 1988).

4.4.1 Μέθοδος κεντρικών διαφορών

Η πιο χαρακτηριστική μέθοδος έμμεσης ολοκλήρωσης (explicit direct integration) είναι η μέθοδος των κεντρικών διαφορών. Το σχήμα της μεθόδου φαίνεται στο σχήμα 4.2 (Press et al., 1992):



Σχήμα 4.2: Σχήμα μεθόδου κεντρικών διαφορών (Press et al., 1992)

Η μέθοδος αυτή προσεγγίζει ταχύτητα και επιτάχυνση από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\{\dot{D}\}_n = \frac{1}{2\Delta t}(\{D\}_{n+1} - \{D\}_{n-1}) \tag{4.23}$$

$$\{\ddot{D}\}_n = \frac{1}{\Delta t^2}(\{D\}_{n+1} - 2\{D\}_n + \{D\}_{n-1}) \tag{4.24}$$

Οι σχέσεις 4.23 και 4.24 λαμβάνονται με ανάπτυξη των $\{D\}_{n+1}$ και $\{D\}_{n-1}$ σε σειρές Taylor για χρόνο nΔt:

$$\{D\}_{n+1} = \{D\}_n + \Delta t\{\dot{D}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{D}\}_n + \frac{\Delta t^3}{6}\{\dddot{D}\}_n + ... \tag{4.25}$$

$$\{D\}_{n-1} = \{D\}_n - \Delta t\{\dot{D}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{D}\}_n - \frac{\Delta t^3}{6}\{\dddot{D}\}_n + ... \tag{4.26}$$

Αφαιρώντας την σχέση 4.26 από την 4.25 λαμβάνεται η προσέγγιση της ταχύτητας της σχέσης 4.23 ενώ προσθέτοντας την σχέση 4.25 στην 4.26 λαμβάνεται η προσέγγιση της επιτάχυνσης, σχέση 4.24. Και στις δυο περιπτώσεις οι όροι περιέχουν

το Δt^2 για αυτό και οι υψηλές δυνάμεις παραλείπονται από τις σχέσεις 4.23 και 4.24, που έχουν ακρίβεια δευτέρας τάξης, δηλαδή το σφάλμα είναι 0(Δt^2). Συνδυάζοντας τις σχέσεις 4.23 και 4.24 με την σχέση 4.18 λαμβάνεται η τελική μορφή των κεντρικών διαφορών (Cook et al., 1988):

$$\left[\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right]\{D\}_{n+1} = \{R^{ext}\}_n - [K]\{D\}_n + \frac{1}{\Delta t^2}[M](2\{D\}_n - \{D\}_{n-1}) + \frac{1}{2\Delta t}[C]\{D\}_{n-1} \tag{4.27}$$

Η σχέση 4.27 είναι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Αν τα μητρώα [M] και [C] είναι διαγώνια τότε οι εξισώσεις είναι διαχωρίσιμες και το $\{D\}_{n+1}$ μπορεί να ληφθεί χωρίς την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων (Cook et al., 1988).

Σχόλια (Cook et al., 1988):

- Για μικρά μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων, το μητρώο ακαμψίας [K] που κατασκευάζεται μπορεί να αποθηκεύεται και το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων να για κάθε χρονικό βήμα να υπολογίζεται με πολλαπλασιασμό πινάκων $\{R^{\text{int}}\}_n = [K]\{D\}_n$. Επειδή το μητρώο ακαμψίας δεν χρειάζεται να κατασκευάζεται κάθε φορά, οι έμμεσες μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τρισδιάστατα μοντέλα σε μέτριας δυναμικότητας υπολογιστή.
- Ξεκινώντας την εφαρμογή της μεθόδου από n=0, απαιτείται $\{D\}_{-1}$ που μπορεί να υπολογιστεί από τις γνωστές αρχικές συνθήκες $\{D\}_o$ και $\{\dot{D}\}_o$. Εφαρμόζοντας την σχέση 4.26 λαμβάνεται:

$$\{D\}_{-1} = \{D\}_0 - \Delta t\{\dot{D}\}_0 + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{D}\}_0 \tag{4.28}$$

οι όροι ανωτέρας τάξης Δt^3 παραλείπονται. Το $\{\ddot{D}\}_0$ λαμβάνεται από την εξίσωση κίνησης 4.18 την χρονική στιγμή μηδέν:

$$\{\ddot{D}\}_0 = [M]^{-1}(\{R^{ext}\}_0 - [K]\{D\}_0 - [C]\{\dot{D}\}_0 \tag{4.29}$$

- Η σχέση 4.27 είναι υποθετικά ευσταθής (conditionally stable) και απαιτεί Δt τέτοιο ώστε:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \tag{4.30}$$

όπου ω_{max}: η μεγαλύτερη φυσική συχνότητα της εξίσωσης:

$$\det([K] - \omega^2[\mathrm{M}]) = 0 \tag{4.31}$$

Αν η σχέση 4.30 δεν ικανοποιείται τότε οι υπολογισμοί δεν είναι ευσταθείς. Η ευστάθεια της λύσης ισχύει οριακά, όταν:

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_{\max}} \tag{4.32}$$

και η σύγκλιση μπορεί να επιτευχθεί σε ορισμένες εφαρμογές μόνο. Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι η σχέση 4.27 δεν επηρεάζεται από την απόσβεση (Cook et al., 1988).

- Είναι κατανοητό ότι γνωρίζοντας τις μετατοπίσεις και τις ταχύτητες σε μια δεδομένη στιγμή (αρχικές συνθήκες), η μέθοδος των κεντρικών διαφορών είναι ευσταθής και μπορεί να εφαρμοστεί για χρόνο που έχει περάσει έτσι ώστε:

$$-\frac{2}{\omega_{\max}} \leq \Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \tag{4.33}$$

- Αν το Δt είναι πολύ μεγάλο τότε η μέθοδος είναι ασταθής. Αν το Δt είναι πολύ μικρό από ότι χρειάζεται τότε οι υπολογισμοί είναι βεβαρημένοι. Είναι λοιπόν αναγκαίο να ορίζεται σωστά το όριο ω_{max}:

$$(\omega_{\max})_e = \frac{2c}{L} \tag{4.34}$$

όπου $(\omega_{\max})_e$: η μέγιστη συχνότητα (όριο) ενός στοιχείου, L: το μήκος του μοντέλου και c: η ακουστική ταχύτητα κύματος ή ταχύτητα διευρυνόμενου κύματος:

$$c = \sqrt{E/\rho} \tag{4.35}$$

και είναι η ταχύτητα με την οποία ταξιδεύει η πληροφορία στο μοντέλο, άρα για να είναι η έμμεση ολοκλήρωση ευσταθής, το χρονικό βήμα θα πρέπει να είναι:

$$\Delta t \leq \frac{L}{c} \tag{4.36}$$

που καλείται και συνθήκη CFL.

- Ένας χρήσιμος ορισμός για το σχετικό χρονικό βήμα είναι ο αριθμός Courant C_n, όπου θεωρείται κριτήριο ευστάθειας και ορίζεται:

$$C_n = \frac{\Delta t_{actual}}{\Delta t_{stable}} \tag{4.37}$$

όπου Δt_{actual}: το πραγματικό χρονικό βήμα, Δt_{stable}: Το μεγαλύτερο χρονικό βήμα για να είναι η μέθοδος ευσταθής. Συνήθως το C_n παίρνει τιμές 0.95-0.98.

4.4.2 Μέθοδος Houbolt

Η μέθοδος Houbolt λαμβάνεται με κυβική παρεμβολή Lagrange του {D} σε χρόνους (n-2)Δt έως (n-1)Δt. Η μέθοδος αυτή έχει χαρακτηριστικά υψηλής αριθμητικής απόσβεσης και συγκεκριμένα για υψηλές συχνότητες. Αυτή η υψηλή απόσβεση καθιστά την μέθοδο ευσταθή κα για μη γραμμικά προβλήματα. Στην πραγματικότητα η ευστάθεια της μεθόδου αυξάνει με το μέγεθος του χρονικού βήματος. Η αδυναμία της μεθόδου είναι στο ότι γίνεται ασταθής για μεγάλα χρονικά βήματα. Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται με την μέθοδο αυτή έχουν εξομαλυσμένη μορφή αλλά δεν είναι απολύτως ακριβής. Οι σχέσεις τις μεθόδου έχουν ως εξής (Cook et al., 1988):

$$\{\dot{D}\}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta t}(11\{D\}_{n+1} - 18\{D\}_n + 9\{D\}_{n-1} - 2\{D\}_{n-2}) \tag{4.38}$$

$$\{\ddot{D}\}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2}(2\{D\}_{n+1} - 5\{D\}_n + 4\{D\}_{n-1} - \{D\}_{n-2}) \tag{4.39}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 4.38 και 4.39 στην εξίσωση κίνησης 4.18 λαμβάνεται μια εξίσωση όπως την σχέση 4.27. Παλαιότερα η μέθοδος Houbolt ήταν η πιο γνωστή για δυναμικά προβλήματα γενικής φύσης, όμως σήμερα έχει αντικατασταθεί από πολύ πιο εξελιγμένους αλγόριθμους οι οποίοι λαμβάνουν υπόψη τους σε μεγάλη ακρίβεια ιδιότητες απόσβεσης (Cook et al., 1988).

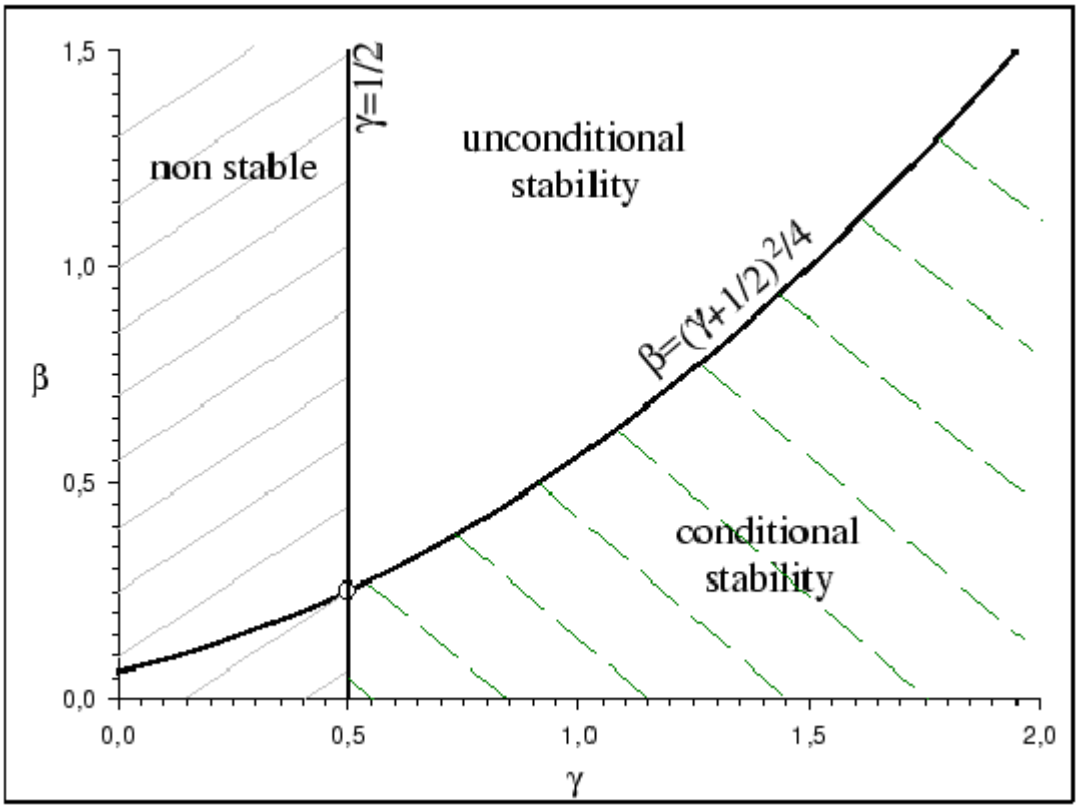
4.4.3 Μέθοδος Newmark

Η μέθοδος Newmark είναι η πιο γνωστή από τις μεθόδους άμεσης ολοκλήρωσης που χρησιμοποιούνται στα πεπερασμένα στοιχεία. Για γραμμικά προβλήματα είναι απόλυτα ευσταθής και δεν παρουσιάζει αριθμητική απόσβεση. Η μέθοδος αυτή μπορεί να δώσει αποδοτικές λύσεις τόσο για γραμμικά όσο για μη γραμμικά προβλήματα για ένα πολύ μεγάλο εύρος φορτίων. Η διαδικασία επιτρέπει την αλλαγή χρονικού βήματος έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα απότομης κρούσης που απαιτούν μείωση του χρονικού βήματος. Η σχέσεις της μεθόδου είναι (Cook et al., 1988):

$$\{D\}_{n+1} = \{D\}_n + \Delta t\{\dot{D}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2}[(1-2\beta)\{\ddot{D}\}_n + 2\beta\{\ddot{D}\}_{n+1}] \tag{4.40}$$

$$\{\dot{D}\}_{n+1} = \{\dot{D}\}_n + \Delta t[(1-\gamma)\{\ddot{D}\}_n + \gamma\{\ddot{D}\}_{n+1}] \tag{4.41}$$

όπου το β, γ είναι συντελεστές για να ελέγχει ο αναλυτής την ευστάθεια και την ακρίβεια της μεθόδου. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 4.40 και 4.41 στην εξίσωση κίνησης 4.19 για χρόνο (n+1)Δt, λαμβάνεται μια εξίσωση όπως την σχέση 4.27. Για έμμεσες Newmark ισχύει (β=0) και για της άμεσες Newmark ισχύει (β>0). Στο σχήμα 4.3 φαίνεται η ευστάθεια της μεθόδου (Cook et al., 1988).



Σχήμα 4.3: Περιοχές ευστάθειας της μεθόδου Newmark (Bernard and Simon, 1993)

Σύμφωνα με τους ορισμούς που δόθηκαν για τις έμμεσες και άμεσες μεθόδους, η μέθοδος Newmark είναι άμεση όταν εκτός αν τα $\beta = \gamma = 0$, που είναι ασταθής για κάθε χρονικό βήμα Δt και δεν μπορεί αν χρησιμοποιηθεί. Στις περισσότερες περιπτώσεις η μέθοδος έχει εφαρμογή για $\beta=0$ και $\gamma \geq 1/2$ που είναι έμμεση και για σκοπούς πρακτικότητας το μητρώο απόσβεσης [C] είναι διαγώνιο για την αποφυγή επίλυσης εξισώσεων ταυτόχρονα (Cook et al., 1988).

Μια ποικιλία χρήσιμων μεθόδων μπορεί να επιτευχθεί από την εφαρμογή της Newmark για αυτό και ονομάζεται οικογένεια λύσεων Newmark. Όταν $\gamma=1/2$, οι μέθοδοι δεν παρουσιάζουν απόσβεση και παρουσιάζουν ακρίβεια δευτέρας τάξης, με την εξαίρεση ο πίνακας απόσβεσης να είναι [C]=0 που παρουσιάζει ακρίβεια τετάρτης τάξης. Αν ληφθεί $\gamma>1/2$ τότε εισάγεται τεχνητή απόσβεση αλλά όμως μειώνεται η ακρίβεια σε πρώτη τάξη. Για άμεσες μεθόδους Newmark αν ληφθεί:

$$\beta = \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 \tag{4.42}$$

μεγιστοποιείται η μείωση της υψηλής συχνότητας για δεδομένη τιμή της γ>1/2. Στο πίνακα 4.1 φαίνονται συνοπτικά όλες οι μέθοδοι Newmark.

Πίνακας 4.1: Σύνοψη μεθόδων Newmark (Cook et al., 1988)

	Μέθοδος	**β**	**γ**	**Ω_{crit}**	**Ακρίβεια**
Άμεσες	Τεχνητή απόσβεση	>γ/2	>1/2	$\infty^{(u,d)}$	$0(\Delta t)$
	Μέση επιτάχυνση (κανόνας τραπεζίου)	1/4	1/2	$\infty^{(u,d)}$	$0(\Delta t^2)$
	Γραμμική επιτάχυνση	1/6	1/2	$2\sqrt{3}=3.464^{(u)}$ Σχέση $A^{(d)}$	$0(\Delta t^2)$
	Fox Goodwin	1/12	1/2	$\sqrt{6}=2.449^{(u)}$ Σχέση $A^{(d)}$	$0(\Delta t^4)^{(u)}$ $0(\Delta t^2)^{(d)}$
Έμμεσες	Κεντρικές διαφορές [M], [C] διαγώνιοι	0	1/2	$2^{(u)}$ Σχέση $A^{(d)}$	$0(\Delta t^2)$
	Τεχνητή απόσβεση [M], [C] διαγώνιοι	0	>1/2	Σχέση $A^{(u,d)}$	$0(\Delta t)$

όπου σχέση A δίδεται από την εξίσωση:

$$\Omega_{crit} = \frac{\xi(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2(\gamma = \frac{1}{2})^2}}{\frac{\gamma}{2} - \beta} \tag{4.43}$$

u: χωρίς απόσβεση, d: με απόσβεση, ενώ η ευστάθεια της μεθόδου απαιτεί χρονικό βήμα:

$$\Delta t = \frac{\Omega_{crit}}{\omega_{\max}} \tag{4.44}$$

Παρατηρείται ότι:

- Με την παρουσία της απόσβεσης στις έμμεσες μεθόδους, αυξάνεται το όριο ευστάθειας σε αντίθεση με τις κεντρικές διαφορές που δεν παρουσιάζεται καμία αλλαγή στην ευστάθεια της μεθόδου.
- Η μέθοδος Newmark (γραμμική επιτάχυνση) είναι ιδανική για ανάλυση απόκρισης κατασκευών από σεισμούς, στην οποία τα ξεχωριστά βήματα της γραμμικής επιτάχυνσης χρησιμοποιούνται σαν την διέγερση που παράγεται από ένα σεισμό.
- Ένα μειονέκτημα της μεθόδου της είναι ότι η αριθμητική απόσβεση επιτυγχάνεται σε βάρος της ακρίβειας.

Η μέθοδος Newmark έτσι όπως έχει προταθεί από τους Hilber, Hughes και Taylor, (1977), δεν παρουσιάζει την παραπάνω αδυναμία και με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων, επιτυγχάνεται ακρίβεια δευτέρας τάξης και αποδοτική μείωση υψηλών συχνοτήτων. Η σχέση της μεθόδου αυτής είναι (Cook et al., 1988):

$$[M]\{\ddot{D}\}_{n+1} + (1+a)[C]\{\dot{D}\}_{n+1} - a[C]\{\dot{D}\}_n + (1+a)[K]\{D\}_{n+1} - a[K]\{D\}_n = (1+a)\{R^{ext}\}_{n+1} - a\{R^{ext}\}_n \quad (4.45)$$

Αν οι παράμετροι επιλεγούν έτσι ώστε $-\frac{1}{3} \le a \le 0$, $\gamma = \frac{(1-2\alpha)}{2}$ και $\beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4}$, η μέθοδος είναι άμεση και ευσταθής με ακρίβεια δευτέρας τάξης. Αν α=0 η μέθοδος υποβιβάζεται σε κανόνα τραπεζίου που δεν παρουσιάζει μείωση συχνοτήτων, ενώ μειώνοντας το α τότε επιτυγχάνεται αύξηση αριθμητικής απόσβεσης.

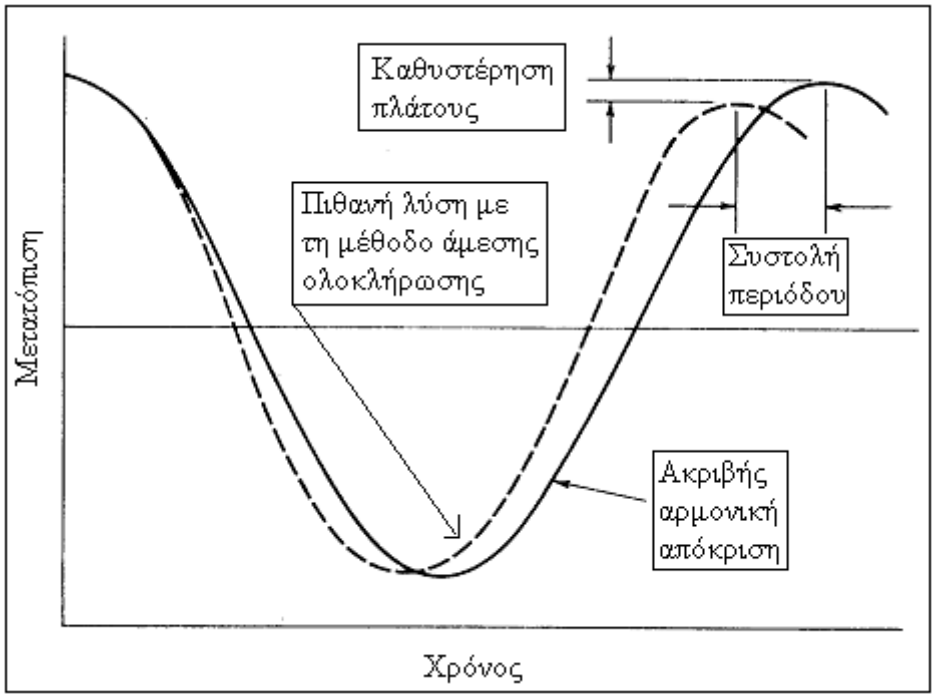
4.5 Ανάλυση Ευστάθειας

Όταν γίνεται έλεγχος ευστάθειας, είναι επαρκές να θεωρηθεί ομογενής η μορφή της εξίσωσης κίνησης. Αυτό λαμβάνεται θέτοντας $\{R^{ext}\} = \{0\}$. Η βασική ιδέα είναι ότι αν αποδειχτεί αυτή τη διαδικασία λύσης είναι ευσταθής χωρίς εξωτερικά φορτία τότε θα είναι επίσης ευσταθής και για $\{R^{ext}\} \neq \{0\}$ αλλά με κάποιους περιορισμούς. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι ελέγχου ευστάθειας και μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες (Cook et al., 1988).

- **Φασματική ευστάθεια Fourier**, όπου ελέγχεται το αποτέλεσμα της χρονικής ολοκλήρωσης σε μια μοναδική εξίσωση κίνησης που πετυχαίνεται ο σταδιακός διαχωρισμός των αρχικών εξισώσεων του υλικού.
- **Ενεργειακή ευστάθεια**, όπου γίνεται χειρισμός των αρχικών μητρώων του υλικού, θέτοντας τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια νόρμα η οποία προκύπτει από την επίλυση στη χρονική στιγμή nΔt μπορεί να συνδεθεί με μια νόρμα που προκύπτει από την επίλυση για χρόνο μηδέν.

Η φασματικές μέθοδοι ευστάθειας όμως δίνουν καλύτερα και πιο ακριβής αποτελέσματα. Οι ενεργειακές μέθοδοι ευστάθειας ορισμένες φορές προσφέρουν αποτελέσματα που δεν είναι μεγάλης ακρίβειας όμως μπορούν να εφαρμοστούν σε περίπλοκα προβλήματα όπου οι φασματικές μέθοδοι δεν είναι τόσο ευέλικτες.

Το πιθανά σφάλματα στις μεθόδους άμεσης ολοκλήρωσης φαίνονται στο σχήμα 4.4 (Cook et al., 1988):



Σχήμα 4.4: Πιθανά σφάλματα στις μεθόδους άμεσης ολοκλήρωσης (Cook et al., 1988)

4.6 Συμπεράσματα για την Ιστορική Χρονική Ανάλυση

Με βάση όλα όσα έχουν αναφερθεί σε αυτό το κεφάλαιο, η χρονική ιστορική ανάλυση είναι μια πολύπλοκη διαδικασία στην οποία εξάγονται τα πιο κάτω

συμπεράσματα για την επιλογή της μεθόδου, την επιλογή των στοιχείων καθώς επίσης και την επιλογή της διακριτοποίησης (Cook et al., 1988).

4.6.1 Επιλογή μεθόδου

Η επιλογή της μεθόδου στην χρονική ιστορική ανάλυση είναι αποκλειστικά εξαρτώμενη από τον τύπο του προβλήματος. Η αποδοτικότητα της μεθόδου εξαρτάται από το πρόβλημα αν είναι δυναμική διάδοση κύματος ή δυναμική απόκριση κατασκευών, τη χρονική διάρκεια την οποία απαιτεί η ανάλυση, αν το πρόβλημα είναι γραμμικό ή μη γραμμικό, καθώς επίσης και από την επιλογή της διακριτοποίησης.

Στα προβλήματα δυναμικής διάδοσης κυμάτων, η διέγερση είναι συνισταμένη υψηλών συχνοτήτων. Η χρονική κλίμακα ενδιαφέροντος είναι πολύ μικρή και της τάξης του να διαδοθεί και να επιστρέψει στο σημείο το οποίο ξεκίνησε. Συνήθως το ενδιαφέρων σε τέτοια προβλήματα είναι η διάδοση των τασικών κυμάτων διαμέσου των στοιχείων και των αιφνίδιων μεταβολών που προκαλεί (Cook et al., 1988).

Οι μέθοδοι ρυθμού επαλληλίας (modal superposition) είναι κατάλληλες για μικρό αριθμό ταλαντώσεων στο πρόβλημα. Στα προβλήματα δυναμικής διάδοσης κυμάτων απαιτούνται μεγάλοι ρυθμοί και αριθμοί ταλάντωσης για αυτό και οι μέθοδοι αυτοί είναι ακατάλληλες για τέτοιου τύπου προβλήματα.

Η σύγκλιση είναι επίσης εξαρτώμενη από τον τύπο του προβλήματος και συνήθως είναι μικρή. Γενικά οι μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης είναι επιθυμητές σε μη γραμμικά προβλήματα. Με τις μεθόδους έμμεσης ολοκλήρωσης, η ευστάθεια απαιτεί το χρονικό βήμα να είναι αρκετά μικρό έτσι ώστε η πληροφορία να μπορεί να διαδοθεί όχι λιγότερο, ούτε περισσότερο από ένα στοιχείο (συνθήκη CFL). Οι έμμεσες μέθοδοι είναι ιδανικές για προβλήματα δυναμικής διάδοσης κυμάτων διότι ο περιορισμός της ευστάθειας δεν είναι μεγάλο μειονέκτημα διότι το μικρό χρονικό βήμα που χρησιμοποιείται είναι απαραίτητο για την ακρίβεια. Άλλοι θετικοί παράγοντες των έμμεσων μεθόδων είναι η εύκολη εφαρμογή, ο ακριβής χειρισμός των μη γραμμικών προβλημάτων, καθώς επίσης και η αντιμετώπιση πολύ μεγάλων προβλημάτων με μέτριας δυναμικότητας υπολογιστή και χώρο αποθήκευσης (Cook et al., 1988).

Το μόνο πλεονέκτημα των άμεσων από των έμμεσων μεθόδων είναι ότι επιτρέπουν πολύ μεγαλύτερο χρονικό βήμα επειδή είναι ευσταθείς υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Οι άμεσες μέθοδοι είναι βεβαρημένες για προβλήματα δυναμικής διάδοσης

κυμάτων διότι η ακρίβεια τους απαιτεί μικρό χρονικό βήμα. Σε σύγκριση με τις έμμεσες μεθόδους, οι άμεσες μέθοδοι είναι πιο δύσκολες στην εφαρμογή τους ειδικότερα στα μη γραμμικά προβλήματα καθώς επίσης απαιτούν πολύ μεγαλύτερο χώρο αποθήκευσης δεδομένων για την επίλυση ενός προβλήματος (Cook et al., 1988).

4.6.2 Επιλογή στοιχείων και διακριτοποίηση

Όταν γίνεται η διακριτοποίηση ενός σώματος ή περιοχής, ο αναλυτής μπορεί να επιλέξει από απλά στοιχεία, χαμηλής τάξης, γραμμικά, διγραμμικά τετράεδρα ή και ανώτερης τάξης στοιχεία όπως τετραεδρικά Lagrange. Σε προβλήματα δυναμικής διάδοσης κυμάτων, τα στοιχεία χαμηλής τάξης είναι πιο κατάλληλα για την εξαγωγή αποτελεσμάτων διότι τα ανώτερης τάξης στοιχεία τείνουν να παράγουν αριθμητικό θόρυβο. Τα στοιχεία υψηλής τάξης είναι κατάλληλα σε προβλήματα ιδιοτιμών.

Όπως ισχύει στα στατικά προβλήματα, έτσι και στα δυναμικά προβλήματα, η ανάλυση απαιτεί πύκνωση των στοιχείων στην περιοχή όπου αναμένεται η αιφνίδια μεταβολή της τάσης. Στα συγκεκριμένα δυναμικά προβλήματα μπορεί να απαιτείται και πυκνότερη διακριτοποίηση σε σχέση με στατικά. Η μετάβαση των στοιχείων δεν πρέπει να είναι απότομη. Αν είναι απότομη, το μητρώο μάζας που θα προκύψει θα είναι ακριβής διακριτή αναπαράσταση της πραγματικής κατανομής μάζας του υλικού. Ως συνέπεια αυτού θα αυξηθούν οι ανακλάσεις και ο αριθμητικός θόρυβος κοντά στα σύνορα μετάβασης των στοιχείων (Cook et al., 1988).

4.7 Μη Γραμμικά Δυναμικά Προβλήματα

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, αν η συχνότητα μιας διέγερσης (ανατίναξη) εφαρμοστεί σε ένα υλικό και είναι μεγαλύτερη κατά το ένα τρίτο της χαμηλότερης φυσικής συχνότητας ταλάντωσης του υλικού τότε η επίδραση της αδράνειας είναι σημαντική και το πρόβλημα καλείται δυναμικό. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην μη γραμμική ανάλυση είναι οι μέθοδοι της άμεσης ολοκλήρωσης (Cook et al., 1988).

4.7.1 Έμμεσες μέθοδοι ολοκλήρωσης

Ο χειρισμός των μη γραμμικών προβλημάτων με τις έμμεσες μεθόδους είναι ακριβής και αποδοτικός. Οι έμμεσες μέθοδοι απαιτούν τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων, $\{r^{\text{int}})_n$ πριν τον υπολογισμό των νέων μετατοπίσεων $\{D\}_{n+1}$. Ο υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων στοιχείο με στοιχείο $\{r^{\text{int}})_n$ χρησιμοποιώντας την σχέση 4.7 απαιτεί τις τάσεις $\{\sigma\}_n$ να είναι γνωστές. Για γραμμικά προβλήματα ισχύει:

$$\{\sigma\}_n = [E][B]\{D\}_n \tag{4.46}$$

στην οποία το $\{D\}_n$ είναι γνωστό. Για την πλαστικότητα, το βήμα της τάσης $\{d\sigma\} = \{\Delta\sigma\}$ μπορεί να υπολογιστεί από το βήμα της παραμόρφωσης (σχέση 4.47) και ενός καταστατικού νόμου (σχέση 4.48):

$$\{\Delta\varepsilon\} = [\mathrm{B}](\{D\}_n - \{D\}_{n-1}) \quad \text{[Βήμα παραμόρφωσης]} \tag{4.47}$$

$$\{d\sigma\} = [\mathrm{E}_{ep}]\{d\varepsilon) \quad \text{[Καταστατικός νόμος]} \tag{4.48}$$

όπου [B]: χωρική παράγωγος του πεδίου μεταβλητών και είναι [B]{d}, $[\mathrm{E}_{ep}]$: Μέτρο ελαστικότητας. Αφού το διάνυσμα της τάσης την χρονική στιγμή nΔt δίδεται από την σχέση:

$$\{\sigma\}_n = \{\sigma\}_{n-1} + \{\Delta\sigma\} \tag{4.49}$$

τότε το διάνυσμα $\{r^{\text{int}})_n$ λαμβάνεται με την επίλυση της σχέσης 4.7.

Όπως και στα γραμμικά προβλήματα, η ακρίβεια μιας έμμεσης μεθόδου εξασφαλίζεται όταν το κριτήριο ευστάθειας του χρονικού βήματος ικανοποιηθεί. Τα κριτήρια αυτά (σχέση 4.30) ισχύουν και για μη γραμμικά προβλήματα δεδομένου ότι εφαρμόζονται για την στιγμιαία τιμή του $\omega_{\max}$ που είναι συνάρτηση των ιδιοτήτων του υλικού, την γεωμετρία του στοιχείου και την γεωμετρία της διακριτοποίησης (Cook et al., 1988).

Αριθμητική αστάθεια είναι συνήθως εύκολη να εντοπιστεί σε γραμμικά προβλήματα διότι η αστάθεια μεγαλώνει χωρίς όριο. Στα μη γραμμικά προβλήματα με ελαστοπλαστικά υλικά, εισάγεται επιπλέον ενέργεια στο σύστημα διότι μειώνεται από την αριθμητική αστάθεια του έργου πλαστικότητας ή κάποιου άλλου μη αντιστρέψιμου μηχανισμού έτσι ώστε να μπορεί να εντοπιστεί η αστάθεια αυτή και να αντιμετωπιστεί (Cook et al., 1988).

4.7.2 Έλεγχος ισοζυγίου ενέργειας

Στην ανάλυση μη γραμμικών δυναμικών προβλημάτων, συνήθως συνίσταται η εκπόνηση ισοζυγίου ενέργειας για να βοηθήσει στην εξακρίβωση της ευστάθειας και της ακρίβειας των υπολογισμών. Ιδανικά, η ενέργεια τη χρονική στιγμή (n+1)Δt σε ένα σύστημα που ξεκινάει με αρχικές συνθήκες ηρεμίας, ικανοποιούν της εξίσωση (Cook et al., 1988):

$$W_{n+1}^{\text{int}} + T_{n+1} = W_{n+1}^{ext} \tag{4.50}$$

όπου W: έργο και T: κινητική ενέργεια. Από φυσική άποψη η σχέση 4.50 δηλώνει ότι το έργο των εξωτερικών φορτίων μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια και σε ενέργεια που αποθηκεύεται από ελαστικότητα ή παραμόρφωση πλαστικότητας.

Το εσωτερικό έργο W_{n+1}^{int} αναπαριστά το έργο που παράγεται από τα φορτία στους κόμβους που αναπτύσσονται από την παραμόρφωση του υλικού και δίδεται από την σχέση:

$$W_{n+1}^{\text{int}} = W_n^{\text{int}} + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \dot{W}^{\text{int}} \, dt \tag{4.51}$$

σημειώνεται όπου

$$\dot{W}^{\text{int}} = \{\dot{D}\}_n^T \{R^{\text{int}}\}_n \tag{4.52}$$

και προσεγγίζει το ολοκλήρωμα στη σχέση 4.51 με τον κανόνα του τραπεζίου ως εξής:

$$W_{n+1}^{\text{int}} = W_n^{\text{int}} + \frac{\Delta t}{2}(\{\dot{D}\}_n^T \{R^{\text{int}}\}_n + \{\dot{D}\}_{n+1}^T \{R^{\text{int}}\}_{n+1}) \tag{4.53}$$

Η σχέση 4.53 είναι κατάλληλη για χρήση με έμμεσες μεθόδους για υπολογισμό ταχυτήτων σε όλα τα χρονικά βήματα (π.χ μέθοδος Newmark για β=0). Όταν οι ταχύτητες είναι γνωστές στα μισά χρονικά βήματα, όπως στη μέθοδο των κεντρικών διαφορών, η σχέση 4.53 γράφεται (Cook et al., 1988):

$$W_{n+1}^{\text{int}} = W_n^{\text{int}} + \frac{\Delta t}{2}\{\dot{D}\}_{n+1/2}^T(\{R^{\text{int}}\}_n + \{R^{\text{int}}\}_{n+1}) \tag{4.54}$$

Το εξωτερικό έργο W_{n+1}^{ext}, παριστάνει το έργο που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία και δίδεται από την σχέση:

$$W_{n+1}^{ext} = W_n^{ext} + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \{\dot{D}\}^T \{R^{ext}\} dt \tag{4.55}$$

Η κινητική ενέργεια, T_n, δίδεται από την σχέση:

$$T_n = \frac{1}{2}\{\dot{D}\}_n^T [M] \{\dot{D}\}_n \tag{4.56}$$

ή σε μισούς χρόνους με τις ταχύτητες γνωστές:

$$T_n = \frac{1}{2}(T_{n-1/2} + T_{n+1/2}) \tag{4.57}$$

Σημειώνεται ότι κατά την κατασκευή ενός ισοζυγίου ενέργειας, η σχέση 4.50 δεν ικανοποιείται πλήρως. Για την μέτρηση της ποιότητας της λύσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί (Cook et al., 1988):

$$W_n^{\text{int}} + T_n - \left|W_n^{ext}\right| \le e(W_n^{\text{int}} + T_n + \left|W_n^{ext}\right| \tag{4.58}$$

όπου e: είναι αριθμός ανοχής. Τα απόλυτα στη σχέση είναι για να εμποδιστούν οι μικρές αρνητικές τιμές του W^{ext} εξαιτίας αριθμητικών σφαλμάτων. Οι όροι μέσα στην παρένθεση στο δεξί μέρος της εξίσωσης παριστάνουν την συνολική ενέργεια του συστήματος. Το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι το ενεργειακό λάθος. Ένας ευσταθής έμμεσος υπολογισμός πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση 4.58 με ανοχή $e \leq 0.02$. Αν η σχέση 4.58, απαιτεί ανοχή $e \geq 0.05$ για την ικανοποίηση της, τότε ακόμα και για μοντέλα με χιλιάδες στοιχεία στην διακριτοποίηση τους και με χιλιάδες χρονικά βήματα στην επίλυση, θα πρέπει να αναμένεται αστάθεια στα αποτελέσματα (Cook et al., 1988).

4.7.3 Άμεσες μέθοδοι

Συγκρίνοντας τις έμμεσες μεθόδους με τις άμεσες μεθόδους, οι πιο κατάλληλες μέθοδοι για την αντιμετώπιση μη γραμμικών προβλημάτων είναι οι έμμεσες. Οι άμεσες δεν είναι κατάλληλες για τον λόγο ότι η εφαρμογή τους απαιτεί χρήση μεγάλων χρονικών βημάτων. Η μη γραμμικότητα παρουσιάζει τις ίδιες δυσκολίες τόσο στη στατική όσο και στη δυναμική ανάλυση. Η ακαμψία είναι συνάρτηση των μετατοπίσεων που δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων. Η σύγκλιση είναι το πιο σύνηθες πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στις μεθόδους αυτές. Οι μέθοδοι που μπορούν να δώσουν καλά αποτελέσματα είναι η μέθοδος **εφαπτόμενης ακαμψίας** και η μέθοδος **αρχικής ακαμψίας,** όμως δεν κρίνεται σκόπιμο να αναλυθούν (Cook et al., 1988).

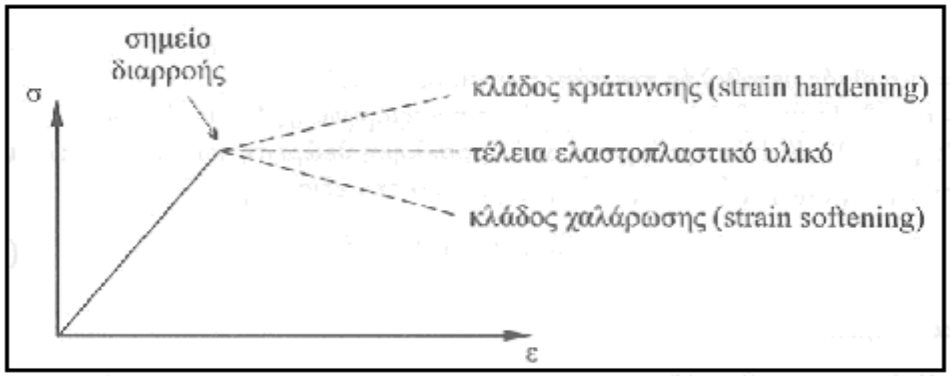
5. Ελαστοπλαστική Συμπεριφορά και Προβλήματα Επαφής

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγραφούν οι έννοιες της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς και των αντιστοίχων καταστατικών μοντέλων, καθώς επίσης και η εισαγωγή των μοντέλων αυτών στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Θα περιγραφούν οι έννοιες του ορίου πλαστικής διαρροής (plastic yield limit), της συνάρτησης πλαστικής συμπεριφοράς (plastic potential function), της κράτυνσης (hardening), καθώς και της χαλάρωσης (softening) του υλικού (Potts & Zdravkovic,1999). Η περιγραφή θα πραγματοποιηθεί σε μία διάσταση διότι μια πλήρης περιγραφή ξεφεύγει από τους σκοπούς της ανάλυσης μας αν και θα δοθούν εξηγήσεις για την διαδικασία επίλυσης σε περισσότερες διαστάσεις. Τέλος θα γίνει αναφερά στην σύνθεση των προβλημάτων επαφής.

5.2 Γενικά

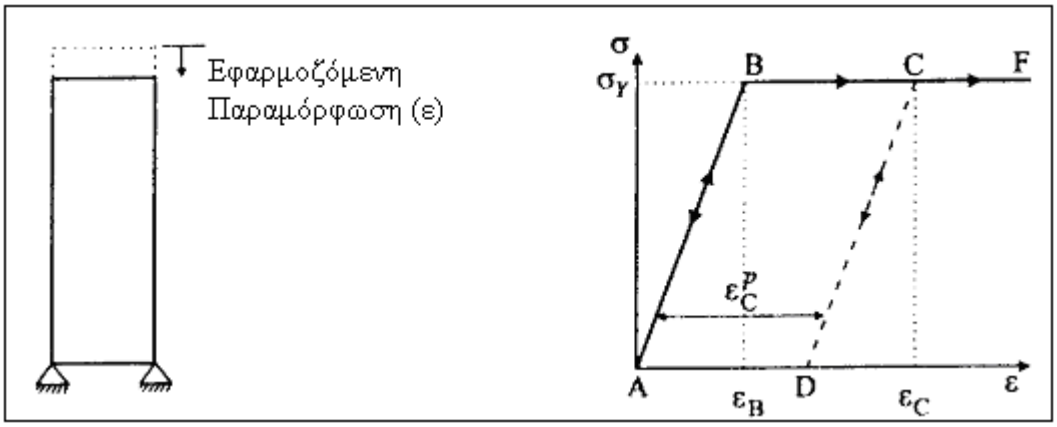
Η ελαστοπλαστική συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από ένα γραμμικά ή μη γραμμικά ελαστικό κλάδο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Όταν η εντατική κατάσταση του υλικού αντιπροσωπεύεται από τον ελαστικό κλάδο τότε το υλικό παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά. Όταν όμως η εντατική κατάσταση του υλικού υπερβεί το σημείο διαρροής του τότε αρχίζει η εμφάνιση μόνιμων παραμορφώσεων. Επίσης ένα πέτρωμα ή γεωυλικό μπορεί να μην χαρακτηρίζεται από τέλεια ελαστοπλαστική συμπεριφορά αλλά στον κλάδο μετά το σημείο διαρροής να παρουσιάσει κράτυνση ή χαλάρωση (Αγιουτάντης 2002).



Σχήμα 5.1: Ελαστοπλαστική συμπεριφορά (Αγιουτάντης 2002)

5.2.1 Ελαστικό-Τέλεια Πλαστικό Υλικό

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η διαδικασία μιας μονοαξονικής φόρτισης σε ιδανικά ελαστοπλαστικό υλικό (ελαστικό-τέλεια πλαστικό). Η φόρτιση προέρχεται από την εφαρμογή μίας θλιπτικής αξονικής παραμόρφωσης (ε) και παρουσιάζεται η καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης του υλικού (σ-ε).



Σχήμα 5.2:Ελαστικό τέλεια πλαστικό υλικό (Potts & Zdravkovic,1999)

Κατά την αρχική φόρτιση η συμπεριφορά του υλικού (γραμμή AB) είναι γραμμική και ελαστική. Η κλίση της γραμμής αυτής είναι σταθερή και ίση με το μέτρο ελαστικότητας (E). Αν η φόρτιση διακοπεί πριν η τάση στο υλικό προσεγγίσει το όριο διαρροής του υλικού στο σημείο B, και ξεκινήσει αποφόρτιση του υλικού, τότε στην καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης η γραμμή BA θα παρουσιαστεί πανομοιότυπη με αυτήν της φόρτισης χωρίς μόνιμες παραμορφώσεις.

Στην περίπτωση που η παραμόρφωση στο υλικό οδηγήσει την τάση στο σημείο διαρροής B τότε αυτό αρχίζει να συμπεριφέρεται πλαστικά. Η τάση όπου το υλικό μεταβαίνει από μία κατάσταση σε άλλη, ονομάζεται **αρχικό όριο διαρροής σ_Y** (initial yield stress). Από το σημείο αυτό και πέρα δεν ακολουθείται η γραμμική σχέση μεταξύ τάσης-παραμόρφωσης αλλά η τάση παραμένει σταθερή καθώς η παραμόρφωση συνεχίζεται. Αν από την πλαστική περιοχή ξεκινήσει αποφόρτιση του υλικού, η συμπεριφορά του επανέρχεται στην ελαστική κατάσταση και ακολουθεί τη γραμμή αποφόρτισης CD. Η γραμμή αυτή είναι παράλληλη με τη γραμμή φόρτισης AB. Μετά το τέλος της αποφόρτισης ενώ η τάση στο υλικό μηδενίζεται παραμένει μία τιμή παραμόρφωσης ε_c^P. Από το σημείο D αν επαναφορτισθεί το υλικό, θα

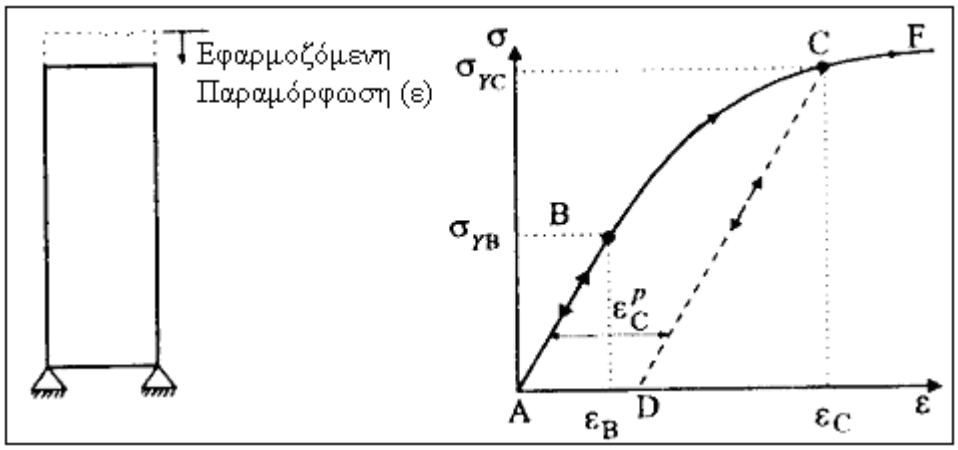
παρουσιάσει ελαστική γραμμική συμπεριφορά μέχρι το σημείο C και από εκεί και πέρα θα συμπεριφερθεί πάλι πλαστικά.

Όταν η συμπεριφορά του υλικού είναι αντιστρέψιμη χωρίς μόνιμες παραμορφώσεις ονομάζεται **ελαστική**. Όταν δεν είναι αντιστρέψιμη με μόνιμες παραμορφώσεις, δηλαδή μετά την αποφόρτιση το υλικό δεν επανέρχεται στο αρχικό του σχήμα, η συμπεριφορά ονομάζεται **πλαστική**. Ο συνδυασμός των συμπεριφορών αυτών απαντάται πολύ συχνά στα γεωυλικά και ονομάζεται ελαστοπλαστική συμπεριφορά (Potts & Zdravkovic, 1999).

5.2.2 Ελαστικό-Πλαστικό Υλικό με Κράτυνση

Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται η καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης (σ-ε) ενός υλικού με τις ίδιες συνθήκες που αναφέραμε πιο πάνω. Η συμπεριφορά του υλικού αυτού κατά τη φόρτιση από το σημείο A στο B είναι γραμμική και ελαστική. Από το σημείο αρχικής διαρροής B και παραπέρα η συμπεριφορά του γίνεται μη γραμμική.

➢ Αν η συμπεριφορά του υλικού είναι αντιστρεπτή και στη μη γραμμική περιοχή, δηλαδή κατά την αποφόρτιση η καμπύλη ακολουθεί την καμπύλη φόρτισης, το υλικό συμπεριφέρεται μη γραμμικά ελαστικά



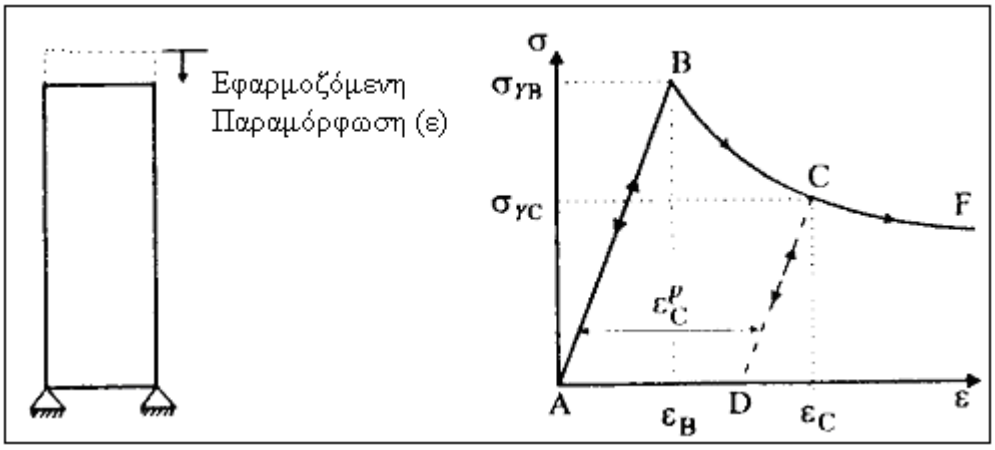
Σχήμα 5.3:Ελαστικό-Πλαστικό υλικό με κράτυνση (Potts & Zdravkovic, 1999)

➢ Όταν η συμπεριφορά του δεν είναι αντιστρέψιμη, αλλά από το σημείο C κατά την αποφόρτιση το υλικό συμπεριφέρεται γραμμικά τότε αυτό ονομάζεται ελαστικό μη γραμμικό πλαστικό. Κατά την επαναφόρτιση του από το σημείο D, το όριο διαρροής του δεν θα είναι πλέον το B αλλά το σημείο C, όπου η γραμμική καμπύλη τέμνει τη

μη γραμμική. Όταν κατά διαδοχικά στάδια φόρτισης αποφόρτισης το όριο διαρροής συνεχώς αυξάνει, η συμπεριφορά του υλικού ονομάζεται ελαστική γραμμική παραμόρφωση ή έργο, με κράτυνση πλαστικό [Linear elastic strain (or work) hardening plastic] (Potts & Zdravkovic, 1999).

5.2.3 Ελαστικό-Πλαστικό Υλικό με Χαλάρωση

Στην αντίθετη περίπτωση όπου το όριο διαρροής μειώνεται, η συμπεριφορά του υλικού ονομάζεται ελαστική γραμμική πλαστική με χαλάρωση. Η συμπεριφορά αυτή παρουσιάζεται στο σχήμα 5.4. Η μορφή της καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης παρουσιάζει γραμμική ελαστική συμπεριφορά από το Α στο Β και αντίστροφα (Potts & Zdravkovic, 1999).



Σχήμα 5.4:Ελαστικό-Πλαστικό υλικό με χαλάρωση (Potts & Zdravkovic, 1999)

Το σημείο Β είναι το αρχικό όριο διαρροής και από το σημείο αυτό και μετά το υλικό συμπεριφέρεται μη γραμμικά πλαστικά, δηλαδή κατά την αποφόρτιση δεν επιστρέφει στην αρχική του θέση αλλά παραμένει σε αυτό κάποια παραμόρφωση. Τα υλικά που συμπεριφέρονται κατά αυτόν τον τρόπο παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον από κατασκευαστική άποψη γιατί αν φορτιστούν πέρα από το αρχικό όριο διαρροής, οι τάσεις που μπορούν να παραλάβουν ελαττώνονται σημαντικά.

5.3 Συμπεριφορά Υλικών σε Περισσότερες Διαστάσεις

Για την εφαρμογή των ελαστοπλαστικών καταστατικών μοντέλων σε περισσότερες διαστάσεις πρέπει να οριστεί η συμπεριφορά τους σε πολυαξονικό

εντατικό πεδίο. Για να περιγραφεί η εντατική κατάσταση στον τρισδιάστατο χώρο, θεωρείται ότι σε κάποιο σημείο υπάρχουν έξι ανεξάρτητες μεταβλητές τάσης και έξι παραμορφώσης. Είναι φανερό ότι η διαδικασία προσαρμογής των καταστατικών εξισώσεων συμπεριφοράς των υλικών σε περισσότερες διαστάσεις είναι επίπονη διαδικασία.

Υπάρχουν κάποιες παραδοχές που απλουστεύουν τη διαδικασία αυτή. Αν το υλικό θεωρηθεί ισότροπο, δηλαδή οι ιδιότητες του είναι ανεξάρτητες από τον προσανατολισμό του υλικού και το όριο διαρροής εξαρτάται μόνο από το μέγεθος των τάσεων, τότε μπορούν να προκύψουν απλοποιήσεις με τη χρήση των σταθερών των τάσεων I_1, I_2, I_3 (invariants of stress), και των παραμορφώσεων. Όπως είναι γνωστό οι τρεις σταθερές τάσεων απαιτούνται για την περιγραφή του μεγέθους της τάσης. Αυτές μπορούν να λάβουν τις τιμές των κύριων τάσεων ή συνδυασμό αυτών (Potts & Zdravkovic, 1999).

Στις περιπτώσεις της πλαστικότητας η συμπεριφορά περιγράφεται με κάποια μορφή σταδίων όπου η τάση υπολογίζεται ως συσσωρευμένη τάση (accumulated stress) για κάθε στάδιο με βάση την σταθερά (invariant) παραμόρφωσης για το συγκεκριμένο στάδιο. Όταν θεωρείται ελαστοπλαστικό και ισότροπο το υλικό, το πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά αφού οι έξι μεταβλητές τάσεων παραμορφώσεων μειώνονται σε τρεις. Στην περίπτωση που το υλικό δεν μπορεί να θεωρηθεί ισότροπο και πρέπει να μοντελοποιηθεί ως ανισότροπο τότε απαιτούνται έξι μεταβλητές τάσεων και παραμορφώσεων (Potts & Zdravkovic, 1999).

5.4 Δημιουργία Ελαστοπλαστικών Καταστατικών Μοντέλων

Για την μαθηματική έκφραση των καταστατικών μοντέλων ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς απαιτούνται τρεις συναρτήσεις:

- Συναρτήσεις έκφρασης του ορίου διαρροής του υλικού
- Συνάρτηση έκφρασης της πλαστικής συμπεριφοράς
- Συνάρτηση που να περιγράφει την κράτυνση ή χαλάρωση του υλικού μετά το αρχικό όριο διαρροής.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το όριο διαρροής (σ_Y) εκφράζει το όριο μετάβασης από την ελαστική συμπεριφορά στην πλαστική (σε μία διάσταση). Σε πολυδιάστατες εντατικές καταστάσεις δεν υπάρχει ένας αριθμός που να ορίζει αυτό

το όριο γιατί η τάση εμφανίζεται με μεγαλύτερο αριθμό μεταβλητών. Για να οριστεί το όριο διαρροής σε πολυδιάστατη εντατική κατάσταση, απαιτείται κάποια συνάρτηση, που να λαμβάνει υπόψη της όλες τις μεταβλητές που περιγράφουν την εντατική κατάσταση στο χώρο. Αυτή ορίζεται ως η φυσική ποσότητα από το συνδυασμό των τάσεων (σ) και των φυσικών παραμέτρων του υλικού (κ).

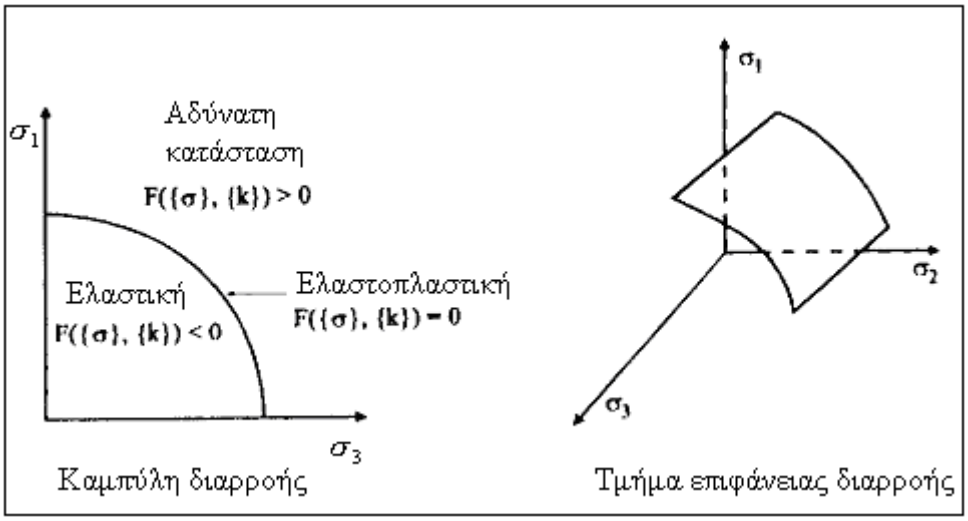
$$F(\{\sigma\},\{\kappa\}) = 0 \tag{5.1}$$

Η συνάρτηση αυτή διαχωρίζει την καθαρά ελαστική συμπεριφορά από την ελαστοπλαστική. Στις περιπτώσεις της τέλειας πλαστικότητας το {κ} είναι σταθερό και παριστάνει το μέγεθος των τάσεων κατά τη διαρροή του υλικού. Σε περιπτώσεις όπου αναπτύσσεται κράτυνση ή χαλάρωση του υλικού το {κ} είναι μεταβλητό και εξαρτάται από την πλαστική παραμόρφωση του υλικού. Σε αυτή την περίπτωση το {κ} εκφράζει τη διακύμανση του ορίου διαρροής (Potts & Zdravkovic, 1999).

Η τιμή της συνάρτησης διαρροής F χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της συμπεριφοράς του υλικού.

- $F(\{\sigma\},\{\kappa\})<0$ παρουσιάζεται τέλεια ελαστική συμπεριφορά
- $F(\{\sigma\},\{\kappa\})=0$ παρουσιάζεται πλαστική ή και ελαστοπλαστική συμπεριφορά.
- $F(\{\sigma\},\{\kappa\})>0$ δεν υφίσταται.

Η συνάρτηση F περιγράφεται ως επιφάνεια στο χώρο ή ως καμπύλη στο επίπεδο (σχήμα 5.5).



Σχήμα 5.5: Γραφική αναπαράσταση συνάρτησης διαρροής (Potts & Zdravkovic, 1999)

Ο χώρος που περικλείεται από την επιφάνεια ή την καμπύλη καθορίζει την ελαστική περιοχή ενώ έξω από αυτές ορίζεται η πλαστική περιοχή. Η επιφάνεια του σχήματος 5.5 περιγράφει όριο διαρροής ισοτροπικού υλικού. Στην περίπτωση ανισότροπου υλικού, η συνάρτηση διαρροής θα χρειαζόταν έξι μεταβλητές. Η σχεδίαση τέτοιας επιφάνειας δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί γιατί απαιτεί έξι διαστάσεις.

Στην περίπτωση της μίας διάστασης λήφθηκε η υπόθεση ότι η πλαστική παραμόρφωση λαμβάνει χώρα στην ίδια κατεύθυνση με την επιβαλλόμενη φόρτιση. Σε περισσότερες διαστάσεις όπου είναι δυνατόν να εμφανίζονται και έξι μεταβλητές φόρτισης δεν είναι προφανής η κατεύθυνση της πλαστικής παραμόρφωσης. Για τον καθορισμό της κατεύθυνσης αυτής απαιτείται μια συνάρτηση που να την περιγράφει για κάθε εντατικό πεδίο. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **κανόνας ροής** (flow rule) και εκφράζεται από τη σχέση (Potts & Zdravkovic, 1999):

$$d\varepsilon_i^P = \Lambda \frac{\partial P(\{\sigma\},\{m\})}{\partial \sigma_1} \tag{5.2}$$

όπου $d\varepsilon_i^P$ παριστάνει τις έξι συνιστώσες της πλαστικής παραμόρφωσης σε κάθε στάδιο φόρτισης.

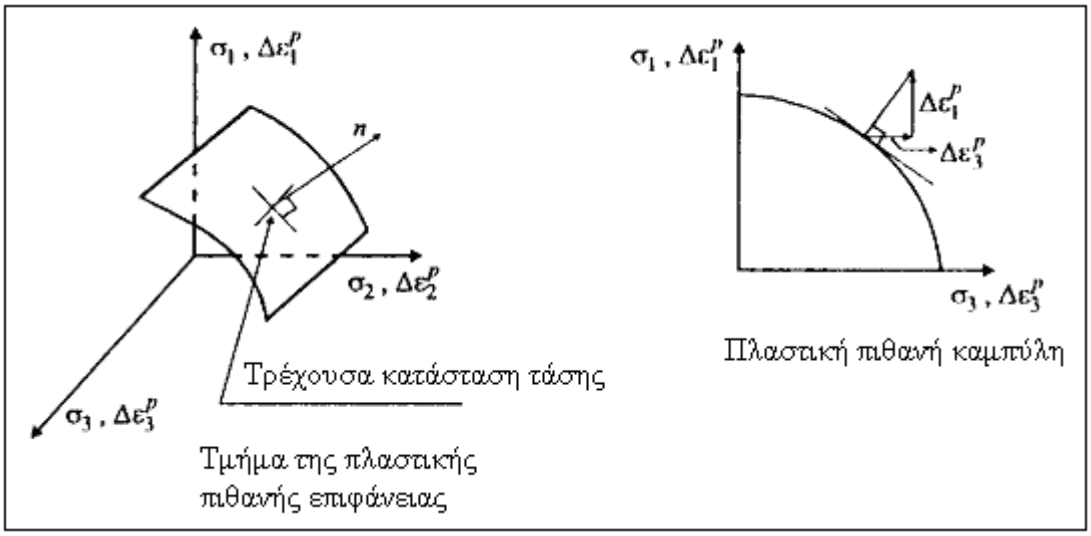
P παριστάνει τη συνάρτηση πλαστικής συμπεριφοράς και το

Λ εκφράζει ένα αριθμητικό πολλαπλασιαστή.

Η μορφή της συνάρτησης πλαστικής συμπεριφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{P}(\{\sigma\},\{\mathrm{m}\}) = 0 \tag{5.3}$$

όπου {m} ορίζεται διάνυσμα που εξαρτάται από τις φυσικές παραμέτρους του υλικού. Η συνάρτηση P παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 5.6. Σε αυτό παρουσιάζεται ένα τμήμα της συνάρτησης πλαστικής συμπεριφοράς, ως προς τις κύριες τάσεις. Το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια εκφράζει τη διεύθυνση της πλαστικής παραμόρφωσης. Το μέτρο του διανύσματος για συγκεκριμένο εντατικό πεδίο, εκφράζεται από τον αριθμητικό πολλαπλασιαστή (Λ). Ο πολλαπλασιαστής αυτός εξαρτάται από τον κανόνα κράτυνσης -χαλάρωσης του υλικού.



Σχήμα 5.6:Αναπαράσταση της συνάρτησης της πλαστικής συμπεριφοράς (Potts & Zdravkovic, 1999)

Ορισμένες φορές παρουσιάζεται μια απλοποιημένη μορφή της συνάρτησης πλαστικής συμπεριφοράς και αυτής του ορίου διαρροής όπου:

$$F(\{\sigma\},\{\kappa\}) = P(\{\sigma\},\{m\}) \tag{5.4}$$

Στην περίπτωση αυτή ο κανόνας ροής ονομάζεται **συσχετισμένος** (associated) και το κατά στάδια διάνυσμα της πλαστικής παραμόρφωσης παρουσιάζεται κάθετο στην επιφάνεια διαρροής. Όταν η συνάρτηση πλαστικής συμπεριφοράς και αυτή του ορίου διαρροής διαφέρουν τότε ο κανόνας ροής ονομάζεται **μη συσχετισμένος** (non associated).

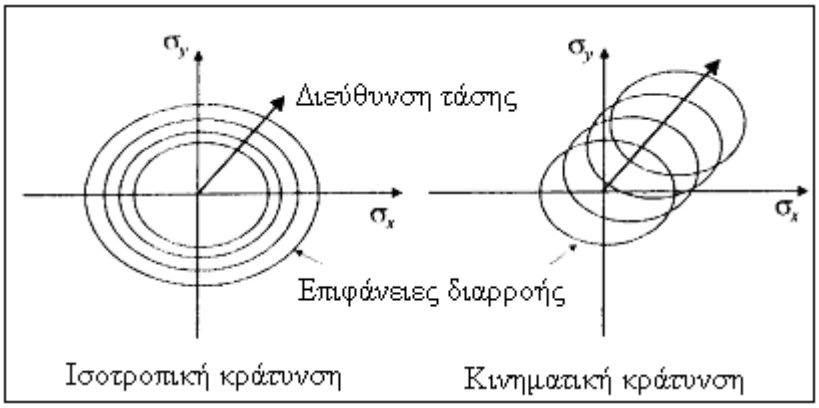
Η σημασία των κανόνων ροής είναι μεγάλη στη διαδικασία δημιουργίας καταστατικών μοντέλων. Χάρη σε αυτούς μπορούν να περιγραφούν φαινόμενα ογκομετρικής μεταβολής (dilatancy) τα οποία επηρεάζουν σημαντικά τη μεταβολή του όγκου του υλικού και την αντοχή του. Επίσης όταν ο κανόνας ροής είναι συσχετισμένος, το μητρώο ακαμψίας εμφανίζεται συμμετρικό, αντίθετα στην περίπτωση του μη συσχετισμένου, το μητρώο ακαμψίας εμφανίζεται μη συμμετρικό. Όπως είναι γνωστό η διαδικασία αναστροφής μη συμμετρικών πινάκων είναι αρκετά πιο δύσκολη και χρονοβόρα από ότι των συμμετρικών. Είναι φανερή η επίδραση των διαφόρων μοντέλων στη διαδικασία επίλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Potts & Zdravkovic, 1999).

Ο κανόνας κράτησης-χαλάρωσης περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η παράμετρος {κ} μεταβάλλεται με την πλαστική παραμόρφωση. Από αυτή τη συσχέτιση εξάγεται η τιμή του πολλαπλασιαστή Λ. Αν το υλικό είναι τέλεια πλαστικό τότε δεν παρουσιάζεται κράτυνση ή χαλάρωση και η παράμετρος {κ} παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση αυτή το Λ δεν χρειάζεται. Όταν το υλικό παρουσιάζει κράτυνση ή χαλάρωση κατά τη διαδικασία πλαστικής παραμόρφωσης απαιτείται κάποιος κανόνας που να καθορίζει την μεταβολή της συνάρτησης διαρροής του υλικού. Σε πολυαξονικό εντατικό πεδίο είναι συνηθισμένος ο συνδυασμός της μεταβολής του μεγέθους της επιφάνειας διαρροής με τις μεταβλητές της επιφερόμενης πλαστικής παραμόρφωσης. Τέτοιου είδους κανόνες κράτυνσης-χαλάρωσης ονομάζονται κράτυνση-χαλάρωση λόγω παραμόρφωσης (strain hardening/softening).

Μια διαφορετική αντιμετώπιση όχι πολύ συχνά εφαρμοζόμενη είναι ο συσχετισμός της μεταβολής της επιφάνειας διαρροής με την αύξηση του έργου λόγω πλαστικότητας. Ο συσχετισμός αυτός ορίζεται από τη σχέση:

$$W^{P} = \int \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{\Delta\varepsilon^{\mathrm{P}}\} \tag{5.5}$$

Αυτός ο κανόνας ονομάζεται κράτυνση-χαλάρωση λόγω έργου (work hardening/softening). Στην περίπτωση των υλικών με κράτυνση-χαλάρωση, η επιφάνεια του ορίου διαρροής μετατοπίζεται καθώς παρουσιάζεται πλαστική παραμόρφωση. Αν η επιφάνεια μετατοπίζεται αλλά το κέντρο της παραμένει σταθερό η κράτυνση ονομάζεται ισότροπη (isotropic). Αν το μέγεθος της επιφάνειας παραμένει σταθερό αλλά μετατοπίζεται το κέντρο της τότε η κράτυνση ονομάζεται κινηματική (kinematic). Οι μορφές της κράτυνσης που περιγράφηκαν παραπάνω παρουσιάζονται στο σχήμα 5.7. Πολλές φορές εφαρμόζεται συνδυασμός της ισότροπης και κινηματικής κράτυνσης (Potts & Zdravkovic, 1999).



Σχήμα 5.7: Αναπαράσταση ελαστικής-τέλεια πλαστικής συμπεριφοράς υλικού (Potts & Zdravkovic, 1999)

5.5 Δημιουργία Ελαστοπλαστικού Καταστατικού Μητρώου

Αφού έχουν αναφερθεί τα βασικά μέρη δημιουργίας ελαστοπλαστικών μοντέλων, συνεχίζεται η ανάλυση με την εξαγωγή του συσχετισμού, ανά στάδιο, μεταξύ της αυξανόμενης τάσης (incremental stress) με την αυξανόμενη παραμόρφωση (incremental strain). Ο συσχετισμός αυτός σε μορφή εξίσωσης δίνεται από την σχέση:

$$\{\Delta\sigma\} = [D^{ep}]\{\Delta\varepsilon\} \tag{5.6}$$

όπου $[D^{ep}]$ συμβολίζει των πίνακα ακαμψίας στην ελαστοπλαστική περιοχή. Η ολική παραμόρφωση ανά στάδιο (incremental strain) $\{\Delta\varepsilon\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα της ελαστικής $\{\Delta\varepsilon^e\}$ και της πλαστικής $\{\Delta\varepsilon^P\}$ παραμόρφωσης. Οπότε:

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^e\} + \{\Delta\varepsilon^{\mathrm{P}}\} \tag{5.7}$$

Οι τάσεις $\{\Delta\sigma\}$ σχετίζονται με τις ελαστικές παραμορφώσεις $\{\Delta\varepsilon^e\}$ με τον πίνακα ελαστικής ακαμψίας [D] και λαμβάνουν τη μορφή:

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon^e\} \tag{5.8}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.7) και (5.8) λαμβάνεται η μορφή:

$$\{\Delta\sigma\} = [D](\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon^{\mathrm{P}}\} \tag{5.9}$$

Οι πλαστικές παραμορφώσεις $\{\Delta\varepsilon^{\mathrm{P}}\}$ σχετίζονται με τη συνάρτηση πλαστικής συμπεριφοράς P({σ},{m})=0 δια μέσω του κανόνα ροής που δίνεται στην εξίσωση 5.2, τελικά προκύπτει:

$$\{\Delta\varepsilon^{\mathrm{P}}\} = \Lambda\left\{\frac{\partial \mathrm{P}(\{\sigma\},\{m\})}{\partial\sigma}\right\} \tag{5.10}$$

όπου (Λ) είναι αριθμός. Αντικαθιστώντας την σχέση 5.9 στη σχέση 5.8 λαμβάνεται η μορφή:

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} - \Lambda[D]\left\{\frac{\partial P(\{\sigma\},\{m\})}{\partial\sigma}\right\} \tag{5.11}$$

Όταν το υλικό συμπεριφέρεται πλαστικά η εντατική κατάσταση πρέπει να ικανοποιεί την συνάρτηση του ορίου διαρροής F({σ},{κ}) = 0. Κατά συνέπεια dF({σ},{κ}) = 0, με την εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας για την παραγώγιση λαμβάνεται η μορφή:

$$dF(\{\sigma\},\{k\}) = \left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial\sigma}\right\}^{\mathrm{T}}\{\Delta\sigma\} + \left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial\kappa}\right\}^{\mathrm{T}}\{\Delta\kappa\} = 0 \tag{5.12}$$

Η σχέση 5.12 είναι γνωστή ως **εξίσωση συνάφειας** (consistency equation). Η τροποποίηση της ως προς το {Δσ} δίνει τη μορφή:

$$\{\Delta\sigma\} = -\frac{\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial\kappa}\right\}^{\mathrm{T}}\{\Delta\kappa\}}{\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial\sigma}\right\}^{\mathrm{T}}} \tag{5.13}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.11) και (5.13) λαμβάνεται η μορφή:

$$\Lambda = -\frac{\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}[D]\{\Delta\varepsilon\}}{\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}[D]\left\{\frac{\partial P(\{\sigma\},\{m\})}{\partial \sigma}\right\}+\mathrm{A}} \tag{5.14}$$

όπου

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{\Lambda}\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial \kappa}\right\}^{\mathrm{T}}\{\Delta\kappa\} \tag{5.15}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης 5.14 στη σχέση 5.11 λαμβάνεται η μορφή:

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} - \frac{[D]\left\{\frac{\partial P(\{\sigma\},\{m\})}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}[D]\{\Delta\varepsilon\}}{\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}[D]\left\{\frac{\partial P(\{\sigma\},\{m\})}{\partial \sigma}\right\}+A} \tag{5.16}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (5.6) και (5.16) προκύπτει ο ελαστοπλαστικός καταστατικός πίνακας $[D^{ep}]$ με τη μορφή:

$$[D^{ep}] = [D] - \frac{[D]\left\{\frac{\partial P(\{\sigma\},\{m\})}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}[D]}{\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}[D]\left\{\frac{\partial P(\{\sigma\},\{m\})}{\partial \sigma}\right\}+A} \tag{5.17}$$

Η μορφή της παραμέτρου (A) που δίνεται από τη σχέση 5.15 και εξαρτάται από το είδος της πλαστικής συμπεριφοράς του υλικού. Δηλαδή αν είναι τέλεια πλαστικό ή πλαστικό με κράτυνση κλπ.

- **Τέλεια Πλαστικό υλικό**

Στην περίπτωση που το υλικό είναι τέλεια πλαστικό η παράμετρος {κ} είναι σταθερή και κατά συνέπεια:

$$\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial k}\right\}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{5.18}$$

Επομένως A=0.

➢ **Πλαστικό με κράτυνση ή χαλάρωση**

Στην περίπτωση που το υλικό είναι πλαστικό με κράτυνση ή χαλάρωση, η παράμετρος {κ} σχετίζεται με την επιφερόμενες πλαστικές παραμορφώσεις $\{\varepsilon^P\}$. και συνεπώς η σχέση 5.15 λαμβάνει τη μορφή:

$$A = -\frac{1}{\Lambda}\left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial \kappa}\right\}^T \frac{\partial\{k\}}{\partial\{\varepsilon^P\}}\{\Delta\varepsilon^P\} \tag{5.19}$$

Αν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ του {κ} και του $\{\varepsilon^P\}$ ώστε:

$$\frac{\partial\{k\}}{\partial\{\varepsilon^P\}} = \sigma\tau\alpha\theta \tag{5.20}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης 5.20 στη 5.19 και με τη χρήση του κανόνα ροής που ορίζεται από τη σχέση 5.10, ο άγνωστος αριθμός Λ απαλείφεται ενώ το Α λαμβάνει τη μορφή ορίζουσας. Αν δεν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των {κ} και $\{\varepsilon^P\}$, ο διαφορικός λόγος του αριστερού μέρους της εξίσωσης 5.20 εκφράζεται συναρτήσει της πλαστικής παραμόρφωσης και άρα είναι συνάρτηση του Λ. Με αντικατάσταση της σχέσης 5.20 στη 5.19 και με τη χρήση του κανόνα ροής που ορίζεται από τη σχέση 5.10, ο άγνωστος αριθμός Λ δεν απαλείφεται ενώ το Α γίνεται αόριστο. Επομένως, δεν είναι δυνατός ο προσδιορισμός του καταστατικού πίνακα ακαμψίας $[D^{ep}]$. Στην πράξη όλα τα μοντέλα που χρησιμοποιούν κράτυνση-χαλάρωση λόγω παραμόρφωσης δέχονται γραμμική σχέση μεταξύ των {κ} και $\{\varepsilon^P\}$ (Potts & Zdravkovic, 1999).

➢ **Πλαστικότητα λόγω έργου με κράτυνση ή χαλάρωση**

Στην περίπτωση της κράτυνσης-χαλάρωσης λόγω έργου (work hardening/ softening), η παράμετρος {κ} σχετίζεται με το επιφερόμενο έργο λόγω πλαστικότητας (W^P), το οποίο εξαρτάται με τη σειρά του από την πλαστική παραμόρφωση. Όπως και στην περίπτωση της κράτυνσης-χαλάρωσης λόγω παραμόρφωσης, έτσι και στην περίπτωση του έργου, η μη γραμμική σχέση μεταξύ {κ} και $\{W^P\}$, αναγκάζει το (Α) να αποτελεί συνάρτηση του (Λ). Ο προσδιορισμός του μητρώου ακαμψίας $[D^{ep}]$ δεν είναι εφικτός. Και στην περίπτωση αυτή τα

πρακτικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται παρουσιάζουν γραμμικό συσχετισμό μεταξύ του {κ} και $\{W^P\}$.

Αν ο ελαστικός καταστατικός πίνακας [D] είναι συμμετρικός όπως στην περίπτωση ισοτροπικού ελαστικού υλικού, τότε και ο ελαστοπλαστικός πίνακας $[D^{ep}]$ είναι συμμετρικός αν ο αριθμητής της σχέσης 5.17 είναι συμμετρικός. Ουσιαστικά πρέπει να ισχύει:

$$\left\{\frac{\partial P(\{\sigma\},\{m\})}{\partial \sigma}\right\} = \left\{\frac{\partial F(\{\sigma\},\{\kappa\})}{\partial \sigma}\right\} \tag{5.21}$$

Η παραπάνω ιδιότητα θεωρεί όμοιες τη συνάρτηση διαρροής και τη συνάρτηση πλαστικής συμπεριφοράς. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα η ομοιότητα αυτή εμφανίζεται σε μια μορφή πλαστικότητας όπου ο κανόνας ροής θεωρείται συσχετισμένος.

Η κατασκευή ενός συμμετρικού πίνακα ακαμψίας $[D^{ep}]$ για όλα τα στοιχεία ενός κανάβου θα δώσει συμμετρικό ολικό πίνακα ακαμψίας. Στη γενική περίπτωση της πλαστικότητας όπου ο κανόνας ροής παρουσιάζεται ασυσχέτιστος, ο καταστατικός πίνακας $[D^{ep}]$ εμφανίζεται μη συμμετρικός. Ο σχηματισμός του ολικού πίνακα ακαμψίας λαμβάνει μη συμμετρική μορφή σε αυτήν την περίπτωση. Η αντιστροφή του ολικού μητρώου ακαμψίας στην περίπτωση της μη συμμετρικής μορφής είναι αρκετά πιο περίπλοκη και χρονοβόρα διαδικασία (Potts & Zdravkovic,1999).

5.6 Συναρτήσεις Ορίων Διαρροής

Η συνάρτηση διαρροής υλικού περιγράφει τις εντατικές συνθήκες κάτω από τις οποίες το υλικό θα μεταβεί από την ελαστική στην πλαστική συμπεριφορά. Το όριο διαρροής ή κριτήριο αστοχίας όπως είναι γνωστό, μπορεί να εκφραστεί βάση των τάσεων, των παραμορφώσεων, της ενέργειας παραμόρφωσης κλπ. Η συνάρτηση που ορίζει το όριο διαρροής, δίνεται από τη σχέση (Potts & Zdravkovic,1999):

$$F(\{\sigma\},\{\mathrm{Y}\}) = 0 \tag{5.22}$$

Όπου {σ} εκφράζει το εντατικό πεδίο και

{Y} την αντοχή του υλικού σε εφελκυσμό ή θλίψη.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως το όριο διαρροής παρουσιάζεται όταν F=0, αντίθετα για F<0 το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά. Για την ανάπτυξη της συνάρτησης διαρροής οι μεταβλητές της τάσης συνδυάζονται σε μία παράμετρο γνωστή με τον όρο ενεργός τάση (σ_{ef}). Η ενεργός τάση στη συνέχεια συγκρίνεται με το όριο διαρροής (Y) βάσει κάποιας συνάρτησης. Η μορφή της συνάρτησης αυτής εξαρτάται από την κατηγορία στην οποία ανήκει το υλικό. Στη συνέχεια θα περιγραφούν αναλυτικά κάποιες συναρτήσεις διαρροής οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρέως στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Potts & Zdravkovic,1999).

5.6.1 Κριτήριο Von Mises

Το κριτήριο πυκνότητας ενέργειας διάτμησης, ή κριτήριο Von Mises όπως είναι πιο γνωστό, δηλώνει ότι διαρροή του υλικού εμφανίζεται όταν η πυκνότητα ενεργειακής παραμόρφωσης σε κάποιο σημείο εξισωθεί με την πυκνότητα ενέργειας διάτμησης στο σημείο διαρροής, κατά τη μονοαξονική θλίψη ή εφελκυσμό. Η πυκνότητα ενέργειας διάτμησης είναι η ενέργεια που σχετίζεται με την αλλαγή της μορφής του σώματος. Η ολική συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας (energy density function) (Uo) δίνεται από τη σχέση (Potts & Zdravkovic,1999):

$$U_0 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18\mathrm{K}} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12G} \tag{5.23}$$

όπου (σ_i) ονομάζονται οι κύριες τάσεις, $K = E/[3(1-2v)]$ και $G = E/[2(1+V)]$

Η ολική συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας (U_o) χωρίζεται σε δύο μέρη, όπου το πρώτο μέρος:

$$U_V = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18\mathrm{K}} \tag{5.24}$$

εκφράζει την ογκομετρική αλλαγή του υλικού στο εντατικό πεδίο των κυρίων τάσεων.

Το δεύτερο μέρος:

$$U_D = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12G} \tag{5.25}$$

εκφράζει τη στρέβλωση (distortion) που παρουσιάζεται στο υλικό εξαιτίας της εφαρμογής του εντατικού πεδίου, εκφρασμένο με τις κύριες τάσεις (Potts & Zdravkovic,1999).

Το κριτήριο πυκνότητας ενέργειας διάτμησης μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή του δεύτερου τανυστή (J_2), με τη μορφή:

$$U_D = \frac{1}{2G} J_2 \tag{5.26}$$

όπου

$$J_2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6} \tag{5.27}$$

Σε σχέση με το γενικό σύστημα συντεταγμένων (X,Y,Z) ο δεύτερος αποκλίνων τανυστής (J_2), μπορεί να εκφραστεί με τις σταθερές τάσεων I_1, I_2, με τη μορφή:

$$J_2 = I_2 + \frac{1}{3} I_1^2 \tag{5.28}$$

Στο σημείο διαρροής κατά τον εφελκυσμό ή τη μονοαξονική θλίψη, ισχύει η ισότητα:

$$\sigma_1 = \pm Y, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \tag{5.29}$$

Άρα

$$J_2 = \frac{1}{3} Y \tag{5.30}$$

Από τις εξισώσεις (5.28) και (5.29) η συνάρτηση διαρροής λαμβάνει τη μορφή:

$$F = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6} - \frac{1}{3} Y^2 \tag{5.31}$$

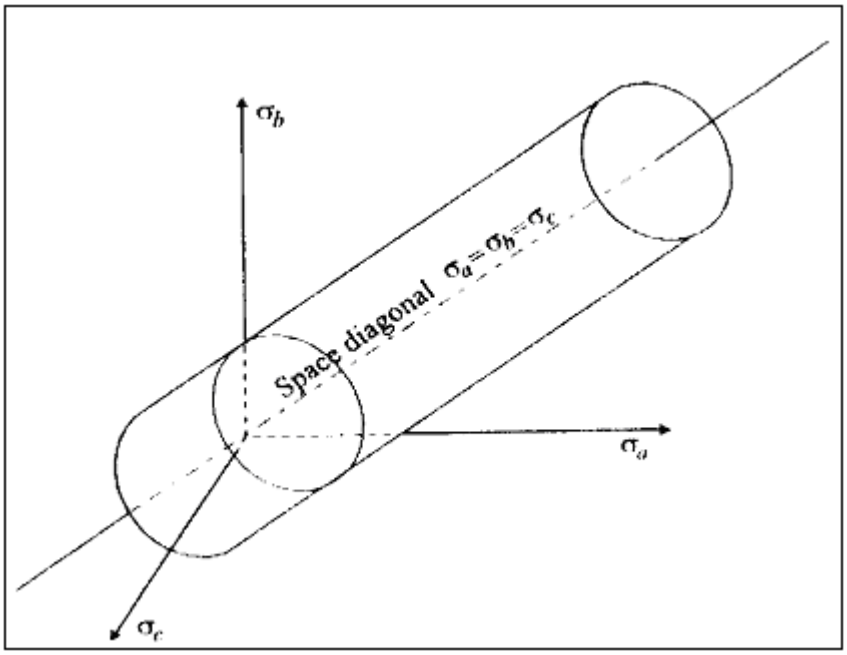
Εναλλακτικά η παραπάνω σχέση λαμβάνει τη μορφή:

$$F = \sigma_e^2 - Y^2 \tag{5.32}$$

όπου

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{3J_2} \tag{5.33}$$

Σε τρισδιάστατο εντατικό πεδίο με άξονες τις κύριες τάσεις, η συνάρτηση διαρροής δημιουργεί κυλινδρική επιφάνεια όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 5.8. Σε δύο διαστάσεις η συνάρτηση αυτή περιγράφεται από μία έλλειψη. Το κριτήριο αστοχίας Von Mises, παρουσιάζει αρκετά καλά αποτελέσματα για όλκιμα υλικά (Potts & Zdravkovic,1999).



Σχήμα 5.8:Συνάρτηση διαρροής Von Mises (Potts & Zdravkovic,1999)

5.6.2 Κριτήριο Mohr-Coulomb

Η πρόβλεψη του σημείου όπου παρουσιάζεται η αρχική διαρροή του υλικού και αυτό μεταπίπτει από την ελαστική κατάσταση στην πλαστική, δεν περιορίζεται μόνο στα όλκιμα υλικά. Πολλά είναι τα υλικά στα οποία η συμπεριφορά τους κοντά στο όριο διαρροής διαφέρει από τα όλκιμα. Κατάλληλα κριτήρια αστοχίας ή συναρτήσεις διαρροής έχουν κατασκευαστεί για υλικά όπως τα εδάφη και τα πετρώματα.

Η συμπεριφορά κατά τη διαρροή αρκετών συνεκτικών υλικών, όπως τα πετρώματα και το σκυρόδεμα, έχει παρατηρηθεί ότι εξαρτάται από την υδροστατική εντατική κατάσταση. Πιο συγκεκριμένα με αύξηση των υδροστατικών θλιπτικών τάσεων δημιουργεί αύξηση της αντοχής των υλικών. Επίσης τα υλικά αυτά εμφανίζουν διαφορετικό όριο διαρροής στον εφελκυσμό και διαφορετικό στη θλίψη.

Το κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb αποτελεί γενίκευση του κριτηρίου αστοχίας Tresca. Η γενικευμένη αυτή μορφή συμπεριλαμβάνει την επίδραση των υδροστατικών τάσεων. Η συνάρτηση διαρροής περιγράφεται από τις τάσεις που δρουν στο υλικό καθώς και από δύο σταθερές που εξαρτώνται από το υλικό. Οι σταθερές αυτές είναι η συνοχή του υλικού (c) και η γωνία εσωτερικής τριβής (φ) (Potts & Zdravkovic, 1999).

Εκφρασμένο σε κύριες τάσεις το κριτήριο αστοχίας των Mohr Coulomb ορίζεται από τη σχέση:

$$F = \max_{i \neq j}[\sigma_i - \sigma_j + (\sigma_i + \sigma_j)\sin\varphi] - 2\cos\varphi \tag{5.34}$$

Στην περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης όπου $\sigma_1 = Y_C$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, η σχέση 5.34 λαμβάνει τη μορφή:

$$Y_c = \frac{2c.\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \tag{5.35}$$

Ομοίως για την περίπτωση εφελκυσμού όπου $\sigma_1 = Y_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, η σχέση 5.34 λαμβάνει τη μορφή:

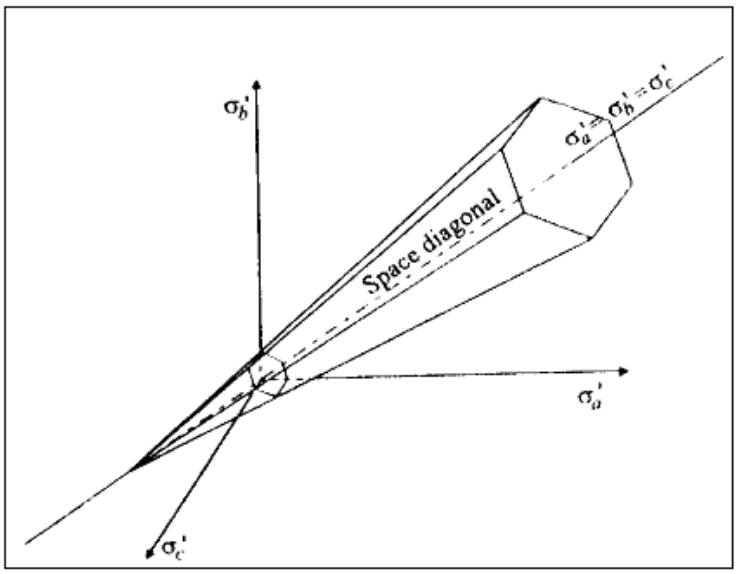
$$Y_c = \frac{2c.\cos\varphi}{1-\sin\varphi} \tag{5.36}$$

Από τις εξισώσεις (5.35) και (5.36) μπορούν να ληφθούν οι χαρακτηριστικές παράμετροι του υλικού, συνοχή (c), και γωνία εσωτερικής τριβής (φ). Αυτές οι παράμετροι υπολογίζονται από τις δύο παρακάτω σχέσεις:

$$c = \frac{Y_T}{2}\sqrt{\frac{Y_c}{Y_T}} \tag{5.37}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{Y_T}{Y_c}}\right) \tag{5.38}$$

Η επιφάνεια διαρροής του κριτηρίου Mohr-Coulomb, απεικονίζεται με τη μορφή ακανόνιστης εξαγωνικής πυραμίδας (σχήμα 5.9). Ο άξονας της πυραμίδας αποτελεί τον υδροστατικό άξονα, ενώ η γεωμετρία της πυραμίδας εξαρτάται από τις παραμέτρους, συνοχή και γωνία εσωτερικής τριβής.



Σχήμα 5.9: Συνάρτηση διαρροής Mohr-Coulomb (Potts & Zdravkovic,1999)

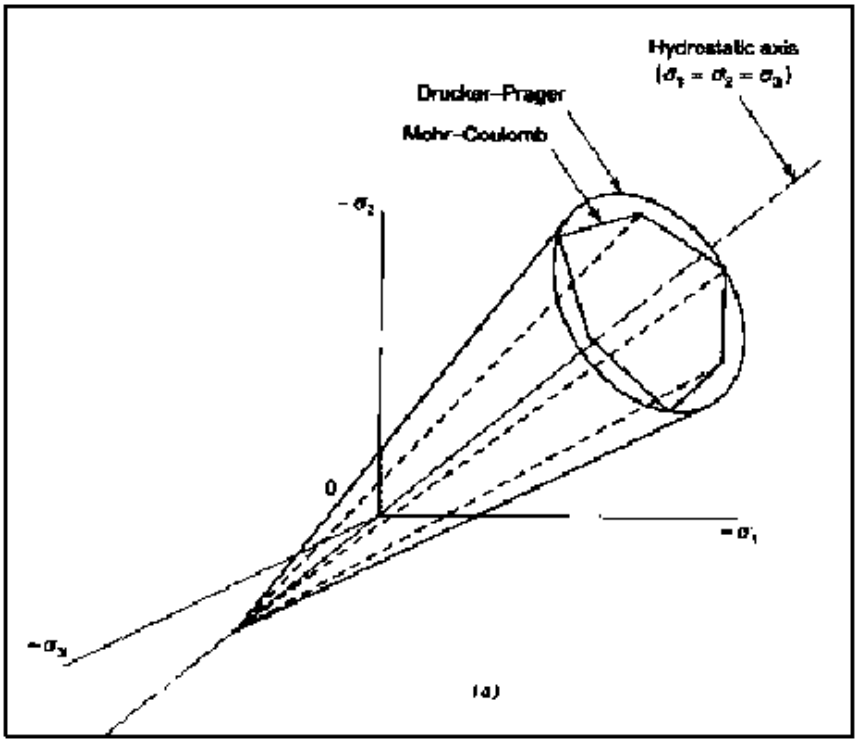
Για υλικά με εσωτερική τριβή μηδενική (φ=0), το κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb υποπίπτει στην περίπτωση του κριτηρίου Tresca.

5.6.3 Κριτήριο Drucker-Prager

Το κριτήριο Drucker-Prager αποτελεί γενίκευση του κριτηρίου Von Mises. Η γενικευμένη αυτή έκφραση έχει την ικανότητα να λαμβάνει υπόψη την επίδραση του υδροστατικού εντατικού πεδίου στον υπολογισμό της αντοχής του υλικού. Η μαθηματική έκφραση του κριτηρίου αυτού είναι (Potts & Zdravkovic,1999):

$$F = aI_1 + \sqrt{J_2} - k \tag{5.39}$$

όπου (α) και (K) οι σταθερές που εξαρτώνται από τη συνοχή του υλικού και τη γωνία εσωτερικής τριβης. Η απεικόνιση του κριτηρίου αυτού στο τρισδιάστατο εντατικό πεδίο των κυρίων τάσεων αποτελεί κυκλικό κώνο. Το μέγεθος του κώνου αυτού προσεγγίζει το μέγεθος της πυραμίδας του κριτηρίου Mohr-Coulomb με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων (α), (K). Η απεικόνιση και των δύο κριτηρίων μαζί παρουσιάζεται στο σχήμα 5.10.



Σχήμα 5. 10: Συγκριτικό διάγραμμα συναρτήσεων διαρροής Mohr-Coulomb και Drucker-Prager (Potts & Zdravkovic,1999)

Οι παράμετροι (α), (K) υπολογίζονται από τις δύο παρακάτω σχέσεις:

$$a = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)} \tag{5.40}$$

$$K = \frac{6c.\cos\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)} \tag{5.41}$$

Στην περίπτωση της μηδενικής γωνίας εσωτερικής τριβής, το κριτήριο Drucker-Prager υποβαθμίζεται σε αυτό του Von Mises.

5.6.4 Κριτήριο Hoek-Brown

Το κριτήριο Hoek-Brown αποτελεί εμπειρικό κριτήριο το οποίο κατασκευάστηκε για να αντιμετωπίσει δυσκολίες και χαρακτηριστικά που παρουσιάζονται στα πετρώματα και δεν μπορούν να περιγραφούν από το φάκελο αστοχίας του κριτηρίου Mohr Coulomb. Ουσιαστικά το κριτήριο Hoek-Brown περιγράφει καλύτερα τη μη γραμμική συμπεριφορά των πετρωμάτων. Σημαντικό πλεονέκτημα αυτού σε σχέση με το Mohr-Coulomb, είναι η δυνατότητα του να λαμβάνει υπόψη τις ασυνέχειες που εμφανίζονται στα πετρώματα.

Η μορφή του κριτηρίου αυτού είναι σε θέση να περιγράψει την συμπεριφορά ομογενούς δοκιμίου ενός πετρώματος σε όλες τις περιπτώσεις φόρτισης. Από την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης μέχρι την τριαξονική θλιπτική καταπόνηση. Επίσης παρέχει τη δυνατότητα εισαγωγής της επίδρασης των ασυνεχειών του πετρώματος. Είναι φανερό ότι στα πετρώματα το κριτήριο Hoek-Brown υπερτερεί από αυτό του Mohr-Coulomb γιατί μπορεί να αντιμετωπίσει καλύτερα την ανομοιογένεια και την ανισοτροπία που παρουσιάζουν (Hoek & Brown, 1990).

Η σχέση που περιγράφει το κριτήριο αστοχίας Hoek-Brown είναι της μορφής:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sqrt{m.\sigma_c.\sigma_3 + s.\sigma_c^2} \tag{5.42}$$

Όπου:

σ_1: η μέγιστη κύρια τάση

σ_3: η ελάχιστή κύρια τάση

σ_c: η αντοχή σε μονοαξονική θλίψη του ακέραιου πετρώματος

m,s: σταθερές που εξαρτώνται από το είδος του πετρώματος και το βαθμό κατακερματισμού του.

Το κριτήριο Hoek-Brown μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με την ορθή και την διατμητική τάση σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathrm{T} = (\sigma.\sigma_3).\sqrt{1 + \frac{m.\sigma_c}{4T_m}} \tag{5.43}$$

Όπου: σ, T, η ορθή και διατμητική τάση αντίστοιχα , ενώ το

$$T_m = 0.5(\sigma_1 - \sigma_3) \tag{5.44}$$

5.7 Προβλήματα Επαφής

Πολλά φυσικά προβλήματα απαιτούν την αριθμητική μοντελοποίηση επαφής σωμάτων. Τέτοιου είδους προβλήματα παρουσιάζονται σε γεωτεχνικά προβλήματα. Το πιο κλασσικό πρόβλημα επαφής σε γεωτεχνικά προβλήματα είναι η αλληλεπίδραση ενός υπογείου ανοίγματος με την υποστήριξη. Ένα πιο ειδικό πρόβλημα είναι και αυτό της διάδοσης της ρωγμής αν κάνουμε την παραδοχή ότι η ρωγμή ανοίγει και διαδίδεται αν οι τάσεις που ασκούνται στο εσωτερικό της υπερβούν την αντοχή το υλικού σε εφελκυσμό T_o. Τα σύγχρονα λογισμικά παρέχουν αυτή την δυνατότητα εισάγοντας στο μοντέλο μια τάση αποχωρισμού (separation stress). Οπότε θα υπάρξει ρωγμή σε προκαθορισμένο επίπεδο αν (Marc, 2000):

$$\sigma_{sep} > T_o \tag{5.45}$$

Η ανάλυση προβλημάτων επαφής είναι αρκετά περίπλοκη διαδικασία γιατί απαιτείται ο ακριβής εντοπισμός της κίνησης πολλαπλών γεωμετρικών σωμάτων. Επίσης απαιτείται η ανάλυση της κίνησης λόγω της αλληλεπίδρασης αυτών των σωμάτων μετά το στάδιο επαφής τους. Η αναπαράσταση της επαφής περιλαμβάνει την περιγραφή της τριβής μεταξύ των επιφανειών, την μεταφορά θερμότητας μεταξύ σωμάτων, κλπ.

Η αριθμητική προσομοίωση προβλημάτων επαφής απαιτεί την ανίχνευση της κίνησης των σωμάτων, ανίχνευση επαφής, επιβολή κατάλληλων περιορισμών ώστε να αποφεύγονται φαινόμενα διείσδυσης και τέλος επιβολή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών ώστε να περιγραφούν τα φαινόμενα τριβής και μετάδοσης θερμότητας.

Τα προβλήματα επαφής παρουσιάζουν ευρύ φάσμα διακύμανσης με μορφές που κυμαίνονται από επαφή χωρίς τριβή με μικρές μετατοπίσεις, έως προβλήματα με τριβή επαφής και μεγάλες ανελαστικές παραμορφώσεις. Παρόλο που ο μαθηματικός προσδιορισμός των συνθηκών επαφής παρουσιάζει την ίδια περίπου μορφή σε όλα τα προβλήματα, η επίλυση αυξάνει σε δυσκολία ανάλογα με το βαθμό μη γραμμικότητας του προβλήματος. Η μη γραμμικότητα της ανάλυσης στην περίπτωση προβλημάτων επαφής εξαρτάται από τη γεωμετρία και τη συμπεριφορά του υλικού καθώς και από τις συνθήκες επαφής. Είναι φανερό ότι τέτοιου είδους προβλήματα παρουσιάζουν μη γραμμικές συμπεριφορές σε πολλά σημεία του υπό μελέτη προβλήματος, όπου η κάθε κατάσταση επηρεάζει την άλλη (Marc, 2000).

5.7.1 Μαθηματική Σύνθεση Προβλημάτων Επαφής

Τα στάδια για τη σύνθεση και επίλυση προβλημάτων επαφής με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων απαιτούν την επιβολή συνθηκών κινηματικής επαφής, επιβολή του κατάλληλου νόμου τριβής επιφανειών και τέλος επίλυση του προβλήματος με την αρχή του υποθετικού έργου (Marc, 2000).

Οι μετατοπίσεις στο όριο επαφής των σωμάτων πρέπει να είναι συμβατές μεταξύ τους ώστε να μην παρουσιάζονται φαινόμενα διείσδυσης. Οι κινηματικοί περιορισμοί για να μην παρουσιάζονται φαινόμενα διείσδυσης περιγράφονται με τη σχέση:

$$g = (u^1 - u^2)n_2 + g_0 \geq 0 \quad \sigma\tau o \quad \Gamma_c \tag{5.46}$$

όπου u^1, u^2 αποτελούν τα διανύσματα μετατοπίσεων δύο σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή. Το πρώτο σώμα μπορεί να ονομαστεί επαφέας (contactor), ενώ το δεύτερο σώμα, στόχος (target). Ο όρος (Γ_c) εκφράζει το όριο επαφής των σωμάτων ενώ το (g_0) το αρχικό κενό μεταξύ των δύο σωμάτων πριν την επαφή. Ο όρος (n_2) αποτελεί το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο σημείο επαφής του δεύτερου σώματος. Το διάνυσμα αυτό ορίζει την διεύθυνση επαφής. Η σχέση 5.46 ορίζει το κενό σε κάθε στάδιο μεταξύ των δύο σωμάτων όταν (Ling & Stolarski 1997):

- Η απόσταση είναι μεγαλύτερη του μηδενός (g>0), δεν παρουσιάζεται επαφή.
- Η περίπτωση (g=0) ορίζει επαφή των δύο σωμάτων.
- Αντίθετα, όταν το κενό παρουσιάζει αρνητική τιμή (g<0) τότε έχει παρουσιαστεί διείσδυση των σωμάτων.

Σε αναλύσεις επαφής δεν επιτρέπεται διείσδυση οπότε η περίπτωση αυτή πρέπει να αποκλείεται με κατάλληλους μαθηματικούς περιορισμούς. Για την επίλυση των προβλημάτων επαφής χρησιμοποιείται η αρχή του υποθετικού έργου. Για τα συγκεκριμένα προβλήματα στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, το υποθετικό έργο δίνεται από τη σχέση:

$$\int_V \delta\varepsilon^T \sigma dV - \int_V \delta u^T b dV - \int_V \delta u^T \bar{t} d\Gamma = 0 \tag{5.47}$$

Στη σχέση 5.47, τα (b) και $(\bar{t})$ παριστάνουν τις δυνάμεις σώματος και κίνησης επιφανείας, αντίστοιχα. Ο όρος (δ_u) εκφράζει το υποθετικό διάνυσμα μετατοπίσεων.

Από αυτές τις μετατοπίσεις παράγονται οι υποθετικές παραμορφώσεις (δε). Το (Γ) εκφράζει το όριο της περιοχής (V) του σώματος που περικλείει τη ζώνη επαφής.

Η τυπική προσέγγιση του προβλήματος επαφής με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων οδηγεί τη σχέση 5.47 σε σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για κάθε σώμα που βρίσκεται σε επαφή. Για κάθε στάδιο φόρτισης ή χρονικής μεταβολής, το σύστημα των εξισώσεων παρουσιάζει τη μορφή:

$$[K]\ \{\delta u\} = \{F\} \tag{5.48}$$

όπου (Δu) αποτελεί το διάνυσμα των ανά στάδια μετατοπίσεων στους κόμβους και (ΔF) περιέχει τα εξωτερικά φορτία αλλά και τις δυνάμεις που προκύπτουν από την επαφή των σωμάτων για κάθε στάδιο. Το (K) αποτελεί όπως έχει αναφερθεί και προηγούμενα το εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας του σώματος, με μορφή:

$$K = \int_V B^T D_{ep} B dV \tag{5.49}$$

όπου (B) το μητρώο παραμόρφωσης-μετατόπισης. Οι δυνάμεις επαφής είναι άγνωστες και πρέπει να υπολογιστούν ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση 5.48, και τις απαιτήσεις συμβατότητας.

Οι δυνάμεις επαφής πρέπει να υπακούουν τον κανονικοποιημένο νόμο τριβής σε κάθε σημείο επαφής, δηλαδή:

$$F_n + F_t = [n + \nu\varphi(S_t)t]\mathrm{T} \quad \gamma\iota\alpha \quad \mathrm{T} \le 0 \tag{5.50}$$

όπου F_n και F_t, αποτελούν την ορθή και εφαπτομενική συνιστώσα των δυνάμεων επαφής. Επίσης λόγω της τριβής ισχύει |Fn| = -T. Για την περίπτωση της τριβής και του νόμου που την εκφράζει, θα γίνει αναφορά στη συνέχεια (Ling & Stolarski 1997).

Οι βασικοί άγνωστοι αποτελούνται από τους όρους (Δu), (ΔT) και την εξίσωση 5.48. Οι υπολογισμοί για την επίλυση του προβλήματος πραγματοποιούνται κατά στάδια και επαναληπτικά για κάθε στάδιο. Αρχικά, πραγματοποιείται η υπόθεση ότι ισορροπία και συμβατότητα ικανοποιούνται σε κάποιο στάδιο φόρτισης. Αυτό το στάδιο θεωρείται πάντα το αρχικό. Στη συνέχεια ορίζεται συγκεκριμένο φορτίο για το επόμενο στάδιο και υπολογίζονται τα διανύσματα (Δu), (ΔT). Ο υπολογισμός τους

πραγματοποιείται με επαναληπτική διαδικασία ώστε να αποκαθίσταται ισορροπία στο σύστημα και να μην εμφανίζονται φαινόμενα διείσδυσης. Πρέπει πάντα η απόσταση μεταξύ των σωμάτων που έρχονται σε επαφή να είναι θετική (g>0) (Ling & Stolarski 1997).

Οι κατά στάδιο τιμές των (Δu), (Δt), περιγράφονται από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από την ανάλυση της εξίσωσης 4.48:

$$\begin{bmatrix} K_c & 0 & G_c \\ 0 & K_t & G_t \\ H_c & H_t & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_c \\ \Delta u_t \\ \Delta \mathrm{T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c + T_c - R_c \\ F_t + T_t - R_t \\ \Delta g \end{Bmatrix} \tag{5.51}$$

Οι δύο πρώτες γραμμές του συστήματος των εξισώσεων (5.48) αναπαριστούν τις συνθήκες ισορροπίας των δύο σωμάτων (επαφέα και στόχου), ενώ η τελευταία γραμμή εκφράζει τους περιορισμούς της επαφής που εφαρμόζονται. Οι τιμές τους ρυθμίζονται από την επαναληπτική μεταβολή των δυνάμεων επαφής (ΔΤ).

Τα σύμβολα που εμφανίζονται στο σύστημα 5.51, ορίζονται ως εξής:

- **K_c, K_t** :τα μητρώα ακαμψίας των δύο σωμάτων. Όπου εμφανίζεται ο δείκτης (c) εννοεί το σώμα του επαφέα ενώ (t) το σώμα του στόχου.
- **Δu_c,.Δu_t**: τα κατά στάδια, διανύσματα μετατόπισης των κόμβων για τα δύο σώματα.
- **ΔT** : το διάνυσμα των ορθών δυνάμεων επαφής σε κάθε στάδιο.
- **F_c,F_t** : τα εξωτερικά διανύσματα δυνάμεων λόγω της εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών στο πρόβλημα.
- **R_c,R_t** : τα εσωτερικά διανύσματα δυνάμεων στους κόμβους των σωμάτων
- **T_c,T_t** : οι δυνάμεις επαφής σε κάθε επαναληπτικό κύκλο επίλυσης.
- **G_c,G_t** : τα μητρώα δυνάμεων επαφής των σωμάτων
- **H_c,H_t** : τα μητρώα μετατοπίσεων επαφής των σωμάτων

Τα μητρώα G_c, G_t, H_c, H_t, ορίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις για κάθε τιμή του διανύσματος (ΔΤ) (Ling & Stolarski 1997):

$$G_c = -n - u\varphi t \tag{5.52}$$

$$G_t = \begin{Bmatrix} \xi(n+u\varphi t) \\ \eta(n+u\varphi t) \\ \zeta(n+u\varphi t) \\ \omega(n+u\varphi t) \end{Bmatrix} \tag{5.53}$$

$$H_c^T = -n \tag{5.54}$$

$$H_t^T = \begin{Bmatrix} \xi n \\ \eta n \\ \zeta n \\ \omega n \end{Bmatrix} \tag{5.55}$$

Οι συναρτήσεις ξ,η,ζ,ω, εξαρτώνται από τη γεωμετρία της επιφάνειας επαφής των δύο σωμάτων (Ling & Stolarski 1997).

Η τριβή είναι ένα σύνθετο φυσικό φαινόμενο και επηρεάζεται από τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας όπως η ομαλότητα και η θερμοκρασία της. Ο πιο γνωστός και ευρέως εφαρμοσμένος νόμος τριβής είναι αυτός του Coulomb. Αυτός περιγράφεται από τη σχέση:

$$\sigma_{fr} < -\mu\sigma_n.t \tag{5.56}$$

όπου (σ_n) αποτελεί την ορθή τάση στην επιφάνεια, (σ_{fr}) η εφαπτομενική τάση που προκύπτει λόγω τριβής, (μ) ο συντελεστής τριβής και (t) το εφαπτομενικό διάνυσμα διεύθυνσης της σχετικής ταχύτητας:

$$t = \frac{V_r}{|V_r|} \tag{5.57}$$

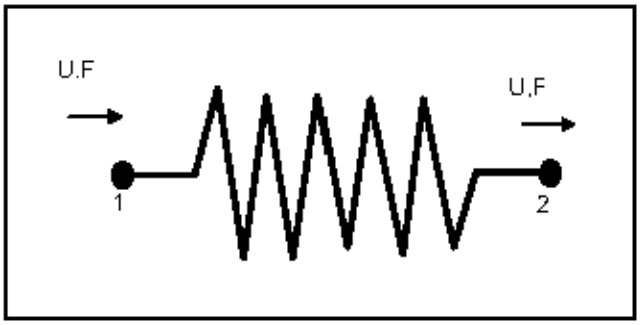
όπου (V_r) η σχετική ταχύτητα ολίσθησης των επιφανειών.

Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δεν χρησιμοποιείται αυτούσιος ο νόμος του Coulomb γιατί παρουσιάζει αριθμητικές δυσκολίες. Αντίθετα εφαρμόζεται η κανονικοποιημένη (regularized) μορφή του νόμου.

Η μορφή αυτή ορίζεται από τη σχέση:

$$f_t = \frac{2\mu f_n}{\pi} \arctan\left(\frac{V_r}{RVCNST}\right) \tag{5.58}$$

Η φυσική σημασία της τιμή (RVCNST) αποτελεί την τιμή της σχετικής ταχύτητας ολίσθησης των επιφανειών κατά τη στιγμή που θα παρουσιαστεί ολίσθηση (Marc, 2000).



Σχήμα 5.11:Αναπαράσταση Μοντέλου επαφής (Marc 2000)

Η σχέση 5.58 παρουσιάζει μη γραμμική σχέση μεταξύ της σχετικής ταχύτητας ολίσθησης (V_r) και της δύναμης της τριβής (f_t). Η μαθηματική προσομοίωση του φαινομένου, πραγματοποιείται με την χρήση ενός μοντέλου, μη γραμμικού ελατηρίου.

Για την αντιμετώπιση αριθμητικών δυσκολιών κατά την επίλυση προβλημάτων τριβής η τιμή της σχετικής ταχύτητας ολίσθησης δεν πρέπει να είναι ούτε πολύ μεγαλύτερη από την πραγματική αλλά ούτε και πολύ μικρότερη. Για να αποφευχθούν οι δυσκολίες αυτές εισάγεται η τιμή (RVCNST) που αναφέρθηκε προηγούμενα. Η διακύμανση της τιμής αυτής πρέπει να κυμαίνεται μεταξύ 1% και 10% της σχετικής ταχύτητας ολίσθησης (Marc, 2000).

5.8 Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων Επαφής

5.8.1 Πολλαπλασιαστές Lagrange

Κατά την ανάλυση προβλημάτων επαφής απαιτείται η επίλυση ελαχιστοποίησης των περιορισμών (constrain) στο πρόβλημα. Οι περιορισμοί στην περίπτωση των προβλημάτων επαφής αποτελούν την διαδικασία προσομοίωσης της απουσίας διείσδυσης. Η τεχνική των πολλαπλασιαστών Lagrange παρουσιάζει την μεγαλύτερη ευκολία στην επιβολή των περιορισμών σε κάποιο σύστημα σωμάτων με μαθηματική έκφραση. Με αυτή την τεχνική αν οι περιορισμοί είναι σωστά εφαρμοσμένοι δεν εμφανίζονται φαινόμενα διείσδυσης. Δυστυχώς η τεχνική αυτή παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες στην αριθμητική επίλυση. Η αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών επιτυγχάνεται με την εφαρμογή επιπρόσθετων αριθμητικών τεχνικών. Οι τεχνικές αυτές δεν θα αναλυθούν εδώ, αλλά λόγω αυτών πολλές φορές ο υπολογιστικός χρόνος επίλυσης προβλημάτων επαφής με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange βελτιώνεται.

Ένα μεγάλο μειονέκτημα που παρουσιάζει αυτή η μέθοδος είναι η αδυναμία υπολογισμού φορτίων πεδίου, όπως το βάρος της μάζας. Σε περιπτώσεις δυναμικής ανάλυσης ή άλλες αναλύσεις που απαιτείται η χρήση μάζας του υλικού, δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange (Marc 2000).

5.8.2 Μέθοδος Ποινών

Οι μέθοδοι ποινών αποτελούν εναλλακτική μορφή της μαθηματικής εφαρμογής περιορισμών της επαφής. Με την τεχνική αυτή περιορίζεται η κίνηση του σώματος με την επιβολή ποινών στο μέγεθος της διείσδυσης που εμφανίζεται. Η μέθοδος αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ανάλογο ενός μη γραμμικού ελατηρίου μεταξύ των δύο σωμάτων, που έρχονται σε επαφή. Σε αυτή την τεχνική εμφανίζεται διείσδυση των σωμάτων κατά την επαφή όπου το μέγεθος αυτής της διείσδυσης καθορίζεται από τις σταθερές της συνάρτησης ποινών. Η επιλογή των κατάλληλων τιμών ποινών έιναι μεγάλης σημασίας για την αριθμητική σταθερότητα του ολικού συστήματος εξισώσεων. Η μέθοδος αυτή είναι σχετικά εύκολη στην εφαρμογή της και χρησιμοποιείται ευρέως στην δυναμική ανάλυση. Προσοχή πρέπει να δίνεται σε περιπτώσεις επαφής παραμορφώσιμων σωμάτων ώστε να μην παρουσιάζεται

υπερβολικά άκαμπτο σύστημα. Αυτό οφείλεται στην υπόθεση ότι η πίεση επαφής είναι ανάλογη του βαθμού διείσδυσης (Marc 2000).

5.8.3 Μέθοδος Απευθείας Περιορισμών

Μια άλλη μέθοδος επίλυσης των προβλημάτων επαφής είναι η απευθείας επιβολή περιορισμών. Σε αυτή τη τεχνική η κίνηση των σωμάτων εντοπίζεται και όταν παρουσιαστεί επαφή, εφαρμόζονται απευθείας περιορισμοί στην κίνηση με τη χρήση συνοριακών συνθηκών. Αυτές αποτελούνται από κινηματικούς περιορισμούς στους βαθμούς ελευθερίας καθώς και δυνάμεις στους κόμβους. Αυτή η μέθοδος είναι εξαιρετικά ακριβής στην περίπτωση που το πρόγραμμα μπορεί να προβλέψει πότε εμφανίζεται επαφή των σωμάτων. Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η αποφυγή της εκ των προτέρων γνώσης των σημείων επαφής των σωμάτων (Marc 2000).

6. Ανάλυση Ανατίναξης με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την ανάλυση των μοντέλων που αναπτύχθηκαν με την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η ανάλυση ξεκινάει με τον γεωμετρικό ορισμό του προβλήματος, στη συνέχεια γίνεται ένας έλεγχος σύγκλισης με τις σχέσεις του Kirsch καθώς επίσης και μια διερεύνηση, η οποία έγινε για την επιλογή της καταλληλότερης μεθόδου δυναμικής ανάλυσης και για το καταλληλότερο κριτήριο διαρροής του υλικού. Τέλος γίνεται και μια μελέτη των μοντέλων υπό την επίδραση ελεγχόμενης ανατίναξης και δημιουργίας ρωγμών σε προκαθορισμένη διεύθυνση.

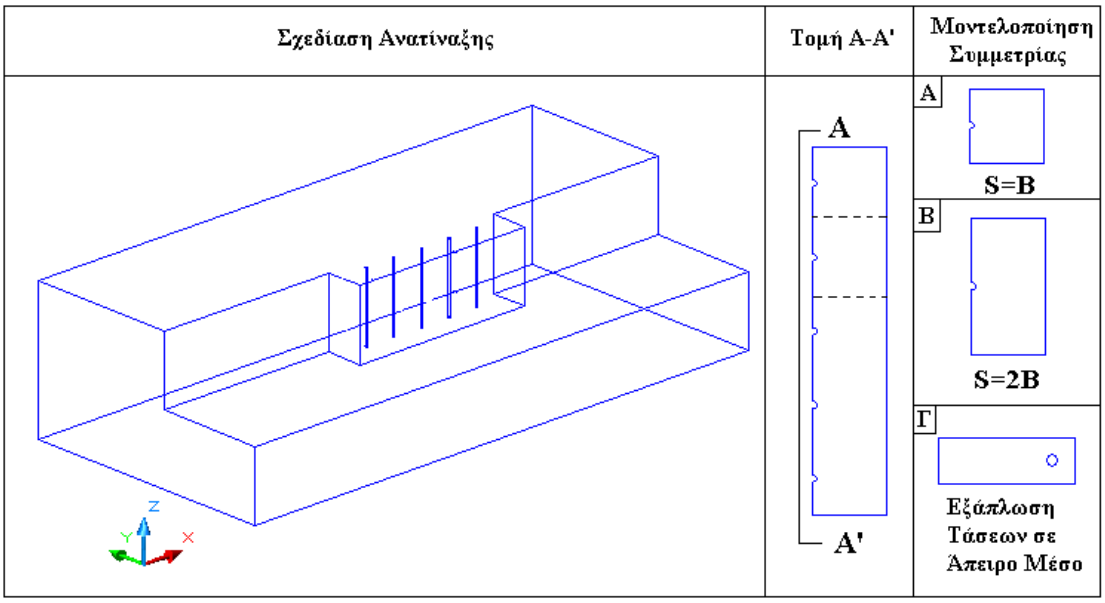
Ο σκοπός της εργασίας αυτής είναι η προσομοίωση της δυναμικής φάσης της ανατίναξης καθώς επίσης:

- Η μελέτη διάδοσης των κυμάτων κατά την κρουστική φάση της ανατίναξης που είναι δυναμική,
- Η ανάκλαση των κυμάτων που δημιουργείται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια που ουσιαστικά είναι και ο κύριος μηχανισμός θραύσης του πετρώματος διότι οι αντοχές των πετρωμάτων σε εφελκυσμό είναι πολύ μικρότερες από ότι σε θλίψη.
- Η συμβολή των κυμάτων από αλληλεπίδραση διατρημάτων μονής και πολλαπλής σειράς έναυσης
- Η εξάπλωση των τάσεων σε άπειρο μέσο
- Η εύρεση των συντελεστών έντασης των τάσεων στις ρωγμές που δημιουργούνται κατά την ελεγχόμενη ανατίναξη με την βοήθεια του λογισμικού Franc2d καθώς επίσης και η αλληλεπίδραση τους.

Η ανάλυση των μοντέλων πραγματοποιήθηκε σε δυο διαστάσεις και σε μια απλή εφαρμογή στις τρεις διαστάσεις. Η επίλυση έγινε σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης αφού πριν την επιλογή αυτή έγινε και επίλυση σε συνθήκες επίπεδης τάσης όπου δεν προέκυψαν διαφορές.

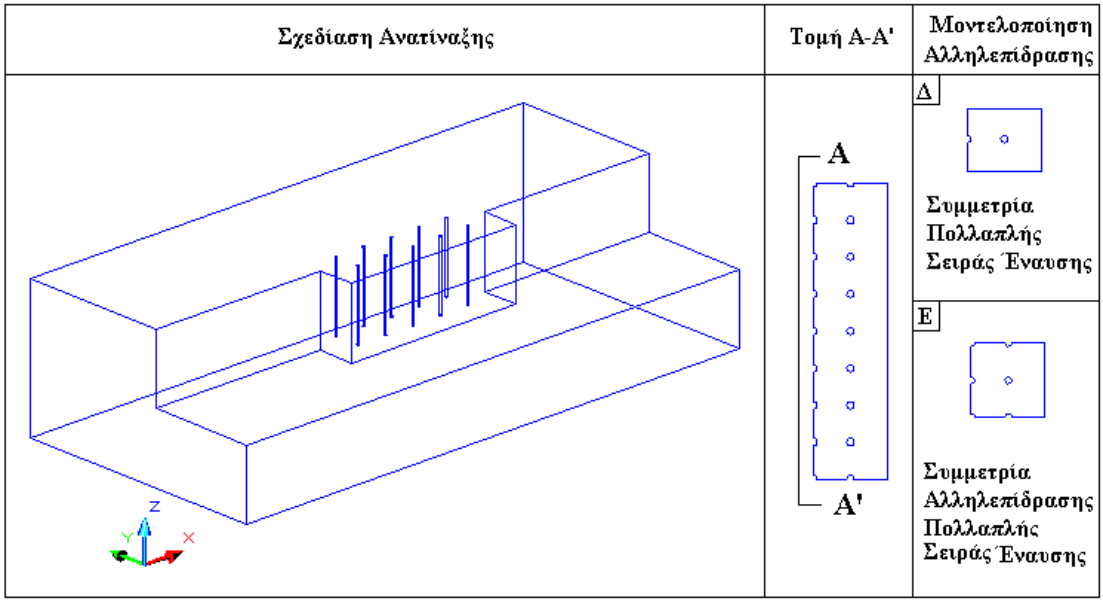
6.2 Ορισμός Γεωμετρίας

Στο σχεδιασμό μιας ανατίναξης, η επιλογή της κατάλληλης γεωμετρίας είναι υψίστης σημασίας για την επιτυχία αυτής. Με τον όρο επιτυχής ανατίναξη εννοείται ότι έχει επιτευχθεί ο επιθυμητός θρυμματισμός με την ακριβή ποσότητα εκρηκτικού και όσο το δυνατό ελεγχόμενες δονήσεις. Ανάλογα με την επιθυμητή παραγωγή, ο σχεδιασμός μπορεί να είναι μιας σειράς έναυσης ή πολλαπλής σειράς έναυσης. Στο σχήμα 6.1 και 6.2 φαίνεται ο σχεδιασμός της γεωμετρίας μονής σειράς και πολλαπλής σειράς έναυσης αντίστοιχα.



Σχήμα 6.1: Μοντελοποίηση μονής σειράς έναυσης

Στο σχήμα 6.1 φαίνεται ο σχεδιασμός της μονής σειράς έναυσης, η απλοποίηση της γεωμετρίας καθώς επίσης και η μοντελοποίηση της γεωμετρίας που έγινε, Α) για απόσταση μεταξύ των διατρημάτων ίση με το φορτίο, Β) για απόσταση μεταξύ των διατρημάτων ίση με δυο φορτία και Γ) διερεύνηση εξάπλωσης τάσεων σε άπειρο μέσο. Στη συνέχεια, αφού εξετάστηκε το πρόβλημα της απόστασης (S) ίσης με το φορτίο (B), απόσταση ίση με δυο φορτία και η εξάπλωση τάσεων σε άπειρο μέσο, η ανάλυση συνεχίζεται με την μοντελοποίηση αλληλεπίδρασης διατρημάτων πολλαπλής σειράς για απόσταση ίση με το φορτίο.



Σχήμα 6.2: Μοντελοποίηση πολλαπλής σειράς έναυσης και αλληλεπίδρασης διατρημάτων

Στο σχήμα 6.2 φαίνεται ο σχεδιασμός της πολλαπλής σειράς έναυσης, η απλοποίηση της γεωμετρίας καθώς επίσης και η μοντελοποίηση της γεωμετρίας που έγινε, Δ) συμμετρία πολλαπλής σειράς έναυσης και Ε) αλληλεπίδραση πολλών διατρημάτων. Οι γεωμετρίες Α,Β,Γ,Δ μοντελοποιήθηκαν και με στοιχεία επαφής προσομοιάζοντας με αυτό τον τρόπο τις ελεγχόμενες ρωγμές σε διεύθυνση κάθετη πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια.

6.3 Έλεγχος Σύγκλισης

Όταν μελετάται ένα πρόβλημα ή μοντελοποιείται ένα φυσικό φαινόμενο με αριθμητικές μεθόδους, είναι απαραίτητο να γίνεται ένας έλεγχος σύγκλισης των λύσεων που αναμένεται να ληφθούν. Με τον όρο σύγκλιση λύσης εννοείται πόσο η αριθμητική λύση προσεγγίζει την αναλυτική λύση κλειστής μορφής όπως είναι οι σχέσεις του Kirsch (σχέσεις 6.1). Η σύγκλιση στο Msc.Marc-Mentat επιτυγχάνεται με διάφορες επιλύσεις του προβλήματος ιδίων διαστάσεων και γεωμετρίας με διαφορετικό αριθμό στοιχείων έτσι ώστε η ακρίβεια της λύσης να συγκλίνει προς την πραγματική. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι όσο αυξάνει ο αριθμός των στοιχείων τόσο αυξάνει και το υπολογιστικό κόστος. Συνήθως η επιθυμητή σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν οι αριθμητικές λύσεις δεν ξεπερνούν το 3-5 % διαφορά μεταξύ τους και προσεγγίζουν ικανοποιητικά την αναλυτική λύση.

Στην απλούστερη αλλά όχι συνήθη περίπτωση, γίνεται δεκτό ότι το πέτρωμα που βρίσκεται γύρω από το θάλαμο έκρηξης ακτίνας (α) δεν είναι ρωγματωμένο. Ο θάλαμος είναι υπό στατική πίεση. Τότε η εντατική κατάσταση που επικρατεί σε οποιοδήποτε σημείο, σε απόσταση (r) από το κέντρο του διατρήματος, δίνεται από τις γνωστές σχέσεις του Kirsch (Brady και Brown, 1994):

$$\sigma_r = \frac{P}{2}\left[(K+1)\left[1-\frac{a^2}{r^2}\right]-(1-K)\left[1-\frac{4a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^4}\right]\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2}\left[(K+1)\left[1+\frac{a^2}{r^2}\right]+(1-K)\left[1+\frac{3a^4}{r^4}\right]\cos 2\theta\right] \qquad (6.1)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{P}{2}(1-\mathrm{K})\left[1+\frac{2a^2}{r^2}-\frac{3a^4}{r^4}\right]\sin 2\theta$$

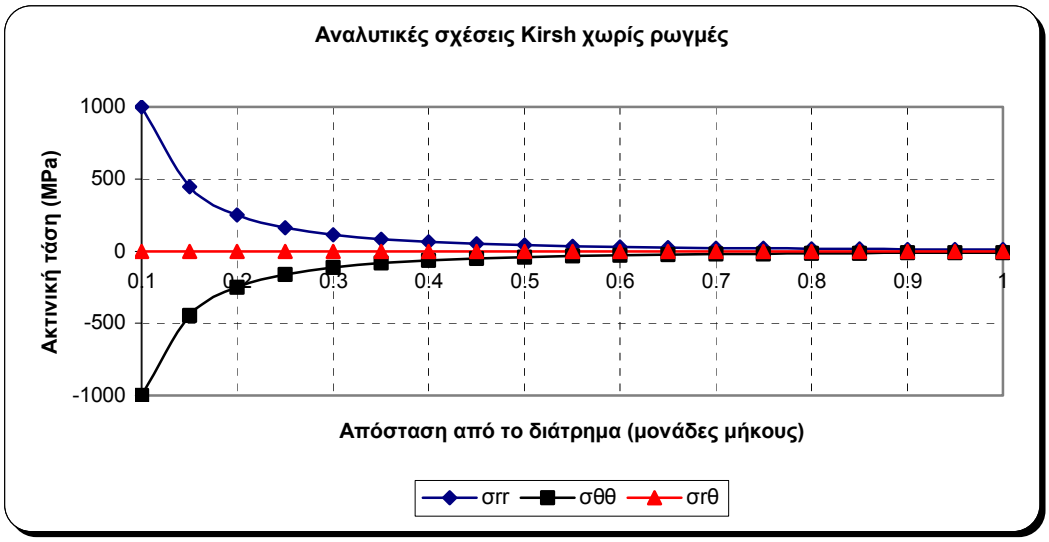
αφού γίνεται δεκτό όπως αναφέρθηκε πιο πάνω ότι ο θάλαμος είναι σε στατική πίεση και το υλικό είναι ελαστικό, ομογενές και ισότροπό τότε το K=1, οπότε οι παραπάνω σχέσεις λαμβάνουν την μορφή:

$$\sigma_{rr} = p_g \frac{a^2}{r^2} \quad \text{(ακτινική)} \qquad (6.2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p_g \frac{a^2}{r^2} \quad \text{(εφαπτομενική)} \qquad (6.3)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad \text{(διατμητική)} \qquad (6.4)$$

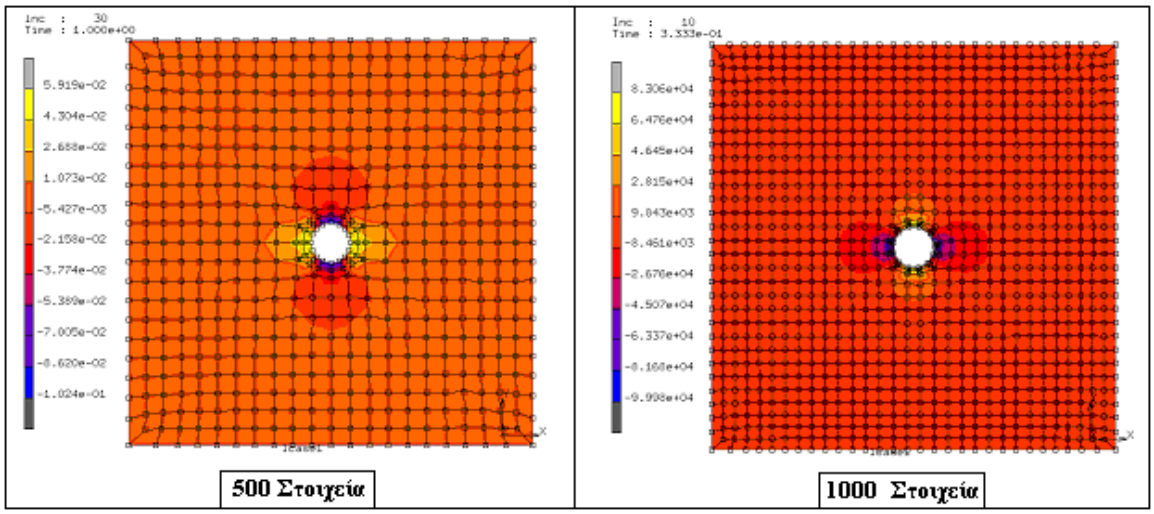
Η επίλυση των σχέσεων 6.2-6.4 σε γραφική παράσταση φαίνεται στο γράφημα 6.1. Η επίλυση έγινε με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης σε πίεση 1000 MPa. Ο τύπος φόρτισης έγινε με απότομη φόρτιση σε χρόνο 0.00375 sec και αποφόρτιση σε 0.015 sec σε ημι-στατικές συνθήκες. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά ήταν λόγος οπής προς εξωτερικά όρια γεωμετρίας ίσος 10 προς 100 (μονάδες μήκους).



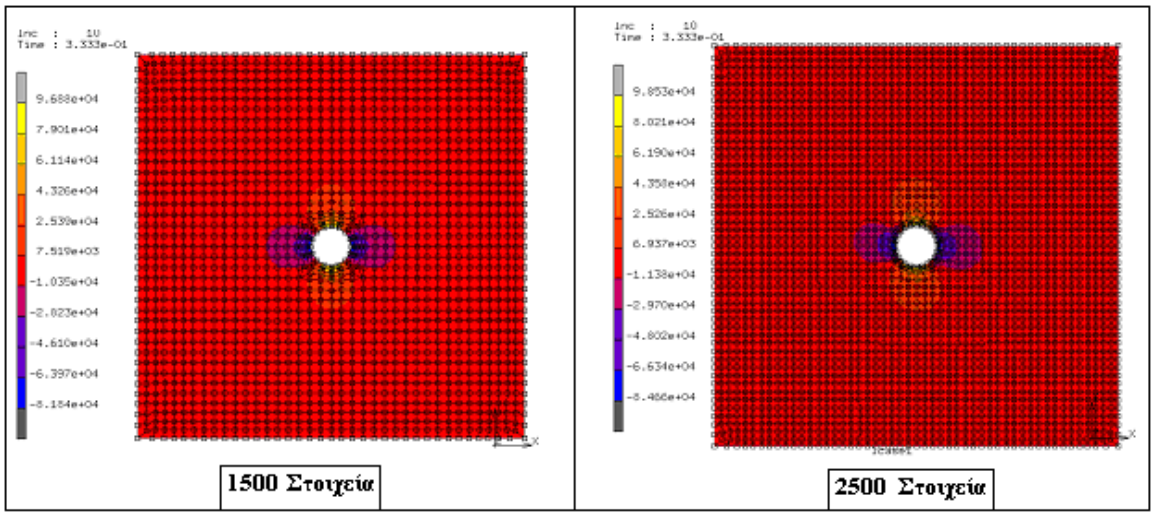
Γράφημα 6.1: Αναλυτικές λύσεις Kirsch

Παρατήρηση: Οι λύσεις του γραφήματος 6.1 που λαμβάνονται θα είναι ίδιες για $\theta=0^0$ $\theta=90^0$ αφού με την αντικατάσταση του K=1 στις σχέσεις 6.1, απαλείφονται οι γωνίες.

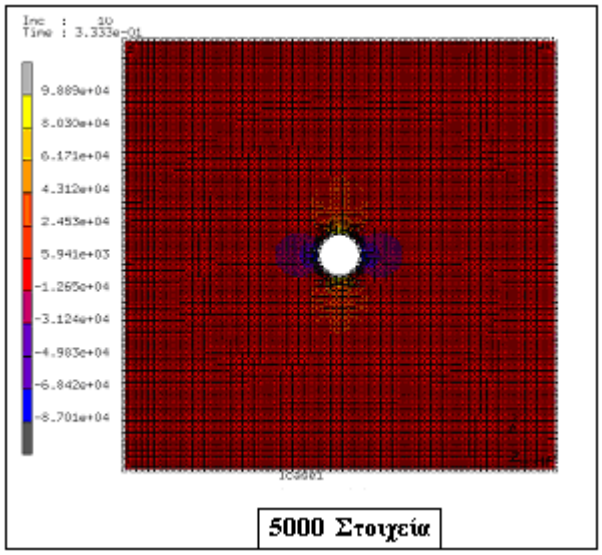
Η επιθυμητή σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν οι αριθμητικές λύσεις προσεγγίσουν κατά το καλύτερο δυνατότερο τις αναλυτικές λύσεις του γραφήματος 6.1. Για τον σκοπό αυτό έγιναν πέντε επιλύσεις σε ίδια γεωμετρία με αριθμό στοιχείων και ιδιότητες υλικού για 500, 1000, 1500, 2500, 5000. Στα σχήματα 6.3-6.4-6.5 φαίνεται η γεωμετρία και ο αριθμός των στοιχείων της κάθε επίλυσης καθώς επίσης και τα γραφήματα των εφαπτομενικών και ακτινικών τάσεων που προέκυψαν από τις αριθμητικές λύσεις.



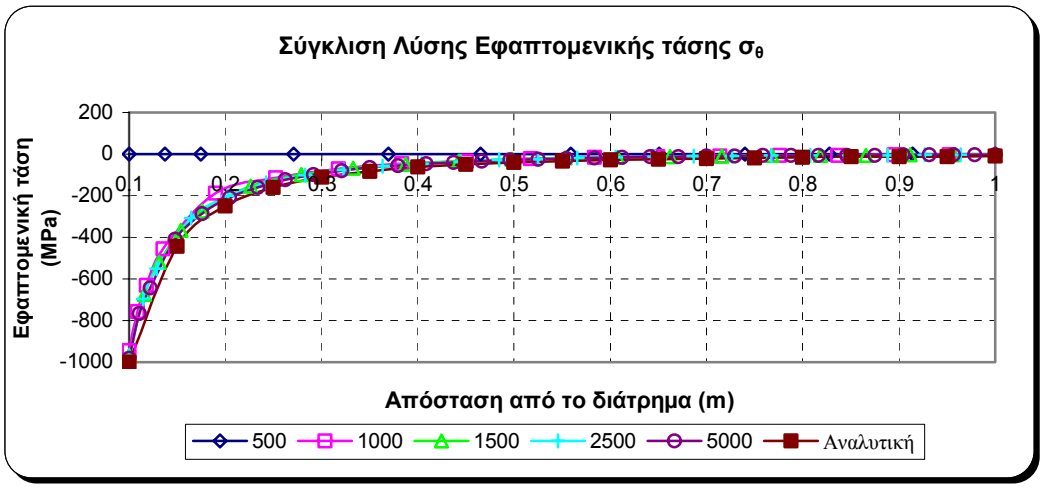
Σχήμα 6.3: Επίλυση με 500 και 1000 στοιχεία



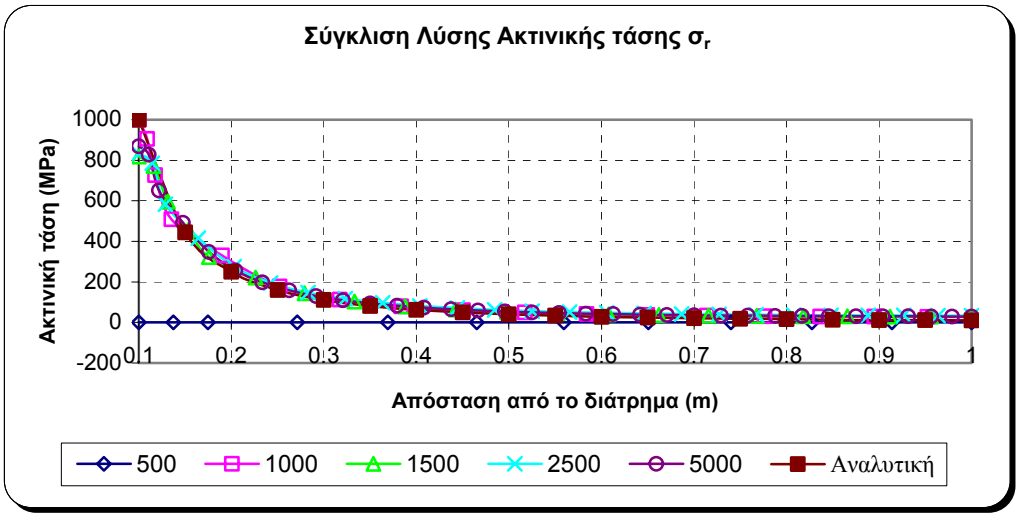
Σχήμα 6.4: Επίλυση με 1500 και 2500 στοιχεία



Σχήμα 6.5: Επίλυση με 5000 στοιχεία



Γράφημα 6.2: Σύγκλιση διαφορετικών επιλύσεων με την αναλυτική λύση εφαπτομενικής τάσης



Γράφημα 6.3: Σύγκλιση διαφορετικών επιλύσεων με την αναλυτική λύση ακτινικής τάσης

Συμπέρασμα: Από τα γραφήματα σύγκλισης ακτινικών και εφαπτομενικών τάσεων παρατηρείται καλή σύγκλιση μεταξύ των 2500 και 5000 στοιχείων διότι οι καμπύλες των λύσεων αυτών προσεγγίζουν καλύτερα την αναλυτική λύση τους και δεν διαφέρουν μεταξύ τους περισσότερο από 5%. Το διάγραμμα διατμητικών τάσεων παραλείπεται διότι οι τιμές που παρουσιάζει είναι σχεδόν μηδενικές. Αφού διαπιστώθηκε η ικανοποιητική ακρίβεια των αριθμητικών μοντέλων είναι δυνατή η συνέχιση ανάλυσης σε προβλήματα όπου δεν υπάρχει αναλυτική λύση.

6.4 Τύποι Φόρτισης

Στη δυναμική ανάλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, πολύ σημαντικός παράγοντας είναι ο τρόπος φόρτισης του υλικού. Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, το προφίλ πίεσης συναρτήσει του χρόνου μπορεί να χωριστεί σε δυο κατηγορίες:

- (A) όταν το εκρηκτικό είναι σε επαφή με το πέτρωμα όπου οι πιέσεις που αναπτύσσονται πάνω στο τοίχωμα του πετρώματος είναι μεγάλες (τάξης >6000 MPa) ανάλογα με τον τύπο του εκρηκτικού και
- (B) όταν το εκρηκτικό δεν είναι σε επαφή με το πέτρωμα όπου παρεμβάλλεται αέρας ή νερό όπου οι πιέσεις που αναπτύσσονται πάνω στο πέτρωμα είναι της τάξης των 1000-6000 MPa.

Για την καλύτερη δυνατή προσέγγιση του προβλήματος αυτού επιλέχθηκε να γίνεται έλεγχος σε δυο διαφορετικές πιέσεις. Η μια πίεση που επιλέχθηκε είναι τα

1000 MPa που είναι η μικρότερη τάξη μεγέθους πίεσης πάνω στα τοιχώματα για αποζευγμένη γόμωση. Η άλλη πίεση που επιλέγηκε είναι τα 6000 MPa που είναι η μεγαλύτερη τάξη μεγέθους για αποζευγμένη γόμωση αλλά παράλληλα και η μικρότερη τάξη μεγέθους γόμωσης σε πλήρη ζεύξη.

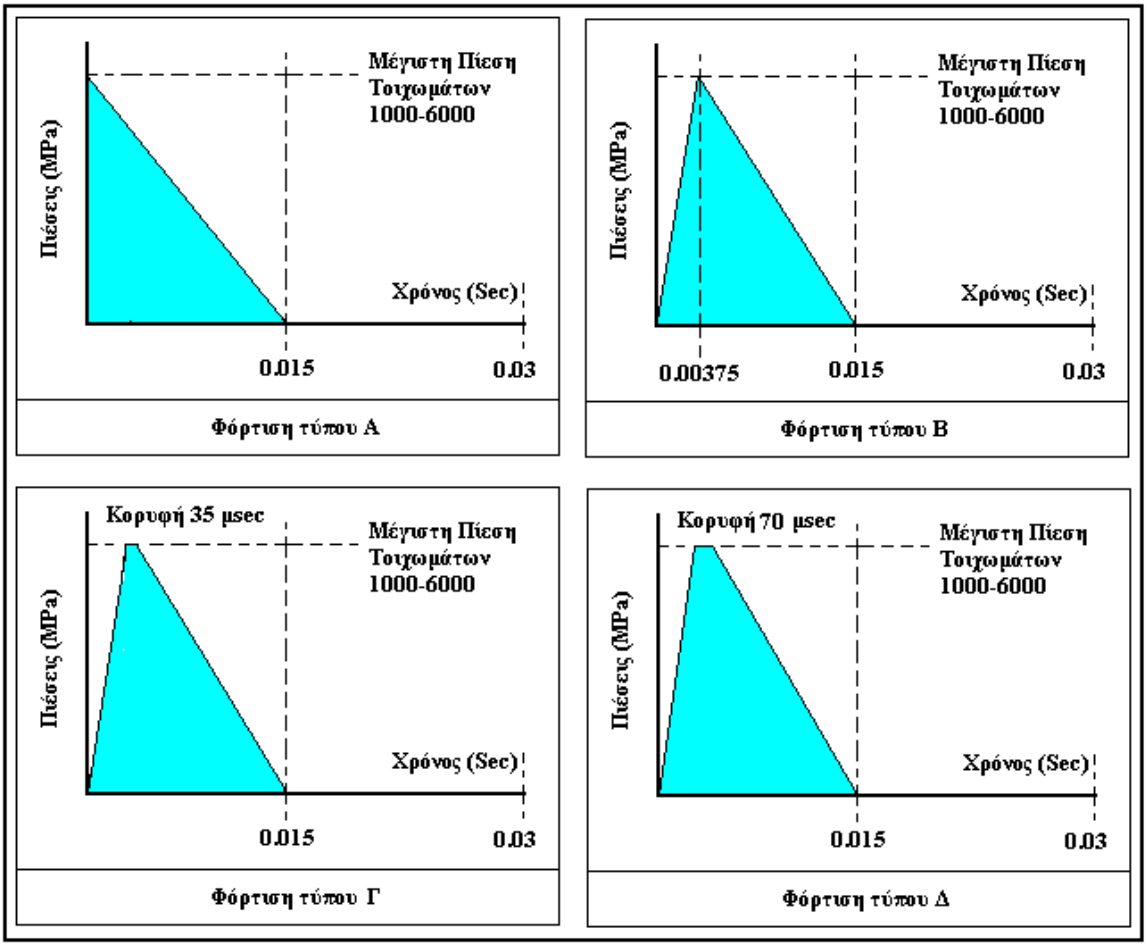
Ο σημαντικότερος παράγοντας στην επιτυχή προσομοίωση ανατίναξης και γενικά σε προβλήματα διάδοσης κυμάτων (dynamic transient wave propagation) είναι ο πραγματικός χρόνος διάρκειας της δυναμικής καταπόνησης που πρέπει να ληφθεί υπόψη στον τρόπο φόρτισης του υλικού. Ο πραγματικός χρόνος διάρκειας της δυναμικής καταπόνησης είναι της τάξης των 30-50 msec ανάλογα με την ποσότητα, το είδος του εκρηκτικού αλλά και από τον τύπο του πετρώματος. Ο χρόνος της δυναμικής καταπόνησης θεωρείται ότι αρχίζει από τη στιγμή της έναυσης, διαρκεί μέχρι την διάδοση και ανάκλαση του κρουστικού παλμού πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια και τελειώνει όταν ο ανακλώμενος κρουστικός παλμός επιστρέψει πίσω στο διάτρημα από όπου ξεκίνησε. Για τους σκοπούς της προσομοίωσης επιλέγηκε να χρησιμοποιηθεί ως συνολικός χρόνος διάρκειας του φαινομένου τα 30 msec που είναι και η πιο ρεαλιστική τιμή διάρκειας της δυναμικής φάσης.

Όσο αφορά την διάρκεια φόρτισης, είναι εύκολα κατανοητό ότι είναι αδύνατο να διαρκεί η πίεση 30 msec, όσο δηλαδή ο συνολικός χρόνος διάρκειας της δυναμικής φάσης φόρτισης. Ένας εμπειρικός κανόνας θεωρεί ότι η μέγιστη πίεση στα τοιχώματα του διατρήματος φτάνει σε χρόνο 1/8 της συνολικής διάρκειας του φαινομένου, δηλαδή η μέγιστη πίεση επιτυγχάνεται σε χρόνο 0.00375 sec. Η αποφόρτιση διαρκεί άλλα 3/8 της συνολικής διάρκειας του φαινομένου δηλαδή 0.01125 sec και το υπόλοιπο του χρόνου που παραλείπεται είναι η χρονική διάρκεια εξάπλωσης της τάσης στο πέτρωμα, οπότε ένας πλήρης κύκλος φόρτισης-αποφόρτισης του διατρήματος διαρκεί:

$$\text{Κ}\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma_{\Phi-A} = 0.00375_{\Phi o\rho\tau\iota\sigma\eta} + 0.01125_{\alpha\pi o\varphi\acute{o}\rho\tau\iota\sigma\eta} + 0.015_{\varepsilon\xi\alpha\pi\lambda\omega\sigma\eta\ \tau\alpha\sigma\eta\varsigma} = 0.03\ \text{sec} \quad (6.5)$$

Πριν γίνει ανάπτυξη στους τύπους φόρτισης πρέπει να τονιστεί ότι οι πιέσεις που αναπτύσσονται στα τοιχώματα των διατρημάτων ξεπερνούν κατά πολύ τις δυναμικές αντοχές των πετρωμάτων όπου έχουμε και την ζώνη σύνθλιψης γύρω από το διάτρημα. Με τους τρόπους φόρτισης που αναφέρθηκαν πιο πάνω είναι φανερό ότι δημιουργείται μια αιχμή στο προφίλ της πίεσης συναρτήσει του χρόνου που ίσως η χρονική διάρκεια της να μην παράγει παλμό ικανό να θρυμματίσει το πέτρωμα αφού

είναι γνωστό ότι αν η διάρκεια του παλμού είναι τόσο μικρής χρονικής διάρκειας, περνάει από το πέτρωμα χωρίς να το διαρρήξει. Για τον λόγο αυτό επιλέχθηκαν και άλλοι δυο τύποι φόρτισης με κορυφές της τάξης των 35 και 70 $\mu\sec$, οπότε θα εξεταστούν τέσσερις τύποι φόρτισης για δυο διαφορετικές πιέσεις έτσι ώστε να προσεγγιστεί κατά το καλύτερο δυνατό η προσομοίωση της ανατίναξης.



Σχήμα 6.6: Τύποι φόρτισης του διατρήματος

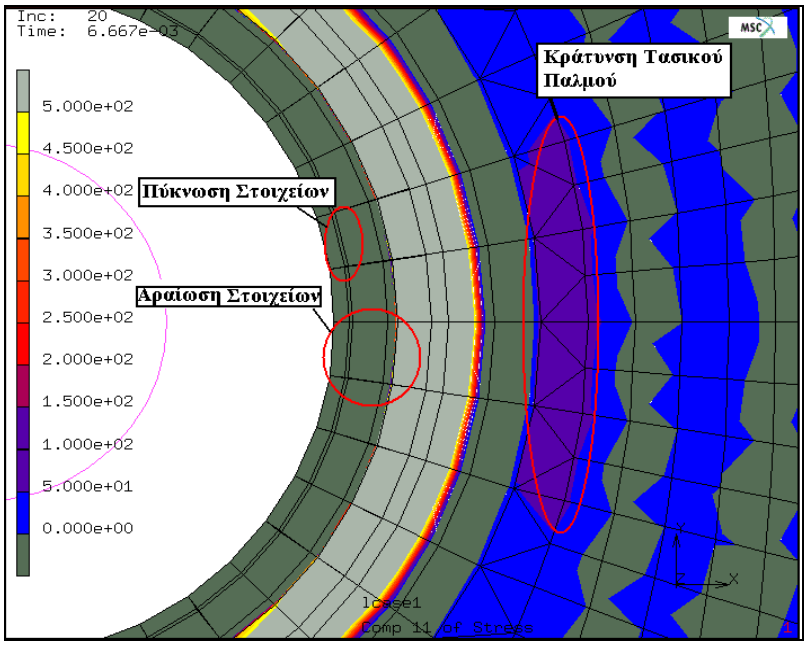
Από το σχήμα 6.6 φαίνονται οι τέσσερις τύποι φόρτισης που χρησιμοποιήθηκαν για την φόρτιση του διατρήματος. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι στη δυναμική ανάλυση ο αριθμός των στοιχείων είναι συνδεδεμένος με το χρονικό βήμα. Τα στοιχεία πρέπει να είναι τέτοιου μεγέθους και το χρονικό βήμα επίλυσης να είναι τέτοιας τάξης έτσι ώστε το τασικό κύμα να μην ξεπερνάει τα δυο στοιχεία κατά την διάρκεια διάδοσης του. Το χρονικό βήμα επίλυσης βρίσκεται από την σχέση:

$$\Delta t_{\varepsilon\pi\acute{\iota}\lambda\upsilon\sigma\eta\varsigma} = \frac{\Sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \text{Χ}\rho\acute{o}\nu o\varsigma\ \Delta\iota\acute{\alpha}\rho\kappa\varepsilon\iota\alpha\varsigma}{\text{Α}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\ \beta\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ \text{Ε}\pi\acute{\iota}\lambda\upsilon\sigma\eta\varsigma} = \frac{0.03}{90} = 0.00033\,Sec \qquad (6.6)$$

6.5 Διακριτοποίηση και Αριθμητική Αστάθεια Στοιχείων

Για τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν για την προσομοίωση της ανατίναξης, έγινε μοντελοποίηση του μισού της γεωμετρίας και όχι το ένα τέταρτο της αν και υπήρχε συμμετρία στη γεωμετρία. Η διακριτοποίηση έγινε με αυτό τον τρόπο διότι δεν ήταν γνωστό αν η επιβολή συνοριακών συνθηκών κατά τον άξονα μελέτης X επηρέαζε τα αποτελέσματα στη δυναμική ανάλυση. Τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ορθογώνια, όπου ήταν εφικτό με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης. Οι συνοριακές συνθήκες ήταν κύλιση κατά τον κατακόρυφο άξονα και κύλιση κατά τον οριζόντιο άξονα στο πάνω και κάτω μέρος του μοντέλου, εξασφαλίζοντας έτσι την επαναλαμβανόμενη συμμετρία των διατρημάτων. Οι κόμβοι επί της ελεύθερης επιφάνειας αφέθηκαν ελεύθεροι προσομοιάζοντας με αυτό τον τρόπο την ελεύθερη επιφάνεια.

Συνήθως, σε προβλήματα προσομοίωσης όπου πρέπει να συνδυαστούν καμπύλα τμήματα με τετραγωνικά, είναι αναπόφευκτη η χρήση τριγωνικών στοιχείων για την σύνδεση των τμημάτων. Αυτού του τύπου διακριτοποίηση είναι δυνατό να αλλοιώσει τα αποτελέσματα. Για την αποφυγή τέτοιων προβλημάτων εξετάστηκαν διάφοροι τύποι διακριτοποίησης διότι παρατηρήθηκε ότι κατά την διάρκεια επιβολής του τασικού παλμού τα στοιχεία πύκνωναν και αραίωναν στα σημεία όπου υπήρχαν τα τριγωνικά στοιχεία, κατακρατώντας την διάδοση του τασικού παλμού (σχήμα 6.7).



Σχήμα 6.7: Αστάθεια στοιχείων

Για την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε σε απλά γεωμετρικά σχήματα, χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά ορθογώνια στοιχεία με την τεχνική της δημιουργίας επιφάνειας και μετατροπής αυτής σε στοιχεία. Η τεχνική αυτή έλυσε το πρόβλημα του σχήματος 6.7 αλλά σε πολύπλοκά γεωμετρικά σχήματα, ήταν απαραίτητη η χρήση τριγωνικών στοιχείων. Για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος επιλέγηκε η σύνδεση με τριγωνικά στοιχεία να γίνεται σε μεγάλη απόσταση από το σύνορο του διατρήματος τέτοια ώστε να δίδεται η χρονική ευχέρεια να φορτίζεται και να αποφορτίζεται το διάτρημα, δηλαδή το τασικό κύμα να φτάνει τα τριγωνικά στοιχεία σε χρόνο 0.015 sec.

6.6 Επιλογή Μεθόδου Δυναμικής Ανάλυσης

Η επιλογή της μεθόδου δυναμικής ανάλυσης είναι πολύ σημαντική για την επιτυχή προσομοίωση της δυναμικής φάσης της ανατίναξης. Οι μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από το λογισμικό πακέτο για την ανάλυση είναι:

- Newmark
- Houbolt
- Central difference

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση και με τις τρεις μεθόδους σε ιδίων διαστάσεων μοντέλο με τις εξής ιδιότητες υλικού:

Πίνακας 6.1: Ιδιότητες υλικού

Υλικό	E (GPa)	ν
Ασβεστόλιθος	20	0.3

Η φόρτιση που χρησιμοποιήθηκε είναι η **τύπου Γ** με πίεση $\mathbf{P_i = 1000\ MPa}$ όπου λήφθηκαν τα πιο κάτω αποτελέσματα.

6.6.1 Μέθοδος Newmark

Οι σχέσεις γενικής μορφής της μεθόδου Newmark όπως χρησιμοποιούνται από το λογισμικό πακέτο είναι (Marc 2000):

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t v^n + (\frac{1}{2} - \beta)\Delta t^2 \alpha^n + \beta \Delta t^2 \alpha^{n+1} \qquad \text{(μετατοπίσεις)} \qquad (6.7)$$

$$v^{n+1} = v^n + (1-\gamma)\Delta t a^n + \gamma \Delta t a^{n+1} \qquad \text{(ταχύτητες)} \qquad (6.8)$$

όπου το n: ο αριθμός του χρονικού βήματος. Για την συγκεκριμένη μορφή δυναμικών εξισώσεων που ανταποκρίνονται στον κανόνα του τραπεζίου, χρησιμοποιούνται οι τιμές των σταθερών β = 0.25 και γ = 0.5 όπου η κλασσική εξίσωση κίνησης του συστήματος λαμβάνει τη μορφή:

$$\left(\frac{4}{\Delta t^2}M + \frac{2}{\Delta t}C + K\right)\Delta u = F^{n+1} - R^n + M\left(a^n + \frac{4}{\Delta t}v^n\right) + Cv^n \qquad (6.9)$$

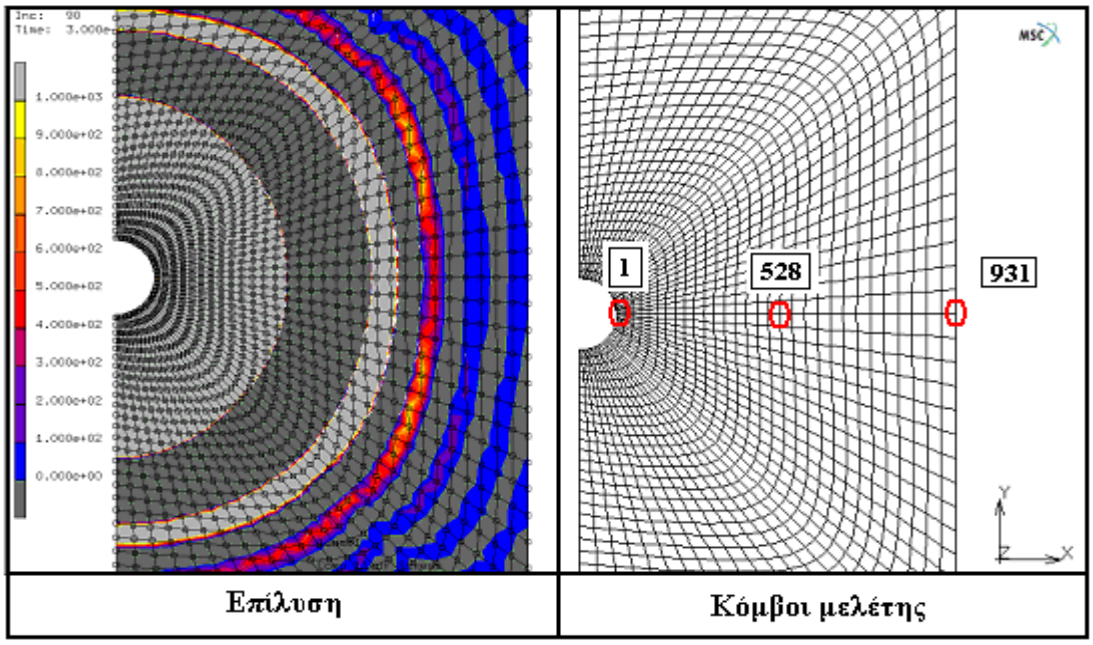
όπου η εσωτερική δύναμη δίδεται από την σχέση:

$$R = \int_V \beta^{\mathrm{T}} \sigma dv \qquad (6.10)$$

Αντικαθιστώντας την 6.10 στην εξίσωση 6.9 επιτρέπεται έμμεση λύση (implicit solution) του συστήματος:

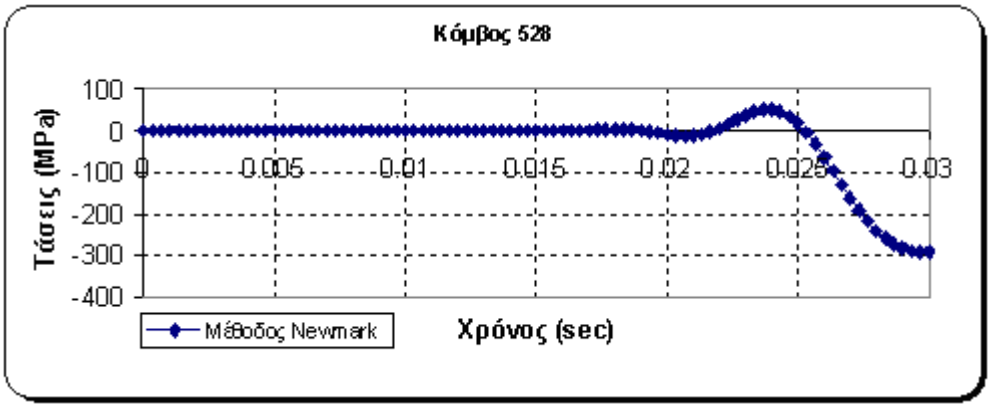
$$u^{n+1} = u^n + \Delta u \qquad (6.11)$$

Από την επίλυση του προβλήματος με την μέθοδο Newmark λαμβάνονται τα πιο κάτω αποτελέσματα στους κόμβους μελέτης 1, 528, 931:

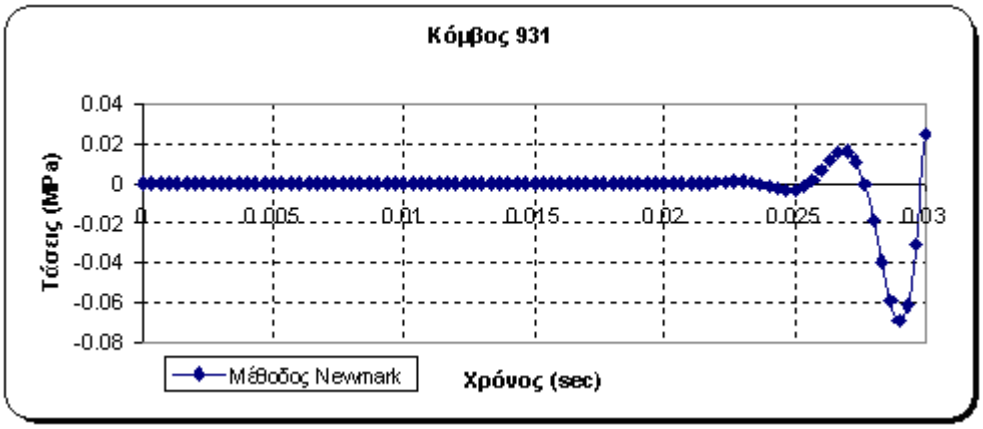


Σχήμα 6.8: Επίλυση με τη μέθοδο Newmark

Γράφημα 6.4: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.5: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.6: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου

6.6.2 Μέθοδος Houbolt

Η μέθοδος Houbolt βασίζεται στη χρήση της κυβικής παρεμβολής με τρία σημεία σε ένα επίπεδο του χρόνου και ενός άγνωστου σημείου σε επόμενο επίπεδο χρόνου. Οι σχέσεις γενικής μορφής της μεθόδου Houbolt όπως χρησιμοποιούνται από το λογισμικό πακέτο είναι (Marc 2000):

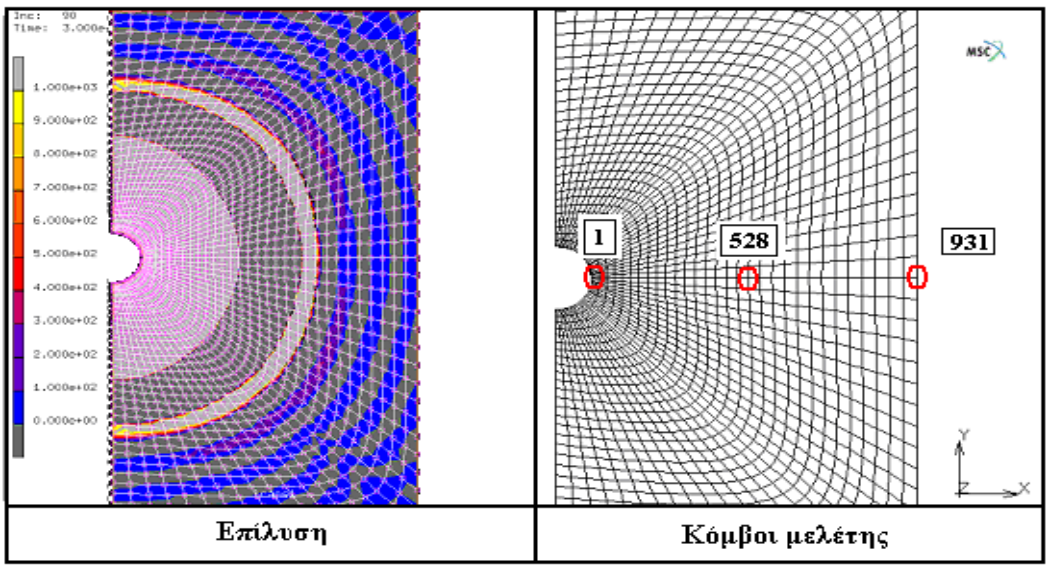
$$v^{n+1} = \frac{\left(\frac{11}{6}u^{n+1} - 3u^{n} + \frac{3}{2}u^{n-1} - \frac{1}{3}u^{n-2}\right)}{\Delta t} \quad \text{(Ταχύτητες)} \qquad (6.12)$$

$$a^{n+1} = \frac{\left(2u^{n+1} - 5u^{n} + 4u^{n-1} - u^{n-2}\right)}{\Delta t^{2}} \quad \text{(Επιταχύνσεις)} \qquad (6.13)$$

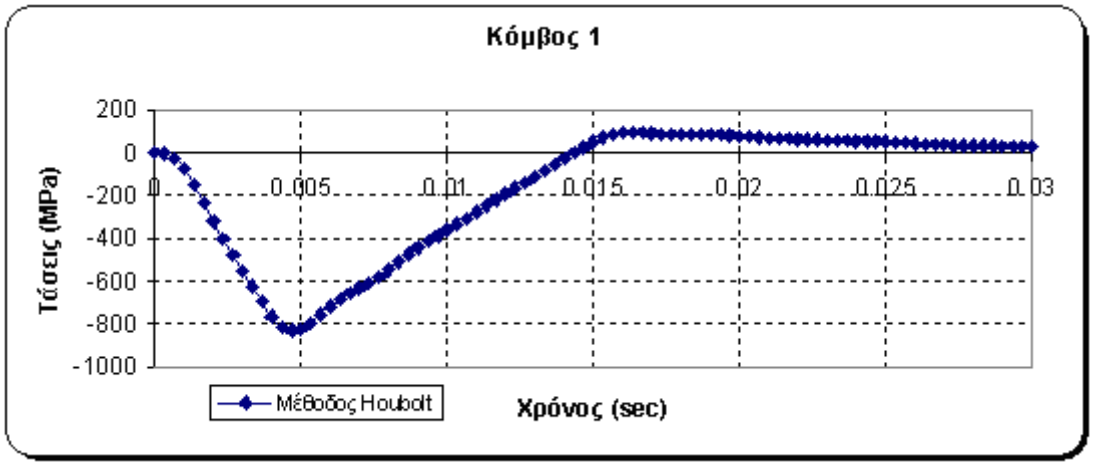
αντικαθιστώντας τις σχέσεις 6.12 και 6.13 στην κλασσική εξίσωση κίνησης του συστήματος λαμβάνεται η σχέση:

$$\left(\frac{2}{\Delta t^{2}}M + \frac{11}{6\Delta t}C + K\right)\Delta u = F^{n+1} - R^{n} + \frac{1}{\Delta t^{2}}(3u^{n} - 4u^{n-1} + u^{n-2})M + \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{7}{6}u^{n} - \frac{3}{2}u^{n-1} + \frac{1}{3}u^{n-2}\right)C \qquad (6.14)$$

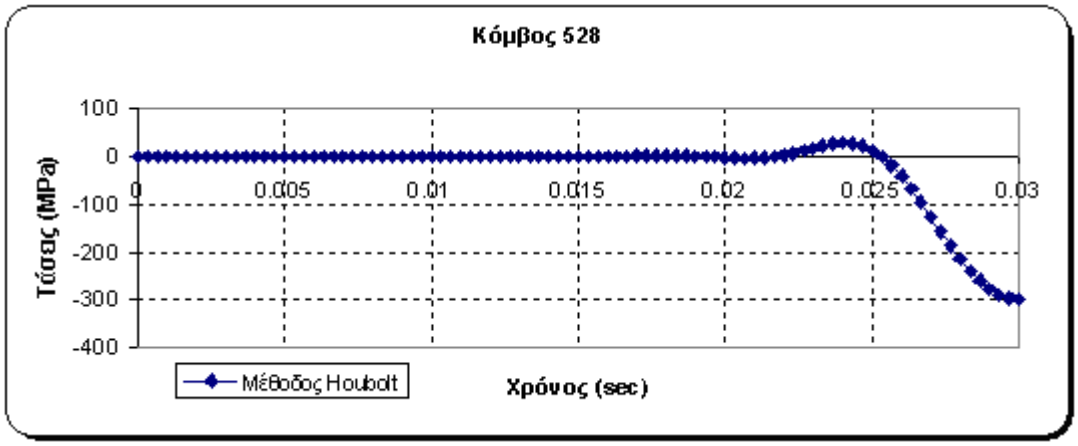
Η σχέση 6.14 επιτρέπει άμεση επίλυση του συστήματος 6.11 και βασίζεται σε ομοιόμορφα χρονικά βήματα. Από την επίλυση του προβλήματος με την μέθοδο Houbolt λαμβάνονται τα πιο κάτω αποτελέσματα στους κόμβους μελέτης 1, 528, 931:



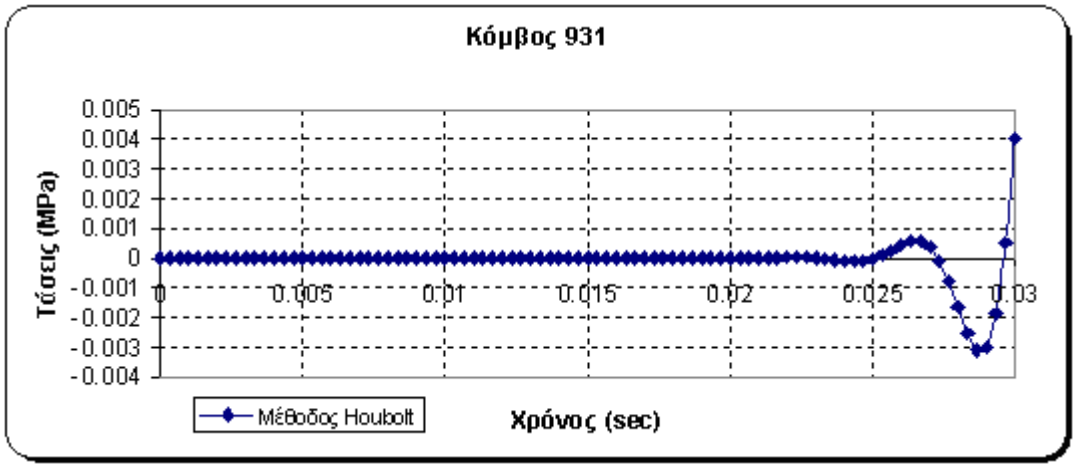
Σχήμα 6.9: Επίλυση με τη μέθοδο Houbolt



Γράφημα 6.7: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.8: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.9: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου

6.6.3 Μέθοδος Κεντρικών Διαφορών

Η μαθηματική συνάρτηση των κεντρικών διαφορών θεωρεί μια δευτεροβάθμια μεταβολή στις μετατοπίσεις ανάλογη του χρόνου. Οι σχέσεις των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων δίδονται από τις σχέσεις (Marc 2000):

$$v^n = \frac{(u^{n+1/2} - u^{n-1/2})}{(\Delta t)} \tag{6.15}$$

$$a^n = \frac{(v^{n+1/2} - v^{n-1/2})}{(\Delta t)} \tag{6.16}$$

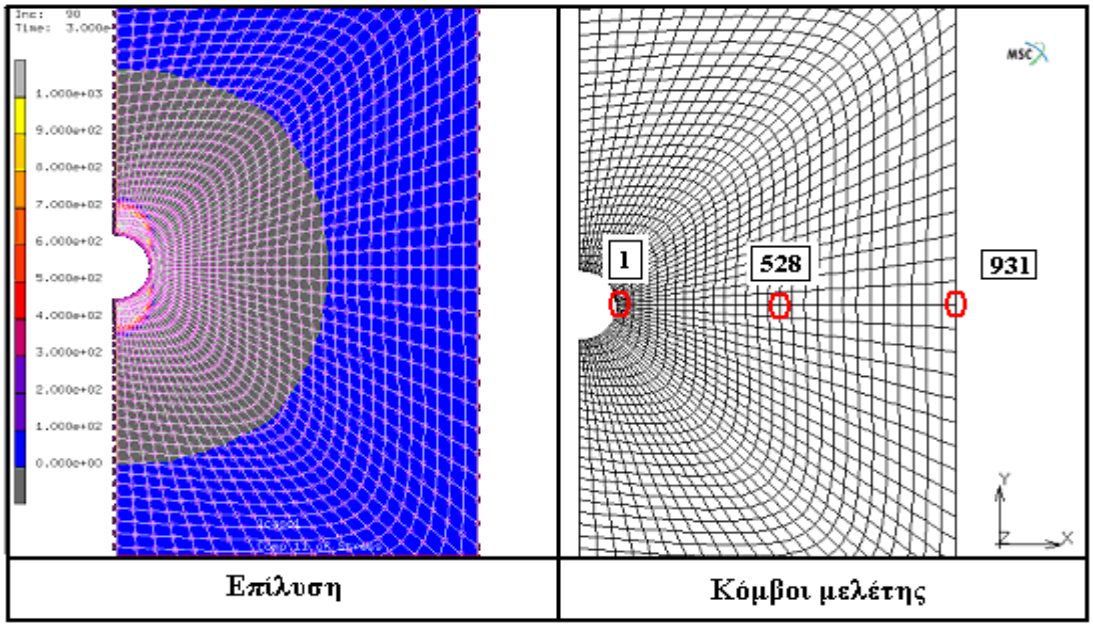
τέτοια ώστε:

$$a^n = \frac{(\Delta u^{n+1} - \Delta u^n)}{\Delta t^2} \quad \text{όπου} \quad \Delta u^n = u^n - u^{n-1} \tag{6.17}$$

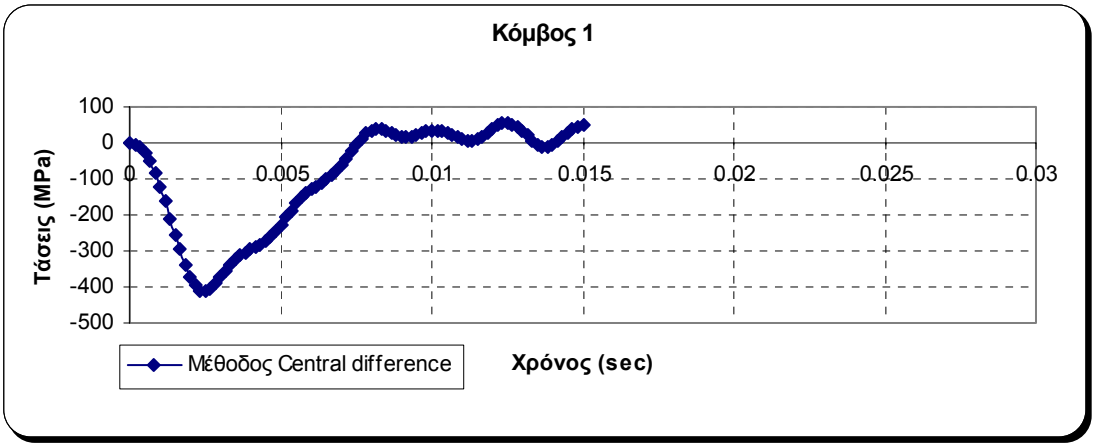
οπότε η κλασσική εξίσωση κίνησης λαμβάνει την μορφή:

$$\frac{M}{\Delta t^2}\Delta u^{n+1} = F^n - R^n + \frac{M}{\Delta t^2}\Delta u^n - Cv^{n-1/2} \tag{6.18}$$

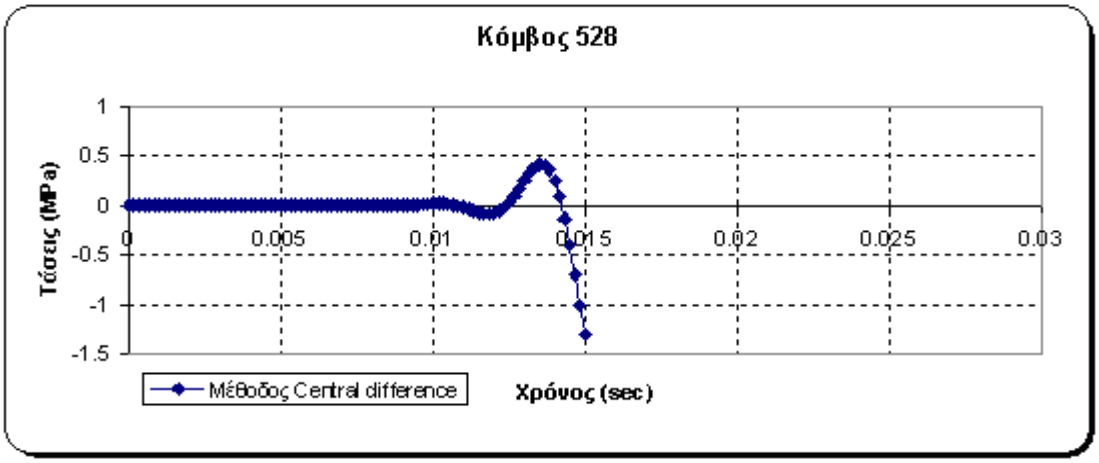
Από την επίλυση του προβλήματος με την μέθοδο Houbolt λαμβάνονται τα πιο κάτω αποτελέσματα στους κόμβους μελέτης 1, 528, 931:



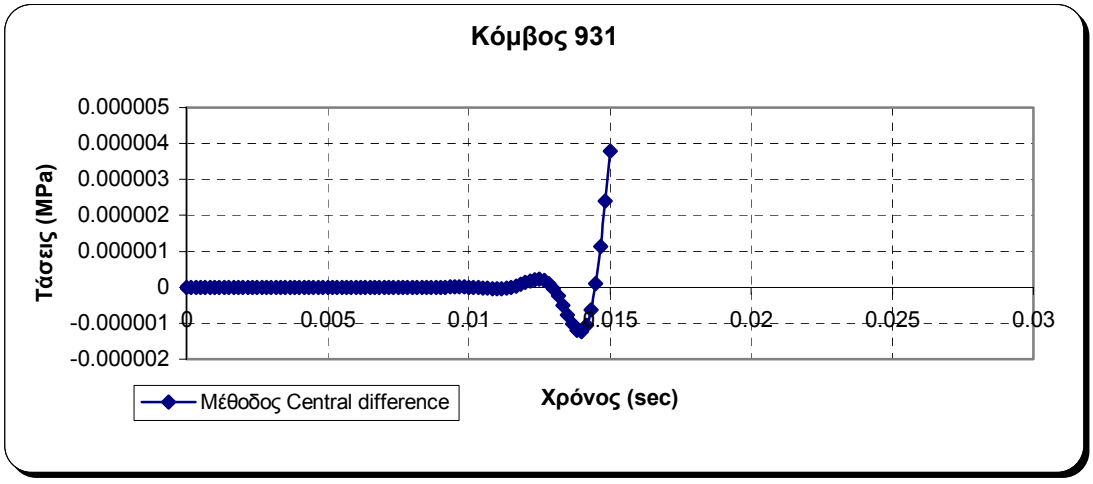
Σχήμα 6.9: Επίλυση με τη μέθοδο των κεντρικών διαφορών



Γράφημα 6.10: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.11: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.12: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις

- Στο κόμβο 1 (Newmark) επί του διατρήματος, παρουσιάζονται μεγάλες θλιπτικές τάσεις και μετά το τέλος της φόρτισης το σύστημα συνεχίζει να ταλαντώνεται ελεύθερα.
- Στο κόμβο 528 (Newmark) που είναι στο κέντρο του μοντέλου παρατηρείται ότι η το κύμα φτάνει σε χρόνο 0.017 sec και οι τάσεις που ασκούνται είναι μειωμένες σε σχέση με τις τάσεις στον κόμβο 1 αλλά αρκετά μεγάλες για την διάρρηξη του πετρώματος.
- Στο κόμβο 931 (Newmark) που είναι πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια παρατηρείται ότι το κύμα φτάνει σε χρόνο 0.023 sec και οι τάσεις που ασκούνται είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις τάσεις της φόρτισης. Μια άλλη παρατήρηση είναι η ανάκλαση του θλιπτικού κύματος στην ελεύθερη επιφάνεια και η επιστροφή του σαν εφελκυστικό αλλά πολύ μικρής τάξης.
- Στη μέθοδο Houbolt ισχύουν τα ίδια με την μέθοδο Newmark αλλά με διαφορά ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζουν εξομάλυνση.
- Στη μέθοδο των κεντρικών διαφορών παρατηρείται συνεχής διατήρηση του μετώπου κύματος και η αποκοπή του μετά το πέρας της φόρτισης.

Συμπεράσματα

Οι πιο πάνω τεχνικές άμεσης ολοκλήρωσης παρουσιάζουν κάποιες ανακρίβειες άσχετα με ποια θα χρησιμοποιηθεί. Οι ανακρίβειες που παρατηρήθηκαν είναι η τεχνητή απόσβεση και σφάλματα φάσης. Η καταλληλότερη μέθοδος που επιλέγηκε για να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των μοντέλων είναι η μέθοδος Newmark και αυτό φαίνεται από τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Η μέθοδος Newmark δεν παρουσιάζει αριθμητική απόσβεση. Δίνει ακριβείς λύσεις για προβλήματα με μεγάλο εύρος φορτίσεων και μπορεί να ρυθμιστεί το χρονικό βήμα καθιστώντας την τεχνική κατάλληλη για απότομες μεταβολές στη φόρτιση.
- Η μέθοδος Houbolt παρουσιάζει ισχυρή απόσβεση. Η ισχυρή απόσβεση κάνει την μέθοδο ευσταθή και για μη γραμμικά συστήματα. Εξαιτίας των ιδιοτήτων απόσβεσης που παρουσιάζει η τεχνική αυτή, καθίσταται κατάλληλη για προβλήματα δυναμικής επαφής.

- Η μέθοδος των κεντρικών διαφορών είναι κατάλληλη για προβλήματα απότομης μεταβολής, όμως για το συγκεκριμένο πρόβλημα εξέτασης που απαιτείται η μελέτη εξάπλωσης των τάσεων, η τεχνική αυτή είναι ακατάλληλη διότι όπως φαίνεται και από την επίλυση, δεν παρουσιάζεται εξάπλωση τάσεων.

6.7 Επιλογή Συνάρτησης Διαρροής

Η τάση διαρροής ενός υλικού είναι μια μετρούμενη ποσότητα όπου διαχωρίζει την ελαστική και ανελαστική συμπεριφορά. Το μέγεθος της τάσης διαρροής λαμβάνεται γενικά από δοκιμές μονοαξονικής θλίψης, όμως στην πραγματικότητα οι τάσεις που ασκούνται είναι πολυαξονικές. Η μέτρηση της διαρροής για την πολυαξονική κατάστασης τάσεων ονομάζεται και συνθήκη διαρροής. Η συνθήκη διαρροής μπορεί να έχει πολλές μορφές. Για παράδειγμα, η συνθήκη διαρροής μπορεί να εξαρτάται από όλες τις συνιστώσες των τάσεων ή να εξαρτάται από τις διατμητικές συνιστώσες ή ακόμα και από τις υδροστατικές τάσεις μόνο.

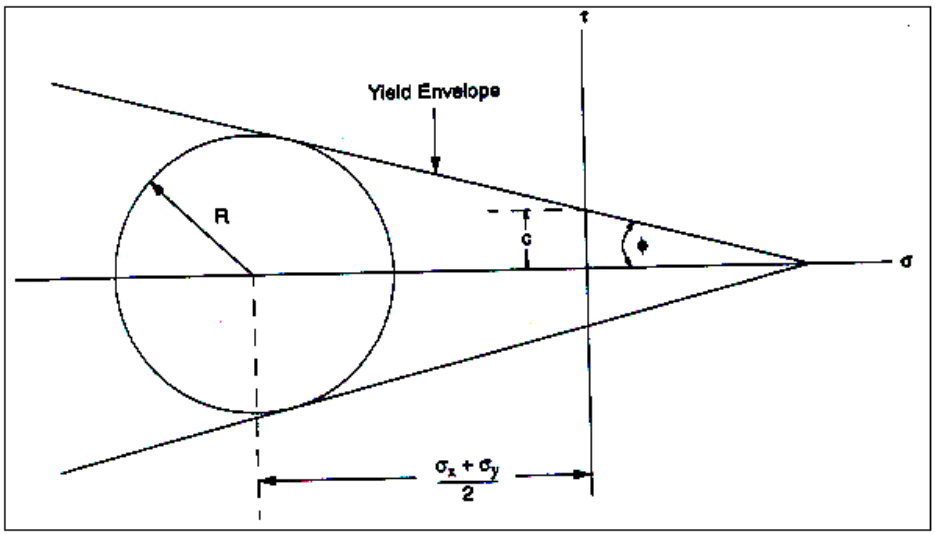
6.7.1 Συνθήκη διαρροής Von Mises

Το κριτήριο Von Mises είναι το πιο συχνά εφαρμοζόμενο. Η τόσο συχνή επιλογή του σε διάφορες αναλύσεις οφείλεται στη συνεχή φύση της συνάρτησης που ορίζει το κριτήριο αυτό καθώς επίσης και στη συμφωνία των αποτελεσμάτων που δίνει με παρατηρούμενη συμπεριφορά στα πιο συνήθη όλκιμα υλικά. Το κριτήριο δηλώνει ότι η διαρροή εμφανίζεται όταν η ενεργή ή ισοδύναμη τάση (σ) εξισωθεί με την τάση διαρροής (σ_y) όπως έχει μετρηθεί από δοκιμές μονοαξονικής θλίψης ή εφελκυσμού αντίστοιχα. Η ανάλυση με το κριτήριο Von Mises δεν απαιτεί κάποια εισαγωγή δεδομένων ή σταθερών στο πρόγραμμα.

6.7.2 Συνθήκη διαρροής Mohr-Coulomb (linear)

Το κριτήριο για ελαστοπλαστική συμπεριφορά Mohr-Coulomb, βασίζεται σε επιφάνεια διαρροής που παρουσιάζει υδροστατική εξάρτηση τάσεων. Τέτοιου είδους συμπεριφορά παρατηρείται σε μια μεγάλη τάξη εδαφών και πετρωμάτων. Τέτοιου τύπου υλικά μπορούν να χαρακτηριστούν και ως υλικά Mohr-Coulomb. Υπάρχουν δυο είδη υλικά Mohr-Coulomb, τα γραμμικά και τα παραβολικά. Στην ανάλυση που

πραγματοποιήθηκε, έγινε χρήση του γραμμικού κριτηρίου. Στο σχήμα 6.10 φαίνεται η γραμμική συμπεριφορά Mohr-Coulomb.



Σχήμα 6.10: Γραμμική συμπεριφορά Mohr-Coulomb (Marc, 2000)

Η συνάρτηση διαρροής όπως φαίνεται από το σχήμα 6.10 θεωρείται ότι είναι γραμμική συνάρτηση των υδροστατικών τάσεων. Η ανάλυση με το γραμμικό κριτήριο Mohr-Coulomb στο πρόγραμμα πραγματοποιείται με την εισαγωγή της τάσης διαρροής ($\bar{\sigma}$) και της σταθεράς (α). Η τάση διαρροής και η σταθερά (α) συνδέεται με την συνοχή (c) και την γωνία εσωτερικής τριβής (φ) με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$c = \frac{\bar{\sigma}}{3(1-12\alpha^2)^{1/2}} \tag{6.19}$$

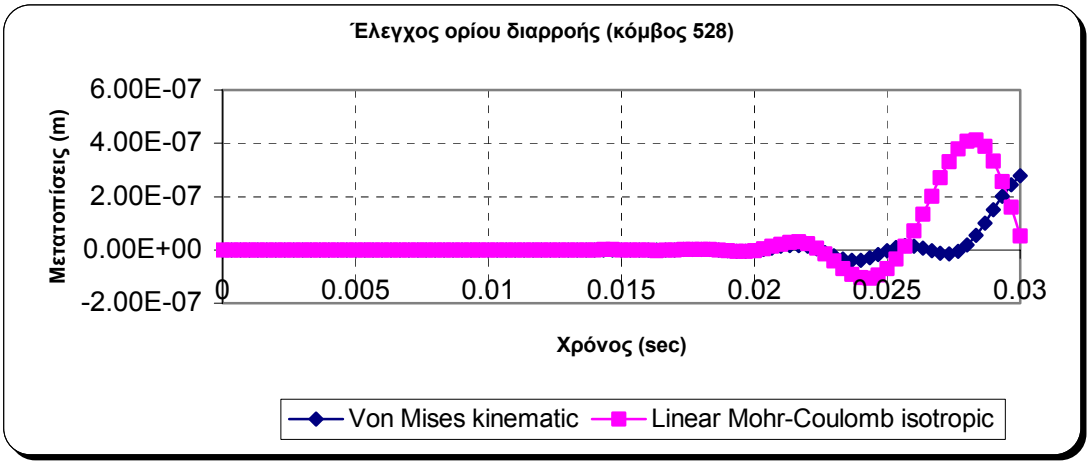
$$\sin\phi = \frac{3\alpha}{(1-3\alpha^2)^{1/2}} \tag{6.20}$$

Αν θεωρηθεί ένα τυπικός ασβεστόλιθος με τα χαρακτηριστικά του πίνακα 6.2 λαμβάνονται οι τιμές της τάσης διαρροής ($\bar{\sigma}$) και της σταθεράς (α):

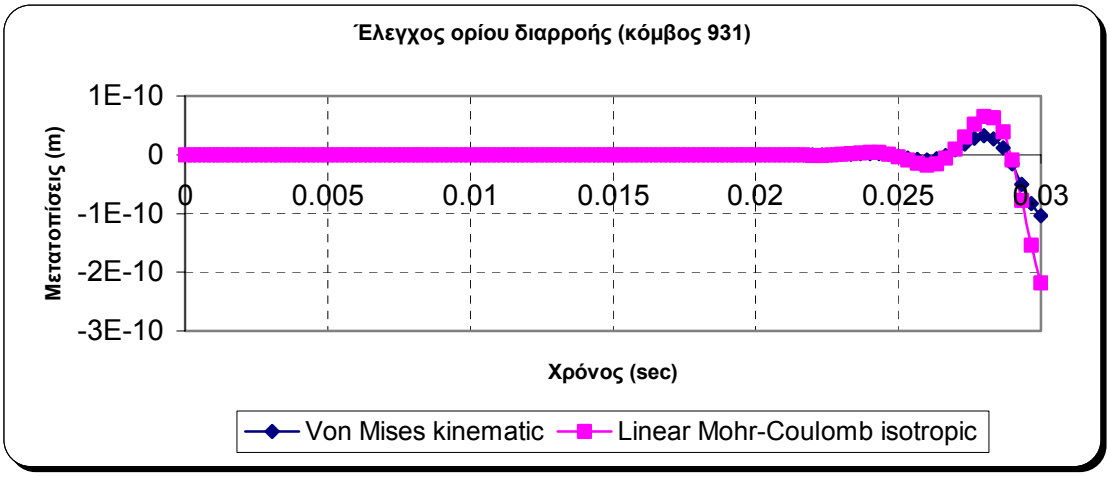
Πίνακας 6.2: Ιδιότητες υλικού

Υλικό	Αντοχή σε μονοαξονική θλίψη (MPa)	Συνοχή c (MPa)	Γωνία εσωτερικής τριβής $(\varphi)^0$	Τάση διαρροής (MPa)	Σταθερά (α)
Ασβεστόλιθος	80	25.50	25	67.34	0.136858

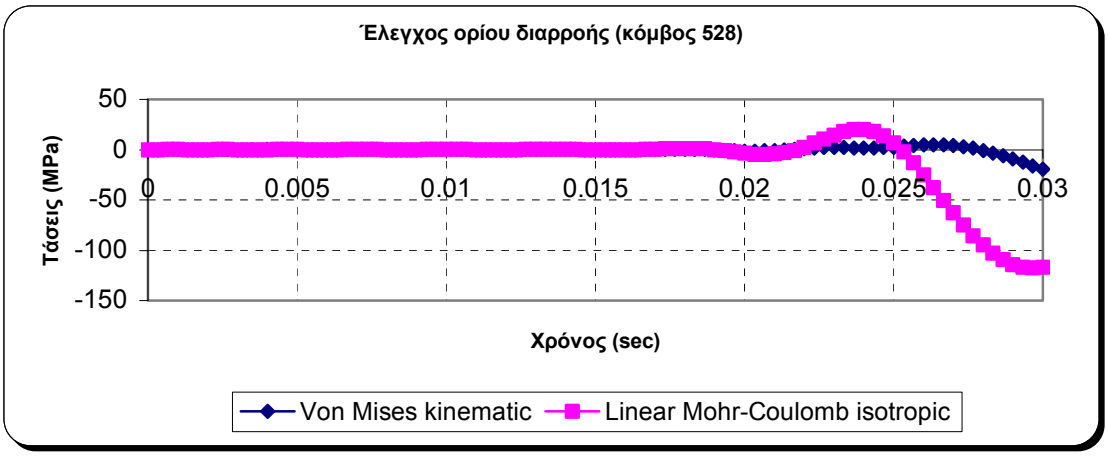
Επιλύνοντας με το κριτήριο Von Mises και το γραμμικό Mohr-Coulomb για πίεση 1000 (MPa) και φόρτιση τύπου Γ, λαμβάνονται τα διαγράμματα μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου και τάσεων συναρτήσει του χρόνου για τους κόμβους μελέτης 528 και 931.



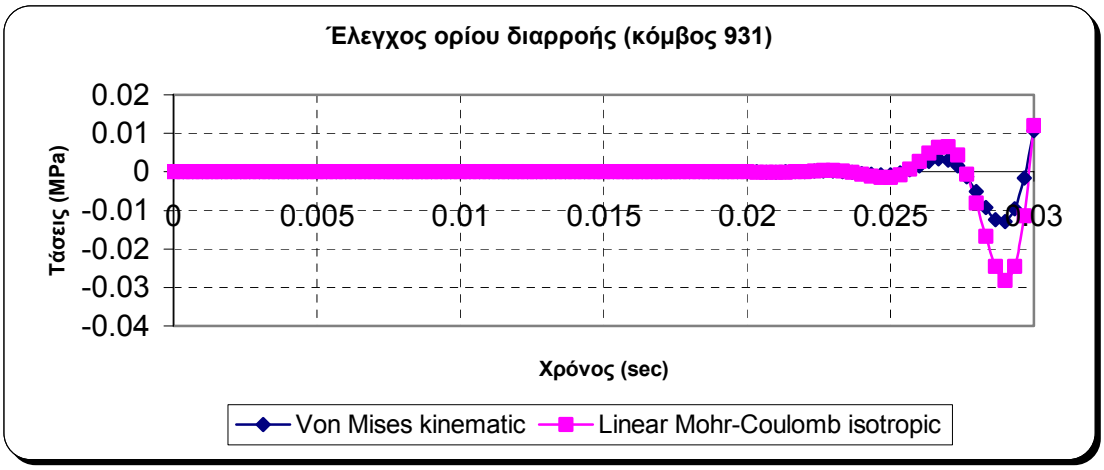
Γράφημα 6.13: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.14: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.15: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.16: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Στην ανάλυση που πραγματοποιήθηκε και με τα δυο κριτήρια παρατηρείται διαφορά στον κεντρικό κόμβο 528 στον τρόπο που μετατοπίζεται αλλά και στις τάσεις που δέχεται.

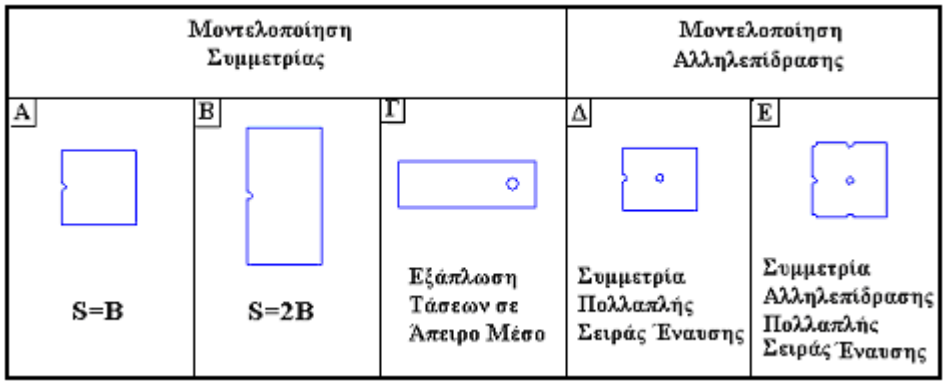
- Στον κόμβο 931 που είναι πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, οι μετατοπίσεις και οι τάσεις που δέχεται ο κόμβος και με τα δυο κριτήρια τείνουν να πάρουν την ίδια μορφή.

Συμπεράσματα

Μετά την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε με τα δυο κριτήρια επιλογής, επιλέγηκε για την επίλυση των ελαστοπλαστικών μοντέλων το κριτήριο Mohr-Coulomb διότι δίνει πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα για πετρώματα από το κριτήριο Von Mises το οποίο αν και μπορεί να γίνει αποδεκτό, φαίνεται να έχει περισσότερη ακρίβεια σε όλκιμα υλικά όπως είναι τα μέταλλα.

6.8 Επεξεργασία Μοντέλων

Τα μοντέλα που επιλύθηκαν με ιδιότητες ελαστικού και ελαστοπλαστικού υλικού ήταν πέντε και φαίνονται στο σχήμα 6.11. Όπως αναφέρθηκε και στον ορισμό της γεωμετρίας, η μοντελοποίηση χωρίστηκε σε δυο μέρη, την μοντελοποίηση συμμετρίας και την μοντελοποίηση αλληλεπίδρασης.



Σχήμα 6.11: Γεωμετρία μοντέλων

Η επιβολή των συνοριακών συνθηκών όπως αναφέρθηκε και πιο πριν είναι κύλιση στον κατακόρυφο άξονα, κύλιση στο πάνω και κάτω μέρος των μοντέλων κατά τον οριζόντιο άξονα εξασφαλίζοντας την συμμετρία της γεωμετρίας καθώς και πίεση στο διάτρημα. Η διακριτοποίηση αποτελείται εξολοκλήρου από ορθογώνια στοιχεία στα μοντέλα Α, Β και Δ, ενώ στα μοντέλα Γ και Ε γίνεται και χρήση τριγωνικών στοιχείων αλλά σε απόσταση τέτοια ώστε να μην επηρεάζεται η ταλάντωση των κόμβων αλλά και η εξάπλωση των τάσεων. Η θεώρηση επίλυσης είναι επίπεδη παραμόρφωση.

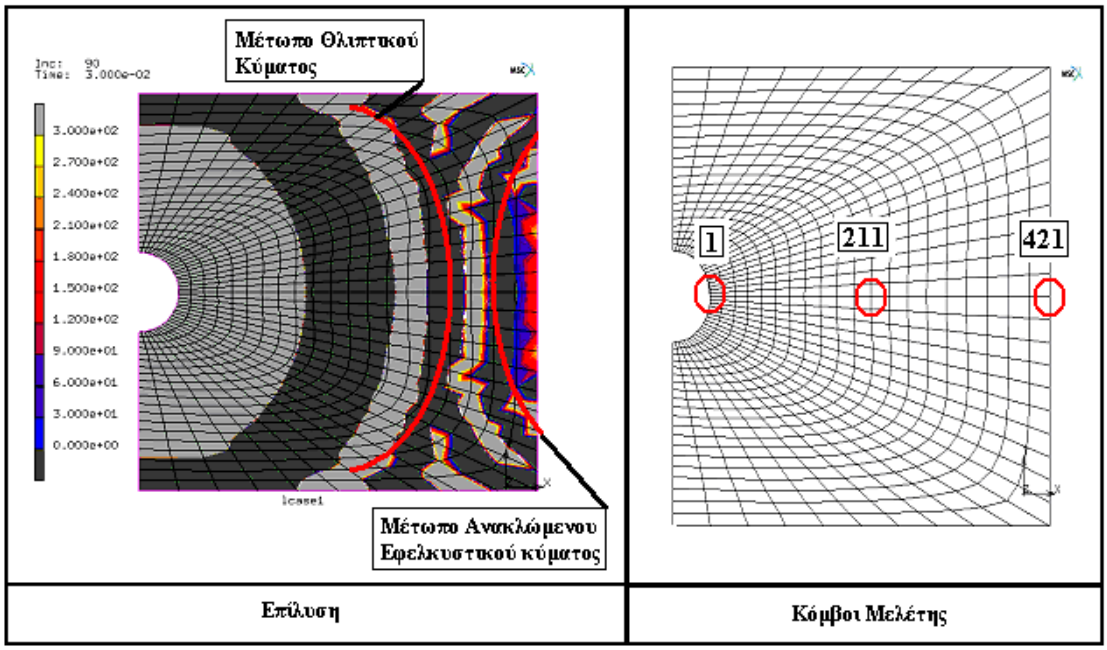
Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε σε όλες τις επιλύσεις ήταν τυπικός ασβεστόλιθος και οι ιδιότητες αυτού φαίνονται στον πίνακα 6.3:

Πίνακας 6.3: Ιδιότητες υλικού

Υλικό	Αντοχή σε μονοαξονική θλίψη Co (MPa)	Μέτρο Ελαστικότητας E (GPa)	Λόγος Poisson v	Συνοχή c (MPa)	Γωνία εσωτερικής τριβής $(\varphi)^0$
Ασβεστόλιθος	80	20	0.3	25.50	25

6.8.1 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (S=B)

Η ελαστική επίλυση που προέκυψε με όλες τις παραμέτρους που αναφέρθηκαν φαίνεται στο σχήμα 6.12:



Σχήμα 6.12: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

Από την επίλυση που έγινε λαμβάνονται οι γραφικές παραστάσεις: Α) τάσεων συναρτήσει του χρόνου και Β) κατακόρυφων μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου για πιέσεις 1000 MPa και 6000 MPa και για τα τέσσερα είδη φόρτισης που αναπτύχθηκαν στο εδάφιο 6.4.

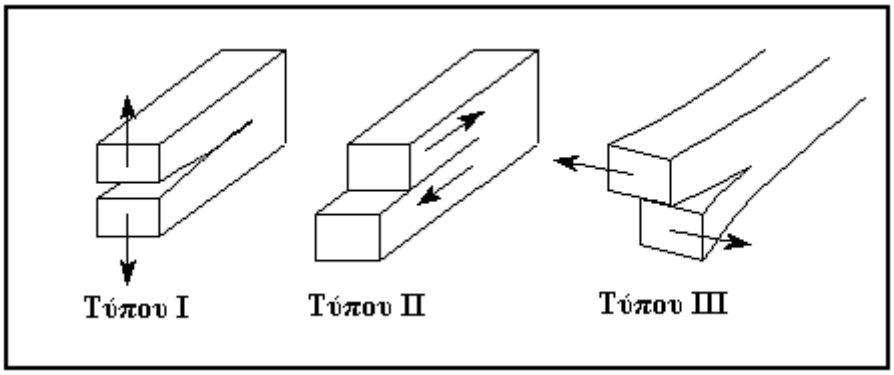
6.9 Εύρεση Συντελεστών Έντασης των Τάσεων με την Βοήθεια του Λογισμικού Franc2D

Στο εδάφιο αυτό γίνεται μια ανασκόπηση των αρχών της γραμμικής ελαστικής θραυστομηχανικής (LEFM-Linear elastic fracture mechanics), που θεωρείται ένα αναλυτικό εργαλείο επίλυσης και πρόβλεψης θραύσης υπό ασταθής συνθήκες. Οι σχέσεις οι οποίες θα αναφερθούν δεν δίδονται με τις αποδείξεις τους διότι ξεφεύγει από τους σκοπούς της εργασίας αυτής.

Υπάρχουν δυο βασικές προσεγγίσεις για την πρόβλεψη της θραύσης με κυρίαρχες συνθήκες, γραμμικές και ελαστικές. Η πρώτη βασίζεται στο ισοζύγιο ενέργειας που είναι και η απαραίτητη συνθήκη για την θραύση. Η δεύτερη βασίζεται στο μέγεθος της έντασης της τάσης στην αιχμή της ρωγμής, όπου φτάνει μια κρίσιμη τιμή έτσι ώστε να ξεκινήσει η θραύση. Οι δυο αυτές προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες και δεν είναι αναγκαίο να γίνεται επιλογή μεταξύ τους για επίτευξη βέλτιστων αποτελεσμάτων σε μια ανάλυση. Οι δυο αυτές μέθοδοι, μπορούν να αναλύσουν και κάποιας περιορισμένης έκτασης πλαστικότητα, κάτι που κάνει τις δυο μεθόδους εύχρηστες και εφαρμόσιμες σε διάφορα προβλήματα (Saxena, 1998).

6.9.1 Προσέγγιση θραύσης με τους συντελεστές έντασης των τάσεων

Ξεκινώντας την προσέγγιση θραύσης με τους συντελεστές έντασης των τάσεων, ορίζονται τρεις διαφορετικοί τρόποι φόρτισης και τύποι ρωγμών ενός ρωγματωμένου σώματος. (Α) ρωγμή τύπου Ι (άνοιγμα), όπου η φόρτιση της ρωγμής επιβάλλεται συμμετρικά ως προς τα επίπεδα x-y και x-z. (Β) ρωγμή τύπου ΙΙ (ολίσθηση σε επίπεδο), όπου η ρωγμή φορτίζεται σχετικά ως προς τα επίπεδα x-y και x-z. (Γ) ρωγμή τύπου ΙΙΙ (ολίσθηση εκτός επιπέδου), όπου η ρωγμή φορτίζεται ασύμμετρα ως προς τα επίπεδα x-y και x-z. Η επαλληλία των πιο πάνω τύπων ρωγμών φαίνονται στο σχήμα 6.29 και μπορούν να περιγράψουν τις περισσότερες περιπτώσεις θραύσης με την προϋπόθεση να ισχύουν συνθήκες επίπεδης τάσης και παραμόρφωσης (Saxena, 1998).



Σχήμα 6.29: Τύποι ανοίγματος ρωγμών (Saxena, 1998)

Οι ακόλουθες αναλυτικές λύσεις τάσεων και μετατοπίσεων προτάθηκαν από τον Irwin για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (Saxena, 1998).

Τύπου I:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] \tag{6.21}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] \tag{6.22}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \tag{6.23}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{6.24}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \tag{6.25}$$

$$u = \frac{K_I}{G}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - 2\nu - \cos^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{6.26}$$

$$V = \frac{K_I}{G}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left[2 - 2\nu - \cos^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{6.27}$$

$$w = 0 \tag{6.28}$$

Τύπου ΙΙ:

$$\sigma_{\chi\chi} = \frac{\mathrm{K_{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\left[2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right] \tag{6.29}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\mathrm{K_{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \tag{6.30}$$

$$\sigma_{\chi y} = \frac{\mathrm{K_{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] \tag{6.31}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{\chi\chi} + \sigma_{yy}) \tag{6.32}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \tag{6.33}$$

$$u = \frac{K_{II}}{G}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left[2 - 2\nu - \cos^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{6.34}$$

$$V = \frac{K_{II}}{G}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left[-1 + 2\nu + \sin^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{6.35}$$

$$w = 0 \tag{6.36}$$

Τύπου ΙΙΙ:

$$\sigma_{zx} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \tag{6.37}$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \tag{6.38}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \tag{6.39}$$

$$w = \frac{K_{III}}{u}\frac{\sqrt{2r}}{\pi}\sin\frac{\theta}{2} \tag{6.40}$$

$$u = v = 0 \tag{6.41}$$

όπου ν: λόγος Poisson, Ε: μέτρο ελαστικότητας και $G = \frac{E}{2(1+v)}$ μέτρο διάτμησης.

Για να διαδοθεί μια ρωγμή, ο ρυθμός της ελαστικής ενέργειας που απελευθερώνεται πρέπει να είναι τουλάχιστο ίσος με τον ρυθμό ενέργειας που απαιτείται για να δημιουργηθεί μια νέα ελεύθερη επιφάνεια ρωγμής. Την συνέπεια αυτή ενίσχυσε ο Irwin, προσθέτοντας ολκιμότητα στην θεωρεία του Griffith. Η ελαστική ενέργεια αποδίδεται από μια παράμετρο **K** που ονομάζεται **συντελεστής έντασης της τάσης** και βρίσκεται κοντά στην περιοχή της αιχμής της ρωγμής. Ο συντελεστής έντασης της τάσης K εξαρτάται από το μέγεθος της ρωγμής, την γεωμετρία και το επίπεδο φόρτισης.

Η διάδοση της ρωγμής ξεκινάει όταν κάποιος από τους παράγοντες που αναφέρθηκαν προκαλεί τον συντελεστή έντασης της τάσης να γίνει ίσος ή μεγαλύτερος από την ιδιότητα του υλικού K_c. Σκοπός της γραμμικής ελαστικής θραυστομηχανικής είναι ο προσδιορισμός του K. Ο ρυθμός απελευθέρωσης της ενέργειας G εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές έντασης των τάσεων για τους τρείς διαφορετικούς τρόπους φόρτισης. Για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης ισχύει (Saxena, 1998):

$$G = \frac{1-v^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+v}{E}K_{III}^2 \tag{6.42}$$

Για επίπεδη τάση ισχύει:

$$G = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) \tag{6.43}$$

6.9.2 Αριθμητική προσομοίωση διάδοσης ρωγμής

Στη συνέχεια πραγματοποιείται μια ανάλυση ενός διατρήματος που δέχεται μεγάλη εσωτερική πίεση καθώς επίσης ανάλυση επιλεκτικής έναρξης και διάδοσης μιας ρωγμής λόγω μεγάλης εσωτερικής πίεσης. Η ανάλυση γίνεται με την βοήθεια του λογισμικού Franc2D.

Παραδοχές:

- Το διάτρημα δεν επηρεάζεται από άλλα ανοίγματα
- Γίνεται ελαστική ανάλυση του προβλήματος με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης
- Το πρόβλημα λύνεται με συμμετρία ημικυκλίου

Οι ιδιότητες του υλικού φαίνονται στον πίνακα 6.4:

Πίνακας 6.4

Πέτρωμα	Μέτρο Ελαστικότητας (Gpa)	Λόγος Poisson
Ασβεστόλιθος	20	0.3

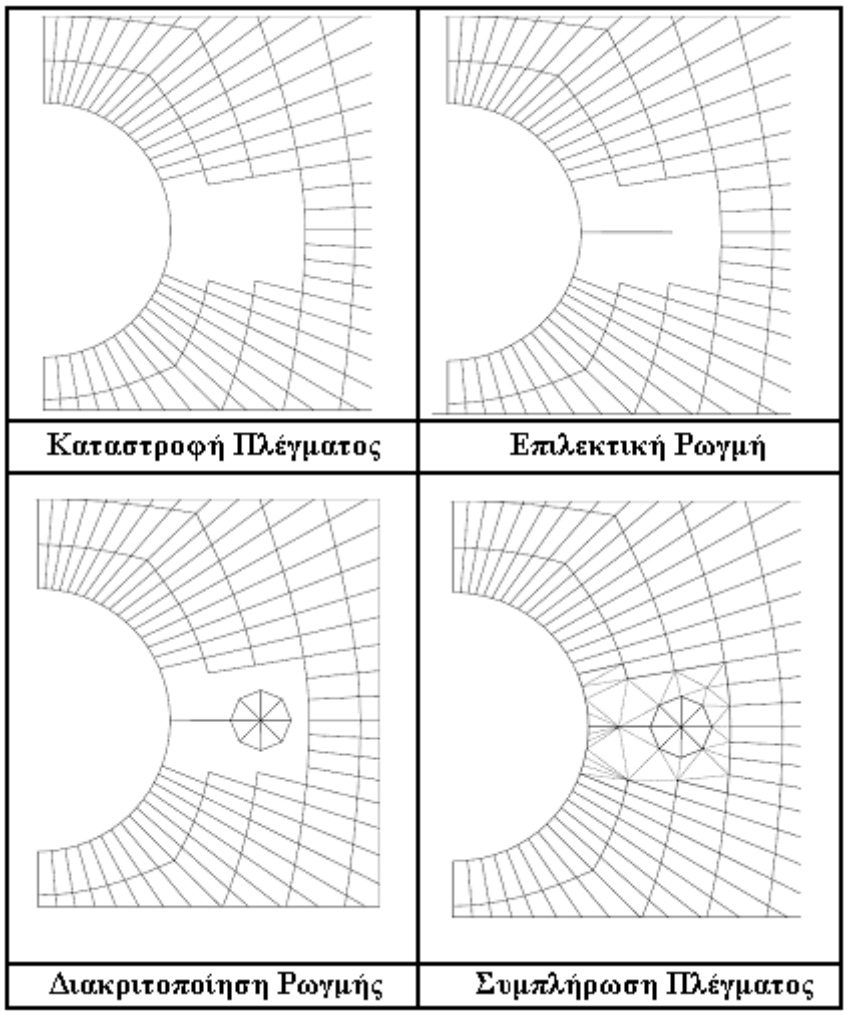
Η διακριτοποίηση γίνεται αραιά με λόγο στοιχείων 1:3 έξω από την περιοχή ενδιαφέροντος ενώ στην περιοχή του διατρήματος η διακριτοποίηση γίνεται πιο πυκνή. Το πρόβλημα λύθηκε με συμμετρία ημικυκλίου οπότε οι συνοριακές συνθήκες ορίστηκαν

- Κύλιση στον Άξονα X (dy = 0) όλοι οι οριζόντιοι κόμβοι στα όρια πάνω και κάτω της γεωμετρίας του μοντέλου
- Κύλιση στον Άξονα Y (dχ = 0) όλοι οι κάθετοι κόμβοι, πάνω και κάτω από το διάτρημα
- Η εσωτερική πίεση που εφαρμόζεται είναι της τάξης των 6000 MPa.

6.9.2.1 Αριθμητική προσομοίωση διάδοσης μιας επιλεκτικής ρωγμής

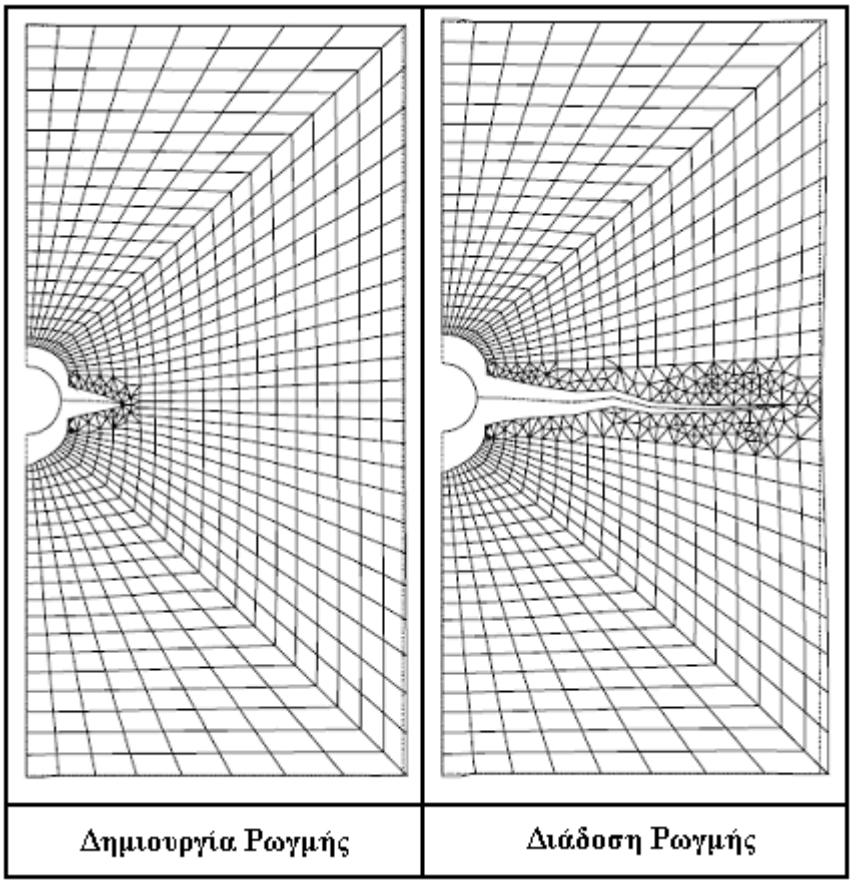
Από την επίλυση που προέκυψε με το λογισμικό Franc2D λαμβάνονται τα γραφήματα των συντελεστών έντασης των τάσεων (K_{I+II})και τα γραφήματα των

ρυθμών έκλυσης ενέργειας παραμόρφωσης (G_{I+II}). Στο σχήμα 6.30 φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο το λογισμικό σπάει το πλέγμα, δημιουργεί την επιλεκτική ρωγμή (προκαθορίζεται από τον χρήστη), διακριτοποιεί την αιχμή της ρωγμής και συμπληρώνει το πλέγμα με τριγωνικά στοιχεία



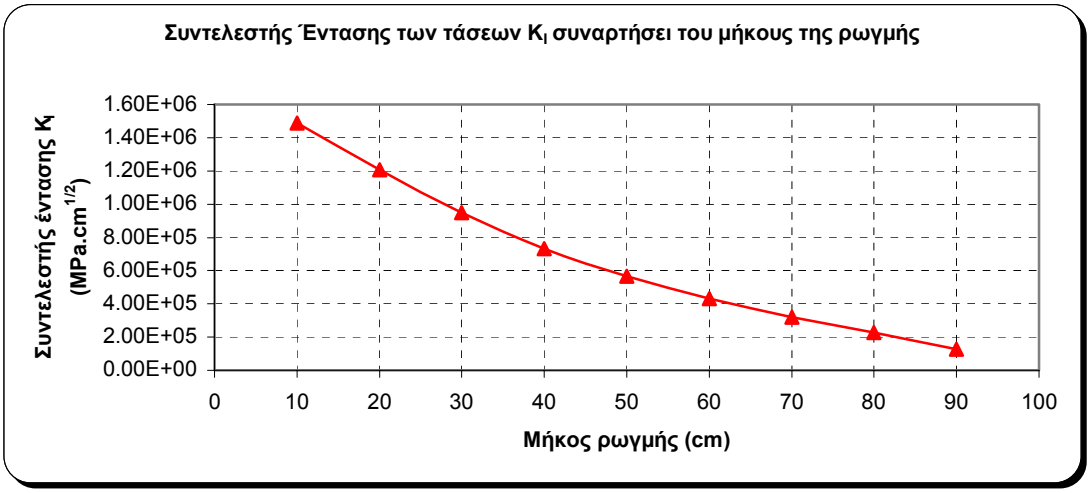
Σχήμα 6.30: Διακριτοποίηση ρωγμής

Στο σχήμα 6.31 φαίνεται η επίλυση που προέκυψε με το λογισμικό. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ρωγμές όπως αναφέρθηκε προηγουμένως προκαθορίζεται από τον χρήστη. Ο προκαθορισμός αυτός γίνεται μετά από ανάλυση και εύρεση του μεγαλύτερου εντατικού πεδίου και προς πια κατεύθυνση οπότε και αναμένεται να δημιουργηθεί η ρωγμή. Η διάδοση της ρωγμής από το πρόγραμμα γίνεται με την θεωρεί της μέγιστης περιφερειακής τάσης (maximum circumferential stress theory), κάνει την ανάλυση λοιπόν και εκεί όπου εμφανίζονται οι μέγιστες τάσεις θεωρεί ότι προς τα εκεί θα κινηθεί και η ρωγμή.

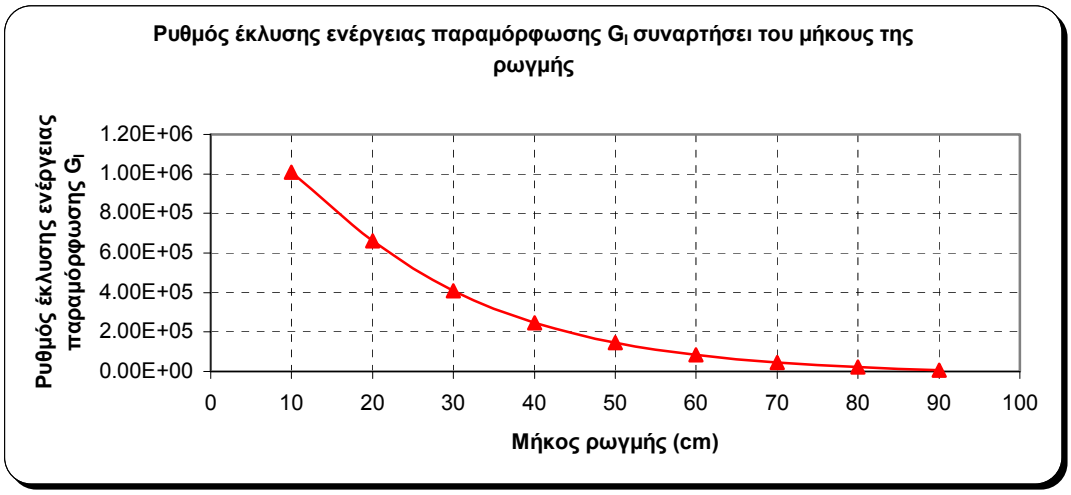


Σχήμα 6.31: Επίλυση

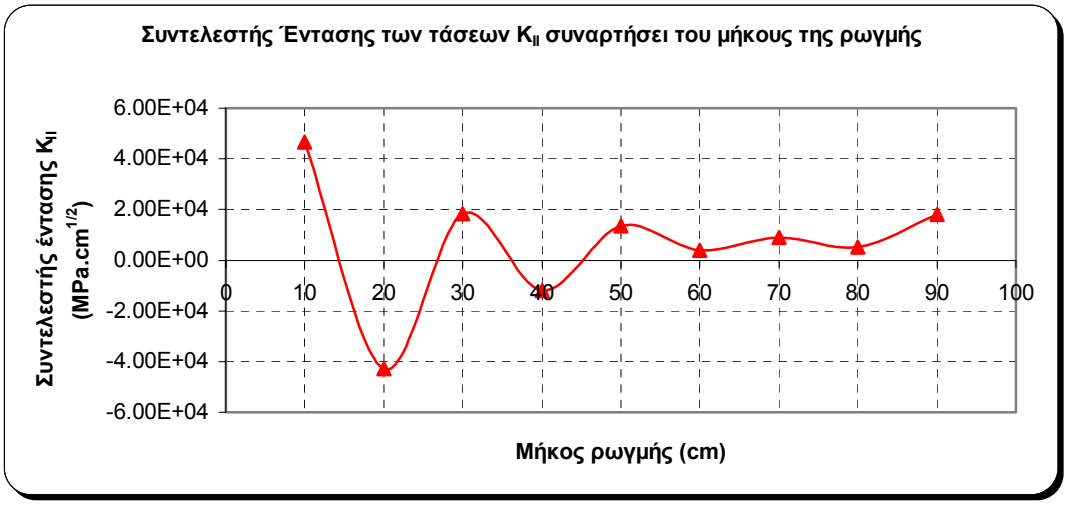
Από την επίλυση λαμβάνονται τα διαγράμματα έντασης των τάσεων συναρτήσει του μήκους της ρωγμής και ρυθμού έκλυσης ενέργειας παραμόρφωσης συναρτήσει του μήκους της ρωγμής



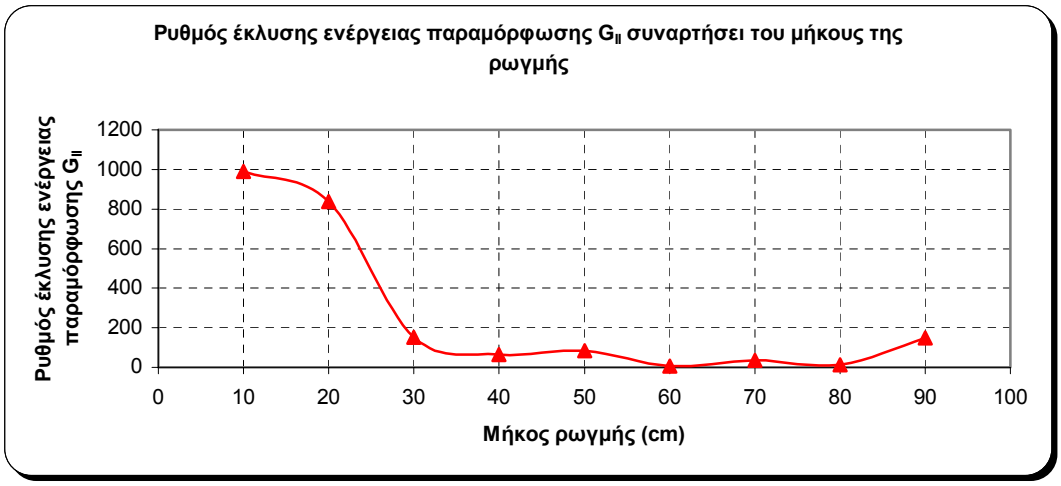
Γράφημα 6.161: K_I συναρτήσει του μήκους της ρωγμής



Γράφημα 6.162: G_I συναρτήσει του μήκους της ρωγμής



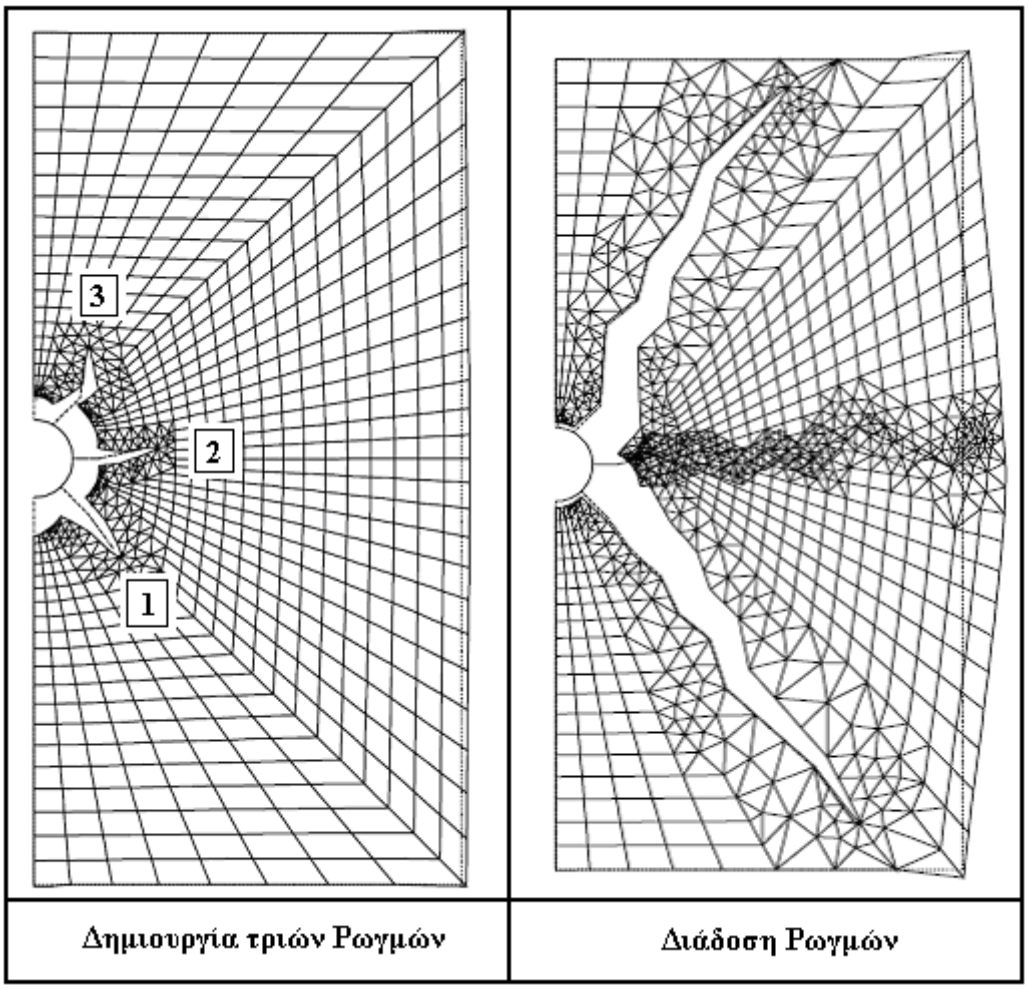
Γράφημα 6.163: K_{II} συναρτήσει του μήκους της ρωγμής



Γράφημα 6.164: G_{II} συναρτήσει του μήκους της ρωγμής

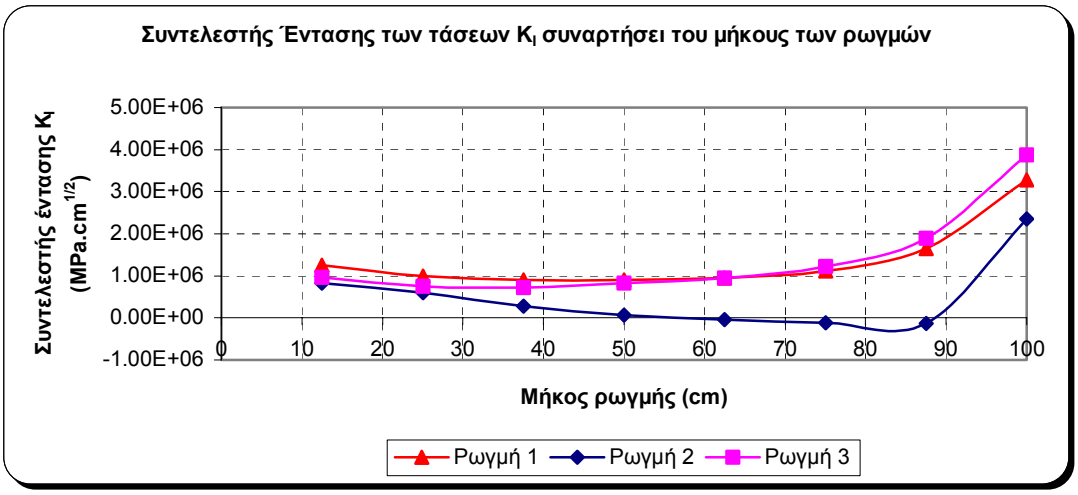
6.9.2.2 Αριθμητική προσομοίωση διάδοσης τριών επιλεκτικών ρωγμών

Μετά την μελέτη της επιλεκτικής δημιουργίας και διάδοσης μίας ρωγμής που προσομοιάζει την ρωγμάτωση του πετρώματος στην περίπτωση ελεγχόμενης ανατίναξης, κρίθηκε σκόπιμο με μελετηθούν και δημιουργηθεί ακόμα ένα μοντέλο με έναρξη και διάδοση τριών ρωγμών με διαφορά 45° μεταξύ τους. Οι συνθήκες και παράμετροι του μοντέλου είναι οι ίδιες με του προηγούμενου και για αυτό δεν κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν ξανά.

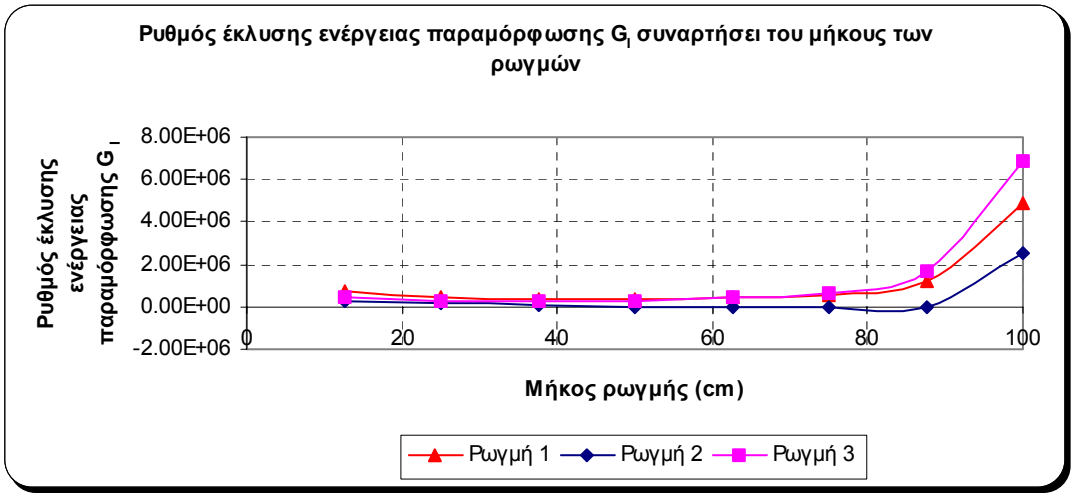


Σχήμα 6.32: Επίλυση

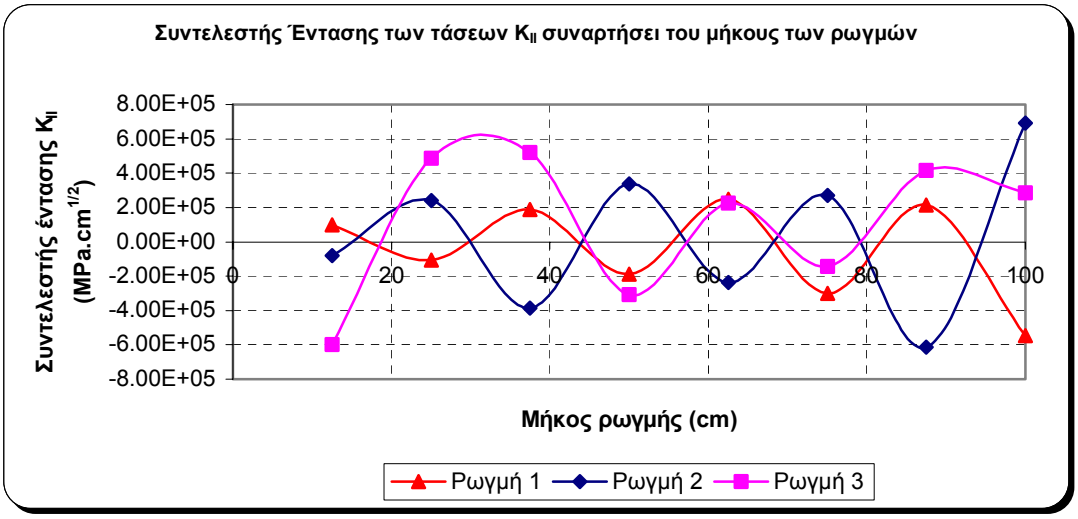
Από την επίλυση όπως και προηγουμένως λαμβάνονται τα διαγράμματα έντασης των τάσεων συναρτήσει του μήκους της ρωγμής και ρυθμού έκλυσης ενέργειας παραμόρφωσης συναρτήσει του μήκους της ρωγμής



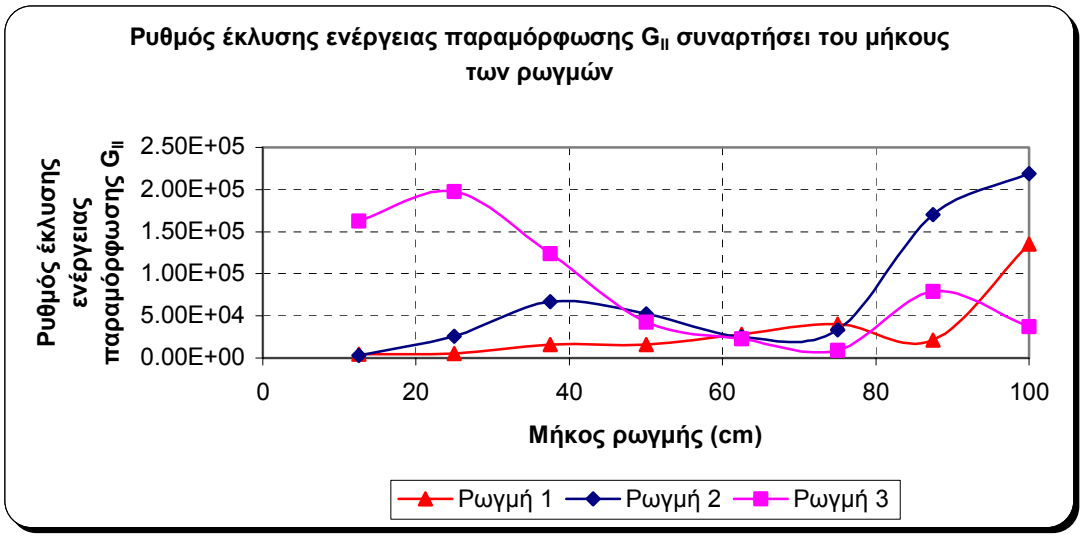
Γράφημα 6.165: K_{II} συναρτήσει του μήκους της ρωγμής



Γράφημα 6.166: G_I συναρτήσει του μήκους της ρωγμής



Γράφημα 6.167: K_{II} συναρτήσει του μήκους της ρωγμής



Γράφημα 6.164: G_{II} συναρτήσει του μήκους της ρωγμής

Συμπεράσματα:

- Η ανατίναξη παρουσιάζει ρωγμές τύπου I (αποχωρισμός) και τύπου II (διάτμηση). Ο συντελεστής έντασης τάσης K_I+K_{II} καθώς επίσης και ο ρυθμός έκλυσης ενέργειας G_I+G_{II} για την περίπτωση της μιας ρωγμής μειώνονται με την αύξηση του μήκους της ρωγμής. Γνωρίζοντας ότι $K_I = \sigma\sqrt{\pi.a}$, όπου σ: τάσεις γύρω από την ρωγμή και α: μήκος ρωγμής. Είναι λογικό ότι οι τάσεις μειώνονται με την απόσταση από την πηγή έκρηξης, αλλά αυξάνεται το μήκος της ρωγμής έχοντας ως αποτέλεσμα την μείωση του K_I και του G_I συναρτήσει του μήκους της ρωγμής.

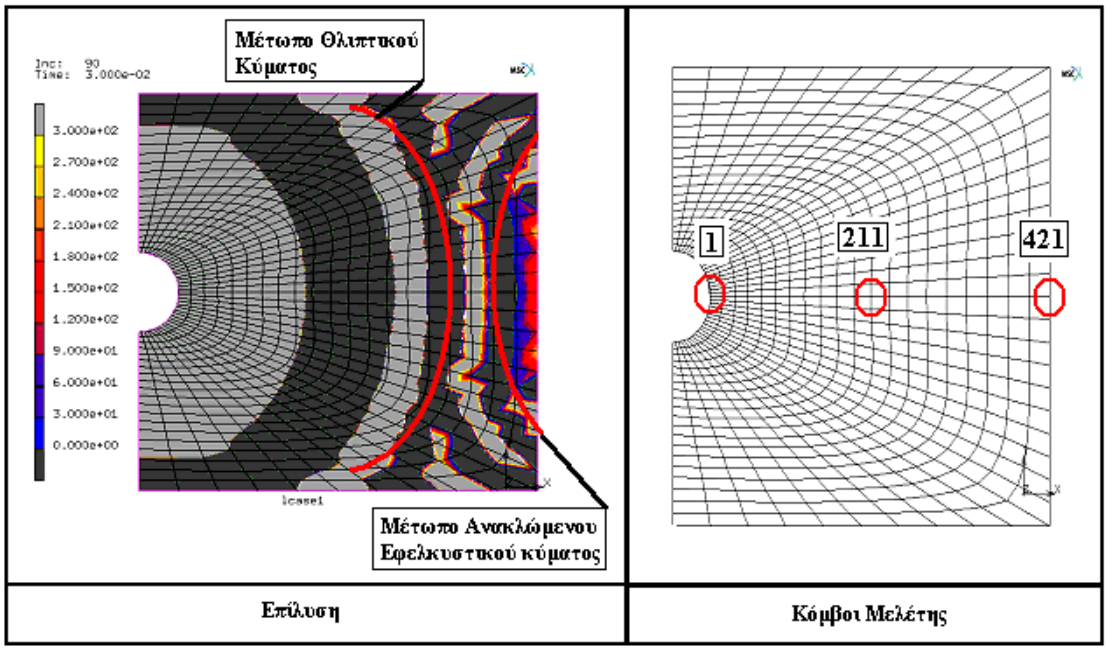
- Ο συντελεστής έντασης τάσης K_I+K_{II} καθώς επίσης και ο ρυθμός έκλυσης ενέργειας G_I+G_{II} για την περίπτωση των τριών ρωγμών, μειώνονται πολύ λίγο και μετά παρουσιάζουν μικρή σταθερότητα με την αύξηση του μήκους της ρωγμής. Αυτό γίνεται μέχρι ένα σημείο και μετά παρουσιάζουν άνοδο. Συγκρίνοντας το λόγο r/a (ακτίνα διατρήματος προς μήκος ρωγμής) με θεωρητικές καμπύλες, η μορφή των διαγραμμάτων είναι σωστή αλλά η τάξη μεγέθους της αύξησης των καμπύλων είναι υπερτιμημένη. Αυτό μπορεί να αποδοθεί σε δυο λόγους. Α) Στο ότι μετά το τέλος της ρωγμής 2 η υπόλοιπη ενέργεια μοιράζεται στις άλλες δυο ρωγμές κα Β) το μοντέλο να παρουσιάζει αριθμητική αστάθεια.

Πίνακας 6.3: Ιδιότητες υλικού

Υλικό	Αντοχή σε μονοαξονική θλίψη Co (MPa)	Μέτρο Ελαστικότητας E (GPa)	Λόγος Poisson v	Συνοχή c (MPa)	Γωνία εσωτερικής τριβής $(\varphi)^0$
Ασβεστόλιθος	80	20	0.3	25.50	25

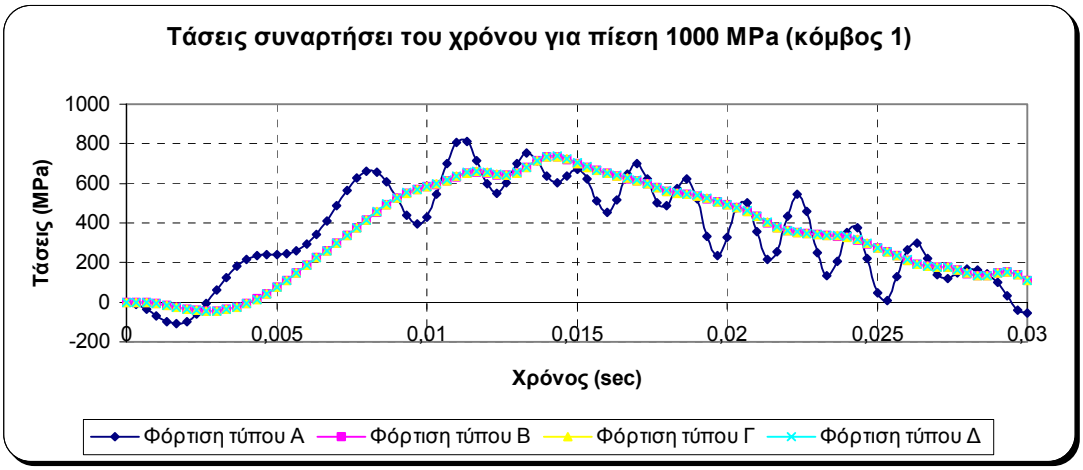
6.8.1 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (S=B)

Η ελαστική επίλυση που προέκυψε με όλες τις παραμέτρους που αναφέρθηκαν φαίνεται στο σχήμα 6.12:

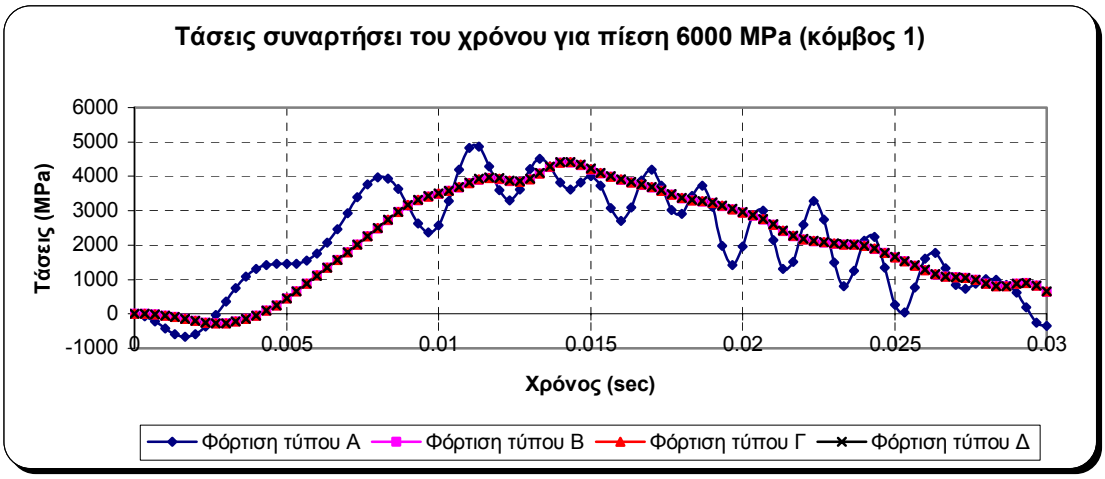


Σχήμα 6.12: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

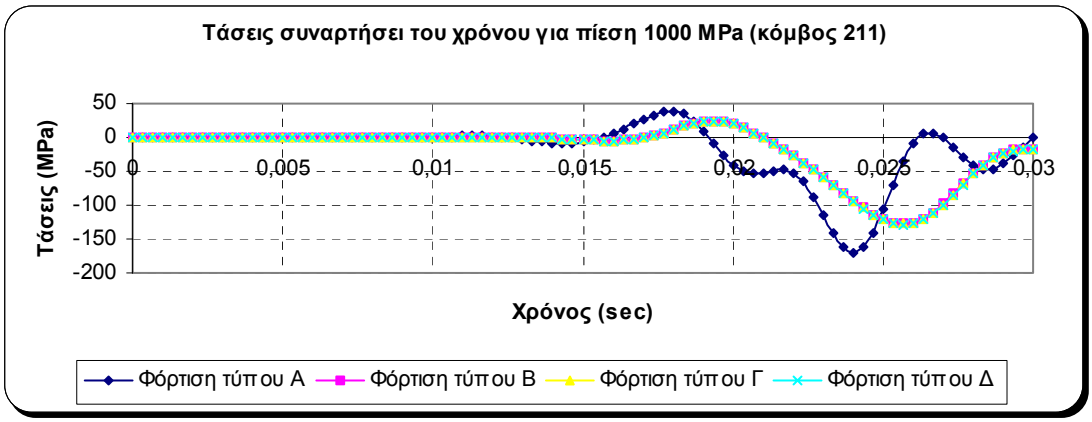
Από την επίλυση που έγινε λαμβάνονται οι γραφικές παραστάσεις: Α) τάσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.17-6.22) και Β) κατακόρυφων μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.23-6.28) για πιέσεις 1000 MPa και 6000 MPa και για τα τέσσερα είδη φόρτισης που αναπτύχθηκαν στο εδάφιο 6.4.



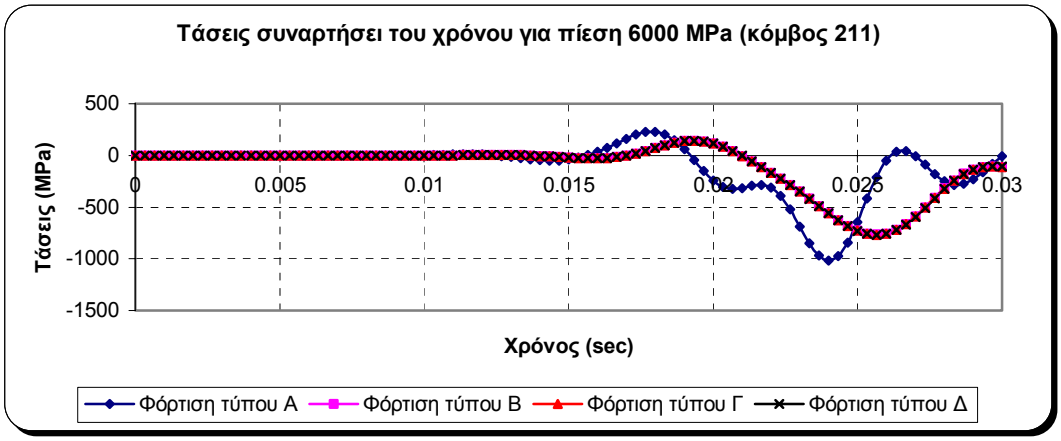
Γράφημα 6.17: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



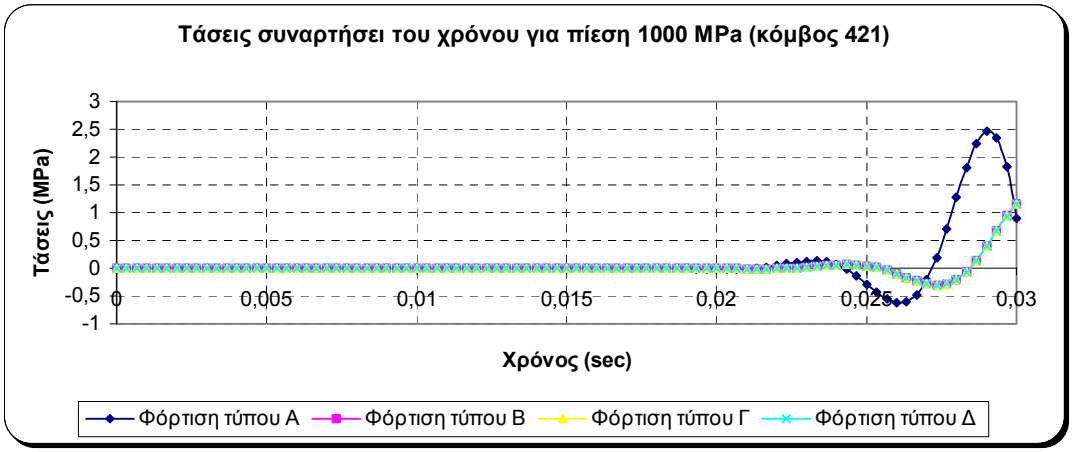
Γράφημα 6.18: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



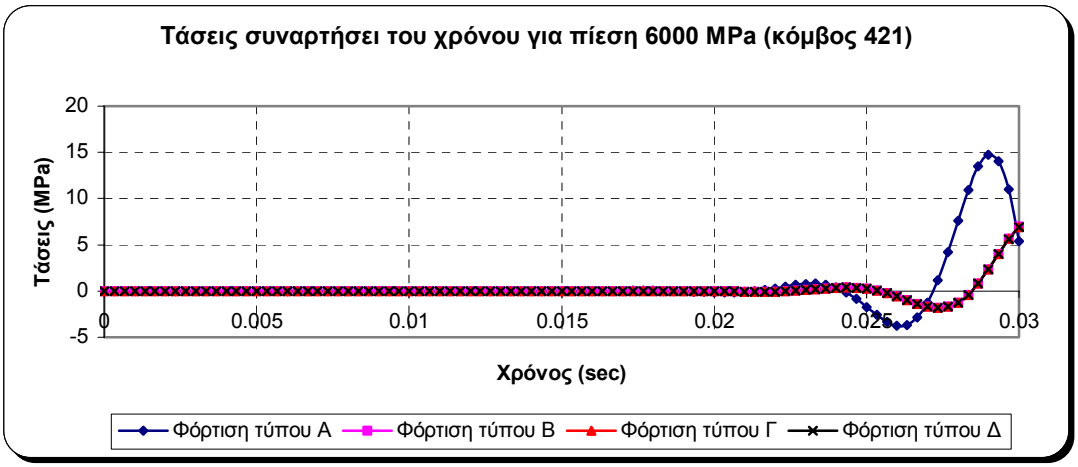
Γράφημα 6.19: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



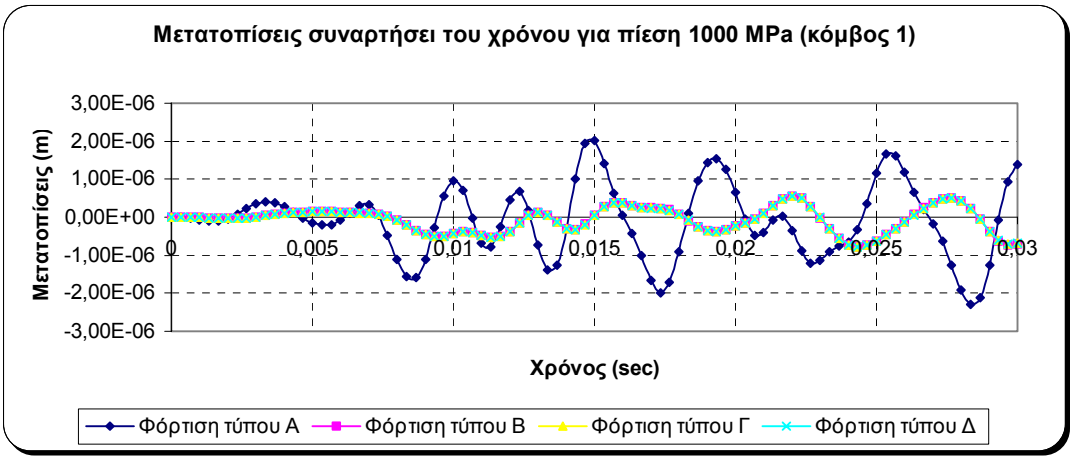
Γράφημα 6.20: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



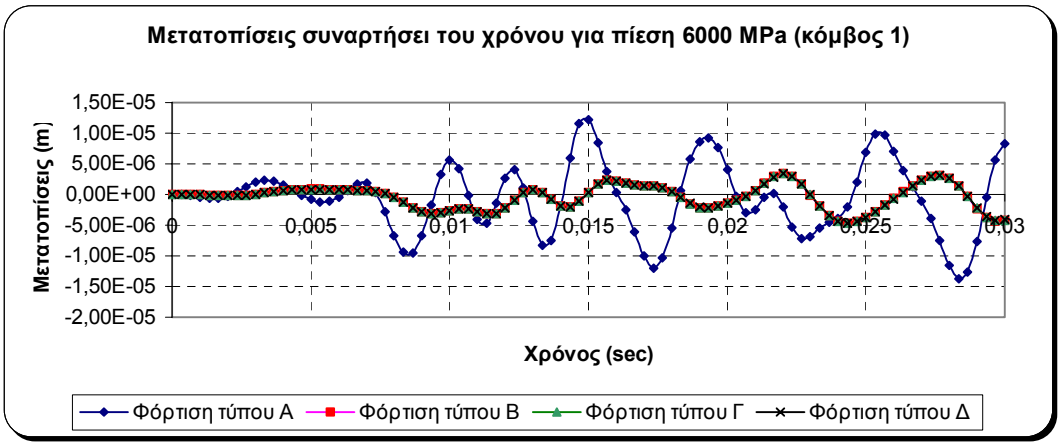
Γράφημα 6.21: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



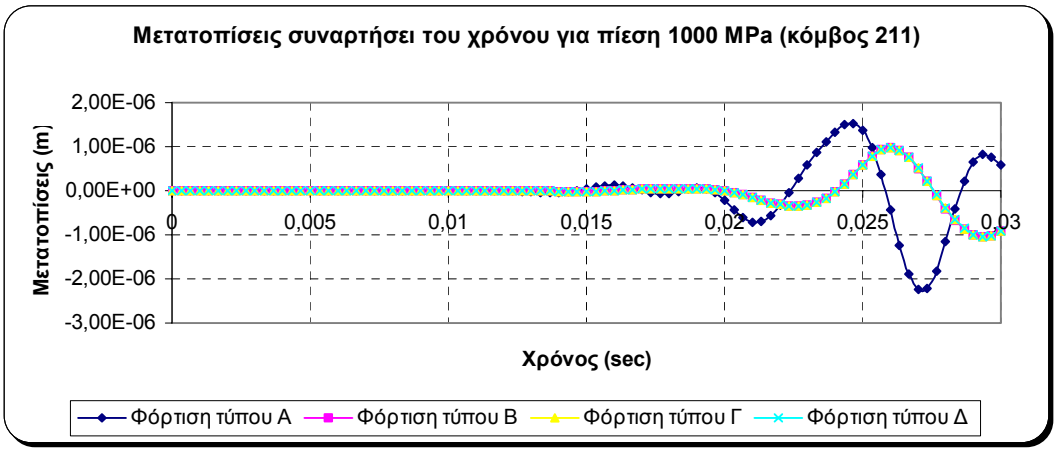
Γράφημα 6.22: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



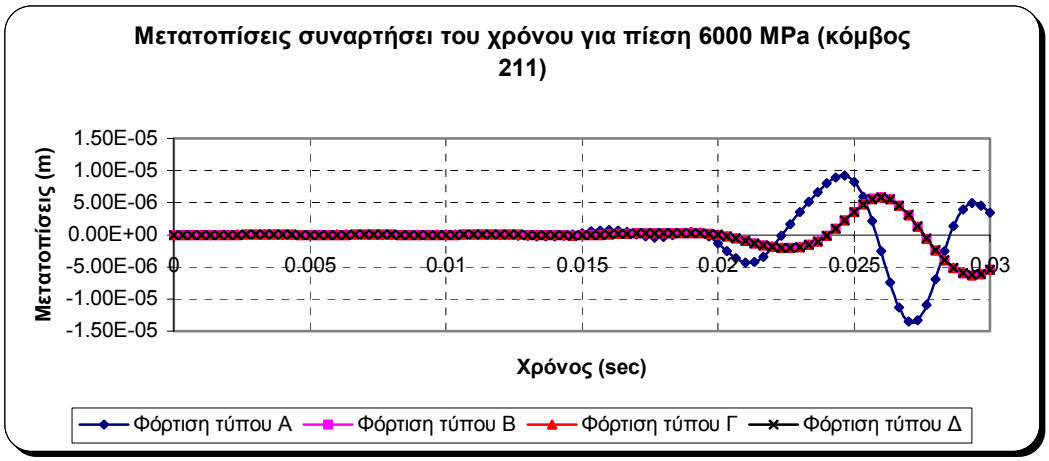
Γράφημα 6.23: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



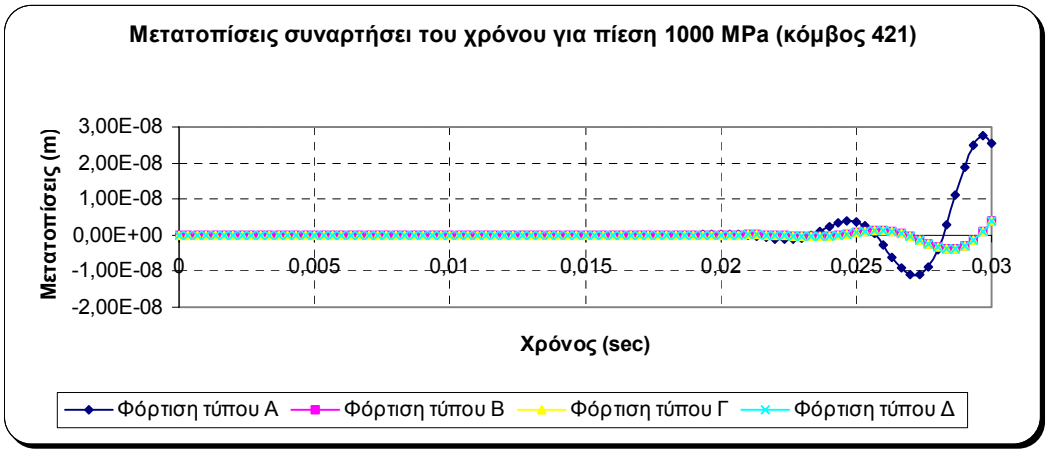
Γράφημα 6.24: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



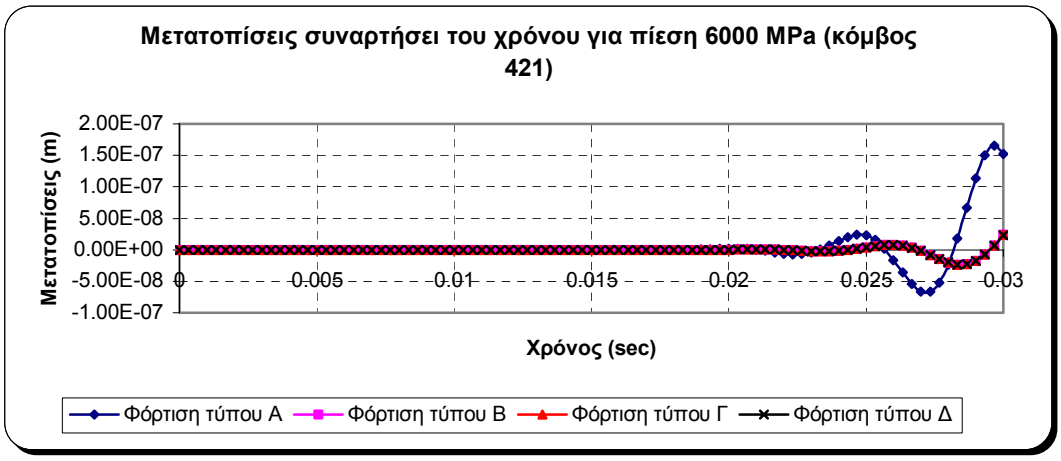
Γράφημα 6.25: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.26: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.27: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



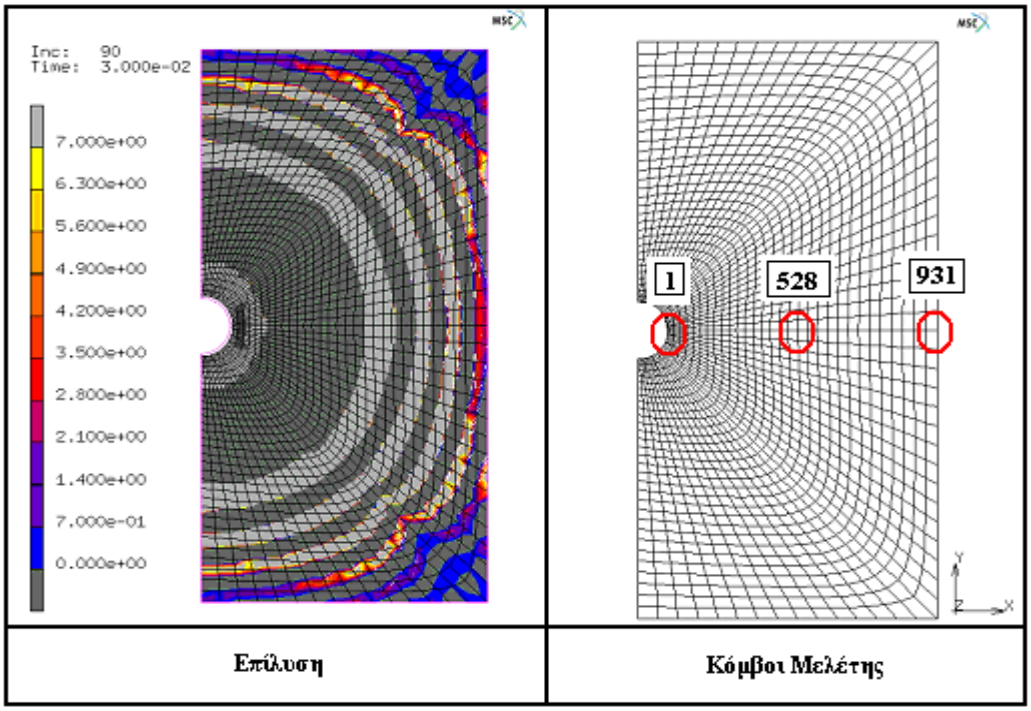
Γράφημα 6.28: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Από το σχήμα 6.12 της επίλυσης, φαίνεται καθαρά το θλιπτικό κύμα που προσκρούει στην ελεύθερη επιφάνεια και η επιστροφή του πίσω ως εφελκυστικό
- Τα γραφήματα των τάσεων και των μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου έχουν την ίδια μορφή για τις πιέσεις 1000 MPa και 6000 MPa, υπάρχει αλλαγή όπως αναμενόταν στην τάξη μεγέθους
- Στους κόμβους πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια φαίνεται η εφελκυστική δράση του κύματος και σε τάξη μεγέθους ικανή για αστοχία του υλικού σε εφελκυσμό.
- Στα γραφήματα των μετατοπίσεων φαίνεται ο τρόπος ταλάντωσης του κάθε κόμβου μελέτης στην χρονική στιγμή που φτάνει το τασικό κύμα σε αυτούς.
- Οι τάσεις και οι μετατοπίσεις για τους τύπους φόρτισης Β, Γ και Δ παρουσιάζουν την ίδια μορφή.

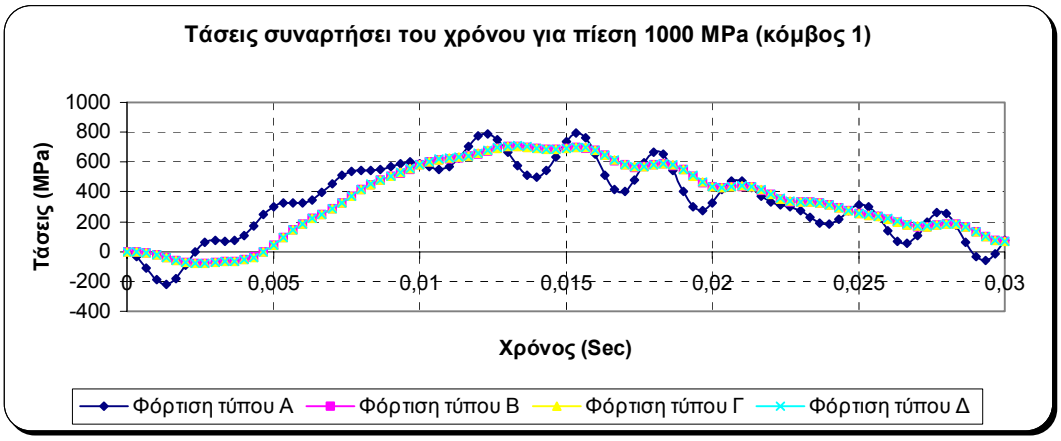
6.8.2 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (S=2B)

Η ελαστική επίλυση που προέκυψε καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνονται στο σχήμα 6.13:

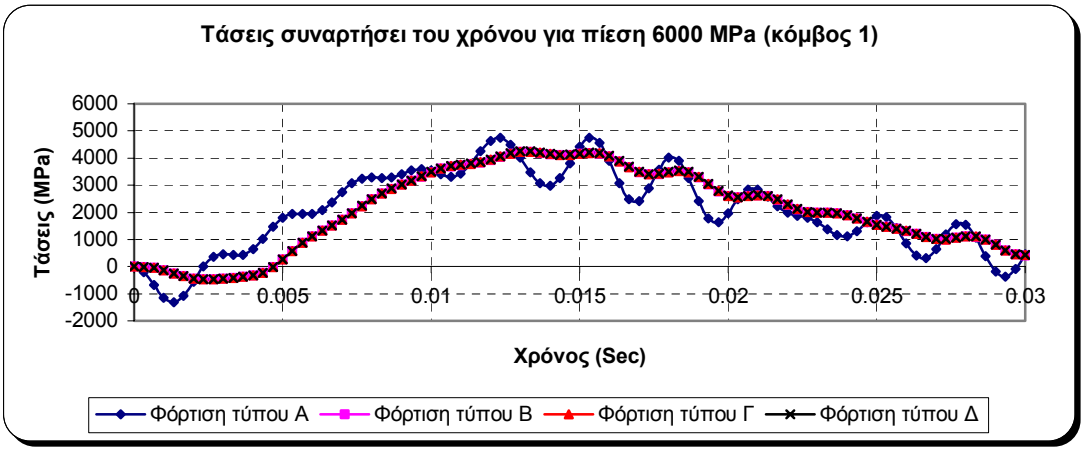


Σχήμα 6.13: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

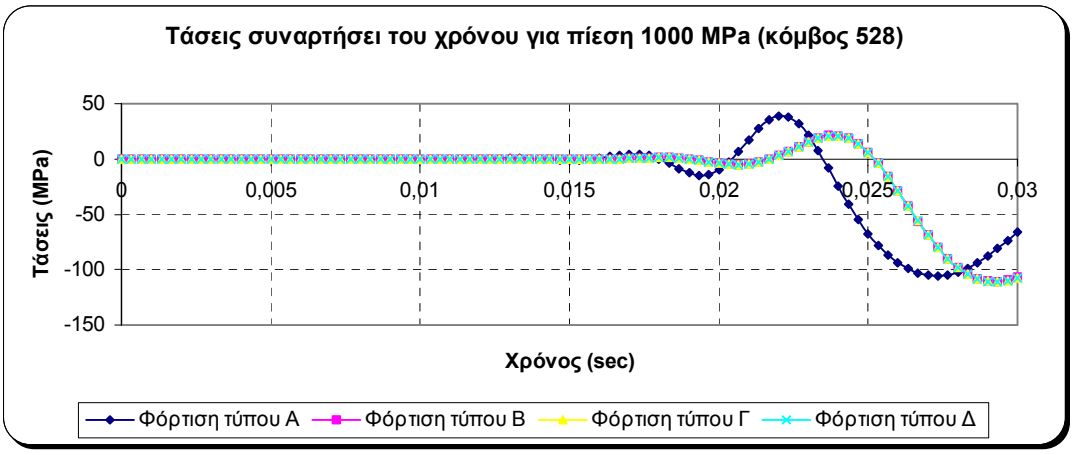
Από την επίλυση του σχήματος 6.13 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.29-6.40):



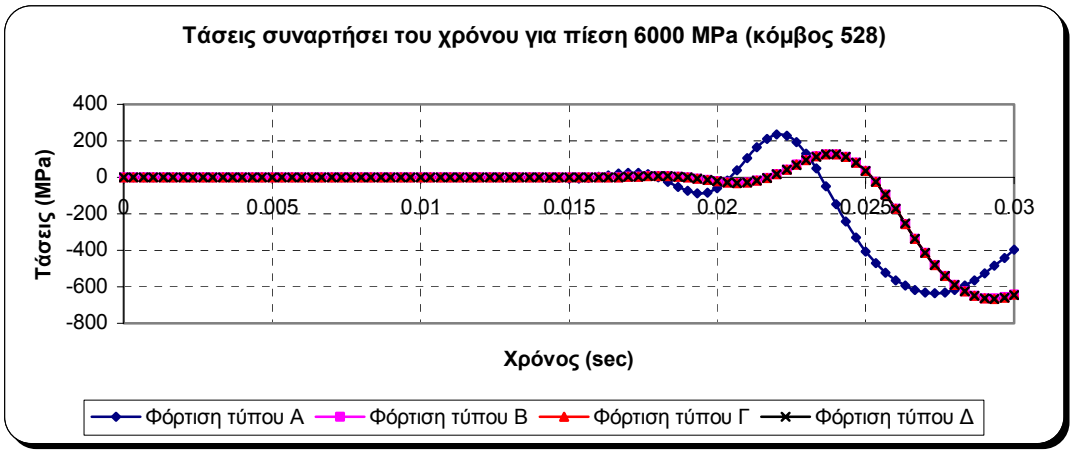
Γράφημα 6.29: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



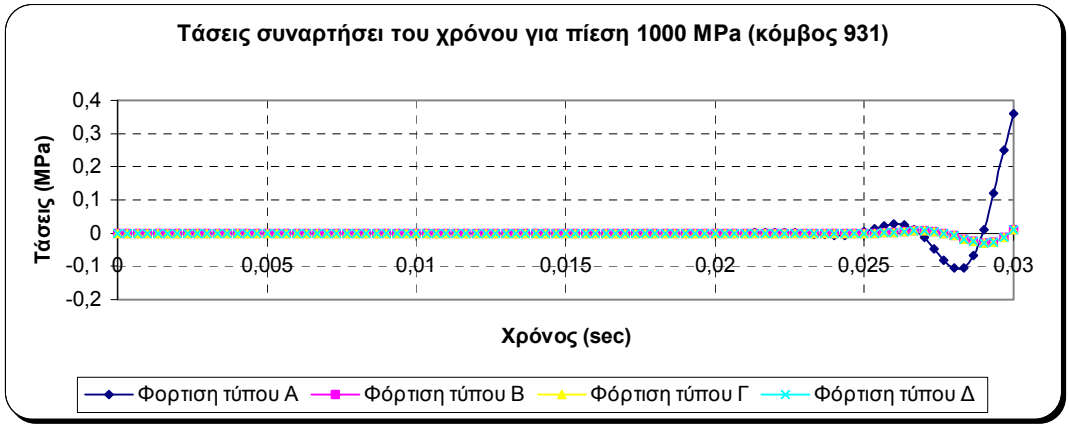
Γράφημα 6.30: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



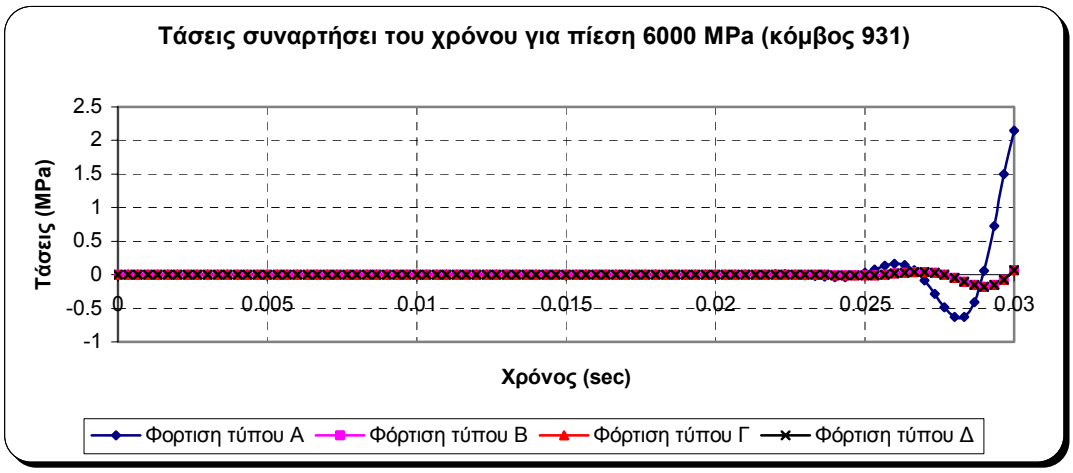
Γράφημα 6.31: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



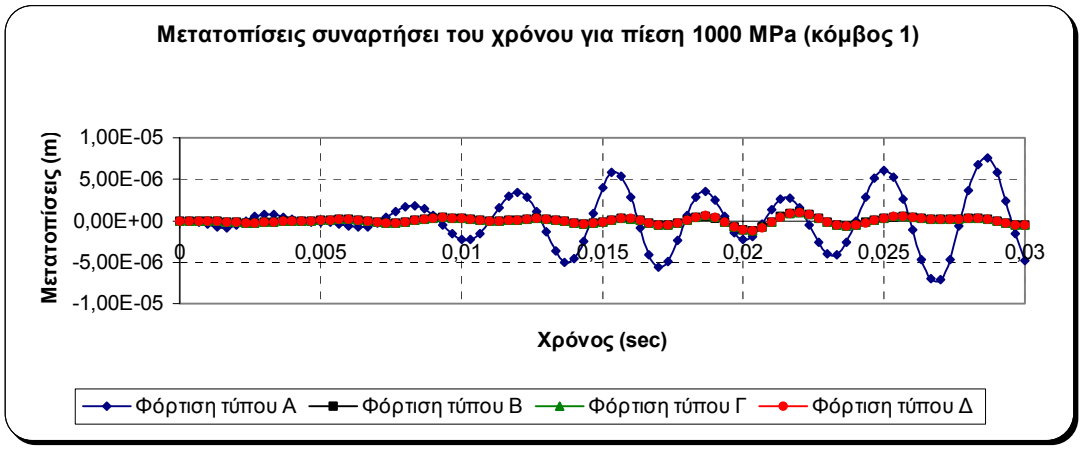
Γράφημα 6.32: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



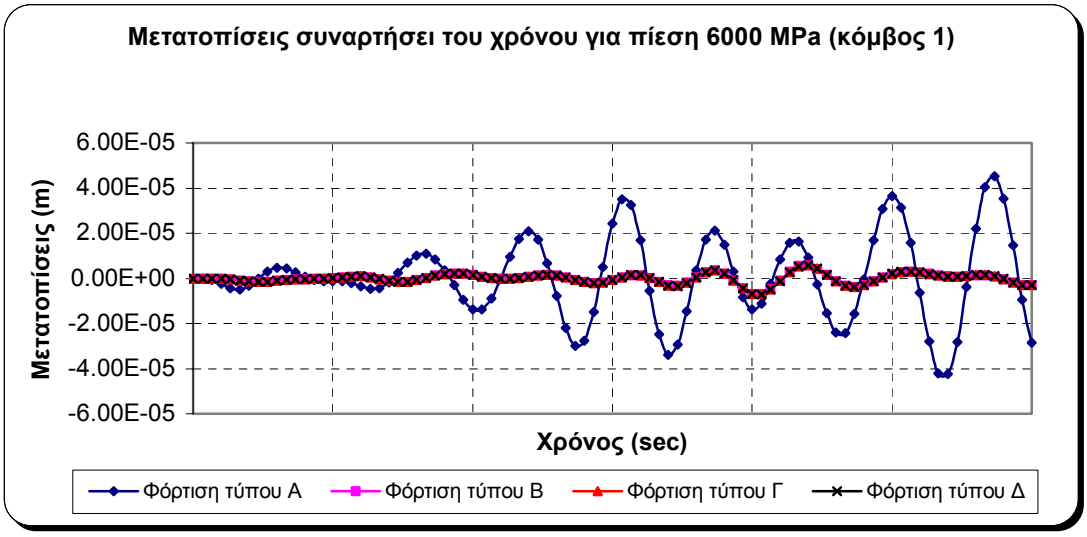
Γράφημα 6.33: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



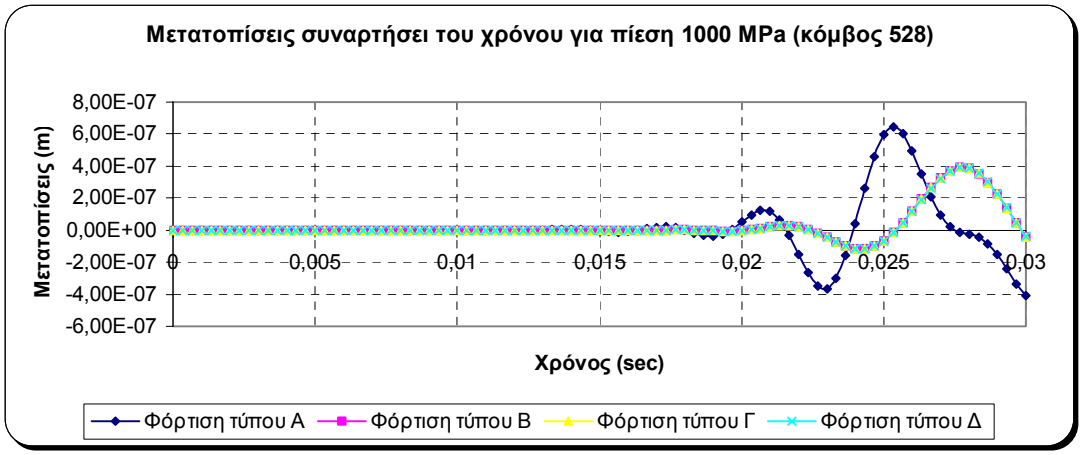
Γράφημα 6.34: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



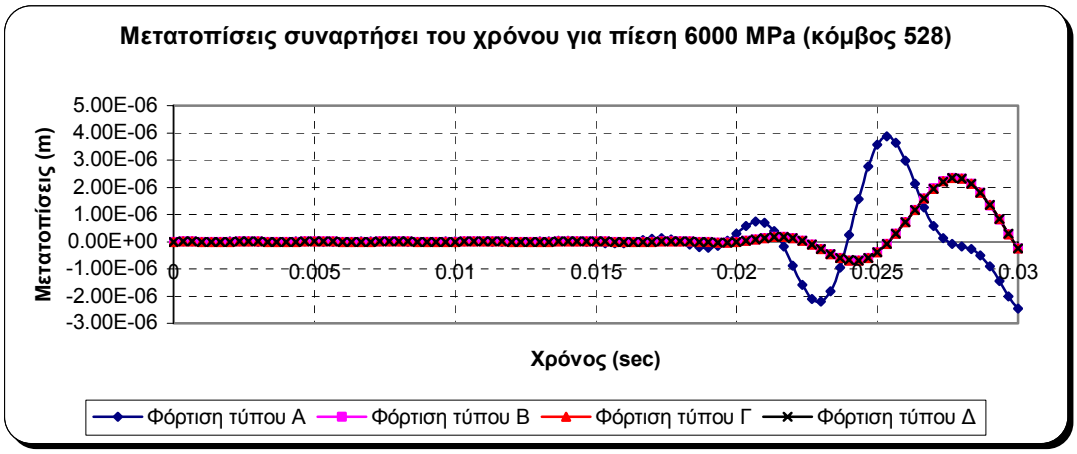
Γράφημα 6.35: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



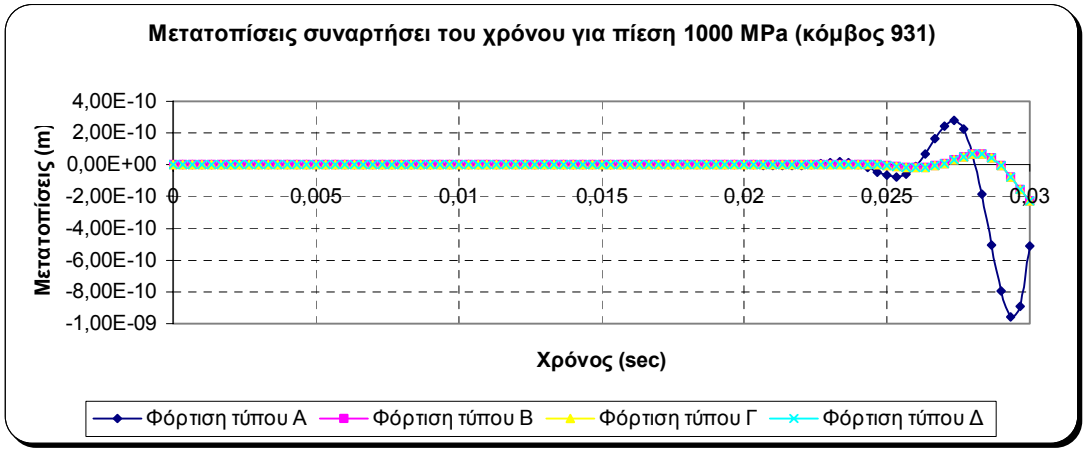
Γράφημα 6.36: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



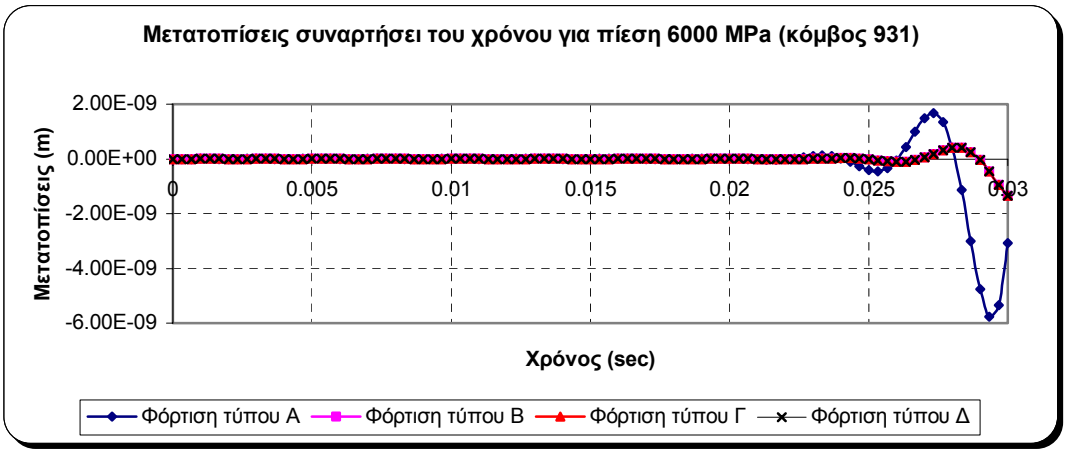
Γράφημα 6.37: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.38: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.39: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γ

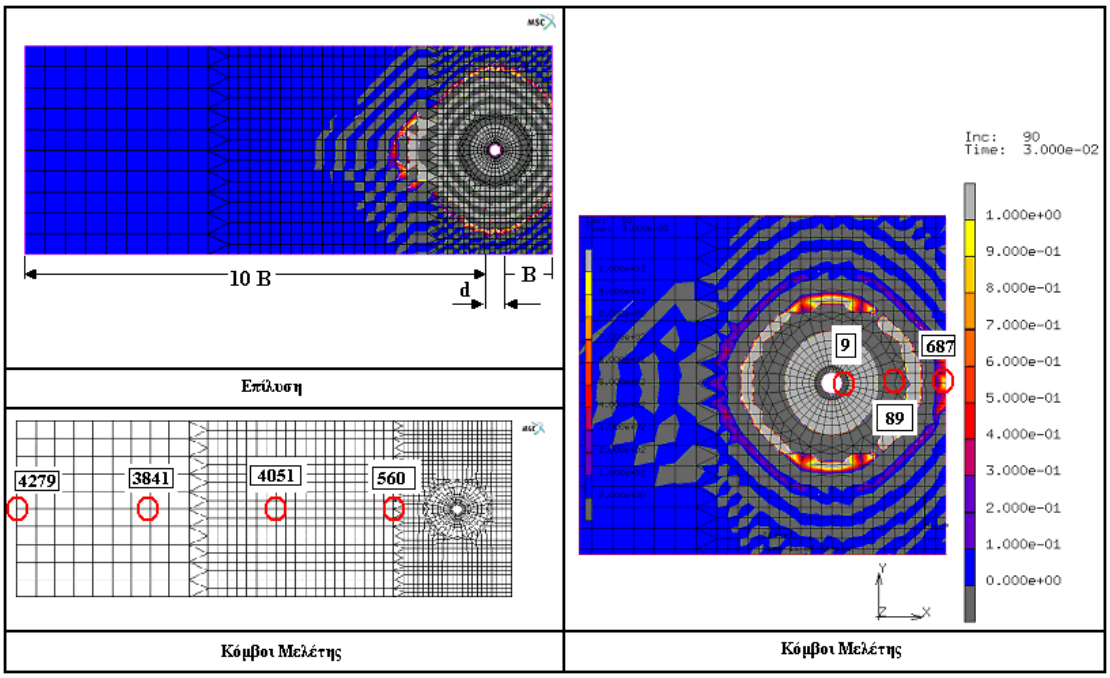
ράφημα 6.40: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Όπως και πιο πριν, οι τύποι φόρτισης Β, Γ και Δ δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές οπότε για σκοπούς σύγκρισης στα επόμενα γραφήματα θα δίνονται οι φορτίσεις τύπου Α και Γ που είναι οι πιο αντιπροσωπευτικοί τύποι φόρτισης ενός διατρήματος
- Τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου για τις πιέσεις 1000 MPa και 6000 MPa παρουσιάζουν την ίδια μορφή με διαφοροποιημένη την τάξη μεγέθους, για αυτό και στη συνέχεια επιλέγηκε να δίνονται τα γραφήματα της πίεσης των 6000 MPa

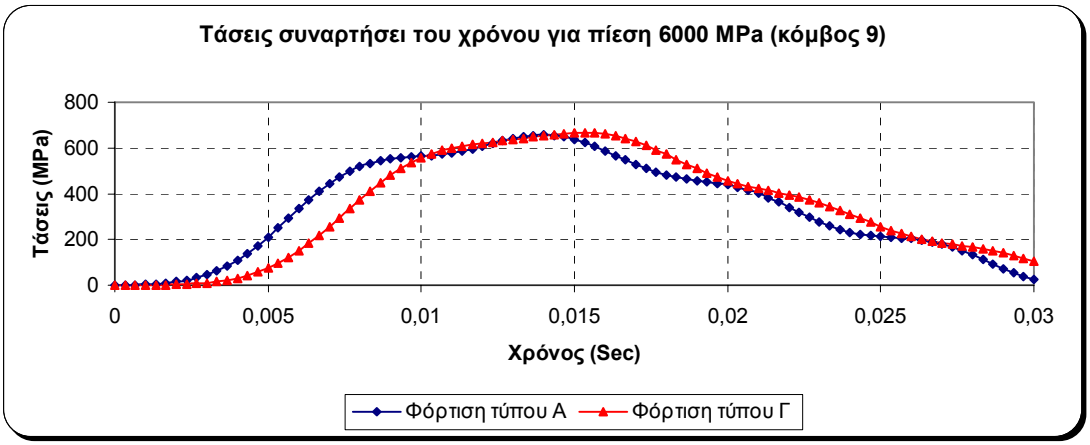
6.8.3 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (Εξάπλωση τάσεων σε άπειρο μέσο)

Η ελαστική επίλυση που προέκυψε καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνονται στο σχήμα 6.14:

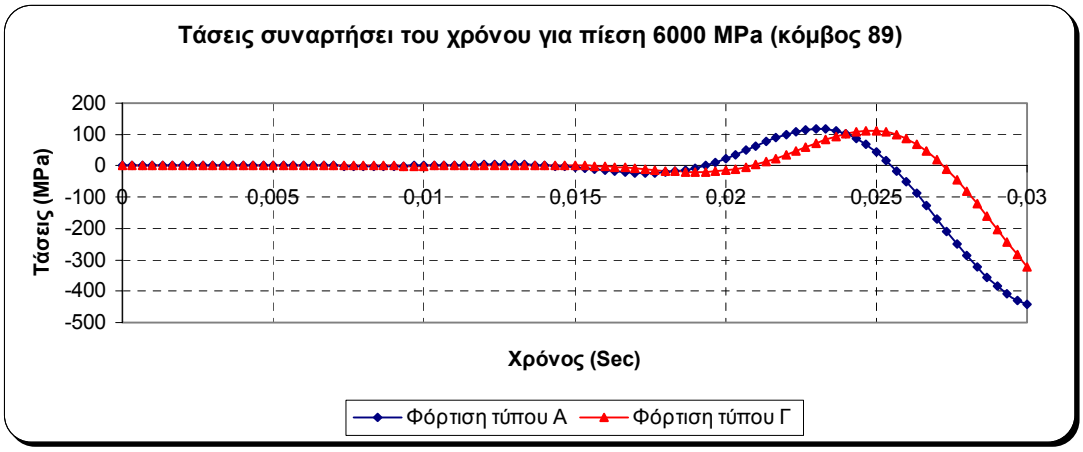


Σχήμα 6.14: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

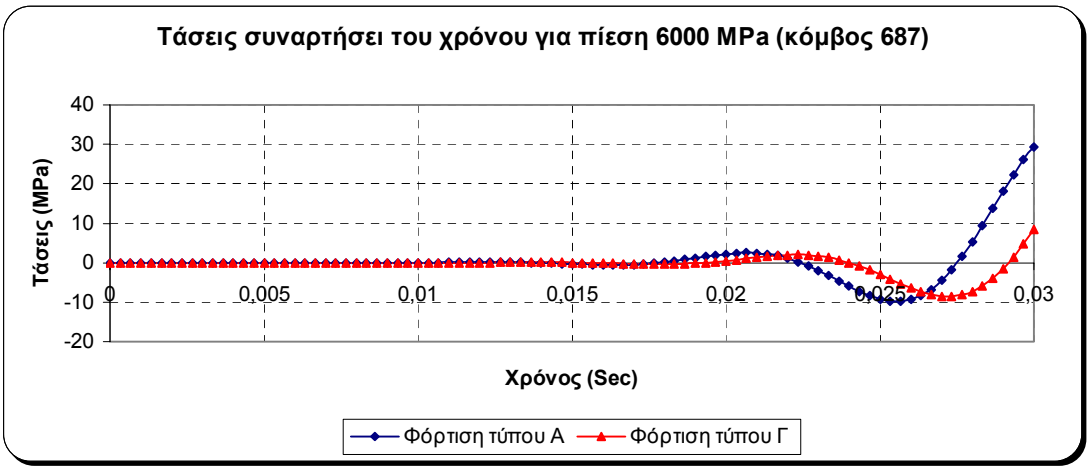
Από την επίλυση του σχήματος 6.14 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.41-6.54):



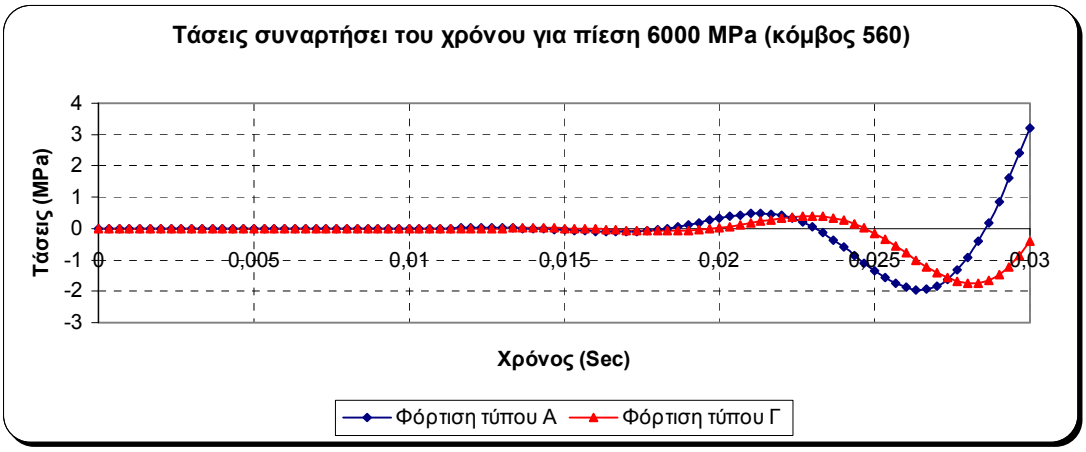
Γράφημα 6.41: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



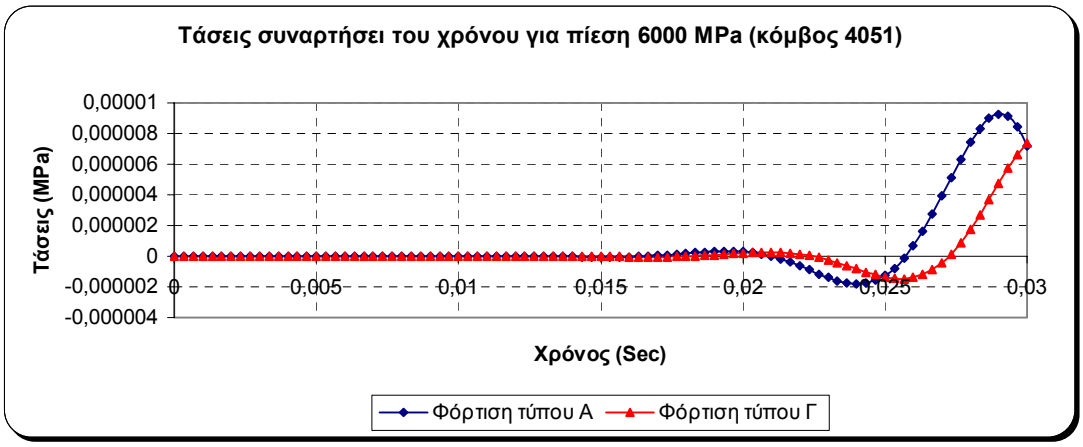
Γράφημα 6.42: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



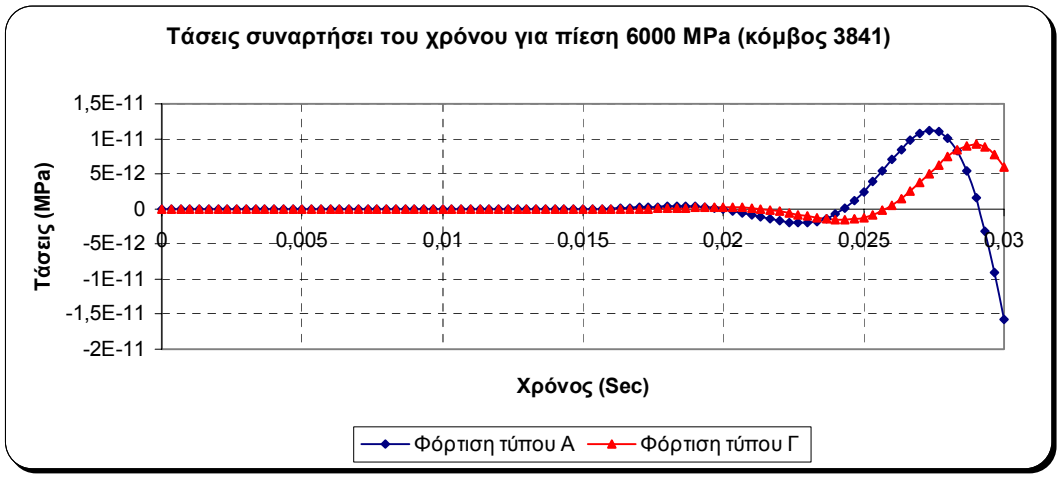
Γράφημα 6.43: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



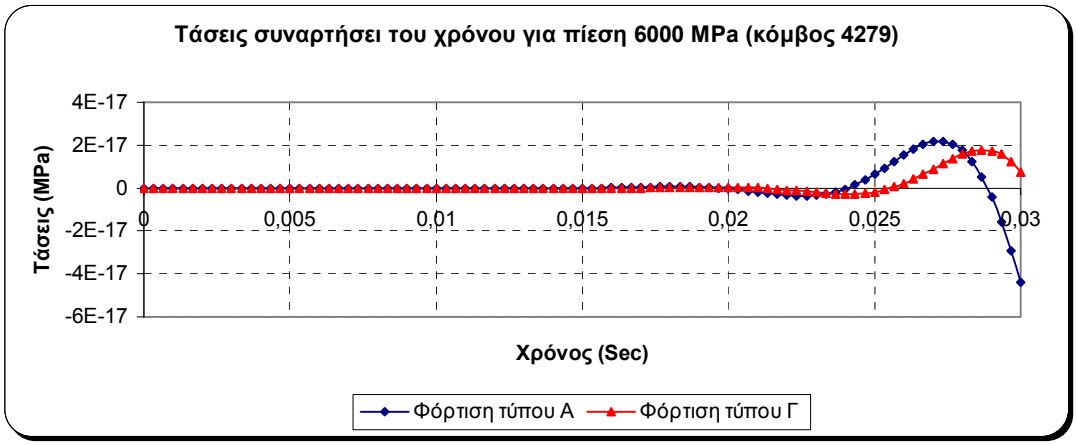
Γράφημα 6.44: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



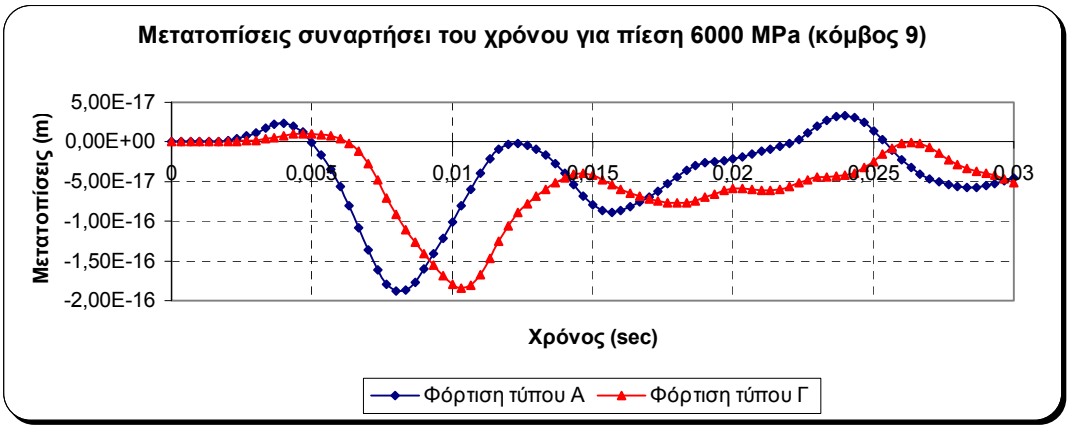
Γράφημα 6.45: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



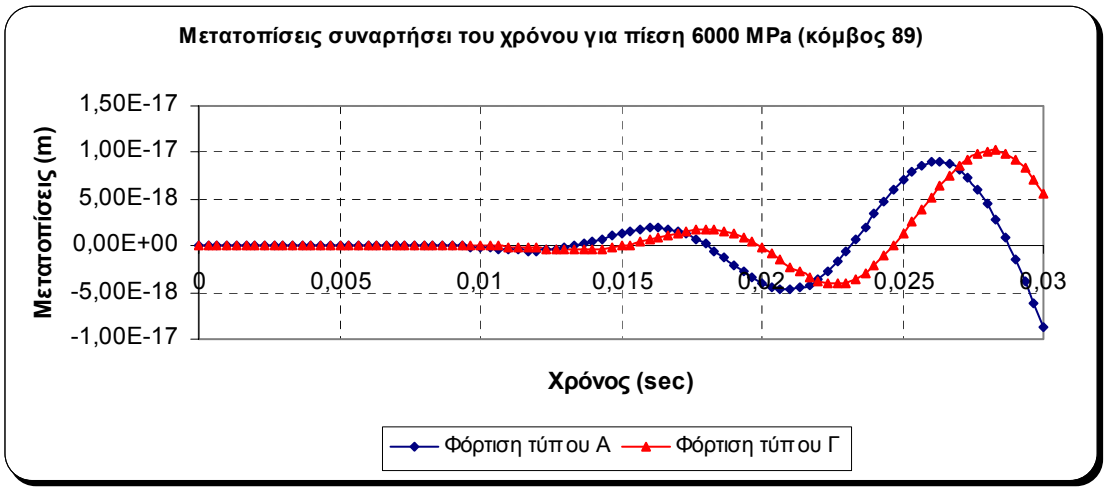
Γράφημα 6.46: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



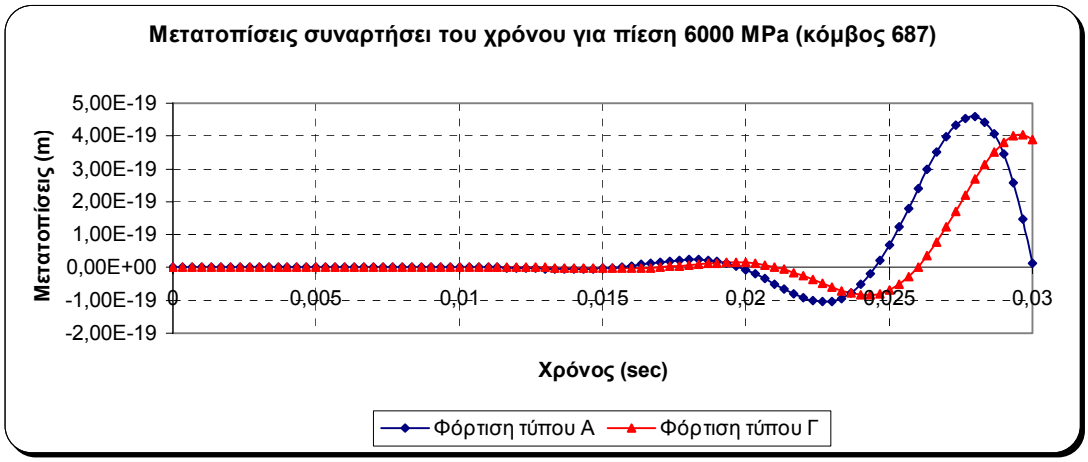
Γράφημα 6.47: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



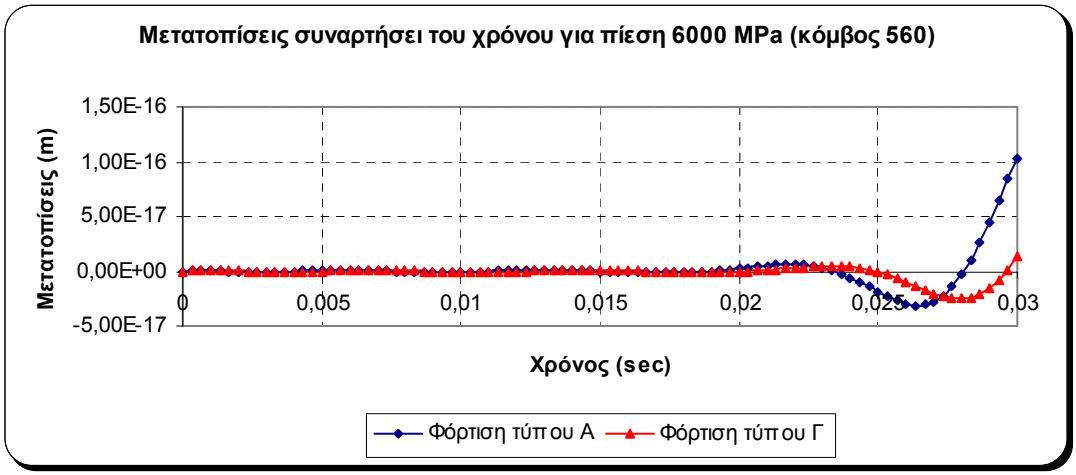
Γράφημα 6.48: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



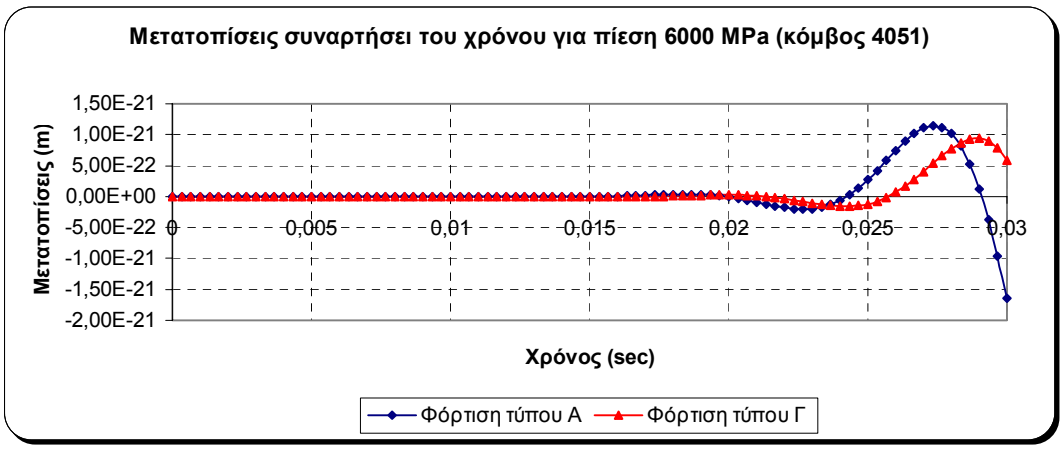
Γράφημα 6.49: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



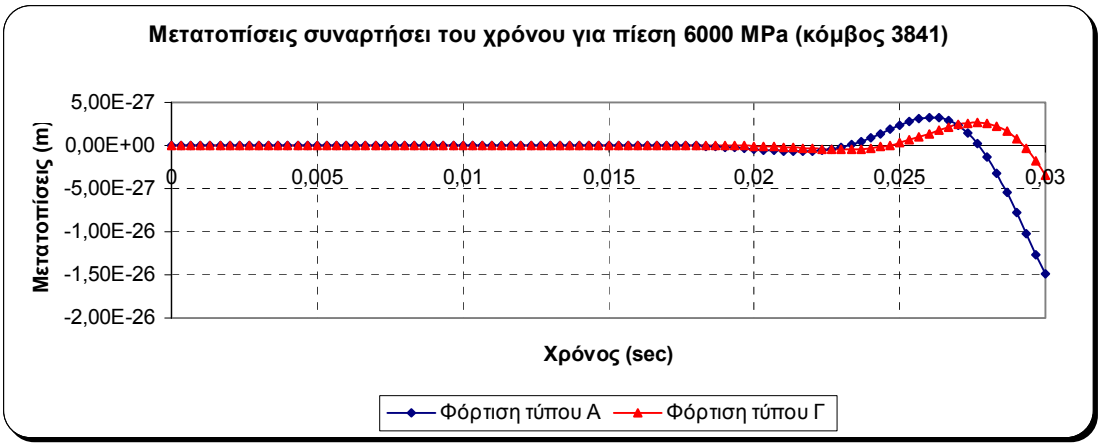
Γράφημα 6.50: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



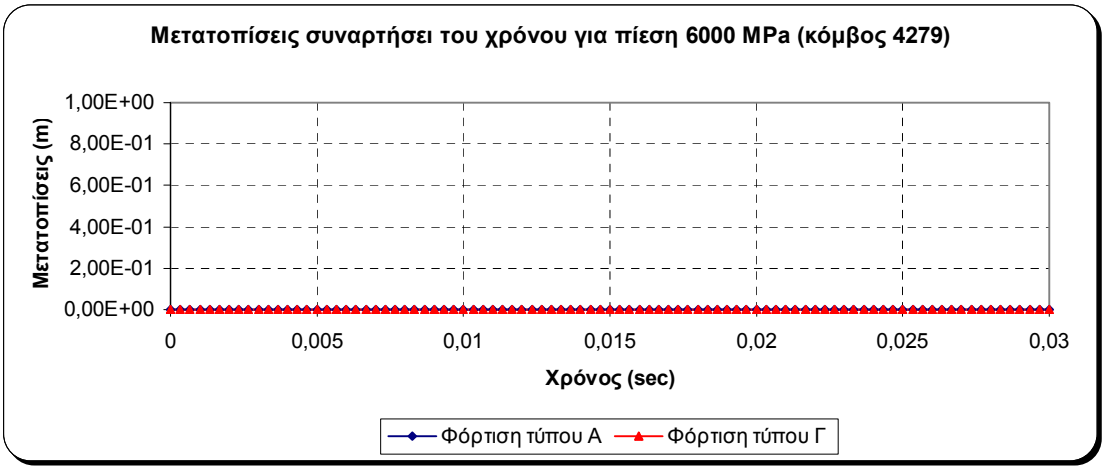
Γράφημα 6.51: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.52: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.53: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.54: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

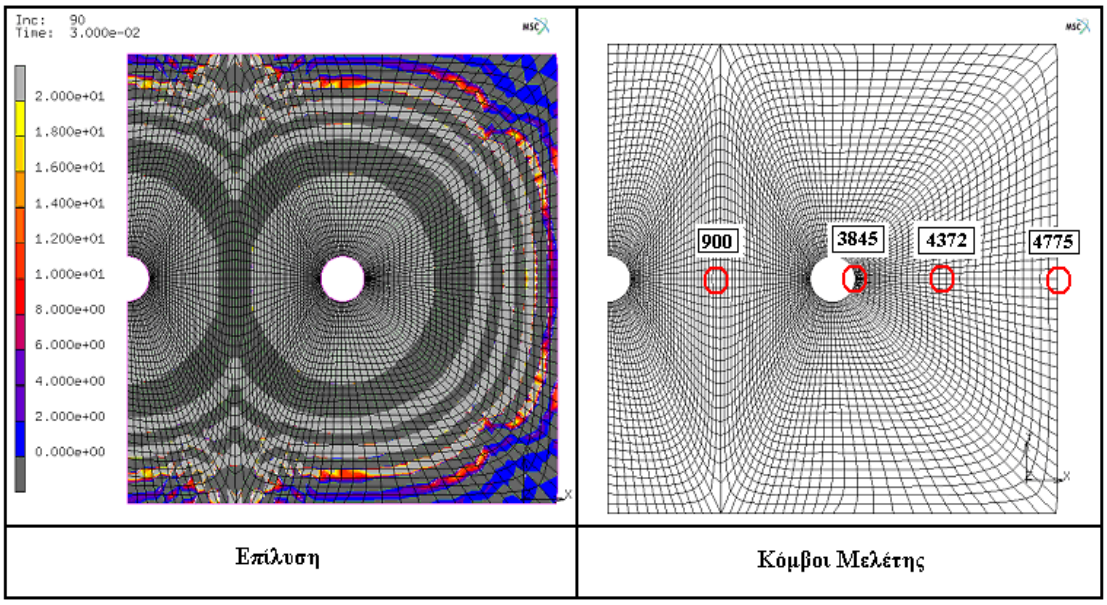
Παρατηρήσεις:

- Η μορφή των καμπύλων των δυο φορτίσεων είναι ίδιας μορφής.
- Στα γραφήματα των τάσεων και των μετατοπίσεων, η καμπύλη της φόρτισης τύπου Α είναι πιο απότομη και λίγο μεγαλύτερης σε μέγεθος. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι η φόρτιση τύπου Α είναι πιο βίαιη σε σχέση με την φόρτιση τύπου Γ.
- Στο γράφημα των μετατοπίσεων του κόμβου 4279 που είναι ο συνοριακός κόμβος δεν παρουσιάζει ταλάντωση αλλά φαίνεται από το γράφημα των τάσεων ότι δέχεται τάσεις. Αυτό είναι λογικό διότι στο κόμβο αυτό έχουν επιβληθεί συνοριακές συνθήκες (κύλιση κατά χ άξονα).

- Στο μοντέλο αυτό μελετήθηκε η εξάπλωση των τάσεων. Από την μελέτη του ελαστικού υλικού φαίνεται ότι το πέτρωμα δέχεται τάσεις ακόμα και 10 φορτία απόσταση πίσω από το διάτρημα αλλά πολύ μικρού μεγέθους. Επίσης οι κόμβοι ταλαντώνονται σε μεγάλη απόσταση από το διάτρημα αλλά σε πολύ μικρή τάξη μεγέθους.

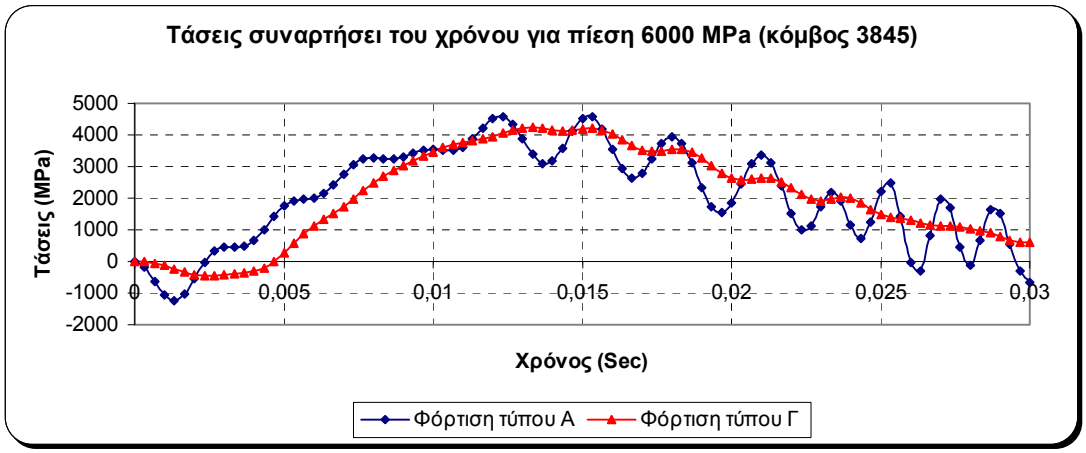
6.8.4 Μοντελοποίηση συμμετρίας πολλαπλής σειράς έναυσης ελαστικού υλικού (S=2B)

Η ελαστική επίλυση που προέκυψε καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνονται στο σχήμα 6.15:

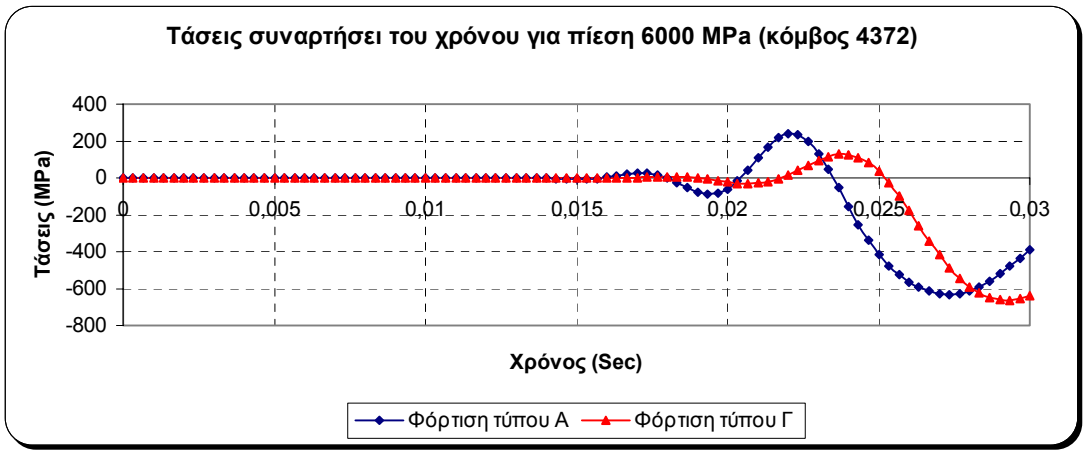


Σχήμα 6.15: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

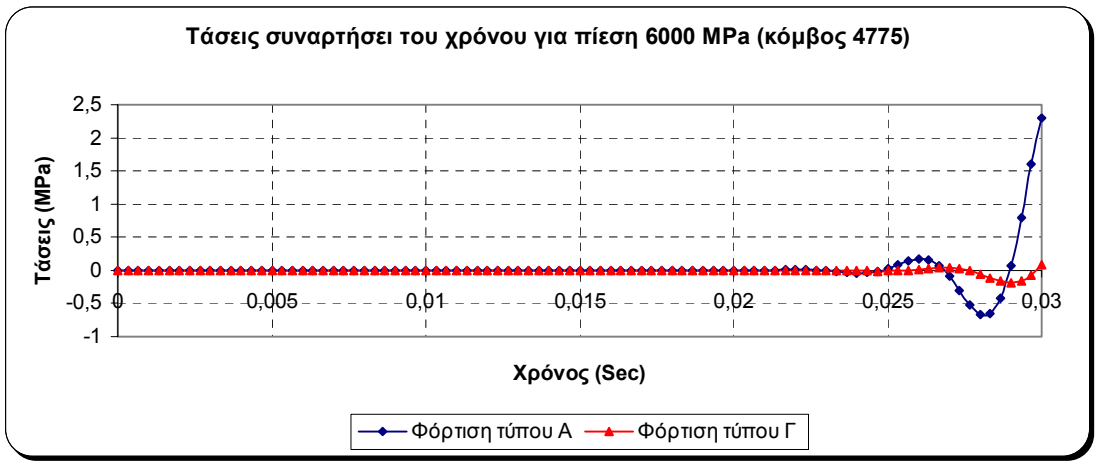
Από την επίλυση του σχήματος 6.15 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.55-6.62):



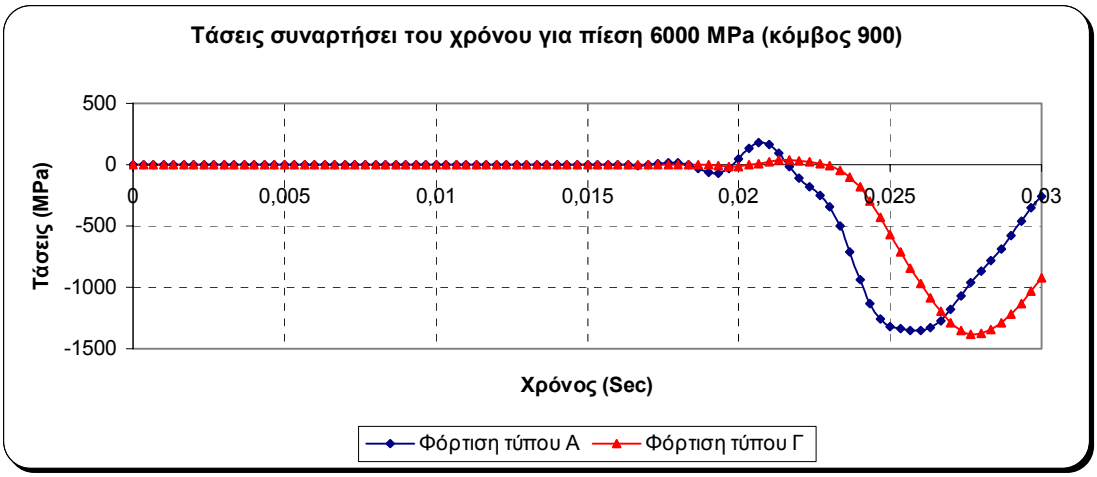
Γράφημα 6.55: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



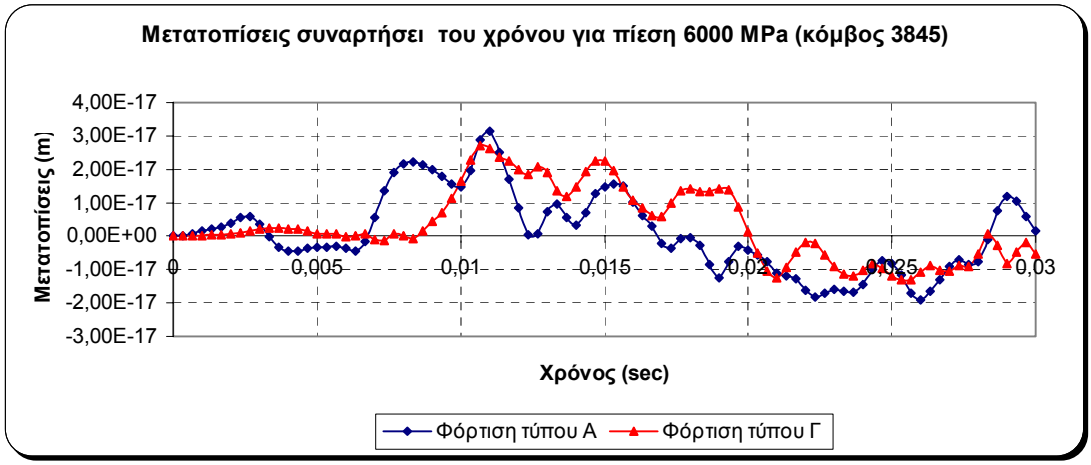
Γράφημα 6.56: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



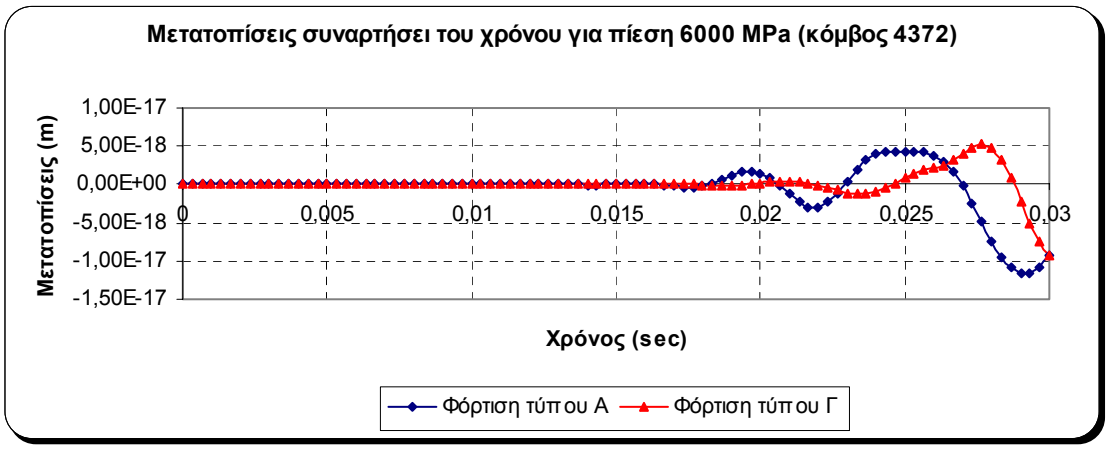
Γράφημα 6.57: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



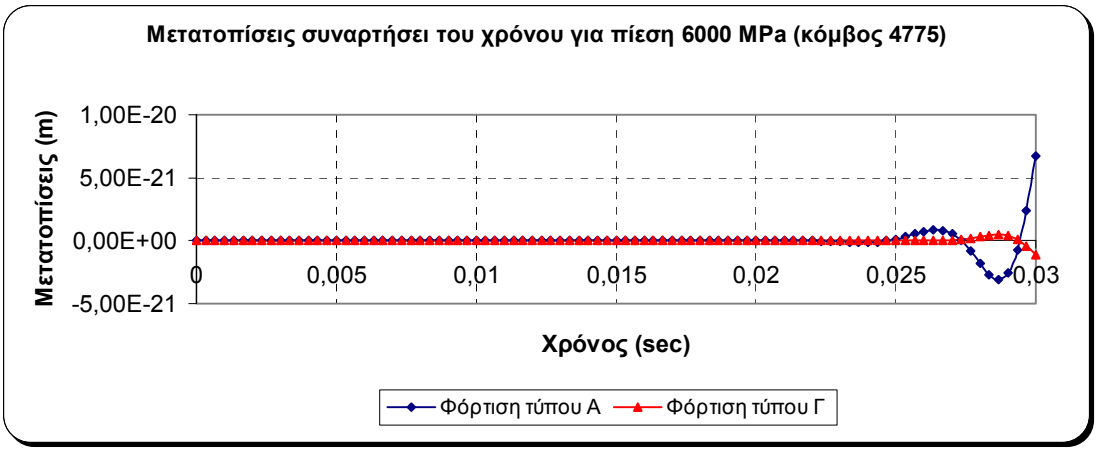
Γράφημα 6.58: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



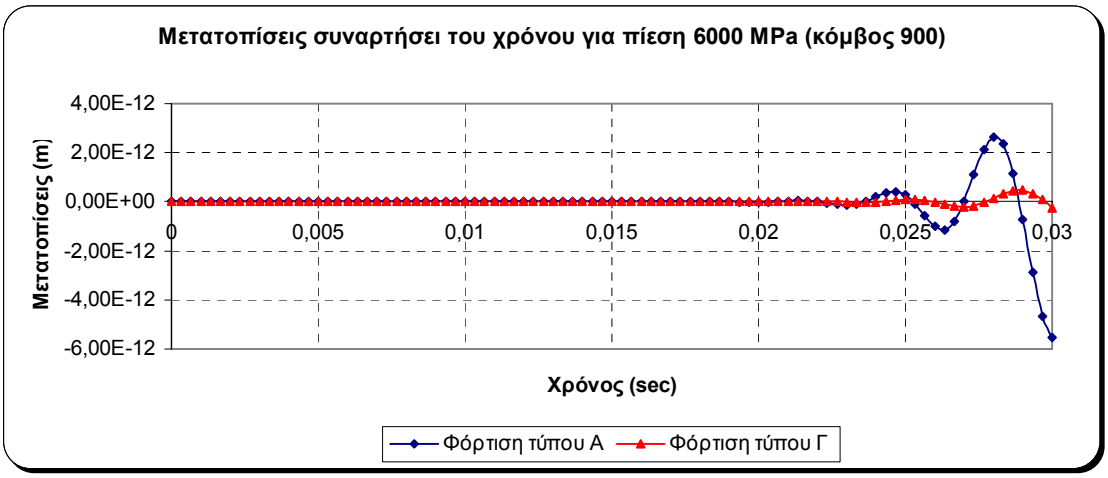
Γράφημα 6.59: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.60: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.61: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



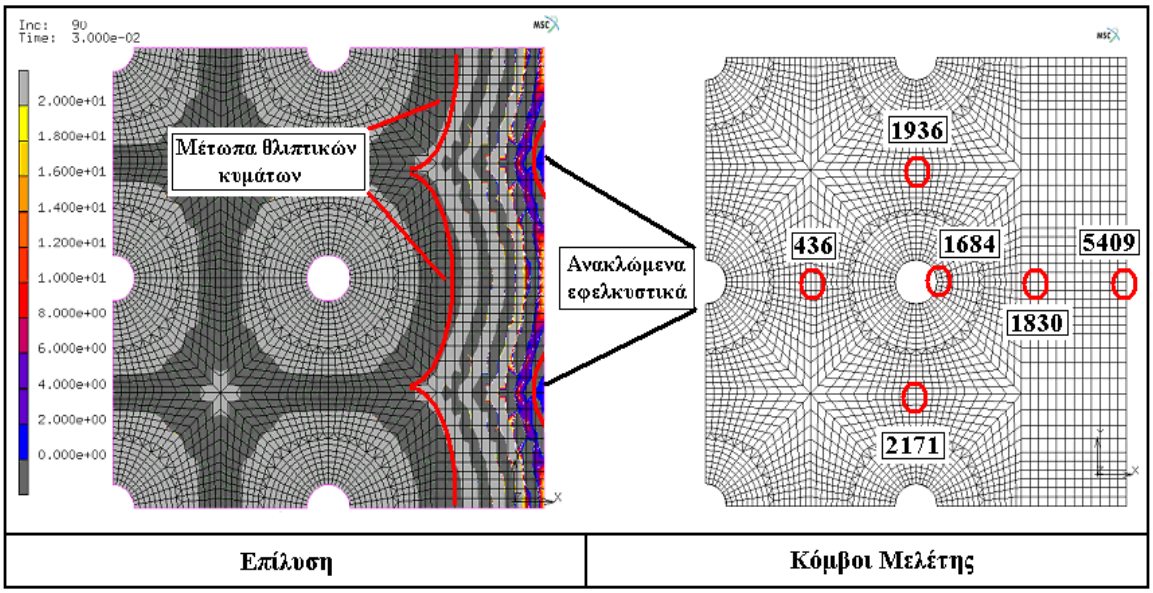
Γράφημα 6.62: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Στο μοντέλο αυτό μελετήθηκε η συμμετρία διπλής σειράς έναυσης. Από τις γραφικές παραστάσεις των τάσεων φαίνεται ότι η καμπύλη της φόρτισης τύπου Γ φτάνει σε μέγεθος την καμπύλη της φόρτισης τύπου Α που είναι πιο βίαιη. Αυτό δεν σημαίνει ότι οφείλεται στην αλληλεπίδραση των διατρημάτων.
- Οι μετατοπίσεις στους κόμβους μακριά από το διάτρημα δεν παρουσιάζουν αύξηση σε μέγεθος στις ταλαντώσεις. Αυτό ίσως να οφείλεται στην ύπαρξη απόσβεσης που εμφανίζεται από τον μεγάλο αριθμό στοιχείων στο μοντέλο.

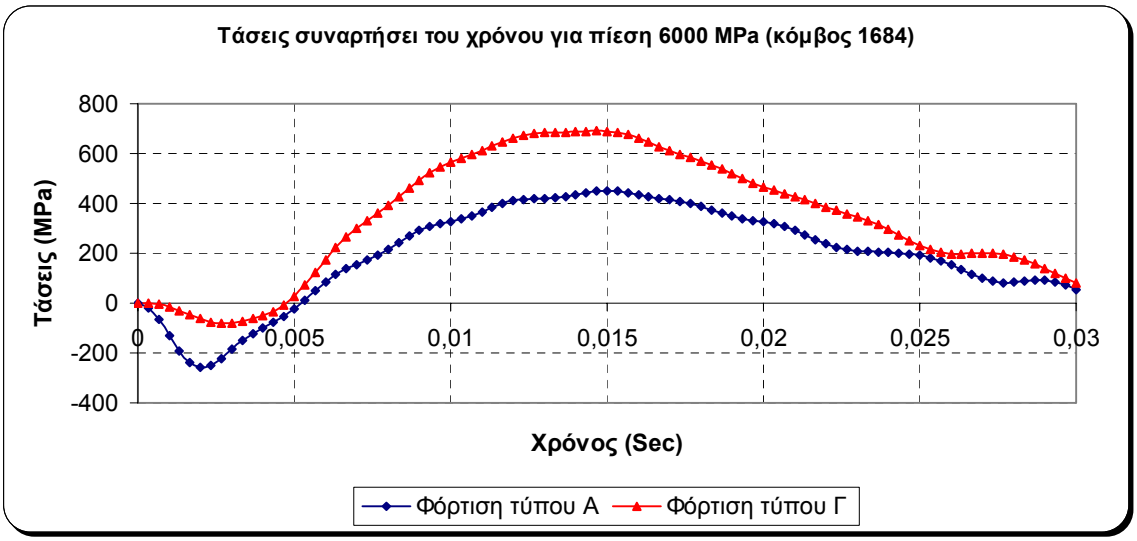
6.8.5 Μοντελοποίηση αλληλεπίδρασης πολλαπλής σειράς έναυσης ελαστικού υλικού (S=2B)

Η ελαστική επίλυση που προέκυψε καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνονται στο σχήμα 6.16:

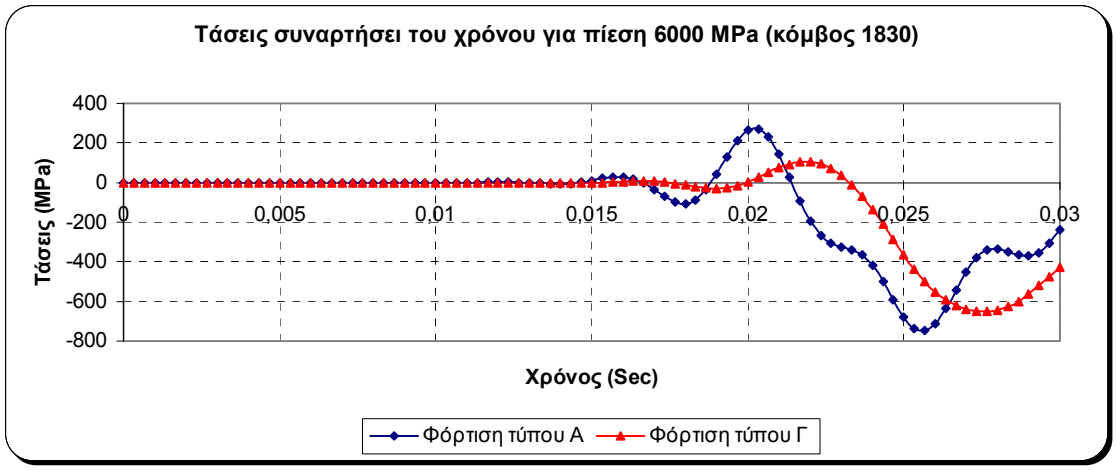


Σχήμα 6.16: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

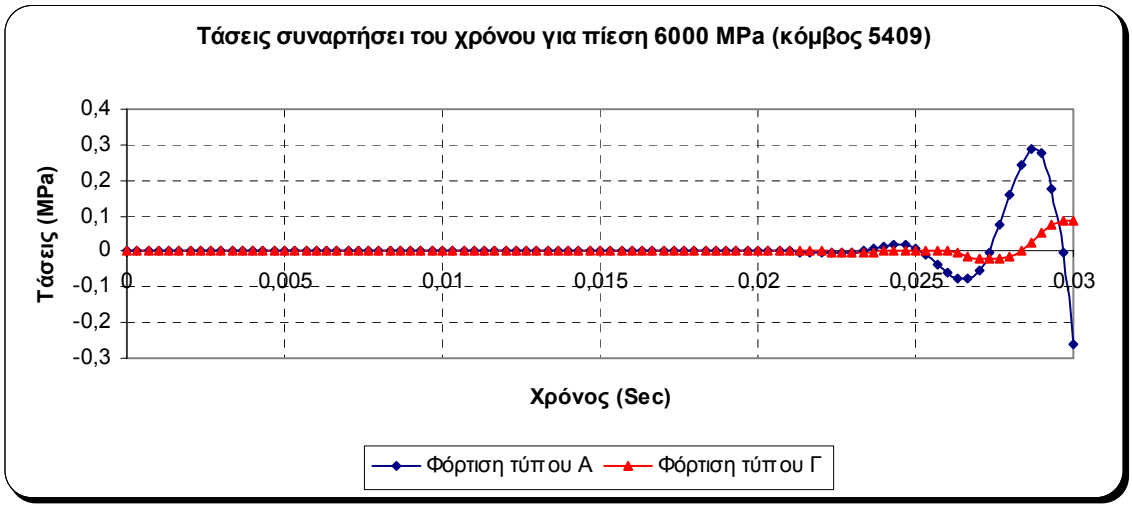
Από την επίλυση του σχήματος 6.16 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.63-6.74):



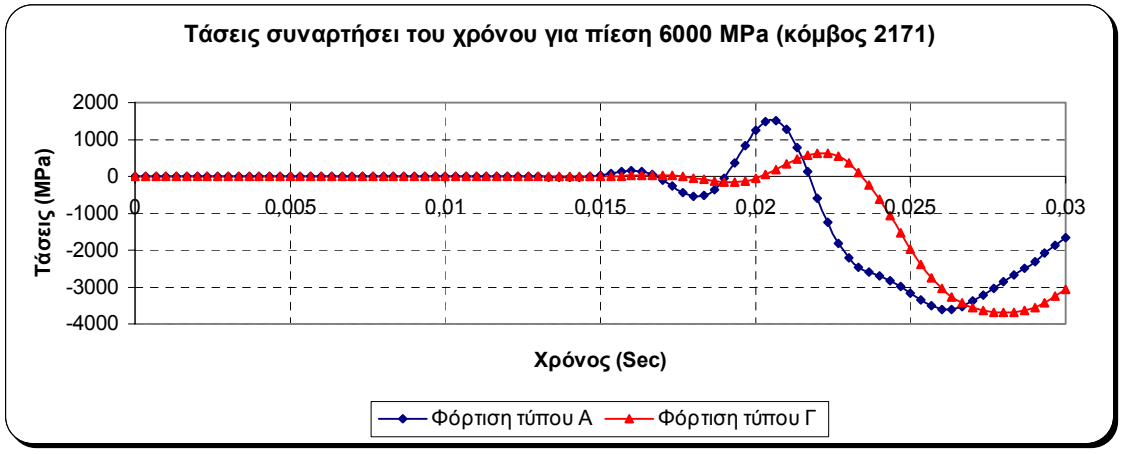
Γράφημα 6.63: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



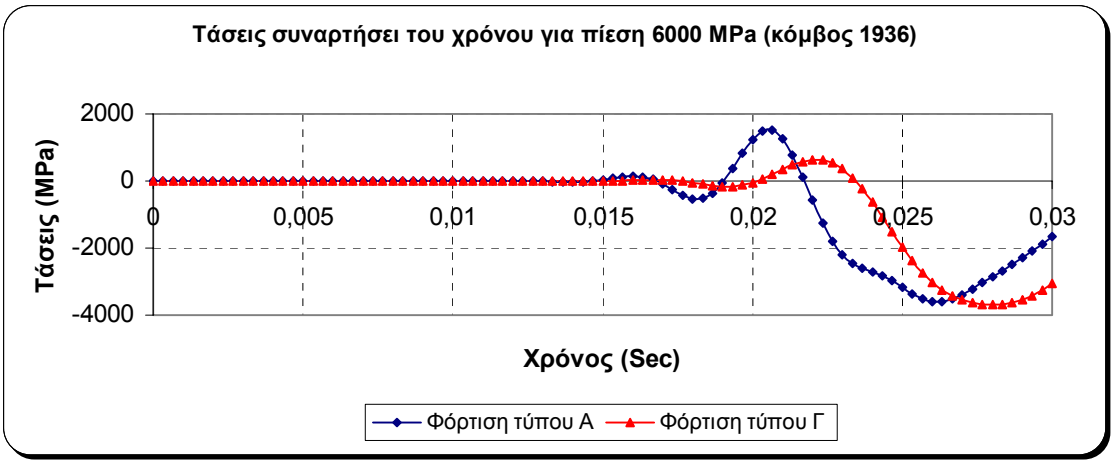
Γράφημα 6.64: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



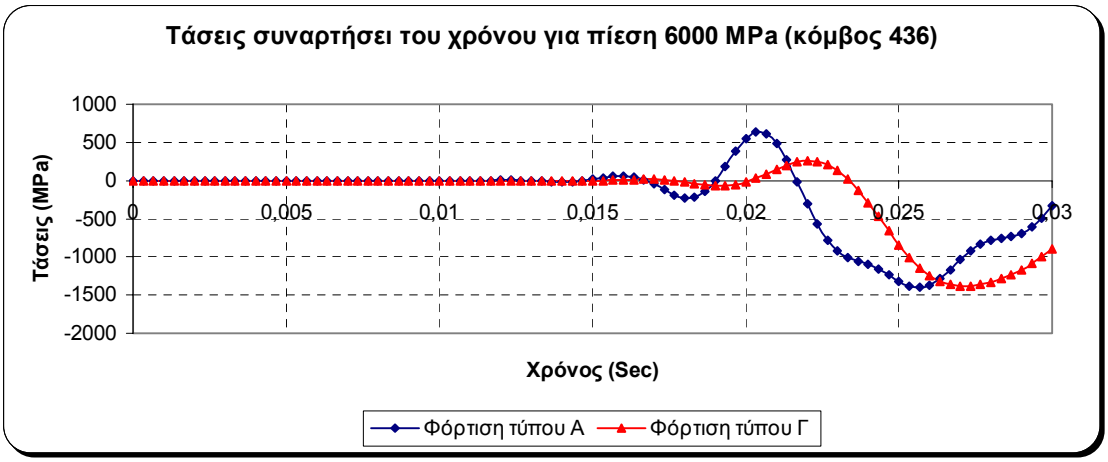
Γράφημα 6.65: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



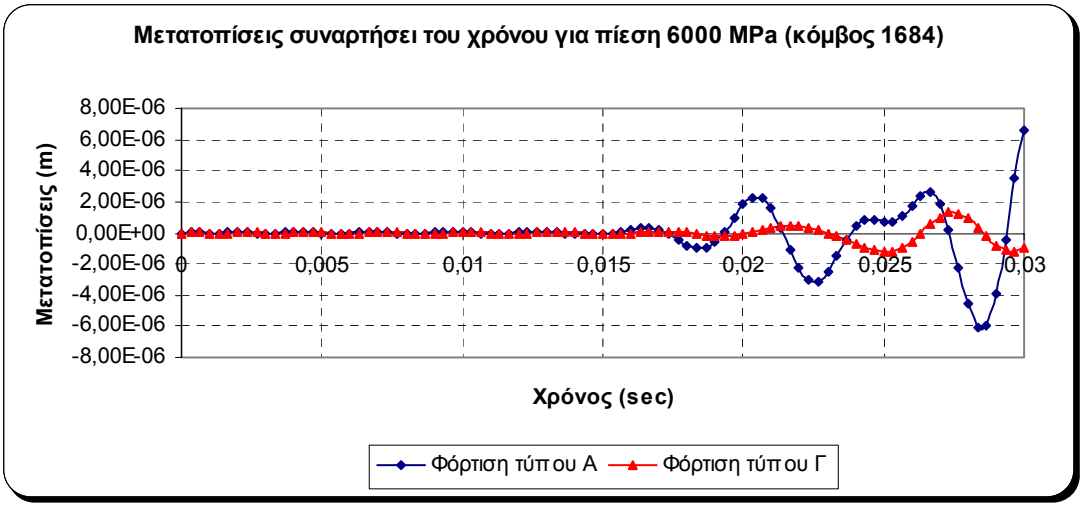
Γράφημα 6.66: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



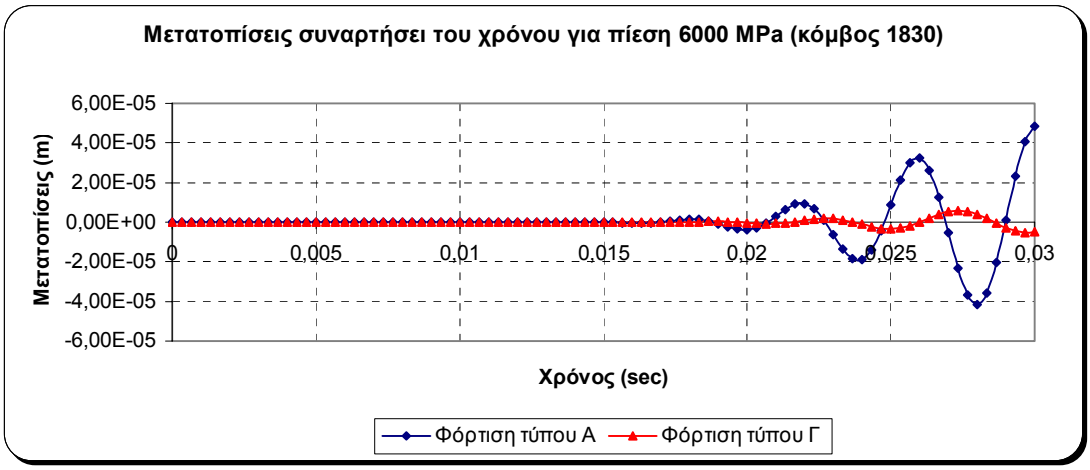
Γράφημα 6.67: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



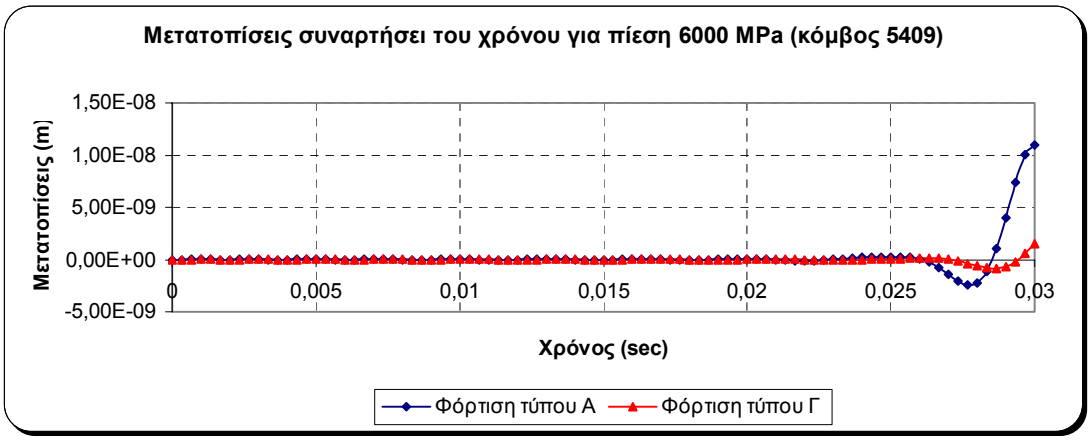
Γράφημα 6.68: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



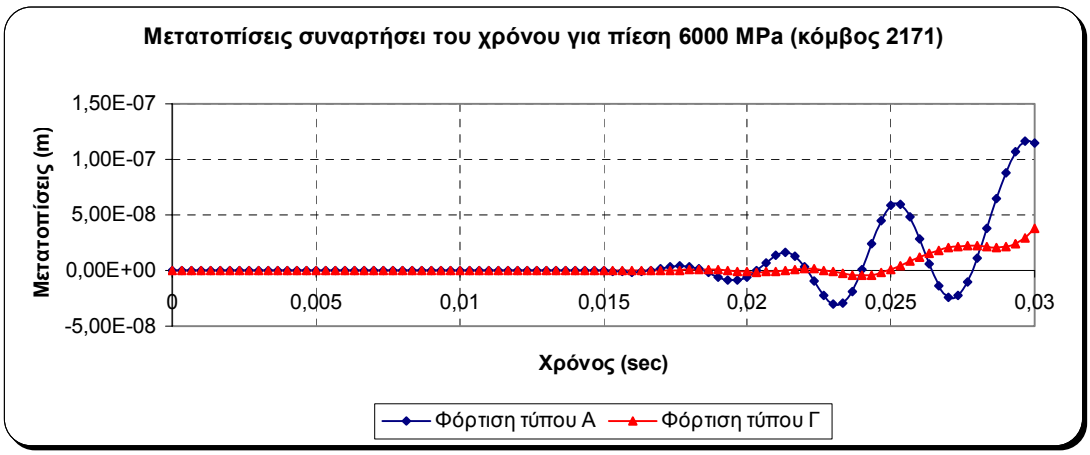
Γράφημα 6.69: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



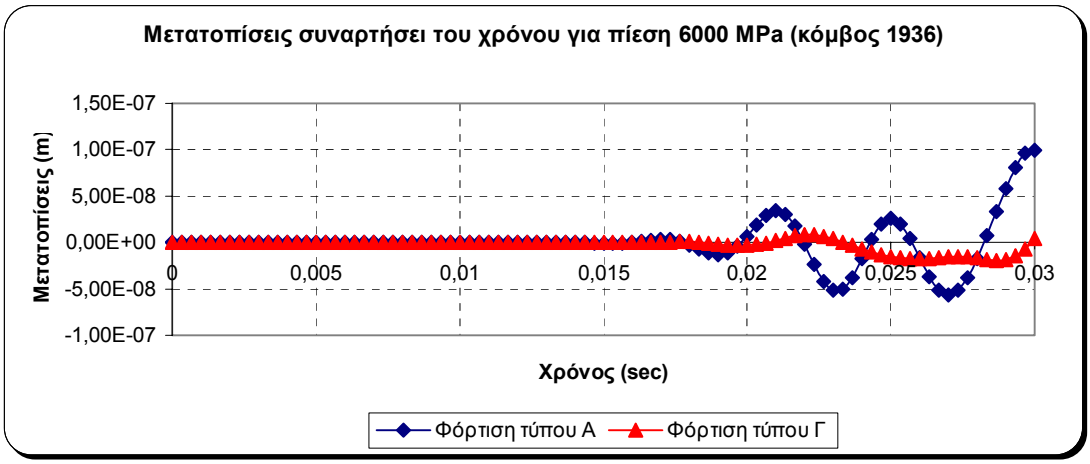
Γράφημα 6.70: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



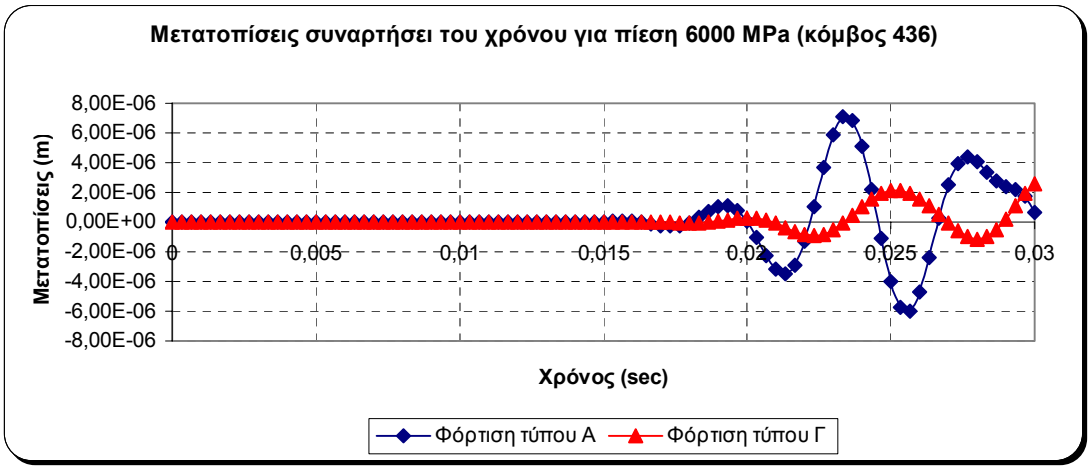
Γράφημα 6.71: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.72: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.73: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



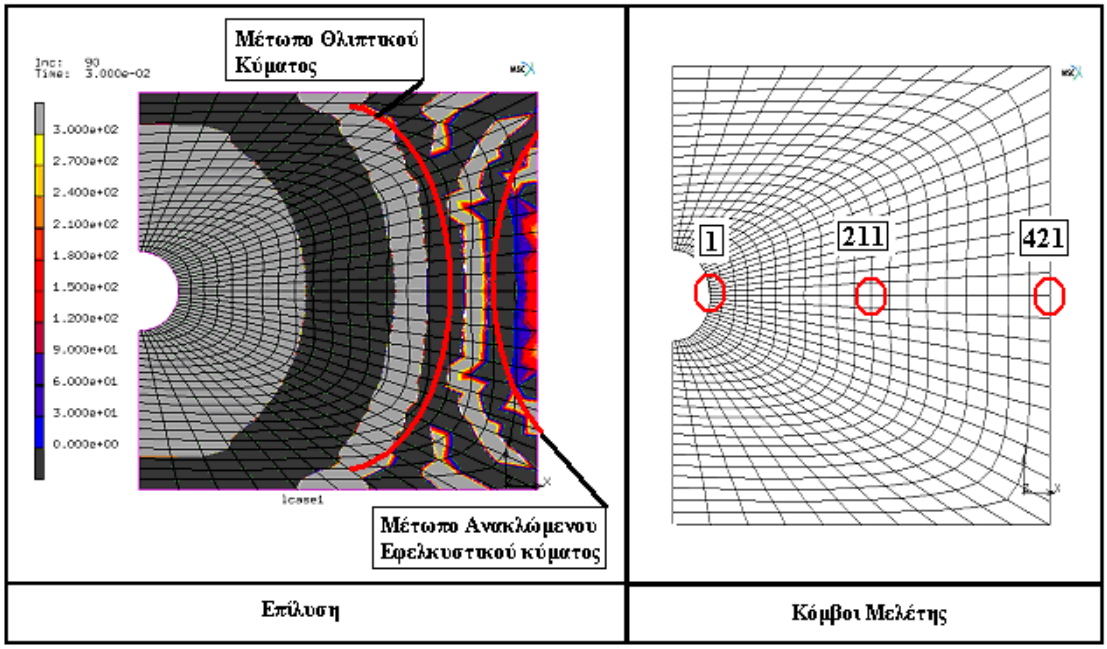
Γράφημα 6.74: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Στο μοντέλο αυτό μελετήθηκε η συμμετρία διπλής σειράς έναυσης και η αλληλεπίδραση από τα γειτονικά διατρήματα. Από την επίλυση φαίνονται τα μέτωπα των θλιπτικών κυμάτων και τα επιστρεφόμενα εφελκυστικά κύματα.
- Οι τάσεις και οι μετατοπίσεις στους κόμβους 1936 και 2171 είναι τα ίδια οπότε ικανοποιείται η συμμετρία
- Από το διάγραμμα των μετατοπίσεων, ο κόμβος 436 φαίνεται να ταλαντώνεται από την αρχή της χρονικής στιγμής, σιγά στην αρχή και πιο γρήγορα προς το τέλος. Αυτό οφείλεται στην αλληλεπίδραση των διατρημάτων, κάτι που δεν φάνηκε στο προηγούμενο μοντέλο.

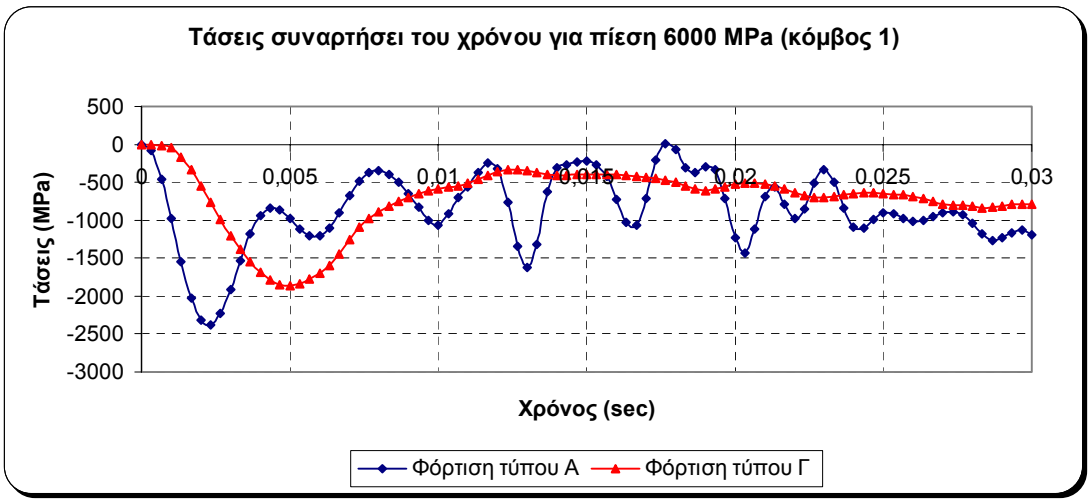
6.8.6 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστοπλαστικού υλικού (S=B)

Η ελαστοπλαστική επίλυση που προέκυψε καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνονται στο σχήμα 6.17:

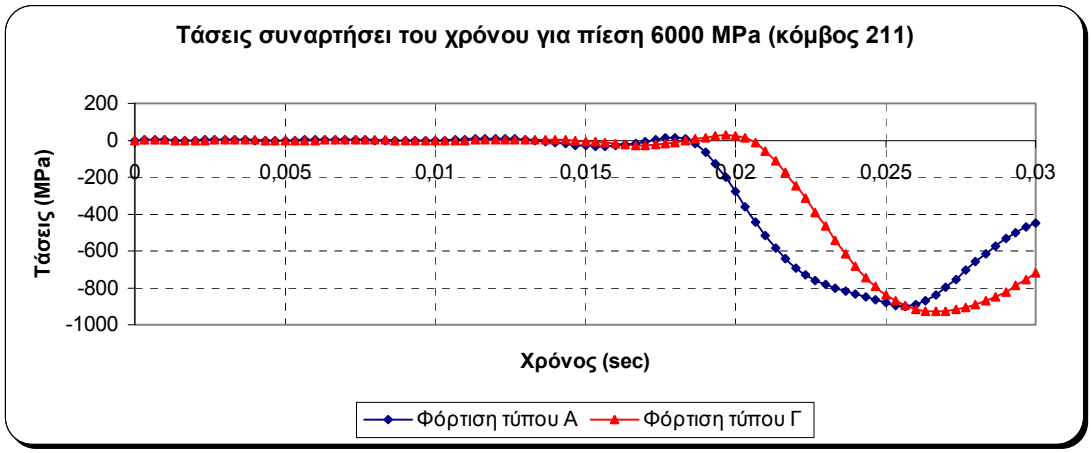


Σχήμα 6.17: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

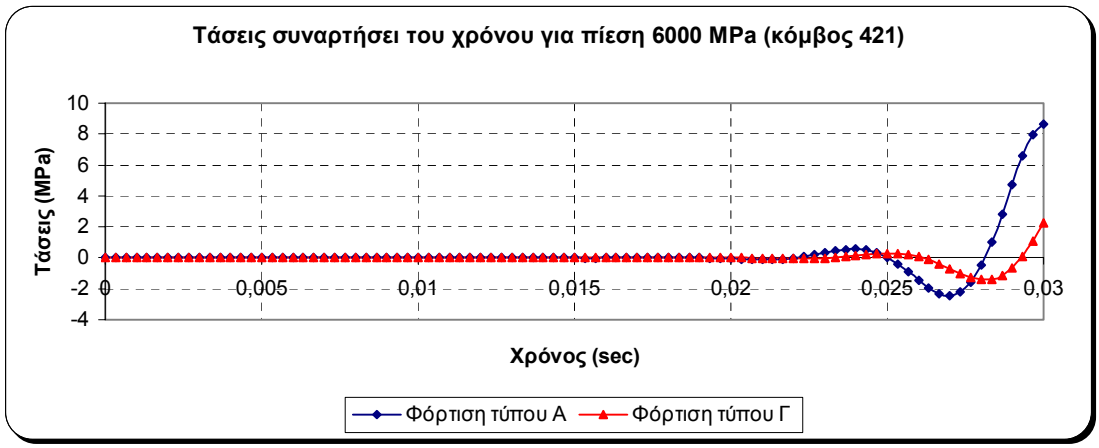
Από την επίλυση του σχήματος 6.17 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.75-6.80:



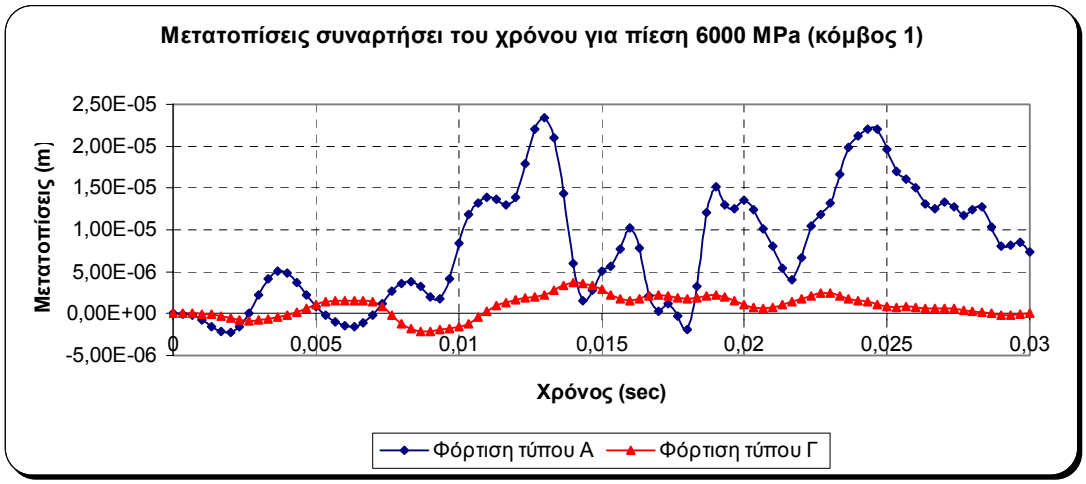
Γράφημα 6.75: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



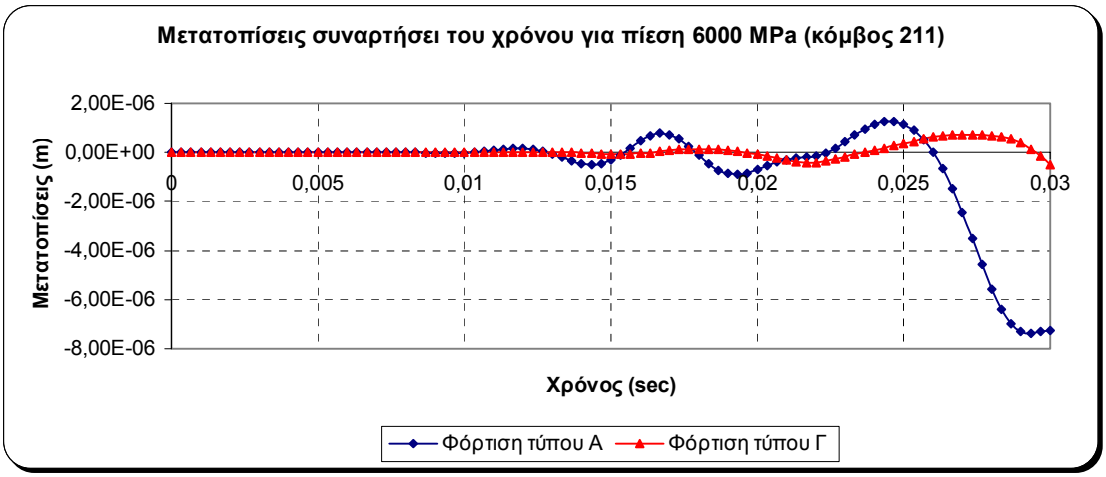
Γράφημα 6.76: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



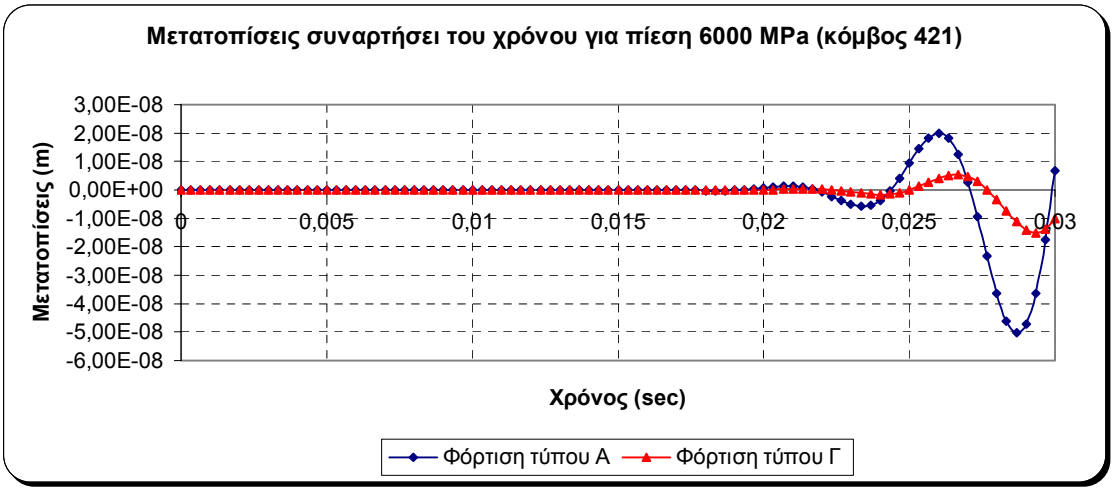
Γράφημα 6.77: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.78: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.79: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



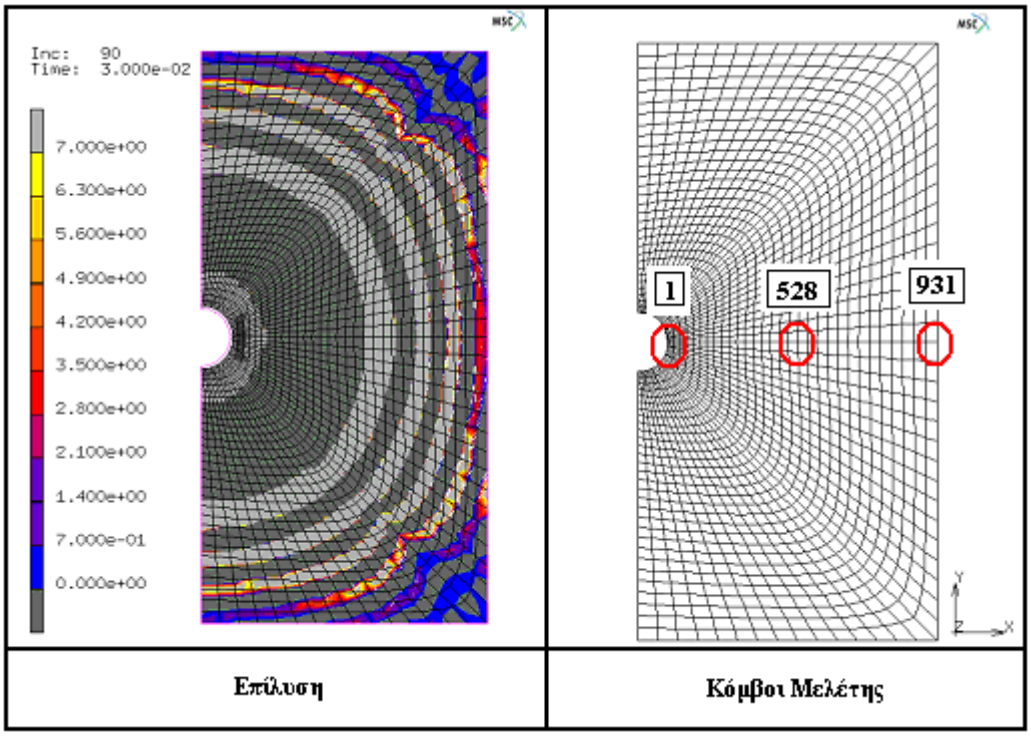
Γράφημα 6.80: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Οι τάσεις στο σύνορο του διατρήματος παρουσιάζονται ως θλιπτικές και τάξης 2500 MPa, σε αντίθεση με το ελαστικό μοντέλο που παρουσιάζονται εφελκυστικές της τάξης των 5500 MPa. Η παρουσίαση των θλιπτικών τάσεων επί του διατρήματος είναι πιο πραγματική περίπτωση.
- Οι τάσεις και μετατοπίσεις στο μέσο του μοντέλου και στην ελεύθερη επιφάνεια παρουσιάζουν την ίδια μορφή με τα ελαστικά αλλά έχουν κατά 50% μειωμένη τάξη μεγέθους.

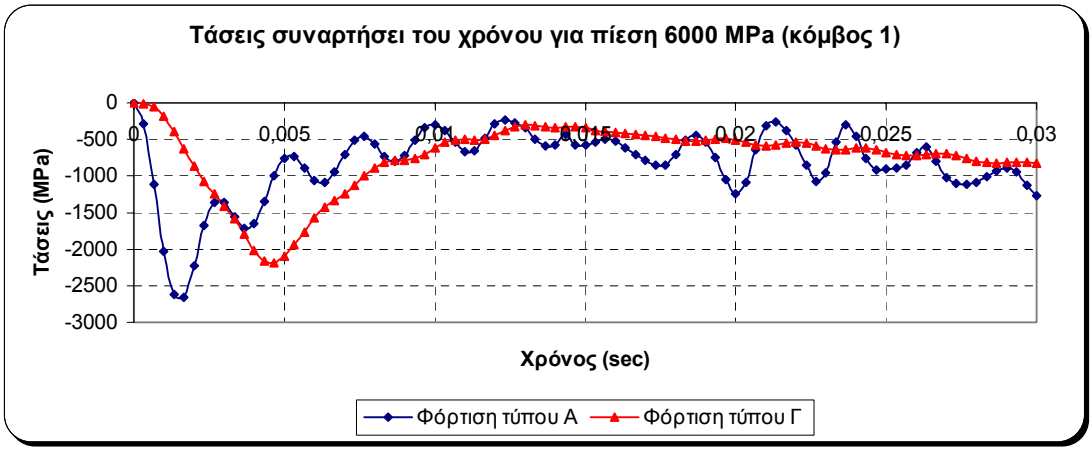
6.8.7 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστοπλαστικού υλικού (S=2B)

Η ελαστοπλαστική επίλυση που προέκυψε καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνονται στο σχήμα 6.18:

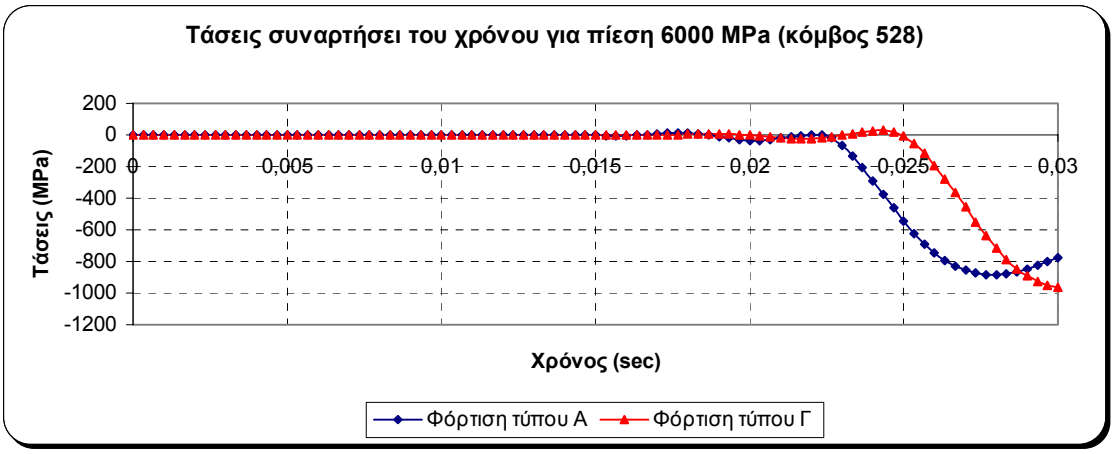


Σχήμα 6.18: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

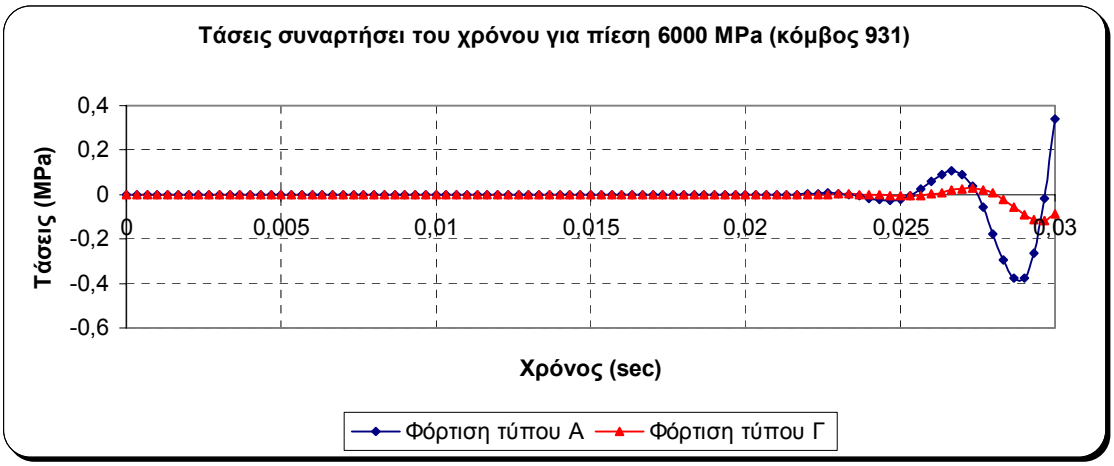
Από την επίλυση του σχήματος 6.18 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.81-6.86):



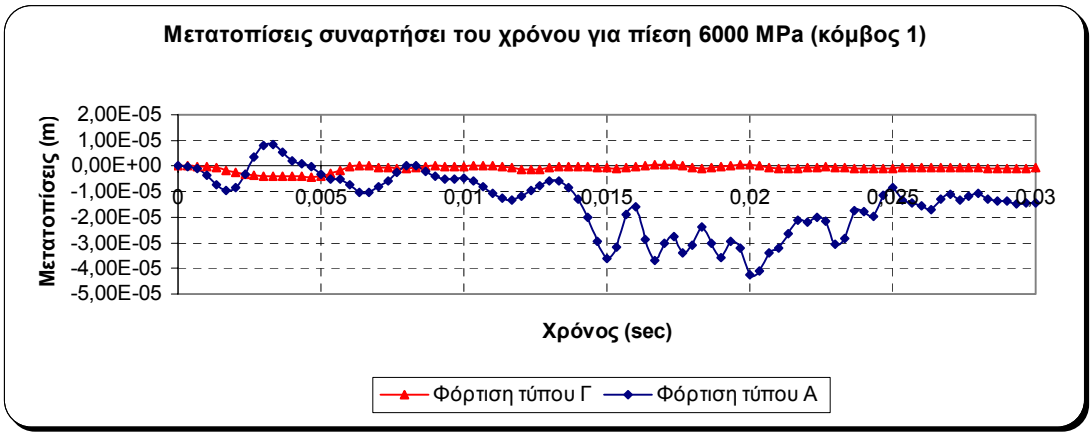
Γράφημα 6.81: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



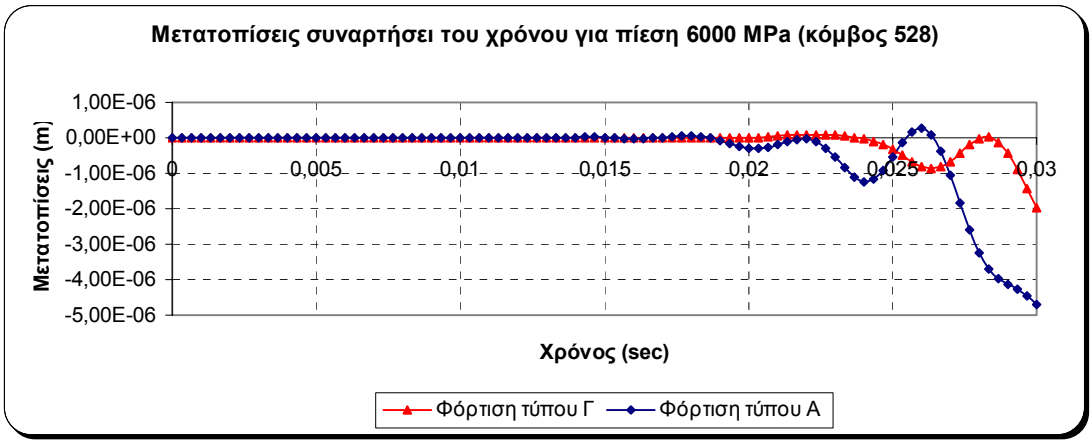
Γράφημα 6.82: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



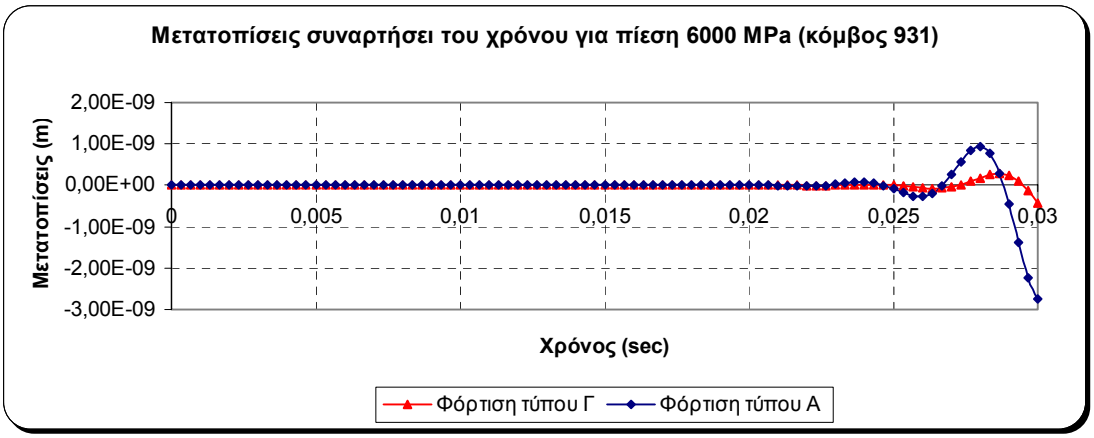
Γράφημα 6.83: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.84: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.85: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



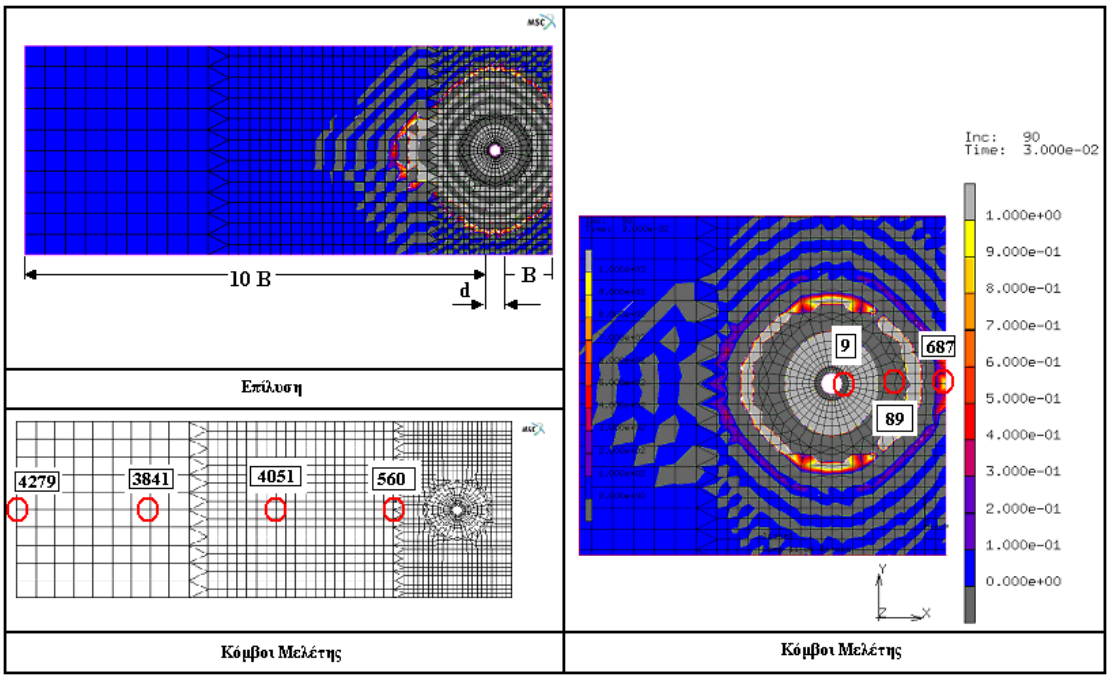
Γράφημα 6.86: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Οι τάσεις στον κόμβο επί του διατρήματος είναι και πάλι θλιπτικές σε σχέση με τα ελαστικά μοντέλα που παρουσιάζουν εφελκυστικές τάσεις.
- Οι τάσεις στον κόμβο της ελεύθερης είναι ίδιας μορφής στα ελαστικά και ελαστοπλαστικά μοντέλα αλλά σε μειωμένη τάξη μεγέθους.
- Οι μετατοπίσεις είναι διαφορετικής μορφής από τα ελαστικά. Στα ελαστικά φαίνεται να ταλαντώνεται ο κόμβος χωρίς απόσβεση σε σχέση με τα ελαστοπλαστικά που φαίνεται να παρουσιάζει μικρή απόσβεση.

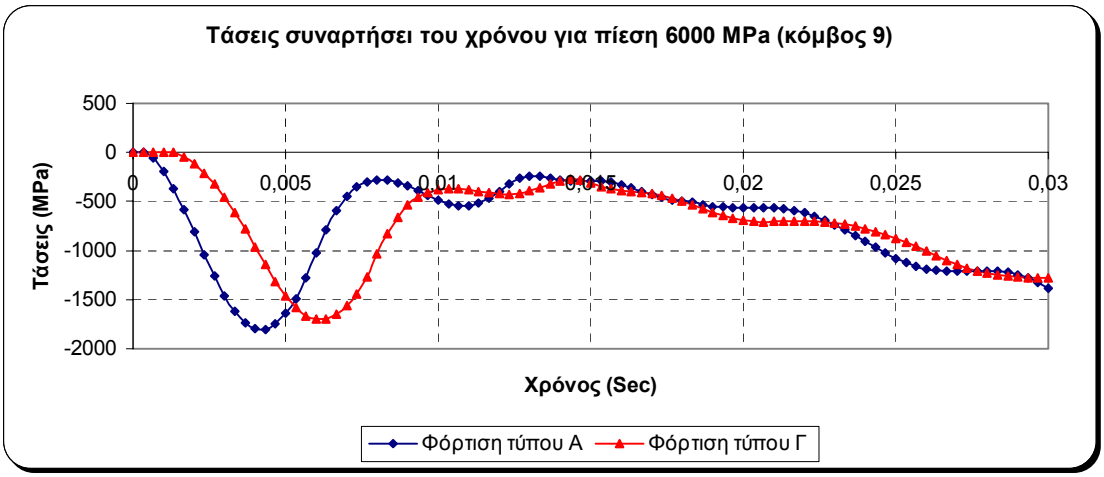
6.8.8 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστοπλαστικού υλικού (Εξάπλωση τάσεων σε άπειρο μέσο)

Η ελαστοπλαστική επίλυση που προέκυψε καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνονται στο σχήμα 6.19:

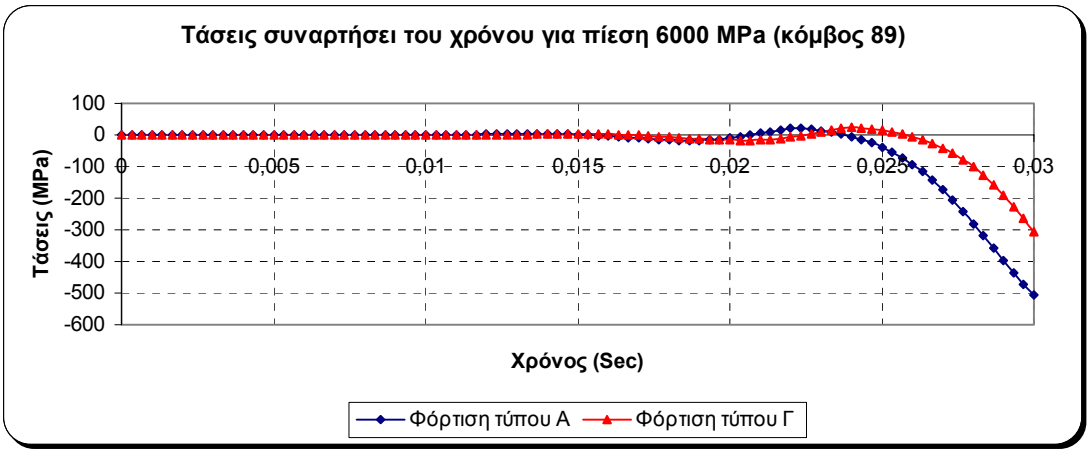


Σχήμα 6.19: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

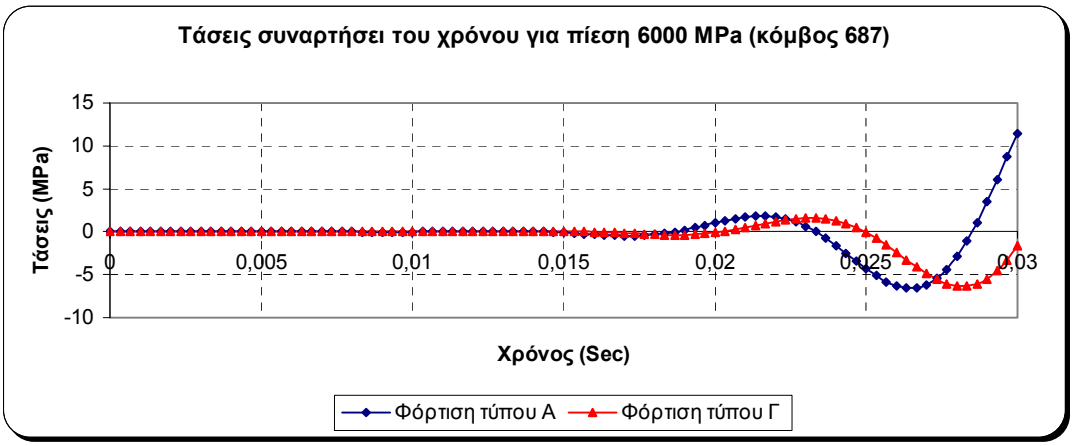
Από την επίλυση του σχήματος 6.19 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.87-6.100):



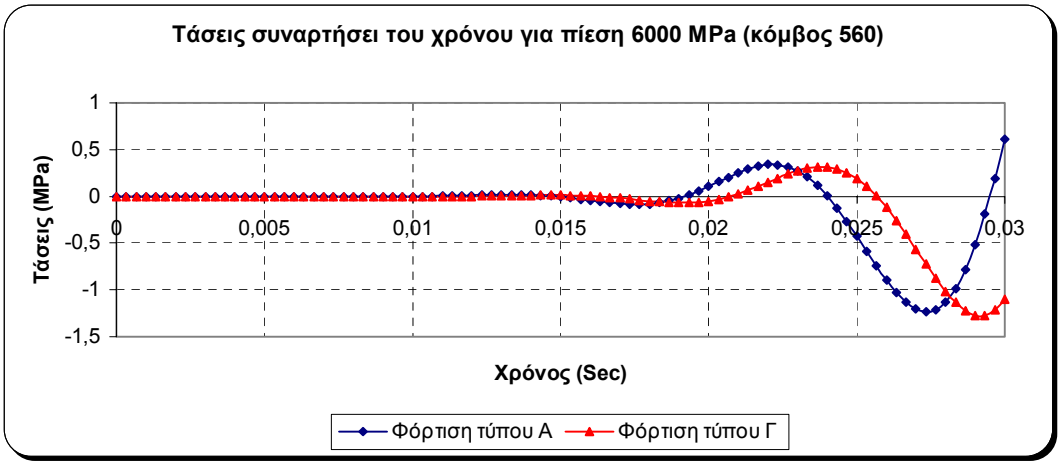
Γράφημα 6.87: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



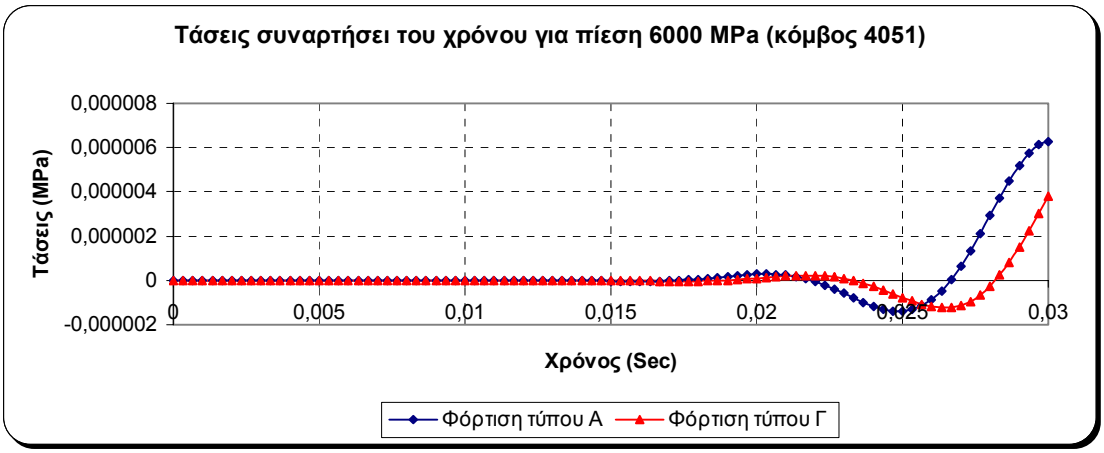
Γράφημα 6.88: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



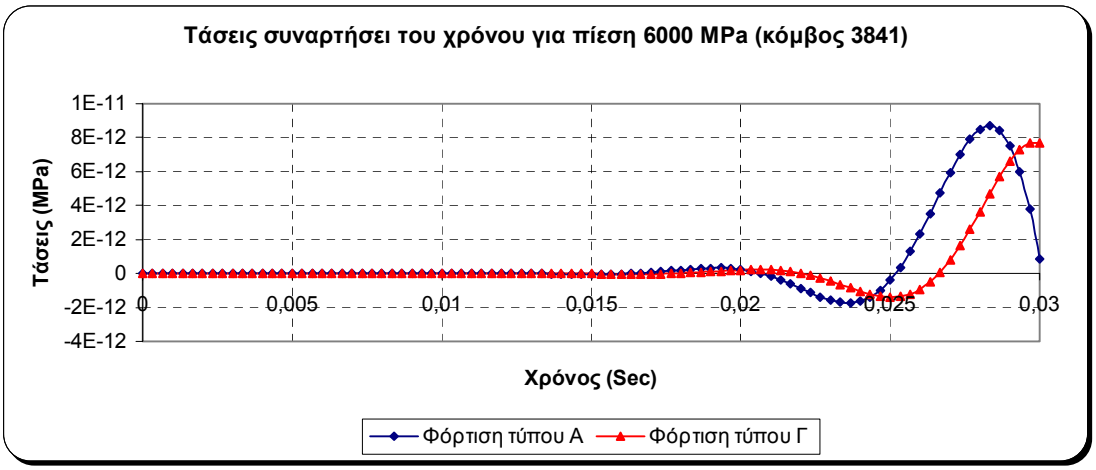
Γράφημα 6.89: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



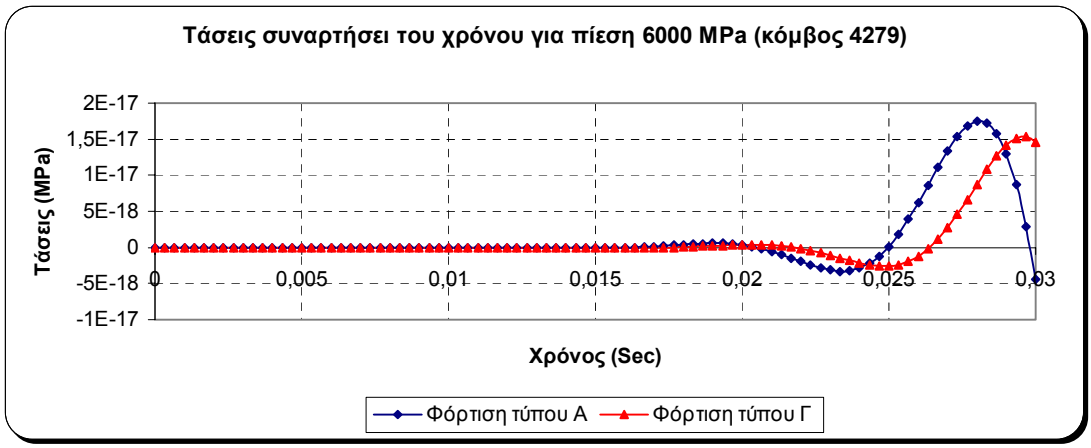
Γράφημα 6.90: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



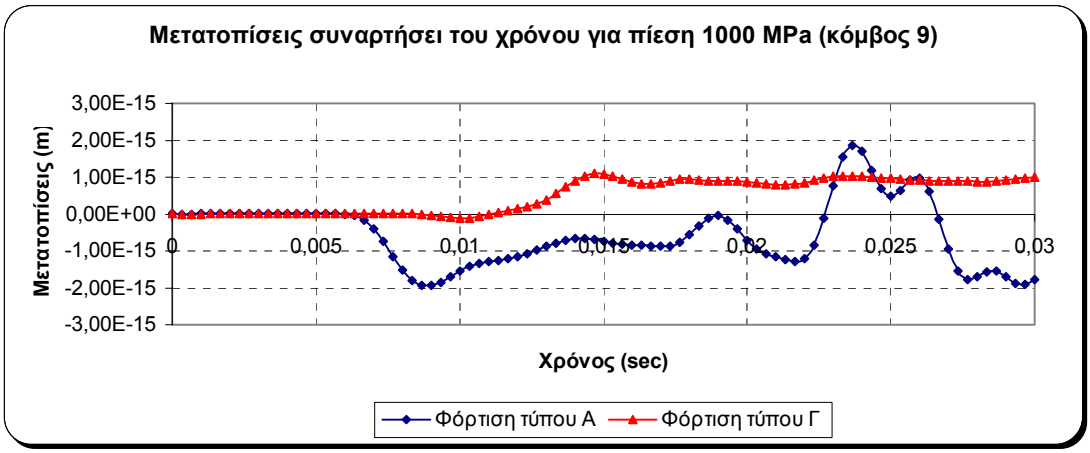
Γράφημα 6.91: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



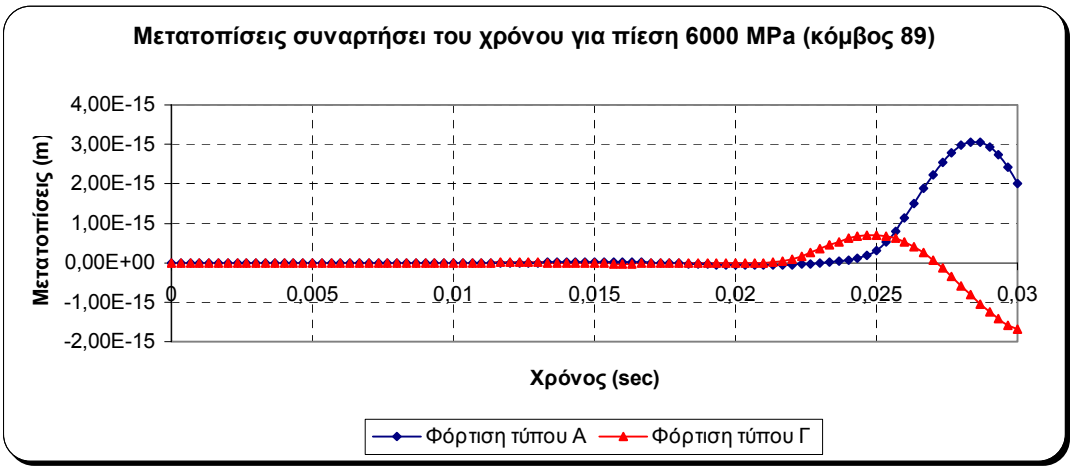
Γράφημα 6.92: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



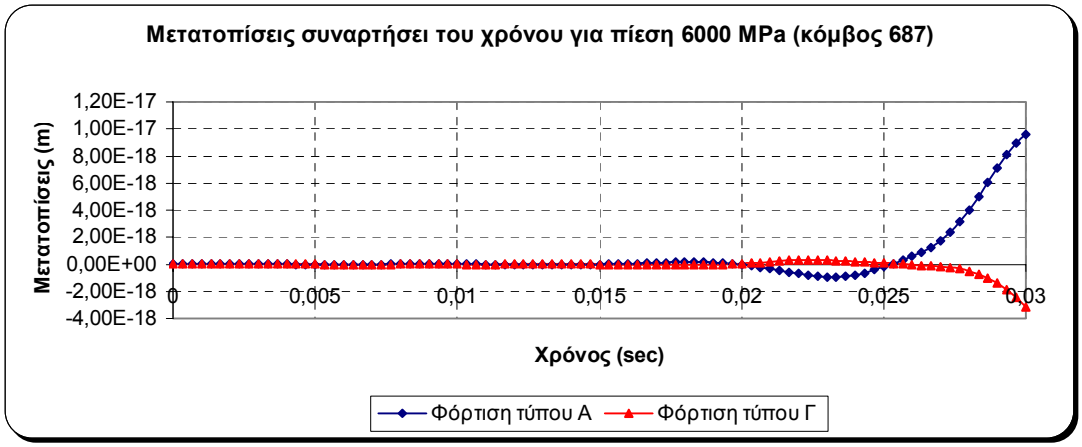
Γράφημα 6.93: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



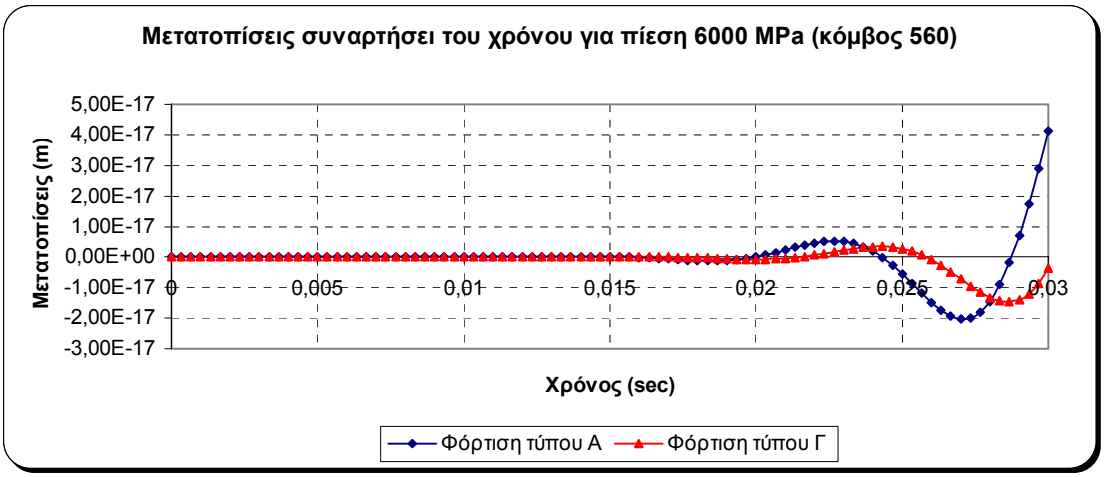
Γράφημα 6.94: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



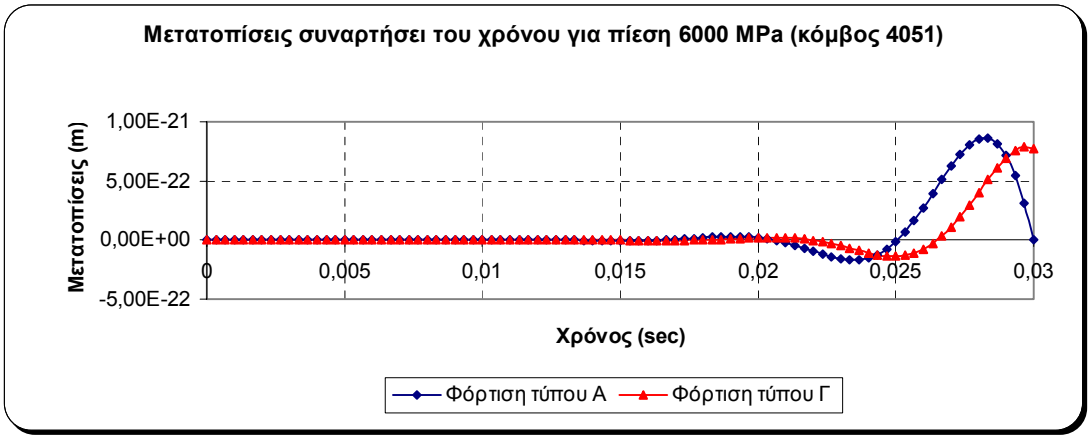
Γράφημα 6.95: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



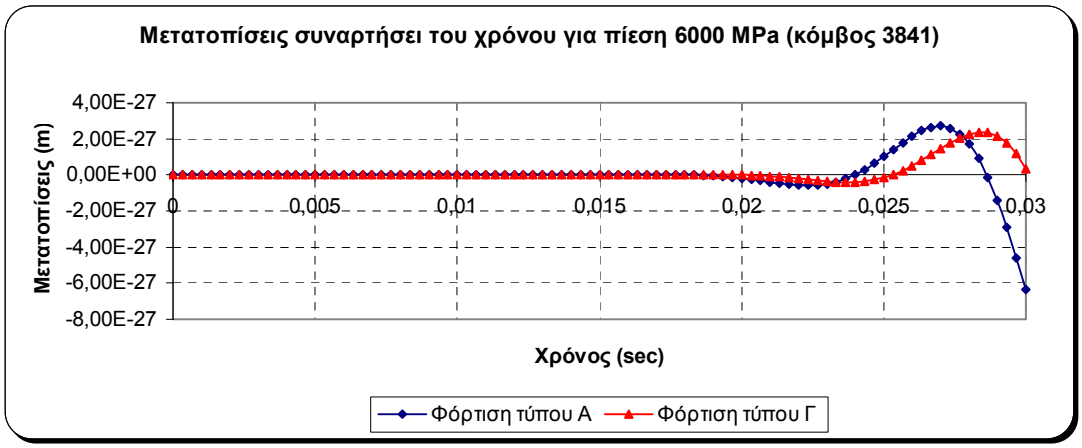
Γράφημα 6.96: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



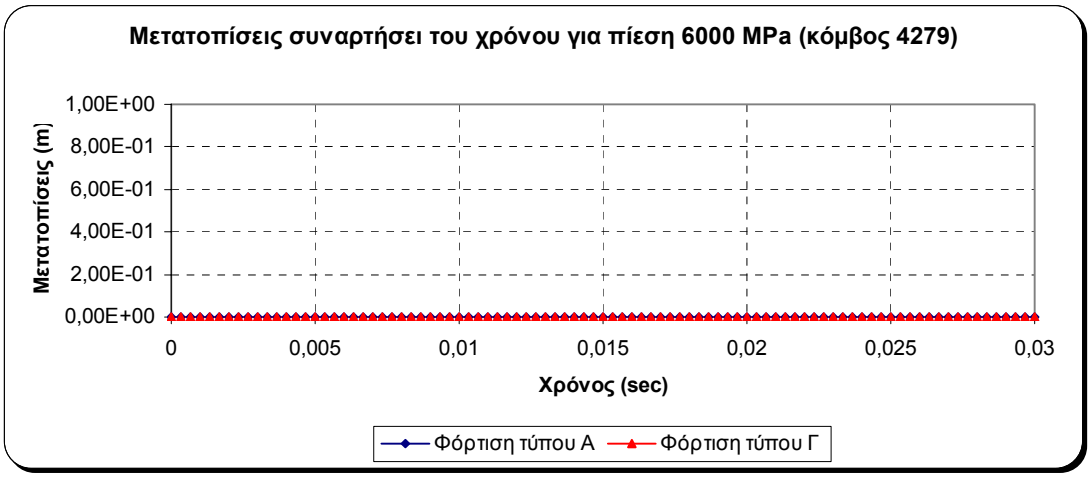
Γράφημα 6.97: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.98: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.99: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



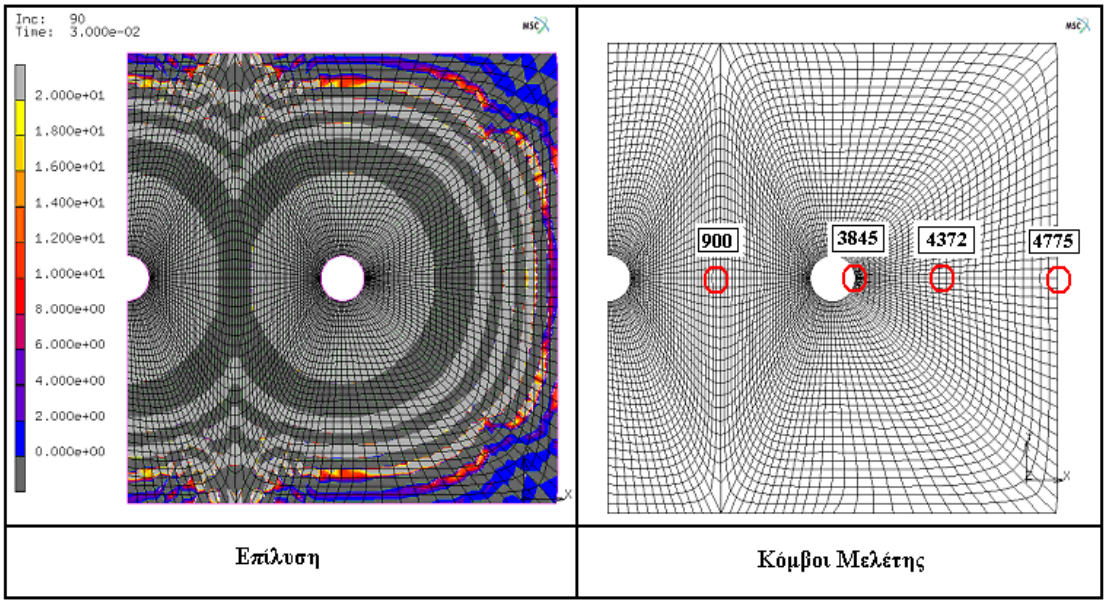
Γράφημα 6.100: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Η μορφή των καμπύλων φόρτισης είναι όμοια.
- Παρατηρείται το ίδιο με τα προηγούμενα μοντέλα. Η σημαντική αλλάγη στις τάσεις και τις μετατοπίσεις παρουσιάζει ο κόμβος επί του διατρήματος δίνοντας θλιπτικές τάσεις στα ελαστοπλαστικά μοντέλα και ακανόνιστη μορφή ταλάντωσης με μικρή απόσβεση σε σχέση με τα ελαστικά μοντέλα που δίνουν εφελκυστικές τάσεις και ομοιόμορφη ταλάντωση χωρίς απόσβεση.
- Ο κόμβος που είναι μακριά από το διάτρημα ενώ φαίνεται να μην ταλαντώνεται, δέχεται τάσεις. Αυτό εξηγείται από την επιβολή συνοριακών συνθηκών (κύλιση κατά χ άξονα).

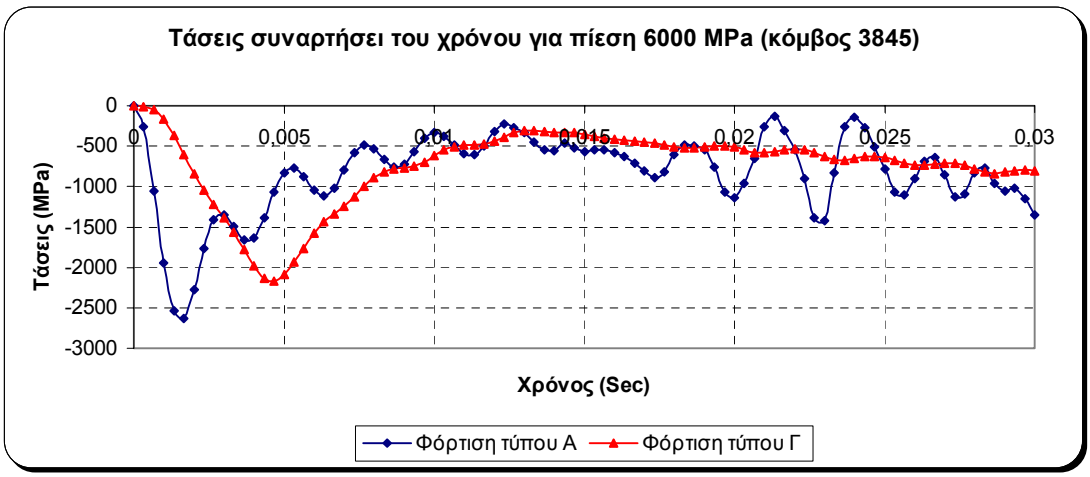
6.8.9 Μοντελοποίηση συμμετρίας πολλαπλής σειράς έναυσης ελαστοπλαστικού υλικού (S=2B)

Η ελαστοπλαστική επίλυση που προέκυψε καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνονται στο σχήμα 6.20:

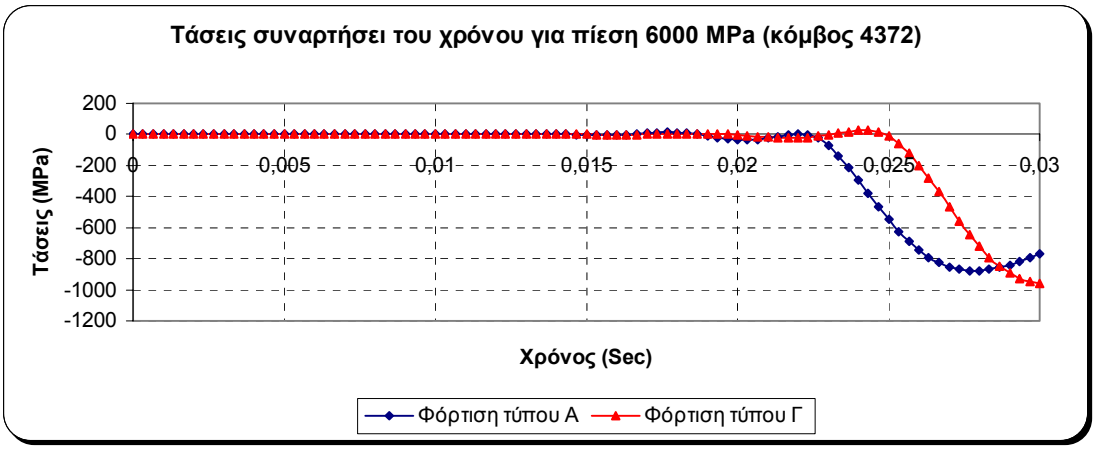


Σχήμα 6.20: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

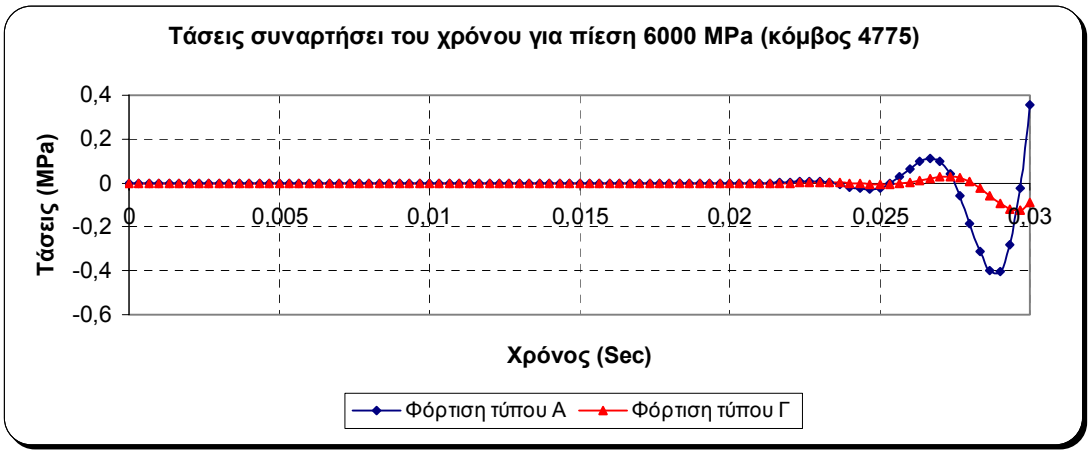
Από την επίλυση του σχήματος 6.20 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.101-6.108):



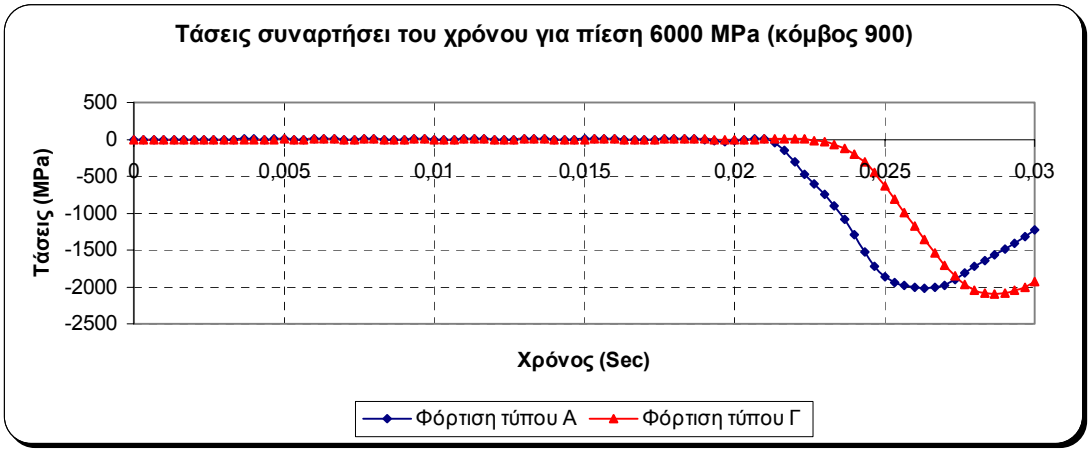
Γράφημα 6.101: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



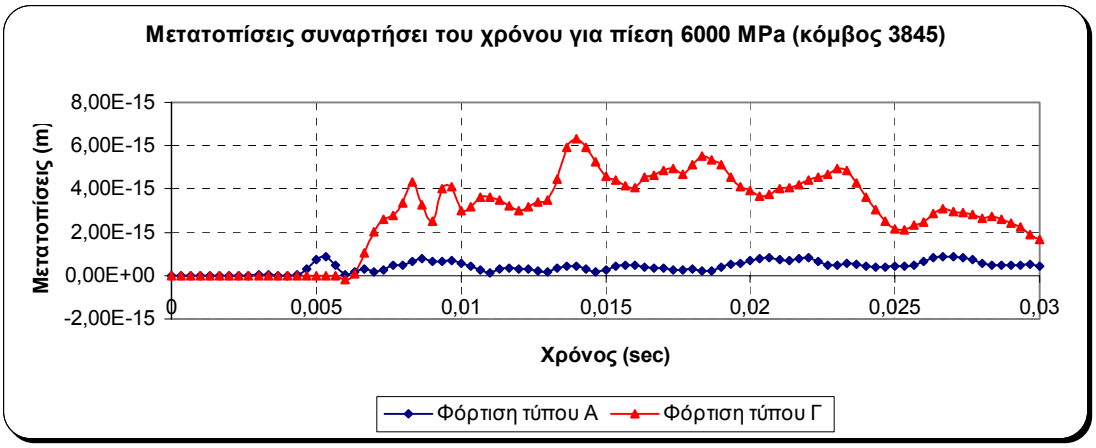
Γράφημα 6.102: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



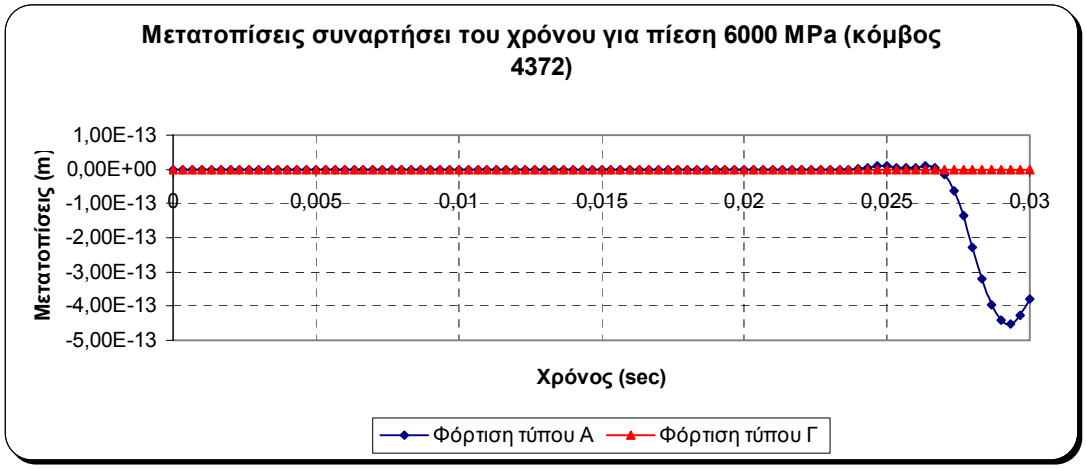
Γράφημα 6.103: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



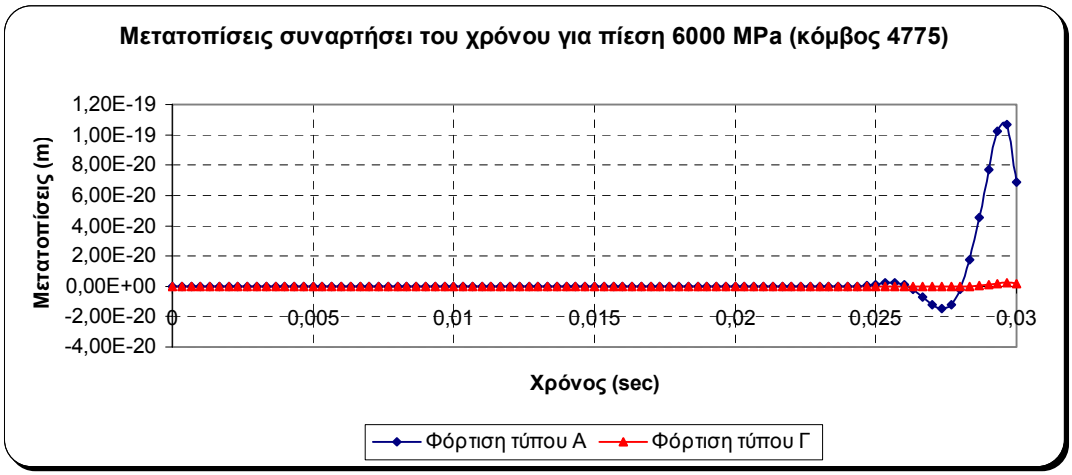
Γράφημα 6.104: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



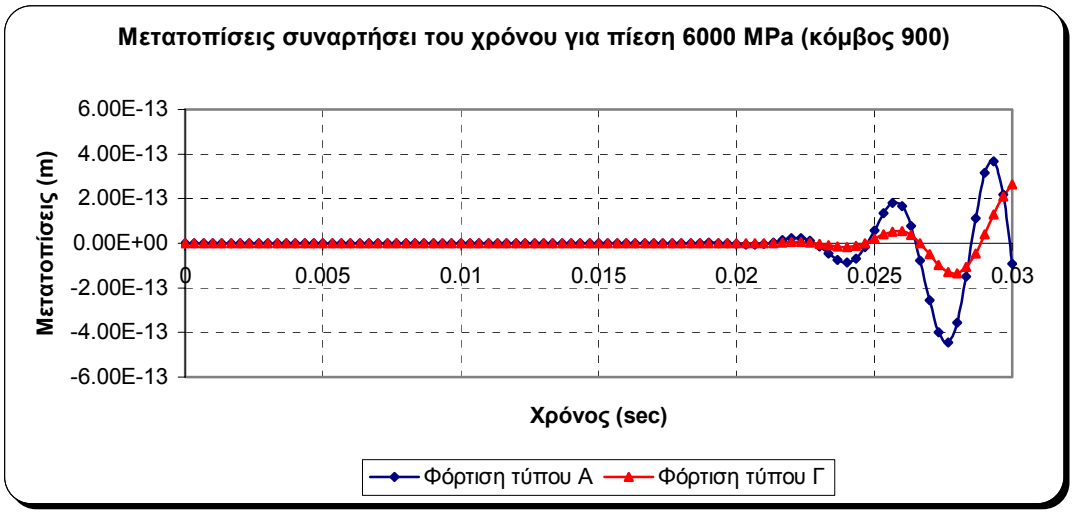
Γράφημα 6.105: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.106: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.107: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



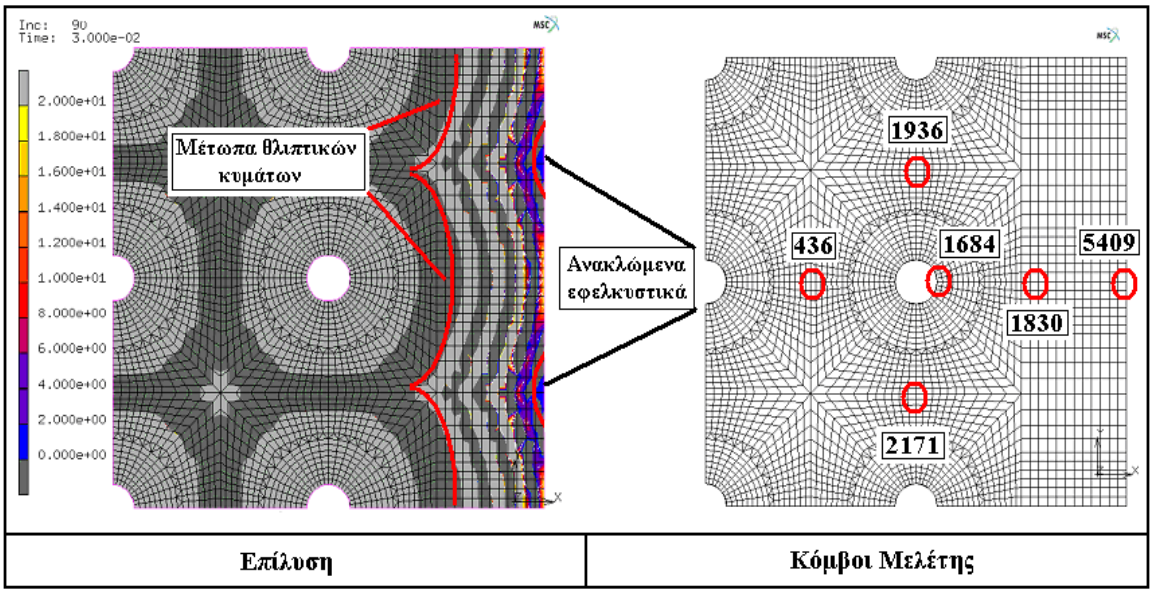
Γράφημα 6.108: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Οι τάσεις που παρουσιάζει ο κόμβος στη μέση του διατρήματος στο ελαστοπλαστικό μοντέλο είναι διπλάσιες από τις τάσεις που παρουσίασε το ελαστικό μοντέλο. Αυτό γίνεται λόγω αλληλεπίδρασης των διατρημάτων.
- Οι μετατοπίσεις δεν παρουσιάζουν αλλαγή στο ελαστοπλαστικό μοντέλο. Είναι όμοια με προηγούμενα μοντέλα. Αυτό ίσως να οφείλεται στην ύπαρξη απόσβεσης που εμφανίζεται λόγω του μεγάλου αριθμού στοιχείων στο μοντέλο.

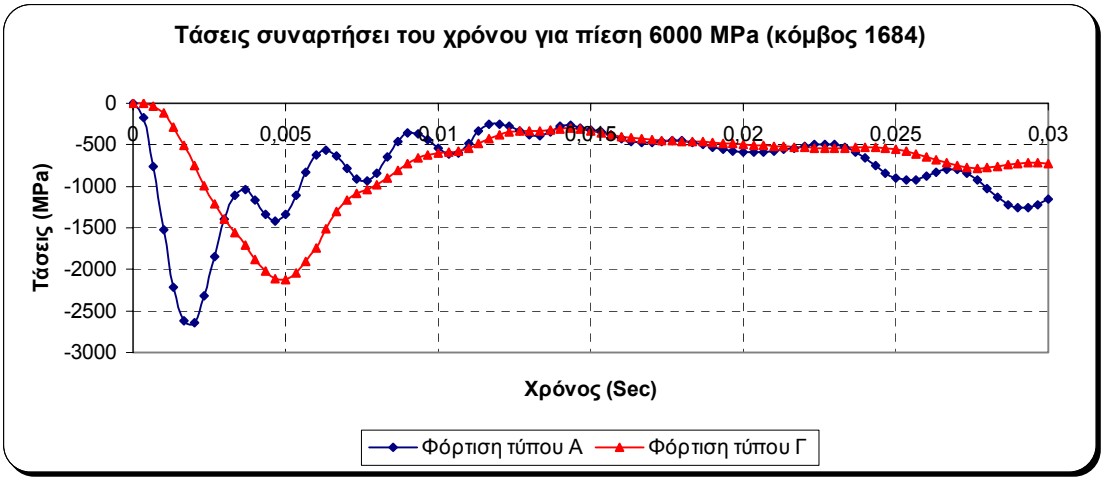
6.8.10 Μοντελοποίηση αλληλεπίδρασης πολλαπλής σειράς έναυσης ελαστοπλαστικού υλικού (S=2B)

Η ελαστοπλαστική επίλυση που προέκυψε καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνονται στο σχήμα 6.21:

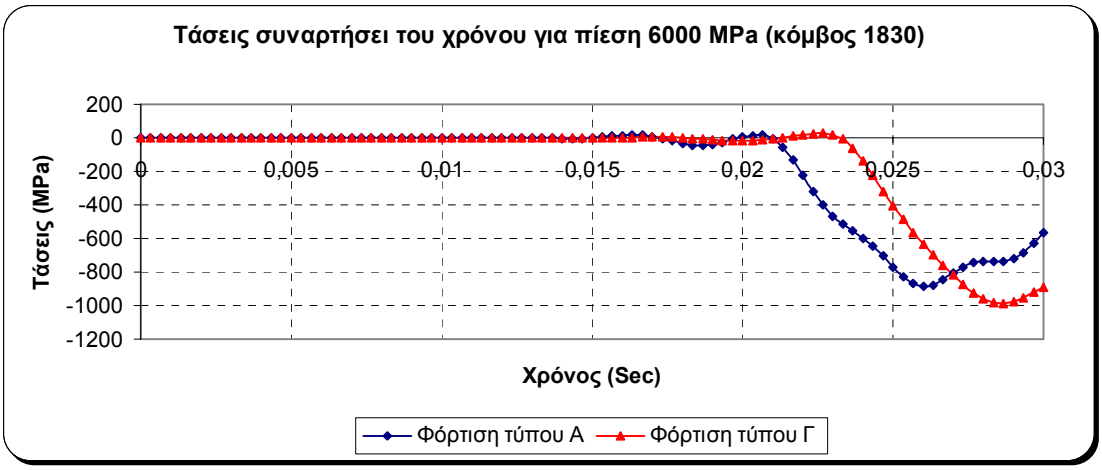


Σχήμα 6.21: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

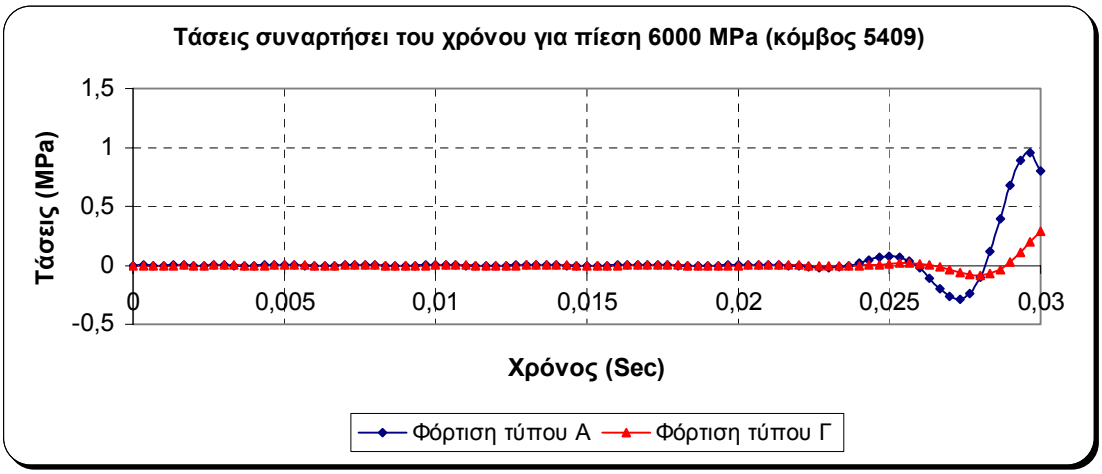
Από την επίλυση του σχήματος 6.21 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.109-6.120):



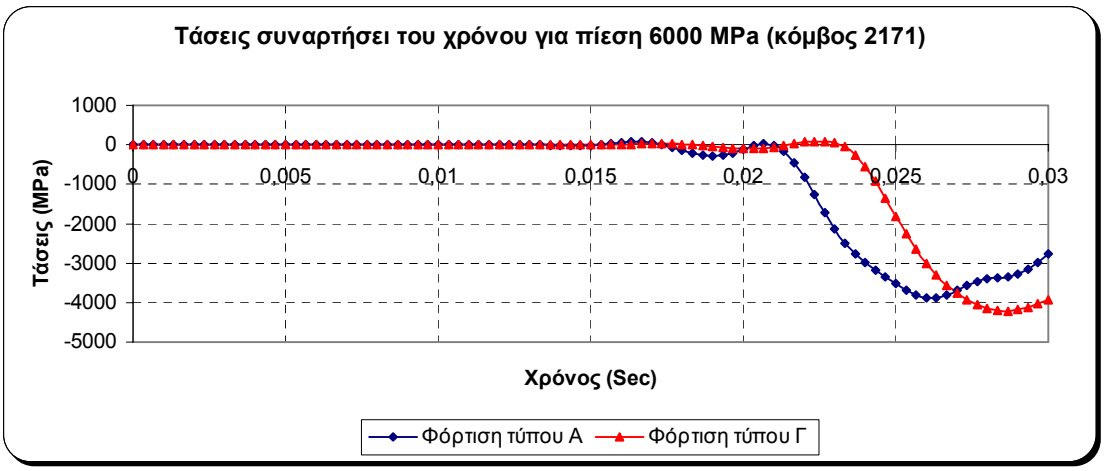
Γράφημα 6.109: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



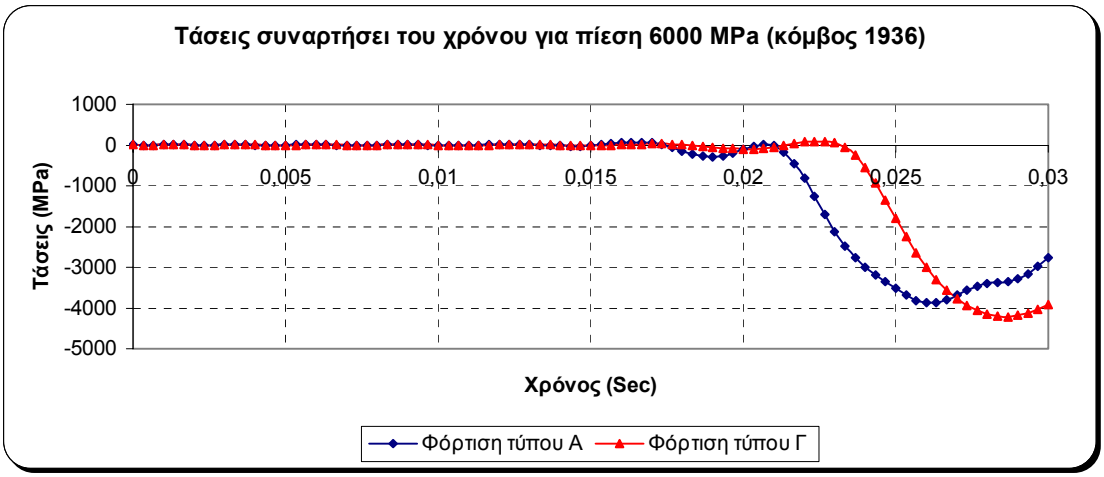
Γράφημα 6.110: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



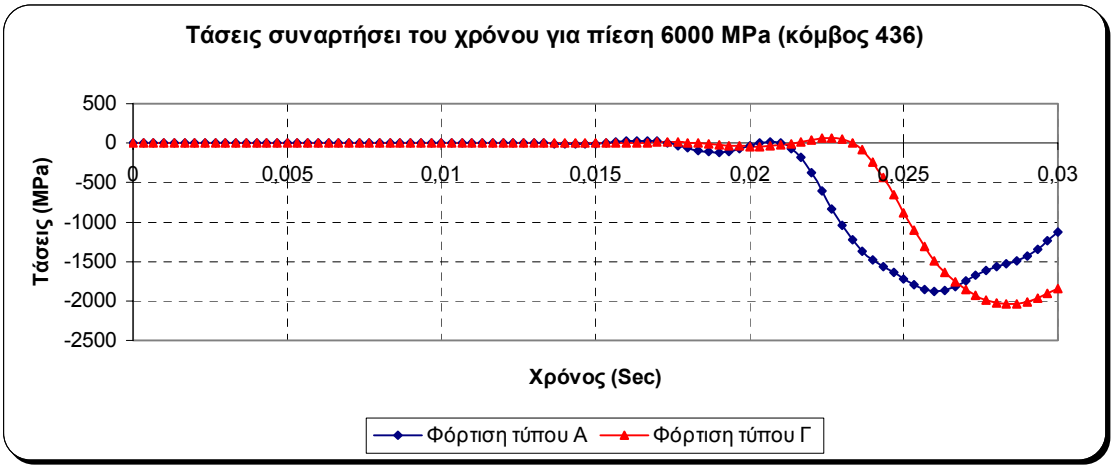
Γράφημα 6.111: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



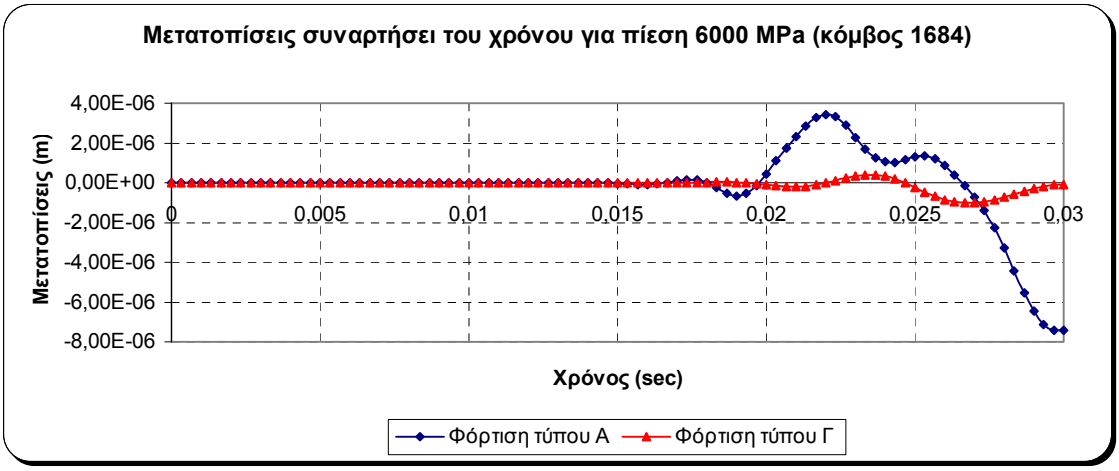
Γράφημα 6.112: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



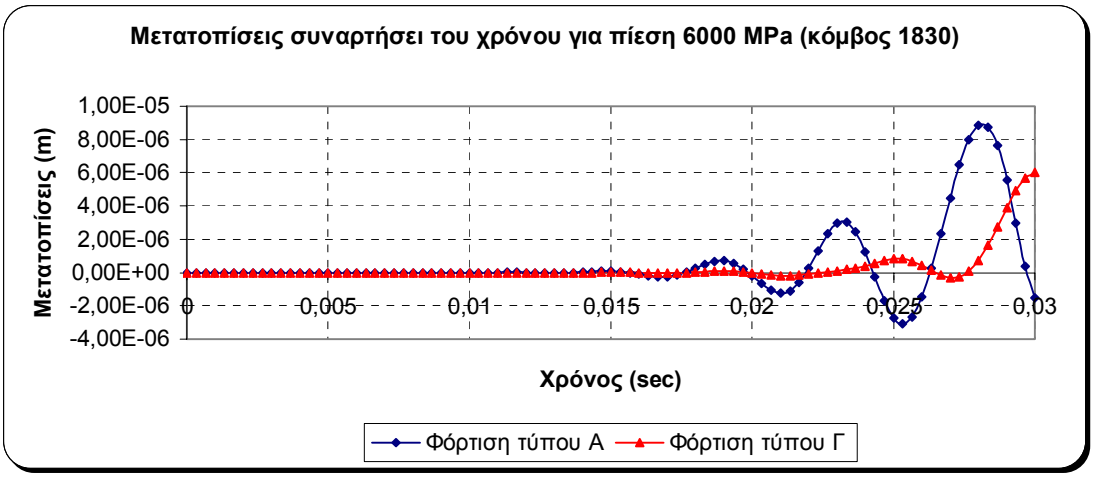
Γράφημα 6.113: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



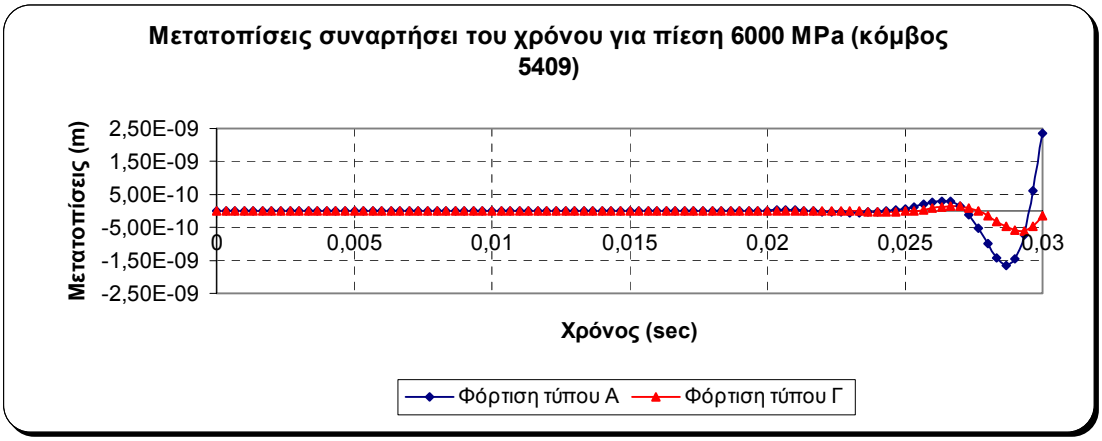
Γράφημα 6.114: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



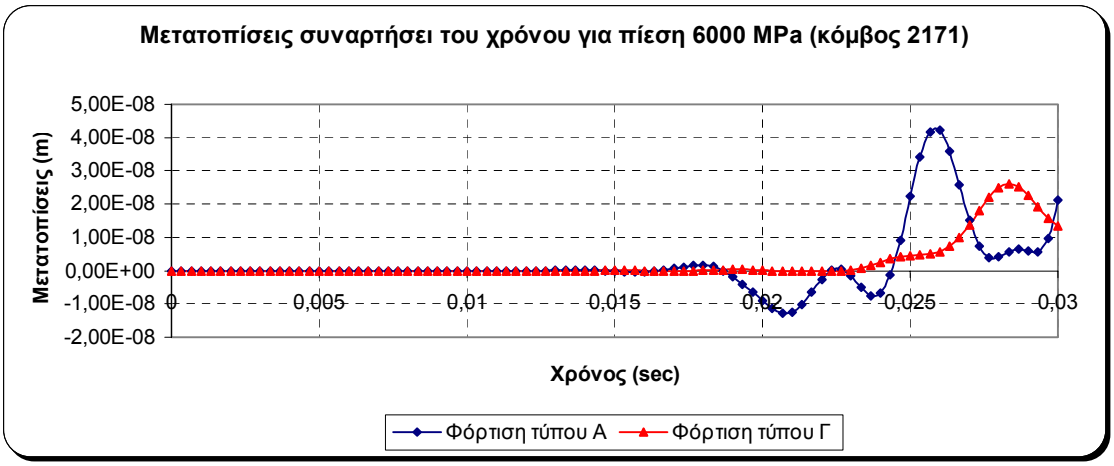
Γράφημα 6.115: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



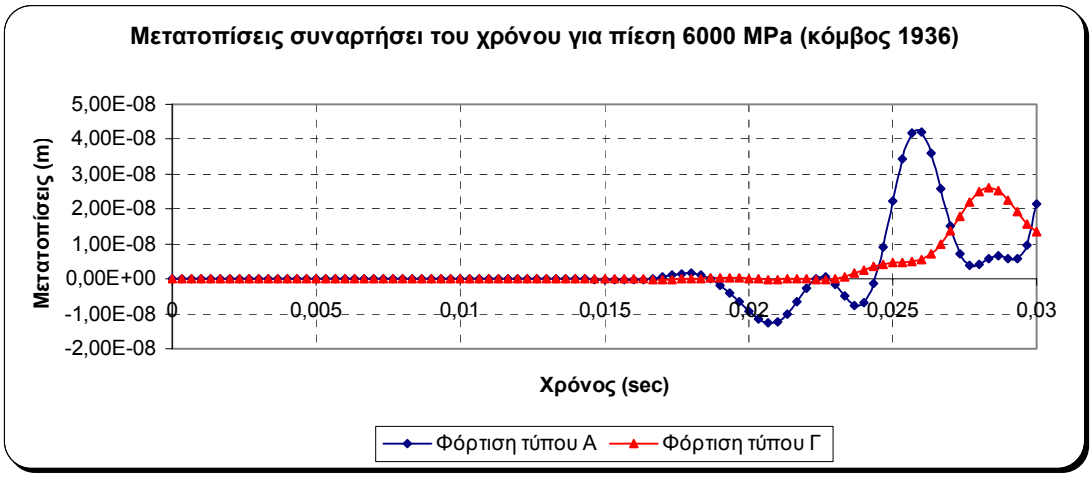
Γράφημα 6.116: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



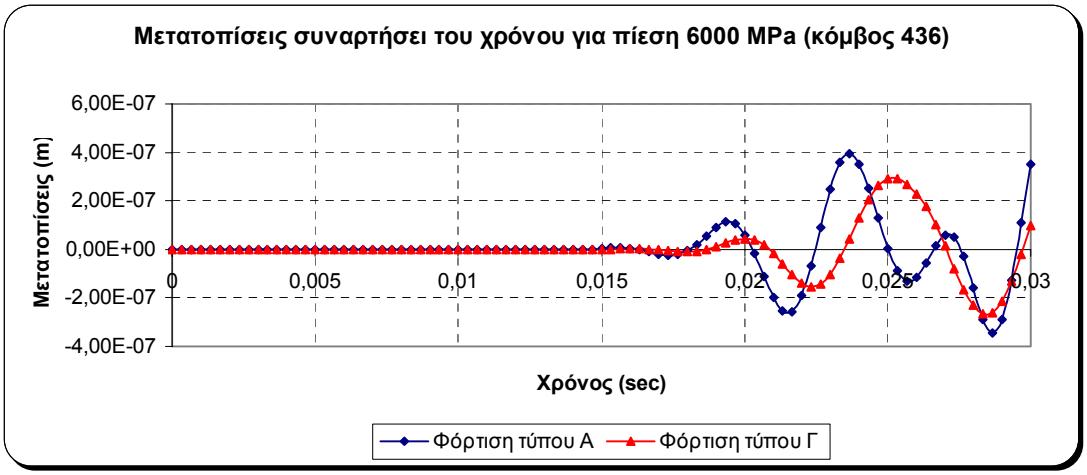
Γράφημα 6.117: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.118: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.119: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



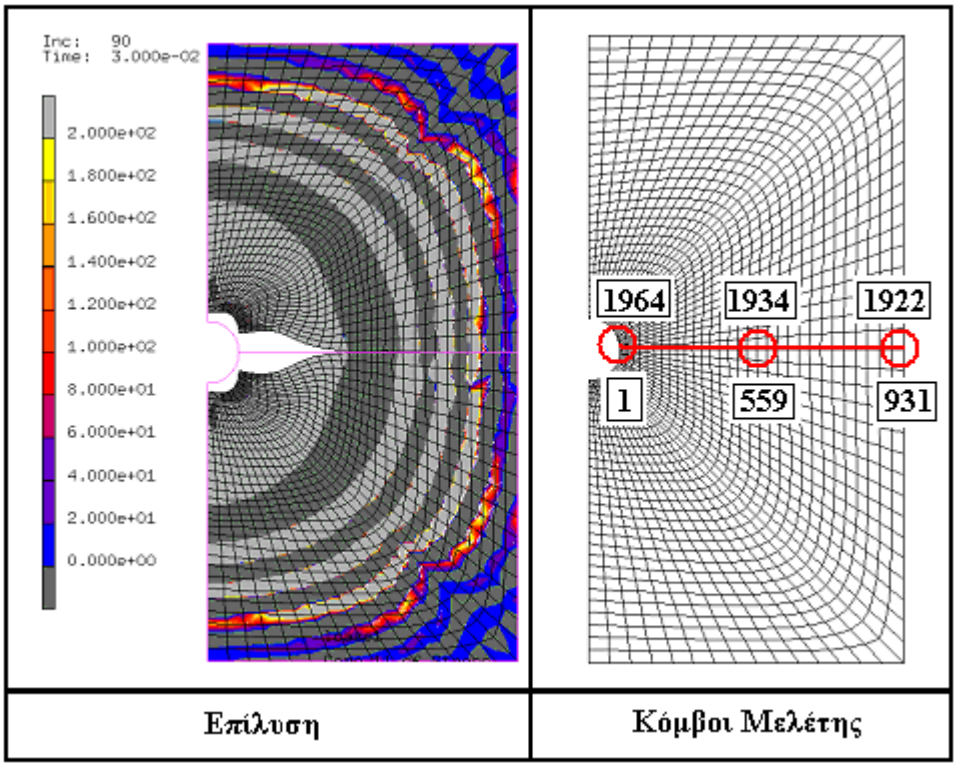
Γράφημα 6.120: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Οι τάσεις στον κεντρικό κόμβο δεν φαίνεται να παρουσιάζουν αύξηση όπως έγινε στην περίπτωση ανάλυσης 6.8.9. Αυτό ίσως να οφείλεται σε κράτυνση του τασικού παλμού από τα τριγωνικά στοιχεία που συνδέουν την μεταβολή της γεωμετρίας.

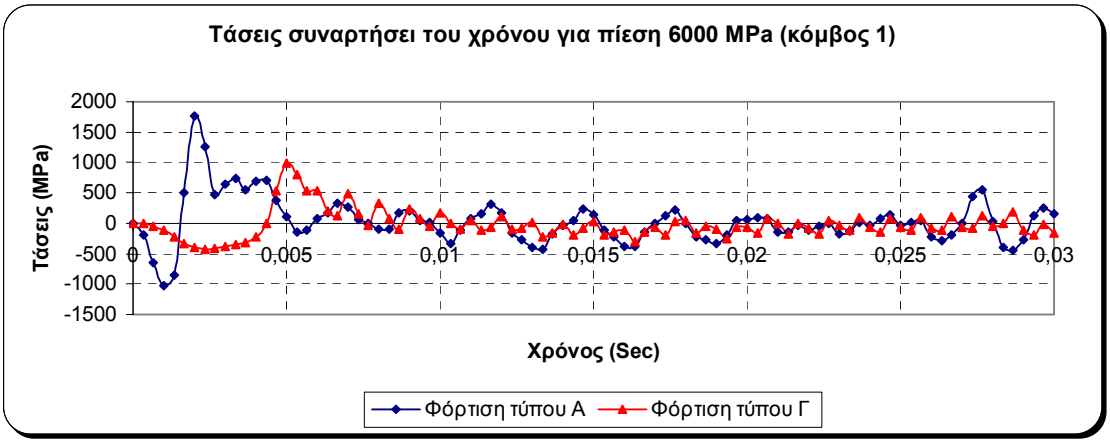
6.8.11 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (S=2B) με επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής

Η ελαστική επίλυση που προέκυψε με την επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνεται στο σχήμα 6.22:

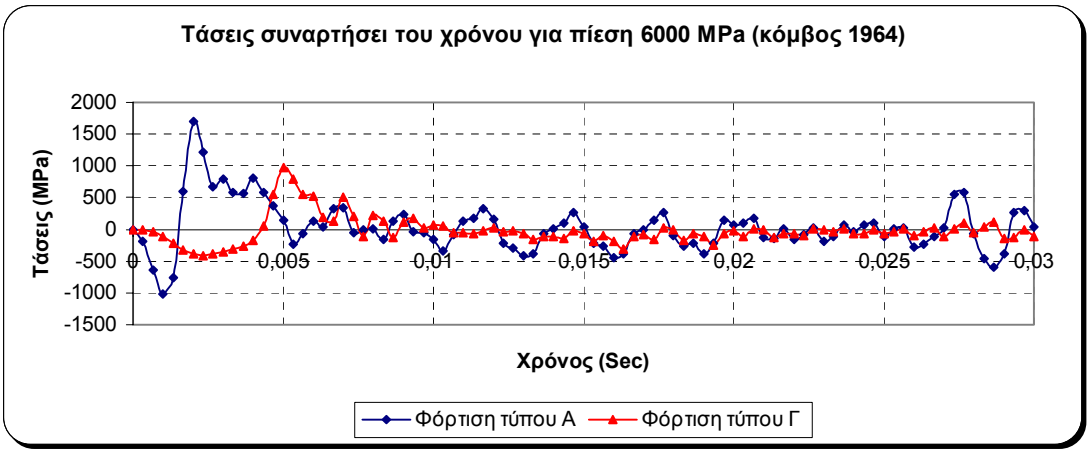


Σχήμα 6.22: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

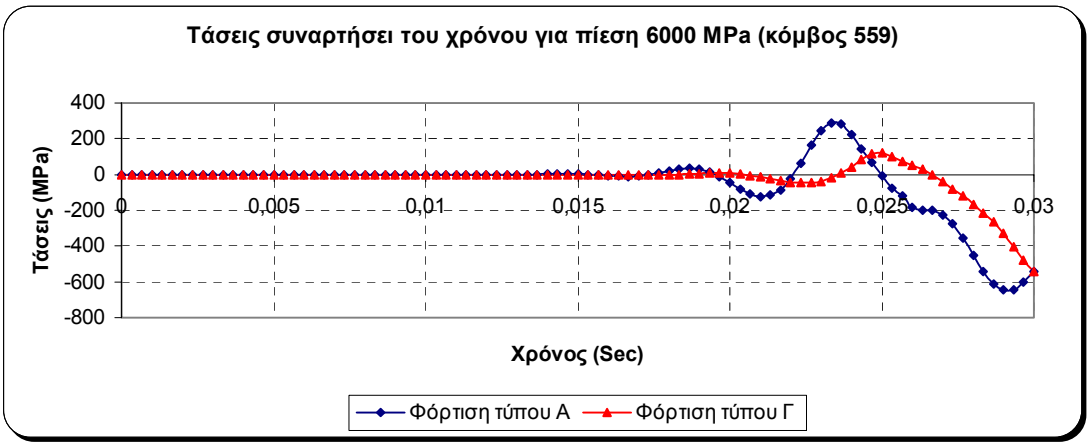
Από την επίλυση του σχήματος 6.22 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.121-6.132)::



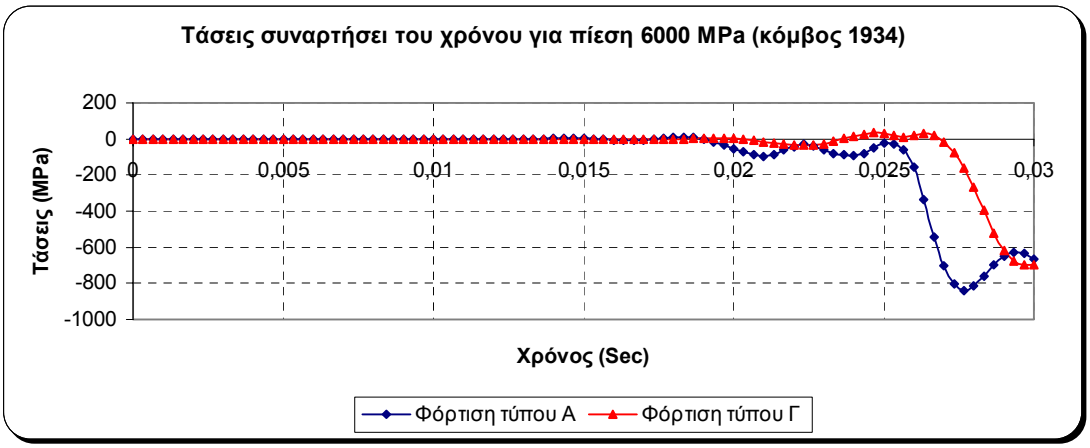
Γράφημα 6.121: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



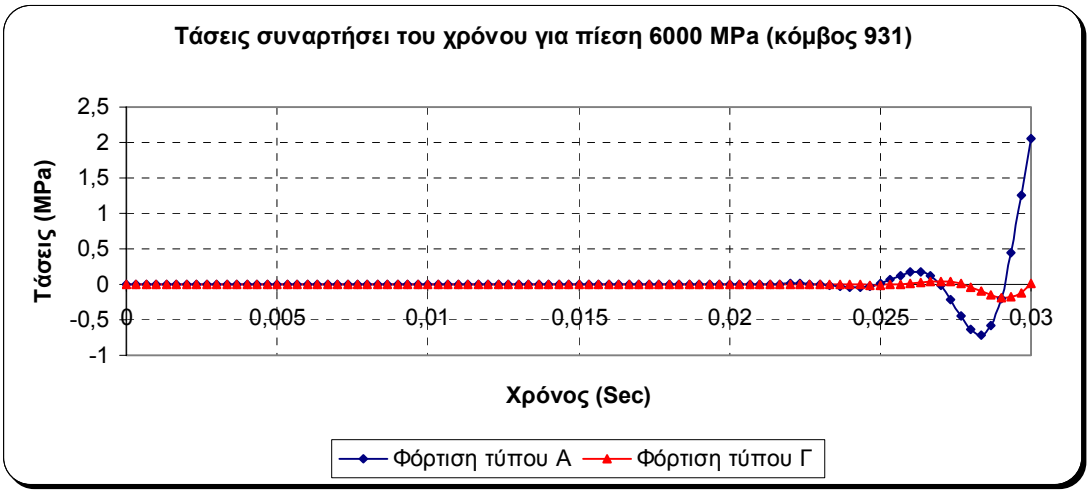
Γράφημα 6.122: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



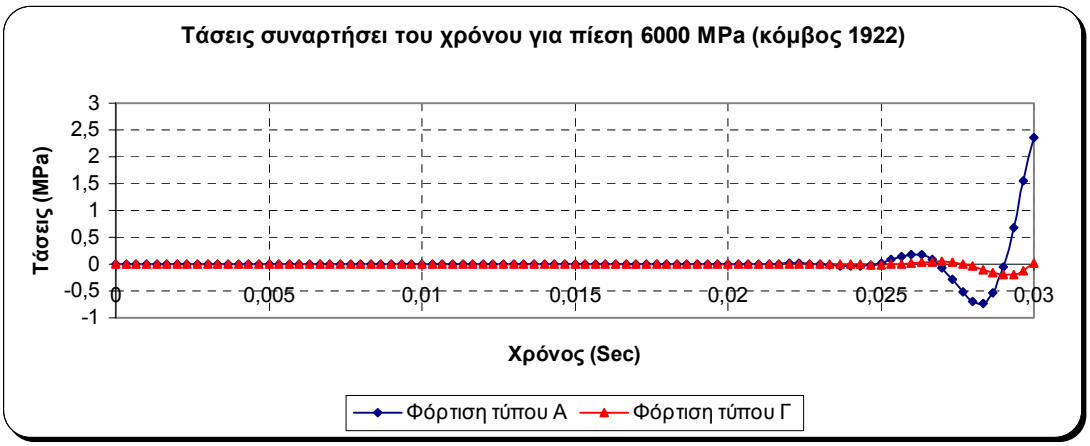
Γράφημα 6.123: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



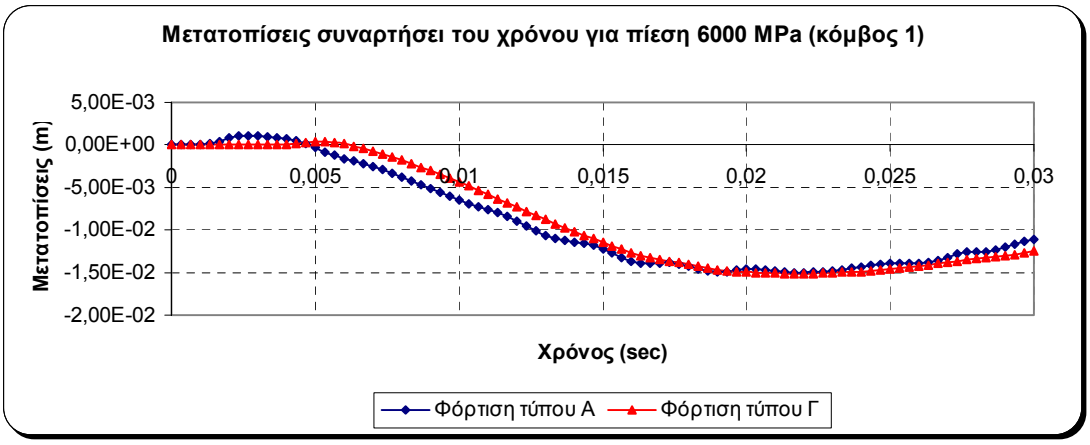
Γράφημα 6.124: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



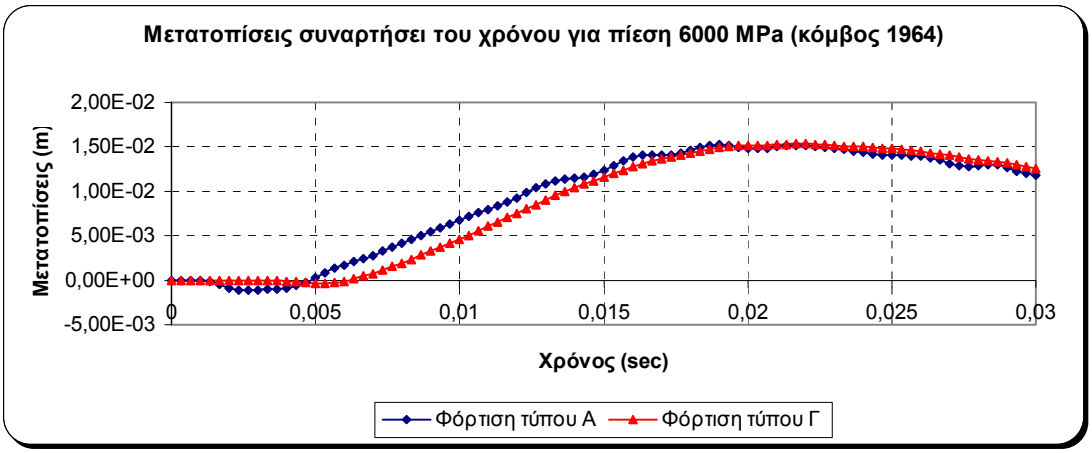
Γράφημα 6.125: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



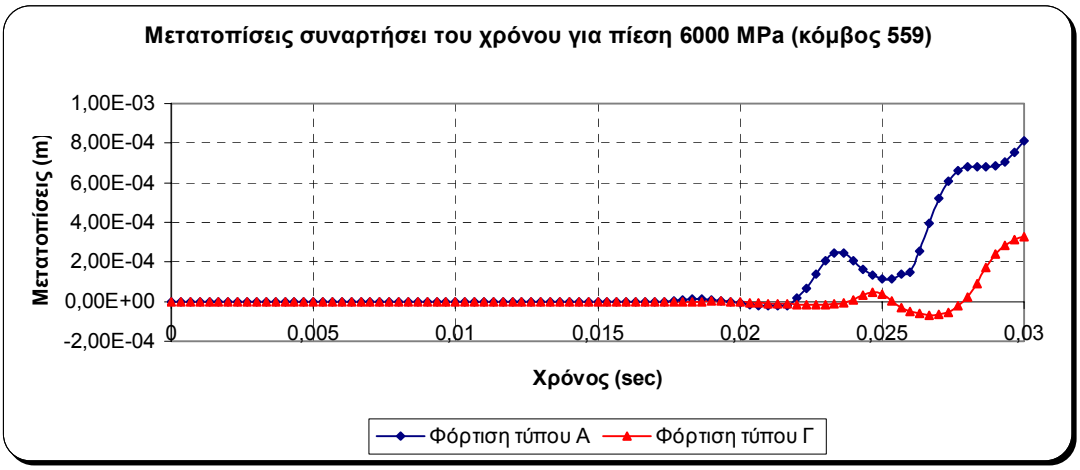
Γράφημα 6.126: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



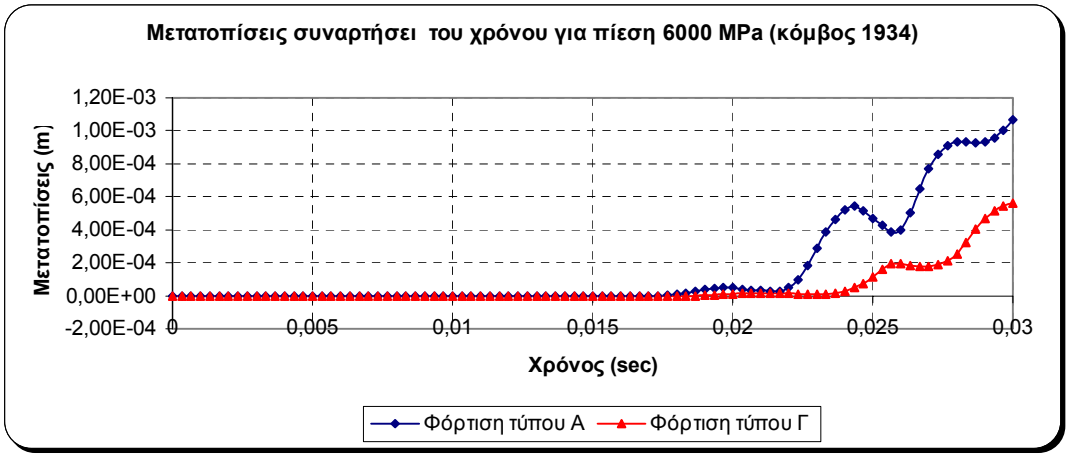
Γράφημα 6.127: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



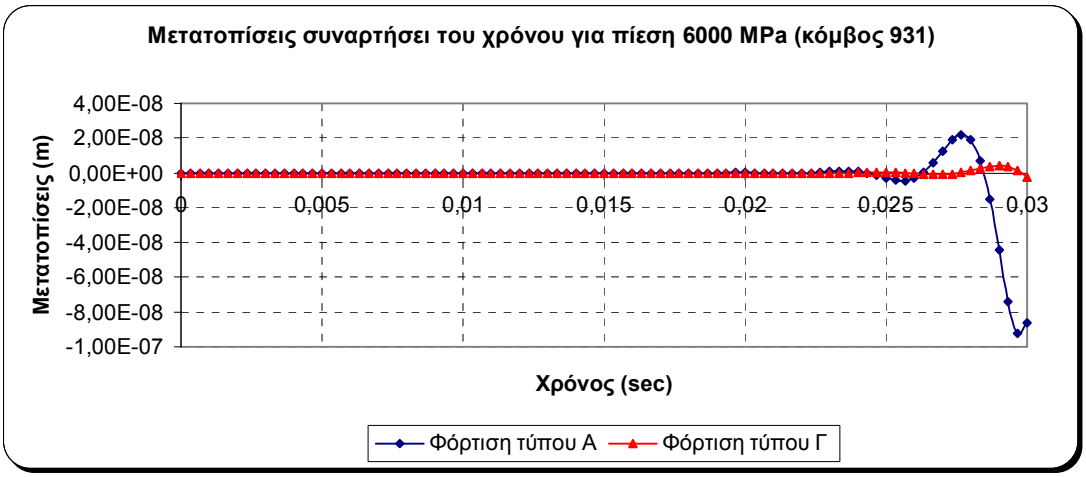
Γράφημα 6.128: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



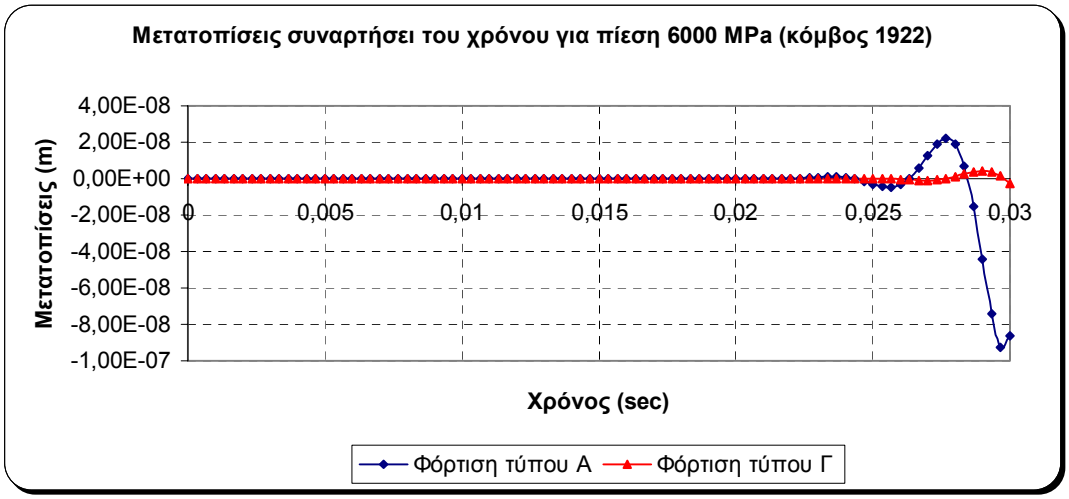
Γράφημα 6.129: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.130: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.131: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



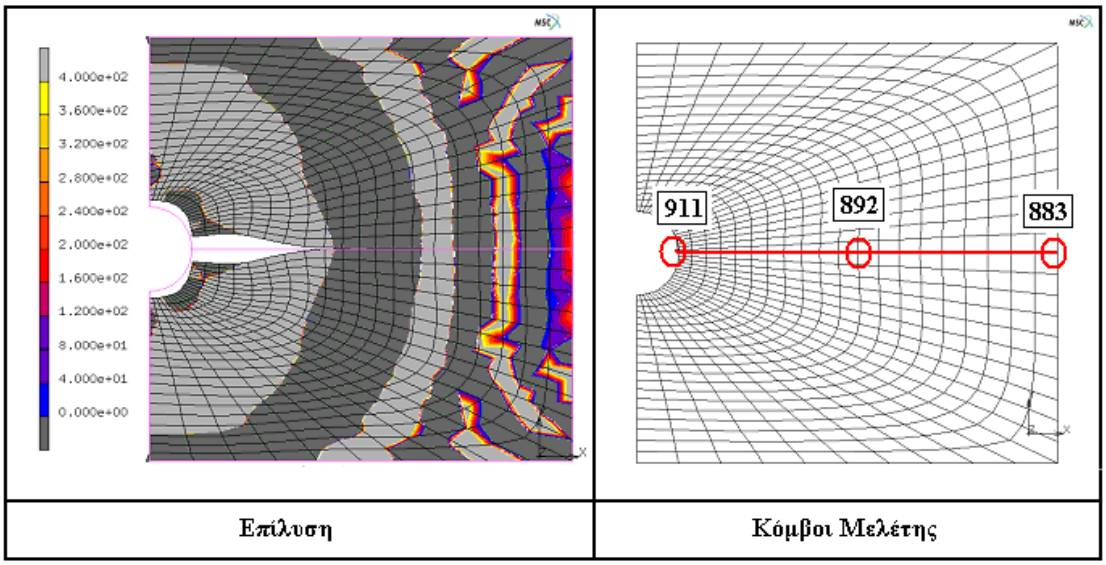
Γράφημα 6.132: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Οι τάσεις και οι μετατοπίσεις στους κόμβους που επιλέχτηκαν για πάνω και κάτω από την επιφάνεια επαφής είναι ίδιες. Στη συνέχεια θα μελετώνται μόνο οι πάνω κόμβοι μελέτης.
- Αξίζει να αναφερθεί ότι στις διάφορες δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν, η διάδοση της ρωγμής καθώς και το μέγεθος ανοίγματος ήταν πάντα ανάλογη της εφαρμοζόμενης τάσης.
- Οι τάσεις στον κόμβο επί του διατρήματος είναι αρκετά μειωμένες σε σχέση με τα προηγούμενα ελαστικά μοντέλα. Αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι μέρος των τάσεων "ξοδεύεται" στην δημιουργία και διάδοση της ρωγμής.

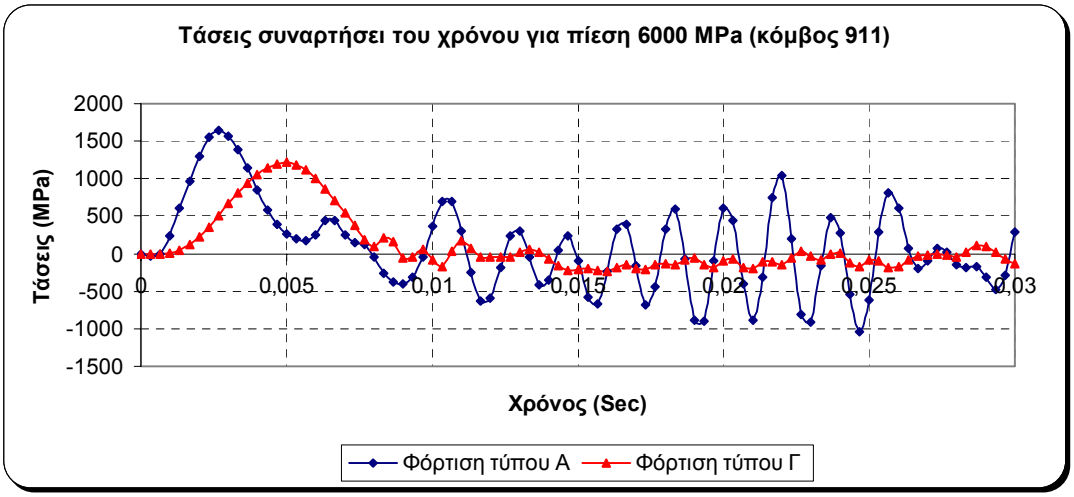
6.8.12 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (S=B) με επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής

Η ελαστική επίλυση που προέκυψε με την επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνεται στο σχήμα 6.23:

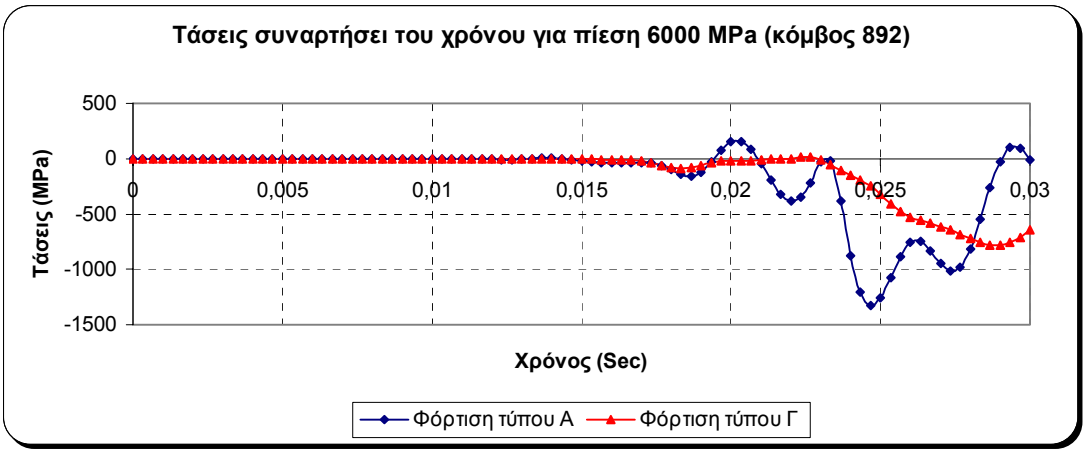


Σχήμα 6.23: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

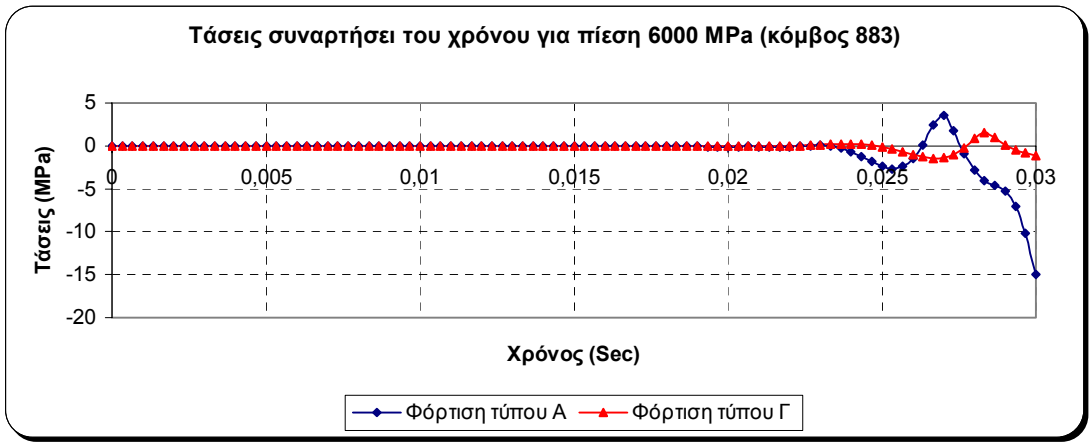
Από την επίλυση του σχήματος 6.23 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.133-6.138):



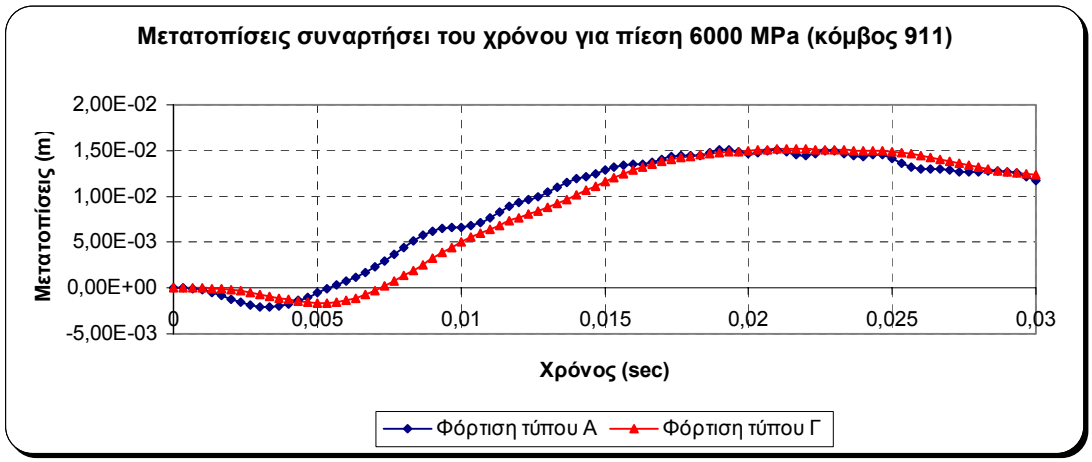
Γράφημα 6.133: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



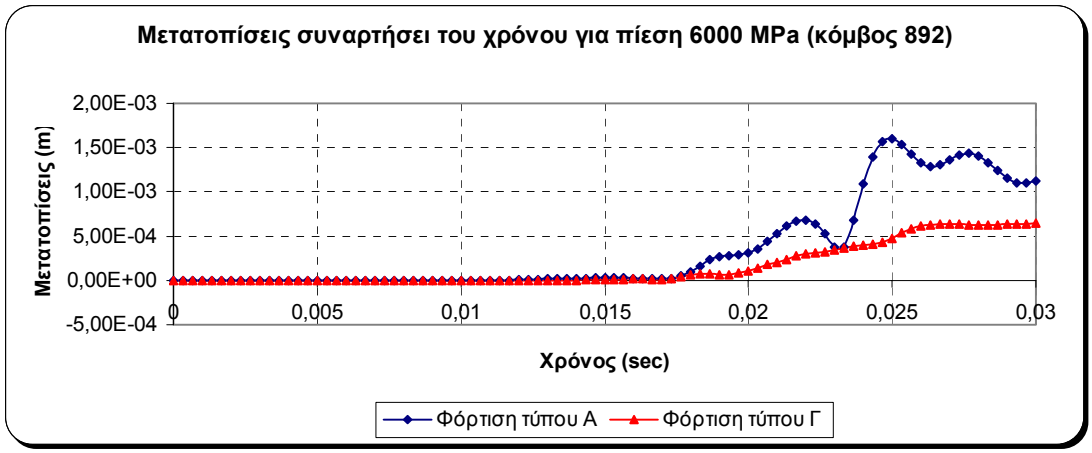
Γράφημα 6.134: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



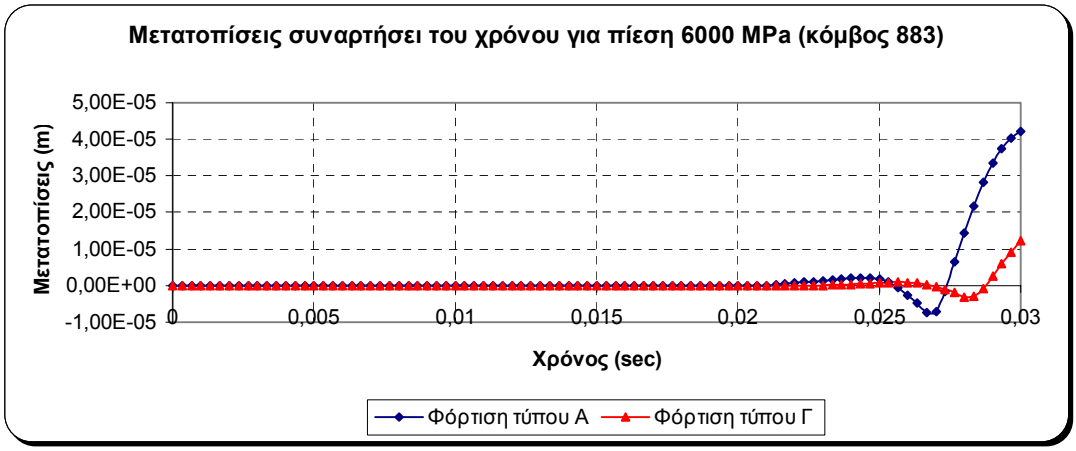
Γράφημα 6.135: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.136: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.137: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



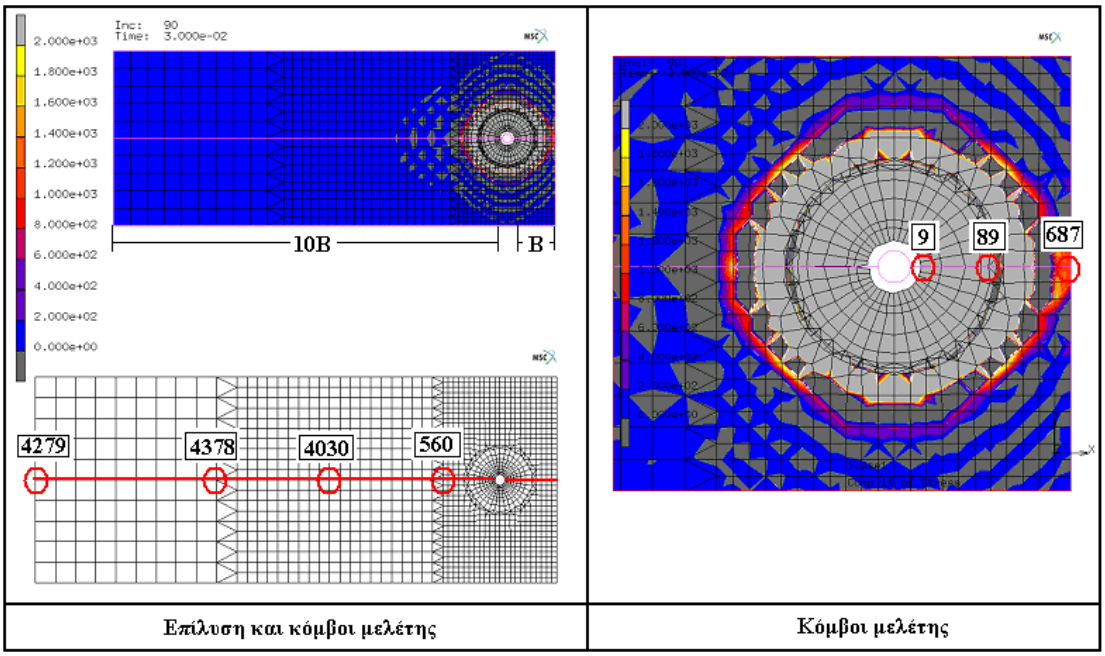
Γράφημα 6.138: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Οι τάσεις επί του διατρήματος φαίνεται να είναι εφελκυστικές όπως και στα προηγούμενα ελαστικά μοντέλα σε μειωμένη τάξη μεγέθους. Αυτό ίσως να οφείλεται στην δημιουργία και διάδοση της ρωγμής.
- Οι μετατοπίσεις στους κόμβους δεν παρουσιάζουν ταλάντωση αλλά το μέγεθος διεύρυνσης της ρωγμής, δηλαδή πόσο αποχωρίζεται το ένα κομμάτι από το άλλο.

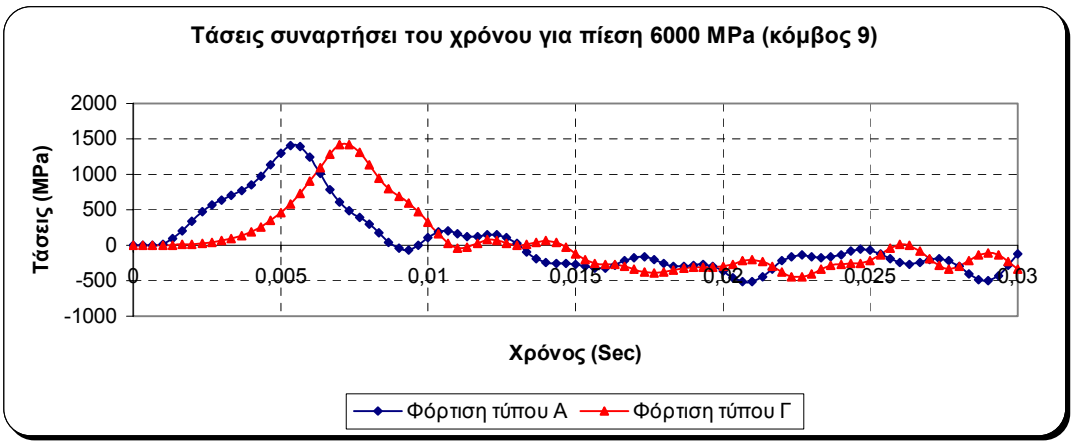
6.8.13 Μοντελοποίηση συμμετρίας ελαστικού υλικού (Εξάπλωση τάσεων σε άπειρο μέσο) με επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής

Η ελαστική επίλυση που προέκυψε με την επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνεται στο σχήμα 6.24:

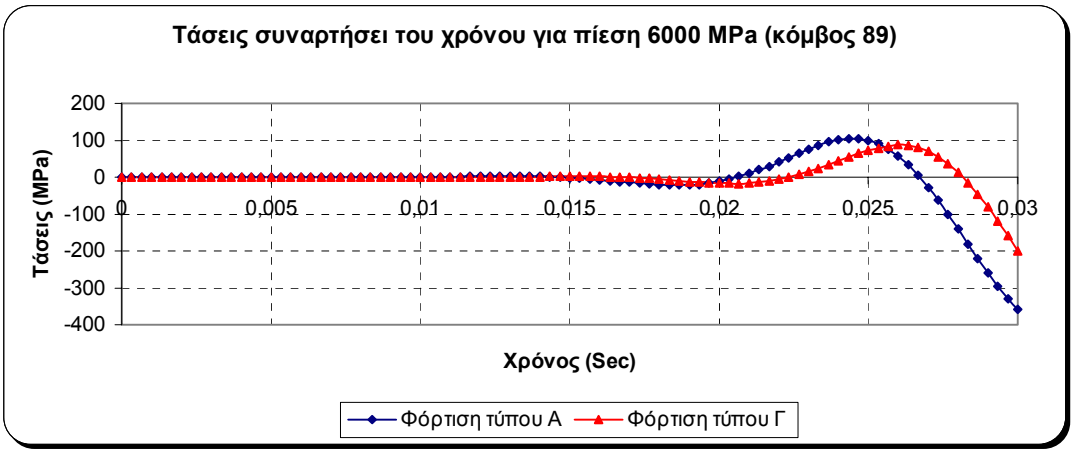


Σχήμα 6.24: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

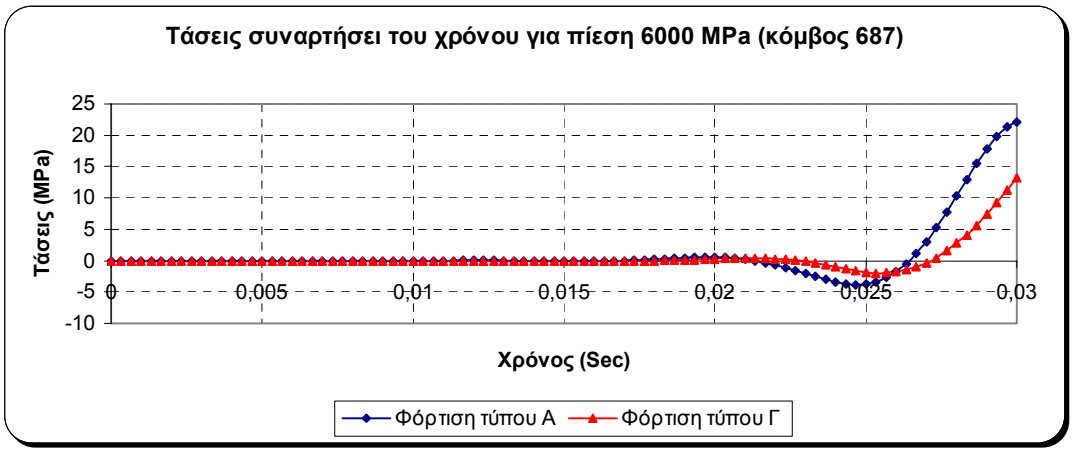
Από την επίλυση του σχήματος 6.24 λαμβάνονται τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.139-6.152):



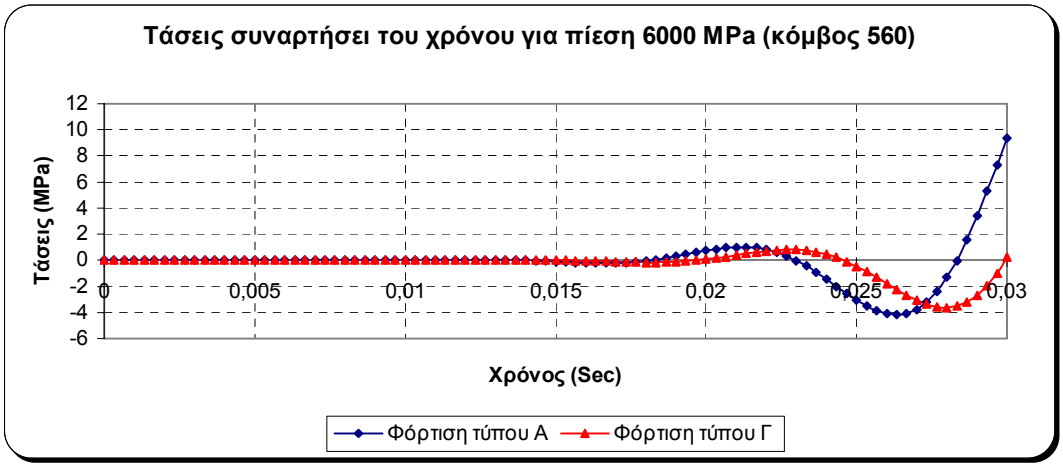
Γράφημα 6.139: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



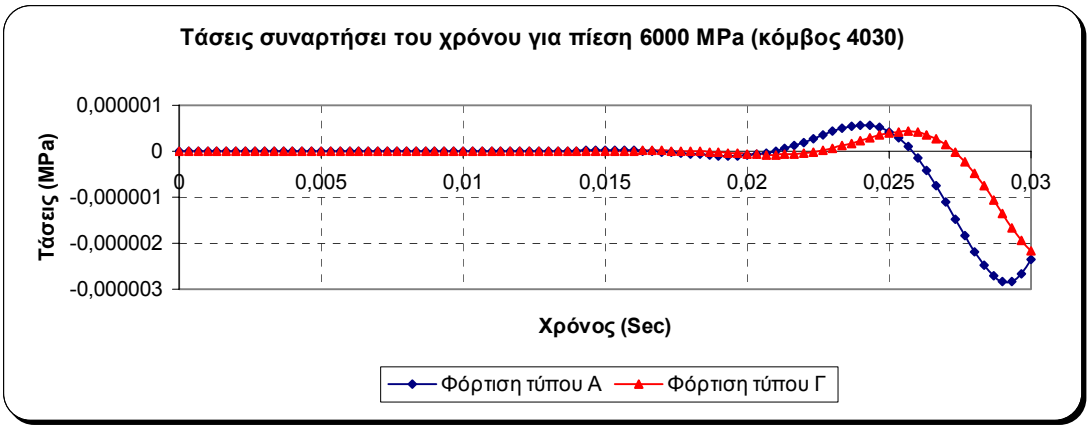
Γράφημα 6.140: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



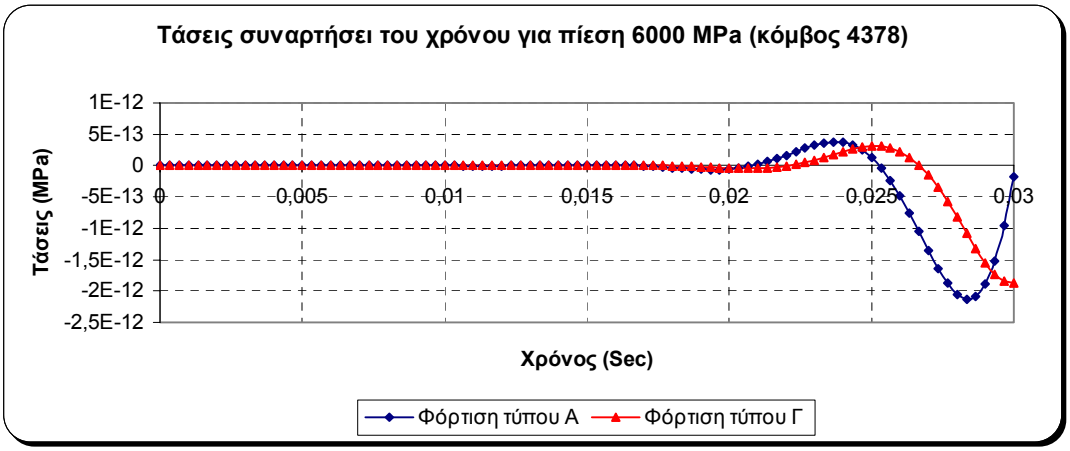
Γράφημα 6.141: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



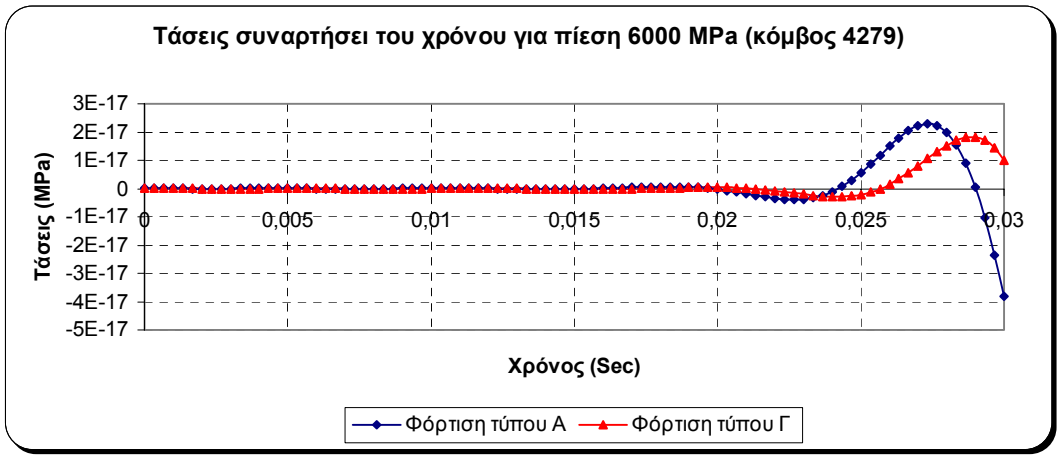
Γράφημα 6.142: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



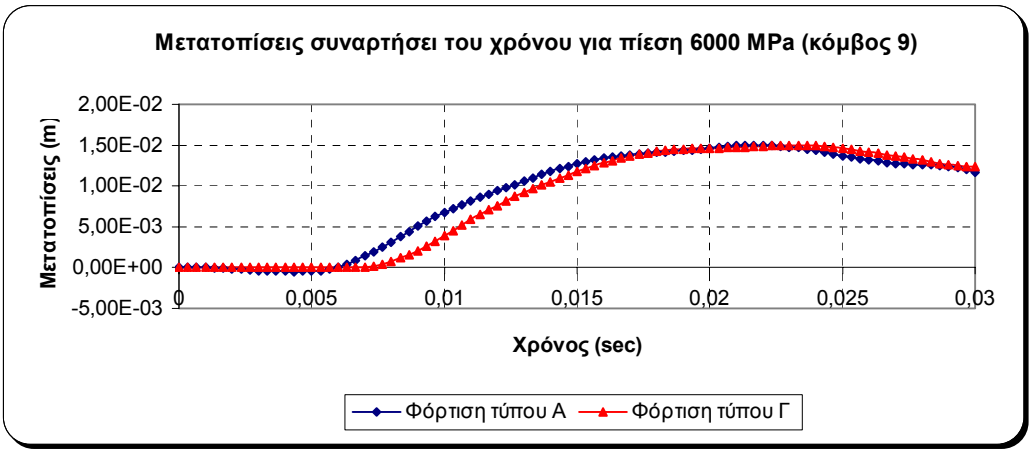
Γράφημα 6.143: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



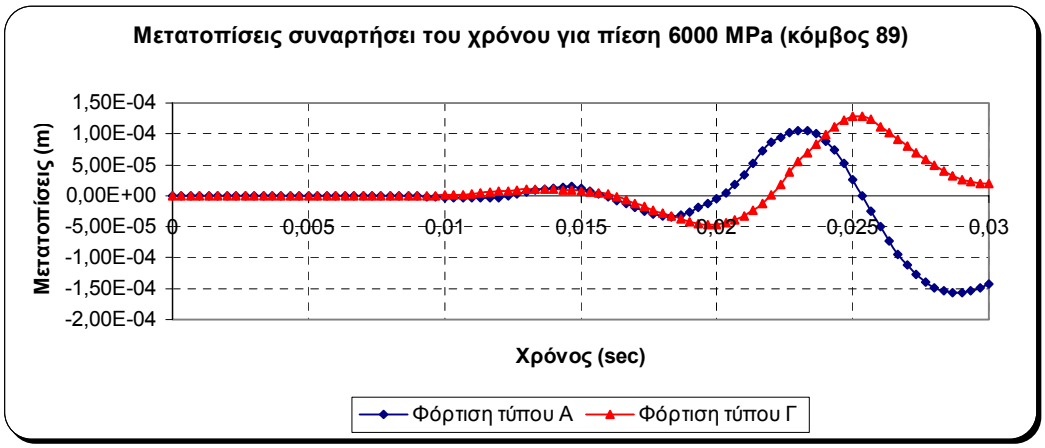
Γράφημα 6.144: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



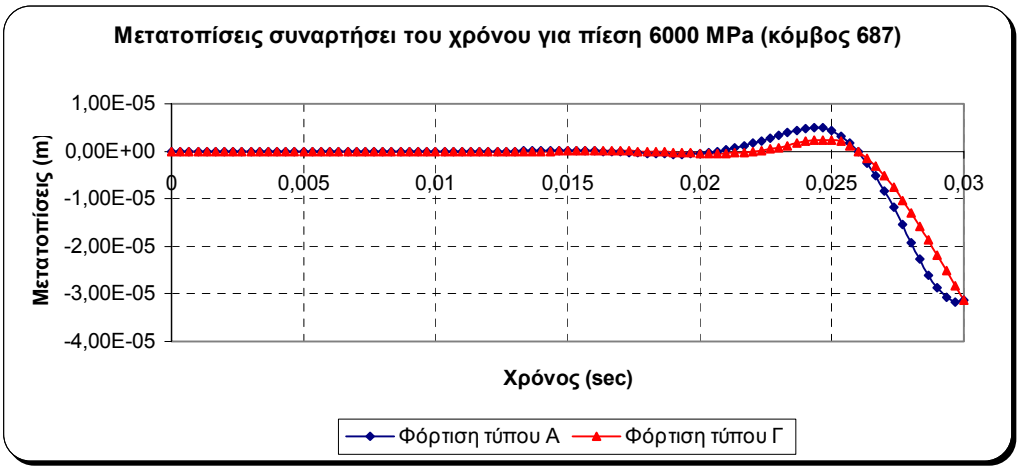
Γράφημα 6.145: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



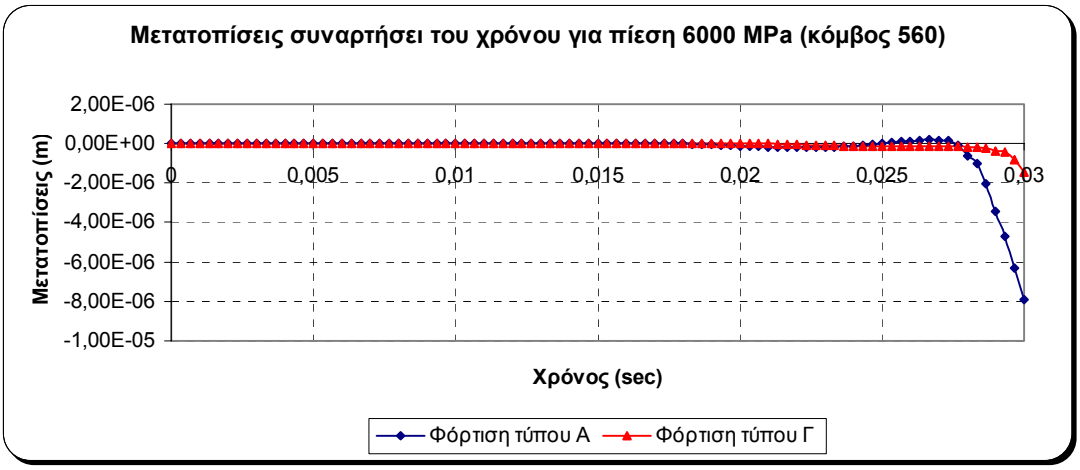
Γράφημα 6.146: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



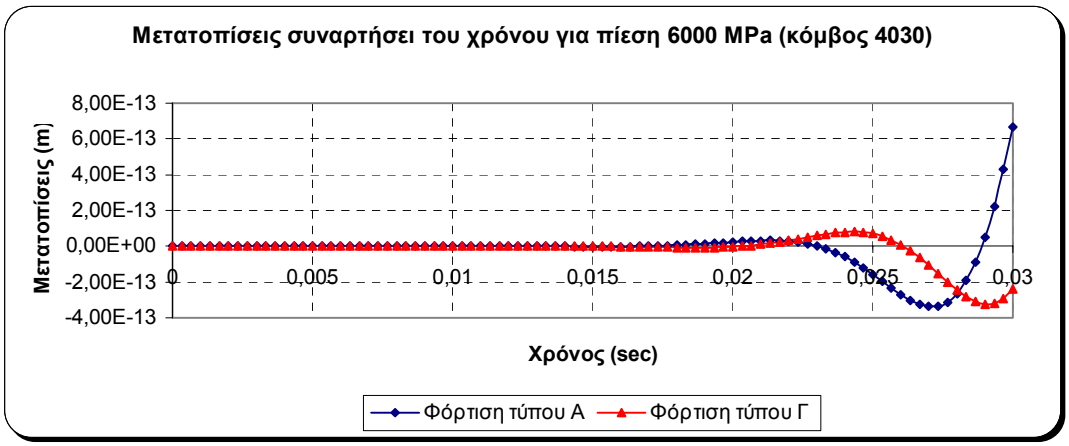
Γράφημα 6.147: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



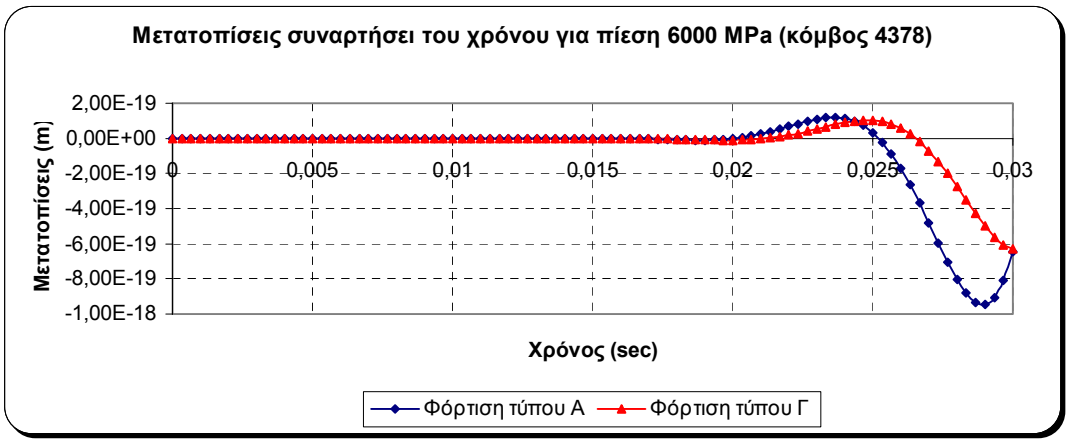
Γράφημα 6.148: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



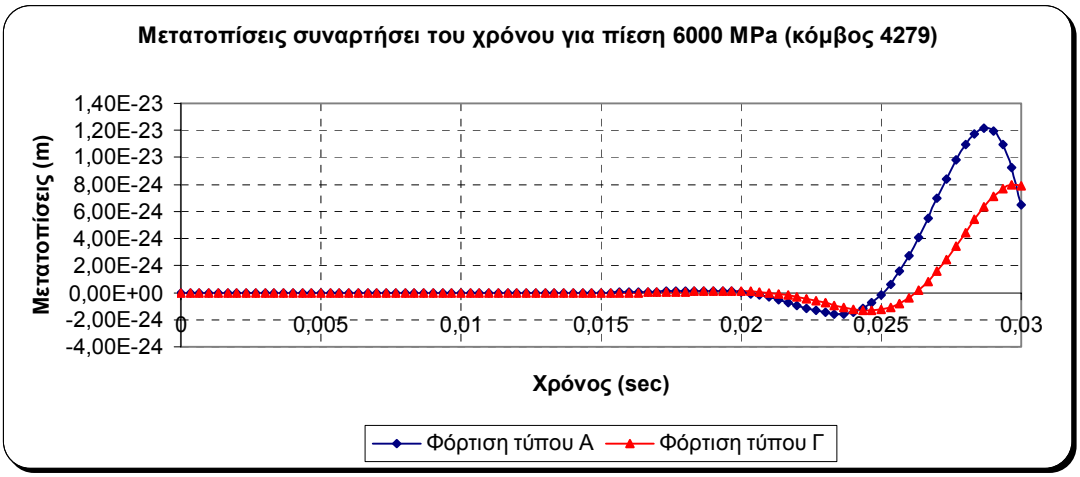
Γράφημα 6.149: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.150: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.151: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



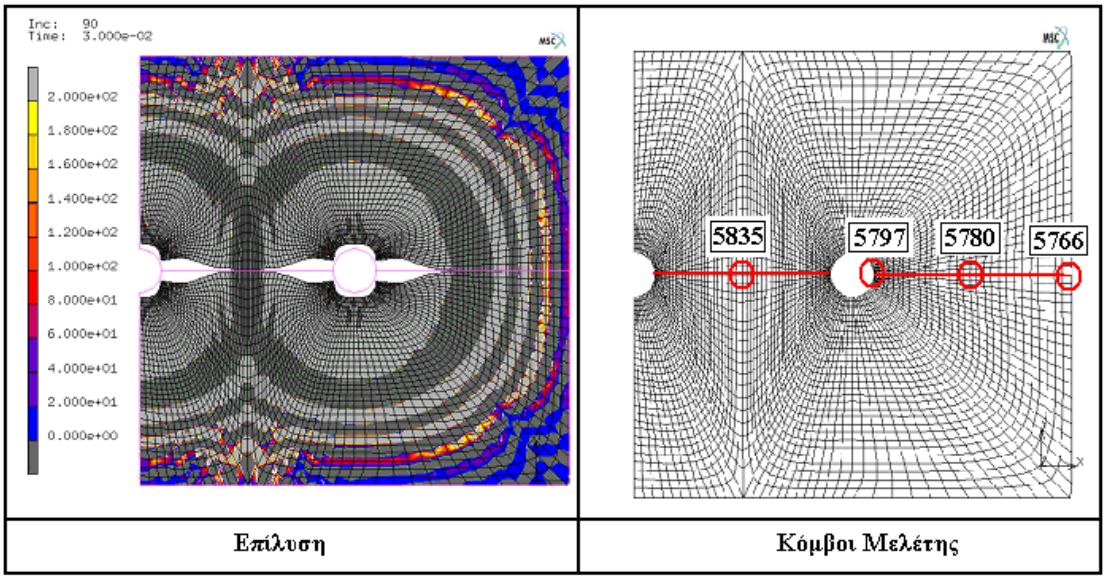
Γράφημα 6.152: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρήσεις:

- Η ρωγμή στο μοντέλο αυτό είναι πολύ μικρή. Οι τάσεις και μετατοπίσεις στον κόμβο επί του διατρήματος είναι όμοιες με το προηγούμενο μοντέλο που αντιπροσωπεύουν την ρωγμή. Οι τάσεις παρουσιάζουν αυξομοίωση ενώ οι μετατοπίσεις εκφράζουν τον αποχωρισμό.
- Μακριά από το διάτρημα όπου δεν διαδόθηκε η ρωγμή, η μορφή των τάσεων είναι ίδια και σε τάξη μεγέθους με το ελαστικό μοντέλο 6.8.3 χωρίς την προκαθορισμένη ρωγμή. Οι κόμβοι ταλαντώνονται με την ίδια μορφή και τάξη μεγέθους με το μοντέλο 6.8.3

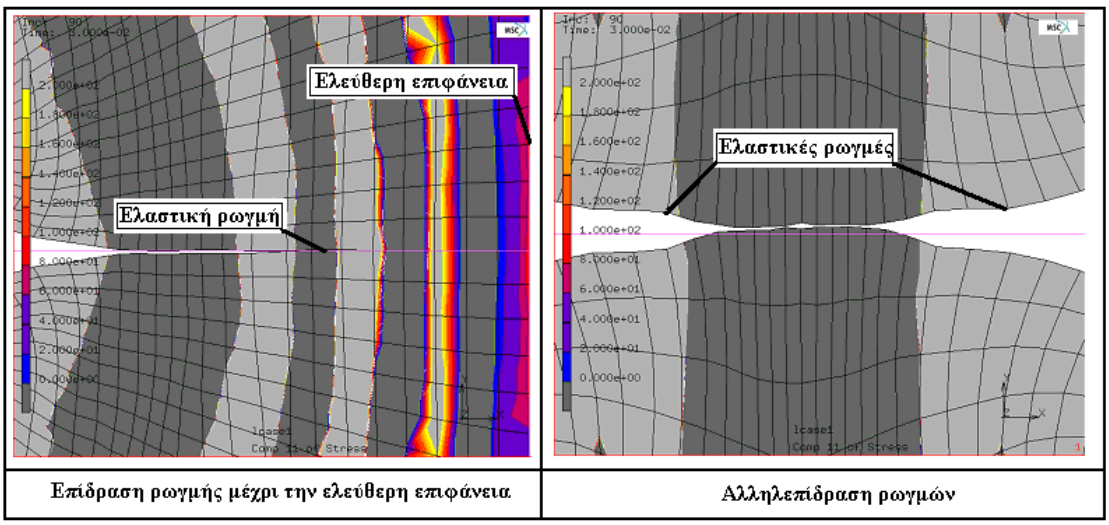
6.8.14 Μοντελοποίηση συμμετρίας πολλαπλής σειράς έναυσης ελαστικού υλικού με επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής

Η ελαστική επίλυση που προέκυψε με την επίδραση προκαθορισμένης ρωγμής καθώς επίσης και οι κόμβοι μελέτης φαίνεται στο σχήμα 6.25:

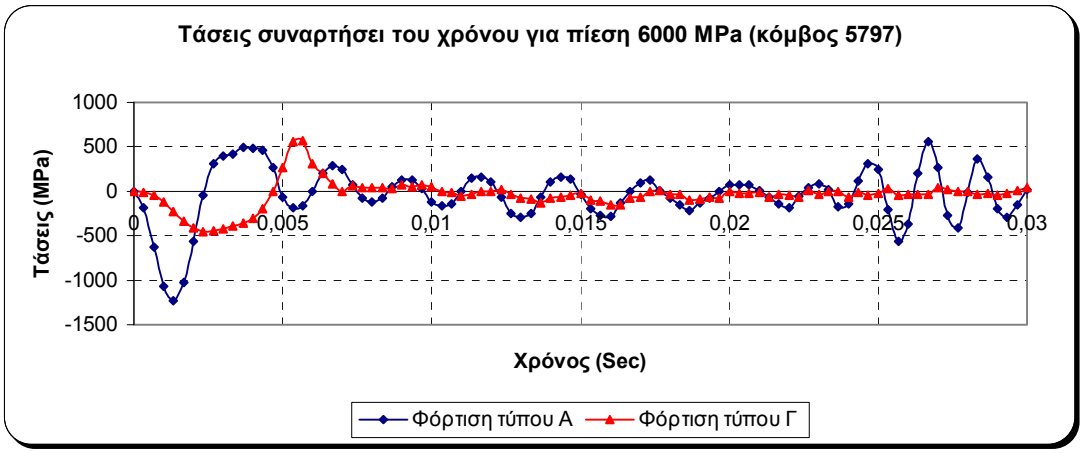


Σχήμα 6.25: Επίλυση μοντέλων και κόμβοι μελέτης

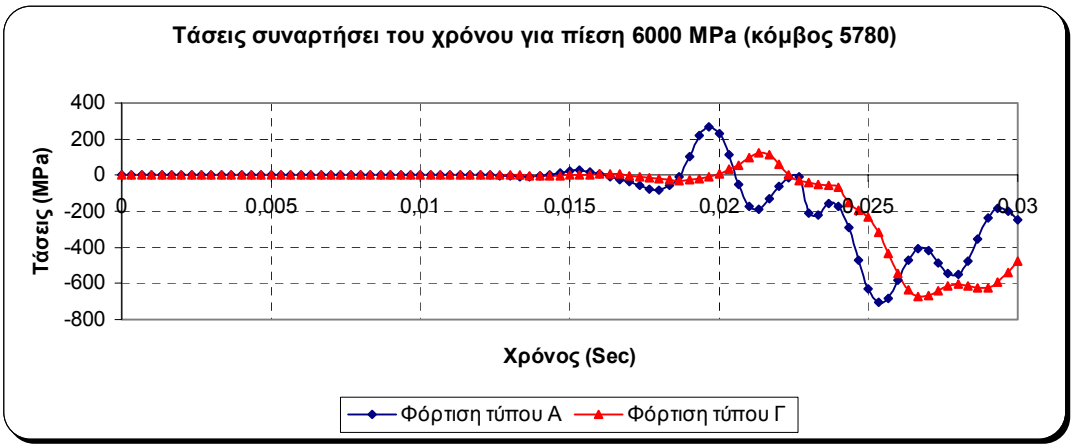
Στο σχήμα 6.26 φαίνεται σε μεγέθυνση η επίδραση της ελαστικής ρωγμής μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια καθώς επίσης και η αλληλεπίδραση των ρωγμών από δυο διατρήματα όπου μπορεί να θεωρηθεί ως κοπή του πετρώματος από περίπτωση ελεγχόμενης ανατίναξης. Ακολουθούν και τα γραφήματα τάσεων και μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου (γραφήματα 6.153-6.160)



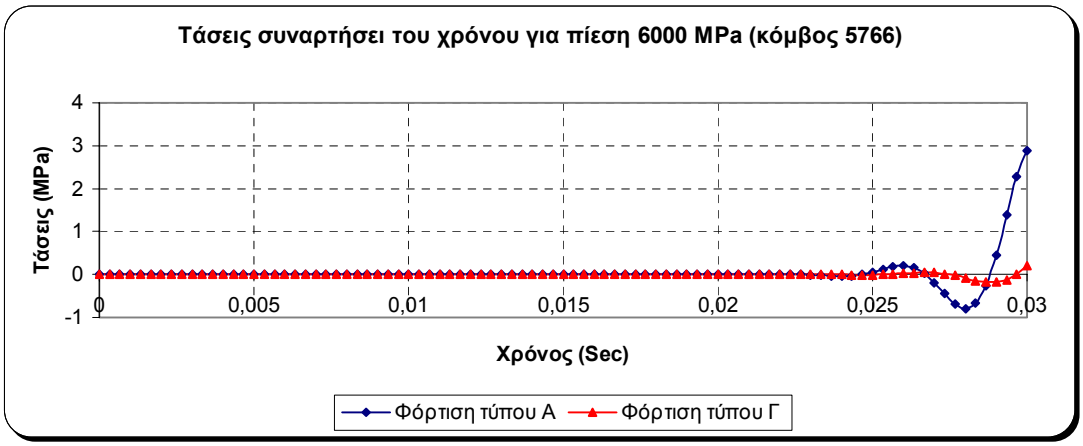
Σχήμα 6.26: Ελαστική ρωγμή και αλληλεπίδραση ρωγμών



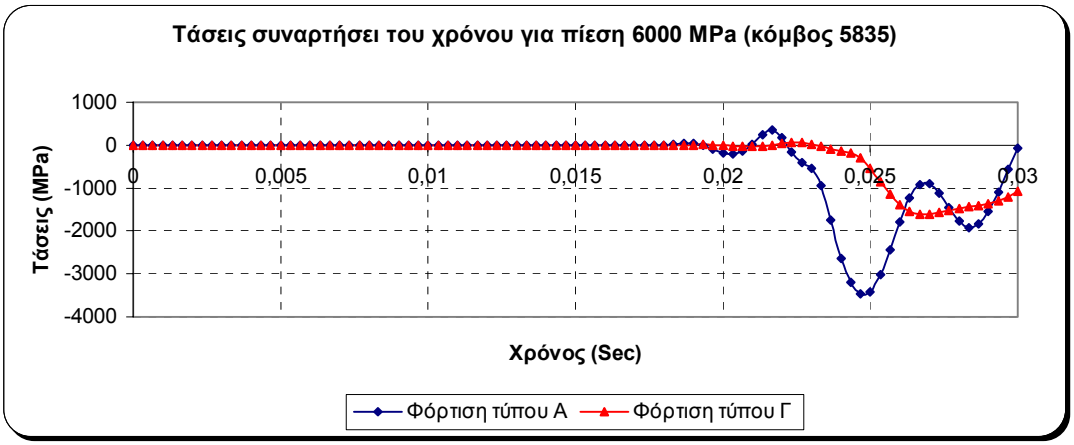
Γράφημα 6.153: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



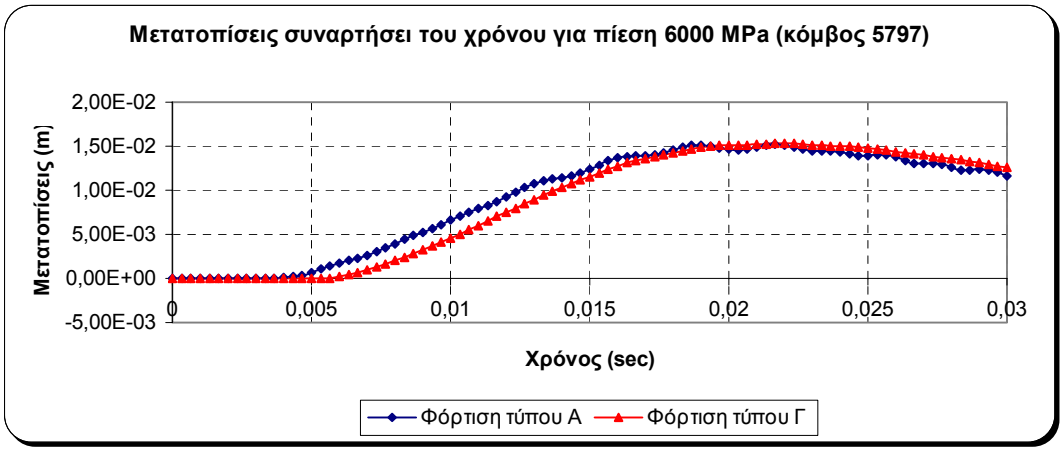
Γράφημα 6.154: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



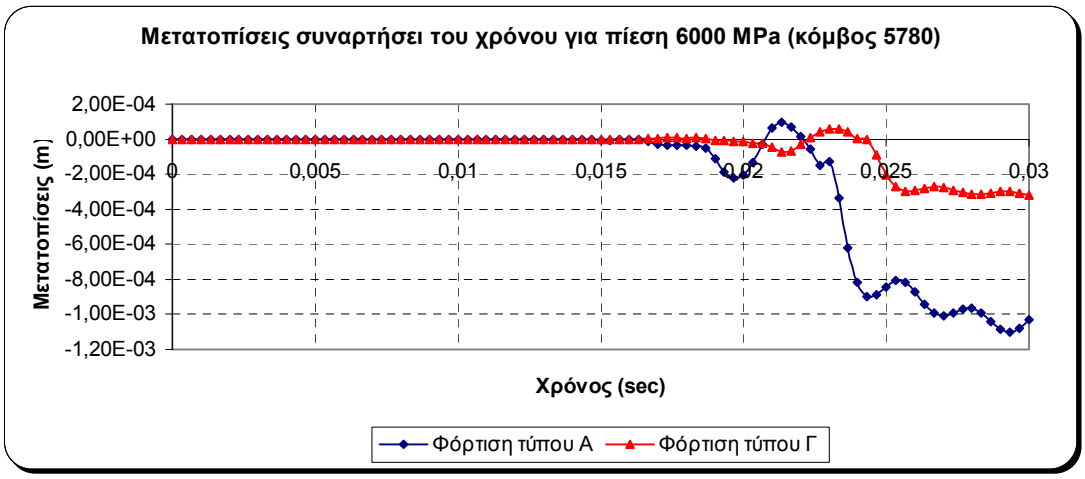
Γράφημα 6.155: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



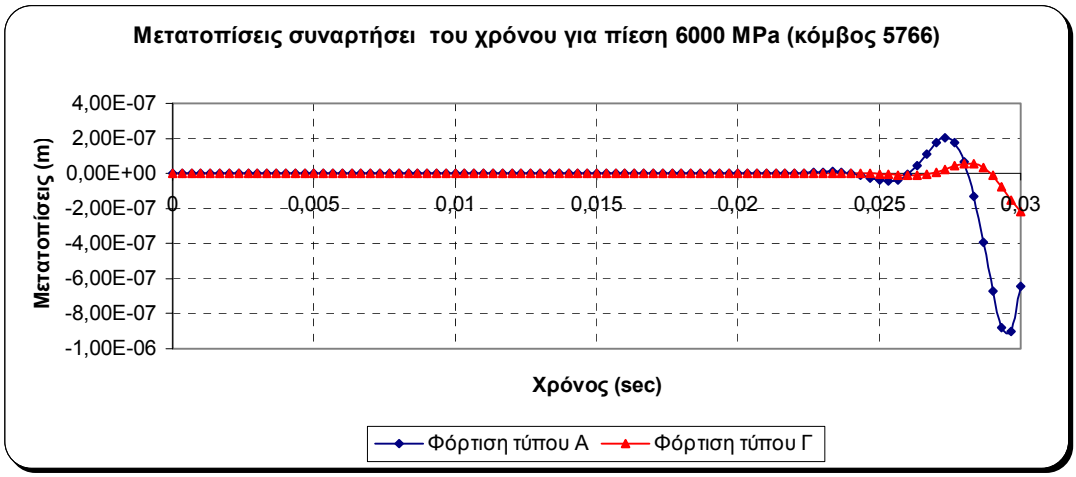
Γράφημα 6.156: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



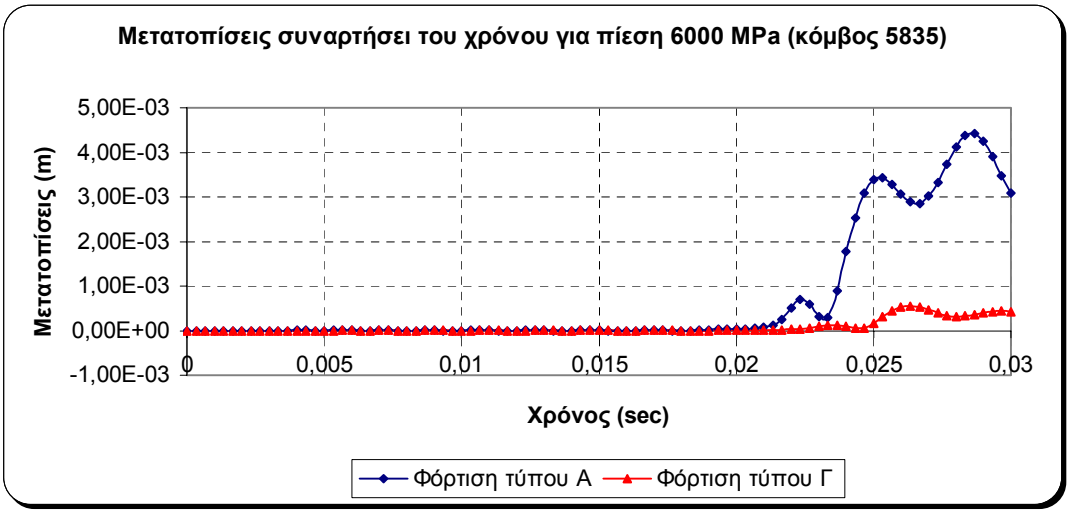
Γράφημα 6.157: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.158: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.159: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 6.160: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

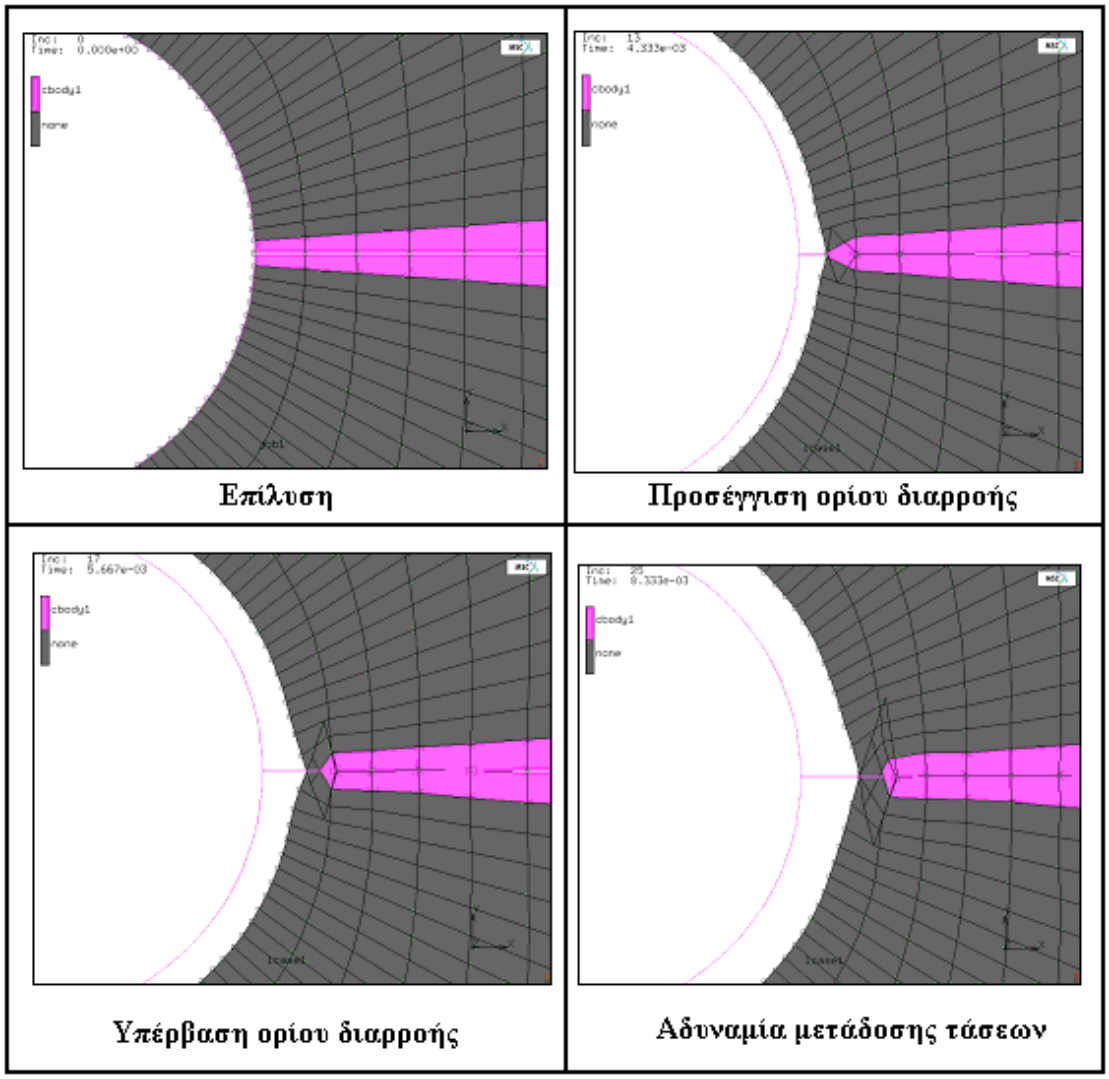
<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Όμοια με προηγούμενα μοντέλα

Η ελαστοπλαστική επίλυση με προκαθορισμένη ρωγμή δεν μπόρεσε να γίνει με την μέθοδο ολοκλήρωσης Newmark. Η επίλυση έγινε δυνατή με την μέθοδο Houbolt που όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενα εδάφια, η μέθοδος αυτή παρουσιάζει ισχυρή απόσβεση καθιστώντας την μέθοδο κατάλληλη και ευσταθή στα προβλήματα δυναμικής επαφής, καθώς επίσης γίνεται χρήση της μεθόδου διότι δίνει

εξομαλυσμένα δεδομένα. Η επίλυση των μοντέλων δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί με διαφορετική μέθοδο όμως από την μέθοδο Newmark διότι δεν θα είναι συγκρίσιμα τα αποτελέσματα που θα ληφθούν με τα προηγούμενα.

Η αδυναμία επίλυσης των ελαστοπλαστικών μοντέλων με την μέθοδο Newmark και η επιτυχία επίλυσης τους με την μέθοδο Houbolt ίσως να οφείλεται στο ότι τα στοιχεία που είναι πάνω στην επαφή, φτάνουν γρήγορα το όριο διαρροής τους και αστοχούν με την συνεχή επιβολή τάσεων. Με τον όρο αστοχία στη διακριτοποίηση εννοείται ότι το στοιχείο αν και μπορεί να παραλάβει τάσεις, δεν μπορεί τις μεταδώσει στην περίπτωση προβλημάτων επαφής με αποτέλεσμα να παραμορφώνεται υπερβολικά και στο τέλος δεν γίνεται σωστή κατάστρωση των μητρώων για την επίλυση του συστήματος.



Σχήμα 6.27: Αστοχία στοιχείων

7. Συμπεράσματα και Προτάσεις

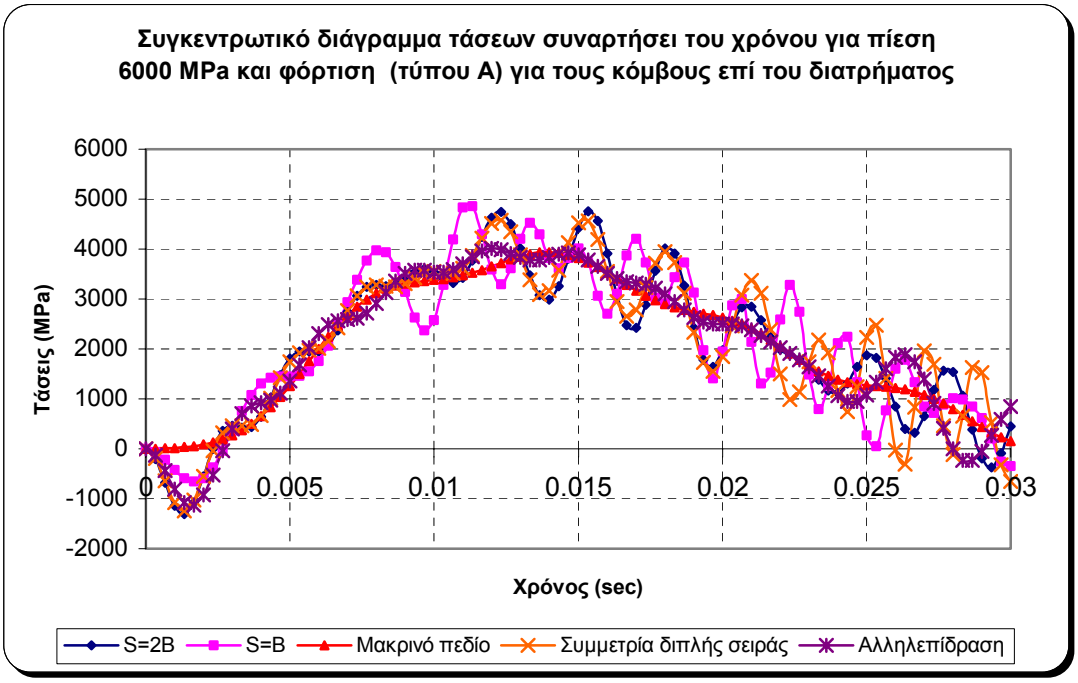
7.1 Εισαγωγή

Από την παρούσα διπλωματική εργασία προέκυψαν κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα, μερικά από αυτά έχουν ήδη αναφερθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η προσπάθεια να συνοψισθούν όλα μαζί καθώς επίσης γίνονται και κάποιες προτάσεις για επέκταση και βελτίωση της παρούσας ανάλυσης.

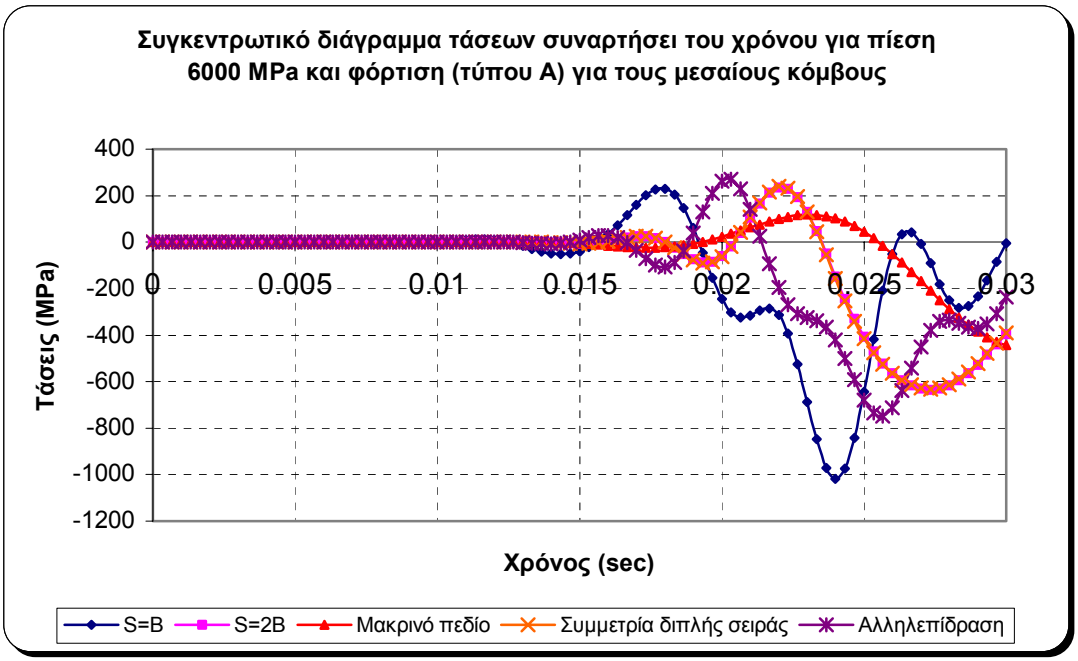
7.2 Συμπεράσματα

Από την ανάλυση των μοντέλων που δημιουργήθηκαν λαμβάνονται τα συγκριτικά συγκεντρωτικά διαγράμματα τάσεων συναρτήσει του χρόνου και μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου για τις δυο φορτίσεις ξεχωριστά. Σε ξεχωριστή κατηγορία παρουσιάζονται επίσης και τα διαγράμματα ελαστικής και ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς (γραφήματα 7.1-7.24).

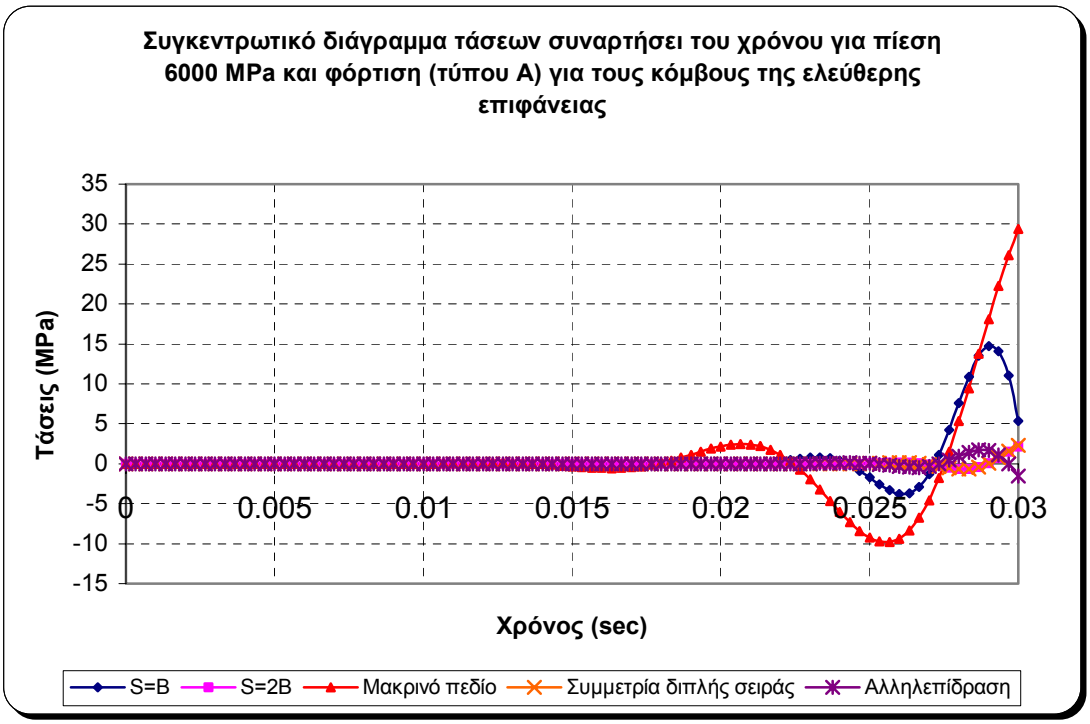
Φορτίσεις (τύπου Α) Ελαστικά Μοντέλα:



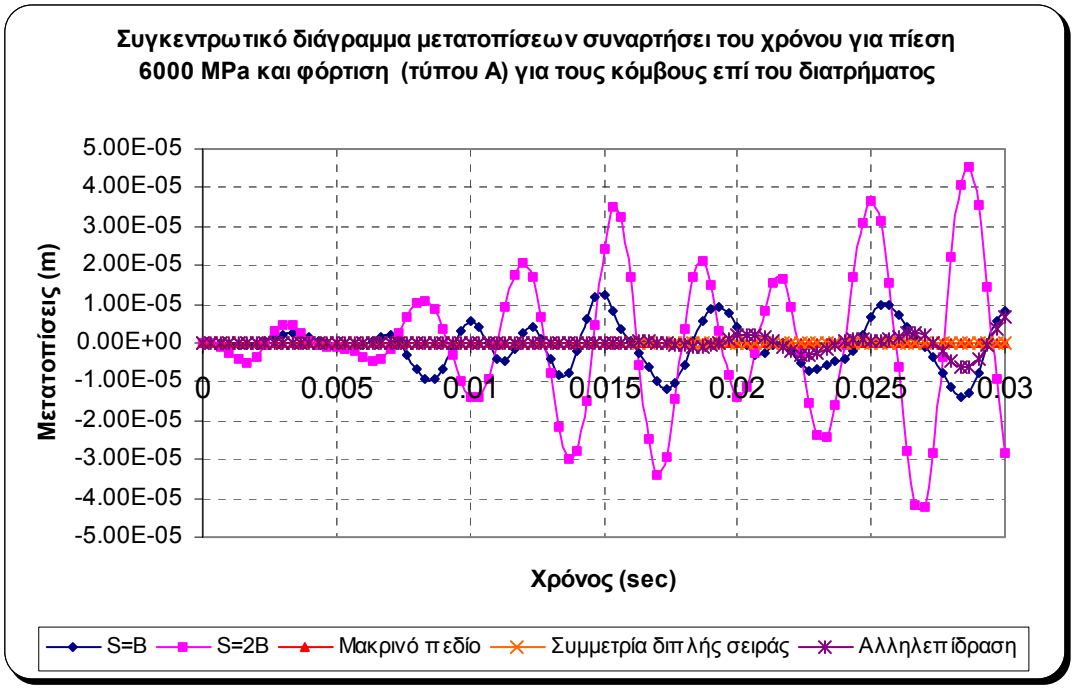
Γράφημα 7.1: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



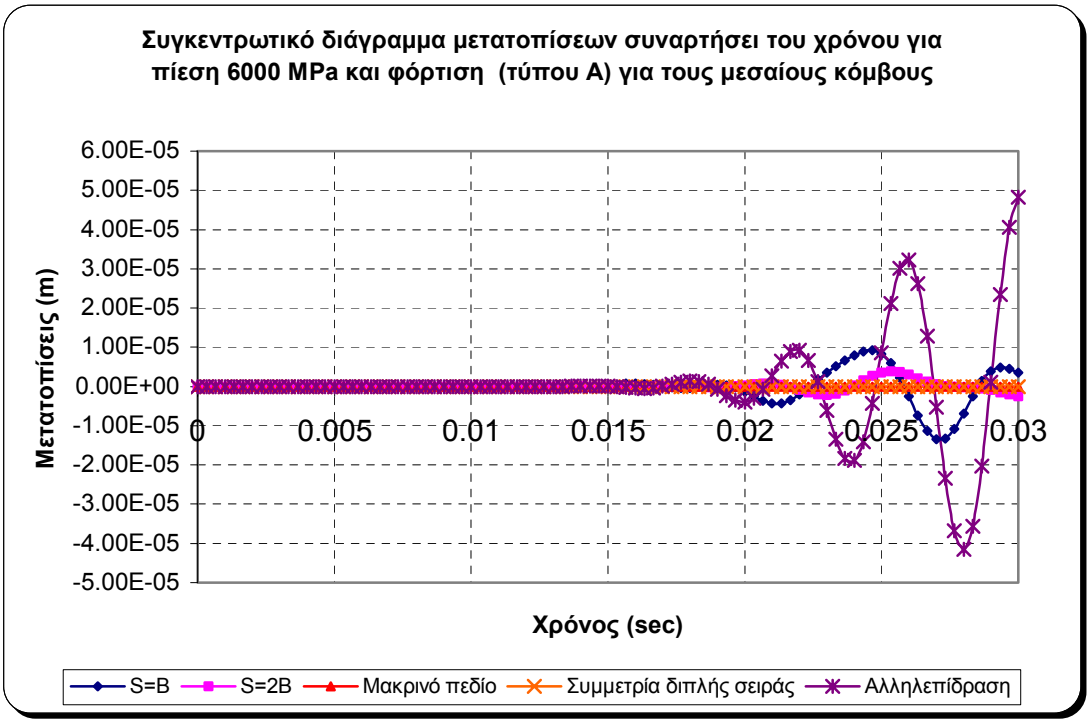
Γράφημα 7.2: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



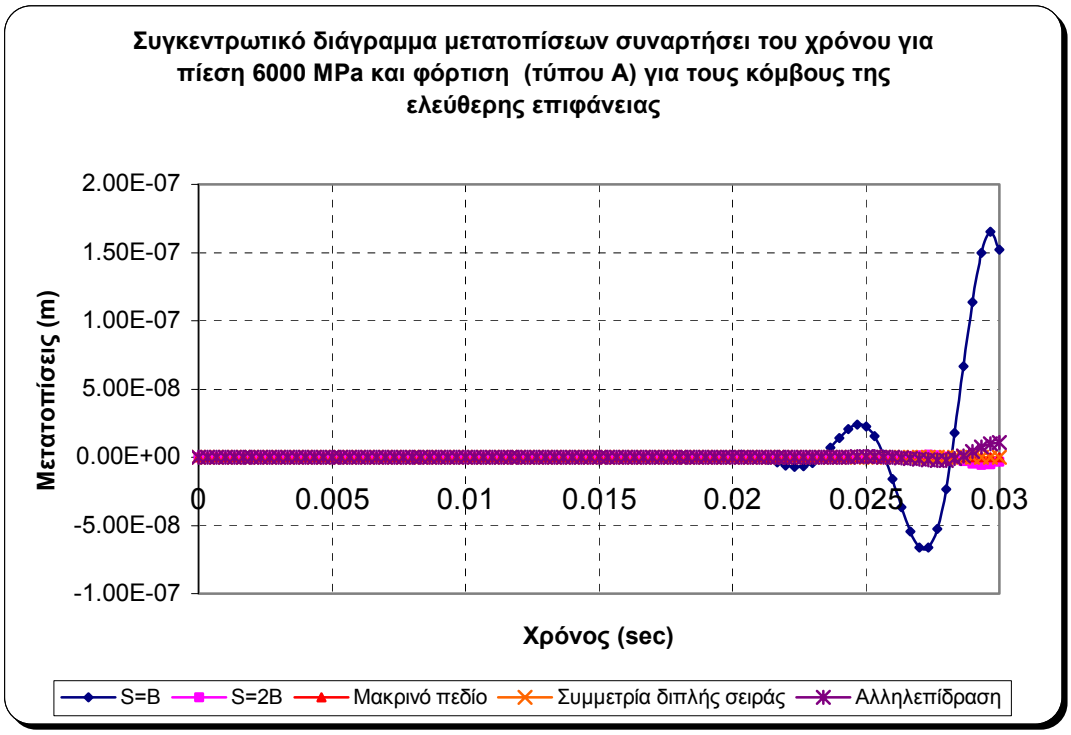
Γράφημα 7.3: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 7.4: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

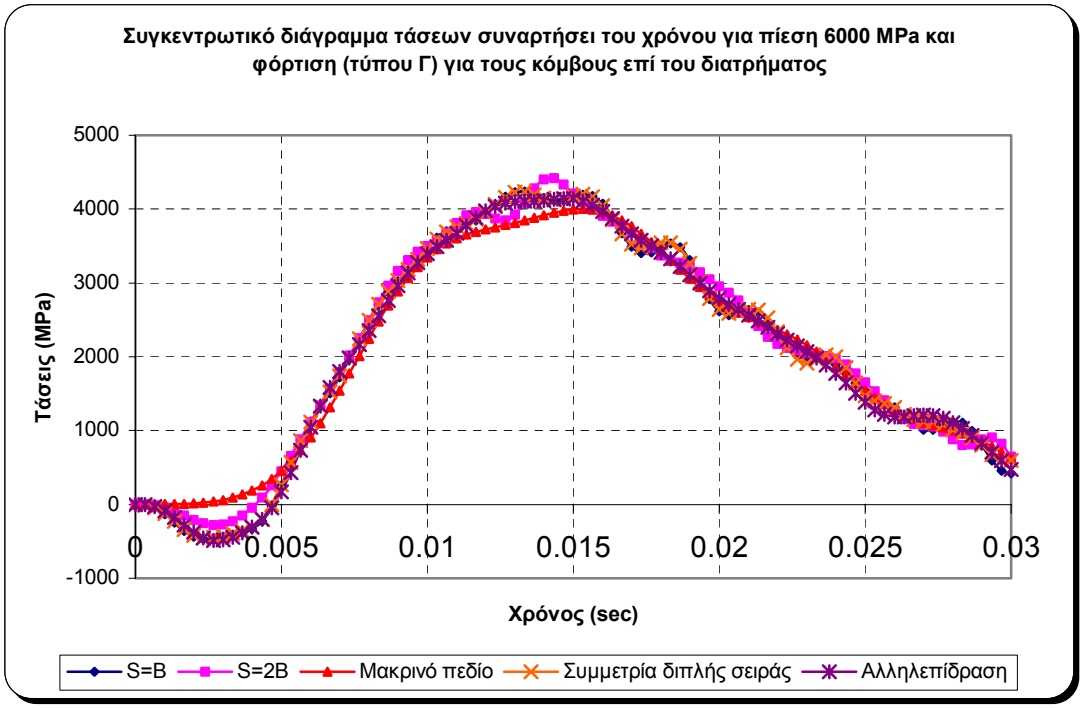


Γράφημα 7.5: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

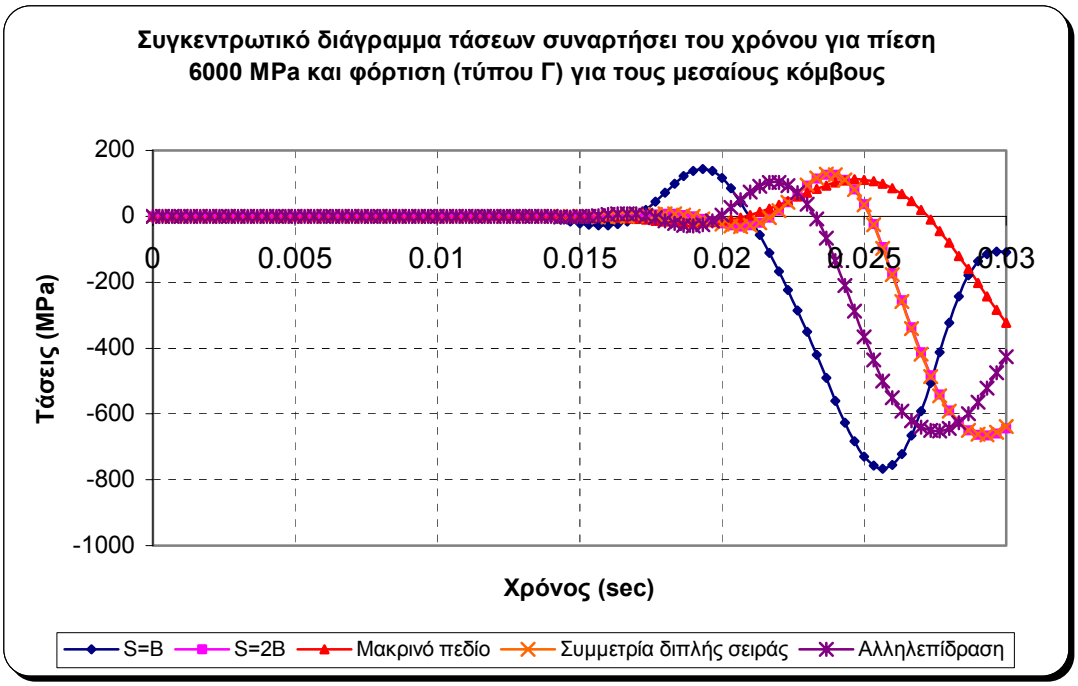


Γράφημα 7.6: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

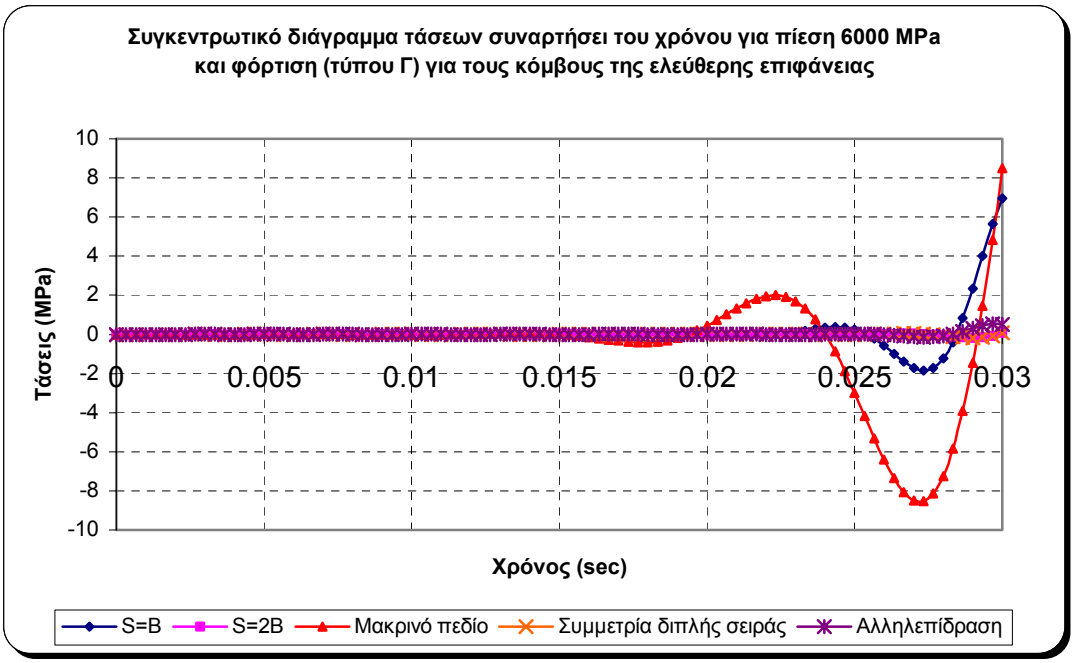
Φορτίσεις (τύπου Γ) Ελαστικά Μοντέλα:



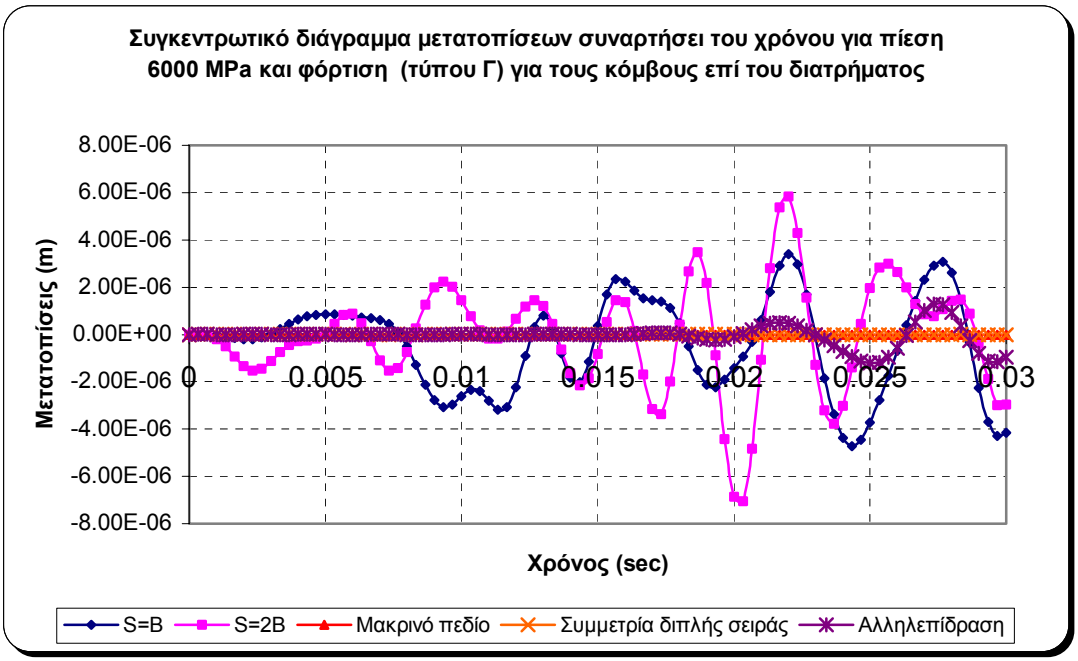
Γράφημα 7.7: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



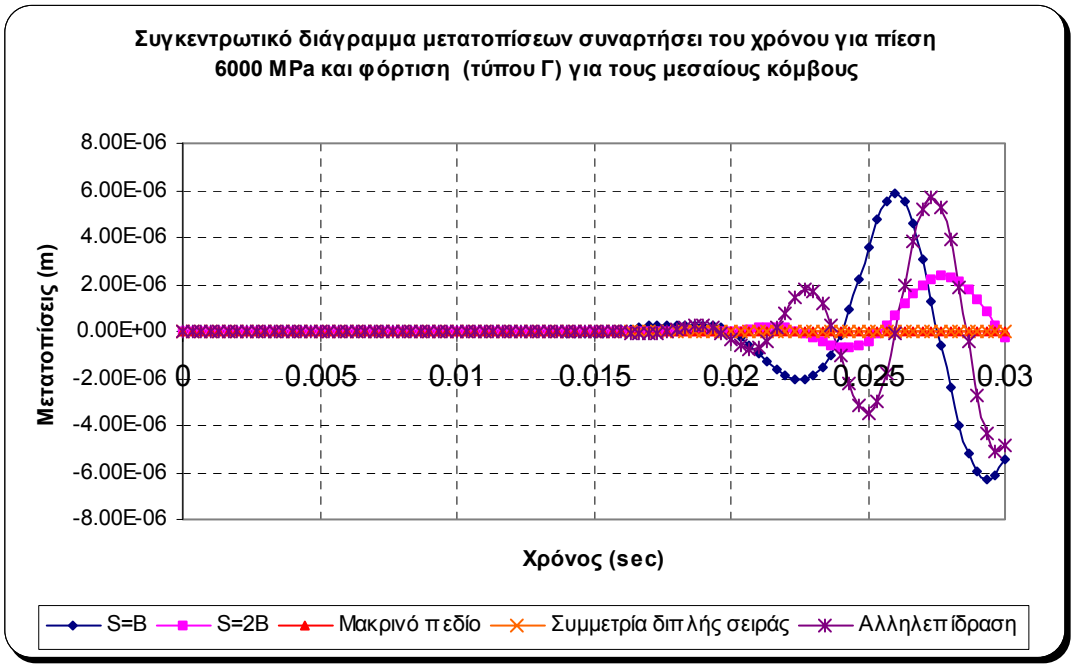
Γράφημα 7.8: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



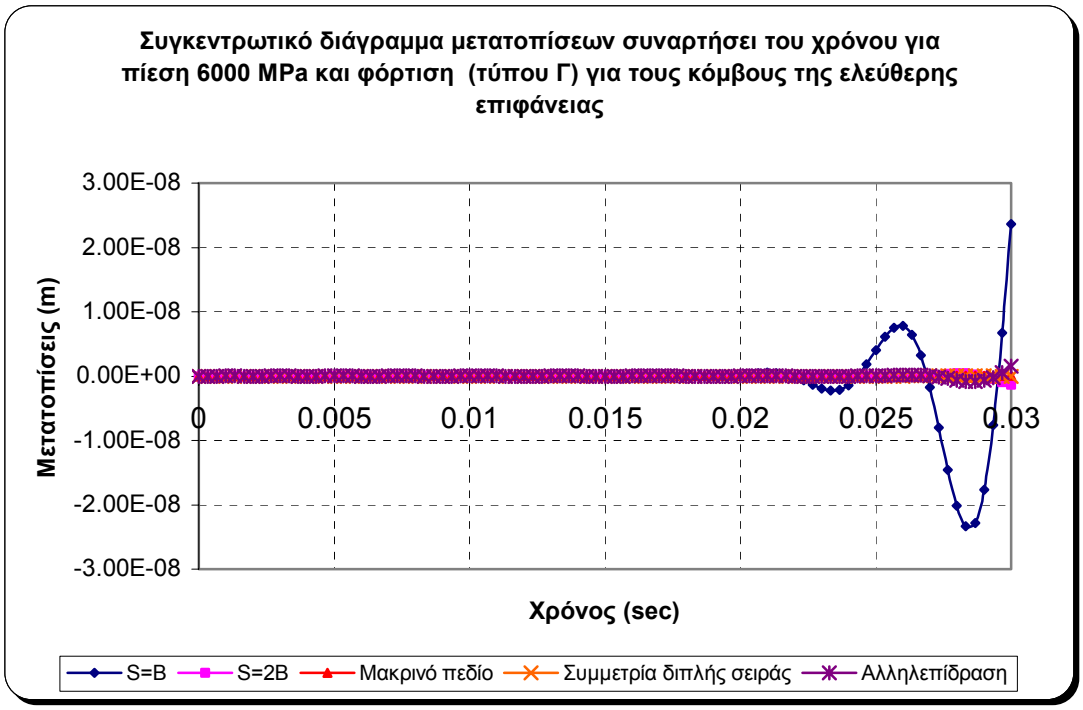
Γράφημα 7.9: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 7.10: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

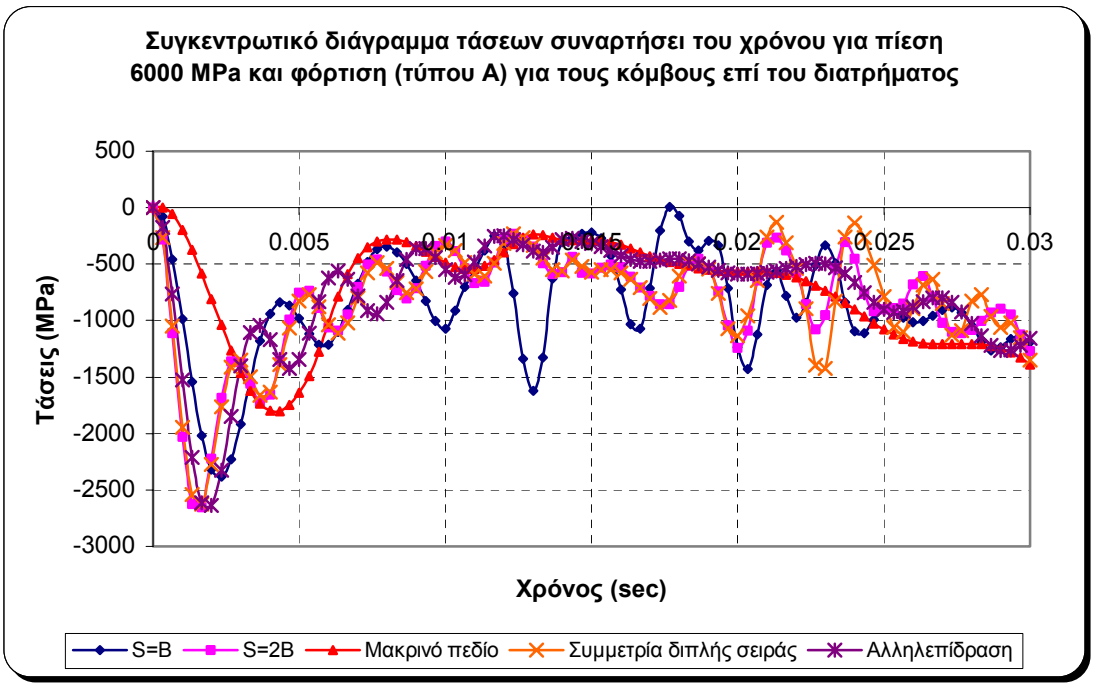


Γράφημα 7.11: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

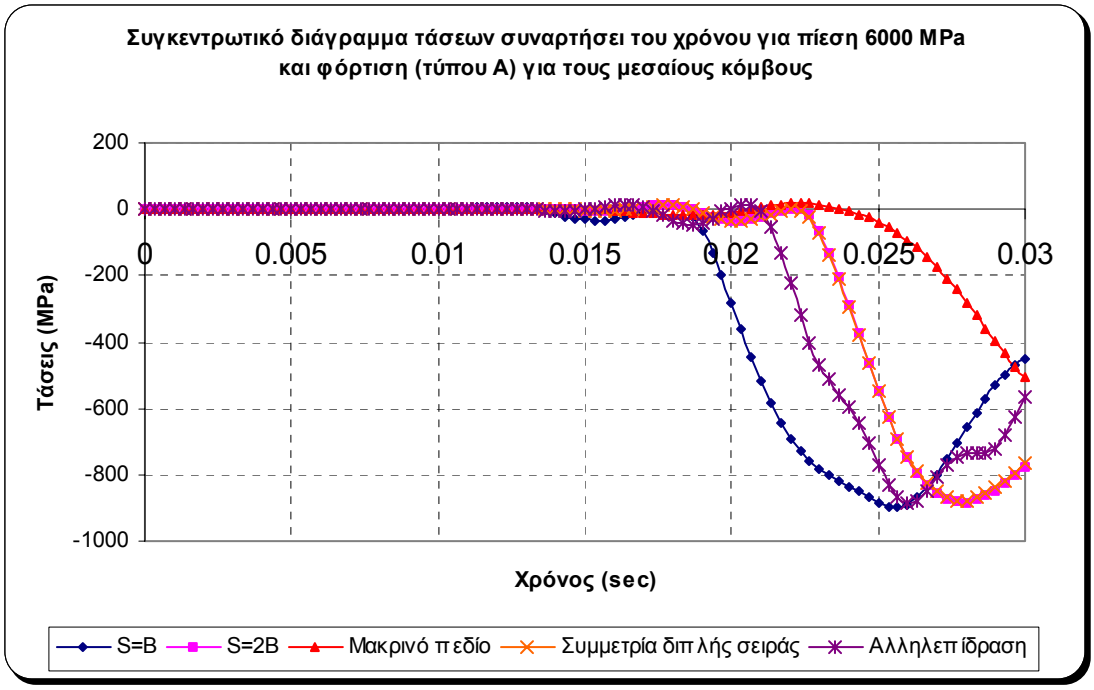


Γράφημα 7.12: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

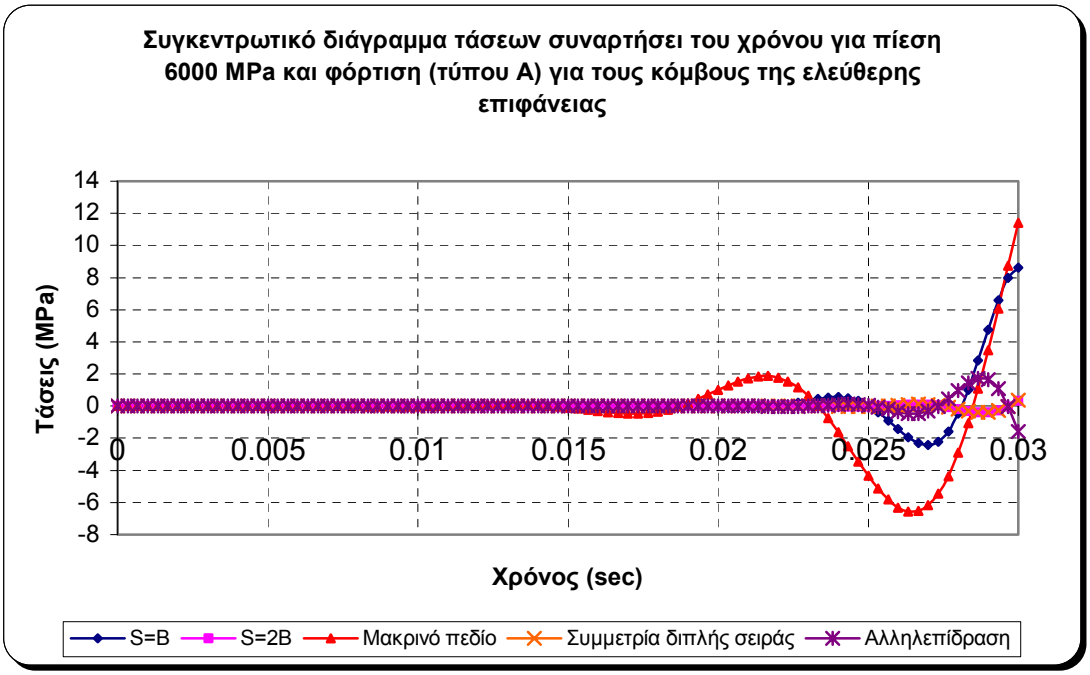
Φορτίσεις (τύπου Α) Ελαστοπλαστικά Μοντέλα:



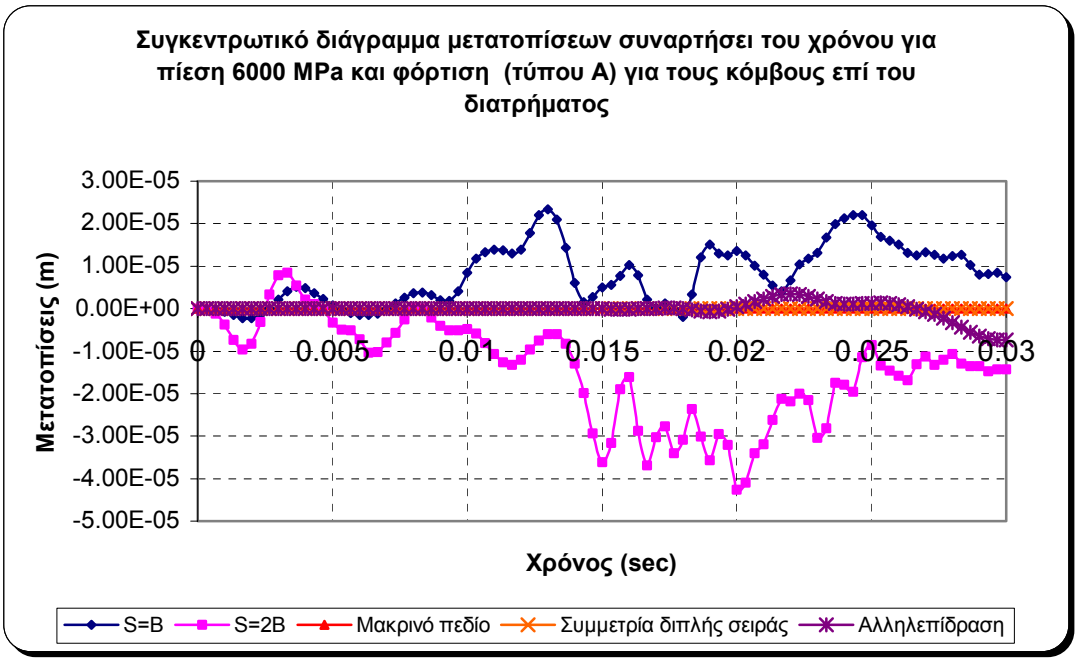
Γράφημα 7.13: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



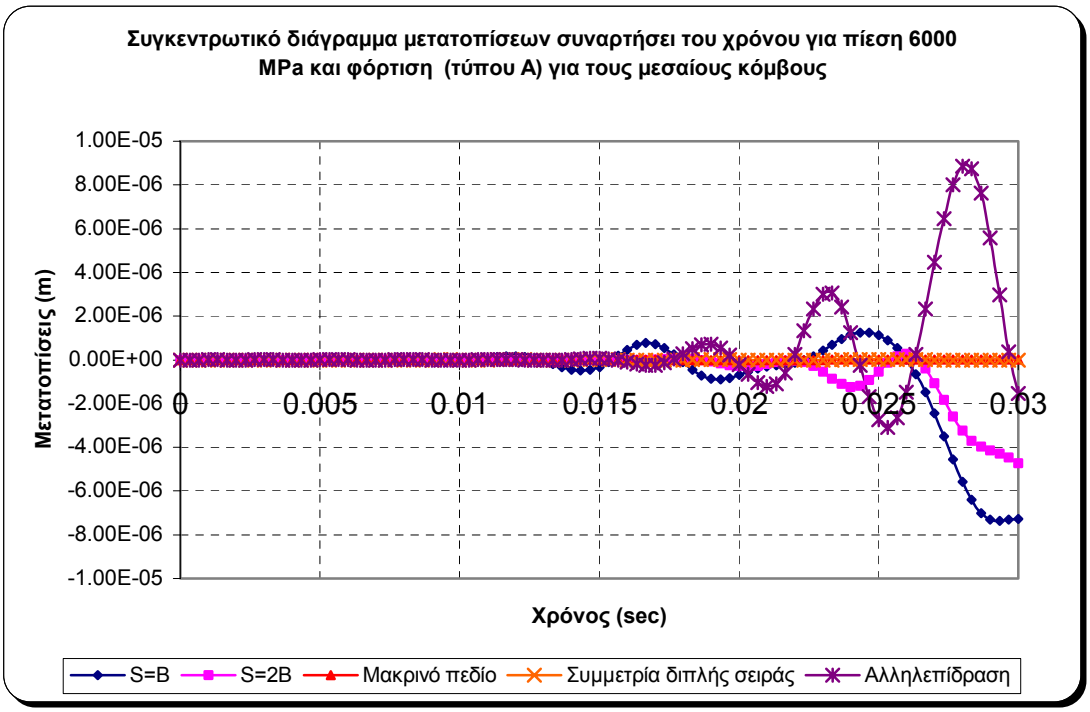
Γράφημα 7.14: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



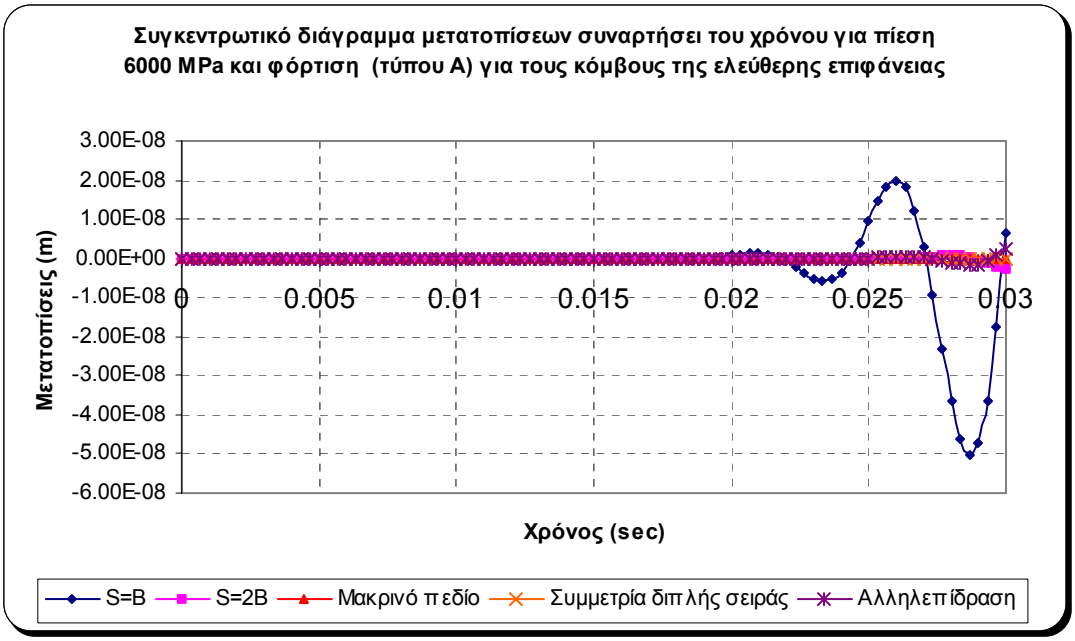
Γράφημα 7.15: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 7.16: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

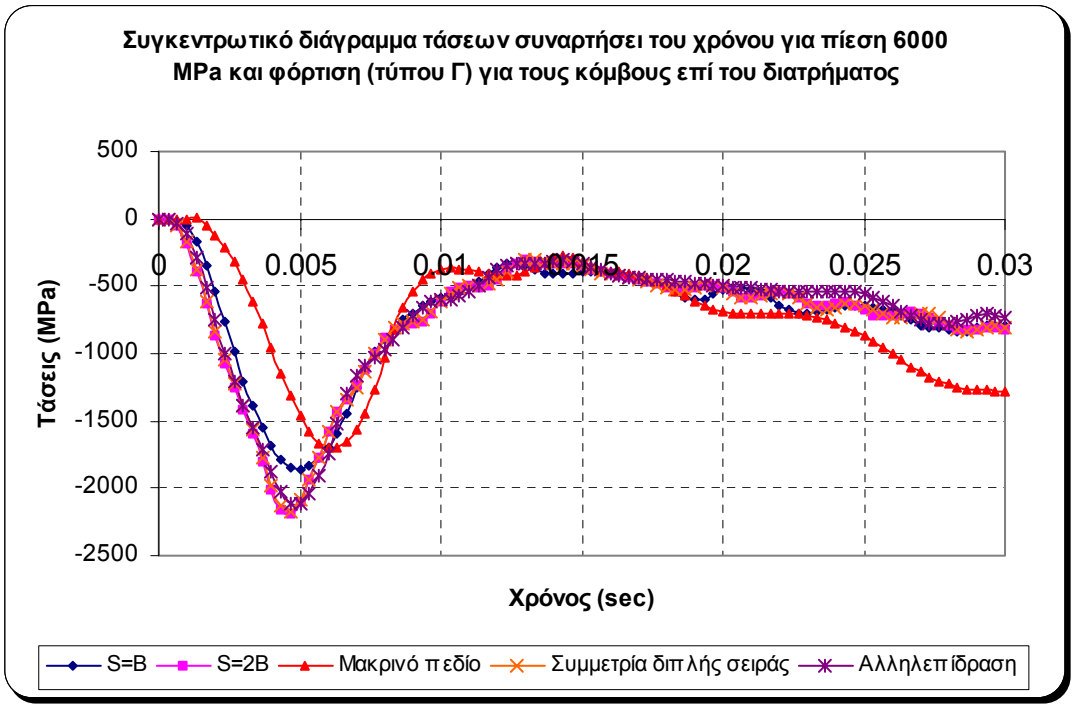


Γράφημα 7.17: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

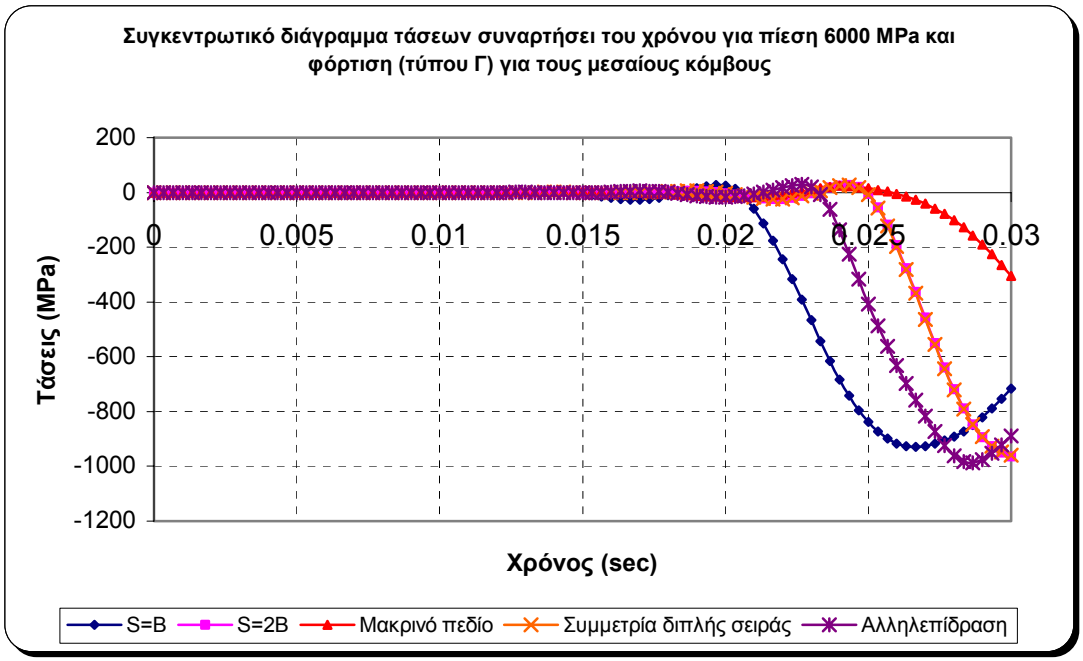


Γράφημα 7.18: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

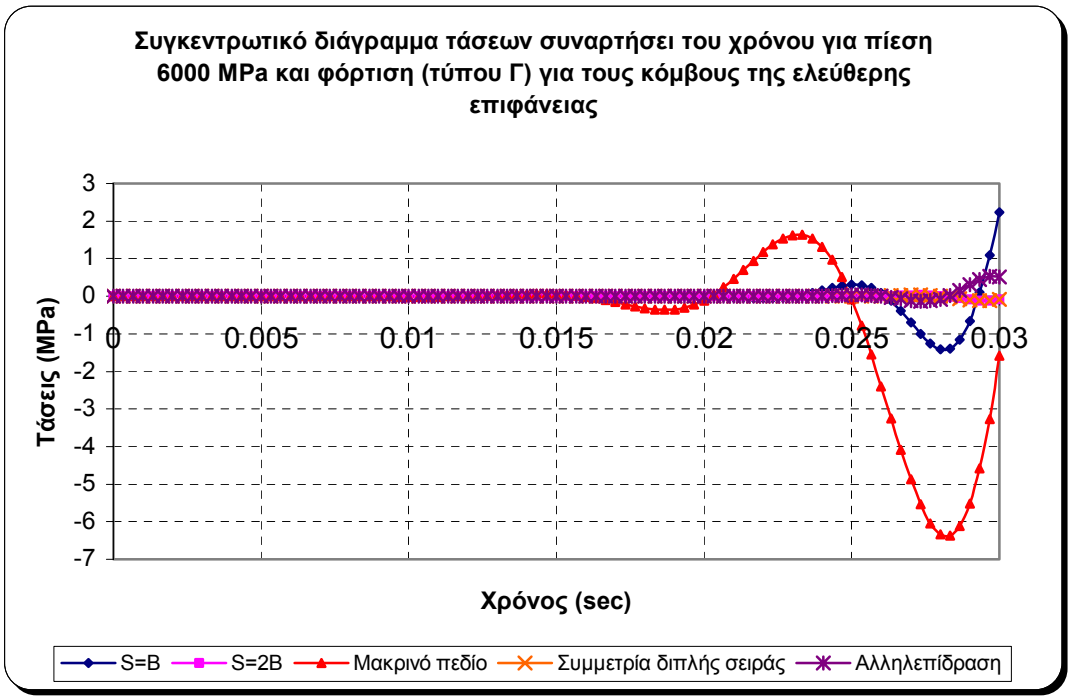
Φορτίσεις (τύπου Γ) Ελαστοπλαστικά Μοντέλα:



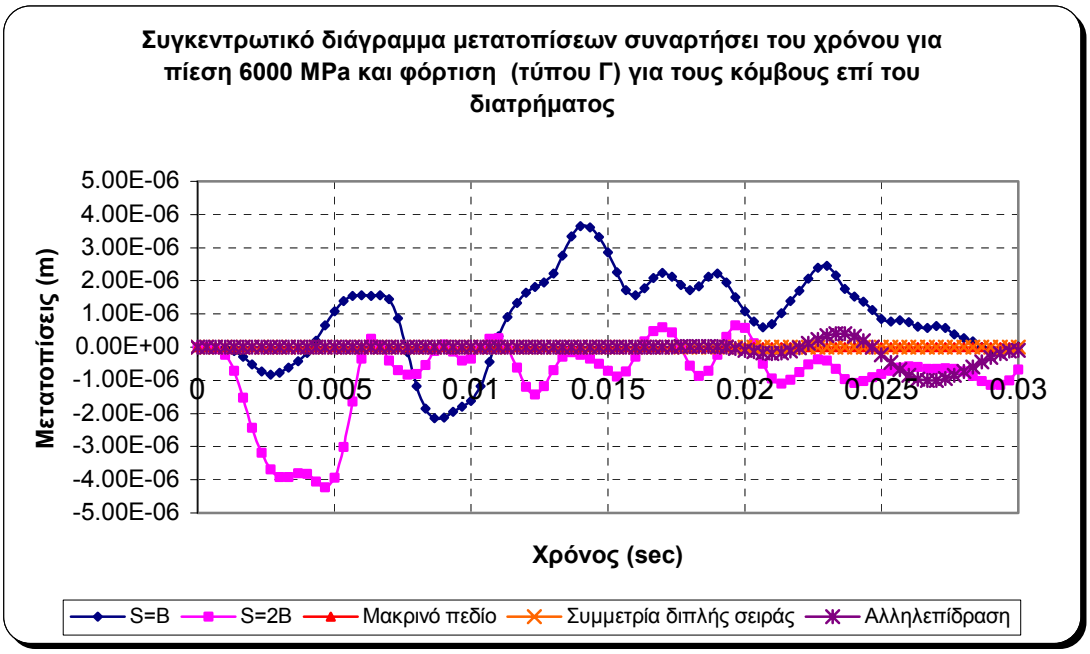
Γράφημα 7.19: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



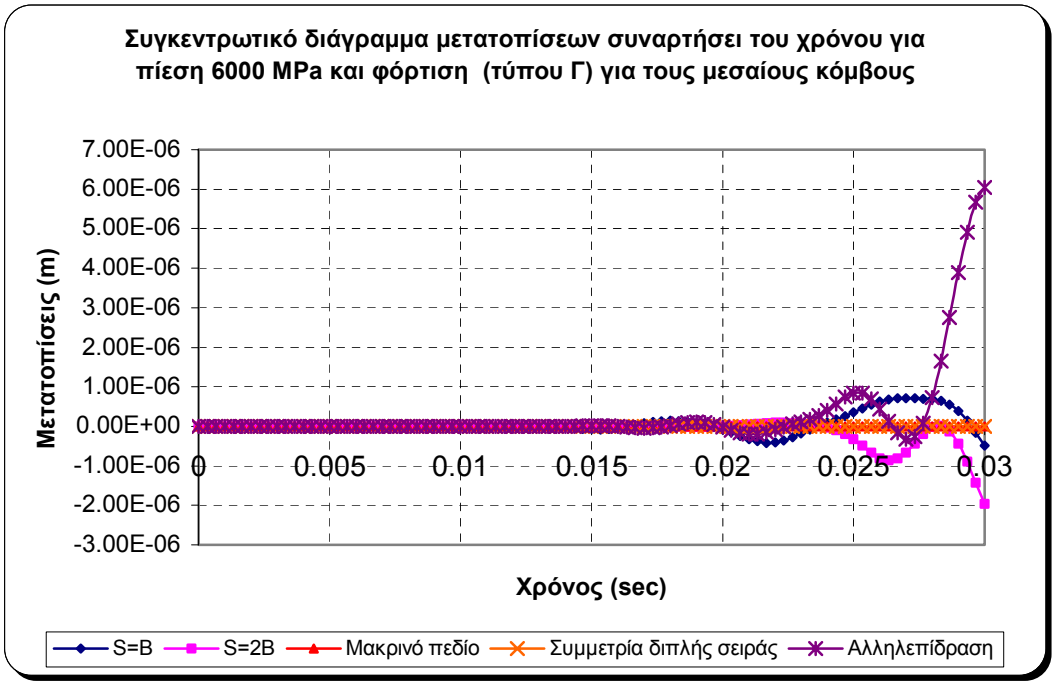
Γράφημα 7.20: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



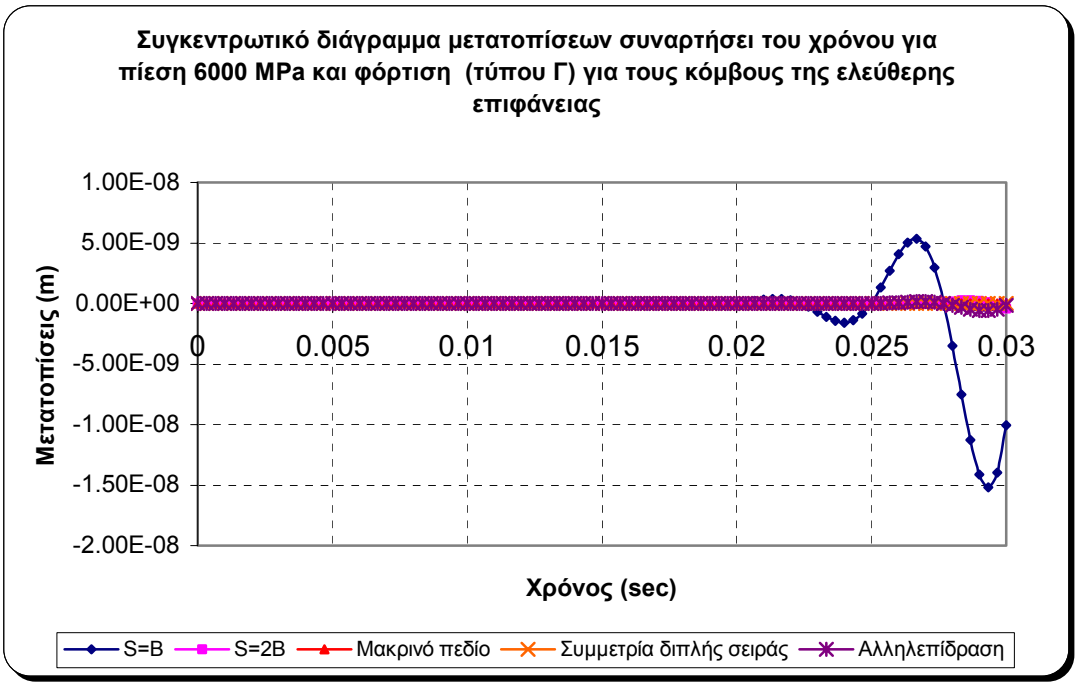
Γράφημα 7.21: Τάσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 7.22: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 7.23: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου



Γράφημα 7.24: Μετατοπίσεις συναρτήσει του χρόνου

Από την μελέτη και επεξεργασία των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την επίλυση των μοντέλων, εξάγονται τα εξής γενικά συμπεράσματα:

- Η επίλυση σχεδόν όλων των μοντέλων έδειξε ανάκλαση των κυμάτων πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια και επιστροφή του τασικού κύματος ως εφελκυστικό. Μάλιστα όπως φαίνεται και από τα πιο πάνω γραφήματα το μέγεθος του εφελκυστικού κύματος είναι της ίδιας τάξης και λίγο μεγαλύτερης από την αντοχή του πετρώματος σε εφελκυσμό, οπότε συμπεραίνεται ότι το πέτρωμα θα αστοχούσε σε εφελκυσμό που είναι ουσιαστικά και ένας από τους μηχανισμούς αστοχίας του πετρώματος κατά την διάρκεια μιας ανατίναξης.

- Σε ορισμένες περιπτώσεις παρατηρήθηκε και δευτερεύουσα ανάκλαση του πρώτου μετώπου κύματος που επέστρεφε ως εφελκυστικό με επόμενα θλιπτικά κύματα. Αυτό παρατηρήθηκε κατά την διάρκεια επίλυσης αλλά δεν παρουσιάστηκε στα γραφήματα.

- Όλα τα μοντέλα έδειξαν την δημιουργία και διάδοση του τασικού κύματος αλλά και την δημιουργία του κρατήρα γύρω από το διάτρημα.

- Τα ελαστοπλαστικά μοντέλα φαίνεται να προσεγγίζουν πιο πολύ τις πραγματικές συνθήκες και αυτό φαίνεται σε όλα τα γραφήματα όπου παρουσιάζονται θλιπτικές οι τάσεις σε όλα τα μοντέλα στους κόμβους επί των διατρημάτων.

- Από τα γραφήματα τάσεων συναρτήσει του χρόνου παρατηρείται επίσης ότι σημαντικό μέρος της ενέργειας ξοδεύεται στην δημιουργία της ζώνης σύνθλιψης παρά στον θρυμματισμό. Αυτό φαίνεται από την μελέτη τους κόμβους κοντά στο διάτρημα ότι παραλαμβάνουν μεγάλες τάσεις ενώ οι κόμβοι μακριά από το διάτρημα όχι. Σε διάφορες δοκιμές που έγινάν δεν έγινε εφικτό να αυξηθεί το μέγεθος των τάσεων μακριά από το διάτρημα χωρίς την ανάλογη αύξηση κοντά στο διάτρημα.

- Δυστυχώς τα μοντέλα δεν μπόρεσαν να γίνουν σε πραγματικές διαστάσεις έτσι τα μοντέλα είναι υπό κλίμακα λόγου διατρήματος προς ελεύθερη επιφάνεια 10/100. Κατά την διάρκεια πειραματισμού μέχρι την τελική κατάληξη σε αυτές τις διαστάσεις παρατηρήθηκε ότι με την ίδια εφαρμοζόμενη πίεση στα τοιχώματα του διατρήματος διαφορετικής διαμέτρου, η εξάπλωση του τασικού παλμού διαφέρει. Αυτό φαίνεται και στα γραφήματα μετατοπίσεων συναρτήσει του χρόνου που προκύπτουν για τις διαφορετικές γεωμετρίες. Δηλαδή τα μοντέλα αυτά δεν μπορούν να περιγράψουν ανατίναξη σε υπόγειες σήραγγες λόγω των μεγάλων διαστάσεων της γεωμετρίας. Περιγράφουν όμως με αρκετά καλή συμφωνία από θεωρητικά δεδομένα υπαίθριες ανατινάξεις.

- Κατά την διάρκεια πειραματισμού για την επιλογή του τελικού υλικού (ασβεστόλιθος), παρατηρήθηκε ότι με την αλλαγή των ελαστικών παραμέτρων μέτρου ελαστικότητας και λόγου Poisson τα κύματα έφταναν στην ελεύθερη επιφάνεια με πιο μεγάλη ένταση, όταν το μέτρο ελαστικότητας ήταν μεγάλο και με μικρότερη ένταση, όταν το μέτρο ελαστικότητας ήταν μικρότερο. Το υλικό που επιλέχθηκε τελικά ήταν ασβεστόλιθος διότι τα αποτελέσματα που εξάχθηκαν είναι σε συμφωνία με θεωρητικά δεδομένα. Έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι έγινε ικανοποιητική βαθμονόμηση των μοντέλων που αναπτύχθηκαν.

- Από τα μοντέλα με την προκαθορισμένη ρωγμή, στόχος ήταν να αναπαραχθούν οι συνθήκες ανατίναξης και η δημιουργία ρωγμής από την έκρηξη ελεγχόμενης ανατίναξης. Από τα μοντέλα τέτοιου τύπου παρατηρήθηκε ότι το μήκος της ρωγμή που δημιουργείται είναι ανάλογο της εφαρμοζόμενης πίεσης.

- Από τα γραφήματα τάσεων συναρτήσει του χρόνου παρατηρείται ότι το τασικό κύμα δεν είναι ανάλογης έντασης πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια όπως στα άλλα μοντέλα. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η δημιουργία ρωγμής έφερε απόσβεση στο κύμα. Επίσης τα ανακλώμενο κύμα δεν φαίνεται να επηρεάζει το άνοιγμα της ρωγμής.

- Από τα διαφορετικά είδη φόρτισης που εξηγήθηκαν σε προηγούμενο εδάφιο (τύπου Α-Δ), παρατηρήθηκε ότι δημιουργούσαν διαφορετικά μήκη ανοίγματος ρωγμής. Το μεγαλύτερο άνοιγμα στη ρωγμή παρατηρήθηκε από την φόρτιση τύπου Α και το μικρότερο από την φόρτιση τύπου Β. Οι φορτίσεις τύπου Γ και Δ έδιναν το ίδιο μέγεθος ανοίγματος ρωγμής. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν μετά από την κορυφή των 35 μsec αυξηθεί η διάρκεια του μέγιστου χρονικού παλμού, ίσως να φτάνει σε ένα μέγιστο το άνοιγμα και να μην βελτιώνεται μετά. Δηλαδή όσο μικρός ο παλμός, τόσο μικρές και οι ρωγμές που δημιουργούνται.

Κατά την διάρκεια μελέτης και κατασκευής των μοντέλων, προέκυψαν από την επίλυση τους και κάποια ειδικά συμπεράσματα:

- Η καταλληλότερη μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης για τον τύπο προβλήματος που εξετάστηκε φάνηκε να είναι η μέθοδος Newmark και το καταλληλότερο κριτήριο διαρροής, το κριτήριο Mohr-Coulomb. Το κριτήριο Mohr-Coulomb αν και παρουσιάστηκε ευαίσθητο στις μεγάλες και απότομες μεταβολές της πίεσης στα μοντέλα με την προκαθορισμένη ρωγμή, κρίθηκε κατάλληλο για τους σκοπούς της ανάλυσης.

- Κατά την μοντελοποίηση διάδοσης των κυμάτων παρατηρήθηκε το φαινόμενο της αριθμητικής διασποράς (numerical dispersion). Όταν κατασκευάζονται αριθμητικά μοντέλα διάδοσης κυμάτων πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τα χαρακτηριστικά διάδοσης και μεταβίβασης της πληροφορίας διαμέσου των

στοιχείων. Η αριθμητική διασπορά είναι ένα πρόβλημα που παρουσιάζει η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και κάνει την ταχύτητα των κυμάτων να εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του μοντέλου όπως είναι η μέθοδος χρονικής ολοκλήρωσης, το μέγεθος των στοιχείων που χρησιμοποιούνται (διακριτοποίηση), ακόμα και τον τύπο και την τάξη του στοιχείου. Όλα όσα έχουν αναφερθεί πιο πάνω έχουν ως αποτέλεσμα την αύξηση του αριθμητικού σφάλματος κατά την διάρκεια διάδοσης του κύματος. Ο τύπος του σφάλματος είναι συστηματικός και με την αναπαραγωγή του κατά την διάρκεια διάδοσης μπορεί να δημιουργήσει μεγάλες αποκλίσεις έως σε σημείο τα μοντέλα να μην γίνουν αποδεκτά.

7.3 Προτάσεις

Στην εργασία αυτή που έγινε η μελέτη του πρώτου δυναμικού βήματος μιας ανατίναξης, τα πειράματα που έγιναν στην κατασκευή των μοντέλων, έγιναν για την επίδραση της πηγής και την εκλυόμενη πίεση που παράγεται. Δεν λήφθηκε υπόψη, ότι στο αντιπροσωπευτικό πέτρωμα ασβεστόλιθου, οι μηχανικές ιδιότητες του, επηρεάζουν την δημιουργία και διάδοση των κυμάτων. Τέτοιες ιδιότητες όπως το πορώδες και η διαπερατότητα δεν λήφθηκαν υπόψη για τους σκοπούς της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Στη συνέχιση της εργασίας αυτής για βελτίωση, θα μπορούσε να γίνει:

- Να ληφθεί υπόψη το πορώδες και η διαπερατότητα του προς εξέταση υλικού και να διερευνηθεί η συμμετοχή τους στη θραύση.

- Για την πιο ρεαλιστική προσομοίωση της ανατίναξης θα μπορούσε να μελετηθεί η δημιουργία και διάδοση των κυμάτων σε πέτρωμα με συνθήκες προέντασης έτσι όπως είναι στο πεδίο. Έτσι λαμβάνοντας τις επιταχύνσεις και τις ταχύτητες των κυμάτων θα βοηθούσε και στην ρεαλιστική μελέτη εδαφικών κινήσεων από ανατινάξεις.

- Τέλος για την δημιουργία ενός πιο περίπλοκου μοντέλου, είναι γνωστό ότι δεν υπάρχουν μοντέλα που να περιγράφουν και τις δυο φάσεις ανατίναξης μαζί, την κρουστική και την ωστική. Θα μπορούσε να κατασκευαστεί ένα μοντέλο

υπολογίζοντας την συνεισφορά της πίεσης από τα αέρια που δημιουργούνται λαμβάνοντας υπόψη και μια καταστατική εξίσωση αερίων όπως την (J.W.L-Jones, Wilkens, Lee equation of state). Η εξίσωση αυτή λαμβάνει υπόψη την πίεση που δημιουργεί η χημική αντίδραση από την ανατίναξη. Η δημιουργία τέτοιου μοντέλου θα βοηθούσε στο πραγματικό υπολογισμό της ζώνης επίδρασης ζημιάς από την δράση της ανατίναξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

1. **Αγιουτάντης, Ζ.**, *Εκμετάλλευση ΙΙ: Τεχνολογία Εξόρυξης (Διάτρηση και Ανατίναξη)*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά 1996.
2. **Αγιουτάντης, Ζ.**, *Στοιχεία Γεωμηχανικής και Μηχανική Πετρωμάτων*, Εκδόσεις «Ίων», Αθήνα 2002.
3. **Κόντος Γ.**, *Υπολογισμός Ιδιοσυχνοτήτων Ταλάντωσης Μονολιθικής Επένδυσης Σήραγγας*, Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2003.
4. **Τσουτρέλης, Χ.**, *Εκρηκτικές Ύλες και Τεχνική των Ανατινάξεων*, Τόμος 1, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1997.
5. **Τσουτρέλης, Χ.**, *Εκρηκτικές Ύλες και Τεχνική των Ανατινάξεων*, Τόμος 2, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2001.
6. **Στειακάκης Χ.**, *Γεωτεχνική Ανάλυση Σηράγγων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2001.
7. **Στειακάκης Χ.**, *Μελέτη Εντατικού Πεδίου γύρω από Κυκλικό Άνοιγμα με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 1998.

Διεθνής Βιβλιογραφία

1. **Aliabati M.H., C.A. Brebbia and Z. Barton**, *Static and dynamic fracture mechanics*, 1994.
2. **Baliktsis E.**, Complete blasting support and environmental effects management. Typical carry-out based on an aggregate quarry case history in Northern Hellas, *Proceedings of the 1st International Conference on Advances in Mineral Resources Management and Environmental Geotechnology* (ed. Z. Agioutantis and K. Komnitsas), Chania-Crete, Greece, 7-9 June 2004, pp. 263-269.
3. **Brady B. H. G. and E. T. Brown**, *Rock Mechanics – For Underground Mining*, Chapman & Hall, 1985.

4. **Cook R., D. Malkus and M. Plesha**, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, J. Wiley, 1989.
5. **Desai C. S. and J. F. Abel**, *Intoduction to the Finite Element Method – A Numerical Method for Engineering Analysis*, East – West Press, 1972.
6. **Desai C. S. and G. Gioda,** *Numerical Methods and Constitutive Modelling in Geomechanics*, Springer-Verlag, Wien-New York, 1990.
7. **Donze F. V., J. Bouchez and S. A. Magnier**, Modeling Fractures in Rock Blasting, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 34, No 8, pp. 1153-1163, 1997.
8. **Elata D.,** Modeling Wellbore Breakouts, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 34, No 3-4, Paper No. 72, 1997.
9. **Esen S., I. Onederra and H.A. Bilgin**, Modeling the size of the crushed zone around a blasthole, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 40, pp. 485-495, 2003.
10. **Fagan M. J.**, *Finite Element Analysis – Theory and Practice*, Longman Group, 1996.
11. **Felippa C. A.**, *An Introduction to Finite Element Method*, (Lecture notes), Department of Aerospace Engineering Sciences, Colorado University, 2003.
12. **Freund L. B.**, *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press, 1978.
13. **Frydman M. and S. da Fontoura**, Numerical Modeling of Borehole Pressurization, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 34, No 3-4, Paper No. 082, 1997.
14. **Fung T. C. and S. K. Chow**, Responses of Blast Loading by Complex Time Step Method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, No 1, pp 23-48, 1999.
15. **Garagash D. and E. Detournay**, An Analysis of the Influence of the Pressurization Rate on the Borehole Breakdown Pressure, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 34, No 24, pp. 3099-3118, 1997.
16. **Gerken J. M.**, Numerical Simulation of the Mechanically Coupled Cook-off Experiment, Engineering Sciences & Apllications, Engineering Analysis, Los Alamos National Laboratory.
17. **Han R. P. S. and J. Lu**, A Space- Time Finite Element Method for Elasto-Plastic Shock Dynamics, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 222, No 1, pp 65-84, 1999.

18. **Hwang C. G., P. A. Wawrzynek, A. K. Tayebi and A. R. Ingraffea**, On the Virtual Crack Extension Method for Calculation of the Rates of Energy Release Rate, *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 59, No 4, pp. 521-542, 1998.
19. **Jimeno C. L. and E. L. Jimeno**, *Drilling and Blasting of Rocks*, 1995
20. **Jing L.**, A Review of Techniques, Advances and Outstanding Issues in Numerical Modeling for Rock Mechanics and Rock Engineering, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 40, pp. 283-353, 2003.
21. **Katsabanis T.**, *Explosives Technology*, Department of Mining Engineering, Queen's University, (Lecture notes), 1995
22. **Katsabanis T.**, *Fragmentation, Vibrations, Wall Control*, Department of Mining Engineering, Queen's University, (Lecture notes), 1995
23. **Liebowitz H., J. S. Sandhu, J. D. Lee and C. M. Menandro**, Computational Fracture Mechanics: Research and Apllication, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 50, No 5/6, pp. 653-670, 1995.
24. **Ling W. and H. Stolarski**, On elasto-plastic finite element analysis of some frictional contact problems with large sliding, *Engineerig Computations*, Vol. 14, No 5, pp. 558-580, 1997.
25. **Ma G. W., H. Hao and Y. X. Zhou**, Modeling of Wave Propagation Induced by Underground Explosion", Computers and Geotechnics, Vol. 22, No 3/4, pp. 283-303, 1998.
26. **Mansur W. J., D. Soares Jr. and M. A. C. Ferro**, Initial Conditions in Frequency-Domain Analysis: the FEM Applied to the Scalar Wave Equation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 270, pp 767-780, 2004.
27. **Mark A. J.**, *A Plane Stress Finite Element Model for Elastic-Plastic Mode I/II Crack Growth*, Department of Mechanical and Nuclear Engineering, Kansas State University, 1998.
28. **Mortazavi A. and P. D. Katsabanis**, Modeling of Blasthole Expansion and Explosive Gas Pressurization in Jointed Media, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 35, No 4/5, pp. 497-498, 1998.
29. **Mouroutis Z. S. and M. Papadrakakis**, Inelastic Dynamic Analysis of Shells With the TRIC Shell Element, *Proceedings of the 7th National Congress on Mechanics* (ed. A. Kounadis, C. Providakis and G. Exadaktylos), Chania-Crete, Greece, 24-26 June 2004, pp. 381-386.

30. **Msc engineering group,** *Marc-Mentat, 2000 Manuals*, Theory and User Information, 2000.
31. **Papadopoulos G. A.**, *Fracture Mechanics - The Experimental Method of Caustics and The Determination of Criterion of Fracture*, 1992.
32. **Pardo E.**, Functional Integral Formulation of Classical Wave equations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 261, pp 819-837, 2003.
33. **Potts D. and L. Zdravkovic**, *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering, Theory*, Thomas Telford, 1999.
34. **Press W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery**, *Numerical Recipes*, Volume 1, Second Edition, Cambridge University Press, 1992.
35. **Reddy J.N**, *An Introduction to the Finite Element Method*, 1984
36. **Ren Woo X.U.E and A. J. Carlson,** *Weight functions and Stress intensity factor solutions*, 1995.
37. **Saxena A.**, *Non linear fracture mechanics for engineers*,1998
38. **Semblat J. F. and J. J. Brioist**, Efficiency of Higher Order Finite Elements for the Analysis of Seismic Wave Propagation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 231, No 2, pp 460-467, 2000.
39. **Spyrakos C. C.**, *Finite Element Modeling in Engineering Practice*, Algor Publishing Division, Pittsburgh, 1996.
40. **Subrahmanyam P. B., R. I. Sujith and T. C. Lieuwen**, A Family of Exact Transient Solutions for Acoustic Wave Propagation in Inhomogeneous, Non-Uniform Area Ducts, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No 4, pp 705-715, 2001.
41. **Wawrzynek P. and A. Ingraffea**, *Franc2D and Casca User's Guide*, Version 2.7, 1993.
42. **Yan X.,** A Numerical Analysis of Cracks Emanating from a Square Hole in a Rectangular Plate Under Biaxial Loads, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, pp. 1615-1623, 2003.
43. **Yang R., W. F. Bawden and P. D. Katsabanis,** A New Constitutive Model for Blast Damage, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Vol. 33, No 3, pp. 245-254, 1996.