Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο Κ Ρ Η Τ Η Σ
Τ Μ Η Μ Α Μ Η Χ Α Ν Ι Κ Ω Ν Π Α Ρ Α Γ Ω Γ Η Σ
Κ Α Ι Δ Ι Ο Ι Κ Η Σ Η Σ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Ανάπτυξη Μεθοδολογίας Αυτόματης Πύκνωσης μη Δομημένου Πλέγματος κατά την Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων Euler στις Τρεις Διαστάσεις.»

Λυγιδάκης Γεώργιος

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικολός Ιωάννης

Χανιά, Ιούνιος 2009

Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο   Κ Ρ Η Τ Η Σ
Τ Μ Η Μ Α   Μ Η Χ Α Ν Ι Κ Ω Ν   Π Α Ρ Α Γ Ω Γ Η Σ
Κ Α Ι   Δ Ι Ο Ι Κ Η Σ Η Σ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Ανάπτυξη Μεθοδολογίας Αυτόματης Πύκνωσης μη Δομημένου Πλέγματος κατά την Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων Euler στις Τρεις Διαστάσεις.»

Λυγιδάκης Γεώργιος

Εξεταστική Επιτροπή: Νικολός Ιωάννης – Επ. Καθηγητής
Ρόβας Δημήτριος – Επ. Καθηγητής
Δελής Ανάργυρος– Επ. Καθηγητής

Χανιά, Ιούνιος 2009

"Intentionally Blank"

"No knowledge can be certain, if it is not based upon mathematics or upon some other knowledge which is itself based upon the mathematical sciences."

Leonardo da Vinci (1425 - 1519)

“Intentionally Blank”

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

“Intentionally Blank”

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με την παρούσα Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε μία προσπάθεια προγραμματισμού και κατόπιν πιστοποίησης μιας αριθμητικής μεθόδου επίλυσης των εξισώσεων Euler με τη χρήση τρισδιάστατου μη-δομημένου πλέγματος τετραεδρικών στοιχείων, που διαθέτει τη δυνατότητα αυτόματης πύκνωσης. Η εν λόγω μέθοδος δύναται να εφαρμοστεί σε τρισδιάστατα προβλήματα χρονικά μόνιμης ροής και εξωτερικής αεροδυναμικής, αλλά εύκολα μπορεί να προσαρμοσθεί ώστε να λύνει προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής, αλλά και μη μόνιμων ροών . Η μέθοδος που αναπτύχθηκε στοχεύει στην επίλυση συμπιεστών, μη συνεκτικών ροών με μεθόδους τύπου χρονοπροέλασης και τεχνικές πεπερασμένων όγκων.

Τα μη-δομημένα πλέγματα προσφέρουν σημαντικά πλεονεκτήματα συγκριτικά με τα δομημένα, όπως η εύκολη διακριτοποίηση χωρίων πολύπλοκης γεωμετρίας και η δυνατότητα τοπικής προσαρμογής του πλέγματος ανάλογα τα χαρακτηριστικά της ροής (π.χ. σε ασυνέχειες της ροής – κύματα κρούσης). Η τελευταία εφαρμόστηκε με επιτυχία στη συγκεκριμένη εργασία, καθώς αύξησε αισθητά την ακρίβεια των αποτελεσμάτων σε περιοχές του πλέγματος που εμφανίζονταν ασυνέχειες. Σε μη-δομημένα πλέγματα τα καταστατικά μεγέθη της ροής είναι δυνατό να ορισθούν είτε στους κόμβους του πλέγματος, δηλαδή στις κορυφές των τετραέδρων (κεντροκομβική μέθοδος διακριτοποίησης), είτε στα κέντρα των τετραέδρων (κεντροκυψελική μέθοδος διακριτοποίησης) [Αδα05]. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η πρώτη προσέγγιση, δηλαδή η κεντροκομβική μέθοδος διακριτοποίησης, σύμφωνα με την οποία ο όγκος αναφοράς για κάθε κόμβο του πλέγματος ορίζεται από την ένωση τμημάτων όλων των τετραέδρων που μοιράζονται τον υπό εξέταση κόμβο.

Λόγω των ασυνεχειών, που δημιουργούνται στις διεπιφάνειες των προαναφερθέντων όγκων αναφοράς (δηλαδή στις κοινές έδρες των γειτονικών τετραέδρων), απαιτείται η επίλυση ενός τοπικού προβλήματος Riemann. Ωστόσο η επίλυση του προβλήματος Riemann για τις εξισώσεις Euler αποτελεί μια αρκετά χρονοβόρα διαδικασία. Η εν λόγω κατάσταση αποφεύχθηκε με την επιτυχή χρήση ενός προσεγγιστικού επιλύτη Riemann, και συγκεκριμένα του ιδιαίτερα διαδεδομένου προσεγγιστικού επιλύτη του Roe. Τέτοιου είδους προσεγγιστικοί επιλύτες αποτελούν μαθηματικά μοντέλα, τα οποία επιλύουν το πρόβλημα ροής στις κοινές επιφάνειες των γειτονικών όγκων αναφοράς, χωρίς ωστόσο να είναι ιδιαίτερα χρονοβόροι. Η επίλυση των προαναφερθέντων μαθηματικών μοντέλων δύναται να πραγματοποιηθεί με ακρίβεια πρώτης ή ανώτερης τάξης. Στην εν λόγω εργασία, η επίλυση έγινε με ακρίβεια δεύτερης τάξης του σχήματος διακριτοποίησης, με συνέπεια την εξαγωγή τελικά καλύτερων ποιοτικά αποτελεσμάτων, σε σύγκριση με το σχήμα πρώτης τάξης.

Κατόπιν της επιλογής της κεντροκομβικής μεθόδου για την χωρική διακριτοποίηση και του προσεγγιστικού επιλύτη του Roe για την επίλυση του προβλήματος Riemann, απαιτήθηκε η επιλογή της μεθόδου αριθμητικής επίλυσης του μοντέλου. Στην εν λόγω Διπλωματική Εργασία εφαρμόστηκε κατ' αρχήν μια ρητή και στη συνέχεια μια σημειακά πεπλεγμένη μέθοδος για την επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων, που προέκυψε με την χωρική διακριτοποίηση των βασικών εξισώσεων. Όσον αφορά τις ρητές μεθόδους, θα πρέπει να αναφερθεί ότι πρόκειται για πολυβηματικές μεθόδους, όπου χρησιμοποιούνται συντελεστές που προκύπτουν ύστερα από βελτιστοποίηση ενός πρότυπου προβλήματος [Kou98]. Η χρήση των κατάλληλων μεταβλητών επιτρέπει τη χρήση όσο το δυνατό υψηλότερων χρονικών βημάτων κατά την επίλυση, διατηρώντας βέβαια την ευστάθεια της διαδικασίας. Ωστόσο, οι ρητές μέθοδοι συνήθως συγκλίνουν αργά σε πρακτικά προβλήματα ροής. Εναλλακτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν πεπλεγμένες μέθοδοι επίλυσης, οι οποίες επιλύουν ένα γραμμικοποιημένο σύστημα σε κάθε χρονική επανάληψη. Αντίθετα από τις ρητές μεθόδους οι πεπλεγμένες συγκλίνουν ταχύτερα, χρησιμοποιώντας υψηλότερα χρονικά βήματα κατά την επίλυση, διατηρώντας ταυτόχρονα την ευστάθεια της λύσης. Στην παρούσα εργασία εφαρμόστηκε ρητή μέθοδος με σχήμα ολοκλήρωσης Runge-Kutta 4 βημάτων και σημειακά πεπλεγμένη μέθοδος με επιλύτη Gauss-Seidel.

Εν κατακλείδι, η εφαρμογή και η πιστοποίηση της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης των εξισώσεων Euler με τη χρήση τρισδιάστατου μη-δομημένου και προσαρμοσμένου πλέγματος υλοποιήθηκε με την ανάπτυξη ενός αλγορίθμου στη γλώσσα προγραμματισμού Fortran. Η ανάπτυξη του αλγορίθμου βασίστηκε σε αντίστοιχο αλγόριθμο για ροή δύο διαστάσεων, που είχε αναπτυχθεί από τον κ. Νικολό Ιωάννη και σε αλγόριθμο που είχε αναπτυχθεί από τον κ. Λάζαρο Αδαμούδη, που αφορούσε σε επίλυση των Εξισώσεων Euler σε τρεις διαστάσεις με μη δομημένο πλέγμα, σχήμα πρώτης τάξης και ρητή μέθοδο χρονικής ολοκλήρωσης [Αδα05].

Στη συνέχεια πραγματοποιείται μια σύντομη αναφορά στο αντικείμενο που πραγματεύεται κάθε κεφάλαιο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.

- Στην Εισαγωγή παρουσιάζονται ορισμένα γενικά στοιχεία για την υπολογιστική ρευστομηχανική, ενώ παράλληλα αναφέρονται επιγραμματικά τα βασικότερα χαρακτηριστικά μιας μεθόδου αριθμητικής επίλυσης.
- Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται αναλυτικά οι εξισώσεις Euler, που διέπουν τη ροή ενός μη-συνεκτικού συμπιεστού ρευστού.
- Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων καθώς και ο τρόπος χρήσης αυτής στην συγκεκριμένη Εργασία.
- Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται η αριθμητική μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων Euler (ρητή και σημειακά πεπλεγμένη) σε μη-δομημένα τρισδιάστατα πλέγματα, χρησιμοποιώντας την κεντροκομβική μέθοδο πεπερασμένων όγκων.
- Στο Κεφάλαιο 4 περιγράφεται η μέθοδος τοπικής προσαρμογής του τρισδιάστατου μη-δομημένου πλέγματος σε περιοχές με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά ροής.
- Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος, που αναπτύχθηκε για την επίλυση του προβλήματος της ροής. Αναλύεται εκτενώς ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόστηκε η μεθοδολογία, η οποία περιγράφεται στα προηγούμενα κεφάλαια.
- Στο Κεφάλαιο 6 πιστοποιούνται οι μέθοδοι που περιγράφονται στα προηγούμενα κεφάλαια σε διάφορες περιπτώσεις ροής. Παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου.
- Στο Κεφάλαιο 7 συνοψίζονται ορισμένα γενικά συμπεράσματα και προτείνονται θέματα επέκτασης της παρούσας εργασίας.

Ολοκληρώνοντας τον πρόλογο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης και επιβλέποντα καθηγητή κ. Νικολό Ιωάννη για την πολύτιμη βοήθεια του κατά την εκπόνηση και συγγραφή της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.

Χανιά, Μάιος 2009

Λυγιδάκης Γεώργιος

“Intentionally Blank”

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α. Γενικά Στοιχεία για την Υπολογιστική Ρευστομηχανική.

Στη σύγχρονη πρακτική, κατά τη μελέτη μηχανολογικών εξαρτημάτων και όχι μόνο, εμφανίζονται συχνά προβλήματα ρευστομηχανικής, τα οποία απαιτείται να επιλυθούν. Η μελέτη και η επίλυση τους με αναλυτικές μεθόδους δεν είναι εύκολη, καθώς οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν αυτά τα προβλήματα είναι μη-γραμμικές και ταυτόχρονα παρουσιάζουν αυξημένη πολυπλοκότητα, ενώ η μελέτη αυτών μέσω πειραμάτων αποδεικνύεται στις περισσότερες περιπτώσεις ιδιαίτερα χρονοβόρα και υψηλού κόστους. Ως εκ τούτου για την επίλυση των εν λόγω προβλημάτων απαιτήθηκε η ανάπτυξη ενός νέου κλάδου της ρευστομηχανικής, αυτός της υπολογιστικής ρευστομηχανικής (Computational Fluid Dynamics, CFD). Η υπολογιστική ρευστομηχανική εξετάζει μεθόδους ανάπτυξης και επίλυσης διακριτών μοντέλων για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τα ρευστομηχανικά προβλήματα, υιοθετώντας στοιχεία από τη μαθηματική φυσική και την αριθμητική ανάλυση. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη μη συνεκτική κίνηση των ρευστών είναι οι εξισώσεις Euler, ενώ τη συνεκτική κίνηση των ρευστών οι εξισώσεις Navier-Stokes [Pap01]. Οι εξισώσεις αυτές δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά, εκτός από λίγες ειδικές περιπτώσεις, οπότε καθίσταται αναγκαία η χρήση υπολογιστή.

Οι βασικές αρχές, που εφαρμόζονται για την αριθμητική επίλυση των προαναφερθέντων διαφορικών εξισώσεων, είχαν επινοηθεί και εδραιωθεί κατά τον προηγούμενο αιώνα. Εντούτοις, η υπολογιστική ρευστομηχανική παρουσίασε ιδιαίτερη ανάπτυξη μόλις τις τελευταίες δεκαετίες. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ραγδαία πρόοδο που σημειώνει η σύγχρονη τεχνολογία στον τομέα των ηλεκτρονικών υπολογιστών, με αποτέλεσμα να υπάρχουν πλέον διαθέσιμα ισχυρά υπολογιστικά συστήματα, ικανά να επιλύσουν τις εν λόγω διαφορικές εξισώσεις με ικανοποιητική ακρίβεια και σε αποδεκτό χρονικό διάστημα [Wur06]. Η εφαρμογή της έδωσε λύσεις σε σημαντικά προβλήματα τόσο σε ερευνητικό επίπεδο, όσο και σε βιομηχανικό, με συνέπεια σήμερα να ελκύει την προσοχή ίσως και του ενός τρίτου των ερευνητών που ασχολούνται με τον τομέα της ρευστομηχανικής.

Με την υπολογιστική ρευστομηχανική υπολογίζεται τελικά μία προσεγγιστική αριθμητική λύση ενός ρευστομηχανικού προβλήματος. Για την εύρεση αυτής της λύσης είναι απαραίτητη καταρχήν η χρήση μιας μεθόδου διακριτοποίησης, η οποία ουσιαστικά προσεγγίζει το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων με ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο τελικά δύναται να επιλυθεί χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικό υπολογιστή. Οι προσεγγίσεις εφαρμόζονται σε μικρά διαστήματα του χώρου, (και μικρά χρονικά βήματα για μεταβατικά προβλήματα), οπότε η λύση αποδίδεται τελικά σε διακριτά σημεία του χώρου (και του χρόνου). Η ακρίβεια της λύσης εξαρτάται από την ποιότητα της προσέγγισης που χρησιμοποιήθηκε. Θεωρητικά, είναι δυνατός ο υπολογισμός μιας λύσης με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια. Ωστόσο, σε πολλά πρακτικά προβλήματα ροής ρευστών, όπως τυρβώδης ροή και πολυφασικές ροές, η ακριβής αριθμητική λύση δεν είναι εφικτή. Το παραπάνω φαινόμενο καθιστά επιτακτική την επινόηση μοντέλων. Αν και η χρήση τους περιορίζει την ακρίβεια της λύσης, χρησιμοποιούνται ακόμα και σε απλές περιπτώσεις ώστε να μειώνεται αισθητά το υπολογιστικό κόστος. Τέλος, η προσεγγιστική αριθμητική λύση πρέπει να ελέγχεται ώστε να εξακριβώνεται κατά πόσο τελικά ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Η ανάλυση της λύσης καθώς και η σύγκριση της με πειραματικά δεδομένα αποτελούν τις συνηθέστερες τακτικές ελέγχου, αποδίδοντας τελικά σημαντικά συμπεράσματα.

Εν κατακλείδι, η υπολογιστική ρευστομηχανική αποτελεί έναν ανερχόμενο κλάδο με ευρύ πεδίο εφαρμογής, όπως η αεροναυτική, η υδροδυναμική, οι στροβιλομηχανές, η ηλεκτρονική μηχανική, η παραγωγή ενέργειας, η χημική μηχανική, η ναυπηγική, η μετεωρολογία, η περιβαλλοντολογική μηχανική, η βιοφαρμακευτική και άλλοι κλάδοι [Pap01].

Β. Στοιχεία μίας Μεθόδου Αριθμητικής Επίλυσης.

Στη συνέχεια αναφέρονται αναλυτικά τα σημαντικότερα στοιχεία που συνιστούν μια μέθοδο αριθμητικής επίλυσης, τα οποία είναι τα εξής [Pap01]:

- Το μαθηματικό μοντέλο.
- Η μέθοδος διακριτοποίησης.
- Το σύστημα συντεταγμένων και η διανυσματική βάση.
- Το πλέγμα.
- Οι προσεγγίσεις.
- Η μέθοδος επίλυσης.
- Το κριτήριο σύγκλισης.

Β.1. Το Μαθηματικό Μοντέλο.

Το μαθηματικό μοντέλο περιλαμβάνει το προαναφερθέν σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων, που περιγράφουν την ροή και τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Στην περίπτωση που εξετάζεται, το μαθηματικό μοντέλο περιλαμβάνει την αρχή διατήρησης της μάζας (εξίσωση συνέχειας), τις εξισώσεις Euler (εξισώσεις ορμής για μη συνεκτικό συμπιεστό ρευστό) και την εξίσωση της ενέργειας (Α΄ Θερμοδυναμικός Νόμος για ανοικτά συστήματα σε διαφορική μορφή). Ανάλογα με τον τύπο της ροής και γενικότερα ανάλογα με το υπό εξέταση ρευστομηχανικό πρόβλημα, πραγματοποιείται και η κατάλληλη διατύπωση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων, π.χ. για δύο ή τρεις διαστάσεις, για συμπιεστό ή ασυμπίεστο ρευστό, για συνεκτική ή μη ροή κ.α. Εφόσον υφίστανται επιπλέον φυσικά φαινόμενα, όπως η παρουσία τύρβης, η καύση ή η μεταφορά θερμότητας, το μαθηματικό μοντέλο διαφοροποιείται περαιτέρω, ώστε να περιλάβει τα προαναφερθέντα φυσικά φαινόμενα στο σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων [Pap01].

Β.2. Η Μέθοδος Διακριτοποίησης.

Στη συνέχεια απαιτείται η επιλογή της μεθόδου διακριτοποίησης, η οποία προσεγγίζει το σύστημα των εξισώσεων με ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η λύση που προκύπτει από το προαναφερθέν σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων προσφέρει μια προσέγγιση της λύσης του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε διακριτά σημεία του πεδίου ροής. Υφίστανται τρεις βασικές μέθοδοι διακριτοποίησης: α) η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (finite differences), β) η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων (finite volumes) και γ) η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite elements). Όλες οι παραπάνω μέθοδοι αποδίδουν εν γένει την ίδια ποιοτικά λύση, εφόσον βέβαια χρησιμοποιηθεί πλέγμα υψηλής πυκνότητας. Κατά συνέπεια, η επιλογή της μεθόδου καθορίζεται κυρίως από τη φύση του υπό εξέταση προβλήματος. Στα πλαίσια της εν λόγω εργασίας χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων, η οποία και αναλύεται στη συνέχεια στο Κεφάλαιο 2 [Pap01].

Β.3. Το Σύστημα Συντεταγμένων και η Διανυσματική Βάση.

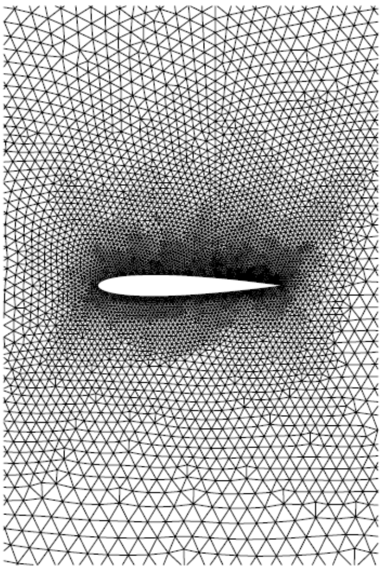
Ο τρόπος διατύπωσης του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων, όπως προαναφέρθηκε, εξαρτάται από το υπό εξέταση ρευστομηχανικό πρόβλημα. Ως εκ τούτου η μορφή του συστήματος αυτού εξαρτάται άμεσα και από το σύστημα συντεταγμένων που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί. Ως σύστημα συντεταγμένων δύναται να χρησιμοποιηθεί το καρτεσιανό, το κυλινδρικό, το σφαιρικό, το καμπυλόγραμμο ορθογώνιο ή μη-ορθογώνιο σύστημα, σταθερό ή μεταβλητό. Η επιλογή εξαρτάται από το υπό εξέταση πρόβλημα και επηρεάζει τελικά τον τύπο του πλέγματος που θα χρησιμοποιηθεί.

Επιπρόσθετα, ένας άλλος παράγοντας, ο οποίος επηρεάζει την διατύπωση των εξισώσεων, είναι η διανυσματική βάση. Από μαθηματική σκοπιά κάθε επιλογή της διανυσματικής βάσης είναι ισοδύναμη με τις υπόλοιπες. Αντίθετα από τη σκοπιά της αριθμητικής επίλυσης κάποιες μορφές παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες κατά την διαχείριση τους.

Τελικά, στην παρούσα Διπλωματική Εργασία χρησιμοποιήθηκε το ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και η σταθερή διανυσματική βάση [Pap01].

B.4. Το Πλέγμα.

Το πλέγμα διαιρεί το πεδίο ροής σε ένα πλήθος κυψελών (cells) και ορίζει ταυτόχρονα τα διακριτά σημεία, στα οποία θα υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών. Κατά συνέπεια, ο τρόπος κατασκευής του πλέγματος είναι ιδιαίτερα σημαντικός για την αποτελεσματική επίλυση ενός προβλήματος. Μια ποικιλία πλεγμάτων δύναται να χρησιμοποιηθεί σε φυσικά προβλήματα, όπως δομημένα ή μη-δομημένα πλέγματα, ενώ δεν υφίσταται περιορισμός στον αριθμό και στο σχήμα των κυψελών. Στα δισδιάστατα πλέγματα οι κυψέλες είναι συνήθως τρίγωνα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, ενώ στα τρισδιάστατα πλέγματα οι κυψέλες είναι συνήθως τετράεδρα ή εξάεδρα, αν και υπάρχουν περιπτώσεις υβριδικών μη δομημένων πλεγμάτων με παρουσία στο ίδιο πλέγμα εξάεδρων, τετραέδρων, πρισμάτων και πυραμίδων.



Σχήμα B.1: Μη δομημένο πλέγμα γύρω από αεροτομή NACA 0012 στις δύο διαστάσεις.

Τα μη δομημένα πλέγματα παρουσιάζουν σαφή πλεονεκτήματα έναντι των δομημένων πλεγμάτων. Συγκεκριμένα, τα μη δομημένα πλέγματα καθιστούν εύκολη την προσέγγιση οποιασδήποτε γεωμετρίας χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα, ενώ αντίθετα είναι πολύ δύσκολη και χρονοβόρα η κατασκευή δομημένων πλεγμάτων γύρω από πολύπλοκες γεωμετρίες. Τα πλέγματα δε που δημιουργούνται στην δεύτερη περίπτωση πιθανόν να έχουν έντονα παραμορφωμένες κυψέλες, με αποτέλεσμα να εισάγονται σφάλματα στα αποτελέσματα από την πρώιμη φάση κιόλας της διακριτοποίησης [Pap01]. Ένα ακόμη σημαντικό πλεονέκτημα των μη δομημένων πλεγμάτων είναι η δυνατότητα τοπικής παρέμβασης στο πλέγμα, σε περιοχές όπου εμφανίζονται έντονα μεταβαλλόμενα φαινόμενα, όπως οριακά στρώματα ή κύματα κρούσης. Η προαναφερθείσα τοπική προσαρμογή του μη δομημένου πλέγματος δύναται να υλοποιηθεί κατά την διάρκεια της επίλυσης ενός προβλήματος, εφόσον εμφανιστούν μεταβατικά φαινόμενα, αυξάνοντας αρκετά την ακρίβεια των τελικών αποτελεσμάτων. Αντίθετα, στην περίπτωση των δομημένων πλεγμάτων η επέμβαση θα πρέπει να πραγματοποιηθεί στο σύνολο του πλέγματος, ώστε να διατηρηθεί ο χαρακτήρας του δομημένου πλέγματος [Mar92].

Το σημαντικότερο μειονέκτημα των μη δομημένων πλεγμάτων είναι η δυσκολία χειρισμού τους. Καθώς δεν υφίσταται το νόημα της κατεύθυνσης κατά μήκος των γραμμών του πλέγματος, παρουσιάζεται μία ακανόνιστη σύνδεση των κυψελών. Επακόλουθα, η έλλειψη δομής απαιτεί τη δημιουργία κατάλληλων δομών δεδομένων, όπου θα φυλάσσονται τα τοπολογικά στοιχεία του πλέγματος. Η δημιουργία αυτών των δομών αλλά και ο χειρισμός τους είναι αρκετά χρονοβόρος, ενώ ταυτόχρονα έχει υψηλές απαιτήσεις μνήμης από τον Η/Υ. Παράδειγμα δισδιάστατου μη δομημένου πλέγματος είναι το Σχήμα Β.1, όπου βλέπουμε το πλέγμα γύρω από μία αεροτομή NACA 0012. Η έλλειψη δομής είναι φανερή, καθιστώντας αναγκαστική την δημιουργία και φύλαξη πληροφοριών, όπως οι κόμβοι ενός τριγώνου, οι ακμές ενός τριγώνου, οι κόμβοι των ακμών κ.α.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε τρισδιάστατο μη δομημένο πλέγμα, το οποίο απαρτίζεται από τετράεδρα και το οποίο προσαρμόζεται τοπικά κατά τη διάρκεια της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος. Αποτελεί έναν εξαιρετικά ευέλικτο τύπο πλέγματος, κατάλληλο για σύνθετες γεωμετρίες. Ενώ θεωρητικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί με κάθε μέθοδο διακριτοποίησης, προσαρμόζεται πολύ καλύτερα στις μεθόδους πεπερασμένων όγκων και πεπερασμένων στοιχείων.

Β.5. Οι Προσεγγίσεις.

Ανάλογα με την μέθοδο διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται απαιτούνται και οι κατάλληλες προσεγγίσεις, ώστε να υλοποιηθεί η μετάβαση από τις διαφορικές στις αλγεβρικές εξισώσεις. Στην περίπτωση της μεθόδου διακριτοποίησης των πεπερασμένων διαφορών, επιλέγονται οι προσεγγίσεις των παραγώγων, ενώ στην περίπτωση της μεθόδου διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων, επιλέγονται οι προσεγγίσεις των ολοκληρωμάτων. Πιο συγκεκριμένα, προσεγγίζονται τα επιφανειακά και τα τριπλά ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις εξισώσεις, όταν οι τελευταίες ολοκληρωθούν σε κατάλληλο όγκο αναφοράς. Τέλος, στη μέθοδο διακριτοποίησης των πεπερασμένων στοιχείων απαιτείται η επιλογή των στοιχείων και των συναρτήσεων βαρύτητας (weighting functions) [Αδα05].

Γενικότερα, η ακρίβεια των προσεγγίσεων καθορίζεται από πολλούς παράγοντες. Συνήθως, η υψηλή ακρίβεια απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό κόστος, πλέγμα υψηλής ποιότητας, ενώ παρουσιάζει δυσκολία κατά τον προγραμματισμό και παράγει περίπλοκους πίνακες. Κατά συνέπεια, απαιτείται ένας συμβιβασμός (trade-off) μεταξύ της ακρίβειας, της απλότητας, της ευκολίας στην εφαρμογή και της υπολογιστικής αποδοτικότητας [Pap01].

Β.6. Η Μέθοδος Επίλυσης.

Όπως προαναφέρθηκε, η διαδικασία των προσεγγίσεων αποφέρει τελικά ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με μέγεθος ανάλογο του μεγέθους του πλέγματος. Το εν λόγω σύστημα επιλύεται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας, κατά την οποία μια αρχική λύση βελτιώνεται σε κάθε επανάληψη. Η επαναληπτική αυτή διαδικασία καλείται διαδικασία εσωτερικών επαναλήψεων. Η επιλογή του κατάλληλου επιλύτη εξαρτάται από τον τύπο του πλέγματος και από το πλήθος των κόμβων, που εμπλέκονται σε κάθε αλγεβρική εξίσωση. Σε περίπτωση μη-γραμμικών προβλημάτων, όπως αυτό που εξετάστηκε στην παρούσα εργασία, οι εξισώσεις αρχικά γραμμικοποιούνται, ενώ στη συνέχεια υπολογίζεται η λύση του γραμμικού συστήματος. Και πάλι μια επαναληπτική διαδικασία αναλαμβάνει να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της μη-γραμμικότητας, γνωστή ως διαδικασία εξωτερικών επαναλήψεων [Pap01].

Β.7. Το Κριτήριο Σύγκλισης.

Ένα κριτήριο σύγκλισης, το οποίο καθορίζεται από τον χρήστη αναλαμβάνει τελικά τον τερματισμό τόσο των εσωτερικών όσο και των εξωτερικών επαναλήψεων.

Αυτό το κριτήριο σύγκλισης αντιστοιχεί στο μέγιστο υπόλοιπο (residual) των αποτελεσμάτων, το οποίο δέχεται ο χρήστης. Εναλλακτικά, οι επαναλήψεις δύνανται να τερματιστούν εφόσον ξεπεράσουν ένα προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων, αριθμό κατάλληλο ώστε να εξασφαλίζεται ότι η συνέχεια της διαδικασίας δεν θα αποφέρει σημαντική βελτίωση στην ποιότητα των τελικών αποτελεσμάτων. Ο αριθμός αυτός δύναται και πάλι να καθοριστεί από τον χρήστη. Ο τερματισμός των επαναληπτικών διαδικασιών αποτελεί ένα ιδιαίτερα κρίσιμο στοιχείο, καθώς επηρεάζει σημαντικά την ακρίβεια της λύσης, την αποδοτικότητα της μεθόδου και το χρόνο επίλυσης. Κατά συνέπεια το μέγιστο αποδεκτό υπόλοιπο των αποτελεσμάτων καθώς και ο αριθμός των εσωτερικών και εξωτερικών επαναλήψεων θα πρέπει να καθορίζεται πολύ προσεκτικά από το χρήστη [Pap01].

"Intentionally Blank"

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι Εξισώσεις της Ροής.

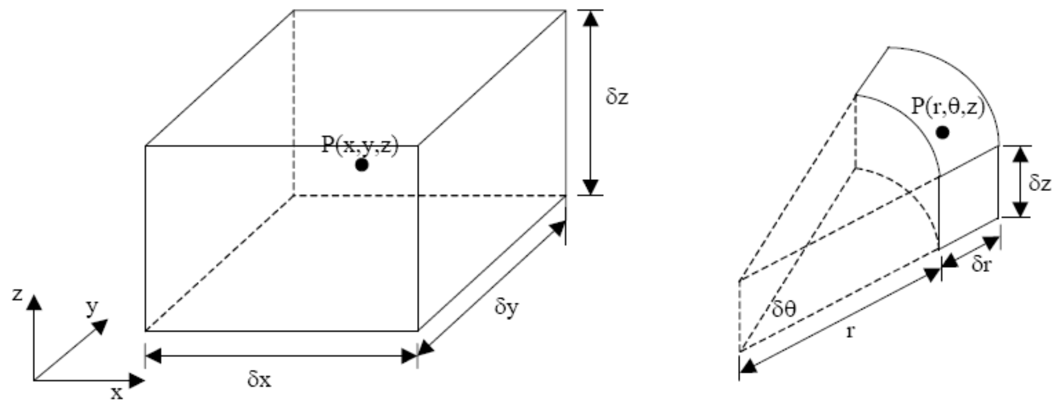
1.1. Εισαγωγή.

Οι βασικές εξισώσεις της ρευστομηχανικής, οι οποίες περιγράφουν τη ροή ρευστού σώματος, βασίζονται στους ακόλουθους τρεις παγκόσμιους νόμους [Νικ04]:

- Αρχή διατήρησης της μάζας.
- Δεύτερος νόμος του Newton (εξίσωση ορμής).
- Αρχή διατήρησης της ενέργειας (Α’ Θερμοδυναμικός Νόμος).

Από την εφαρμογή των τριών προαναφερθέντων νόμων σε ένα στοιχείο της ροής ρευστού σώματος προκύπτουν οι απαραίτητες μερικές διαφορικές εξισώσεις για την περιγραφή της κίνησης ενός ρευστού. Ειδικότερα, από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μάζας σε ένα στοιχείο ενός ρευστού, προκύπτει μία μερική διαφορική εξίσωση, η οποία καλείται Εξίσωση της Συνέχειας. Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Newton έχει ως αποτέλεσμα την διατύπωση τριών Εξισώσεων Ορμής, ενώ από τον νόμο της διατήρησης της ενέργειας, που ισοδυναμεί με τον πρώτο νόμο της Θερμοδυναμικής, προκύπτει η Εξίσωση της Ενέργειας.

Για την επίλυση του συστήματος που σχηματίζεται από τις προαναφερθείσες εξισώσεις, απαιτείται μία επιπλέον εξίσωση. Η εξίσωση που χρησιμοποιείται συνήθως είναι η Καταστατική Εξίσωση, η οποία συσχετίζει τα θερμοδυναμικά μεγέθη πίεση, πυκνότητα και θερμοκρασία.



(α) (β)

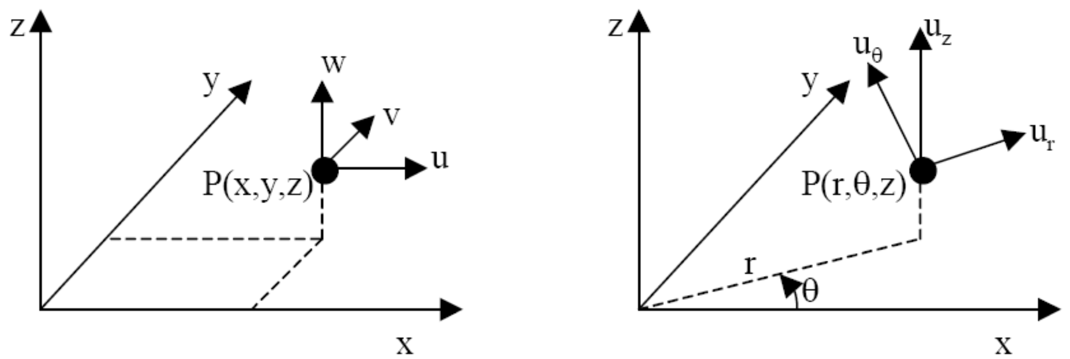
Σχήμα 1.1: Στοιχείο ροής στο (α) καρτεσιανό και (β) κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων [Pap01].

Η διατύπωση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων δύναται να πραγματοποιηθεί είτε στο καρτεσιανό είτε στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, όπως εικονίζεται στο παραπάνω Σχήμα 1.1.

Οι συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις *x, y, z* στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων συμβολίζονται με *u, υ, w* αντίστοιχα (Σχήμα 1.2.α), ενώ κάθε συνιστώσα ορίζεται ως συνάρτηση των *(x,y,z,t)*. Για λόγους ευκολίας υιοθετείται η σύμβαση άθροισης του Einstein σε περίπτωση εμφάνισης επαναλαμβανόμενων δεικτών, που επιτρέπει τη διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων σε συμπαγή μορφή. Για παράδειγμα, η αναπτυγμένη μορφή της εξίσωσης $\frac{\vartheta u_i}{\vartheta x_i} = 0$ είναι $\frac{\vartheta u}{\vartheta x} + \frac{\vartheta v}{\vartheta y} + \frac{\vartheta w}{\vartheta z} = 0$.

Αντίθετα, στην περίπτωση ενός κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων, με *r*, *θ* και *z* συμβολίζονται αντίστοιχα οι ακτινική, περιφερειακή και αξονική συντεταγμένη, ενώ με u_r, u_θ και u_z συμβολίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας στις αντίστοιχες διευθύνσεις (Σχήμα 1.2.β).

Εν συνέχεια ακολουθεί η διατύπωση των εξισώσεων για το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, το οποίο αποτελεί και το σύστημα συντεταγμένων, το οποίο επιλέχθηκε για την υλοποίηση της εν λόγω εργασίας.



(α) (β)

Σχήμα 1.2: Συνιστώσες της ταχύτητας στο (α) καρτεσιανό και (β) κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων [Pap01].

1.2. Εξίσωση της Συνέχειας.

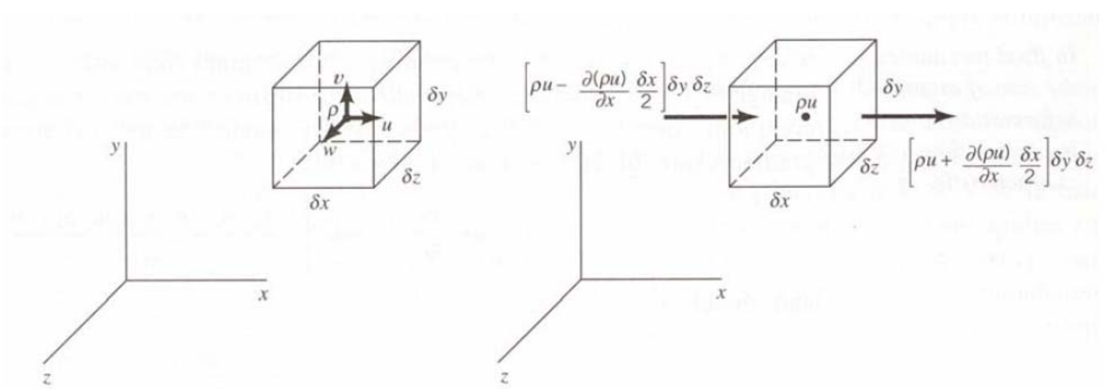
Η εξίσωση της συνέχειας, διατυπωμένη στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, σε συντηρητική μορφή και με συνιστώσες ταχύτητας *u, υ, w* έχει τη μορφή:

$$\frac{\vartheta\rho}{\vartheta t}+\frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta x}+\frac{\vartheta(\rho v)}{\vartheta y}+\frac{\vartheta(\rho w)}{\vartheta z}=0 \qquad (1.1)$$

Η παραπάνω εξίσωση ουσιαστικά είναι η μη μόνιμη χρονικά, τρισδιάστατη εξίσωση διατήρησης της μάζας για συμπιεστό ρευστό. Διατυπώνεται σε διαφορική και αυστηρά συντηρητική μορφή ενώ η αντίστοιχη μη-συντηρητική μορφή της ίδιας εξίσωσης έχει τη μορφή:

$$\frac{\vartheta\rho}{\vartheta t}+\left(\rho\frac{\vartheta u}{\vartheta x}+u\frac{\vartheta\rho}{\vartheta x}\right)+\left(\rho\frac{\vartheta v}{\vartheta y}+v\frac{\vartheta\rho}{\vartheta y}\right)+\left(\rho\frac{\vartheta w}{\vartheta z}+w\frac{\vartheta\upsilon}{\vartheta z}\right)=0 \quad (1.2)$$

Από μαθηματική σκοπιά, οι δύο παραπάνω εξισώσεις είναι ουσιαστικά ισοδύναμες. Ωστόσο κατά την εφαρμογή μιας αριθμητικής μεθόδου για την επίλυση των εξισώσεων προκύπτουν σοβαρές διαφορές. Στη συνέχεια ακολουθεί η μαθηματική απόδειξη της εξίσωσης (1.1).



Σχήμα 1.3: Στιγμιότυπα από την κίνηση ενός στοιχείου ρευστού [Mun05].

Σύμφωνα με το παραπάνω Σχήμα 1.3, θεωρούμε τον ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όγκο ελέγχου (όγκο αναφοράς) με διαστάσεις *δx, δy, δz*, στις τρεις διευθύνσεις του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Η ταχύτητα του ρευστού στο κέντρο του όγκου συμβολίζεται με *c*, η πυκνότητά του με *ρ*, ενώ οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας έχουν τιμές *u, υ, w*, αντίστοιχα, όπως εικονίζονται και στο Σχήμα 1.3. Τέλος, με $\bar{n}$ συμβολίζεται το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια, για το οποίο θετική φορά είναι πάντα η προς τα έξω φορά από τον όγκο ελέγχου. Αγνοώντας τις πιθανές πηγές και τους αντίστοιχους όρους τους, η εξίσωση της συνέχειας σε ολοκληρωτική μορφή γράφεται ως εξής:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{Cv}\rho dV+\int_{Cs}\rho\vec{c}\hat{n}dA=0 \qquad (1.3)$$

Θεωρώντας τις διαστάσεις του όγκου ελέγχου αρκετά μικρές, η μέση τιμή της πυκνότητας του ρευστού στο εσωτερικό του ισούται πρακτικά με την τιμή της πυκνότητας στο κέντρο του. Συνεπώς, ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης (1.3) δύναται να προσεγγιστεί ως εξής:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta t}\int_{Cv}\rho dV\approx\frac{\vartheta}{\vartheta t}\rho\int_{Cv}dV=\frac{\vartheta\rho}{\vartheta t}(\delta x\delta y\delta z) \quad (1.4)$$

Ωστόσο, για τον προσδιορισμό του δεύτερου όρου απαιτείται να υπολογιστούν οι ροές σε κάθε επιφάνεια του όγκου ελέγχου. Οι τελευταίες υπολογίζονται συναρτήσει της ροής στο κέντρο του, χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε σειρά Taylor, από τις οποίες λαμβάνονται υπόψη μόνο οι όροι χαμηλής τάξεως. Π.χ. το μέγεθος που αναπτύσσεται με τη σειρά Taylor κατά την *x*-διεύθυνση είναι το γινόμενο *ρu*, καθώς η ροή μάζας μέσα από μια επιφάνεια υπολογίζεται από την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στην επιφάνεια. Αντίστοιχα πράττουμε και για τις άλλες διευθύνσεις.

Ως εκ τούτου, σύμφωνα με την ανάπτυξη της σειράς Taylor κατά την *x*-διεύθυνση και στην δεξιά πλευρά του όγκου ελέγχου εξάγεται ότι:

$$\rho u\big|_{x+\delta x/2}=\rho u+\frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta x}\frac{\delta x}{2} \qquad (1.5)$$

ενώ για την αριστερή αντίστοιχα ότι:

$$\rho u\big|_{x-\delta x/2}=\rho u-\frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta x}\frac{\delta x}{2} \qquad (1.6)$$

Συνεπώς, η συνολική ροή μάζας που εξέρχεται από τον όγκο ελέγχου κατά την *x*-διεύθυνση θα δίδεται από τη σχέση:

$$\delta \dot{m}_{outx} = \rho u\Big|_{x+\delta x/2} \cdot A - \rho u\Big|_{x-\delta x/2} \cdot A = \left[\rho u + \frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta x}\frac{\delta x}{2}\right](\delta y \delta z)$$
$$-\left[\rho u - \frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta x}\frac{\delta x}{2}\right](\delta y \delta z) = \frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta x}(\delta x \delta y \delta z) \quad (1.7)$$

Όπου με *A* συμβολίζεται το εμβαδόν της αριστερής και δεξιάς πλευράς του όγκου ελέγχου.

Εξ' ορισμού, όπως έχει ήδη αναφερθεί, κάθε ροή που εξέρχεται έχει θετικό πρόσημο, ενώ κάθε εισερχόμενη ροή έχει αρνητικό πρόσημο.

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζονται και οι ροές μάζας και στις άλλες διευθύνσεις.

$$\delta \dot{m}_{outy} = \left[\rho v + \frac{\vartheta(\rho v)}{\vartheta y}\frac{\delta y}{2}\right](\delta x \delta z) - \left[\rho v - \frac{\vartheta(\rho v)}{\vartheta y}\frac{\delta y}{2}\right](\delta x \delta z) = \frac{\vartheta(\rho v)}{\vartheta y}(\delta x \delta y \delta z) \quad (1.8)$$

$$\delta \dot{m}_{outz} = \left[\rho w + \frac{\vartheta(\rho w)}{\vartheta z}\frac{\delta z}{2}\right](\delta x \delta y) - \left[\rho w - \frac{\vartheta(\rho w)}{\vartheta z}\frac{\delta z}{2}\right](\delta x \delta y) = \frac{\vartheta(\rho w)}{\vartheta z}(\delta x \delta y \delta z) \quad (1.9)$$

Τέλος, η συνολική εξερχόμενη ροή μάζας από τον όγκο ελέγχου ισούται με το άθροισμα των αποτελεσμάτων των τριών παραπάνω σχέσεων.

$$\delta \dot{m}_{out} = \delta \dot{m}_{outx} + \delta \dot{m}_{outy} + \delta \dot{m}_{outz} = \left[\frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta x} + \frac{\vartheta(\rho v)}{\vartheta y} + \frac{\vartheta(\rho w)}{\vartheta z}\right](\delta x \delta y \delta z) \quad (1.10)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.4) και (1.10) στην εξίσωση της συνέχειας (1.3) καταλήγουμε στην αρχική εξίσωση (1.1).

$$\frac{\vartheta \rho}{\vartheta t}(\delta x \delta y \delta z) + \left[\frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta x} + \frac{\vartheta(\rho v)}{\vartheta y} + \frac{\vartheta(\rho w)}{\vartheta z}\right](\delta x \delta y \delta z) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\vartheta \rho}{\vartheta t} + \frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta x} + \frac{\vartheta(\rho v)}{\vartheta y} + \frac{\vartheta(\rho w)}{\vartheta z} = 0 \quad (1.11)$$

Μια ισοδύναμη αλλά περισσότερο συνεπτυγμένη μορφή της παραπάνω εξίσωσης είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\vartheta\rho}{\vartheta t}+\nabla\cdot\rho\vec{c}=0 \qquad (1.12)$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση μόνιμης ροής ενός συμπιεστού ρευστού η χρονική παράγωγος της σχέσης (1.11) μηδενίζεται, οπότε η εξίσωση της συνέχειας παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta x}+\frac{\vartheta(\rho v)}{\vartheta y}+\frac{\vartheta(\rho w)}{\vartheta z}=0\Rightarrow\nabla\cdot\rho\vec{c}=0 \qquad (1.13)$$

1.3. Εξισώσεις της Ορμής.

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου αυτού η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα σε ένα στοιχείο ρευστού οδηγεί στις εξισώσεις ορμής [Νικ04]. Σε ένα στοιχείο ρευστού ασκούνται δυνάμεις στην επιφάνεια του αλλά και σε ολόκληρο τον όγκο ελέγχου του.

Οι δυνάμεις που επιδρούν σε ολόκληρο τον όγκο ελέγχου του οφείλονται στην δράση διάφορων πεδίων, όπως του ηλεκτρομαγνητικού και του βαρυτικού. Οι εν λόγω δυνάμεις πλην της βαρυτικής, για την περίπτωση που μελετάμε έχουν μηδενική τιμή. Αντίθετα, η βαρυτική δύναμη, δύναται να εξαχθεί από την παρακάτω σχέση:

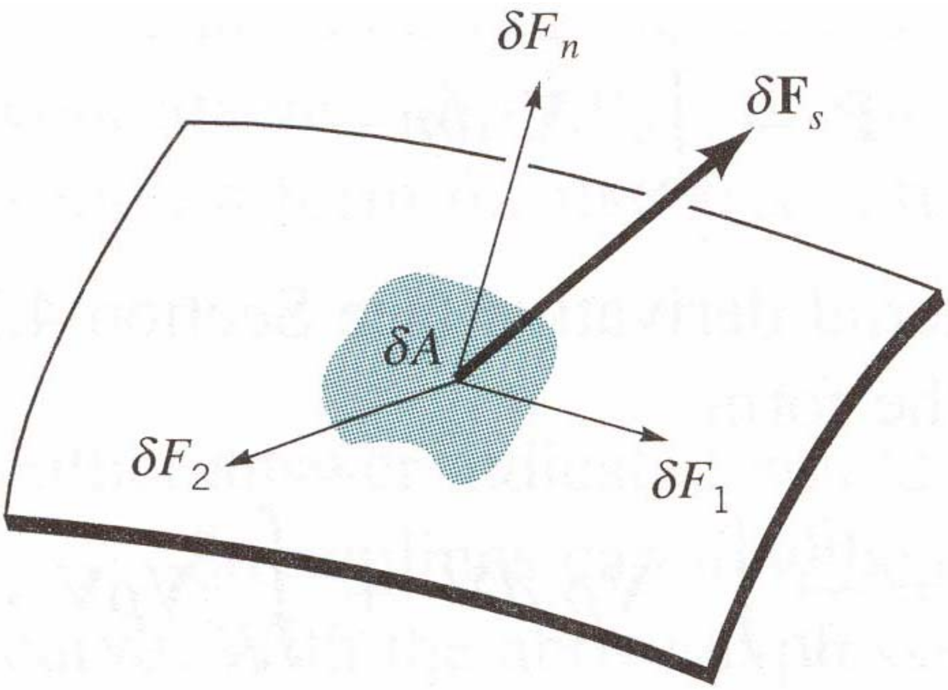
$$\delta\vec{F}_G=\delta m\vec{g} \qquad (1.14)$$

Όπου με δm συμβολίζεται η υπό εξέταση στοιχειώδης μάζα και με $\vec{g}$ η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Στη συνέχεια η προαναφερθείσα βαρυτική δύναμη αναλύεται σε τρεις συνιστώσες στις διευθύνσεις του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

$$\begin{aligned}\delta F_{Gx}&=\delta m g_x\\ \delta F_{Gy}&=\delta m g_y\\ \delta F_{Gz}&=\delta m g_z\end{aligned} \qquad (1.15)$$

Αντίθετα, με τις παραπάνω δυνάμεις, οι οποίες οφείλονται στην ύπαρξη και δράση πεδίων, οι επιφανειακές δυνάμεις, που ασκούνται σε ένα στοιχείο ρευστού, οφείλονται στην επαφή του με άλλα στοιχεία του ρευστού, ή στην επαφή του με στερεά τοιχώματα. Στο ακόλουθο Σχήμα 1.4 εικονίζεται μια στοιχειώδης επιφάνεια του ρευστού με τυχαίο προσανατολισμό. Το εμβαδόν της είναι ίσο με *δA*, ενώ πάνω της ασκείται μια στοιχειώδη δύναμη δF_s με τυχαίο προσανατολισμό. Η δύναμη αυτή αναλύεται σε τρεις συνιστώσες, εκ των οποίων η δF_n είναι κάθετη στην επιφάνεια και οι δF_1 και δF_2 είναι εφαπτόμενες σε αυτήν, κάθετες μεταξύ τους και κάθετες στην δF_n.



Σχήμα 1.4: Στοιχειώδης επιφάνεια ρευστού [Mun05].

Οι επιφανειακές τάσεις, που ασκούνται σε μια επιφάνεια ενός στοιχείου ρευστού, διακρίνονται στις ορθές τάσεις και στις διατμητικές τάσεις. Ο ορισμός των παραπάνω γίνεται με την βοήθεια των δυνάμεων δF_n, δF_1 και δF_2. Αναλυτικά ορίζονται:

$$\sigma_n = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_n}{\delta A}$$

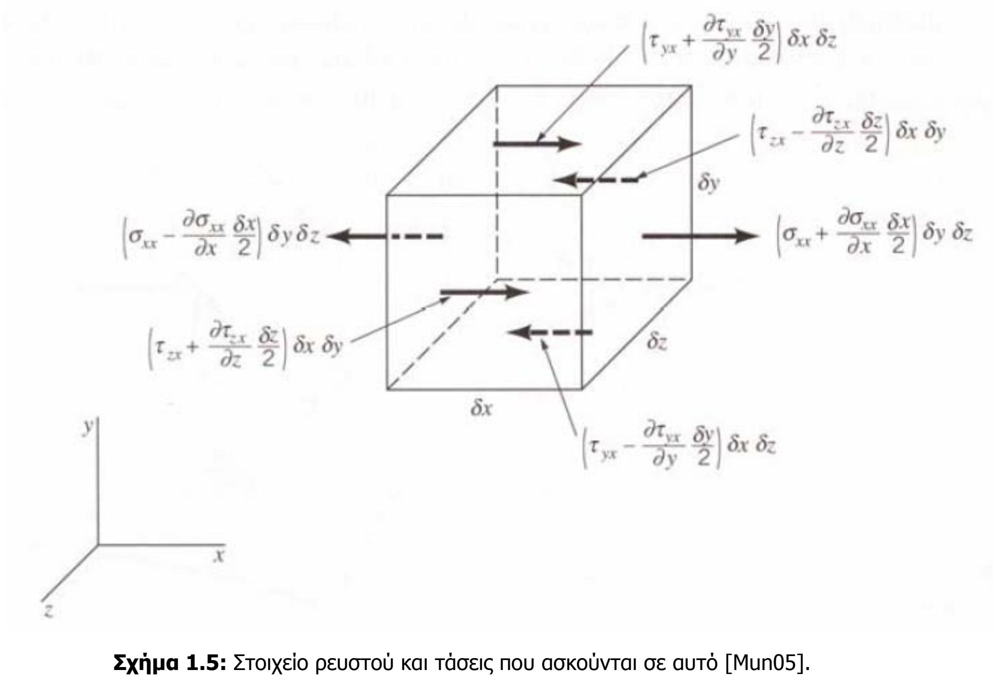
$$\tau_1 = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_1}{\delta A} \qquad (1.16)$$

$$\tau_2 = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_2}{\delta A}$$

Όπου με σ_n ορίζεται η ορθή τάση και με τ_1 και τ_2 ορίζονται οι διατμητικές τάσεις.

Επιπρόσθετα, θα πρέπει να αναφερθεί ότι οι πρωτύτερα περιγραφείσες τάσεις εμφανίζονται πάντα με δύο δείκτες. Ο πρώτος δηλώνει το επίπεδο στο οποίο ενεργεί η τάση, σύμφωνα πάντα και με το σύστημα συντεταγμένων, ενώ ο δεύτερος δείκτης δηλώνει την κατεύθυνση της τάσης. Προφανώς, στην περίπτωση των ορθών τάσεων οι δύο δείκτες θα ταυτίζονται. Η θετική φορά των τάσεων ορίζεται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, κάθετη σε μια επιφάνεια με φορά προς τα έξω. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, οι εφελκυστικές ορθές τάσεις έχουν πάντα θετικό πρόσημο, ενώ οι θλιπτικές αρνητικό.

Στη συνέχεια ακολουθεί η μαθηματική εξαγωγή των μερικών διαφορικών εξισώσεων ορμής χρησιμοποιώντας την απεικόνιση κατά Lagrange, δηλαδή εξετάζοντας ένα στοιχείο ρευστού. Εναλλακτικά, οι ίδιες σχέσεις μπορούν να προκύψουν χρησιμοποιώντας την απεικόνιση κατά Euler, δηλαδή εξετάζοντας ένα στοιχειώδη όγκο ελέγχου.



Σχήμα 1.5: Στοιχείο ρευστού και τάσεις που ασκούνται σε αυτό [Mun05].

Στο παραπάνω Σχήμα 1.5 εικονίζεται ένα στοιχείο ρευστού με σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων *δx, δy, δz*, με μάζα *δm* και πυκνότητα *ρ*. Θεωρώντας ότι στο κέντρο του εφαρμόζονται οι τρεις ορθές τάσεις σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} και οι έξι διατμητικές τάσεις τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx} και τ_{zy}, δύνανται να υπολογιστούν οι τάσεις που επικρατούν στις πλευρές του στοιχείου χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη σε σειρά

Taylor. Από τα παραπάνω προκύπτει η ακόλουθη ορθή τάση για την δεξιά πλευρά του (επίπεδο y-z), η οποία προκύπτει ως εξής:

$$\sigma_{xx} + \frac{\vartheta \sigma_{xx}}{\vartheta x}\frac{\delta x}{2} \qquad (1.17)$$

ενώ η αντίστοιχη στοιχειώδης δύναμη στην ίδια πλευρά θα είναι:

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\vartheta \sigma_{xx}}{\vartheta x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z \quad (1.18)$$

Ομοίως, για την αριστερή πλευρά προκύπτει η ορθή τάση ως εξής:

$$\sigma_{xx} - \frac{\vartheta \sigma_{xx}}{\vartheta x}\frac{\delta x}{2} \qquad (1.19)$$

και η στοιχειώδης δύναμη θα είναι:

$$\left(\sigma_{xx} - \frac{\vartheta \sigma_{xx}}{\vartheta x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z \quad (1.20)$$

Συνεπώς, η συνισταμένη δύναμη κατά την διεύθυνση *x* που προκαλείται μόνο από ορθές τάσεις στην εν λόγω διεύθυνση προκύπτει από τη σχέση:

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\vartheta \sigma_{xx}}{\theta x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z - \left(\sigma_{xx} - \frac{\vartheta \sigma_{xx}}{\vartheta x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z = \frac{\vartheta \sigma_{xx}}{\vartheta x}\left(\delta x \delta y \delta z\right) \qquad (1.21)$$

Ενώ η συνολική δύναμη κατά την ίδια διεύθυνση που περιλαμβάνει, εκτός από τις ορθές, και τις διατμητικές τάσεις προκύπτει από τη σχέση:

$$\delta F_{Sx} = \left(\frac{\vartheta \sigma_{xx}}{\vartheta x} + \frac{\vartheta \tau_{yx}}{\vartheta y} + \frac{\vartheta \tau_{zx}}{\vartheta z}\right)\left(\delta x \delta y \delta z\right) \qquad (1.22)$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν οι αντίστοιχες δυνάμεις στις άλλες δύο διευθύνσεις του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

$$\delta F_{Sy} = \left(\frac{\vartheta \tau_{xy}}{\vartheta x} + \frac{\vartheta \sigma_{yy}}{\vartheta y} + \frac{\vartheta \tau_{zy}}{\vartheta z} \right) (\delta x \delta y \delta z) \qquad (1.23)$$

$$\delta F_{Sz} = \left(\frac{\vartheta \tau_{xz}}{\vartheta x} + \frac{\vartheta \tau_{yz}}{\vartheta y} + \frac{\vartheta \sigma_{zz}}{\vartheta z} \right) (\delta x \delta y \delta z) \qquad (1.24)$$

Επομένως, στο εκάστοτε στοιχείο ρευστού ασκείται μια επιφανειακή δύναμη, που προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των παραπάνω δυνάμεων.

$$\delta \vec{F}_S = \delta F_{Sx} \hat{i} + \delta F_{Sy} \hat{j} + \delta F_{Sz} \hat{k} \qquad (1.25)$$

Επιπρόσθετα, σε καθεμιά από τις τρεις διευθύνσεις ασκούνται και βαρυτικές δυνάμεις, οι οποίες δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (1.26).

$$\begin{aligned} \delta F_{Gx} &= \delta m g_x = \rho (\delta x \delta y \delta z) g_x \\ \delta F_{Gy} &= \delta m g_y = \rho (\delta x \delta y \delta z) g_y \\ \delta F_{Gz} &= \delta m g_z = \rho (\delta x \delta y \delta z) g_z \end{aligned} \qquad (1.26)$$

Ενώ η συνισταμένη βαρυτική δύναμη που ασκείται στο στοιχείο ρευστού δίνεται από την παρακάτω σχέση (1.27).

$$\delta \vec{F}_G = \delta F_{Gx} \hat{i} + \delta F_{Gy} \hat{j} + \delta F_{Gz} \hat{k} \qquad (1.27)$$

Συνεπώς, η τελική δύναμη που ασκείται στο στοιχείο είναι η συνισταμένη δύναμη της συνολικής επιφανειακής και της συνολικής βαρυτικής δύναμης.

$$\delta \vec{F} = \delta \vec{F}_S + \delta \vec{F}_G \qquad (1.28)$$

Τέλος, η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Newton συνοψίζεται στην ακόλουθη σχέση:

$$\delta \vec{F} = \frac{D(\vec{c}\, \delta m)}{Dt} \qquad (1.29)$$

Όπου με c συμβολίζεται το διάνυσμα της ταχύτητας του στοιχείου του ρευστού. Σύμφωνα με την απεικόνιση κατά Lagrange και την αρχή διατήρησης της μάζας, η μάζα του στοιχείου του ρευστού που εξετάζεται δεν μεταβάλλεται, με συνέπεια η σχέση (1.29) να μεταβάλλεται ως εξής:

$$\delta\vec{F} = \delta m \frac{D\vec{c}}{Dt} = \delta m \vec{a} = \rho(\delta x \delta y \delta z)\vec{a} \qquad (1.30)$$

Όπου με α συμβολίζεται το διάνυσμα της επιτάχυνσης, ενώ οι τρεις συνιστώσες του εν λόγω διανύσματος a_x, a_y και a_z εκφράζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\vartheta u}{\vartheta t} + \frac{\vartheta u}{\vartheta x}u + \frac{\vartheta u}{\vartheta y}v + \frac{\vartheta u}{\vartheta z}w \\ a_y &= \frac{\vartheta v}{\vartheta t} + \frac{\vartheta v}{\vartheta x}u + \frac{\vartheta v}{\vartheta y}v + \frac{\vartheta v}{\vartheta z}w \\ a_z &= \frac{\vartheta w}{\vartheta t} + \frac{\vartheta w}{\vartheta x}u + \frac{\vartheta w}{\vartheta y}v + \frac{\vartheta w}{\vartheta z}w \end{aligned} \qquad (1.31)$$

Οπότε, αντικαθιστώντας στο δεύτερο νόμο του Newton τις σχέσεις των δυνάμεων και των επιταχύνσεων, προκύπτουν οι τελικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \rho g_x + \frac{\vartheta \sigma_{xx}}{\vartheta x} + \frac{\vartheta \tau_{yx}}{\vartheta y} + \frac{\vartheta \tau_{zx}}{\vartheta z} &= \rho\left(\frac{\vartheta u}{\vartheta t} + u\frac{\vartheta u}{\vartheta x} + v\frac{\vartheta u}{\vartheta y} + w\frac{\vartheta u}{\vartheta z}\right) \\ \rho g_y + \frac{\vartheta \tau_{xy}}{\vartheta x} + \frac{\vartheta \sigma_{yy}}{\vartheta y} + \frac{\vartheta \tau_{zy}}{\vartheta z} &= \rho\left(\frac{\vartheta v}{\vartheta t} + u\frac{\vartheta v}{\vartheta x} + v\frac{\vartheta v}{\vartheta y} + w\frac{\vartheta v}{\vartheta z}\right) \\ \rho g_z + \frac{\vartheta \tau_{xz}}{\vartheta x} + \frac{\vartheta \tau_{yz}}{\vartheta y} + \frac{\vartheta \sigma_{zz}}{\vartheta z} &= \rho\left(\frac{\vartheta w}{\vartheta t} + u\frac{\vartheta w}{\vartheta x} + v\frac{\vartheta w}{\vartheta y} + w\frac{\vartheta w}{\vartheta z}\right) \end{aligned} \qquad (1.32)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις είναι γενικές σχέσεις, καθώς δύνανται να περιγράψουν την κίνηση οποιουδήποτε ρευστού, είτε αυτό είναι συμπιεστό, είτε ασυμπίεστο και είτε εξετάζεται μόνιμο, είτε μη μόνιμο πεδίο ροής. Από την παραπάνω μη συντηρητική μορφή προκύπτουν τελικά οι εξισώσεις Euler και οι εξισώσεις Navier-Stokes. Οι άγνωστοι, που περιλαμβάνονται σε αυτές, είναι συνολικά δεκατρείς (13) και είναι οι εξής: η πυκνότητα ρ, οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας *u, υ, w*, οι τρεις ορθές τάσεις σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} και οι έξι διατμητικές τάσεις τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx} και τ_{zy}. Για τον υπολογισμό αυτών των αγνώστων απαιτείται η μοντελοποίηση ενός συστήματος εξισώσεων ίσο σε πλήθος με αυτό των ζητούμενων αγνώστων. Ως εκ τούτου στις τρεις τελευταίες σχέσεις, προστίθενται η εξίσωση της συνέχειας, η οποία παρουσιάστηκε σε προηγούμενη παράγραφο του κεφαλαίου, η εξίσωση ενέργειας, καθώς και η καταστατική εξίσωση του ρευστού, η οποία θα παρουσιαστεί σε επόμενη παράγραφο. Επιπλέον απαιτείται η μοντελοποίηση των τάσεων (ορθών και διατμητικών) σε σχέση με τους υπόλοιπους αγνώστους [Κου98].

1.4. Οι Εξισώσεις Navier- Stokes.

Λόγω ότι οι εξισώσεις Navier- Stokes δεν αφορούν αλλά και δεν εφαρμόζονται στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, γίνεται παρακάτω μόνο μία απλή αναφορά σε αυτές. Οι Navier και Stokes ξεκινώντας από το προαναφερθέν ελλιπές σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, προσπάθησαν να επινοήσουν προσεγγιστικές εξισώσεις για τις τάσεις, ώστε να συμπληρώσουν το μαθηματικό μοντέλο με εννέα νέες σχέσεις και να το καταστήσουν επιλύσιμο. Οι εξισώσεις που επινόησε ο καθένας τους βασίστηκαν σε ανεξάρτητες παραδοχές, όπως η επέκταση της θεωρίας της ελαστικότητας των στερεών στα ρευστά για τον Stokes. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις θεωρίες τους κρίθηκαν αρχικά αυθαίρετα, καθώς βασίστηκαν σε αυθαίρετες παραδοχές, ωστόσο όμως και οι δύο κατέληξαν σε αποτελέσματα που συμφωνούσαν μεταξύ τους, και κυριότερα συμφωνούσαν με τα πειραματικά δεδομένα που είχαν στη διάθεση τους. Ως συνέπεια, οι εξισώσεις τους, που πήραν και το όνομα των εμπνευστών τους, έγιναν καθολικά αποδεκτές [Αδα05].

1.5. Οι Εξισώσεις Euler.

Οι εξισώσεις Euler αποτελούν ειδική περίπτωση των εξισώσεων Navier-Stokes, καθώς προκύπτουν από τις τελευταίες προϋποθέτοντας μηδενική τριβή, δηλαδή ροή μη συνεκτικού ρευστού [Νικ04]. Στην περίπτωση αυτή δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις στην επιφάνεια του στοιχείου ρευστού (Σχήμα 1.5), αλλά μόνο ορθές τάσεις, οι οποίες και είναι ίσες μεταξύ τους ανεξάρτητα της κατεύθυνσής τους. Κατά συνέπεια ισχύει ότι:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \qquad (1.33)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$$

Επιπλέον, οι ορθές τάσεις ορίζουν την πίεση *p* του ρευστού, σύμφωνα με την σχέση:

$$p = -\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = -\sigma_{zz} \qquad (1.34)$$

Το αρνητικό πρόσημο, που εμφανίζεται στη σχέση (1.34) οφείλεται στο γεγονός ότι η πίεση ορίζεται από την θλιπτική τάση που ασκείται στο ρευστό, και όχι από την εφελκυστική που εξ' ορισμού είναι θετική. Εν συνεχεία, αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις (1.33) και (1.34) στη γενική έκφραση των εξισώσεων ορμής (1.32), προκύπτουν οι εξισώσεις Euler, σε μη συντηρητική μορφή, οι οποίες είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}
\rho g_x - \frac{\vartheta p}{\vartheta x} &= \rho\left(\frac{\vartheta u}{\vartheta t} + u\frac{\vartheta u}{\vartheta x} + v\frac{\vartheta u}{\vartheta y} + w\frac{\vartheta u}{\vartheta z}\right) \\
\rho g_y - \frac{\vartheta p}{\vartheta y} &= \rho\left(\frac{\vartheta v}{\vartheta t} + u\frac{\vartheta v}{\vartheta x} + v\frac{\vartheta v}{\vartheta y} + w\frac{\vartheta v}{\vartheta z}\right) \qquad (1.35) \\
\rho g_z - \frac{\vartheta p}{\vartheta z} &= \rho\left(\frac{\vartheta w}{\vartheta t} + u\frac{\vartheta w}{\vartheta x} + v\frac{\vartheta w}{\vartheta y} + w\frac{\vartheta w}{\vartheta z}\right)
\end{aligned}$$

Η ισχύς των εξισώσεων Euler είναι καθολική, καθώς η απόδειξή τους δεν βασίζεται σε κάποια παραδοχή, αλλά απορρέει από την εφαρμογή βασικών φυσικών νόμων. Η διατύπωσή τους ουσιαστικά εκφράζει τη θεμελιώδη αρχή διατήρησης της ορμής σε διαφορική μορφή. Η συντηρητική μορφή των εξισώσεων (με απουσία βαρυτικών δυνάμεων), η οποία θα χρησιμοποιείται στη συνέχεια, είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
&\frac{\vartheta(\rho u)}{\vartheta t} + \frac{\vartheta(\rho u^2 + p)}{\vartheta x} + \frac{\vartheta(uv)}{\vartheta y} + \frac{\vartheta(uw)}{\vartheta z} = 0 \\
&\frac{\vartheta(\rho v)}{\vartheta t} + \frac{\vartheta(vu)}{\vartheta x} + \frac{\vartheta(\rho v^2 + p)}{\vartheta y} + \frac{\vartheta(vw)}{\vartheta z} = 0 \qquad (1.36) \\
&\frac{\vartheta(\rho w)}{\vartheta t} + \frac{\vartheta(wu)}{\vartheta x} + \frac{\vartheta(wv)}{\vartheta y} + \frac{\vartheta(\rho w^2 + p)}{\vartheta z} = 0
\end{aligned}$$

1.6. Εξίσωση της Ενέργειας (Α′ Θερμοδυναμικός Νόμος).

Η εξίσωση της ενέργειας εκφράζει τον Α′ θερμοδυναμικό νόμο και επιβάλει τη διατήρηση της ενέργειας κατά την ροή του ρευστού [Νικ04]. Ουσιαστικά αποτελεί έναν ισολογισμό μεταξύ της εσωτερικής, της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, της πίεσης και της θερμότητας.

Η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης της ενέργειας αναφέρεται σε κυψέλη ελέγχου με όγκο και εμβαδόν εξωτερικής επιφάνειας *A*:

$$\frac{d}{dt}\oint_{CV} E\rho dV = -\oint_{A} h_t \rho c_n dA + \dot{Q} - \dot{W} \qquad (1.37)$$

Όπου με Q συμβολίζεται η ροή θερμότητας (με θετικό πρόσημο όταν είναι εισερχόμενη), με *W* συμβολίζεται η μηχανική ισχύς (με θετικό πρόσημο όταν είναι εξερχόμενη) και με h_t η ολική ειδική ενθαλπία (ολική ενθαλπία ανά μονάδα μάζας). Επίσης με *E* συμβολίζεται η ειδική ενέργεια, που προκύπτει από την παρακάτω σχέση (1.38), στην οποία με *e* συμβολίζεται η ειδική εσωτερική ενέργεια (ανά μονάδα μάζας).

$$E = e + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) \qquad (1.38)$$

Στην παραπάνω εξίσωση (1.38) δεν έχει συμπεριληφθεί στο δεύτερο μέλος ο όρος της δυναμικής ενέργειας λόγω υψομετρικής διαφοράς (λόγω βαρύτητας), αφού αυτός είναι αμελητέος στα αέρια που πρόκειται να εξεταστούν στην παρούσα εργασία.

Επιπρόσθετα, ο πρώτος όρος της σχέσης (1.37) αναφέρεται στη χρονική μεταβολή της αποθηκευμένης ενέργειας στο ρευστό εντός του όγκου ελέγχου CV, ενώ ο δεύτερος όρος αναφέρεται στην εισροή ενέργειας στον όγκο ελέγχου CV μαζί με την εισερχόμενη παροχή μάζας. Επισημαίνεται ότι για αδιαβατική ροή θα ισχύει $\dot{Q} = 0$, ενώ για άεργη ροή $\dot{W} = 0$.

Η διαφορική μορφή της εξίσωσης της ενέργειας για μη συνεκτική και αδιαβατική ροή χωρίς πηγές θερμότητας διατυπώνεται ως εξής [Κου98]:

$$\frac{\vartheta(\rho E)}{\vartheta t}+\frac{\vartheta((\rho E+p)u)}{\vartheta x}\frac{((\rho E+p)v)}{\vartheta y}+\frac{((\rho E+p)w)}{\vartheta z}=0 \qquad (1.39)$$

1.7. Καταστατική Εξίσωση του Ρευστού.

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο για την συμπλήρωση του αριθμού των εξισώσεων του μαθηματικού μοντέλου, ώστε να καταστεί το τελευταίο επιλύσιμο, απαιτείται η προσθήκη της γνωστής καταστατικής εξίσωσης του τελείου αερίου. Η αξιοποίηση της εν λόγω εξίσωσης απαιτεί την παραδοχή της θερμοδυναμικής ισορροπίας, δηλαδή την παραδοχή ότι το ρευστό προσαρμόζεται πρακτικά ακαριαία σε οποιαδήποτε μεταβολή επηρεάζει την ισορροπία του [Kou98].

Όπως είναι γνωστό, η θερμοδυναμική κατάσταση ενός ρευστού δύναται να προσδιοριστεί, εφόσον είναι γνωστές οι τιμές δύο μόνο μεταβλητών του, καθώς οι υπόλοιπες υπολογίζονται από την καταστατική εξίσωση. Ως εκ τούτου εάν είναι γνωστές η τιμή της πυκνότητας ρ και η τιμή της θερμοκρασίας T του ρευστού, είναι δυνατοί οι υπολογισμοί είτε της πίεσης p είτε της ειδικής εσωτερικής ενέργειας e. Οι αντίστοιχες σχέσεις για τους προαναφερθέντες υπολογισμούς στην περίπτωση του ιδανικού αερίου είναι οι ακόλουθες:

$$p=\rho RT \qquad (1.40)$$

$$e=c_v T \qquad (1.41)$$

Όπου με c_v συμβολίζεται η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο ενώ με R συμβολίζεται η σταθερά τελείου αερίου του συγκεκριμένου αερίου που εξετάζεται.

“Intentionally Blank”

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Η Μέθοδος Διακριτοποίησης των Πεπερασμένων Όγκων.

2.1. Μέθοδοι Διακριτοποίησης.

2.1.1. Εισαγωγή.

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, για την προσέγγιση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων του μοντέλου απαιτείται η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου διακριτοποίησης. Υφίστανται τρεις κύριες μέθοδοι διακριτοποίησης οι οποίες είναι οι εξής [Bar04]:

- Η μέθοδος διακριτοποίησης των πεπερασμένων διαφορών.
- Η μέθοδος διακριτοποίησης των πεπερασμένων στοιχείων.
- Η μέθοδος διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων.

Από αυτές τις τρεις μεθόδους επιλέχθηκε τελικά η τελευταία για τη χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler στην παρούσα εργασία. Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου πραγματοποιείται μία σύντομη περιγραφή των δύο πρώτων μεθόδων διακριτοποίησης, ενώ κατόπιν γίνεται μία αναλυτική περιγραφή της μεθόδου διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων.

2.1.2. Η Μέθοδος Διακριτοποίησης των Πεπερασμένων Διαφορών.

Η μέθοδος διακριτοποίησης των πεπερασμένων διαφορών αποτελεί την αρχαιότερη από τις εν λόγω μεθόδους, αλλά και την πιο εύκολα εφαρμόσιμη σε απλές γεωμετρίες. Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο, σε ένα σημείο του πλέγματος, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις προσεγγίζονται από αλγεβρικές σχέσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν τις τιμές των ποσοτήτων των γειτονικών στον υπό εξέταση κόμβο. Ως εκ τούτου για κάθε σημείο του πλέγματος δημιουργείται μία αλγεβρική εξίσωση, στην οποία τόσο η τιμή των μεγεθών στον υπό εξέταση κόμβο όσο και στους γειτονικούς του είναι άγνωστη. Αν και θεωρητικά η συγκεκριμένη μέθοδος δύναται να εφαρμοστεί σε οποιουδήποτε είδους πλέγμα, έως τώρα έχει εφαρμοστεί μόνο σε δομημένα πλέγματα, όπου είναι ευκολότερος ο υπολογισμός των απαραίτητων παραγώγων. Επιπρόσθετα, η εν λόγω μέθοδος δύναται σχετικά εύκολα να δώσει προσεγγίσεις υψηλής τάξης. Δύο μέθοδοι χρησιμοποιούνται συνήθως για την εξαγωγή των προαναφερθέντων αλγεβρικών εξισώσεων, η ανάπτυξη σε σειρές Taylor και η πολυωνυμική προσέγγιση. Εν κατακλείδι η μέθοδος διακριτοποίησης των πεπερασμένων διαφορών, αν και εύκολη στη διαχείριση της, περιορίζεται αρκετά λόγω εφαρμογής της μόνο σε δομημένα πλέγματα [Pap01].

2.1.3. Η Μέθοδος Διακριτοποίησης των Πεπερασμένων Στοιχείων.

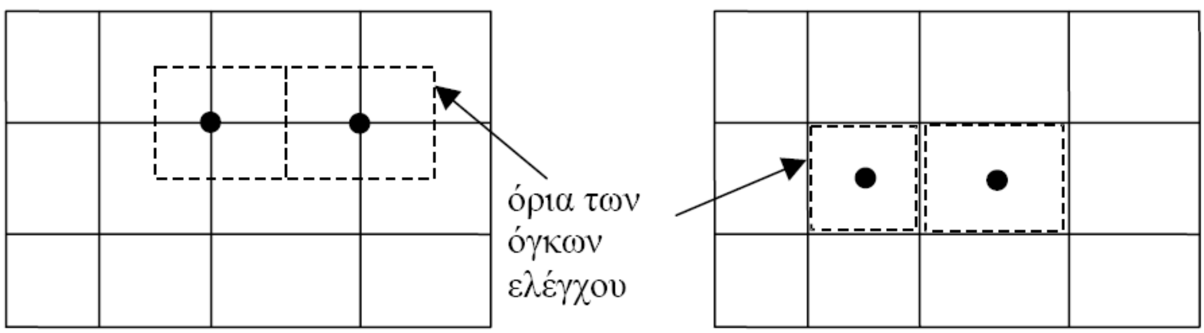
Η μέθοδος διακριτοποίησης των πεπερασμένων στοιχείων αναπτύχθηκε αρχικά ως ένα εργαλείο επίλυσης προβλημάτων στον τομέα της αντοχής των υλικών. Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο ο χώρος διαιρείται σε έναν αριθμό στοιχείων, τα οποία είναι συνήθως μη δομημένα. Ως εκ τούτου η μέθοδος αυτή δύναται να εφαρμοστεί σε περίπλοκες γεωμετρίες. Αρχικά, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις σε κάθε στοιχείο πολλαπλασιάζονται με έναν συντελεστή, προτού δηλαδή συμπεριληφθούν στο σύστημα των εξισώσεων. Στη συνέχεια η λύση προσεγγίζεται με μία νέα συνάρτηση για κάθε στοιχείο με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρείται η συνοχή της λύσης στα όρια των στοιχείων. Η εν λόγω μέθοδος έχει επιδείξει έως σήμερα θετικά αποτελέσματα ακόμη και σε ιδιαίτερα πολύπλοκες γεωμετρίες. Αν και παραμένει το κύριο υπολογιστικό εργαλείο για την επίλυση δομικών προβλημάτων, εφαρμόζεται επιτυχώς και σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστομηχανικής [Pap01].

2.2. Η Μέθοδος Διακριτοποίησης των Πεπερασμένων Όγκων.

2.2.1. Γενικά Στοιχεία για την Μέθοδο.

Η μέθοδος διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων αποτελεί την κύρια μέθοδο διακριτοποίησης για την επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Κύριο πλεονέκτημα της εν λόγω μεθόδου αποτελεί η δυνατότητα της για εφαρμογή σε κάθε τύπο πλέγματος, αλλά και σε πολύπλοκες γεωμετρίες. Εξ' ορισμού η μέθοδος αυτή είναι συντηρητική, εφ' όσον τα επιφανειακά ολοκληρώματα είναι τα ίδια στις δύο πλευρές μιας διεπιφάνειας. Επιπρόσθετα, όλες οι μεταβλητές που υπολογίζονται έχουν φυσική σημασία, κάτι που συμβάλει στην ευρεία χρήση της μεθόδου. Αντίθετα, κύριο μειονέκτημα της μεθόδου αποτελεί η δυσκολία στην ανάπτυξη σχημάτων μεγαλύτερης ακρίβειας από την δεύτερη για τρισδιάστατα μη-δομημένα πλέγματα. Παρόλα αυτά η μέθοδος διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων αποτελεί μια ευρέως διαδεδομένη μέθοδο χωρικής διακριτοποίησης, η οποία ουσιαστικά μετατρέπει το πολύπλοκο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων σε ένα επιλύσιμο σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων [Pap01].

Καταρχήν, σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο, ο χώρος ροής του ρευστού υποδιαιρείται σε ένα σύνολο όγκων, που καλούνται όγκοι αναφοράς ή όγκοι ελέγχου ή κυψέλες ελέγχου (Control Volumes, CV). Η διακριτοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων, που περιγράφουν τη ροή του ρευστού, πραγματοποιείται ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις σε όγκους ελέγχου. Οι όγκοι ελέγχου περιέχουν τα διακριτά σημεία του πεδίου, στα οποία θα υπολογιστούν οι μεταβλητές επίλυσης, τα οποία καλούνται και υπολογιστικοί κόμβοι, δηλαδή το κέντρο κάθε όγκου αναφοράς αποτελεί και ένα διακριτό σημείο του πεδίου, στο οποίο θα υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών του προβλήματος, όπως η πίεση, η ταχύτητα, η πυκνότητα, η θερμοκρασία κ.α. Υφίστανται δύο μέθοδοι αναπαράστασης των υπολογιστικών κόμβων, η κεντροκομβική και η κεντροκυψελική μέθοδος. Στην πρώτη περίπτωση κάθε υπολογιστικός κόμβος, στον οποίο θα αποθηκευτούν και τα ζητούμενα μεγέθη, εντοπίζεται σε σημείο τομής των γραμμών του πλέγματος και τα όρια των όγκων αναφοράς εντοπίζονται ενδιάμεσα μεταξύ γειτονικών υπολογιστικών κόμβων, δηλαδή σε αυτήν την μέθοδο το κέντρο ενός όγκου αναφοράς συμπίπτει με έναν κόμβο του πλέγματος, οπότε ο υπολογισμός των μεταβλητών στα κέντρα των όγκων αναφοράς είναι ισοδύναμος με τον υπολογισμό τους σε όλους τους κόμβους του πλέγματος. Αντίθετα στην δεύτερη περίπτωση, οι γραμμές του πλέγματος διαμορφώνουν τα όρια των όγκων αναφοράς και οι υπολογιστικοί κόμβοι βρίσκονται στα κέντρα τους. Οι δύο τρόποι αναπαράστασης των όγκων αναφοράς παρουσιάζονται στο παρακάτω Σχήμα 2.1 για καρτεσιανό δισδιάστατο δομημένο πλέγμα [Αδα05].



Σχήμα 2.1: Κεντροκομβική (αριστερά) και κεντροκυψελική (δεξιά) μέθοδος διακριτοποίησης [Pap01].

Τέλος, κρίνεται απαραίτητο να αναφερθεί ότι και οι δύο προαναφερθείσες μέθοδοι χρησιμοποιούνται ευρέως με επιτυχία, ενώ στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η κεντροκομβική μέθοδος (για μη δομημένο πλέγμα).

2.2.2. Μοντελοποίηση των Όγκων Ελέγχου.

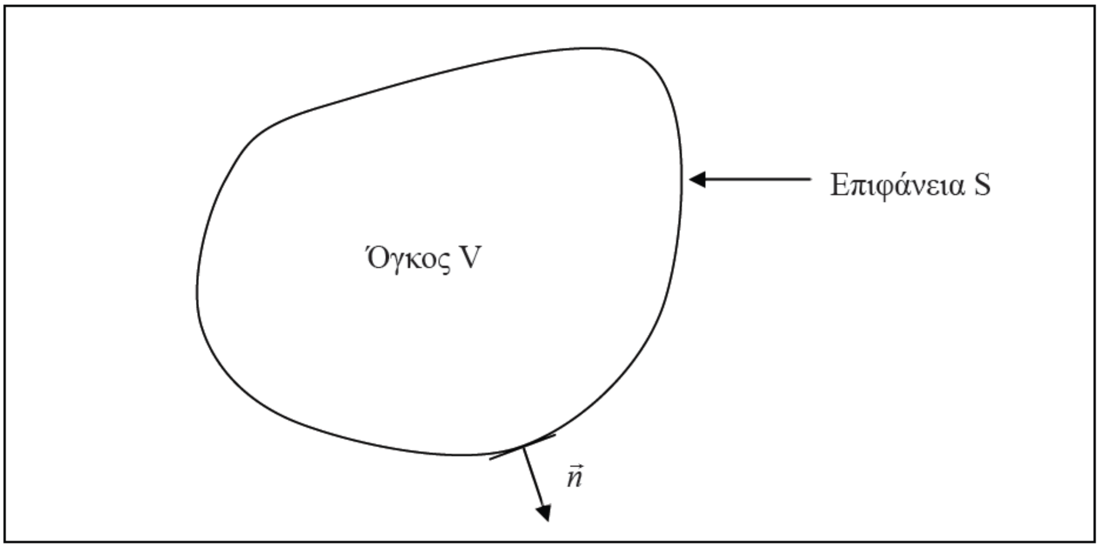
Στην παράγραφο αυτή περιγράφεται η μοντελοποίηση των όγκων ελέγχου, σύμφωνα με την οποία υλοποιήθηκε στην συνέχεια η παρούσα Διπλωματική Εργασία. Καταρχήν, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι δεν υπάρχει περιορισμός ως προς τη γεωμετρία του όγκου ελέγχου. Μπορούν εν γένει να χρησιμοποιηθούν πολυεδρικές τρισδιάστατες γεωμετρίες. Οι όγκοι ελέγχου μπορούν να έχουν αυθαίρετο πλήθος γειτονικών όγκων και αυθαίρετη γεωμετρία. Ως εκ τούτου η μέθοδος πεπερασμένων όγκων είναι ιδανική για πολύπλοκες γεωμετρίες και μπορεί να διαχειριστεί εύκολα τα μη-δομημένα πλέγματα.

Κατόπιν κρίνεται σκόπιμη η εύρεση μιας κοινής έκφρασης τόσο για την εξίσωση της συνέχειας όσο και για τις εξισώσεις διατήρησης της ορμής και της ενέργειας, πριν την αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων [Pap01]. Η εξίσωση αυτή θα περιγράφει γενικά τις εξισώσεις, που απαρτίζουν το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων, και θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια κατά την εφαρμογή και ανάλυση της μεθόδου διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων. Η εξίσωση αυτή είναι η εξής:

$$\begin{aligned}&\frac{\vartheta\rho\Phi}{\vartheta t}+\frac{\vartheta(\rho u\Phi)}{\vartheta x}+\frac{\vartheta(\rho v\Phi)}{\vartheta y}+\frac{\vartheta(\rho w\Phi)}{\vartheta z}=S_{\Phi}\Rightarrow\\&\frac{\vartheta\rho\Phi}{\vartheta t}+div(\rho\vec{u}\Phi)=S_{\Phi}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Για την παραπάνω εξίσωση (2.1) αποδεικνύεται ότι όλες οι μερικές διαφορικές εξισώσεις της ροής (Συνέχειας, Ορμής και Ενέργειας) μπορούν να διατυπωθούν στη μορφή αυτή. Η γενικευμένη εξίσωση (2.1) λοιπόν αποτελεί την απαρχή των υπολογιστικών διαδικασιών είτε για τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, είτε για τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, η οποία και θα παρουσιαστεί στην συνέχεια [Αδα05].

Βασιζόμενοι στο θεώρημα του Gauss η εξίσωση (2.1) δύναται να ολοκληρωθεί στον εκάστοτε όγκο αναφοράς του υπό εξέταση χωρικού πεδίου ροής. Το εν λόγω θεώρημα δίνει την μαθηματική σχέση μεταξύ ενός ολοκληρώματος σε έναν όγκο *V* και ενός ολοκληρώματος κατά μήκος της επιφάνειας *S* που ορίζει τον όγκο *V*. Το παρακάτω Σχήμα 2.2 αποτελεί τη σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος του Gauss.

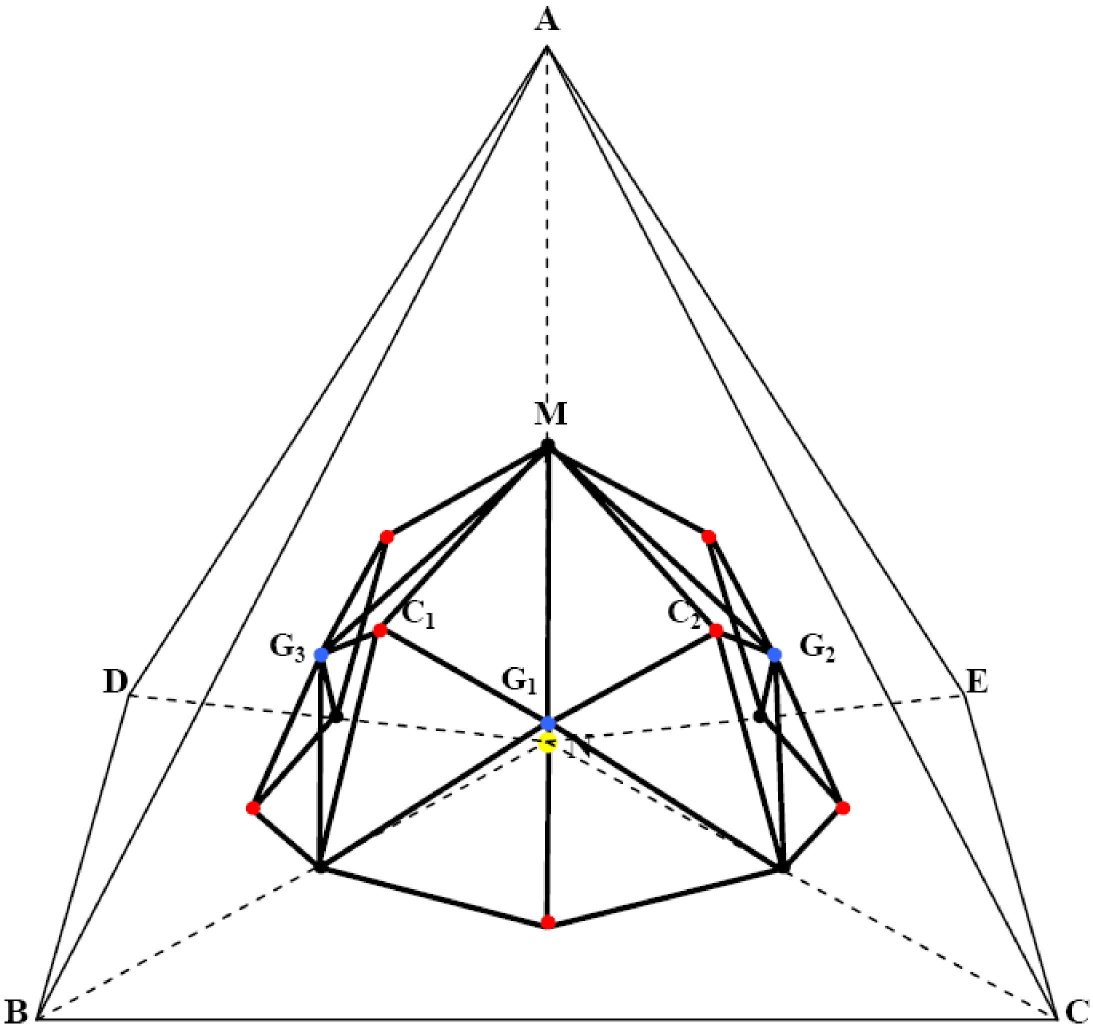


Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος Gauss [Pap01].

Αν υποτεθεί ότι με $\overline{n}$ συμβολίζεται το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια *S*, για το οποίο ορίζεται θετική φορά όταν εξέρχεται από τον όγκο *V*, τότε η μαθηματική έκφραση του θεωρήματος Gauss είναι η ακόλουθη:

$$\iiint_V div(\vec{q})dV = \iint_S \vec{q}\vec{n}dS \qquad (2.2)$$

Στη συνέχεια της παραγράφου περιγράφεται ο τρόπος σχηματισμού του όγκου αναφοράς, που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία. Ένα τμήμα του ενός όγκου ελέγχου τρισδιάστατου μη δομημένου πλέγματος, στον οποίο θα ολοκληρωθεί η εξίσωση (2.2) παρουσιάζεται στο επόμενο Σχήμα 2.3. Το τμήμα αυτό, όπως φαίνεται, σχηματίζεται από τα επιμέρους τμήματα του όγκου ελέγχου, που συνεισφέρουν τρία από τα τετράεδρα, στα οποία ανήκει ο κόμβος **N** (εικονίζεται με κίτρινο χρώμα). Επίσης εικονίζονται τα μέσα των ακμών (με μαύρο χρώμα), τα βαρύκεντρα των εδρών των τετραέδρων (με κόκκινο χρώμα) και τα βαρύκεντρα τους (με μπλε χρώμα). Συγκεκριμένα, οι κόμβοι **A**, **B**, **C**, **D**, **E** είναι γειτονικοί του κόμβου **N** και τα σημεία $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{G_3}$ είναι τα βαρύκεντρα των τετραέδρων **ABCN**, **AECN** και **ABDN** αντίστοιχα [Αδα05]. Επιπρόσθετα, **M** είναι το μέσο της ακμής **AN** και $\mathbf{C_1}$ και $\mathbf{C_2}$ τα βαρύκεντρα των εδρών **ABN** και **ACN** αντίστοιχα.



Σχήμα 2.3: Τμήμα κυψέλης ελέγχου για τρισδιάστατο μη δομημένο πλέγμα [Αδα05].

Η ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.1) διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$\iiint_{CV} \frac{\vartheta \rho \Phi}{\vartheta t} dV + \iiint_{CV} div(\rho \vec{u} \Phi) dV = \iiint_{CV} S_{\Phi} dV \qquad (2.3)$$

Υποθέτοντας ότι ο ρυθμός μεταβολής του παράγοντα *ρΦ* είναι σταθερός για τον όγκο ελέγχου που εξετάζεται ο πρώτος όρος της εξίσωσης (2.3) προσεγγίζεται ως εξής:

$$\iiint_{CV} \frac{\vartheta(\rho \Phi)}{\vartheta t} dV \cong \frac{\vartheta(\rho \Phi)}{\vartheta t} VOL \qquad (2.4)$$

Όπου με *VOL* συμβολίζεται ο όγκος της κυψέλης ελέγχου. Η προαναφερθείσα υπόθεση, στην οποία βασίστηκε η προηγούμενη σχέση (2.4) αποτελεί μία αρκετά καλή προσέγγιση στην περίπτωση που η τελευταία έχει μικρές διαστάσεις.

Στη συνέχεια με την εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στον δεύτερο όρο της εξίσωσης (2.3), ο τελευταίος διατυπώνεται ως εξής:

$$\iiint_{CV} div(\rho\vec{u}\Phi)dV = \iint_{S} \rho\vec{u}\Phi\vec{n}ds = \iint_{S} \rho\Phi\vec{u}\vec{n}ds = \sum_{i} \iint_{Si} \rho_i \Phi_i \vec{u}_i \vec{n}_i ds \qquad (2.5)$$

Όπου με *S* συμβολίζεται η συνολική επιφάνεια του όγκου ελέγχου και με $\vec{n}$ συμβολίζεται το κάθετο σε αυτή διάνυσμα. Το εν λόγω ολοκλήρωμα υπολογίζεται τελικά αθροίζοντας τα επιμέρους ολοκληρώματα, που αντιστοιχούν σε μικρά τριγωνικά τμήματα της επιφάνειας του όγκου ελέγχου, όπως τα επιμέρους επίπεδα τμήματα $\mathbf{MC_1G_1}$ και $\mathbf{MC_2G_1}$ του Σχήματος 2.3. Επομένως, ο δεύτερος όρος υπολογίζεται από το άθροισμα των ολοκληρωμάτων που αντιστοιχούν σε όλα τα *i* τριγωνικά τμήματα, τα οποία απαρτίζουν την επιφάνεια του όγκου ελέγχου, ενώ με $\vec{n}_i$ συμβολίζεται το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο *i* επίπεδο τμήμα. Ο υπολογισμός των επιμέρους ολοκληρωμάτων απαιτεί την γνώση του όρου $\rho_i \Phi_i \vec{u}_i \vec{n}_i$ σε όλα τα σημεία κάθε τριγώνου. Αυτό ασφαλώς δεν είναι εφικτό, καθώς υπολογίζονται οι τιμές μόνο στο κέντρο κάθε όγκου ελέγχου. Αντί αυτού χρησιμοποιείται μια προσέγγιση, λαμβάνοντας την τιμή του παραπάνω όρου στο μέσο κάθε ακμής, που ξεκινά από τον κόμβο **N**. Για παράδειγμα, για την ακμή **NA** του Σχήματος 2.3 επιλύεται το τοπικό πρόβλημα Riemann μεταξύ των καταστάσεων που αντιστοιχούν στους δύο ακραίους κόμβους της ακμής (κόμβοι **N** και **A**) και υπολογίζεται η μέση κατά Roe τιμή του όρου στο μέσο **M** της ακμής [Kou98]. Η τιμή αυτή θεωρείται σταθερή στις τριγωνικές επιφάνειες $\mathbf{MC_1G_1}$ και $\mathbf{MC_2G_1}$, οπότε υπολογίζονται τα ολοκληρώματα πάνω στις επιφάνειες αυτές, αφού υπολογιστούν και τα κάθετα διανύσματα $\vec{n}_i$:

$$\iint_{i} \rho_i \Phi_i \vec{u}_i \vec{n}_i \; ds = \overline{\rho\Phi\vec{u}\vec{n}_i}\big|_M S_i \quad (2.6)$$

Όπου με S_i συμβολίζεται το εμβαδόν του τριγωνικού επιπέδου *i*, ενώ με την πάνω παύλα συμβολίζεται ο μέσος όρος. Τέλος, ο τρίτος όρος της εξίσωσης (2.6) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\iiint_{CV} S_\Phi dV = S_\Phi VOL \qquad (2.7)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων.

3.1. Εισαγωγή.

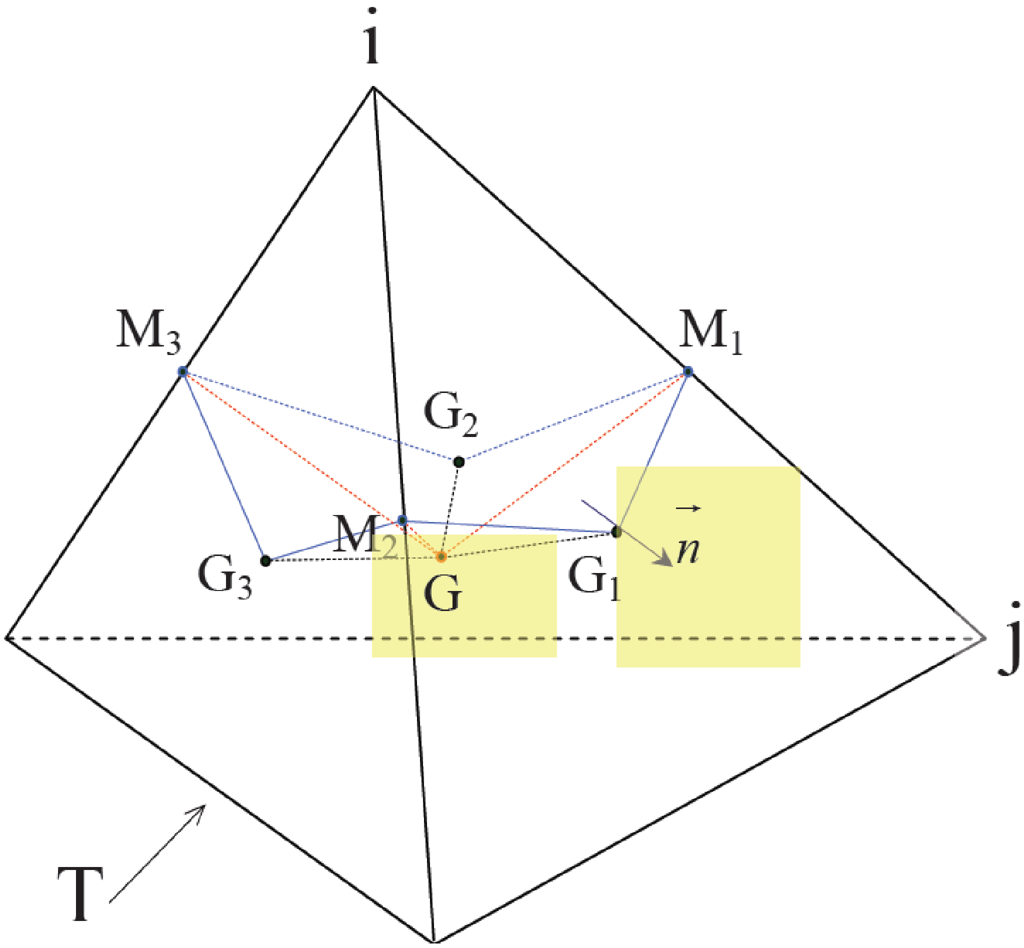
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Euler, που περιγράφουν τη ροή συμπιεστού, μη-συνεκτικού ρευστού γύρω από στερεό σε μη-δομημένα τρισδιάστατα πλέγματα τετραεδρικών στοιχείων. Η αριθμητική επίλυση υλοποιείται με χρονοπροέλαση πεπερασμένων όγκων. Στη συνέχεια γίνεται μία σύντομη αναφορά και πάλι στη διακριτοποίηση του χωρίου ροής, ενώ αναλύονται εκτενώς οι διαδικασίες της διακριτοποίησης των εξισώσεων, της πολυβηματικής επίλυσης των τελευταίων, καθώς και της αριθμητικής επιβολής των οριακών συνθηκών.

3.2. Διακριτοποίηση του Χωρίου Ροής.

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, για την επίλυση των τρισδιάστατων εξισώσεων Euler είναι καταρχάς απαραίτητη η διακριτοποίηση του πεδίου της ροής, η οποία στην παρούσα Διπλωματική Εργασία υλοποιήθηκε με την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Το μη-δομημένο πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων διακριτοποιείται σε τετράεδρα, που καλύπτουν πλήρως το πεδίο ροής, χωρίς ωστόσο να αλληλοκαλύπτονται. Τέλος, σε κάθε κόμβο του πλέγματος ορίζεται κατάλληλα και ο όγκος ελέγχου, στον οποίο ολοκληρώνονται οι προς επίλυση εξισώσεις.

Εκ των παραπάνω συμπεραίνεται ότι αρχική εργασία για την παρούσα μελέτη αποτελεί η δημιουργία και έπειτα χειραγώγηση του υπό εξέταση πλέγματος. Η γένεση των τρισδιάστατων πλεγμάτων, που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάπτυξη και μελέτη του λογισμικού, πραγματοποιήθηκε με χρήση του εμπορικού πακέτου ANSYS CFX.

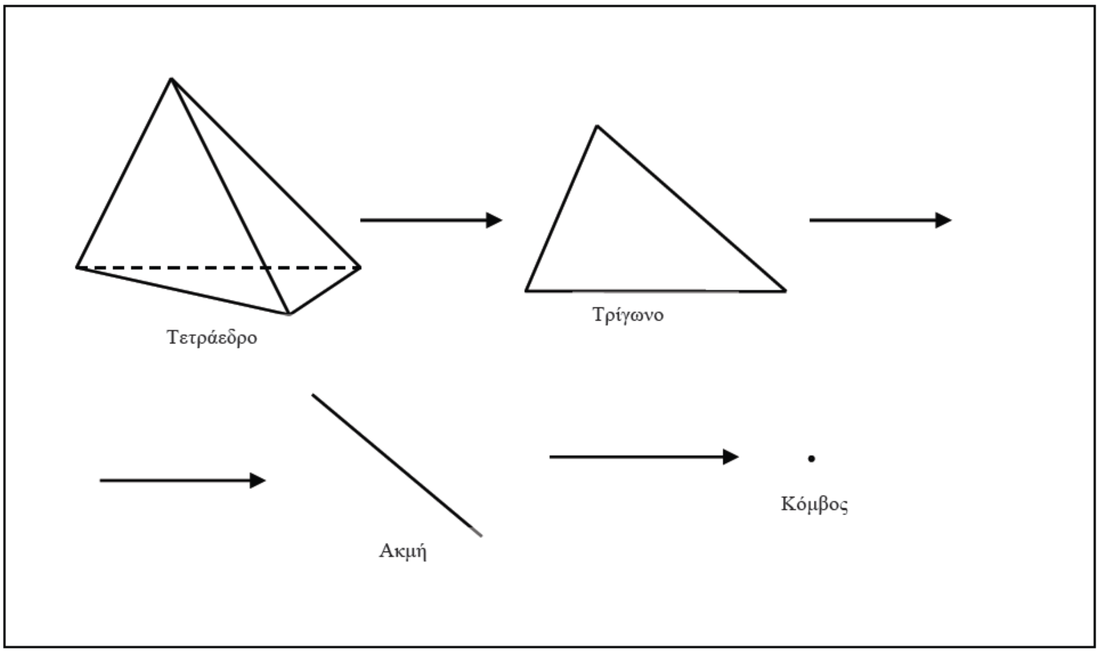
Στη συνέχεια απαιτείται ο ορισμός των όγκων ελέγχου, στους οποίους θα ολοκληρωθούν και θα επιλυθούν οι εξισώσεις ροής. Στο προηγούμενο κεφάλαιο επισημάνθηκε ότι οι εξισώσεις ροής, ολοκληρώνονται εφαρμόζοντας την κεντροκομβική μέθοδο (node-centered), δηλαδή οι μεταβλητές επίλυσης αναφέρονται στους κόμβους του πλέγματος, γύρω από τους οποίους σχηματίζονται οι όγκοι ελέγχου. Στο Σχήμα 3.1 που ακολουθεί παρουσιάζεται η συνεισφορά ενός τετραέδρου T στο σχηματισμό του όγκου αναφοράς γύρω από τον κόμβο i.



Σχήμα 3.1: Συνεισφορά του τετραέδρου *T* στο σχηματισμό του όγκου αναφοράς γύρω από τον κόμβο *I* [Αδα05].

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω Σχήμα 3.1, το εσωτερικό σημείο G του τετραέδρου T είναι το βαρύκεντρο του, ενώ τα σημεία G_1, G_2, G_3 είναι τα βαρύκεντρα των τριών εδρών του τετραέδρου T. Τέλος, τα σημεία M_1, M_2, M_3 του Σχήματος αντιστοιχούν στα μέσα των αντίστοιχων ακμών. Με τη χρήση αυτών των σημείων σχηματίζονται οι επιφάνειες, οι οποίες με τη σειρά τους θα σχηματίσουν τον όγκο ελέγχου γύρω από το σημείο *i* [Αδα05]. Αντί για αυτά τα σημεία μπορούν να ληφθούν και άλλα σημεία, όπως το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου κάθε τριγώνου κ.α., καθώς, όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο ορισμός των όγκων ελέγχου γύρω από ένα σημείο δύναται να υλοποιηθεί με διάφορους τρόπους [Kou98].

Τελικό στάδιο στη διακριτοποίηση του χωρίου ροής αποτελεί η απόκτηση της γνώσης της τοπολογικής δομής των δεδομένων του πλέγματος, ώστε να είναι δυνατή η χρήση τους στη συνέχεια για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων. Η περιγραφή και αναπαράσταση του τρισδιάστατου πλέγματος προϋποθέτει την ανάπτυξη και διαχείριση ενός συνόλου δομών δεδομένων, αφού προφανώς δεν επαρκεί μόνο η πληροφορία των συντεταγμένων κάθε κόμβου. Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία εφαρμόστηκε η ιεραρχική δομή δεδομένων βασισμένη στις ακμές του πλέγματος (edge based), η οποία και παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 3.2 και η οποία αποτελεί μία τυπική διαδικασία για τρισδιάστατα μη δομημένα πλέγματα [Αδα05].



Σχήμα 3.2: Ιεραρχική τοπολογική δομή δεδομένων του τρισδιάστατου πλέγματος [Αδα05].

3.3. Διακριτοποίηση των Εξισώσεων.

Σύμφωνα με τη μέθοδο διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων ολοκληρώνεται σε κάθε όγκο ελέγχου. Στη συνέχεια της παραγράφου παρουσιάζεται η ολοκλήρωση και η διακριτοποίηση μιας τυπικής εξίσωσης διατήρησης εκφρασμένη για κάθε κόμβο του πλέγματος.

Οι τρισδιάστατες εξισώσεις σε συντηρητική διανυσματική μορφή και στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (*x,y,z*) έχουν τη μορφή:

$$\frac{\vartheta \vec{W}}{\vartheta t}+\frac{\vartheta \vec{F}^{inv}}{\vartheta x}+\frac{\vartheta \vec{G}^{inv}}{\vartheta y}+\frac{\vartheta \vec{J}^{inv}}{\vartheta z}=\vec{S} \qquad (3.1)$$

Ο εκθέτης (inv: inviscid) στα διανύσματα της ροής $\vec{F}^{inv}, \vec{G}^{inv}, \vec{J}^{inv}$ κατά τις διευθύνσεις x, y και z αντίστοιχα θα παραλείπεται στη συνέχεια, καθώς η ροή στις εξισώσεις Euler είναι ούτως ή άλλως ατριβής και δεν συμπεριλαμβάνονται συνεκτικοί όροι. Με $\vec{W}$ συμβολίζεται το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών κατάστασης

$\vec{W} = \left(\rho \ \rho u \ \rho v \ \rho w \ \rho E\right)^T$, ενώ με $\vec{S}$ συμβολίζεται το διάνυσμα των όρων πηγής. Με ρ και $\vec{V}$ συμβολίζονται η πυκνότητα του ρευστού και το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού σε κάποιο σημείο αντίστοιχα, ενώ οι Καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις x, y και z συμβολίζονται με *u, v* και w αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, η ολική ενέργεια του ρευστού ανά μονάδα μάζας συμβολίζεται με *E* και δίνεται από την εξής σχέση:

$$E = e + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) \qquad (3.2)$$

Όπου με e συμβολίζεται η ειδική εσωτερική ενέργεια, δηλαδή η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας. Οι υπόλοιποι όροι της εξίσωσης (3.2) δίνουν ουσιαστικά την κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας στον υπό εξέταση κόμβο.

Τέλος, τα διανύσματα της ροής $\vec{F}$,$\vec{G}$,$\vec{J}$ δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}, \quad \vec{J} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

Όπου με *p* συμβολίζεται η πίεση του ρευστού στον υπό εξέταση κόμβο του πλέγματος. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στις εξισώσεις που προηγήθηκαν έχουν παραλειφθεί οι όροι της βαρύτητας, καθώς αυτοί θεωρούνται αμελητέοι για αέρια (συμπιεστά ρευστά) και δεν εξετάζονται. Τέλος, γίνεται και η παραδοχή του τελείου αερίου, οπότε ισχύει και η γνωστή καταστατική εξίσωση:

$$p = \rho R_g T \qquad (3.4)$$

Όπου με Τ συμβολίζεται η απόλυτη θερμοκρασία του ρευστού και R_g είναι η σταθερά τελείου αερίου για το συγκεκριμένο αέριο που εξετάζεται κάθε φορά.

Με την καταστατική εξίσωση του τελείου αερίου ολοκληρώνεται το σύστημα των εξισώσεων, που διέπουν την ατριβή ροή ενός συμπιεστού ρευστού, καθώς οι άγνωστες μεταβλητές του συστήματος είναι πλέον πέντε, όσες και οι εξισώσεις. Η ολοκλήρωση του συστήματος με τη χρήση διακριτοποίησης αποδίδει τις τιμές των παραμέτρων της ροής όπως η ταχύτητα, η πίεση, η πυκνότητα και η απόλυτη θερμοκρασία σε διακριτά σημεία του ρευστού [Αδα05].

3.4. Παραδοχές.

Η επίλυση του παραπάνω συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων προϋποθέτει την παραδοχή του τελείου αερίου, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως. Ως εκ τούτου, για το ρευστό ισχύει η καταστατική εξίσωση του θερμικά και θερμοδυναμικά τελείου αερίου, η οποία περιγράφεται από την εξίσωση (3.4). Η σταθερά R_g συσχετίζεται με τις ειδικές θερμοχωρητικότητες σταθερής πίεσης και σταθερού όγκου (c_p και c_v αντίστοιχα) με τις κάτωθι σχέσεις:

$$R_g = c_p - c_v, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \qquad (3.5)$$

Όπου με γ συμβολίζεται ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής του τελείου αερίου.

Με την ισχύ της καταστατικής εξίσωσης (3.4), η σχέση (3.2) επαναδιατυπώνεται, δημιουργώντας μία νέα σχέση μεταξύ της ολικής ενέργειας του ρευστού και της πίεσης, η οποία είναι η εξής:

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right) \qquad (3.6)$$

Τέλος, η ολική ενθαλπία του ρευστού στον υπό εξέταση κόμβο του πλέγματος ορίζεται ως εξής:

$$h_t = E + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right) \qquad (3.7)$$

3.5. Αδιαστατοποίηση των Εξισώσεων.

Πριν την διακριτοποίηση και επίλυση των προαναφερθέντων εξισώσεων είναι απαραίτητη η αδιαστατοποίηση τους [Κου98]. Η αδιαστατοποίηση επιτυγχάνεται διαιρώντας τα μεγέθη με αντίστοιχα μεγέθη αναφοράς, οπότε καταρχήν είναι αναγκαίος ο ορισμός των κατάλληλων μέτρων αναφοράς, όπως το μήκος L_{ref}, ταχύτητα V_{ref} και η πυκνότητα ρ_{ref}. Εκ των ανωτέρω, προκύπτουν τελικά τα κάτωθι αδιαστατοποιημένα μεγέθη [Αδα05]:

$$\begin{aligned}
&\breve{x}_i = \frac{x_i}{L_{ref}}, \quad \breve{u}_i = \frac{u_i}{V_{ref}}, \quad \breve{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho_{ref}}, \quad \breve{R}_g = \frac{R_g}{c_v} = \gamma - 1 \\
&\breve{p} = \frac{p}{\rho_{ref} V_{ref}^2}, \quad \breve{e} = \frac{e}{V_{ref}^2}, \quad \breve{E} = \frac{E}{V_{ref}^2}, \quad \breve{T} = \frac{T}{V_{ref}^2 / c_v} \\
&\breve{h}_t = \frac{h_t}{\rho_{ref} V_{ref}^2}, \quad \breve{t} = \frac{t}{L_{ref} / V_{ref}}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Αντικαθιστώντας τα αδιαστατοποιημένα πλέον μεγέθη στις εξισώσεις προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων, η οποία δύναται να επιλυθεί πλέον αριθμητικά. Στη συνέχεια θα γίνεται αναφορά πάντα στα αδιαστατοποιημένα μεγέθη, ενώ για λόγους απλοποίησης θα παραλείπεται το σύμβολο της αδιαστατοποίησης.

3.6. Ολοκλήρωση των Εξισώσεων.

Οι εξισώσεις (3.1) ολοκληρώνονται στην κυψέλη ελέγχου C_P ενός τυχαίου κόμβου P ως εξής [Κου98]:

$$\iiint_{C_P} \frac{\vartheta \vec{W}}{\vartheta t} dxdydz + \iiint_{C_P} \frac{\vartheta \vec{F}^{inv}}{\vartheta x} + \frac{\vartheta \vec{G}^{inv}}{\vartheta y} + \frac{\vartheta \vec{J}^{inv}}{\vartheta z} dxdydz = \iiint_{C_P} \vec{S} dxdzdy \tag{3.9}$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια το θεώρημα Green-Gauss το τριπλό ολοκλήρωμα, που παρουσιάζεται μετατρέπεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα κατά μήκος του ορίου θC_P της κυψέλης ελέγχου C_P, οπότε η σχέση (3.9) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\iiint_{C_P} \frac{\vartheta \vec{W}}{\vartheta t} dxdydz + \iint_{\vartheta C_P} \vec{\hat{H}}^{inv} ds = \iiint_{C_P} \vec{S} dxdzdy \tag{3.10}$$

Όπου με $\vec{\hat{H}}^{inv}$ συμβολίζεται το διάνυσμα ροής ανά μονάδα επιφάνειας που διασχίζει κάθε τρίγωνο.

Το τμήμα του ορίου της κυψέλης ελέγχου θC$_I$, που συνεισφέρει το τετράεδρο *T,* εικονίζεται στο Σχήμα 3.1 και ουσιαστικά σχηματίζεται από τα τρίγωνα που παρουσιάζονται και έχουν κορυφές τα σημεία G*,* G$_1$, G$_2$, G$_3$*,* M$_1$, M$_2$, M$_3$. Σε κάθε στοιχειώδες επίπεδο τμήμα εμβαδού ds, δηλαδή σε κάθε τρίγωνο, αντιστοιχεί ένα κάθετο στην επιφάνεια του τριγώνου διάνυσμα $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό της κυψέλης ελέγχου και μέτρο ίσο με το εμβαδόν ds.

Επιπρόσθετα, για το διάνυσμα ροής ανά μονάδα επιφάνειας που διασχίζει κάθε τρίγωνο $\vec{\hat{H}}^{inv}$, ισχύει:

$$\vec{\hat{H}}^{inv} = \hat{n}_x \vec{F} + \hat{n}_y \vec{G} + \hat{n}_z \vec{J} \qquad (3.11)$$

Όπου με n_x, n_y, n_z συμβολίζονται οι συνιστώσες στις τρεις διευθύνσεις του καρτεσιανού συστήματος του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος στην αντίστοιχη επιφάνεια, και για τις οποίες ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\vec{\hat{n}} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z) \qquad (3.12)$$

Η διαμέριση του ορίου (ϑC_P) σε επιμέρους τριγωνικά εμβαδά γίνεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση [Kou98]:

$$(\vartheta C_P) = \bigcup_{Q \in K_N(P)} \vartheta C_{PQ} + (\vartheta C_P \cap S) \qquad (3.13)$$

Όπου ισχύει ότι $S = \vartheta D$. Επιπλέον, με K$_N$(P) συμβολίζεται το σύνολο των κόμβων που συνδέονται άμεσα με τον κόμβο P μέσω μιας ακμής, ενώ με θC$_{PQ}$ συμβολίζεται η τομή των ορίων των όγκων ελέγχου C$_P$ και C$_Q$ που συνορεύουν. Σύμφωνα με αυτή τη διαμέριση λοιπόν , η σχέση (3.10) επαναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\iiint_{C_P} \frac{\vartheta \vec{W}}{\vartheta t} dxdydz + \sum_{Q \in K_N(P)} \iint_{\vartheta C_{PQ}} \vec{\hat{H}}^{inv} ds + \iint_{\vartheta C_P \cap S} \vec{\hat{H}}^{inv} ds = \iiint_{C_P} \vec{S} dxdzdy \qquad (3.14)$$

Θεωρείται ομοιόμορφη η μεταβολή των μεταβλητών επίλυσης στον όγκο C_P. Συνεπώς ο πρώτος όρος της παραπάνω εξίσωσης διαμορφώνεται ως εξής:

$$\iiint_{C_P} \frac{\vartheta \vec{W}}{\vartheta t} dxdydz = \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_P \iiint_{C_P} dxdydz = \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_P V_P \qquad (3.15)$$

Όπου με V_P συμβολίζεται ο όγκος της κυψέλης ελέγχου C_P του υπό εξέταση κόμβου P.

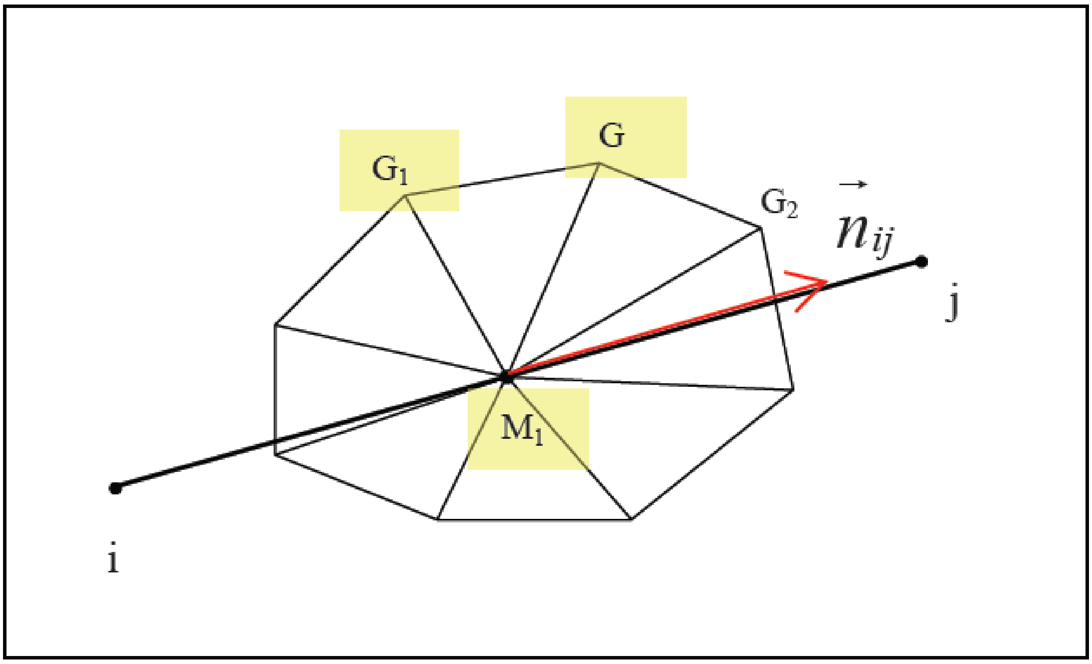
Κατόπιν, τα ολοκληρώματα των χωρικών όρων προσεγγίζονται κατάλληλα, εισάγοντας τα αριθμητικά διανύσματα ροής $\vec{\Phi}$ αντί των αντίστοιχων φυσικών ποσοτήτων [Kou98].

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \iint_{\vartheta C_{PQ}} \vec{\hat{H}}^{inv} ds = \vec{f}\left(\vec{W}_{PQ}^{L}, \vec{W}_{PQ}^{R}, \vec{n}_{PQ}\right) \quad (3.16)$$

Όπου με $\vec{n}_{PQ}$ συμβολίζεται το κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα έξω της κυψέλης C_P, που σχετίζεται με την ακμή PQ και έχει μήκος ίσο με το άθροισμα των τριγωνικών εμβαδών. Για το εν λόγω κάθετο διάνυσμα ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\vec{n}_{PQ} = \int_{\vartheta C_{PQ}} \vec{\hat{n}} ds \quad (3.17)$$

Στο παρακάτω Σχήμα 3.3 εμφανίζεται το εν λόγω διάνυσμα $\vec{n}_{ij}$, που αντιστοιχεί στην ακμή ij, η οποία εικονίζεται και στο προηγούμενο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.3: Κάθετο διάνυσμα $\vec{n}_{ij}$ που αντιστοιχεί στην ακμή ij. Η ίδια ακμή παρουσιάζεται και στο Σχήμα 3.1 [Kou98].

Στην εξίσωση (3.16), οι όροι $\vec{W}^{L}_{PQ}$ και $\vec{W}^{R}_{PQ}$ συμβολίζουν τις τιμές των μεταβλητών στον αριστερό και δεξί κόμβο αντίστοιχα της ακμής PQ, που λαμβάνονται υπόψη κατά τον υπολογισμό του διανύσματα ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$, καθώς αυτές θεωρούνται υπεύθυνες για τη δημιουργίας μη-συνεκτικής ροής στην συγκεκριμένη ακμή. Συμπεριλαμβανομένου τις παραπάνω προσεγγίσεις, η εξίσωση (3.14) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_P V_P + \sum_{Q\in K_N(P)} \vec{\Phi}_{PQ} + \vec{\Phi}_{P,out} = \iiint_{C_P} \vec{S}dxdzdy \quad (3.18)$$

Όπου ο όρος $\vec{\Phi}_{P,out}$ συμβολίζει το αριθμητικό διάνυσμα ροής που διασχίζει το όριο του χωρίου ροής σε τμήματα που ταυτίζονται με το όριο του όγκου ελέγχου C_P [Kou98].

3.7. Υπολογισμός των Αριθμητικών Διανυσμάτων Ροής.

Τα διανύσματα ροής υπολογίζονται αριθμητικά κατά την σάρωση όλων των ακμών που υφίστανται στο τρισδιάστατο πλέγμα. Για κάθε ακμή με ακραίες κορυφές τις *i* και *j* (Σχήμα 3.3) υπολογίζεται το διάνυσμα ροής και στη συνέχεια αυτό συνεισφέρει αθροιστικά με το κατάλληλο πρόσημο στον ισολογισμό των ροών για τις κυψέλες ελέγχου των δύο ακραίων κόμβων της ακμής. Το διάνυσμα υπολογίζεται σύμφωνα με τη γενική εξίσωση (3.16) στο μέσο κάθε ακμής. Αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας ένα τοπικά μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann μεταξύ των καταστάσεων αριστερά και δεξιά του μέσου της ακμής (καταστάσεις $\vec{W}_{PQ}^{L}$ και $\vec{W}_{PQ}^{R}$ αντίστοιχα). Για την επίλυση του σε κάθε χρονικό βήμα εφαρμόζεται ο προσεγγιστικός επιλύτης Riemann του Roe, ο οποίος διατυπώνεται ως εξής [Roe81] [Kou98]:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{H}(\vec{W}_{PQ}^{L}, \vec{n}_{PQ}) + \vec{H}(\vec{W}_{PQ}^{R}, \vec{n}_{PQ})\right) - \frac{1}{2}\left|\underline{\tilde{A}}_{PQ}\right|\left(\vec{W}_{PQ}^{R} - \vec{W}_{PQ}^{L}\right) \quad (3.19)$$

Ο υπολογισμός του διανύσματος ροής $\vec{H}$ γίνεται από τη σχέση (3.11), στην οποία χρησιμοποιείται το διάνυσμα $\vec{n}$. Με $\underline{A}$ συμβολίζεται το Ιακωβιανό μητρώο του διανύσματος $\vec{H}$ ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές $\vec{W}$ και το οποίο υπολογίζεται ως εξής [Hir90] [Kou98]:

$$\underline{A} = \frac{\vartheta \vec{H}}{\vartheta \vec{W}}, \quad \underline{\tilde{A}} = \underline{\tilde{A}}\left(\tilde{\vec{W}}, \vec{n}\right), \quad \left|\underline{A}\right| = \underline{T}\left|\underline{\Lambda}\right|\underline{T^{-1}} \quad (3.20)$$

Όπου $\underline{\Lambda} = diag\{V_n|\vec{n}|, V_n|\vec{n}|, V_n|\vec{n}|, (V_n + c)|\vec{n}|, (V_n - c)|\vec{n}|\}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του μητρώου *A*. Στο παράρτημα Α γίνεται πλήρης περιγραφή των μητρώων και του τρόπου υπολογισμού τους. Η περισπωμένη δηλώνει μητρώα, τα οποία υπολογίστηκαν βασισμένα στις μέσες κατά Roe τιμές των μεταβλητών.

Τέλος, το παραπάνω μητρώο $\underline{\tilde{A}}_{PQ}$ ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση (3.21), και κατά συνέπεια ο επιλύτης Riemann του Roe μπορεί να πάρει την μορφή της αμέσως επόμενης σχέσης (3.22) [AGARD-R-787] [Kou98].

$$\vec{H}(\vec{W}_{PQ}^{R}) - \vec{H}(\vec{W}_{PQ}^{L}) = \underline{\tilde{A}}_{PQ}^{-}\left(\vec{W}_{PQ}^{R} - \vec{W}_{PQ}^{L}\right) \quad (3.21)$$

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \vec{H}\left(\vec{W}_{PQ}^{L}, \vec{n}_{PQ}\right) + \underline{\tilde{A}}_{PQ}^{-}\left(\vec{W}_{PQ}^{R} - \vec{W}_{PQ}^{L}\right) \quad (3.22)$$

Και πάλι το σύμβολο της περισπωμένης δηλώνει ότι στον υπολογισμό του μητρώου χρησιμοποιήθηκαν οι μέσες κατά Roe τιμές των συντηρητικών μεταβλητών.

Αυτές προκύπτουν από τις μέσες κατά Roe τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών στους ακραίους κόμβους της ακμής PQ σύμφωνα με τις σχέσεις (3.23) και (3.24) [Roe81] [Kou98].

$$\tilde{\vec{U}}_{PQ} = \left(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}\right)^T \quad (3.23)$$

$$\tilde{\vec{U}}_{PQ} = \frac{\sqrt{\rho_L}\vec{u}_L + \sqrt{\rho_R}\vec{u}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3.24)$$

Στην παραπάνω σχέση η μεταβλητή $\vec{u}$ αντικαθίσταται από τις πρωτεύουσες μεταβλητές *ρ, u, v, w* του αντίστοιχου κόμβου, καθώς και από την ολική ενθαλπία *h*. Η μέση κατά Roe τιμή της πίεσης υπολογίζεται από αυτή της ολικής ενθαλπίας, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\tilde{p} = \frac{(\gamma-1)\tilde{\rho}}{\gamma}\left(\tilde{h}_t - \frac{1}{2}\left(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2\right)\right) \quad (3.25)$$

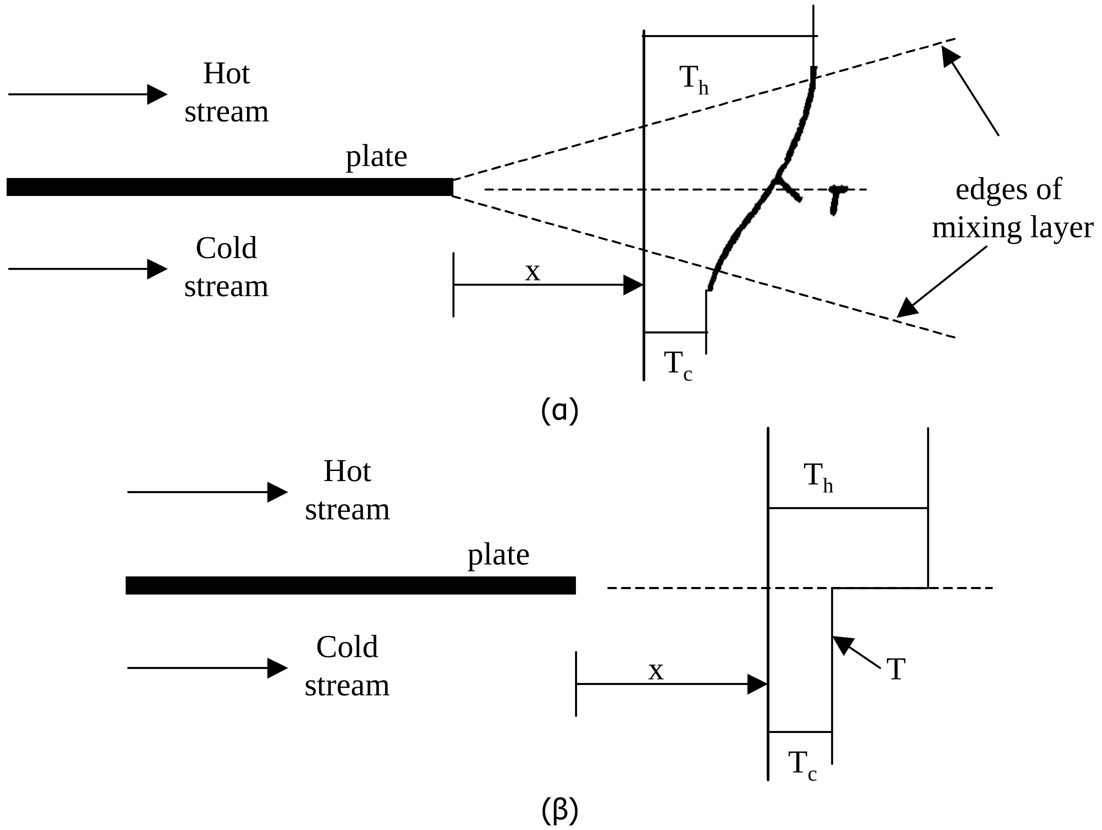
Το προαναφερθέν σχήμα υπολογισμού της σχέσης (3.22) αποδίδει ακρίβεια πρώτης τάξης. Στην επόμενη παράγραφο ακολουθεί η περιγραφή και ανάλυση του σχήματος δευτέρας τάξης.

3.8. Αύξηση της Ακρίβειας του Σχήματος.

3.8.1. Εισαγωγή.

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο το σχήμα που έχει αναλυθεί έως τώρα είναι πρώτης τάξης ακρίβειας, με συνέπεια την εισαγωγή σημαντικών ποσών αριθμητικής διάχυσης και την εξαγωγή αποτελεσμάτων φτωχής ποιότητας. Στο επόμενο Σχήμα 3.4 δίνεται ένα παράδειγμα αριθμητικής διάχυσης (False or Numerical Diffusion) δανεισμένο από τον τομέα της μετάδοσης θερμότητας, στο οποίο φαίνεται ότι με την παρουσία αριθμητικής διάχυσης αποκρύπτονται οι απότομες εναλλαγές θερμοκρασίας [Pap01]. Ως εκ τούτου κρίνεται απαραίτητη η αύξηση της τάξης ακρίβειας του σχήματος διακριτοποίησης. Για προβλήματα παρόμοια με αυτό που εξετάζεται στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, αυτό επιτυγχάνεται με δύο τρόπους, που χρησιμοποιούν είτε την προεκβολή των αριθμητικών διανυσμάτων ροής είτε των μεταβλητών από τις οποίες υπολογίζονται.

Ειδικότερα μέσω της προεκβολής επιτυγχάνεται η αναπαράσταση των αντίστοιχων μεγεθών στο σύνορο της κυψέλης ελέγχου, με βάση τις αντίστοιχες τιμές τους στους γύρω κόμβους του πλέγματος [Pap01]. Τέλος στην παρούσα εργασία εφαρμόζεται η δεύτερη προσέγγιση, δηλαδή η προεκβολή των μεταβλητών από τις οποίες υπολογίζονται τα αριθμητικά διανύσματα ροής.



Σχήμα 3.4: Κατανομή θερμοκρασίας με παρουσία αριθμητικής διάχυσης (α) και με απουσία αυτής (β) [Pap01].

Το σχήμα προεκβολής που χρησιμοποιήθηκε είναι το MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) του Van Leer [VLe92] [AGARD-R-787] [Kou98]. Σύμφωνα με αυτό το σχήμα, η αναπαράσταση της αριστερής $\vec{W}_{PQ}^{L}$ και δεξιάς $\vec{W}_{PQ}^{R}$ κατάστασης εκατέρωθεν του μέσου της ακμής PQ στην εξίσωση (3.22) πραγματοποιούνται μέσω της κατά Taylor ανάπτυξης στο χώρο των μεταβλητών W ως προς τις τιμές που αυτές έχουν στους κόμβους P και Q αντίστοιχα. Ουσιαστικά, με την εφαρμογή αυτού του σχήματος οι τιμές των μεγεθών στους κόμβους που χρησιμοποιούνται για την εύρεση των μέσων κατά Roe τιμών στις ακμές «διορθώνονται» από τις τιμές των μεγεθών των γύρω κόμβων τους. Οι παραπάνω προτάσεις συνοψίζονται στις ακόλουθες σχέσεις [AGARD-R-787] [Kou98]:

$$\vec{U}_{PQ}^{L} = \vec{U}_P + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} \cdot (\nabla \vec{U})_P \quad (3.26)$$

$$\vec{U}_{PQ}^{R} = \vec{U}_Q - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} \cdot (\nabla \vec{U})_Q \quad (3.27)$$

Στις παραπάνω σχέσεις απαιτείται ο υπολογισμός των κλίσεων των πρωτευουσών μεταβλητών στους κόμβους P και Q που αφορούν στα διανύσματα ($\nabla \vec{U} = \left(\frac{\vartheta \vec{U}}{\vartheta x}, \frac{\vartheta \vec{U}}{\vartheta y}, \frac{\vartheta \vec{U}}{\vartheta z} \right)$). Υφίστανται τρεις κύριοι τρόποι υπολογισμού των κλίσεων στους κόμβους ενός πλέγματος οι οποίοι είναι οι εξής [Kou98]:

- Γραμμική αναπαράσταση κατά Green-Gauss.
- Γραμμική αναπαράσταση ελαχίστων τετραγώνων.
- Υπολογισμός των κλίσεων στο άναντι τετράεδρο.

Από τις προαναφερθείσες τεχνικές υπολογισμού των κλίσεων στους κόμβους ενός πλέγματος, χρησιμοποιήθηκε μόνο η πρώτη στην παρούσα εργασία. Ως εκ τούτου η πρώτη τεχνική αναλύεται εκτενώς στην επόμενη παράγραφο, ενώ οι άλλες περιορίζονται στην απλή αναφορά τους.

3.8.2. Γραμμική Αναπαράσταση κατά Green-Gauss.

Σε αυτήν την τεχνική ο υπολογισμός των διανυσμάτων $\nabla \vec{U}$ στους κόμβους του πλέγματος πραγματοποιείται με άθροιση των επιμέρους σταθερών κλίσεων σε κάθε τετράεδρο T γύρω από τον κόμβο P, σταθμισμένων με τον όγκο με το οποίο κάθε ένα από αυτά συμμετέχει στον όγκο της κυψέλης ελέγχου C_P. Η παραπάνω πρόταση συνοψίζεται στην ακόλουθη σχέση [AGARD-R-787] [Kou98]:

$$\left(\nabla \vec{U}\right)_P = \frac{1}{V_P} \sum_{T \in K_T(P)} \frac{V_T}{4} \left(\nabla \vec{U}\right)_T \quad (3.28)$$

Στην παραπάνω σχέση με V_P και V_T έχουν συμβολιστεί ο όγκος ελέγχου του κόμβου P C_P και ο όγκος του τετραέδρου T αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω μέθοδος υπολογισμού των κλίσεων είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή του θεωρήματος Green-Gauss στην κυψέλη ελέγχου, με συνέπεια τη επαναδιατύπωση της σχέσης (3.28) ως εξής [AGARD-R-787] [Kou98]:

$$\left(\nabla\vec{U}\right)_P = \frac{1}{V_P}\sum_{Q\in K_N(P)}\left(\vec{U}_P + \vec{U}_Q\right)\cdot\vec{n}_{PQ} \qquad (3.29)$$

Τέλος, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι για τους κόμβους που βρίσκονται σε οριακές επιφάνειες, θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη, πέραν από τις κλίσεις που προέρχονται από τους γύρω τους κόμβους, και οι κλίσεις που προέρχονται από την οριακή επιφάνεια.

3.8.3. Συναρτήσεις Περιορισμού.

3.8.3.1. Γενικά Στοιχεία για τις Συναρτήσεις Περιορισμού.

Το σχήμα MUSCL που χρησιμοποιείται για την αύξηση της τάξης ακρίβειας με κατάλληλη προεκβολή των μεταβλητών, είναι δυνατό να προκαλέσει υπερεκτιμήσεις ή υποεκτιμήσεις των τιμών τους στο μέσο μίας ακμής, σε σχέση με τις τιμές τους στους ακραίους κόμβους της ακμής [Kou98]. Οι ανομοιομορφίες αυτές της λύσης συνήθως προκαλούνται είτε από ασυνέχειες της ροής (φυσικά αίτια) είτε από αριθμητικά αίτια (ανομοιομορφία πλέγματος). Σε μία τέτοια περίπτωση παράγονται μη μονότονες λύσεις στο χώρο και συχνά μη-φυσικά αποτελέσματα. Η αποφυγή του φαινομένου εξασφαλίζεται μέσω της απαίτησης για μονοτονία του σχήματος προεκβολής, σύμφωνα με την οποία οι προεκβαλλόμενες τιμές στο μέσο της ακμής φράσσονται μεταξύ των τιμών των ακραίων κόμβων. Η απαίτηση αυτή ικανοποιείται με τη χρήση των συναρτήσεων περιορισμού (Limiters) [Hub98] [Kou98]. Μία τέτοια συνάρτηση διαμορφώνει στις σχέσεις προεκβολής, τους όρους που περιέχουν τις κλίσεις των μεταβλητών και που προσδίνουν στο σχήμα ακρίβεια δεύτερης τάξης. Ο ουσιαστικός ρόλος της συνάρτησης περιορισμού είναι η ελάττωση της τάξης ακρίβειας του σχήματος διακριτοποίησης στις περιοχές, όπου υπάρχουν έντονες μεταβολές ή ασυνέχειες της ροής.

Η συνάρτηση περιορισμού δύναται να εφαρμοστεί στις συντηρητικές, πρωτεύουσες ή στις χαρακτηριστικές μεταβλητές [Kou98]. Η τελευταία περίπτωση είναι θεωρητικά η πιο πλεονεκτική, χωρίς όμως να έχουν αναφερθεί προβλήματα στις υπόλοιπες. Στην παρούσα εργασία οι συναρτήσεις περιορισμού εφαρμόστηκαν και στις συντηρητικές αλλά και στις πρωτεύουσες μεταβλητές. Ειδικότερα εφαρμόσθηκαν δύο συναρτήσεις περιορισμού, η συνάρτηση περιορισμού των van Leer-van Albada [VLe-VAl82] [AGARD-R-787] [Kou98] και η συνάρτηση περιορισμού των Barth-

Jespersen [Bar89] [Maz02] [Kou98], οι οποίες και αναλύονται στις δύο επόμενες υποπαραγράφους.

Εν κατακλείδι, ο υπολογισμός των διανυσμάτων ροής με ακρίβεια πρώτης τάξης στο χώρο εισάγει κατά την επίλυση ισχυρή αριθμητική διάχυση. Η χρήση σχημάτων δεύτερης τάξης, μέσω της αναπαράστασης των μεταβλητών στο όριο της κυψέλης, βελτιώνει την ακρίβεια της λύσης. Αυτή συνδυάζεται με τη χρήση συναρτήσεων περιορισμού, για λόγους μονοτονίας της λύσης. Η εφαρμογή τους επιβάλλεται από τις ασυνέχειες της ροής ή την ανομοιομορφία του πλέγματος. Μολονότι η χρήση συναρτήσεων περιορισμού είναι σε γενικά πλαίσια αναγκαία λόγω του ρόλου τους, ο οποίος είναι να ελαττώνουν την ακρίβεια του σχήματος στις περιοχές όπου «ενεργοποιούνται», συχνά εμφανίζονται περιπτώσεις στις οποίες η αριθμητική διάχυση που εισάγει το σχήμα δεύτερης τάξης με συνάρτηση περιορισμού είναι σημαντική. Τέτοιες περιπτώσεις αφορούν στην επίλυση ροών σε πολύ πυκνά πλέγματα στην περιοχή των στερεών τοιχωμάτων.

3.8.3.2. Συνάρτηση Περιορισμού van Leer-van Albada.

Η συνάρτηση περιορισμού των van Leer-van Albada συνοψίζεται στις παρακάτω σχέσεις [VLe-VAl82] [AGARD-R-787] [Kou98]:

$$\vec{U}^L = \vec{U}_P + \frac{1}{2} \cdot LIM\left\{\left(2\vec{G}_P - \Delta\vec{U}_{PQ}\right), \Delta\vec{U}_{PQ}\right\} \quad (3.30)$$

$$\vec{U}^R = \vec{U}_Q - \frac{1}{2} \cdot LIM\left\{\left(2\vec{G}_Q - \Delta\vec{U}_{PQ}\right), \Delta\vec{U}_{PQ}\right\} \quad (3.31)$$

$$\Delta\vec{U}_{PQ} = \vec{U}_Q - \vec{U}_P \quad (3.32)$$

$$\vec{G}_P = \nabla U_P \cdot \overrightarrow{PQ} \quad (3.33)$$

$$\vec{G}_Q = \nabla U_Q \cdot \overrightarrow{PQ} \quad (3.34)$$

Η παραπάνω συνάρτηση περιορισμού (Limiter) είναι μονοδιάστατη, διαφορίσιμη και ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$LIM(a,b) = \begin{cases} \dfrac{(a^2+n)b + (b^2+n)a}{a^2+b^2+2n} & , \quad ab > 0 \\ 0 & , \quad ab \le 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Όπου n ένας πολύ μικρός αριθμός με τυπική τιμή n=10^{-16} ώστε να αποφεύγεται η διαίρεση με το μηδέν.

Όμως ενώ η εφαρμογή τέτοιων σχημάτων εξασφαλίζει στη μονοδιάστατη περίπτωση τη μονοτονία της λύσης και πρακτικά χρησιμοποιείται σε δισδιάστατα και τρισδιάστατα προβλήματα ροής, κάτι τέτοιο δεν ισχύει αυστηρά μαθηματικά. Τέλος, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι η προαναφερθείσα συνάρτηση είναι εύκολη στην εφαρμογή, επιτυγχάνοντας ταυτόχρονα αποτελέσματα καλής ποιότητας.

3.8.3.3. Συνάρτηση Περιορισμού Barth-Jespersen.

Η συνάρτηση περιορισμού των Barth-Jespersen συνοψίζεται στις παρακάτω σχέσεις [Bar89] [Maz02] [Kou98]:

$$\vec{U}^{L} = \vec{U}_{P} + \Psi_{P} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} \cdot (\nabla \vec{U})_{P} \qquad (3.36)$$

$$\vec{U}^{R} = \vec{U}_{Q} - \Psi_{Q} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} \cdot (\nabla \vec{U})_{Q} \qquad (3.37)$$

Η παραπάνω συνάρτηση περιορισμού είναι τρισδιάστατη, μη διαφορίσιμη και ορίζεται από τις εξής σχέσεις:

$$\Psi_{P} = \min\left\{\Psi_{PQ}, Q \in K_{N}(P) \cap \{P\}\right\} \qquad (3.38)$$

$$\Psi_{PQ} = \begin{cases} \min\{1, \Delta_{1,\max} / \Delta_{2}\} & , \quad \Delta_{2} > 0 \\ \min\{1, \Delta_{1,\min} / \Delta_{2}\} & , \quad \Delta 2 < 0 \\ 1 & \quad \Delta_{2} = 0 \end{cases} \qquad (3.39)$$

Όπου οι εμπλεκόμενες ποσότητες $\Delta_{1,\max}, \Delta_{1,\min}, \Delta_{2}$ υπολογίζονται από τις εξής σχέσεις:

$$\Delta_{2} = \vec{U}_{rec,L} - U_{P} \qquad (3.40)$$

$$\Delta_{1,\max} = \vec{U}_{\max} - U_{P} \qquad (3.41)$$

$$\Delta_{1,\min} = \vec{U}_{\min} - U_{P} \qquad (3.42)$$

$$\vec{U}_{\max} = \max\left\{\vec{U}_Q, Q \in K_N(P) \cap \{P\}\right\} \quad (3.43)$$

$$\vec{U}_{\min} = \min\left\{\vec{U}_Q, Q \in K_N(P) \cap \{P\}\right\} \quad (3.44)$$

$$\vec{U}_{rec,L} = \vec{U}_P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} \cdot (\nabla\vec{U})_P \quad (3.45)$$

Η παραπάνω προσέγγιση που διατυπώθηκε από τους Barth-Jespersen δεν αποτελεί επέκταση της μονοδιάστατης εφαρμογής του σχήματος MUSCL, αλλά μία εντελώς διαφορετική, πλήρως τρισδιάστατη προσέγγιση. Σύμφωνα με αυτήν οι τιμές αριστερής και δεξιάς κατάστασης στο μεσοκόμβο της ακμής PQ δε φράσσονται μονοδιάστατα από τις τιμές των ακραίων κόμβων, αλλά από τις τιμές όλων των γύρω κόμβων του πλέγματος σε απόσταση μίας ακμής από τους P και Q. Τα σχήματα αυτά παράγουν μονότονες λύσεις χωρίς ταλαντώσεις και σε περισσότερες της μίας διαστάσεις. Το μειονέκτημα της είναι ότι η μέθοδος αυτή, μετά από πτώση των σφαλμάτων των εξισώσεων κατά μερικές (2-3) τάξεις μεγέθους, οδηγούν τη σύγκλιση σε ταλαντώσεις. Η απώλεια της σύγκλισης ποιοτικά εξηγείται από το γεγονός ότι οι μη-διαφορίσιμες συναρτήσεις περιορισμού (συναρτήσεις που περιέχουν min, max κ.λπ.) εμφανίζουν ευαισθησία σε μικρές διαταραχές της τάξης του σφάλματος αποκοπής [Kou98].

3.9. Διακριτοποίηση των Όρων Πηγής.

Το τριπλό ολοκλήρωμα του όρου πηγής, που παρουσιάζεται στην εξίσωση (3.10), διακριτοποιείται ως εξής:

$$\iiint_{C_P} \vec{S}dxdydz = \vec{S}_P V_P \quad (3.46)$$

Με V_P συμβολίζεται ο όγκος της κυψέλης ελέγχου του κόμβου P. Στην παρούσα εργασία και στις δοκιμές που διεξήχθησαν θεωρήθηκαν μηδενικοί όροι πηγής.

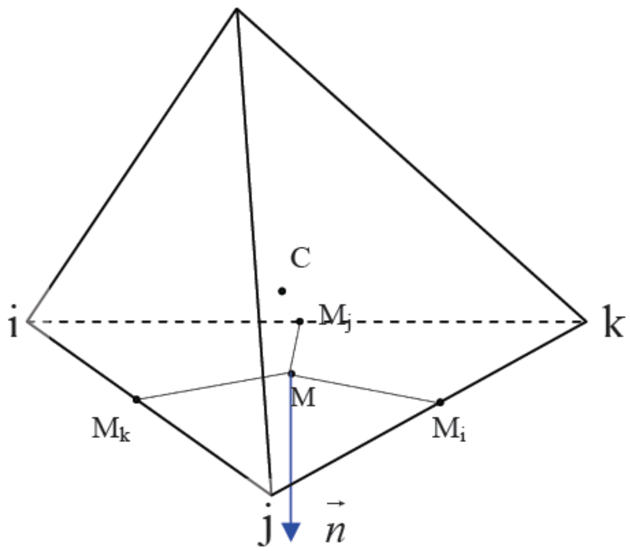
3.10. Επιβολή Οριακών Συνθηκών.

Στη συνέχεια απαιτείται να επιβληθούν οι οριακές συνθήκες, ώστε να συνυπολογιστούν και από αυτές τα ανάλογα διανύσματα ροής στο ισολογισμό ροής του όγκου ελέγχου κάθε οριακού κόμβου του πλέγματος. Οι οριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν στην παρούσα εργασία είναι δύο ειδών, οι οριακές συνθήκες του στερεού τοιχώματος και οι οριακές συνθήκες των ορίων εισόδου/εξόδου της ροής.

Για τους κόμβους του πλέγματος, που ανήκουν σε επιφάνειες που θεωρούνται στερεά τοιχώματα, εφαρμόζεται η συνθήκη μη-εισχώρησης. Η επιβολή της συνθήκης γίνεται έμμεσα, θεωρώντας ότι από το τοίχωμα εισέρχεται ένα διάνυσμα ροής προς την κυψέλη έλεγχου του οριακού κόμβου, στο οποίο έχει μηδενιστεί η κατάλληλη συνιστώσα της ταχύτητας. Η συνιστώσα αυτή προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{V}$ με το κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ στο οριακό τρίγωνο, το οποίο τίθεται ίσο με μηδέν $\left(\vec{V}_n = \vec{V} \cdot \vec{n} = 0\right)$. Το πλήρες διάνυσμα ροής και το αντίστοιχο στο οποίο λαμβάνεται υπ’ όψη η συνθήκη μη εισχώρησης είναι [Κου98] [Αδα05]:

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \rho V_n \\ \rho u V_n + p n_x \\ \rho v V_n + p n_y \\ \rho w V_n + p n_z \\ (\rho E + p) V_n \end{pmatrix}, \quad \vec{H}_{wall} = \begin{pmatrix} 0 \\ p n_x \\ p n_y \\ p n_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Για την ατριβή ροή, που εξετάζεται, εφαρμόζεται η συνθήκη αδιαβατικού τοιχώματος, όσον αφορά την εξίσωση ενέργειας. Πρακτικά, σαρώνονται όλα τα οριακά τρίγωνα, που ανήκουν σε στερεά τοιχώματα, και σ’ αυτά υπολογίζεται το κάθετο διάνυσμα με μέτρο ίσο με το εμβαδό των τριγώνων και με φορά προς το τοίχωμα (διάνυσμα $\vec{n}$, Σχήμα 3.5). Το τελευταίο μοιράζεται στις κορυφές του τριγώνου, σταθμισμένο με το αντίστοιχο εμβαδόν, που καταλαμβάνει για κάθε μια η αντίστοιχη κυψέλη ελέγχου [Αδα05]. Στη συνέχεια υπολογίζεται για κάθε κορυφή το διάνυσμα $\vec{H}_{wall}$ και προστίθεται στον ισολογισμό των ροών της αντίστοιχης κυψέλης ελέγχου.



Σχήμα 3.5: Οριακό τρίγωνο και το αντίστοιχο κάθετο διάνυσμα [Αδα05].

Όσον αφορά στην οριακή συνθήκη εισόδου/εξόδου της ροής, και αυτή επιβάλλεται έμμεσα στους αντίστοιχους οριακούς κόμβους του πλέγματος μέσω του τοπικού ισολογισμού ροών. Σε κάθε τρίγωνο, που ανήκει σε οριακή επιφάνεια εισόδου ή εξόδου της ροής, επιλύεται ένα μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann μεταξύ των μεταβλητών του βαρύκεντρου του τριγώνου και των μεταβλητών που περιγράφουν τις συνθήκες στο εξωτερικό του χωρίου ροής [Κου98] [Αδα05]. Οι τελευταίες ουσιαστικά περιγράφουν την κατάσταση σε άπειρη απόσταση από την υπό εξέταση γεωμετρία. Η κατάσταση αυτή θα συμβολίζεται από το δείκτη out, ενώ οι μεταβλητές της υπολογίζονται βάσει των οριακών συνθηκών, που καθορίζονται από το χρήστη. Για τον υπολογισμό του διανύσματος ροής κατά την επίλυση του προβλήματος Riemann χρησιμοποιήθηκε το ανάντι σχήμα των Steger-Warming. Το σχήμα αποδίδει ακρίβεια πρώτης τάξης και για το βαρύκεντρο K του οριακού τριγώνου περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\vec{H}_{K,out} = \underline{A_K^+}\vec{W}_K + \underline{A_K^-}\vec{W}_{out} \qquad (3.48)$$

Όπου $\underline{A}$ είναι το Ιακωβιανό μητρώο του διανύσματος ροής (παράρτημα A), το οποίο υπολογίζεται με θετικές ή αρνητικές ιδιοτιμές. Στη συνέχεια το διάνυσμα ροής που έχει υπολογιστεί για κάθε οριακό τρίγωνο μοιράζεται στους κόμβους του, σταθμισμένο με το αντίστοιχο εμβαδόν που καταλαμβάνει για κάθε έναν η αντίστοιχη κυψέλη ελέγχου του.

3.11. Διακριτοποίηση του Χρόνου και Τοπικό ή Ολικό Χρονικό Βήμα.

Εφόσον στην παρούσα Διπλωματική εργασία απαιτείται η επίλυση χρονικά μόνιμης ροής, ο χρονικός όρος που εμφανίζεται στην εξίσωση (3.10) διακριτοποιείται μέσω του πρώτης τάξης σχήματος άναντι διαφόρισης του Euler ως εξής [Kou98]:

$$\left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_P = \frac{d\vec{W}_P^{n+1}}{\Delta t_P} \qquad (3.49)$$

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκαν δύο τεχνικές στο εν λόγω στάδιο της αριθμητικής επίλυσης της ροής, η τεχνική του τοπικού και η τεχνική του ολικού χρονικού βήματος. Κάθε μία από αυτές έχει να επιδείξει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.

Η τεχνική του τοπικού χρονικού βήματος βελτιστοποιεί τοπικά την εξέλιξη της λύσης και επιταχύνει την σύγκλιση της διαδικασίας [Pul85]. Το τοπικό χρονικό βήμα υπολογίζεται για κάθε κόμβο P του πλέγματος σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta t(P) = CFL \cdot \frac{a_{\min,P}}{\left|\vec{V}_P\right| + C_P} \qquad (3.50)$$

Όπου με $a_{\min,P}$ συμβολίζεται η ακμή με το ελάχιστο μήκος στην οποία ανήκει ο κόμβος P, με $\left|\vec{V}_P\right|$ συμβολίζεται η κύρια συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού, με c_P συμβολίζεται η ταχύτητα του ήχου στον εν λόγω κόμβο και τέλος με CFL συμβολίζεται ο αριθμός Courant-Friedrics-Levy που αποτελεί πολλαπλασιαστή του τοπικού χρονικού βήματος και καθορίζει την μέγιστη δυνατή τιμή του διατηρώντας την ευστάθεια της διαδικασίας [Hir90].

Η τεχνική του ολικού χρονικού βήματος, αντίθετα από αυτήν του τοπικού, χρησιμοποιεί το ίδιο χρονικό βήμα σε όλους τους κόμβους του υπό εξέταση πλέγματος, με συνέπεια η σύγκλιση να είναι πιο αργή. Εντούτοις λόγω της ομοιόμορφης προόδου όλου του πλέγματος αποφεύγονται ευκολότερα περιπτώσεις εγκλωβισμού της λύσης σε τοπικά ελάχιστες τιμές, οπότε και διατηρείται καλύτερα η ευστάθεια της λύσης. Το ολικό χρονικό βήμα υπολογίζεται για όλους του κόμβους του πλέγματος σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta t = CFL \cdot \frac{a_{\min}}{\left|\vec{V}_{far}\right| + C_{far}} \qquad (3.51)$$

Όπου με $a_{\min}$ συμβολίζεται η ακμή με το ελάχιστο μήκος ολοκλήρου του υπό εξέταση πλέγματος, με $\left|\vec{V}_{far}\right|$ συμβολίζεται η κύρια συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού εκτός των ορίων του πλέγματος και με c_P συμβολίζεται η ταχύτητα του ήχου και πάλι εκτός των ορίων του πλέγματος. Ο αριθμός CFL λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση της τεχνικής του τοπικού χρονικού βήματος.

3.12. Η Μέθοδος Αριθμητικής Επίλυσης.

3.12.1. Εισαγωγή.

Η ανανέωση των τιμών των μεταβλητών επίλυσης σε κάθε χρονική επανάληψη πραγματοποιείται για κάθε κόμβο P του πλέγματος σύμφωνα με το γενικό σχήμα [Κου98] [Αδα05]:

$$V_P \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_P = -\vec{R}_P^m \qquad (3.52)$$

$$\vec{R}_P^m = \vec{R}\left(\vec{W}_P^m\right) = \sum_{Q \in K_N(P)} \left(\vec{\Phi}_{PQ}\right)^m + \vec{S}_P V_P \qquad (3.53)$$

Όπου με V_P συμβολίζεται ο όγκος της κυψέλης ελέγχου του κόμβου P, ενώ ο πάνω-δείκτης m δηλώνει το χρονικό επίπεδο, στο οποίο είναι υπολογισμένη η ποσότητα-βάση. Σύμφωνα με την ανωτέρω γραφή, η εξίσωση 3.52 περιγράφει τη μορφή τόσο των ρητών (m=n) όσο και των πεπλεγμένων μεθόδων επίλυσης (m=n+1). Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία έγινε χρήση και των δύο προαναφερθεισών μεθόδων, οι οποίες και αναλύονται στις επόμενες δύο υποπαραγράφους.

3.12.2. Ρητή Μέθοδος Αριθμητικής Επίλυσης.

Στην περίπτωση του ρητού σχήματος αριθμητικής επίλυσης, για την ανανέωση των μεταβλητών δύναται να χρησιμοποιηθεί είτε απλή ολοκλήρωση Euler πρώτης τάξης στο χρόνο είτε πολυβηματική μέθοδος Runge-Kutta $k_{\max}$ βημάτων, η οποία θα συμβολίζεται με (RK($k_{\max}$)). Ο βηματικός αλγόριθμος της Runge-Kutta έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} &\vec{W}_P^{n+1,0} = \vec{W}_P^{n} \\ &\vec{W}_P^{n+1,k} = \vec{W}_P^{n} - a_k \frac{\Delta t_P}{V_P} \vec{R}\left(\vec{W}_P^{n+1,k-1}\right), \quad k = 1,\dots,4 \qquad (3.54) \\ &\vec{W}_P^{n+1} = \vec{W}_P^{n+1,k_{\max}} \end{aligned}$$

Όπου η παράσταση $\vec{R}\left(\vec{W}_P^{n+1,k-1}\right)$ υπολογίζεται από την ανωτέρω σχέση (3.53). Για το πλήθος των βημάτων $k_{\max}$ και τους συντελεστές έχουν προταθεί διάφορες τιμές στη βιβλιογραφία ανάλογα το είδος του πλέγματος (δομημένο, μη-δομημένο) κ.λπ. Στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήθηκε μέθοδος Runge-Kutta τεσσάρων βημάτων (RK(4)), με τις εξής τιμές για τους συντελεστές της [Κου98] [Αδα05]:

$$\begin{gathered} a_1=0.11 \\ a_2=0.2766 \quad (3.55) \\ a_3=0.5 \\ a_4=1.0 \end{gathered}$$

Μολονότι η ρητή μέθοδος επίλυσης είναι ιδιαίτερα εύκολη, η σύγκλιση της είναι αρκετά αργή. Κατά την επίλυση σε ένα κόμβο εμπλέκονται έμμεσα μόνο οι τιμές των γειτονικών του κόμβων, με συνέπεια ο κάθε κόμβος του υπό εξέταση πλέγματος να επηρεάζει και να επηρεάζεται μόνο από τους γύρω του κόμβους. Η προαναφερθείσα κατάσταση περιορίζει την ταχύτητα με την οποία μεταδίδεται η πληροφορία στο πρόβλημα με αποτέλεσμα να μειώνεται ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός CFL [Κου98].

3.12.3. Σημειακά Πεπλεγμένη Μέθοδος Αριθμητικής Επίλυσης.

Στην παράγραφο αυτήν περιγράφεται το σημειακά πεπλεγμένο σχήμα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής. Ο πεπλεγμένος τρόπος επίλυσης χρησιμοποιεί για τον υπολογισμό του μεγέθους της ροής ποσότητες τη χρονική στιγμή m=n+1. Η σχέση (3.52) με m=n+1 διαμορφώνεται ως εξής [Κου98]:

$$V_P\left(\frac{\vartheta \vec{W}}{\vartheta t}\right)_P = -\vec{R}_P^{n+1} \qquad (3.56)$$

Κάτι τέτοιο περιπλέκει το πρόβλημα, το οποίο απαιτεί στη συνέχεια ειδική μεταχείριση. Με Newton γραμμικοποίηση του δεξιού μέλους της σχέσης (3.52) προκύπτει ο πεπλεγμένος τελεστής στο αριστερό μέλος, με αποτέλεσμα σε κάθε κόμβο του πλέγματος να δημιουργείται ένα σύστημα πινάκων 5x5 με αγνώστους τις τοπικές διορθώσεις των μεταβλητών επίλυσης ($\delta\vec{W}_P$). Αναλυτικότερα, ο μη-γραμμικός τελεστής R της εξίσωσης (3.52) γραμμικοποιείται κατά Newton ως εξής [Κου98]:

$$\begin{aligned} &R(\vec{W}^{n+1}) = R(\vec{W}^{n} + \delta\vec{W}) \Rightarrow \\ &R(\vec{W}^{n+1}) = R(\vec{W}^{n}) + \left(\frac{\vartheta R}{\vartheta W}\right)^n \cdot \delta\vec{W} + O(\delta\vec{W}^2) \end{aligned} \qquad (3.57)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση (3.57) στη σχέση (3.56), η τελευταία διατυπώνεται ως εξής [Ροβ98]:

$$\begin{aligned} &\frac{V}{\Delta t}\cdot\delta\vec{W} + \left(\frac{\vartheta R}{\vartheta \vec{W}}\right)^n \cdot \delta\vec{W} = -R(\vec{W}^n) \Rightarrow \\ &\left(\frac{V}{\Delta t}\cdot I + \left(\frac{\vartheta R}{\vartheta \vec{W}}\right)^n\right)\cdot \delta\vec{W} = -R(\vec{W}^n) \end{aligned} \qquad (3.58)$$

Όπου I ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων 5x5. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς η παραπάνω εξίσωση (3.58) είναι της εξής μορφής [Ροβ98]:

$$A\cdot x = b \qquad (3.59)$$

Από την επίλυση αυτού του συστήματος προκύπτουν τελικά οι διορθώσεις των συντηρητικών μεταβλητών. Οι τιμές τους τη νέα χρονική στιγμή n+1 προκύπτουν από την ακόλουθη σχέση:

$$\vec{W}^{n+1} = \vec{W}^n + \delta\vec{W} \qquad (3.60)$$

Το μη-γραμμικό πρόβλημα επιλύεται με ψευδο-Newton επαναλήψεις, δηλαδή μέσω της επίλυσης σε κάθε χρονικό βήμα της γραμμικοποιημένης εξίσωσης (3.58). Τότε ο υπολογισμός της χρονικά μόνιμης λύσης επιτυγχάνεται όταν η μέθοδος συγκλίνει. Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία για την επίλυση του γραμμικού συστήματος της σχέσης 3.58 εφαρμόζεται ο σημειακά πεπλεγμένος επιλύτης Gauss-Seidel. Επιπρόσθετα, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι επίσης συχνά χρησιμοποιούμενος σημειακά πεπλεγμένος επιλύτης είναι ο επιλύτης Jacobi, ο οποίος όμως δεν αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας.

Για τον υπολογισμό του δεξιού μέλους της εξίσωσης (3.58) χρησιμοποιείται, όπως έχει ήδη περιγραφεί δεύτερης τάξης ακρίβεια. Ο υπολογισμός του αριστερού μέλους προκύπτει από τη γραμμικοποίηση των όρων του δεξιού μέλους με ακρίβεια πρώτης τάξης (χωρίς εφαρμογή του σχήματος MUSCL). Εντούτοις, η χαμηλότερη τάξη ακρίβειας στο αριστερό μέλος δεν επηρεάζει την ακρίβεια της επίλυσης εφόσον ενδιαφέρει μόνο η χρονικά μόνιμη λύση. Στη συνέχεια περιγράφεται η γραμμικοποίηση του δεξιού μέλους και η δημιουργία του αριστερού μέλους. Η έκφραση του αριθμητικού διανύσματος ροής, με ακρίβεια πρώτης τάξης, που διέρχεται από το τμήμα του συνόρου θC_{PQ} είναι η εξής [Ροβ98]:

$$(\vec{\Phi}_{PQ})^{n+1} = \vec{f}_{PQ}(\vec{W}_P^{n+1}, \vec{W}_Q^{n+1}, \vec{n}_{PQ}) \qquad (3.61)$$

Η παραπάνω εξίσωση (3.61) μετά τη γραμμικοποίηση κατά Newton διατυπώνεται ως εξής:

$$(\vec{\Phi}_{PQ})^{n+1} = (\vec{\Phi}_{PQ})^{n} + \underline{B_d}^{\,n}\delta\vec{W}_P^{n+1} + \underline{B_o}^{\,n}\delta\vec{W}_Q^{n+1} \quad (3.62)$$

Όπου στα εμπλεκόμενα μητρώα γραμμικοποίησης $\underline{B_d}^{\,n}$ και $\underline{B_o}^{\,n}$ οι κάτω δείκτες d και o δηλώνουν ότι αυτά αποτελούν αντίστοιχα, διαγώνια (diagonial) και μη-διαγώνια (off-diagonial) στοιχεία του μητρώου του αριστερού μέλους. Η παραπάνω σχέση (3.62) αποδεικνύεται ως εξής:

Ο προσεγγιστικός επιλύτης Riemann του Roe, ο οποίος έχει διατυπωθεί έως τώρα με τις σχέσεις (3.19) και (3.22), δύναται να διατυπωθεί και με άλλη μία σχέση η οποία είναι η εξής:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \vec{H}\left(\vec{W}_{PQ}^{R}, \vec{n}_{PQ}\right) - \underline{\tilde{A}_{PQ}^{+}}\left(\vec{W}_{PQ}^{R} - \vec{W}_{PQ}^{L}\right) \qquad (3.63)$$

Η παραπάνω σχέση (3.63) αποτελεί άλλη μία έκφραση του προσεγγιστικού επιλύτη του Riemann του Roe και η οποία για το χρονικό βήμα η+1 διατυπώνεται ως εξής:

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{n+1} = \vec{H}\left(\vec{W}_{PQ}^{R}, \vec{n}_{PQ}\right)^{n+1} - \underline{\tilde{A}_{PQ}^{+}}\left(\vec{W}_{PQ}^{R,n+1} - \vec{W}_{PQ}^{L,n+1}\right) \qquad (3.64)$$

Υπενθυμίζεται ότι έχει γίνει ήδη η παραδοχή των τέλειων αερίων, για τα οποία εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα ροής είναι ομογενής συνάρτηση πρώτου βαθμού ως προς το W. Εφαρμόζοντας το θεώρημα των ομογενών συναρτήσεων η H μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\vec{H}(\vec{W}_{PQ}^{L}, \vec{n}_{PQ}) = A_P \cdot W_{PQ}^{L} \qquad (3.65)$$

Όπου το A αποτελεί το συντηρητικό Ιακωβιανό μητρώο υπολογισμένο με τις τιμές του αριστερού κόμβου της ακμής PQ. Οπότε το διάνυσμα ροής H σε ένα κόμβο P τη χρονική στιγμή η+1 επαναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \vec{H}_P^{n+1} &= \vec{H}_P^{n} + \left(\frac{\vartheta \vec{H}}{\vartheta \vec{W}}\right)_P^{n} \cdot \delta \vec{W}_P \\ &= A_P \cdot \vec{W}_P^{n} + A_P \cdot \delta \vec{W}_P \end{aligned} \qquad (3.66)$$

Με την αντικατάσταση της σχέσης (3.66) στην παραπάνω εξίσωση (3.64) η τελευταία γράφεται ως εξής [Ροβ98]:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{PQ}^{n+1} &= \vec{H}_Q^{n} + A_Q \delta \vec{W}_Q - A_{PQ}^{+}(W_Q^{n} + \delta \vec{W}_Q - \vec{W}_P^{n} - \delta \vec{W}_P) \\ &= \vec{H}_Q^{n} - A_{PQ}^{+}(W_Q^{n} - W_P^{n}) + (A_Q - A_{PQ}^{+})\delta \vec{W}_Q + A_{PQ}^{+}\delta \vec{W}_P \\ &= \vec{\Phi}_{PQ}^{n} + (A_Q - A_{PQ}^{+})\delta \vec{W}_Q + A_{PQ}^{+}\delta \vec{W}_P \end{aligned} \qquad (3.67)$$

Η σχέση (3.67) αποτελεί την απόδειξη της παραπάνω σχέσεως (3.62), αρκεί να αντικατασταθούν τα μητρώα γραμμικοποίησης $\underline{B_d}^n$ και $\underline{B_o}^n$ με τις ακόλουθες σχέσεις [Kou98]:

$$\underline{B_d}^n = \underline{A^+}(\vec{W}_{PQ}, \vec{n}_{PQ}) \quad (3.68)$$

$$\underline{B_o}^n = \underline{A_Q}(\vec{W}_Q, \vec{n}_{PQ}) - \underline{A^+_{PQ}}(\vec{W}_{PQ}, \vec{n}_{PQ}) \quad (3.69)$$

Αντίστοιχα γραμμικοποιούνται και τα οριακά διάνυσματα ροής στα όρια εισόδου/εξόδου του χωρίου και παρέχουν διαγώνια συνεισφορά στο μητρώο του αριστερού μέλους της εξίσωσης (3.58). Η συνεισφορά αυτή συνοψίζεται στην ακόλουθη σχέση [Kou98]:

$$\vec{H}^{n+1}_{P,out} = \vec{H}^{n}_{P,out} + \underline{A^+_P} \cdot \delta\vec{W}^{n+1}_P \quad (3.70)$$

Επιπρόσθετα, γραμμικοποιούνται και τα διανύσματα ροής στα όρια του στερεού τοιχώματος και παρέχουν διαγώνια συνεισφορά στο μητρώο του αριστερού μέλους της εξίσωσης (3.58). Η συνεισφορά αυτή αναλύεται πλήρως στο παράρτημα Β της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, ενώ συνοψίζεται στην ακόλουθη σχέση [Kou98]:

$$\vec{H}^{n+1}_{P,wall} = \vec{H}^{n}_{P,wall} + \frac{\vartheta \vec{H}_{wall}}{\vartheta \vec{U}} \cdot \frac{\vartheta \vec{U}}{\vartheta \vec{W}} \cdot \delta\vec{W}^{n+1}_P \quad (3.71)$$

Βάσει των παραπάνω για κάθε κόμβο P η σύνθεση του αριστερού μέλους της εξίσωσης (3.58) από τη γραμμικοποίηση των διαφόρων όρων του δεξιού μέλους της ίδιας εξίσωσης οδηγεί στην διατύπωση ενός τοπικού συστήματος πινάκων 5x5 της ακόλουθης μορφής [Kou98]:

$$\underline{D^n_P} \cdot \overrightarrow{\delta W^{n+1}_P} + \sum_{Q \in K_N(P)} \underline{O^n_{PQ}} \cdot \overrightarrow{\delta W^{n+1}_Q} = \vec{R}^n_P \quad (3.72)$$

Όπου $\underline{D^n_P}$ και $\underline{O^n_{PQ}}$ οι διαγώνιοι και οι μη-διαγώνιοι όροι αντίστοιχα του αριστερού μέλους της εξίσωσης (3.58).

Όπως αναφέρθηκε και πρωτύτερα η επίλυση του γραμμικού συστήματος της εξίσωσης (3.58) επιλύθηκε μέσω του σημειακού επιλύτη Gauss-Seidel. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί για την επίλυση του γραμμικοποιημένου προβλήματος ένα πλήθος υποεπαναλήψεων. Το πλήθος αυτό, το οποίο θα συμβολίζεται nrelax, δύναται να επηρεάσει σημαντικά τη σύγκλιση και θα πρέπει να επιλέγεται προσεκτικά. Η μέθοδος αυτή ανανεώνει τις τιμές με χρήση της πιο πρόσφατης διόρθωσης για τους γύρω κόμβους μόλις αυτή γίνει σωστή. Ο επιλύτης Gauss-Seidel συνοψίζεται στην ακόλουθη σχέση [Kou98]:

$$\delta\vec{W}_P^{n+1,k+1} = (\underline{D}_P^n)^{-1} \cdot (\vec{R}_P^n - \sum_{Q\in K_N(P),Q<P} \underline{O}_{PQ}^n \cdot \delta\vec{W}_Q^{n+1,k} - \sum_{Q\in K_N(P),Q>P} \underline{O}_{PQ}^n \cdot \delta\vec{W}_Q^{n+1,k}) \qquad (3.73)$$

Όπου τα σύμβολα P και Q δηλώνουν τους αύξοντες αριθμούς των αντίστοιχων κόμβων του πλέγματος. Επιπλέον ο πάνω-δείκτης k+1 μετράει τις εσωτερικές επαναλήψεις, ενώ οι πίνακες $\underline{D_P^n}$ και $\underline{O_{PQ}^n}$ υπολογίζονται βάσει των τιμών των μεταβλητών της προηγούμενης επανάληψης n. Η διαδικασία ξεκινάει κάθε φορά με αρχική εκτίμηση για την διόρθωση δW με την εξής σχέση [Kou98]:

$$\delta\vec{W}_P^{n+1,0} = (\underline{D}_P^n)^{-1} \cdot \vec{R}_P^n \qquad (3.74)$$

Τέλος, όσον αφορά τον σημειακά πεπλεγμένο επιλύτη Gauss-Seidel, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι χρησιμοποιήθηκε με μία μικρή παραλλαγή. Αντί να πραγματοποιείται η σάρωση των κόμβων Q και να ελέγχονται αν έχουν μικρότερο ή μεγαλύτερο αύξων αριθμό από τον κόμβο P, πραγματοποιούνται δύο σαρώσεις σε όλους τους κόμβους, μία για αυτούς με περιττό αύξων αριθμό και μία για αυτούς με άρτιο αύξων αριθμό. Σύμφωνα με αυτήν τη διαδικασία, η οποία ονομάζεται Red-Black, η σχέση (3.73) μεταβάλλεται ως εξής:

$$\delta\vec{W}_P^{n+1,k+1} = (\underline{D}_P^n)^{-1} \cdot (\vec{R}_P^n - \sum_{Q\in K_N(P),\mathrm{mod}(Q,2)=0} \underline{O}_{PQ}^n \cdot \delta\vec{W}_Q^{n+1,k} - \sum_{Q\in K_N(P),\mathrm{mod}(Q,2)>0} \underline{O}_{PQ}^n \cdot \delta\vec{W}_Q^{n+1,k}) \qquad (3.75)$$

Αντίθετα με τη ρητή μέθοδο αριθμητικής επίλυσης η σημειακά πεπλεγμένη μέθοδος αριθμητικής επίλυσης επιτυγχάνει ταχύτερη σύγκλιση, ενώ ταυτόχρονα δίνει τη δυνατότητα χρήσης υψηλών αριθμών CFL, οπότε και μεγαλύτερων τοπικών χρονικών βημάτων. Όμως η σύγκλιση του γραμμικού συστήματος ανά υποεπανάληψη δε βοηθιέται από τα μεγάλα χρονικά βήματα αλλά από τα μικρότερα, αφού αυτά οδηγούν σε ενίσχυση της διαγώνιας κυριαρχίας. Η επιλογή της τιμής του CFL αποτελεί συμβιβαστική λύση μεταξύ δύο αντίθετων επιδιώξεων, της γρήγορης σύγκλισης του γραμμικού προβλήματος και της επίτευξης ικανοποιητικού ρυθμού σύγκλισης στο μη-γραμμικό πρόβλημα [Kou98].

Η συνήθης τακτική που ακολουθείται σε αυτές τις περιπτώσεις, και η οποία εφαρμόστηκε στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, είναι η εκκίνηση της επίλυσης με πολύ μικρή τιμή του αριθμού CFL και την αύξηση αυτού γραμμικά με τις επαναλήψεις έως τη μέγιστη τιμή του, την οποία διατηρεί σταθερή στη συνέχεια της βελτιστοποίησης. Αυτή η τακτική καθίσταται συχνά αναγκαία, καθώς η επίλυση ξεκινά συνήθως με αρχικό πεδίο το αδιατάρακτο πεδίο της εισόδου ροής. Κατά συνέπεια, στις πρώτες επαναλήψεις απαιτείται βαθιά σύγκλιση του γραμμικού συστήματος, ώστε να σχηματισθεί μία πρώτη εικόνα του πεδίου ροής. Καθώς η επίλυση προχωράει προς τη μόνιμη χρονικά λύση, οι απαιτήσεις του γραμμικού προβλήματος θεωρητικά εξασθενούν, ενώ του μη-γραμμικού προβλήματος αυξάνουν. Η προαναφερθείσα κατάσταση καλύπτεται από την τακτική της σταδιακής γραμμικής με τις επαναλήψεις αύξησης του αριθμού CFL [Kou98].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Προσαρμογή μη Δομημένων Πλεγμάτων Τετραεδρικών Στοιχείων στη Λύση των Εξισώσεων Ροής.

4.1. Εισαγωγή.

Βασικό στόχο της προσαρμογής του πλέγματος στην υπό εξέλιξη λύση, αποτελεί η παραγωγή αριθμητικών λύσεων αποδεκτής ακρίβειας ξεκινώντας από ένα αραιό αρχικό πλέγμα και καταλήγοντας σε ένα τελικό πλέγμα επαρκώς πυκνωμένο στις περιοχές που απαιτείται ανάλογα τα φαινόμενα ροής που θα αναπτυχθούν. Με την εφαρμογή της διαδικασίας της προσαρμογής δύναται να αντιμετωπιστεί επιτυχώς η άγνοια του χρήστη για το απαιτούμενο πλέγμα, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις εφαρμογής για πρώτη φορά. Κατά συνέπεια επιτυγχάνεται σημαντική οικονομία στη διάσταση και πυκνότητα του πλέγματος που τελικά απαιτείται για την επίλυση του εκάστοτε προβλήματος. Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, η εύκολη προσαρμογή του πλέγματος είναι μία από τις βασικές δυνατότητες τις οποίες προσφέρουν τα μη-δομημένα πλέγματα σε σχέση με τα δομημένα. Η διαδικασία ξεκινά συνήθως με προσεγγιστική επίλυση σε αραιό αρχικό πλέγμα, όπου επιπρόσθετα μπορούν ενδεχόμενα να χρησιμοποιηθούν σχήματα διακριτοποίησης χαμηλής ακρίβειας για λόγους ελαχιστοποίησης του υπολογιστικού κόστους. Κατά την εξέλιξη της επίλυσης αναμένονται βέβαια σημαντικές διακυμάνσεις των τιμών του σφάλματος στις διάφορες περιοχές του διακριτοποιημένου χωρίου [Kou98]. Με βάση κριτήρια τα οποία αφορούν σε εκτιμήσεις τόσο του συνολικού όσο και των τοπικών σφαλμάτων, ο ρόλος της προσαρμογής είναι να τροποποιήσει τοπικά το πλέγμα με τρόπο ώστε είτε να ελαχιστοποιηθεί το σφάλμα είτε να επιτευχθεί ομοιόμορφη κατανομή του σφάλματος κάτω από ένα επιθυμητό όριο, το οποίο ορίζεται από το χρήστη.

Για την προσαρμογή του πλέγματος στην υπό εξέλιξη λύση έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές, από τις οποίες οι πιο σημαντικές είναι οι ακόλουθες [Kou98]:

- Η ολική ανακατασκευή του πλέγματος (mesh restructuring).
- Ο τοπικός εμπλουτισμός-απεμπλουτισμός του πλέγματος (refinement-derefinement ή h-refinement).
- Η μετακίνηση κόμβων του πλέγματος (node movement).
- Τεχνικές υπέρθεσης νέων στοιχείων (mesh embedding).

Κάθε μία από τις προαναφερθείσες μεθόδους έχει συγκεκριμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα, ενώ ταυτόχρονα βασίζεται σε διαφορετικά δεδομένα για την προσαρμογή του υπό εξέλιξη πλέγματος. Οι δύο πρώτες μέθοδοι βασίζονται στην προδιαγραφή ενός επιθυμητού κατωφλίου για το μέγιστο σφάλμα και την εισαγωγή ή απαλοιφή υπολογιστικών κόμβων σύμφωνα με ότι υπαγορεύει η ικανοποίηση των συνθηκών ακριβείας. Η τρίτη προσέγγιση βασίζεται σε διαφορετική φιλοσοφία, σύμφωνα με την οποία το πλήθος των κόμβων και η συνδεσμολογία του πλέγματος παραμένουν σταθερά, ενώ το ζητούμενο είναι η βέλτιστη ανακατανομή τους στο πεδίο μέσω τοπικών μετακινήσεων, ώστε να ικανοποιηθεί η επιθυμητή συνθήκη ακριβείας. Στην περίπτωση αυτή η ποιότητα του πλέγματος εκφράζεται από την ομοιομορφία της κατανομής του σφάλματος και όχι από το απόλυτο μέγεθος του. Οι τρεις πρώτες αυτές μέθοδοι διατηρούν τη δομή ενός τυπικού μη-δομημένου πλέγματος, σε αντίθεση με την τέταρτη που ενώ δεσμεύει λιγότερη μνήμη, απαιτεί όμως πιο πολύπλοκη τοπολογική δομή δεδομένων και επιπλέον επιβάλει αντίστοιχη τροποποίηση της διακριτοποίησης στο λογισμικό επίλυσης ή εντελώς νέο λογισμικό [Kou98].

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία αναπτύχθηκε μερικώς η δεύτερη από τις μεθόδους που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, δηλαδή η μέθοδος του τοπικού εμπλουτισμού-απεμπλουτισμού του πλέγματος. Η τελευταία εφαρμόστηκε μερικώς, καθώς βασίστηκε μόνο στον τοπικό εμπλουτισμό του πλέγματος, χωρίς τον τοπικό απεμπλουτισμό αυτού. Η παράλειψη βέβαια αυτή δεν μειώνει σε καμία περίπτωση την ποιότητα των τελικών αποτελεσμάτων, παρά μόνο αυξάνει λίγο το υπολογιστικό κόστος. Η μέθοδος αυτή είναι γενικά πολύ γρήγορη και εφαρμόζεται άμεσα στο υπό εξέταση πλέγμα, επιβαρύνοντας βέβαια τον επιλύτη της ροής με ένα αμελητέο ποσοστό του συνολικού χρόνου υπολογισμού. Η διαδικασία πραγματοποιείται σε συγκεκριμένες επαναλήψεις του συνολικού αλγορίθμου επίλυσης, οι οποίες ορίζονται αρχικά από το χρήστη. Κάθε φορά η εν λόγω μέθοδος εφαρμόζεται στο υφιστάμενο πλέγμα. Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζεται, είτε στο αρχικό πλέγμα εφόσον δεν έχει εφαρμοστεί έως τότε διαδικασία προσαρμογής, είτε στο πλέγμα που έχει δημιουργηθεί κατά την εφαρμογή της διαδικασίας προσαρμογής σε προηγούμενη επανάληψη του συνολικού αλγόριθμου επίλυσης. Το πλήθος των εφαρμογών της εν λόγω διαδικασίας, καθώς και οι αριθμοί των επαναλήψεων όπου υλοποιηθούν, εξαρτάται από τη μέθοδο επίλυσης (ρητή ή πεπλεγμένη), την αραιότητα του αρχικού πλέγματος και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του προβλήματος ροής. Ως γενική αρχή, διατυπώνεται ότι σε συνδυασμό με ρητούς επιλύτες ο αριθμός των επαναλήψεων μεταξύ δύο διαδοχικών εφαρμογών της τεχνικής εμπλουτισμού είναι μεγαλύτερος συγκριτικά με τους πεπλεγμένους.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου περιγράφονται οι βασικές αρχές της μεθόδου προσαρμογής και οι δομές δεδομένων που αυτή απαιτεί. Επιπρόσθετα, καταγράφονται τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν για τον εντοπισμό των περιοχών του πλέγματος όπου λαμβάνει χώρα η προσαρμογή. Τέλος, αναλύονται τα βήματα του αλγορίθμου του εμπλουτισμού.

4.2. Τοπολογικές και Γενεαλογικές Πληροφορίες που Απαιτούνται από τον Αλγόριθμο Προσαρμογής.

Ο τοπικός εμπλουτισμός του πλέγματος, όπως προαναφέρθηκε, πραγματοποιείται στις περιοχές που εντοπίζονται από κατάλληλα διατυπωμένα κριτήρια. Ο εμπλουτισμός πραγματοποιείται μέσω της κατάτμησης των τετραέδρων σε μικρότερα, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο νέα στοιχεία πλέγματος (κόμβους, ακμές, τρίγωνα, τετράεδρα). Κατά συνέπεια. για κάθε στοιχείο του αρχικού πλέγματος σχηματίζεται το γενεαλογικό του δέντρο. Στο εξής τα τετράεδρα που διασπώνται θα ονομάζονται μητρικά, ενώ τα νέα τετράεδρα θα ονομάζονται απόγονοι ή τετράεδρα-παιδιά. Τα τετράεδρα-παιδιά του ίδιου μητρικού τετραέδρου θα ονομάζονται αδελφά-τετράεδρα. Επειδή, κατά τη διάσπαση ενός τετραέδρου συντελούνται αντίστοιχες διασπάσεις στα τρίγωνα που αποτελούν τις πλευρές του, καθώς και στις ακμές που αποτελούν τις τελευταίες, θα χρησιμοποιείται και για αυτές αντίστοιχη ορολογία.

Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο, σε αντίθεση με τα δομημένα πλέγματα όπου τρεις δείκτες (i,j,k) αρκούν για τον άμεσο ορισμό της (απόλυτης και σχετικής) θέσης οποιουδήποτε κόμβου, στα μη-δομημένα απαιτείται η αποθήκευση μιας σειράς πληροφοριών που συνδέουν μεταξύ τους τα διάφορα στοιχεία του πλέγματος (τοπολογική δομή δεδομένων ιεραρχικού τύπου). Η προσπέλαση και η διαχείριση όλων των στοιχείων του πλέγματος, καθώς και η μετάβαση από το ένα στο άλλο, επιτυγχάνεται με την έμμεση διαχείριση μνήμης. Ως εκ τούτου, ενώ το πρακτικό αποτέλεσμα της προσαρμογής στο πλέγμα είναι άμεσο, η υλοποίηση του αλγόριθμου της είναι αρκετά πολύπλοκη, ιδιαίτερα αναφορικά με τη δυναμική τροποποίηση και αποθήκευση της τοπολογικής δομής δεδομένων του υπό εξέλιξη πλέγματος [Kou98].

Με βάση τον τρόπο που ο αλγόριθμος επίλυσης χρησιμοποιεί τις ακμές, τα τρίγωνα και τα τετράεδρα του υπό εξέταση πλέγματος, τα εν λόγω στοιχεία κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες [Κου98]:

- Ενεργά στοιχεία.
- Ανενεργά στοιχεία.
- Εξουδετερωμένα στοιχεία.

Στη συνέχεια της παρούσας παραγράφου πραγματοποιείται η ανάλυση των προαναφερθέντων κατηγοριών.

Ενεργά Στοιχεία. Είναι τα στοιχεία του πλέγματος που χρησιμοποιούνται από τον επιλύτη και μπορεί να είναι είτε στοιχεία του αρχικού πλέγματος που δεν έχουν εμπλουτισθεί (ακόμα) είτε απόγονοι τους της τελευταίας γενιάς. Είναι προφανές ότι τα ενεργά τετράεδρα, τα ενεργά τρίγωνα και οι ενεργές ακμές του πλέγματος δεν έχουν απογόνους (ανήκουν στο τελευταίο επίπεδο των γενεαλογικών δέντρων). Τα ενεργά στοιχεία του πλέγματος ορίζουν τους όγκους ελέγχου, όπου ολοκληρώνονται οι προς επίλυση εξισώσεις.

Ανενεργά Στοιχεία. Είναι τα στοιχεία του πλέγματος, που δε λαμβάνονται υπόψη στην επίλυση κατά την τρέχουσα φάση, γιατί σε προηγούμενη φάση προσαρμογής έχουν αντικατασταθεί από απογόνους τους. Τα χαρακτηριστικά τους (συντεταγμένες, τοπολογική τους σύνδεση, γενεαλογικό δέντρο) παραμένουν αποθηκευμένα στην τοπολογική και στη γενεαλογική δομή δεδομένων.

Εξουδετερωμένα Στοιχεία. Είναι τα πρώην ενεργά στοιχεία του πλέγματος που έχουν απαλειφθεί λόγω εφαρμογής των κανόνων της προσαρμογής σε κάποια φάση εμπλουτισμού. Τα στοιχεία αυτά δεν είναι πλέον χρήσιμα και απαλείφονται από την τοπολογική και τη γενεαλογική δομή δεδομένων.

Οι κατάλογοι της τοπολογικής δομής δεδομένων του αρχικού πλέγματος επεκτείνονται με δυναμικό τρόπο κατά τον εμπλουτισμό, ώστε να ενσωματωθούν σε αυτούς τα νέα στοιχεία του πλέγματος. Ταυτόχρονα όμως λόγω της απαλοιφής των εξουδετερωμένων στοιχείων κατά την εφαρμογή των κανόνων της προσαρμογής σε κάποια φάση εμπλουτισμού, χρησιμοποιείται η τεχνική του καταλόγου αναμονής. Σύμφωνα με αυτήν την τεχνική, τα εξουδετερωμένα στοιχεία όταν απαλείφονται εισέρχονται σε έναν κατάλογο με σκοπό την επαναχρησιμοποίηση τους σε μεταγενέστερη φάση του αλγορίθμου ως αριθμοί ταυτότητας νέων στοιχείων του πλέγματος. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται η ατέλειωτη διεύρυνση της δομής δεδομένων και εξοικονομείται μνήμη και χρόνος επεξεργασίας υπολογιστή.

Εκτός της τοπολογικής δομής δεδομένων, την οποία χρησιμοποιεί άμεσα ο επιλύτης, ορίζεται για τις ανάγκες της προσαρμογής και η γενεαλογική δομή δεδομένων. Η τελευταία σχετίζεται με την διαδικασία του εμπλουτισμού, χρησιμοποιείται από τον αλγόριθμο αυτού και αφορά στην αποθήκευση των γενεαλογικών δένδρων τετραέδρων, τριγώνων και ακμών. Ειδικότερα η γενεαλογική δομή δεδομένων περιέχει τις παρακάτω πληροφορίες:

- Για κάθε τετράεδρο Κ αποθηκεύονται:
    1. Το πλήθος (0, 2, 4, 8) των τετραέδρων-παιδιών του. Μηδενικό πλήθος σημαίνει ότι το Κ τετράεδρο είναι ενεργό, ενώ θετικό πλήθος (2, 4, 8) σημαίνει ότι το Κ τετράεδρο είναι ανενεργό.
    2. Οι αριθμοί ταυτότητας των (2 ή 4 ή 8) τετραέδρων-παιδιών του Κ τετραέδρου.
    3. Ο αριθμός ταυτότητας του μητρικού τετραέδρου του Κ τετραέδρου (εφόσον υφίσταται).
- Για κάθε τρίγωνο Τ αποθηκεύονται:
    1. Το πλήθος (0, 2, 4) των τριγώνων-παιδιών του. Μηδενικό πλήθος σημαίνει ότι το Τ τρίγωνο είναι ενεργό, ενώ θετικό πλήθος (2 ή 4) σημαίνει ότι το Τ τρίγωνο είναι ανενεργό.
    2. Οι αριθμοί ταυτότητας των (2 ή 4) τριγώνων-παιδιών του Τ τριγώνου.
    3. Ο αριθμός ταυτότητας του μητρικού τριγώνου του Τ τριγώνου (εφόσον υφίσταται).
- Για κάθε ακμή Α αποθηκεύονται:
    1. Οι αριθμοί ταυτότητας των δύο ακμών-παιδιών της.
    2. Ο αριθμός ταυτότητας της μητρικής ακμής της ακμής Α (εφόσον υφίσταται).
    3. Ο αριθμός ταυτότητας του μεσοκόμβου της ακμής Α (εφόσον υφίσταται).

Τέλος, τονίζεται ότι κάθε φορά που κάποιο στοιχείο απαλείφεται, δηλαδή κάθε φορά που καθίσταται εξουδετερωμένο, ο αριθμός ταυτότητας του εισάγεται στον αντίστοιχο κατάλογο αναμονής. Όταν δημιουργείται ένα νέο ενεργό στοιχείο, ο αριθμός ταυτότητας του λαμβάνεται από τον αντίστοιχο κατάλογο αναμονής. Σε περίπτωση που ένας κατάλογος αναμονής αδειάσει, αυτόματα επιλέγεται ως αριθμός ταυτότητας του νέου στοιχείου ο αριθμός N+1, όπου N το τρέχον πλήθος στοιχείων. Την ίδια στιγμή που ένα στοιχείο εισάγεται ή εξάγεται από τον κατάλογο αναμονής, τροποποιούνται κατάλληλα η γενεαλογική και η τοπολογική δομή δεδομένων του πλέγματος.

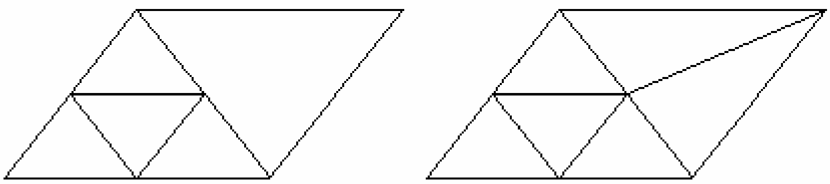
4.3. Οι Βασικοί Κανόνες του Αλγόριθμου Προσαρμογής.

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο του κεφαλαίου η διαδικασία του εμπλουτισμού επηρεάζει όλα τα είδη στοιχείων, δηλαδή τα τετράεδρα, τα τρίγωνα και τις ακμές του υπό εξέταση πλέγματος. Η διαδικασία ξεκινάει με τη σημείωση των κατάλληλων ενεργών ακμών του πλέγματος, και συνεχίζεται με την επιλογή κατάλληλης κατάτμησης των αντίστοιχων ενεργών τριγώνων και των αντίστοιχων ενεργών τετραέδρων. Σημειώνοντας ακμές, προσδιορίζονται οι περιοχές του πλέγματος στις οποίες θα λάβει χώρα ο εμπλουτισμός. Η σημείωση βασίζεται σε κριτήρια που διατυπώνονται σε κάθε ακμή του πλέγματος και εμπλέκουν τα κατώφλια τιμών εμπλουτισμού, τα οποία περιγράφονται σε επόμενη παράγραφο του κεφαλαίου.

Η μέθοδος προσαρμογής που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, υπακούει στους παρακάτω βασικούς κανόνες:

(Κ1) Το αρχικό, εφόσον δεν έχει εμπλουτισθεί, ή ενεργό πλέγμα παραμένει αναλλοίωτο, με συνέπεια να μην επιτρέπεται μετακίνηση ή απαλοιφή κόμβων. Οποιεσδήποτε προσθέσεις ή τροποποιήσεις στοιχείων του πλέγματος συντελούνται κάθε φορά πάνω στο αρχικό πλέγμα, εφόσον δεν έχει εμπλουτισθεί, ή στο πλέγμα της προηγούμενης γενιάς.

(Κ2) Κάθε κόμβος αποτελεί κοινή κορυφή των γύρω του τριγώνων και τετραέδρων, δηλαδή σε κάθε κόμβο συντρέχουν μόνο γωνίες τριγώνων και τετραέδρων. Στο παρακάτω Σχήμα 4.1 εμφανίζεται στις δύο διαστάσεις η μη-αποδεκτή και αποδεκτή περίπτωση του ίδιου σχήματος κατά τη φάση του εμπλουτισμού.

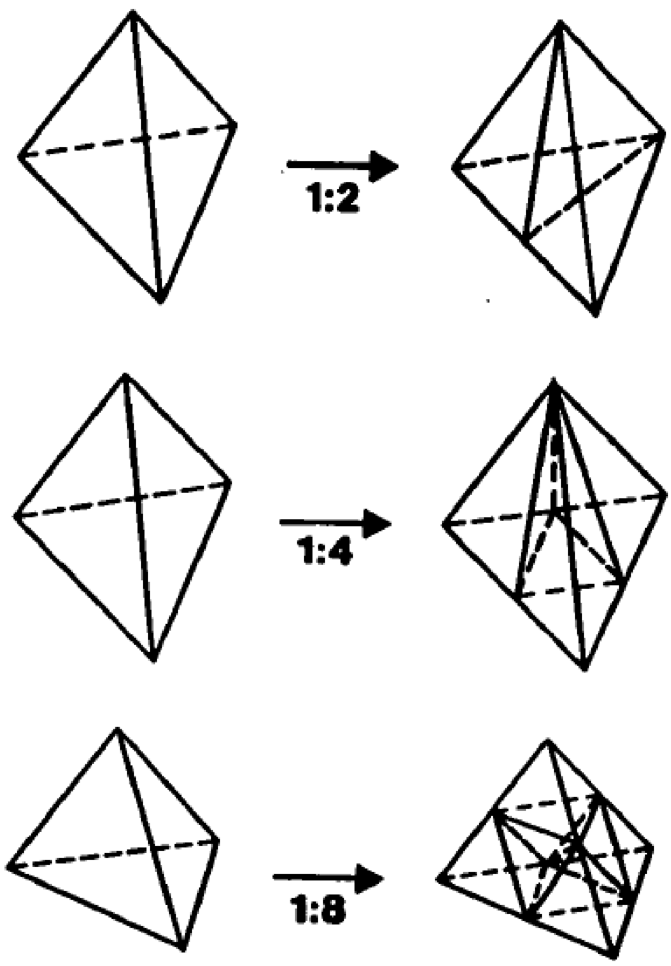


(α) (β)

Σχήμα 4.1: Παραδείγματα (α) μη-αποδεκτού και (β) αποδεκτού τρόπου διάσπασης στις δύο διαστάσεις κατά τη φάση του εμπλουτισμού.

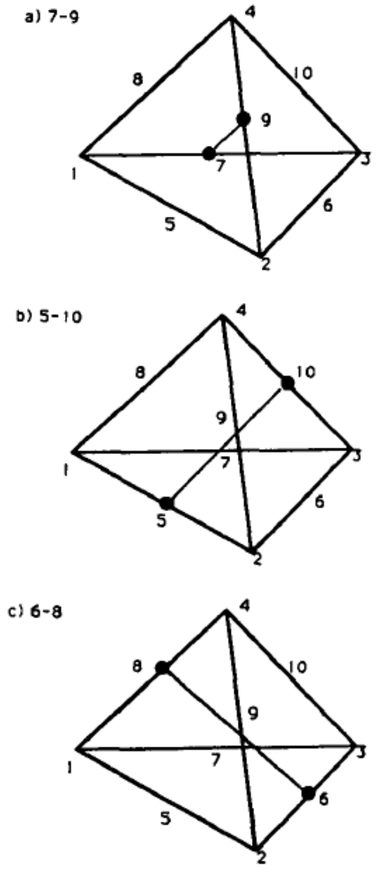
(K3) Κάθε ακμή αποτελεί κοινή ακμή των γύρω τετραέδρων, δηλαδή σε κάθε ακμή συντρέχουν μόνο τετράεδρα, τα οποία περιλαμβάνουν και τους δύο κόμβους αυτής της ακμής.

(K4) Ένα τετράεδρο επιτρέπεται να διασπαστεί μόνο με τους τρεις αποδεκτούς τρόπους του παρακάτω Σχήματος 4.2 [Mav02], για λόγους αποφυγής δημιουργίας μακρόστενων τετραέδρων που θα προκαλούσαν τοπική μείωση της ακρίβειας διακριτοποίησης [AGARD-R-787].



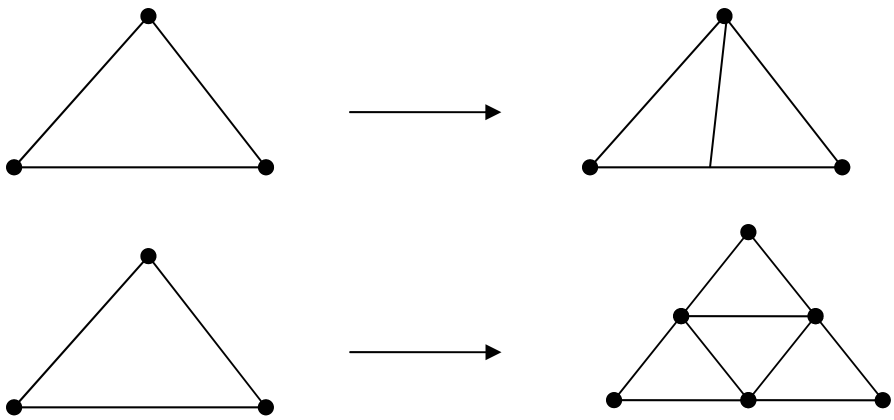
Σχήμα 4.2: Πιθανοί τρόποι διάσπασης του μητρικού τετραέδρου σε νέα τετράεδρα [AGARD-R-787].

(K5) Υφίστανται τρεις τρόποι διάσπασης ενός τετραέδρου σε οχτώ νέα τετράεδρα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 4.3. Η εσωτερική διαγώνιος που προστίθεται κατά τη διάσπαση μπορεί να είναι είτε η 7-9 (a) είτε η 5-10 (b) είτε η 6-8 (c) [AGARD-R-787]. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνταν κάθε φορά η διαγώνιος με το ελάχιστο μήκος, οπότε γινόταν και η ανάλογη διάσπαση. Η επιλογή αυτή οδηγεί στη δημιουργία του ελάχιστου δυνατού αριθμού στρεβλών τετραέδρων.



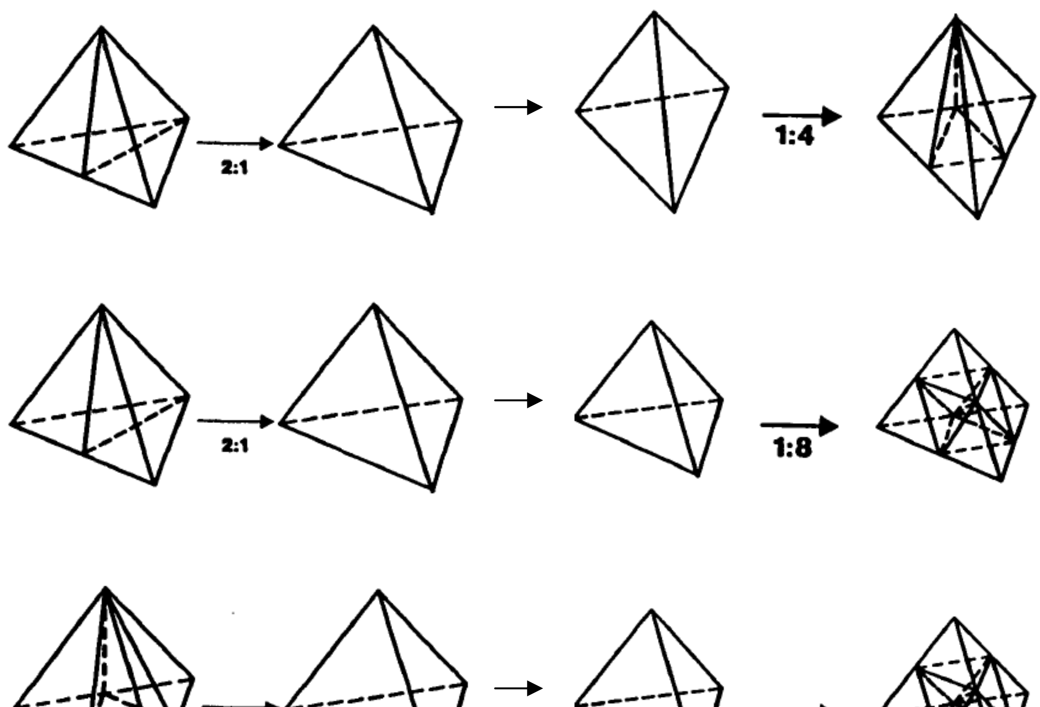
Σχήμα 4.3: Πιθανές εσωτερικοί διαγώνιοι κατά τη διάσπαση του μητρικού τετραέδρου σε οχτώ νέα τετράεδρα [AGARD-R-787].

(Κ6) Ένα τρίγωνο επιτρέπεται να διασπαστεί μόνο με τους δύο αποδεκτούς τρόπους του παρακάτω Σχήματος 4.4, για λόγους αποφυγής δημιουργίας μακρόστενων τριγώνων που θα προκαλούσαν τοπική μείωση της ακρίβειας διακριτοποίησης.



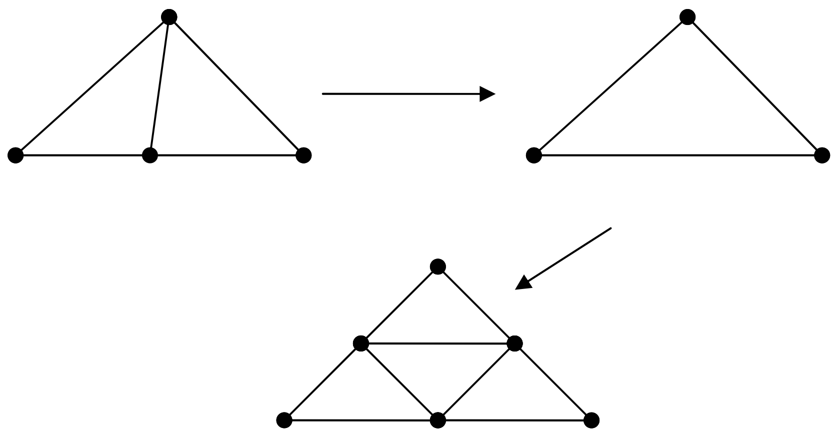
Σχήμα 4.4: Πιθανοί τρόποι διάσπασης του μητρικού τριγώνου σε νέα τρίγωνα.

(K7) Κάθε ενεργό τετράεδρο που ανήκει σε οικογένεια οκτώ παιδιών-τετραέδρων επιτρέπεται να διασπαστεί κανονικά σε νέα τετράεδρα. Αντίθετα, κάθε ενεργό τετράεδρο που προέρχεται από τη διάσπαση ενός τετραέδρου προηγούμενης γενιάς σε δύο ή τέσσερα τετράεδρα δεν επιτρέπεται να διασπαστεί περαιτέρω στην τρέχουσα μορφή του [AGARD-R-787]. Επιβάλλεται, όπως παρουσιάζεται και στο παρακάτω Σχήμα 4.5, να προηγηθεί νέα διάσπαση του μητρικού τετραέδρου σε οκτώ αντί δύο ή τέσσερα τετράεδρα, και αν εξακολουθούν να ισχύουν τα κριτήρια εμπλουτισμού, τότε θα προχωρήσει αντίστοιχα η διάσπαση κάποιου ή κάποιων από τα οκτώ νέα τετράεδρα. Ο λόγος είναι η αποφυγή δημιουργίας μακρόστενων τετραέδρων ως αποτέλεσμα των συνεχών διχοτομήσεων της ίδιας ακμής του αρχικού πλέγματος.



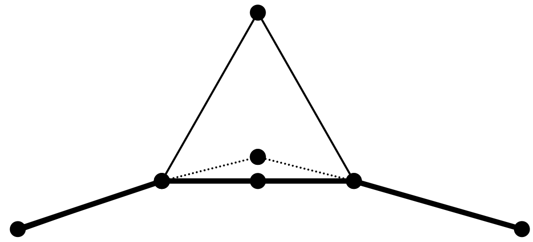
Σχήμα 4.5: Επανενεργοποίηση μητρικού τετραέδρου και επαναδιάσπαση του σε περισσότερα τετράεδρα [AGARD-R-787].

(K8) Κάθε ενεργό τρίγωνο που ανήκει σε οικογένεια τεσσάρων παιδιών επιτρέπεται να διασπαστεί κανονικά σε νέα τρίγωνα. Αντίθετα, κάθε ενεργό τρίγωνο που προέρχεται από τη διάσπαση ενός τριγώνου προηγούμενης γενιάς σε δύο τρίγωνα δεν επιτρέπεται να διασπαστεί περαιτέρω στην τρέχουσα μορφή του, όπως παρουσιάζεται και στο παρακάτω Σχήμα 4.6. Επιβάλλεται να προηγηθεί νέα διάσπαση του μητρικού τριγώνου σε τέσσερα αντί δύο τρίγωνα, και αν εξακολουθούν να ισχύουν τα κριτήρια εμπλουτισμού, τότε θα προχωρήσει αντίστοιχα η διάσπαση κάποιου ή κάποιων από τα τέσσερα νέα τρίγωνα. Ο λόγος είναι η αποφυγή δημιουργίας μακρόστενων τριγώνων ως αποτέλεσμα των συνεχών διχοτομήσεων της ίδιας ακμής του αρχικού πλέγματος.



Σχήμα 4.6: Επανενεργοποίηση μητρικού τριγώνου και επαναδιάσπαση του σε περισσότερα τρίγωνα.

(Κ9) Κάθε νέος κόμβος δημιουργείται ως μεσοκόμβος κάποιας ακμής του πλέγματος και αποκτά τις συντεταγμένες του μέσου της ακμής, εκτός εάν πρόκειται για οριακή ακμή του πλέγματος, η οποία πληρεί ορισμένες προϋποθέσεις. Στην περίπτωση αυτή οι συντεταγμένες, καθώς και τα μεγέθη, του μέσου της ακμής προσεγγίζονται κατάλληλα χρησιμοποιώντας μία διαδικασία προσαρμογής της γεωμετρίας (subdivision), η οποία αναλύεται εκτενώς σε επόμενη παράγραφο του εν λόγω κεφαλαίου. Στο παρακάτω Σχήμα 4.7 παρουσιάζεται μία τέτοια περίπτωση στις δύο διαστάσεις [Kou98].



Σχήμα 4.7: Δημιουργία νέου κόμβου σε οριακή ακμή, όπου εφαρμόζεται η διαδικασία προσαρμογής της γεωμετρίας (subdivision), στις δύο διαστάσεις.

Όταν ένα τετράεδρο διασπάται, συμπαρασύρει σε διάσπαση και ορισμένα γειτονικά του στοιχεία, ώστε να διατηρηθεί η φυσιογνωμία του μη-δομημένου πλέγματος. Ως συνέπεια της ανάγκης ικανοποίησης των παραπάνω κανόνων ο συνολικός αλγόριθμος εμπλουτισμού είναι επαναληπτικός.

4.4. Εντοπισμός των Περιοχών Προσαρμογής.

4.4.1. Κριτήρια Προσαρμογής.

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, όπως έχει αναφερθεί και πρωτύτερα, ο εντοπισμός των περιοχών, όπου θα λάβει χώρα η προσαρμογή, πραγματοποιείται μέσω της σημείωσης των ακμών του πλέγματος ως υποψήφιες για εμπλουτισμό. Οι περιοχές, όπου σημειώνονται ακμές για εμπλουτισμό, είναι αυτές στις οποίες εμφανίζονται έντονα φυσικά χαρακτηριστικά της ροής (ασυνέχειες ροής, σημεία ανακοπής κ.λπ.). Ο εντοπισμός των παραπάνω περιοχών βασίζεται σε κριτήρια που αντανακλούν τη φυσική συμπεριφορά του επιλυόμενου πεδίου ροής. Πιο συγκεκριμένα, τα βασικά στοιχεία της διατύπωσης ενός τέτοιου κριτηρίου για τη σημείωση ακμών είναι [Kou98]:

- Η επιλογή μίας χαρακτηριστικής μεταβλητής-αισθητηρίου. Ως τέτοια λαμβάνεται κάποια φυσική ποσότητα της ροής (π.χ. ταχύτητα, πυκνότητα, πίεση, αριθμός Mach, κ.λπ.).
- Η διατύπωση μίας συνάρτησης του αισθητηρίου (συνάρτηση κρίσης) που δίνει τη δυνατότητα της απόφασης για ενδεχόμενη σημείωση μιας ακμής. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να είναι κατά κατεύθυνση παράγωγος, μέτρο του διανύσματος κλίσης, διαφορά, διαφορικός τελεστής κ.λπ.ι εφαρμόζεται στη φυσική ποσότητα-αισθητήριο. Η τιμή της υπολογίζεται σε κάθε ενεργό ακμή του πλέγματος και παρέχει μια ποσοτική ένδειξη της αναγκαιότητας για τον τοπικό εμπλουτισμό του πλέγματος (με την πρόσθεση ενός νέου κόμβου στο μέσο της ακμής).
- Η τελική απόφαση για το ποιες πλευρές θα σημειωθούν για εμπλουτισμό, που λαμβάνεται με βάση τα κατώφλια τιμών εμπλουτισμού. Η σύγκριση της συνάρτησης κρίσης με τα κατώφλια αυτά σε κάθε ακμή, υποδεικνύει αν αυτή θα επιλεγεί για εμπλουτισμό ή θα μείνει ανεπηρέαστη. Ειδικότερα, αν η τιμή της συνάρτησης κρίσης σε μία ακμή είναι μεγαλύτερη από το κατώφλι εμπλουτισμού, η ακμή σημειώνεται ως υποψήφια για εμπλουτισμό.

Επιπρόσθετα, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι είναι δυνατόν τα αισθητήρια και οι αντίστοιχες συναρτήσεις κρίσης να είναι περισσότερες από μια. Σε αυτήν την περίπτωση κάθε ζεύγος αισθητηρίου-συνάρτησης κρίσης θα ευνοεί τον εντοπισμό διαφορετικού φυσικού φαινομένου της ροής και αναμένεται να ενεργοποιείται σε διαφορετική περιοχή του πεδίου ή και στην ίδια άλλα για διαφορετικό λόγο. Στην πράξη, συχνά απαιτείται συνδυασμός παραπάνω από ενός κριτηρίων για τη σωστή προσαρμογή του πλέγματος.

4.4.2. Συναρτήσεις Κρίσης.

Οι συναρτήσεις κρίσης που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία σε συνδυασμό με επιλύτες πεπερασμένων όγκων, διαχωρίζονται μεταξύ τους ανάλογα με το αν στηρίζονται στην απόλυτη μεταβολή (διαφορά) της ποσότητας-αισθητηρίου ή τη σχετική, διαιρεμένη δηλαδή ως προς το τοπικό μήκος πλέγματος (παράγωγος). Ως εκ τούτου, αν με Φ συμβολιστεί η μεταβλητή-αισθητήριο, η συνάρτηση κρίσης f για την ακμή που συνδέει τους κόμβους P και Q μπορεί εναλλακτικά να εκφρασθεί με τις παρακάτω σχέσεις [Kou98]:

(α) Απόλυτη μεταβολή: $$f = \left|\Phi_P - \Phi_Q\right| \qquad (4.1)$$

(β) Σχετική μεταβολή: $$f = \frac{\left|\Phi_P - \Phi_Q\right|}{\Delta s} \approx \left|\frac{d\Phi}{ds}\right| \qquad (4.2)$$

(γ) Ορισμένες παραλλαγές των ανωτέρω εκφράσεων της συνάρτησης κρίσης:

$$\begin{aligned} f &= 1 + \left|\frac{d\Phi}{ds}\right|, \\ f &= \sqrt{1 + \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2}, \qquad (4.3) \\ f &= \left|\frac{d\Phi}{ds}\right| + B\left|\frac{d^2\Phi}{ds^2}\right|, B = \sigma\tau\alpha\theta. \end{aligned}$$

Κάθε μία από τις παραπάνω εκφράσεις της συνάρτησης κρίσης δύναται να οδηγήσει σε εντελώς διαφορετικές σημειώσεις των ακμών και τελικά σε διαφορετικές καταστάσεις. Για παράδειγμα, σε περίπτωση γραμμικής μεταβολής της μεταβλητής-αισθητηρίου Φ κατά μήκος μίας ακμής PQ, μετά τη διάσπαση της συγκεκριμένης ακμής οι δύο ακμές-παιδιά της θα έχουν την ίδια συνάρτηση κρίσης εάν αυτή βασίζεται στην παράγωγο. Είναι πολύ πιθανό να ξανασημειωθούν οι εν λόγω ακμές-παιδιά στην επόμενη επανάληψη εμπλουτισμού. Κατά συνέπεια η εφαρμογή ενός τέτοιου κριτηρίου προδιαθέτει για συνεχή σημείωση των ίδιων ακμών και των απογόνων αυτών. Ως εκ τούτου απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή κατά την επιλογή και εφαρμογή των διαφόρων εκφράσεων των συναρτήσεων κρίσης.

4.4.3. Επιλογή του Κατωφλίου Εμπλουτισμού.

Το κατώφλι εμπλουτισμού (f_{cri}) καθορίζεται είτε ως ποσοστό της μέγιστης τιμής της συνάρτησης κρίσης f σε ολόκληρο το πεδίο είτε χρησιμοποιώντας στατιστικά μεγέθη [Kou98]. Ειδικότερα, στην τελευταία περίπτωση το κατώφλι εμπλουτισμού ορίζεται ως ο ακόλουθος γραμμικός συνδυασμός:

$$f_{cri} = Af_{mean} + Cf_{dev} \qquad (4.4)$$

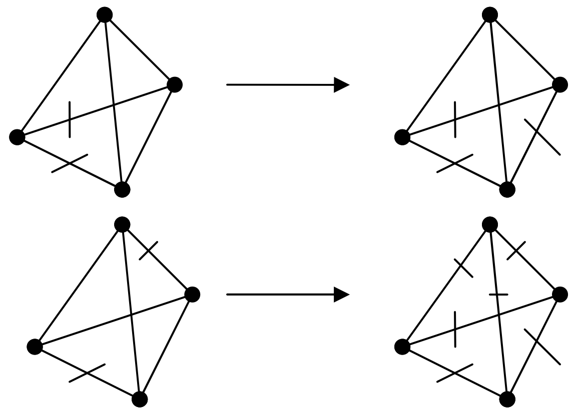
Όπου f_{mean} και f_{dev} είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των τιμών που λαμβάνει η συνάρτηση κρίσης f στις ακμές του πλέγματος, ενώ για τους συντελεστές A και C ενδεικτικές τιμές είναι $0<A<1$ και $0<C<3$. Ο καθορισμός των τιμών των παραμέτρων αυτών δεν είναι συγκεκριμένος για κάθε περίπτωση, αφού εξαρτάται από το εκάστοτε κριτήριο που χρησιμοποιείται, ενώ επίσης είναι δυνατό να μεταβάλλονται σε κάθε φάση προσαρμογής.

4.5. Η Διαδικασία του Εμπλουτισμού.

Ο αλγόριθμος του εμπλουτισμού αποτελείται από πέντε βασικά βήματα, τα οποία είναι τα ακόλουθα [AGARD-R-787]:

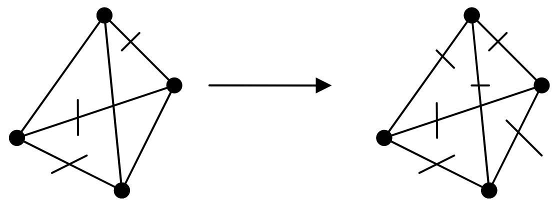
- Καταρχήν πραγματοποιείται η σημείωση των ακμών που πληρούν τα κριτήρια τα οποία έχουμε θέσει, και οι οποίες ταυτόχρονα τίθενται υποψήφιες προς διάσπαση.
- Κατά την σημείωση των ακμών για εμπλουτισμό, είναι πιθανό να έχουν σημειωθεί 0, 1, 2, 3, 4, 5 ή 6 ακμές ενός τετραέδρου. Ανάλογα τον αριθμό των ακμών ενός τετραέδρου που έχουν σημειωθεί πραγματοποιούνται τα κάτωθι:
    1. Για καμία (0) σημειωμένη ακμή το τετράεδρο δε τίθεται υποψήφιο για διάσπαση.

2. Για μία (1) σημειωμένη ακμή το τετράεδρο τίθεται υποψήφιο για διάσπαση σε δύο νέα τετράεδρα.
3. Για δύο (2) σημειωμένες ακμές απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση, ώστε να εξεταστεί εάν αυτές ανήκουν στο ίδιο τρίγωνο του τετραέδρου. Εάν ανήκουν τότε σημειώνεται και η τρίτη ακμή αυτού του τριγώνου και το τετράεδρο τίθεται υποψήφιο για διάσπαση σε τέσσερα νέα τετράεδρα, αλλιώς σημειώνονται και οι υπόλοιπες τέσσερις ακμές του τετραέδρου και αυτό τίθεται υποψήφιο για διάσπαση σε οκτώ νέα τετράεδρα. Στο παρακάτω Σχήμα 4.8 παρουσιάζονται οι δύο προαναφερθείσες περιπτώσεις.



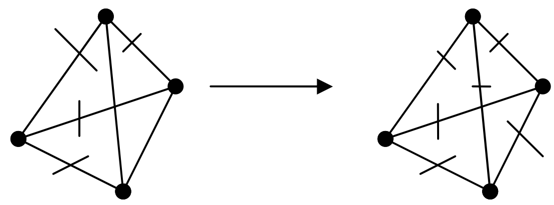
Σχήμα 4.8: Περαιτέρω σημείωση ακμών ενός τετραέδρου εφόσον έχουν σημειωθεί αρχικά δύο μόνο από τις ακμές του. Στην άνω περίπτωση σημειώνονται τρεις ακμές συνολικά, ενώ στην κάτω και οι έξι ακμές του τετραέδρου.

4. Για τρεις (3) σημειωμένες ακμές απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση, ώστε να εξεταστεί εάν αυτές ανήκουν στο ίδιο τρίγωνο του τετραέδρου. Εάν ανήκουν τότε το τετράεδρο τίθεται υποψήφιο για διάσπαση σε τέσσερα νέα τετράεδρα, αλλιώς σημειώνονται και οι υπόλοιπες τρεις ακμές του τετραέδρου και αυτό τίθεται υποψήφιο για διάσπαση σε οκτώ νέα τετράεδρα. Η τελευταία περίπτωση παρουσιάζεται στο επόμενο Σχήμα 4.9.



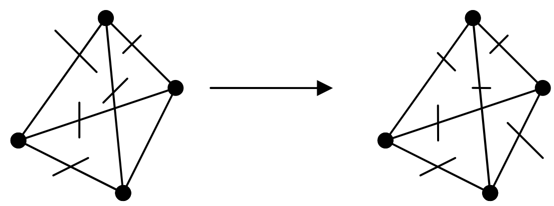
Σχήμα 4.9: Περαιτέρω σημείωση ακμών ενός τετραέδρου εφόσον έχουν σημειωθεί αρχικά τρεις ακμές του, οι οποίες δεν ανήκουν στο ίδιο τρίγωνο.

5. Για τέσσερις (4) σημειωμένες ακμές σημειώνονται και οι άλλες δύο ακμές του τετραέδρου και αυτό τίθεται υποψήφιο για διάσπαση σε οκτώ νέα τετράεδρα. Η τελευταία περίπτωση παρουσιάζεται στο επόμενο Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10: Περαιτέρω σημείωση ακμών ενός τετραέδρου εφόσον έχουν σημειωθεί αρχικά τέσσερις ακμές του.

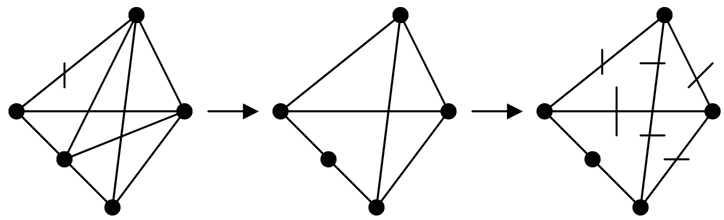
6. Για πέντε (5) σημειωμένες ακμές σημειώνεται και η τελευταία μη σημειωμένη ακμή του τετραέδρου και αυτό τίθεται υποψήφιο για διάσπαση σε οκτώ νέα τετράεδρα. Η τελευταία περίπτωση παρουσιάζεται στο επόμενο Σχήμα 4.11.



Σχήμα 4.11: Περαιτέρω σημείωση ακμών ενός τετραέδρου εφόσον έχουν σημειωθεί αρχικά πέντε ακμές του.

7. Για έξι (6) σημειωμένες ακμές το τετράεδρο τίθεται υποψήφιο για διάσπαση σε οκτώ νέα τετράεδρα.

- Στη συνέχεια ελέγχεται εάν το υπό εξέταση τετράεδρο έχει προκύψει από προηγούμενη διάσπαση του μητρικού τετραέδρου του σε δύο ή τέσσερα νέα τετράεδρα. Στην προαναφερθείσα περίπτωση πραγματοποιείται καταρχήν η κατάλληλη σημείωση των ακμών του μητρικού τετραέδρου και απαλοιφή της σημείωσης των ακμών του υπό εξέταση τετραέδρου καθώς και των τετραέδρων αδερφών του. Κατόπιν απενεργοποιούνται το υπό εξέταση τετράεδρο και τα τετράεδρα αδέρφια αυτού, ενώ ενεργοποιείται και πάλι το μητρικό τετράεδρο τους. Επισημαίνεται ότι σύμφωνα με τον κανόνα **(Κ1)** δεν επιτρέπεται απαλοιφή κόμβου, αλλά ούτε και η ύπαρξη αυτού ελεύθερα, χωρίς δηλαδή να συντρέχουν σε αυτόν μόνο γωνίες τριγώνων και τετραέδρων. Απλό παράδειγμα των ανωτέρω παρουσιάζεται στο επόμενο Σχήμα 4.12. Τα βήματα της διαδικασίας του εμπλουτισμού, που περιγράφηκαν στις δύο τελευταίες παραγράφους, αποτελούν μία επαναληπτική διαδικασία, κατά την οποία εξετάζονται σε κάθε επανάληψη όλα τα τετράεδρα του πλέγματος, ώστε να γίνει δυνατή η διάχυση της διάσπασης των ακμών σε όλα τα γειτονική τετράεδρα. Ανάλογα με τον αριθμό των στοιχείων του πλέγματος ο αριθμός των προαναφερθέντων επαναλήψεων δύναται να μεταβάλλεται. Συνήθη μεγέθη για τον αριθμό επαναλήψεων διάδοσης της «πληροφορίας» κυμαίνονται περίπου στις 15 επαναλήψεις για περίπου 400.000 στοιχεία του πλέγματος.



Σχήμα 4.12: Απενεργοποίηση τετραέδρων παιδιών, που έχουν προκύψει από το μητρικό τετράεδρο με διάσπαση του τελευταίου σε δύο νέα τετράεδρα, λόγω σημείωσης ακμής των πρώτων. Ενεργοποίηση του μητρικού τετραέδρου και σημείωση των ακμών αυτού.

- Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας του εμπλουτισμού πραγματοποιείται η διάσπαση των μητρικών ακμών σε δύο νέες ακμές. Για κάθε σημειωμένη ακμή, δημιουργούνται οι δύο ακμές-παιδιά της και ένας μεσοκόμβος. Οι συντεταγμένες και οι τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών του μεσοκόμβου υπολογίζονται από τον αριθμητικό μέσο όρο των τιμών στους δύο ακραίους κόμβους της ακμής. Εξαίρεση αποτελούν οι μεσοκόμβοι των οριακών ακμών, οι οποίοι υπόκεινται στον προαναφερθέντα κανόνα (Κ9) και για τους οποίους εφαρμόζεται η διαδικασία της προσαρμογής της γεωμετρίας (subdivision), η οποία και θα αναλυθεί στην επόμενη παράγραφο.

- Τέλος, το τελευταίο βήμα της εν λόγω διαδικασίας περιλαμβάνει τη δημιουργία των νέων τετραέδρων ανάλογα με τον αριθμό των ακμών του καθενός που έχουν έως τώρα διασπαστεί. Η διαδικασία εφαρμόζεται καταρχάς στα τετράεδρα, τα οποία σε προηγούμενη διαδικασία εμπλουτισμού είχαν διασπαστεί και επανενεργοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια των προηγούμενων βημάτων της υπό εξέλιξης διαδικασίας εμπλουτισμού. Αφού όλα τα τετράεδρα έχουν βρεθεί στο ίδιο «επίπεδο» εμπλουτισμού, τότε πραγματοποιείται και η διάσπαση όλων των σημειωμένων προς εμπλουτισμό τετραέδρων. Πρόκειται και πάλι για μία επαναληπτική διαδικασία, η οποία σταματάει με την διάσπαση όλων των σημειωμένων τετράεδρων και τη μη ύπαρξη πλέον τετραέδρων με διασπασμένες ακμές.

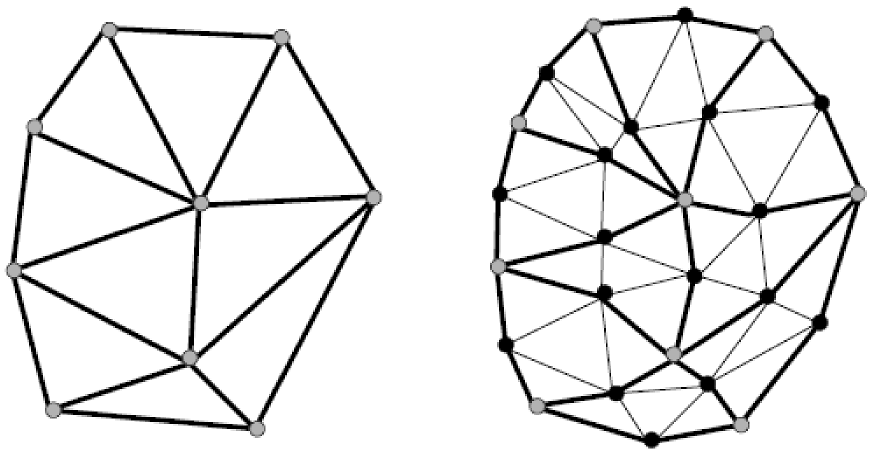
Με το τέλος της όλης διαδικασίας του εμπλουτισμού και τη δημιουργία του νέου πλέγματος, επαναλαμβάνονται οι αρχικοί υπολογισμοί, ώστε να βρεθούν τα νέα δεδομένα του πλέγματος π.χ. όγκοι ελέγχου, κέντρα βάρους τετραέδρων, κέντρα βάρους τριγώνων κτλ. Αφού υπολογιστούν τα νέα δεδομένα του πλέγματος, συνεχίζεται η επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό των τιμών του διανύσματος ροής.

4.6. Η Διαδικασία της Προσαρμογής της Γεωμετρίας (Subdivision).

4.6.1. Εισαγωγή.

Βασικό σκοπό της προσαρμογής της γεωμετρίας αποτελεί η αναπαράσταση μίας επιφάνειας όσο το δυνατόν πιο «ομαλά» (smooth) από τα στοιχεία του πλέγματος [Zor98]. Ο στόχος της εν λόγω διαδικασίας βρίσκεται πλησίον του στόχου της διαδικασίας της προσαρμογής του πλέγματος, η οποία περιγράφηκε παραπάνω. Έχοντας αρχικά ένα αραιό πλέγμα και μία όχι και τόσο «ομαλή» γεωμετρία, η εφαρμογή τόσο της διαδικασίας της προσαρμογής του πλέγματος όσο και της διαδικασίας της προσαρμογής της γεωμετρίας οδηγούν σε ένα πλέγμα επαρκώς πυκνωμένο στις περιοχές όπου εντοπίζονται ασυνέχειες και μία «ομαλότερη» γεωμετρία μέσα σε αυτό. Ως εκ τούτου η διαδικασία θέματος περιγράφεται στην παρούσα Διπλωματική Εργασία ως υπορουτίνα της διαδικασίας της προσαρμογής του υπό εξέταση πλέγματος.

Η διαδικασία της προσαρμογής της γεωμετρίας αποτελεί μία διαδικασία δανεισμένη από άλλο τομέα της επιστήμης, αυτόν της σχεδίασης με χρήση Η/Υ (CAD), και όχι από αυτόν της υπολογιστικής ρευστομηχανικής (CFD) [Yon98]. Χρησιμοποιείται κατά κόρον για την όσο το δυνατόν ακριβέστερη αναπαράσταση επιφανειών και όγκων, που περικλείονται από πλέγματα κόμβων. Ως εκ τούτου δεν αναφέρεται μόνο σε πλέγματα, τα οποία χρησιμοποιούνται για την επίλυση των εξισώσεων ροής. Στο παρακάτω Σχήμα 4.13 δίνεται ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής της εν λόγω διαδικασίας.



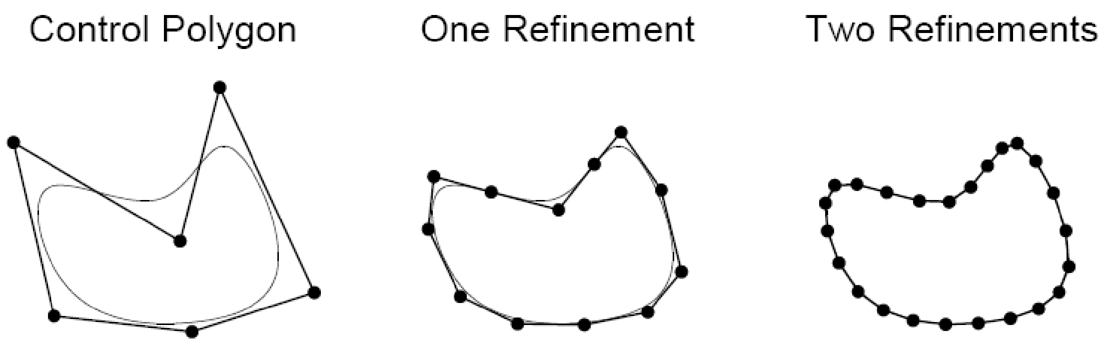
Σχήμα 4.13: Παράδειγμα της διαδικασίας προσαρμογής της γεωμετρίας [Ull06].

Όπως προαναφέρθηκε, η κύρια ιδέα της διαδικασίας προσαρμογής της γεωμετρίας είναι απόδοση ενός πλέγματος, το οποίο θα περιγράφει όσο το δυνατόν ακριβέστερα την υπό εξέταση γεωμετρία. Το πλέγμα που περιγράφει την επιφάνεια μίας γεωμετρίας αποτελείται από πολύ μικρά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία παρά το μέγεθος τους δεν αναπαριστούν τέλεια την καμπυλότητα της εν λόγω γεωμετρίας.

Ως εκ τούτου, εφαρμόζεται η διαδικασία, σύμφωνα με την οποία δημιουργούνται νέοι κόμβοι στο υπό εξέταση πλέγμα ως μεσοκόμβοι των υφιστάμενων ακμών. Αντίθετα, με όσα έχουν αναφερθεί κατά την προσαρμογή του πλέγματος, στην εν λόγω διαδικασία οι συντεταγμένες και τα μεγέθη των νέων κόμβων (μεσοκόμβων ακμών) δεν υπολογίζονται ως αριθμητικοί μέσοι όροι των τιμών των ακραίων κόμβων των ακμών. Όπως αναφέρεται παρακάτω, για την εξαγωγή των τιμών ενός μεσοκόμβου μίας ακμής, λαμβάνονται υπόψη οι τιμές περισσοτέρων κόμβων κι όχι μόνο των ακραίων κόμβων της εν λόγω ακμής. Ως εκ τούτου ο μεσοκόμβος του δε θα βρίσκεται ακριβώς επάνω στο αρχικό ευθύγραμμο τμήμα (ακμή). Κατά συνέπεια δίνεται μία περαιτέρω καμπυλότητα στην γεωμετρία, η οποία δεν είχε αποδοθεί αρχικά εξοικονομώντας με αυτόν τον τρόπο υπολογιστικό κόστος.

Επιπρόσθετα, η εφαρμογή της διαδικασίας της προσαρμογής της γεωμετρίας δεν περιορίζεται στη δημιουργία μόνο νέων κόμβων (μεσοκόμβων), αλλά επεκτείνεται και στη μετακίνηση των υφιστάμενων κόμβων από τις αρχικές τους θέσεις. Οι θέσεις των κόμβων του ενεργού πλέγματος μεταβάλλονται, ώστε να επιτευχθεί ακόμη καλύτερη απεικόνιση της υπό εξέταση γεωμετρίας. Με αυτόν τον τρόπο απαιτείται η διαφοροποίηση ολόκληρου του υπό εξέταση πλέγματος και όχι μονάχα του τμήματος του, που έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια της υπό εξέταση γεωμετρίας.

Η διαδικασία της προσαρμογής της γεωμετρίας αποτελεί μία επαναληπτική διαδικασία. Σε κάθε επανάληψη πραγματοποιείται και μία ακριβέστερη προσέγγιση της υπό εξέταση γεωμετρίας, όπως δείχνει και το παρακάτω Σχήμα 4.14. Σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας υλοποιείται η κατάτμηση των ενεργών ακμών, η δημιουργία των μεσοκόμβων τους καθώς και η μετακίνηση των πρωτύτερα υφιστάμενων κόμβων [Per06].



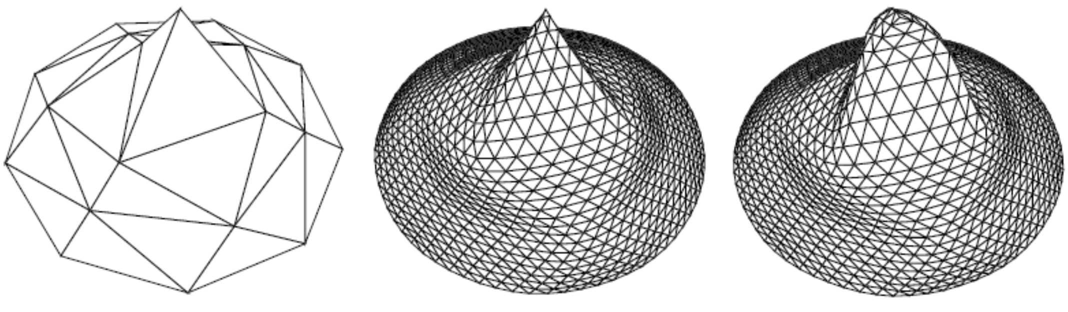
Σχήμα 4.14: Πρόοδος αναπαράστασης μίας γεωμετρίας με την πρόοδο των επαναλήψεων της διαδικασίας της προσαρμογής της γεωμετρίας [Per06].

4.6.2. Εφαρμογή της Διαδικασίας της Προσαρμογής της Γεωμετρίας.

Στην προηγούμενη παράγραφο πραγματοποιήθηκε μία αναφορά στη γενική μέθοδο της προσαρμογής της γεωμετρίας. Ωστόσο στην παρούσα Διπλωματική Εργασία η εν λόγω μέθοδος υλοποιήθηκε μερικώς, καθώς δεν πραγματοποιήθηκε μετακίνηση των υφιστάμενων κόμβων από τις αρχικές τους θέσεις. Ως εκ τούτου η εφαρμογή της διαδικασίας θέματος περιορίστηκε μόνο στην εύρεση των συντεταγμένων και των τιμών των μεγεθών των μεσοκόμβων των οριακών ακμών.

Στη συνέχεια πραγματοποιείται περιγραφή της χρήσης της συγκεκριμένης μεθόδου στην παρούσα εργασία.

Η διαδικασία της προσαρμογής της γεωμετρίας εφαρμόστηκε κατά την διαμέριση των ακμών επί της γεωμετρίας λόγω της διαδικασίας του εμπλουτισμού. Κάθε ακμή που πληρούσε τις προϋποθέσεις εμπλουτισμού μοιραζόταν σε δύο νέες ακμές-παιδιά με την ταυτόχρονη δημιουργία ενός νέου κόμβου, του μεσοκόμβου της. Εφόσον επρόκειτο για μη οριακή ακμή οι συντεταγμένες καθώς και οι τιμές των φυσικών μεγεθών του νέου κόμβου υπολογίζονταν ως οι αριθμητικοί μέσοι των αντίστοιχων τιμών των ακραίων κόμβων της συγκεκριμένης ακμής. Αντίθετα στην περίπτωση που επρόκειτο για οριακές ακμές της υπό εξέταση γεωμετρίας πραγματοποιούνταν περαιτέρω διερεύνηση. Εάν τα γινόμενα των αντίστοιχων συνιστωσών των διανυσμάτων των εκατέρωθεν της ακμής επιφανειακών τριγώνων ήταν θετικά σήμαινε ότι τα διανύσματα ήταν σχεδόν ομόρροπα και ότι ήταν επιθυμητή η «ομαλοποίηση» της επιφάνειας τοπικά. Αντίθετα, εάν ήταν αρνητικά σήμαινε ότι τα διανύσματα ήταν σχεδόν αντίρροπα και ότι δε θα έπρεπε να εφαρμοστεί η διαδικασία της προσαρμογής της γεωμετρίας. Τέτοιες περιπτώσεις αποτελούν τα χείλη προσβολής (Leading Edges) και χείλη εκφυγής (Trailing Edges) των πτερύγων, στα οποία δε θα πρέπει να εφαρμόζεται μία τέτοιου είδους μέθοδος, καθώς δεν είναι επιθυμητή η «ομαλοποίηση» τους. Στην περίπτωση που δεν εφαρμοστεί ο προαναφερθείς περιορισμός και εφαρμοστεί η διαδικασία θέματος υπάρχει πιθανότητα να παρουσιαστούν φαινόμενα όπως του επόμενου Σχήματος 4.15 [Zor98].



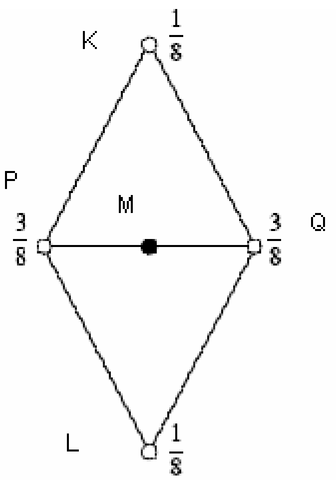
(α) (β)

Σχήμα 4.15: Προσαρμογή της γεωμετρίας με (α) χρήση του περιορισμού των εκατέρωθεν επιφανειών και χωρίς (β) [Zor98].

Κατόπιν, και εφόσον τελικά τα διανύσματα των εκατέρωθεν επιφανειών ήταν σχεδόν ομόρροπα, οι συντεταγμένες και οι τιμές των φυσικών μεγεθών του νέου μεσοκόμβου της ακμής PQ υπολογίζονταν από την ακόλουθη σχέση:

$$x_M = \frac{\left(x_K + x_L + 3x_P + 3x_Q\right)}{8} \qquad (4.5)$$

Όπου M ο μεσοκόμβος της ακμής PQ, P και Q οι ακραίοι κόμβοι της ακμής, και K και L οι τρίτοι κόμβοι των εκατέρωθεν τριγωνικών επιφανειών που περικλείουν την ακμή PQ. Η σχηματική αναπαράσταση της ανωτέρω σχέσης (4.5) δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 4.16 [Zor98] [Per06] [Ull06].



Σχήμα 4.16: Εύρεση των συντεταγμένων του μεσοκόμβου οριακής ακμής της υπό εξέταση γεωμετρίας [Zor98] [Per06] [Ull06].

Εν κατακλείδι, η διαδικασία προσαρμογής της γεωμετρίας δύναται να μεταβάλει σημαντικά τα αποτελέσματα του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής. Η μη ομαλότητα στην επιφάνεια της γεωμετρίας μεταφέρεται μέσω των εξισώσεων σε όλο το υπό εξέταση πλέγμα, διαφοροποιώντας ακόμη και τα τελικά αποτελέσματα. Αν και στην παρούσα Διπλωματική Εργασία η εν λόγω μέθοδος εφαρμόστηκε μερικώς, οδήγησε στην αύξηση της ποιότητας των αποτελεσμάτων, όπως ακριβώς οδήγησε και η προσαρμογή του πλέγματος με τη μέθοδο του εμπλουτισμού.

“Intentionally Blank”

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Ανάλυση του Αλγορίθμου.

5.1. Εισαγωγή.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το λογισμικό, το οποίο αναπτύχθηκε για την επίλυση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Αναλύεται η εφαρμογή όλων των προαναφερθέντων μεθόδων, ενώ δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις δομές δεδομένων και στις υπορουτίνες-συναρτήσεις που χρησιμοποιεί ο εν λόγω αλγόριθμος.

Η ανάπτυξη του λογισμικού έγινε με βάση το παλαιότερο λογισμικό EU3, το οποίο αναπτύχθηκε από τους Ι. Κ. Νικολό και Λ. Δ. Αδαμούδη σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90 και το οποίο επιλύει τις εξισώσεις Euler σε 3 διαστάσεις με χρήση μη δομημένου πλέγματος τετραεδρικών στοιχείων, αλλά με ακρίβεια πρώτης τάξης, ρητό σχήμα επίλυσης και μη προσαρμογή του πλέγματος. Ωστόσο, το παλαιότερο αυτό λογισμικό μεταβλήθηκε πλήρως, για τη δημιουργία του λογισμικού EU3_Ref, που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.

Καταρχήν, το εν λόγω πρόγραμμα κατασκευάστηκε με τρόπο τέτοιο ώστε να δίνει στον εκάστοτε χρήστη του διάφορες επιλογές π.χ. ως προς την τάξη του σχήματος και την συνάρτηση περιορισμού, το ρητό ή πεπλεγμένο σχήμα επίλυσης, την προσαρμογή του πλέγματος, την προσαρμογή της γεωμετρίας κ.α. Επιπλέον, βασίστηκε στη λογική της διατήρησης ενός ελαχίστου αριθμού των δυναμικών δομών δεδομένων στο απλούστερο δυνατό επίπεδο, χωρίς ωστόσο να μειωθεί η αποδοτικότητα του αλγορίθμου. Η ανάπτυξη και χρήση σχετικά απλών δυναμικών δομών δεδομένων επιτρέπει την ανάπτυξη σχετικά απλών συναρτήσεων, αντισταθμίζοντας εν μέρει με αυτόν τον τρόπο τη δεδομένη δυσκολία που ενέχει η επίλυση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων, αλλά και την απαιτητική διαχείριση του πολύ μεγάλου, και συνεχώς αυξανόμενου λόγω εμπλουτισμού, όγκου δεδομένων, που προκύπτει κατά την τριδιάστατη αναπαράσταση της γεωμετρίας που εξετάζεται.

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε λαμβάνει ως πληροφορίες εισόδου τα βασικά χαρακτηριστικά της ροής που επιλύεται, όπως ο αριθμός Mach της ροής και οι δυο γωνίες που περιγράφουν τη διεύθυνση της επ' άπειρον ροής (οι οριακές συνθήκες που έχουν αναπτυχθεί προς το παρόν αναφέρονται σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής). Παράλληλα, δέχεται και ορισμένα στοιχεία που αξιοποιούνται κατά την αριθμητική επίλυση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων, όπως ο αριθμός CFL, που ορίζεται από το χρήστη. Τέλος, ο αλγόριθμος δέχεται ως πληροφορίες εισόδου ορισμένα στοιχεία, τα οποία ορίζονται και πάλι από το χρήστη και τα οποία καθορίζουν τις διάφορες μεθόδους που θα χρησιμοποιήσει τελικά το λογισμικό, π.χ. το ρητό ή σημειακά πεπλεγμένο σχήμα επίλυσης, τον αριθμό προσαρμογών του πλέγματος, την προσαρμογή ή μη της γεωμετρίας κ.λπ.

Εκτός από το αρχείο, που περιλαμβάνει όλες τις παραπάνω πληροφορίες, ο αλγόριθμος δέχεται ως δεδομένο ένα ακόμα αρχείο, που περιγράφει το πλέγμα, το οποίο διακριτοποιεί το πεδίο της ροής γύρω από την υπό εξέταση γεωμετρία. Το αρχείο αυτό προσφέρει τις ελάχιστες δυνατές αλλά απαραίτητες πληροφορίες σχετικά με το τρισδιάστατο πλέγμα και στη συνέχεια ο αλγόριθμος αναλαμβάνει την επεξεργασία του και την ανάπτυξη όλων των δομών δεδομένων, οι οποίες απαιτούνται για την επίλυση της ροής.

5.2. Σύντομη Παρουσίαση των Τμημάτων του Αλγόριθμου.

Στην ενότητα αυτή πραγματοποιείται μία συνοπτική παρουσίαση των «βημάτων» του αλγόριθμου επίλυσης. Βάσει της δομής αυτής ακολουθεί στη συνέχεια η ανάλυση κάθε βήματος και η παρουσίαση κάθε υπορουτίνας του αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος, που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, δύναται να διακριθεί σε πέντε τμήματα (Σχήμα 5.1), τα οποία είναι τα εξής:

Α. Αρχικό Τμήμα. Το τμήμα αυτό του αλγόριθμου υλοποιείται μία και μοναδική φορά (Σχήμα 5.4) κατά την έναρξη της εφαρμογής του προγράμματος και αφορά στα κάτωθι:

- Εισαγωγή δεδομένων του πλέγματος (τοπολογία και συντεταγμένες) και δεδομένων της ροής (αριθμός Mach και γωνίες προσβολής και πλαγιολίσθησης).
- Δημιουργία της τοπολογικής δομής, που απαιτεί ο επιλύτης και των κατάλληλων δομών δεδομένων.
- Αρχικοποίηση των δομών δεδομένων, που απαιτούνται για την προσαρμογή του πλέγματος κατά τη διάρκεια επίλυσης της ροής.
- Αρχικοποίηση των μεταβλητών της ροής και των χαρακτηριστικών της για όλους τους κόμβους του πλέγματος, βάσει των πληροφοριών εισόδου.

Β. Τμήμα Βοηθητικών Υπολογισμών. Οι εν λόγω υπολογισμοί (Σχήμα 5.8) πραγματοποιούνται μετά την υλοποίηση των υπολογισμών του αρχικού τμήματος, καθώς και μετά από κάθε προσαρμογή του πλέγματος, και αφορούν στα κάτωθι:

- Αριθμητικός υπολογισμός των γεωμετρικών στοιχείων των όγκων αναφοράς. Πιο συγκεκριμένα, υπολογισμός του όγκου των τετραέδρων, υπολογισμός των συντεταγμένων των κέντρων των τετραέδρων και των τριγώνων.
- Αριθμητικός υπολογισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών των ακμών. Πιο συγκεκριμένα, υπολογισμός ελάχιστου μήκους ακμής που ανήκει σε κάθε κόμβο, υπολογισμός του διανύσματος κατεύθυνσης της ροής κάθε ακμής.
- Αριθμητικός υπολογισμός γεωμετρικών στοιχείων των ορίων του χωρίου. Πιο συγκεκριμένα υπολογισμός των κάθετων διανυσμάτων των οριακών τριγώνων.

Γ. Τμήμα Κύριων Υπολογισμών. Οι κύριοι υπολογισμοί επιλύουν το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων της ροής (Σχήμα 5.9). Υλοποιούνται επαναληπτικά και αφορούν στα κάτωθι:

- Αριθμητικός υπολογισμός του τοπικού ψευδοχρονικού βήματος ή του ολικού ψευδοχρονικού βήματος για κάθε κόμβο του πλέγματος.
- Εφαρμογή της ρητής ή της σημειακά πεπλεγμένης μεθόδου επίλυσης.
    1. Εφαρμογή της ρητής μεθόδου επίλυσης Runge Kutta τεσσάρων βημάτων. Η εν λόγω μέθοδος αποτελεί μία επαναληπτική μέθοδο τεσσάρων επαναλήψεων, όπου σε κάθε επανάληψη υλοποιούνται τα κάτωθι:
        - ✓ Αριθμητικός υπολογισμός των πρωτευουσών μεταβλητών από τις συντηρητικές μεταβλητές που εξάχθηκαν από την προηγούμενη επανάληψη.
        - ✓ Αριθμητικός υπολογισμός των όρων πηγής.
        - ✓ Αριθμητικός υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών/συντελεστών ανάλογα την ακρίβεια τάξης και την τυχόν συνάρτηση περιορισμού που έχει επιλεγεί (κλίσεις μεγεθών στους κόμβους του πλέγματος).
        - ✓ Αριθμητικός υπολογισμός του διανύσματος ροής για όλες τις ακμές του πλέγματος. Επίλυση του τοπικού προβλήματος Riemann με χρήση του σχήματος του Roe. Το διάνυσμα αυτό μοιράζεται στους ακραίους κόμβους κάθε ακμής και προστίθεται στις ήδη υπολογισμένες συνεισφορές από άλλες ακμές, ώστε τελικά να

προκύψει το διάνυσμα ροής, που αντιστοιχεί σε κάθε όγκο ελέγχου.

- ✓ Αριθμητικός υπολογισμός του διανύσματος ροής για όλα τα οριακά τρίγωνα των περιοχών εισόδου και εξόδου της ροής, με αντίστοιχη επίλυση του τοπικού προβλήματος Riemann. Πρόσθεση της συνεισφοράς αυτού του διανύσματος στα διανύσματα ροής των κόμβων κάθε οριακού τριγώνου.
- ✓ Εφαρμογή της συνθήκης μη-εισχώρησης της ροής για όλα τα οριακά τρίγωνα, που ανήκουν σε στερεό τοίχωμα. Πρόσθεση της αντίστοιχης συνεισφοράς στα διανύσματα ροής των κόμβων κάθε οριακού τριγώνου.
- ✓ Ανανέωση των συντηρητικών μεταβλητών επίλυσης μέσω του ισολογισμού των ροών που εισέρχονται και εξέρχονται από την κυψέλη ελέγχου.

2. Εφαρμογή της σημειακά πεπλεγμένης μεθόδου επίλυσης με χρήση του επιλύτη Gauss-Seidel. Η εν λόγω μέθοδος επίλυσης αποτελείται από τα ίδια βήματα με την προηγούμενη μέθοδο, με την διαφορά ότι κατά τους υπολογισμούς των συνεισφορών των διανυσμάτων ροής υπολογίζονται ταυτόχρονα και οι διαγώνιοι και μη-διαγώνιοι όροι της σχέσης (3.75). Επιπρόσθετα, και αυτή η μέθοδος αποτελεί επαναληπτική μέθοδο. Αντίθετα όμως από το ρητό σχήμα επίλυσης, οι εσωτερικές επαναλήψεις του σημειακά πεπλεγμένου σχήματος περιλαμβάνουν μόνο το τελευταίο βήμα του ισολογισμού των ροών και της ανανέωσης των συντηρητικών μεταβλητών.

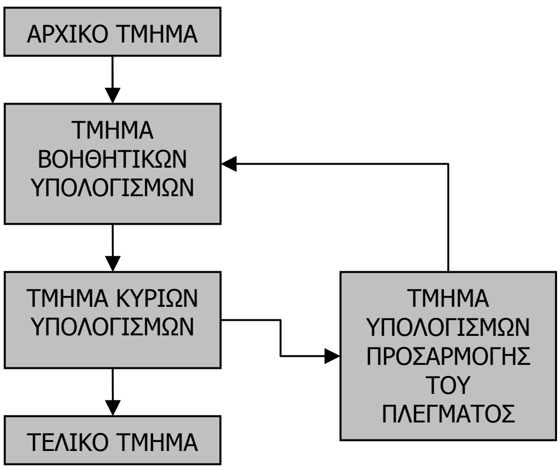
Δ. Τμήμα Υπολογισμών Προσαρμογής του Πλέγματος. Οι υπολογισμοί αυτοί υλοποιούνται μετά από την ολοκλήρωση των κύριων υπολογισμών μίας συγκεκριμένης επανάληψης (Σχήμα 5.10). Η επανάληψη αυτή ορίζεται από τον χρήστη πριν την έναρξη εφαρμογής του εν λόγω λογισμικού. Οι υπολογισμοί αυτοί αφορούν στα κάτωθι:

- Δυναμική ανακατανομή της μνήμης και κατά συνέπεια της χωρητικότητας των υφιστάμενων δομών δεδομένων, ώστε να αποθηκευθούν τα νέα στοιχεία, που θα προκύψουν από την προσαρμογή του πλέγματος.
- Εύρεση και σημείωση των υποψήφιων ακμών προς διχοτόμηση.
- Διάχυση της «πληροφορίας» στο πλέγμα και εύρεση των υποψήφιων τετραέδρων προς εμπλουτισμό.

- Απενεργοποίηση τυχόν παιδιών-τετραέδρων και ενεργοποίηση-σημείωση για εμπλουτισμό των μητρικών τετραέδρων τους.
- Διχοτόμηση των ακμών και δημιουργία νέων κόμβων, συμπεριλαμβανομένου της διαδικασίας της προσαρμογής της γεωμετρίας.
- Διαμέριση των κατάλληλων τετραέδρων σε δύο, τέσσερα ή οκτώ νέα τετράεδρα.
- Έλεγχος όλων των ενεργών τετραέδρων του πλέγματος για την περάτωση της διαδικασίας της προσαρμογής του πλέγματος. Εφόσον υφίσταται σε ενεργό τετράεδρο διχοτομημένη ακμή η διαδικασία της προσαρμογής επαναλαμβάνεται.
- Δυναμική ανακατανομή της μνήμης και κατά συνέπεια της χωρητικότητας των υφιστάμενων δομών δεδομένων**.**
- Εκτέλεση των βοηθητικών υπολογισμών πριν τη συνέχιση των κύριων υπολογισμών του αλγορίθμου.

Ε. Τελικό Τμήμα. Το εν λόγω «βήμα» εκτελείται μετά την ολοκλήρωση των κύριων υπολογισμών κάθε επανάληψης ή μετά την ολοκλήρωση της τυχόν προσαρμογής του πλέγματος και αφορά στα κάτωθι:

- Έλεγχος ικανοποίησης των συνθηκών τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας.
- Περιοδική εξαγωγή των αποτελεσμάτων, με τη δημιουργία κατάλληλου αρχείου εξόδου.



Σχήμα 5.1: Συνοπτικό διάγραμμα ροής του αλγορίθμου.

5.3. Αναλυτική Παρουσίαση του Αλγορίθμου.

5.3.1. Αρχικό Τμήμα.

5.3.1.1. Εισαγωγή Δεδομένων.

Για την εκκίνηση της εφαρμογής του λογισμικού, που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, απαιτούνται ορισμένα στοιχεία, τα οποία περιέχονται σε δύο αρχεία μορφής *.DAT.

Από το πρώτο αρχείο με όνομα INP.DAT λαμβάνονται σημαντικές πληροφορίες, όπως δεδομένα που αφορούν την ροή του ρευστού και παράμετροι που καθορίζουν τον τρόπο επίλυσης του αλγορίθμου. Συγκεκριμένα, ο χρήστης με αυτό το αρχείο δύναται να καθορίσει τα ακόλουθα:

- **Το όνομα αρχείου εισόδου.** Το αρχείο αυτό αποτελεί το δεύτερο από τα προαναφερθέντα αρχεία εισόδου μορφής *.DAT και περιέχει τα δεδομένα του υπό εξέταση πλέγματος.
- **Την τάξη ακρίβειας του σχήματος επίλυσης.** Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το λογισμικό δύναται να επιλύσει ένα πρόβλημα είτε με πρώτης τάξης ακρίβεια (1) είτε με δεύτερης τάξης ακρίβεια και συνάρτηση περιορισμού των van Leer-van Albada (2) είτε με δεύτερης τάξης ακρίβεια και συνάρτηση περιορισμού των Barth-Jespersen (3).
- **Το είδος των μεταβλητών της συνάρτησης περιορισμού.** Στις προαναφερθείσες συναρτήσεις περιορισμού δύνανται να χρησιμοποιηθούν είτε οι πρωτεύουσες μεταβλητές (1) είτε οι συντηρητικές μεταβλητές (2).
- **Το όνομα αρχείου εξόδου.** Το αρχείο αυτό είναι μορφής *.PLT και χρησιμοποιείται από το σχεδιαστικό λογισμικό πακέτο TECPLOT για την εμφάνιση των τελικών αποτελεσμάτων. Το εν λόγω αρχείο δημιουργείται περιοδικά κάθε 25 επαναλήψεις του τμήματος των κύριων υπολογισμών, ενώ επιπρόσθετα δημιουργείται εφόσον ικανοποιηθούν οι συνθήκες τερματισμού που έχει θέσει ο χρήστης.
- **Τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων.** Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων κρίνεται σκόπιμο να επιλέγεται με προσοχή, ώστε να είναι δυνατή η εξαγωγή αποτελεσμάτων υψηλής ποιότητας. Επισημαίνεται ότι εάν επιλεγεί ρητή μέθοδος επίλυσης απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός επαναλήψεων σε σχέση με την σημειακά πεπλεγμένη μέθοδο επίλυσης.

- **Το μέγιστο αποδεκτό υπόλοιπο μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων.** Εάν δύο διαδοχικές επαναλήψεις παρουσιάσουν μέση μεταβολή των παραμέτρων επίλυσης μικρότερη από την εν λόγω παράμετρο, ο αλγόριθμος θα οδηγηθεί σε άμεσο τερματισμό της επαναληπτικής διαδικασίας.
- **Τον αριθμό Mach της επ' άπειρον ροής.**
- **Τις γωνίες ροής.** Οι γωνίες αυτές είναι η γωνία προσβολής και η γωνία πλαγιολίσθησης.
- **Την τιμή του εκθέτη ισεντροπικής μεταβολής του ρευστού γ.** Η τιμή του εν λόγω συντελεστή μεταβάλλεται ανάλογα το είδος του ρευστού που πραγματεύεται το υπό μελέτη πρόβλημα.
- **Το ψευδοχρονικό βήμα.** Ανάλογα με το είδος του προβλήματος ο χρήστης δύναται να επιλέξει τοπικό (1) ή ολικό (2) ψευδοχρονικό βήμα.
- **Την μέθοδο επίλυσης.** Ανάλογα με το είδος του προβλήματος ο χρήστης δύναται να επιλέξει ρητή (1) ή σημειακά πεπλεγμένη (2) μέθοδο επίλυσης.
- **Την τιμή του αριθμού CFL.** Στην περίπτωση που έχει επιλεγεί σημειακά πεπλεγμένη μέθοδος επίλυσης, εκτός της αρχικής τιμής του αριθμού CFL, εισάγεται και ο μέγιστος αριθμός εσωτερικών επαναλήψεων, καθώς και η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή CFL που θα διαμορφωθεί τελικά.
- **Τη διαδικασία προσαρμογής ή μη της γεωμετρίας.** Ο χρήστης δύναται να καθορίσει την προσαρμογή (1) ή μη (2) της γεωμετρίας κατά τη διάρκεια της προσαρμογής του πλέγματος.
- **Το είδος των επιφανειών του πλέγματος.** Λόγω του ότι το δεύτερο αρχείο εισόδου μορφής *.DAT περιέχει κάποια είδη επιφανειών, τα οποία δύνανται να έχουν ονομαστεί με οποιονδήποτε τρόπο από το πρόγραμμα κατασκευής τους CFX, απαιτείται η αντιστοίχηση των ονομάτων που έχουν δοθεί με κατάλληλους ακεραίους, που θα αναγνωρίσει στη συνέχεια το παρόν λογισμικό για να επιβάλει τα αντίστοιχες οριακές συνθήκες.
- **Το κριτήριο προσαρμογής.** Όπως προαναφέρθηκε μπορούν να υπάρξουν διάφορα κριτήρια προσαρμογής, ανάλογα με την περιοχή που επιθυμεί να εμπλουτίσει και να μελετήσει ο εκάστοτε χρήστης. Στο παρόν λογισμικό έχουν κατασκευαστεί πέντε κριτήρια προσαρμογής, τα οποία επικεντρώνονται κυρίως στη σύλληψη του κρουστικού κύματος.

- **Τον αριθμό των προσαρμογών του πλέγματος.** Ο χρήστης δύναται να καθορίσει τον αριθμό των προσαρμογών του πλέγματος, καθώς και τις επαναλήψεις μετά τις οποίες θα εκτελεστούν αυτές οι προσαρμογές.

Κατόπιν ο αλγόριθμος προσπελάζει και το δεύτερο αρχείο εισόδου, μορφής *.DAT, το οποίο περιέχει τα δεδομένα του τρισδιάστατου πλέγματος, που διακριτοποιεί το χωρίο ροής γύρω από την υπό εξέταση γεωμετρία. Το λογισμικό δέχεται αρχεία πλέγματος που έχουν εξαχθεί από το πρόγραμμα ANSYS ICEM CFD for CFX σε μορφή ASCII. Αυτό το αρχείο περιέχει τον αριθμό των κόμβων και των τετραέδρων, που απαρτίζουν το εν λόγω πλέγμα, καθώς και την τοπολογική δομή αυτών. Συγκεκριμένα, καθορίζει τους τέσσερις κόμβους, που σχηματίζουν κάθε τετράεδρο, καθώς οι κόμβοι είναι αριθμημένοι. Η σειρά, με την οποία καθορίζονται οι τέσσερις κορυφές κάθε τετραέδρου, δεν είναι τυχαία, αλλά έχει μεγάλη σημασία για την περαιτέρω διαχείριση του πλέγματος. Επιπλέον, δίνει τις φυσικές συντεταγμένες κάθε κόμβου του πλέγματος, ενώ τέλος παρέχει κατάλληλες πληροφορίες για τα όρια του χωρίου. Το αρχείο παρέχει μία λίστα με τις οριακές έδρες, δηλαδή με τις έδρες των τετραέδρων που βρίσκονται πάνω σε οριακές επιφάνειες. Για κάθε οριακή επιφάνεια, όπως προαναφέρθηκε, δίνεται μία ονομασία, η οποία αναγνωρίζεται κατόπιν ως ένας δείκτης (index) λόγω της αντιστοίχησης που έγινε από το προηγούμενο αρχείο εισόδου. Με αυτόν τον τρόπο δίνεται άμεσα η πληροφορία για το που εντοπίζεται κάθε έδρα, αν δηλαδή ανήκει στην επιφάνεια της γεωμετρίας, σε πλαϊνά στερεά τοιχώματα, στις οριακές επιφάνειες εισόδου και εξόδου της ροής ή αν απλά αποτελεί εσωτερική έδρα του πεδίου ροής. Οι παραπάνω δομές δεδομένων είναι οι ελάχιστες δυνατές, που μπορούν να περιγράψουν ένα τριδιάστατο μη-δομημένο πλέγμα γύρω από μια γεωμετρία. Εντούτοις, οι δομές αυτές δεν επαρκούν για την επίλυση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ως εκ τούτου, όλες οι υπόλοιπες απαραίτητες δομές δεδομένων συγκροτούνται από τον αλγόριθμο, στους υπολογισμούς που περιγράφονται στην συνέχεια.

5.3.1.2. Καθορισμός Τριγώνων.

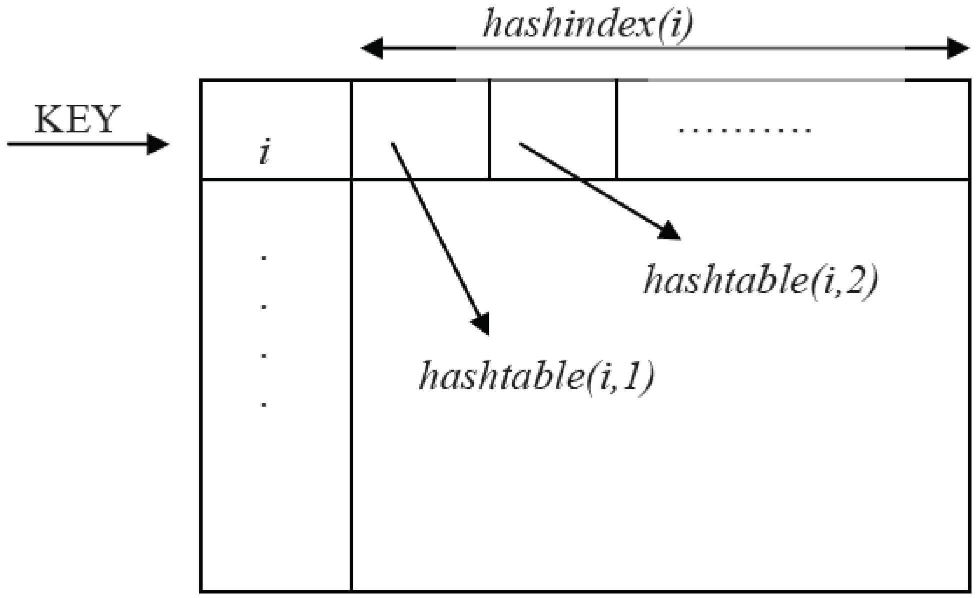
Στη συνέχεια θα πρέπει να καθοριστούν τα τρίγωνα-έδρες, που απαρτίζουν τα τετράεδρα του πλέγματος. Η μοναδική δομή δεδομένων του πλέγματος, που είναι διαθέσιμη μέχρι τώρα για τον αλγόριθμο, είναι η λίστα με τις τέσσερις κορυφές κάθε τετραέδρου. Ως εκ τούτου, θα πρέπει να εξεταστούν τα τέσσερα τρίγωνα, που απαρτίζουν κάθε τετράεδρο του πλέγματος και είτε να αναγνωριστούν ως νέα τρίγωνα, δίνοντας τους μια αρίθμηση, είτε να αγνοηθούν, σε περίπτωση που ταυτοποιηθούν με άλλα που έχουν ήδη προσπελασθεί. Παράλληλα, θα πρέπει σε κάθε νέο τρίγωνο να οριστούν οι τρεις κόμβοι που αποτελούν τις κορυφές του. Σε κάθε περίπτωση, η αρίθμηση των εδρών των τετραέδρων και των κορυφών των τριγώνων δεν είναι τυχαία. Σύμφωνα με την αρίθμηση των κορυφών κάθε τετραέδρου, που έχει ληφθεί από το προαναφερθέν αρχείο εισόδου, απέναντι από την i κορυφή του τετραέδρου ορίζεται η i έδρα του.

Η σάρωση όλων των τετραέδρων και η εξαντλητική σύγκριση κάθε έδρας του με τις ήδη αναγνωρισμένες έδρες κρίνεται απαγορευτική, καθώς ο όγκος δεδομένων που προκύπτει έχει υπερβολικά μεγάλο μέγεθος και κατά συνέπεια οδηγεί σε ιδιαίτερα αυξημένες υπολογιστικές απαιτήσεις. Ως εκ τούτου, η εν λόγω λειτουργία βασίστηκε σε μια διαφορετική αλλά εξίσου απλή δομή δεδομένων, που καλείται «πίνακας επαναδιατύπωσης» (*hash table*) [For99] [Αδα05]. Η χρήση της παραπάνω δομής δεδομένων θεωρείται από τη βιβλιογραφία ιδανική για τη συγκεκριμένη λειτουργία και για τρισδιάστατο μη δομημένο πλέγμα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο του «πίνακα επαναδιατύπωσης», σαρώνονται όλα τα τετράεδρα και εξετάζονται διαδοχικά οι τέσσερις έδρες κάθε τετραέδρου. Για κάθε έδρα, προσδιορίζεται ένα κύριο κλειδί (*KEY*) και μια διατεταγμένη σειρά από τρία κλειδιά (*k1, k2, k3*). Για παράδειγμα, έστω ότι μια έδρα έχει τρεις κορυφές τις *nc1, nc2* και *nc*3. Τα τρία κλειδιά *k1, k2* και *k3* της έδρας αλλά και το κύριο κλειδί *KEY* καθορίζονται σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} KEY &= \min(nc1, nc2, nc3) \\ k1 &= KEY \\ k3 &= \max(nc1, nc2, nc3) \\ k2 &= \{nc1, nc2, nc3\} - \{k1, k3\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Από τον ορισμό του κυρίως κλειδιού γίνεται αντιληπτό ότι σε ένα πλέγμα από *n* κόμβους είναι δυνατό να βρεθούν έως και *n* διαφορετικά κύρια κλειδιά. Στην πράξη βέβαια δεν συμβαίνει αυτό, καθώς αναμένεται να βρεθούν έδρες με το ίδιο κύριο κλειδί. Ωστόσο η διατεταγμένη τριάδα των κλειδιών *k1, k2* και *k3* είναι μοναδική για κάθε έδρα. Το κύριο κλειδί (*KEY*) χρησιμοποιείται για την συγκρότηση ενός πίνακα (*hash table*), ο οποίος αποθηκεύει για κάθε κύριο κλειδί τις έδρες που έχουν εντοπιστεί να χαρακτηρίζονται από αυτό. Εφόσον μπορούν να βρεθούν έως και *n* διαφορετικά κλειδιά, ο πίνακας θα έχει *n* γραμμές, καθεμία εκ των οποίων θα αναφέρεται και σε ένα πιθανό κύριο κλειδί. Σε όλες τις γραμμές δεν παρουσιάζεται ο ίδιος αριθμός στηλών, αλλά τόσες όσες και οι έδρες που χαρακτηρίζονται από το αντίστοιχο κλειδί. Το πλήθος των εδρών που έχουν το ίδιο κύριο κλειδί *i* δίνεται από μια μεταβλητή, την *hashindex(i)*. Στο παρακάτω Σχήμα 5.2 συνοψίζονται σχηματικά τα προαναφερθέντα.



Σχήμα 5.2: Σχηματική αναπαράσταση του πίνακα επαναδιατύπωσης [Αδα05].

Η συγκρότηση του παραπάνω πίνακα γίνεται δυναμικά, καθώς σαρώνονται τα τετράεδρα και για κάθε ένα από αυτά και για κάθε μία έδρα του *j* με *j=1,..,4*, υπολογίζονται τα *KEY, k1, k2* και *k3*. Στη συνέχεια ελέγχεται αν έχουν εντοπιστεί ήδη άλλες έδρες με το συγκεκριμένο κύριο κλειδί, έστω το κλειδί *i*. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε η υπό εξέταση έδρα αποτελεί μια νέα έδρα, οπότε αυτή παίρνει αρίθμηση, ενημερώνεται ο πίνακας στην αντίστοιχη γραμμή, αποθηκεύονται σε λίστες οι τρεις κορυφές της και η διατεταγμένη τριάδα *k1, k2* και *k3*, ενημερώνεται ότι η *j*-οστή έδρα του τετραέδρου είναι η συγκεκριμένη και αυξάνεται κατά ένα το πλήθος των εδρών που έχουν αναγνωριστεί. Στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή έχουν ήδη εντοπιστεί και άλλες έδρες με το ίδιο κλειδί *i* (περίπτωση *hashindex(i)>0*), τότε η υπό εξέταση έδρα συγκρίνεται με τις έδρες που αναφέρονται στην αντίστοιχη γραμμή του πίνακα. Το πλήθος των συγκρίσεων που θα γίνουν καθορίζεται από την μεταβλητή *hashindex(i)*. Κατά την σύγκριση ελέγχεται η διατεταγμένη τριάδα των κλειδιών *k1, k2* και *k3*. Αν αυτή είναι ίδια για δύο έδρες, τότε έχουμε ταυτοποίηση και απλά προσπελάζεται μια έδρα, η οποία έχει ήδη αναγνωριστεί και αριθμηθεί, οπότε απλά ενημερώνεται ότι η συγκεκριμένη είναι η *j*-οστή έδρα του υπό εξέταση τετραέδρου.

Αν κατά τις συγκρίσεις δεν βρεθεί κάποια έδρα της αντίστοιχης γραμμής του πίνακα να συμπίπτει με την υπό εξέταση έδρα, τότε απλά εντοπίζεται μια νέα έδρα, που τυχαίνει να έχει ίδιο κύριο κλειδί με άλλες έδρες, οπότε γίνονται οι ίδιες ενέργειες που έγιναν κατά τον εντοπισμό νέας έδρας.

Η εφαρμογή, που μόλις περιγράφτηκε, χαρακτηρίζεται από αξιοσημείωτη αποδοτικότητα, αν συγκριθεί με αυτή της εξαντλητικής σύγκρισης κάθε έδρας με τις ήδη αναγνωρισμένες. Η χρήση του πίνακα και του κύριου κλειδιού, που μπορεί να είναι το ίδιο για περισσότερες από μία έδρες, μειώνει δραστικά το πλήθος των συγκρίσεων που απαιτούνται για την αναγνώριση μιας νέας έδρας και, κατά συνέπεια μειώνει αποτελεσματικά το υπολογιστικό κόστος. Στο τέλος της εφαρμογής αυτής έχουν εξαχθεί δύο νέες δομές δεδομένων του πλέγματος, εκ των οποίων η πρώτη περιέχει τις τέσσερις έδρες κάθε τετραέδρου και η δεύτερη τις τρεις κορυφές κάθε έδρας.

5.3.1.3. Καθορισμός Ακμών.

Κατόπιν, κρίνεται σκόπιμο να καθοριστούν οι ακμές, που απαρτίζουν τα τρίγωνα του πλέγματος. Η εν λόγω εφαρμογή, αξιοποιώντας τη δομή δεδομένων των κορυφών των τριγώνων, αποδίδει δύο νέες δομές δεδομένων, εκ των οποίων η πρώτη αποθηκεύει τους ακραίους κόμβους κάθε ακμής και η δεύτερη τις ακμές που συγκροτούν κάθε τρίγωνο. Κατά τον καθορισμό των ακμών κάθε τριγώνου διατηρείται ο ίδιος κανόνας αρίθμησης που ίσχυε και στην περίπτωση καθορισμού των εδρών κάθε τετραέδρου, δηλαδή απέναντι από την i κορυφή εντοπίζεται η i ακμή του τριγώνου. Τέλος, η υλοποίηση της εν λόγω εφαρμογής βασίστηκε στην ίδια δομή δεδομένων που χρησιμοποιήθηκε και στην εφαρμογή της προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή στον πίνακα «επαναδιατύπωσης» (*hash table*) [For99] [Αδα05].

Αναλυτικότερα, σαρώνοντας όλα τα τρίγωνα εξετάζονται μία προς μία οι ακμές, που σχηματίζονται από τις κορυφές τους ανά δύο. Για κάθε ακμή, συναρτήσει των ακραίων κόμβων της, *na1* και *na2*, ορίζεται το κύριο κλειδί (*KEY*) και μια διατεταγμένη δυάδα κλειδιών (*k1, k2*) σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} KEY &= \min(na1, na2) \\ k1 &= KEY \qquad\qquad (5.2) \\ k2 &= \{na1, na2\} - \{k1\} \end{aligned}$$

Ομοίως με την εφαρμογή της προηγούμενης παραγράφου, κατά την σάρωση των τριγώνων και των αντίστοιχων ακμών τους, συγκροτείται ο πίνακας επαναδιατύπωσης (*hash table*), χρησιμοποιώντας το κύριο κλειδί κάθε ακμής. Αφού προσδιοριστεί το κύριο κλειδί και η διατεταγμένη δυάδα κλειδιών της *j*-οστής ακμής κάθε τριγώνου, εξετάζεται αν έχουν ήδη βρεθεί ακμές που να έχουν το ίδιο κύριο κλειδί. Αν δεν υπάρχει άλλη ακμή με το ίδιο κύριο κλειδί, τότε η ακμή θεωρείται νέα, οπότε λαμβάνει αρίθμηση, ορίζονται οι ακραίοι κόμβοι της, ενημερώνεται ο πίνακας, αποθηκεύεται η διατεταγμένη δυάδα κλειδιών της και αυξάνει κατά ένα το πλήθος των ακμών που έχουν εντοπιστεί. Στην αντίθετη περίπτωση, συγκρίνεται η διατεταγμένη δυάδα κλειδιών της υπό εξέταση ακμής με τις αντίστοιχες δυάδες κλειδιών των ακμών που υποδεικνύει ο πίνακας. Επειδή ακριβώς κάθε δυάδα κλειδιών είναι μοναδική για κάθε ακμή σε αντίθεση με το κύριο κλειδί, η εύρεση μιας ακμής του πίνακα με ίδια δυάδα κλειδιών με αυτήν της υπό εξέτασης ακμής σημαίνει ότι η ακμή προσπελάζεται για τουλάχιστον δεύτερη φορά, οπότε υφίσταται ταυτοποίηση ακμών και απλά ενημερώνεται η ταυτότητα της *j*-οστής ακμής του τριγώνου. Εάν ωστόσο δεν υπάρξει ταυτοποίηση κατά τις συγκρίσεις, η ακμή αντιμετωπίζεται ως νέα ακμή και διεξάγονται οι αντίστοιχες ενέργειες. Ομοίως ξανά με την εφαρμογή της προηγούμενης παραγράφου, η χρήση της συγκεκριμένης δομής, δηλαδή του «πίνακα επαναδιατύπωσης» (*hash table*), προσφέρει αξιοσημείωτη αποδοτικότητα, μειώνοντας αισθητά τις απαιτήσεις του Η/Υ σε μνήμη και χρόνο επεξεργασίας.

5.3.1.4. Ανάθεση Δεικτών.

Για τη συμπλήρωση των απαραίτητων, για την πλήρη περιγραφή του πλέγματος, δομών δεδομένων απαιτείται η ανάθεση δεικτών (*index*) σε όλα τα τρίγωνα του πλέγματος. Ένας δείκτης αποτελεί ουσιαστικά μια ταυτότητα, η οποία υποδεικνύει άμεσα την τοποθεσία του τριγώνου στο πλέγμα. Ειδικότερα, για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις που μελετήθηκαν στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, ο δείκτης υποδείκνυε εάν ένα τρίγωνο άνηκε στην επιφάνεια της γεωμετρίας, σε πλαϊνά στερεά τοιχώματα, στις οριακές επιφάνειες εισόδου και εξόδου της ροής ή απλά αποτελούσε εσωτερική έδρα του πεδίου ροής.

Η εν λόγω εφαρμογή ξεκινά με την ανάγνωση του αριθμού και του είδους των επιφανειών του υπό εξέταση πλέγματος από το αρχείο εισόδου με όνομα INP.DAT. Λόγω ότι το δεύτερο αρχείο μορφής *.DAT προέρχεται από ένα εμπορικό πακέτο, το υπό εξέταση πλέγμα δύναται να είναι ιδιαίτερα περίπλοκο και οι επιφάνειες αυτού να έχουν χαρακτηριστεί με διαφορετικά και πολλά σε αριθμό ονόματα. Το λογισμικό ξεπερνά αυτό το «εμπόδιο» δίνοντας τη δυνατότητα στο χρήστη να αντιστοιχήσει στο όνομα της εκάστοτε επιφάνειας τον κατάλληλο δείκτη. Στον παρακάτω πίνακα 5.1 παρουσιάζονται οι τιμές των πιθανών δεικτών που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο εκάστοτε χρήστης για να χαρακτηρίσει τις επιφάνειες, οπότε και τα τρίγωνα, του υπό εξέταση πλέγματος.

Τιμή Δείκτη	Τοποθεσία Τριγώνου
0	Εσωτερικό Πλέγματος (Net)
1	Επιφάνεια της υπό εξέτασης γεωμετρίας (Wing)
2	Όριο εξόδου της ροής (Outlet)
3	Όριο εισόδου της ροής (Inlet)
51	Στερεό τοίχωμα (Solid Wall)

Πίνακας 5.1: Αντιστοίχηση μεταξύ τιμής δείκτη και τοποθεσίας τριγώνου.

Στη συνέχεια πραγματοποιείται η ανάγνωση των οριακών εδρών από το δεύτερο αρχείο εισόδου μορφής *.DAT. Αναλυτικότερα, το εν λόγω αρχείο παρέχει μια λίστα με τα οριακά τετράεδρα. Η λίστα περιέχει για κάθε όριο, όπως για παράδειγμα την επιφάνεια της γεωμετρίας, το σύνολο των τετραέδρων που έχουν μια έδρα πάνω στο εν λόγω όριο, καθώς και την αρίθμηση της συγκεκριμένης έδρας. Για παράδειγμα, στο αρχείο πλέγματος με όνομα SNACA0012_V10C.DAT, που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, στο σύνολο των τετραέδρων που έχουν μια έδρα πάνω σε στερεό τοίχωμα περιλαμβάνεται και το τετράεδρο 4598, για το οποίο οριακή είναι η τέταρτη του έδρα. Ο αλγόριθμος αρχικά αποδίδει σε όλα τα τρίγωνα δείκτη 0, θεωρώντας ότι όλα είναι εσωτερικά, ενώ στη συνέχεια προσπελάζει το αντίστοιχο πεδίο του αρχείου εισόδου και αποθηκεύει το δείκτη κάθε τριγώνου. Η δομή δεδομένων, που εξάγεται από την παρούσα εφαρμογή, είναι απαραίτητη για τον επιλύτη, καθώς στη συνέχεια θα ανατεθούν οι οριακές συνθήκες στα όρια του πεδίου της ροής, χρησιμοποιώντας αυτούς τους δείκτες των τριγώνων. Με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται ουσιαστικά και η επεξεργασία του τρισδιάστατου πλέγματος, που διακριτοποιεί το χωρίο ροής, καθώς έχουν δημιουργηθεί οι κατάλληλες δομές δεδομένων που το περιγράφουν.

5.3.1.5. Αρχικοποίηση Μεταβλητών και Αδιαστατοποίηση Μεγεθών.

Στη συνέχεια του αλγορίθμου πραγματοποιείται η αρχικοποίηση των μεταβλητών επίλυσης και ταυτόχρονα η αδιαστατοποίηση των μεγεθών. Αρχικά υπολογίζονται οι μεταβλητές εκτός του εξεταζόμενου πεδίου ροής, οι οποίες φέρουν το δείκτη far. Πρώτα υπολογίζονται σε ακτίνια οι δύο γωνίες, που σχηματίζει η ροή του ρευστού με το οριζόντιο και κάθετο επίπεδο αντίστοιχα, λόγω του ότι οι γωνίες αυτές αρχικά ορίζονται από το χρήστη σε μοίρες μέσα στο αρχείο εισαγωγής δεδομένων με όνομα INP.DAT. Κατόπιν υπολογίζεται, μέσω της σχέσης (5.3), η (αδιάστατη) σταθερά R_g, συναρτήσει της σταθεράς γ, η οποία έχει επίσης καθοριστεί από το χρήστη μέσα στο προαναφερθέν αρχείο εισαγωγής δεδομένων.

$$R_g = \gamma - 1 \qquad (5.3)$$

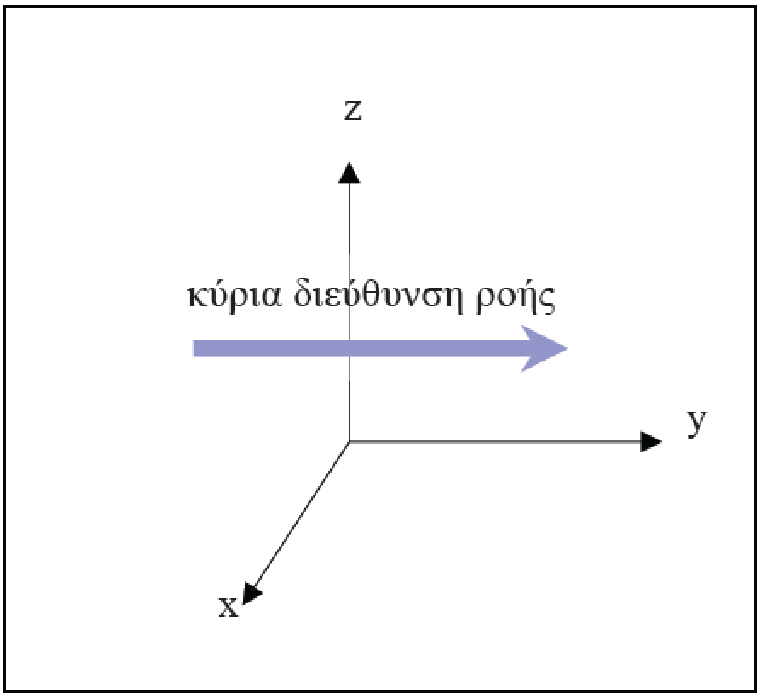
Ως ταχύτητα αναφοράς ($\vec{V}_{far}^{ref}$) ορίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα. Συνεπώς, η αδιαστατοποιημένη ταχύτητα του ήχου $\breve{a}_{far}$ εκτός του πεδίου ροής προκύπτει ως εξής:

$$\vec{V}_{far} = M_{far} \cdot a_{far} \Rightarrow \breve{a}_{far} = \frac{\vec{V}_{far}^{ref}}{M_{far}} = \frac{1}{M_{far}} \qquad (5.4)$$

Όπου M_{far} είναι ο αριθμός Mach. Στη συνέχεια ακολουθεί ο υπολογισμός των συνιστωσών του διανύσματος της ταχύτητας εκτός του πεδίου ροής στους άξονες *x, y, z*. Οι τρεις αυτές συνιστώσες δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} \breve{u}_{far} &= \vec{V}_{far}^{ref} \cdot \sin(angle2) \\ \breve{v}_{far} &= \vec{V}_{far}^{ref} \cdot \cos(angle1) \cdot \cos(angle2) \quad (5.5) \\ \breve{w}_{far} &= \vec{V}_{far}^{ref} \cdot \sin(angle1) \cdot \cos(angle2) \end{aligned}$$

Στις παραπάνω σχέσεις με *angle1* συμβολίζεται η γωνία που σχηματίζει η συνισταμένη της ταχύτητας της ροής με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ με *angle2* συμβολίζεται η γωνία που σχηματίζεται με το κατακόρυφο επίπεδο. Επισημαίνεται ότι οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν εφόσον το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται στο υπό εξέταση ρευστομηχανικό πρόβλημα συμπίπτει με το σύστημα συντεταγμένων που εικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3: Σύστημα συντεταγμένων.

Η πυκνότητα του ρευστού αδιαστατοποιείται και τίθεται ίση με μονάδα ($\breve{\rho}_{far}=1$), ενώ οι αδιαστατοποιημένες μορφές της θερμοκρασίας $\breve{T}_{far}$ και της πίεσης του ρευστού $\breve{p}_{far}$ προκύπτουν από τις εξής σχέσεις:

$$a=\sqrt{\gamma R_g T}\Rightarrow a^2=\gamma(\gamma-1)T\Rightarrow \breve{T}_{far}=\frac{\breve{a}_{far}^2}{\gamma(\gamma-1)} \qquad (5.6)$$

$$\breve{p}_{far}=R_g\breve{\rho}_{far}\breve{T}_{far}=(\gamma-1)\breve{\rho}_{far}\breve{T}_{far}=(\gamma-1)\frac{\breve{a}_{far}^2}{\gamma(\gamma-1)}=\frac{1}{M_{far}^2\gamma} \qquad (5.7)$$

Τέλος ορίζεται η ολική ενθαλπία $\breve{h}_{t,far}$ συναρτήσει των προηγούμενων μεγεθών ως εξής:

$$\breve{h}_{t,far}=\frac{\gamma\breve{p}_{far}}{\breve{\rho}_{far}(\gamma-1)}+\frac{1}{2}\cdot\left(\breve{u}_{far}^2+\breve{v}_{far}^2+\breve{w}_{far}^2\right) \qquad (5.8)$$

Από τα χαρακτηριστικά της ροής, που επικρατούν εκτός του υπό εξέταση χωρίου, υπολογίζονται πρώτα οι πρωτεύουσες μεταβλητές επίλυσης (*Primitive variables*) και στη συνέχεια οι συντηρητικές μεταβλητές (*Conservative variables*). Στη συνέχεια θα εννοείται η αδιαστατοποιημένη μορφή των μεγεθών και το αντίστοιχο σύμβολο θα παραλείπεται. Οι τιμές που λαμβάνουν οι πρωτεύουσες μεταβλητές στην πρώτη επανάληψη του επιλύτη είναι οι αντίστοιχες που επικρατούν εκτός του χωρίου επίλυσης. Το διάνυσμα τους είναι το ακόλουθο:

$$\vec{U} = \left(\rho \ u \ v \ w \ p\right)^T \qquad (5.9)$$

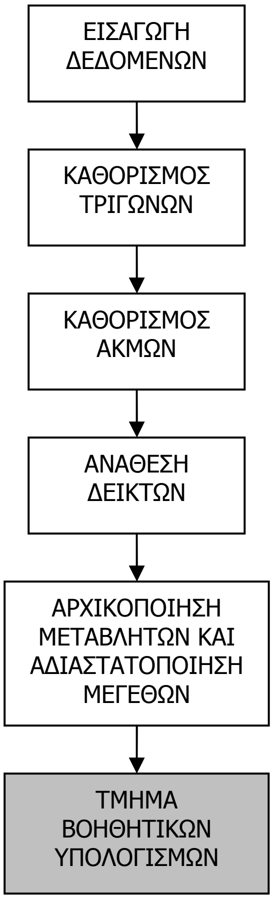
Στη συνέχεια υπολογίζεται το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών από τις πρωτεύουσες μεταβλητές. Το διάνυσμα των πρώτων δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\vec{W} = \left(\rho \ \rho u \ \rho v \ \rho w \ \rho E\right)^T \qquad (5.10)$$

Όπου η ολική ενέργεια του ρευστού ανά μονάδα μάζας Ε που εμφανίζεται στο ανωτέρω διάνυσμα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$E = \frac{p}{\rho\left(\gamma - 1\right)} + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) \qquad (5.11)$$

Τέλος, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι σε αυτό το τμήμα των αρχικών υπολογισμών πραγματοποιείται και η αρχικοποίηση με μηδενικές τιμές όλων των απαραίτητων για τη διαδικασία της προσαρμογής του πλέγματος δομών δεδομένων.



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα ροής αρχικού τμήματος του αλγορίθμου.

5.3.2. Τμήμα Βοηθητικών Υπολογισμών.

5.3.2.1. Εύρεση Τετραέδρων με Κοινή Ακμή.

Στόχος της υπορουτίνας εύρεσης των τετραέδρων με κοινή ακμή είναι η ανάπτυξη μιας δομής δεδομένων, που να πληροφορεί σχετικά με το σε πόσα και σε ποια τετράεδρα ανήκει κάθε ακμή. Η δομή αυτή είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των γεωμετρικών στοιχείων των ακμών στη συνέχεια, ενώ για την συγκρότηση της είναι πλέον διαθέσιμες αρκετές δομές δεδομένων του πλέγματος, όπως οι έδρες και οι κορυφές κάθε τετραέδρου, οι ακμές και οι κορυφές κάθε τριγώνου και οι ακραίοι κόμβοι κάθε ακμής.

Ουσιαστικά η υπορουτίνα συγκροτεί έναν πίνακα, στον οποίο κάθε γραμμή αναφέρεται σε μια ακμή και σε κάθε γραμμή αποθηκεύονται τα τετράεδρα στα οποία εντοπίζεται η αντίστοιχη ακμή. Το πλήθος των τετραέδρων, που αποθηκεύονται σε κάθε γραμμή, προφανώς δεν είναι ίδιο για όλες τις γραμμές-ακμές. Ως εκ τούτου αποθηκεύεται ως μια νέα μεταβλητή, η οποία αναφέρεται σε κάθε ακμή και θα καλείται πλέον μεταβλητή πλήθους.

Αναλυτικότερα, η υπορουτίνα σαρώνει κάθε ακμή *k*, κάθε έδρας *j*, κάθε τετραέδρου *i*. Για την ακμή *k* ελέγχει το πλήθος των τετραέδρων στα οποία ανήκει. Αν βρεθεί ότι δεν ανήκει σε κανένα τετράεδρο, δηλαδή αν η μεταβλητή πλήθους της ακμής *k* έχει τιμή 0, τότε αυξάνει κατά ένα την τιμή της μεταβλητής πλήθους και αποθηκεύει το τετράεδρο *i* στην πρώτη ελεύθερη θέση της γραμμής *k* του πίνακα. Η θέση αυτή υποδεικνύεται από την τιμή που έχει η μεταβλητή πλήθους της ακμής. Αν αντίθετα η μεταβλητή πλήθους της ακμής *k* έχει τιμή μεγαλύτερη του 0, τότε ελέγχεται αν το τετράεδρο *i* είναι εγγεγραμμένο σε μια από τις κατειλημμένες θέσεις της γραμμής *k* του πίνακα. Αν αυτό βρεθεί σε μια από τις θέσεις, τότε δεν γίνεται καμιά άλλη ενέργεια και σαρώνεται η επόμενη ακμή. Αν ωστόσο δεν εντοπιστεί στην γραμμή *k*, τότε γίνονται οι ίδιες ενέργειες, που λαμβάνουν χώρα στην περίπτωση που η μεταβλητή πλήθους της ακμής έχει μηδενική τιμή.

Σαρώνοντας όλα τα τετράεδρα, ελέγχονται όλες οι ακμές για περισσότερες από μία φορές. Κατά συνέπεια εξασφαλίζεται η σωστή ταξινόμηση των ακμών στον πίνακα και επαληθεύεται η ορθότητα της δομής.

Επιπρόσθετα, αφού έχουν σαρωθεί όλες οι ακμές και έχει δημιουργηθεί ο επιθυμητός πίνακας, είναι γνωστή πλέον η ακμή που ανήκει στο μεγαλύτερο πλήθος τετραέδρων, οπότε και η ακμή-γραμμή που απαιτεί το μεγαλύτερο αριθμό στηλών-τετραέδρων. Κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι αρχικά στον εν λόγω πίνακα δίνονται αυθαίρετες και σχετικά μεγάλες διαστάσεις, οι οποίες όμως τελικά μεταβάλλονται, καθώς έχει γίνει πλέον γνωστός ο μέγιστος απαραίτητος αριθμός στηλών. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται σημαντική μείωση των υπολογιστικών αναγκών του λογισμικού.

5.3.2.2. Υπολογισμός των Όγκων των Κυψελών Ελέγχου.

Το τμήμα των βοηθητικών υπολογισμών του αλγορίθμου συνεχίζεται με τον υπολογισμό του όγκου κάθε κυψέλης ελέγχου. Ο υπολογισμός των εν λόγω όγκων δεν πραγματοποιείται με άμεσο αλλά με έμμεσο-προσθετικό τρόπο.

Αρχικά μηδενίζεται ο όγκος της κυψέλης ελέγχου, που αντιστοιχεί σε κάθε κόμβο του υπό εξέταση πλέγματος. Στη συνέχεια σαρώνονται όλα τα τετράεδρα και υπολογίζεται ο όγκος τους από την παρακάτω σχέση [http://www.mathworld.wolfram.com]:

$$V = \frac{1}{3!} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad i = 1,...,4 \quad (5.12)$$

Όπου με x_i, y_i, z_i συμβολίζονται οι συντεταγμένες του κόμβου i του τετραέδρου. Αφού υπολογιστεί ο όγκος ενός υπό εξέταση τετραέδρου, γίνεται η συνεισφορά στον όγκο της κυψέλης ελέγχου κάθε κόμβου του. Πιο συγκεκριμένα, στον όγκο της κυψέλης ελέγχου ενός κόμβου του υπό εξέταση τετραέδρου προστίθεται ο όγκος του εν λόγω τετραέδρου, σταθμισμένος πρώτα με το ποσοστό του όγκου και πάλι του συγκεκριμένου τετραέδρου, που καταλαμβάνει η κυψέλη ελέγχου του συγκεκριμένου κόμβου. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο όγκος της κυψέλης ελέγχου κάθε κορυφής ενός τετραέδρου καταλαμβάνει ακριβώς το ¼ του όγκου του τετραέδρου, λόγω του ορισμού της κυψέλης. Συνεπώς κατά την σάρωση των τετραέδρων προστίθεται στον όγκο ελέγχου κάθε κορυφής το ¼ του όγκου κάθε τετραέδρου που ανήκει.

5.3.2.3. Αριθμητικός Υπολογισμός Γεωμετρικών Στοιχείων των Τετραέδρων και των Εδρών τους.

Ο αλγόριθμος συνεχίζεται υπολογίζοντας γεωμετρικά χαρακτηριστικά των τετραεδρικών στοιχείων του πλέγματος, όπως οι συντεταγμένες των κέντρων τους και οι συντεταγμένες των κέντρων των εδρών τους.

Αρχικά υπολογίζονται οι συντεταγμένες του κέντρου ενός τετραέδρου από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} x_{C_T} &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i, \;\; i = 1,...,4 \\ y_{C_T} &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i, \;\; i = 1,...,4 \qquad (5.13) \\ z_{C_T} &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} z_i, \;\; i = 1,...4 \end{aligned}$$

Όπου με x_i, y_i, z_i συμβολίζονται οι συντεταγμένες του κόμβου i του τετραέδρου.

Κατόπιν, υπολογίζονται οι συντεταγμένες του κέντρου μιας τριγωνικής έδρας από τις εξής σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
x_C &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i\,,\;\; i = 1,\ldots,3 \\
y_C &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_i\,,\;\; i = 1,\ldots,3 \\
z_C &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} z_i\,,\;\; i = 1,\ldots 3
\end{aligned}
\qquad (5.14)
$$

Όπου με x_i, y_i, z_i συμβολίζονται οι συντεταγμένες του κόμβου i της τριγωνικής έδρας του τετραέδρου.

5.3.2.4. Υπολογισμός του Μήκους της Μικρότερης Ακμής στην οποία Ανήκει κάθε Κόμβος.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κατά τη λειτουργία του επιλύτη δύναται να εφαρμοστεί είτε η τεχνική του ελάχιστου τοπικού χρονικού βήματος είτε η τεχνική του ελάχιστου ολικού χρονικού βήματος. Η επιλογή της τεχνικής γίνεται από τον χρήστη μέσα στο αρχείο εισαγωγής δεδομένων με όνομα INP.DAT.

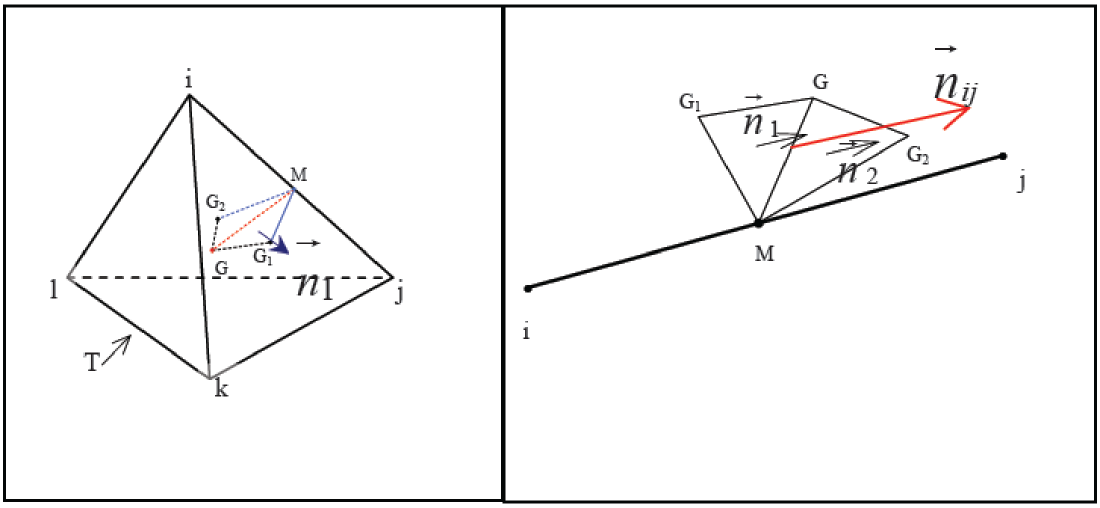
Ανεξάρτητα όμως από αυτήν την επιλογή, για τον υπολογισμό του χρονικού βήματος απαιτείται ο υπολογισμός του μήκους κάθε ακμής που ξεκινά από κάθε κόμβο του πλέγματος, ενέργεια που αποτελεί και το στόχο της εν λόγω υπορουτίνας. Ως εκ τούτου δημιουργείται η κατάλληλη δομή δεδομένων ανάλογα την τεχνική, στις μεταβλητές της οποίας αρχικά αποδίδεται μια πολύ μεγάλη τιμή. Κατόπιν σαρώνεται το σύνολο των ακμών του πλέγματος και υπολογίζεται το μήκος l κάθε ακμής με ακραίους κόμβους τους i και j, σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= x_j - x_i \\
\Delta y &= y_j - y_i \\
\Delta z &= z_j - z_i \\
l &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}
\end{aligned}
\qquad (5.15)
$$

Μετά τον υπολογισμό του μήκους για κάθε ακμή, ελέγχεται αν το μήκος l είναι μικρότερο από την τιμή που αποδίδεται στους ακραίους κόμβους της προκειμένου για την πρώτη τεχνική ή από την ελάχιστη τιμή για όλους τους κόμβους προκειμένου για τη δεύτερη τεχνική. Στην περίπτωση που το μήκος αυτό είναι μικρότερο, αποδίδεται στον ακραίο κόμβο η τιμή l ως το μήκος της μικρότερης ακμής που ξεκινάει από αυτόν προκειμένου για την πρώτη τεχνική, ή τίθεται η τιμή l ως το ολικό μικρότερο μήκος ακμής για όλους του κόμβους προκειμένου για τη δεύτερη τεχνική. Τέλος, ανάλογα με τη μεθοδολογία και εφόσον σαρωθούν όλες οι ακμές του υπό εξέταση πλέγματος, θα έχει αποδοθεί σε κάθε κόμβο το ελάχιστο μήκος ακμής του ή θα έχει υπολογιστεί το ολικό ελάχιστο μήκος όλων των ακμών.

5.3.2.5. Υπολογισμός Γεωμετρικών Χαρακτηριστικών των Ακμών.

Κατά την επαναληπτική επίλυση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής υπολογίζεται το διάνυσμα ροής, που αντιστοιχεί σε κάθε ακμή και το οποίο συνεισφέρει κατάλληλα στον ισολογισμό των ροών σε κάθε κυψέλη ελέγχου. Ο υπολογισμός του διανύσματος ροής για κάθε ακμή με ακραίους κόμβους i και j απαιτεί τον υπολογισμό του διανύσματος $\vec{n}_{ij}$ που εικονίζεται στα παρακάτω Σχήματα 5.5 και 5.6.



Σχήματα 5.5 και 5.6: Ακμή ij και το διάνυσμα $\vec{n}_{ij}$. που αναλογεί στο τετράεδρο T .

Στο Σχήμα 5.5 εικονίζεται η ακμή ij , η οποία ανήκει στα τρίγωνα ijk και ijl, ενώ με M συμβολίζεται το μέσο της ακμής, με G το κέντρο του τετραέδρου και με G_1 και G_2 τα βαρύκεντρα των τριγώνων ijk και ijl αντίστοιχα. Για τον αριθμητικό υπολογισμό του $\vec{n}_{ij}$ αξιοποιούνται δομές δεδομένων, που έχουν ήδη υπολογιστεί, όπως η λίστα με τα τετράεδρα στα οποία ανήκει κάθε ακμή, και οι λίστες με τις συντεταγμένες των κέντρων τόσο των τετραέδρων όσο και των τριγώνων. Επίσης υπολογίζονται οι συντεταγμένες του μέσου M της ακμής, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
x_M &= \frac{1}{2}\left(x_i + x_j\right) \\
y_M &= \frac{1}{2}\left(y_i + y_j\right) \\
z_M &= \frac{1}{2}\left(z_i + z_j\right)
\end{aligned}
\qquad (5.16)
$$

Στη συνέχεια σαρώνονται όλες οι ακμές και διεξάγονται οι απαραίτητοι υπολογισμοί για την εύρεση του επιθυμητού διανύσματος $\vec{n}_{ij}$ κάθε ακμής ij. Αρχικά αποδίδονται μηδενικές τιμές στις τρεις συνιστώσες του $\vec{n}_{ij}$ και κατόπιν εξετάζονται διαδοχικά όλα τα τετράεδρα T, στα οποία ανήκει η υπό εξέταση ακμή. Για κάθε ένα καλείται κατάλληλη υπορουτίνα, που αποδίδει τα δύο τρίγωνα $cell_1$ και $cell_2$ του τετραέδρου T, στα οποία ανήκει η ακμή ij. Η περιγραφή της υπορουτίνας γίνεται στην επόμενη παράγραφο. Αφού ανακτηθούν οι συντεταγμένες του κέντρου G του τετραέδρου T και των βαρυκέντρων G_1 και G_2 των τριγώνων $cell_1$ και $cell_2$ αντίστοιχα, υπολογίζονται οι x,y και z συνιστώσες των διανυσμάτων $\overrightarrow{GG_1}$, $\overrightarrow{GG_2}$ και $\overrightarrow{GM}$. Εν συνεχεία υπολογίζονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$ στα τρίγωνα MGG_1 και MGG_2 αντίστοιχα. Το διάνυσμα $\vec{n}_1$ υπολογίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{GG_1}$ και $\overrightarrow{GM}$. Το εξωτερικό αυτό γινόμενο υπολογίζεται σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\overrightarrow{GG_1} \times \overrightarrow{GM} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ GG_{1,x} & GG_{1,y} & GG_{1,z} \\ GM_x & GM_y & GM_z \end{vmatrix} =$$

$$= i\underbrace{\begin{vmatrix} GG_{1,y} & GG_{1,z} \\ GM_y & GM_z \end{vmatrix}}_{n_{1,x}} - j\underbrace{\begin{vmatrix} GG_{1,x} & GG_{1,z} \\ GM_x & GM_z \end{vmatrix}}_{n_{1,y}} + k\underbrace{\begin{vmatrix} GG_{1,x} & GG_{1,y} \\ GM_x & GM_y \end{vmatrix}}_{n_{1,z}} \quad (5.17)$$

$$\kappa\alpha\iota$$

$$n_{1,x} = GG_{1,y} \cdot GM_z - GM_y \cdot GG_{1,z}$$
$$n_{1,y} = GM_x \cdot GG_{1,z} - GG_{1,x} \cdot GM_z$$
$$n_{1,z} = GG_{1,x} \cdot GM_y - GM_x \cdot GG_{1,y}$$

Το διάνυσμα $\vec{n}_1$ θα πρέπει εξ' ορισμού να έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου MGG_1. Οπότε οι σχέσεις (5.17) μετατρέπονται ως εξής:

$$\begin{aligned} n_{1,x} &= \frac{1}{2}(GG_{1,y} \cdot GM_z - GM_y \cdot GG_{1,z}) \\ n_{1,y} &= \frac{1}{2}(GM_x \cdot GG_{1,z} - GG_{1,x} \cdot GM_z) \qquad (5.18) \\ n_{1,z} &= \frac{1}{2}(GG_{1,x} \cdot GM_y - GM_x \cdot GG_{1,y}) \end{aligned}$$

Όμοια υπολογίζονται και οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{n}_2$. Τα $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$ θα πρέπει να έχουν φορά από τον αριστερό ακραίο κόμβο, προς τον δεξιό, π.χ. από τον κόμβο i προς τον κόμβο j για το Σχήμα 5.5. Για να εξασφαλιστεί η συγκεκριμένη προϋπόθεση υπολογίζονται αριθμητικά οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος της ακμής, με φορά του διανύσματος από τον κόμβο i προς τον κόμβο j, και στη συνέχεια υπολογίζονται τα εσωτερικά γινόμενα του εν λόγω διανύσματος με τα $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$ αντίστοιχα. Αν κάποιο από τα γινόμενα έχει αρνητικό πρόσημο, σημαίνει ότι το αντίστοιχο διάνυσμα $\vec{n}_1$ ή $\vec{n}_2$ έχει αντίθετη φορά, οπότε αλλάζονται τα πρόσημα των συνιστωσών του, ώστε να έχουν πλέον την κατάλληλη φορά. Εφόσον πλέον έχει εξασφαλιστεί η σωστή φορά των $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$, οι συνιστώσες τους προστίθενται στις αντίστοιχες συνιστώσες του ζητούμενου $\vec{n}_{ij}$.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε τετράεδρο, στο οποίο ανήκει η ακμή ij, ενώ κάθε φορά προστίθενται οι συνιστώσες των $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$ στις αντίστοιχες συνιστώσες του $\vec{n}_{ij}$. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται αριθμητικά οι συνιστώσες του τελευταίου, λαμβάνοντας υπόψη όλα τα διανύσματα των επιμέρους τριγωνικών εμβαδών, που συνθέτουν ένα τμήμα του ορίου της κυψέλης ελέγχου του αριστερού ακραίου κόμβου της ακμή ij του Σχήματος 5.5.

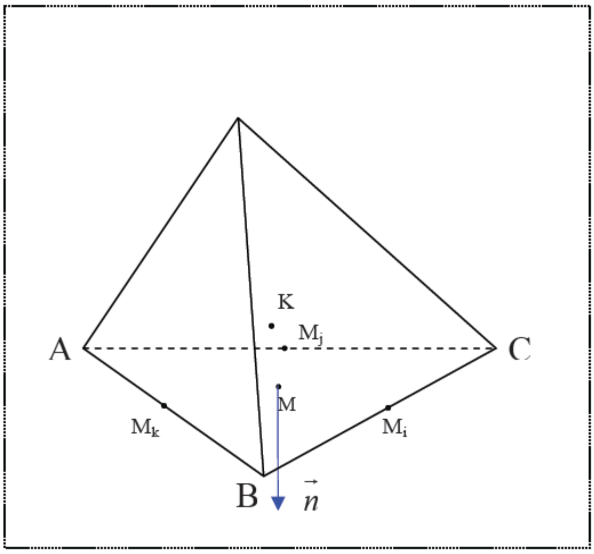
5.3.2.6. Εύρεση των Δύο Εδρών ενός Τετραέδρου στις οποίες Ανήκει μια Ακμή του.

Κατά την εφαρμογή της προηγούμενης υπορουτίνας καλείται, όπως προαναφέρθηκε, μία συνάρτηση εύρεσης των δύο εδρών ενός τετραέδρου, στις οποίες ανήκει η υπό εξέταση ακμή του. Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως ορίσματα την υπό εξέταση ακμή I, καθώς και όλες τις έδρες και όλες τις ακμές του υπό εξέταση τετραέδρου N. Η υπορουτίνα έχει ως σκοπό να εντοπίσει τις δύο από τις τέσσερις έδρες του τετραέδρου N, στις οποίες ανήκει η υπό εξέταση ακμή I. Ως εκ τούτου, σαρώνονται οι τέσσερις έδρες του τετραέδρου και για καθεμιά από αυτές σαρώνονται οι τρεις ακμές της, συγκρίνοντας ταυτόχρονα τις τελευταίες με την υπό εξέταση ακμή I. Εφόσον υφίσταται ταυτοποίηση των ακμών και εφόσον η μεταβλητή $cell_1$ δεν έχει ορισθεί από προηγούμενη ταυτοποίηση αποθηκεύεται η εν λόγω έδρα στη μεταβλητή $cell_1$ και ελέγχεται η επόμενη έδρα. Σε περίπτωση που η μεταβλητή $cell_1$ έχει ορισθεί από προηγούμενη ταυτοποίηση, η εν λόγω έδρα αποθηκεύεται στη μεταβλητή $cell_2$ και τερματίζεται η λειτουργία της υπορουτίνας, επιστρέφοντας τα $cell_1$ και $cell_2$.

5.3.2.7. Υπολογισμός των Γεωμετρικών Χαρακτηριστικών των Οριακών Τριγώνων.

Το τμήμα των βοηθητικών υπολογισμών ολοκληρώνεται με τον αριθμητικό υπολογισμό των γεωμετρικών στοιχείων των τριγώνων, που ανήκουν σε οριακή επιφάνεια του χωρίου ροής. Οι επιφάνειες αυτές δύνανται να ανήκουν είτε σε όρια εισόδου/εξόδου της ροής είτε σε στερεά τοιχώματα (γεωμετρία και πλαϊνά στερεά τοιχώματα). Ανεξάρτητα από το είδος των επιφανειών, απαιτείται για κάθε τρίγωνο που ανήκει σ’ αυτές, ο υπολογισμός ενός διανύσματος, με διεύθυνση κάθετη στην τριγωνική επιφάνεια, φορά προς αυτήν την επιφάνεια και μέτρο ίσο με το εμβαδό της τριγωνικής επιφάνειας. Στο Σχήμα 5.5 παρουσιάζεται το εν λόγω διάνυσμα για ένα τυχαίο οριακό τρίγωνο ABC. Το διάνυσμα αυτό είναι απαραίτητο για την επιβολή των οριακών συνθηκών κατά την επαναληπτική διαδικασία. Η τεχνική που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του είναι αντίστοιχη με αυτή που περιγράφτηκε στην προηγούμενη παράγραφο για τον υπολογισμό των γεωμετρικών στοιχείων των ακμών.

Σαρώνονται όλα τα τετράεδρα του πλέγματος και διαδοχικά όλες οι έδρες τους. Για κάθε οριακή έδρα, δηλαδή για όσες έχουν δείκτη 1, 2, 3 ή 51, ανακτώνται οι τρεις κορυφές της και οι συντεταγμένες του βαρυκέντρου της. Έστω ότι εντοπίζεται η οριακή έδρα του εικονιζόμενου τετραέδρου στο Σχήμα 5.7. Εκτός από τις συντεταγμένες του σημείου M, ανακτώνται και αυτές του κέντρου K του τετραέδρου.



Σχήμα 5.7: Οριακό τρίγωνο και κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$.

Από τις συντεταγμένες των δύο προαναφερθέντων σημείων υπολογίζονται αριθμητικά οι συνιστώσες του διανύσματος $\overrightarrow{KM}$. Με τον ίδιο τρόπο, από τις συντεταγμένες των κορυφών A, B και C υπολογίζονται οι συνιστώσες των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$. Εφόσον το ζητούμενο διάνυσμα $\vec{n}$ είναι κάθετο στην έδρα ABC, θα είναι κάθετο και στα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$, και κατά συνέπεια θα υπολογίζεται από το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Οι συνιστώσες του διανύσματος που προκύπτει από το εν λόγω εξωτερικό γινόμενο υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ AB_x & AB_y & AB_z \\ AC_x & AC_y & AC_z \end{vmatrix} =$$

$$= i\underbrace{\begin{vmatrix} AB_y & AB_z \\ AC_y & AC_z \end{vmatrix}}_{n_{1,x}} - j\underbrace{\begin{vmatrix} AB_x & AB_z \\ AC_x & AC_z \end{vmatrix}}_{n_{1,y}} + k\underbrace{\begin{vmatrix} AB_x & AB_y \\ AC_x & AC_y \end{vmatrix}}_{n_{1,z}} \quad (5.19)$$

$$\kappa\alpha\iota$$

$$n_x = AB_y \cdot AC_z - AC_y \cdot AB_z$$
$$n_y = AC_x \cdot AB_z - AB_x \cdot AC_z$$
$$n_z = AB_x \cdot AC_y - AC_x \cdot AB_y$$

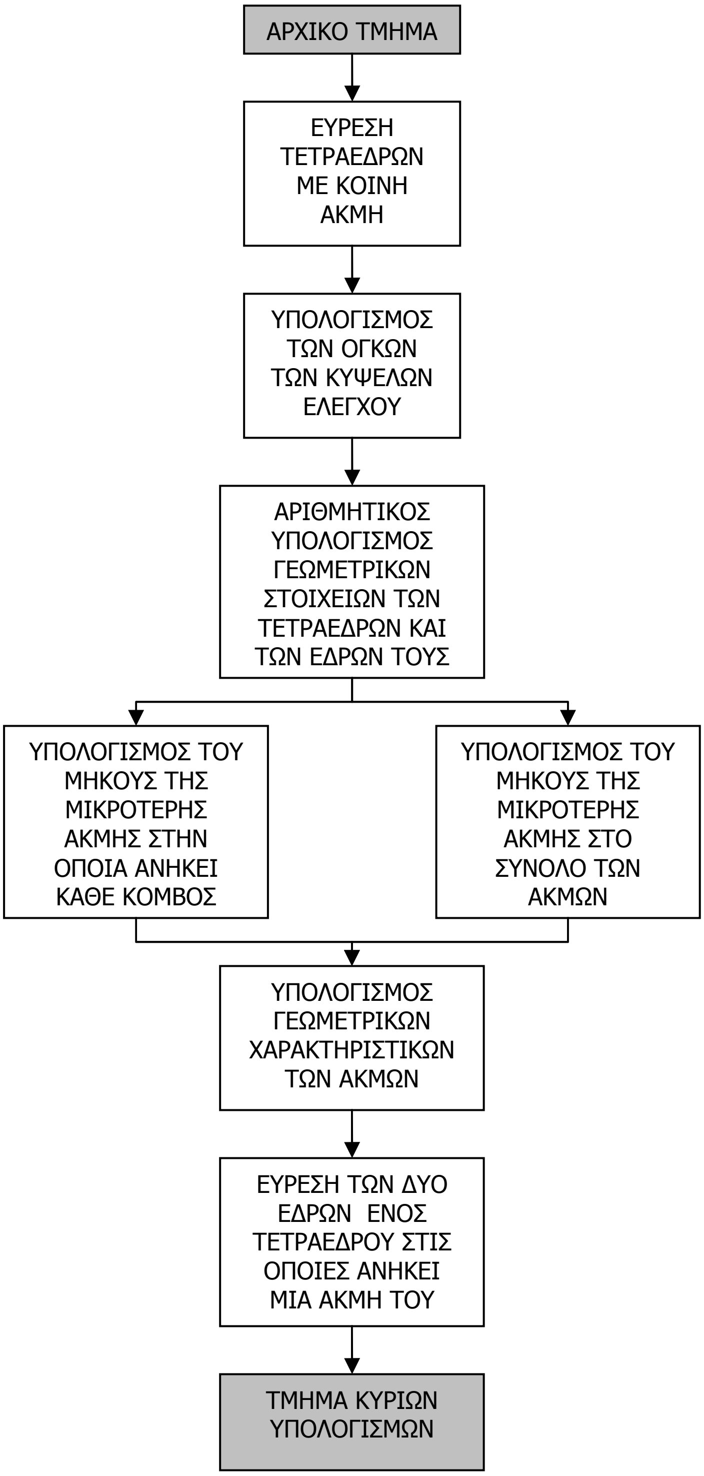
Το διάνυσμα $\vec{n}$ θα πρέπει εξ' ορισμού να έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ABC, το οποίο υπολογίζεται από την εξής σχέση:

$$E_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \quad (5.20)$$

Κατά συνέπεια οι σχέσεις υπολογισμού των συνιστωσών του διανύσματος $\vec{n}$ (5.19) επαναδιατυπώνονται ως εξής:

$$n_x = \frac{1}{2}(AB_y \cdot AC_z - AC_y \cdot AB_z)$$
$$n_y = \frac{1}{2}(AC_x \cdot AB_z - AB_x \cdot AC_z) \quad (5.21)$$
$$n_z = \frac{1}{2}(AB_x \cdot AC_y - AC_x \cdot AB_y)$$

Η φορά του διανύσματος θα πρέπει να είναι προς το εξωτερικό του τετραέδρου, δηλαδή προς το εξωτερικό του χωρίου ροής, εφόσον η ABC είναι μια οριακή έδρα. Η φορά αυτή είναι ίδια με τη φορά του διανύσματος $\overrightarrow{KM}$. Η εξασφάλιση της σωστής φοράς του διανύσματος $\vec{n}$ εμπίπτει στην εξασφάλιση της ίδιας φοράς με αυτή του $\overrightarrow{KM}$. Αυτό επιτυγχάνεται με τον έλεγχο του πρόσημου του εσωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων. Αν αυτό προκύψει αρνητικό, τότε αλλάζονται τα πρόσημα των συνιστωσών του διανύσματος $\vec{n}$.



Σχήμα 5.8: Διάγραμμα ροής τμήματος βοηθητικών υπολογισμών.

5.3.3. Τμήμα Κύριων Υπολογισμών.

5.3.3.1. Εισαγωγή.

Μετά την ολοκλήρωση του τμήματος των βοηθητικών υπολογισμών, που περιγράφηκαν παραπάνω, ξεκινάει ή συνεχίζεται, για την περίπτωση όπου έχει εφαρμοστεί προσαρμογή του πλέγματος, πλέον η επαναληπτική διαδικασία για την επίλυση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής (Σχήμα 5.9). Στην επόμενη παράγραφο περιγράφεται το ρητό σχήμα επίλυσης, κατόπιν το σημειακά πεπλεγμένο σχήμα επίλυσης ενώ στη συνέχεια περιγράφονται οι κοινές υπορουτίνες των δύο σχημάτων. Υπενθυμίζεται ότι η επιλογή του ρητού ή του σημειακά πεπλεγμένου σχήματος επίλυσης εξαρτάται από τον χρήστη και ορίζεται μέσα στο αρχείο εισαγωγής δεδομένων με όνομα INP.DAT.

Με την έναρξη κάθε νέας επανάληψης και ανεξάρτητα της μεθόδου επίλυσης, που έχει επιλεγεί, υπολογίζεται το τοπικό χρονικό βήμα, που αντιστοιχεί σε κάθε κυψέλη ελέγχου, ή το ολικό χρονικό βήμα για όλες τις κυψέλες ελέγχου. Ανάλογα με την επιλογή του χρήστη, πάλι από το προαναφερθέν αρχείο εισαγωγής δεδομένων, υπολογίζεται το τοπικό ή το ολικό χρονικό βήμα σύμφωνα με τις σχέσεις (3.50) και (3.51) αντίστοιχα. Η απαραίτητη δομή δεδομένων με το ελάχιστο μήκος ακμής που αντιστοιχεί σε κάθε κόμβο ή το ελάχιστο μήκος όλων των ακμών, είναι διαθέσιμες από το τμήμα των βοηθητικών υπολογισμών. Ως κύρια συνιστώσα της ταχύτητας λαμβάνεται η συνιστώσα της στον y άξονα, όπως υποδεικνύεται και από το Σχήμα 5.3, ενώ τέλος η τιμή του αριθμού CFL ορίζεται και αυτή από τον χρήστη μέσα στο παραπάνω αναφερθέν αρχείο εισαγωγής δεδομένων. Με την ολοκλήρωση αυτών των υπολογισμών ξεκινάει πλέον η μεθοδολογία επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων.

5.3.3.2. Επαναληπτική Διαδικασία, Ρητό Σχήμα Επίλυσης.

Η μεθοδολογία ξεκινάει αποθηκεύοντας τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών κάθε κόμβου, που υπολογίστηκαν κατά την προηγούμενη επανάληψη. Οι τιμές αυτές είναι απαραίτητες στη συνέχεια για τον αριθμητικό υπολογισμό των σχέσεων (3.54). Στη συνέχεια εφαρμόζεται η βηματική μέθοδος επίλυσης Runge-Kutta τεσσάρων βημάτων (RK(4)). Τα τέσσερα βήματα της εν λόγω μεθόδου πρακτικά μεταφράζονται σε τέσσερις υποεπαναλήψεις, όπως υποδεικνύεται και από τις προαναφερθείσες σχέσεις (3.54). Οι υπολογισμοί, που περιγράφονται στη συνέχεια, εκτελούνται σε κάθε υποεπανάληψη της μεθόδου.

Με την έναρξη κάθε υποεπανάληψης μηδενίζεται η τιμή του μέσου υπολοίπου κάθε μιας εκ των πέντε συντηρητικών μεταβλητών. Το υπόλοιπο αναφέρεται σε όλους τους κόμβους του πλέγματος και ο μηδενισμός του σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητος, καθώς η τιμή του υπολογίζεται προσθετικά, όπως περιγράφεται και παρακάτω. Στη συνέχεια, για κάθε συντηρητική μεταβλητή κάθε κόμβου του πλέγματος μηδενίζεται η τιμή του όρου $\sum_{Q \in K_N(P)} \left(\vec{\Phi}_{PQ}\right)^m$ της εξίσωσης (3.53), καθώς και ο όρος αυτός υπολογίζεται προφανώς προσθετικά. Η μεταβλητή αυτή αποτελεί ουσιαστικά το άθροισμα ροών της κυψέλης ελέγχου, που αντιστοιχεί σε κάθε κόμβο.

Στη συνέχεια, καλούνται ορισμένες υπορουτίνες οι οποίες περιγράφονται αναλυτικά στις επόμενες παραγράφους. Η πρώτη εξ᾽ αυτών υπολογίζει για κάθε κόμβο τις τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών του συναρτήσει των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών, που υπολογίστηκαν από την προηγούμενη επανάληψη. Επιπλέον η υπορουτίνα αυτή ανανεώνει τις τιμές της θερμοκρασίας, της ταχύτητας του ήχου, του αριθμού Mach και της ολική ενθαλπίας σε κάθε κόμβο. Η επόμενη υπορουτίνα που καλείται υπολογίζει τους τυχόν όρους πηγής, οι οποίοι στα πλαίσια της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι μηδενικοί. Εν συνεχεία και εφόσον έχει επιλέξει ο χρήστης ακρίβεια δεύτερης τάξης και χρήση μίας εκ των διαθέσιμων συναρτήσεων περιορισμού van Leer-van Albada ή Barth-Jespersen, καλείται η κατάλληλη υπορουτίνα για τον υπολογισμό των απαραίτητων συντελεστών για την εφαρμογή αυτών των συναρτήσεων. Τέλος, καλείται μία συνάρτηση, η οποία έχει ως στόχο την εφαρμογή του σχήματος του Roe για κάθε ακμή του υπό εξέταση πλέγματος και την απόδοση του αντίστοιχου διανύσματος ροής για τους ακραίους κόμβους της. Η εν λόγω εφαρμογή εκτελείται με όμοιο τρόπο και για τα δύο σχήματα επίλυσης και για αυτό το λόγο αναλύεται ξεχωριστά στη συνέχεια σε επόμενη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου.

Επόμενο βήμα της μεθόδου αποτελεί ο υπολογισμός της επίδρασης των οριακών συνθηκών στο ισολογισμό των ροών κάθε κυψέλης ελέγχου. Σαρώνονται διαδοχικά όλα τα τρίγωνα του υπό εξέταση πλέγματος, ώστε να βρεθούν τα οριακά τρίγωνα, δηλαδή αυτά με δείκτη 1, 2, 3 ή 51. Οι υπολογισμοί που εκτελούνται είναι ίδιοι εφόσον ο δείκτης του τριγώνου είναι 2 ή 3, δηλαδή το τρίγωνο ανήκει στα όρια εισόδου/εξόδου, και ίδιοι εφόσον ο δείκτης του τριγώνου είναι 1 ή 51, δηλαδή το τρίγωνο ανήκει στην υπό εξέταση γεωμετρία ή στα πλαϊνά στερεά τοιχώματα.

Όσον αφορά τις οριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου, για κάθε οριακό τρίγωνο απαιτείται η επίλυση ενός προβλήματος Riemann με αντίστοιχο τρόπο με αυτόν της υπορουτίνας της εφαρμογής του σχήματος του Roe. Το πρόβλημα Riemann επιλύεται με ακρίβεια πρώτης τάξης μεταξύ της κατάστασης του υποθετικού κόμβου στο κέντρο της τριγωνικής έδρας και της υποθετικής κατάστασης out, που επικρατεί έξω από το χωρίο ροής και σε μεγάλη απόσταση από την υπό εξέταση γεωμετρία. Οι τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών έξω από το πεδίο ροής δίνονται από το χρήστη με το αρχείο εισαγωγής δεδομένων INP.DAT ή υπολογίζονται στο αρχικό τμήμα του αλγόριθμου, ενώ οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών αυτής της κατάστασης υπολογίζονται στην παρούσα εφαρμογή. Αντίθετα οι τιμές των πρωτευουσών και συντηρητικών μεταβλητών στο κέντρο του τριγώνου υπολογίζονται με αντίστοιχο τρόπο με τον υπολογισμό των συντεταγμένων του βαρυκέντρου, που περιγράφτηκε στο τμήμα των βοηθητικών υπολογισμών. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι μέσες κατά Roe τιμές, εφαρμόζοντας τη σχέση (3.24) για τις τέσσερις πρώτες πρωτεύουσες μεταβλητές και την ολική ενθαλπία, ενώ για την μέση πίεση εφαρμόζεται η σχέση (3.25). Επιπρόσθετα, υπολογίζεται η τιμή της μέσης ταχύτητας του ήχου σύμφωνα με τη σχέση (5.6), και το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας που προκύπτει από τις υπολογισμένες μέσες κατά Roe τιμές. Τέλος, υπολογίζεται το μέτρο του κάθετου διανύσματος στην τριγωνική επιφάνεια, καθώς και το μοναδιαίο αντίστοιχο διάνυσμα, αφού πρώτα έχει ανακληθεί η δομή δεδομένων που περιέχει τα οριακά διανύσματα και της οποίας οι τιμές είχαν υπολογισθεί κατά την εκτέλεση του προηγούμενου τμήματος του αλγορίθμου. Αφού έχουν υπολογιστεί όλα τα απαιτούμενα μεγέθη, υπολογίζονται οι πίνακες $\underline{\Lambda}_+, \underline{\Lambda}_-, \underline{T}$, $\underline{T}^{-1}$, $\underline{A}^+$ και $\underline{A}^-$ από τις αντίστοιχες σχέσεις του παραρτήματος Α. Οι τελευταίοι δύο πίνακες χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή της σχέσης (3.48), από την οποία αποδίδεται το ζητούμενο διάνυσμα ελεύθερης ροής $\vec{H}_{K,out}$, που αντιστοιχεί στο βαρύκεντρο του οριακού τριγώνου. Τέλος, το διάνυσμα που εξάγεται από τον παραπάνω υπολογισμό μοιράζεται στους τρεις κόμβους του οριακού τριγώνου. Στον ισολογισμό ροών του καθενός κόμβου του οριακού τριγώνου προστίθεται με θετικό πρόσημο το ένα τρίτο του διανύσματος ροής που υπολογίστηκε με τη μέθοδο που περιγράφηκε παραπάνω.

Όσον αφορά τις οριακές συνθήκες στερεού τοιχώματος, η συνθήκη μη εισχώρησης εφαρμόζεται με έμμεσο τρόπο στα οριακά τρίγωνα. Κατά τη σάρωση των οριακών εδρών με δείκτη 1 ή 51, προστίθενται στα αθροίσματα $\sum_{Q \in K_N(P)} \left(\vec{\Phi}_{PQ}\right)^m$ των κορυφών τους το διάνυσμα $\vec{H}_{wall}$ της σχέσης (3.47). Πιο συγκεκριμένα, στον ισολογισμό των ταχυτήτων ενός κόμβου οριακού τριγώνου στερεού τοιχώματος προστίθεται το γινόμενο της πίεσης, στον κόμβου αυτό, επί το ένα τρίτο της αντίστοιχης, με τη συνιστώσα της ταχύτητας, συνιστώσας του κάθετου διανύσματος στην τριγωνική έδρα αυτή. Ουσιαστικά, το διάνυσμα αυτό παριστάνει το τεχνητό διάνυσμα ροής, το οποίο εισέρχεται από το τοίχωμα στην κυψέλη ελέγχου του οριακού κόμβου και στο οποίο έχει μηδενιστεί η κατάλληλη συνιστώσα της ταχύτητας, υλοποιώντας έμμεσα τη συνθήκη μη-εισχώρησης.

Μετά τον υπολογισμό των αθροισμάτων είναι πλέον δυνατή η εφαρμογή των σχέσεων (3.52) και (3.53), ο συνδυασμός των οποίων δίνει την ακόλουθη σχέση:

$$V_P\left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_P = -\left(\sum_{Q\in K_N(P)}\left(\vec{\Phi}_{PQ}\right)^m + \vec{S}_P V_P\right) \qquad (5.22)$$

Η σχέση (5.22), μέσω της μεθόδου Runge-Kutta, εφαρμόζεται σε κάθε υποεπανάληψη και για κάθε συντηρητική μεταβλητή κάθε κόμβου του υπό εξέταση πλέγματος. Η σχέση επιλύεται ως προς το $d\vec{W}$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι πλέον γνωστοί, καθώς σε προηγούμενες υπορουτίνες έχουν υπολογιστεί οι όγκοι V_P των κυψελών ελέγχου, το τοπικό ή ολικό χρονικό βήμα dt για κάθε κόμβο, τα αθροίσματα των διανυσμάτων ροής $\sum_{Q\in K_N(P)}\left(\vec{\Phi}_{PQ}\right)^m$ και οι όροι πηγής $\vec{S}_P$. Αφού υπολογιστεί για κάθε μεταβλητή η μεταβολή της τιμής της $d\vec{W}$, και έχοντας ήδη αποθηκεύσει τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών κάθε κόμβου, που υπολογίστηκαν κατά την προηγούμενη επανάληψη, υπολογίζονται οι νέες τιμές των μεταβλητών, λαμβάνοντας υπόψη βέβαια και τους συντελεστές της μεθόδου Runge-Kutta από τη σχέση (3.55). Τέλος, υπολογίζεται και η μέση μεταβολή κάθε συντηρητικής μεταβλητής στους κόμβους του πλέγματος, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια στο τελικό τμήμα του αλγορίθμου.

5.3.3.3. Επαναληπτική Διαδικασία, Σημειακά Πεπλεγμένο Σχήμα Επίλυσης.

Σε γενικές γραμμές η μεθοδολογία της παρούσας παραγράφου παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Εντούτοις, ο υπολογισμός των δύο περαιτέρω δομών δεδομένων, δηλαδή του διαγώνιου και μη διαγώνιου πίνακα για κάθε κόμβο του υπό εξέταση πλέγματος, που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 3 της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, αυξάνει την πολυπλοκότητα του κώδικα. Ανεξάρτητα όμως από την αύξηση της πολυπλοκότητας του λογισμικού, θεωρείται προτιμητέα μέθοδος, λόγω ότι οδηγεί πολύ γρήγορα σε σύγκλιση της λύσης. Στη συνέχεια της παραγράφου πραγματοποιείται εκτενής περιγραφή της εφαρμογής του σχήματος στο εν λόγω λογισμικό.

Το σημειακά πεπλεγμένο σχήμα ξεκινάει όπως και το ρητό σχήμα επίλυσης με το μηδενισμό των διανυσμάτων ροής όλων των κόμβων του πλέγματος, καθώς και με το μηδενισμό της τιμής του μέσου υπολοίπου κάθε μιας εκ των πέντε συντηρητικών μεταβλητών. Στη συνέχεια και ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με την προηγούμενη μέθοδο, καλεί τις υπορουτίνες, για τον υπολογισμό των πρωτευουσών μεταβλητών όλων των κόμβων, για τον υπολογισμό των όρων πηγής και για τον υπολογισμό των απαραίτητων συντελεστών για την εφαρμογή των συναρτήσεων περιορισμού van Leer-van Albada ή Barth-Jespersen, στην περίπτωση που έχει επιλέξει ο χρήστης ακρίβεια δευτέρας τάξης. Η διαφορά του σημειακά πεπλεγμένου σχήματος επίλυσης με το ρητό μέχρι αυτό το σημείο είναι ότι στο πρώτο δεν έχουν ξεκινήσει ακόμα οι εσωτερικές επαναλήψεις (υποεπαναλήψεις).

Στη συνέχεια διαφοροποιείται η σημειακά πεπλεγμένη μέθοδος επίλυσης, καθώς εμφανίζονται οι προαναφερθέντες δομές δεδομένων. Αρχικά μηδενίζονται οι διαγώνιοι πίνακες για όλους του κόμβους και οι μη-διαγώνιοι πίνακες των αριστερών και δεξιών κόμβων όλων των ακμών. Σε αυτό το σημείο ξεκινάει η σάρωση όλων των ακμών του υπό εξέταση πλέγματος. Αρχικά υπολογίζονται οι μέσες κατά Roe τιμές στο μέσο της κάθε ακμής καθώς και οι υπόλοιπες απαραίτητες μεταβλητές για τον υπολογισμό του Ιακωβιανού Μητρώου $\underline{A}^{+}$, εφαρμόζοντας ακρίβεια πρώτης τάξης, ενώ τελικά υπολογίζεται και το εν λόγω μητρώο. Κατόπιν υπολογίζεται το Ιακωβιανό μητρώο $\underline{A}$ για το δεξιό κόμβο της υπό εξέτασης ακμής. Εν συνεχεία σύμφωνα με τις σχέσεις (3.68) και (3.69) τα υπολογισθέντα μητρώα συνεισφέρουν στον υπολογισμό των διαγώνιων και μη διαγώνιων πινάκων των κόμβων του πλέγματος.

Το επόμενο βήμα της εν λόγω μεθόδου είναι πανομοιότυπο με αυτό του ρητού σχήματος. Καλείται η συνάρτηση που εφαρμόζει το σχήμα του Roe για κάθε ακμή του υπό εξέταση πλέγματος και αποδίδει το αντίστοιχο διάνυσμα ροής για τους ακραίους κόμβους της. Όπως προαναφέρθηκε, η εν λόγω εφαρμογή εκτελείται με όμοιο τρόπο και για τα δύο σχήματα επίλυσης και για αυτό το λόγο αναλύεται σε επόμενη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου.

Η μεθοδολογία προχωράει με τον υπολογισμό της επίδρασης των οριακών συνθηκών στο ισολογισμό των ροών κάθε κυψέλης ελέγχου, καθώς και στους διαγώνιους πίνακες των κόμβων. Και σε αυτήν την περίπτωση σαρώνονται διαδοχικά όλα τα τρίγωνα του υπό εξέταση πλέγματος, ώστε να βρεθούν τα οριακά τρίγωνα, δηλαδή αυτά με δείκτη 1, 2, 3 ή 51. Όσον αφορά τη συνεισφορά των οριακών συνθηκών στον ισολογισμό ροής της κυψέλης ελέγχου κάθε κόμβου του υπό εξέταση πλέγματος, η διαδικασία είναι ακριβώς ίδια και για τα δύο σχήματα. Η διαφοροποίηση έγκειται στον υπολογισμό της συνεισφοράς των οριακών συνθηκών στο διαγώνιο πίνακα των κόμβων των οριακών τριγωνικών εδρών.

Όσον αφορά τα τρίγωνα που ανήκουν στις επιφάνειες εισόδου/εξόδου, σύμφωνα με τη σχέση (3.70), προστίθεται στους διαγώνιους πίνακες των κόμβων τους το Ιακωβιανό μητρώο $\underline{A}^{+}$, διαιρεμένο δια τρία, σταθμισμένο δηλαδή στους τρεις κόμβους του οριακού τριγώνου. Υπενθυμίζεται ότι το εν λόγω μητρώο έχει βρεθεί λύνοντας ένα πρόβλημα Riemann με ακρίβεια πρώτης τάξης μεταξύ της κατάστασης του υποθετικού κόμβου στο κέντρο της τριγωνικής έδρας και της υποθετικής κατάστασης out, που επικρατεί έξω από το χωρίο ροής και σε μεγάλη απόσταση από την υπό εξέταση γεωμετρία.

Όσον αφορά τα τρίγωνα που ανήκουν στις επιφάνειες στερεών τοιχωμάτων, η διαγώνια συνεισφορά είναι περισσότερο πολύπλοκη. Στους όρους των τριών γραμμών των συνιστωσών στους τρεις άξονες της ταχύτητας του διαγώνιου πίνακα κάθε κόμβου του υπό εξέταση οριακού τριγώνου προστίθεται ένας ακόμη όρος. Ο όρος αυτός είναι η παράγωγος του αντίστοιχου διανύσματος ροής ως προς την αντίστοιχη συντηρητική μεταβλητή σύμφωνα με τη σχέση (3.71). Ο όρος αυτός είναι και πάλι διαιρεμένος με τον αριθμό τρία, λόγω της στάθμισης του κάθετου διανύσματος στην τριγωνική έδρα στους τρεις κόμβους της. Ως εκ τούτου για κάθε κόμβο, υπολογίζονται δεκαπέντε νέοι όροι, πέντε για κάθε συνιστώσα της ταχύτητας, και προστίθενται στο διαγώνιο πίνακα.

Στη συνέχεια σαρώνονται και πάλι όλοι οι κόμβοι του υπό εξέταση πλέγματος, ώστε να προστεθεί και ο τελευταίος όρος στους διαγώνιους πίνακες τους, πριν την αντιστροφή τους. Σύμφωνα με τη σχέση (3.58) ο τελευταίος αυτός όρος είναι ο όγκος της κυψέλης ελέγχου κάθε κόμβου, διαιρεμένος με το τοπικό ή ολικό χρονικό βήμα. Σε αυτό το σημείο έχει ολοκληρωθεί πλέον η κατασκευή των διαγώνιων και μη-διαγώνιων πινάκων όλων των κόμβων του πλέγματος. Κατόπιν και σύμφωνα με τη σχέση (3.75) ο διαγώνιος πίνακας κάθε κόμβου αντιστρέφεται. Για την εύρεση των αντίστροφων των διαγώνιων πινάκων καλείται κατάλληλη συνάρτηση, η οποία στηρίζει την αντιστροφή στην διάσπαση LU.

Από το σημείο αυτό και πέρα ξεκινούν οι εσωτερικές επαναλήψεις της μεθόδου, για τον αριθμό των οποίων έχει αναφερθεί ήδη, ότι επιλέγεται από το χρήστη για το εκάστοτε πρόβλημα με το αρχείο εισαγωγής δεδομένων INP.DAT. Οι υπολογισμοί της πρώτης επανάληψης πραγματοποιούνται σύμφωνα με τη σχέση (3.74), ενώ στη συνέχεια σύμφωνα με τη σχέση (3.75). Ως εκ τούτου, στην πρώτη επανάληψη σαρώνονται οι κόμβοι του πλέγματος και υπολογίζεται το δεξιό σκέλος της σχέσης (3.58) και κατόπιν η μεταβολή των συντηρητικών μεταβλητών για καθένα από αυτούς σύμφωνα με τη σχέση (3.74). Επιπρόσθετα, υπολογίζεται και η μέση μεταβολή κάθε συντηρητικής μεταβλητής τους. Στις επόμενες επαναλήψεις, πραγματοποιείται σάρωση όλων των ακμών του πλέγματος και για κάθε ένα από τους ακραίους κόμβους κάθε μίας από αυτές υπολογίζεται το γινόμενο του μη-διαγώνιου πίνακα του υπό εξέταση κόμβου με τη μεταβολή κάθε συντηρητικής μεταβλητής του άλλου κόμβου της ακμής, η οποία υπολογίστηκε κατά την προηγούμενη επανάληψη. Κατόπιν, ξεκινάει η διαδικασία Red-Black, κατά την οποία σαρώνονται πρώτα οι κόμβοι με περιττό αύξων αριθμό και μετά οι κόμβοι με άρτιο αύξων αριθμό. Για κάθε κόμβο και για κάθε μεταβλητή του υπολογίζεται και ο άλλος όρος της σχέσης (3.75) και προστίθεται στο προηγούμενα υπολογισθέν γινόμενο, ενώ κατόπιν πολλαπλασιάζεται με τον κατάλληλο όρο του αντίστοιχου διαγώνιου πίνακα. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζεται η ζητούμενη μεταβολή των συντηρητικών μεταβλητών κάθε κόμβου του πλέγματος. Τέλος, υπολογίζεται και η μέση μεταβολή κάθε συντηρητικής μεταβλητής των κόμβων. Η διαδικασία συνεχίζεται ωσότου ολοκληρωθεί ο αριθμός των εσωτερικών επαναλήψεων που έχει ορίσει ο χρήστης.

Η εφαρμογή της μεθόδου ολοκληρώνεται με την ανανέωση των συντηρητικών μεταβλητών όλων των κόμβων. Σαρώνονται και πάλι όλοι οι κόμβοι του υπό εξέταση πλέγματος και υπολογίζονται οι συντηρητικές τους μεταβλητές σύμφωνα με τη σχέση (3.60). Έπειτα, υπολογίζεται και η μέση μεταβολή κάθε συντηρητικής μεταβλητής στους κόμβους του πλέγματος, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια στο τελικό τμήμα του αλγορίθμου. Τέλος, μεταβάλλεται η τιμή του αριθμού CFL, εφόσον δεν έχει ήδη φτάσει τη μέγιστη τιμή που έχει ορίσει ο χρήστης. Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 3, η εκκίνηση της επίλυσης γίνεται με πολύ μικρή τιμή του αριθμού CFL. Στη συνέχεια ο αριθμός αυτός αυξάνει γεωμετρικά με τις επαναλήψεις έως τη μέγιστη τιμή του, την οποία και διατηρεί σταθερή στη συνέχεια της βελτιστοποίησης.

5.3.3.4. Υπολογισμός Πρωτευουσών Μεταβλητών.

Η υπορουτίνα αυτή καλείται κατά την επαναληπτική διαδικασία και έχει ως στόχο την ανανέωση των τιμών των μεταβλητών σε κάθε κόμβο σύμφωνα με τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών, όπως αυτές διαμορφώθηκαν κατά την προηγούμενη επανάληψη. Γνωρίζοντας τις τιμές του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών (5.10) για κάθε κόμβο του πλέγματος, υπολογίζονται οι τιμές που αντιστοιχούν στο διάνυσμα των πρωτευουσών μεταβλητών (5.9) του. Επισημαίνεται ότι, η τιμή της πίεσης p υπολογίζεται από τη σχέση (3.6), ενώ η θερμοκρασία T υπολογίζεται από τη σχέση (3.4). Επιπλέον, σε κάθε κόμβο ανανεώνεται η τιμή της ταχύτητας του ήχου σύμφωνα με τη σχέση (5.6), του αριθμού Mach σύμφωνα με τη σχέση (5.4) και της ολικής ειδικής ενθαλπίας σύμφωνα με τη σχέση (3.7).

5.3.3.5. Υπολογισμός Ορών Πηγής.

Η υπορουτίνα αυτή όπως και η προηγούμενη, καλείται κατά την επαναληπτική διαδικασία και έχει ως στόχο τον υπολογισμό των ορών πηγής που παρουσιάζονται στη σχέση (5.22). Ουσιαστικά, δεν γίνεται υπολογισμός αλλά απευθείας ανάθεση τιμών. Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία δεν υπάρχουν πηγές, συνεπώς μηδενίζονται οι όροι πηγής για κάθε κόμβο.

5.3.3.6. Υπολογισμός Συντελεστών Συναρτήσεων Περιορισμού.

Δύο ακόμα υπορουτίνες, οι οποίες καλούνται κατά την επαναληπτική διαδικασία είναι οι υπορουτίνες υπολογισμού των απαραίτητων συντελεστών για τις συναρτήσεις περιορισμού των van Leer-van Albada και των Barth-Jespersen σε όλους τους κόμβους του υπό εξέταση πλέγματος. Οι υπορουτίνες αυτές καλούνται βέβαια μόνο αν ο χρήστης έχει επιλέξει ακρίβεια δεύτερης τάξης για την επίλυση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Η πρώτη υπορουτίνα έχει ως στόχο τον υπολογισμό των κλίσεων των πρωτευουσών ή των συντηρητικών μεταβλητών για όλους τους κόμβους του πλέγματος και τη δημιουργία της κατάλληλης δομής δεδομένων. Η επιλογή των πρωτευουσών ή των συντηρητικών μεταβλητών γίνεται και πάλι από το χρήστη με το αρχείο εισαγωγής δεδομένων INP.DAT. Η υπορουτίνα ξεκινάει με το μηδενισμό όλων των στοιχείων της δομής δεδομένων. Έπειτα, σαρώνονται όλες οι ακμές του πλέγματος και υπολογίζονται για κάθε μία οι μέσες τιμές των πέντε πρωτευουσών ή συντηρητικών μεταβλητών από τις αντίστοιχες μεταβλητές των ακραίων κόμβων της. Κατόπιν, η κάθε μέση αυτή τιμή πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα της ακμής, που έχει υπολογισθεί από το τμήμα των βοηθητικών υπολογισμών του αλγορίθμου. Το γινόμενο αυτό προστίθεται στην κλίση της αντίστοιχης μεταβλητής του αριστερού κόμβου, διαιρεμένο με τον όγκο της κυψέλης ελέγχου του ίδιου κόμβου. Αντίστοιχα, το γινόμενο αυτό αφαιρείται από την κλίση της αντίστοιχης μεταβλητής του δεξιού κόμβου, διαιρεμένο με τον όγκο της κυψέλης ελέγχου του ίδιου κόμβου. Αφού σαρωθούν όλες οι ακμές του πλέγματος, έχουν πλέον υπολογιστεί αθροιστικά οι κλίσεις όλων των εσωτερικών κόμβων. Για τους κόμβους που υπόκεινται στις οριακές συνθήκες σαρώνονται όλα τα οριακά τρίγωνα και προστίθεται στην κλίση κάθε μεταβλητής, πρωτεύουσας ή συντηρητικής, κάθε κόμβου τους το γινόμενο της αντίστοιχης μεταβλητής στο κόμβο αυτόν με το κάθετο διάνυσμα στην οριακή αυτή έδρα, διαιρεμένο με τον αριθμό τρία και τον όγκο της κυψέλης ελέγχου αυτού του κόμβου. Με το τέλος της σάρωσης αυτής, έχει υπολογιστεί η ζητούμενη δομή δεδομένων, η οποία χρησιμοποιείται και από τις δύο συναρτήσεις περιορισμού που περιλαμβάνει το εν λόγω λογισμικό.

Η δεύτερη υπορουτίνα αντίθετα με την πρώτη χρησιμοποιείται μόνο για την περίπτωση επιλογής από το χρήστη του επιλύτη των Barth-Jespersen. Στόχο της εν λόγω υπορουτίνας αποτελεί ο υπολογισμός του συντελεστή Ψ που εμφανίζεται στις σχέσεις (3.36) και (3.37). Η υπορουτίνα ξεκινάει αποδίδοντας τιμές στις $\vec{U}_{\max}$ και $\vec{U}_{\min}$ των σχέσεων (3.41) και (3.42) κάθε κόμβου τις τιμές των αντίστοιχων πρωτευουσών ή συντηρητικών μεταβλητών τους. Ταυτόχρονα αποδίδει και μία πολύ μεγάλη τιμή στους συντελεστές Ψ κάθε μεταβλητής κάθε κόμβου. Κατόπιν σαρώνει όλες τις ακμές του πλέγματος και αποδίδει τις ανάλογες τιμές στις $\vec{U}_{\max}$ και $\vec{U}_{\min}$ για κάθε μεταβλητή κάθε κόμβου. Υπενθυμίζεται ότι $\vec{U}_{\max}$ μίας μεταβλητής ενός κόμβου είναι η μέγιστη από τις τιμές της αντίστοιχης μεταβλητής που κατέχουν οι γύρω κόμβοι του σε απόσταση μίας ακμής, συμπεριλαμβανομένου και της αντίστοιχης τιμής του ίδιου του κόμβου. $\vec{U}_{\min}$ μίας μεταβλητής ενός κόμβου είναι αντίστοιχα η ελάχιστη από τις τιμές της αντίστοιχης μεταβλητής που κατέχουν οι γύρω κόμβοι του σε απόσταση μίας ακμής, συμπεριλαμβανομένου και της αντίστοιχης τιμής του ίδιου του κόμβου. Τέλος, σαρώνονται ξανά όλες οι ακμές του υπό εξέταση πλέγματος και εκτελούνται οι υπολογισμοί των σχέσεων (3.38) – (3.45), ενώ τα αποτελέσματα αποθηκεύονται στην προαναφερθείσα δομή δεδομένων ώστε να χρησιμοποιηθούν κατά την επαναληπτική διαδικασία.

5.3.3.7. Εφαρμογή Σχήματος του Roe.

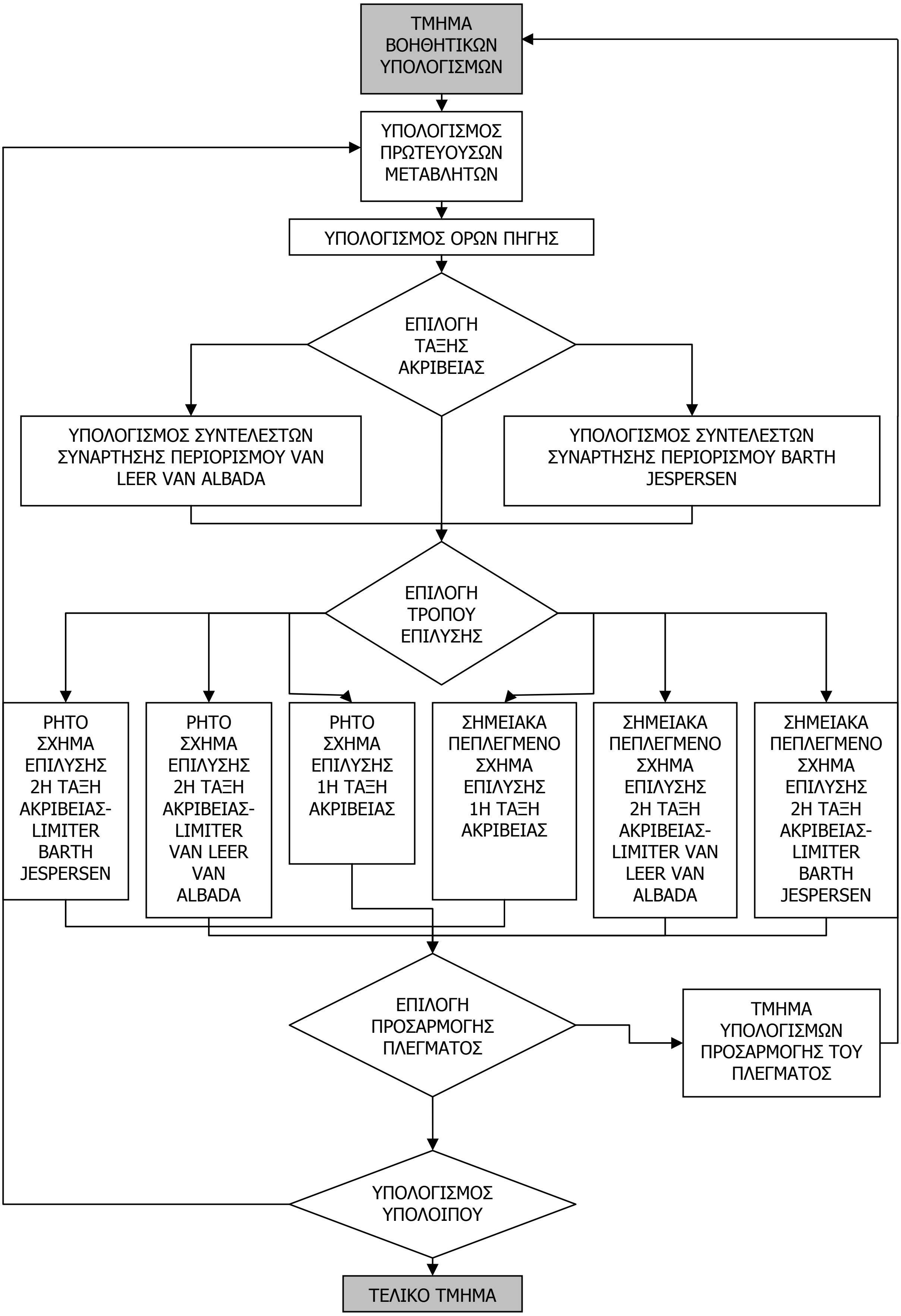
Η υπορουτίνα της εφαρμογής του σχήματος του Roe είναι η σημαντικότερη υπορουτίνα που καλείται κατά την επαναληπτική διαδικασία, καθώς σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου υπολογίζει τα αθροίσματα των διανυσμάτων ροής, που εισέρχονται και εξέρχονται από κάθε κυψέλη ελέγχου. Ο ισολογισμός αυτός καθορίζει ουσιαστικά και τις νέες τιμές, που λαμβάνουν οι συντηρητικές μεταβλητές. Το άθροισμα των ροών, που συμβολίζεται με τον όρο $\sum_{Q \in K_N(P)} \left(\vec{\Phi}_{PQ}\right)^m$ στην εξίσωση (5.22), υπολογίζεται με την εφαρμογή του προσεγγιστικού επιλύτη Riemann του Roe.

Η εν λόγω υπορουτίνα σαρώνει όλες τις ακμές του υπό εξέταση πλέγματος και εκτελεί για καθεμία από αυτές τους απαραίτητους υπολογισμούς, ώστε να εξάγει στο τέλος την επιθυμητή δομή δεδομένων με τα αθροίσματα των διανυσμάτων ροής κάθε κόμβου. Για κάθε ακμή ανακτώνται από τις δομές δεδομένων οι δύο ακραίοι κόμβοι και για κάθε κόμβο οι πέντε πρωτεύουσες ή συντηρητικές μεταβλητές καθώς και η ολική ενθαλπία του. Στη συνέχεια, ανάλογα με τις επιλογές του χρήστη υπολογίζονται ή όχι οι διορθωμένες μεταβλητές στους κόμβους της υπό εξέτασης ακμής. Εάν ο χρήστης έχει επιλέξει ακρίβεια πρώτης τάξης μετά την ανάκτηση των προαναφερόμενων δεδομένων η διαδικασία προχωράει στο επόμενο βήμα. Αν έχει επιλέξει ακρίβεια δευτέρας τάξης με τη συνάρτηση περιορισμού των van Leer-van Albada, τότε υπολογίζονται οι διορθωμένες τιμές των μεταβλητών των ακραίων κόμβων σύμφωνα με τις σχέσεις (3.30) - (3.35). Ενώ αν έχει επιλέξει ακρίβεια δευτέρας τάξης με τη συνάρτηση περιορισμού των Barth-Jespersen, τότε υπολογίζονται οι διορθωμένες τιμές των μεταβλητών των ακραίων κόμβων σύμφωνα με τις σχέσεις (3.36) - (3.37). Και για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις έχουν υπολογιστεί από προηγούμενες υπορουτίνες οι απαραίτητοι συντελεστές. Τέλος, αν ο χρήστης έχει επιλέξει τις συντηρητικές μεταβλητές ως τις μεταβλητές εφαρμογής των συναρτήσεων περιορισμού, τότε γίνονται οι υπολογισμοί των διορθωμένων τιμών των συντηρητικών μεταβλητών και στη συνέχεια μετατρέπονται σε πρωτεύουσες.

Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας υπολογίζονται οι μέσες κατά Roe τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών, εφαρμόζοντας τη σχέση (3.24). Η προαναφερθείσα σχέση εφαρμόζεται για τον υπολογισμό των πρώτων τεσσάρων μέσων πρωτευουσών μεταβλητών και της μέσης ολικής ενθαλπίας. Η μέση τιμή της πίεσης υπολογίζεται από τη σχέση (3.25), χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες μέσες τιμές της ολικής ενθαλπίας, της ταχύτητας και της πυκνότητας. Τέλος, υπολογίζεται και η μέση ταχύτητα του ήχου σύμφωνα με τη σχέση (5.6), χρησιμοποιώντας τις μέσες τιμές που υπολογίσθηκαν πρωτύτερα. Οι μέσες κατά Roe τιμές των μεγεθών αξιοποιούνται στη συνέχεια για τον υπολογισμό των πινάκων, που παρουσιάζονται στο παράρτημα Α. Αφού υπολογιστεί πλέον και το Ιακωβιανό μητρώο Α είναι δυνατός ο υπολογισμός του διανύσματος ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$, που αντιστοιχεί στην ακμή $\overrightarrow{PQ}$, σύμφωνα με τη σχέση (3.22).

Το διάνυσμα ροής που υπολογίστηκε για την υπό εξέταση ακμή, συνεισφέρει στον ισολογισμό ροών των ακραίων κόμβων της. Αυτό γίνεται συνεισφέροντας με το κατάλληλο πρόσημο στον υπολογισμό του όρου $\sum_{Q \in K_N(P)} \left(\vec{\Phi}_{PQ}\right)^m$, που εμφανίζεται στη σχέση (5.22). Ως εκ τούτου το υπολογισθέν διάνυσμα ροής προστίθεται με θετικό πρόσημο στο άθροισμα των ροών του αριστερού κόμβου, και με αρνητικό πρόσημο στο αντίστοιχο του δεξιού.

Εν κατακλείδι, η υπορουτίνα εκτελεί τα προαναφερόμενα για όλες τις ακμές του υπό εξέταση πλέγματος, υπολογίζοντας για καθεμιά το διάνυσμα ροής και συνεισφέροντας κατάλληλα στο άθροισμα ροών των ακραίων κόμβων της. Σαρώνοντας όλες τις ακμές, υπολογίζονται έμμεσα τα αθροίσματα των ροών στους κόμβους τους, λαμβάνοντας υπόψη τα διανύσματα ροών όλων των ακμών που ανήκει κάθε κόμβος.



Σχήμα 5.9: Διάγραμμα ροής τμήματος κύριων υπολογισμών.

5.3.4. Τμήμα Υπολογισμών Προσαρμογής του Πλέγματος.

Επόμενο τμήμα του λογισμικού που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας αποτελεί το τμήμα των υπολογισμών για την προσαρμογή του πλέγματος (Σχήμα 5.10). Όπως ήδη αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 4 του παρόντος, ο αριθμός των προσαρμογών του πλέγματος, καθώς και οι επαναλήψεις στις οποίες υλοποιούνται καθορίζονται από τον εκάστοτε χρήστη με το αρχείο εισαγωγής δεδομένων INP.DAT. Ως εκ τούτου η εν λόγω υπορουτίνα ξεκινά κάθε φορά με τη σύγκριση του αριθμού της τρέχουσας επανάληψης με τους προκαθορισμένους για προσαρμογή αριθμούς επαναλήψεων. Εφόσον δεν υπάρχει ταυτοποίηση η επαναληπτική διαδικασία συνεχίζεται. Αντίθετα εάν υφίσταται ταυτοποίηση εφαρμόζεται η εν λόγω υπορουτίνα.

Πρώτο βήμα της υπορουτίνας αποτελεί η δυναμική ανακατανομή της μνήμης και κατά συνέπεια της χωρητικότητας των υφιστάμενων δομών δεδομένων, ώστε να αποθηκευθούν τα νέα στοιχεία, που θα προκύψουν από την προσαρμογή του πλέγματος. Για παράδειγμα η χωρητικότητα της δομής δεδομένων της συντεταγμένης στο x άξονα όλων των κόμβων διπλασιάζεται, ώστε να μπορεί να καλύψει ακόμα και την περίπτωση που διχοτομηθούν όλες οι ενεργές ακμές του πλέγματος και δημιουργηθούν σε αυτές νέοι κόμβοι ως μεσοκόμβοι τους.

Στη συνέχεια εφαρμόζεται το κριτήριο σημείωσης των κατάλληλων για προσαρμογή ακμών του πλέγματος. Όπως προαναφέρθηκε το εν λόγω κριτήριο επιλέγεται και πάλι από τον εκάστοτε χρήστη με το αρχείο εισαγωγής δεδομένων INP.DAT. Στο περιγραφόμενο λογισμικό έχουν δημιουργηθεί πέντε κριτήρια προσαρμογής, εκ των οποίων το πρώτο χρησιμοποιεί τη σχέση (4.4). Η συνάρτηση κρίσης f για κάθε ακμή είναι το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών των αντίστοιχων συνιστωσών της ταχύτητας των δύο ακραίων κόμβων της ενώ οι συντελεστές A και C παίρνουν τις τιμές 0,75 και 2 αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα παραπάνω σαρώνονται όλες οι ακμές του πλέγματος και υπολογίζονται οι τιμές της συνάρτησης κρίσης τους. Έπειτα σύμφωνα με την προαναφερθείσα σχέση υπολογίζεται η f_{cri}, ενώ κατόπιν σαρώνονται και πάλι όλες οι ακμές του υπό εξέταση πλέγματος και εφόσον η τιμή της συνάρτησης κρίσης f μίας ακμής είναι μεγαλύτερη ή ίση από την τιμή της f_{cri}, τότε σημειώνεται για εμπλουτισμό. Το δεύτερο κριτήριο προσαρμογής είναι απλούστερο, καθώς οδηγεί μία ακμή σε σημείωση εφόσον ο αριθμός Mach σε έναν τουλάχιστον από τους δύο ακραίους κόμβους της είναι μεγαλύτερος από 0,98. Αντίθετα, η υπορουτίνα του τρίτου κριτηρίου προσαρμογής αποτελεί συνδυασμό των δύο παραπάνω κριτηρίων, καθώς εφαρμόζει το πρώτο κριτήριο για την πρώτη προσαρμογή, ενώ για τις επόμενες εφαρμόζει και τα δύο πρώτα κριτήρια. Τέλος, το τέταρτο κριτήριο προσαρμογής του πλέγματος οδηγεί μία ακμή σε σημείωση, εφόσον ανήκει σε οριακό τρίγωνο της υπό εξέτασης γεωμετρίας, ενώ το πέμπτο κριτήριο οδηγεί μία ακμή σε σημείωση, εφόσον ανήκει σε οριακό τετράεδρο της υπό εξέτασης γεωμετρίας.

Επόμενο στάδιο του εν λόγω τμήματος αποτελεί η διάχυση της «πληροφορίας» στο υπό εξέταση πλέγμα και η εύρεση των υποψήφιων τετραέδρων προς εμπλουτισμό. Σε αυτό το στάδιο σαρώνονται όλα τα ενεργά τετράεδρα του πλέγματος και διαδοχικά σαρώνονται όλες οι έδρες τους και όλες οι ακμές τους, ώστε να εφαρμοστούν οι επτά κανόνες της παραγράφου 4.5. Π.χ. έστω ότι με τις παραπάνω σαρώσεις για ένα τετράεδρο βρίσκεται ότι έχουν σημειωθεί τέσσερις από τις έξι ακμές του. Σύμφωνα με τον κανόνα της προαναφερθείσας παραγράφου θα σημειωθούν και οι άλλες δύο ακμές του και το τετράεδρο θα σημειωθεί για εμπλουτισμό σε οκτώ νέα τετράεδρα. Το πλέγμα σαρώνεται αρκετές φορές, ώστε να διαδοθεί πλήρως η «πληροφορία». Ο αριθμός των σαρώσεων εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, αλλά συνήθως δέκα με δεκαπέντε επαναλήψεις είναι αρκετές, γεγονός που επιβεβαιώθηκε και από το παρόν πρόγραμμα αλλά και από τη βιβλιογραφία [AGARD-R-787]. Οι σαρώσεις αυτές παύουν εφόσον ο αριθμός των σημειωμένων ακμών όλου του υπό εξέταση πλέγματος σταθεροποιηθεί.

Αφού διαδοθεί η «πληροφορία» και βρεθούν όλες οι ακμές που πρόκειται να διχοτομηθούν, απαιτείται ο έλεγχος των υποψήφιων για εμπλουτισμό τετραέδρων, ώστε να διαπιστωθεί ότι δεν έχει σημειωθεί η ακμή τετραέδρου που προέρχεται από προηγούμενη προσαρμογή του μητρικού του τετραέδρου του σε δύο ή τέσσερα νέα τετράεδρα. Εφόσον συντρέχει αυτή η περίπτωση απαιτείται η απενεργοποίηση αυτών των νέων τετραέδρων και η ενεργοποίηση του μητρικού τους. Ως εκ τούτου σαρώνονται και πάλι όλα τα τετράεδρα, εντοπίζονται τα προαναφερθέντα τετράεδρα, απενεργοποιούνται αυτά και τα αδέλφια τετράεδρα τους, ενώ ταυτόχρονα ενεργοποιούνται τα μητρικά τους. Εάν ένα μητρικό τετράεδρο, που είχε διασπαστεί σε τέσσερα νέα τετράεδρα, ενεργοποιηθεί ξανά τότε σημειώνονται όλες οι πλευρές του για εμπλουτισμό. Αντίθετα, εάν ένα μητρικό τετράεδρο, που είχε διασπαστεί σε δύο νέα τετράεδρα, ενεργοποιηθεί ξανά τότε απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση σύμφωνα με τους κανόνες του εμπλουτισμού, για το αν θα σημειωθούν οι ακμές του για εμπλουτισμό σε τέσσερα ή οκτώ νέα τετράεδρα. Αφού ολοκληρωθεί και αυτή η διαδικασία, τότε τα επανεργοποιημένα τετράεδρα εμπλουτίζονται σύμφωνα με τον αριθμό των ακμών τους που έχουν σημειωθεί. Η διαδικασία είναι πανομοιότυπη με τη διαδικασία που θα περιγραφεί παρακάτω για όλα τα υπόλοιπα ενεργά τετράεδρα. Αφού έρθουν στο ίδιο «επίπεδο» εμπλουτισμού όλα τα τετράεδρα, η όλη διαδικασία ξεκινάει πάλι από το σημείο της διάδοσης της «πληροφορίας». Επισημαίνεται, ότι υπάρχει περίπτωση η διαδικασία απενεργοποίησης τετραέδρων και ενεργοποίησης των μητρικών να πραγματοποιηθεί και δεύτερη φορά, λόγω της περίπτωσης, που ένα μητρικό τετράεδρο που είχε διασπαστεί αρχικά σε δύο τετράεδρα επανεργοποιηθεί και σημειωθεί για εμπλουτισμό σε τέσσερα νέα τετράεδρα. Εάν στη συνέχεια σημειωθούν και οι υπόλοιπες ακμές του τότε τα τετράεδρα παιδιά του απενεργοποιούνται ξανά, ενώ το ίδιο επανεργοποιείται και σημειώνεται για εμπλουτισμό σε οκτώ νέα τετράεδρα.

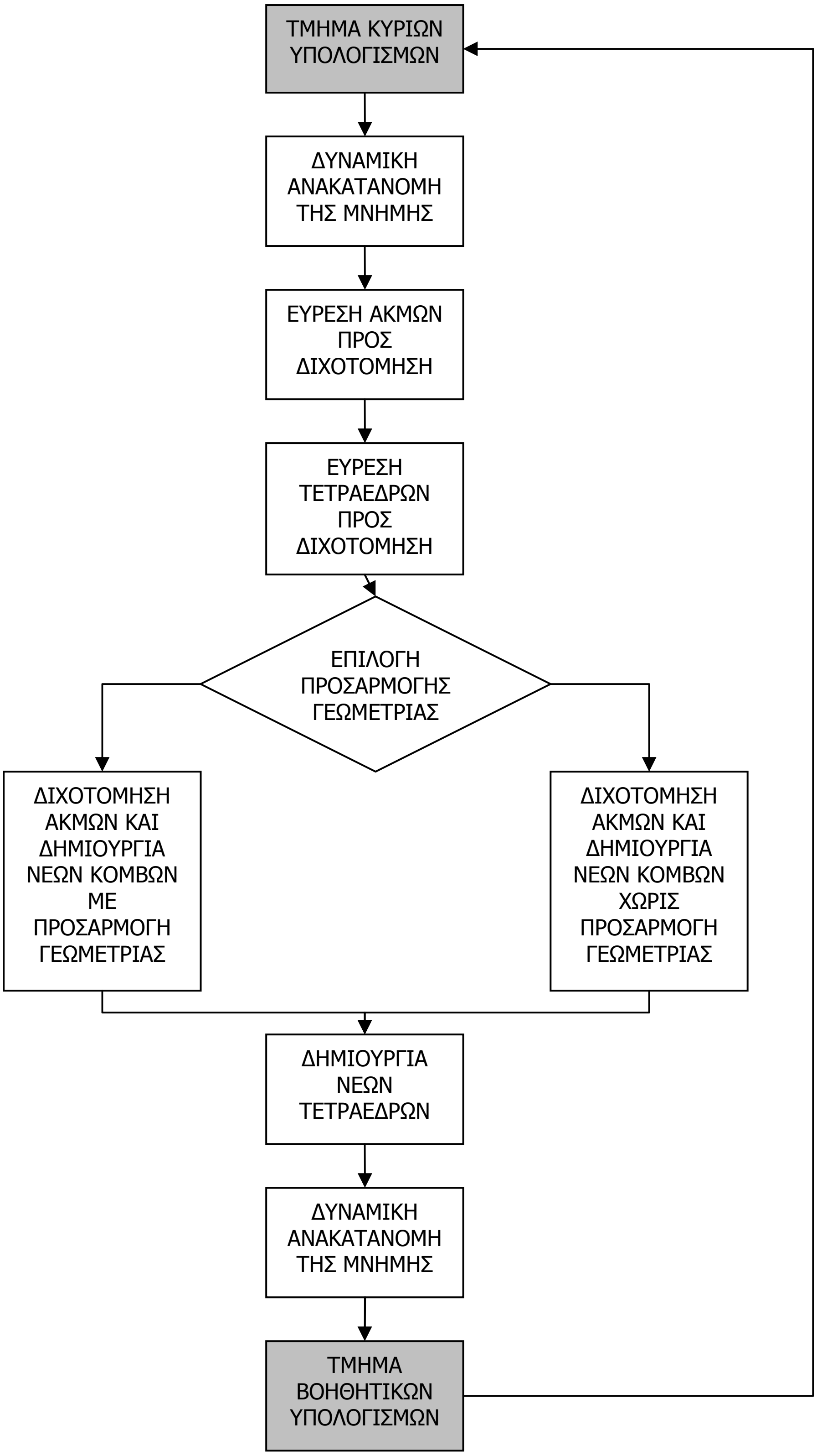
Το επόμενο βήμα του τμήματος της προσαρμογής του πλέγματος αποτελεί η διχοτόμηση των ακμών και δημιουργία νέων κόμβων, ενώ συμπεριλαμβάνεται επίσης και η διαδικασία της προσαρμογής της γεωμετρίας, εφόσον βέβαια το έχει επιλέξει ο εκάστοτε χρήστης με το αρχείο εισαγωγής δεδομένων INP.DAT. Στο εν λόγω βήμα σαρώνονται όλες οι ενεργές ακμές του υπό εξέταση πλέγματος και εφόσον έχουν σημειωθεί διχοτομούνται. Πιο αναλυτικά, δημιουργούνται δύο νέες ακμές απόγονοι, για τις οποίες ορίζονται οι κατάλληλες τιμές στις δομές δεδομένων των ακμών, όπως ο αριθμός της μητρικής ακμής για τη δομή δεδομένων που υποδεικνύει τον πρόγονο τους και ο αριθμός μηδέν για τη δομή δεδομένων που υποδεικνύει τους απογόνους τους. Επιπρόσθετα, δημιουργείται και ένας νέος κόμβος ως ο μεσοκόμβος της μητρικής ακμής, για τον οποίο επίσης ορίζονται οι κατάλληλες τιμές στις δομές δεδομένων των κόμβων. Εφόσον δεν έχει επιλεγεί από το χρήστη η εφαρμογή της διαδικασίας της προσαρμογής της γεωμετρίας, για κάθε διχοτομημένη ακμή του πλέγματος υπολογίζονται όλες οι τιμές των δομών δεδομένων του μεσοκόμβου της ως οι μέσοι όροι των αντίστοιχων τιμών των ακραίων κόμβων της.

Εάν έχει επιλεγεί η εφαρμογή της διαδικασίας της προσαρμογής της γεωμετρίας, τότε υπολογίζονται με τον προαναφερθέντα τρόπο οι τιμές των δομών δεδομένων του μεσοκόμβου όλων των ακμών του πλέγματος εκτός αυτών που ανήκουν στα τρίγωνα της επιφάνειας της υπό εξέτασης γεωμετρίας. Για τις συγκεκριμένες ακμές καλείται κατάλληλη υπορουτίνα, η οποία έχει ως στόχο τον υπολογισμό των «διορθωμένων» μεταβλητών του νέου κόμβου. Για κάθε ακμή που διχοτομείται, σαρώνονται όλα τα οριακά τρίγωνα της επιφάνειας της γεωμετρίας. Εάν αποτελεί οριακή ακμή, βρίσκονται με αυτόν τον τρόπο τα δύο τρίγωνα που βρίσκονται εκατέρωθεν της υπό εξέτασης ακμής καθώς και οι τρίτοι κόμβοι αυτών των τριγώνων, οι οποίοι δεν ανήκουν σε αυτήν την ακμή. Κατόπιν υπολογίζονται τα κάθετα διανύσματα σε αυτές τις τριγωνικές επιφάνειες ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που υπολογίστηκαν και στο τμήμα των βοηθητικών υπολογισμών του εν λόγω λογισμικού. Έπειτα, υπολογίζονται τα γινόμενα των αντίστοιχων συνιστωσών αυτών των διανυσμάτων, ώστε να ελεγχθεί η σχετική τους φορά. Εάν τα γινόμενα είναι θετικά σημαίνει ότι τα διανύσματα αυτά είναι σχεδόν ομόρροπα, ενώ εάν τα γινόμενα είναι αρνητικά σημαίνει ότι είναι σχεδόν αντίρροπα. Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 4 της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας αυτός ο έλεγχος προστατεύει από ομαλοποιήσεις σε μη επιθυμητά σημεία της γεωμετρίας όπως για παράδειγμα το χείλος προσβολής μίας πτέρυγας. Τέλος, εφόσον τα εν λόγω γινόμενα βγουν θετικά, υπολογίζονται οι «διορθωμένες» τιμές των μεταβλητών του μεσοκόμβου σύμφωνα με τη σχέση (4.5).

Στο σημείο αυτό πλέον του λογισμικού πραγματοποιείται πλέον και το κύριο τμήμα των υπολογισμών της προσαρμογής του υπό εξέταση πλέγματος. Σαρώνονται όλα τα ενεργά τετράεδρα του πλέγματος και διαδοχικά σαρώνονται όλες οι έδρες τους και όλες οι ακμές τους, για να υπολογιστούν τελικά οι ακμές τους που έχουν διχοτομηθεί. Ανάλογα τον αριθμό των ακμών ενός τετραέδρου που έχουν διχοτομηθεί υλοποιείται και ο κατάλληλος εμπλουτισμός του. Εάν έχει διχοτομηθεί μία ακμή του, καλείται η κατάλληλη υπορουτίνα για τον εμπλουτισμό του σε δύο νέα τετράεδρα. Εάν έχουν διχοτομηθεί τρεις ακμές του καλείται η κατάλληλη υπορουτίνα για τον εμπλουτισμό του σε τέσσερα νέα τετράεδρα, ενώ εάν έχουν διχοτομηθεί και οι έξι ακμές του καλείται η κατάλληλη υπορουτίνα για τον εμπλουτισμό του σε οκτώ νέα τετράεδρα. Σε κάθε μία από αυτές τις υπορουτίνες στόχο αποτελεί ο καθορισμός των νέων τετραέδρων και διαδοχικά των εδρών τους, των ακμών τους και των κόμβων. Πέρα από τα ανωτέρω απαιτείται και η συμπλήρωση των κατάλληλων όρων στις διάφορες δομές δεδομένων, π.χ. για κάθε έδρα θα πρέπει να συμπληρώνεται η τιμή στη δομή δεδομένων που υποδεικνύει το πρόγονο της και η τιμή στη δομή δεδομένων που υποδεικνύει τους απογόνους της.

Μόλις ολοκληρωθεί το παραπάνω βήμα σαρώνονται ξανά όλα τα ενεργά τετράεδρα του πλέγματος και διαδοχικά σαρώνονται όλες οι έδρες τους και όλες οι ακμές τους, για να ελεγχθεί εάν υφίσταται σε ενεργό τετράεδρο διχοτομημένη ακμή. Εάν υφίσταται τότε η διαδικασία της προσαρμογής του πλέγματος επαναλαμβάνεται από το στάδιο της διάδοσης της «πληροφορίας». Μία τέτοια κατάσταση παρουσιάζεται, όπως προαναφέρθηκε, στην περίπτωση που υπάρχουν απενεργοποιήσεις και επανεργοποιήσεις τετραέδρων, ενώ δεν είναι δυνατόν να παρουσιαστεί στην πρώτη εφαρμογή της διαδικασίας της προσαρμογής του πλέγματος. Τέλος, εάν δε βρεθεί διχοτομημένη ακμή σε ενεργό τετράεδρο, η διαδικασία θεωρείται ότι έχει ολοκληρωθεί και προχωράει στο επόμενο στάδιο.

Το εν λόγω τμήμα του προγράμματος ολοκληρώνεται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο άρχισε, δηλαδή τη δυναμική ανακατανομή της μνήμης και κατά συνέπεια της χωρητικότητας των υφιστάμενων δομών δεδομένων. Όπως αναφέρθηκε στην αρχή της παρούσας παραγράφου αυξάνεται η χωρητικότητα των διαφόρων δομών δεδομένων σε τέτοιο βαθμό που θα κάλυπτε τη χειρότερη περίπτωση πύκνωσης του πλέγματος. Εφόσον τώρα έχει ολοκληρωθεί η συγκεκριμένη διαδικασία, οι δομές δεδομένων δύνανται να συρρικνωθούν στις απαραίτητες διαστάσεις τους. Με αυτόν τον τρόπο εξοικονομείται αρκετή μνήμη. Εν κατακλείδι, εκτελείται και πάλι το τμήμα των βοηθητικών υπολογισμών του αλγορίθμου, ώστε να εξαχθούν οι νέες απαραίτητες δομές δεδομένων, πριν τη συνέχιση της επαναληπτικής διαδικασίας των κύριων υπολογισμών.



Σχήμα 5.10: Διάγραμμα ροής τμήματος υπολογισμών προσαρμογής του πλέγματος.

5.3.5. Τελικό Τμήμα.

Το εν λόγω τμήμα ενεργοποιείται κάθε φορά που ολοκληρώνεται μία επανάληψη του τμήματος των κύριων υπολογισμών. Σε αυτό το στάδιο ελέγχεται αν για την συγκεκριμένη επανάληψη της διαδικασίας ικανοποιείται κάποιο εκ των δύο συνθηκών τερματισμού. Υπενθυμίζεται ότι η διαδικασία οδηγείται σε τερματισμό αν η τιμή του υπολοίπου (Residual) μιας μεταβλητής είναι μικρότερη από το προκαθορισμένο από το χρήστη κατώφλι, οπότε υφίσταται σύγκλιση, ή αν ο μετρητής των επαναλήψεων έχει πάρει τιμή μεγαλύτερη του μέγιστου πλήθους επαναλήψεων, που έχει επίσης καθορίσει ο χρήστης. Αν δεν ικανοποιείται καμία εκ των δύο συνθηκών τότε ο αλγόριθμος οδηγείται σε νέα επανάληψη της διαδικασίας. Σε αντίθετη περίπτωση τερματίζεται η επαναληπτική διαδικασία και εξάγονται τα τελικά αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα εξάγονται με τη μορφή δύο αρχείων, το ένα τύπου *.DAT και το άλλο τύπου *.PLT. Στο πρώτο καταγράφονται οι μέσες μεταβολές των συντηρητικών μεταβλητών για το σύνολο των κόμβων του πλέγματος. Το δεύτερο αρχείο κατασκευάζεται κατάλληλα, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το πρόγραμμα TECPLOT 9.0., το οποίο στη συνέχεια θα παρουσιάσει ποιοτικά και ποσοτικά τη λύση του ρευστομηχανικού προβλήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Πιστοποίηση του Αλγορίθμου

6.1. Εισαγωγή.

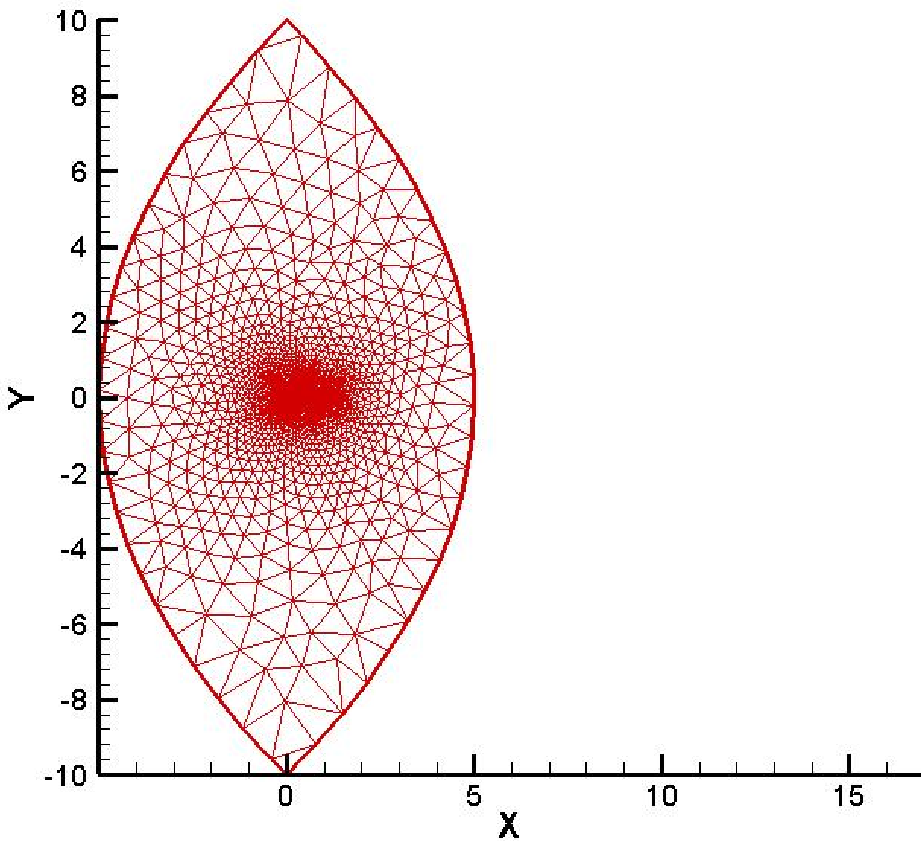
Στο παρόν κεφάλαιο πραγματοποιείται η πιστοποίηση του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της συγκεκριμένης Διπλωματικής Εργασίας και που περιγράφηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Ως εκ τούτου, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου για τις διάφορες περιπτώσεις που εξετάστηκαν, ενώ ταυτόχρονα εντοπίζονται και σχολιάζονται οι διαφορές που προέκυψαν μεταξύ αυτών των περιπτώσεων.

Για την εν λόγω πιστοποίηση επιλέχθηκε μία πτέρυγα, η οποία δημιουργήθηκε με την επιμήκυνση της κλασικής αεροτομής NACA0012, γύρω από την οποία κατασκευάστηκαν διάφορα πλέγματα. Από τα τελευταία επιλέχθηκαν δύο, ένα αρκετά πυκνό και ένα πιο αραιό, τα οποία στη συνέχεια της παρούσης θα καλούνται αραιό (NACA0012_V12) και πυκνό (NACA0012_V13) πλέγμα αντίστοιχα. Οι περιπτώσεις που εξετάστηκαν στα δύο προαναφερθέντα πλέγματα διαφοροποιούνται μεταξύ τους ως προς τον αριθμό των προσαρμογών του πλέγματος και το σχήμα επίλυσης αυτών, δηλαδή ρητό ή σημειακά πεπλεγμένο και πρώτης ή δεύτερης τάξης ακρίβειας. Πιο συγκεκριμένα τα χαρακτηριστικά των περιπτώσεων που εξετάστηκαν και παρουσιάζονται στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου, συνοψίζονται στον παρακάτω Πίνακα 6.1. Τα αποτελέσματα βέβαια αυτών των περιπτώσεων συγκρίθηκαν μεταξύ τους, ώστε να παρουσιαστεί η σημαντική συνεισφορά του σχήματος δεύτερης τάξης ακρίβειας, αλλά και της μεθόδου του εμπλουτισμού του υπό εξέταση πλέγματος.

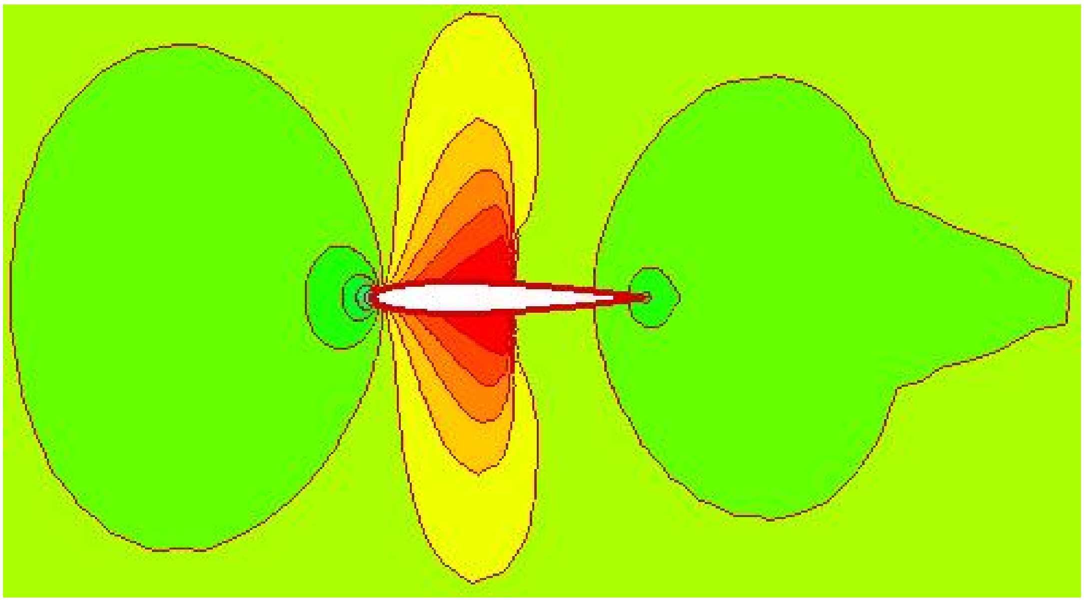
Α/Α	Αριθμός Mach	Τάξη Ακρίβειας	Ονοματολογία & Μέγεθος Πλέγματος	Γωνία Προσβολής (Μοίρες)	Προσαρμογή Πλέγματος	Σχήμα Επίλυσης
1	0,8	2η (Limiter Van Leer Van Albada)	NACA0012_V12 (207419 κόμβοι – 1087169 τετράεδρα)	0	Χωρίς προσαρμογή	Σημειακά Πεπλεγμένο
2	0,8	2η (Limiter Van Leer Van Albada)	NACA0012_V12 (207419 κόμβοι – 1087169 τετράεδρα)	0	Προσαρμογή στις 150 & 300 επαναλήψεις	Σημειακά Πεπλεγμένο
3	0,8	2η (Limiter Van Leer Van Albada)	NACA0012_V12 (207419 κόμβοι – 1087169 τετράεδρα)	0	Προσαρμογή στις 750 & 1500 επαναλήψεις	Ρητό
4	0,8	1η	NACA0012_V12 (207419 κόμβοι – 1087169 τετράεδρα)	0	Προσαρμογή στις 200 επαναλήψεις	Σημειακά Πεπλεγμένο
5	0,8	2η (Limiter Van Leer Van Albada)	NACA0012_V13 (625250 κόμβοι – 3500243 τετράεδρα)	0	Χωρίς προσαρμογή	Σημειακά Πεπλεγμένο
6	0,8	2η (Limiter Van Leer Van Albada)	NACA0012_V13 (625250 κόμβοι – 3500243 τετράεδρα)	0	Προσαρμογή στις 300 επαναλήψεις	Σημειακά Πεπλεγμένο

Πίνακας 6.1.: Περιπτώσεις πτερύγων αεροτομής NACA0012 που εξετάστηκαν.

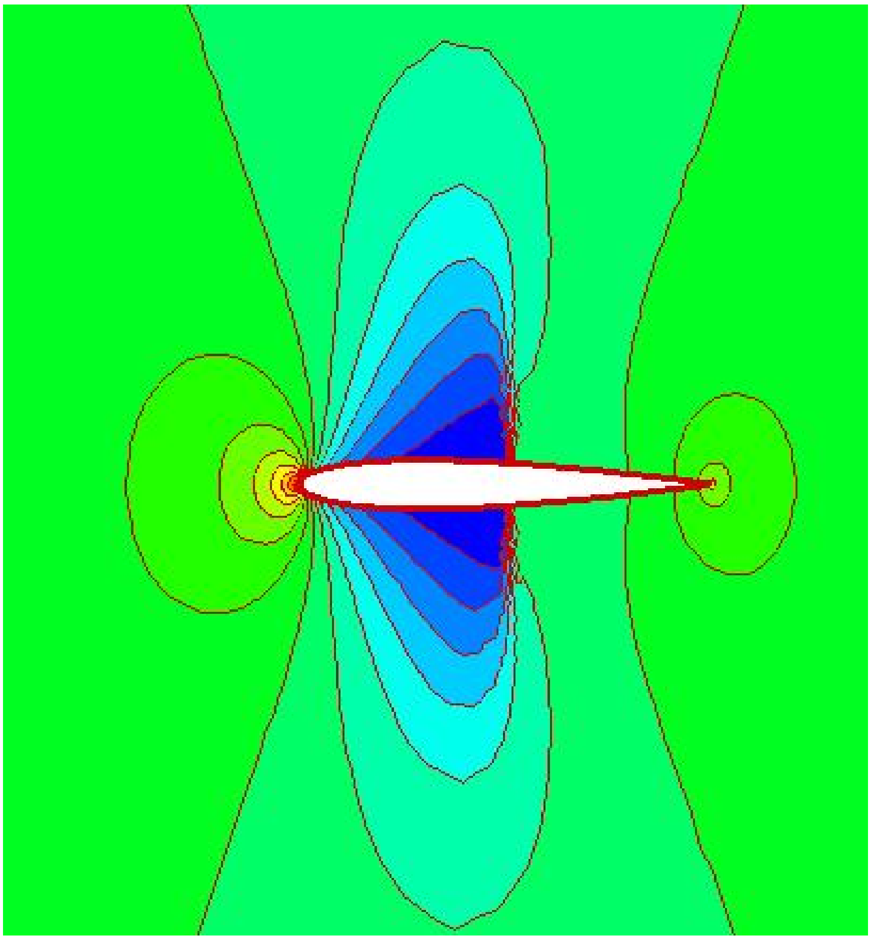
Επιπρόσθετα, χρησιμοποιήθηκαν για σύγκριση (benchmarking) και τα αποτελέσματα από έναν άλλο πιστοποιημένο αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος αυτός είναι ο EU2.for, ο οποίος αναπτύχθηκε από τον κ. Ι.Κ. Νικολό και ο οποίος επιλύει τις διαφορικές εξισώσεις Euler στις δύο διαστάσεις με ακρίβεια δεύτερης τάξης, ενώ επιπλέον παρέχει τη δυνατότητα τοπικού εμπλουτισμού του υπό εξέταση πλέγματος. Ως εκ τούτου κατασκευάστηκε πλέγμα δύο διαστάσεων γύρω από μία αεροτομή NACA0012, στο οποίο επιλύθηκαν οι διαφορικές εξισώσεις ροής με το προαναφερθέν λογισμικό στις ίδιες συνθήκες που επιλύθηκαν και με το λογισμικό EU3_Ref.for. Οι συγκρίσεις πραγματοποιήθηκαν μεταξύ των αποτελεσμάτων του λογισμικού EU2.for και αυτών στο μέσο της πτέρυγας του λογισμικού EU3_Ref.for. Στα επόμενα πέντε Σχήματα παρουσιάζονται το πεδίο ροής, οι ισογραμμές Mach, οι ισογραμμές πίεσης, το διάγραμμα Cp-Y και το διάγραμμα Mach-Y, που χρησιμοποιήθηκαν ή εξάχθηκαν από το πρόγραμμα EU2.for.



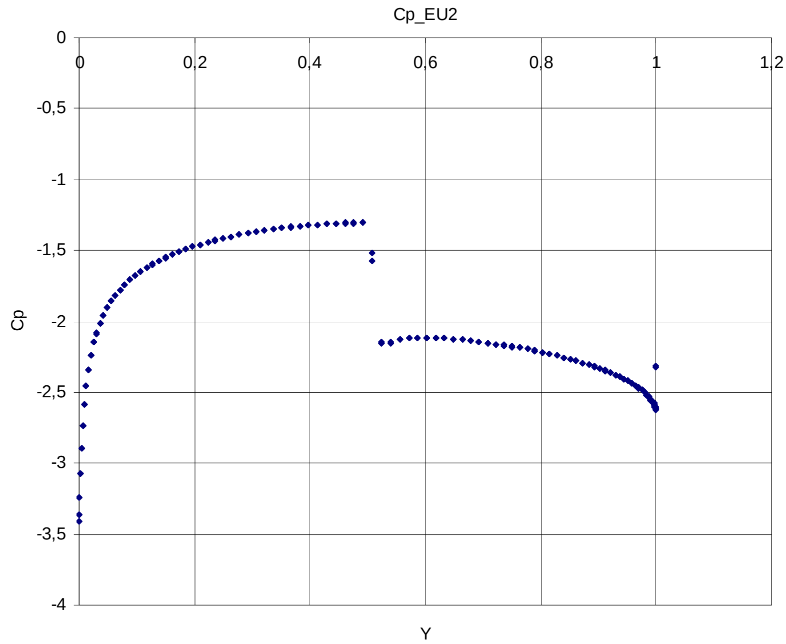
Σχήμα 6.1: Πεδίο ροής γύρω από αεροτομή NACA0012 που χρησιμοποιήθηκε για τον EU2.



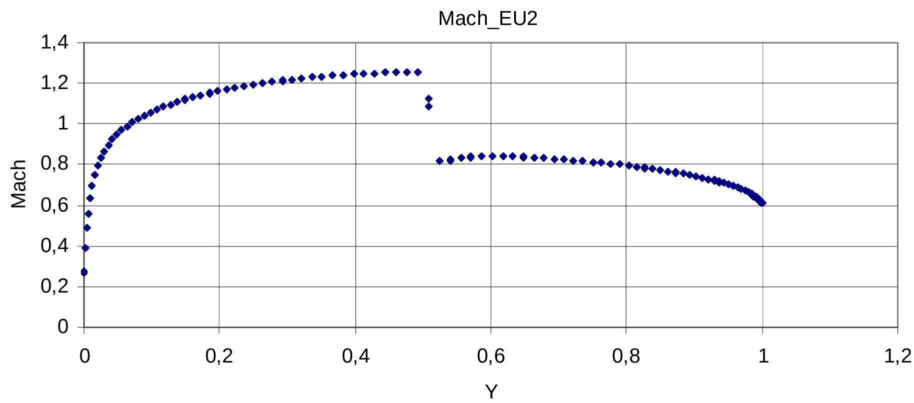
Σχήμα 6.2: Ισογραμμές Mach γύρω από αεροτομή NACA0012 που εξάχθηκαν από το EU2.



Σχήμα 6.3: Ισογραμμές πίεσης γύρω από αεροτομή NACA0012 που εξάχθηκαν από τον EU2.



Σχήμα 6.4: Διάγραμμα Cp-Y γύρω από αεροτομή NACA0012 που εξάχθηκε από τον EU2.

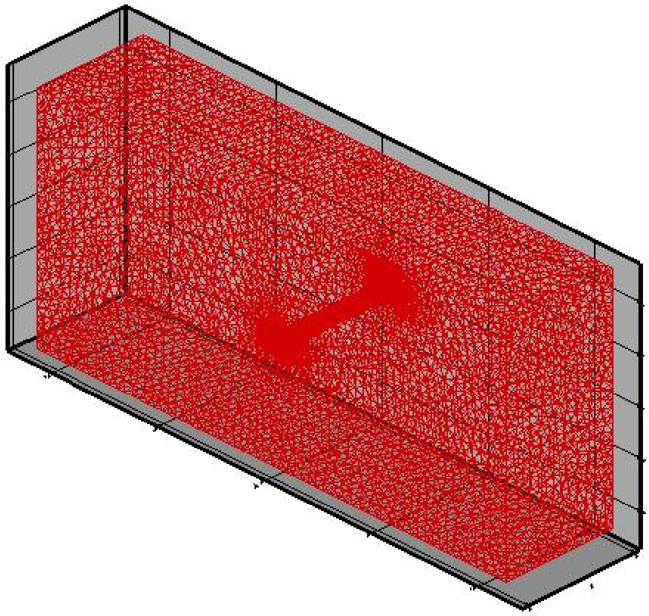


Σχήμα 6.5: Διάγραμμα Mach-Y γύρω από αεροτομή NACA0012 που εξάχθηκε από τον EU2.

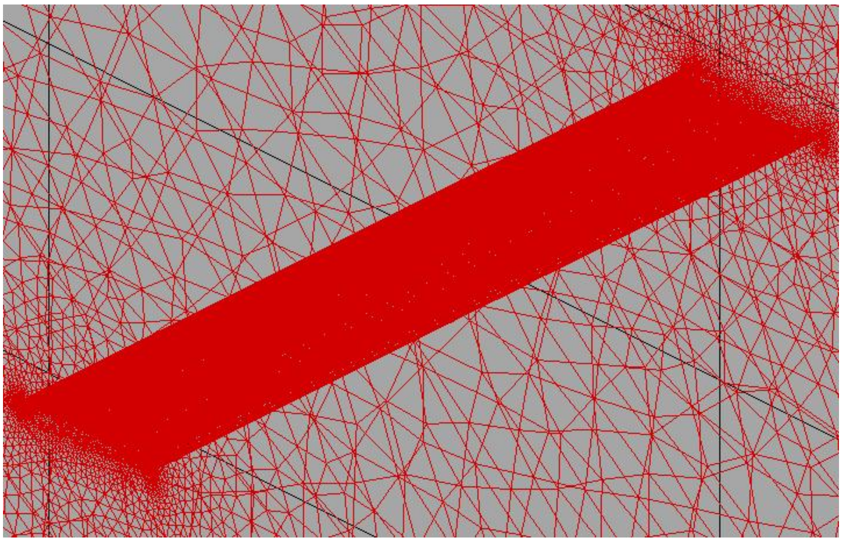
6.2. Αραιό Πλέγμα Πτέρυγας NACA0012 (NACA0012_V12).

6.2.1. Εισαγωγή.

Στην ενότητα αυτή εξετάζονται οι τέσσερις πρώτες περιπτώσεις του πίνακα 6.1. για το αραιό πλέγμα, το οποίο εμφανίζεται στο παρακάτω Σχήμα 6.6. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι της μορφής *.cfx5 και αποτελείται από 207419 κόμβους και 1087167 τετράεδρα. Η πτέρυγα, η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.7, βρίσκεται στο κέντρο του πεδίου ροής, ενώ τα άκρα της ακουμπούν στις πλαϊνές επιφάνειες. Η μπροστά και πίσω έδρα του παραλληλεπίπεδου σχετικά με τη θέση της πτέρυγας ορίστηκαν ως επιφάνειες εισόδου και εξόδου της ροής αντίστοιχα, ενώ οι υπόλοιπες έδρες ορίστηκαν ως στερεά τοιχώματα.



Σχήμα 6.6: Απεικόνιση του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



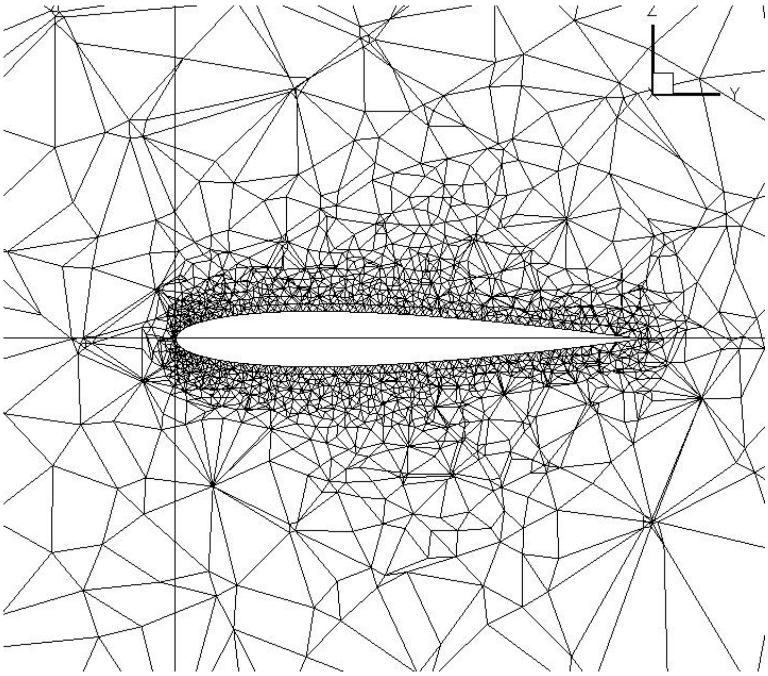
Σχήμα 6.7: Κοντινό πλάνο της πτέρυγας με αεροτομή NACA0012 για την περίπτωση του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).

6.2.2. 1^{η} Περίπτωση.

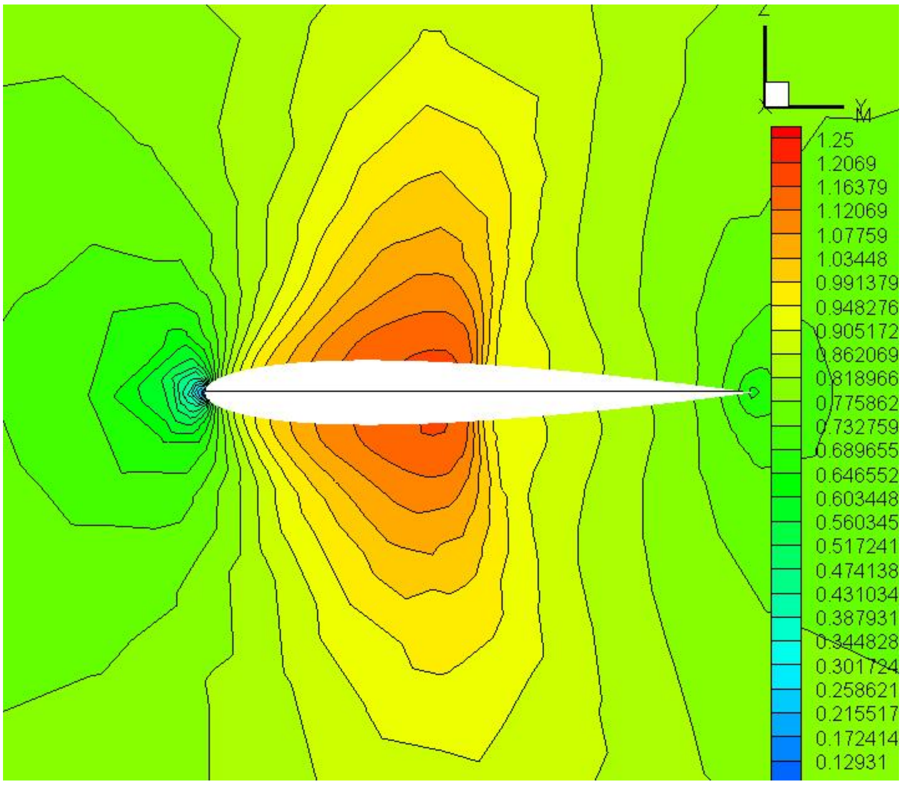
Η πρώτη περίπτωση του αραιού πλέγματος που εξετάστηκε αφορά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής με δεύτερη τάξη ακρίβειας, εφαρμογή της συνάρτησης περιορισμού Van Leer Van Albada και σημειακά πεπλεγμένο σχήμα, αλλά χωρίς την εφαρμογή της μεθόδου του εμπλουτισμού του υπό εξέταση πλέγματος. Το αρχικό πλέγμα στο μέσο της πτέρυγας, το οποίο και δεν μεταβλήθηκε αφού δεν εφαρμόστηκε η προαναφερθείσα μέθοδος, παρουσιάζεται στη συνέχεια στο Σχήμα 6.8. Κατόπιν, εμφανίζονται τα αποτελέσματα αυτής της περίπτωσης στα Σχήματα 6.9 έως 6.13.

Από τα Σχήματα των ισογραμμών του αριθμού Mach αλλά και της πίεσης γίνεται άμεσα αισθητή η διαφοροποίηση τους από τα αντίστοιχα Σχήματα που εξάχθηκαν από το λογισμικό EU2.for. Η σύλληψη του κύματος κρούσης δεν είναι λεπτομερής όσο αυτή του Σήματος 6.2. Ο λόγος είναι προφανής, το πλέγμα στη συγκεκριμένη περιοχή δεν είναι αρκετά πυκνό. Η απουσία λοιπόν της μεθόδου του εμπλουτισμού οδήγησε στη μη σωστή σύλληψη του κύματος κρούσης σε αντίθεση με την περίπτωση του λογισμικού EU2.for, στο οποίο εφαρμόστηκε η συγκεκριμένη μέθοδος. Η συγκεκριμένη αδυναμία διαφαίνεται και στα διαγράμματα Cp-Y και Mach-Y, όπου οι αντίστοιχες καμπύλες των αποτελεσμάτων του προγράμματος EU2.for είναι πιο «απότομες» στην εν λόγω περιοχή σε σχέση με αυτές του προγράμματος EU3_Ref.for.

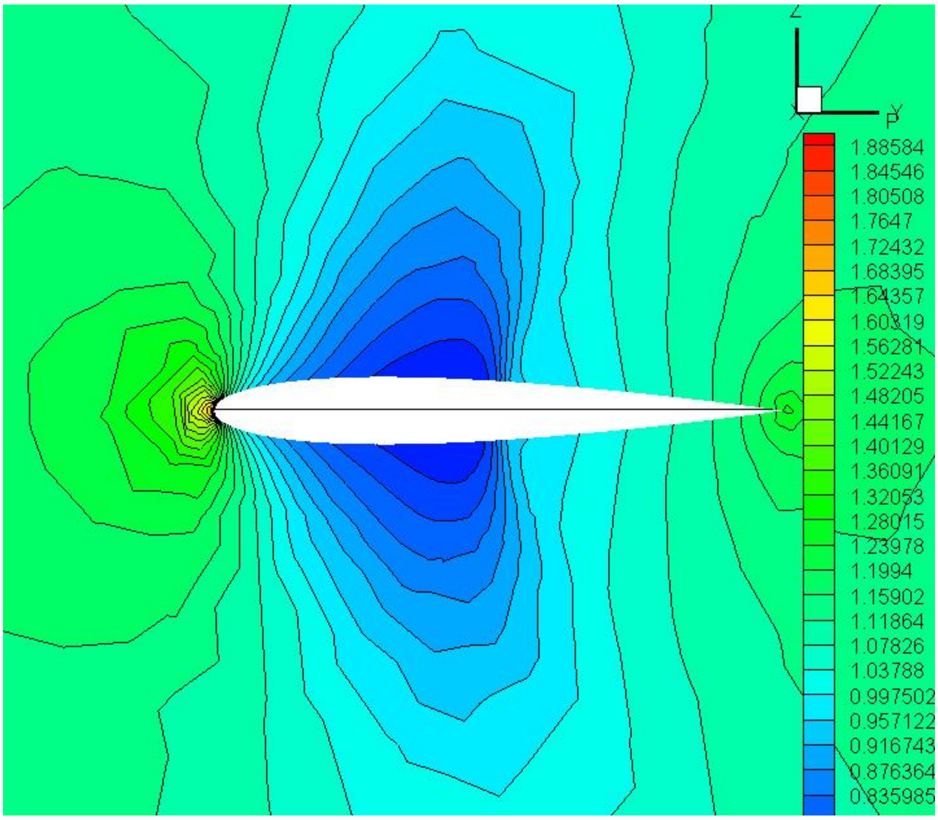
Τέλος, όσον αφορά τη σύγκλιση του κώδικα, οι τάξεις μεγέθους των υπολοίπων των αποτελεσμάτων μειώνονται κατά έξι τάξεις μεγέθους στις πρώτες 1250 επαναλήψεις, ενώ στη συνέχεια αρχίζει η ταλάντωση αυτών μέχρι τις 3000 επαναλήψεις. Η σύγκλιση παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.13.



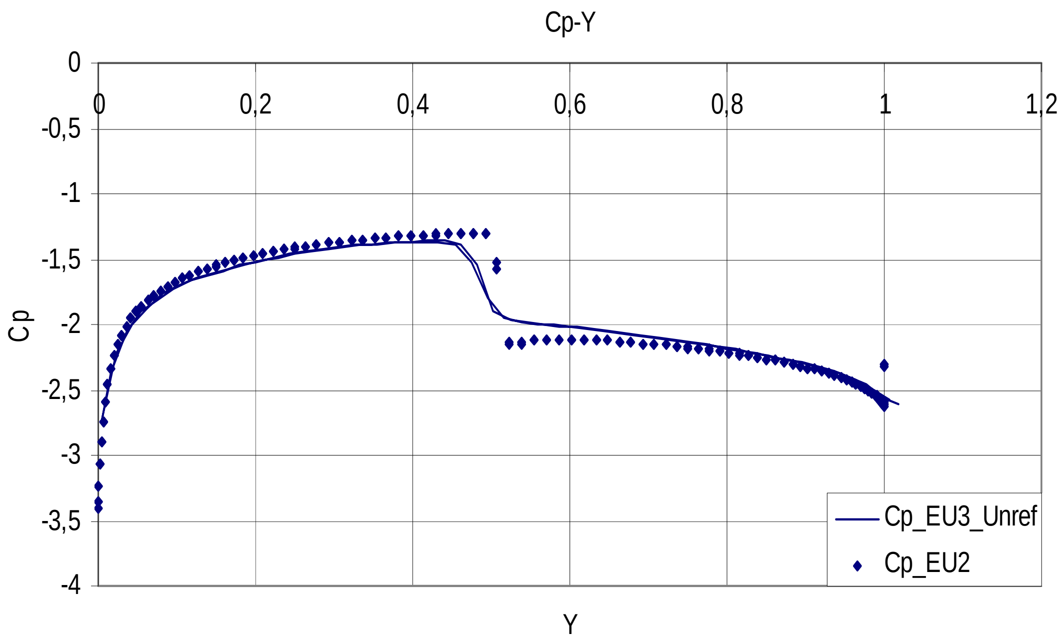
Σχήμα 6.8: Μη προσαρμοσμένο πλέγμα της πρώτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



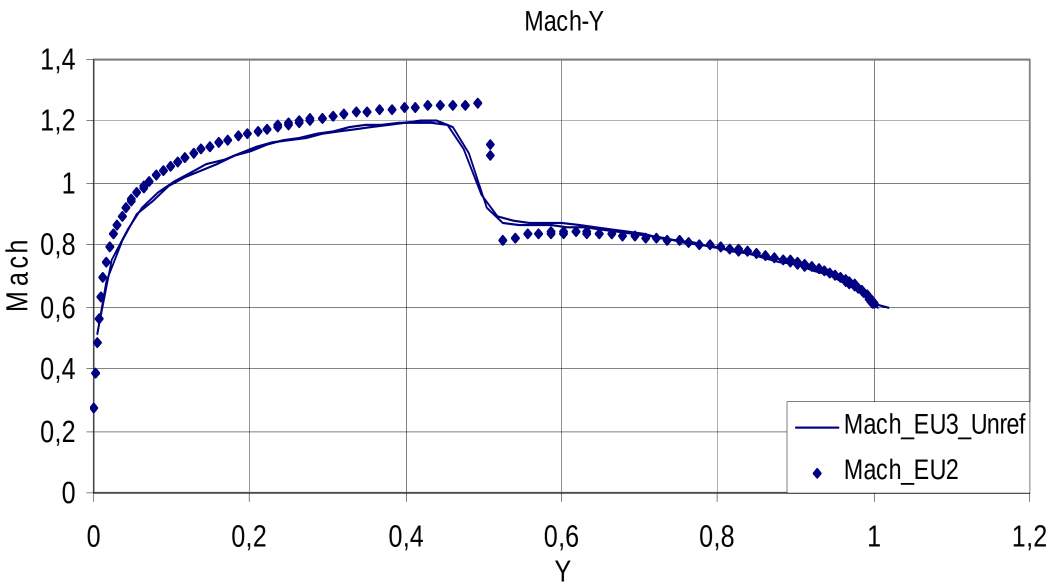
Σχήμα 6.9: Ισογραμμές Mach της πρώτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



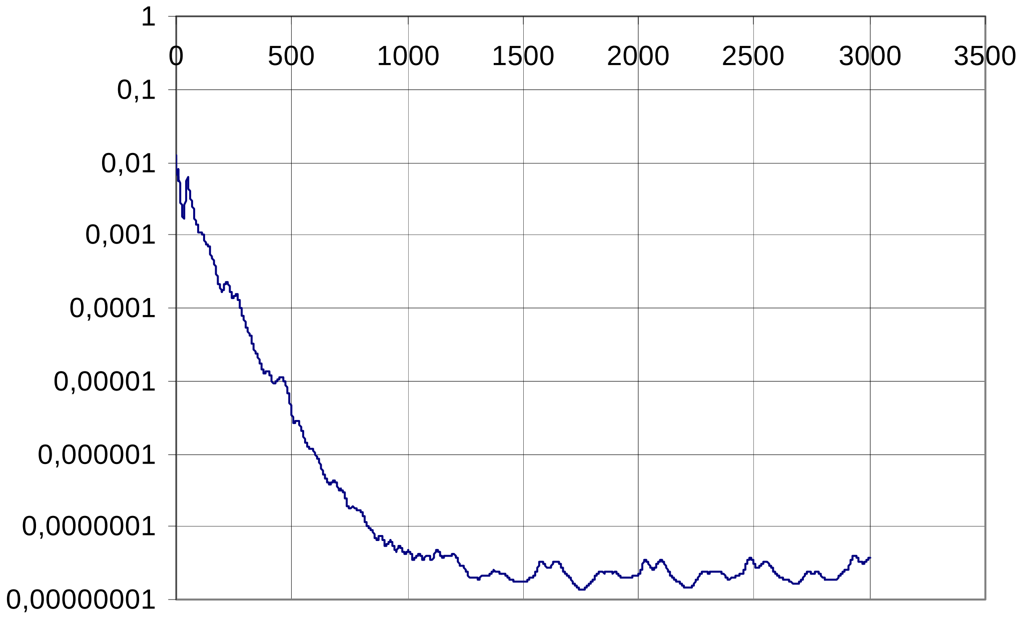
Σχήμα 6.10: Ισογραμμές πίεσης της πρώτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



Σχήμα 6.11: Διάγραμμα Cp-Y της πρώτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



Σχήμα 6.12: Διάγραμμα Mach-Y της πρώτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



Σχήμα 6.13: Διάγραμμα σύγκλισης της πρώτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).

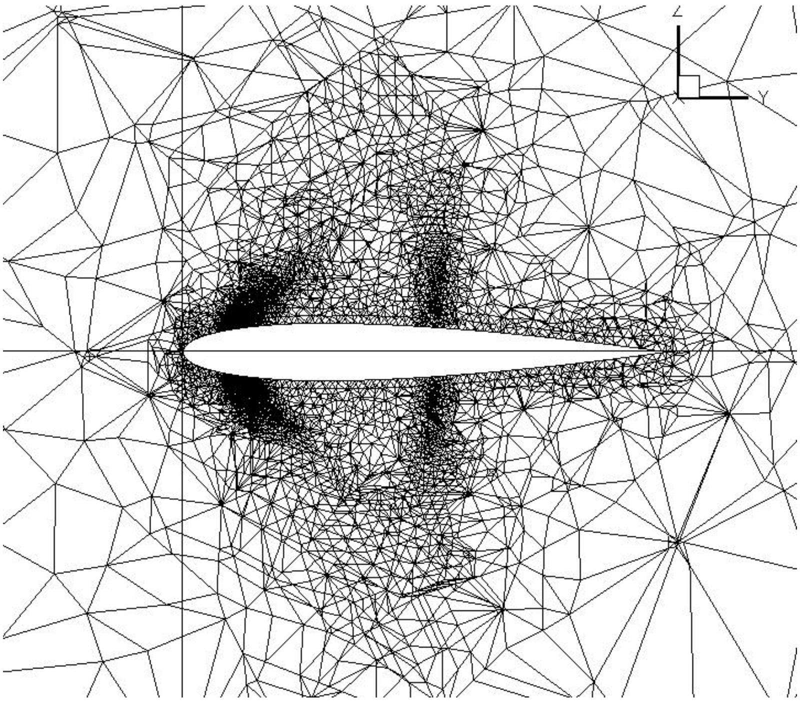
6.2.3. 2η Περίπτωση.

Η δεύτερη περίπτωση του αραιού πλέγματος που εξετάστηκε αφορά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής με δεύτερη τάξη ακρίβειας, εφαρμογή της συνάρτησης περιορισμού Van Leer Van Albada, σημειακά πεπλεγμένο σχήμα, αλλά και με την εφαρμογή της μεθόδου του εμπλουτισμού του υπό εξέταση πλέγματος αυτή τη φορά. Ουσιαστικά, η μόνη διαφοροποίηση από την προηγούμενη περίπτωση είναι πλέον η εφαρμογή της μεθόδου του εμπλουτισμού. Το προσαρμοσμένο πλέγμα στο μέσο της πτέρυγας, το οποίο προέκυψε με την εφαρμογή της προαναφερθείσας μεθόδου παρουσιάζεται στη συνέχεια στο Σχήμα 6.14. Στο τελικό πλέγμα οι κόμβοι έχουν σχεδόν οκταπλασιαστεί, καθώς αριθμούν σε 1608871 κόμβους, ενώ τα τετράεδρα έχουν σχεδόν εννιαπλασιαστεί, καθώς αριθμούν σε 9214725 τετράεδρα. Κατόπιν, εμφανίζονται τα αποτελέσματα αυτής της περίπτωσης στα Σχήματα 6.15 έως 6.19.

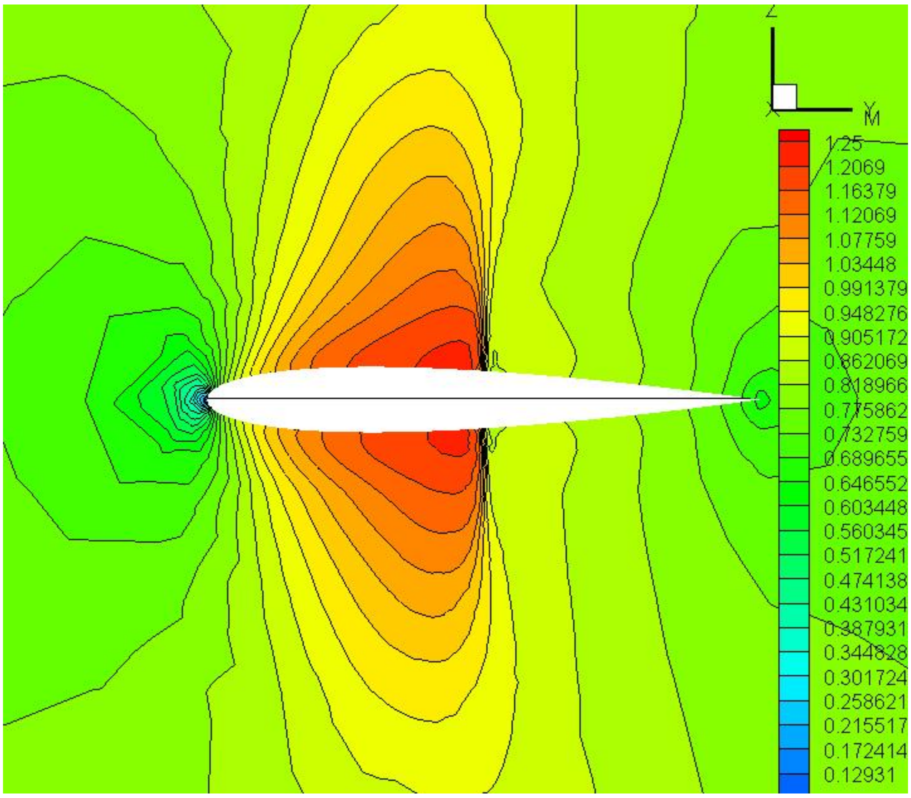
Από τα Σχήματα των ισογραμμών του αριθμού Mach αλλά και της πίεσης φαίνεται η πολύ καλή σύλληψη του κύματος κρούσης, σε αντίθεση με τα αντίστοιχα Σχήματα της πρώτης περίπτωσης. Η ομοιότητα των προαναφερόμενων σχημάτων αυτής της ενότητας με αυτά που εξάχθηκαν από το λογισμικό EU2.for είναι προφανής. Ως εκ τούτου, ο αριθμός Mach αλλάζει δραματικά μετά τη δημιουργία του κύματος κρούσης και στις δύο πλευρές της πτέρυγας. Υπενθυμίζεται ότι η εν λόγω αεροτομή είναι απόλυτα συμμετρική και ότι η γωνία προσβολής έχει οριστεί μηδέν.

Ωστόσο, στο Σχήμα που παρουσιάζει τις ισογραμμές του αριθμού Mach διαφαίνεται μία διαφοροποίηση στην επιφάνεια της πτέρυγας σε σχέση με το αντίστοιχο Σχήμα που εξάχθηκε από το λογισμικό EU2.for. Στην περιοχή αυτή κάνει την εμφάνιση της μία καμπύλωση, σαν ένα «ψευδές» οριακό στρώμα. Οριακό στρώμα βέβαια είναι απίθανο να υπάρξει στην επίλυση των σχέσεων Euler, παρά μόνο στην επίλυση των σχέσεων Navier-Stokes. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην αριθμητική διάχυση που εισάγεται κατά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής. Αποτελεί σύνηθες φαινόμενο-πρόβλημα, μικρής ωστόσο σημασίας, στην επίλυση των σχέσεων Euler στις τρεις διαστάσεις, όπως αποδεικνύεται και από την βιβλιογραφία [Bon96]. Η καμπύλωση αυτή είναι προφανής και στο διάγραμμα Mach-Y, καθώς το λογισμικό EU2.for συλλαμβάνει υψηλότερες τιμές Mach, σε σχέση με το EU3_Ref.for.

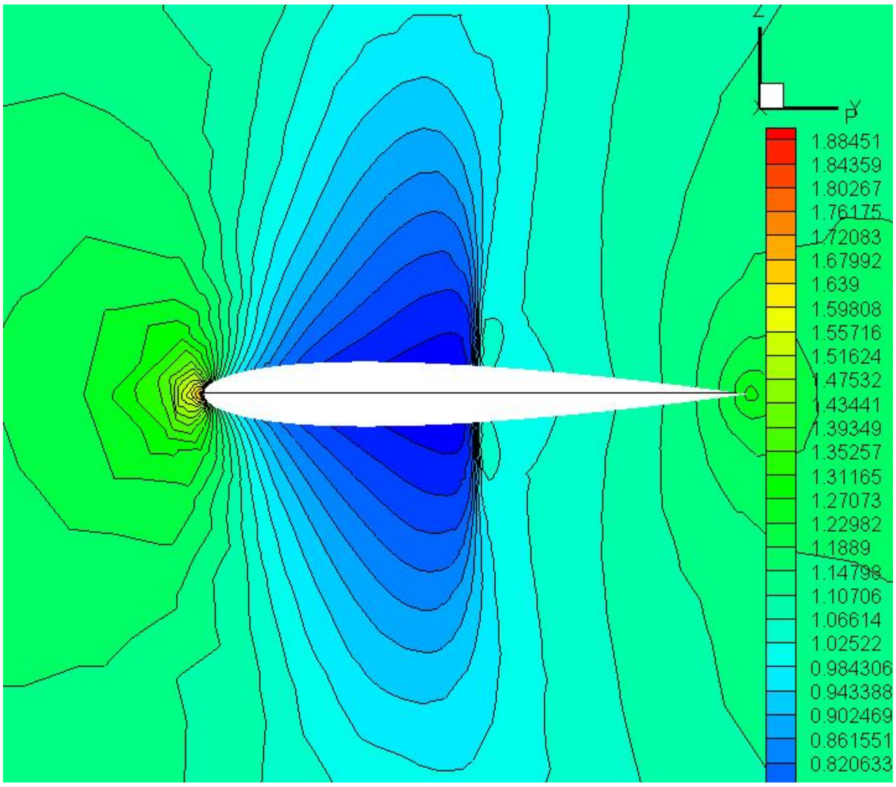
Τέλος, όσον αφορά τη σύγκλιση του κώδικα, οι τάξεις μεγέθους των υπολοίπων των αποτελεσμάτων μειώνονται κατά έξι τάξεις μεγέθους στις πρώτες 1500 επαναλήψεις, ενώ στη συνέχεια αρχίζει η ταλάντωση αυτών μέχρι τις 3000 επαναλήψεις. Η σύγκλιση παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.19. Στο ίδιο Σχήμα δύναται να παρατηρηθούν και οι αριθμοί των επαναλήψεων, όπου εφαρμόζεται η μέθοδος του εμπλουτισμού. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, ο εμπλουτισμός εφαρμόστηκε στις 150 και 300 επαναλήψεις. Στις εν λόγω επαναλήψεις, η σύγκλιση «χαλάει» και τα υπόλοιπα από τα τελικά αποτελέσματα αυξάνονται.



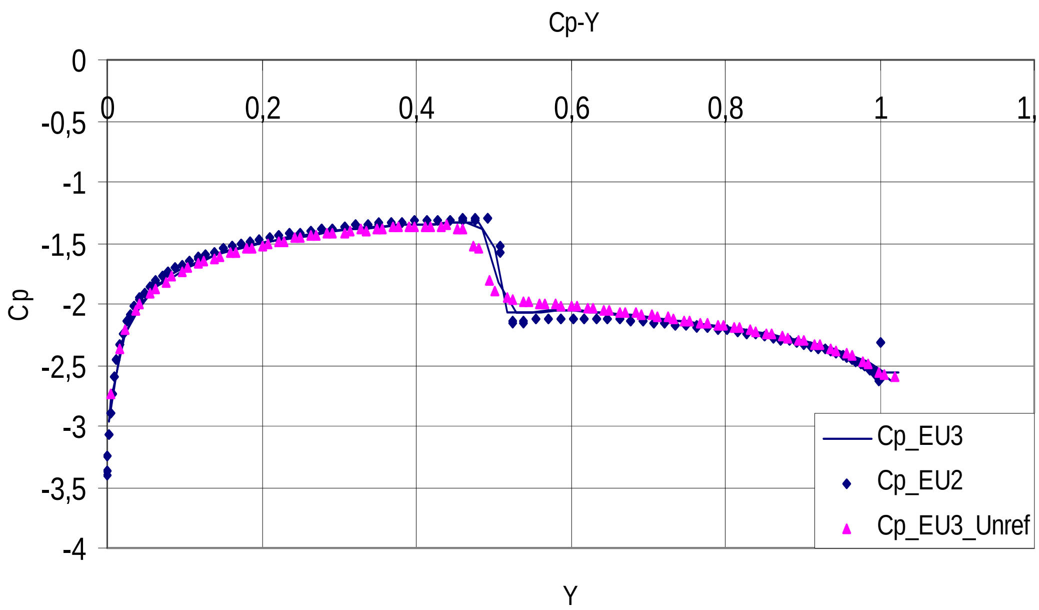
Σχήμα 6.14: Προσαρμοσμένο πλέγμα της δεύτερης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



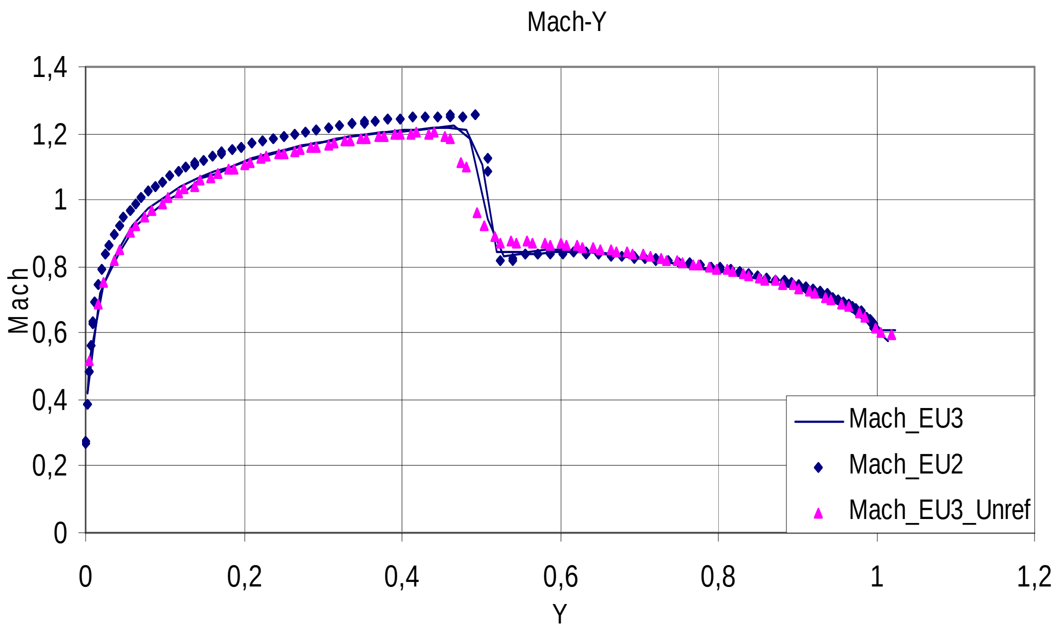
Σχήμα 6.15: Ισογραμμές Mach της δεύτερης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



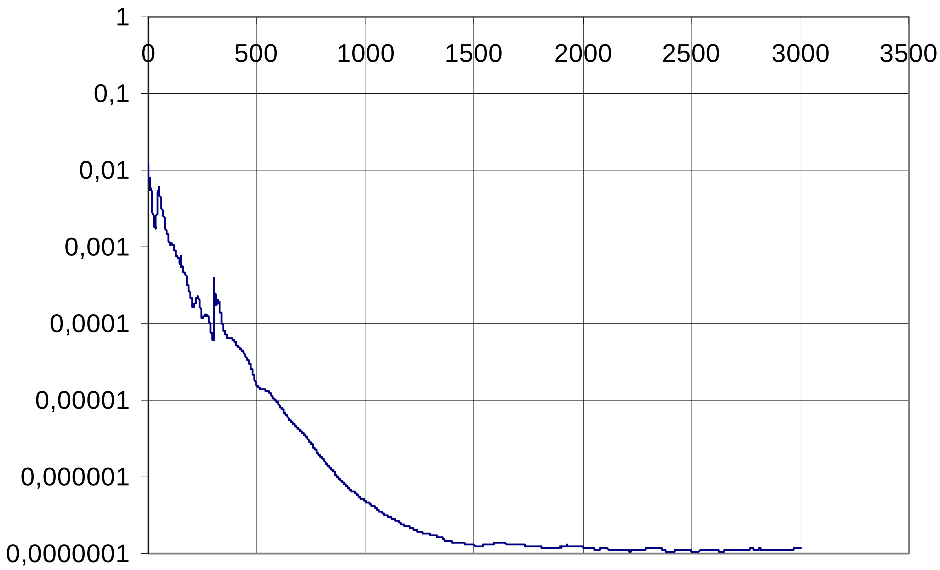
Σχήμα 6.16: Ισογραμμές πίεσης της δεύτερης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



Σχήμα 6.17: Διάγραμμα Cp-Y της δεύτερης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12) και σύγκριση με τα αποτελέσματα της διδιάστατης επίλυσης, καθώς και της επίλυσης χωρίς προσαρμογή του πλέγματος.



Σχήμα 6.18: Διάγραμμα Mach-Y της δεύτερης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12) και σύγκριση με τα αποτελέσματα της διδιάστατης επίλυσης, καθώς και της επίλυσης χωρίς προσαρμογή του πλέγματος.



Σχήμα 6.19: Διάγραμμα σύγκλισης της δεύτερης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).

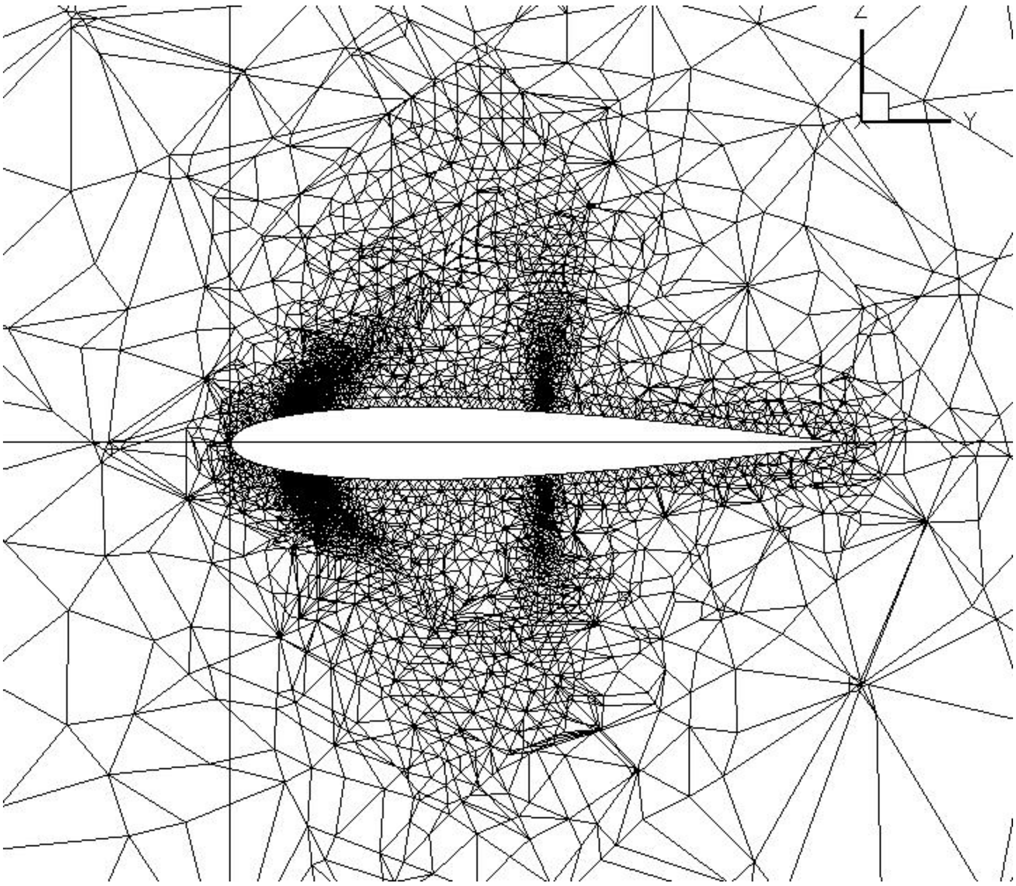
6.2.4. 3^{η} Περίπτωση.

Η τρίτη περίπτωση του αραιού πλέγματος που εξετάστηκε αφορά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής με δεύτερη τάξη ακρίβειας, εφαρμογή της συνάρτησης περιορισμού Van Leer Van Albada, ρητό σχήμα, και με την εφαρμογή της μεθόδου του εμπλουτισμού του υπό εξέταση πλέγματος. Ουσιαστικά, η μόνη διαφοροποίηση από την προηγούμενη περίπτωση είναι πλέον η εφαρμογή του ρητού σχήματος επίλυσης και όχι του σημειακά πεπλεγμένου. Το προσαρμοσμένο πλέγμα στο μέσο της πτέρυγας, το οποίο προέκυψε με την εφαρμογή της μεθόδου του εμπλουτισμού παρουσιάζεται στη συνέχεια στο Σχήμα 6.20, και το οποίο είναι σχεδόν ίδιο με αυτό της προηγούμενης περίπτωσης. Κατόπιν, εμφανίζονται τα αποτελέσματα αυτής της περίπτωσης στα Σχήματα 6.21 έως 6.25.

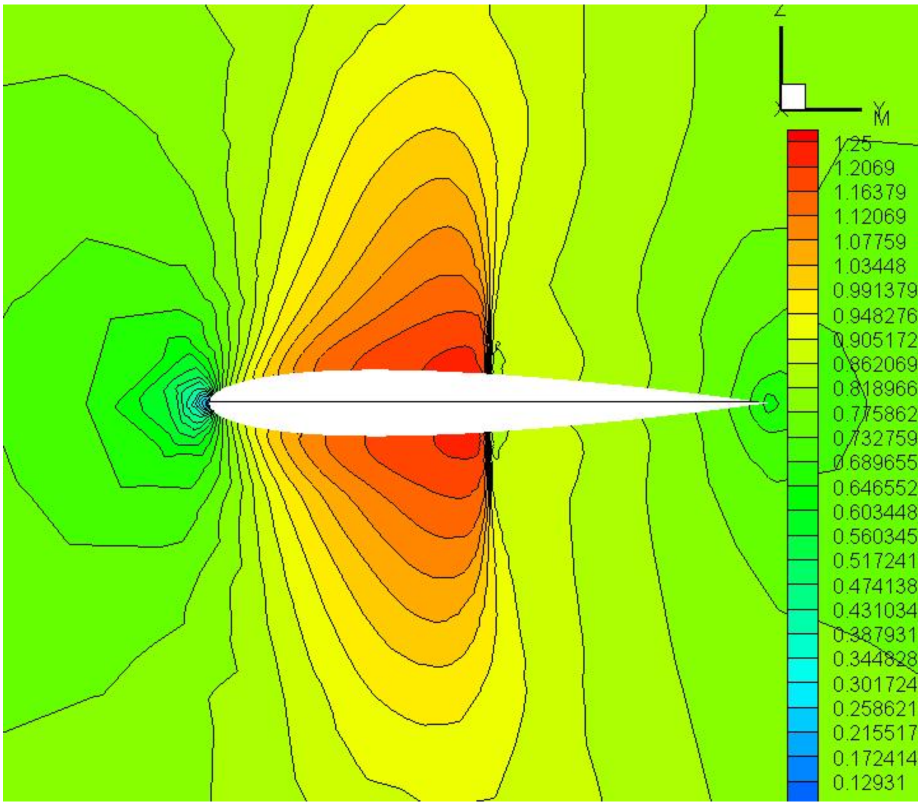
Από τα Σχήματα των ισογραμμών του αριθμού Mach αλλά και της πίεσης φαίνεται και πάλι η πολύ καλή σύλληψη του κύματος κρούσης, σε αντίθεση με τα αντίστοιχα Σχήματα της πρώτης περίπτωσης. Ωστόσο, στο Σχήμα που παρουσιάζει τις ισογραμμές του αριθμού Mach διαφαίνεται ξανά η διαφοροποίηση στην επιφάνεια της πτέρυγας σε σχέση με το αντίστοιχο Σχήμα που εξάχθηκε από το λογισμικό EU2.for, λόγω της αριθμητικής διάχυσης που εισάγεται κατά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής. Η αριθμητική διάχυση είναι επίσης προφανής και στο διάγραμμα Mach-Y.

Τέλος, όσον αφορά τη σύγκλιση του κώδικα, τα υπόλοιπα των αποτελεσμάτων μειώνονται κατά έξι τάξεις μεγέθους στις πρώτες 7000 επαναλήψεις.

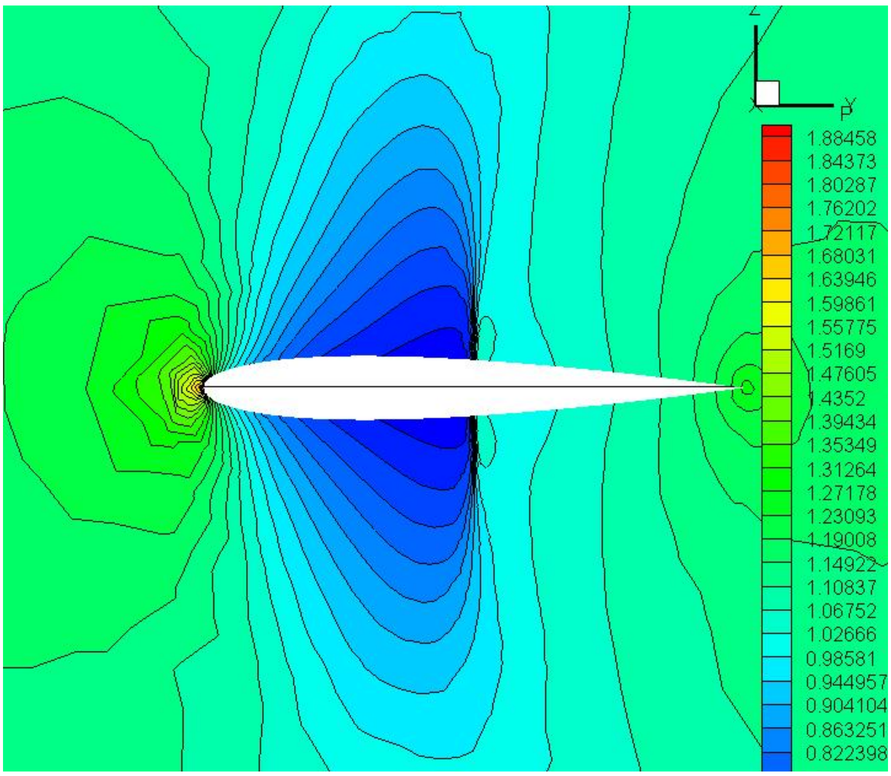
Η σύγκλιση παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.25. Γίνεται φανερή η αργή σύγκλιση της υπό εξέταση περίπτωσης σε σχέση με τις προαναφερθείσες και συγκεκριμένα με τη δεύτερη περίπτωση, όπου χρησιμοποιήθηκε σημειακά πεπλεγμένο σχήμα επίλυσης. Τέλος, παρατηρούνται και σε αυτό το Σχήμα οι επαναλήψεις, όπου έλαβε μέρος η μέθοδος του εμπλουτισμού, οι οποίες είναι 750 και 1500 επαναλήψεις.



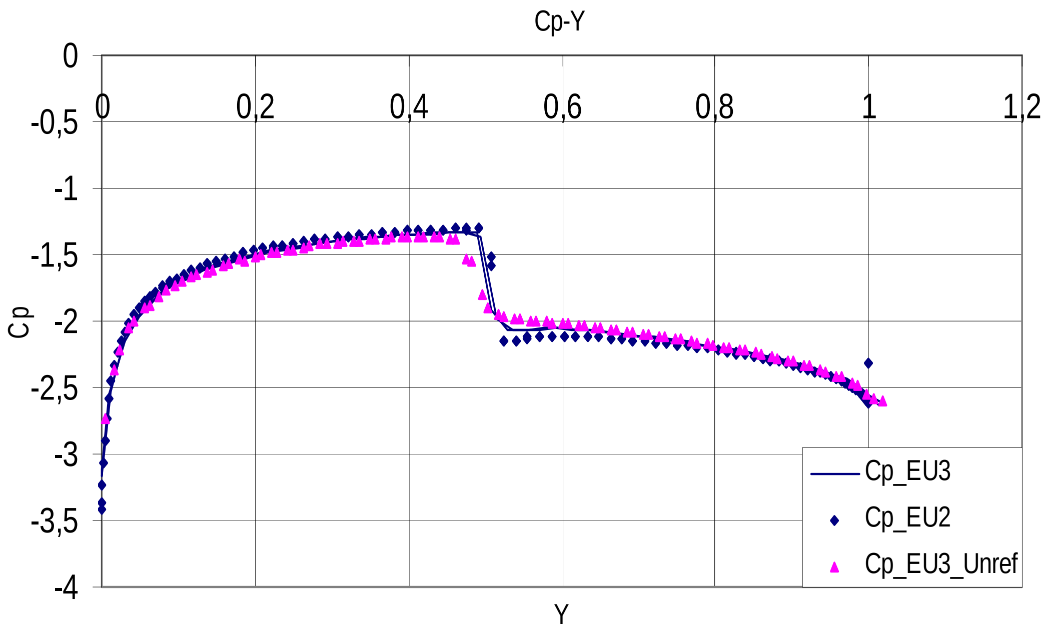
Σχήμα 6.20: Προσαρμοσμένο πλέγμα της τρίτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



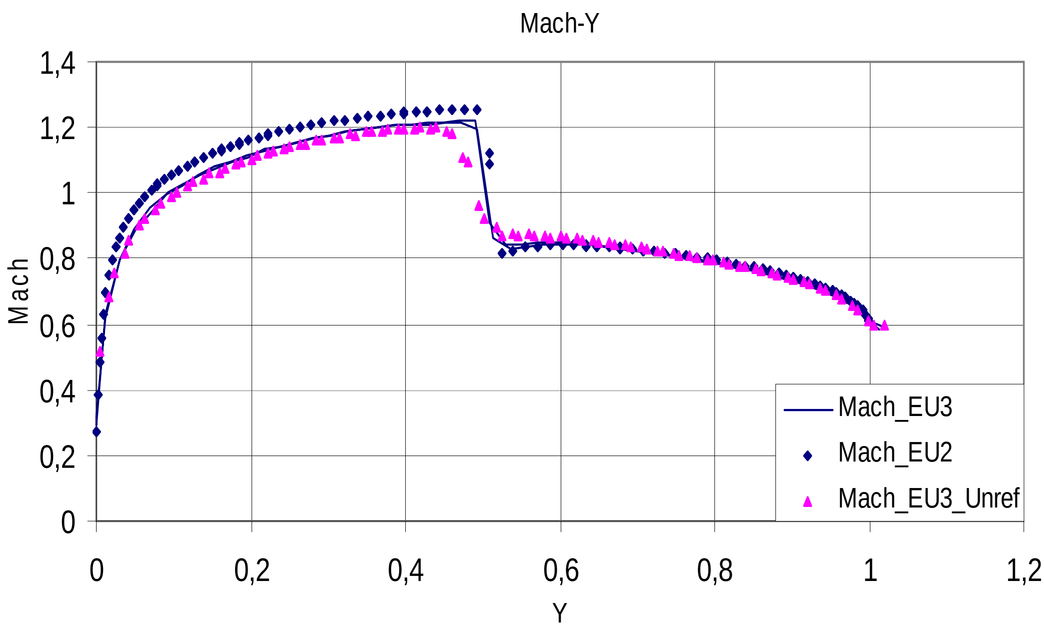
Σχήμα 6.21: Ισογραμμές Mach της τρίτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



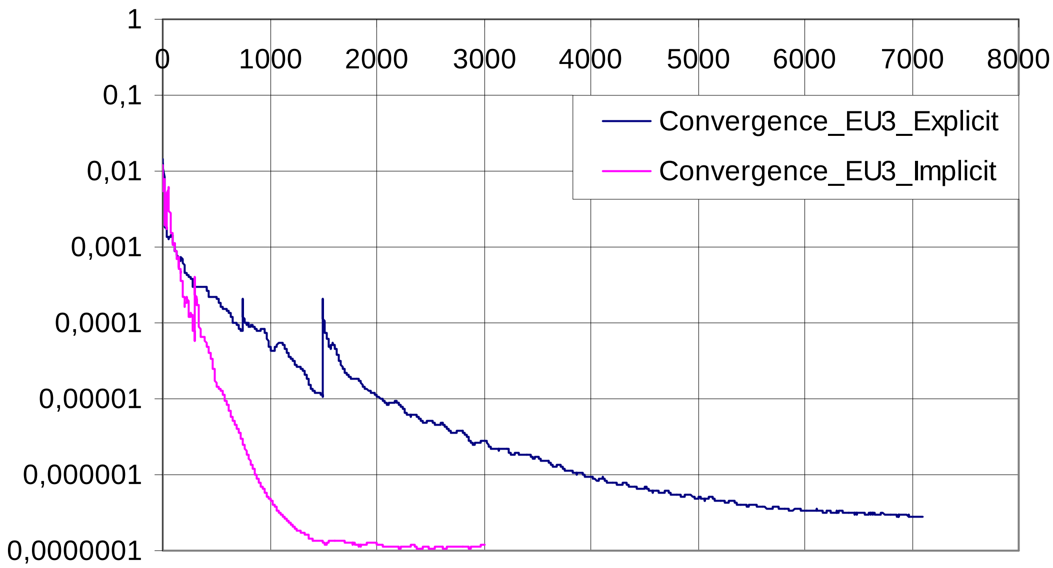
Σχήμα 6.22: Ισογραμμές πίεσης της τρίτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



Σχήμα 6.23: Διάγραμμα Cp-Y της τρίτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12) και σύγκριση με τα αποτελέσματα της διδιάστατης επίλυσης, καθώς και της επίλυσης χωρίς προσαρμογή του πλέγματος.



Σχήμα 6.24: Διάγραμμα Mach-Y της τρίτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12) και σύγκριση με τα αποτελέσματα της διδιάστατης επίλυσης, καθώς και της επίλυσης χωρίς προσαρμογή του πλέγματος.



Σχήμα 6.25: Διάγραμμα σύγκλισης της τρίτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12) και σύγκριση με το διάγραμμα σύγκλισης της πεπλεγμένης μεθόδου.

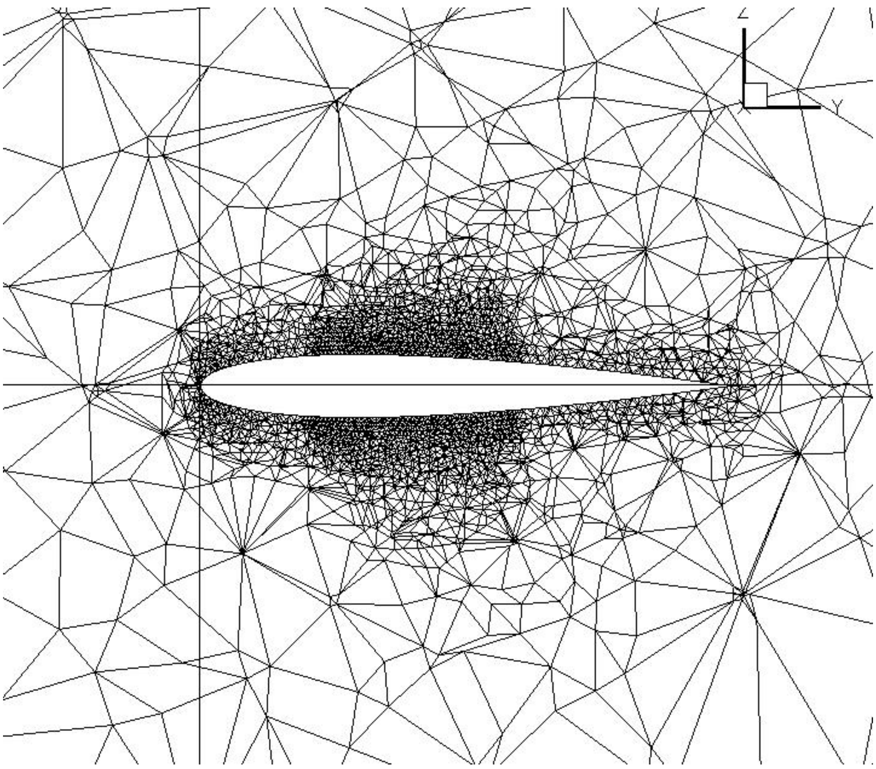
6.2.5. 4η Περίπτωση.

Η τέταρτη και τελευταία περίπτωση του αραιού πλέγματος που εξετάστηκε αφορά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής με πρώτη τάξη ακρίβειας, σημειακά πεπλεγμένο σχήμα, και με την εφαρμογή της μεθόδου του εμπλουτισμού του υπό εξέταση πλέγματος. Ουσιαστικά, η μόνη διαφοροποίηση από τη δεύτερη περίπτωση είναι πλέον η εφαρμογή του σχήματος επίλυσης με πρώτη τάξη ακρίβειας και όχι με δεύτερη. Το προσαρμοσμένο πλέγμα στο μέσο της πτέρυγας, το οποίο προέκυψε με την εφαρμογή της προαναφερθείσας μεθόδου παρουσιάζεται στη συνέχεια στο Σχήμα 6.26. Στο τελικό πλέγμα οι κόμβοι και τα τετράεδρα έχουν σχεδόν διπλασιαστεί, καθώς αριθμούν σε 541621 κόμβους αριθμούν και σε 2967808 τετράεδρα. Κατόπιν, εμφανίζονται τα αποτελέσματα αυτής της περίπτωσης στα Σχήματα 6.26 έως 6.31.

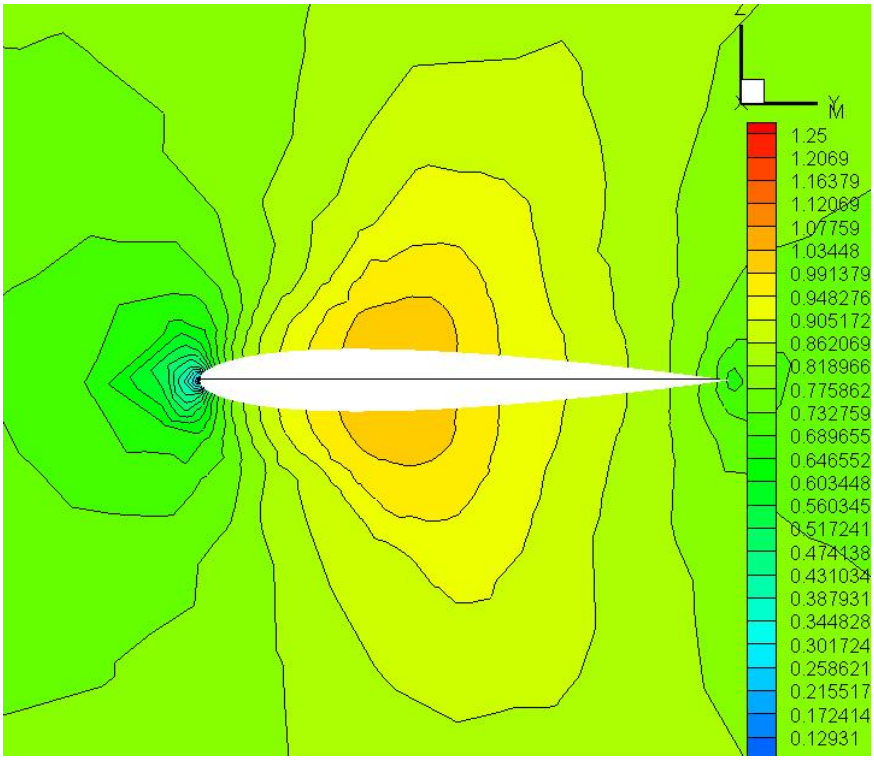
Από τα Σχήματα των ισογραμμών του αριθμού Mach αλλά και της πίεσης γίνεται άμεσα αισθητή η διαφοροποίηση τους από τα αντίστοιχα Σχήματα που εξάχθηκαν και παρουσιάστηκαν πρωτύτερα. Η σύλληψη του κύματος κρούσης δεν είναι λεπτομερής. Ο λόγος είναι προφανής, λόγω της μικρής τάξης ακρίβειας και επακόλουθα της αυξημένης εισαγωγής αριθμητικής διάχυσης, καθίσταται αδύνατη η σύλληψη του φαινομένου του κύματος κρούσης και στις δύο πλευρές της υπό εξέτασης πτέρυγας.

Η συγκεκριμένη αδυναμία διαφαίνεται βέβαια και στα διαγράμματα Cp-Y και Mach-Y, όπου οι αντίστοιχες καμπύλες των αποτελεσμάτων του προγράμματος EU2.for αλλά και των αποτελεσμάτων των προηγούμενων περιπτώσεων του προγράμματος EU3_Ref.for είναι πιο «απότομες». Επιπρόσθετα, στα εν λόγω Σχήματα φαίνεται ακόμα μία αδυναμία, αυτή του υπολογισμού των σωστών τιμών Cp και Mach γύρω από την πτέρυγα. Στην εν λόγω περίπτωση η διαφορά μεταξύ των καμπυλών στα διαγράμματα Cp-Y και Mach-Y σε σχέση με τις αντίστοιχες καμπύλες του λογισμικού EU2.for είναι σαφώς μεγαλύτερη από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

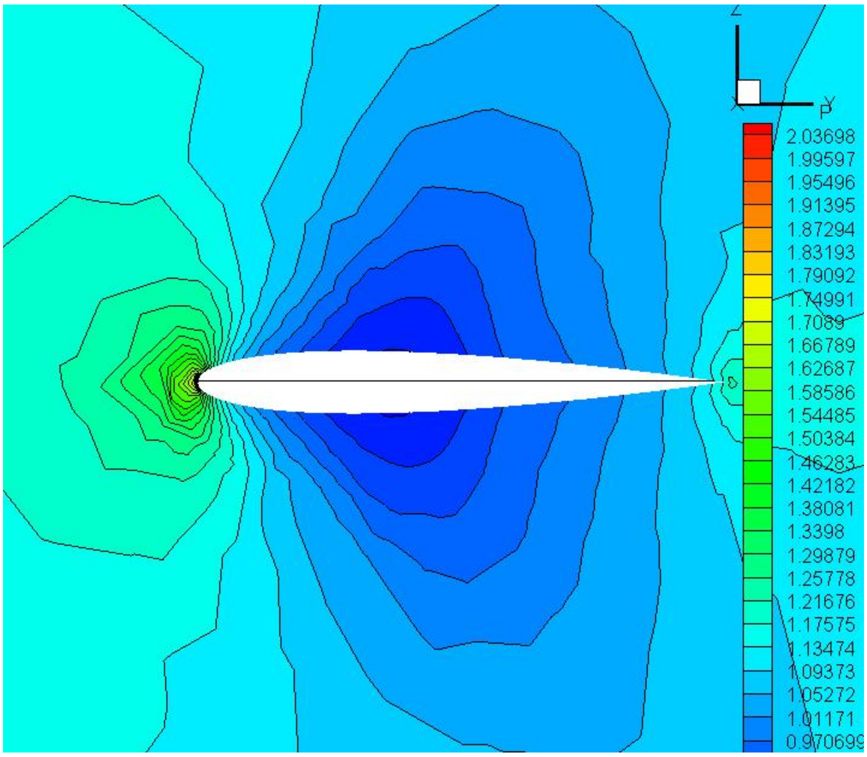
Τέλος, όσον αφορά τη σύγκλιση του κώδικα, οι τάξεις μεγέθους των υπολοίπων των αποτελεσμάτων μειώνονται κατά δώδεκα τάξεις μεγέθους στις πρώτες 1700 επαναλήψεις. Η σύγκλιση παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 6.31. Γίνεται φανερή η γρηγορότερη σύγκλιση της υπό εξέταση περίπτωσης σε σχέση με τις προαναφερθείσες, λόγω του κατά πολύ αραιότερου τελικού πλέγματος αλλά και λόγω της μικρής τάξης ακρίβειας. Τέλος, παρατηρείται και σε αυτό το Σχήμα η επανάληψη, όπου έλαβε χώρα η μέθοδος του εμπλουτισμού, η οποία είναι στις 200 επαναλήψεις.



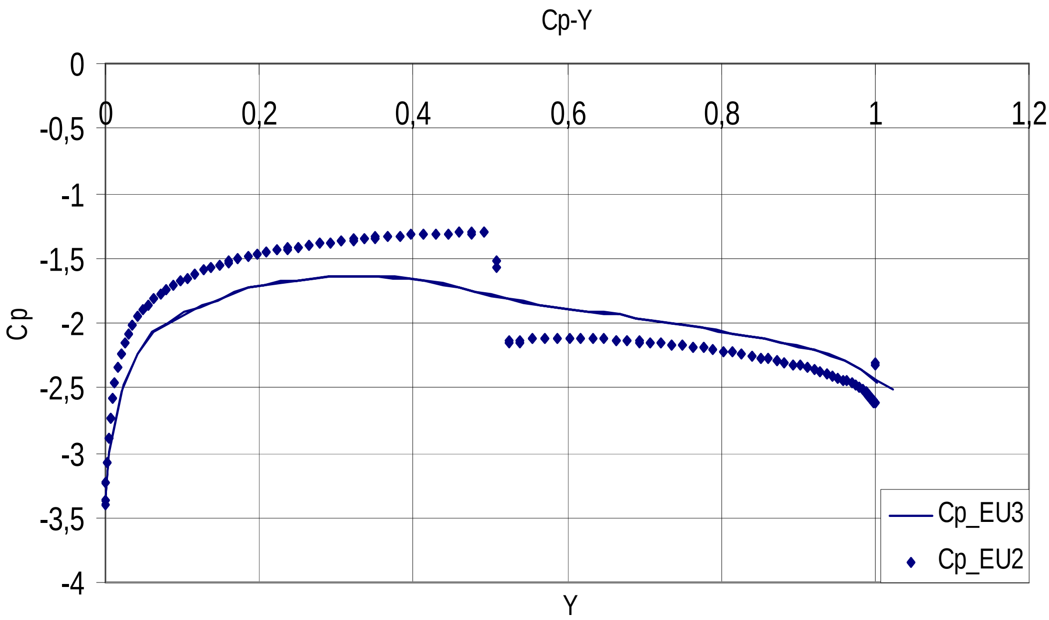
Σχήμα 6.26: Προσαρμοσμένο πλέγμα της τέταρτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



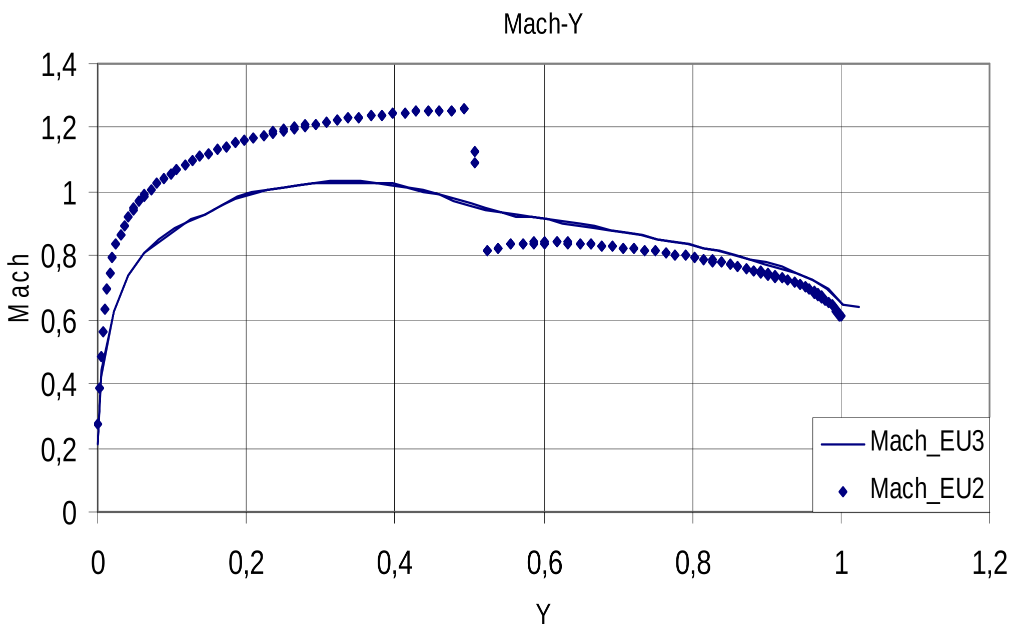
Σχήμα 6.27: Ισογραμμές Mach της τέταρτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



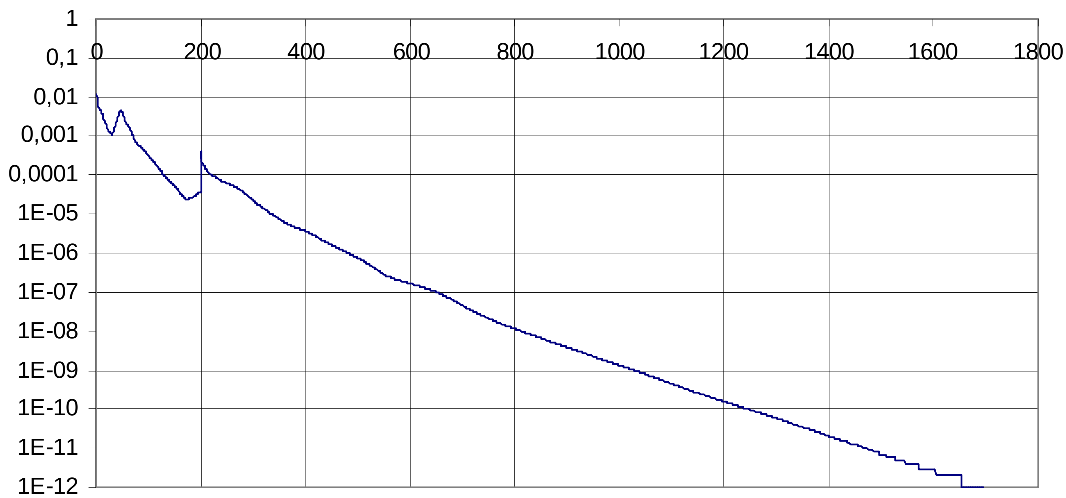
Σχήμα 6.28: Ισογραμμές πίεσης της τέταρτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).



Σχήμα 6.29: Διάγραμμα Cp-Y της τέταρτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12) και σύγκριση με τα αποτελέσματα της διδιάστατης επίλυσης.



Σχήμα 6.30: Διάγραμμα Mach-Y της τέταρτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12) και σύγκριση με τα αποτελέσματα της διδιάστατης επίλυσης.

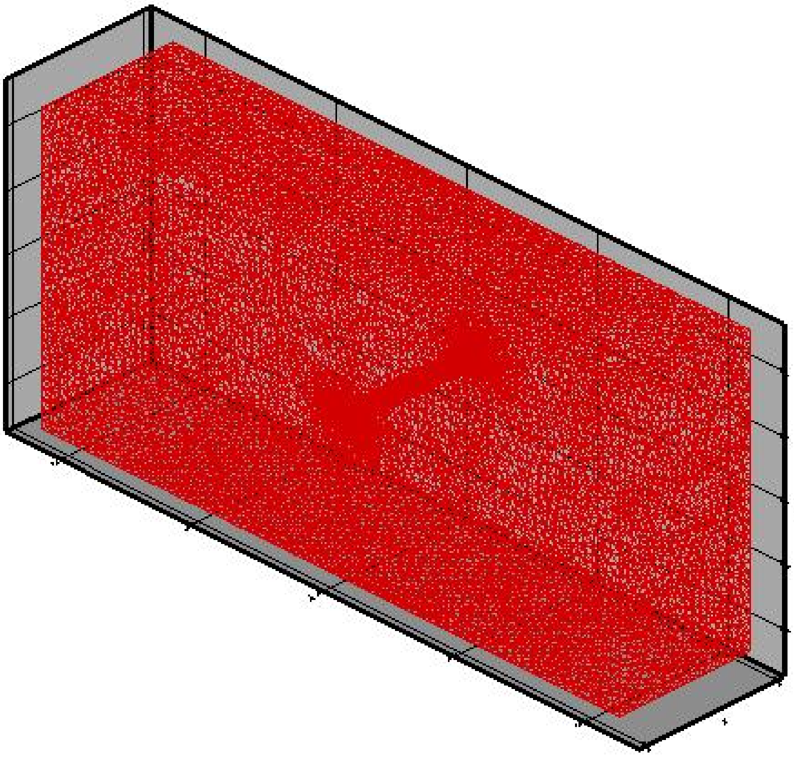


Σχήμα 6.31: Διάγραμμα σύγκλισης της τέταρτης περίπτωσης του αραιού πλέγματος (NACA0012_V12).

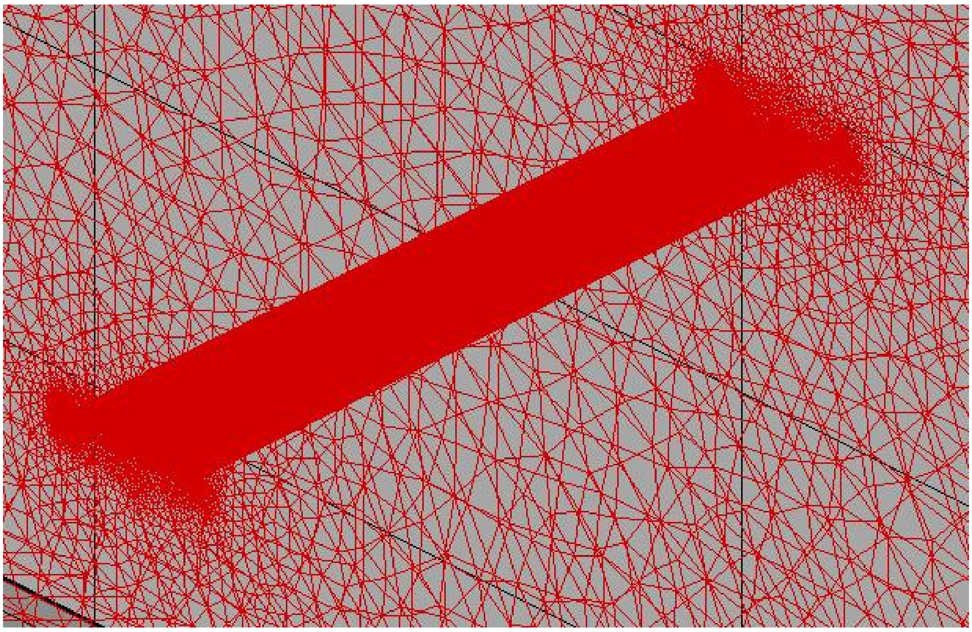
6.3. Πυκνό Πλέγμα Πτέρυγας NACA0012 (NACA0012_V13).

6.3.1. Εισαγωγή.

Στην ενότητα αυτή εξετάζονται οι δύο τελευταίες περιπτώσεις του Πίνακα 6.1. για το πυκνό πλέγμα, το οποίο εμφανίζεται στο παρακάτω Σχήμα 6.32. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι της μορφής *.cfx5 και αποτελείται από 625250 κόμβους και 3500243 τετράεδρα. Ο αριθμός των κόμβων αλλά και των τετραέδρων είναι τριπλάσιος από τους αντίστοιχους αριθμούς του πλέγματος που εξετάστηκε στις προηγούμενες ενότητες. Η πτέρυγα, η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.33, βρίσκεται και πάλι στο κέντρο του πεδίου ροής, ενώ τα άκρα της ακουμπούν στις πλαϊνές επιφάνειες. Επιπρόσθετα, η μπροστά και πίσω έδρα του παραλληλεπίπεδου σχετικά με τη θέση της πτέρυγας ορίστηκαν ως επιφάνειες εισόδου και εξόδου της ροής αντίστοιχα, ενώ οι υπόλοιπες έδρες ορίστηκαν ως στερεά τοιχώματα.



Σχήμα 6.32: Απεικόνιση του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13).



Σχήμα 6.33: Κοντινή εικόνα της πτέρυγας αποτελούμενης από αεροτομή NACA0012 για την περίπτωση του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13).

6.3.2. 1η Περίπτωση.

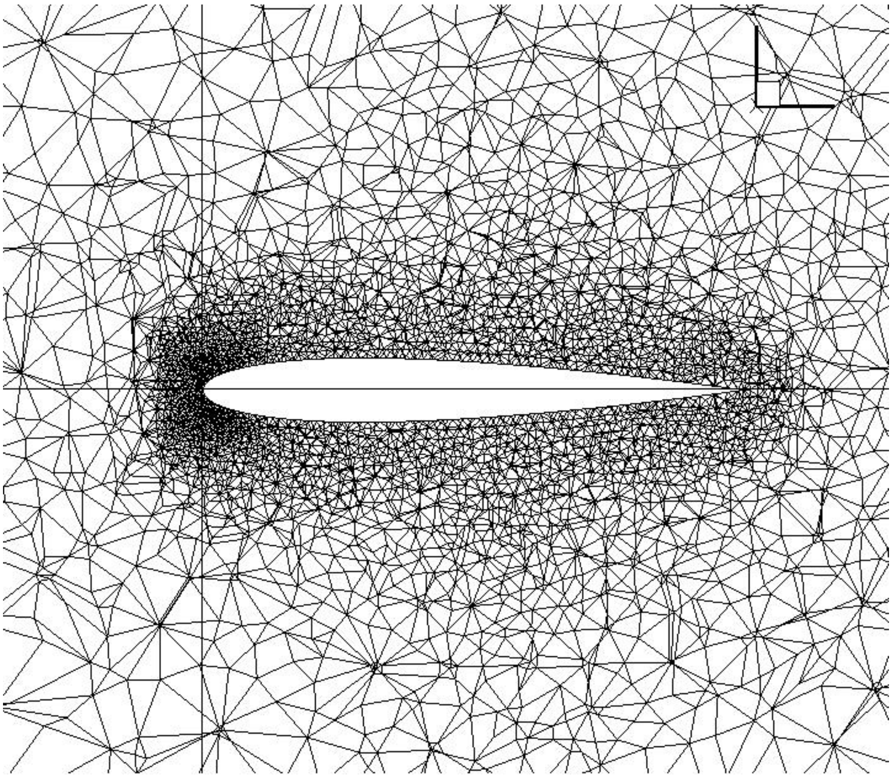
Η πρώτη περίπτωση του πυκνού πλέγματος που εξετάστηκε αφορά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής με δεύτερη τάξη ακρίβειας, εφαρμογή της συνάρτησης περιορισμού Van Leer Van Albada και σημειακά πεπλεγμένο σχήμα, αλλά χωρίς την εφαρμογή της μεθόδου του εμπλουτισμού του υπό εξέταση πλέγματος. Το αρχικό πλέγμα στο μέσο της πτέρυγας, το οποίο και δεν μεταβλήθηκε αφού δεν εφαρμόστηκε η προαναφερθείσα μέθοδος παρουσιάζεται στη συνέχεια στο Σχήμα 6.34. Κατόπιν, εμφανίζονται τα αποτελέσματα αυτής της περίπτωσης στα Σχήματα 6.35 έως 6.39.

Από τα Σχήματα των ισογραμμών του αριθμού Mach αλλά και της πίεσης δύναται κάποιος να παρατηρήσει ότι παρά τη μη πύκνωση του πλέγματος το κύμα κρούσης έχει συλληφθεί σε ικανοποιητικό βαθμό. Σε αντίθεση λοιπόν με το αραιό πλέγμα, το πυκνό πλέγμα απεικονίζει το κύμα κρούσης αρκετά καλά έστω και χωρίς πύκνωση. Η διαφοροποίηση αυτή οφείλεται βέβαια στο ότι το υπό εξέταση πλέγμα είναι ήδη αρκετά πυκνωμένο στην περιοχή γύρω από την πτέρυγα, οπότε και συλλαμβάνει το εν λόγω φαινόμενο.

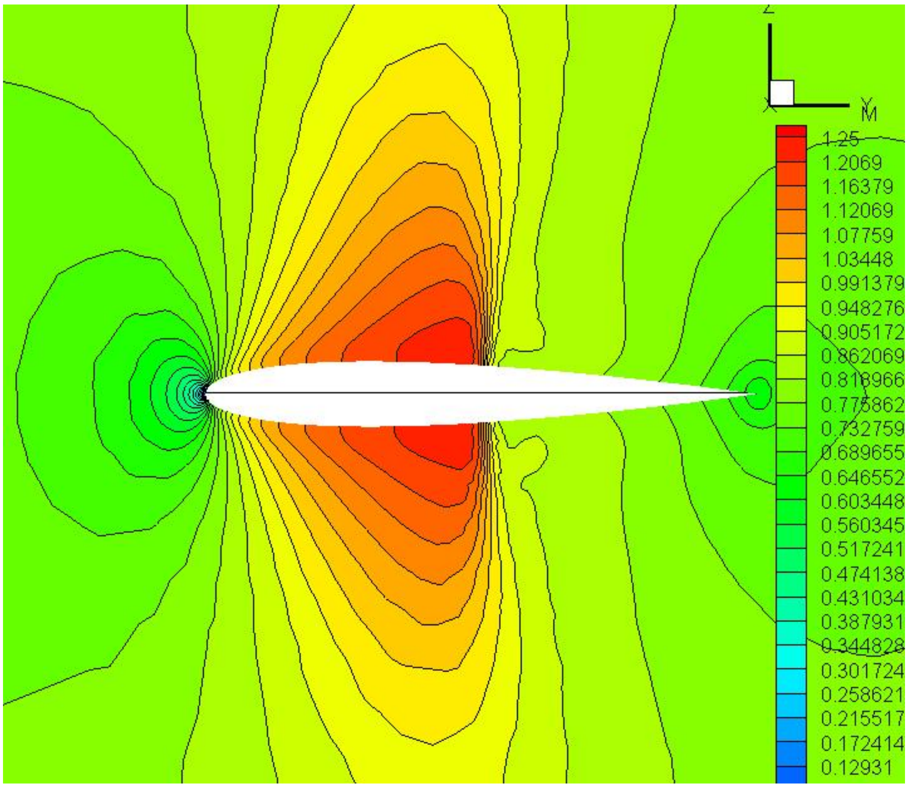
Ωστόσο, στο Σχήμα που παρουσιάζει τις ισογραμμές του αριθμού Mach διαφαίνεται και πάλι το «ψευδές» οριακό στρώμα, όπως και στις περιπτώσεις της προηγούμενης ενότητας. Το φαινόμενο αυτό, όπως προαναφέρθηκε, οφείλεται στην αριθμητική διάχυση που εισάγεται κατά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής. Αποτελεί σύνηθες φαινόμενο-πρόβλημα, μικρής ωστόσο σημασίας, στην επίλυση των σχέσεων Euler στις τρεις διαστάσεις, όπως αποδεικνύεται και από την βιβλιογραφία [Bon96]. Τέλος, επισημαίνεται ότι οι επιπτώσεις από αυτό το «ψευδές» φαινόμενο οριακού στρώματος παρουσιάζονται και στο διάγραμμα Mach-Y, καθώς το λογισμικό EU2.for συλλαμβάνει υψηλότερες τιμές Mach, σε σχέση με το EU3_Ref.for.

Όσον αφορά το διάγραμμα Cp-Y παρατηρείται ότι υπάρχει σχεδόν πλήρης εναρμονισμός των αποτελεσμάτων του λογισμικού EU3_Ref.for για το συγκεκριμένο πλέγμα με τα αποτελέσματα του λογισμικού EU2.for. Ο συντελεστής Cp δεν επηρεάζεται τόσο όσο ο αριθμός Mach από αυτήν την καμπύλωση στην επιφάνεια της πτέρυγας λόγω της αριθμητικής διάχυσης.

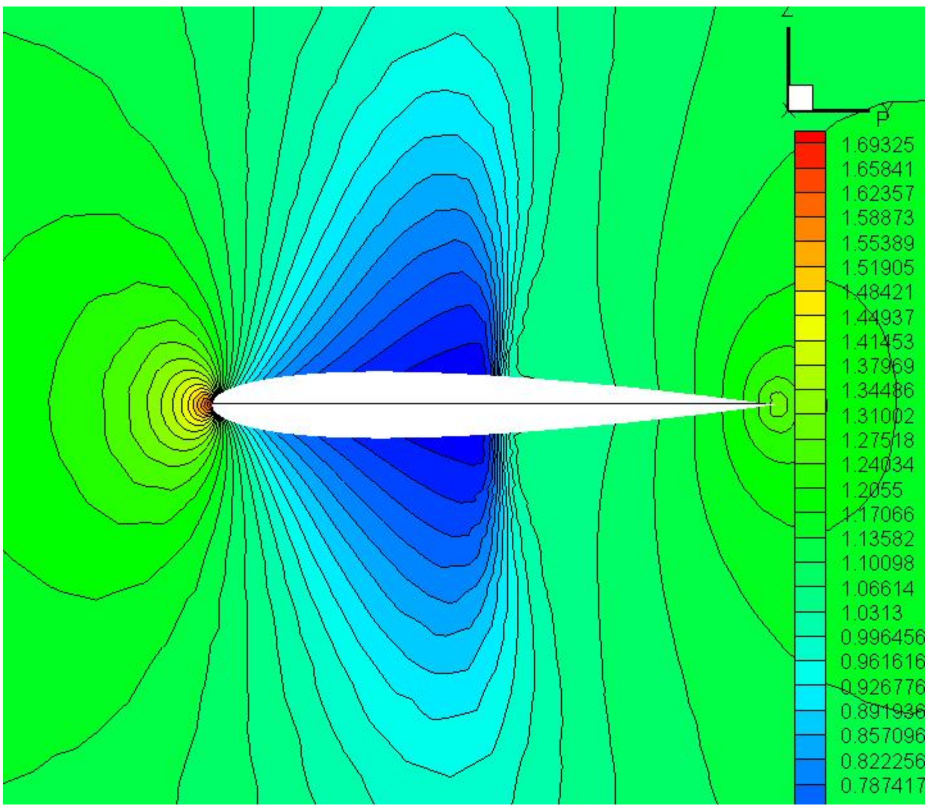
Τέλος, όσον αφορά τη σύγκλιση του κώδικα, οι τάξεις μεγέθους των υπολοίπων των αποτελεσμάτων μειώνονται κατά επτά σχεδόν τάξεις μεγέθους στις πρώτες 1600 επαναλήψεις, ενώ στη συνέχεια αρχίζει η ταλάντωση αυτών μέχρι τις 3000 επαναλήψεις. Η σύγκλιση παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.39.



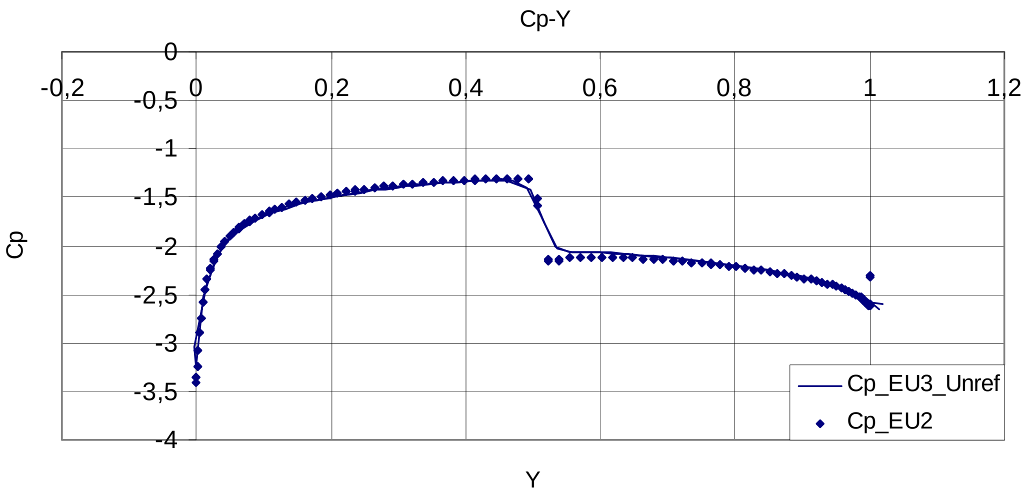
Σχήμα 6.34: Μη προσαρμοσμένο πλέγμα της πρώτης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13).



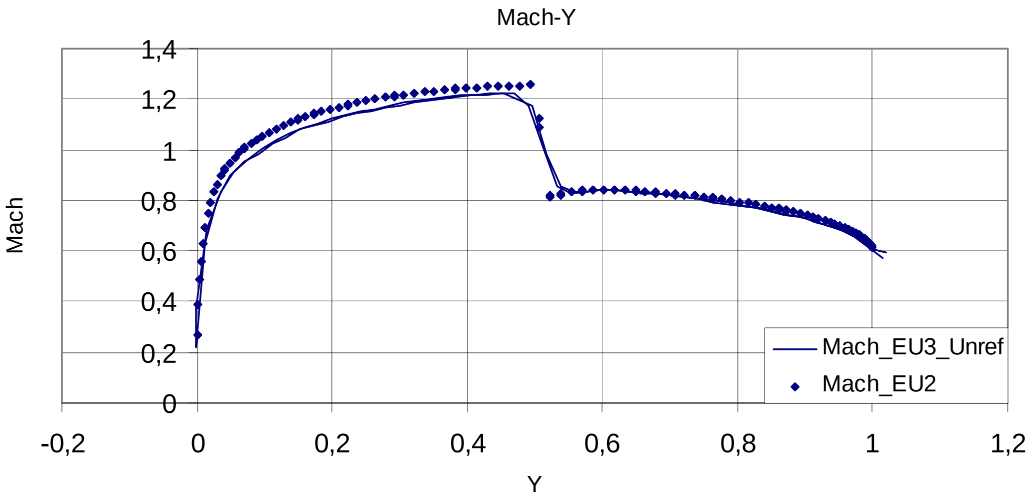
Σχήμα 6.35: Ισογραμμές Mach της πρώτης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13).



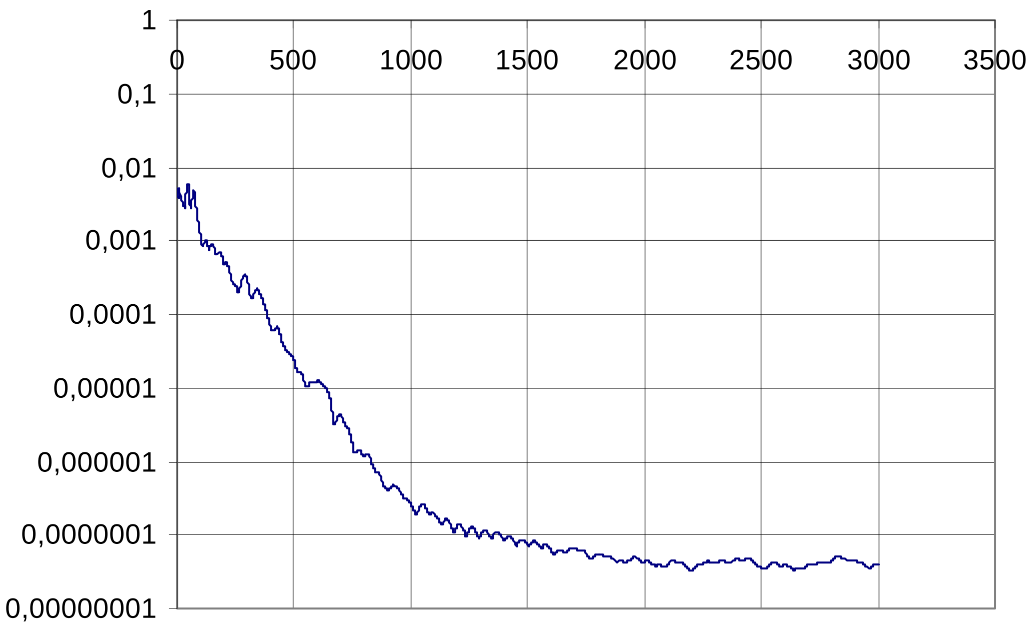
Σχήμα 6.36: Ισογραμμές πίεσης της πρώτης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13).



Σχήμα 6.37: Διάγραμμα Cp-Y της πρώτης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13) και σύγκριση με τα αποτελέσματα της διδιάστατης επίλυσης.



Σχήμα 6.38: Διάγραμμα Mach-Y της πρώτης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13) και σύγκριση με τα αποτελέσματα της διδιάστατης επίλυσης.



Σχήμα 6.39: Διάγραμμα σύγκλισης της πρώτης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13).

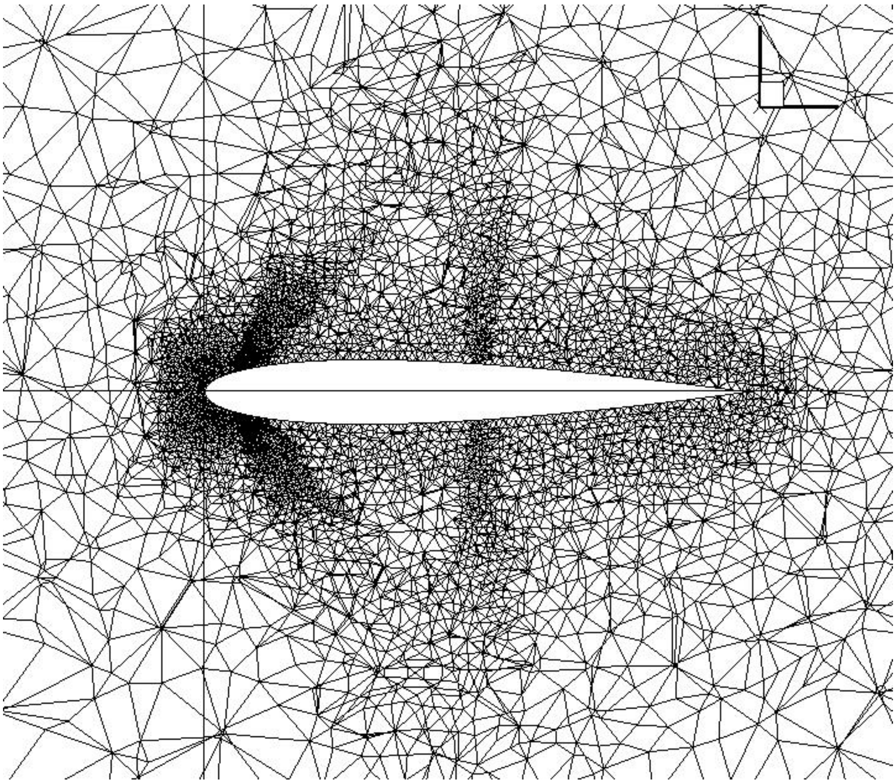
6.3.3. 2^{η} Περίπτωση.

Η δεύτερη και τελευταία περίπτωση του πυκνού πλέγματος που εξετάστηκε αφορά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής με δεύτερη τάξη ακρίβειας, εφαρμογή της συνάρτησης περιορισμού Van Leer Van Albada, σημειακά πεπλεγμένο σχήμα, αλλά και με την εφαρμογή της μεθόδου του εμπλουτισμού του υπό εξέταση πλέγματος αυτή τη φορά. Ουσιαστικά, η μόνη διαφοροποίηση από την προηγούμενη περίπτωση είναι πλέον η εφαρμογή της μεθόδου του εμπλουτισμού. Το προσαρμοσμένο πλέγμα στο μέσο της πτέρυγας, το οποίο προέκυψε με την εφαρμογή της προαναφερθείσας μεθόδου παρουσιάζεται στη συνέχεια στο Σχήμα 6.40. Στο τελικό πλέγμα οι κόμβοι καθώς και τα τετράεδρα έχουν σχεδόν διπλασιαστεί, καθώς αριθμούν σε 1084667 κόμβους και σε 6171465 τετράεδρα. Κατόπιν, εμφανίζονται τα αποτελέσματα αυτής της περίπτωσης στα Σχήματα 6.41 έως 6.45.

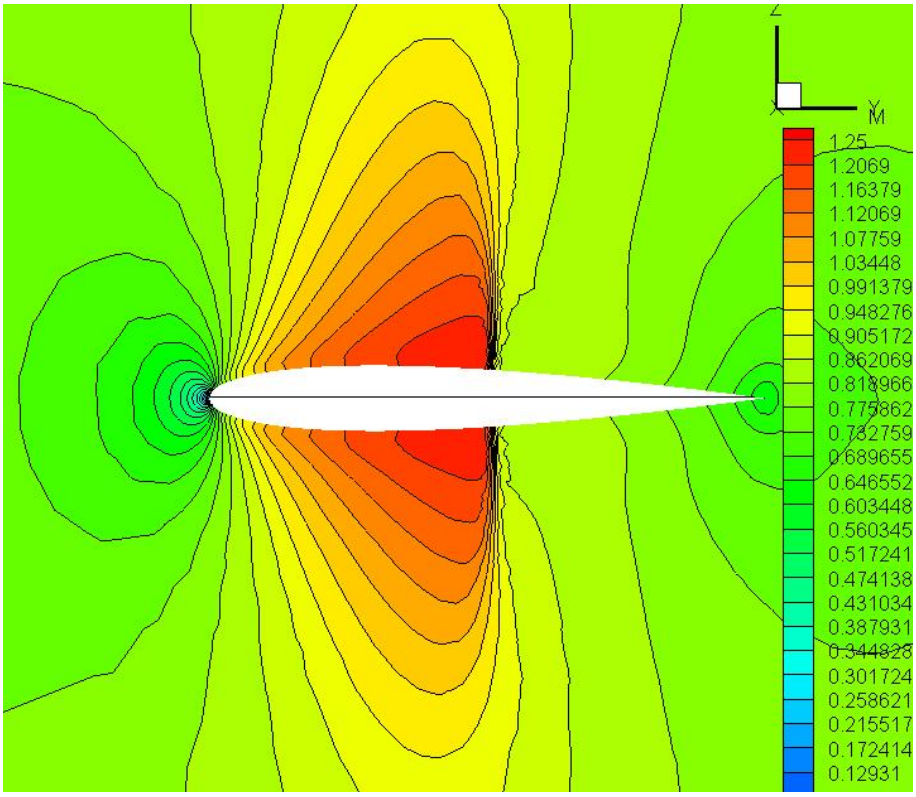
Το σύνολο των παρακάτω σχημάτων αποδεικνύει την πολύ καλή σύλληψη του πλήρες φαινομένου που εξελίσσεται γύρω από την εξέταση πτέρυγα. Πιο συγκεκριμένα, από τα Σχήματα των ισογραμμών του αριθμού Mach αλλά και της πίεσης φαίνεται η πολύ καλή σύλληψη του κύματος κρούσης. Η εν λόγω απεικόνιση είναι πολύ καλύτερη από αυτήν της προηγούμενης περίπτωσης στην οποία δεν είχε εφαρμοστεί η μέθοδος του εμπλουτισμού. Επίσης, η ομοιότητα των προαναφερόμενων σχημάτων αυτής της ενότητας με αυτά που εξάχθηκαν από το λογισμικό EU2.for είναι προφανής. Τέλος, η πολύ καλή απεικόνιση και προσομοίωση του φαινομένου παρατηρείται και στα διαγράμματα Cp-Y και Mach-Y.

Ωστόσο, στο Σχήμα που παρουσιάζει τις ισογραμμές του αριθμού Mach διαφαίνεται και πάλι το «ψευδές» φαινόμενο του οριακού στρώματος [Bon96]. Παρά την πολύ καλή πύκνωση του πλέγματος και τη χρήση δεύτερης τάξης ακρίβειας κατά την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ροής, το φαινόμενο της αριθμητικής διάχυσης κάνει την εμφάνιση του στην επιφάνεια της πτέρυγας (το φαινόμενο αυτό γίνεται εντονότερο με την πύκνωση του πλέγματος). Η παρουσία του συγκεκριμένου φαινομένου είναι αισθητή και στο διάγραμμα Mach-Y, καθώς το λογισμικό EU2.for συλλαμβάνει υψηλότερες τιμές Mach, σε σχέση με το EU3_Ref.for. Αντίθετα, οι καμπύλες στο διάγραμμα Cp-Y φαίνεται να είναι πλήρως εναρμονισμένες, παρά την οποιαδήποτε παρουσία φαινομένου αριθμητικής διάχυσης.

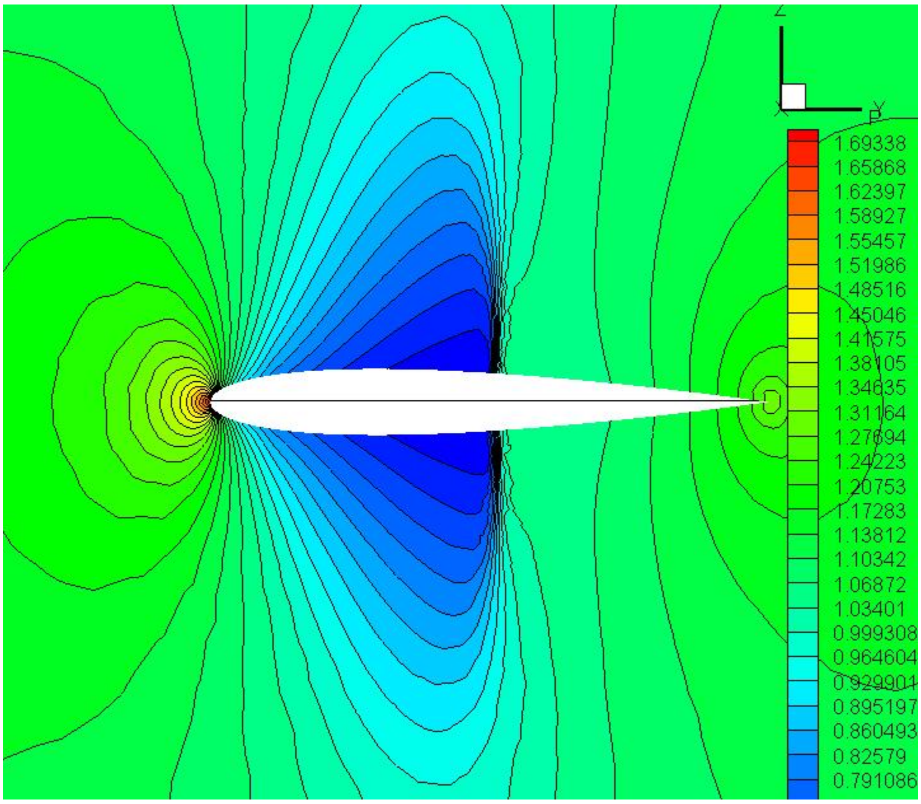
Τέλος, όσον αφορά τη σύγκλιση του κώδικα, οι τάξεις μεγέθους των υπολοίπων των αποτελεσμάτων μειώνονται κατά επτά περίπου τάξεις μεγέθους στις πρώτες 1600 επαναλήψεις, ενώ στη συνέχεια αρχίζει η ταλάντωση αυτών μέχρι τις 3000 επαναλήψεις. Η σύγκλιση παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.45. Στο ίδιο Σχήμα φαίνεται και ο αριθμός των επαναλήψεων, όπου εφαρμόζεται η μέθοδος του εμπλουτισμού. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, ο εμπλουτισμός εφαρμόστηκε στις 300 επαναλήψεις. Στην εν λόγω επανάληψη, η σύγκλιση «χαλάει» και το υπόλοιπο αυξάνεται.



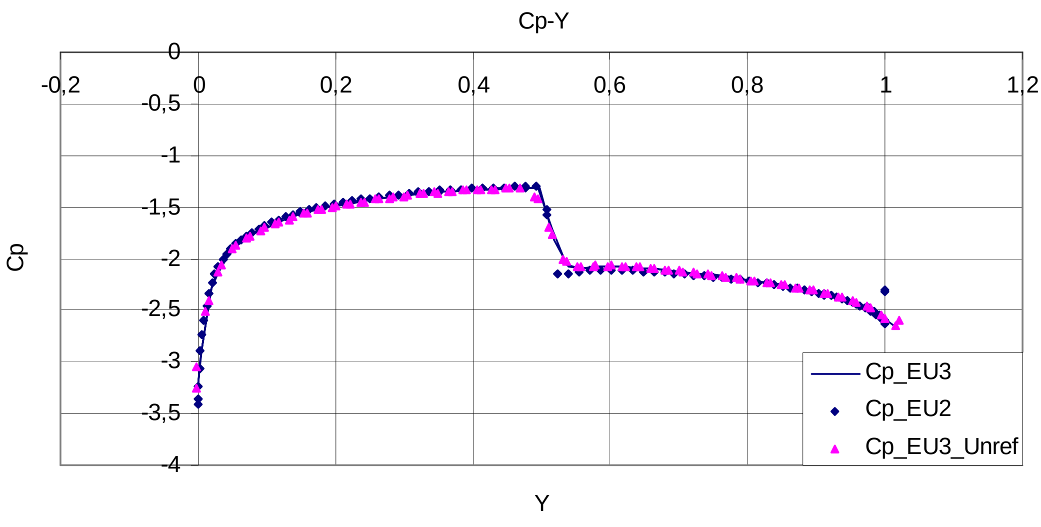
Σχήμα 6.40: Προσαρμοσμένο πλέγμα της δεύτερης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13).



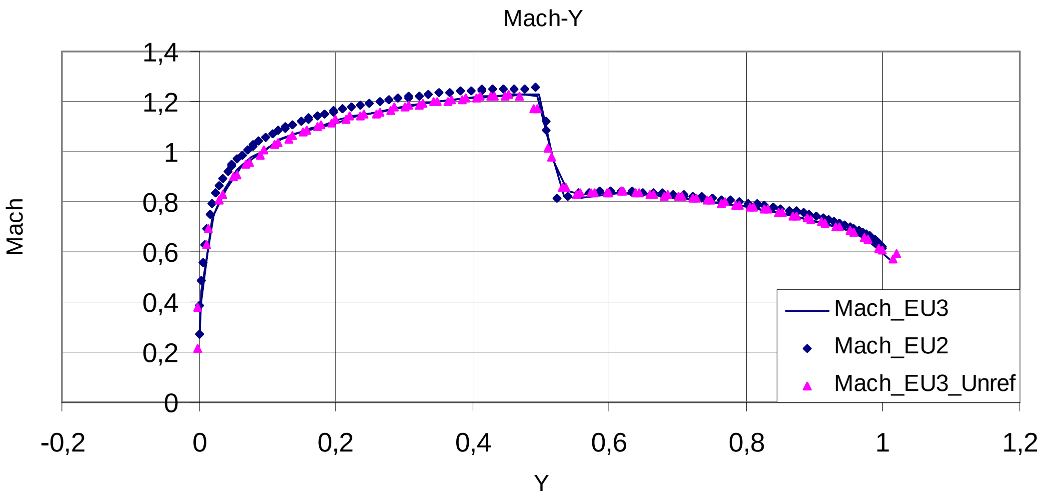
Σχήμα 6.41: Ισογραμμές Mach της δεύτερης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13).



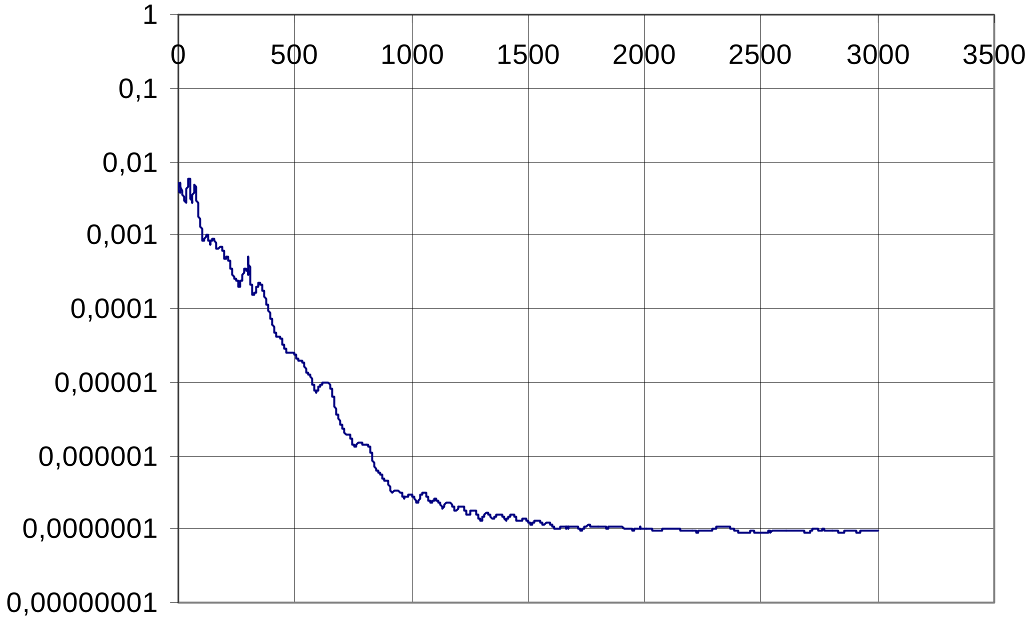
Σχήμα 6.42: Ισογραμμές πίεσης της δεύτερης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13).



Σχήμα 6.43: Διάγραμμα Cp-Y της δεύτερης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13) και σύγκριση με τα αποτελέσματα της διδιάστατης επίλυσης καθώς και με τα αποτελέσματα χωρίς προσαρμογή του πλέγματος.



Σχήμα 6.44: Διάγραμμα Mach-Y της δεύτερης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13) και σύγκριση με τα αποτελέσματα της διδιάστατης επίλυσης καθώς και με τα αποτελέσματα χωρίς προσαρμογή του πλέγματος.



Σχήμα 6.45: Διάγραμμα σύγκλισης της δεύτερης περίπτωσης του πυκνού πλέγματος (NACA0012_V13).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα – Μελλοντική Επέκταση της Εργασίας.

7.1. Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα.

Αντικείμενο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας ήταν η θεμελίωση, ο προγραμματισμός και η πιστοποίηση μίας αριθμητικής μεθόδου επίλυσης των εξισώσεων Euler. Όπως προαναφέρθηκε, βάσει αυτής της μεθόδου αναπτύχθηκε το λογισμικό EU3_Ref σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran_90, το οποίο επιλύει αριθμητικά τις εξισώσεις Euler με σημειακά πεπλεγμένο ή ρητό σχήμα επίλυσης και ακρίβεια δευτέρας τάξης σε τοπικά προσαρμοζόμενα τρισδιάστατα μη-δομημένα πλέγματα τετραεδρικών στοιχείων. Το εν λόγω λογισμικό αποτελεί ουσιαστικά εξέλιξη του προγενέστερου λογισμικού EU3 των κ. Ιωάννη Κ. Νικολού και κ. Λάζαρου Δ. Αδαμούδη. Στην συνέχεια της παραγράφου πραγματοποιείται μία συνοπτική περιγραφή των βασικότερων θεμάτων που πραγματεύτηκε η παρούσα Διπλωματική Εργασία, καθώς και των συμπερασμάτων που εξάχθηκαν από αυτήν.

Στο λογισμικό επίλυσης που αναπτύχθηκε, η χωρική διακριτοποίηση υλοποιείται με την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων σε συνδυασμό με την κεντροκομβική μέθοδο επίλυσης και με δομή δεδομένων βασισμένη στις ακμές. Ο υπολογισμός των διανυσμάτων ροής για κάθε ακμή του υπό εξέταση πλέγματος υλοποιήθηκε, θεωρώντας ένα τοπικό πρόβλημα Riemann μεταξύ των ακραίων κόμβων αυτής της ακμής και επιλύοντας το με τον προαναφερθέντα επιλύτη. Στους εν λόγω υπολογισμούς αυξήθηκε η τάξη ακρίβειας τους με τη χρήση του σχήματος MUSCL, το οποίο για την εφαρμογή του σε μη-δομημένο πλέγμα απαιτεί τον υπολογισμό των κλίσεων των μεταβλητών στους κόμβους του. Κατόπιν, για τον υπολογισμό των κλίσεων χρησιμοποιήθηκε η αναπαράσταση των μεταβλητών κατά Green-Gauss, σε συνδυασμό με τις συναρτήσεις περιορισμού (limiters) των van Leer-van Albada και των Barth-Jespersen. Στο αναπτυχθέν λογισμικό διατηρείται η δυνατότητα του χρήστη να επιλέγει την τάξη ακρίβειας που επιθυμεί, καθώς και την συνάρτηση περιορισμού που επιθυμεί εφόσον επιλέξει δευτέρας τάξης ακρίβεια. Τέλος, οι υπολογισμοί των διανυσμάτων ροής κάθε ακμής του υπό εξέταση πλέγματος συμπληρώνονται με την κατάλληλη εφαρμογή των οριακών συνθηκών εισόδου/εξόδου της ροής και στερεού τοιχώματος.

Το εν λόγω λογισμικό παρέχει τη δυνατότητα στον χρήστη να επιλέξει είτε την ρητή αριθμητική μέθοδο επίλυσης είτε τη σημειακά πεπλεγμένη αριθμητική μέθοδο επίλυσης. Και οι δύο μέθοδοι είναι τύπου χρονοπροέλασης. Και για τις δύο μεθόδους δίνεται η δυνατότητα χρήσης της τεχνικής του βέλτιστου τοπικού ή ολικού χρονικού βήματος. Εάν επιλεγεί το ρητό σχήμα η ανανέωση των μεταβλητών στους κόμβους του πλέγματος πραγματοποιείται με τη μέθοδο Runge-Kutta τεσσάρων βημάτων. Εάν επιλεγεί το σημειακά πεπλεγμένο σχήμα η ανανέωση των μεταβλητών στους κόμβους του πλέγματος πραγματοποιείται με τη μέθοδο Gauss-Seidel. Το σημειακά πεπλεγμένο σχήμα παρουσιάζει αυξημένη πολυπλοκότητα σε σχέση με το ρητό. Εντούτοις, η σύγκλιση στο σημειακά πεπλεγμένο σχήμα επιτυγχάνεται πολύ ταχύτερα από ότι στο ρητό, γεγονός που το καθιστά αποδοτικότερο και προτιμητέο σχήμα.

Η μέθοδος της τοπικής προσαρμογής του υπό εξέταση πλέγματος στη μορφή που εφαρμόσθηκε στην παρούσα Διπλωματική Εργασία απαίτησε την ανάπτυξη ενός αλγορίθμου τοπικού εμπλουτισμού που ικανοποιούσε κάποιους κανόνες, ώστε να διατηρείται η τοπολογία του τυπικού μη-δομημένου πλέγματος. Στον εν λόγω αλγόριθμο, ο εντοπισμός των περιοχών προσαρμογής πραγματοποιείται μέσω της σημείωσης των ακμών του πλέγματος, η οποία βασίζεται στην εφαρμογή κατάλληλων κριτηρίων, διατυπωμένων για το σκοπό αυτό. Κάθε κριτήριο αποτελείται ουσιαστικά από μία συνάρτηση κρίσης, η οποία ενεργεί σε μία μεταβλητή-αισθητήριο της ροής. Η ανάγκη προσαρμογής του πλέγματος εκφράζεται ποσοτικά μέσω της σύγκρισης σε κάθε ακμή, της τιμής της συνάρτησης κρίσης με το κατώφλι εμπλουτισμού. Τα κριτήρια προσαρμογής, που δοκιμάσθηκαν στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, επικεντρωνόντουσαν στη σύλληψη του κρουστικού κύματος.

Όσον αφορά τα αποτελέσματα που εξάχθηκαν από το λογισμικό που αναπτύχθηκε στην εν λόγω Διπλωματική Εργασία, κύριο συμπέρασμα αποτελεί η ποιοτική τους ορθότητα, καθώς δίνουν λογική απεικόνιση της ροής. Η συνεισφορά της μεθόδου του εμπλουτισμού στη σύλληψη των κυμάτων κρούσης αποδείχτηκε καθοριστική. Μοναδική αδυναμία στα αποτελέσματα, όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποτέλεσε ο σωστός υπολογισμός του αριθμού Mach στα σημεία του πλέγματος γύρω από την υπό εξέταση γεωμετρία. Ωστόσο, το εν λόγω πρόβλημα παύει να έχει νόημα από τη στιγμή που επιθυμητό είναι να μετατραπεί ο κώδικας ώστε να λύνει τις εξισώσεις του συνεκτικού ρευστού, οπότε στη συγκεκριμένη περιοχή θα υπάρχει οριακό στρώμα (με χρήση υβριδικού πλέγματος). Επιπρόσθετα, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι το εν λόγω πρόβλημα βρέθηκε καταγεγραμμένο και σε διεθνή βιβλιογραφία [Bon96]. Τέλος, τα αποτελέσματα θεωρούνται ικανοποιητικά, συγκρινόμενα πάντα με αντίστοιχα αποτελέσματα άλλων αντίστοιχων μεθόδων [AGARD-R-787] [Bon96] [Kou98].

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, αποτελεί ένα ευέλικτο και γρήγορο εργαλείο για την αρχική εκτίμηση της ροής ρευστού σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής. Ειδικότερα, σε περιπτώσεις διηχητικής ροής τα κύματα κρούσης, αλλά και γενικότερα όλη η ροή διαμορφώνονται κυρίως από την επίδραση των μη-συνεκτικών δυνάμεων. Ως εκ τούτου, στις περιπτώσεις αυτές η επίλυση των εξισώσεων Euler παρέχει χρήσιμα συμπεράσματα σε μικρό χρονικό διάστημα έναντι της πιο χρονοβόρας επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes.

7.2. Μελλοντική Επέκταση της Εργασίας.

Κλείνοντας, παρατίθενται ορισμένες προτάσεις για μελλοντική έρευνα σε θέματα σχετικά με αυτά που αποτέλεσαν το αντικείμενο της παρούσας Διπλωματικής εργασίας. Οι προτάσεις αυτές αφορούν κυρίως τη βελτίωση ορισμένων τμημάτων του αλγόριθμου, ώστε ο τελευταίος να καταστεί αποδοτικότερος και ταχύτερος.

Καταρχήν, σημαντική επέκταση του εν λόγω αλγορίθμου αποτελεί η μετατροπή του αλγόριθμου για την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes, ενσωματώνοντας πλέον και του συνεκτικούς όρους, για την επίλυση αρχικά στρωτών ροών και στη συνέχει τυρβωδών ροών με την εισαγωγής κατάλληλων μοντέλων τύρβης.

Επιπρόσθετα, όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια στο σχήμα δευτέρας τάξεως έχουν χρησιμοποιηθεί δύο συναρτήσεις περιορισμού (Limiters), αυτές των Van Leer-Van Albada και των Barth-Jespersen. Μολονότι τα αποτελέσματα των εν λόγω συναρτήσεων κρίνονται ικανοποιητικά, μία επέκταση του αλγορίθμου δύναται να είναι η δοκιμή και άλλων συναρτήσεων περιορισμού, οι οποίες ανάλογα με το πρόβλημα θα μπορούσαν πιθανότατα να εξάγουν καλύτερα αποτελέσματα.

Μία άλλη επέκταση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας θα μπορούσε είναι η εφαρμογή και η διερεύνηση της εφαρμογής περισσότερο εξελιγμένων πεπλεγμένων μεθόδων επίλυσης του μη-γραμμικού ή του γραμμικοποιημένου προβλήματος ανά επανάληψη, π.χ. εφαρμογή μεθόδων υποχώρων Krylov με τεχνικές προδιάθεσης. Με τη χρήση τέτοιων μεθόδων θα βελτιωθούν τα χαρακτηριστικά της σύγκλισης σε σχέση με τη σημειακά πεπλεγμένη μέθοδο επίλυσης.

Αν και η ταχύτητα σύγκλισης του εν λόγω αλγορίθμου παραμένει ικανοποιητική, ωστόσο υφίσταται τρόπος περαιτέρω βελτίωσης της. Ο τρόπος αυτός έγκειται στη μεταφορά της μεθόδου επίλυσης σε ένα σύστημα παράλληλων υπολογιστών. Η μεταφορά αυτή θα μπορούσε να βασιστεί στη διαμέριση του αρχικού πλέγματος σε τόσα υποχωρία όσα και οι διαθέσιμοι επεξεργαστές του υπολογιστικού συστήματος. Ο κάθε επεξεργαστής θα αναλάμβανε τελικά την επίλυση της υπό εξέτασης ροής στο αντίστοιχο υποχωρίο. Το βασικό κέρδος από την παράλληλη επεξεργασία είναι η σημαντική μείωση του χρόνου επίλυσης, καθώς και η αύξηση της διαθέσιμης υπολογιστικής μνήμης.

Μία άλλη προτεινόμενη επέκταση είναι η κατάλληλη τροποποίηση του αλγορίθμου, ώστε να έχει τη δυνατότητα να επεξεργαστεί μη-δομημένα πλέγματα εξαεδρικών στοιχείων. Ανάλογα με την υπό εξέταση γεωμετρία, ένα πλέγμα εξαεδρικών ή πολυεδρικών στοιχείων πιθανότατα να προσαρμόζεται καλύτερα σε αυτήν. Η εφαρμογή μπορεί να επεκταθεί ακόμη περισσότερο, ώστε να μπορεί να επεξεργάζεται υβριδικά πλέγματα, που αποτελούνται από διάφορα είδη στοιχείων, για παράδειγμα και από πρισματικά, πυραμιδικά και τετραεδρικά στοιχεία (για την καλύτερη διακριτοποίηση της περιοχής κοντά σε στερεά τοιχώματα).

Επιπλέον, μία άλλη επέκταση του αλγορίθμου, όσον αφορά το πλέγμα που διαχειρίζεται, είναι η εφαρμογή της μεθόδου του απεμπλουτισμού. Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 4, η εν λόγω εργασία περιορίστηκε στην εφαρμογή μόνο της μεθόδου του εμπλουτισμού. Η τελευταία μέθοδος συμπληρώνεται και από αυτήν του απεμπλουτισμού, καθώς είναι πιθανό με την εφαρμογή της πρώτης να πυκνώσουν και μη επιθυμητές περιοχές του πλέγματος. Με την εφαρμογή του απεμπλουτισμού οι μη επιθυμητές περιοχές αραιώνουν, εξοικονομώντας τελικά υπολογιστικό κόστος.

Βελτίωση μπορεί να υποστεί και η μέθοδος της προσαρμογής της γεωμετρίας, που χρησιμοποιήθηκε στην εν λόγω Διπλωματική Εργασία. Η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να επεκταθεί ώστε οι μεταβλητές των μεσοκόμβων των ακμών να μην υπολογίζονται μόνο συναρτήσει των μεταβλητών των γύρω κόμβων σε απόσταση μίας ακμής, αλλά και σε μεγαλύτερη απόσταση. Επίσης, η επέκταση αυτή θα μπορούσε να συμπεριλάβει και την μετακίνηση των αρχικών κόμβων για την καλύτερη απεικόνιση τελικά της υπό εξέτασης γεωμετρίας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Ιακωβιανό Μητρώο του Διανύσματος Ροής

Η έκφραση του διανύσματος ροής στην κατεύθυνση του διαστατού διανύσματος $\vec{n}$ είναι η ακόλουθη:

$$\vec{H} = n_x\vec{F} + n_y\vec{G} + n_z\vec{J} = \begin{pmatrix} \rho V_n|\vec{n}| \\ \rho u V_n|\vec{n}| + p n_x \\ \rho v V_n|\vec{n}| + p n_y \\ \rho w V_n|\vec{n}| + p n_z \\ (E+p)V_n|\vec{n}| \end{pmatrix} \quad \text{(A.1)}$$

Όπου με $V_n = \vec{V} \cdot \vec{\hat{n}}$ συμβολίζεται η προβολή του διανύσματος της ταχύτητας στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\hat{n}} = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Η Ιακωβιανή του διανύσματος ροής σχηματίζεται ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές, οπότε έχει και πέντε πραγματικές ιδιοτιμές. Συμβολίζεται με $\underline{A}$ και διαγωνοποιείται ως εξής:

$$\underline{A} = \underline{T}\,\underline{\Lambda}\,\underline{T^{-1}} \quad \text{(A.2)}$$

Στην παραπάνω σχέση με $\underline{\Lambda}$ συμβολίζεται το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών και με $\underline{T}$ και $\underline{T}^{-1}$ τα μητρώα των δεξιών (στήλης) και αριστερών ιδιοδιανυσμάτων (γραμμής) αντίστοιχα. Το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών δίδεται ως:

$$\begin{aligned} \underline{\Lambda} &= diag\{V_n|\vec{n}|, V_n|\vec{n}|, V_n|\vec{n}|, (V_n+c)|\vec{n}|, (V_n-c)|\vec{n}|\} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_n|\vec{n}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_n|\vec{n}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_n|\vec{n}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (V_n+c)|\vec{n}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (V_n-c)|\vec{n}| \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{(A.3)}$$

Όπου βέβαια $\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)$ και $\vec{V}=(V_x,V_y,V_z)$. Στη συνέχεια διατυπώνεται το μητρώο $\underline{T}^{-1}$:

$$\underline{T}^{-1}=\begin{bmatrix} B\hat{n}_x-\frac{X}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_x V_x}{c^2} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_x V_y}{c^2}+\frac{\hat{n}_z}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_x V_z}{c^2}-\frac{\hat{n}_y}{\rho} & -\frac{(\gamma-1)\hat{n}_x}{c^2} \\ B\hat{n}_y-\frac{Y}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_y V_x}{c^2}-\frac{\hat{n}_z}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_y V_y}{c^2} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_y V_z}{c^2}+\frac{\hat{n}_x}{\rho} & -\frac{(\gamma-1)\hat{n}_y}{c^2} \\ B\hat{n}_z-\frac{Z}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_z V_x}{c^2}+\frac{\hat{n}_y}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_z V_y}{c^2}-\frac{\hat{n}_x}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_z V_z}{c^2} & -\frac{(\gamma-1)\hat{n}_z}{c^2} \\ \frac{c}{\rho}\left\{\frac{(\gamma-1)V^2}{2c^2}-\frac{V_n}{c}\right\} & \left\{\hat{n}_x-\frac{(\gamma-1)V_x}{c^2}\right\}\frac{1}{\rho} & \left\{\hat{n}_y-\frac{(\gamma-1)V_y}{c^2}\right\}\frac{1}{\rho} & \left\{\hat{n}_z-\frac{(\gamma-1)V_z}{c^2}\right\}\frac{1}{\rho} & \frac{(\gamma-1)}{\rho c} \\ \frac{c}{\rho}\left\{\frac{(\gamma-1)V^2}{2c^2}+\frac{V_n}{c}\right\} & \left\{-\hat{n}_x-\frac{(\gamma-1)V_x}{c^2}\right\}\frac{1}{\rho} & \left\{-\hat{n}_y-\frac{(\gamma-1)V_y}{c^2}\right\}\frac{1}{\rho} & \left\{-\hat{n}_z-\frac{(\gamma-1)V_y}{c^2}\right\}\frac{1}{\rho} & \frac{(\gamma-1)}{\rho c} \end{bmatrix}$$

(A.4)

Όπου ισχύουν οι σχέσεις:

$$B=1-\frac{(\gamma-1)V^2}{2c},\quad X=\hat{n}_z V_y-\hat{n}_y V_z,\quad Y=\hat{n}_x V_z-\hat{n}_z V_x,\quad Z=\hat{n}_y V_z-\hat{n}_z V_y \qquad \text{(A.5)}$$

Τέλος, το μητρώο $\underline{T}$ δίδεται ως:

$$\underline{T}=\begin{bmatrix} \hat{n}_x & \hat{n}_y & \hat{n}_z & C & C \\ \hat{n}_x V_x & \hat{n}_y V_x-\hat{n}_z\rho & \hat{n}_z V_x+\hat{n}_y\rho & C(V_x+c\hat{n}_x) & C(V_x-c\hat{n}_x) \\ \hat{n}_x V_y+\hat{n}_z\rho & \hat{n}_y V_y & \hat{n}_z V_y-\hat{n}_x\rho & C(V_y+c\hat{n}_y) & C(V_y-c\hat{n}_y) \\ \hat{n}_x V_z-\hat{n}_y\rho & \hat{n}_y V_z+\hat{n}_x\rho & \hat{n}_z V_z & C(V_z+c\hat{n}_z) & C(V_z-c\hat{n}_z) \\ \frac{V^2}{2}\hat{n}_x+\rho X & \frac{V^2}{2}\hat{n}_y+\rho Y & \frac{V^2}{2}\hat{n}_z+\rho Z & C(H+cV_n) & C(H-cV_n) \end{bmatrix}$$

(A.6)

Όπου ισχύουν οι σχέσεις:

$$C=\frac{\rho}{2c},\quad H=\frac{V^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}$$

Άλλες χρήσιμες σχέσεις για το σχήμα του Roe είναι:

$$\underline{A}^{\pm} = \underline{T}\,\underline{\Lambda}^{\pm}\underline{T}^{-1}, \quad \underline{\Lambda}_{\pm} = diag\left\{\lambda_i^{\pm}\right\}, \quad i = 1,\ldots 5$$
$$\left|\underline{A}\right| = \underline{T}\left|\underline{\Lambda}\right|\underline{T}^{-1}, \quad \left|\underline{\Lambda}\right| = diag\left\{\left|\lambda_i\right|\right\}, \quad i = 1,\ldots 5 \qquad \text{(A.7)}$$

Όπου ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lambda_i^{+} = \max(\lambda_i, 0), \quad i = 1,\ldots 5$$
$$\lambda_i^{-} = \min(\lambda_i, 0), \quad i = 1,\ldots 5 \qquad \text{(A.8)}$$

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι τα μεγέθη που αναφέρονται είναι αδιαστατοποιημένα.

“Intentionally Blank”

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β
Διαγώνια Συνεισφορά Οριακών Συνθηκών Στερεού Τοιχώματος στο Σημειακά Πεπλεγμένο Σχήμα.

Η έκφραση του διανύσματος ροής στην περίπτωση οριακών συνθηκών στερεού τοιχώματος, όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 3, είναι η εξής:

$$\vec{H}_{Wall} = \begin{pmatrix} 0 & pn_x & pn_y & pn_z & 0 \end{pmatrix}^T \qquad (B.1)$$

Επιπρόσθετα, υπενθυμίζεται ότι για την περίπτωση του σημειακά πεπλεγμένου σχήματος επίλυσης, η διαγώνια συνεισφορά στερεού τοιχώματος δίνεται από το ακόλουθο γινόμενο:

$$\frac{\vartheta H}{\vartheta U} \cdot \frac{\vartheta U}{\vartheta W} \qquad (B.2)$$

Ο πρώτος εκ των δύο όρων του προαναφερθέντος γινομένου της διαγώνιας συνεισφοράς διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\vartheta H}{\vartheta U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B.3)$$

Ενώ, ο δεύτερος εκ των δύο όρων του προαναφερθέντος γινομένου της διαγώνιας συνεισφοράς διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\vartheta U}{\vartheta W}=\begin{bmatrix} \frac{\vartheta \rho}{\vartheta \rho} & \frac{\vartheta \rho}{\vartheta \rho u} & \frac{\vartheta \rho}{\vartheta \rho v} & \frac{\vartheta \rho}{\vartheta \rho w} & \frac{\vartheta \rho}{\vartheta E} \\ \frac{\vartheta u}{\vartheta \rho} & \frac{\vartheta u}{\vartheta \rho u} & \frac{\vartheta u}{\vartheta \rho v} & \frac{\vartheta u}{\vartheta \rho w} & \frac{\vartheta u}{\vartheta E} \\ \frac{\vartheta v}{\vartheta \rho} & \frac{\vartheta v}{\vartheta \rho u} & \frac{\vartheta v}{\vartheta \rho v} & \frac{\vartheta v}{\vartheta \rho w} & \frac{\vartheta v}{\vartheta E} \\ \frac{\vartheta w}{\vartheta \rho} & \frac{\vartheta w}{\vartheta \rho u} & \frac{\vartheta w}{\vartheta \rho v} & \frac{\vartheta w}{\vartheta \rho w} & \frac{\vartheta w}{\vartheta E} \\ \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho} & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho u} & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho v} & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho w} & \frac{\vartheta p}{\vartheta E} \end{bmatrix} \qquad \text{(B.4)}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (B.3) και (B.4), η σχέση (B.2) γίνεται:

$$\frac{\vartheta H}{\vartheta U}\cdot\frac{\vartheta U}{\vartheta W}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho}n_x & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho u}n_x & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho v}n_x & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho w}n_x & \frac{\vartheta p}{\vartheta E}n_x \\ \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho}n_y & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho u}n_y & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho v}n_y & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho w}n_y & \frac{\vartheta p}{\vartheta E}n_y \\ \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho}n_z & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho u}n_z & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho v}n_z & \frac{\vartheta p}{\vartheta \rho w}n_z & \frac{\vartheta p}{\vartheta E}n_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(B.5)}$$

Τέλος, υπενθυμίζεται και η σχέση που συνδέει την πίεση με την ολική ενέργεια, η οποία είναι η εξής:

$$\begin{aligned} & E=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2+w^2\right)\Rightarrow \\ & \Rightarrow p=(\gamma-1)E-\frac{(\gamma-1)}{2}\rho\left(u^2+v^2+w^2\right)\Rightarrow \\ & \Rightarrow p=(\gamma-1)E-\frac{(\gamma-1)}{2}\frac{\left((\rho u)^2+(\rho v)^2+(\rho w)^2\right)}{\rho} \end{aligned} \qquad \text{(B.6)}$$

Εισάγοντας την προαναφερθείσα σχέση, διατυπωμένη ως προς την πίεση και συναρτήσει των συντηρητικών μεταβλητών στη σχέση (B.5), η τελευταία επαναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\vartheta H}{\vartheta U}\cdot\frac{\vartheta U}{\vartheta W}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)n_x & -(\gamma-1)un_x & -(\gamma-1)vn_x & -(\gamma-1)wn_x & (\gamma-1)n_x \\ \frac{(\gamma-1)}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)n_y & -(\gamma-1)un_y & -(\gamma-1)vn_y & -(\gamma-1)wn_y & (\gamma-1)n_y \\ \frac{(\gamma-1)}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)n_z & -(\gamma-1)un_z & -(\gamma-1)vn_z & -(\gamma-1)wn_z & (\gamma-1)n_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(B.7)

“Intentionally Blank”

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [Αδα05] Αδαμούδης Δ. Λάζαρος, Επίλυση των εξισώσεων Euler σε τρεις διαστάσεις με χρήση μη δομημένου πλέγματος και εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων, Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, 2005.
- [Κου98] Κουμπογιάννης Γ. Δημήτριος, Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας, Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 1998.
- [Νικ04] Νικολός Κ. Ιωάννης, Σημειώσεις μαθήματος Ρευστομηχανική, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, 2004.
- [Νικ07] Νικολός Κ. Ιωάννης, Σημειώσεις μαθήματος Μετάδοση Θερμότητας, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, 2007.
- [Ροβ98] Ρόβας Β. Δημήτριος, Επιτάχυνση επιλυτών Navier-Stokes για μη δομημένα πλέγματα με τεχνικές υποχώρων Krylov και με χρήση πολυεπεξεργασίας, Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 1998.

ΔΙΕΘΝΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [AGARD-R-787] (AGARD-Advisory Group for Aerospace Research & Development), Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows, NATO, 1992.
- [AGARD-AG-325] (AGARD-Advisory Group for Aerospace Research & Development), Computational Aerodynamics Based on the Euler Equations, NATO, 1994.
- [And94] W. Kyle Anderson and Daryll L. Bonhaus, An Implicit Upwind Algorithm for Computing Turbulent Flows on Unstructured Grids, Computers Fluids Vol. 23, No. 1, pp. 1-21, 1994.
- [Ari07] Oscar Arias, Oscar Falcinelli, Nide Fico Jr. and Sergio Elaskar, Finite Volume Simulation of a Flow Over a NACA 0012 Using Jameson,

MacCormack, Shu AND TVD Esquemes, Mecanica Computasional Vol. XXVI, pp. 3097-3116, Cordoba, Argentina, October 2007.

- [Arg90] John Argyris, Ioannis St. Doltsinis and Heinz Friz, Studies on Computational Reentry Aerodynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 81 (1990) 257-289, NORTH-HOLLAND, January 1990.
- [Bar89] T. J. Barth and D. C. Jespersen, The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes, AIAA paper, 89-0366, pp. 1-12, 1989.
- [Bar04] Timothy Barth and Mario Ohlberger, Finite Volume Methods: Foundation and Analysis, NASA Ames Research Center, 2004.
- [Ber04] Bernhard A. Schrefler, Stefano Secchi, Luciano Simoni, On Adaptive Refinement Techniques in Multi-field Problems including Cohesive Fracture, Elsevier, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 195 (2006) 444-461, 29 October 2004.
- [Bon96] A. Bonfiglioli, T. Barth and H. Deconinck, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Multidimensional Upwinding and Implicit Newton Acceleration for the 3D Euler Equations on Tetrahedral Meshes.
- [Ewi85] Richard E. Ewing, Efficient Adaptive Procedures for Fluid-Flow Applications, Elsevier, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 55 (1985) 89-103, NORTH-HOLLAND, 31 July 1985.
- [For99] Formaggia L., Data Structures for Unstructured Mesh Generation, in J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill (Eds.), Handbook of Grid Generation, CRC Press, 1999.
- [Gri98] Matthew J. Grismer, William Z. Strang, Robert F. Tomaro & Frank C. Witzeman, Cobalt: A Parallel, Implicit, Unstructured Euler/Navier-Stokes Solver, Elsevier, Advances in Engineering Software, Vol.29, No.3-6, pp.365-373, 1998.
- [Hir90] Hirsch C., Numerical Computation of External and Internal Flows, Vol 1 & 2, John Wiley & Sons, 1990.
- [Hol94] Philip Holmes, Gfibor Domokos, John Schmitt, Imre Szeber6nyi, Constrained Euler Buckling: an Interplay of Computation and Analysis, Elsevier, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 170 (1999) 175-207, NORTH-HOLLAND, 1994.

- [Hub98] M. E. Hubbard, Multidimensional Slope Limiters for MUSCL-Type Finite Volume Schemes on Unstructured Grids, The University of Reading, Department of Mathematics, United Kingdom, 1998.
- [ICOMP-92-01] NASA Technical Memorandum 105612, Institute for Computational Mechanics in Propulsion (ICOMP), 6th Annual Report-1991, May 1992.
- [Jae06] Jae Hyuk Lim, Seyoung Im, Young-Sam Cho, MLS (Moving Least Square)-Based Finite Elements for Three-Dimensional Nonmatching Meshes and Adaptive Mesh Refinement, Elsevier, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 196 (2007) 2216-2228, 2007.
- [Jur95] Jurgen Bey, Tetrahedral Grid Refinement_Final Version, Tubingen, October, 1995.
- [Koo99] Bruno Koobus, Charbel Farhat, Second-order Time-Accurate and Geometrically Conservative Implicit Schemes for FLow Computations on Unstructured Dynamic Meshes, Elsevier, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 170 (1999) 103-129, NORTH-HOLLAND, 1999.
- [Lan05] R. B. Langtry, M. Kuntz, and F. R. Menter, ANSYS CFX Germany, Drag Prediction of Engine–Airframe Interference Effects with CFX-5, journal of Aircraft, Vol. 42, No. 6, November–December 2005.
- [Mar92] Marchant M.J. and Weatherill N. P., Adaptivity Techniques for Compressible Inviscid Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 106 (1993) 83-106 North-Holland, 28 July 1992.
- [Mav02] Dimitris J. Mavriplis, Unstructured Mesh Related Issues In Computational Fluid Dynamics (CFD) – Based Analysis And Design, 11th International Meshing Roundtable September 15-18, 2002 Ithaca New York, USA.
- [Mav07] Dimitris J. Mavriplis, Unstructured Mesh Discretizations and Solvers for Computational Aerodynamics, 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Miami, FL, 25 - 28 June 2007.
- [Maz02] Annamaria Mazzia, Three Dimensional Time Splitting Technique: Construction of Mixed Hybrid Finite Elements and High Resolution Finite Volume Schemes on Tetrahedral Mesh, Rapporto Tecnico No 86, Padova, Marzo 2002.
- [Mun05] Munson, Young, Okiishi, Fundamentals of Fluid Mechanics, Third Edition, John Wiley & Sons, 2005.

- [Pap01] Papadakis George, Lecture Notes for the course Computational Fluid Dynamics. King's College London, Dept. of Mechanical Engineering, 2001.
- [Per06] Per-Olof Persson, Michael J. Aftosmis, Robert Haimes, On the Use of Loop Subdivision Surfaces for Surrogate Geometry, Massachusetts Institute of Technology, 17 April 2006.
- [Pul85] Pulliam T. H. and Stegger J. L., Recent Improvements in Efficiency, Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithms, AIAA paper, 85-0360, AIAA 23rd Aerospace Science Meeting, Reno, Jan. 14-17, 1985.
- [Rod07] G. A. Rios Rodriguez, N. M. Nigro and M. A. Storti, An H-Adaptive Unstructured Mesh Refinement Strategy For Unsteady Problems, Centro Internacional de Metodos Computacionales en Ingenierıa CIMEC.
- [Roe81] Roe P., Approximate Riemann Solvers, Parameters Vectors and Difference Schemes, Journal of Computational Physics 43 (1981) 357-371.
- [Tri03] Joseph R. Tristano, Zhijan Chen, D. Alfred Hancq, Wa Kwok, Fully Automatic Adaptive Mesh Refinement Integrated into the Solution Process, ANSYS Incorporated, Canonsburg, PA U.S.A., 2003.
- [Ull06] Ahsan Ullah, Koichi Harada, Continuity Analysis of Non-uniform Subdivision Surfaces, IJCSNS (International Journal of Computer Science and Network Security), Vol.6, No.4, April 2006.
- [Vid06] D. Vidovic, A. Segal, P. Wesseling, A Superlinearly Convergent Mach-Uniform Finite Volume Method for the Euler Equations on Staggered Unstructured Grids, Elsevier, Journal of Computational Physics 217 (2006) 277–294.
- [VLe92] Van Leer B., Progress in Multidimensional Upwind Differencing, ICASE Report 92-43, 1992.
- [VLe-VAl82] Van Leer B., Van Albada G. D. and Roberts W. W., High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Astron. Astroph., vol. 108, 1982.
- [Wur06] Kenneth E. Wurtzler & Scott A. Morton, Accurate Drag Prediction Using Cobalt, Journal of Aircraft, Vol. 43, No. 1, January-February 2006.
- [Yan08] Xue Yang , Kun Qin, Cijun Wu and Li Chen, Simulation of Coastlines Based on Cloud Fractal, Proceedings of the 8th International Symposium on Spatial Accuracy Assessment in Natural Resources and Environmental Sciences, Shanghai, P. R. China, June 25-27, 2008, pp. 162-166.

- [Yon08] Yongxiao Fu and Yonghua Chen, Haptic 3D Mesh Painting based on Dynamic Subdivision, Computer-Aided Design and Applications, 2008 CAD Solutions, LLC, http://www.cadanda.com.
- [Zha00] Yong Zhao, Baili Zhang, A High-Order Characteristics Upwind FV Method for Incompressible Flow and Heat Transfer Simulation on Unstructured Grids, Elsevier, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190 (2000) 733-756, NORTH-HOLLAND, 2000.
- [Zor98] Denis N. Zorin, Stationary Subdivision and Multiresolution Surface Representations, PHD Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1998.
- http://www.mathworld.wolfram.com