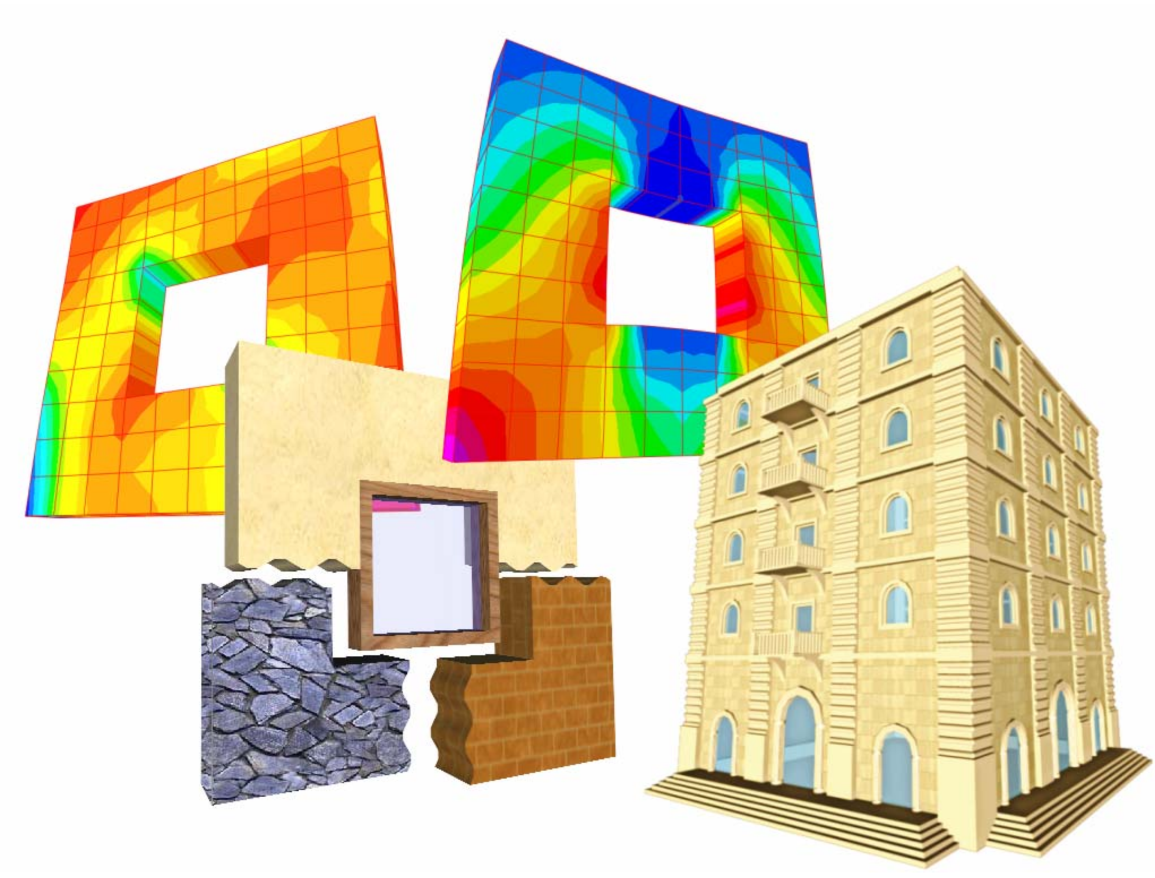
Πολυτεχνείο Κρήτης
Γενικό Τμήμα
Εργαστήριο Εφαρμοσμένης Μηχανικής

Μεταπτυχιακή Διατριβή

ΛΙΑΡΑΚΟΣ Β. ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ

«Αριθμητική διερεύνηση κριτηρίων αστοχίας και μεθόδων ενίσχυσης κατασκευών από τοιχοποιία»



Εξεταστική επιτροπή:

Δρ. Μαρία Σταυρουλάκη	Λέκτορας (Επιβλέπουσα)
Δρ. Κωνσταντίνος Προβιδάκης	Καθηγητής
Δρ. Ιωάννης Τσομπανάκης	Επίκουρος Καθηγητής

ΧΑΝΙΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τομέα Μηχανικής, του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης. Το θέμα που εξετάζεται είναι οι σύγχρονες τεχνικές με τις οποίες είναι δυνατό να προσομοιωθεί με αριθμητικές μεθόδους η μηχανική συμπεριφορά των τοιχοποιιών, υπό την επίδραση σύνθετων στατικών και δυναμικών καταστάσεων. Η επιλογή του θέματος έγινε με βάση το συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον από μεγάλο αριθμό ερευνητών, για την ανάπτυξη τεχνογνωσίας στο πεδίο της επισκευής, ενίσχυσης και αναστήλωσης ιστορικών κατασκευών από τοιχοποιία. Η εκπόνηση της διατριβής έγινε υπό την καθοδήγηση και τη συνεισφορά των ακόλουθων μελών του Τομέα Μηχανικής, τους όποιους και θα ήθελα να ευχαριστήσω:

- **Σταυρουλάκη Μαρία.** Λέκτορα του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης και επιβλέπουσα της παρούσας εργασίας, για την επιλογή και ανάθεση του θέματος, την πολύ καλή συνεργασία που είχαμε και τις συμβουλές που μου παρείχε στην εκπόνηση της έρευνας και τη συγγραφή της εργασίας αυτής.

- **Προβιδάκη Κωνσταντίνο.** Καθηγητή του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης.

- **Τσομπανάκη Ιωάννη**. Επίκουρο Καθηγητή του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης.

Ε. Β. Λιαράκος
Μηχανικός Ορυκτών Πόρων
Χανιά, Σεπτέμβριος 2008

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής αποτελεί ο προσδιορισμός ενός αξιόπιστου υπολογιστικού μοντέλου για την προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς της τοιχοποιίας ιστορικών κατασκευών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Για το σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκε αρχικά μια θεωρητική διερεύνηση των μηχανισμών αστοχίας που είναι δυνατό να εμφανιστούν σε μια κατασκευή από τοιχοποιία. Εξετάστηκαν και αξιολογήθηκαν τα κλασικά κριτήρια αστοχίας (Mohr-Coulomb, γραμμικό και παραβολικό, Von Mises, Rankine κ.α.), τα οποία έχουν αναπτυχθεί γενικά για φυσικά ψαθυρά υλικά (εδάφη, πετρώματα κ.α.), αλλά και κριτήρια αστοχίας που έχουν προταθεί από σύγχρονους ερευνητές τα τελευταία τριάντα χρόνια για την προσέγγιση σύνθετων δομικών υλικών όπως το σκυρόδεμα. Επιπλέον στα πλαίσια της παρούσας εργασίας προτάθηκε ένα γενικευμένο τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας, το οποίο περιγράφεται πλήρως από τρεις παραμέτρους. Για την ακριβή αριθμητική προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς της τοιχοποιίας σαν υλικό αλλά και της δυναμικής απόκρισης της τοιχοποιίας σαν δομικό σύστημα, διερευνήθηκε η εφαρμογή μοντέλων υλικών τα οποία θα προσεγγίζουν όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικά τη μη γραμμική της συμπεριφορά. Πιο συγκεκριμένα αξιολογήθηκε ο τρόπος προσομοίωσης της μη γραμμικής συμπεριφοράς με την χρήση της ελαστοπλαστικής ανάλυσης. Τέλος έγινε και εφαρμογή των μοντέλων προσομοίωσης της μηχανικής συμπεριφοράς, στην μελέτη επιρροής της ενίσχυσης ενός υφιστάμενου τοίχου με στοιχεία οπλισμένου σκυροδέματος. Η μελέτη βασίστηκε στην εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων μέσω του εμπορικού λογισμικού MARC-MENTAT. Το συγκεκριμένο λογισμικό αποτελεί ένα πρόγραμμα γενικής εφαρμογής και επιτρέπει την ενσωμάτωση κατάλληλα διαμορφωμένων υπορουτίνων σε γλώσσα FORTRAN, για την καλλίτερη προσαρμογή της λειτουργίας του στις απαιτήσεις των προβλημάτων που αντιμετωπίστηκαν.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1ο

Εισαγωγή

Η τοιχοποιία αποτελεί το σπουδαιότερο δομικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε από το άνθρωπο σε όλες σχεδόν τις περιόδους της ιστορίας, για την κατασκευή υποδομών, δημοσίων κτιρίων, οικιών καθώς και ναών. Οι τύποι τοιχοποιίας στις ιστορικές κατασκευές που εμφανίζονται από την νότια και κεντρική Αμερική (Σχήμα 1.1), μέχρι τα παράλια της Μεσογείου (Σχήμα 1.2), τη βόρεια Ευρώπη και την ανατολική Ασία, ποικίλουν ανάλογα τις πρώτες ύλες που ήταν διαθέσιμες σε κάθε περιοχή και είναι ενδεικτικές της τεχνολογικής και πολιτισμικής σφραγίδας που άφησε η εκάστοτε κοινωνία [25]. Δεν είναι μικρός ο αριθμός των κατασκευών από τοιχοποιία που διασώζονται μέχρι σήμερα ενώ αρκετές από αυτές, κυρίως νεότερες, διατηρούνται σε πολύ καλή κατάσταση (Σχήμα 1.3). Η παρατήρηση αυτή υποδηλώνει αφενός μεν τη σταδιακή ενσωμάτωση των αρχών της μηχανικής και της γεωμετρίας στις κατασκευαστικές τεχνικές από εποχή σε εποχή, αφετέρου δε τη δυνατότητα συντήρησης και επισκευής υφιστάμενων κατασκευών, αρκετές απ’ τις οποίες αποτελούν μνημεία πολιτιστικής κληρονομιάς.

Σχήμα 1.1: Κτίριο από φέρουσα τοιχοποιία στην αρχαία πόλη των Ίνκας, Μάτσου Πίτσου στις Περουβιανές Άνδεις.

Σχήμα 1.2: Πύλη των Λεόντων στις Μυκήνες.

α) β)

Σχήμα 1.3: α) Αρχαιολογικό μουσείο Χανίων. β) Ο αιγυπτιακής κατασκευής φάρος στο Ενετικό λιμάνι των Χανίων.

Η τοιχοποιία είναι ένα σύνθετο υλικό το οποίο αποτελείται από τις δομικές μονάδες (ή τοιχοσώματα) και το συνδετικό υλικό (ή συνδετικό κονίαμα). Οι δομικές μονάδες, μπορεί να είναι τούβλα (κεραμικά κυρίως σώματα ποικίλης γεωμετρίας), φυσικοί λίθοι λαξεμένοι ή μη, πλίνθοι, ανώμαλες πέτρες και άλλα. Η συνδετική ύλη μπορεί να είναι άργιλος, πίσσα, κιμωλία, ασβέστης/βασισμένο στο τσιμέντο κονίαμα, κόλλα ή άλλο. Ο μεγάλος αριθμός πιθανών συνδυασμών δομικών μονάδων και συνδετικής ύλης, ο τρόπος τοποθέτησης των δομικών μονάδων (γεωμετρία μικροδομής), καθώς επίσης και τα μηχανικά χαρακτηριστικά των συνδετικών υλών , έχουν ως αποτέλεσμα την ύπαρξη αρκετών διαφορετικών τύπων τοιχοποιίας [24].

Οι τεχνικές ενίσχυσης μια υφιστάμενης κατασκευής από τοιχοποιία, αλλά και η ανάπτυξη της κατάλληλης τεχνογνωσίας για την κατασκευή νέων κτιρίων, απαιτούν την διερεύνηση και την κατανόηση της μηχανικής συμπεριφοράς του συγκεκριμένου υλικού. Με τον όρο μηχανική συμπεριφορά ενός δομικού υλικού συνήθως εννοούνται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά [1, 24, 37, 46]:

- Τα ποσοτικά μεγέθη που περιγράφουν την αντοχή του υλικού σε διαφόρους τύπους καταπόνησης. Σημαντικό ενδιαφέρον για υλικά σύνθετα και ψαθυρά όπως είναι το σκυρόδεμα και οι τοιχοποιίες, παρουσιάζουν η αντοχή σε θλίψη, σε εφελκυσμό λόγω κάμψης και σε διάτμηση. Επιπλέον πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η αντοχή του υλικού σε κόπωση, ο ερπυσμός, καθώς και η αντοχή του σε αξονικό εφελκυσμό, η οποία είναι κατά κανόνα μικρότερη από την αντίστοιχη καμπτική.

- Οι τρόποι και οι συνθήκες αστοχίας των υλικών, οι οποίες διαφέρουν ανάλογα με τον τύπο φόρτισης και τις μηχανικές αντοχές. Ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δίνεται στις περιπτώσεις πολυαξονικής καταπόνησης, όπου λόγω της σύνθετης δομής του εντατικού πεδίου, ο προσδιορισμός του τρόπου και των συνθηκών αστοχίας αποτελεί ένα πολυπαραμετρικό πρόβλημα.

- Η σχέση μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων (καταστατική συμπεριφορά) ή δυνάμεων και μετατοπίσεων, η οποία μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική.

Όλα τα παραπάνω χαρακτηριστικά διαφοροποιούνται ανάλογα με τον τύπο της τοιχοποιίας. Πολλές φορές αποτελούν και κριτήρια για την κατηγοριοποίηση των διαφορών τύπων τοιχοποιίας (π.χ. φέρουσες ή μη). Για το λόγο αυτό πέραν τον κλασσικών θεωρητικών και πειραματικών μεθόδων προσέγγισης της μηχανικής συμπεριφοράς μίας κατασκευής από τοιχοποιία, κρίνεται πλέον αναγκαία η χρήση εξειδικευμένων αριθμητικών μεθόδων. Οι μέθοδοι αυτοί, μέσω της κατάλληλης μαθηματικής μορφοποίησης, δίνουν τη δυνατότητα να μελετηθούν πολύπλοκα γεωμετρικά δομικά συστήματα, με την ταυτόχρονη ενσωμάτωση και των μηχανικών ιδιαιτεροτήτων υλικών «*δύσκολων*», όπως είναι η τοιχοποιία. Επιπλέον, οι αριθμητικές μέθοδοι βοηθούν τόσο στη συστηματοποίηση των τεχνικών επίλυσης διαφόρων προβλημάτων όσον και στη σημαντική μείωση του απαιτούμενου για την ανάλυση χρόνου [24, 25, 29].

Στην προσπάθεια να ληφθούν υπόψη, όλα εκείνα τα τεχνικά στοιχεία που χρειάζονται ώστε να επιτευχθεί μια όσον το δυνατό γίνεται πιο ρεαλιστική προσέγγιση της μηχανικής συμπεριφοράς μίας τοιχοποιίας με αριθμητικές μεθόδους, η παρούσα εργασία έχει την ακόλουθη δομή:

- Στο κεφάλαιο 2 γίνετε μια συνοπτική εισαγωγή στους κυριότερους τύπους τοιχοποιίας, στα κριτήρια κατηγοριοποίησης των τοιχοποιιών, στους τρόπους προσδιορισμού των μηχανικών αντοχών της τοιχοποιίας, πειραματικούς και θεωρητικούς, στα ελαστικά χαρακτηριστικά της και τέλος στην έννοια της μηχανικής ομογενοποίησης ενός σύνθετου υλικού.

- Στο κεφάλαιο 3 εξετάζονται οι τρόποι αστοχίας των ψαθυρών υλικών, καθώς οι τοιχοποιίες ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία υλικών, παρουσιάζονται και μελετώνται αφενός μεν τα κλασσικά κριτήρια αστοχίας αφετέρου δε κάποια κριτήρια που έχουν αναπτυχθεί από σύγχρονους ερευνητές και τέλος προτείνεται ένα γενικευμένο τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας το οποίο περιγράφεται πλήρως από τρεις παραμέτρους.

- Στο κεφάλαιο 4 γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση της εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στη δυναμική των κατασκευών και αναπτύσσεται η έννοια της μη γραμμικής συμπεριφοράς των κατασκευών με έμφαση στην ελαστοπλαστική ανάλυση και τα προβλήματα επαφής. Όσον αφορά την ελαστοπλαστική ανάλυση, δίνεται βάρος στις συναρτήσεις διαρροής των ψαθυρών υλικών με αναφορές και στο Κεφάλαιο 3, καθώς η επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης είναι εξαιρετικά σημαντική για την προσέγγιση της μη γραμμικής συμπεριφοράς των ψαθυρών υλικών και ιδιαίτερα της τοιχοποιίας.

- Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται αριθμητικές εφαρμογές στην επίλυση προβλημάτων που έχουν να κάνουν με τη μη γραμμική συμπεριφορά, τον εντοπισμό των πιθανών για αστοχία περιοχών και τους τρόπους ενίσχυσης κατασκευών από τοιχοποιία.

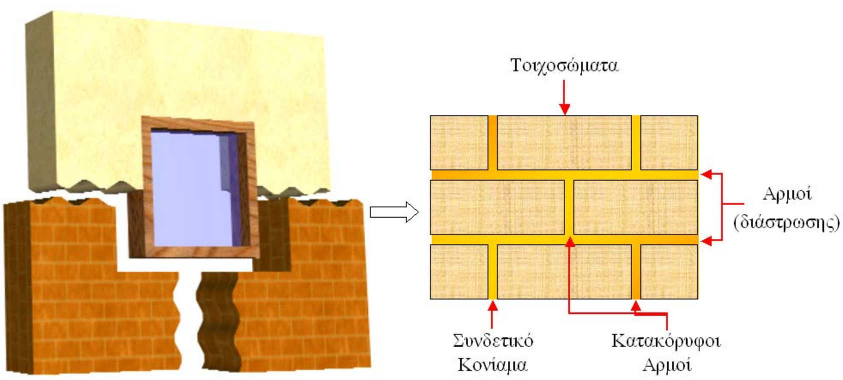
Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο παραθέτονται τα συμπεράσματα και οι προτάσεις που προέκυψαν από την θεωρητική μελέτη, την παραμετρική ανάλυση και των εφαρμογών που έγιναν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Κεφάλαιο 2ο

Στοιχεία μηχανικής της τοιχοποιίας

2.1 Εισαγωγή

Η τοιχοποιία αποτελεί ένα σύνθετο δομικό υλικό το οποίο συνίσταται από τα **τοιχοσώματα**, φυσικά ή τεχνητά και το **συνδετικό κονίαμα** (σχήμα 2.1). Υπάρχουν και περιπτώσεις τοιχοποιίας κυρίως σε ιστορικές κατασκευές, όπου απουσιάζει το συνδετικό κονίαμα και η συνοχή της τοιχοποιίας οφείλεται κυρίως στις δυνάμεις τριβής μεταξύ των τοιχοσωμάτων. Η αξιόπιστη περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς μιας τοιχοποιίας και η προσομοίωση της με την εφαρμογή υπολογιστικών μεθόδων, προϋποθέτει τη μελέτη και τον ακριβή προσδιορισμό των ποιοτικών αλλά ποσοτικών μεγεθών που έχουν να κάνουν με τη δομή, τις φυσικές και μηχανικές ιδιότητες, καθώς και τις μηχανικές αντοχές του συγκεκριμένου υλικού. Τα ποιοτικά μεγέθη αναφέρονται στον χαρακτηρισμό της μικροδομής μιας τοιχοποιίας, καθώς ο μεγάλος αριθμός πιθανών συνδυασμών μεταξύ των δομικών συστατικών της, έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη αρκετών διαφορετικών τύπων. Τα ποσοτικά μεγέθη αναφέρονται στις φυσικές και μηχανικές ιδιότητες οι οποίες προσδιορίζονται κυρίως πειραματικά με την εκτέλεση εργαστηριακών δοκιμών, αλλά και θεωρητικά με την εφαρμογή συνήθως της θεωρίας της μαθηματικής ελαστικότητας και πλαστικότητας.



Σχήμα 2.1: Η τοιχοποιία ως δομικό υλικό.

2.2 Ταξινόμηση τοιχοποιών

Η ταξινόμηση των τοιχοποιών πραγματοποιείται με βάση τα ακόλουθα φυσικά, μηχανικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά που εμφανίζουν [24]:

I. **Το είδος των τοιχοσωμάτων.** Ανάλογα με την προέλευση του τοιχοσώματος οι τοιχοποιίες διαχωρίζονται σε **λιθοδομές**, με τοιχοσώματα προερχόμενα από φυσικούς λίθους κατεργασμένους ή μη και σε **πλινθοδομές**, με τεχνικά τοιχοσώματα.

II. **Τη λειτουργία τους σε ένα δομικό σύστημα.** Με τον όρο λειτουργία ενός δομικού στοιχείου περιγράφεται το είδος της καταπόνησης που εφαρμόζεται στο στοιχείο αυτό κατά την συμμετοχή του σε ένα δομικό σύστημα. Με βάση αυτό το κριτήριο οι τοιχοποιίες διαχωρίζονται σε:

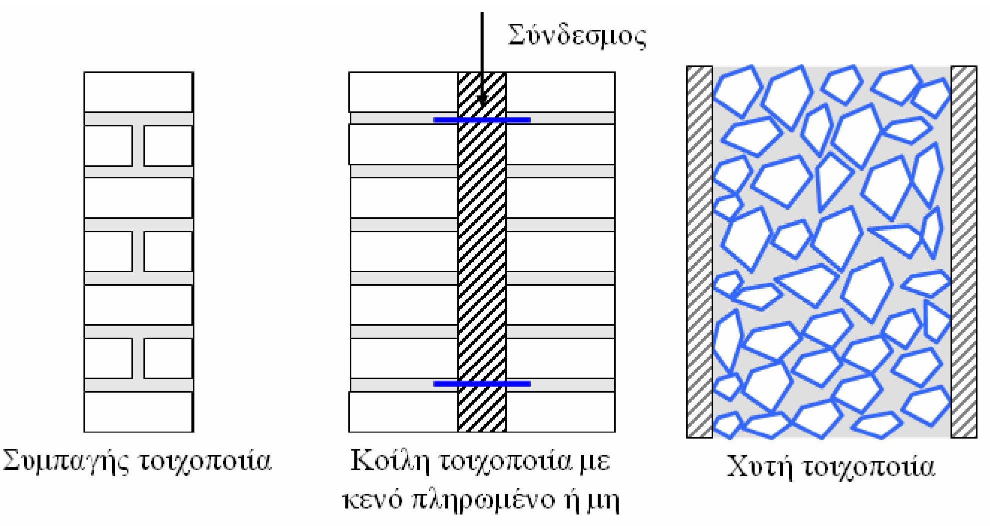
- **Φέρουσες.** Οι τοιχοποιίες που προορίζονται για να παραλάβουν τόσο τα κατακόρυφα (βαρυτικά) φορτία μίας κατασκευής όσο και τις οριζόντιες δράσεις (σεισμικά φορτία) και να τα μεταφέρουν στο έδαφος. Φέρουσες μπορούν να χαρακτηριστούν και τοιχοποιίες οι οποίες χρησιμοποιούνται ως μέσω πλήρωσης πλαισίων από οπλισμένο σκυρόδεμα, αλλά σχεδιάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να συλλειτουργούν με τα στοιχεία σκυροδέματος στην παραλαβή των φορτίων.

- **Πληρώσεως.** Οι τοιχοποιίες που δε προορίζονται για να παραλάβουν κάποια φορτία της κατασκευής αλλά για να διαμορφώσουν αρχιτεκτονικά τους εξωτερικούς και εσωτερικούς χώρους ενός οικοδομήματος.

- **Αντιστήριξης.** Οι τοιχοποιίες που αποτελούν το δομικό υλικό τοίχων αντιστήριξης δηλαδή τοίχων που παραλαμβάνουν τις ωθήσεις εδαφών σε φυσικά ή τεχνητά πρανή.

- **Επένδυσης.** Η χρήση τοιχοποιών για λόγους αισθητικής στην επένδυση επιφανειών δομικών στοιχείων από οπλισμένο σκυρόδεμα.

III. **Του τρόπου δόμησης.** Οι τοιχοποιίες είτε από φυσικά είτε από τεχνητά τοιχοσώματα, αναλόγως του τρόπου δόμησης διακρίνονται σε **συμπαγής** και σε **κοίλες** ή με **πυρήνα.** Σε μια τομή συμπαγούς τοιχοποιίας κάθετα στο επίπεδο ανάπτυξης της, δεν διακρίνονται ξεχωριστές κατακόρυφές στρώσεις. Αντίθετα σε μια αντίστοιχη τομή κοίλης τοιχοποιίας διακρίνονται η εξωτερική στρώση, η εσωτερική στρώση και ανάμεσα τους υπάρχει μια στρώση που καλείται πυρήνας. Ο πυρήνας είτε είναι κενός είτε πληρωμένος με κονίαμα. Στην περίπτωση που μια κοίλη τοιχοποιία είναι φέρουσα η εξωτερική και η εσωτερική στρώση συνδέονται με συνδέσμους (σχήμα 2.2).

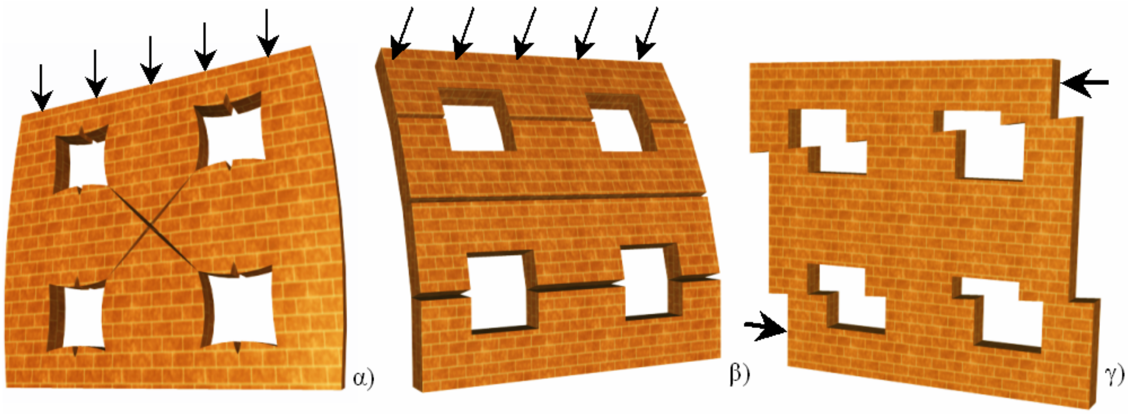


Σχήμα 2.2: Τομές συμπαγών, κοίλων και χυτών τοιχοποιιών

Επιπλέον για τις λιθοδομές, ανάλογα με τον τρόπο δόμησης τους, διακρίνονται οι περιπτώσεις των ξηρολιθοδομών και των χυτών τοιχοποιιών. Οι ξηρολιθοδομές αποτελούνται από ακατέργαστους φυσικούς λίθους και χαρακτηρίζονται από την απουσία συνδετικού κονιάματος. Οι χυτές τοιχοποιίες αποτελούν μίγματα πυλού, κροκάλων (από στρογγυλοποιημένα τεμάχια φυσικών λίθων) και λατυπών (γωνιώδη τεμάχια φυσικών λίθων) τα οποία μετά την παρασκευή τους τοποθετούνται σε καλούπια ώστε να σκληρυνθούν και να δημιουργήσουν έναν τοίχο (σχήμα 2.2). Εξωτερικά μια χυτή τοιχοποιία είναι δυνατό να επενδυθεί είτε με επιχρίσματα είτε με λαξεμένους φυσικούς λίθους [24]. Οι χυτές τοιχοποιίες εξαιτίας του τρόπου κατασκευής τους, αποτελούν ως δομικό υλικό τον πρόδρομο του σκυροδέματος και γι’ αυτό πολλές φορές παρουσιάζουν παραπλήσια μηχανική συμπεριφορά με αυτό.

2.3 Μηχανικές αντοχές της τοιχοποιίας

Η σπουδαιότερη κατηγορία μηχανικών ιδιοτήτων της τοιχοποιίας, όπως και άλλων δομικών υλικών, είναι οι μηχανικές αντοχές της. Με τον όρο μηχανική αντοχή εννοείτε η ικανότητα ενός υλικού να παραλαμβάνει εξωτερικά φορτία χωρίς να καταστρέφεται η μικροδομή του. Ανάλογα με τον τύπο των εξωτερικών φορτίων που εφαρμόζονται σε ένα υλικό μπορούν να διακριθούν η αντοχή σε θλίψη, σε εφελκυσμό, σε διάτμηση, σε κάμψη, σε στρέψη και σε κόπωση. Οι κυριότεροι τύποι μηχανικών αντοχών που ενδιαφέρουν όταν εξετάζεται μια κατασκευή από τοιχοποιία, είναι οι τέσσερις πρώτοι (σχήμα 2.3). Όπως έχει ήδη αναφερθεί η τοιχοποιία αποτελεί ένα σύνθετο υλικό και ως τέτοιο παρουσιάζει ανομοιογένεια και ανισοτροπία τόσο ως προς τις φυσικές όσο και ως προς τις μηχανικές του ιδιότητες. Επιπλέον η τοιχοποιία δεν αποτελεί βιομηχανικό υλικό έτσι ώστε οι ιδιότητες του να είναι ελεγχόμενες και σχετικά προβλέψιμες. Για το λόγο αυτό η μελέτη και ο προσδιορισμός των μηχανικών αντοχών του συγκεκριμένου υλικού, αποτελεί ένα πολυπαραμετρικό πρόβλημα του οποίου η επίλυση στηρίζεται κυρίως σε πειραματικά δεδομένα, που προκύπτουν από εργαστηριακές δοκιμές, αξιολογούμενα σε συνδυασμό με θεωρητικές και αριθμητικές προσεγγίσεις [1, 24].



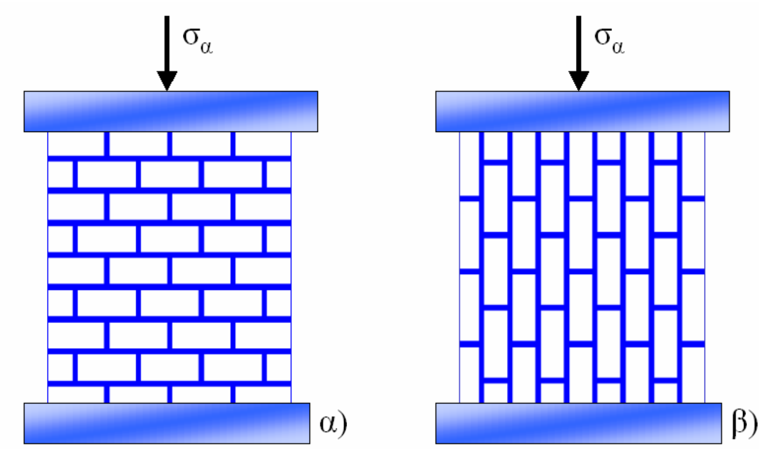
Σχήμα 2.3: Μερικοί από του κυριότερους τύπους καταπόνησης που συναντώνται σε κατασκευές από τοιχοποιία και οι αντίστοιχες μορφές αστοχίας. α) Κατακόρυφη μοναξονική θλίψη. β) Εκτός επιπέδου κάμψη. γ) Εντός επιπέδου διάτμηση.

2.3.1 Αντοχή σε μοναξονική θλίψη

Οι κυριότεροι παράγοντες που επηρεάζουν την θλιπτική αντοχή της τοιχοποιίας, σ_{Yc}^{w}, είναι συνοπτικά οι παρακάτω [24]:

- Η θλιπτική αντοχή των τοιχοσωμάτων, σ_{Yc}^{b} και του κονιάματος σ_{Yc}^{m}.
- Η σύσταση του κονιάματος.
- Ο βαθμός συνάφειας μεταξύ τοιχοσώματος και κονιάματος.
- Ο βαθμός εμπλοκής των τοιχοσωμάτων μεταξύ τους.
- Η γεωμετρία των τοιχοσωμάτων.
- Η μικροδομή της τοιχοποιίας (ύπαρξη κενών-περιοχές συγκέντρωσης τάσεων) [1, 11, 18, 24].

Ιδιαίτερα δε για τις λιθοδομές, ιδιότητες όπως η γεωμετρία, ο βαθμός κατεργασίας (λιθοσώματα λαξεμένα ή μη), το μέγεθος και η τραχύτητα των επιφανειών των λιθοσωμάτων έχουν καθοριστικό ρόλο στην συνολική θλιπτική αντοχή της τοιχοποιίας.



Σχήμα 2.4: Δοκιμή μοναξονικής θλίψης τοιχοποιίας α) κάθετα στους αρμούς β) παράλληλα στους αρμούς

Η θλιπτική αντοχή της τοιχοποιίας είναι δυνατό να προσδιοριστεί άμεσα με την πραγματοποίηση δοκιμών μοναξονικής θλίψης στο εργαστήριο (σχήμα 2.4) αλλά και έμμεσα με την χρήση εμπειρικών εξισώσεων οι οποίες προκύπτουν από τον συνδυασμό πειραματικών δεδομένων και θεωρίας [22, 24, 48]. Οι Francis (1971) και Lenczener (1972) ανέπτυξαν θεωρίες για την θλιπτική αντοχή της τοιχοποιίας στηριζόμενοι αφενός μεν στην θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας και πιο συγκεκριμένα στην συμβατότητα των ελαστικών παραμορφώσεων στην διεπιφάνεια κονιάματος – τοιχοσώματος, αφετέρου δε στη γραμμική συσχέτιση των αντοχών σε θλίψη και εφελκυσμό [24]. Η θεωρία αυτή προβλέπει ότι η θλιπτική αντοχή των τοιχοσώματων συνδέεται με αυτή της τοιχοποιίας σύμφωνα με τη σχέση [24]:

$$\frac{\sigma_{Yc}^{w}}{\sigma_{Yc}^{b}}=\frac{1}{1+\dfrac{\alpha(v_m-\beta v_b)}{\lambda(1-v_m)}} \tag{2.1}$$

όπου:

- α ο λόγος του πάχους του αρμού προς το ύψος τοιχοσώματος
- β ο λόγος του μέτρου ελαστικότητας του κονιάματος, E_m προς το μέτρο ελαστικότητας του τοιχοσώματος E_b
- λ ο λόγος της εφελκυστικής, σ_{Yt}^{b} προς τη θλιπτική αντοχή, σ_{Yc}^{b} του τοιχοσώματος
- v οι λόγοι Poisson τοιχοσώματος, v_m και κονιάματος v_b.

Ο Τάσιος (1986) στηριζόμενος τόσο στην θεωρία του Francis όσο και σε πειραματικά δεδομένα προτείνει την σχέση

$$\frac{\sigma_{Yc}^{w}}{\sigma_{Yc}^{b}}=\frac{1}{1+\dfrac{\alpha(v_m-\beta v_b)}{\lambda(1-v_m+\alpha\beta(1-v_b))}} \tag{2.2}$$

όπου:

$$v_m = 0.5-0.1\sqrt[4]{\sigma_{Yt}^{m}}$$

$$v_b = 0.5-0.1\sqrt[4]{\sigma_{Yt}^{b}}$$

Επίσης ο ίδιος προτείνει την ακόλουθη εμπειρική σχέση η οποία προκύπτει από πειραματικά δεδομένα [24]:

$$\sigma_{Yc}^{w}=\frac{2}{3}\sqrt{\sigma_{Yc}^{b}}-a+b\sigma_{Yc}^{m} \tag{2.3}$$

όπου:

$\sigma_{Yc}^{w}, \sigma_{Yc}^{b}$ και σ_{Yc}^{m}	οι θλιπτικές αντοχές τοιχοποιίας, τοιχοσώματος και κονιάματος αντίστοιχα
α	μειωτικός συντελεστής για τοιχοποιία από φυσικούς λίθους που κυμαίνεται από 0.5 για λαξευμένους λίθους μέχρι 2.5 για κροκάλες (για τεχνητούς λίθους α=0)
β	συντελεστής που λαμβάνει υπόψη την συνεισφορά του κονιάματος στην αντοχή και λαμβάνει τιμές από 0.1 για οπτοπλινθοδομές έως 0.5 για λιθοδομές.

Σύμφωνα με τους κανονισμούς σχεδιασμού η θλιπτική αντοχή της τοιχοποιίας υπολογίζεται συναρτήσει των θλιπτικών αντοχών των τοιχωμάτων και του κονιάματος από σχέσεις της μορφής [24, 38]:

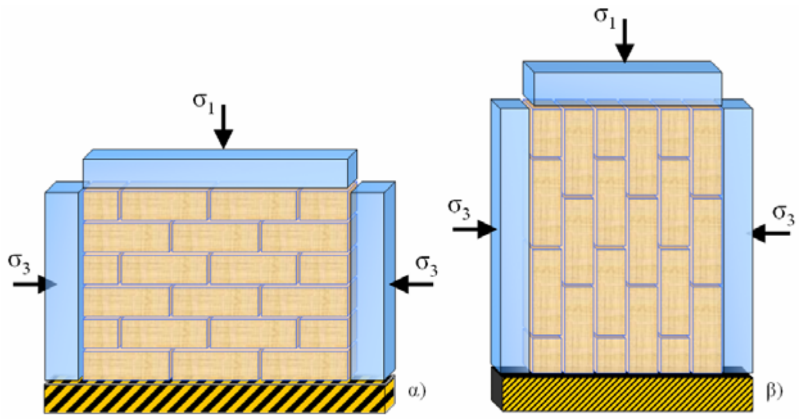
$$\sigma_{Yc}^{w} = g\left(\sigma_{Yc}^{w}, \sigma_{Yc}^{w}, \kappa_{1,} \kappa_{2}, \ldots, \kappa_{N}\right) \tag{2.4}$$

όπου κ_1, κ_2, …, κ_N διορθωτικοί συντελεστές που έχουν να κάνουν με τους διάφορους παράγοντες που επιδρούν στην θλιπτική αντοχή της τοιχοποιίας και αναφέρθηκαν στην αρχή της παραγράφου.

2.3.2 Αντοχή σε πολυαξονική θλίψη

Το πρόβλημα της πολυαξονικής καταπόνησης των δομικών υλικών παρουσιάζει έντονο ενδιαφέρον διότι στις πραγματικές κατασκευές τα φορτία που παραλαμβάνουν τα δομικά στοιχεία σπάνια μπορούν να θεωρηθούν ως μοναξονικά. Ιδιαίτερα δε στις κατασκευές από φέρουσα τοιχοποιία, η συγκεκριμένη εντατική κατάσταση είναι ο κανόνας, καθώς σε μια τέτοιου είδους κατασκευή τα δομικά στοιχεία από το συγκεκριμένο υλικό καλούνται να παραλάβουν τόσο τα κατακόρυφα όσο και τα οριζόντια φορτία. Επιπλέον λόγοι για τους οποίους πρέπει να μελετάται η επίδραση ενός πολυαξονικού συστήματος δυνάμεων, αποτελούν αφενός μεν η ανισοτροπία που εμφανίζει μια τοιχοποιία κάθετα και παράλληλα στους αρμούς, κυρίως όσον αφορά τις μηχανικές αντοχές και τα ελαστικά χαρακτηριστικά της, αφετέρου δε η αυξημένη αντοχή σε θλίψη προς μια συγκεκριμένη διεύθυνση, όταν η τοιχοποιία καταπονείτε και από πλευρικά θλιπτικά φορτία [1, 27].

Εργαστηριακά η πολυαξονική ένταση στην περίπτωση των τοιχοποιιών προσεγγίζεται με τις πειραματικές δοκιμές της διαξονικής θλίψης (σχήμα 2.5). Τα δοκίμια που χρησιμοποιούνται είναι τοιχία, των οποίων οι διαστάσεις ποικίλουν ανάλογα με τη μικροδομή της τοιχοποιίας (μέγεθος και γεωμετρία τοιχοσωμάτων, μέγεθος αρμών, είδος τοιχοποιίας κ.α.). Κατά την εκτέλεση του πειράματος εφαρμόζεται αρχικά μια πλευρική τάση σ_3, σαφώς μικρότερη από την αντοχή της τοιχοποιίας σε θλίψη κατά την συγκεκριμένη διεύθυνση (κάθετα ή παράλληλα στους αρμούς) και στη συνέχεια με τη σταδιακή εφαρμογή μιας κατακόρυφης τάσης σ_1, το δοκίμιο εξωθείται στην αστοχία. Ο ρυθμός φόρτισης της τοιχοποιίας με την κατακόρυφη τάση, επιλέγεται κατάλληλα ανάλογα με το είδος της τοιχοποιίας και τις ειδικές συνθήκες που επικρατούν κατά την εκτέλεση του πειράματος (εργαστηριακός εξοπλισμός, μέγεθος δοκιμίου κ. α.). Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για διάφορες τιμές της πλευρικής τάσης και κάθε φορά υπολογίζεται η αντοχή σε θλίψη κατά την διεύθυνση επιβολής του φορτίου σ_1.

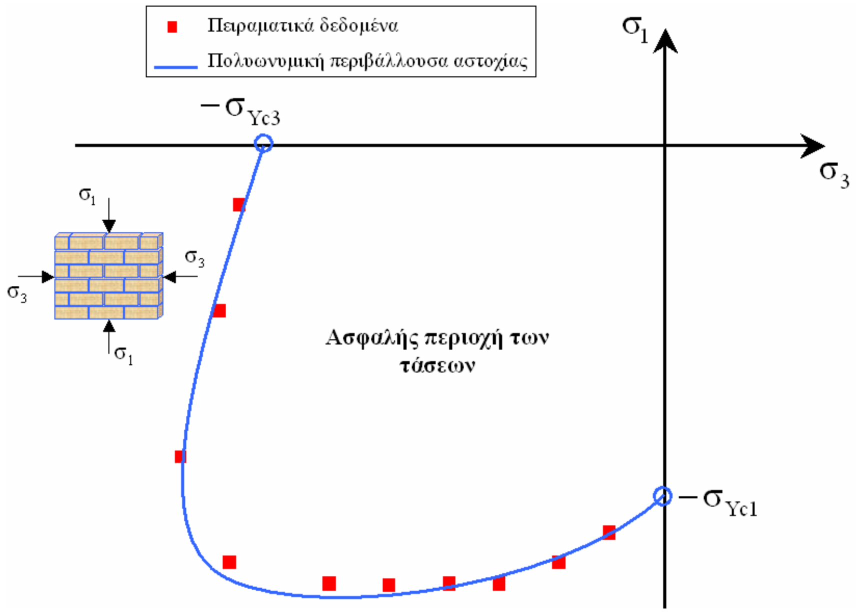


Σχήμα 2.5: Σχηματική απεικόνισης της δοκιμής διαξονικής θλίψης τοιχίων από τοιχοποιία, α) κάθετα στο επίπεδο των αρμών και β) παράλληλα στο επίπεδο των αρμών.

Συσχετίζοντας τα αποτελέσματα της διαξονικής θλίψης υπολογίζονται οι πειραματικές περιβάλλουσες αστοχίας. Οι περιβάλλουσες αστοχίας μπορεί να είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις της μορφής:

$$f(\sigma_1,\sigma_3)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\sigma_1^{i-1}\sigma_3^{j-1}=0 \tag{2.5}$$

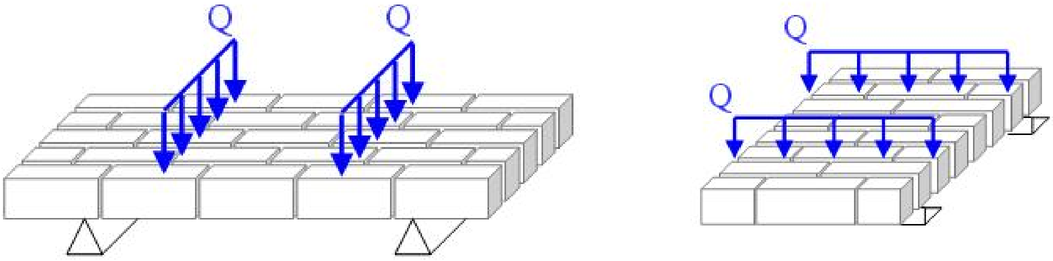
οι οποίες αφενός μεν οριοθετούν αναλυτικά τις ασφαλείς περιοχές των τάσεων (σχήμα 2.6), αφετέρου δε συνδέουν την αντοχή σε θλίψη μιας τοιχοποιίας κατά την κατακόρυφη διεύθυνση με την εφαρμοζόμενη πλευρική τάση. Οι συντελεστές α_{ij} μιας πολυωνυμικής περιβάλλουσας αστοχίας, υπολογίζονται με παρεμβολή εφαρμόζοντας την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, ενώ είναι δυνατό να συσχετισθούν και με άλλα μεγέθη αντοχής της τοιχοποιίας όπως είναι η αντοχές σε εφελκυσμό ή διάτμηση. Τέλος σημειώνεται ότι οι δοκιμές διαξονικής θλίψης, αποτελούν σημαντικό κομμάτι τόσο στην διατύπωση κριτηρίων αστοχίας πολυαξονικής έντασης (βλ. Κεφάλαιο 3) όσο και στη μελέτη της μη γραμμικής συμπεριφοράς της τοιχοποιίας (βλ. Κεφάλαιο 4) [27].



Σχήμα 2.6: Πολυωνυμική περιβάλλουσα αστοχίας, η οποία υπολογίζεται από τα πειραματικά δεδομένα με παρεμβολή [1, 2, 3, 24].

2.3.3 Εφελκυστική αντοχή σε κάμψη

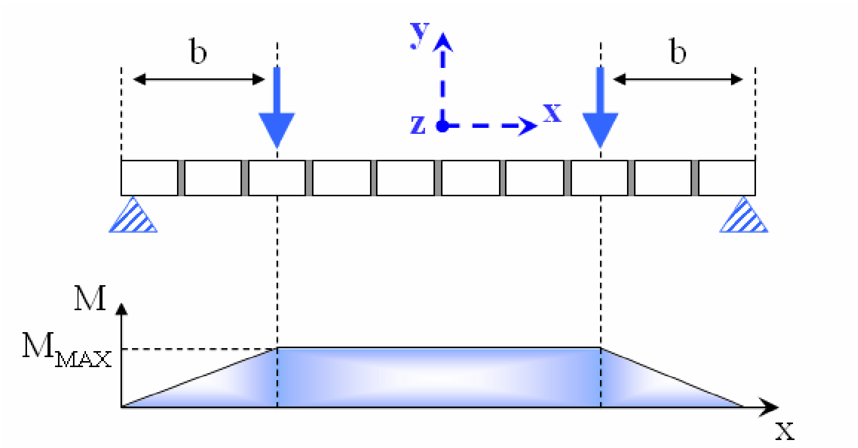
Η κάμψη αποτελεί ένα είδος φόρτισης το οποίο προκαλεί ταυτόχρονα στο σώμα που εφαρμόζεται εφελκυστικά, διατμητικά και θλιπτικά φορτία. Για το λόγο αυτό οι εφελκυστικές τάσεις που εμφανίζονται σε μια τοιχοποιία οφείλονται κυρίως σε καμπτικές ροπές που προκαλούνται από την ύπαρξη έκκεντρων κατακόρυφων φορτίων εντός ή εκτός του επιπέδου της και από οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται κάθετα στο επίπεδο αυτής (άνεμος, οριζόντια σεισμικά φορτία κτλ.). Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι για τις ανάγκες σχεδιασμού μιας κατασκευής από τοιχοποιία έχει μεγαλύτερη σημασία ο προσδιορισμός της καμπτικής ροπής που προκαλεί αστοχία σε εφελκυσμό, παρά η καθαρή αντοχή σε εφελκυσμό [24, 28, 38].



α) β)

Σχήμα 2.7: Δοκιμή εκτός επιπέδου κάμψης τεσσάρων σημείων τοιχοποιίας σε επίπεδο α)παράλληλο και β)κάθετο στους αρμούς [1, 2, 7, 8]

Η καμπτική εφελκυστική αντοχή μιας τοιχοποιίας συνήθως αναφέρεται στην γωνία που σχηματίζει το επίπεδο κάμψης με τα επίπεδα των αρμών. Κατά την πειραματική εξέταση πρέπει να προσδιοριστεί η καμπτική αντοχή σε επίπεδα κάθετα και παράλληλα στους αρμούς. Ο εργαστηριακός έλεγχος πραγματοποιείται με την εφαρμογή της εκτός επιπέδου κάμψης τεσσάρων σημείων (σχήματα 2.7 και 2.8).



Σχήμα 2.8: Εντατική κατάσταση τοιχοποιίας στο επίπεδο της κάμψης τεσσάρων σημείων

Η διεύθυνση των εφελκυστικών τάσεων στην εκτός επίπεδου κάμψη, ταυτίζεται με την τομή των επιπέδων κάμψης και ανάπτυξης της τοιχοποιίας. Η μέγιστη τιμής της τάσης, για δεδομένη καμπτική ροπή, προσδιορίζεται από την τεχνική θεωρία της αντοχής των υλικών σύμφωνα με την σχέση (σχήμα 2.8):

$$\sigma_x = \frac{M_z t_y}{2I_z} \qquad (2.6)$$

από την οποία με αντικατάσταση της ροπής που προκαλεί την αστοχία σε εφελκυσμό, προκύπτει η καμπτική εφελκυστική αντοχή

$$\sigma^{w}_{Ybt} = \frac{6M^{w}_{Ybt}}{t_z t_y^2} \tag{2.7}$$

όπου:

σ^{w}_{Ybt} η καμπτική εφελκυστική αντοχή

M^{w}_{Ybt} η καμπτική ροπή που προκαλεί αστοχία σε εφελκυσμό

t_z η ανάπτυξη του τοίχου σε διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο κάμψης

t_y το πάχος της τοιχοποιίας.

Δεδομένα που έχουν προκύψει από εργαστηριακές δοκιμές, δείχνουν ότι η καμπτική εφελκυστική αντοχή σε επίπεδο παράλληλο στους αρμούς είναι 2 έως 5 φορές μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αντοχή σε επίπεδο κάθετο στους αρμούς. Ο λόγος των δύο αντοχών είναι δείκτης της ανισοτροπίας του υλικού και εξαρτάται από την αντοχή των τοιχοσωμάτων εφόσον τα επίπεδα αστοχίας διέρχονται μέσα από αυτά, την πλήρωση των κενών των λιθοσωμάτων με κονίαμα (τούβλα με οπές, τσιμεντόλιθοι κτλ.), το ποσοστό των κενών της τοιχοποιίας, τον λόγο των πλευρών των τοιχοσωμάτων και την ύπαρξη κατακόρυφης τάσης εντός του επιπέδου της τοιχοποιίας χωρίς εκκεντρότητα [24].

2.3.4 Διατμητική αντοχή

Οι διατμητικές τάσεις-δυνάμεις που εμφανίζονται σε μία φέρουσα τοιχοποιία, αποτελούν είτε συνιστώσες θλιπτικών φορτίων σε επίπεδα κάθετα στην τοιχοποιία τα οποία σχηματίζουν γωνία με τους αρμούς διάφορη των 0 και 90°, είτε συνισταμένες ενός πολυδιάστατου (διαξονικού ή τριαξονικού) εντατικού πεδίου, είτε δυνάμεις αντίδρασης στην επιβολή οριζόντιων φορτίων (π.χ. σεισμικά φορτία). Η αστοχία σε διάτμηση της τοιχοποιίας από την εφαρμογή ενός ή και περισσοτέρων τύπων φόρτισης εκδηλώνεται συνήθως με τους ακόλουθους τρόπους [24]:

I. **Ολίσθηση κατά μήκος των αρμών λόγω αστοχίας του κονιάματος**. Οι αρμοί από την φύση τους αποτελούν επίπεδα αδυναμίας, καθώς οι μηχανικές αντοχές των κονιαμάτων είναι κατά κανόνα μικρότερες από τις αντίστοιχες των τοιχοσωμάτων. Ο συγκεκριμένος τρόπος αστοχίας οφείλεται είτε στην εφελκυστική αστοχία του κονιάματος κάθετα στους αρμούς, είτε στη διατμητική αστοχία του κονιάματος παράλληλα στους αρμούς.

II. **Ολίσθηση κατά μήκος των αρμών λόγω υπέρβασης των δυνάμεων συνοχής**. Ο συγκεκριμένος τρόπος αστοχίας εκδηλώνεται με την αποκόλληση των τοιχοσωμάτων από το κονίαμα, όταν η εφελκυστική τάση που ασκείται κάθετα στη διεπιφάνεια τοιχοσώματος-κονιάματος υπερβεί τις αντίστοιχες δυνάμεις συνάφειας.

III. **Εφελκυστική αστοχία των τοιχοσωμάτων**. Στη περίπτωση αυτή, η επιφάνεια διατμητικής αστοχίας διέρχεται μέσα από τα τοιχοσώματα. Ο συγκεκριμένος τύπος αστοχίας, προκαλεί συνήθως την εμφάνιση μεγάλων μετατοπίσεων στο εσωτερικό της τοιχοποιίας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αναδιαμόρφωση όλου του εντατικού πεδίου με την εμφάνιση συγκέντρωσης τάσεων στις περιοχές που έχουν αστοχήσει και τελικά την εκδήλωση και άλλων τύπων αστοχίας (π.χ. αποκόλληση τοιχοσωμάτων από το κονίαμα, εφελκυστική και διατμητική αστοχία των αρμών).

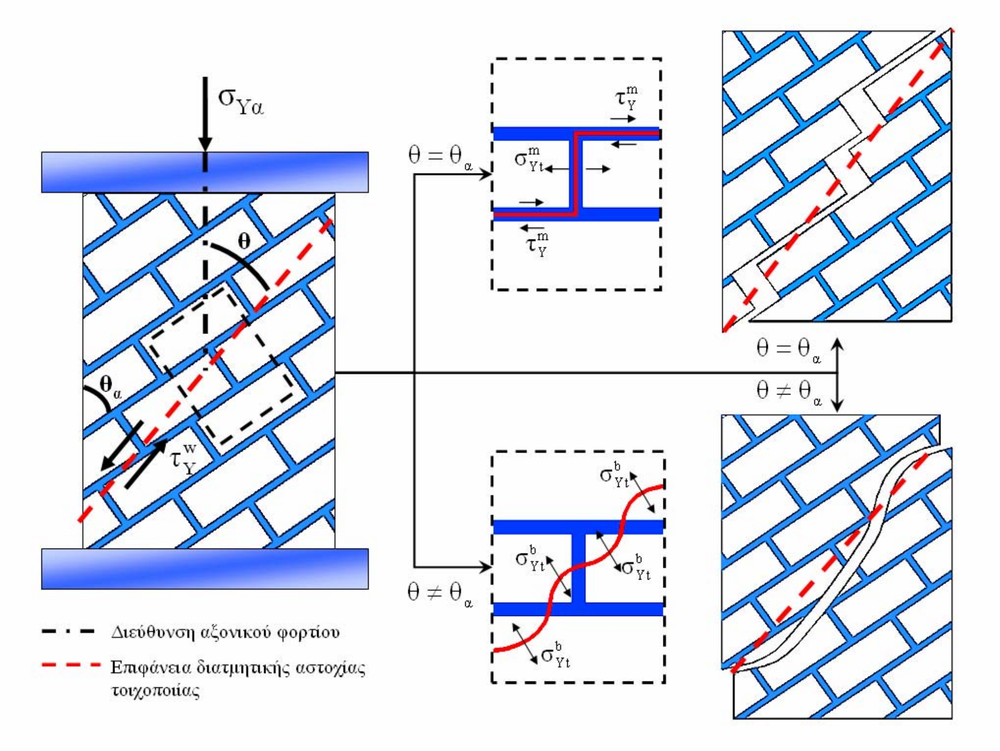
Οι διαφορετικοί μηχανισμοί αστοχίας που αναφέρθηκαν παραπάνω, δυσκολεύουν την θεωρητική προσέγγιση του φαινομένου, αφενός μεν επειδή μια τέτοιου τύπου ανάλυση πέραν των μηχανικών αντοχών κονιάματος και τοιχοσωμάτων απαιτεί και την γνώση της μηχανικής συμπεριφοράς της διεπιφάνειας κονιάματος-τοιχοσώματος, αφετέρου δε επειδή είναι δυνατό να εκδηλωθούν αλυσιδωτά περισσότεροι του ενός τύπου αστοχίας. Ο ασφαλέστερος τρόπος για τον προσδιορισμό της διατμητικής αντοχής μιας τοιχοποιίας είναι πραγματοποίηση εργαστηριακών δοκιμών διάτμησης σε κατάλληλα διαμορφωμένα δοκίμια.

Σε αντίθεση με την αντοχή σε εφελκυσμό και θλίψη, για τον πειραματικό προσδιορισμό της αντοχής σε διάτμηση μιας τοιχοποιίας δεν έχουν οριστεί πρότυπες εργαστηριακές δομικές. Επειδή κάποιοι από τους τρόπους αστοχίας μιας τοιχοποιίας σε διάτμηση είναι παραπλήσιοι με αυτούς της αστοχίας σε καμπτική φόρτιση, κύριο μέλημα σε μια τέτοια πειραματική διαδικασία είναι η αποφυγή εμφάνισης καμπτικών ροπών στο δοκίμιο της τοιχοποιίας. Με βάση τη παρατήρηση αυτή μια κατάλληλη πειραματική διάταξη είναι αυτή που απεικονίζεται στο σχήμα 2.9. Στη συγκεκριμένη διάταξη το δοκίμιο της τοιχοποιίας υποβάλλεται σε κατακόρυφη θλιπτική φόρτιση με αποτέλεσμα οι αρμοί της να καταπονούνται σε διάτμηση. Λαμβάνοντας υπόψη την εντατική κατάσταση του δοκιμίου (σχήμα 2.9) η αστοχία σε διάτμηση εκδηλώνεται όταν επαληθεύεται η σχέση:

$$\tau_Y^w \leq \frac{\sigma_{Y\alpha}}{\cos\theta} \tag{2.8}$$

όπου:

- $\sigma_{Y\alpha}$ η κατακόρυφη τάση για την οποία εκδηλώνεται διατμητική αστοχία
- τ_Y^w η διατμητική αντοχή της τοιχοποιίας
- θ η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο διατμητικής αστοχίας με την διεύθυνση της κατακόρυφης τάσης $\sigma_{Y\alpha}$
- θ_α η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο των αρμών με την διεύθυνση της κατακόρυφης τάσης $\sigma_{Y\alpha}$



Σχήμα 2.9: Δοκιμή αντοχής σε διάτμηση τοιχοποιίας (τ_Y^m και σ_{Yt}^m οι αντοχές του κονιάματος σε διάτμηση και εφελκυσμό αντίστοιχα).

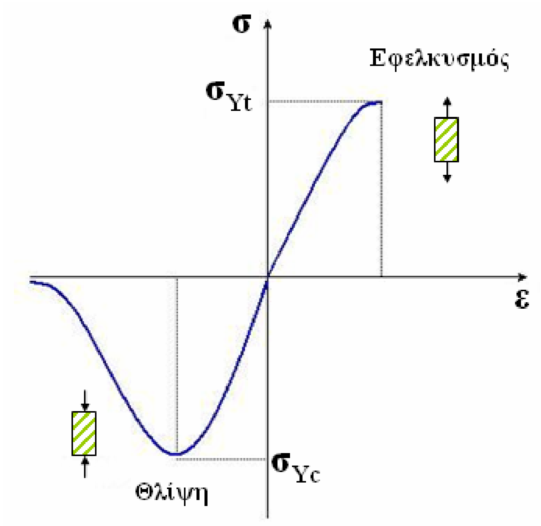
Όσον αφορά τη γωνία θ μπορούν να διακριθούν οι ακόλουθες περιπτώσεις, σε συνδυασμό πάντα με την επιτόπου παρατήρηση της μορφής του δοκιμίου μετά την αστοχία:

- Εάν $\theta \neq \theta_{\alpha}$ η αστοχία εκδηλώνεται κατά μήκος των αρμών είτε λόγω της εφελκυστικής ή διατμητικής αστοχίας του κονιάματος είτε λόγω της υπέρβασης των αντιστοίχων δυνάμεων συνοχής τοιχοσώματος κονιάματος (τρόποι αστοχίας I ή/και II). Στην περίπτωση αυτή η διατμητική αντοχή της τοιχοποιίας αποτελεί συνάρτηση της εφελκυστικής και της διατμητικής αντοχής του κονιάματος.

- Εάν $\theta \neq \theta_{\alpha}$, η επιφάνεια αστοχίας θα διέρχεται μέσα από τα τοιχοσώματα (τρόπος αστοχίας III), κάτι το οποίο υποδηλώνει την εφελκυστική αστοχία των τοιχοσωμάτων.

2.4 Ελαστικά χαρακτηριστικά της τοιχοποιίας

Η τοιχοποιία λόγω της δομής της, μπορεί να θεωρηθεί ως ψαθυρό υλικό και ως τέτοιο εμφανίζει πολύ μεγαλύτερη αντοχή σε θλίψη από ότι σε εφελκυσμό και διάτμηση. Για να περιγραφεί η καταστατική συμπεριφορά ενός ψαθυρού υλικού, δηλαδή η σχέση μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων, ορίζεται ένα τυπικό διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης για τα πειράματα του μοναξονικού εφελκυσμού και της μοναξονικής θλίψης (σχήμα 2.10). Από ένα τέτοιο διάγραμμα παρατηρείται ότι στην περιοχή του εφελκυσμού το δοκίμιο αστοχεί ξαφνικά όταν η αξονική τάση ξεπεράσει την αντοχή σε εφελκυσμό, σ_{Yt}. Μετά την εκδήλωση της αστοχίας τα εφελκυστικά φορτία που δύναται να παραλάβει το υλικό είναι απειροστά κάτι το οποίο σημαίνει ότι οι εφελκυστικές πλαστικές παραμορφώσεις είναι απειροστές έως ανύπαρκτες. Αντίθετα στην περιοχή της θλίψης, το υλικό ναι μεν αστοχεί όταν η αξονική τάση ξεπεράσει την αντοχή του σε θλίψη, σ_{Yc}, ωστόσο μετά την εκδήλωση της αστοχίας το υλικό είναι σε θέση να παραλάβει κάποιου μεγέθους θλιπτικά φορτία. Η παραμένουσα αντοχή του υλικού οφείλεται στις δυνάμεις τριβής που εμφανίζονται στα επίπεδα αστοχίας. Όσον αφορά τις πλαστικές παραμορφώσεις που παρουσιάζει το υλικό μετά την αστοχία σε θλίψη, οφείλονται στην ολίσθηση που εμφανίζεται στα επίπεδα αστοχίας.



Σχήμα 2.10: Τυπικό διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης ψαθυρού υλικού [1, 24, 37]

Ο ασφαλέστερος τρόπος για να προσδιοριστεί το μέτρο ελαστικότητας της τοιχοποιίας είναι η δοκιμή μοναξονικής θλίψης σε διευθύνσεις κάθετα και παράλληλα στους αρμούς. Εναλλακτικά το μέτρο ελαστικότητας σε διεύθυνση κάθετα στους αρμούς μπορεί να προσδιοριστεί από την θεωρία της ελαστικότητας σύμφωνα με τη σχέση [1, 24]:

$$E_w = \frac{E_b E_m (t_m + t_b)}{t_b E_m + t_m E_b} \tag{2.9}$$

όπου E_w, E_b και E_m τα μέτρα ελαστικότητας της τοιχοποιίας, των τοιχοσωμάτων και του κονιάματος αντίστοιχα και t_b και t_m το ύψος του τοιχοσώματος και το πάχος των αρμών αντίστοιχα. Τέλος ο λόγος Poisson της τοιχοποιίας εκτιμάται μεταξύ 0.15-0.35 [24].

2.5 Ομογενοποίηση τοιχοποιιών

Με τον όρο **μηχανική ομογενοποίηση** μιας τοιχοποιίας ή γενικότερα ενός σύνθετου υλικού, περιγράφεται η διαδικασία κατά την οποία προσδιορίζονται οι μηχανικές ιδιότητες ενός ομογενούς ισότροπου ή ανισότροπου υλικού, το οποίο εμφανίζει την ίδια καταστατική συμπεριφορά και τις ίδιες μηχανικές αντοχές με το σύνθετο υλικό. Η διαδικασία της μηχανικής ομογενοποίηση είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί είτε με την εφαρμογή εργαστηριακών δοκιμών όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενες παραγράφους, είτε με την χρήση αναλυτικών ή/και αριθμητικών μεθόδων [22, 33, 47, 48]. Σχετικά απλές αλλά χαρακτηριστικές περιπτώσεις μηχανικής ομογενοποίησης τοιχοποιιών αποτελεί η σχέση του Francis για τον υπολογισμό της θλιπτικής αντοχής (εξίσωση 2.1) αλλά και η εξίσωση (2.9) για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας σε διεύθυνση κάθετα στους αρμούς μιας τοιχοποιίας. Κάποια απ' τα πλεονεκτήματα των μηχανικά ομογενοποιημένων υλικών είναι συνοπτικά τα παρακάτω [24, 29, 46]:

- Στην πολυαξονική εντατική κατάσταση η αστοχία ενός τέτοιου υλικού είναι δυνατό να ελεγχθεί σε όλη του την έκταση με την χρήση αναλυτικών συναρτήσεων των τάσεων, οι οποίες καλούνται κριτήρια αστοχίας.

- Η αριθμητική προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς μιας κατασκευής από τοιχοποιία απλουστεύεται σημαντικά καθώς ορίζονται ενιαίες παράμετροι καταστατικής συμπεριφοράς για όλο το υλικό (δεν υπάρχει διαχωρισμός τοιχοσωμάτων κονιάματος) και μειώνεται σημαντικά το υπολογιστικό κόστος.

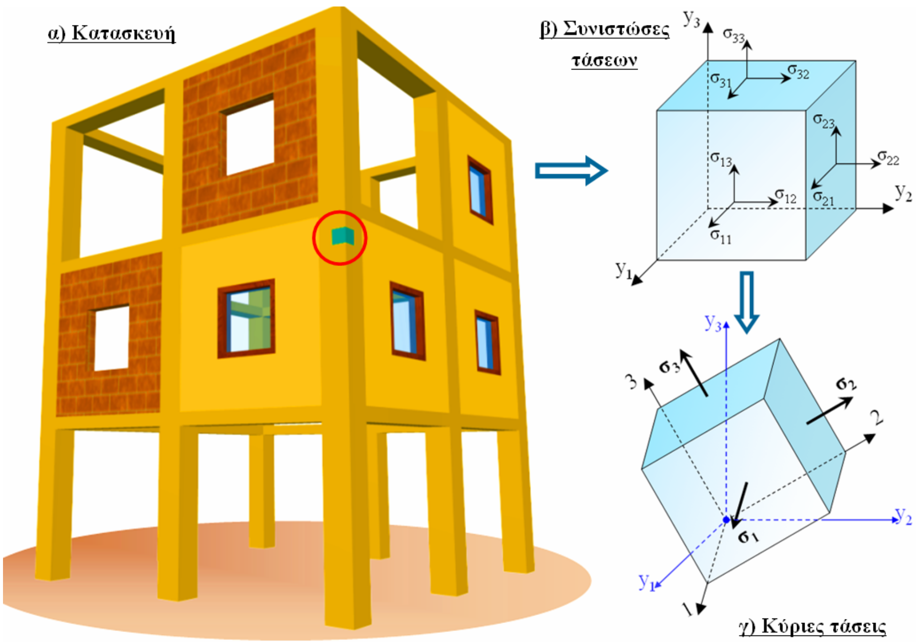
- Απλούστευση στην εφαρμογή των κανονισμών σχεδιασμού κατασκευών από τοιχοποιία, καθώς παρέχεται η δυνατότητα της απευθείας συσχέτισης των μηχανικών ιδιοτήτων κονιάματος και τοιχοσωμάτων με τις ιδιότητες της ομογενοποιημένης τοιχοποιίας.

Κεφάλαιο 3ο

Κριτήρια αστοχίας των ψαθυρών υλικών

3.1 Γενικά

Οι κατασκευές στον φυσικό τους χώρο υπόκεινται στην επίδραση ενός σύνθετου τρισδιάστατου εντατικού πεδίου το οποίο συνίσταται τόσο από διατμητικές όσο και ορθές τάσεις (Σχήμα 3.1). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η αστοχία των δομικών υλικών να προκύπτει από ένα συνδυασμό φορτίσεων και όχι καθαρά από την επίδραση ενός είδους καταπόνησης (π.χ. θλιπτική, εφελκυστική ή διατμητική). Είναι λοιπόν αναγκαίο η εντατική κατάσταση μιας κατασκευής, να αναχθεί σε μια μορφή τέτοια ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση της με τα μεγέθη αντοχής των δομικών υλικών. Αυτό επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των κυρίων τάσεων (Σχήμα 3.1) οι οποίες αφενός μεν περιγράφουν μια ισοδύναμη εντατική κατάσταση με την ύπαρξη μόνο ορθών τάσεων, αφετέρου δε μπορούν να συγκριθούν άμεσα με τις αντοχές του υλικού σε εφελκυσμό και θλίψη [1].



Σχήμα 3.1: Γενικευμένη τρισδιάστατη εντατική κατάσταση (y_1//x, y_2//y, y_3//z)

Οι κύριες τάσεις αποτελούν τις ρίζες της κυβικής εξίσωσης:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{3.1}$$

όπου:

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2$$

$$I_3 = \left|\sigma_{ij}\right|$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$, ο τανυστής των τάσεων

Για τις ρίζες της εξίσωσης (3.1) ισχύει η σύμβαση $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$, ενώ θετικές τιμές των τάσεων δηλώνουν εφελκυσμό και αρνητικές θλίψη. Οι κύριες τάσεις μπορούν να εκφρασθούν συναρτήσει των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων σύμφωνα με την σχέση [16]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\bar{\theta} + 2\pi/3\right) \\ \sin\bar{\theta} \\ \sin\left(\bar{\theta} - 2\pi/3\right) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

όπου:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{3}J_3}{2\sqrt{J_2^3}}\right) \text{ με } -30^\circ \le \bar{\theta} \le 30^\circ$$

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{1}{6}\left\{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2\right\} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \frac{I_1}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \frac{I_1}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \frac{I_1}{3} \end{bmatrix}$$, ο αποκλίνοντας τανυστής των τάσεων

$$J_3 = -\frac{1}{27} I_1^3 + \frac{1}{3} I_1 J_2 + I_3$$

Όταν η εκδήλωση της αστοχίας σε κάποια περιοχή του υλικού είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής ενός σύνθετου πολυδιάστατου εντατικού πεδίου, η μαθηματική διατύπωση των κριτηρίων αστοχίας γίνεται πιο πολύπλοκη, καθώς αυτά δεν αποτελούν πλέον ανισότητες εφαρμοζόμενων τάσεων και αντιστοίχων αντοχών, αλλά ανισότητες συναρτήσεων των συνιστωσών των τάσεων. Η γενικευμένη μαθηματική διατύπωση ενός τέτοιου κριτήριου είναι η ακόλουθη:

$$F(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \cdots, k_n) \geq 0 \tag{3.3}$$

όπου $F(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \ldots, k_n)$ η **συνάρτηση αστοχίας** και k_i, με i=1:n, παράμετροι της συνάρτησης οι οποίες συσχετίζονται με τις μηχανικές αντοχές του υλικού και υπολογίζονται κυρίως πειραματικά. Τα κριτήρια αστοχίας είναι δυνατό και πολλές φορές πιο χρήσιμο, να εκφραστούν ισοδύναμα είτε ως συναρτήσεις των κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 και σ_3, είτε ως συναρτήσεις των τασικών αναλλοίωτων I_1, J_2, και $\overline{\theta}$. Η τασική αναλλοίωτος I_1 είναι η πρώτη αναλλοίωτος του τανυστή των τάσεων, αποτελεί συνάρτηση της ενέργειας που δαπανάται για να μεταβληθεί ο όγκος του υλικού (ένεργεια διαστολής) και εκφράζει την συνεισφορά του υδροστατικού πεδίου στην αστοχία του υλικού [37]. Η τασική αναλλοίωτος J_2 είναι η δεύτερη αναλλοιώτος του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων, αποτελεί συνάρτηση της ένεργειας που δαπανάται για να μεταβληθεί το σχήμα ενός σώματος (ενέργεια στρέβλωσης) και εκφράζει την συνεισφορά των διατμητικών τάσεων στην αστοχία του υλικού [37].

3.2 Τρόποι αστοχίας των ψαθυρών υλικών

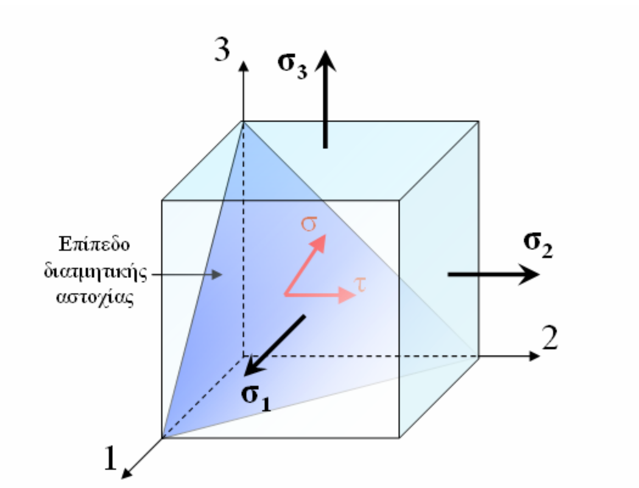
Οι περισσότερες κατασκευές αποτελούνται άλλες εξ' ολοκλήρου και άλλες ως ένα ποσοστό από ψαθυρά δομικά υλικά όπως το σκυρόδεμα, η τοιχοποιία, τα κονιάματα , τα πετρώματα (λιθοδομές) και τα κεραμικά (οπτοπλινθοδομές). Επιπλέον ο χάλυβας που είναι και το σύνηθες υλικό οπλισμού των δομικών στοιχείων από σκυρόδεμα, όταν εμφανίσει σημαντικές πλαστικές παραμορφώσεις συμπεριφέρεται ως ψαθυρό υλικό.

Τα ψαθυρά υλικά παρουσιάζουν περισσότερες ιδιομορφίες σε σχέση με τα όλκιμα, κυρίως όσον αφορά τους τρόπους με τους οποίους αστοχούν. Αυτό οφείλεται στο ότι τα υλικά αυτά αφενός μεν εμφανίζουν μεγαλύτερη αντοχή σε θλίψη απ' ότι σε εφελκυσμό (πολλές φορές έως και μια τάξη μεγέθους), αφετέρου δε οι μηχανισμοί αστοχίας διαφοροποιούνται ανάλογα με το αν το εντατικό πεδίο που εφαρμόζεται είναι ισχυρά θλιπτικό ή ελφεκυστικό. Οι τρόποι αστοχίας των ψαθυρών υλικών, ανεξάρτητα απ' το αν πρόκειται για μια κατασκευή στο χώρο λειτουργίας της ή για κάποιο δοκίμιο που υποβάλλεται σε εργαστηριακές δοκιμές, είναι οι ακόλουθοι [1]:

- Αστοχία σε διάτμηση
- Αστοχία σε εφελκυσμό

3.3 Αστοχία σε διάτμηση

Ένα ψαθυρό υλικό αστοχεί σε καποίο σημείο σε διάτμηση όταν καταπονείται από ένα ισχυρά θλιπτικό εντατικό πεδίο, δηλαδή όταν $I_1 \leq 0$. Η διατμητική αστοχία εκδηλώνεται κατα μήκος ενός επιπέδου, όταν η συνισταμένη διατμητική τάση ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή. Το επίπεδο αστοχίας καλείται και **επίπεδο αδυναμίας** και διαφοροποιείται ανάλογα με την σύνθεση του πολυδιάστατου εντατικού πεδίου (Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2: Μηχανισμός διατμητικής αστοχίας σε κάποιο επίπεδο αδυναμίας

Οι κυριότερες θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί για να περιγράψουν τη διατμητική αστοχία των ψαθυρών υλικών είναι αυτές των Coulomb (1773) και Mohr

(1900). Η θεωρία του Coulomb αρχικά διατυπώθηκε για να περιγράψει την αστοχία των εδαφικών σχηματισμών και στηρίζεται στην παρατήρηση ότι η αντοχή ενός εδαφικού σχηματισμού οφείλεται αφενός μεν σε δυνάμεις τριβής μεταξύ των κόκκων του εδάφους, αφετέρου δε στις γενικότερες δυνάμεις συνοχής του υλικού [1, 37]. Η μαθηματική έκφραση του κριτήριου Coulomb είναι η ακόλουθη:

$$|\tau| \geq S_0 - \sigma \tan\varphi \tag{3.4}$$

όπου:

- τ: η μέγιστη διατμητική τάση στο επίπεδο αστοχίας
- σ: η ορθή τάση στο επίπεδο αστοχίας
- S_0: η συνοχή ή διατμητική αντοχή του υλικού
- φ: η γωνία εσωτερικής τριβής του υλικού.

Στο κριτήριο λαμβάνεται υπόψη η απόλυτη τιμή της διατμητικής τάσης, καθώς το πρόσημο της δεν επηρεάζει τον μηχανισμό αστοχίας [1]. Όσον αφορά τις παραμέτρους εσωτερικής τριβής και συνοχής του υλικού, σημειώνεται ότι για υλικά μη συνεκτικά όπως είναι τα εδάφη αλλά και κάποιοι τύποι λιθοδομών (ξήρολιθοδομές), η συνοχή είναι συνήθως μηδέν και η αντοχή τους οφείλεται αποκλειστικά στις δυνάμεις τριβής μεταξύ των κόκκων ή των λιθοσωμάτων εάν πρόκειται για λιθοδομές. Επιπλέον η μηδενική συνοχή συνεπάγεται και μηδενική εφελκυστική αντοχή.

Το κριτήριο αστοχίας Coulomb, επειδή ακριβώς αναπτύχθηκε για να περιγράψει την αστοχία μη συνεκτικών υλικών ή υλικών με πολύ χαμηλή εφελκυστική αντοχή, εμφανίζει κάποιους περιορισμούς καθώς δεν προσάρμοζεται ικανοποιήτικα σε πειραματικά δεδομένα εφελκυσμού [1, 8]. Τα προβλήματα αυτά οδηγησαν το Mohr να διατυπώσει μια γενίκευση της θεωρίας του Coulomb για κάθε υλικό συνεκτικό(πετρώματα, σκυρόδεμα, πλινθοδομές κτλ.) ή μη (εδάφη, κονιάματα, ξηρολιθοδομές). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή η διατμητική τάση αστοχίας σε κάποιο επίπεδο αδυναμίας αποτελεί μια συνάρτηση της ορθής τάσης (όχι απαραίτητα γραμμική) και η αστοχία εκδηλώνεται όταν ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

$$|\tau| \geq f(\sigma, c_1, c_2, \cdots, c_n) \tag{3.5}$$

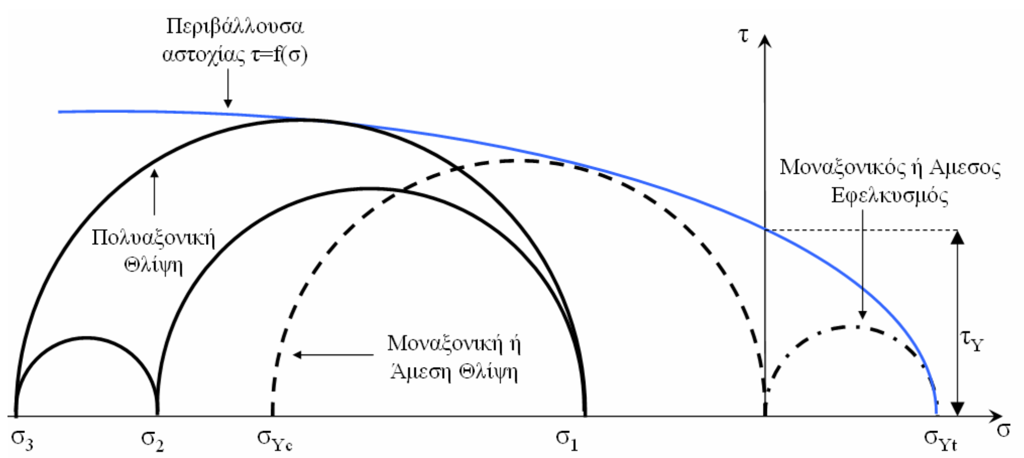
όπου:

$f(\sigma, c_1, c_2, \cdots, c_n)$:	συνάρτηση αστοχίας ή περιβάλλουσα αστοχίας του υλικού
$c_{1,2,\ldots,n}$:	παράμετροι της συνάρτησης αστοχίας, οι οποίες υπολογίζονται κατάλληλα ώστε να επιτυγχάνεται η βέλτιστη προσαρμογή του κριτηρίου στα πειραματικά δεδομένα δοκιμών, που έχουν να κάνουν με τον προσδιορισμό των μηχανικών αντοχών του υλικού.

Στο σχήμα 3.3 παρουσιάζεται η συνδυασμένη γραφική απεικόνιση σε διάγραμμα σ-τ, της περιβάλουσας αστοχίας και των κύκλων του Mohr που αντιστοιχούν σε εντατικές καταστάσεις οριακής αστοχίας. Οι παρατηρήσεις που μπορούν να γίνουν με βάση το διάγραμμα αυτό είναι οι ακόλουθες:

- Ένα υλικό αστοχεί κάτω από την επίδραση ενός εντατικού πεδίου, όταν η περιβάλλουσα αστοχίας τέμνει ή εφάπτεται (οριακή αστοχία) με τον κύκλο του Mohr που περιγράφει το συγκεκριμένο πεδίο τάσεων.

- Η ενδιάμεση κύρια τάση σ_2 δεν συμμετέχει στη διαμόρφωση του μηχανισμού αστοχίας κάτω από την επίδραση ενός πολυδιάστατου εντατικού πεδίου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η εκδήλωση της διατμητικής αστοχίας να λαμβάνει χώρα σε επίπεδα κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα της μέγιστης (σ_1) και ελάχιστης (σ_3) κύριας τάσης.



Σχήμα 3.3: Περιβάλουσα αστοχίας σύμφωνα με την θεωρία του Mohr

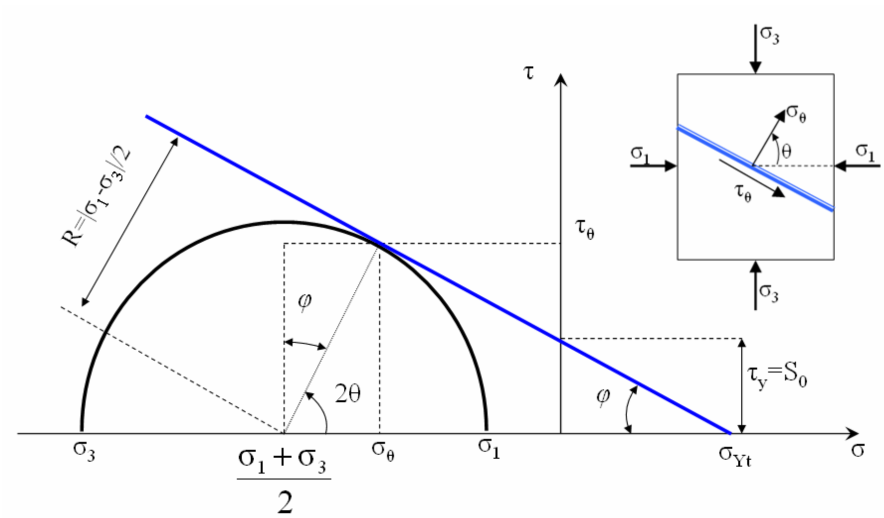
Τέλος αναφέρεται ότι στην περίπτωση που η περιβάλλουσα αστοχίας είναι μια ευθεία γραμμή, τα κριτήρια Mohr και Coulomb ταυτίζονται. Για το λόγο αυτό και τα κριτήρια διατμητικής αστοχίας των ψαθυρών υλικών, συνήθως αναφέρονται ως κριτήρια Mohr-Coulomb με πιο διαδεδομένα το γραμμικό και το παραβολικό.

3.3.1 Γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb

Η μαθηματική διατύπωση του γραμμικού κριτηρίου αστοχίας **Mohr-Coulomb** συναρτήσει των κυρίων τάσεων, γίνεται με την θεώρηση ενός κυλινδρικού δοκιμίου ψαθυρού υλικού το οποίο υποβάλλεται σε τριαξονική θλίψη [1, 16, 37]. Η αστοχία εκδηλώνεται οριακά σε κάποιο επίπεδο αδυναμίας, όταν η περιβάλλουσα του Coulomb έρθει σε επαφή με τον κύκλο του Mohr που περιγράφει την εντατική κατάσταση του δοκιμίου (Σχήμα 3.4). Στην περίπτωση αυτή η ακτίνα του κύκλου είναι κάθετη στη περιβάλλουσα αστοχίας και οι τάσεις στο επίπεδο αστοχίας υπολογίζονται από τις σχέσεις (Σχήμα 3.4):

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right|\cos\varphi$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right|\sin\varphi \tag{3.6}$$



Σχήμα 3.4: Γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.6) στο κριτήριο του Coulomb προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\left|\tau_\theta\right| = S_0 - \sigma_\theta \tan\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right|\cos\varphi = S_0 - \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\tan\varphi - \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right|\sin\varphi\tan\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right|\cos^2\varphi - S_0\cos\varphi + \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\sin\varphi + \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right|\sin^2\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$F\left(\sigma_1, \sigma_3, S_0, \varphi\right) = \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right| + \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\sin\varphi - S_0\cos\varphi = 0 \tag{3.7}$$

Η γενική μορφή του κριτηρίου αστοχίας στην τρισδιάστατη εντατική κατάσταση προκύπτει από την αντικατάσταση των κυρίων τάσεων σύμφωνα με την σχέση (3.2) στην εξίσωση (3.7) και γράφεται [16]:

$$F\left(I_1, J_2, \bar{\theta}, S_0, \varphi\right) = \frac{I_1}{3}\sin\varphi + A\left(\bar{\theta}\right)\sqrt{J_2} - S_0\cos\varphi = 0 \tag{3.8}$$

όπου:

$$A\left(\bar{\theta}\right) = \cos\left(\bar{\theta}\right) - \frac{\sin\left(\bar{\theta}\right)\sin\left(\varphi\right)}{\sqrt{3}}$$

Η εξίσωση (3.8) μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά, εάν ληφθεί υπόψη ότι σύμφωνα με τη θεωρία του Mohr η ενδιάμεση κύρια τάση δεν συμβάλει στη διαμόρφωση του μηχανισμού οριακής αστοχίας σε διάτμηση (βλ. Σχήμα 3.3). Σύμφωνα με την παρατήρηση αυτή, η ενδιάμεση κύρια τάση μπορεί να ληφθεί ίση είτε με την μέγιστη είτε με την ελάχιστη κύρια τάση. Στις δύο αυτές ακραίες περιπτώσεις, η γωνία $\bar{\theta}$ ισούται με π/6 ή –π/6 αντίστοιχα (σχήμα 3.5). Στην περίπτωση που $\bar{\theta}$=π/6 (σ_2=σ_1), με αντικατάσταση στην εξίσωση (3.8) προκύπτει η σχέση:

$$F\left(I_1, J_2, a, k\right) = aI_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \tag{3.9}$$

όπου:

$$a = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}\left(3 - \sin\varphi\right)} = \frac{m-1}{\sqrt{3}\left(m+1\right)}$$

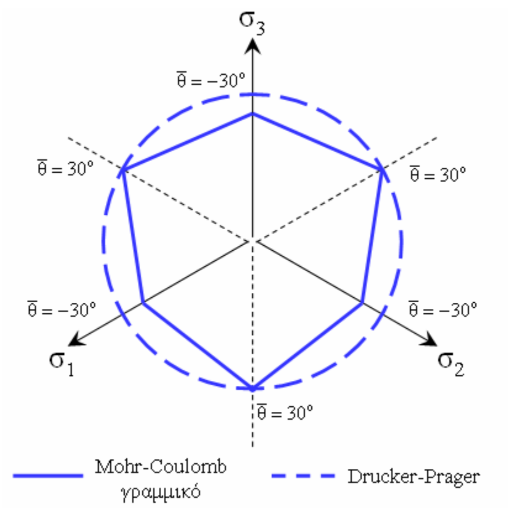
$$k = \frac{6S_0\cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)} = \frac{2\sigma_{Yc}}{\sqrt{3}(m+1)}$$

$$m = \frac{\sigma_{Yc}}{\sigma_{Yt}}$$

σ_{Yc}: η αντοχή του υλικού σε θλίψη

σ_{Yt}: η αντοχή του υλικού σε εφελκυσμό

Η σχέση (3.9) αποτελεί το κλασικό κριτήριο των Drucker-Prager, το οποίο είναι μια εξομαλυμένη-γενικευμένη διατύπωση του γραμμικού κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb (Σχήμα 3.5). Το κριτήριο Drucker-Prager είναι λιγότερο συντηρητικό από το γραμμικό Mohr-Coulomb καθώς οριοθετεί μια ευρύτερη ασφαλή περιοχή τάσεων [1, 16, 25, 37].



Σχήμα 3.5: Γενίκευση του γραμμικού κριτηρίου Mohr-Coulomb, συμφωνα με τους Drucker-Prager.

3.3.2 Παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb

Σύμφωνα με το παραβολικό κριτήριο Mohr-Coulomb, η περιβάλλουσα αστοχίας είναι μια συνάρτηση της μορφής:

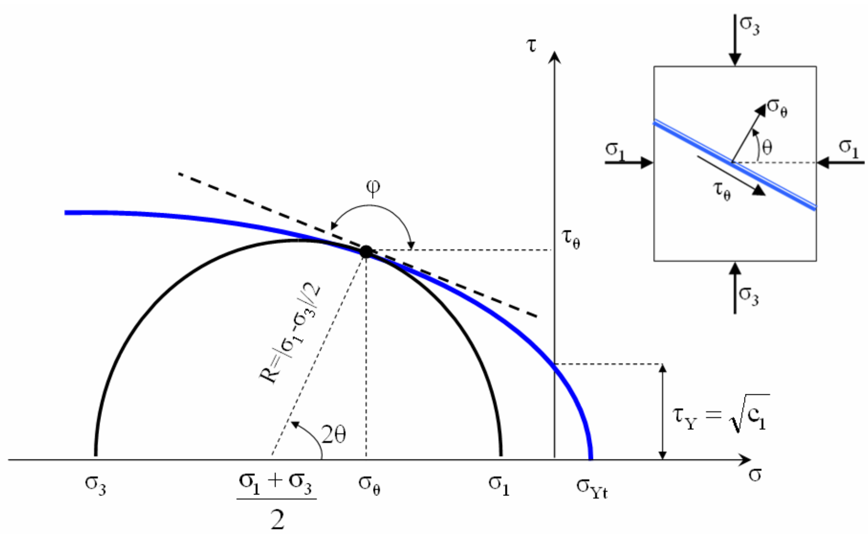
$$\tau^2 = c_1 + c_2\sigma \tag{3.10}$$

όπου c_1 και c_2 παράμετροι του κριτηρίου οι οποίες υπολογίζονται, όπως θα δειχθεί παρακάτω (εξίσωση 3.18), από τις μηχανικές αντοχές του υλικού σε εφελκυσμό και θλίψη. Η διατύπωση του κριτηρίου συναρτήσει των κυρίων τάσεων αλλά και η γενίκευση του στις τρεις διαστάσεις γίνεται αντίστοιχα με το γραμμικό κριτήριο, με την θεώρηση ενός κυλινδρικού δοκιμίου ψαθυρού υλικού το οποίο υποβάλλεται σε τριαξονική θλίψη (Σχήμα 3.6). Το υλικό αστοχεί οριακά όταν η περιβάλλουσα αστοχίας εφάπτεται με το κύκλο του Mohr που περιγράφει την εντατική κατάσταση του δοκιμίου. Στο σημείο επαφής η ακτίνα του κύκλου Mohr θα είναι κάθετη στην εφαπτόμενη της περιβάλλουσας αστοχίας. Από την καθετότητα αυτή προκύπτει η ακόλουθη σχέση (Σχήμα 3.6):

$$\tan 2\theta = \tan(\varphi - 90) = -\frac{1}{\tan\varphi} \tag{3.11}$$

Η εφαπτομένη της γωνίας φ στο σημείο επαφής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tan\varphi = \frac{\partial\tau(\sigma_\theta)}{\partial\sigma} = \frac{c_2}{2\sqrt{c_1 + c_2\sigma_\theta}} = \frac{c_2}{2\tau_\theta} \tag{3.12}$$



Σχήμα 3.6: Παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.12) στην (3.11) προκύπτει η σχέση:

$$\tan 2\theta = -\frac{2\tau_\theta}{c_2} \tag{3.13}$$

Η εφαπτόμενη της γωνίας 2θ είναι δυνατό να υπολογιστεί συναρτήσει των τάσεων ακολουθώντας το εξής σκεπτικό:

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\theta &= \frac{2\tau_\theta}{|\sigma_1-\sigma_3|} \\ \cos 2\theta &= \frac{2\sigma_\theta-(\sigma_1+\sigma_3)}{|\sigma_1-\sigma_3|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tau_\theta}{2\sigma_\theta-(\sigma_1+\sigma_3)} \tag{3.14}$$

Αντικαθιστώντας την (3.14) στην (3.13) προκύπτει:

$$\sigma_\theta = \frac{(\sigma_1+\sigma_3)-c_2}{2} \tag{3.15}$$

Η διατμητική τάση τ_θ υπολογίζεται από την εξίσωση του κύκλου του Mohr, ως εξής:

$$\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{4} = \tau_\theta^2 + \left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}-\sigma_\theta\right)^2 \overset{(3.15)}{\Rightarrow}$$

$$4\tau_\theta^2 = (\sigma_1-\sigma_3)^2 - c_2^2 \tag{3.16}$$

Αντικαθιστώντας διατμητική (εξίσωση 3.16) και ορθή (εξίσωση 3.15) τάση στο κριτήριο αστοχίας (εξίσωση 3.10), προκύπτει η σχέση (οριακή αστοχία):

$$F(\sigma_1,\sigma_3,c_1,c_2) = 2c_2(\sigma_1+\sigma_3)-(\sigma_1-\sigma_3)^2+\left(4c_1-c_2^2\right)=0 \tag{3.17}$$

Οι συντελεστές c_1 και c_2 υπολογίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (3.17) ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Μοναξονικός Εφελκυσμός:} \quad && 2c_2\sigma_{Yt}-\sigma_{Yt}^{\,2}+\left(4c_1-c_2^2\right)=0 \\ &\text{Μοναξονική θλίψη:} \quad && -2c_2\sigma_{Yc}-\sigma_{Yc}^{\,2}+\left(4c_1-c_2^2\right)=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{\sigma_{Yc}^2-mc_2^2}{4m}$$

$$c_2 = \frac{\sigma_{Yc}(1-m)}{2m} \tag{3.18}$$

Η τελική γενικευμένη τρισδιάστατη μορφή του κριτηρίου είναι η ακόλουθη:

$$F\left(I_1, J_2, \overline{\theta}, \sigma_{Yc}, m\right) = \frac{\sigma_{Yc}(m-1)}{m} I_1 + 4J_2 \cos^2 \overline{\theta} - \frac{\sigma_{Yc}{}^2}{m} = 0 \tag{3.19}$$

και προκύπτει από την αντικατάσταση των συντελεστών c_1, c_2 καθώς και των κυρίων τάσεων με βάση τη εξίσωση (3.2). Αναπτύσσοντας παραπέρα την μορφή του κριτηρίου και λαμβάνοντας υπόψη την παρατήρηση του Mohr για την ενδιάμεση κύρια τάση στην περίπτωση της οριακής αστοχίας $\left(\overline{\theta} = \pm\pi/6\right)$, προκύπτει η σχέση:

$$F\left(I_1, J_2, \sigma_{Yc}, m\right) = \frac{\sigma_{Yc}(m-1)}{m} I_1 + 3J_2 - \frac{\sigma_{Yc}{}^2}{m} = 0 \tag{3.20}$$

Το παραβολικό κριτήριο Mohr-Coulomb συναντάται στη βιβλιογραφία και με την μορφή [34]:

$$F\left(I_1, J_2, \beta, \sigma_Y\right) = \sqrt{3}\beta\sigma_Y I_1 + 3J_2 - \sigma_Y^2 = 0 \tag{3.21}$$

όπου:

$$\sigma_Y = \frac{\sigma_{Yc}}{\sqrt{m}}$$

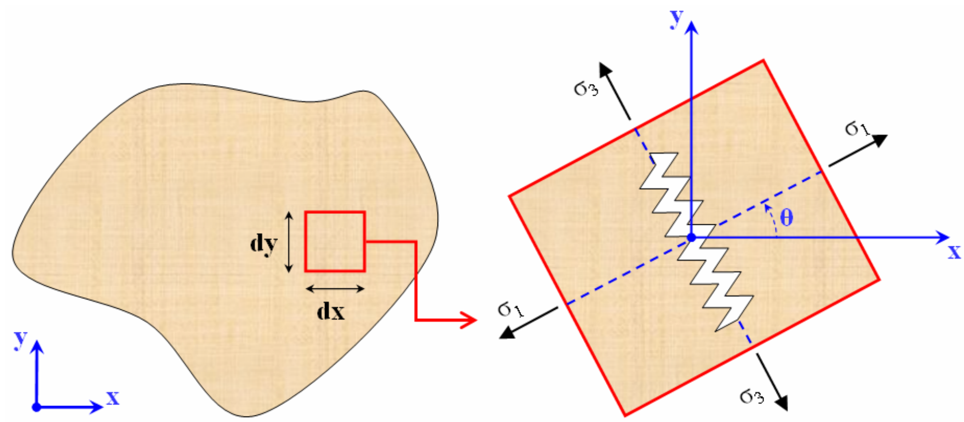
$$\beta = \frac{(m-1)}{\sqrt{3m}}.$$

3.4 Αστοχία σε εφελκυσμό – Κριτήριο μέγιστης κύριας τάσης

Όταν σε κάποιο σημείο ενός ψαθυρού υλικού εφαρμόζεται ένα ισχυρά εφελκυστικό πεδίο τάσεων (I_1>0), το υλικό αστοχεί συνήθως σε εφελκυσμό. Η αστοχία εκδηλώνεται με την εμφάνιση εφελκυστικών ρωγμών σε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση της μέγιστης κύριας τάσης, όταν η τελευταία ξεπεράσει την αντοχή του υλικού σε εφελκυσμό [16, 37]. Το πιο διαδεδομένο κριτήριο που περιγράφει τον συγκεκριμένο τύπο αστοχίας είναι αυτό του Rankine (1876), το οποίο εκφράζεται μαθηματικά σύμφωνα με τη σχέση:

$$F(\sigma_1, \sigma_{Yt}) = \sigma_1 - \sigma_{Yt} \geq 0 \qquad (3.22)$$

όπου σ_{Yt} η αντοχή του υλικού σε μοναξονικό εφελκυσμό.



Σχήμα 3.7: Ανάπτυξη ρωγμής σε διεύθυνση κάθετη στην διεύθυνση της μέγιστης κύριας τάσης σ_1

3.5 Σύνθετα και πολυπαραμετρικά κριτήρια αστοχίας

Οι διαφορετικοί μηχανισμοί αστοχίας σε εφελκυσμό και θλίψη ενός ψαθυρού υλικού, καθώς και η αδυναμία πολλές φορές να προσαρμοστούν τα κλασσικά κριτήρια αστοχίας (Mohr-Coulomb γραμμικό ή παραβολικό, Drucker-Prager, Rankine) σε πειραματικά δεδομένα οδήγησαν στη διατύπωση πολυπαραμετρικών ή και συζευγμένων κριτηρίων αστοχίας. Ως πολυπαραμετρικά χαρακτηρίζονται τα κριτήρια αστοχίας, τα οποία πέραν των παραμέτρων που υπολογίζονται απευθείας από τις αντοχές του υλικού σε εφελκυσμό και θλίψη, περιλαμβάνουν και παραμέτρους οι οποίες καθορίζουν τη μορφή της συνάρτησης αστοχίας [2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 18, 32]. Οι παράμετροι μορφής επιλέγονται κατάλληλα έτσι ώστε το κριτήριο να προσαρμόζεται ικανοποιητικά και στα πειραματικά δεδομένα της τριαξονικής θλίψης.

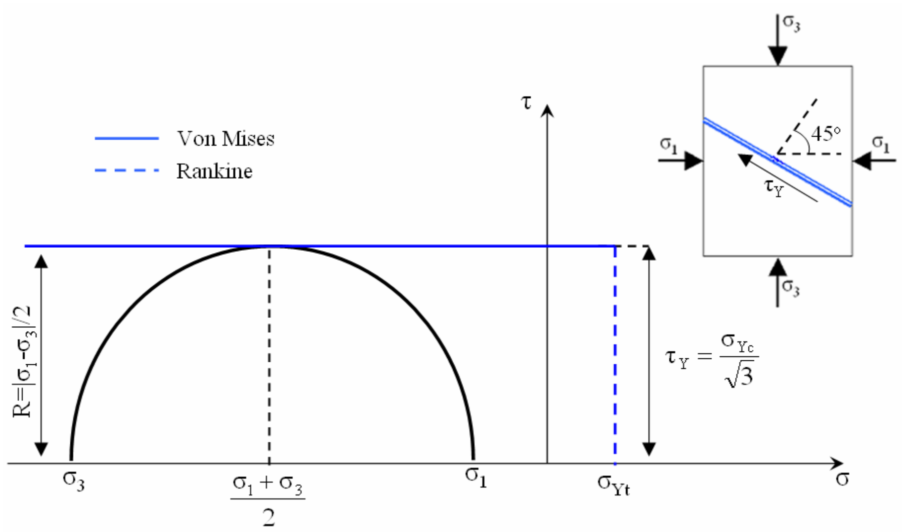
3.5.1 Κριτήριο αστοχίας Von Mises – Rankine

Τα συζευγμένα κριτήρια αστοχίας προκύπτουν από τον συνδυασμό ενός κριτήριου διατμητικής αστοχίας (Von-Mises, γραμμικό ή παραβολικό Mohr-Coulomb) και του κριτηρίου εφελκυστικής αστοχίας Rankine [29, 30, 32]. Το απλούστερο συζευγμένο κριτήριο αστοχίας που λαμβάνει υπόψη τις δύο κυριότερες ιδιομορφίες των ψαθυρών υλικών (βλ. παρ. 3.2) είναι αυτό των Von Mises-Rankine. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό η αστοχία σε διάτμηση περιγράφεται από το κριτήριο αστοχίας του Von Mises ενώ σε εφελκυσμό από αυτό του Rankine (Σχήμα 3.8). Η μαθηματική διατύπωση του κριτηρίου για την τρισδιάστατη ένταση είναι η εξής:

$$\begin{aligned} &\text{για } \sigma_1 \text{ ή } \sigma_2 \text{ ή } \sigma_3 \geq \sigma_{Yt} \quad && F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{Yt}) = (\sigma_1 - \sigma_{Yt})(\sigma_2 - \sigma_{Yt})(\sigma_3 - \sigma_{Yt}) = 0 \\ &\text{για } \sigma_1 \text{ ή } \sigma_2 \text{ ή } \sigma_3 < \sigma_{Yt} \quad && F(J_2, \sigma_{Yc}) = 3J_2 - \sigma_{Yc}^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

ενώ για συνθήκες επίπεδης έντασης γράφεται:

$$\begin{aligned} &\text{για } \sigma_1 \text{ ή } \sigma_3 \geq \sigma_{Yt} \quad && F(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_{Yt}) = (\sigma_1 - \sigma_{Yt})(\sigma_3 - \sigma_{Yt}) = 0 \\ &\text{για } \sigma_1 \text{ ή } \sigma_3 < \sigma_{Yt} \quad && F(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_{Yc}) = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_{Yc}^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

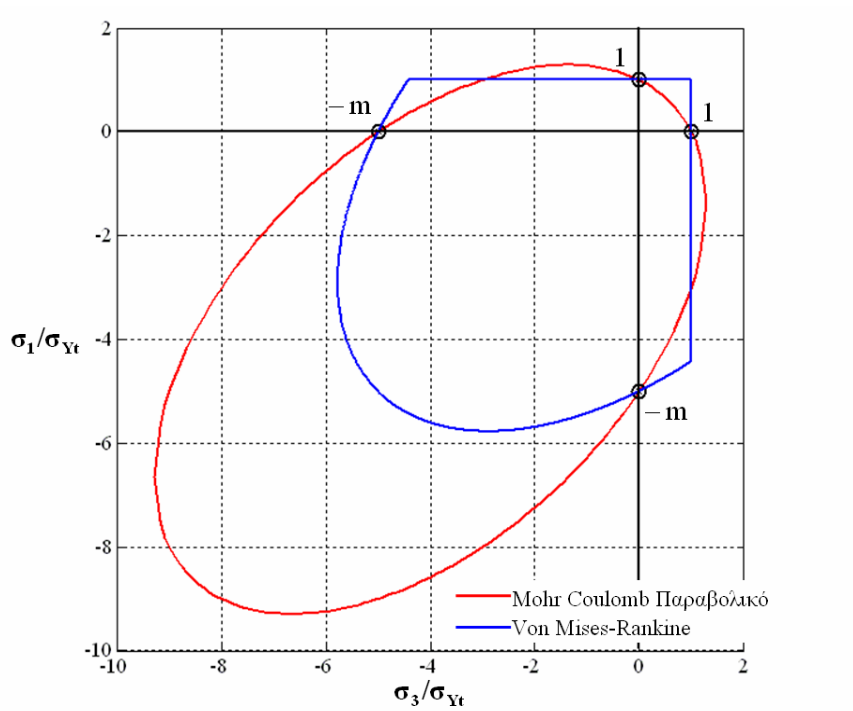


Σχήμα 3.8: Κριτήριο αστοχίας Von-Mises–Rankine

Μελετώντας το κριτήριο αστοχίας Von Mises-Rankine σε συνθήκες επίπεδης έντασης, παρατηρείται ότι η ασφαλής περιοχή των τάσεων που οριοθετείται από την καμπύλη αστοχίας, είναι μικρότερη από την αντίστοιχη του παραβολικού Mohr-Coulomb (Σχήμα 3.9). Αυτό σημαίνει ότι το συγκεκριμένο κριτήριο είναι πιο συντηρητικό και έχει ως αποτέλεσμα τον ακριβέστερο προσδιορισμό τόσο των περιοχών αστοχίας ενός υλικού, όσο και του τύπου αστοχίας που εκδηλώνεται (διατμητική ή εφελκυστική). Οι αδυναμίες τώρα, που εμφανίζει το κριτήριο Von Mises-Rankine είναι συνοπτικά οι ακόλουθες:

- Δεν μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά από μια ενιαία αναλυτική συνάρτηση αστοχίας, κάτι το οποίο αυξάνει τον όγκο των υπολογισμών στη περίπτωση εφαρμογής αριθμητικών μεθόδων προσομοίωσης.

- Σύμφωνα με το κριτήριο αστοχίας του Von Mises, η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης της μέγιστης κύριας τάσης και της κάθετου του επιπέδου αδυναμίας που εκδηλώνεται η διατμητική αστοχία, ισούται πάντα με π/4. Αυτό είναι κάτι το οποίο δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα όσον αφορά τα ψαθυρά υλικά και οφείλεται στο ότι το εν λόγω κριτήριο δεν λαμβάνει υπόψη στο υπολογισμό της κρίσιμης διατμητικής τάσης, την τιμή της ορθής τάσης η οποία είναι και απευθείας ανάλογη της αναλλοίωτου I_1.



Σχήμα 3.9: Δισδιάστατη συνδυασμένη γραφική απεικόνιση των κριτηρίων αστοχίας Von-Mises–Rankine και Παραβολικό Mohr-Coulomb.

3.5.2 Κριτήριο αστοχίας Buyukozturk

Οι αδυναμίες που χαρακτηρίζουν τα συζευγμένα κριτήρια αστοχίας, οδήγησαν κατά καιρούς μια σειρά ερευνητών να αναπτύξουν κριτήρια αστοχίας που θα περιγράφονται μαθηματικά από μια ενιαία αναλυτική συνάρτηση. Ένα τέτοιο κριτήριο προτάθηκε από τον **Oral Buyukozturk** το 1975 και αναπτύχθηκε με στόχο να περιγραφεί η μη γραμμική καταστατική συμπεριφορά – αστοχία των ψαθυρών υλικών που προσεγγίζουν την συμπεριφορά και τις αντοχές του σκυροδέματος [8]. Το κριτήριο αυτό αποτελεί μια τροποποιημένη μορφή του παραβολικού Mohr-Coulomb, έτσι ώστε αφενός μεν να εισαχθεί στο κριτήριο ένας συντελεστής ή παράμετρος μορφής, αφετέρου δε να ληφθεί υπόψη η ενισχυμένη παρουσία της ορθής τάσης στο μηχανισμό αστοχίας. Ουσιαστικά το συγκεκριμένο κριτήριο αποτελεί ένα κριτήριο διατμητικής αστοχίας το οποίο όμως με την εισαγωγή παραμέτρων μορφής είναι δυνατό να περιγράψει ικανοποιητικά και την περίπτωση της εφελκυστικής αστοχίας. Η μαθηματική διατύπωση του κριτηρίου είναι η ακόλουθη [9, 34]:

$$F(I_1, J_2, \beta, \sigma_Y) = \sqrt{3}\beta\sigma_Y I_1 + \alpha I_1^2 + 3J_2 - \sigma_Y^2 = 0 \qquad (3.25)$$

όπου:

$$\sigma_Y = \sigma_{Yc}\sqrt{\frac{(1+\alpha)}{m}}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{(1+\alpha)}(m-1)}{\sqrt{3m}}$$

α: παράμετρος μορφής, η τιμή της οποίας επιλέγεται κατάλληλα ώστε να επιτυγχάνεται η βέλτιστη προσαρμογή του κριτηρίου αστοχίας στα πειραματικά δεδομένα.

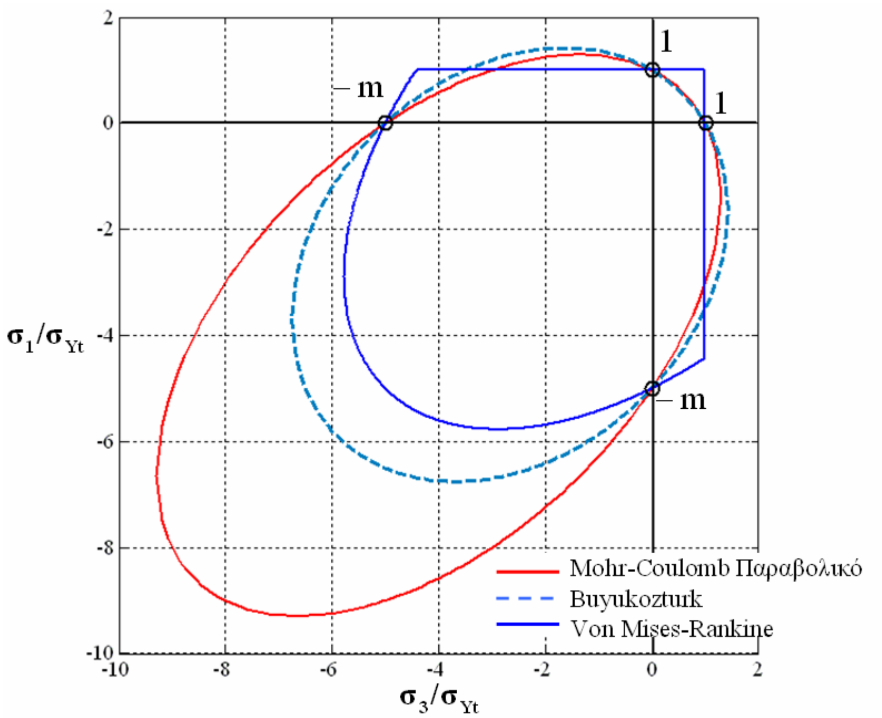
Με βάση τα αποτελέσματα που έχουν προκύψει από εργαστηριακές δοκιμές παρατηρείται ότι η αντοχή σε μοναξονικό εφελκυσμό του σκυροδέματος είναι περίπου δέκα φορές μικρότερη ($m \approx 10$) από την αντοχή του σε μοναξονική θλίψη, ενώ η βέλτιστη προσαρμογή της επιφάνειας αστοχίας στα πειραματικά δεδομένα επιτυγχάνεται για α=0.2 [8, 34]. Σύμφωνα με αυτή την παρατήρηση η σχέση (3.25) παίρνει τη μορφή:

$$F(I_1, J_2, \sigma_Y) = \sigma_{Yc} I_1 + 0.2 I_1^2 + 3J_2 - \frac{\sigma_{Yc}^2}{9} = 0 \qquad (3.26)$$

Σε συνθήκες επίπεδης τάσης και για α=0.2 το κριτήριο του Buyukozturk γράφεται:

$$F(\sigma_1, \sigma_3, \beta, \sigma_Y) = 1.2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) - 0.6\sigma_1\sigma_3 + \sqrt{3}\beta\sigma_Y(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_Y^2 = 0 \qquad (3.27)$$

Από την συνδυασμένη γραφική απεικόνιση των κριτηρίων Mohr-Coulomb παραβολικό, Von Mises–Rankine και Buyukozturk στο επίπεδο σ_3-σ_1, για συνθήκες επίπεδης έντασης, προκύπτει ότι το κριτήριο αστοχίας του Buyukozturk αποτελεί μια μέση λύση (ικανοποιητική όπως θα αποδειχθεί σε επόμενο κεφάλαιο) μεταξύ των άλλων δυο κριτηρίων, κυρίως όσον αφορά την ασφαλή περιοχή τάσεων που οριοθετεί (Σχήμα 3.10).



Σχήμα 3.10: Δισδιάστατη συνδυασμένη γραφική απεικόνιση των κριτηρίων αστοχίας Von-Mises–Rankine, Παραβολικό Mohr-Coulomb και Buyukozturk.

3.5.3 Γενικευμένο Τετραγωνικό Κριτήριο αστοχίας

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία και το σκεπτικό τόσο του Buyukozturk όσο και του παραβολικού κριτηρίου Mohr-Coulomb, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε ένα γενικευμένο τετραγωνικό κριτήριο το οποίο περιγράφεται πλήρως από τρεις παραμέτρους. Η μαθηματική διατύπωση του **Γενικευμένου Τετραγωνικού Κριτηρίου** συναρτήσει των κυρίων τάσεων, σε συνθήκες επίπεδης έντασης, είναι η ακόλουθη:

$$F(\sigma_1,\sigma_3,a,b,c) = a\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right) + b\sigma_1\sigma_3 + c(\sigma_1+\sigma_3) - \sigma_{Yc}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$F(\sigma_1,\sigma_3,a,b,c) = a\sigma_1^2 + (c+b\sigma_3)\sigma_1 + a\sigma_3^2 + c\sigma_3 - \sigma_{Yc}^2 = 0 \qquad (3.28)$$

όπου:

$$a = m$$

$$c = (m-1)\sigma_{Yc}$$

b: παράμετρος σχήματος, η οποία επιλέγεται κατάλληλα ώστε να επιτυγχάνεται η βέλτιστη προσαρμογή του κριτηρίου αστοχίας σε πειραματικά δεδομένα πολυαξονικής θλίψης.

Μελετώντας τη συνάρτηση (3.28) παρατηρείται ότι αυτή αποτελεί μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς σ_1 και έχει πραγματικές ρίζες όταν επαληθεύεται η ανίσωση:

$$\Delta_1 = (c + b\sigma_3)^2 - 4a^2\sigma_3^2 - 4ac\sigma_3 + 2a\sigma_{Yc}^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Delta_1 = (b + 2a)\sigma_3^2 + 2c\sigma_3 + \frac{\left(c^2 + 4a\sigma_{Yc}^2\right)}{(b - 2a)} \geq 0 \tag{3.29}$$

Επιπλέον για να περιγράφει μια κλειστή καμπύλη στο επίπεδο σ_3-σ_1 θα πρέπει $\Delta_1=0$. Σύμφωνα με αυτή την συνθήκη προκύπτει η ακόλουθη σχέση για το εύρος τιμών του σ_3:

$$\min\left(\frac{-2c \pm \sqrt{\Delta_3}}{2(b+2a)}\right) \leq \sigma_3 \leq \max\left(\frac{-2c \pm \sqrt{\Delta_3}}{2(b+2a)}\right) \tag{3.30}$$

όπου:

$$\Delta_3 = 4\left[c^2 - \frac{(b+2a)\left(c^2 + 4a\sigma_{Yc}^2\right)}{(b-2a)}\right].$$

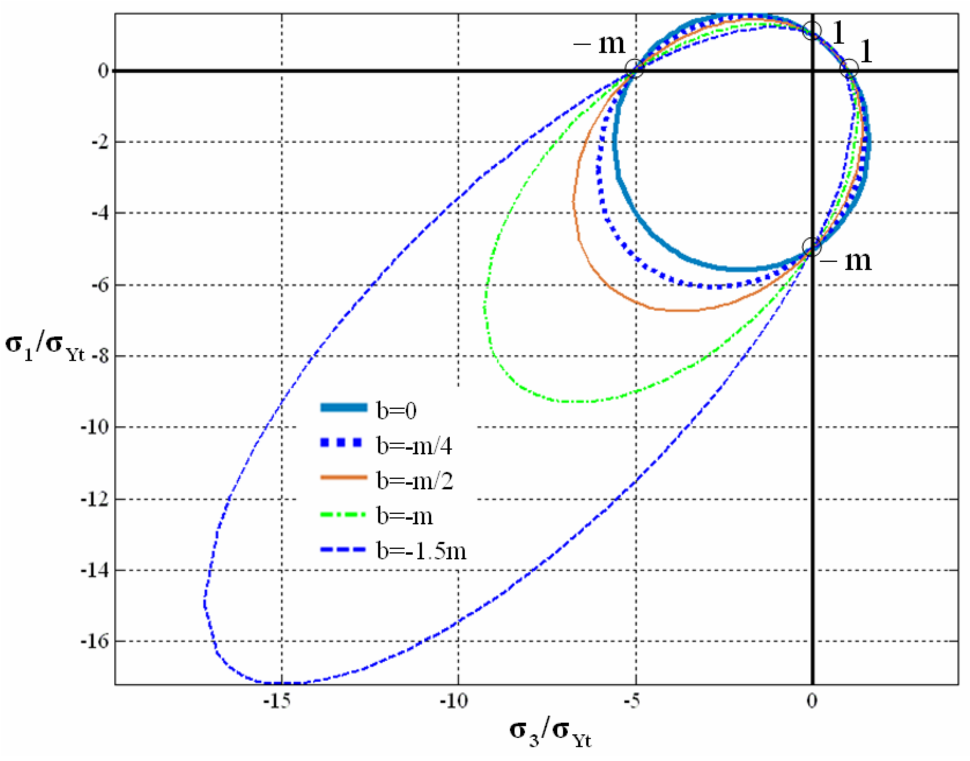
Το γενικευμένο τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας, περιγράφει μια οικογένεια από περιβάλλουσες αστοχίας, κάθε μια από τις οποίες ορίζει και μια διαφορετική περιοχή ασφαλών τάσεων, η οποία εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου b (Σχήμα 3.11). Επιπλέον για συγκεκριμένους συνδυασμούς τιμών του λόγου αντοχών m και της παραμέτρου μορφής b, από την εξίσωση 3.28 είναι δυνατό να προκύψουν οι περιβάλλουσες αστοχίας κριτηρίων, είτε χαρακτηριστικών ως προς τη μορφή, είτε γνωστών. Πιο συγκεκριμένα μπορούν να διακριθούν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- Για b=0 η συνάρτηση $F(\sigma_1,\sigma_3,a,b,c)=0$ περιγράφει έναν κύκλο σε επίπεδο σ_3-σ_1, με κέντρο $C\left(\frac{(1-m)\sigma_{Yc}}{2m},\frac{(1-m)\sigma_{Yc}}{2m}\right)$ και ακτίνα $r=\frac{\sigma_{Yc}}{m}\sqrt{\frac{1+m^2}{2}}$.

- Για b=-1 και a=1 η συνάρτηση $F(\sigma_1,\sigma_3,a,b,c)=0$ ταυτίζεται με το κριτήριο του Von Mises.

- Για b=-m η συνάρτηση $F(\sigma_1,\sigma_3,a,b,c)=0$ ταυτίζεται με το παραβολικό κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb.

- Για b=-m/2 η συνάρτηση $F(\sigma_1,\sigma_3,a,b,c)=0$ ταυτίζεται με το κριτήριο αστοχίας του Buyukozturk.



Σχήμα 3.11: Περιβάλλουσες αστοχίας που αντιστοιχούν στο Γενικευμένο Τετραγωνικό Κριτήριο, για διάφορες τιμές του συντελεστή μορφής b, σε συνθήκες επίπεδης έντασης.

Όσον αφορά την μορφή του γενικευμένου τετραγωνικού κριτηρίου στην τρισδιάστατη εντατική κατάσταση προτείνεται η ακόλουθη σχέση:

$$F(I_1, J_2, m, \sigma_{Yc}, b) = (m-1)\sigma_{Yc} I_1 + \frac{1}{3}(m+b) I_1^2 + (2m-b) J_2 - \sigma_{Yc}^2 = 0 \tag{3.31}$$

η οποία αφενός μεν σε συνθήκες επίπεδης έντασης δίνει την εξίσωση (3.28) αφετέρου δε ικανοποιεί τις χαρακτηριστικές περιπτώσεις του συντελεστή b που έχουν αναφερθεί παραπάνω. Η εξίσωση 3.31 μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$F(I_1, J_2, m, \sigma_{Yc}, b) = (I_1 - \tilde{\sigma}_0)^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} J_2 - \alpha^2 = 0 \tag{3.32}$$

όπου:

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{3(1-m)}{2(m+b)} \sigma_{Yc}$$

$$\alpha = \frac{3\sigma_{Yc}}{2(m+b)} \sqrt{m^2 - \frac{2}{3} m + 1 + \frac{4}{3} b}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{3(2m-b)}{m+b}$$

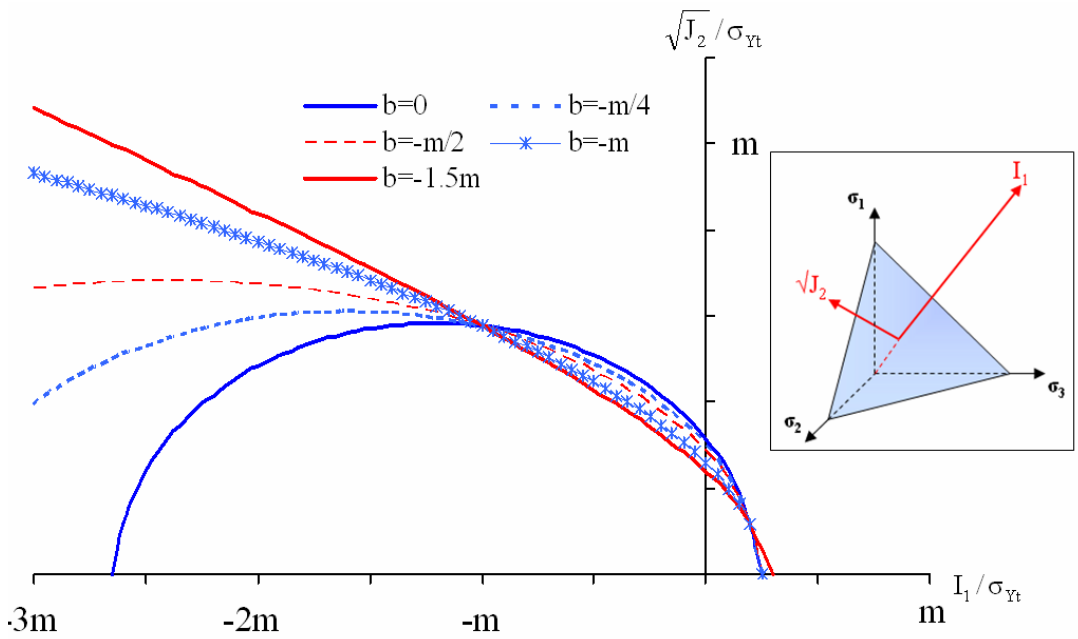
Η συνάρτηση 3.32 για $b \in (-m, 2m)$, παριστάνει σε επίπεδο $I_1 - \sqrt{J_2}$ μια έλλειψη με κέντρο $K(\tilde{\sigma}_0, 0)$, μεγάλο ημιάξονα α και μικρό β, ενώ για $b \notin (-m, 2m)$ παριστάνει μια αντίστοιχη υπερβολή (Σχήμα 3.12). Επίσης από την εξίσωση 3.31, προκύπτει ότι η παράμετρος μορφής b συνδέεται με την διατμητική αντοχή του υλικού σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$(2m-b)\tau_Y^2 - \sigma_{Yc}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$b = 2m - \frac{\sigma_{Yc}^2}{\tau_Y^2} \tag{3.33}$$

Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (3.31) δεν αποτελεί μονοσήμαντη προέκταση της εξίσωσης (3.28) στην τρισδιάστατη εντατική κατάσταση καθώς είναι δυνατό η τελευταία να αντιστοιχεί σε πιο πολύπλοκες συναρτήσεις των τασικών αναλλοίωτων, οι οποίες έχουν τη γενική μορφή:

$$F\left(I_1, J_2, \sqrt{J_2}, \bar{\theta}, m, \sigma_{Yc}, b\right) = 0 \tag{3.34}$$



Σχήμα 3.12: Γραφική απεικόνιση του Γενικευμένου Τετραγωνικού Κριτηρίου για διάφορες τιμές του συντελεστή μορφής b, σε συνθήκες τρισδιάστατης έντασης.

Κεφάλαιο 4ο

Μη γραμμική δυναμική αριθμητική ανάλυση κατασκευών

4.1 Εισαγωγή

Η πολυπλοκότητα που εμφανίζουν συχνά οι πραγματικές κατασκευές τόσο ως προς τη δομή τους όσο και ως προς τη φύση των δομικών υλικών που χρησιμοποιούνται, δημιούργησαν την ανάγκη ανάπτυξης αριθμητικών μεθόδων υπολογισμού και προσομοίωσης των κατασκευών, καθώς οι κλασικές αναλυτικές μέθοδοι αποδείχθηκαν σε αρκετές περιπτώσεις ανεπαρκείς. Επιπλέον η ταυτόχρονη εξέλιξη των υπολογιστικών μέσων την τελευταία εικοσαετία, οδήγησε αφενός μεν στην καθιέρωση των αριθμητικών μεθόδων ως ισχυρά υπολογιστικά εργαλεία αφετέρου δε στην διατύπωση μιας πληθώρας τέτοιων μεθόδων από διάφορους ερευνητές [1, 15, 16, 25, 29].

Οι κατασκευές από τοιχοποιία όπως έχει ήδη αναφερθεί αποτελούν δομικά συστήματα με μια ευρεία κλίμακα πολυπλοκότητας και για αυτό το λόγο είναι ένα πεδίο έρευνας στο οποίο οι αριθμητικές μέθοδοι προσομοίωσης βρίσκουν ευρύτατη εφαρμογή. Η πολυπλοκότητα των κατασκευών από τοιχοποιία οφείλεται τόσο στη μη γραμμική καταστατική συμπεριφορά του συγκεκριμένου υλικού όσο και στο ότι σε μια τέτοιου είδους κατασκευή συνήθως εκτός της τοιχοποιίας υπάρχουν και δομικά στοιχεία ενίσχυσης από υλικά με διαφορετική καταστατική συμπεριφορά, όπως σκυρόδεμα, ξύλο και μέταλλο (στοιχεία ενίσχυσης πάνω από τα ανοίγματα, κολώνες, τοιχία κτλ.) [24, 25, 38, 46]. Όταν λοιπόν ένα τέτοιο δομικό σύστημα καταπονείται από ένα σύνθετο δυναμικό σύστημα εξωτερικών δυνάμεων (π.χ. σεισμός), εμφανίζονται αφενός μεν φαινόμενα αλληλεπίδρασης μεταξύ των στοιχείων ενίσχυσης και της τοιχοποιίας, αφετέρου δε φαινόμενα πλαστικής συμπεριφοράς, ρωγμές και γενικώς βλάβες στη μικροδομή της τοιχοποιίας [29, 38]. Ανάλογα με την φύση του προβλήματος που εξετάζεται κάθε φορά αλλά και την επιθυμητή ακρίβεια τη λύσης, εφαρμόζονται λιγότερο ή περισσότερο σύνθετες αριθμητικές μέθοδοι. Μια ευρύτατα διαδεδομένη και εφαρμοζόμενη μέθοδος είναι αυτή των πεπερασμένων στοιχείων, η οποία με κατάλληλη μαθηματική μορφοποίηση είναι δυνατό να λάβει υπόψη της την πολυπλοκότητα ενός τέτοιου σύνθετου μηχανικά προβλήματος.

4.2 Βασικές αρχές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μια διαδικασία αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους [1, 15, 26, 36]. Η διαφορική εξίσωση που επιλύεται στα προβλήματα μηχανικής είναι η εξίσωση της κίνησης η οποία στην τρισδιάστατη εντατική κατάσταση έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\rho dV\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}+c\frac{\partial u_j}{\partial t}+\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i}=P_j \tag{4.1}$$

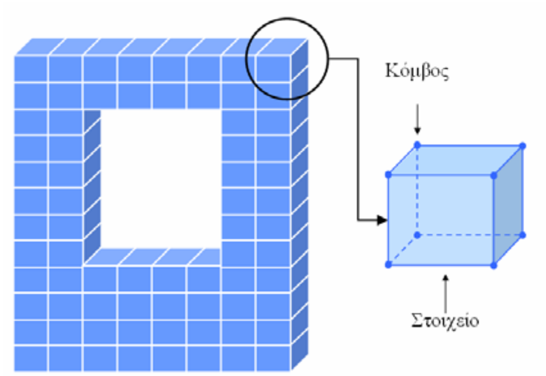
όπου:

ρ	η πυκνότητα του υλικού
dV	ο στοιχειώδης απειροστός όγκος του σώματος που μελετάται
u_j	η μετατόπιση κατά την διεύθυνση y_j, j=1:3
y_i	οι διευθύνσεις του τρισδιάστατου συστήματος αναφοράς (y_1//x, y_2//y, y_3//z)
c	ο συντελεστής απόσβεσης του υλικού
$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i}$	η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων κατά την διεύθυνση j
σ_{ij}	ο τανυστής των τάσεων
P_j	η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων κατά την διεύθυνση j

Το ζητούμενο σε ένα πρόβλημα μηχανικής, είναι ο προσδιορισμός της κατανομής των μετατοπίσεων στο εσωτερικό και την εξωτερική επιφάνεια ενός σώματος όταν σε αυτό εφαρμόζεται ένα συγκεκριμένο σύστημα δυνάμεων, στατικό ή δυναμικό. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων το δομικό σύστημα που εξετάζεται διαιρείτε σε έναν πεπερασμένο αριθμών τμημάτων, τα **στοιχεία**, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με τους **κόμβους** (σχήμα 3.1). Στη συνέχεια γίνεται η παραδοχή ότι η μετατόπιση προς μια συγκεκριμένη διεύθυνση σε κάθε σημείο του στοιχείου, υπολογίζεται από μια **συνάρτηση μορφής** η οποία είναι συνήθως κάποιο πολυώνυμο παρεμβολής και διατυπώνεται ως εξής:

$$u(x,y,z) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\sum_{w=0}^{m} a_{jkw} x^j y^k z^w \tag{4.2}$$

Οι συντελεστές a_{jkw} προσδιορίζονται από τις τιμές των μετατοπίσεων στους κόμβους του στοιχείου και τις συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου.



Σχήμα 3.1: Διακριτοποίηση σώματος, στοιχεία, κόμβοι

Με την χρήση των συναρτήσεων μορφής διατυπώνονται οι εξισώσεις της κίνησης για κάθε στοιχείο ξεχωριστά και στη συνέχεια υπερθέτονται κατάλληλα έτσι ώστε να διατυπωθεί το τελικό σύστημα εξισώσεων, το οποίο με την χρήση πινάκων γράφεται στη συμπαγή μορφή [14, 15, 26, 36]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \tag{4.3}$$

όπου:

M Το μητρώο μάζας του συστήματος

C Το μητρώο απόσβεσης του συστήματος

K Το μητρώο ακαμψίας του συστήματος

ü Το διάνυσμα των κομβικών επιταχύνσεων

u̇ Το διάνυσμα των κομβικών ταχυτήτων

u Το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων

P Το διάνυσμα των χρονικά μεταβαλλόμενων δυνάμεων που εφαρμόζονται σε κάθε κόμβο. Στην περίπτωση που το σύστημα διεγείρεται από κάποια εδαφική επιτάχυνση (σεισμικό φορτίο) το P ισούται με $M\ddot{u}_g$ όπου $\ddot{u}_g$ το διάνυσμα των εδαφικών επιταχύνσεων.

Τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας είναι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων n x n όπου n οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος. Για να επιλυθεί το σύστημα (4.3) εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις στηρίξεις και τις δυνάμεις που εφαρμόζονται στο σώμα. Τέλος σημειώνεται ότι οι δυνάμεις που ασκούνται σε μία κατασκευή εφαρμόζονται στους κόμβους των στοιχείων ανεξάρτητα εάν αποτελούν κατανεμημένα φορτία, δυνάμεις πεδίου (βαρυτικά φορτία) ή σημειακές φορτίσεις.

4.3 Το εξαεδρικό οκτακομβικό τρισδιάστατο στοιχείο

Ένα από τα συνηθέστερα χρησιμοποιούμενα στοιχεία στην τρισδιάστατη ανάλυση είναι το εξαεδρικό οκτακομβικό στοιχείο (σχήμα 3.2). Οι συναρτήσεις μορφής που δίδουν την κατανομή των μετατοπίσεων στο εσωτερικό ενός **ισοπαραμετρικού** τέτοιου στοιχείου είναι οι ακόλουθες [15, 36]:

$$\begin{aligned}
u_x(x,y,z) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xy + a_6 yz + a_7 zx + a_8 xyz \\
u_y(x,y,z) &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z + b_5 xy + b_6 yz + b_7 zx + b_8 xyz \\
u_z(x,y,z) &= c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z + c_5 xy + c_6 yz + c_7 zx + c_8 xyz
\end{aligned} \tag{4.4}$$

οι οποίες μπορούν να δοθούν σε συμπαγή μορφή με την χρήση πινάκων ως εξής:

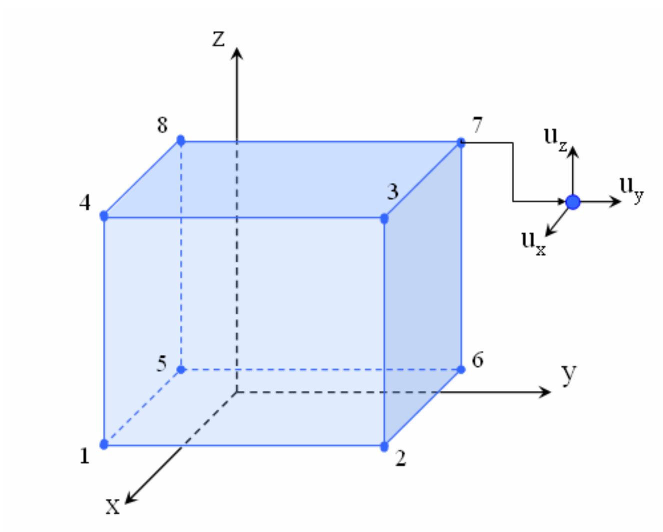
$$\underset{(3x1)}{\begin{Bmatrix} u_x(x,y,z) \\ u_y(x,y,z) \\ u_z(x,y,z) \end{Bmatrix}} = \underset{(3x24)}{\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{N} \end{bmatrix}} \underset{(24x1)}{\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix}} \tag{4.5}$$

όπου:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & xy & xz & zx & xyz \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_8 \end{Bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_8 \end{Bmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_8 \end{Bmatrix}$$



Σχήμα 3.2: Το εξαεδρικό οκτακομβικό στοιχείο

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου υπολογίζεται από τη σχέση [15, 26, 36]:

$$\mathbf{K}_e = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \tag{4.6}$$

όπου:

$$\mathbf{B} = \underset{(6\times3)}{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T} \underset{(3\times24)}{\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{N} \end{bmatrix}} \underset{(24\times24)}{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_5 \\ \mathbf{A}_6 \\ \mathbf{A}_7 \\ \mathbf{A}_8 \end{bmatrix}^{-1}}$$

$$\mathbf{A_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{N_i} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N_i} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{N_i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N_i} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i & x_i y_i & x_i z_i & z_i x_i & x_i y_i z_i \end{bmatrix}$$

$\mathbf{D}$	το μητρώο καταστατικής συμπεριφοράς
V	ο όγκος του στοιχείου
i=1:8	οι κόμβοι του στοιχείου

Το μητρώο καταστατικής συμπεριφοράς στην περίπτωση της τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης είναι ένας πίνακας 6x6 και συνδέει τις τάσεις με τις παραμορφώσεις συμφωνά με την σχέση:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.7}$$

όπου:

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{31} \end{bmatrix}^T$ το διάνυσμα των τάσεων

$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{31} \end{bmatrix}^T$ το διάνυσμα των ανηγμένων συνολικών παραμορφώσεων

Το μητρώο καταστατικής συμπεριφοράς ενός γραμμικά ελαστικού ισότροπου υλικού, υπολογίζεται συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας E και του λόγου Poisson ν του υλικού και έχει την ακόλουθη μορφή [37]:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Το μητρώο μάζας του στοιχείου υπολογίζεται με την βοήθεια των συναρτήσεων μορφής του και συναρτήσει της πυκνότητας του υλικού, σύμφωνα με τη σχέση [15, 26, 36]:

$$\mathbf{M_e} = \rho \iiint_{dV} \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV \tag{4.9}$$

όπου:

$$S = \underset{(3x24)}{\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{N} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{N} \end{bmatrix}} \underset{(24x24)}{\begin{bmatrix} \mathbf{A_1} \\ \mathbf{A_2} \\ \mathbf{A_3} \\ \mathbf{A_4} \\ \mathbf{A_5} \\ \mathbf{A_6} \\ \mathbf{A_7} \\ \mathbf{A_8} \end{bmatrix}^{-1}}$$

Το μητρώο απόσβεσης συνήθως υπολογίζεται ως γραμμικός συνδυασμός των μητρώων ακαμψίας και μάζας με την παραδοχή της **αναλογικής αποσβέσεως** ή **αποσβέσεως κατά Rayleigh**. Πιο συγκεκριμένα το μητρώο απόσβεσης υπολογίζεται από την μια σχέση της μορφής [4, 14, 15, 34]:

$$\mathbf{C_e} = \alpha_R \mathbf{M_e} + \beta_R \mathbf{K_e} \tag{4.10}$$

όπου α_R ο συντελεστής αναλογικής απόσβεσης του μητρώου μάζας και β_R ο συντελεστής αναλογικής απόσβεσης του μητρώου ακαμψίας. Οι συντελεστές α_R και β_R συνδέονται με τον λόγο απόσβεσης του υλικού σύμφωνα με τη σχέση:

$$\zeta_j = \frac{\alpha_R}{2\omega_j} + \frac{\beta_R \omega_j}{2} \tag{4.11}$$

όπου ω_j η j γωνιακή ιδιοσυχνότητα του σώματος ή της κατασκευής και ζ_j ο λόγος απόσβεσης που αντιστοιχεί στην j ιδιομορφή. Οι ιδιοσυχνότητες ενός μηχανικού συστήματος με n βαθμούς ελευθερίας υπολογίζονται από την επίλυση του προβλήματος των ιδιομορφών (Eigenvalues Problem-Modal Analysis) ως οι ρίζες της εξίσωσης [15, 26]:

$$\det\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\det\left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{I}\right) = 0 \tag{4.12}$$

Οι γωνιακές ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν ταξινομούνται με σειρά αύξουσα και η πρώτη ιδιοσυχνότητα η οποία είναι και η μικρότερη καλείται **θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα**. Εφόσον τώρα ληφθεί ενιαίος λόγος απόσβεσης για όλες τις ιδιομορφές, οι συντελεστές απόσβεσης υπολογίζονται με την χρήση της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας ω_0 και μιας οποιασδήποτε άλλης (συνήθως της δεύτερης ω_1), από τη σχέση:

$$\begin{Bmatrix} \zeta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/\omega_0 & \omega_0 \\ 1/\omega_1 & \omega_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_R \\ \beta_R \end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

4.4 Η μέθοδος εν χρόνο ολοκλήρωσης Newmark

Μια από τις συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες μεθόδους χρονικής ολοκλήρωσης της εξίσωσης (4.3) είναι η μέθοδος Newmark [14, 15]. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, τα διανύσματα των κομβικών μετατοπίσεων και ταχυτήτων τη χρονική στιγμή $t_{i+1} = (i+1)dt$, θα δίδονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i dt + (0.5 - \beta)\ddot{\mathbf{u}}_i dt^2 + \beta\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} dt^2 \tag{4.14}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_i dt + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} dt \tag{4.15}$$

όπου dt το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης και γ, β συντελεστές οι οποίοι επιλέγονται ανάλογα με την απαιτούμενη αριθμητική ευστάθεια και ακρίβεια της μεθόδου. Με αντικατάσταση των εξισώσεων (4.14) και (4.15) στην εξίσωση (4.3) προκύπτει η γενικευμένη αριθμητική εξίσωση της κίνησης:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \mathbf{W_1}^{-1}\left(\ddot{\mathbf{u}}_{gi+1} - \mathbf{W_2}\ddot{\mathbf{u}}_i - \mathbf{W_3}\dot{\mathbf{u}}_i - \mathbf{W_4}\mathbf{u}_i\right) \tag{4.16}$$

όπου:

$$\mathbf{W_1} = \mathbf{I} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\gamma dt + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\beta dt^2$$

$$\mathbf{W_2} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}(1-\gamma)dt + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}(0.5-\beta)dt^2$$

$$\mathbf{W}_3 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathrm{dt}$$

$$\mathbf{W}_4 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$$

Ανάλογα με τις τιμές του συντελεστή β οι μέθοδοι Newmark διακρίνονται σε άμεσες (β > 0) και έμμεσες (β = 0). Όσον αφορά την αριθμητική ευστάθεια των μεθόδων Newmark μπορεί να αποδειχτεί ότι [14, 15]

- για $\gamma < \frac{1}{2}$ η μέθοδος είναι ασταθής σε κάθε περίπτωση.
- για $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$ η μέθοδος είναι ευσταθής σε κάθε περίπτωση.
- για $\gamma \geq \frac{1}{2}$ και $\beta < \frac{1}{2}$ η μέθοδος είναι ευσταθής υπό συνθήκες όταν $\mathrm{dt} \leq \frac{\omega_{crit}}{\omega_0}$

όπου:

$$\omega_{crit} = \frac{\zeta(\gamma - \tfrac{1}{2}) + \sqrt{\gamma/2 - \beta + \zeta^2(\gamma - \tfrac{1}{2})^2}}{(\gamma/2 - \beta)}$$

ω_0 η θεμελιώδης γωνιακή ιδιοσυχνότητα της κατασκευής

ζ ο λόγος απόσβεσης του υλικού

4.5 Μη γραμμική ανάλυση

Με τον όρο μη γραμμική καταστατική συμπεριφορά ή απλά μη γραμμική συμπεριφορά ενός υλικού ή μιας κατασκευής γενικότερα, χαρακτηρίζεται η κατάσταση κατά την οποία τάσεις και παραμορφώσεις ή δυνάμεις και μετατοπίσεις δεν είναι μεγέθη ανάλογα [16]. Το φαινόμενο αυτό εκδηλώνεται συνήθως όταν το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε κάποιο σημείο ενός σώματος, ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή. Η μη γραμμικότητα είναι ένα φαινόμενο το οποίο εμφανίζεται σχεδόν σε κάθε πραγματικό υλικό ή κατασκευή, ωστόσο τα αίτια εκδήλωσης του διαφέρουν κατά περίπτωση. Τα βασικότερα αίτια που οδηγούν ένα υλικό να εμφανίσει τη συγκεκριμένη συμπεριφορά είναι τα ακόλουθα:

- Ένα ψαθυρό υλικό αστοχεί σε εφελκυσμό σε κάποιο σημείο με την δημιουργία εφελκυστικών ρωγμών (Θεωρία Rankine ή μέγιστης κύριας τάσης). Η ύπαρξη ρωγμών επιδρά στην δυσκαμψία της κατασκευής κάνοντας την πιο εύκαμπτη και μεταβάλλοντας την καταστατική της συμπεριφορά. Η συμπεριφορά του υλικού μεταβάλλεται ακόμα περισσότερο όταν οι ρωγμές κάτω από την επίδραση των δυνάμεων που εφαρμόζονται στο σώμα αρχίζουν να επεκτείνονται [5, 6, 11, 18, 33, 47].

- Ένα όλκιμο υλικό αρχίζει να διαρρέει. Η διαρροή των όλκιμων υλικών προκαλεί την ανακατανομή της μάζας του σώματος εντός των γεωμετρικών του ορίων, κάτι το οποίο επιδρά ευθέως στην καταστατική συμπεριφορά του υλικού από το σημείο αυτό και μετά. Συνέπεια της παραπάνω διεργασίας είναι η εμφάνιση παραμενουσών-πλαστικών παραμορφώσεων στον υλικό.

- Ένα ψαθυρό υλικό αστοχεί σε διάτμηση. Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενο κεφαλαίο η συγκεκριμένη μορφή αστοχίας εκδηλώνεται σε κάποιο σημείο του υλικού όταν η εντατική του κατάσταση είναι ισχυρά θλιπτική. Μετά την εκδήλωση της αστοχίας είναι δυνατό να εμφανιστεί ολίσθηση κατά την επιφάνεια αστοχίας η οποία διέπεται κυρίως από φαινόμενα τριβής και όχι από αυτή καθαυτή την καταστατική συμπεριφορά του υλικού.

- Δύο ή περισσότερα σώματα του ιδίου ή διαφορετικού υλικού έρχονται σε επαφή μεταξύ τους και σχηματίζουν μια διεπιφάνεια. Η μη γραμμικότητα στην περίπτωση αυτή διέπεται από τις ίδιες αρχές με αυτή της διατμητικής αστοχίας των υλικών [25, 34, 44].

4.5.1 Ελαστοπλαστική ανάλυση

Η ελαστοπλαστική ανάλυση είναι μια μέθοδος η οποία αναπτύχθηκε αρχικά για την προσομοίωση της μη γραμμικής συμπεριφοράς των όλκιμων υλικών. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη μέθοδο είναι δυνατό να διακριθούν δύο καταστάσεις κατά την φόρτιση ενός υλικού, η ελαστική κατά την οποία εμφανίζονται μόνο ελαστικές παραμορφώσεις και η ελαστοπλαστική κατά την οποία εμφανίζονται τόσο ελαστικές όσο και πλαστικές (μόνιμες) παραμορφώσεις [16]. Η μετάβαση ενός υλικού στην ελαστοπλαστική συμπεριφορά περιγράφεται από ένα κριτήριο διαρροής το οποίο έχει την γενική μορφή [16]:

$$F = \sigma_{eq} - \sigma_Y = 0 \tag{4.17}$$

όπου σ_{eq} η **ισοδύναμη τάση** και σ_Y η **αρχική τάση διαρροής**. Η ισοδύναμη τάση είναι ένα μέγεθος έντασης το οποίο επινοήθηκε και χρησιμοποιείται για την προσέγγιση της πολυδιάστατης εντατικής κατάστασης από μια ισοδύναμη μονοδιάστατη εντατική κατάσταση (σχήμα 4.3). Η ισοδύναμη τάση υπολογίζεται συναρτήσει των συνιστωσών των τάσεων και παραμέτρων που έχουν να κάνουν με τις μηχανικές ιδιότητες και αντοχές του υλικού. Για τα όλκιμα υλικά, τα οποία έχουν παραπλήσιες αντοχές σε εφελκυσμό και θλίψη, η ισοδύναμη τάση υπολογίζεται με βάση το ισοζύγιο της ελαστικής ενέργειας μεταξύ μοναξονικού εφελκυσμού και πολυδιάστατης έντασης, ως εξής:

$$U_e = U_V + U_s \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_{eq}^2}{2E} = \frac{1-2v}{6E} I_1^2 + \frac{1}{2G} J_2 \Rightarrow$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1-2v}{3} I_1^2 + 2(v+1) J_2} \tag{4.18}$$

όπου [16, 37]:

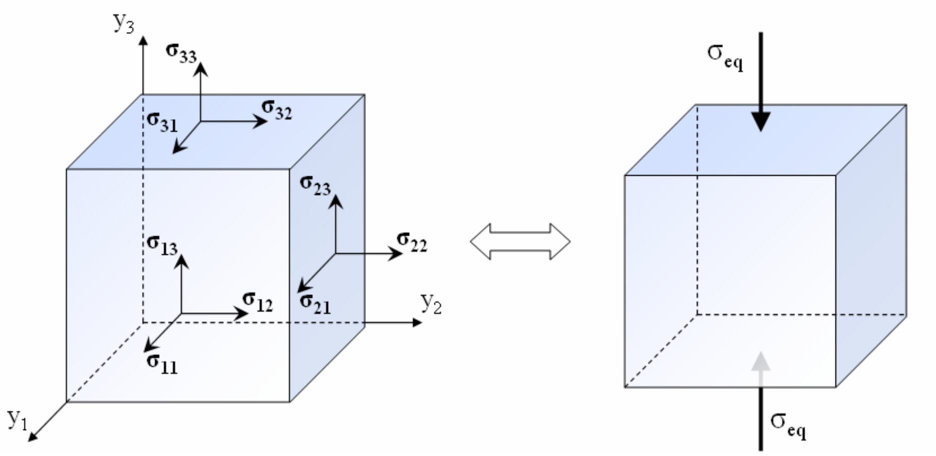
U_e η ελαστική ενέργεια που αποδίδεται στο υλικό ή το έργο που παράγει η ισοδύναμη αξονική δύναμη όταν το υλικό υποβάλετε σε μοναξονικό εφελκυσμό

U_v η ενέργεια διόγκωσης, δηλαδή το τμήμα της ενέργειας που αποδίδεται στο υλικό από την επίδραση ενός πολυδιάστατου εντατικού πεδίου και έχει ως αποτέλεσμα της μεταβολή του όγκου του

U_s η ενέργεια στρέβλωσης, δηλαδή το τμήμα της ενέργειας που αποδίδεται στο υλικό από την επίδραση ενός πολυδιάστατου εντατικού πεδίου και έχει ως αποτέλεσμα της μεταβολή του σχήματος του

$G = \dfrac{E}{2(v+1)}$ το μέτρο διάτμησης του υλικού.

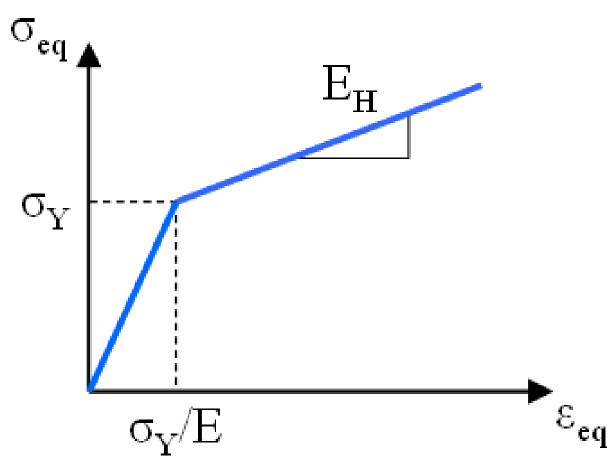
Από τις εξισώσεις (4.17) και (4.18) γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι στην περίπτωση των όλκιμων υλικών η αρχική τάση διαρροής θα ισούται με το όριο διαρροής σε εφελκυσμό ή θλίψη του υλικού.



Σχήμα 4.3: Ισοδύναμες εντατικές καταστάσεις

Στο σχήμα 4.4 απεικονίζεται η καμπύλη ισοδύναμων τάσεων-παραμορφώσεων ενός υλικού με γραμμικό ελαστοπλαστικό κλάδο. Όσον αφορά την κλίση της καμπύλης στην ελαστοπλαστική περιοχή διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις [16]:

- $E_H = 0$ τέλεια ελαστοπλαστικό υλικό
- $E_H > 0$ ελαστοπλαστικό υλικό με κράτυνση (Hardening)
- $E_H < 0$ ελαστοπλαστικό υλικό με χαλάρωση (Softening)



Σχήμα 4.4: Εξιδανικευμένη καμπύλη ισοδύναμων τάσεων-παραμορφώσεων υλικού με γραμμικό ελαστοπλαστικό κλάδο.

Για την πραγματοποίηση μιας ελαστοπλαστικής ανάλυσης πρέπει να έχουν οριστεί [3, 16]:

I. Οι ελαστικές σταθερές του υλικού, δηλαδή το μητρώο καταστατικής συμπεριφοράς του γραμμικά ελαστικού υλικού (περιοχή γραμμικής συμπεριφοράς).

II. Μια συνάρτηση ή κριτήριο διαρροής το οποίο να περιγράφει τις συνθήκες έναρξης των πλαστικών παραμορφώσεων.

III. Η καταστατική συμπεριφορά του υλικού μετά την έναρξη της διαρροής (τέλεια ελαστοπλαστικό, εμφάνιση κράτυνσης ή χαλάρωσης).

Η διατύπωση της καταστατικής εξίσωσης του υλικού στην ελαστοπλαστική περιοχή γίνεται αφενός μεν με την χρήση της συνάρτησης ή κριτηρίου διαρροής του, αφετέρου δε με την εφαρμογή των ακόλουθων περιορισμών [8, 9, 16]:

I Κατά την έναρξη της διαρροής καθώς και καθ' όλη την διάρκεια της, επαληθεύεται το κριτήριο διαρροής. Εάν ληφθεί υπόψη ότι το κριτήριο διαρροής περιγράφει μια επιφάνεια σε άξονες σ_1-σ_2-σ_3 τότε σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση οι τάσεις θα πρέπει ορίζουν σημεία της επιφάνειας αυτής. Άμεση συνέπεια όλων αυτών είναι η εξίσωση, $\mathrm{dF} = 0$.

II Η ικανοποίηση της συνθήκης I προϋποθέτει ότι η τάση διαρροής αποτελεί συνάρτηση της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, $\sigma_Y = g(\varepsilon_{peq})$.

III Το διάνυσμα μεταβολής των πλαστικών παραμορφώσεων είναι συνάρτηση της μεταβολής της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης και υπολογίζεται με βάση το νόμο πλαστικής ροής των Prandl-Reuss, $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}} = \mathrm{d}\varepsilon_{peq} \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ [8, 16].

IV Οι συνολικές παραμορφώσεις στην ελαστοπλαστική περιοχή προκύπτουν από το άθροισμα ελαστικών και πλαστικών παραμορφώσεων, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p$.

Από την συνθήκη Ι προκύπτει η εξίσωση [8]:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_Y} d\sigma_Y = 0 \overset{(4.17)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}} d\boldsymbol{\sigma} + \left(\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_Y} - 1 \right) d\sigma_Y = 0 \tag{4.19}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την συνθήκη ΙΙ, η εξίσωση (4.19) γράφεται στην ισοδύναμη μορφή [8]:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}} d\boldsymbol{\sigma} + \left(\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_Y} - 1 \right) \frac{\partial g(\varepsilon_{peq})}{\partial \varepsilon_{peq}} d\varepsilon_{peq} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}} d\boldsymbol{\sigma} = \left(1 - \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_Y} \right) E_P d\varepsilon_{peq} \Rightarrow$$

$$d\varepsilon_{peq} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}} d\boldsymbol{\sigma}}{\left(1 - \dfrac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_Y} \right) E_p} \tag{4.20}$$

Τέλος το διάνυσμα των πλαστικών παραμορφώσεων υπολογίζεται με βάση την συνθήκη ΙΙΙ και την εξίσωση (4.20) από την σχέση:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}} d\boldsymbol{\sigma} \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\left(1 - \dfrac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_Y} \right) E_p} \tag{4.21}$$

Οι συνολικές παραμορφώσεις μετά την διαρροή του υλικού υπολογίζονται με βάση την συνθήκη IV και την εξίσωση 4.21 από την σχέση:

$$\mathbf{d\varepsilon} = \mathbf{d\varepsilon_e} + \mathbf{d\varepsilon_p} = \mathbf{D_{ep}^{-1}d\sigma} \tag{4.22}$$

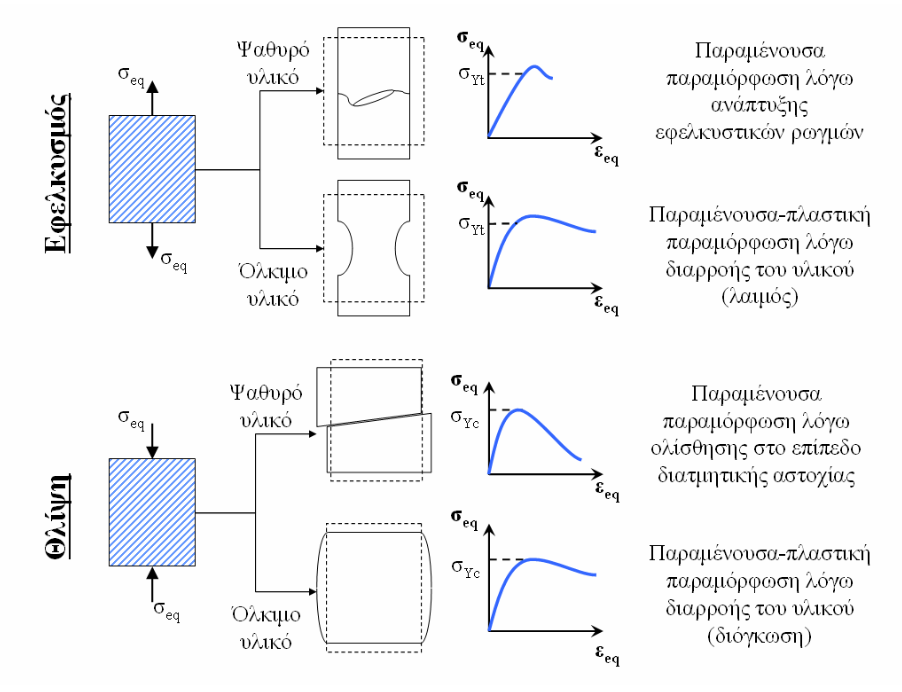
όπου $\mathbf{D_{ep}}$ το ελαστοπλαστικό μητρώο καταστατικής συμπεριφοράς το οποίο υπολογίζεται από την σχέση [8, 16]:

$$\mathbf{D_{ep}} = \mathbf{D}\left(\mathrm{I} - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}} \mathbf{D}}{\left(1 - \dfrac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_{Y}}\right) E_p + \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}} \mathbf{D} \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right) \tag{4.23}$$

Η ελαστοπλαστική ανάλυση αν και αναπτύχθηκε για την μη γραμμική συμπεριφορά των όλκιμων υλικών, με την επιλογή κατάλληλων συναρτήσεων διαρροής (πίνακας 4.1 και κεφάλαιο 3) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην προσομοίωση της μη γραμμικής συμπεριφοράς των ψαθυρών υλικών [2, 3, 7, 8, 10, 19, 24, 25, 29, 30, 32, 43]. Τα κριτήρια διαρροής στην περίπτωση των ψαθυρών υλικών πρακτικά αποτελούν κριτήρια αστοχίας καθώς οι πλαστικές παραμορφώσεις που είναι δυνατό να εμφανίσουν τα συγκεκριμένα υλικά είναι απειροστές έως μηδενικές. Η μη γραμμική τους συμπεριφορά, όπως έχει ήδη αναφερθεί, οφείλεται κυρίως σε αίτια που έχουν να κάνουν με την ολίσθηση κατά μήκος επιφανειών διατμητικής αστοχίας ή την ανακατανομή της δυσκαμψίας του υλικού λόγο εφελκυστικών ρωγμών (σχήμα 4.5). Με βάση τα παραπάνω οι υπολογιζόμενες πλαστικές παραμορφώσεις ενός ψαθυρού υλικού και οι αντίστοιχες μετατοπίσεις του σώματος, δεν πρέπει να εξετάζονται ως πραγματικά μεγέθη αλλά ως ενδεικτικά του μηχανισμού αστοχίας των υλικών και ως μεγέθη της έκτασης των βλαβών που έχει υποστεί μια κατασκευή. Δεδομένου τώρα ότι στην ανάλυση δομικών συστημάτων από ψαθυρά υλικά (σκυρόδεμα, τοιχοποιία, κεραμικά κτλ.) δεν έχει σημασία τόσο η συμπεριφορά του υλικού μετά την αστοχία ή διαρροή (ισοδύναμη έννοια κατά την ελαστοπλαστική ανάλυση) αλλά αυτός καθαυτός ο προσδιορισμός του μηχανισμού και των περιοχών αστοχίας, η ελαστοπλαστική ανάλυση κρίνεται ως ένα αξιόπιστο υπολογιστικό εργαλείο με ικανοποιητικά αποτελέσματα [19, 24, 25, 29, 32, 40, 42, 43].

Πίνακας 4.1: Συναρτήσεις διαρροής για ψαθυρά υλικά και αντίστοιχες ισοδύναμες τάσεις ($\sigma_Y=\sigma_{Yc}$)

Συναρτήσεις διαρροής	$\boldsymbol{\sigma_{eq}}$	$\partial\sigma_{eq}/\partial\sigma_Y$
Von Mises	$\sqrt{3J_2}$	0
Drucker-Prager	$\frac{m-1}{2}I_1+\frac{m+1}{2}\sqrt{3J_2}$	0
Mohr-Coulomb Παραβολικό	$\sqrt{(m-1)\sigma_{Yc}I_1+3mJ_2}$	$\frac{(m-1)I_1}{2\sigma_{eq}}$
Buyukozturk	$\sqrt{(m-1)\sigma_{Yc}I_1+\frac{\alpha m}{\alpha+1}I_1^2+\frac{3m}{\alpha+1}J_2}$	$\frac{(m-1)I_1}{2\sigma_{eq}}$
Γενικευμένο Τετραγωνικό Κριτήριο	$\sqrt{(m-1)\sigma_{Yc}I_1+\frac{1}{3}(m+b)I_1^2+(2m-b)J_2}$	$\frac{(m-1)I_1}{2\sigma_{eq}}$



Σχήμα 4.5: Μορφές και αίτια μη γραμμικότητας ψαθυρών και όλκιμων υλικών

4.5.2 Προβλήματα Επαφής

Μια άλλη μορφή μη γραμμικότητας είναι η σχετική μετατόπιση που εμφανίζεται κατά μήκος των διεπιφανειών μεταξύ δύο σωμάτων ή στο εσωτερικό ενός σώματος στην περίπτωση ύπαρξης ρωγμών. Τα προβλήματα αυτά καλούνται προβλήματα επαφής. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων προβλημάτων αποτελούν οι διεπιφάνειες μεταξύ των τοιχοσωμάτων μίας τοιχοποιίας και του κονιάματος καθώς και η διεπιφάνεια μεταξύ τοιχοποιίας και δομικών στοιχείων ενίσχυσης από σκυρόδεμα [13, 21, 25, 42, 44].

Η ύπαρξη διεπιφανειών διαφορετικών σωμάτων ή ρωγμών στο εσωτερικό ενός σώματος συνοδεύεται από την εμφάνιση δυνάμεων–τάσεων τριβής. Η περιγραφή της εντατικής κατάστασης του συστήματος στην περιοχή της διεπιφάνειας μπορεί να γίνει με τον νόμο τριβής του Coulomb. Ο νόμος αυτός ορίζει ότι η δύναμη-τάση τριβής που εμφανίζεται σε μια διεπιφάνεια είναι ανάλογη της ορθής δύναμης–τάσης που ασκείται κάθετα στη διεπιφάνεια, με συντελεστή αναλογίας το συντελεστή τριβής [25, 34, 44]. Εάν η διεπιφάνεια περιγράφεται από μια καμπύλη τότε η τάση τριβής σε κάθε σημείο της διεπιφάνειας έχει διεύθυνση παράλληλη με την εφαπτομένη της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο (σχήμα 4.6). Κατά την ανάλυση ενός τέτοιου προβλήματος μπορούν να διακριθούν δύο καταστάσεις, μια κατά την οποία δε υπάρχει σχετική μετατόπιση μεταξύ των δύο σωμάτων (στατική τριβή–stick friction) και η αντίθετη της (τριβή ολίσθησης-slip friction) [25, 34, 44]. Όταν το σύστημα των δύο σωμάτων βρίσκεται στην κατάσταση της στατικής τριβής ο νόμος του Coulomb γράφεται:

$$\left|S_T\right| = -\mu S_N \tag{4.24}$$

όπου:

S_T η τάση τριβής ή εφαπτομενική τάση (σχήμα 3.4)

S_N η ορθή τάση (σχήμα 3.4)

μ ο συντελεστής τριβής

Η ολίσθηση μεταξύ των δύο σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή εμφανίζεται όταν η τάση τριβής ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή S_{T0}. Η εφαπτομενική τάση μετά την έναρξη της ολίσθησης εξαρτάται από την σχετική ταχύτητα των δύο σωμάτων και ο νόμος του Coulomb παίρνει την μορφή (σχήμα 4.7):

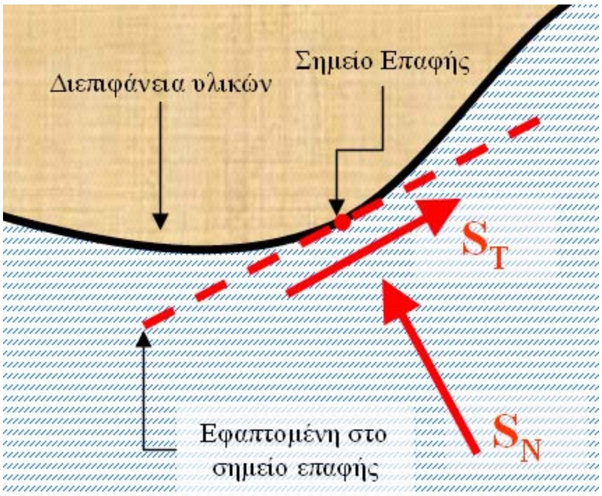
$$S_T = -\mu S_N \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\left|v_r\right|}{v_{r0}}\right) t \tag{4.25}$$

όπου:

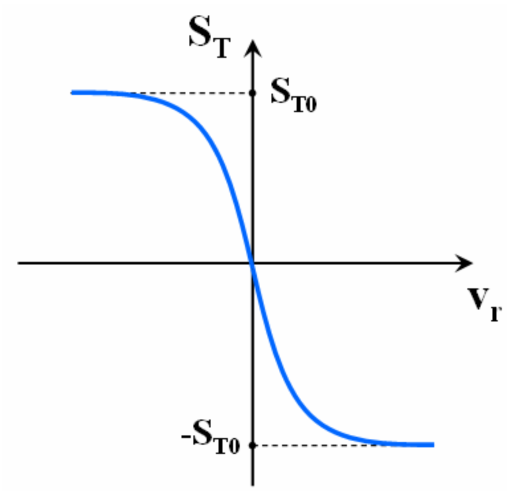
v_r το διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας ολίσθησης (παράλληλο στην εφαπτομένη της διεπιφάνειας)

v_{r0} η κρίσιμη τιμή της σχετικής ταχύτητας, πέραν την οποίας ξεκινάει η ολίσθηση

$t = \dfrac{v_r}{|v_r|}$ το μοναδιαίο διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας ολίσθησης



`**Σχήμα 4.6:** Σύστημα δυνάμεων σε σημείο της διεπιφάνειας διαφορετικών υλικών ή σωμάτων



Σχήμα 4.7: Καμπύλη τάσης τριβής – σχετικής ταχύτητας

Ένα άλλο φαινόμενο το οποίο είναι δυνατό να εμφανιστεί σε τέτοια προβλήματα είναι η αποκόλληση του ενός σώματος από το άλλο. Αυτό συμβαίνει όταν στο σημείο της επαφής που εξετάζεται, η ορθή τάση είναι εφελκυστική, δηλαδή όταν

$$S_N \geq 0 \tag{4.26}$$

Με βάση αυτή την παρατήρηση είναι δυνατό να οριστούν τα προβλήματα επαφής τύπου κόλλας [34]. Για τα προβλήματα αυτά ισχύει ότι κατά μήκος της διεπιφάνειας ο συντελεστής τριβής είναι πρακτικά άπειρος και τα δύο σώματα μπορούν να διαχωριστούν μεταξύ τους όταν η εφελκυστική ορθή τάση ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή.

Κεφάλαιο 5ο

Αριθμητικές εφαρμογές

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εφαρμογές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στην προσομοίωση και την επίλυση προβλημάτων τοιχοποιίας. Πιο συγκεκριμένα τα προβλήματα που μελετώνται είναι τα ακόλουθα:

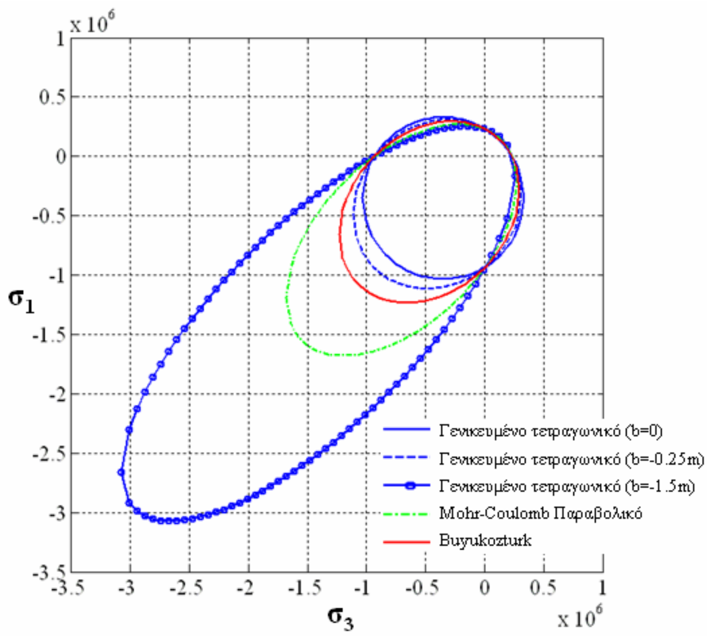
- Παραμετρική διερεύνηση και αξιολόγηση του τρόπου προσομοίωσης της μη γραμμικής καταστατικής συμπεριφοράς μιας τοιχοποιίας.

- Παραμετρική διερεύνηση και αξιολόγηση των μεθόδων ενίσχυσης τοιχοποιιών με την χρήση δομικών στοιχείων από σκυρόδεμα.

Το σύνολο της αριθμητικής προσομοίωσης των παραπάνω προβλημάτων που μελετήθηκαν, έγινε με την χρήση του λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων **MARC-MENTAT**. Επιπλέον στα πλαίσια της εφαρμογής της ελαστοπλαστικής ανάλυσης, ενσωματωθήκαν στο συγκεκριμένο λογισμικό εξειδικευμένες συναρτήσεις διαρροής, με την χρήση ειδικά διαμορφωμένων υπορουτινών.

5.2 Διερεύνηση του τρόπου προσομοίωσης της μη γραμμικής συμπεριφοράς τοιχοποιίας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ένας τρόπος για να προσεγγιστεί η μη γραμμική καταστατική συμπεριφορά της τοιχοποιίας, είναι η ελαστοπλαστική ανάλυση. Η ακρίβεια της συγκεκριμένης μεθοδολογίας, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις σύνθετων και ψαθυρών υλικών όπως η τοιχοποιία, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την επιλογή του κατάλληλου κριτηρίου διαρροής. Τόσο από την θεωρητική διερεύνηση των κριτηρίων όσο και από μελέτες αριθμητικής προσομοίωσης που έχουν γίνει (βλ. Παράρτημα Α), προκύπτει ότι κάθε κριτήριο διαρροής ανάλογα με τις παραδοχές που λαμβάνονται υπόψη κατά την διατύπωση του, αφενός μεν περιγράφει μια περιβάλλουσα αστοχίας η οποία οριοθετεί μια συγκεκριμένη περιοχή ασφαλών τάσεων (Σχήμα 5.1), αφετέρου δε προβλέπει και μια συγκεκριμένη καταστατική συμπεριφορά του υλικού μετά την εκδήλωση της διαρροής [43]. Ο στόχος της μελέτης που έγινε και παρουσιάζεται στη συνέχεια, είναι η αξιολόγηση της ικανότητας ενός κριτηρίου διαρροής να εντοπίζει τις περιοχές αστοχίας στο εσωτερικό μιας τοιχοποιίας, διαχωρίζοντας ταυτόχρονα τους μηχανισμούς και τα αίτια αστοχίας [19, 43]. Τα κριτήρια διαρροής που εξετάζονται είναι το γραμμικό (Drucker-Prager) και παραβολικό Mohr-Coulomb, το κριτήριο διαρροής του Buyukozturk καθώς και το προτεινόμενο στα πλαίσια της παρούσας εργασίας Γενικευμένο Τετραγωνικό κριτήριο. Επιπλέον εξετάζεται για κάθε κριτήριο διαρροής που μελετάται, η προβλεπόμενη μη γραμμική συμπεριφορά της τοιχοποιίας.

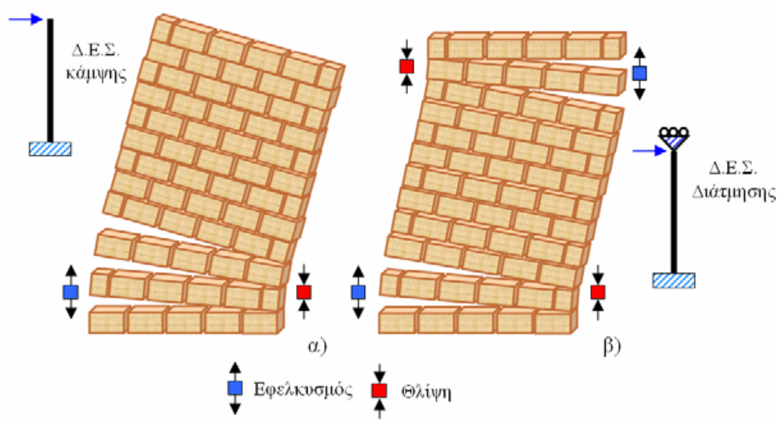


Σχήμα 5.1: Θεωρητικές περιβάλλουσες αστοχίας τοιχοποιίας με σ_{Yc}=935[KPa] και m=4.05.

Για την πραγματοποίηση της μελέτης ορίζονται ένα δοκίμιο-τοιχίο και ένας τοίχος από μηχανικά ομογενοποιημένη τοιχοποιία (Πίνακας 5.1), της οποίας η καταστατική συμπεριφορά είναι τέλεια ελαστοπλαστική. Τα δύο αυτά δομικά συστήματα εξωθούνται στην αστοχία καταπονούμενα σε εντός επιπέδου κάμψη και διάτμηση. Οι συγκεκριμένοι τύποι φόρτισης επιλέχθηκαν επειδή σε συνδυασμό και με τα ιδιαίτερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κάθε σώματος (π.χ. ύπαρξη ή μη ανοιγμάτων), προκαλούν ταυτόχρονα τόσο εφελκυστικά όσο και θλιπτικά φορτία (Σχήμα 5.2). Επιπλέον, οι συγκεκριμένοι τύποι φόρτισης είναι οι πλέον καταστροφικοί λόγω της χαμηλής αντοχής σε εφελκυσμό που εμφανίζει μια τοιχοποιία και ταυτόχρονα αποτελούν τους συνήθεις τύπους φόρτισης που προκαλούν οι οριζόντιες συνιστώσες ενός σεισμικού φορτίου [3, 5, 6].

Πίνακας 5.1: Μηχανικές ιδιότητες τοιχοποιίας.

E[Pa]	v	ρ[kg/m³]	S_0 ή τ_Y[Pa]	φ^o	C_0 ή σ_{Yc}[Pa]	T_0 ή σ_{Yt}[Pa]
8.82e+9	0.15	1700	0.198e+6	44.1	0.935e+6	0.231e+6



Σχήμα 5.2: Τοιχίο σε εντός επιπέδου α) κάμψη και β) διάτμηση. Εντατική κατάσταση τοιχίου (Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος) και μορφές αστοχίας στα επίπεδα των αρμών διάστρωσης.

5.2.1 Εντός επιπέδου κάμψη και διάτμηση δοκιμίου τοιχοποιίας

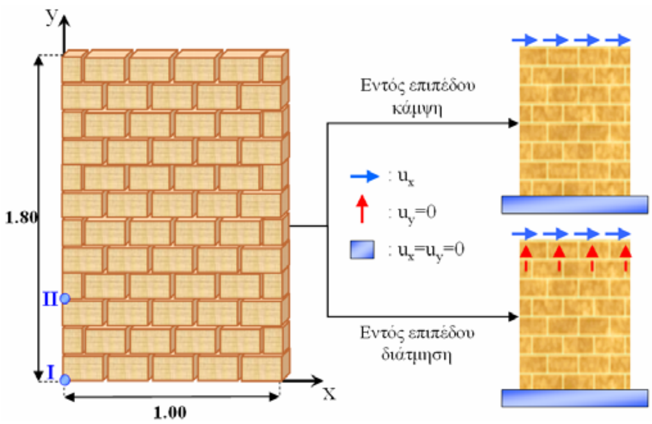
Το πρώτο βήμα για την αξιολόγηση ενός κριτηρίου διαρροής με την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων, είναι ο ορισμός ενός προβλήματος μηχανικής για το οποίο αφενός μεν υπάρχει αναλυτική λύση απλή και αξιόπιστη, αφετέρου δε φαινόμενα συγκέντρωσης τάσεων ή εμφάνισης πολύπλοκων εντατικών πεδίων απουσιάζουν. Αυτό επιτρέπει η μελέτη του προβλήματος να επικεντρωθεί καθαρά στη καταστατική συμπεριφορά και τους τρόπους αστοχίας του υλικού, υπό την επίδραση συγκεκριμένων τύπων φόρτισης. Για το λόγο αυτό, επιλέχθηκε να λυθεί αρχικά ένα παραλληλεπίπεδο δοκίμιο-τοιχίο σε εντός επιπέδου κάμψη και διάτμηση (Σχήμα 5.3), καθώς το συγκεκριμένο πρόβλημα πληρεί τις προϋποθέσεις απλότητας που τέθηκαν παραπάνω.

Η αριθμητική επίλυση του δοκιμίου έγινε με την θεώρηση επίπεδης τάσης ($\sigma_{33}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$). Το πλέγμα των στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε, αποτελείται από 720 τετραπλευρικά τετρακομβικά στοιχεία επίπεδης έντασης, με 777 κόμβους και συνολικά 1554 βαθμούς ελευθερίας. Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν στο δοκίμιο είναι οι ακόλουθες (Σχήμα 5.3):

- Στην κορυφή του δοκιμίου εφαρμόζεται σταδιακά μια οριζόντια μετατόπιση u_x=0.25mm, με ρυθμό φόρτισης $du_x/dt = 0.025\ mm/sec$. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως δυναμικό και επιλύεται σε N=100 βήματα (dt=0.1 sec), με την εφαρμογή της μεθόδου χρονικής ολοκλήρωσης Newmark. Το μέγεθος της μετατόπισης επιλέγεται έτσι ώστε, η καμπτική ροπή στη βάση ή/και στην κορυφή του δοκιμίου να δώσει μια τάση μεγαλύτερη από την αντοχή του υλικού σε εφελκυσμό και μικρότερη από την αντοχή του σε θλίψη.

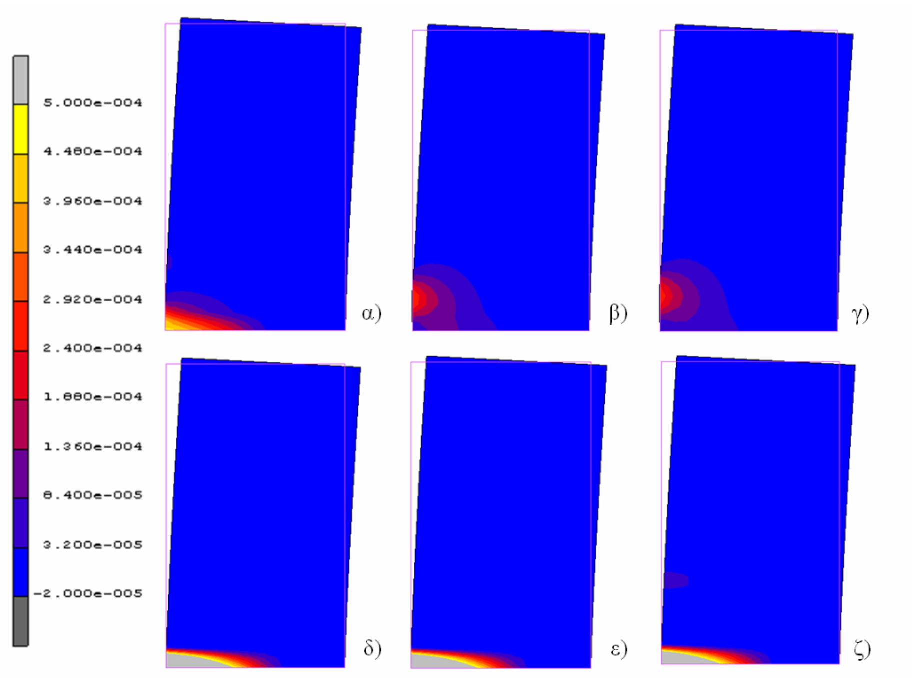
- Στη βάση του τοίχου εφαρμόζεται πάκτωση (u_x=u_y=0).

- Στην περίπτωση της εντός επιπέδου διάτμησης, εφαρμόζεται εκτός των παραπάνω συνθηκών και κύλιση κατά την οριζόντια διεύθυνση (άξονας-x) στην κορυφή του δοκιμίου.

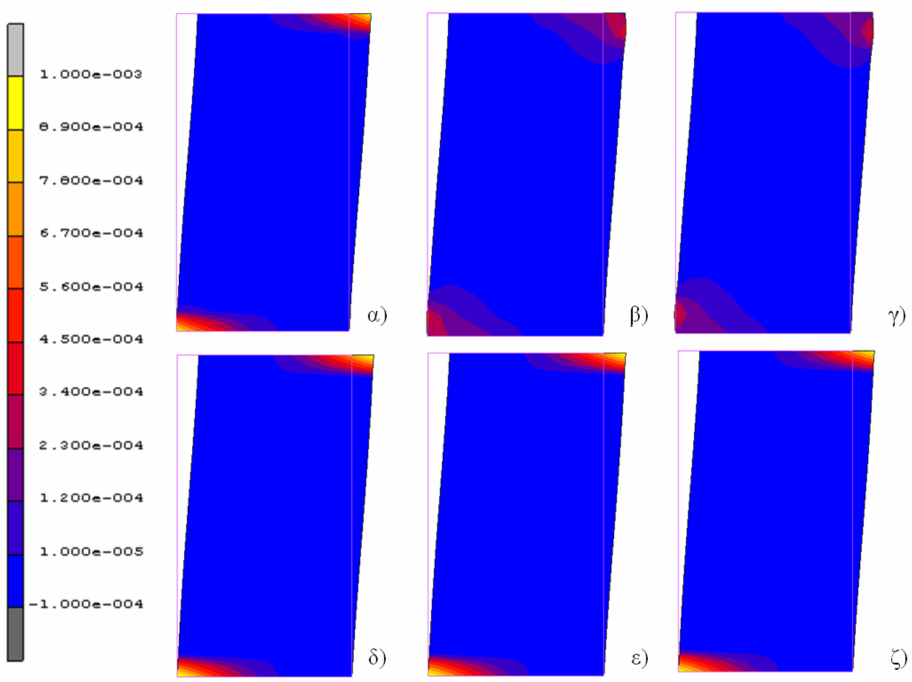


Σχήμα 5.3: Γεωμετρία (όλες οι διαστάσεις σε m), κόμβοι μελέτης και συνοριακές συνθήκες δοκιμίου τοιχοποιίας για τις περιπτώσεις της εντός επιπέδου κάμψης και διάτμησης.

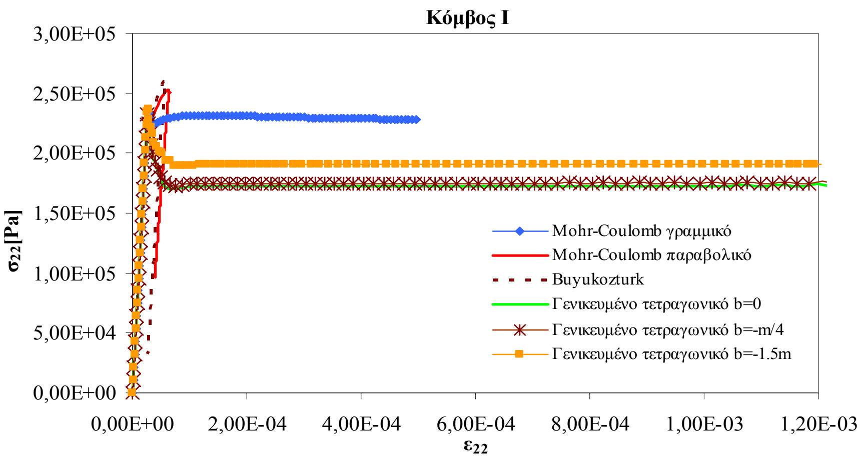
Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης που έγινε, λαμβάνονται χρωματικοί χάρτες και μηκοτομές που περιγράφουν την κατανομή της κατακόρυφης πλαστικής παραμόρφωσης ε_{p22} και της οριζόντιας μετατόπισης u_x, στο τέλος της επίλυσης, καθώς και διαγράμματα της τάσης σ_{22} και της αντίστοιχης συνολικής παραμόρφωσης σε συγκεκριμένους κόμβους μελέτης.



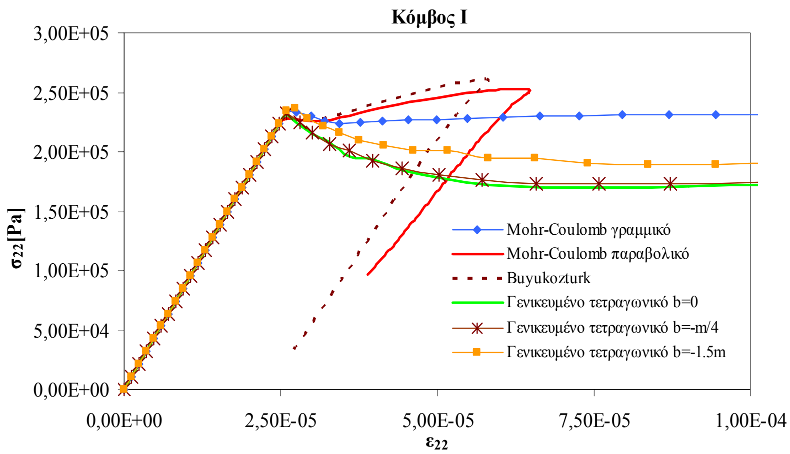
Σχήμα 5.4: Κατακόρυφες πλαστικές παραμορφώσεις ε_{p22}, στην εντός επιπέδου κάμψη σύμφωνα με τα κριτήρια διαρροής α) Mohr-Coulomb γραμμικό, β) Mohr-Coulomb Παραβολικό, γ) Buyukozturk, δ) Γενικευμένο τετραγωνικό με b=0, ε) b=-m/4 και ζ) b=-1.5m.



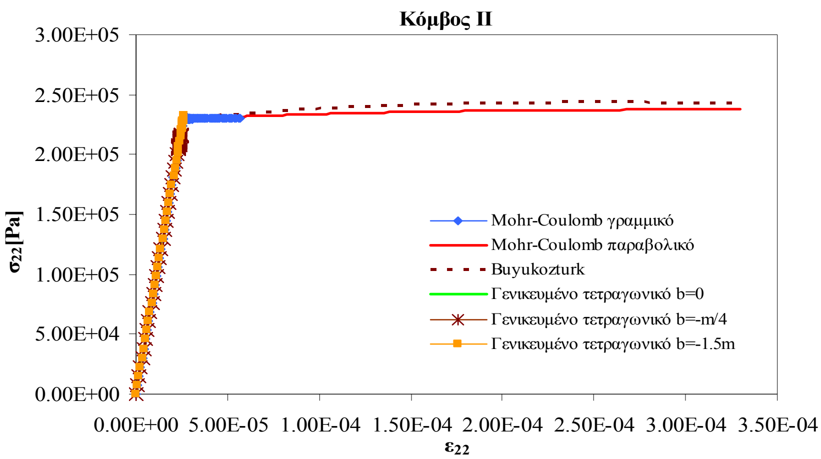
Σχήμα 5.5: Κατακόρυφες πλαστικές παραμορφώσεις ε_{p22}, στην εντός επιπέδου διάτμηση σύμφωνα με τα κριτήρια διαρροής α) Mohr-Coulomb γραμμικό, β) Mohr-Coulomb Παραβολικό, γ) Buyukozturk, δ) Γενικευμένο τετραγωνικό με b=0, ε) b=-m/4 και ζ) b=-1.5m.



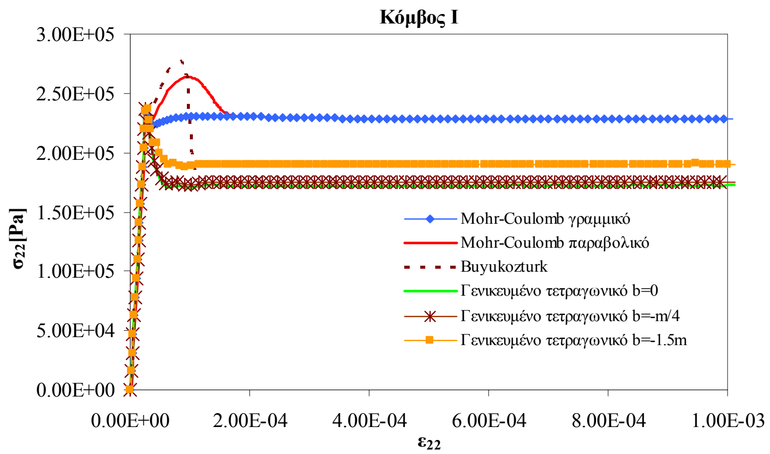
Σχήμα 5.6: Καμπύλη κατακόρυφης συνολικής παραμόρφωσης – τάσης, ε_{22}-σ_{22}, στον κόμβο μελέτης I για την περίπτωση της εντός επιπέδου κάμψης (πλήρες διάγραμμα).



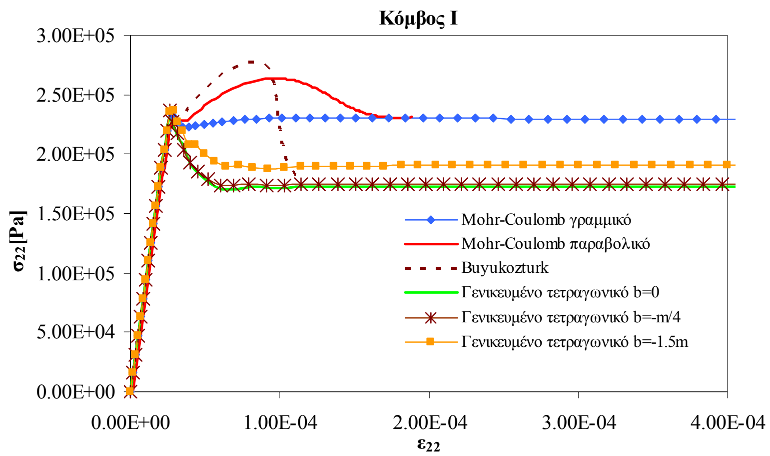
Σχήμα 5.7: Καμπύλη κατακόρυφης συνολικής παραμόρφωσης – τάσης, ε_{22}-σ_{22}, στον κόμβο μελέτης I για την περίπτωση της εντός επιπέδου κάμψης (εστίαση στην περιοχή παραμορφώσεων [0, 1e-4]).



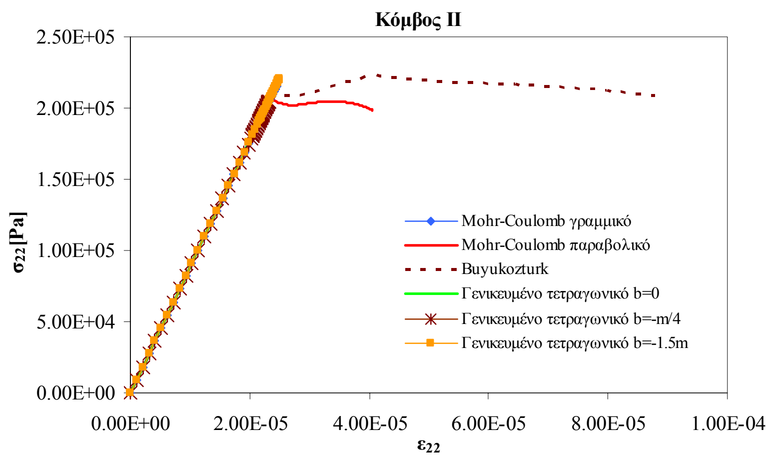
Σχήμα 5.8: Καμπύλη κατακόρυφης συνολικής παραμόρφωσης – τάσης, ε_{22}-σ_{22}, στον κόμβο μελέτης II για την περίπτωση της εντός επιπέδου κάμψης.



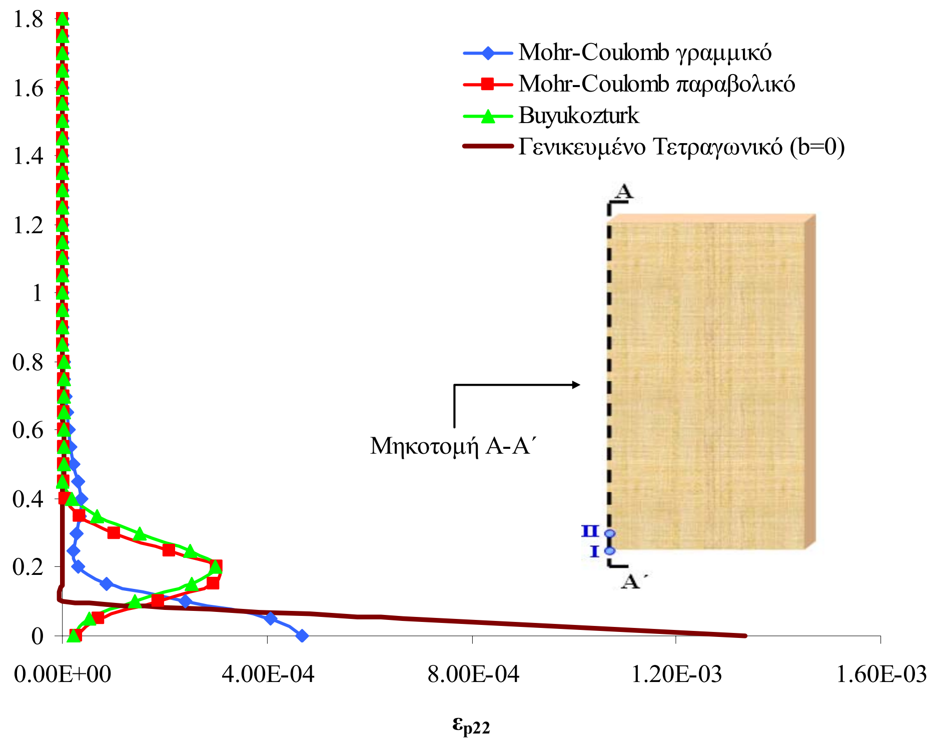
Σχήμα 5.9: Καμπύλη κατακόρυφης συνολικής παραμόρφωσης – τάσης, ε_{22}-σ_{22}, στον κόμβο μελέτης Ι για την περίπτωση της εντός επιπέδου διάτμησης (πλήρες διάγραμμα).



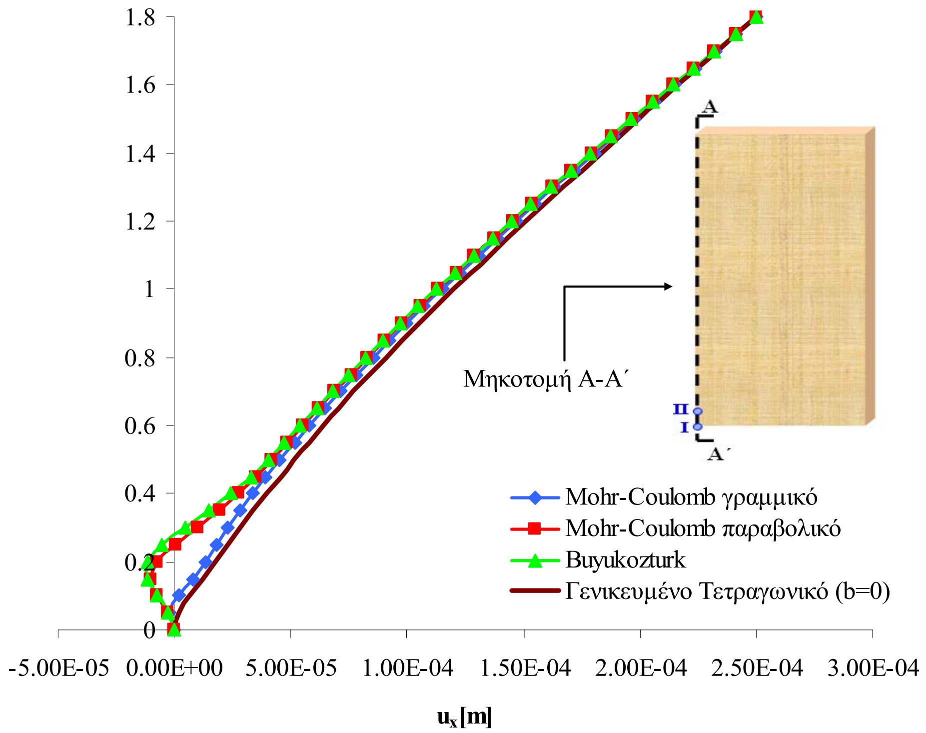
Σχήμα 5.10: Καμπύλη κατακόρυφης συνολικής παραμόρφωσης – τάσης, ε_{22}-σ_{22}, στον κόμβο μελέτης Ι για την περίπτωση της εντός επιπέδου διάτμησης (εστίαση στην περιοχή παραμορφώσεων [0, 4e-4]).



Σχήμα 5.11: Καμπύλη κατακόρυφης συνολικής παραμόρφωσης – τάσης, ε_{22}-σ_{22}, στον κόμβο μελέτης ΙΙ για την περίπτωση της εντός επιπέδου διάτμησης.



Σχήμα 5.12: Καθ' ύψος κατανομή της κατακόρυφης πλαστικής παραμόρφωσης ε_{p22}, στο τελευταίο βήμα επίλυσης της εντός επιπέδου κάμψης, για διαφορετικά κριτήρια διαρροής.



Σχήμα 5.13: Καθ' ύψος κατανομή της οριζόντιας μετατόπισης u_x, στο τελευταίο βήμα επίλυσης της εντός επιπέδου κάμψης, για διαφορετικά κριτήρια διαρροής.

Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση που έγινε, μπορούν να γίνουν και για τους δύο τύπους φόρτισης που εξετάστηκαν, οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Τόσο από την κατανομή, όσο και από το πρόσημο των κατακόρυφων πλαστικών παραμορφώσεων ε_{p22} (Σχήματα 5.4 και 5.5), γίνεται αντιληπτό ότι όλα τα κριτήρια διαρροής που εφαρμόστηκαν, λαμβάνουν υπόψη τις διαφορετικές αντοχές της τοιχοποιίας σε εφελκυσμό και θλίψη, εντοπίζοντας την αστοχία στις αντίστοιχές περιοχές. Σύμφωνα με την σύμβαση προσήμου που έχει οριστεί, θετικές τιμές των πλαστικών παραμορφώσεων ε_{p22}, δηλώνουν εφελκυσμό, ενώ αρνητικές θλίψη.

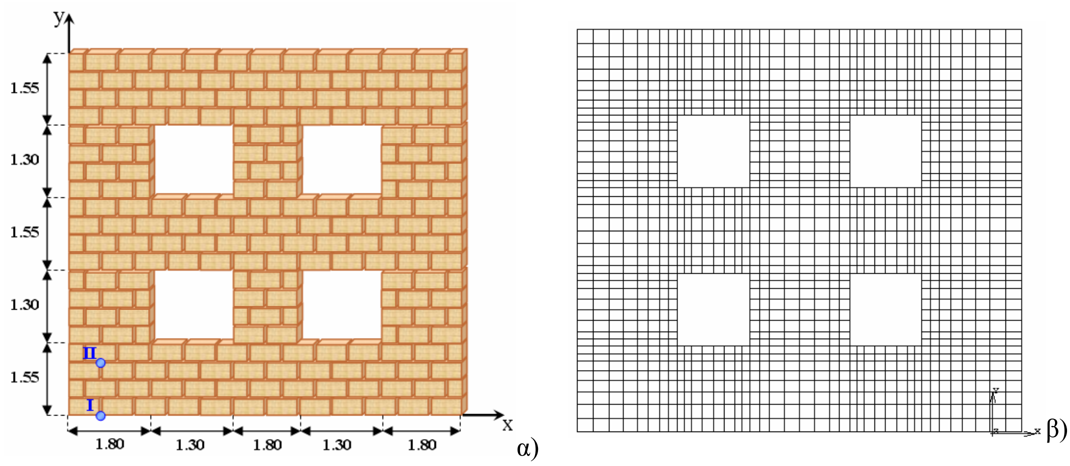
- Από τη κατανομή των πλαστικών παραμορφώσεων επίσης, αλλά και από την έκταση τους, προκύπτει ότι οι περιοχές που εντοπίζεται η αστοχία του δοκιμίου διαφοροποιούνται ανάλογα με το κριτήριο διαρροής που εφαρμόζεται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε κάθε κριτήριο αντιστοιχεί μια περιβάλλουσα αστοχίας, η οποία περιγράφει μια διαφορετική περιοχή ασφαλών τάσεων.

- Προέκταση της προηγούμενης παρατήρησης είναι και η καταστατική μη γραμμική συμπεριφορά που εμφανίζει η τοιχοποιία, ανάλογα με το κριτήριο διαρροής που εφαρμόζεται. Έτσι λοιπόν, τα κριτήρια αστοχίας γραμμικό Mohr-Coulomb και Γενικευμένο Τετραγωνικό με b=0, εμφανίζονται περισσότερο συντηρητικά σε σχέση με το παραβολικό Mohr-Coulomb και το Buyukozturk, καθώς τα δύο πρώτα προβλέπουν μεγαλύτερες πλαστικές παραμορφώσεις (Σχήματα 5.6 και 5.9) και σε πολύ συγκεκριμένες περιοχές του δοκιμίου (Σχήματα 5.4 και 5.5).

- Ένα φαινόμενο το οποίο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, είναι η εμφάνιση πλαστικής άρθρωσης (Κόμβος ΙΙ) στο δοκίμιο, στις περιπτώσεις των κριτηρίων παραβολικό Mohr-Coulomb και Buyukozturk (Σχήματα 5.4 και 5.5). Η εμφάνιση της πλαστικής άρθρωσης οφείλεται στο ότι από ένα σημείο και μετά την αστοχία του υλικού σε εφελκυσμό, η ελαστοπλαστική συμπεριφορά του υλικού προκαλεί την εκτόνωση των τάσεων στη βάση του δοκιμίου (Κόμβος Ι) και την συγκέντρωση μεγάλων πλαστικών παραμορφώσεων σε ψηλότερα σημεία (Κόμβος ΙΙ). Ενδεικτικά της αποφόρτισης του δοκιμίου στη βάση του, είναι τα διαγράμματα κατακόρυφων συνολικών παραμορφώσεων-τάσεων στον Κόμβο Ι (Σχήματα 5.7 και 5.10), καθώς και οι μηκοτομές καθ' ύψος του δοκιμίου στην πλευρά εμφάνισης της πλαστικής άρθρωσης (σχήματα 5.12 και 5.13).

5.2.2 Εντός επιπέδου κάμψη και διάτμηση τοίχου από τοιχοποιία

Με βάση τις παρατηρήσεις και την αξιολόγηση των κριτηρίων διαρροής που προέκυψαν από την επίλυση ενός δοκιμίου τοιχοποιίας, η μελέτη της μη γραμμικής συμπεριφοράς του συγκεκριμένου υλικού επεκτείνεται με την επίλυση ενός πιο συνθέτου γεωμετρικά δομικού συστήματος. Το δομικό σύστημα του όποιου η μηχανική συμπεριφορά μελετάται στη παρούσα παράγραφο, είναι ένας τοίχος (Σχήμα 5.14.α) από την ίδια με το δοκίμιο μηχανικά ομογενοποιημένη ελαστοπλαστική τοιχοποιία (Πίνακας 5.1).



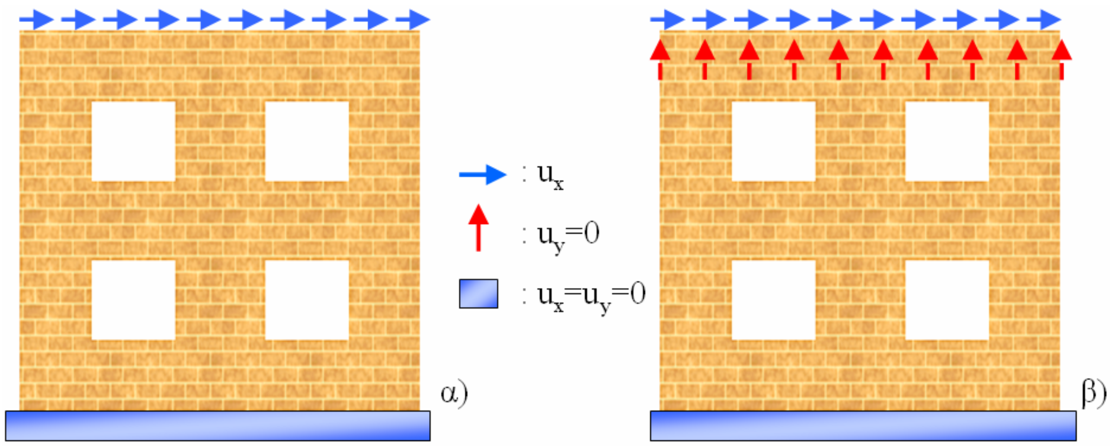
Σχήμα 5.14: α) Γεωμετρία (όλες οι διαστάσεις σε m), κόμβοι μελέτης και β) διακριτοποίηση του τοίχου στις δύο διαστάσεις.

Η αριθμητική επίλυση του τοίχου έγινε με την θεώρηση επίπεδης τάσης ($\sigma_{33}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$). Η διακριτοποίηση προέκυψε μετά από διερεύνηση που έγινε ώστε να επιτευχθεί η μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια των υπολογισμών με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού κόστους. Για το λόγο αυτό στις κοντινές στα ανοίγματα περιοχές του τοίχου, έγινε κατάλληλη πύκνωση του πλέγματος των στοιχείων. Το τελικό πλέγμα αποτελείται από 1344 τετραπλευρικά τετρακομβικά στοιχεία επίπεδης έντασης, με 1485 κόμβους και συνολικά 2970 βαθμούς ελευθερίας (σχήμα 5.14.β). Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν στον τοίχο είναι οι ακόλουθες (Σχήμα 5.15):

- Στην κορυφή του τοίχου εφαρμόζεται σταδιακά μια οριζόντια μετατόπιση u_x=1mm, με ρυθμό φόρτισης $du_x / dt = 0.1$ mm/sec. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως δυναμικό και επιλύεται σε N=200 βήματα (dt=0.05 sec), με την εφαρμογή της μεθόδου χρονικής ολοκλήρωσης Newmark.

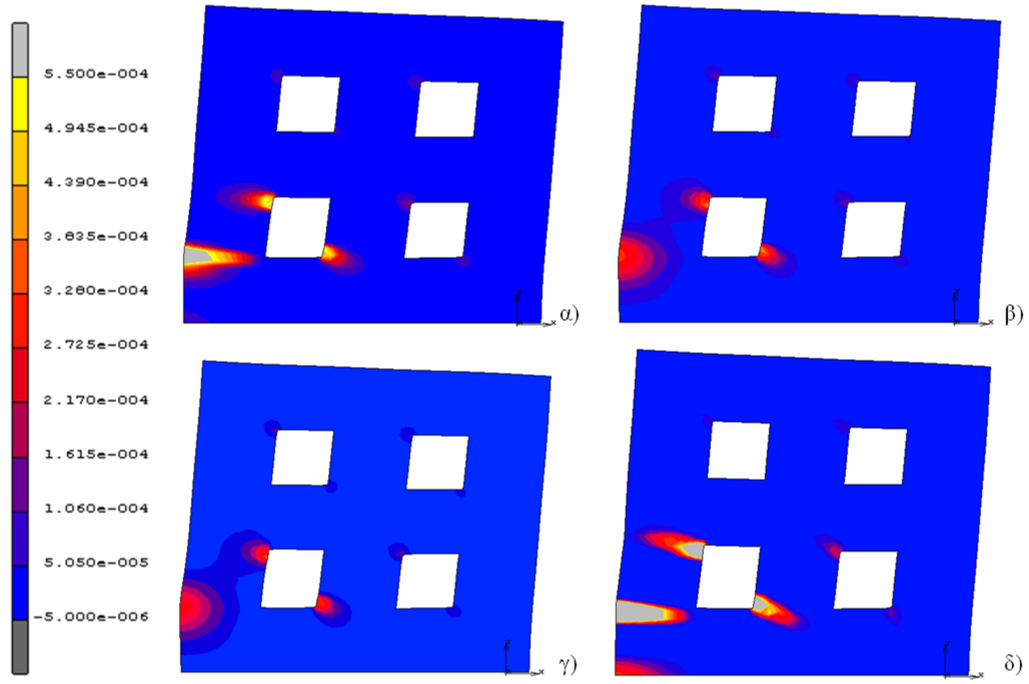
- Στη βάση του τοίχου εφαρμόζεται πάκτωση (u_x=u_y=0).

- Στην περίπτωση της εντός επιπέδου διάτμησης, εφαρμόζεται εκτός των παραπάνω συνθηκών και κύλιση κατά την οριζόντια διεύθυνση (άξονας-x) στην κορυφή του δοκιμίου.

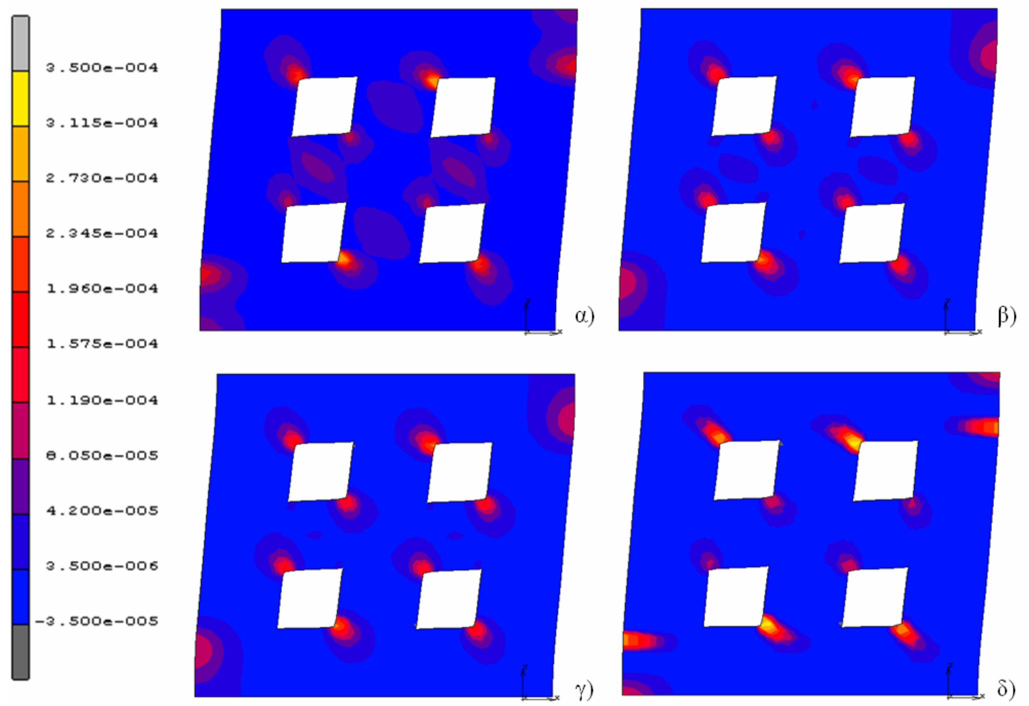


Σχήμα 5.15: Συνοριακές συνθήκες στο πρόβλημα της εντός επιπέδου α) κάμψης και β) διάτμησης του τοίχου.

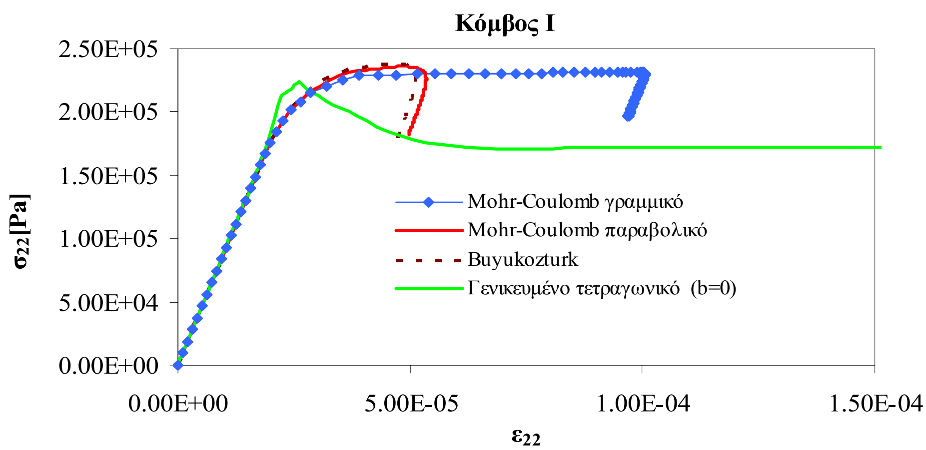
Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης που έγινε, λαμβάνονται χρωματικοί χάρτες και μηκοτομές που περιγράφουν την κατανομή της κατακόρυφης πλαστικής παραμόρφωσης ε_{p22} και της οριζόντιας μετατόπισης u_x, στο τέλος της επίλυσης, καθώς και διαγράμματα της τάσης σ_{22} και της αντίστοιχης συνολικής παραμόρφωσης σε συγκεκριμένους κόμβους μελέτης.



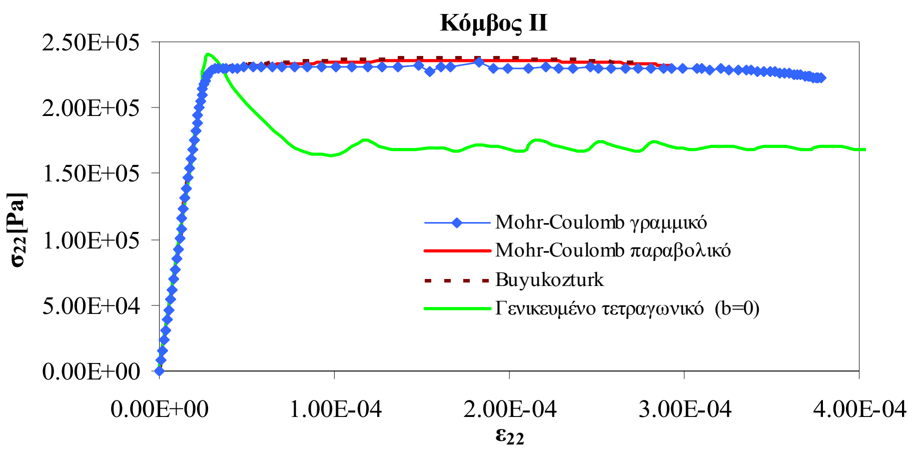
Σχήμα 5.16: Κατακόρυφες πλαστικές παραμορφώσεις ε_{p22}, στην εντός επιπέδου κάμψη σύμφωνα με τα κριτήρια διαρροής α) Mohr-Coulomb γραμμικό, β) Mohr-Coulomb Παραβολικό, γ) Buyukozturk και δ) Γενικευμένο τετραγωνικό (b=0).



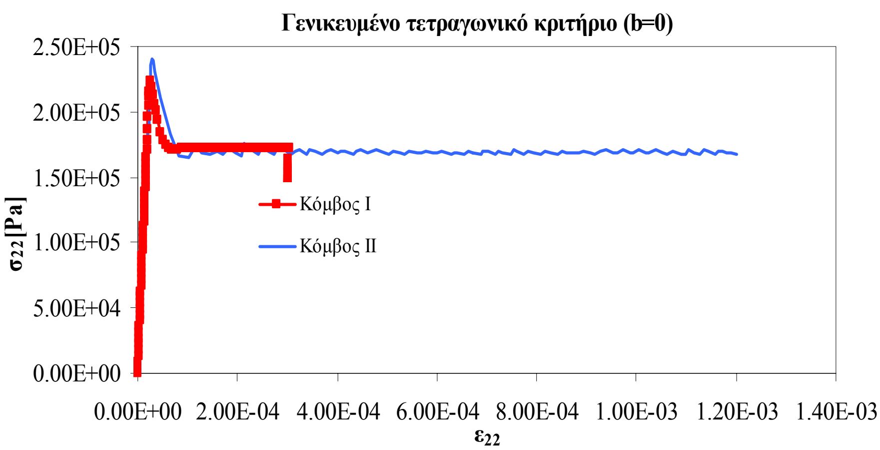
Σχήμα 5.17: Κατακόρυφες πλαστικές παραμορφώσεις ε_{p22}, στην εντός επιπέδου διάτμηση σύμφωνα με τα κριτήρια διαρροής α) Mohr-Coulomb γραμμικό, β) Mohr-Coulomb Παραβολικό, γ) Buyukozturk και δ) Γενικευμένο τετραγωνικό (b=0).



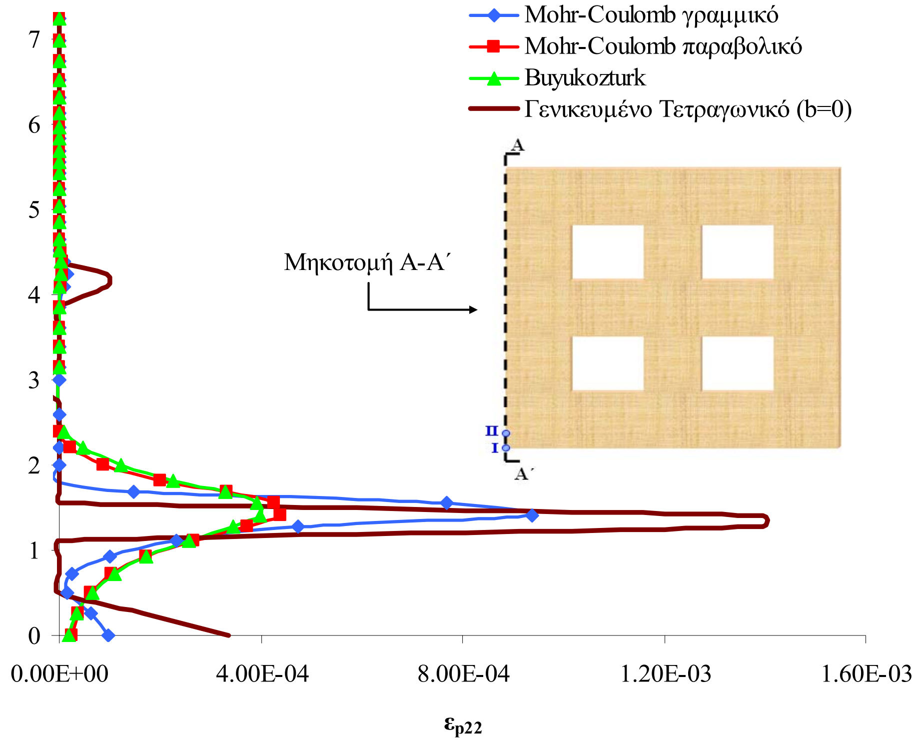
Σχήμα 5.18: Καμπύλη κατακόρυφης συνολικής παραμόρφωσης – τάσης, ε_{22}-σ_{22}, στον κόμβο μελέτης I, για την περίπτωση της εντός επιπέδου κάμψης (εστίαση στην περιοχή παραμορφώσεων [0, 1,5e-4]).



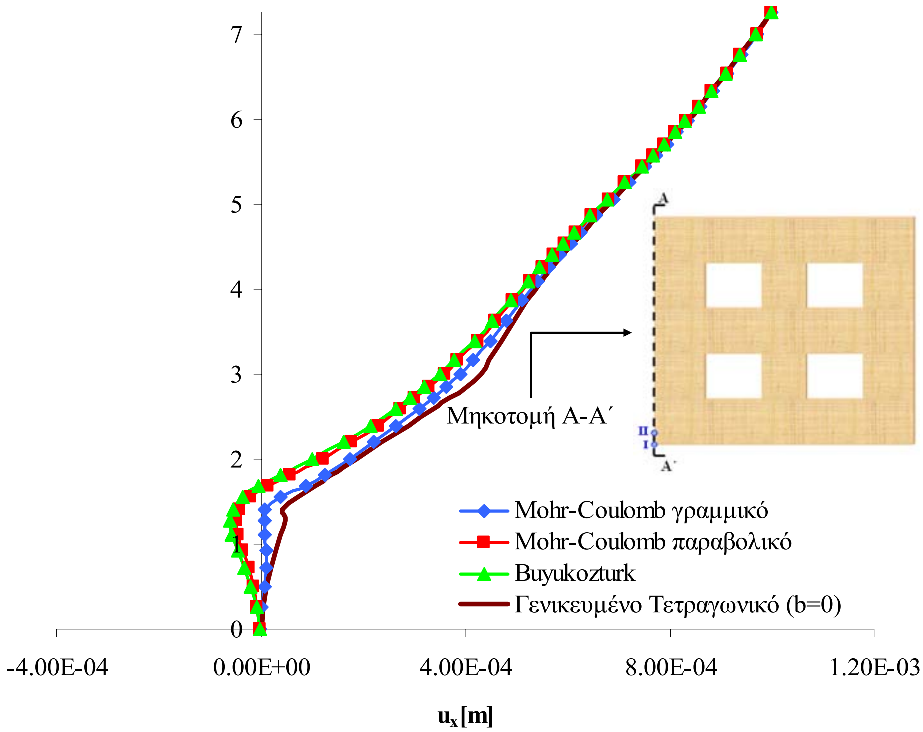
Σχήμα 5.19: Καμπύλη κατακόρυφης συνολικής παραμόρφωσης – τάσης, ε_{22}-σ_{22}, στον κόμβο μελέτης II, για την περίπτωση της εντός επιπέδου κάμψης (εστίαση στην περιοχή παραμορφώσεων [0, 4e-4]).



Σχήμα 5.20: Καμπύλη κατακόρυφης συνολικής παραμόρφωσης – τάσης, ε_{22}-σ_{22}, στους κόμβους μελέτης I και II για την περίπτωση της εντός επιπέδου κάμψης .



Σχήμα 5.21: Καθ' ύψος κατανομή της κατακόρυφης πλαστικής παραμόρφωσης ε_{p22}, στο τελευταίο βήμα επίλυσης της εντός επιπέδου κάμψης, για διαφορετικά κριτήρια διαρροής.



Σχήμα 5.22: Καθ' ύψος κατανομή της κατακόρυφης πλαστικής παραμόρφωσης ε_{p22}, στο τελευταίο βήμα επίλυσης της εντός επιπέδου κάμψης, για διαφορετικά κριτήρια διαρροής.

Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση που έγινε, μπορούν να γίνουν και για τους δύο τύπους φόρτισης που εξετάστηκαν, οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Όσον αφορά την αξιολόγηση των κριτηρίων διαρροής, οι παρατηρήσεις που έγιναν για το δοκίμιο ισχύουν σε γενικές γραμμές και στην περίπτωση του τοίχου. Η μόνη διαφοροποίηση που εντοπίζεται είναι η εμφάνιση πλαστικής άρθρωσης και στις περιπτώσεις εφαρμογής των κριτηρίων γραμμικό Mohr-Coulomb και γενικευμένο τετραγωνικό (σχήματα 5.18, 5.20, 5.21 και 5.22).

- Η αστοχία του τοίχου σε εφελκυσμό, εντοπίζεται αφενός μεν στα πλευρικά του όρια, αφετέρου δε στις γωνίες των ανοιγμάτων (Σχήματα 5.16, 5.17 και 5.21). Η κατανομή των πλαστικών παραμορφώσεων καθώς και η έκταση τους, αποδεικνύει ότι οι τύποι φόρτισης που εφαρμόστηκαν είναι οι εξαιρετικά επικίνδυνοι για την ευστάθεια ενός τέτοιου δομικού συστήματος, ενώ επιπλέον υποδεικνύουν και τα σημεία στα όποια πρέπει να τοποθετηθούν στοιχεία ενίσχυσης.

Υπενθυμίζεται ότι στις περιπτώσεις μελέτης ψαθυρών υλικών, οι υπολογιζόμενες πλαστικές παραμορφώσεις είναι μεγέθη ενδεικτικά του τρόπου αστοχίας (πρόσημο συνιστωσών του τανυστή των πλαστικών παραμορφώσεων) και της έκτασης των βλαβών που έχει υποστεί μια κατασκευή (μέγεθος συνιστωσών του τανυστή των πλαστικών παραμορφώσεων ή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης). Επιπλέον, οι υπολογιζόμενες συνολικές παραμορφώσεις στην περίπτωση της θλιπτικής αστοχίας, προσεγγίζουν τις πραγματικές συνολικές παραμορφώσεις. Αντίθετα στην περίπτωση της εφελκυστικής αστοχίας, οι υπολογιζόμενες συνολικές παραμορφώσεις δεν είναι πραγματικά μεγέθη, καθώς τέτοιου είδους υλικά αστοχούν σε εφελκυσμό με την εμφάνιση ρωγμών σε επίπεδα κάθετα στη διεύθυνση της εφελκυστικής μέγιστης κύριας τάσης.

5.3 Παραμετρική διερεύνηση του τρόπου ενίσχυσης τοιχοποιιών με στοιχεία από οπλισμένο σκυρόδεμα

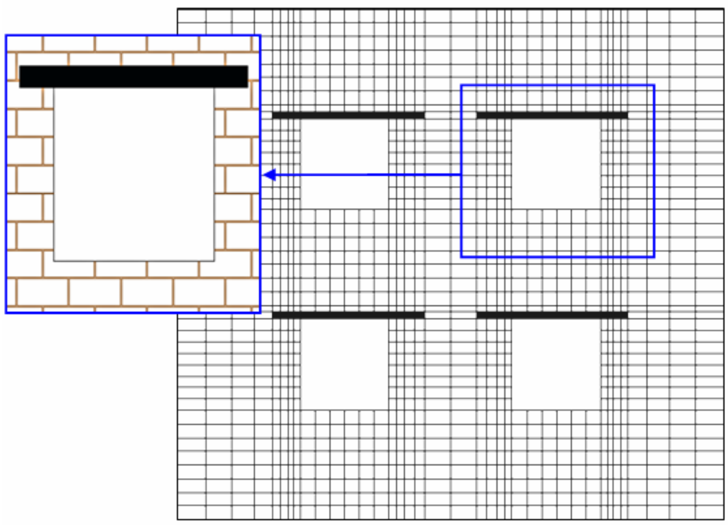
Μια από τις ευρύτατα χρησιμοποιούμενες μεθόδους ενίσχυσης κατασκευών από τοιχοποιία, είναι η τοποθέτηση δομικών στοιχείων από σκυρόδεμα στις ασθενείς μηχανικά περιοχές. Με τον όρο ασθενείς μηχανικά περιοχή μιας κατασκευής, προσδιορίζεται η περιοχή στην οποία υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να εκδηλωθεί αστοχία του υλικού. Η ύπαρξη μηχανικά ασθενών περιοχών, οφείλεται είτε στη απότομη μεταβολή της γεωμετρίας ενός δομικού φορέα-στοιχείου (π.χ. ύπαρξη γωνιών, ανοιγμάτων) είτε σε δομικές ατέλειες του ιδίου του υλικού (π.χ. ρωγμές, κενά). Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι η συγκέντρωση τάσεων στα σημεία αυτά και η εμφάνιση πολυδιάστατων σύνθετων εντατικών πεδίων, τα οποία προκαλούν σημαντική καταπόνηση του υλικού. Στόχος της ενίσχυσης μιας υφιστάμενης κατασκευής από τοιχοποιία, είναι η εκτόνωση των τάσεων στις επίφοβες για αστοχία περιοχές.

Σε προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα της μελέτης των μηχανισμών αστοχίας ενός τοίχου από τοιχοποιία. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά, μεταξύ των άλλων διαπιστώθηκε ότι οι πλέον επικίνδυνες περιοχές για την εκδήλωση αστοχίας του υλικού, είναι οι κοντινές στις γωνίες των ανοιγμάτων, καθώς και οι περιοχές στα πλευρικά όρια του τοίχου κοντά στη βάση του. Τα συνηθέστερα αίτια που προκαλούν βλάβες σε μια φέρουσα τοιχοποιία, είναι οι οριζόντιες συνιστώσες των σεισμικών φορτίων οι οποίες καταπονούν την κατασκευή σε εντός ή εκτός επιπέδου διάτμηση ή/και κάμψη. Ένας τρόπος για αντιμετωπιστούν τα αποτελέσματα που έχουν αυτοί οι τύποι φόρτισης είναι η τοποθέτηση δοκών από σκυρόδεμα πάνω από ανοίγματα ενός τοίχου. Οι δοκοί μπορούν να είναι είτε ανώφλια, είτε σενάζ. Τα ανώφλια αποτελούν δοκούς περιορισμένης έκτασης κατά τον άξονα τους, οι οποίες καλούνται να παραλάβουν τα φορτία στις κοντινές στα ανοίγματα περιοχές του τοίχου (Σχήμα 5.23). Αντίθετα τα σενάζ είναι δοκοί οι οποίοι καλύπτουν όλο το εύρος του τοίχου κατά μήκος της πρόσοψης του (Σχήμα 5.24), με αποτέλεσμα να ενισχύουν και τα τμήματα της τοιχοποιίας που βρίσκονται μεταξύ των ανοιγμάτων. Οι περιοχές μεταξύ των ανοιγμάτων είναι επίσης περιοχές μηχανικά ασθενής, καθώς όπως θα αποδειχθεί παρακάτω, μπορούν να αστοχήσουν κάτω από την επίδραση εκτός επιπέδου σεισμικών φορτίων.

Στη παρούσα παράγραφο παρουσιάζεται η παραμετρική διερεύνηση και αξιολόγηση του τρόπου ενίσχυσης μιας κατασκευής από ομογενοποιημένη μηχανικά τοιχοποιία (Πίνακας 5.1). Η κατασκευή που μελετάται είναι ο τοίχος του σχήματος 5.14. Η τοιχοποιία θεωρείται ως ελαστοπλαστικό υλικό και η μη γραμμική καταστατική συμπεριφορά της περιγράφεται με τη χρήση του κριτηρίου διαρροής-αστοχίας Buyukozturk. Τα στοιχεία ενίσχυσης είναι δοκοί από ελαστικό σκυρόδεμα με μέτρο ελαστικότητας E_{con}=25GPa, λόγο poisson v_{con}=0.2 και πυκνότητα ρ_{con}=2400Kg/m³. Οι παράμετροι ως προς τις οποίες εξετάζεται η αποτελεσματικότητα μιας ενίσχυσης, είναι το μέσο ενίσχυσης, ανώφλια ή σενάζ, η διεύθυνση οριζόντιας καταπόνησης, κάθετα (εκτός επιπέδου) ή παράλληλα (εντός επιπέδου) στο επίπεδο ανάπτυξης του τοίχου και ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να προσομοιωθεί με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων η διεπιφάνεια σκυροδέματος-τοιχοποιίας. Ιδιαίτερα δε ο τρόπος προσέγγισης της μηχανικής συμπεριφοράς της διεπιφάνειας σκυροδέματος-τοιχοποιίας, είναι το πλέον κρίσιμο ζήτημα που πρέπει να διερευνηθεί για να επιτευχθεί μια αξιόπιστη και ρεαλιστική αριθμητική προσομοίωση [40, 42, 44]. Για το λόγο αυτό στα πλαίσια της συγκεκριμένης μελέτης, διερευνάται η προσομοίωσης της διεπιφάνειας με τους εξής τρόπους:

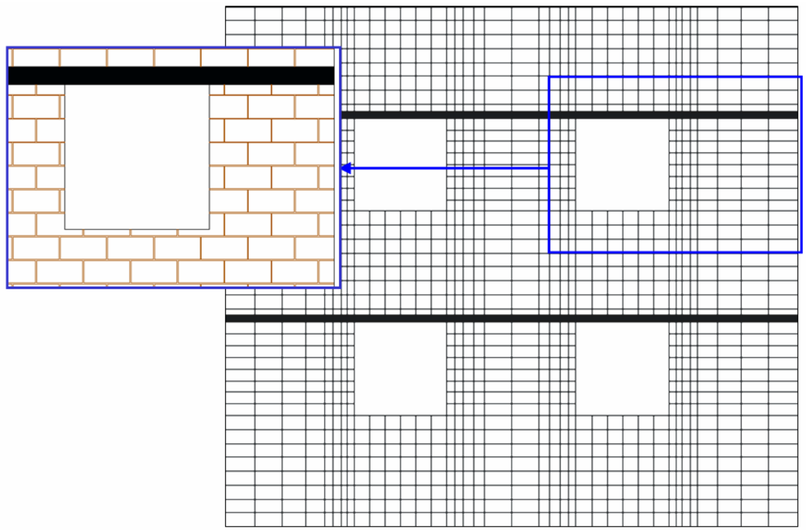
- Χρήση κοινών κόμβων μεταξύ των στοιχείων σκυροδέματος και τοιχοποιίας (fixed Condition).

- Χρήση στοιχείων επαφής (Contact element-Contact analysis) μεταξύ σκυροδέματος και τοιχοποιίας, με συντελεστή τριβής μ=0.6.



Σχήμα 5.23: Τοίχος ενισχυμένος με ανώφλια από σκυρόδεμα.

Η αριθμητική επίλυση του τοίχου πραγματοποιείται στις τρεις διαστάσεις, λαμβάνοντας πάχος ίσο με 0.5m. Η διακριτοποίηση του τοίχου προέκυψε μετά από διερεύνηση που έγινε ώστε να επιτευχθεί η μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια των υπολογισμών με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού κόστους. Για το λόγο αυτό στις κοντινές στα ανοίγματα περιοχές αλλά και στις περιοχές πλησίον και εκατέρωθεν των διεπιφανειών σκυροδέματος-τοιχοποιίας, έγινε κατάλληλη πύκνωση του πλέγματος των στοιχείων. Το τελικό πλέγμα αποτελείται από 3984 εξαεδρικά οκτακομβικά στερεά στοιχεία τοιχοποιίας και σκυροδέματος, με 6236 κόμβους και συνολικά 18708 βαθμούς ελευθερίας (Σχήματα 5.23 και 5.24).



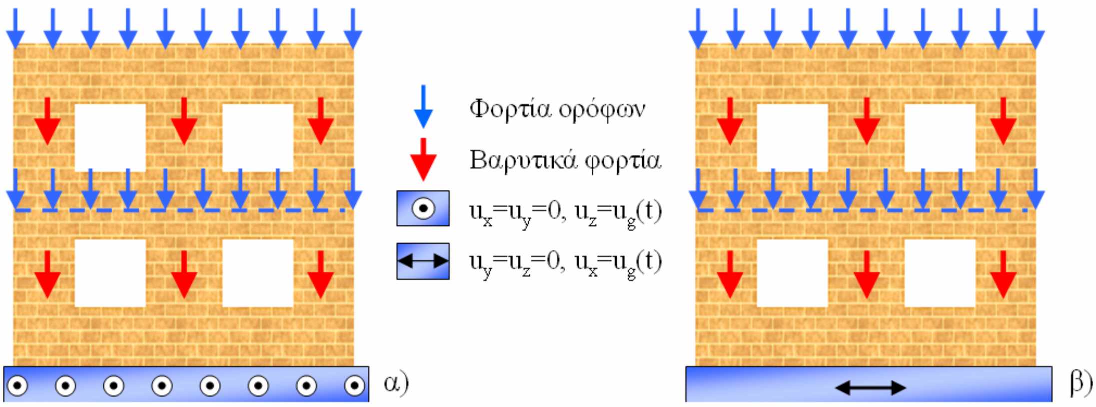
Σχήμα 5.24: Τοίχος ενισχυμένος με σενάζ από σκυρόδεμα.

Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν στον τοίχο είναι οι ακόλουθες (Σχήμα 5.25):

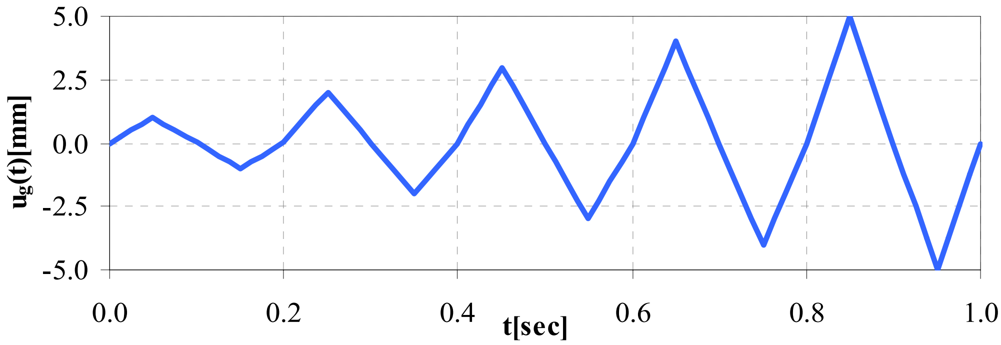
- Στην βάση του τοίχου εφαρμόζεται μια οριζόντια χρονικά μεταβαλλόμενη εδαφική μετατόπιση $u_g(t)$, της οποίας η χρονοϊστορία παρουσιάζεται στο σχήμα 2.26. Η χρονοϊστορία αυτή, αποτελεί ένα εξιδανικευμένο αρμονικό ημιτονοειδές σεισμικό φορτίο, του όποιου το πλάτος αυξάνεται συναρτήσει του χρόνου. Ανάλογα τώρα με τη διεύθυνση εφαρμογής της εδαφικής μετατόπισης διακρίνονται η εντός, $u_x=u_g(t)$ και η εκτός, $u_z=u_g(t)$, επιπέδου σεισμική καταπόνηση. Ταυτόχρονα με την εδαφική μετατόπιση και ανάλογα με τη διεύθυνση της, εφαρμόζονται μηδενικές μετατοπίσεις προς τις άλλες δύο διευθύνσεις (Σχήμα 5.25). Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως δυναμικό και επιλύεται σε N=100 βήματα (dt=0.01 sec), με την εφαρμογή της μεθόδου χρονικής ολοκλήρωσης Newmark.

- Βαρυτικά κατακόρυφα φορτία του τοίχου, για τα οποία λαμβάνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με 9.81m/sec².

- Βάρος ορόφων και οροφής P=29500Pa, το όποιο αντιστοιχεί σε πλάκες σκυροδέματος πάχους 0.25m και επιφάνειας 80m².



Σχήμα 5.25: Συνοριακές συνθήκες στο πρόβλημα της α) εκτός και β) εντός επιπέδου δυναμικής καταπόνησης τοίχου από ένα οριζόντιο σεισμικό φορτίο.



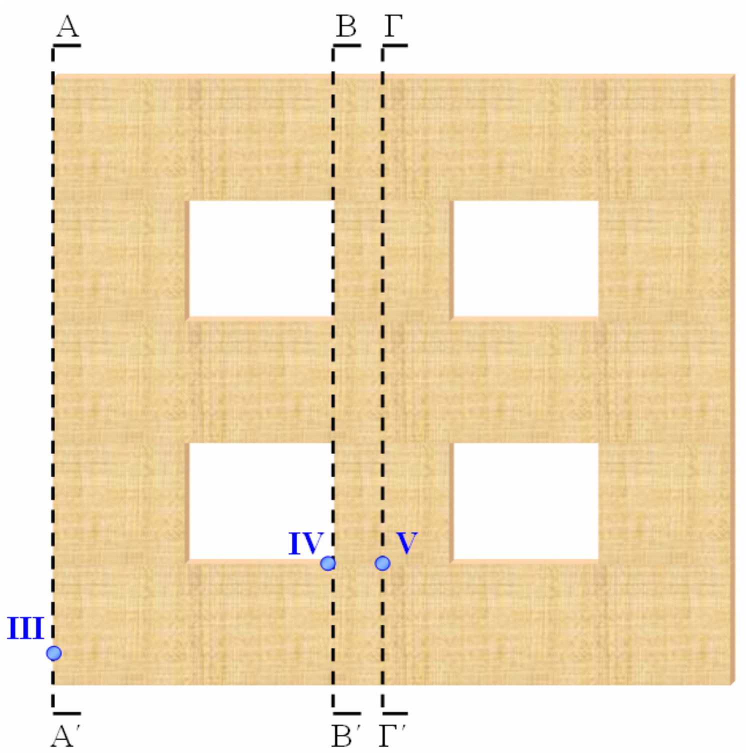
Σχήμα 5.26: Χρονοϊστορία εδαφικής μετατόπισης.

Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης που έγινε λαμβάνονται τα ακόλουθα διαγράμματα:

- Μηκοτομές της ισοδύναμης πλαστικής παράμορφωσης κατά την κατακόρυφη διεύθυνση ανάπτυξης του τοίχου (σχήμα 5.23).

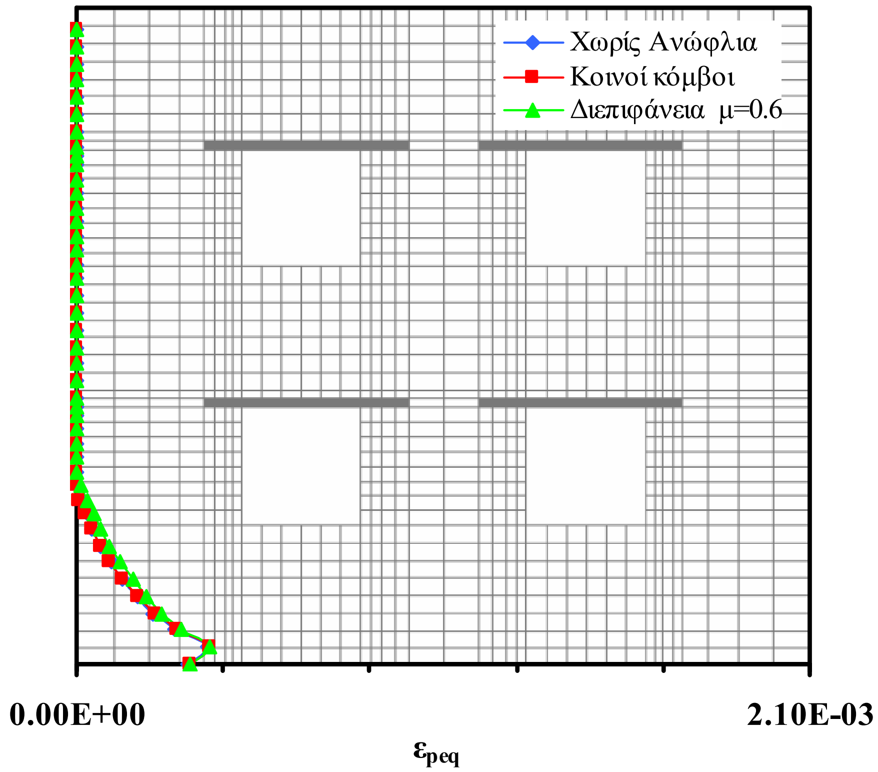
- Χάρτες χρωματικού κώδικα, ο οποίοι απεικονίζουν την κατανομή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, στην περίπτωση προσέγγισης της διεπιφάνειας σκυροδέματος-τοιχοποιίας με στοιχεία επαφής.

- Χρονοιστορίες της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης σε συγκεκριμένους κόμβους μελέτης, οι οποίοι εμπεριέχονται στις μηκοτομές (Σχήμα 5.23).

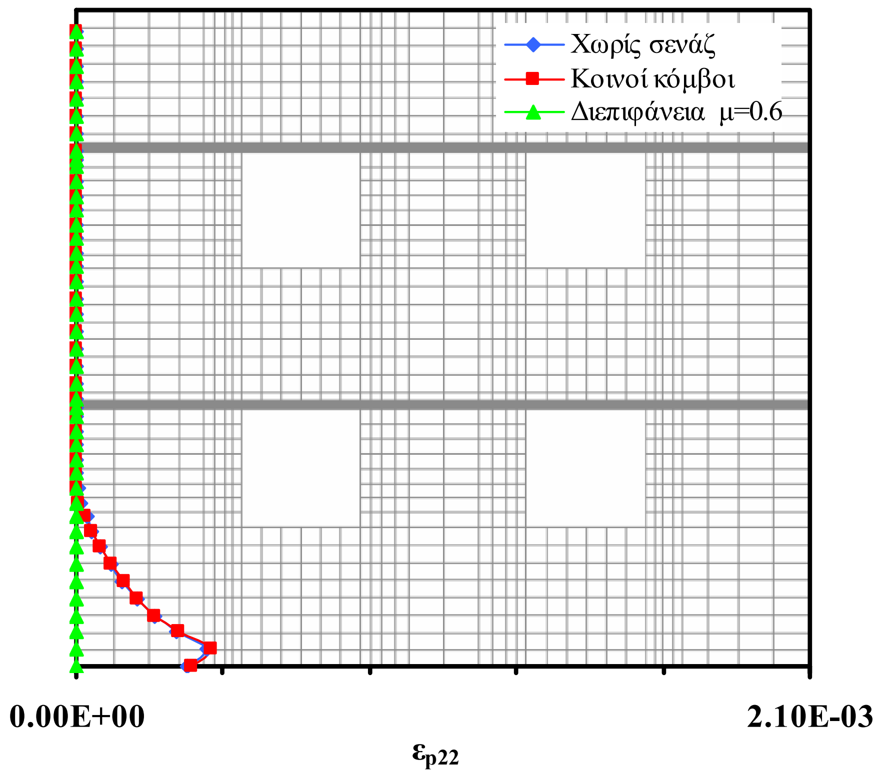


Σχήμα 5.27: Σχηματική απεικόνιση κόμβων μελέτης και μηκοτομών.

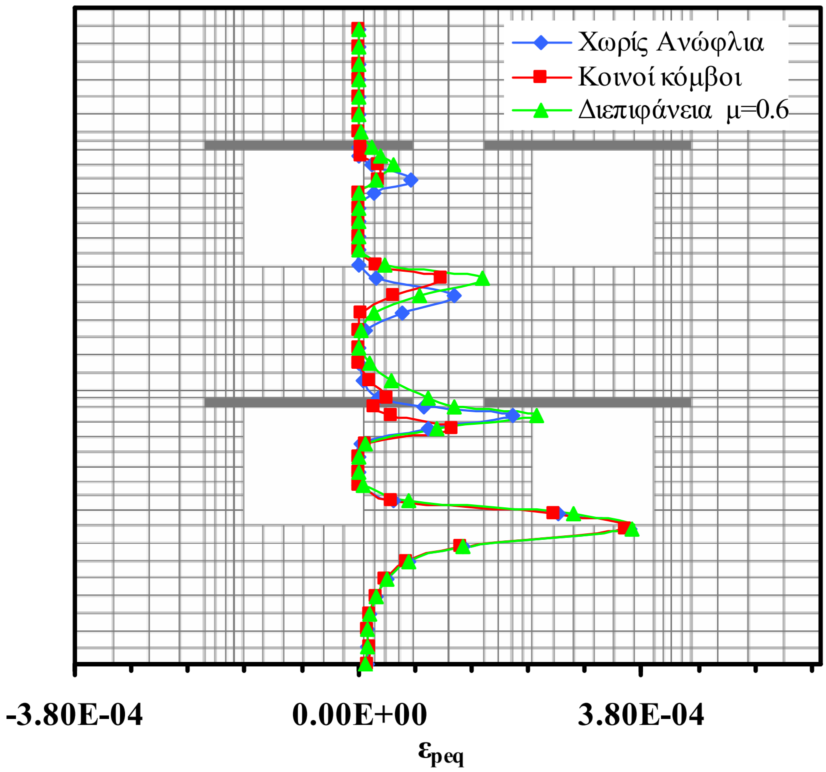
Τέλος σημειώνεται ότι στη περίπτωση της παρούσας μελέτης, οι πλαστικές παραμορφώσεις που προκύπτουν από την ελαστοπλαστική ανάλυση, είναι ενδεικτικές του μεγέθους και της έκτασης των βλαβών που προβλέπεται να εμφανίσει η κατασκευή.



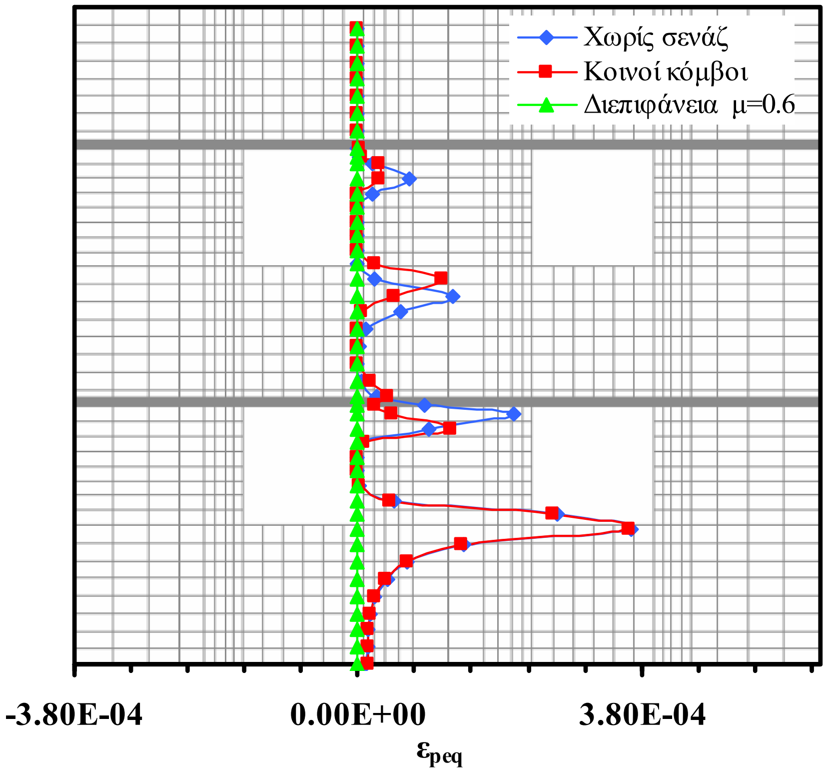
Σχήμα 5.28: Μηκοτομή Α-Α΄. Ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, ε_{peq}, τοίχου ενισχυμένου με ανώφλια στην περίπτωση της εντός επιπέδου σεισμικής φόρτισης.



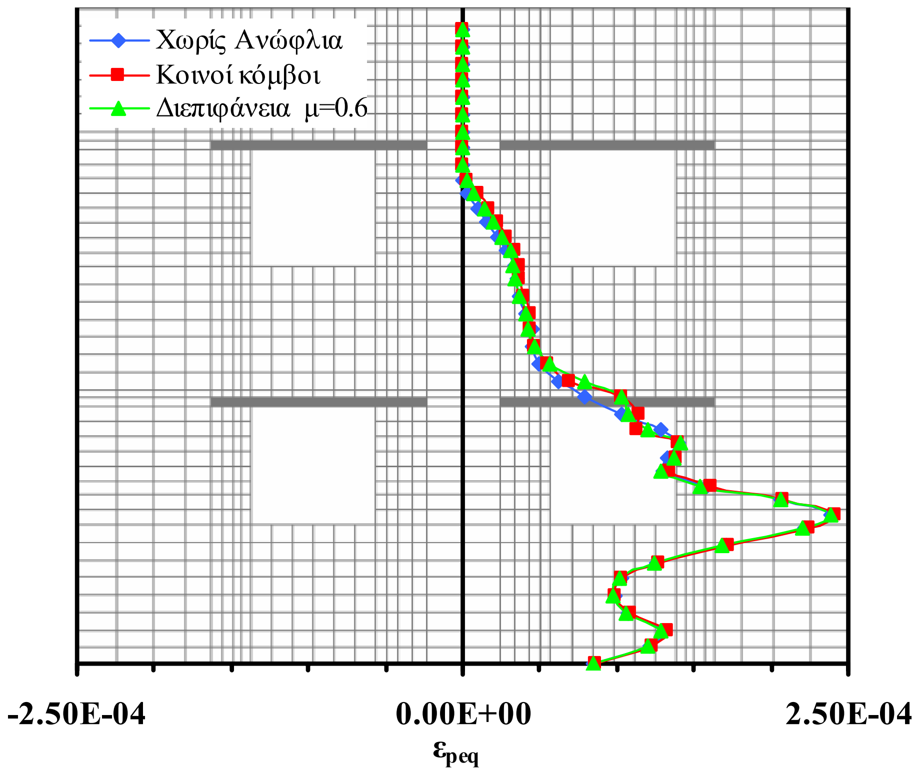
Σχήμα 5.29: Μηκοτομή Α-Α΄. Ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, ε_{peq}, τοίχου ενισχυμένου με σενάζ στην περίπτωση της εντός επιπέδου σεισμικής φόρτισης.



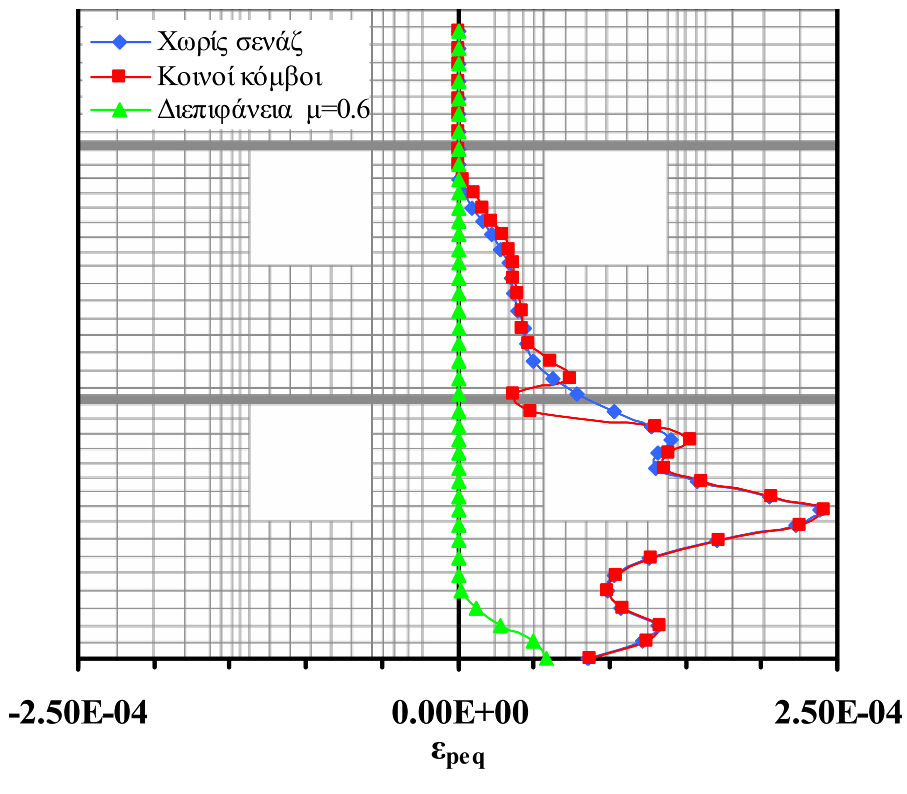
Σχήμα 5.30: Μηκοτομή Β-Β΄. Ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, ε_{peq}, τοίχου ενισχυμένου με ανώφλια στην περίπτωση της εντός επιπέδου σεισμικής φόρτισης.



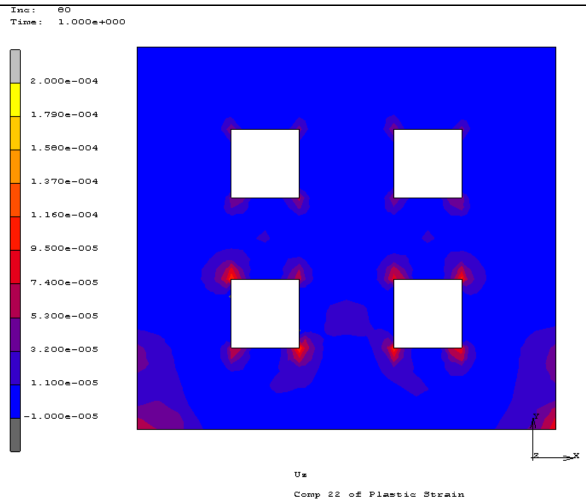
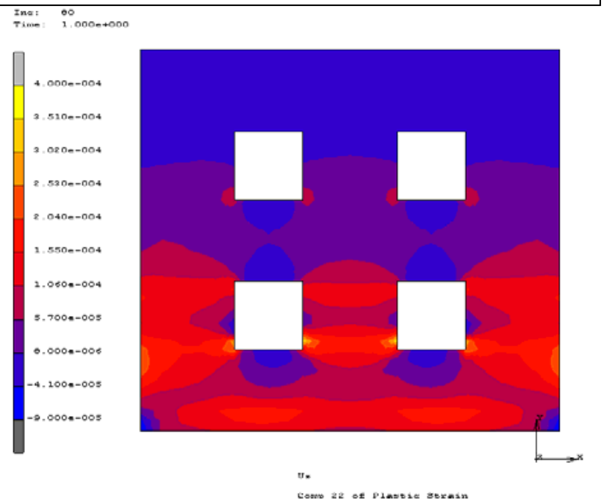
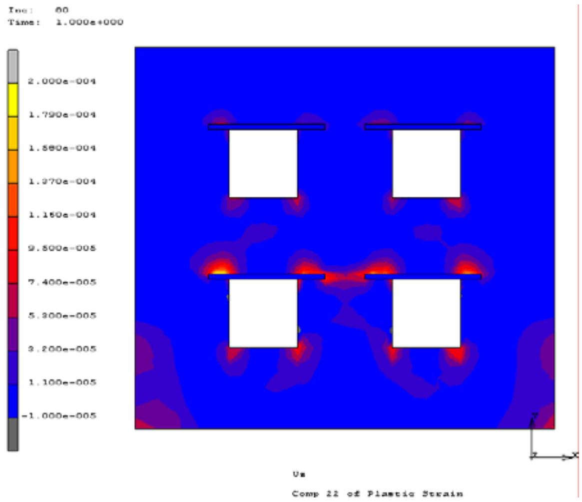
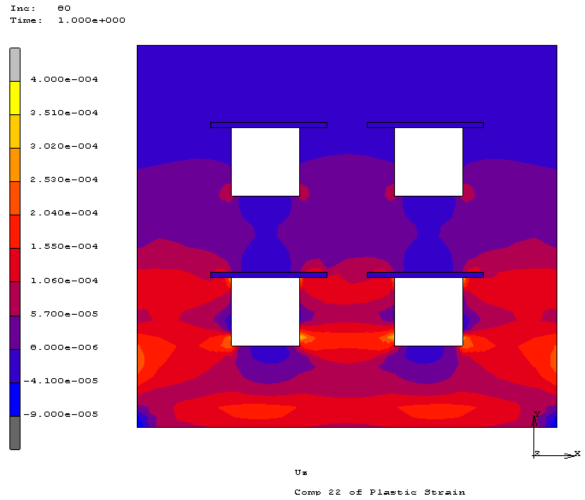
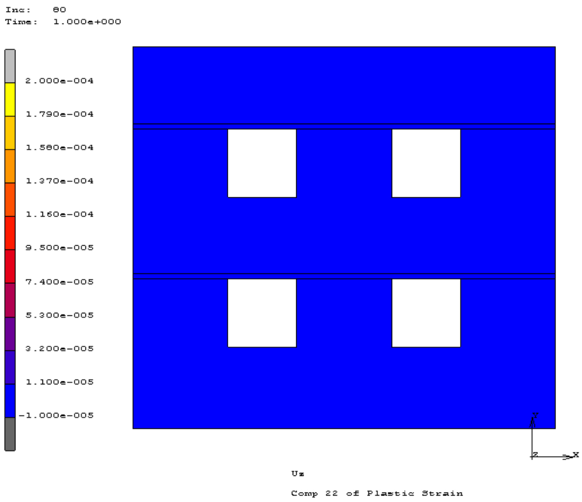
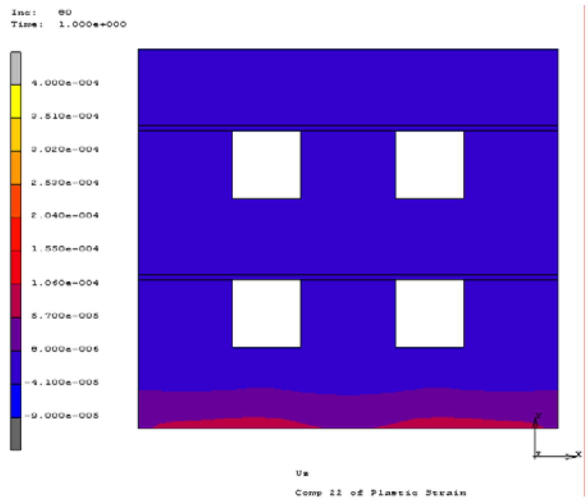
Σχήμα 5.31: Μηκοτομή Β-Β΄. Ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, ε_{peq}, τοίχου ενισχυμένου με σενάζ στην περίπτωση της εντός επιπέδου σεισμικής φόρτισης.



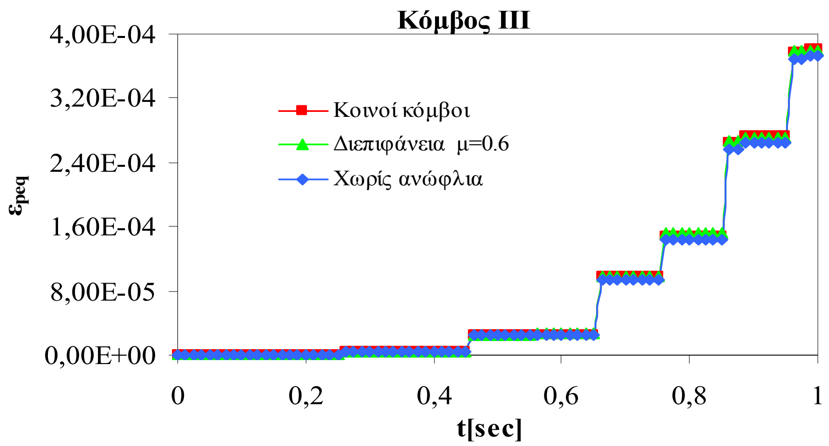
Σχήμα 5.32: Μηκοτομή Γ-Γ΄. Ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, $ε_{peq}$, τοίχου ενισχυμένου με ανώφλια στην περίπτωση της εκτός επιπέδου σεισμικής φόρτισης.



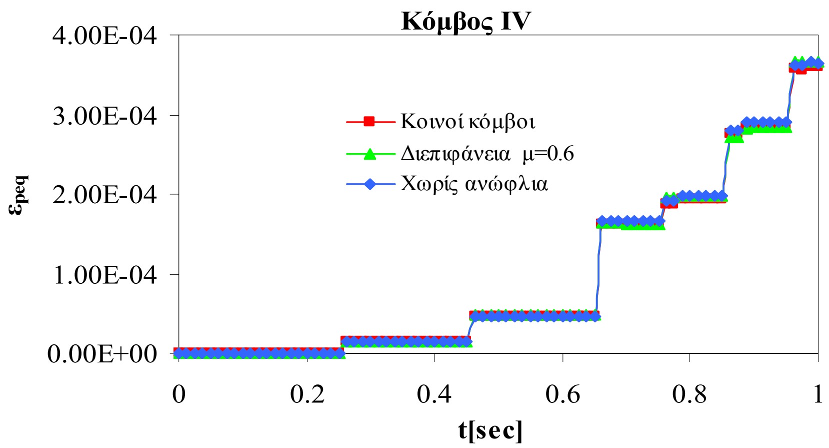
Σχήμα 5.33: Μηκοτομή Γ-Γ΄. Ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, $ε_{peq}$, τοίχου ενισχυμένου με σενάζ στην περίπτωση της εκτός επιπέδου σεισμικής φόρτισης.

	Εντός επιπέδου φόρτιση	**Εκτός επιπέδου φόρτιση**
Χωρίς Ενίσχυση		
Ενίσχυση με ανόφλια		
Ενίσχυση με Σενάζ		

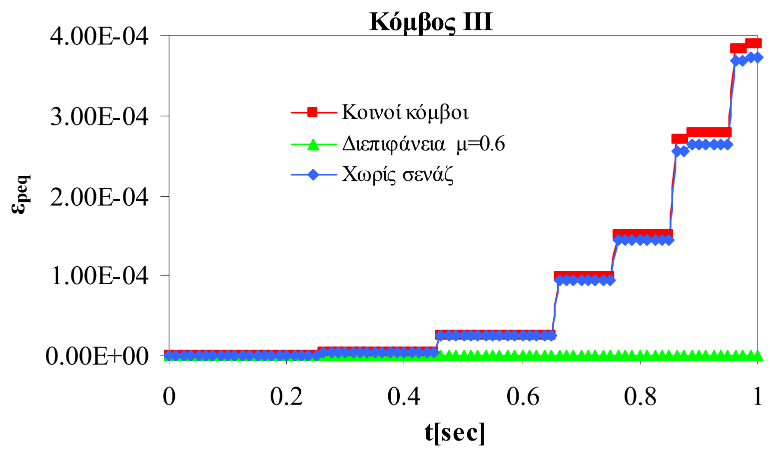
Σχήμα 5.34: Κατανομή της πλαστικής παραμόρφωσης ε_{p22} για διαφορετικές περιπτώσεις φόρτισης και τρόπου ενίσχυσης.



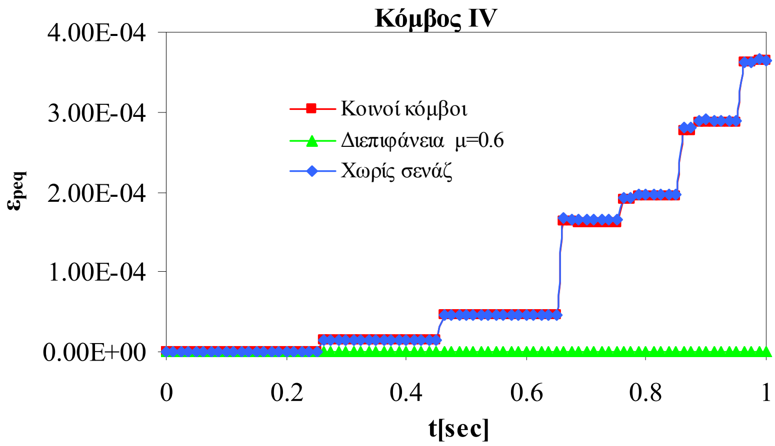
Σχήμα 5.35: Χρονοϊστορία ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, ε_{peq}, στον κόμβο III για την περίπτωση της εντός επιπέδου σεισμικής φόρτισης τοίχου ενισχυμένου με ανώφλια.



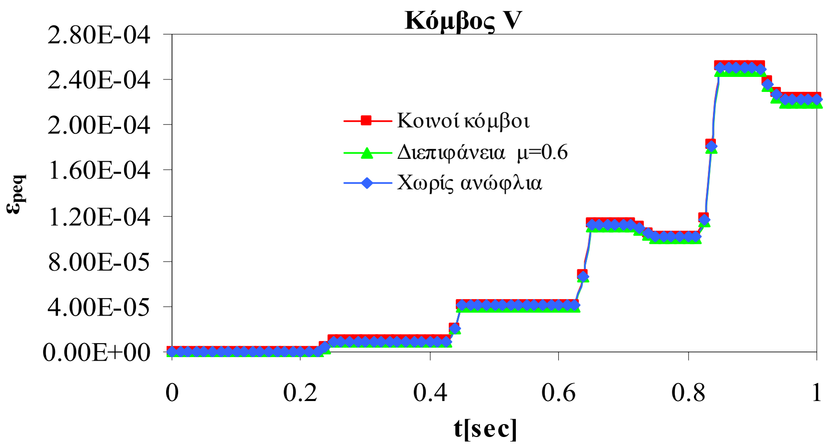
Σχήμα 5.36: Χρονοϊστορία ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, ε_{peq}, στον κόμβο IV για την περίπτωση της εντός επιπέδου σεισμικής φόρτισης τοίχου ενισχυμένου με ανώφλια.



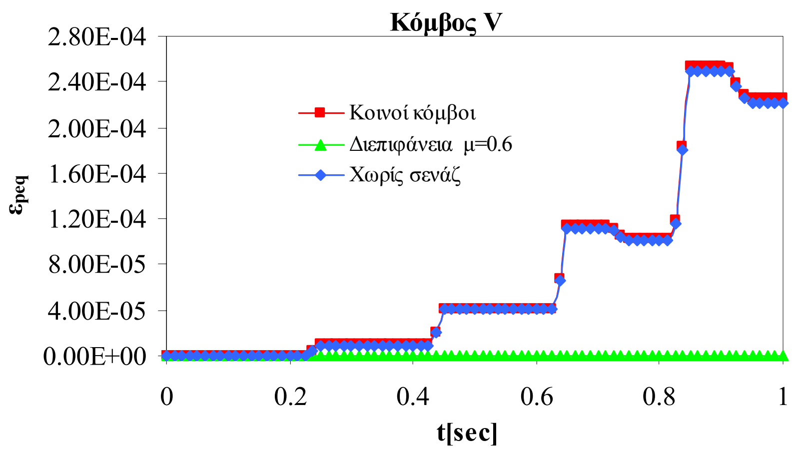
Σχήμα 5.37: Χρονοϊστορία ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, ε_{peq}, στον κόμβο III για την περίπτωση της εντός επιπέδου σεισμικής φόρτισης τοίχου ενισχυμένου με σενάζ.



Σχήμα 5.38: Χρονοϊστορία ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, ε_{peq}, στον κόμβο IV για την περίπτωση της εντός επιπέδου σεισμικής φόρτισης τοίχου ενισχυμένου με σενάζ.



Σχήμα 5.39: Χρονοϊστορία ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, ε_{peq}, στον κόμβο V για την περίπτωση της εκτός επιπέδου σεισμικής φόρτισης τοίχου ενισχυμένου με ανώφλια.



Σχήμα 5.40: Χρονοϊστορία ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης, ε_{peq}, στον κόμβο V για την περίπτωση της εκτός επιπέδου σεισμικής φόρτισης τοίχου ενισχυμένου με σενάζ.

Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση που έγινε, μπορούν να γίνουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Από την επίλυση του τοίχου χωρίς στοιχεία ενίσχυσης, εντοπίζονται οι ασθενείς μηχανικά περιοχές στις οποίες προβλέπεται να εκδηλωθεί αστοχία του υλικού. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση της εντός επιπέδου σεισμικής φόρτισης, οι πλαστικές παραμορφώσεις εντοπίζονται στις γωνίες των ανοιγμάτων και στα πλευρικά όρια του τοίχου κοντά στη βάση του. Αντίθετα στην περίπτωση της εκτός επιπέδου σεισμικής φόρτισης, οι πλαστικές παραμορφώσεις εντοπίζονται στις περιοχές μεταξύ των ανοιγμάτων και στη βάση του τοίχου (Σχήμα 5.34).

- Τα στοιχεία ενίσχυσης, ανώφλια και σενάζ, δεν φαίνεται να αναστέλλουν αποτελεσματικά την εμφάνιση πλαστικών παραμορφώσεων, στην περίπτωση που η διεπιφάνεια σκυροδέματος-τοιχοποιίας προσεγγίζεται με την χρήση κοινών κόμβων μεταξύ των δύο υλικών και για τους δύο τύπους φόρτισης (Σχήματα 5.28-5.33 και 5.35-5.40).

- Στην περίπτωση που η διεπιφάνεια σκυροδέματος-τοιχοποιίας προσεγγίζεται με τη χρήση στοιχείων επαφής με συντελεστή τριβής μ=0.6, παρατηρούνται τα εξής, ανάλογα με το είδος των στοιχείων ενίσχυσης:

  ⇒ Η χρήση ανωφλίων και για του δύο τύπους φόρτισης, αφενός μεν δεν ανακουφίζει τις επικίνδυνες για αστοχία περιοχές του τοίχου, αφετέρου δε προκαλεί την εντονότερη καταπόνηση των περιοχών αυτών με αποτέλεσμα να επεκτείνεται η εμφάνιση πλαστικών παραμορφώσεων (Σχήμα 5.34). Το φαινόμενο αυτό είναι εντονότερο στην εντός επιπέδου σεισμική φόρτιση (Σχήμα 5.30), καθώς λόγω της υψηλής εδαφικής επιτάχυνσης που δέχεται ο τοίχος κατά την οριζόντια διεύθυνση, τα ανώφλια είναι δυνατό να λειτουργήσουν ως σφήνες στην τοιχοποιία, προκαλώντας την επέκταση των ρωγμών που είδη υπάρχουν.

⇒ Αντίθετα με τα ανώφλια, τα σενάζ ανακουφίζουν πλήρως τις επικίνδυνα καταπονούμενες περιοχές, αποτρέποντας πρακτικά την εκδήλωση αστοχίας του υλικού και κατά συνέπεια την εμφάνιση πλαστικών παραμορφώσεων (Σχήμα 5.29, 5.31, 5.33 και 5.34). Το φαινόμενο αυτό παρουσιάζεται και στις δύο περιπτώσεις σεισμικής φόρτισης.

Κεφάλαιο 6ο

Συμπεράσματα - προτάσεις

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της βιβλιογραφικής επισκόπησης, αλλά και της μελέτης συγκεκριμένων προβλημάτων μηχανικής της τοιχοποιίας με την εφαρμογή υπολογιστικών μεθόδων, μπορούν να διατυπωθούν τα ακόλουθα γενικά συμπεράσματα:

- Οι κατασκευές από τοιχοποιία, χρήζουν ιδιαιτέρας αντιμετώπισης όταν προσομοιώνεται η μηχανική τους συμπεριφορά με αριθμητικές μεθόδους. Αυτό συμβαίνει αφενός μεν επειδή αποτελούν σύνθετα ψαθυρά υλικά, αφετέρου δε επειδή είναι ανομοιογενή και ανισότροπα υλικά τόσο ως προς τις μηχανικές τους αντοχές, όσο και ως προς τις μηχανικές τους ιδιότητες.

- Η ασφαλέστερη μέθοδος για τον προσδιορισμό των μηχανικών αντοχών και ιδιοτήτων μιας τοιχοποιίας, είναι η διεξαγωγή εργαστηριακών δοκιμών σε δείγματα που λαμβάνονται από μια συγκεκριμένη κατασκευή. Επειδή όμως πολλές φορές είναι αδύνατο ή πολύ δύσκολο να ληφθούν δείγματα τοιχοποιίας, ιδιαίτερα από ιστορικές κατασκευές, η μηχανική ομογενοποίηση με την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων αποτελεί μια ικανοποιητική εναλλακτική λύση, εφόσον έχει ελεγχθεί ως προς την ορθότητα των αποτελεσμάτων που δίνει. Επιπλέον οι αριθμητικές μέθοδοι είναι ταχύτερες και προσφέρουν τη δυνατότητα προσέγγισης τοιχοποιιών με πολύπλοκη γεωμετρικά μικροδομή (λιθοδομές με ακατέργαστους φυσικούς λίθους).

- Η μη γραμμική καταστατική συμπεριφορά μιας τοιχοποιίας μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά με την εφαρμογή της ελαστοπλαστικής ανάλυσης, εφόσον ορισθεί μια αντιπροσωπευτική του υλικού συνάρτηση διαρροής. Η συναρτήσεις ή κριτήρια διαρροής που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους τις διαφορετικές αντοχές της τοιχοποιίας σε εφελκυσμό και θλίψη όπως επίσης και τους αντίστοιχους τρόπους αστοχίας (εφελκυσμός-διάτμηση). Τέλος οι πλαστικές παραμορφώσεις που υπολογίζονται, αποτελούν ένα δείκτη για το είδος της αστοχίας (αστοχία σε εφελκυσμό, θλίψη ή/και διάτμηση), το μέγεθος, αλλά και την έκταση των βλαβών που μπορεί να εμφανίσει μια κατασκευή, υπό την επίδραση μιας συγκεκριμένης καταπόνησης.

- Το γενικευμένο τετραγωνικό κριτήριο, με την εισαγωγή μιας επιπλέον παραμέτρου που καθορίζει τη μορφή του, δίνει τη δυνατότητα προσαρμογής της περιβάλλουσας αστοχίας στα πειραματικά δεδομένα πολυαξονικής θλίψης. Σημειώνεται ότι όσο μικρότερη είναι η περιοχή ασφαλών τάσεων που οριοθετεί η περιβάλλουσα αστοχίας, τόσο ακριβέστερη είναι η προσέγγιση των περιοχών του υλικού που εκδηλώνεται η αστοχία.

- Η ενίσχυση κατασκευών από τοιχοποιία με την χρήση δομικών στοιχείων από σκυρόδεμα, είναι ένα πολυπαραμετρικό πρόβλημα καθώς έχει να κάνει τόσο με την μη γραμμική καταστατική συμπεριφορά της τοιχοποιίας, όσο και με ζητήματα επαφής υλικών με διαφορετικές φυσικές και μηχανικές ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα το σκυρόδεμα παρουσιάζει γενικά μεγαλύτερη δυσκαμψία από μια τοιχοποιία και αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα στοιχεία ενίσχυσης (ανώφλια, τοιχία κτλ.) κάποιες φορές να λειτουργούν ως αυτόνομα σώματα, επιβαρύνοντας την εντατική κατάσταση της κατασκευής. Η λειτουργία αυτή των στοιχείων ενίσχυσης εξαρτάται από το είδος και το μέγεθος της καταπόνησης που δέχεται η κατασκευή. Παρόλα αυτά η τοποθέτηση κατάλληλων στοιχείων ενίσχυσης, όπως τα σενάζ, κυρίως σε περιοχές όπου μεταβάλλεται απότομα η γεωμετρία μιας τοιχοποιίας (περιοχές κοντά στα ανοίγματα κτλ.) συντελεί στην εκτόνωση των τάσεων και τον περιορισμό των βλαβών.

- Στην πράξη έχει παρατηρηθεί ότι η τοποθέτηση σενάζ πάνω από τα ανοίγματα ενός τοίχου από τοιχοποιία, έχει ως αποτέλεσμα την αποφόρτιση των μηχανικά ασθενών περιοχών και της αποφυγή αστοχίας του υλικού. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώθηκε από τις αριθμητικές εφαρμογές μόνο στην περίπτωση που η διεπιφάνεια σκυροδέματος-τοιχοποιίας προσεγγίστηκε με την χρήση στοιχείων επαφής. Αυτό αποδεικνύει ότι στη πραγματικότητα υπάρχει δυνατότητα σχετικής μετατόπισης μεταξύ τοιχοποιίας και στοιχείων ενίσχυσης, με αποτέλεσμα οι δυνάμεις τριβής που αναπτύσσονται, να αποσβένουν μεγάλο τμήμα της μηχανικής ενέργειας που αποδίδεται στη κατασκευή από την εφαρμογή ενός οριζοντίου σεισμικού φορτίου.

Κάποιες προτάσεις που μπορούν να γίνουν για περεταίρω ερεύνα του θέματος που εξετάστηκε στη παρούσα εργασία, είναι οι ακόλουθες:

- Ανάκτηση πειραματικών δεδομένων από πολυαξονικές δοκιμές αντοχής τοιχοποιιών, ώστε να υπάρξει μια πιο σαφή εικόνα τόσο για την καταστατική συμπεριφορά όσο και για τα κριτήρια αστοχίας των συγκεκριμένων υλικών. Τα πειραματικά δεδομένα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και για την αξιολόγηση της μηχανικής ομογενοποίησης με την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων.

- Διατύπωση κριτηρίων αστοχίας και συναρτήσεων διαρροής που να προσεγγίζουν πληρέστερα την μη γραμμική καταστατική συμπεριφοράς μιας τοιχοποιίας κατά την ελαστοπλαστική ανάλυση. Επιπλέον, έλεγχος αστοχίας της τοιχοποιίας με την χρήση υλικών χαμηλής εφελκυστικής αντοχής κατά την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων προσομοίωσης.

Σύμφωνα με τα συμπεράσματα και τις προτάσεις που παρατέθηκαν παραπάνω προτείνεται η ακόλουθη διαδικασία για την μελέτη αντοχής και ενίσχυσης μιας υφιστάμενης κατασκευής από τοιχοποιία:

1. Συλλογή πειραματικών δεδομένων από εργαστηριακές δοκιμές, για τον προσδιορισμό των μηχανικών αντοχών της τοιχοποιίας.

2. Προσέγγιση των μηχανικών αντοχών μιας τοιχοποιίας από τις αντίστοιχες αντοχές τοιχοσωμάτων και κονιάματος με την μέθοδο της αριθμητικής ομογενοποίησης.

3. Αξιολόγηση των πειραματικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων και εξαγωγή των τελικών μηχανικών αντοχών

4. Επιλογή κριτηρίου αστοχίας ή διαρροής ανάλογα με την τρόπο που προσεγγίζεται η μη γραμμική συμπεριφορά της τοιχοποιίας. Τα κριτήρια που προτείνονται είναι το παραβολικό Mohr-Coulomb, το κριτήριο του Buyukozturk αλλά και το Γενικευμένο Τετραγωνικό. Τα συγκεκριμένα κριτήρια διαχωρίζουν τους μηχανισμούς αστοχίας μιας τοιχοποιίας, ενώ έχουν την ικανότητα να προσαρμόζονται ικανοποιητικά και στα δεδομένα πολυαξονικής θλίψης.

5. Μη γραμμική αριθμητική προσομοίωση της κατασκευής με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε στατική και δυναμική καταπόνηση. Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης είναι δυνατό να εντοπιστούν οι πιθανές περιοχές της κατασκευής που υπάρχει κίνδυνος εμφάνισης βλαβών ή αστοχίας.

6. Επιλογή, ανάλογα με την περίπτωση, του τρόπου ενίσχυσης της κατασκευής από στοιχεία οπλισμένου σκυροδέματος. Προτείνεται η χρήση σενάζ καθώς όπως αποδείχτηκε και από την ανάλυση που έγινε, ο συγκεκριμένος τρόπος ενίσχυσης βοηθάει περισσότερο στην αποφόρτιση των μηχανικά ασθενών περιοχών της κατασκευή.

7. Νέα αριθμητική προσομοίωση της ενισχυμένης κατασκευής και αξιολόγηση του επιλεγμένου τρόπου ενίσχυσης.

Βιβλιογραφία – Αναφορές

[1]. Αγιουτάντης Γ. Ζ., **Στοιχεία Γεωμηχανικής – Μηχανική Πετρωμάτων**, Εκδόσεις Ίων, Αθήνα, 2002.

[2]. Ananiev S., Ozbolt J., **Plastic-Damage model for concrete in principal directions**, University of Stuttgart, Germany, 2007.

[3]. Αστερής, Π.Γ., **Μη γραμμική ανάλυση τοιχοποιιών υπό διαξονική ένταση**, Τεχνικά Χρονικά, Επιστημονική Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, σειρά Ι, τόμος 23, τεύχος 1-2, σελ. 13-23, 2003.

[4]. Bachmann H., **Αντισεισμική Προστασία των Κατασκευών**, Ζυρίχη, 1995, Απόδοση στα ελληνικά: Δημ. Πέντζας, Εκδόσεις Γκιούρδας, Αθήνα, 1998.

[5]. Berto L., Saetta A., Scotta R., Vitaliani R., **An orthotropic damage model for masonry structures**, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 55, pp. 127-157, John Willey & Sons, 2002.

[6]. Berto L., Scotta R., Vitaliani R., Saetta A., **An orthotropic damage model for non linear masonry walls analysis: Irreversible strain and friction effects**, Historical Constructions, pp. 637-646, 2001.

[7]. Bigoni D., Piccolroaz A., **Yield criteria for quasibrittle and frictional materials**, International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 2855-2878, Elsevier, 2004.

[8]. Buyukozturk O., **Non linear Analysis of Reinforced Concrete Structures**, Computer and Structures, Vol. 7, pp. 149-156, Pergamon Press, Great Britain, 1977.

[9]. Buyukozturk O., Sharref S.S., **Constitutive modeling of concrete in finite element analysis**, Computer and Structures, Vol. 21 No. 3, pp. 581-610, Pergamon Press, Great Britain, 1985.

[10]. Christensen M.R., **A two-property yield, failure (fracture) criterion for homogeneous, isotropic materials**, Journal of Engineering materials and technology, Vol. 126, pp 45-52, ASME, 2004.

[11]. Calderini C., Lagomarsino S., **A micromechanical inelastic model for historical masonry**, Journal of Earthquake Engineering, Vol. 10, No 4, pp. 453-479, Imperial College Press, 2006.

[12]. Casolo S., **Macroscopic modelling of structured materials: Relationship between orthotropic Cosserat continuum and rigid elements**, International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, pp 475-496, Elsevier, 2006.

[13]. Cavicchi A., Gambarotta L., **Collapse analysis of masonry bridges taking into account arch-fill interaction**, Engineering Structures, Vol. 27, pp 605-615, Elsevier, 2005.

[14]. Chopra K. A., **Dynamic of structures**, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[15]. Cook R., Malkus D., Plesha M., **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, J. Wiley, 1989.

[16]. Cristfield M.A., **Non Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1&2-Advanced Topics**, John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, England, 1997.

[17]. Drosopoulos G.A., Stavroulakis G.E., Massalas C.V., **Limit analysis of a single span masonry bridge with unilateral frictional contact interfaces**, Engineering Structures, 28, pp. 1864-1873, 2006.

[18]. Gambarotta L., Lagomarsino S., **A microcrack damage model for brittle material**, International Journal of Solids and Structures, Vol. 30, No 2., pp. 177-198, Pergamon Press, 1993.

[19]. Genna F., DiPasqua M., Veroli M., **Numerical analysis of old masonry buildings: a comparison among constitutive models**, Engineering Structures, 20(1-2), pp.37-53, 1998.

[20]. Giordano A., Mele E., De Luca A., **Modelling of historical masonry structures: comparison of different approaches through a case study**, Engineering Structures, 24, pp. 1057-1069, 2002.

[21]. Hatzigeorgiou G.D., Beskos D.E., Theodorakopoulos D.D., Sfakianakis M., **Static and dynamic analysis of the Arta bridge by finite elements**, FACTA UNIVERSITATIS, Seried: Architecture and Civil Engineering, 2(1), pp. 41-51, 1999.

[22]. Henriques J.P., Lourenco P.B., **Masonry compression: a numerical investigation at the meso-level**, Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, Vol. 23 No. 4, pp. 382-407, Emerald, 2006.

[23]. Karaveziroglou M., Stavrakakis E., Lazarides P., Liolios A., Giannopoulou M., Roukounis Y., Yeroyianni M., **A comparative analysis of some historical stone arch bridges in Greece by two new numerical approaches**, Historical Construction, eds. P.B. Lourenço, P. Roca, Guimaraes, pp.749-755, 2001.

[24]. Καραντώνη Φ.Β., **Κατασκευές από τοιχοποιία, Σχεδιασμός και επισκευές**, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2004.

[25]. Leftheris B., Stavroulaki M.E., Sapounaki A.C., Stavroulakis G.E., **Computational methods for heritage structures**, WIT Press, Southampton, U.K., 2006.

[26]. Λιαράκος Β.Ε., **Σεισμική ανάλυση υπογείων τεχνικών έργων από οπλισμένο σκυρόδεμα**, Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανια, 2005.

[27]. Litewka A., Szojda L., **Damage, plasticity and failure ceramics and cementitious composites subjected to multi-axial state of stress**, International Journal of Plasticity, Vol. 22, pp 2048-2065, Elsevier, 2006.

[28]. Lourenço P.B., **An anisotropic macro-model for masonry plates and shells: Implementation and validation**, Report No. 03.21.1.3.07, Delft University of Technology, Delft, 1997.

[29]. Lourenço P.B., **Computations on historic masonry structures**, Prog. Struct. Engng Mater, 4, pp. 301-319, 2002.

[30]. Lourenco P.B., Henriques J.P., **Validation of analytical and continuum numerical methods for estimating the compressive strength of masonry**, Computers and Structures, Elsevier, 2006.

[31]. Lourenço P.B., Ramos L.F., **Characterization of cyclic behaviour of dry masonry joints**, Journal of Structural Engineering, ASCE, 130(5), pp. 779-786, 2004.

[32]. Lourenço P.B., Rots J.G. and Blaauwendraad J., **Continuum model for masonry: Parameter estimation and validation**, Journal of Structural Engineering, ASCE, 124(6), pp. 642-652, 1998.

[33]. Milani G., Lourenco P.B., Tralli A., **Homogenised limit analysis of masonry walls, Part I: Failure surfaces**, Computers and Structures, pp. 166-180, Elsevier, 2006.

[34]. MSC engineering group, **Marc-Mentat, 2000 Manuals**, Theory and User Information, 2000.

[35]. Ozbolt J., Ananiev S., **Scalar damage model for concrete without explicit evolution law**, University of Stuttgart, Germany, 2007.

[36]. Παπαδρακάκης Μ., **Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων**, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2001.

[37]. Παπαμίχος Ε., Χαραλαμπάκης Χ. Ν., **Αντοχή των Υλικών**, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2004.

[38]. Paulay T., Priestley M.J.N, **Αντισεισμικός σχεδιασμός κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα και τοιχοποιία**, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 1999.

[39]. Pietruszczak S., Ushaksaraei R., **Description of inelastic behaviour of structural masonry**, International Journal of Solids and Structures, Vol 40, pp. 4003-4019, Pergamon Press, 2003.

[40]. Stavroulaki M., **Finite element analysis of a stone bridge for failure prediction**, 7th National Congress on Mechanics, 24-26 June, Chania, Greece, 2004.

[41]. Stavroulaki M., **Parametric analysis of a stone bridge under dynamic loads**, Proceedings of International conference on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering, Thessaloniki, Greece, 7-8 July 2006, pp. 413-422.

[42]. Stavroulaki M.E., Liarakos B.E., **Parametric dynamic analysis of a masonry wall with lintels of reinforced concrete over the openings**, Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, COMPDYN2007, Rethymno, Greece, 13–16 June 2007.

[43]. Stavroulaki M.E., Liarakos B.E., **Parametric finite element analysis of masonry structures using different constitutive models**, 6th GRACM

International Congress on Computational Mechanics, Thessaloniki, Greece, 19-21 June, 2008.

[44]. Stavroulaki M.E., Stavroulakis G.E., **Unilateral contact application using FEM software**, Journal of Applied Mathematics and Computer Science, Special issue on **Mathematical Modeling and Numerical Analysis in Solid Mechanics**, Guest Editors Sofonea M., Viano J.M., pp 101-111, 2002.

[45]. Thavalingam A., Bicanic N., Robinson J.I., Ponniah D.A., **Computational framework for discontinuous modelling of masonry arch bridges**, Computers & Structures, 79, pp. 1821-1830, 2001.

[46]. Tomazevic M., **Earthquake – Resistant Design of Masonry Buildings**, Innovation in Structures and Construction Series, Imperial College Press, 1999.

[47]. Zucchini A., Lourenco P.B., **A coupled homogenisation-damage model for masonry cracking**, Computers and Structures, Elsevier, 2004.

[48]. Zucchini A., Lourenco P.B., **Mechanics of masonry in compression: Results from a homogenisation approach**, Computers and Structures, Elsevier, 2007.

Παράρτημα Α΄

Δημοσίευση στο συνέδριο COMPDYN 2007

ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods
in Structural Dynamics and Earthquake Engineering
M. Papadrakakis, D.C. Charmpis, N.D. Lagaros, Y. Tsompanakis (eds.)
Rethymno, Crete, Greece, 13–16 June 2007

PARAMETRIC DYNAMIC ANALYSIS OF A MASONRY WALL WITH LINTELS OF REINFORCED CONCRETE OVER THE OPENINGS

Maria E. Stavroulaki[1], **Vagelis B. Liarakos**[1]

[1] Applied Mechanics Laboratory, Department of Sciences, Technical University of Crete
73100 Kounoupidiana, Chania, Crete,
Greece
e-mail: mstavr@mred.tuc.gr, Vagelis_41@yahoo.gr

Keywords: Masonry, Finite element modeling; Unilateral contact; Dynamic analysis.

Abstract. *In order to study the unilateral contact effects (i.e. separation, sliding) between the lintels of reinforced concrete over the openings and the masonry wall, a parametric non-linear dynamic analysis was done. The nonlinear behaviour of the masonry is modelled by means of appropriately modified elastoplastic laws. Different values of the friction coefficient, various designs for the roof and the horizontal plates at the first floor and various earthquakes are considered. From the analysis it is shown that the influence of this reinforcement on the dynamic response of masonry structures depends on many parameters like the magnitude of the ground motion and the friction coefficient of the interface between the lintels and the masonry. The positive effects of contact mechanisms can be reduced in case of a strong motion where topical relief in parallel with stress concentration to other places appear.*

1 INTRODUCTION

The application of various strengthening methods on existing masonry structures leads to changes of the existing structure and the need of cooperation between materials with different mechanical behaviour. This could be critical in some cases of dynamic loads like seismic excitations. The cooperation of the new materials and general the new structural elements with the old masonry depends on the way of construction and the degree of connection between them. If full connection does not exist partial contact phenomena are developed which are responsible for the beneficial aseismic behaviour.

The dynamic response of masonry structures depends on the non-linearity of both the masonry and the material used for the strengthening. By using an elastoplastic model for the masonry the computed plastic deformation indicates the degree of the developed damages. The comparison of the analytical results with the existing damages is used for modelling verification. Comparison of the results of the non-linear dynamic response analysis of the structure before and after the application of strengthening techniques, provide us with the evaluation of the strengthening method effectiveness.

The replacement of old wooden beams with lintels of reinforced concrete over the openings to a masonry wall is widely used technique. A lintel is a structural member placed over an opening in a wall. In the case of a brick masonry wall, lintels may consist of reinforced brick masonry, brick masonry arches, precast concrete or structural steel shapes. Regardless of the material chosen for the lintel, its prime function is to support the loads above the opening, and it must be designed properly. To eliminate the possibility of structural cracks in the wall above these openings, the structural design of the lintels should not involve the use of "rule-of-thumb" methods, or the arbitrary selection of structural sections without careful analysis of the loads to be carried and calculation of the stresses developed. Many of the cracks which appear over openings in masonry walls are due to excessive deflection of the lintels resulting from improper or inadequate design.

In this work the influence of the horizontal reinforced concrete lintels on the mechanical behavior of a typical masonry wall is studied, by taking into account contact effects (i.e. separation and sliding) between lintels and the masonry wall. The nonlinear behaviour of the masonry is modelled be means of appropriately modified elastoplastic laws and different values of the friction coefficient, various designs of the roof and the horizontal plates at the first floor and various earthquakes loads are considered. Some results of the parametric non-linear dynamic analysis are presented in this paper.

2 UNILATERAL FRICTIONAL CONTACT ANALYSIS

Several computational methods have been developed for modeling and analysis of historical masonry structures [1, 2]. The possibility that some separation appears between two parts of a structure coming into contact is known as the unilateral contact phenomenon. This is a typical variable-structure nonlinearity, which involves either-or decisions in the mechanical model. The frictional stick-slip nonlinearity is an analogous phenomenon. Both problems belong to the area known as nonsmooth mechanics [3, 4].

Unilateral contact along interfaces is a suitable model for nonlinear analysis of masonry structures [5, 6]. A number of potential interfaces at the boundaries of the lintels and the masonry wall, are defined and along these interfaces separation and frictional effects are considered. The actual state at each point of the interface will be found after the solution of the problem. In case of unilateral contact and friction, several empirical or semi-empirical algorithms have been proposed and modern general-purpose finite element software (like the MARC [7] which is used for this study) can be used for the solution of real-life problems.

The numerical objective is to calculate the mechanical response of the bodies, to apply suitable constraints to avoid penetration and to apply appropriate boundary conditions for the friction behavior. The Coulomb friction model is used and the computation of Coulomb friction can be based on either nodal stresses or nodal forces. For the solution of the contact problem the direct constraint method is used in the following application. In this procedure, the motion of the bodies is tracked and when contact occurs, direct constraints are placed on the motion using boundary conditions, both kinematic constraints on transformed degrees of freedom and nodal forces. The constraint imposed ensure that penetration does not occur. In our model these constraints are modeled by the definition of tying relations for displacement components of the contacting nodes.

3 FINITE ELEMENT MODELING

3.1 Geometry of the models

A masonry wall including reinforcing elements from reinforced concrete material (lintels) over the door or window openings was considered. The finite element model with its dimensions is shown in Figure 1.

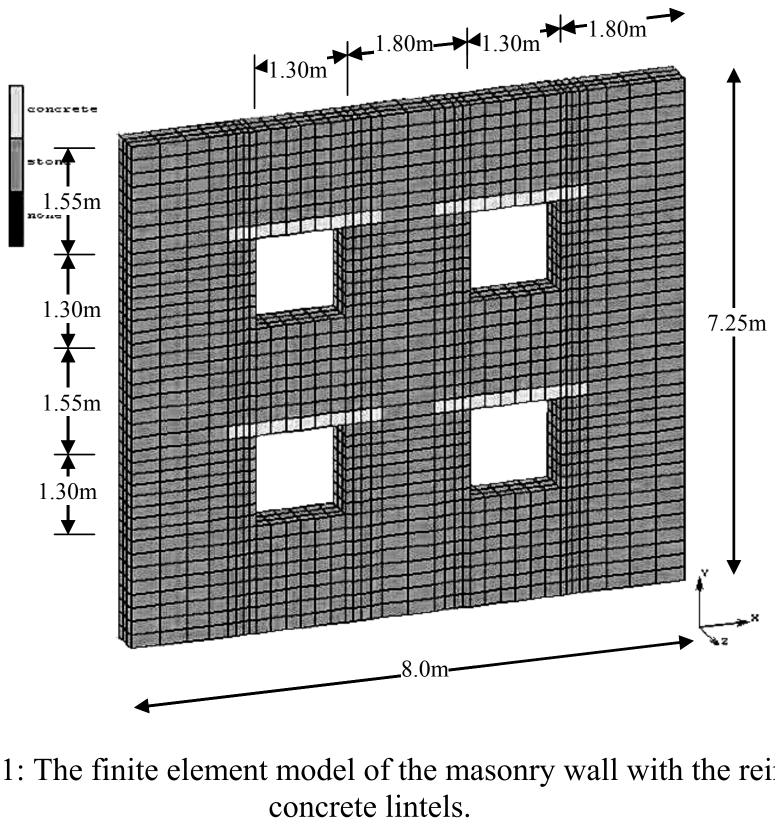


Figure 1: The finite element model of the masonry wall with the reinforced concrete lintels.

The following load cases were considered: the weight of the mass, a vertical pressure at the level of the first floor (simulating the loads which are transferred to the wall from the horizontal slab) and a vertical pressure at the top level (simulating the loads of the roof). A displacement history according to the earthquake of Kobe (1996) was considered at the applied base movement of the wall (fig. 2) in the out of plane direction (perpendicular to the wall). Since the earthquake excitation was strong enough, two load cases were considered:

First the real data of displacement was applied but the analysis was done for the first 10 sec, Second the whole history was applied but after multiplication of the displacement values with a factor 0.25, in order to see the influence of contact mechanism for a non strong excitation.

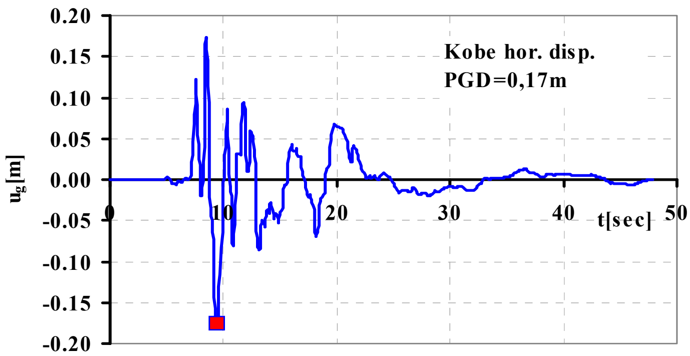


Figure 2: Displacement history of Kobe earthquake data.

3.2 Material Model

As it is well known the masonry or the stone wall is composed of materials with brittle mechanical behaviour, small to zero strength to tension, and is in a lot of cases non homogeneous. Although each component of a masonry wall has its own specific mechanical characteristics, they are all expected to act together as an homogeneous structural material. In the past a number of theories have been developed in order to represent the mechanical behavior of this composite material which consists of stones and mortar in between, with high compression and low tension strength.

In case of an earthquake, the structure will be subjected to a series of cyclic horizontal actions, which will often cause high additional bending and shear stresses in structural walls, exceeding the range of the elastic behaviour. The nonlinearity of the material appears for example if the stress-strain relationship or constitutive equation is nonlinear.

Thus, for the nonlinear analysis of the examined models, in addition to the elastic material constants (Young's modulus and Poisson's ratio), the yield stress and the hardening slopes were included. These last two constants deal with the inelastic (plastic) material behavior by the definition of a stress-strain curve which is described from two branches, the first one which corresponds to the elastic region of the material and the second one to the plastic region.

The magnitude of the yield stress is generally obtained from a uniaxial test but since the stresses in a structure are usually multiaxial, a yield condition must be used for measurement of yielding of the mutliaxial state of stress. The yield condition can be dependent on all stress components, on shear components only, or on hydrostatic stresses. In our application the Mohr-Coulomb material model was used which describe elastic-plastic behavior based on a yield surface that exhibits hydrostatic stress dependence. Such behavior is observed in a wide class of soil and rock-like materials.

The material data (elastic properties) of the masonry are as follows: Young's modulus E= 8820 MPa, Poisson's ration ν= 0.15 and Density 1700 Kg/m3 . The material has been considered as homogeneous and isotropic, the numerical values have been chosen on the basis of compression tests performed on specimens. Also a damping equal to 5% was considered. For masonry two cases were examined: first the Mohr-Coulomb model developed by Drucker and Prager has been used with isotropic hardening and for the plasticity the initial yield stress is assumed to be equal to 228.523 kPa. As a second case failure criteria based on maximum stresses have been used. Particularly, the following considerations were done: maximum tensile stress = 880 kPa, maximum compressive stress=8.8 MPa and maximum shear stress=198 kPa.

The material data used for the description of the elastic properties of the shotcrete are as follows: Young's modulus E= 27406 MPa, Poisson's ration ν= 0.20 and Density 2400 Kg/m3.

3.3 Finite element models

The finite element method was used on a three - dimensional, solid model of the wall. Solid finite elements have been used for the analysis In order to consider the unilateral contact effects in our analysis, the lintels were separated from the wall and were connected with unilateral frictional interfaces. The criterion about crack initiation - opening is based on the normal stresses which are developed at the outer nodes of the contact bodies. The yield limit was considered equal to 0.1Mpa.

The following three models, with different contact and friction conditions were examined:

Model 1: Fixed conditions were considered between the masonry wall and the lintels.

Model 2: Contact conditions with friction coefficient equal to 0.4, between the masonry wall and the lintels were considered.

Model 3: Contact conditions with friction coefficient equal to 0.6, between the masonry wall and the lintels were considered.

4 RESULTS

In the case with the elastoplastic material model, the estimation of the region with plastic strain is an indication of failure and crack development. The contours of the equivalent plastic strain, for the two load cases, are given in figure 3 and 4 respectively.

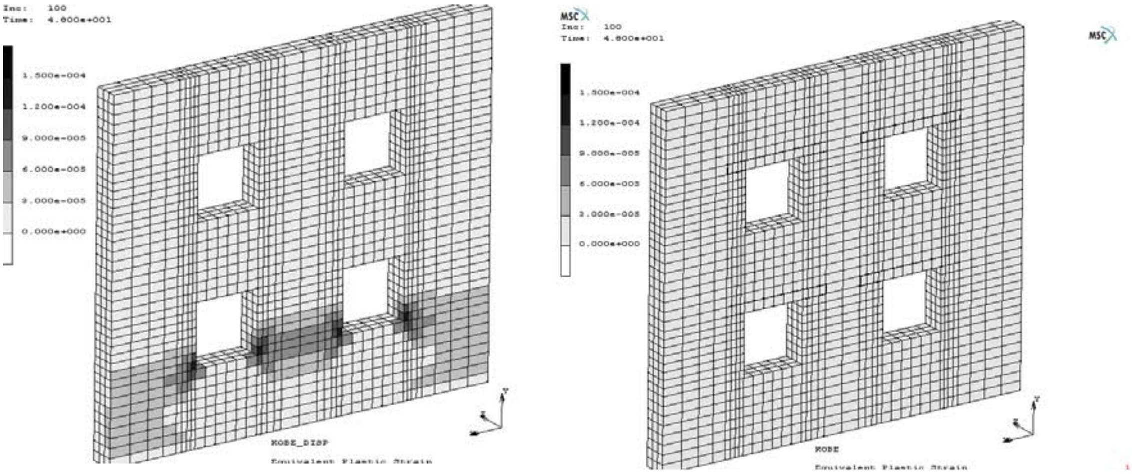


Figure 3: Equivalent plastic strain at time 48sec (First load case), for Model 1 (left) and Model 2 (right).

In a previous work [10], it was shown from a static analysis with a suitable earthquake equivalent loading, that the consideration of the unilateral effects reduces the plastic strains in the masonry wall. In the present investigation, which is based on dynamic analysis, it is shown that the horizontal reinforced concrete lintels, is able to eliminate the plastic strain in the case with the non strong earthquake (fig. 3), something which doesn’t happened in case with the strong excitation (fig. 4, the analysis of the first 10 sec and for the recorded values of the displacement). The same notice is shown in the figures 5 and 6 where the history of equivalent plastic strain and for a node at the level of the lower openings (node I, fig. 1), are given.

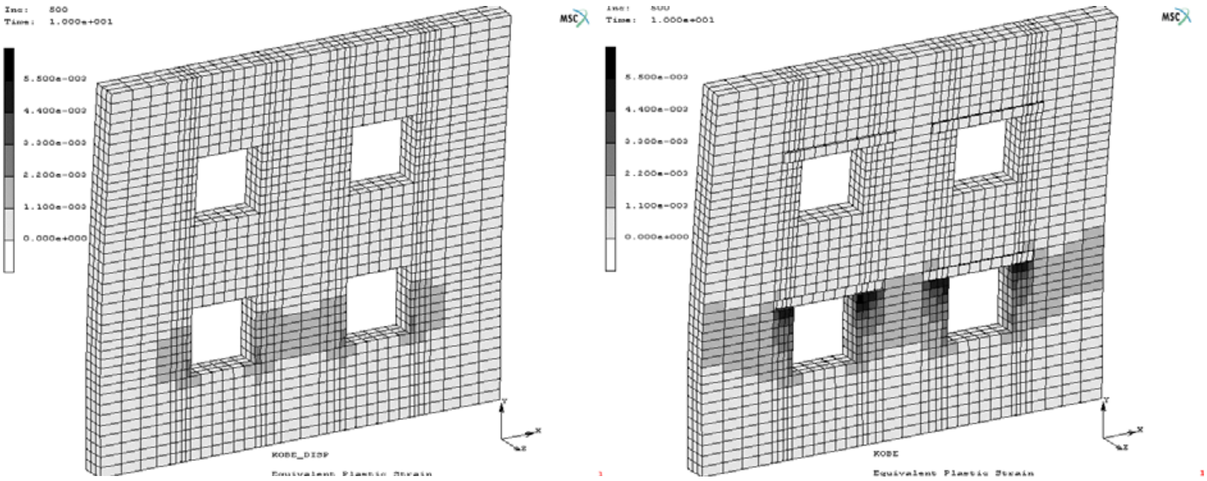


Figure 4: Equivalent plastic strain at time 48sec (First load case), for Model 1 (left) and Model 2 (right).

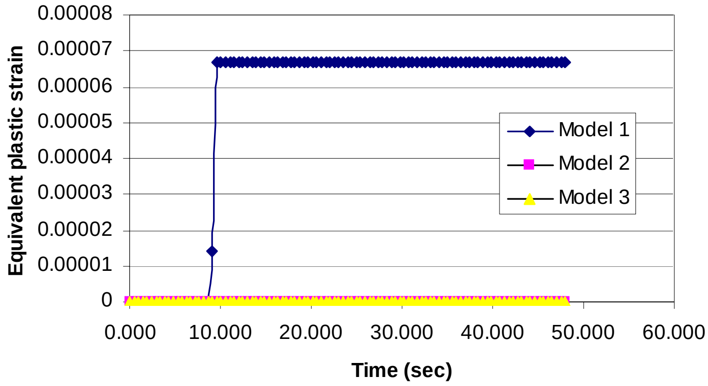


Figure 5: History of equivalent plastic strain of node I (first load case).

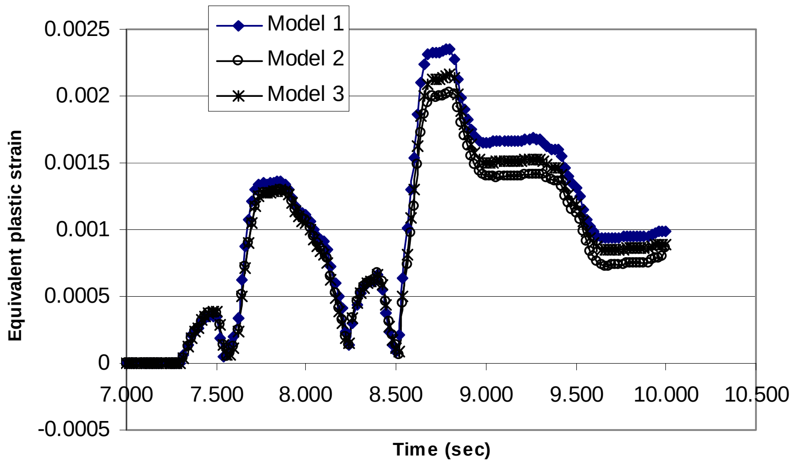
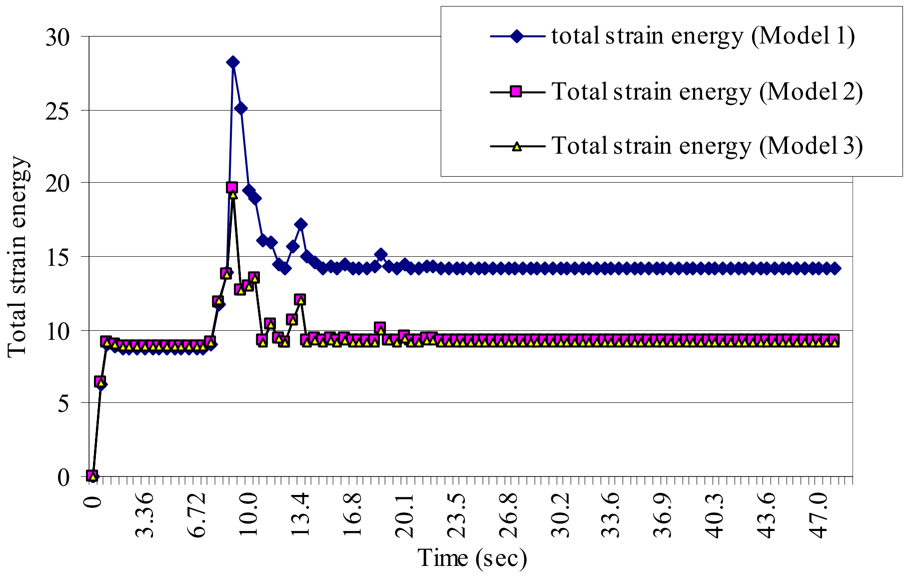
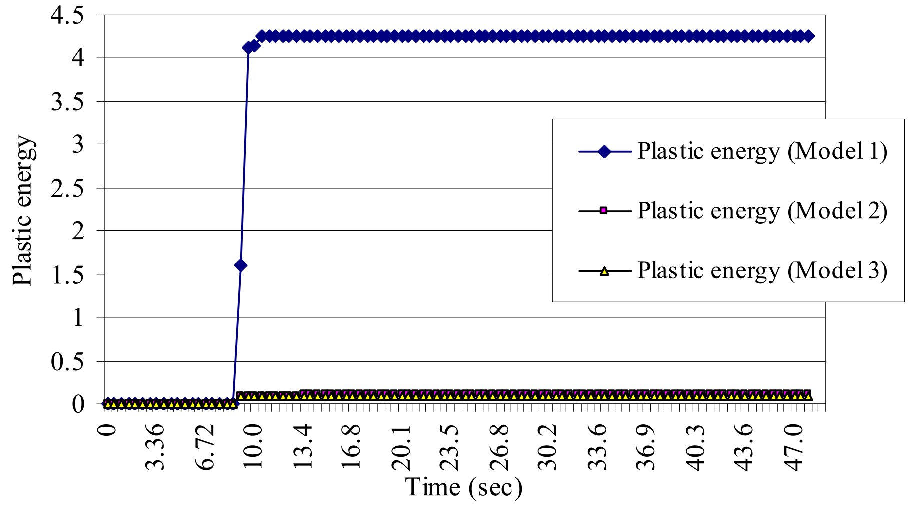
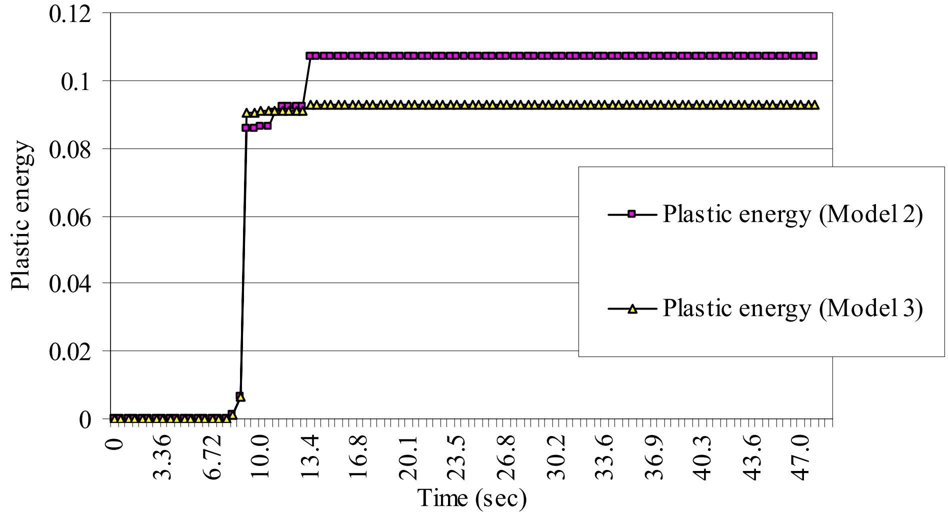


Figure 6: History of equivalent plastic strain of node I (second load case).







5 CONCLUSIONS

The horizontal reinforced concrete lintels, reduce the plastic strains when contact and friction effects exist between them and the masonry wall for not strong excitation. In opposite for strong excitations stress concentrations appear at different places. The same conclusion is given from the analysis considering failure criteria and calculating the corresponding failure index. The energy dissipation mechanism which work in the case of small displacements would leads to negative results when the sliding movements between the lintels and the masonry goes beyond some limits. Further investigation is needed about this mechanism and its behaviour under various seismic excitations.

REFERENCES

[1] P.B. Lourenço, *Computations on historic masonry structures*, *Prog. Struct. Eng. Mater.*, **4**, 301-319, 2002.

[2] B. Leftheris, M.E. Stavroulaki, A.C. Sapounaki, G.E. Stavroulakis, *Computational methods for heritage structures*, WIT Press, Southampton, U.K., 2006.

[3] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1985.

[4] E.S. Mistakidis, G.E. Stavroulakis, *Nonconvex optimization in mechanics, Smooth and nonsmooth algorithms, heuristics and engineering applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[5] M. E. Stavroulaki, G.E. Stavroulakis, "Unilateral contact applications using FEM software", Guest Editors: M. Sofonea, J.M. Viano, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences, Special Issue: Mathematical Modeling and Numerical analysis in Solid Mechanics*, **12**(1), 2002.

[6] M.E. Stavroulaki, G.E. Stavroulakis, Unilateral frictional contact nonlinearities in aseismic design and restoration of heritage structures, Editor: C.C. Baniotopoulos, *International Conference on Nonsmooth/Nonconvex Mechanics, with Applications in Engineering*, Thessalloniki, Greece, July 5-6, 209-216, 2002.

[7] MARC Analysis Research Corporation, *Theory and user information*, 1997

Παράρτημα Β΄

Δημοσίευση στο συνέδριο 6th GRACM 2008

PARAMETRIC FINITE ELEMENT ANALYSIS OF MASONRY STRUCTURES USING DIFFERENT CONSTITUTIVE MODELS

Maria E. Stavroulaki[1], Vagelis B. Liarakos[1]

[1]Applied Mechanics Laboratory,
Department of Sciences
Technical University of Crete
Chania, Kounoupidiana, GR-73100,
Crete, Greece
e-mail: mstavr@mred.tuc.gr, Vagelis_41@yahoo.gr

Keywords: masonry, finite element, dynamic analysis.

Abstract. *The masonry of old structures varies in a wide range: geometry of walls and columns, type and dressing of stones, joint constructions and materials, and others. Also repair work and strengthening techniques of old masonry have a major influence on the mechanical behavior so additionally material models are needed to describe the seismic behavior of strengthened masonry.*

The masonry material constituting the structures of monumental and old constructions is often characterized by very low tensile strength with respect to the compression strength. In parallel, masonry compression behaviour is of crucial importance for design and safety assessment purposes, since masonry structures are primarily stressed in compression. However, the compression failure mechanism of quasi-brittle materials is rather complex, especially when compared with tensile failure.

The finite element method is usually adopted to achieve sophisticated simulations of the structural behaviour. A mathematical description of the material behaviour, which yields the relation between the stress and strain tensor in a material point of the body, is necessary for this purpose. This constitutive model must be capable of predicting the behaviour of the structure from the linear elastic stage, through cracking and degradation until total loss of strength.

Masonry is a composite material made of bricks and mortar, which exhibits distinct directional properties due to the mortar joints which act as planes of weakness. In our research, on the numerical representation the macromodeling of masonry as a composite is used, which is applicable when the structure is composed of solid walls with sufficiently large dimensions so that the stresses across or along a macro-length will be essentially uniform and also is more practice oriented.

Nonlinear behaviour of both components should be considered to obtain a realistic model able to describe cracking, slip, and crushing of the material. Its yield behaviour is a strong function of hydrostatic pressure and tensile yield stress and compressive yield stress, under uniaxial loading are different. In order to obtain a better representation, individual yield criteria must be considered, according to different failure mechanisms, one in tension and the other in compression. Something which is not so easy in many yield and failure criteria which are already programmed to finite elements programs.

In this paper, some results of a parametric investigation about the applicability of widely used criteria like the Drucker and Prager, the Parabolic Mohr- Coulomb and the Buyukozturk, in the dynamic analysis of masonry wall are presented. The analysis was done, considering various dynamic loads in order to study the influence of the selected criterion on the dynamic behaviour locally or globally of the structure. The correlation of the results is concentrated on the effectiveness of the examined criteria to represent the real mechanical behavior and the estimation of critical areas. Also the differences which are presented seems to be remarkable when complicated dynamic loads are applied.

1 INTRODUCTION

The finite element method is usually adopted to achieve sophisticated simulations of the structural behaviour. A mathematical description of the material behaviour, which is named a constitute model, is necessary for this purpose. An important objective of today's research is to obtain robust numerical tools, capable of predicting the behaviour of the structure from the linear elastic stage, through cracking and degradation until total loss of strength. Also an important parameter is the type of finite element which will be used. Numerical simulations are fundamental to provide insight into the structural behaviour and to assess/retrofit existing masonry structures [1].

Masonry is a composite material made of units which are such as stones, bricks and others, and joints which can be clay, lime/cement based mortar or other mortar. Due to the mortar joints which act as planes of weakness, the masonry exhibits distinct directional properties. In general, the approach towards its numerical representation can focus on the micro-modelling of the individual components, or the macro-modelling of masonry as a composite. Depending on the level of accuracy and the simplicity desired, one modelling strategy can be preferred over the other. Micro-modelling studies are necessary to give a better understanding about the local behaviour of masonry structures. Macro-models are applicable when the structure is composed of solid walls with sufficiently large dimensions so that the stresses across or along a macro-length will be essentially uniform. Clearly, macro-modelling is more practice oriented.

So in large structures, the knowledge of the behaviour of the interaction between units and joints does not usually determine the global behaviour of the structure. In this case, it is more adequate to resort to continuum models, which establish the relation between average stresses and average strains in masonry [2, 3]. In parallel various cracks are developed due to low tension strength. Energy dissipation mechanisms arising due to contact and friction along these contact interfaces are certainly responsible for the beneficial aseismic behavior [4, 5]. The nonlinear behavior of both components should be considered to obtain a realistic model able to describe cracking, slip, and crushing of the material. Its is therefore of relevant importance that, for each type of masonry, experiments to correlate the strength characteristics of constituent materials with the characteristics of masonry must be carried out.

In this study a recoverable, nonlinear elastic behaviour and a plastic irrecoverable behaviour were considered for the masonry. In both cases, the relationship of stress-strain is nonlinear, however, in the case of nonlinear elastic analysis the unloading follows the curve of stress-strain, while in the plastic analysis take place elastic unloading. The elastic-plastic results can be considered as reliable only when instability phenomena can be ruled out [6]. The material was considered as homogenous and it was modeled by elastoplastic theory, using the simple forms of yield surfaces written in terms of the first and the second deviatoric stress invariants.

In particularly, some results of a parametric investigation are presented about the applicability of widely used criteria like the Drucker and Prager, the Parabolic Mohr- Coulomb and the Buyukozturk, in the dynamic analysis of a masonry wall. The analysis of a masonry wall with openings, part of typical masonry building, was done, considering various dynamic loads in order to study the influence of the every time selected criterion on the dynamic behaviour locally or globally of the structure. The correlation of the results is concentrated on the effectiveness of the examined criteria to represent the real mechanical behavior, relates with the type of applied loadings.

2 MATERIAL MODEL

2.1 Continuum models

In order to consider a composite material as homogenous, an homogenization technique must be applied either with experimental tests or with analytical and computational methods [7, 8, 9, 10]. The application of computational homogenization techniques for structural masonry computations, is an alternative to the formulation of complex closed-form macroscopic constitutive laws. Due to the difference existing between brick units and mortar, a complex interaction between the two masonry components occurs with masonry deformation. In general, non-linear behaviour of masonry unit is dominated by mortar joint. In order to derive the homogenized inelastic material properties of masonry basic cell, a reliable material model for masonry components (brick and mortar) is important [11].

The well-known failure criteria namely Mohr-Coulomb, Saint Venant and Navier, can be successfully used in order to predict the stress state (biaxial and shear stresses) at which the three fundamental failure modes can be expected; i.e. slipping of the mortar joints, cracking of bricks and splitting of joints, and spalling in the middle plane. The Mohr-Coulomb frictional law can be slightly modified to take into account the nonlinear dependence of shear strength on normal stress at high compression levels [12].

In reality, the material in non-homogeneous and a close material representation is only possible if the units and joints are modelled separately [13]. In case of modeling large structures, subjected to loads and boundary conditions such that the state of stress and strain across a macro-length can be assumed to be uniform, a continuum model can be used. A macro-modelling strategy represents a compromise between efficiency and accuracy. The model introduced in Lourenço et al [14] combines the advantages of modern plasticity concepts with a powerful representation of anisotropic material behaviour, which includes different hardening/softening behaviour along each material axis. The model includes the combination of a Rankine-like yield surface for tension and a Hill-like yield surface in compression. This composite surface permits to reproduce the results obtained in uniaxial tests, in which different behaviour are obtained along different directions.

One serious problem associated with smooth criteria is the poor representation of materials with a large difference between uniaxial compressive strength and uniaxial tensile strength, which leads to unacceptable overestimation of strength in the tension-compression regime. To obtain a better representation, individual yield criteria must be considered, according to different failure mechanisms., one in tension and the other in compression. The former is associated with a localised fracture process, denoted by cracking of the material, and, the latter, is associated with a more distributed fracture process which is usually termed crushing of the material. Several models have been tested for these [3, 15].

Softening is a gradual decrease of mechanical resistance under a continuous increase of deformation forced upon a material specimen or structure. It is a salient feature of quasi-brittle materials like clay brick, mortar, ceramics, rock or concrete, which fail due to a process of progressive internal crack growth. Such mechanical behaviour is commonly attributed to the heterogeneity of the material, due to the presence of different phases and material defects, like flaws and voids. A model which is formulated on the basis of softening plasticity for tension, shear, and compression, was presented by Lourenco and Rots [13]. Numerical implementation is based on modern algorithmic concepts such as implicit integration of the rate equations and consistent tangent stiffness matrices. The approach used in this work is based on idea of concentrating all the damage in the relatively weak joints and, if necessary, in potential tension cracks in the bricks.

2.2 Generalized yield failure criteria

A fundamental notion in the plasticity theory is the existence of a yield function that bounds the elastic domain. According to Coulomb-Navier theory a ductile material such as soil, rocks, concrete and masonries failure under a multiaxial stress loading system when the effective shear stress in a specific plane get over from a critical value which is usually a function of shear strength and hydrostatic pressure. The general mathematical formulation of this type yield criteria is:

$$\left.\begin{array}{l} \tau \geq \mathrm{f}(\sigma) \\ \sigma = \dfrac{\mathrm{I}_1}{3}, \tau = c\sqrt{\mathrm{J}_2}\cos(\boldsymbol{\theta}) \end{array}\right\} \Rightarrow F(\mathrm{I}_1, \mathrm{J}_2, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \cdots) \leq 0 \tag{1}$$

where:

I_1	Stress tensor first invariant (hydrostatic stress contribution in yielding or failure)
J_2	Deviatoric stress tensor second invariant (shear stress contribution in yielding or failure, shear internal forces work)
θ	Lode angle $(-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6)$
c	Coefficient which vary from 0 to 1
c_1, c_2	material strength, cohesion and internal friction parameters

2.3 Mohr Coulomb linear or Drucker Prager

The Mohr-Coulomb criterion is a first two-parametric yield surface, for the maximum compression and tension. The model is the first one that takes shearing into account. it should be noted that the criterion considers the maximum difference between the major and the minor principal stresses only, and does not take the intermediate principal stress in the strength criterion. The Mohr-Coulomb strength criterion can be represented graphically, by Mohr's circle. Most of the classical engineering materials, including rock materials, somehow follow this rule in at least a portion of their shear failure envelope. The Generalized Mohr-Coulomb linear or Drucker-Prager yield-failure criteria can be mathematical expressed by the equation 2:

$$\mathrm{F}(\mathrm{I}_1, \mathrm{J}_2, \mathrm{a}, \mathrm{k}) = \mathrm{aI}_1 + \sqrt{\mathrm{J}_2} - \mathrm{k} = 0 \tag{2}$$

where:

$$\mathrm{a} = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)} = \frac{\sigma_{Yc} - \sigma_{Yt}}{\sqrt{3}(\sigma_{Yc} + \sigma_{Yt})} = \frac{\mathrm{m}-1}{\sqrt{3}(\mathrm{m}+1)}$$

$$k = \frac{6\mathrm{S}_0\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)} = \frac{2\sigma_{Yc}\sigma_{Yt}}{\sqrt{3}(\sigma_{Yc} + \sigma_{Yt})} = \frac{2\sigma_{Yc}}{\sqrt{3}(\mathrm{m}+1)} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{m} = \frac{\sigma_{Yc}}{\sigma_{Yt}}$$

σ_{Yt}	Material tensile yield stress or tensile strength
σ_{Yc}	Material compression yield stress or tensile strength
S_0	Material shear yield stress or shear strength or cohesion
φ	Material internal friction angle
σ_Y	initial equivalent yield stress

2.4 Mohr CoulombParabolic

The Mohr-Coulomb parabolic yield-failure criterion mathematical can be expressed by the equation 3.

$$F(I_1, J_2, \beta, \sigma_Y) = \sqrt{3}\beta\sigma_Y I_1 + 3J_2 - \sigma_Y^2 = 0 \tag{3}$$

Where:

$$\beta = \frac{(m-1)}{\sqrt{3m}}$$

$$\sigma_Y = \frac{\sigma_{Yc}}{\sqrt{m}}$$ initial equivalent yield stress

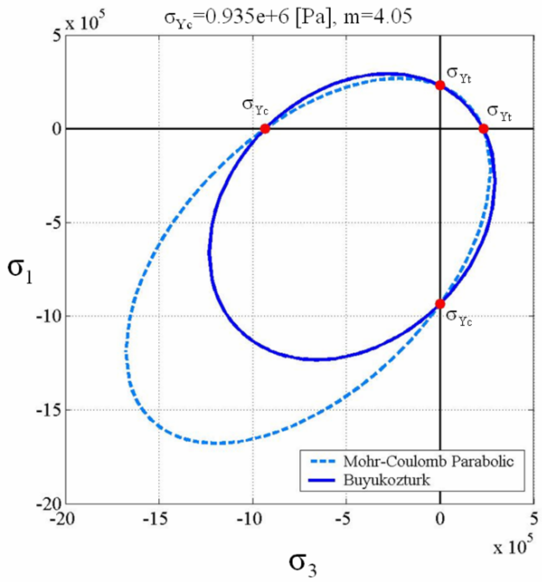


Figure 1:Yield surface in 2D of the Mohr-Coulomb Parabolic and the Buyukozturk models.

2.5 Buyukozturk's Modified Model

Oral Buyukozturk formulate a modified version of Mohr-Coulomb parabolic yield-failure criterion (1975), adding in the equation (3) an extra term which is a function of first stress tensor invariant square. The generalized yield and failure criteria are developed to account for the two major sources of nonlinearity: the progressive cracking of concrete in tension, and the nonlinear response of concrete under multiaxial compression. Using these criteria, incremental stress-strain relationships are established in suitable form for the nonlinear finite element analysis [16]. The Buyukozturk yield function is given by the equation 4.

$$F(I_1, J_2, \alpha, \beta, \sigma_Y) = \sqrt{3}\beta\sigma_Y I_1 + \alpha I_1^2 + 3J_2 - \sigma_Y^2 = 0 \tag{4}$$

where:

α, a function's shape parameter. The optimum value for α parameter is 0.2.

$$\beta = \frac{(m-1)\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{3m}}$$

$$\sigma_Y = \sigma_{Yc}\sqrt{\frac{1+\alpha}{m}}$$ Initial equivalent yield stress

In figure 1 the yield surfaces in two dimensions of the Mohr-Coulomb Parabolic and the Buyukozturk models are presented.

3 FINITE ELEMENT MODELING

3.1 Geometry and loads of the models

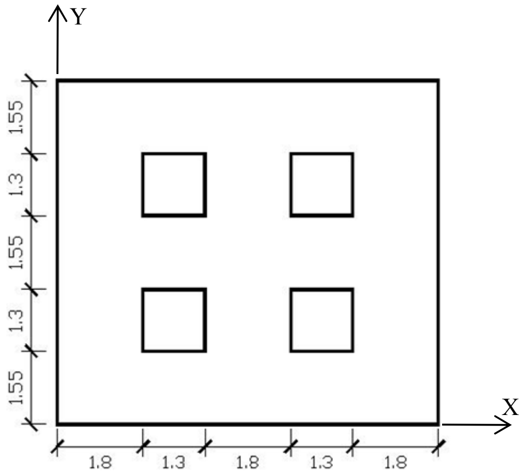
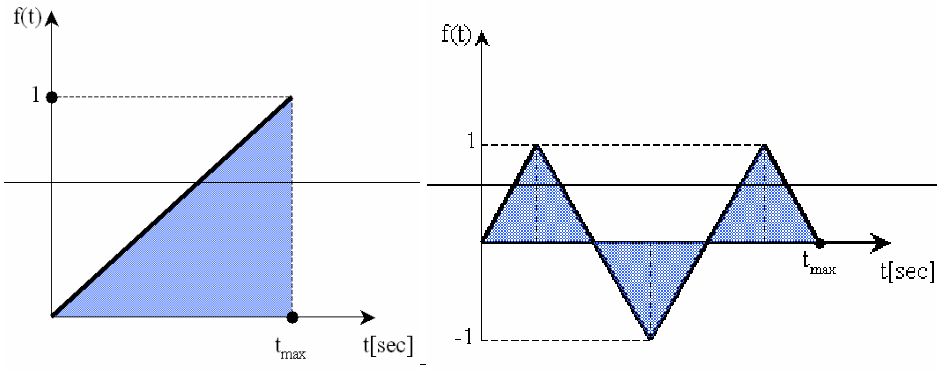
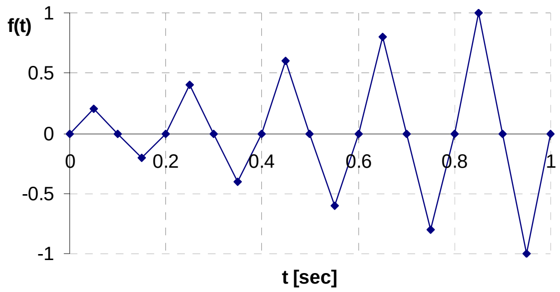


Figure 2: Geometry of the masonry wall.

In order to investigate the response of a masonry wall with openings (see fig. 2) under typical conditions, like in plane and out of plane buckling, in plane compression, and dynamic behaviour under base excitation, different time varied loads were considered. The loading histories arising from the multiplication of a scale factor with a linear function $f(t)=(1/t_{max})t$, or with a sinusoidal function $f(t)=sin(2\pi t/T)$, $t_{max}=3T/2$, and t_{max}=3T/2.



(a) (b)



(c)

Figure 3: Displacement histories for a) load case 1, 2 and 3, b) load case 4 and 6 and c) load case 5.

The following load cases were considered:

Load case 1(Lc1): A linear time varied horizontal displacement u_x (in plane direction) (Fig. 3a) which are applied at the top of the wall with a maximum value equal to 0.001m. Fixed condition at the base are assumed.

Load case 2 (Lc2): A linear time varied horizontal displacement, u_z (out of plane direction) (Fig. 3a) which are applied at the top of the wall with maximum value equal to -0.005m. Fixed condition at the base are assumed.

Load case 3 (Lc3): A linear time varied vertical displacement, u_y (Fig. 3a) which are applied at the top of the wall with a maximum value equal to -0.001m. Fixed condition at the base are assumed.

Load case 4 (Lc4): A horizontal sinusoidal displacement uz (Fig. 3b) at the base of the wall are applied in parallel with the weight of the mass, a vertical pressure at the level of the first floor (simulating the loads which are transferred to the wall from the horizontal slab) and a vertical pressure at the top level (simulating the loads of the roof). Maximum value of displacement equal to -0.01m.

Load case 5 (Lc5): An amplifying sinusoidal horizontal displacement uz (Fig. 3c) at the base of the wall are applied in parallel with the weight of the mass, a vertical pressure at the level of the first floor (simulating the loads which are transferred to the wall from the horizontal slab) and a vertical pressure at the top level (simulating the loads of the roof). Maximum value of displacement equal to -0.005m.

Load case 6 (Lc6): A horizontal sinusoidal displacement uz (Fig. 3b) at the base of the wall are applied in parallel with the weight of the mass, a vertical pressure at the level of the first floor (simulating the loads which are transferred to the wall from the horizontal slab) and a vertical pressure at the top level (simulating the loads of the roof). Maximum value of displacement equal to -0.1m.

3.2 Material model

In case of an earthquake, the structure will be subjected to a series of cyclic horizontal actions, which will often cause high additional bending and shear stresses in structural walls, exceeding the range of the elastic behaviour. The nonlinearity of the material appears for example if the stress-strain relationship or constitutive equation is nonlinear. Thus, for the nonlinear analysis of the examined models, in addition to the elastic material constants (Young's modulus and Poisson's ratio), the yield stress and yield function must be determined in order to describe the inelastic (plastic) material behavior by the definition of a stress-strain curve which is described from two branches, the first one which corresponds to the elastic region of the material and the second one to the plastic region. The magnitude of the yield stress is generally obtained from a uniaxial test but since the stresses in a structure are usually multiaxial, a yield condition must be used for measurement of yielding of the mutliaxial state of stress. The yield condition can be dependent on all stress components, on shear components only, or on hydrostatic stresses.

In our applications the general purpose finite element program MARC, was used in which several elasto-plastic models can be used [17]. Special the generalized Mohr-Coulomb model developed by Drucker and Prager, the Mohr-Coulomb Parabolic and the Buyukozturk model were selected in order to use in our applications.

The material data of the masonry is given to Table 1 and the values of the material models parameters as were described in precious section, are given in Table 2. The material has been considered as homogeneous and isotropic, the numerical values have been chosen on the basis of compression tests performed on specimens.

	Masonry
E[Pa]	8.82e+9

v	0.15
ρ[Kg/m³]	1700
φ	44.1
τ_Y[Pa]	0.198e+6
σ_{Yt}[Pa]	0.231e+6
σ_{Yc}[Pa]	0.935e+6
m	4.05

Table 1: Mechanical properties of masonry

The finite element method was used on a three - dimensional, solid model of the wall. Solid finite elements have been used for the analysis.

The following three models, with different material models were examined:

Model 1 : Masonry wall with the Drucker and Prager material model
Model 2 : Masonry wall with the Parabolic Mohr-Coulomb material model
Model 3 : Masonry wall with the Buyukozturk material model

	Drucker and Prager	Mohr-Coulomb Parabolic	Buyukozturk
σ_Y (Pa)	370000	464619	508965
Alpha	0.35	-	-
Beta	-	0.88	0.96

Table 2: Parameters of yield functions for the material models.

4 RESULTS

In the case with the elasto-plastic material model, the estimation of the region with plastic strain is an indication of failure and crack development. Some specific nodes were selected in order to study their response during the time and at the final time step (see Fig. 4).

From the deformation of the examined models for the load case 1where tension is developed across the left side and compression across the right side and the final equivalent plastic strains (see Fig. 5a) the node 1227 was selected in order to see its behaviour to tension (Fig. 5b). The models 2 and 3 give the same results and small differences to plastic stresses are presented for model 1. The same indication is given form the diagram of the equivalent plastic strains across the section 1 of models for the load case 2 (Fig. 6). Comparing the final contours of the plastic strains for the examined models neglected differences are presented for both load case 1 and 2 where we have out of plane and in plane buckling of wall. In opposite overestimation of the plastic strains is happened for Model 1 from the comparison of the results for the load case 3 (Fig. 7a, b). The same conclusion arising for the diagram of tension and compression response of the center point 3090, as they are shown in figures 8 and 9.

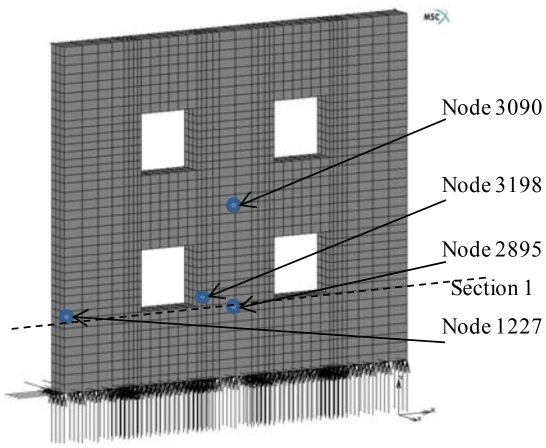
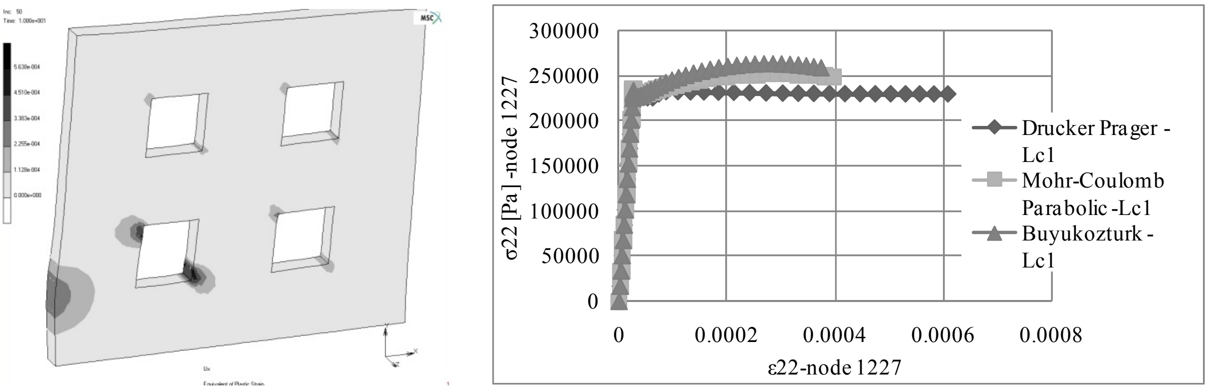
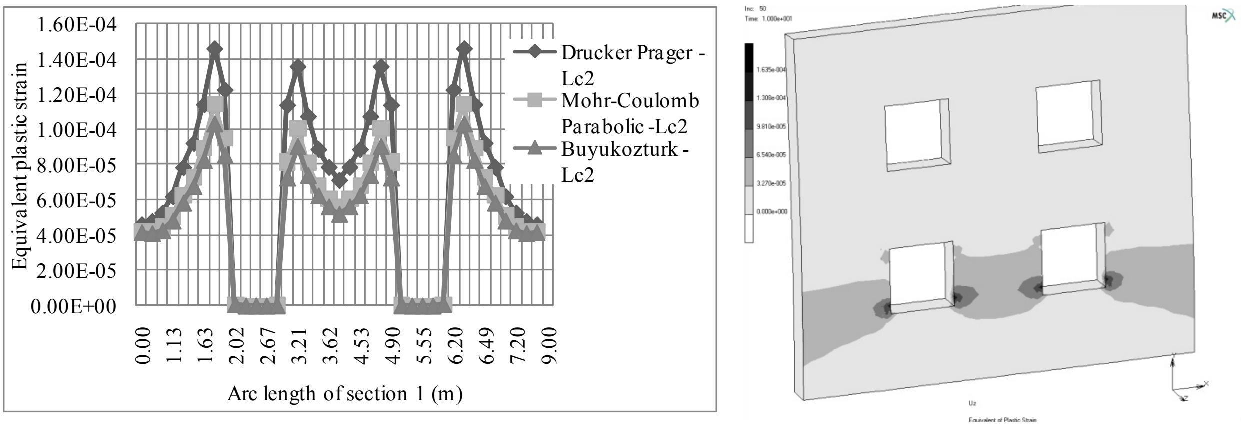


Figure 4: Finite element model and specific nodes for results presentation.



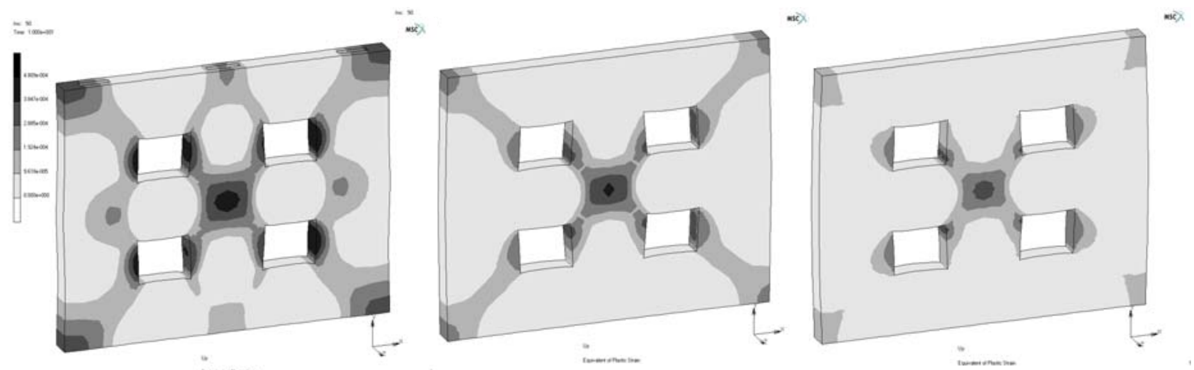
(a) (b)

Figure 5: Stress-strain curve in y direction of node 1227 and countour plot of equivalent plastic strains (Model 3) for load case 1.



(a) (b)

Figure 6: Equivalent plastic strain across section 1 and countour plot of equivalent plastic strains (Model 3) for load case 2.



Model 1 Model 2 Model 3

Figure 7: Contours plot of equivalent plastic strain at the final time step of load case 3.

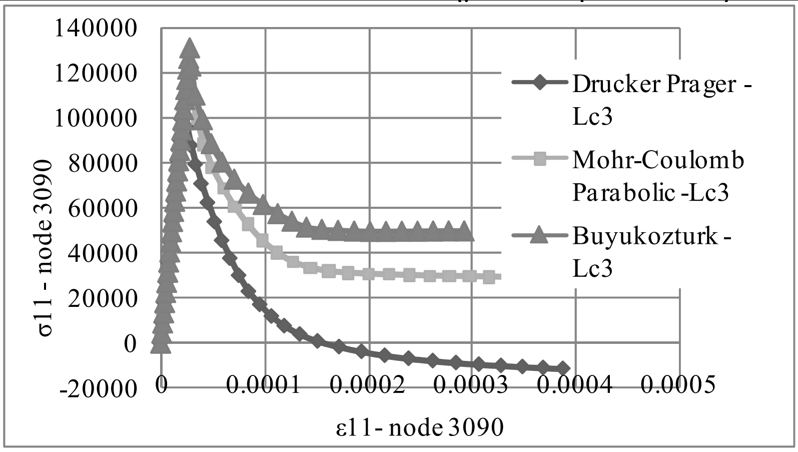


Figure 8: Stress-strain curve in x direction, of node 3090 and for load case 3.

The estimation of critical areas where possible cracks may be appeared due to this loads compare well with corresponding exprerimenat results and pictures from real structures. Since more complicated dynamic loads llike seismic loads, are usually applied to real structures wich arise more complicated phenomena, other cyclic dynamic loads were considered in our study in order to investigate the selected material models. For this reason the load cases 4 and 5were considered and the response of selected points were also examined. From calculated equivalent plastic strains the critical areas around the lower conrners of the lower openings and the bottom of the wall were estimated (Fig. 10a). The differenses of the examined model are higher at higher time steps as it is shown to the history plot of equivalent plastic strain of node 3198 and for load case 4 (Fig. 10b). The same conclusion is given if the same load history is applied with a higher value of scaling factor (load case 6).

In case of the amplifying sinusoidal horizontal displacement uz (load case 5) the stress strain curve of the node 2895 (between the lower two openings) describe the dynamic phenomena which are arising during the time and the difference between the examined models. The different response of model 1 in comparison the models 2 and 3 seems to be remarkable at the higher time steps.

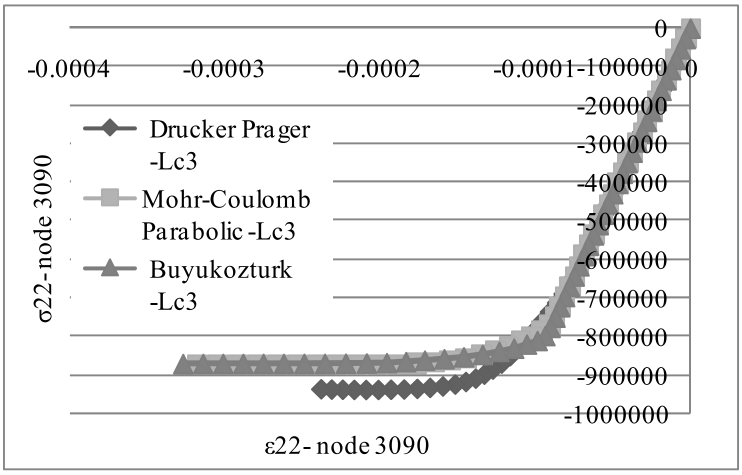
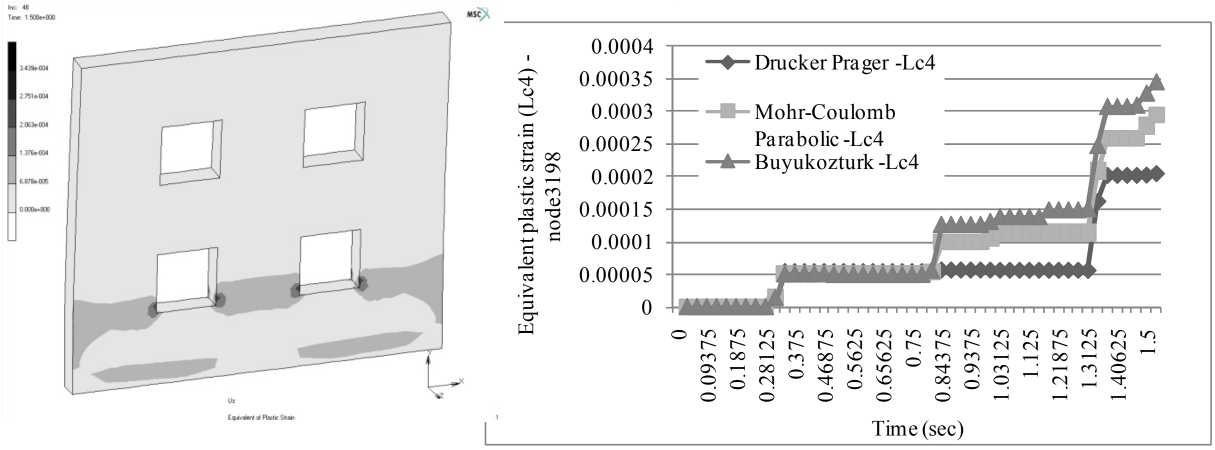


Figure 9: Stress-strain curve in y direction, of node 3090 and for load case 3.



(a) (b)

Figure 10:a)Countour plot of equivalent plastic strains (Model 2), b) History plot of equivalent plastic strain of node 3198 and for load case 4.

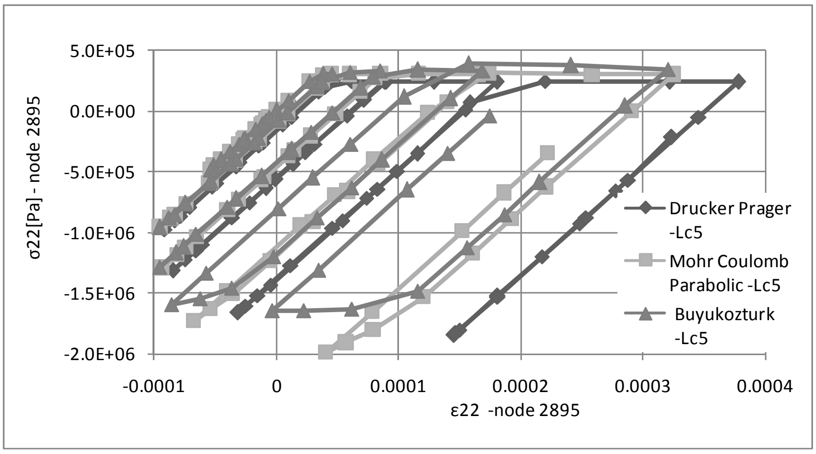


Figure 11: Stress-strain curve in y direction of node 3090 and for load case5.

5 CONCLUSIONS

In our applications widely used elasto-plastic material models like the generalized Mohr-Coulomb model which was developed by Drucker and Prager, the Mohr-Coulomb Parabolic and the Buyukozturk models were selected to be used in the dynamic analysis of a typical masonry wall, part of a real structure. Simple linear time varied, sinusoidal and amplifying sinusoidal dynamic loads were applied in order to examine the dynamic behaviour of the wall and to estimate the critical areas, areas where plastic strains are developed.

From the results the selected material models can simulate the failure mechanisms in tension and compression and the dynamic behaviour of the wall under dynamic loads. Significant differences presented to the overestimation of the plastic strains when the Drucker Prager model is used, which could give a picture of failure unrealistic and strong reinforcements could be selected. These differences are remarkable when the sinusoidal or the amplifying sinusoidal dynamic horizontal displacements at the base of the wall are applied. The Mohr-Coulomb Parabolic and the Buyukozturk models give almost the same results with small differences special to the amplifying sinusoidal dynamic loads.

General the applicability of these models depends on the level of accuracy, the simplicity desired, the loading conditions and the special interest on the local or global behaviour of a small or a large structure. Significant differences relates with the complication of the dynamic loads. Another factor is the estimation of the material parameters which relates with the nonlinearity of the masonry and the components of these composite material. So it is important, for each type of masonry, experimental results to correlate the strength characteristics of constituent materials with the characteristics of masonry.

REFERENCES

[1] LeftherisB., Stavroulaki M.E., Sapounaki A.C., Stavroulakis G.E. (2006), *Computational methods for heritage structures*, WIT Press, Southampton, U.K.
[2] Lourenço P.B., Ramos L.F. (2004), "Characterization of cyclic behaviour of dry masonry joints", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.130(5), pp. 779-786.
[3] Lourenço P.B., Rots J.G. and Blaauwendraad J. (1998), "Continuum model for masonry: Parameter estimation and validation", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 124(6), pp. 642-652.
[4] Berto L., Saetta A., Scotta R., Vitaliani R. (2002), "An orthotropic damage model for masonry structures", *Int. J. Numer. Meth. Engng.,* John Willey & Sons , Vol. 55, pp. 127-157.
[5] Drosopoulos G.A., Stavroulakis G.E., Massalas C.V. (2006), "Limit analysis of a single span masonry bridge with unilateral frictional contact interfaces", *Engineering Structures*, Vol. 28, pp. 1864-1873.
[6] Genna F., Di Pasqua M. & Veroli M. (1998), "Numerical analysis of old masonry buildings: a comparison among constitutive models", *Engineering Structures*, Vol. 20, pp. 37-53.
[7] Zucchini A., Lourenco P.B. (2007), "Mechanics of masonry in compression: Results from a homogenisation approach", *Computers and Structures*, Elsevier, Vol. 85(3-4), pp. 193-204.
[8] Milani G., Lourenco P.B., Tralli A. (2006), "Homogenised limit analysis of masonry walls, Part I: Failure surfaces", *Computers and Structures*, Elsevier, Vol. 85(3-4), pp. 166-180.
[9] Zucchini A., Lourenco P.B. (2004), "A coupled homogenisation-damage model for masonry cracking", *Computers and Structures*, Elsevier, Vol. 82(11-12), pp. 917-929.
[10] Lourenço P.B. (2002), "Computations on historic masonry structures", *Progress in Structural Engineering and Materials*, Vol. 4, pp. 301-319.
[11] Chengquing Wu, and Hong Hao (2006), "Derivation of 3D masonry properties using numerical homogenization technique", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, pp. 1717-1737.
[12] Andreaus U. (1996), "Failure Criteria for Masonry Panels under in-plane loading", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 122, No1, pp. 37-46.
[13] Lourenço, P.B. and Rots, J.G. (1997), "A multi-surface interface model for the analysis of masonry structures", *J. Engrg. Mech*., ASCE, Vol. 123(7), pp. 660-668.
[14] Lourenço, P.B., de Borst, R. and Rots, J.G. (1997), "A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 4033-4057.
[15] Lourenço P.B. (1997), *An anisotropic macro-model for masonry plates and shells: Implementation and validation*, Report No. 03.21.1.3.07, Delft University of Technology, Delft.
[16] Buyukozturk O. (1977), "Nonlinear analysis of reinforced concrete structures", *Computers & Structures*, Pergamon Press , Vol. 7, pp. 149-156.
[17] MSC engineering group (2002), *Marc-Mentat, 2000 Manuals, Theory and User Information*.