ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΚΤΥΑΚΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΠΟΛΥΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ HERMITE COLLOCATION

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ Γ. ΜΑΝΔΙΚΑΣ

Επιβλέπων : Επ. Καθηγητής **Εμμανουήλ Μαθιουδάκης**

ΧΑΝΙΑ , 2008

Ευχαριστίες

Πρώτα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διατριβής, Επίκουρο Καθηγητή Εμμανουήλ Μαθιουδάκη, ο οποίος μου παρείχε την επιστημονική καθοδήγηση για την ολοκλήρωση της.

Ευχαριστώ και τα υπόλοιπα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής Καθηγήτρια Έλενα Παπαδοπούλου και Επίκουρο Καθηγητή Δελή Ανάργυρο για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους σχετικά με την εκπόνηση της διατριβής.

Τον διευθυντή του Εργαστηρίου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Η/Υ του Πολυτεχνείου Κρήτης Καθηγητή Ιωάννη Σαριδάκη για την παραχώρηση της πρόσβασης στα υπολογιστικά συστήματα του εργαστηρίου.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ την αρραβωνιαστικιά μου Βασιλική, για την συμπαράσταση που μου παρείχε σε όλα τα στάδια των μέχρι σήμερα σπουδών μου.

Τέλος ευχαριστώ τα μέλη της οικογένειάς μου, χωρίς την υποστήριξη των οποίων δεν θα μπορούσα να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

Περίληψη

Η διατριβή αυτή παρουσιάζει για πρώτη φορά την εφαρμογή της Τεχνικής Πολυπλέγματος στην επαναληπτική επίλυση των αραιών και γενικών γραμμικών συστημάτων, τα οποία προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών ελλειπτικού τύπου, με χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων Collocation βασισμένη στα πολυώνυμα Hermite.
Ειδικότερα, γίνεται χρήση των αποδοτικών επαναληπτικών μεθόδων που υπάρχουν στη σημερινή βιβλιογραφία, καθώς και των δημοφιλέστερων αριθμητικών σχημάτων της Τεχνικής Πολυπλέγματος βασισμένη στη γεωμετρική διαδικασία διακριτοποίησης του προβλήματος. Επίσης, σκοπός της διατριβής είναι και η κατασκευή μαζί με την αποδοτική υλοποίηση και μελέτη της συμπεριφοράς του ανάλογου παράλληλου αλγορίθμου για δικτυακά υπολογιστικά συστήματα, ώστε να γίνει εφικτή η περεταίρω ελαχιστοποίηση του χρόνου επίλυσης.

Η εργασία αυτή είναι δομημένη σε πέντε κεφάλαια:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά της Τεχνικής Πολυπλέγματος. Στην συνέχεια, γίνεται περιγραφή διάφορων τελεστών μεταφοράς των τιμών των μεταβλητών επίλυσης μεταξύ διαδοχικών πλεγμάτων, οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την υποστήριξη αυτών των τεχνικών. Τέλος, αναφέρονται οι πιο δημοφιλής αλγόριθμοι εφαρμογής της τεχνικής αυτής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αρχικά παρουσιάζεται η αριθμητική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Hermite Collocation, ενώ στη συνέχεια γίνεται εφαρμογής της στο Modified

Helmholtz πρόβλημα. Στο τέλος του κεφαλαίου, το γραμμικό σύστημα μετασχηματίζεται κατάλληλα με σκοπό την αύξηση των *παράλληλων* ιδιοτήτων του.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μελέτη της αριθμητικής επίλυσης διδιάστατων Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών με τη χρήση της Τεχνικής Πολυπλέγματος και παρουσίαση των αποτελεσμάτων των μετρήσεων της συμπεριφοράς σε σειριακό περιβάλλον.

Το τέταρτο κεφάλαιο εμφανίζει τη διαδικασία κατασκευής και υλοποίησης ενός αποδοτικού αλγορίθμου επίλυσης του Collocation γραμμικού συστήματος για παράλληλες αρχιτεκτονικές δικτυακών υπολογισμών. Οι μετρήσεις της απόδοσης του αλγορίθμου σε ένα δικτυακό υπολογιστικό σύστημα 64 επεξεργαστών αποδεικνύει την αποδοτικότητα του προτεινόμενου αλγορίθμου κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.

Τέλος, το πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζει τη συνολική εκτίμηση της εφαρμογής της Τεχνικής Πολυπλέγματος στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων Collocation για σειριακές αλλά και παράλληλες αρχιτεκτονικές.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Η Τεχνική Πολυπλέγματος

1.1 Εισαγωγή

Οι Τεχνικές Πολυπλέγματος (ΤΠΠ) εκμεταλλεύονται διακριτοποιήσεις ενός Προβλήματος Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ) για διαφορετικού μεγέθους πλέγματα [6, 7, 8, 9]. Η χρήση τεχνικών διαδικασιών βασισμένων σε προβλήματα διαφορετικού μεγέθους, τα οποία κατασκευάζονται εφαρμόζοντας κάποια γεωμετρική διαδικασία διακριτοποίησης, ονομάζεται Γεωμετρική ή Κλασσική ΤΠΠ [12]. Αντίθετα η χρήση τεχνικών διαδικασιών σε διαφορετικού μεγέθους προβλήματα χωρίς τη χρήση της γεωμετρικής διακριτοποίησης ονομάζεται Αλγεβρική ΤΠΠ [10, 11, 44]. Τις τεχνικές αυτές τις χαρακτηρίζει η αρχή *διαίρει και βασίλευε*. Κάνοντας χρήση κάποιων επαναληπτικών μεθόδων εξομάλυνσης, όπως π.χ η Gauss-Seidel, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι όροι των σφαλμάτων (ή των υπολοίπων) στις κατευθύνσεις των υψίσυχνων ιδιοδιανυσμάτων του επαναληπτικού πίνακα μειώνονται πολύ γρήγορα. Οι υπόλοιποι όροι, οι οποίοι σχετίζονται με τους χαμηλής συχνότητας ή ομαλούς όρους, είναι δύσκολο να μειωθούν με τις κλασσικές μεθόδους εξομάλυνσης. Αυτό προκαλεί την παρατηρηθείσα επιβράδυνση σε όλες τις βασικές επαναληπτικές μεθόδους. Ωστόσο, πολλοί από αυτούς τους όρους απεικονίζονται λιγότερο ομαλοί σε ένα πιο αραιό πλέγμα. Έτσι λοιπόν προκύπτει η ιδέα της χρήσης ενός πιο αραιού πλέγματος, ώστε να μειωθούν οι αντίστοιχοι όροι του σφάλματος. Προφανώς, η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί χρησιμοποιώντας μια σειρά κατάλληλων μεταβάσεων σε διαφορετικού μεγέθους πλέγματα. Ας προσπαθήσουμε τώρα να προσεγγίσουμε τις σκέψεις που κατασκευάζουν την έννοια της ΤΠΠ περισσότερο αναλυτικά. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι βασικές διαδικασίες κατασκευής και εφαρμογής της ΤΠΠ.

1.2 Βασικές έννοιες της ΤΠΠ

Οι ΤΠΠ αρχικά εφαρμόστηκαν σε ΠΣΤ τα οποία μοντελοποιούσαν φυσικά προβλήματα. Έτσι για ευκολία και για ιστορικούς κυρίως λόγους, αυτά τα προβλήματα χρησιμοποιούνται στη παρουσίαση αυτών των μεθόδων. Ας θεωρήσουμε το μονοδιάστατο πρόβλημα

$$\begin{array}{rcl} -u''(x) & = & f(x) \ , \ \ 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) & = & 0 \end{array} \tag{1.1}$$

ως πρόβλημα μοντέλο για την ανάλυση της ΤΠΠ και την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών ως μέθοδο αριθμητικής επίλυσής του. Θεωρούμε ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0, 1]$ σε n υποδιαστήματα με βήμα διακριτοποίησης $h = \frac{1}{n}$ και συντεταγμένες των κόμβων $x_i = (i-1)h$, με $i = 1 \ , \ \dots \ , \ (n+1)$. Η διακριτοποίηση αυτή οδηγεί στη κατασκευή του συστήματος

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad , \tag{1.2}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f} = h^2 \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \quad , \tag{1.3}$$

με $\mathbf{f} = h^2(f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}))^T = h^2(f_1, \ldots, f_{n-1})^T$.

Θεωρούμε τώρα το διδιάστατο ΠΣΤ

$$\begin{cases} -u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) &= f(x,y) \ , \ (x,y) \in \Omega \equiv [0,1] \times [0,1] \\ u(x,y) &= 0 \ , \ (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

Επιλέγουμε ως σημεία διακριτοποίησης του διαστήματος Ω, τα σημεία $(x_i, y_j) = (ih, jh)$, όπου $h = 1/n$ και $i, j = 1 \ , \ \ldots \ , \ (n+1)$. Σε αυτήν την περίπτωση το γραμμικό σύστημα θα έχει την μορφή (1.2), με

$$A = \begin{bmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -I & B \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad . \tag{1.5}$$

Όπως και στη μία διάσταση, το δεξί μέλος f, είναι η διακριτοποίηση της συνάρτησης $f(x,y)$ πολλαπλασιασμένη με h^2.

Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbf{u}$ για την μοναδική ακριβή λύση του γραμμικού συστήματος και με $\mathbf{v}$ μια προσέγγισή της, η οποία πιθανώς να προέκυψε απο κάποια επαναληπτική μέθοδο. Παρακάτω θα χρειαστεί να συνδέσουμε τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ με ένα συγκεκριμένο πλέγμα, π.χ Ω^h. Σε αυτήν την περίπτωση, ο συμβολισμός θα είναι $\mathbf{u}^h$ και $\mathbf{v}^h$.

Υπάρχουν δύο σημαντικά μέτρα για το πόσο *κοντά* βρίσκεται η $\mathbf{v}$ στην ακριβή λύση. Ένα είναι το σφάλμα (error) ή αλγεβρικό σφάλμα (algebraic error) και δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad . \tag{1.6}$$

Το σφάλμα είναι επίσης διάνυσμα, άρα μπορούμε να το μετρήσουμε με οποιαδήποτε απο τις γνωστές νόρμες διανυσμάτων. Συνήθως οι νόρμες που χρησιμοποιούνται γι'αυτό τον σκοπό είναι η άπειρη νόρμα και η Ευκλείδια νόρμα ή 2-norm, οι οποίες ορίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\|\mathbf{e}\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |e_j| \quad \text{και} \quad \|\mathbf{e}\|_2 = \left\{\sum_{j=1}^{n} e_j^2\right\}^{1/2} \quad . \tag{1.7}$$

Δυστυχώς το σφάλμα δεν χρησιμοποιείται στην πράξη, διότι προϋποθέτει την γνώση της πραγματικής λύσης, η οποία είναι άγνωστη. Ένα υπολογιστικό μέτρο που δείχνει πόσο καλά η $\mathbf{v}$ προσέγγισε την $\mathbf{u}$ αποτελεί το υπόλοιπο (residual), που ορίζεται ως

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - A\mathbf{v} \quad . \tag{1.8}$$

Το υπόλοιπο εκφράζει κατά πόσο η προσεγγιστική λύση δεν κατάφερε να ικανοποιήσει το πραγματικό πρόβλημα $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Εφόσον είναι διάνυσμα και αυτό, μπορούμε να το μετρήσουμε με τις νόρμες που αναφέραμε για το σφάλμα. Λόγω της μοναδικότητας της λύσης έχουμε $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Ωστόσο, δεν ισχύει πάντοτε ότι αν $\mathbf{r}$ είναι μικρό σε νόρμα, το $\mathbf{e}$ είναι επίσης μικρό σε νόρμα. Με την βοήθεια των ορισμών των $\mathbf{r}$ και $\mathbf{e}$ προκύπτει μια εξαιρετικά σημαντική σχέση μεταξύ τους

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f} \Leftrightarrow A(\mathbf{v} + \mathbf{e}) = \mathbf{f} \Leftrightarrow A\mathbf{e} = \mathbf{f} - A\mathbf{v} \Leftrightarrow \quad \underline{A\mathbf{e} = \mathbf{r}} \quad . \tag{1.9}$$

Είναι γνωστή αυτή η σχέση ως εξίσωση υπολοίπου. Μας λέει ότι το σφάλμα ικανοποιεί το ίδιο σύνολο εξισώσεων, όπως η άγνωστη $\mathbf{u}$, όταν την θέση της $\mathbf{f}$ πάρει το υπόλοιπο $\mathbf{r}$. Ο ρόλος της εξίσωσης υπολοίπου στις ΤΠΠ είναι βασικός.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι, πως μπορεί το υπόλοιπο να χρησιμοποιηθεί ώστε να μας δώσει κάποια πληροφορία για την επίλυση. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η προσέγγιση

$\mathbf{v}$ υπολογίστηκε με κάποια μέθοδο. Είναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε το υπόλοιπο $\mathbf{r} = \mathbf{f} - A\mathbf{v}$. Για να βελτιώσουμε την προσέγγιση $\mathbf{v}$, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση υπολοίπου ως προς $\mathbf{e}$ και η νέα προσέγγιση προκύπτει από τον ορισμό του σφάλματος

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{e} \quad . \tag{1.10}$$

Η ιδέα της διόρθωσης της προσέγγισης μέσω του υπολοίπου είναι πολύ σημαντική στα παρακάτω.

Ένα από τα ποιο απλά και δημοφιλή επαναληπτικά σχήματα επίλυσης του γραμμικού συστήματος (1.2) είναι η μέθοδος Gauss-Seidel, βασιζόμενη στη παρακάτω διάσπαση του πίνακα συντελεστών

$$A = D - L - U \tag{1.11}$$

όπου D είναι κάποιο διαγώνιο τμήμα του A, και $-L$, $-U$ αποτελούν αντίστοιχα τα αυστηρά κάτω και πάνω τριγωνικά μέρη του. Το σύστημα $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ θα έχει τη μορφή

$$(D - L - U)\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad . \tag{1.12}$$

Απομονώνοντας το κάτω τριγωνικό μέρος του A έχουμε

$$(D - L)\mathbf{u} = U\mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{1.13}$$

ή

$$\mathbf{u} = (D - L)^{-1}U\mathbf{u} + (D - L)^{-1}\mathbf{f} \quad . \tag{1.14}$$

Ο επαναληπτικός Gauss-Seidel πίνακας ορίζεται από την σχέση

$$R_{GS} = (D - L)^{-1}U \tag{1.15}$$

και η μέθοδος Gauss-Seidel μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\mathbf{v}^{(m+1)} = R_{GS}\mathbf{v}^{(m)} + (D-L)^{-1}\mathbf{f} \quad . \tag{1.16}$$

Η μέθοδος αυτή ανήκει στην κατηγορία των Στατικών Επαναληπτικών Μεθόδων, δηλαδή ο επαναληπτικός πίνακας παραμένει σταθερός για κάθε επαναληπτικό βήμα. Η κατηγορία αυτή σχεδιάστηκε έτσι ώστε η ακριβής λύση $\mathbf{u}$, να αποτελεί σταθερό σημείο (fixed point) του επαναληπτικού τύπου. Αυτό σημαίνει ότι οι επαναλήψεις δεν αλλάζουν την ακριβή λύση

$$\mathbf{u} = R_{GS}\mathbf{u} + (D-L)^{-1}\mathbf{f} \quad . \tag{1.17}$$

Αφαιρώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, λαμβάνουμε

$$\mathbf{e}^{(m+1)} = R_{GS}\mathbf{e}^{(m)} \tag{1.18}$$

ή

$$(D-L)\mathbf{e}^{(m+1)} - U\mathbf{e}^{(m)} = 0 \quad . \tag{1.19}$$

Μια άλλη σημαντική παρατήρηση είναι ότι πολλά σχήματα εξομάλυνσης, όπως και το Gauss-Seidel, έχουν την ιδιότητα να απαλοίφουν τους υψίσυχνους όρους του σφάλματος, ενώ δεν τα καταφέρουν εξίσου καλά με τους ομαλούς όρους. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως ιδιότητα εξομάλυνσης (smoothing property) και αποτελεί σοβαρή αδυναμία των μεθόδων εξομάλυνσης. Ωστόσο, για να ξεπεράσουμε την αδυναμία αυτή ένας δρόμος οδηγεί στη ΤΠΠ. Η εξομάλυνση του σφάλματος με το επαναληπτικό σχήμα Gauss-Seidel αποδεικνύεται θεωρητικά με την ανάλυση του σφάλματος σε σειρά Fourier σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\mathbf{e}^{(m)} = \sum_{\theta} \mathcal{E}_\theta^{(m)} e^{i\theta x/h} \quad , \quad \mathbf{e}^{(m+1)} = \sum_{\theta} \mathcal{E}_\theta^{(m+1)} e^{i\theta x/h} \quad , \tag{1.20}$$

όπου $x \in G^h = \{jh,\ j \in \mathbb{Z}\}$.

Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό να κάνουμε τον διαχωρισμό μεταξύ όρων χαμηλής και υψηλής συχνότητας. Όροι του σφάλματος με γωνία $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ λέγονται όροι χαμηλής συχνότητας, ενώ με γωνία $\frac{\pi}{2} \leq |\theta| \leq \pi$ λέγονται όροι υψηλής συχνότητας. Εφαρμόζουμε τώρα το Gauss-Seidel σχήμα στο πρόβλημα μοντέλο (1.1). Οι συνοριακές συνθήκες αγνοούνται και το πρόβλημα ορίζεται πλέον σε άπειρα πλέγματα $G^h = \{jh,\ j \in \mathbb{Z}\}$. Ξεκινώντας από μία αρχική προσέγγιση $\mathbf{v}^{(m)}$ παράγουμε μία νέα προσέγγιση $\mathbf{v}^{(m+1)}$. Τα σφάλματα που αντιστοιχούν στις προσεγγίσεις αυτές ικανοποιούν την σχέση (1.19). Αν αντικαταστήσουμε τα αναπτύγματα των σφαλμάτων $\mathbf{e}^{(m)}$, $\mathbf{e}^{(m+1)}$ στην (1.19) γα δοσμένο θ προκύπτει

$$(2 - e^{-i\theta})\mathcal{E}_\theta^{(m+1)} - e^{i\theta}\mathcal{E}_\theta^{(m)} = 0 \ . \tag{1.21}$$

Ο συντελεστής σύγκλισης μ ορίζεται

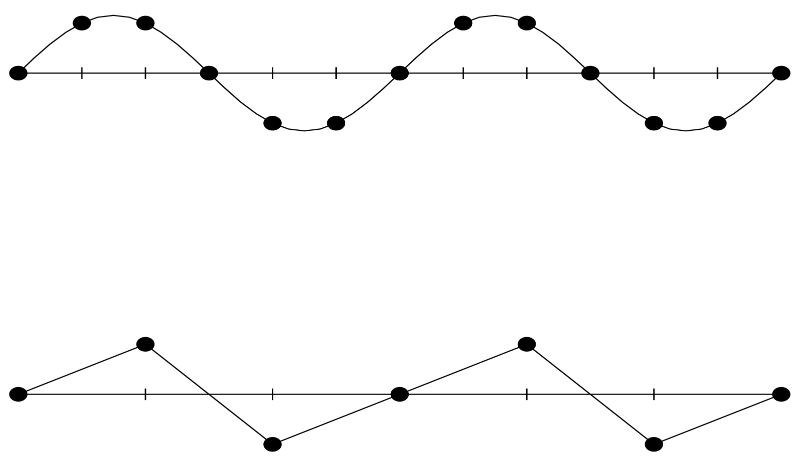
$$\mu = \max\{|\frac{\mathcal{E}_\theta^{(m+1)}}{\mathcal{E}_\theta^{(m)}}| \ , \ \theta \in (-\pi, \pi]\} \quad , \tag{1.22}$$

και για το πρόβλημα μοντέλο μας λαμβάνουμε ότι

$$|\frac{\mathcal{E}_\theta^{(m+1)}}{\mathcal{E}_\theta^{(m)}}| = |\frac{e^{i\theta}}{2 - e^{-i\theta}}| \quad . \tag{1.23}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\mu(\theta) \to 1$ καθώς $\theta \to 0$ που εξηγεί την αδυναμία του επιλυτή να μειώσει τις αρμονικές του σφάλματος που αντιστοιχούν στις χαμηλές συχνότητες.

Το θέμα που προκύπτει λοιπόν είναι αν μπορούμε να τροποποιησούμε κατάλληλα αυτές τις μέθοδους εξομάλυνσης, ώστε να γίνουν αποτελεσματικές με όλους τους όρους του σφάλματος. Μια πρώτη σκέψη ήταν η βελτίωση του σχήματος εξομάλυνσης μέσω μιας καλής αρχικής εκτίμησης της λύσης. Αυτή μπορεί να επιτευχθεί με την εκτέλεση ενός μικρού αριθμού επαναλήψεων σε αραιό πλέγμα και την παρεμβολή των τιμών στο αρχικό



Σχήμα 1.1: Το αραιό πλέγμα (κάτω) αναγνωρίζει μια συνάρτηση ως λιγότερο ομαλή από ότι το πιο πυκνό πλέγμα(πάνω).

πλέγμα. Γενικά, η επίλυση σε ένα αραιό πλέγμα απαιτεί λιγότερο χρόνο, επειδή οι άγνωστοι που πρέπει να υπολογιστούν είναι σημαντικά λιγότεροι. Επίσης, ο ρυθμός σύγκλισης στο αραιό πλέγμα είναι μεγαλύτερος, καθώς η αύξηση του βήματος h οδηγεί σε μείωση του συντελεστή σύγκλισης σύμφωνα με τη σχέση $\mu = 1 - O(h^2)$. Η μεγάλη όμως χρησιμότητα των αραιότερων πλεγμάτων εντοπίζεται στη μείωση των χαμηλών συχνοτήτων του σφάλματος, οι οποίες όπως είδαμε προηγουμένος απαλοίφονται πολύ αργά στο αρχικό πλέγμα. Αυτό συμβαίνει επειδή οι χαμηλής συχνότητας συνιστώστες του σφάλματος στο πυκνό πλέγμα αναγνωρίζονται από το αραιό ως υψίσυχνες και εξαλείφονται γρήγορα με την εφαρμογή ενός σχήματος εξομάλυνσης σε αυτό. Στο Σχήμα 1.1 εμφανίζει πως μια ομαλή περιοδική συνάρτηση (χαμηλής συχνότητας), η οποία διακριτοποιήται στο αραιό πλέγμα, μετατρέπεται σε υψίσυχνη και λιγότερο ομαλή. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μόλις απαλοίψουμε τους όρους υψηλής συχνότητας είναι περισσότερο αποδοτικό να κινηθούμε σε ένα πιο αραιό πλέγμα και να συνεχίσουμε εκεί την επίλυσή μας. Όλα όσα περιγράψαμε ως τώρα αφορούσαν το σφάλμα. Χρειαζόμαστε λοιπόν τον συνδετικό κρίκο μεταξύ του αρχικού προβλήματος και του σφάλματος. Ας θυμηθούμε ότι έχουμε μια εξίσωση για το σφάλμα, η οποία είναι η εξίσωση υπολοίπου. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους εξομάλυνσης απευθείας στο σφάλμα μέσω αυτής της εξίσωσης. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι η επίλυση του αρχικού πρόβληματος με μία τυχαία αρχική προσέγγιση $\mathbf{v}$ είναι ισοδύναμη με την επίλυση της εξίσωσης υπολοίπου με αρχική προσέγγιση το $\mathbf{e} = \mathbf{0}$.

Θα προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε τις ιδέες αυτές μέσα από δύο στρατηγικές που ακολουθούν. Στην πρώτη, χρησιμοποιώντας αραιά πλέγματα λαμβάνουμε καλύτερες αρχικές προσεγγίσεις, δηλαδή

- Εξομαλύνεται η $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ σε ένα πολύ αραιό πλέγμα και λαμβάνουμε μια αρχική προσέγγιση για το αμέσως επόμενο πλέγμα.

  .

  .

  .

- Εξομαλύνεται η $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ για Ω^{4h} και λαμβάνουμε μια αρχική προσέγγιση για Ω^{2h}.
- Εξομαλύνεται η $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ για Ω^{2h} και λαμβάνουμε μια αρχική προσέγγιση για Ω^{h}.
- Εξομαλύνεται η $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ για Ω^{h} και λαμβάνουμε μια προσέγγιση της πραγματικής λύσης.

Η διαδικασία που περιγράψαμε είναι γνωστή ως φωλιασμένη επανάληψη (nested iteration). Παρόλο που δείχνει ελκυστική, στην πράξη δεν χρησιμοποιείται σ'αυτήν την μορφή. Μπορεί να υπάρξει μία βελτίωση χρησιμοποιώντας την παραπάνω στρατηγική, αλλά φθάνοντας στο τελευταίο στάδιο δεν υπάρχει εγγύηση ότι οι ομαλοί όροι τους σφάλματος έχουν απαλοιφθεί. Ωστόσο, αποτελεί τα θεμέλια ενός από τους πιο αποτελεσματικούς αλγόριθμους Πολυπλέγματος, ο οποίος ονομάζεται FMG (Full Multigrid) αλγόριθμος.

Η δεύτερη στρατηγική ενσωματώνει την ιδέα να χρησιμοποιήσουμε το σχήμα εξομάλυνσης στην εξίσωση υπολοίπου. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται παρακάτω

- Εξομαλύνεται η $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ για Ω^h και λαμβάνουμε την προσέγγιση $\mathbf{v}^h$.
- Υπολογίζουμε το υπόλοιπο $r = \mathbf{f} - A\mathbf{v}$.

  Εξομαλύνεται η εξίσωση υπολοίπου $A\mathbf{e} = \mathbf{r}$ για Ω^{2h} και λαμβάνουμε μια προσέγγιση για το $\mathbf{e}^{2h}$.
- Διορθώνουμε την προσέγγιση που είχαμε λάβει στο Ω^h με την εκτίμηση του σφάλματος στο Ω^{2h} : $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + \mathbf{e}^{2h}$.

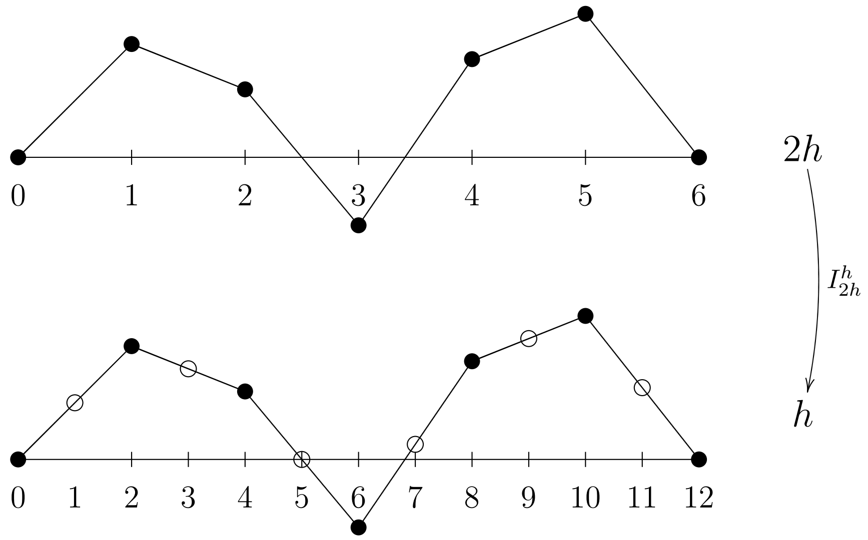
Η διαδικασία αυτή είναι η βάση αυτού που αποκαλούμε σχήμα διόρθωσης (correction scheme). Προκύπτουν όμως κάποιες εύλογες ερωτήσεις σε αυτά που αναφέρθηκαν: τι σημαίνει εξομαλύνεται η $A\mathbf{e} = \mathbf{r}$ για Ω^{2h}; Πώς μπορούμε να μεταβούμε σε ένα πιο αραιό πλέγμα και ποιά είναι η αντίστροφη διαδικασία για να επανέλθουμε στο αρχικό; Η αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων περιγράφεται παρακάτω.

1.3 Μηχανισμοί μεταφοράς της πληροφορίας από το ένα πλέγμα στο άλλο

Θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση, όπου η αναλογία ενός αραιού πλέγματος με το αμέσως επόμενο πυκνότερο πλέγμα είναι ίση με δύο ως προς το βήμα διακριτοποίησης τους.

1.3.1 Παρεμβολή

Στο δεύτερο βήμα του σχήματος διόρθωσης απαιτείται η μεταφορά του σφάλματος $\mathbf{e}^{2h}$ από το Ω^{2h} στο Ω^h. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως παρεμβολή. Ο τελεστής παρεμ-



Σχήμα 1.2: Γραμμική παρεμβολή των ποσοτήτων στους κόμβους του πυκνού μονοδιάστατου πλέγματος συναρτήσει των τιμών στο αραιό.

βολής (επέκτασης) δέχεται ένα διάνυσμα από το Ω^{2h} και ορίζει το ανάλογο διάνυσμα στο Ω^h. Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$I_{2h}^h \; : \; \Omega^{2h} \longrightarrow \Omega^h \quad . \tag{1.24}$$

Ο τελεστής επέκτασης μπορεί να είναι παρεμβολή ανώτερης τάξης ή να λαμβάνει υπόψη την κατεύθυνση διάδοσης της πληροφορίας κατά την επίλυση παραβολικών ή υπερβολικών προβλημάτων. Οι πρακτικές αυτές, μολονότι επιταχύνουν τη σύγκλιση σε σχέση με μία γραμμική ή μηδενικού βαθμού παρεμβολή, έχουν μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος κατά την εφαρμογή τους που αντισταθμίζει το προηγούμενο πλεονέκτημα. Γι'αυτό το λόγο, κατά κανόνα χρησιμοποιείται η γραμμική παρεμβολή. Για την περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_{2j}^h & = & v_j^{2h} \\ v_{2j+1}^h & = & \frac{1}{2}(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}), \quad 0 \le j \le \frac{n}{2} - 1 \end{array} \right. , \tag{1.25}$$

όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.2.

Σε μορφή πινάκων η παραπάνω διαδικασία μπορεί να παρουσιαστεί ως εξής

$$\mathbf{v}^h = I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & \vdots & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}^{2h} \quad . \tag{1.26}$$

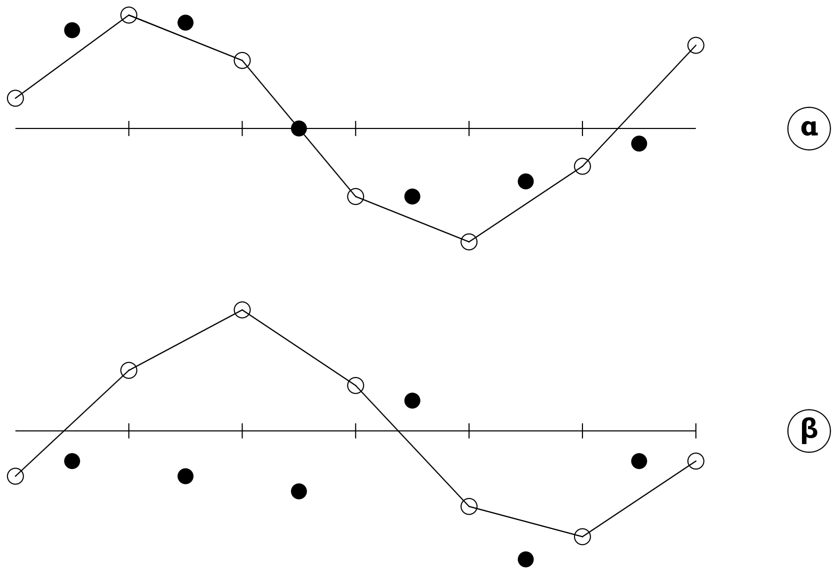
Στις δύο διαστάσεις ο τελεστής επέκτασης μπορεί να οριστεί με όμοιο τρόπο. Αν θεωρήσουμε ότι $I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h} = \mathbf{v}^h$, τότε οι συνιστώσες του $\mathbf{v}^h$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_{2i,2j}^h & = & v_{ij}^{2h} \\ v_{2i+1,2j}^h & = & \frac{1}{2}(v_{ij}^{2h} + v_{i+1,j}^{2h}) \\ v_{2i,2j+1}^h & = & \frac{1}{2}(v_{ij}^{2h} + v_{i,j+1}^{2h}) \\ v_{2i+1,2j+1}^h & = & \frac{1}{4}(v_{ij}^{2h} + v_{i+1,j}^{2h} + v_{i,j+1}^{2h} + v_{i+1,j+1}^{2h}), \quad 0 \leq i,j \leq \frac{n}{2} - 1 \end{array} \right. \quad . \tag{1.27}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να παραχθούν με την βοήθεια του μονοδιάστατου τελεστή επέκτασης. Ορίζουμε με $I_{x,2h}^h$ τον τελεστή επέκτασης στην κατεύθυνση του x και με $I_{y,2h}^h$ τον τελεστή επέκταση στην κατεύθυνση του y. Δηλαδή,

$$\mathbf{v}^{h,x} = I_{x,2h}^h \mathbf{v}^{2h} = \left\{ \begin{array}{lcl} v_{2i,:}^{h,x} & = & v_{i,:}^{2h} \\ v_{2i+1,:}^{h,x} & = & \frac{1}{2}(v_{i,:}^{2h} + v_{i+1,:}^{2h}), \quad 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1 \end{array} \right. \tag{1.28}$$

$$\mathbf{v}^{h,y} = I_{y,2h}^h \mathbf{v}^{2h} = \left\{ \begin{array}{lcl} v_{:,2j}^{h,y} & = & v_{:,j}^{2h} \\ v_{:,2j+1}^{h,y} & = & \frac{1}{2}(v_{:,j}^{2h} + v_{:,j+1}^{2h}), \quad 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1 \end{array} \right. \quad . \tag{1.29}$$



Σχήμα 1.3: (α) Το σφάλμα στο πυκνό πλέγμα είναι ομαλό. Η παρεμβολή του σφάλματος από το αραιό στο πυκνό πλέγμα είναι ακριβής. (β) Το σφάλμα στο πυκνό πλέγμα έχει διαταραχές . Η παρεμβολή του σφάλματος από το αραιό στο πυκνό πλέγμα είναι ανακριβής.

Παρατηρούμε ότι ο διδιάστατος τελεστής επέκτασης μπορεί να εκφραστεί με το εξωτερικό γινόμενο των δύο μονοδιάστατων τελεστών επέκτασης

$$I_{2h}^{h} = I_{y,2h}^{h} \otimes I_{x,2h}^{h}. \tag{1.30}$$

Το ερώτημα που προκύπτει είναι κατά πόσο η γραμμική παρεμβολή του σφάλματος στο πυκνό πλέγμα είναι ακριβής. Ας υποθέσουμε πως το σφάλμα στο αρχικό πλέγμα (μαύροι και άσπροι κύκλοι) είναι ομαλό, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.3α και πως η εκτίμησή του στους κόμβους του αραιού πλέγματος (άσπροι κύκλοι) είναι η ακριβής τιμή του σφάλματος στους αντίστοιχους κόμβους του πυκνού πλέγματος. Τότε η γραμμική παρεμβολή θα δίνει μια καλή προσέγγιση των τιμών στο πυκνό πλέγμα. Αντίθετα, αν το πραγματικό σφάλμα στο πυκνό πλέγμα έχει διαταραχές (μαύροι και άσπροι κύκλοι στο

Σχήμα 1.3β) η γραμμική παρεμβολή μιας πολύ καλής προσέγγισης στο αραιό πλέγμα θα είναι ανακριβής. Άρα η διαδικασία επέκτασης είναι αποδοτική, όταν το σφάλμα στο πυκνό πλέγμα έχει εξομαλυνθεί αρκετά.

1.3.2 Παρεκβολή

Η παρεκβολή είναι η αντίστροφη διαδικασία της παρεμβολής. Ο τελεστής παρεκβολής (περιορισμού) μετασχηματίζει διανύσματα από ένα πυκνό πλέγμα σε ένα αραιό. Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$I_h^{2h} \ : \ \Omega^h \longrightarrow \Omega^{2h} \quad . \tag{1.31}$$

Η πιο απλή μορφή παρεκβολής είναι η προβολή ($injection$). Ορίζεται από την σχέση

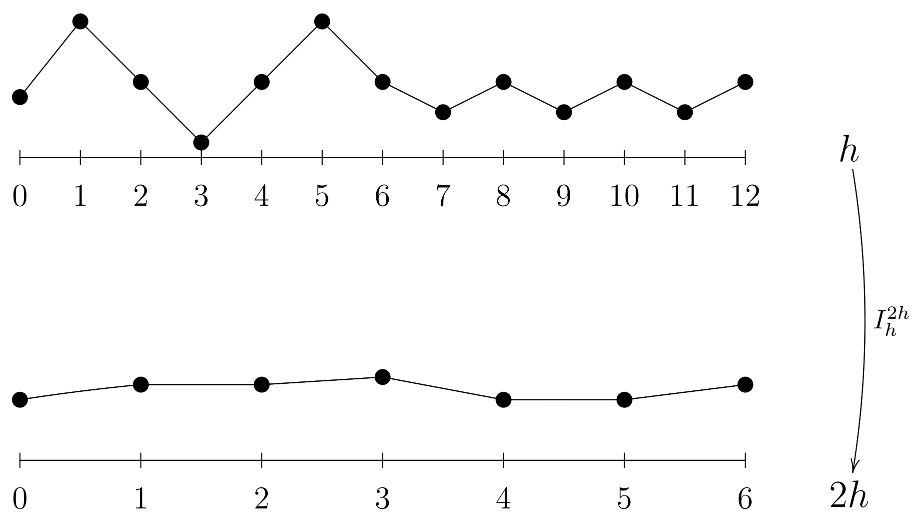
$$v_j^{2h} \ = \ v_{2j}^h \quad . \tag{1.32}$$

Με άλλα λόγια, οι συνιστώσες του διανύσματος (v_j^{2h}) στο αραιό πλέγμα παίρνουν τις τιμές τους απευθείας από τις αντίστοιχες των συνιστώσεων του διανύσματος (v_{2j}^h) στο πυκνό πλέγμα. Ορίζεται ο τελεστής προβολής εντελώς ανάλογα και για τις δύο διαστάσεις από την σχέση

$$v_{i,j}^{2h} \ = \ v_{2i,2j}^h \quad . \tag{1.33}$$

Παρατηρούμε ότι ο τελεστής αυτός για τον υπολογισμό της $\mathbf{v}^{2h}$ σε ένα σημείο εκμεταλλεύεται μόνο την πληροφορία που μας δίνει η τιμή της $\mathbf{v}^h$ στο σημείο αυτό. Σε κάποιες περιπτώσεις αυτό δεν είναι αποδοτικό. Στο Σχήμα 1.4 παρουσιάζεται ένας εναλλακτικός τελεστής περιορισμού μεγαλύτερης ακρίβειας που εκμεταλλεύται και την πληροφορία από τα *γειτονικά* σημεία, ο περιοριστής πλήρους στάθμισης ($full\ weighting$) , ο οποίος ορίζεται για το μονοδιάστατο πρόβλημα από τη σχέση

$$v_j^{2h} \ = \ \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h), \ \ 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1 \quad . \tag{1.34}$$



Σχήμα 1.4: Ο τελεστής περιορισμού πλήρους στάθμισης για τη μεταφορά των ποσοτήτων από το πυκνό στο αραιό πλέγμα.

Σε μορφή πινάκων η παραπάνω διαδικασία μπορεί να παρουσιαστεί ως εξής

$$\mathbf{v}^{2h} = I_h^{2h}\mathbf{v}^h = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{v}^h \quad . \tag{1.35}$$

Αντίστοιχα, ορίζουμε των διδιάστατο $full\ weighting$ τελεστή

$$\begin{aligned} v_{ij}^{2h} = \frac{1}{16}[&v_{2i-1,2j-1}^h + v_{2i-1,2j+1}^h + v_{2i+1,2j-1}^h + v_{2i+1,2j+1}^h \\ &+ 2(v_{2i,2j-1}^h + v_{2i,2j+1}^h + v_{2i-1,2j}^h + v_{2i+1,2j}^h) \\ &+ 4v_{2i,2j}^h], \quad 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1 \quad . \end{aligned} \tag{1.36}$$

Μπορεί να αποδειχθεί η παρακάτω σχέση, η οποία συνδέει τον $full\ weighting$ τελεστή του μονοδιάστατου προβλήματος με του διδιάστατου

$$I_h^{2h} = I_{y,h}^{2h} \otimes I_{x,h}^{2h} \quad . \tag{1.37}$$

Ο λόγος που προτείνεται αυτή η μορφή τελεστή είναι η σχέση που την συνδέει με τον τελεστή γραμμικής επέκτασης

$$I_{2h}^{h} = c(I_h^{2h})^T \quad , \quad c \in \mathbb{R} \quad . \tag{1.38}$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι οι δύο τελεστές κατέχουν την μεταβολική ιδιότητα (variational property), η οποία είναι πολύ σημαντική στην εφαρμογή ενός σχήματος διόρθωσης.

Το σχήμα διόρθωσης που περιγράψαμε μπορεί να εφαρμοστεί όταν χρησιμοποιούνται περισσότερα του ενός αραιότερα πλέγματα ($2h, 4h, \cdots$). Η περιγραφή της επαναληπτικής εφαρμογής του σχήματος διευκολύνεται αν ακολουθήσουμε τους εξής συμβολισμούς. Ονομάζουμε το δεξί μέλος της εξίσωσης υπολοίπου $\mathbf{f}^{2h}$ αντί για $\mathbf{r}^{2h}$ και τη λύση της $\mathbf{u}^{2h}$ αντί για $\mathbf{e}^{2h}$. Κατά την εφαρμογή του σχήματος, η αρχική εκτίμηση $\mathbf{v}^{2h}$ της $\mathbf{u}^{2h}$, όταν εξομαλύνεται η εξίσωση υπολοίπου για πρώτη φορά στο κάθε πλέγμα, τίθεται ίση με μηδέν, καθώς δεν υπάρχει καμία πληροφορία για τη λύση. Η επαναληπτική εφαρμογή του σχήματος διόρθωσης σε μία σειρά αραιότερων πλεγμάτων αποτελεί τον κύκλο $\mathbf{V}$ (Σχήμα 1.5α), ο οποίος αλγόριθμος εκτελείται ως εξής:

V-Κύκλος

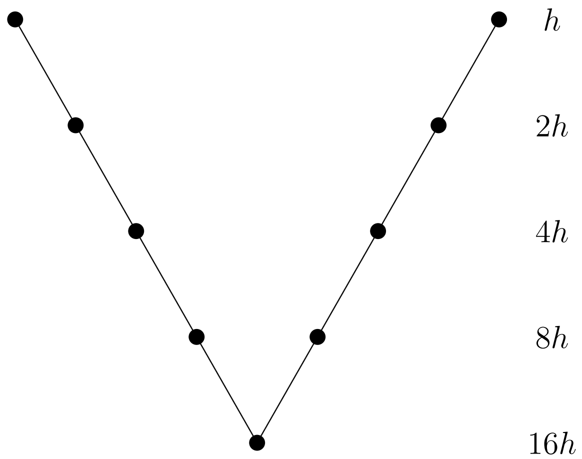
$$\mathbf{v}^h \leftarrow V^h(\mathbf{v}^h, \mathbf{f}^h)$$

- Εξομαλύνεται η $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ v_1 φορές οπότε προκύπτει μια εκτίμηση $\mathbf{v}^h$.
- Υπολογίζεται η ποσότητα $\mathbf{f}^{2h} = I_h^{2h}\mathbf{r}^h$.
    - Εξομαλύνεται $A^{2h}\mathbf{u}^{2h} = \mathbf{f}^{2h}$ v_1 φορές αρχική εκτίμηση $\mathbf{v^{2h}}$.
    - Υπολογίζεται η ποσότητα $\mathbf{f}^{4h} = I_{2h}^{4h}\mathbf{r}^{2h}$.
        - Εξομαλύνεται $A^{4h}\mathbf{u}^{4h} = \mathbf{f}^{4h}$ v_1 φορές αρχική εκτίμηση $\mathbf{v^{4h}}$.
        - Υπολογίζεται η ποσότητα $\mathbf{f}^{8h} = I_{4h}^{8h}\mathbf{r}^{4h}$.

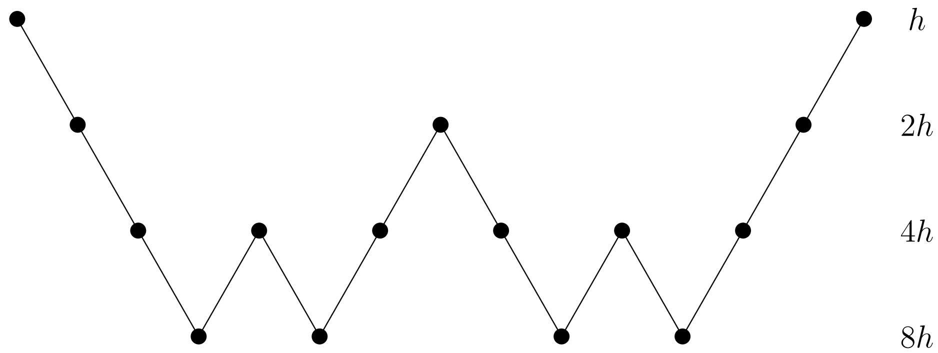
          .
          .
          .
            - Επιλύεται η εξίσωση $A^{Lh}\mathbf{u}^{Lh} = \mathbf{f}^{Lh}$ στο αραιότερο πλέγμα.

          .
          .
          .
        - Διορθώνεται η προσέγγιση $\mathbf{v}^{4h}$ σύμφωμα με τη σχέση: $\mathbf{v}^{4h} \leftarrow \mathbf{v}^{4h} + I_{8h}^{4h}\mathbf{v}^{8h}$.
        - Εξομαλύνεται η $A^{4h}\mathbf{u}^{4h} = \mathbf{f}^{4h}$ v_2 φορές με αρχική εκτίμηση $\mathbf{v^{4h}}$.
    - Διορθώνεται η προσέγγιση $\mathbf{v}^{2h}$ σύμφωμα με τη σχέση: $\mathbf{v}^{2h} \leftarrow \mathbf{v}^{2h} + I_{4h}^{2h}\mathbf{v}^{4h}$.
    - Εξομαλύνεται η $A^{2h}\mathbf{u}^{2h} = \mathbf{f}^{2h}$ v_2 φορές με αρχική εκτίμηση $\mathbf{v^{2h}}$.
- Διορθώνεται η προσέγγιση $\mathbf{v}^h$ σύμφωμα με τη σχέση: $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + I_{2h}^h\mathbf{v}^{2h}$.
- Εξομαλύνεται η $A^h\mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$ v_2 φορές με αρχική εκτίμηση $\mathbf{v^h}$.

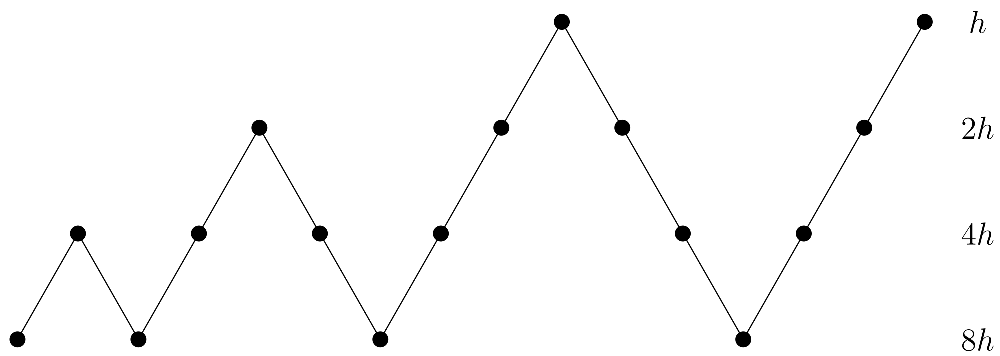
Μια παραλλαγή του κύκλου V είναι ο κύκλος W (Σχήμα 1.5β), ο οποίος στοχεύει να μεταφέρει το υπολογιστικό φορτίο στα αραιότερα πλέγματα μειώνοντας τις επιλύσεις στο αρχικό πλέγμα, έχοντας όμως ως αποτέλεσμα τη μείωση της ευστάθειας του αλγορίθμου. Μία άλλη μέθοδος είναι η πλήρης τεχνική πολυπλέγματος FMG (Σχήμα 1.5γ), η οποία περιλαμβάνει ένα προκαταρκτικό στάδιο, όπου οι εξισώσεις στα αραιότερα πλέγματα εξομαλύνονται, ώστε να προσφέρουν μια καλή εκτίμηση της λύσης στα πυκνότερα.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 1.5: Σχηματική περιγραφή των κύκλων (α) V, (β) W και (γ) FMG. Στη βάση των σχημάτων βρίσκεται το πιο αραιό πλέγμα, στην κορυφή το αρχικό (πυκνό) και ενδιάμεσα τα διαδοχικά αραιότερα πλέγματα.

1.4 Προβολή Galerkin

Αυτό που μένει ακόμα να δούμε είναι πως ορίζεται το αρχικό γραμμικό σύστημα στα αραιότερα πλέγματα. Ένας τρόπος είναι να οριστεί μέσω της διακριτοποίησης στο αραιό πλέγμα που θέλουμε. Σε άλλες περιπτώσεις είναι προτιμότερο, από θεωρητικής και πρακτικής άποψης, να οριστεί μέσω της προβολής Galerkin, η οποία περιγράφεται παρακάτω.

Θεωρούμε την εξίσωση υπολοίπου στο αρχικό πλέγμα

$$A_h \mathbf{u}^h = \mathbf{r}^h \tag{1.39}$$

Εφαρμόζουμε τον τελεστή περιορισμού και στα δύο μέλοι

$$I_h^{2h} A^h \mathbf{u}^h = I_h^{2h} \mathbf{r}^h \tag{1.40}$$

Αντικαθιστώντας την $\mathbf{u}^h = I_{2h}^h \mathbf{u}^{2h}$ στην παραπάνω σχέση λαμβάνουμε

$$I_h^{2h} A^h h I_{2h}^h \mathbf{u}^{2h} = I_h^{2h} \mathbf{r}^h \tag{1.41}$$

Το πρόβλημα στο αραιό πλέγμα ορίζεται από τις σχέσεις

$$A^{2h} \;=\; I_h^{2h} A^h I_{2h}^h \quad , \quad \mathbf{r}^{2h} \;=\; I_h^{2h} \mathbf{r}^h \quad . \tag{1.42}$$

Κεφάλαιο 2

Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων για την αριθμητική επίλυση ΠΣΤ ελλειπτικού τύπου

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε τη γενική μορφή Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ) που περιγράφεται από τις σχέσεις

$$\text{(ΠΣΤ)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}u(\mathbf{x}) & = & f(\mathbf{x}) \ , \ \ \mathbf{x} \in \Omega \\ \\ \mathcal{B}u(\mathbf{x}) & = & g(\mathbf{x}) \ , \ \ \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{2.1}$$

Ανάμεσα στις περισσότερο διαδεδομένες μεθόδους αριθμητικής επίλυσης ΠΣΤ είναι και αυτές των Πεπερασμένων Στοιχείων, οι οποίες μπορούν να περιγραφούν σχηματικά με τα παρακάτω βήματα :

- <u>**Βήμα 0:**</u> Γεωμετρική Διαμέριση του πεδίου Ω σε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

- <u>**Βήμα 1:**</u> Επιλογή n γραμμικά ανεξάρτητων κατά τμήματα συνεχών πολυωνυμικών συναρτήσεων $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, οι οποίες ονομάζονται συναρτήσεις **βάσης** και χρησιμοποιούνται στη προσέγγιση της πραγματικής λύσης $u(\mathbf{x})$ του ΠΣΤ ως εξής

$$u(\mathbf{x}) \;\simeq\; u_n(\mathbf{x}) \;=\; a_1\Phi_1(\mathbf{x}) + \cdots + a_n\Phi_n(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k\Phi_k(\mathbf{x}). \tag{2.2}$$

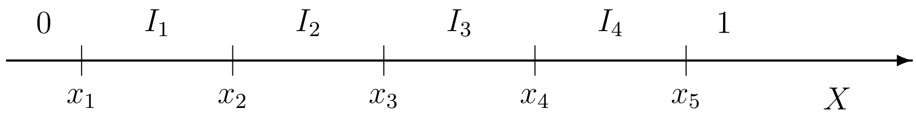
- <u>**Βήμα 2:**</u> Επιλογή μεθόδου διακριτοποίησης (Galerkin, Rayleigh-Ritz, Least Squares, Collocation) [2, 18] για μετάβαση από το **συνεχή** χώρο στο **διακριτό** δηλαδή μετατροπή του ΠΣΤ σε ένα πρόβλημα επίλυσης του γραμμικού συστήματος

$$C\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} \tag{2.3}$$

όπου $C \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\vec{\mathbf{a}} \;=\; [a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n]^T$ και $\vec{\mathbf{b}} \;=\; [b_1 \;\; b_2 \;\; \cdots \;\; b_n]^T$.

- <u>**Βήμα 3:**</u> Επιλογή μεθόδου για την επίλυση του γραμμικού συστήματος και προσδιορισμός των αγνώστων $a_1, \ldots, a_n$. Η επιλογή αυτή βασίζεται στο μέγεθος και στις ιδιότητες του παραγόμενου γραμμικού συστήματος.

Διαφορετικές επιλογές σε κάθε ένα από τα παραπάνω βήματα συνεπάγονται και διαφορετικές μεθόδους για την επίλυση ΠΣΤ.



Σχήμα 2.1: Γεωμετρική απεικόνιση της διαμέρισης του πεδίου Ω.

2.2 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων Hermite Collocation σε μία διάσταση

Ένα απο τα κλασσικότερα ΠΣΤ σε μία διάσταση είναι το πρόβλημα Sturm-Liouville, όπου οι διαφορετικοί τελεστές $\mathcal{L}$ και $\mathcal{B}$ ορίζονται ως

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} \;\equiv\; -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{d}{dx}) + q(x) \quad , \quad x \in \Omega \equiv\; [a,b] \\ \\ \mathcal{B}u(a) \;\equiv\; \gamma_0 u(a) + \gamma_1 u'(a) \; , \; \mathcal{B}u(b) \;\equiv\; \delta_0 u(b) + \delta_1 u'(b) \end{array} \right. \quad . \tag{2.4}$$

Για την αριθμητική επίλυση του με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Collocation ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

- **Βήμα 0:** Θεωρούμε ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $\Omega = [0,1]$ σε n_s υποδιαστήματα (πεπερασμένα στοιχεία) I_m , $m = 1 , \dots , n_s$ με βήμα διακριτοποίησης $h = \frac{1}{n_s}$ και συντεταγμένες κόμβων (x_i, όπου $x_i = (i-1)h$ με $i = 1 , \dots , (n_s+1)$. Το Σχήμα 2.1 εμφανίζει την διαμέριση του Ω για την περίπτωση όπου $n_s = 4$.

- **Βήμα 1:** Ως συναρτήσεις βάσης επιλέγονται τα τμηματικά κυβικά πολυώνυμα Hermite [41], με γενική μορφή $\Phi_k(x)$, και η συνάρτηση $u(x)$ προσεγγίζεται από την

$$u(x) \;\simeq\; u_n(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi_i(x) \quad , \tag{2.5}$$

όπου $n = 2(n_s + 1)$.

- **Βήμα 2:** Ως μέθοδος διακριτοποίησης επιλέγεται η μέθοδος της **Collocation** [5, 26, 27, 28], η οποία κατασκευάζει το γραμμικό σύστημα $C\vec{\mathrm{a}} = \vec{\mathrm{b}}$ απαιτώντας οι συνθήκες $\mathcal{L}u_n - f = 0$ και $\mathcal{B}u_n - g = 0$ να ισχύουν για n καθορισμένα εσωτερικά και συνοριακά collocation σημεία και ως τέτοια επιλέγονται τα σημεία Gauss.

- **Βήμα 3:** Για την επίλυση του αραιού και γενικού γραμμικού συστήματος $C\vec{\mathrm{a}} = \vec{\mathrm{b}}$ επιλέγεται κάποια επαναληπτική μέθοδος.

Στις παραγράφους που ακολουθούν αναλύονται οι παραπάνω επιλογές.

2.2.1 Collocation με συναρτήσεις βάσης τα πολυώνυμα Hermite

Τα τμηματικά κυβικά πολυώνυμα Hermite ορίζονται ως εξής :

$$\Phi(x) \doteq \begin{cases} \Phi_+(x) & , \quad x \in [0,1] \\ \Phi_-(x) & , \quad x \in [-1,0] \\ 0 & , \quad x \notin [-1,1] \end{cases} , \tag{2.6}$$

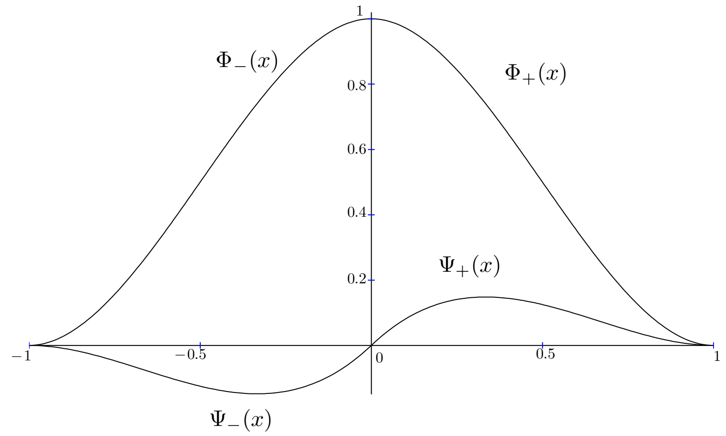
$$\Psi(x) \doteq \begin{cases} \Psi_+(x) & , \quad x \in [0,1] \\ \Psi_-(x) & , \quad x \in [-1,0] \\ 0 & , \quad x \notin [-1,1] \end{cases} , \tag{2.7}$$

όπου

$$\Phi_+(x) \doteq \begin{cases} (1-x)^2(1+2x) & , \quad x \in [0,1] \\ 0 & , \quad x \notin [0,1] \end{cases} , \tag{2.8}$$

$$\Phi_-(x) = \Phi_+(-x) \doteq \begin{cases} (1+x)^2(1-2x) & , \quad x \in [-1,0] \\ 0 & , \quad x \notin [-1,0] \end{cases} , \tag{2.9}$$

$$\Psi_+(x) \doteq \begin{cases} x(1-x)^2 & , \quad x \in [0,1] \\ 0 & , \quad x \notin [0,1] \end{cases} , \tag{2.10}$$



Σχήμα 2.2: Κυβικά πολυώνυμα Hermite.

$$\Psi_-(x) \;=\; -\Psi_+(-x) \;\doteq\; \begin{cases} x(1+x)^2 & , \quad x \in [-1,0] \\ 0 & , \quad x \notin [-1,0] \end{cases} . \tag{2.11}$$

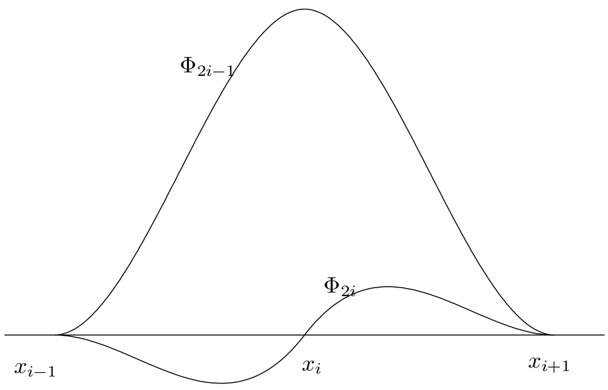
Το Σχήμα 2.2 εμφανίζει τα κυβικά πολυώνυμα Hermite, όπως αυτά ορίζονται στο $[-1,1]$. Σε κάθε κόμβο x_m αντιστοιχούν δύο συναρτήσεις και ορίζονται ως εξής:

$$\Phi_{2m-1}(x) \;\doteq\; \begin{cases} \Phi(\frac{x-x_m}{h}) & , \quad x \in I_{m-1} \cup I_m \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} , \tag{2.12}$$

$$\Phi_{2m}(x) \;\doteq\; \begin{cases} \Psi(\frac{x-x_m}{h}) & , \quad x \in I_m \cup I_{m-1} \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} , \tag{2.13}$$

όπου $m = 1, \ldots, (n_s + 1)$, $I_i \equiv [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n_s$.

Για να ισχύουν οι ορισμοί (2.12) και (2.13) για $m = 1$ και $m = n_s + 1$, θεωρούμε δύο εικονικούς κόμβους $x_0 := \; -h$ και $x_{n_s+2} := \; 1 + h$.



Σχήμα 2.3: Πολυώνυμα Hermite ορισμένα στον κόμβο x_i.

Στο Σχήμα 2.3 εμφανίζεται ένας τυχαίος κόμβος x_i και παρουσιάζονται οι αντίστοιχες συναρτήσεις, όπως αυτές ορίζονται στο κόμβο αυτόν.

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι εξής ιδιότητες

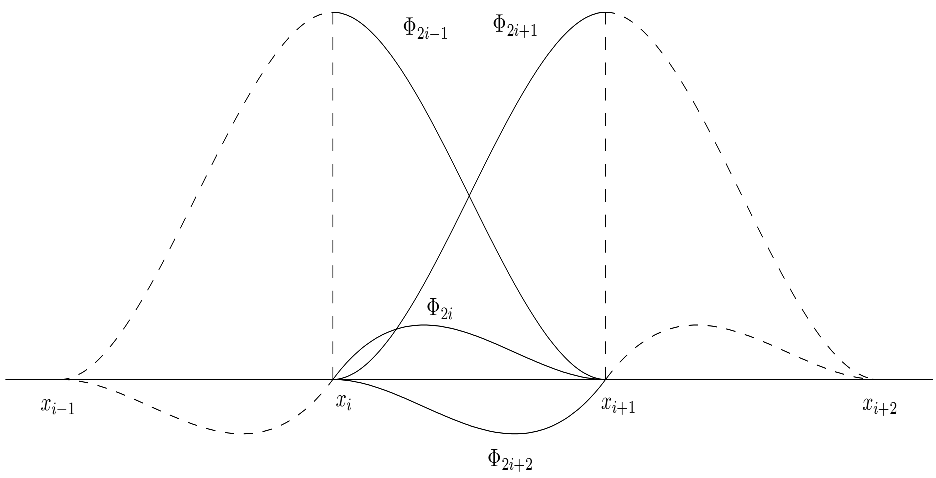
$$\left\{\begin{array}{lcl} \Phi_{2m-1}(x_i) & = & h\frac{d}{dt}\Phi_{2m}(x_i) \;=\; \delta_m^i \\ \Phi_{2m}(x_i) & = & \frac{d}{dt}\Phi_{2m-1}(x_i) \;=\; 0 \end{array}\right. \tag{2.14}$$

για όλα τα $m = 1, \ldots, (n_s+1)$ και όπου δ_m^i : Δέλτα του Kronecker.

Επιπλέον σημειώνουμε ότι σε κάθε υποδιάστημα I_i διέρχονται τέσσερα μόνο μη μηδενικά πολυώνυμα Hermite με δείκτες : Φ_{2i-1} , Φ_{2i} , Φ_{2i+1} και Φ_{2i+2}.

Το γεγονός αυτό επιδεικνύεται σχηματικά και στο Σχήμα 2.4. Σαν άμεση συνέπεια των προηγουμένων σχέσεων προκύπτει ότι

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} u_n(x_i) & = & a_{2i-1} & , & h\frac{d}{dx}u_n(x_i) & = & a_{2i} \\ u_n(x_{i+1}) & = & a_{2i+1} & , & h\frac{d}{dx}u_n(x_{i+1}) & = & a_{2i+2} \end{array}\right. , \tag{2.15}$$



Σχήμα 2.4: Μη μηδενικά Πολυώνυμα Hermite στο υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$.

όπου $i = 1, \ldots, (n_s + 1)$ και στο παρακάτω σχήμα εμφανίζονται οι δύο άγνωστοι, όπως αυτοί αντιστοιχούν στον κόμβο x_i.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο I_i αντιστοιχούν 4 μη μηδενικές συναρτήσεις βάσης και επομένως για $x \in I_i$ ισχύει ότι :

$$u_n(x) = \sum_{k=2i-1}^{2i+2} \alpha_k \Phi_k(x) \ . \tag{2.16}$$

Γι'αυτό το λόγο κάθε στοιχείο I_i από τα n_s είναι στοιχείο με 4 βαθμούς ελευθερίας. Συνολικά λοιπόν, οι άγνωστοι οι οποίοι πρέπει να υπολογιστούν είναι $4n_s$. Παρατηρούμε ότι σε διαδοχικά στοιχεία I_i , I_{i+1} οι αγνώστοι που αντιστοιχούν στο δεύτερο κόμβο του I_i, ταυτίζονται με τους αγνώστους που αντιστοιχούν στον πρώτο κόμβο του I_{i+1}, με αποτέλεσμα οι άγνωστοι να είναι συνολικά $n = 2(n_s + 1)$.

Οι Collocation εξισώσεις κατασκευάζονται απαιτώντας το υπόλοιπο $\mathcal{L}u_n - f$ να μηδενίζεται σε $n_I = 2n_s$ **εσωτερικά** collocation σημεία και το υπόλοιπο $\mathcal{B}u_n - g$ να μηδενίζεται σε $n_b = 2$ **συνοριακά** collocation σημεία. Παρατηρούμε ότι το πλήθος $n_I + n_b$ των collocation εξισώσεων ισούται με τον αριθμό των αγνώστων, ο οποίος προκύπτει από τη χρήση των κυβικών πολυωνύμων Hermite [4].

Πρέπει να τονίσουμε εδώ, ότι στην περίπτωση των Dirichlet συνοριακών συνθηκών κάποιοι από τους αγνώστους, οι οποίοι βρίσκονται πάνω στο σύνορο του Ω προσδιορίζονται άμεσα από αυτές, με αποτέλεσμα την απαλοιφή τους από το γραμμικό σύστημα. Το πλήθος των αγνώστων αυτών είναι ίσο με 2 με αποτέλεσμα να μην χρειάζεται η επιλογή συνοριακών collocation σημείων.

Για την περιπτωσή μας, όπου το $\Omega = [0, 1]$ και η Dirichlet συνθήκη, έχει ως αποτέλεσμα την παρακάτω μόρφη των συνοριακών τιμών

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(0) & = & \gamma \\ u(1) & = & \delta \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Οι άγνωστοι που μπόρουν να υπολογιστούν άμεσα από τις συνοριακές συνθήκες είναι οι a_1, a_{2n_s+1} με τιμές γ και δ αντίστοιχα.
Οπότε για την περίπτωση Dirichlet συνοριακών συνθηκών το πλήθος των αγνώστων και συνεπώς και των εσωτερικών collocation σημείων ισούται με $n = 2n_s$.

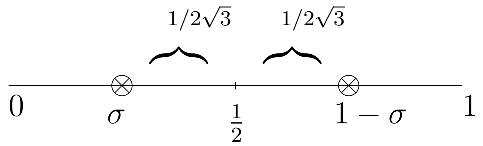
2.2.2 Σημεία Collocation - Στοιχειώδης πίνακες

Τα σημεία Gauss στο διάστημα $[-1, 1]$ είναι η απεικόνιση των ρίζων του Legendre πολυωνύμου δευτέρου βαθμού $\frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0$, δηλαδή τα σημεία $\mp\frac{\sqrt{3}}{3}$. Με μετασχηματισμό τα σημεία Gauss στο στοιχείο $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ δίνονται απο τις σχέσεις

$$\sigma_{2i} \;=\; \frac{x_i+x_{i+1}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{h_i}{2} \quad , \quad \sigma_{2i+1} \;=\; \frac{x_i+x_{i+1}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{h_i}{2} \;. \tag{2.18}$$

Για την περίπτωση ομοιόμορφου διαμερισμού του Ω τα σημεία Gauss δίνονται από τη σχέση $\sigma_i^{\pm} = \frac{h}{2}(2i - 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Παρατηρούμε στο σχήμα που ακολουθεί ότι τα σημεία Gauss στο $[0, 1]$ είναι σ και $1 - \sigma$



όπου $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τις παραγώγους k-τάξης των κυβικών πολυωνύμων Hermite ($D^k = \frac{d^k}{dx^k}$)

$$\begin{cases} D^k\Phi_{2i-1}(\sigma_{2i}) = \frac{1}{h^k}D^k\Phi(\sigma) \quad , \quad D^k\Phi_{2i-1}(\sigma_{2i+1}) = \frac{1}{h^k}D^k\Phi(1-\sigma) \\ D^k\Phi_{2i}(\sigma_{2i}) = \frac{1}{h^{k-1}}D^k\Psi(\sigma) \quad , \quad D^k\Psi_{2i-1}(\sigma_{2i+1}) = \frac{1}{h^{k-1}}D^k\Psi(1-\sigma) \\ D^k\Phi(1-\sigma) = D^k(1-\Phi(\sigma)) = (-1)^k D^k\Phi(\sigma) \end{cases} \tag{2.19}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n_s$. Επιλέγοντας τα σημεία Gauss ως εσωτερικά collocation σημεία, ορίζονται οι παρακάτω πίνακες, για $l = 0, 1, 2$

$$k_i^l \;=\; D^l\Phi_k(\sigma_j)_{k=2i-1,j=2i}^{2i+2 \quad 2i+1} \tag{2.20}$$

Από την τελευταία σχέση υπολογίζουμε τους στοιχειώδης πίνακες (element matrices) για κάθε στοιχείο I_i:

$$k^0 \;=\; \begin{bmatrix} a & hb & 1-a & -h\bar{b} \\ 1-a & h\bar{b} & a & -hb \end{bmatrix} \quad , \tag{2.21}$$

$$a = \frac{9+4\sqrt{3}}{18}, b = \frac{3+\sqrt{3}}{36}, \bar{b} = \frac{3-\sqrt{3}}{36}$$

$$k^1 = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -1 & hb & 1-a & -h\bar{b} \\ 1-a & h\bar{b} & a & -hb \end{bmatrix} \quad , \tag{2.22}$$

$$a = \tfrac{9+4\sqrt{3}}{18}, b = \tfrac{3+\sqrt{3}}{36}, \bar{b} = \tfrac{3-\sqrt{3}}{36}$$

$$k^2 = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} a & hb & 1-a & -h\bar{b} \\ 1-a & h\bar{b} & a & -hb \end{bmatrix} \quad , \tag{2.23}$$

$$a = \tfrac{9+4\sqrt{3}}{18}, b = \tfrac{3+\sqrt{3}}{36}, \bar{b} = \tfrac{3-\sqrt{3}}{36}$$

Με την βοήθεια των στοιχειωδών πινάκων κ^l κατασκευάζονται οι K^l πίνακες, οι οποίοι αναφέρονται σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία

$$K^l = \begin{bmatrix} \kappa_2^l & \kappa_3^l & \kappa_4^l & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_1^l & \kappa_2^l & \kappa_3^l & \kappa_4^l & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_1^l & \kappa_2^l & \kappa_3^l & \kappa_4^l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \kappa_1^l & \kappa_2^l & \kappa_3^l \end{bmatrix} . \tag{2.24}$$

Ο συμβολισμός κ_i^l αναπαριστά την i-στήλη του στοιχειώδη πίνακα k^l, για $l = 0, 1, 2$.

2.3 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων Hermite Collocation σε δύο διαστάσεις

Για την περίπτωση όπου η μεταβλητή $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, οι τελεστές $\mathcal{L}$ και $\mathcal{B}$ του ΠΣΤ (2.1) μπορεί να οριστούν ως

$$\begin{cases} \mathcal{L} \equiv a(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + h(x,y) \\ \mathcal{B} \equiv \alpha(x,y) + \beta(x,y)\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \end{cases} \tag{2.25}$$

Η συνθήκη $a(x,y)c(x,y) > b^2(x,y)$ χαρακτηρίζει τον **ελλειπτικό** τύπο του προβλήματος και συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $a(x,y)$ και $c(x,y)$ είναι ομόσημες και μη μηδενικές. Από τα κλασσικότερα παραδείγματα ελλειπτικών ΠΣΤ είναι και το Modified Helmholtz πρόβλημα που ορίζεται σαν

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - \lambda u(x,y) & = & f(x,y) \ , \ \ (x,y) \in \Omega \equiv [0,1] \times [0,1] \\ u(x,y) & = & g(x,y) \ , \ \ (x,y) \in \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.26}$$

με $\lambda \geq 0$, το οποίο θα αποτελέσει και το πρόβλημα μοντέλο για την ανάπτυξη και μελέτη αριθμητικών μεθόδων στην παρούσα μελέτη. Το Poisson-Dirichlet πρόβλημα αποτελεί ειδική περίπτωση του, για $\lambda = 0$.

Για την αριθμητική επίλυση του Modified Helmholtz ΠΣΤ με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Collocation ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

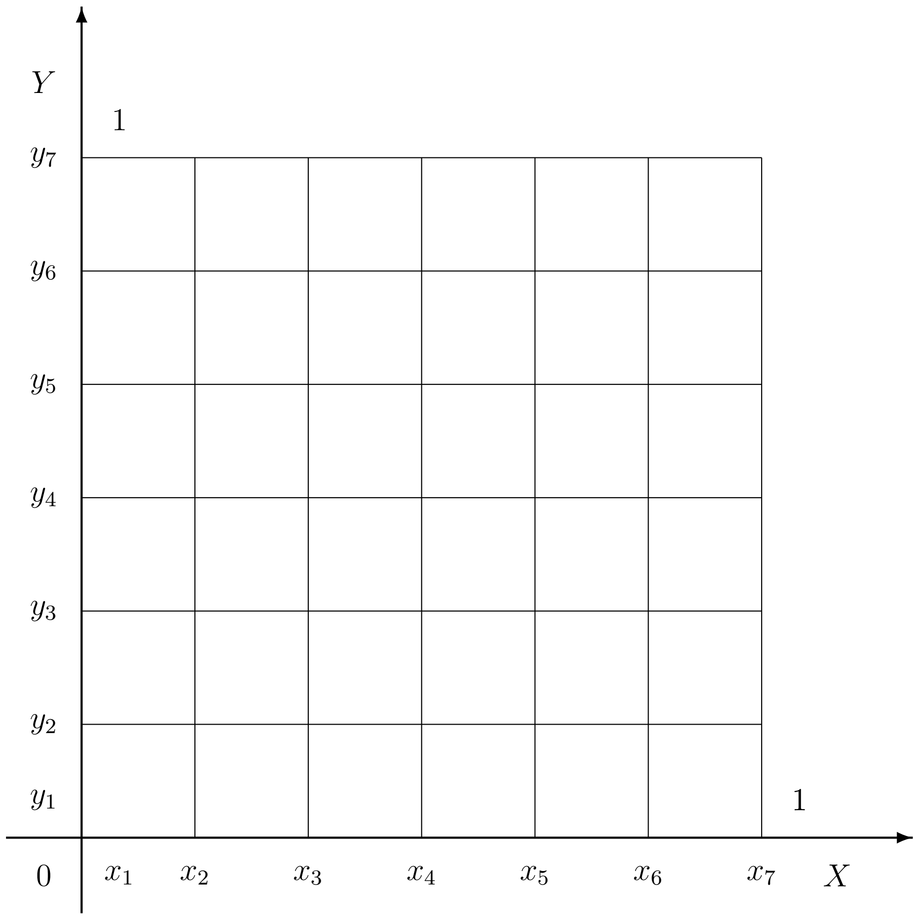
- **Βήμα 0:** Θεωρούμε ομοιόμορφο διαμερισμό των διαστημάτων $I^x = I^y = [0,1]$ σε n_s υποδιαστήματα $I^x_m = I^y_m$, $m = 1\,,\,\ldots\,,\,n_s$ τα οποία παράγουν ένα ομοιόμορφο πλέγμα με βήμα διακριτοποίησης $h = \frac{1}{n_s}$ και συντεταγμένες κόμβων (x_i, y_j), όπου $x_i = (i-1)h$ και $y_j = (j-1)h$, με $i,j = 1\,,\,\ldots\,,\,(n_s+1)$. Το Σχήμα 2.5 εμφανίζει την διαμέριση του Ω για $n_s = 6$.

- **Βήμα 1:** Ως συναρτήσεις βάσης επιλέγονται τα Hermite Bicubic πολυώνυμα, με γενική μορφή $\Phi_k(x,y) = \Phi_i(x)\Phi_j(y)$, και η συνάρτηση $u(x,y)$ προσεγγίζεται από την

$$u(x,y) \ \simeq \ u_n(x,y) \ = \ \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \sum_{j=1}^{\tilde{n}} a_{i,j} \Phi_i(x) \Phi_j(y) \ \ , \tag{2.27}$$

όπου $\tilde{n} = 2(n_s + 1)$.

- **Βήμα 2:** Ως μέθοδος διακριτοποίησης επιλέγεται η μέθοδος της **Collocation**, η οποία κατασκευάζει το γραμμικό σύστημα $C\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{b}}$ απαιτώντας οι συνθήκες



Σχήμα 2.5: Γεωμετρική απεικόνιση της διαμέρισης του πεδίου Ω

$\mathcal{L}u_n - f = 0$ και $\mathcal{B}u_n - g = 0$ να ισχύουν για n καθορισμένα εσωτερικά και συνοριακά collocation σημεία.

- **Βήμα 3:** Για την επίλυση του αραιού και γενικού γραμμικού συστήματος $C\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{b}}$ επιλέγεται κάποια επαναληπτική μέθοδος [3, 19, 20, 23, 45].

Βασισμένοι στις ιδιότητες των πολυωνύμων Hermite εύκολα προκύπτουν και οι ιδιότητες των διδιάστατων bicubic πολυωνύμων Hermite. Έτσι, παρατηρούμε ότι σε κάθε διδιάστατο κόμβο (x_i, y_j) ορίζονται τα παρακάτω τέσσερα Hermite Bicubic πολυώνυμα :

$$
\begin{cases}
\Phi_{2i-1,2j-1}(x,y) & = & \Phi_{2i-1}(x)\Phi_{2j-1}(y) \\
\Phi_{2i-1,2j}(x,y) & = & \Phi_{2i-1}(x)\Phi_{2j}(y) \\
\Phi_{2i,2j-1}(x,y) & = & \Phi_{2i}(x)\Phi_{2j-1}(y) \\
\Phi_{2i,2j}(x,y) & = & \Phi_{2i}(x)\Phi_{2j}(y)
\end{cases}
\tag{2.28}
$$

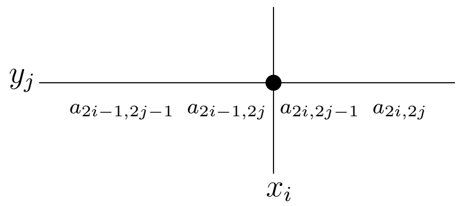
με τις εξής ιδιότητες :

$$
\begin{cases}
\Phi_{2i-1,2j-1}(x_i,y_j) \;=\; 1 & , & h\frac{\partial}{\partial y}\Phi_{2i-1,2j}(x_i,y_j) \;=\; 1 \\
h\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{2i,2j-1}(x_i,y_j) \;=\; 1 & , & h^2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Phi_{2i,2j}(x_i,y_j) \;=\; 1
\end{cases}
. \tag{2.29}
$$

Σαν άμεση συνέπεια των προηγουμένων σχέσεων προκύπτει ότι

$$
\begin{cases}
u_n(x_i,y_j) & = & a_{2i-1,2j-1} & , & h\frac{\partial}{\partial y}u_n(x_i,y_j) & = & a_{2i-1,2j} \\
h\frac{\partial}{\partial x}u_n(x_i,y_j) & = & a_{2i,2j-1} & , & h^2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u_n(x_i,y_j) & = & a_{2i,2j}
\end{cases}
, \tag{2.30}
$$

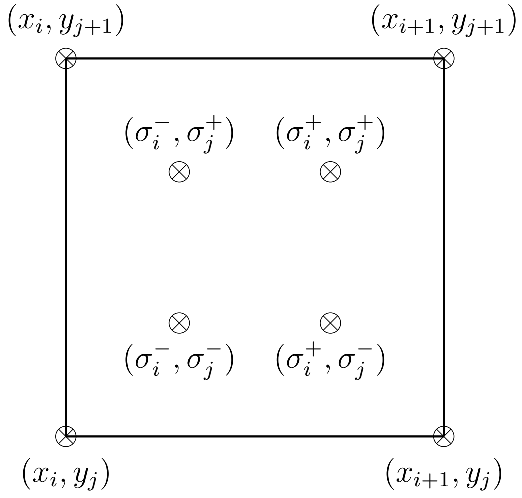
όπου $i\,,\; j \;=\; 1, \ldots, (n_s+1)$ και στο παρακάτω σχήμα εμφανίζονται οι τέσσερις άγνωστοι όπως αυτοί αντιστοιχούν στον κόμβο (x_i, y_i).



Επιπλέον παρατηρούμε ότι σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο I_{ij}^{xy} αντιστοιχούν 16 μη μηδενικές συναρτήσεις βάσης (4 από κάθε κατεύθυνση) και επομένως για $(x,y) \in I_{ij}^{xy}$ ισχύει ότι :

$$
u_n(x,y) \;=\; \sum_{k=2i-1}^{2i+2} \sum_{l=2j-1}^{2j+2} \alpha_{k,l}\Phi_k(x)\Phi_l(y) \;\;. \tag{2.31}
$$

Γι'αυτό το λόγο κάθε πεπερασμένο στοιχείο I_{ij}^{xy} είναι στοιχείο με 16 βαθμούς ελευθερίας.

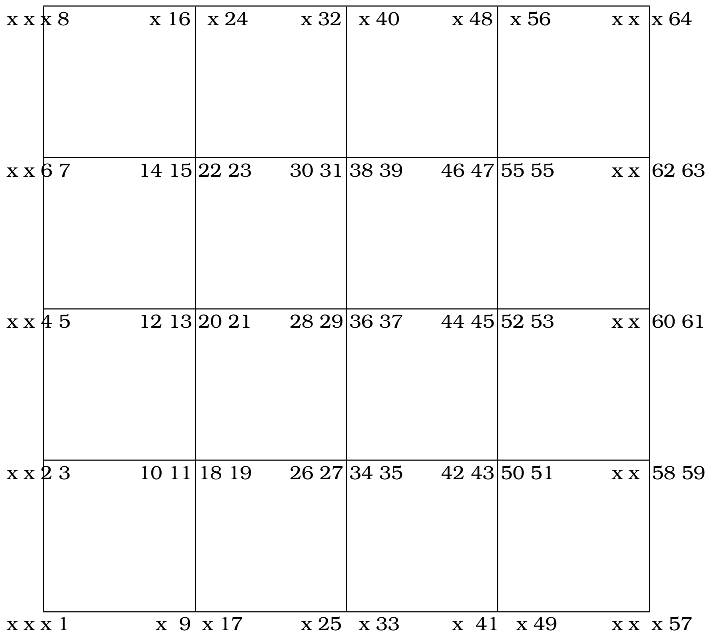


Σχήμα 2.6: Τα τέσσερα σημεία Gauss στο πεπερασμένο στοιχείο I_{ij}^{xy}.

Στην περίπτωση του διδιάστατου προβλήματος χρειαζόμαστε $n_I = 4n_s^2$ **εσωτερικά** collocation σημεία και $n_b = 4(2n_s + 1)$ **συνοριακά** collocation σημεία. Όμοια με το μονοδιάστατο ισχύει ότι το πλήθος $n_I + n_b$ των collocation εξισώσεων ισούται με τον αριθμό των αγνώστων. Εάν το διδιάστατο πρόβλημα ικανοποιεί Dirichlet συνοριακές συνθήκες προσδιορίζονται άμεσα $4(2n_s+1)$ το πλήθος άγνωστοι και απαλοίφονται απο το γραμμικό σύστημα. Σ'αυτή την περίπτωση έχουμε να υπολογίσουμε $n = 4n_s^2$ αγνώστους, όσο δηλαδή και το πλήθος των εσωτερικών collocation σημείων.

Στην περίπτωση ελλειπτικών ΠΣΤ η κλασσική επιλογή εσωτερικών collocation σημείων είναι αυτή των σημείων Gauss [5] με συντεταγμένες $(\sigma_i^{\pm}, \sigma_j^{\pm})$, όπου για κάθε $i = 1, \ldots, n_s$ ισχύει ότι $\sigma_i^{\pm} = \frac{h}{2}(2i - 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3})$. Στο Σχήμα 2.6 εμφανίζονται τα τέσσερα σημεία Gauss του στοιχείου I_{ij}^{xy}.

Η αρίθμηση αγνώστων και εξισώσεων καθορίζει την δομή του Collocation πίνακα, και κατά συνέπεια την επιλογή της μεθόδου επίλυσης του παραγόμενου γραμμικού συστήματος. Στην εργασία [42] ο Θ. Σ. Παπαθεοδώρου πρότεινε την αρίθμηση των αγνώστων, η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.7, και των εξισώσεων, η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.8. Εξαιτίας της αρίθμησης αυτής προκύπτει ο Collocation πίνακας σε block τριδιαγώνια δομή η οποία εμφανίζεται στο Σχήμα 2.9. Οι άγνωστοι, οι οποίοι έχουν



Σχήμα 2.7: Block Τριδιαγώνια Αρίθμηση αγνώστων για $n_s = 4$.

απαλοιφθεί λόγω των συνοριακών συνθηκών σημειώνονται με ”x”.

Κάνοντας χρήση της μεθόδου αρίθμησης του Παπαθεοδώρου στο Modified Helmholtz πρόβλημα παράγεται το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$A\boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{b} \;\;, \tag{2.32}$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n,n} \;\; (n = 4{n_s}^2)$ είναι ο Collocation πίνακας συντελεστών και $\boldsymbol{x} \;=\; [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^T \;=\; [\alpha_{1,1} \;\; \cdots \;\; \alpha_{2n_s,2n_s}]^T$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων.

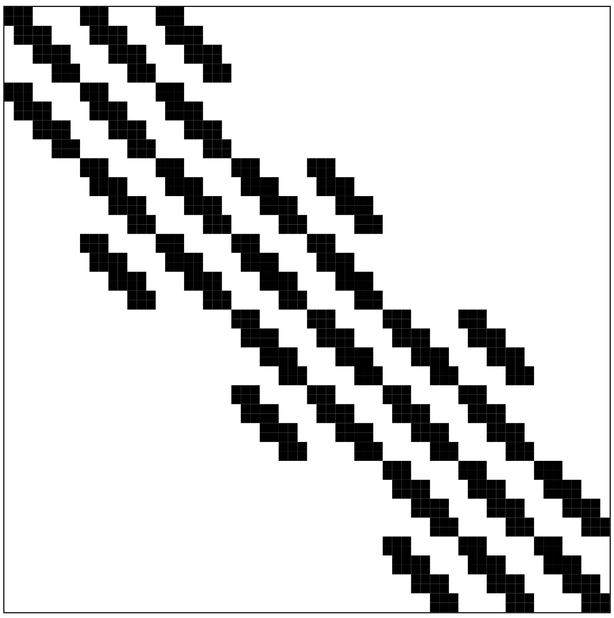
Ο πίνακας A με την βοήθεια των $K^l \;\equiv\; K^l_x \;\equiv\; K^l_y$ μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή για το Modified Helmholtz ΠΣΤ

$$A \;\;=\;\; K^2_x \otimes K^0_y \;\;+\;\; K^0_x \otimes K^2_y \;\;-\;\; \lambda K^0_x \otimes K^0_y \;\;. \tag{2.33}$$

Μετά από τον υπολογισμό και θεωρώντας ότι έχει βγει κοινός παράγοντας το $1/9h^2$, αρχικά ορίζουμε τους $2n_s \times 2n_s$ *seed*-βασικούς πίνακες

8	16	24	32	40	48	56	64
7	15	23	31	39	47	55	63
6	14	22	30	38	46	54	62
5	13	21	29	37	45	53	61
4	12	20	28	36	44	52	60
3	11	19	27	35	43	51	59
2	10	18	26	34	42	50	58
1	9	17	25	33	41	49	57

Σχήμα 2.8: Block Τριδιαγώνια Αρίθμηση εξισώσεων για $n_s = 4$.



Σχήμα 2.9: Δομή του Block Τριδιαγώνιου Collocation Πίνακα.

$$A_i = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & -a_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_1 & -a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 & -a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 & a_2 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_3 & a_4 & -a_2 \end{bmatrix} , \quad i = 1,2,3,4 \qquad (2.34)$$

όπου οι τιμές a_i's δίνονται ως

Table 1	a_1	a_2	a_3	a_4
A_1	r^+	s^+	q	t^+
A_2	s^+	u^+	t^-	ϵ
A_3	q	t^-	r^-	s^-
A_4	t^+	ϵ	s^-	u^-

(2.35)

με $\epsilon = -\frac{\lambda}{24 n_s^2}$, $q = 24 + 22\epsilon$, $r^{\pm} = 86\epsilon - 24 \pm (48\epsilon - 18)\sqrt{3}$,
$s^{\pm} = 13\epsilon - 12 \pm (7\epsilon - 8)\sqrt{3}$, $t^{\pm} = 5\epsilon + 3 \pm (\epsilon + 1)\sqrt{3}$, $u^{\pm} = 2\epsilon - 3 \pm (\epsilon - 2)\sqrt{3}$.
Κάνοντας χρήση των παραπάνω ορισμών ο block τριδιαγώνιος Collocation πίνακας ορίζεται ως εξής

$$A = \begin{bmatrix} A_2 & A_3 & -A_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_4 & A_1 & -A_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & A_2 & A_3 & -A_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & A_4 & A_1 & -A_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_1 & A_2 & A_3 & -A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_3 & A_4 & A_1 & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_1 & A_2 & -A_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_3 & A_4 & -A_2 \end{bmatrix} . \qquad (2.36)$$

Είναι γνωστό ότι για block τριδιαγώνιους πίνακες μπορεί κανείς να βρει πλούσια βιβλιογραφία [24, 31, 35, 49, 50] για την εφαρμογή και ανάλυση επαναληπτικών μεθόδων.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή αποδοτικών αλγορίθμων επίλυσης του collocation γραμμικού συστήματος σε παράλληλες αρχιτεκτονικές [13, 14, 35, 36, 37, 38, 39, 43]. Όμως η block τριδιαγώνια δομή του collocation πίνακα δεν επιτρέπει σε ικανοποιητικό βαθμό την απεξάρτηση των αγνώστων μεταξύ τους. Έτσι θα χρειαστεί να εφαρμοστεί κάποια επιπρόσθετη διαδικασία αύξησης των παράλληλων ιδιοτήτων του γραμμικού συστήματος, χώρις όμως την πρόσθετη επιβάρυνση της επαναληπτικής μεθόδου με παραπάνω βήματα σύγκλισης.

Η διαδικασία παραλληλοποίησης της επίλυσης του collocation γραμμικού συστήματος χωρίζεται σε δύο κύριες φάσεις. Στην πρώτη φάση χρησιμοποιούμε την ιδέα **επαναρίθμησης των αγνώστων και εξισώσεων** για να παραλληλοποιήσουμε το υπολογιστικό πρόβλημα. Στη συνέχεια, και επειδή το πρόβλημα μοντέλο είναι το Modified Helmholtz, κάνουμε χρήση της έννοιας της προρύθμισης για να βελτιστοποιήσουμε το βαθμό παραλληλοποίησης της εφαρμογής.

Για την επαναρίθμηση των αγνώστων και των εξισώσεων χρησιμοποιούμε [25, 49] την γνωστή ιδέα της line red - black διαμέρισης. Σύμφωνα με αυτήν οι άγνωστοι / εξισώσεις χωρίζονται σε red και black υποομάδες αγνώστων / εξισώσεων με την παρακάτω αρχή :

Τα μέλη red υποομάδων ”συνορεύουν” μόνο με μέλη black υποομάδων

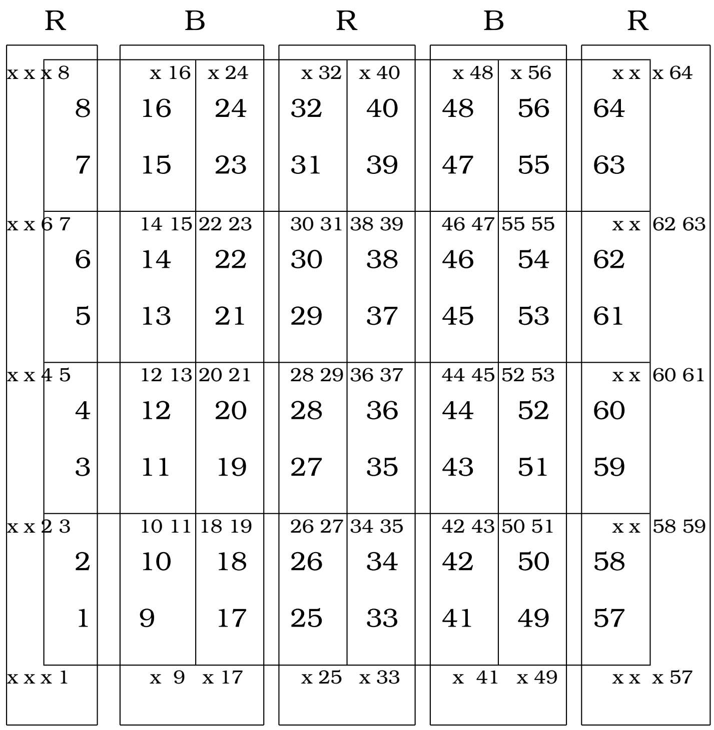
Η ιδέα της επαναρίθμησης είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή ενός μετασχηματισμού ομοιότητας στο γραμμικό σύστημα μέσω κάποιου πίνακα μεταθέσεων $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ο οποίος υπάρχει επειδή ο collocation πίνακας είναι 2-cyclic μορφής [50], ώστε ο πίνακας $P\ A\ P^T$ να έχει την παρακάτω κανονική ή red-black 2-cyclic μορφή

$$PAP^T = \begin{bmatrix} D_R & -H_B \\ -H_R & D_B \end{bmatrix} , \tag{2.37}$$

όπου

$$D_R = \mathrm{diag}[A_2\ \underbrace{\tilde{A}\ \cdots\ \tilde{A}}_{p-1}\ -A_2] \tag{2.38}$$

$$H_R = -\mathrm{diag}[A_4\ \underbrace{\hat{A}\ \cdots\ \hat{A}}_{p-1}\ -A_4] \tag{2.39}$$



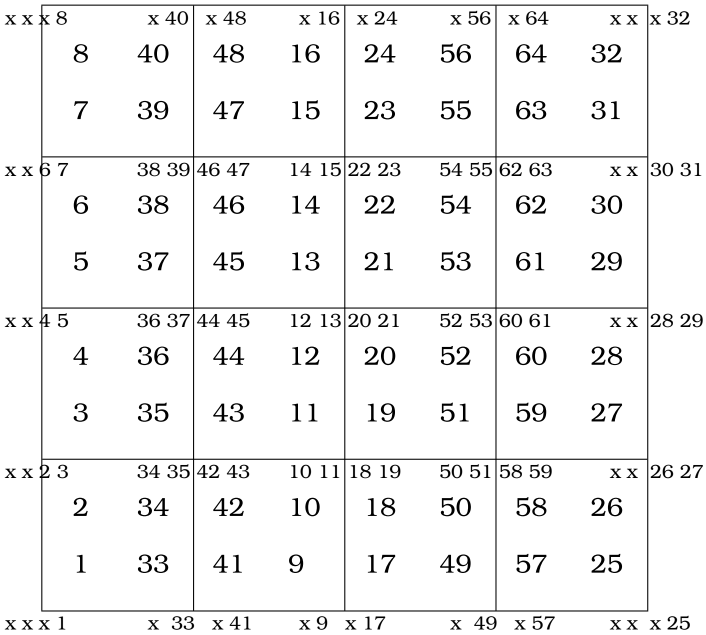
Σχήμα 2.10: Red - Black ομαδοποίηση αγνώστων και εξισώσεων

$$D_B = \text{diag}[\underbrace{\tilde{A} \cdots \tilde{A}}_{p}] \tag{2.40}$$

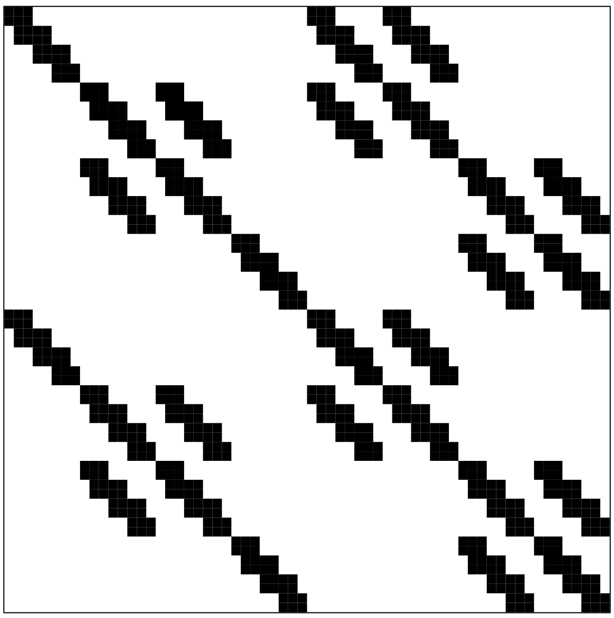
$$H_B = -\text{diag}[\underbrace{\hat{A} \cdots \hat{A}}_{p}] \tag{2.41}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A_3 & -A_4 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} . \tag{2.42}$$

Το Σχήμα 2.10 εμφανίζει την red-black ομαδοποίηση αυτή για την περίπτωση $n_s = 4$. Στην συνέχεια επαναριθμούμε τους αγνώστους και τις εξισώσεις, έτσι ώστε τα μέλη των red υποομάδων να καταλάβουν διαδοχικές θέσεις στο πλέγμα, ακολουθούμενα με την ίδια ιδέα από τα μέλη των black υποομάδων. Στο Σχήμα 2.11 παρουσιάζεται η νέα αυτή αρίθμηση αγνώστων και εξισώσεων για $n_s = 4$. Η δομή των πινάκων που αντιστοιχούν στην αρίθμηση των Σχημάτων 2.10 και 2.11 παρουσιάζεται αντίστοιχα στα Σχήματα 2.9 και 2.12.



Σχήμα 2.11: Red - Black αρίθμηση αγνώστων και εξισώσεων



Σχήμα 2.12: Δομή του Red - Black Collocation Πίνακα

Όπως παρατηρούμε από τη δομή του Collocation πίνακα μετά την επαναρίθμηση υπάρχουν διαγώνια blocks κι έτσι έχουμε τη δυνατότητα της απεξάρτησης των αγνώστων μεταξύ τους. Αυτό έχει ως άμεση συνέπεια την αύξηση των *παράλληλων* χαρακτηριστικών του γραμμικού συτήματος, αφού υπάρχει πλέον η δυνατότητα του υπολογισμού των αγνώστων κατά ομάδες, οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους [29, 35, 36, 37].

Έτσι το collocation γραμμικό σύστημα θα έχει την ισοδύναμη μορφή

$$PAP^T(P\boldsymbol{x}) \;=\; P\boldsymbol{b} \;\;, \tag{2.43}$$

όπου

$$PAP^T \;=\; \begin{bmatrix} A_2 & O & O & \ldots & O & O & O & A_3 & -A_4 & \ldots & O & O \\ O & A_1 & -A_2 & \ldots & O & O & O & A_3 & A_4 & \ldots & O & O \\ O & A_1 & A_2 & \ldots & O & O & O & O & O & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & A_1 & -A_2 & O & O & O & \ldots & O & O \\ O & O & O & \ldots & A_1 & A_2 & O & O & O & \ldots & A_3 & -A_4 \\ O & O & O & \ldots & O & O & -A_2 & O & O & \ldots & A_3 & A_4 \\ A_4 & O & O & \ldots & O & O & O & A_1 & -A_2 & \ldots & O & O \\ O & A_3 & -A_4 & \ldots & O & O & O & A_1 & A_2 & \ldots & O & O \\ O & A_3 & A_4 & \ldots & O & O & O & O & O & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & A_3 & -A_4 & O & O & O & \ldots & O & O \\ O & O & O & \ldots & A_3 & A_4 & O & O & O & \ldots & A_1 & -A_2 \\ O & O & O & \ldots & O & O & -A_4 & O & O & \ldots & A_1 & A_2 \end{bmatrix} . \tag{2.44}$$

Αν θεωρήσουμε την παρακάτω διάσπαση του

$$PAP^T \;=\; D_A \;-\; L_A \;-\; U_A \;\;, \tag{2.45}$$

όπου

$$D_A \;=\; \begin{bmatrix} D_R & O \\ O & D_B \end{bmatrix} \;\;,\;\; L_A \;=\; \begin{bmatrix} O & O \\ H_R & O \end{bmatrix} \;\text{και}\; U_A \;=\; \begin{bmatrix} O & H_B \\ O & O \end{bmatrix} \;\;, \tag{2.46}$$

και αν θεωρήσουμε αντίστοιχα τις ανάλογες διαμερίσεις των διανυσμάτων των αγνώστων και του δεξιού μέλους, ώστε

$$P\boldsymbol{x} \;=\; \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_R \\ \boldsymbol{x}_B \end{bmatrix} \;\; \text{και} \;\; P\boldsymbol{b} \;=\; \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_R \\ \boldsymbol{b}_B \end{bmatrix} \;\; . \tag{2.47}$$

Όμως είναι δυνατή η παραπέρα απεξάρτηση των αγνώστων με άμεση συνέπεια τον διπλασιασμό του βαθμού παραλληλοποίησης με την εφαρμογή στο γραμμικό σύστημα του προρυθμισμένου πίνακα

$$T \;=\; \text{diag}\,[\, T_R \;\, T_B \,] \tag{2.48}$$

με

$$T_R \;=\; -\text{diag}[I \; G \; \cdots \; G \; I] \;\; \text{και} \;\; T_B \;=\; -\text{diag}[G \; \cdots \; G] \;\; , \tag{2.49}$$

όπου

$$G \;=\; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix} \;\; \text{και} \;\; I \in \mathbb{R}^{2n_s,2n_s} \;\; \text{είναι ο μοναδιαίος πίνακας} \;\; . \tag{2.50}$$

Έτσι το προρυθμισμένο γραμμικό σύστημα θα έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} T_R & O \\ O & T_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_R & -H_B \\ -H_R & D_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_R} \\ \boldsymbol{x_B} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} T_R & O \\ O & T_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_R} \\ \boldsymbol{b_B} \end{bmatrix} \;\; . \tag{2.51}$$

Για τα παραγόμενα γινόμενα πινάκων θα ισχύει ότι

$$T_R D_R = \text{diag}[A_2 \; A_1 \; A_2 \; \cdots \; A_1 \; A_2 \;\; -A_2] \tag{2.52}$$

$$T_B D_B = \text{diag}[A_1 \; A_2 \; \cdots \; A_1 \; A_2] \tag{2.53}$$

$$T_R H_B = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2A_3 & -2A_4 & O & O & \cdots & O & O & O & O \\ A_3 & A_4 & A_3 & -A_4 & \cdots & O & O & O & O \\ -A_3 & -A_4 & A_3 & -A_4 & \cdots & O & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \cdots & A_3 & A_4 & A_3 & -A_4 \\ O & O & O & O & \cdots & -A_3 & -A_4 & A_3 & -A_4 \\ O & O & O & O & \cdots & O & O & 2A_3 & 2A_4 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

$$T_B H_R = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} A_4 & A_3 & -A_4 & O & O & \cdots & O & O & O & O & O \\ -A_4 & A_3 & -A_4 & O & O & \cdots & O & O & O & O & O \\ O & A_3 & A_4 & A_3 & -A_4 & \cdots & O & O & O & O & O \\ O & -A_3 & -A_4 & A_3 & -A_4 & \cdots & O & O & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & O & \cdots & A_3 & A_4 & A_3 & -A_4 & O \\ O & O & O & O & O & \cdots & -A_3 & -A_4 & A_3 & -A_4 & O \\ O & O & O & O & O & \cdots & O & O & A_3 & A_4 & -A_4 \\ O & O & O & O & O & \cdots & O & O & -A_3 & -A_4 & -A_4 \end{bmatrix}, \tag{2.55}$$

και

$$T_R \boldsymbol{b}_R = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{2p-2} + \boldsymbol{b}_{2p-1} \\ \boldsymbol{b}_{2p-1} - \boldsymbol{b}_{2p-2} \\ 2\boldsymbol{b}_{2p} \end{bmatrix}, \quad T_B \boldsymbol{b}_B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{2p+1} + \boldsymbol{b}_{2p+2} \\ \boldsymbol{b}_{2p+2} - \boldsymbol{b}_{2p+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{4p-1} + \boldsymbol{b}_{4p} \\ \boldsymbol{b}_{4p} - \boldsymbol{b}_{4p-1} \end{bmatrix}, \tag{2.56}$$

Επειδή, οι πίνακες T_R και T_B είναι αντιστρέψιμοι και μελετώντας τη μορφή των block διαγώνιων πινάκων $T_R D_R$ και $T_B D_B$ είναι φανερό, ότι **διπλασιάστηκε** ο βαθμός παραλληλοποίησης του γραμμικού συστήματος.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητική μελέτη εφαρμογής της ΤΠΠ σε μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μελέτη της αριθμητικής επίλυσης διδιάστατων ΠΣΤ με την χρήση της ΤΠΠ στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Collocation. Από τις κατηγορίες των Στατικών και Μη-Στατικών επαναληπτικών μεθόδων επιλέγονται σαν μέθοδοι επίλυσης (ή σαν σχήματα εξομάλυνσης στην περίπτωση της ΤΠΠ) [21, 22, 30, 32, 33, 34, 46, 48, 52, 53] του γραμμικού συστήματος οι Gauss-Seidel (GS) και GS Preconditioned Bi-CGSTAB (BiConjugate Gradient Stabilized) [51] μέθοδοι αντίστοιχα. Οι μέθοδοι αυτοί εμφανίζονται στη σημερινή βιβλιογραφία ως τα αποδοτικότερα επαναληπτικά σχήματα επίλυσης του συγκεκριμένου γραμμικού συστήματος [13, 36, 37, 38, 39].

Η μελέτη της αριθμητικής συμπεριφοράς των προβλημάτων αυτών γίνεται με σύγκριση του χρόνου επίλυσης, του σφάλματος και του υπολοίπου. Υπενθυμίζουμε ότι το σφάλμα ορίζεται ως $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{x}$, όπου $\mathbf{u}$ η πραγματική λύση του προβλήματος και $\mathbf{x}$ μία παραγόμενη προσέγγιση της, ενώ το υπόλοιπο ως $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$, όπου $\mathbf{b}$ το δεξί μέλος του γραμμικού συστήματος και A ο Collocation πίνακας της μεθόδου.

Στις ΤΠΠ που υλοποιήθηκαν χρησιμοποιήθηκαν για την παρεμβολή των υπολοίπων και των προσεγγίσεων της ακριβής λύσης, ο τελεστής γραμμικής επέκτασης (1.27), ενώ για την παρεκβολή αυτών ο τελεστής πλήρους στάθμισης (1.34). Το μεγάλο πλεονέκτημα της παραπάνω επιλογής των τελεστών είναι ότι ικανοποιούν την μεταβολική ιδιότητα γι'αυτό και είναι η πιο συνηθισμένη επιλογή στη βιβλιογραφία για παρόμοιες εφαρμογές. Ακολουθούν τρία διαφορετικού τύπου προβλήματα δοκιμών μαζί με τα αριθμητικά αποτελέσματα της συμπεριφοράς τους κατά την επίλυσή τους.

3.2 Πρόβλημα δοκιμής 1

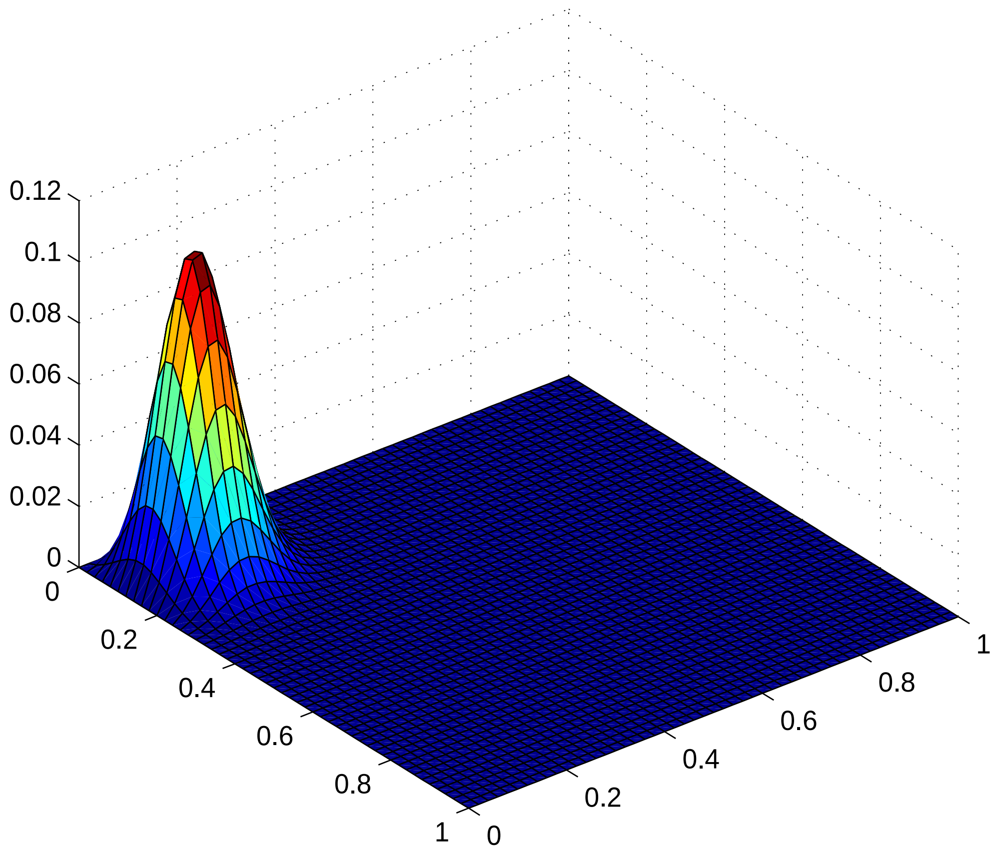
Θεωρούμε το Modified Helmholtz ΠΣΤ

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - \lambda u(x,y) & = & f(x,y) \ , \quad (x,y) \in \Omega \equiv [0,1] \times [0,1] \\ u(x,y) & = & 0 \ , \quad (x,y) \in \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.1}$$

που έχει σαν λύση τη συνάρτηση

$$u(x,y) = 10\,\phi(x)\,\phi(y) \ , \ \phi(x) = e^{-100(x-0.1)^2}\,(x^2 - x) \quad , \tag{3.2}$$

η οποία παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 3.1, ως πρόβλημα δοκιμής 1 (πδ1). Ακολουθεί ο πίνακας Τ1, ο οποίος εμφανίζει τα αριθμητικά αποτελέσματα της επίλυσης του πδ1 με τη μέθοδο GS για $\lambda = 0$ και διαφορετικές διαμερίσεις. Παρουσιάζονται αναλυτικά το πλήθος των επαναλήψεων, οι μετρήσεις του χρόνου επίλυσης καθώς και οι τιμές της άπειρης νόρμας του σφάλματος και του υπολοίπου για τις διαμερίσεις σε $n_s = 16, 32, 64, 128, 256$ και 512 πεπερασμένα στοιχεία σε κάθε χωρική διάσταση.



Σχήμα 3.1: Η ακριβής λύση $u = u(x, y)$ για το πρόβλημα δοκιμής 1.

T1	Gauss-Seidel for $\lambda = 0$			
n_s	Iterations	Time	$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_\infty$
16	154	0.014	6.08e-4	3.18e-6
32	681	0.251	3.34e-5	8.43e-7
64	2310	3.551	3.01e-6	5.24e-7
128	9634	64.95	2.15e-6	9.32e-8
256	33001	1090	5.53e-6	6.00e-8
512	113538	15352	1.23e-5	3.33e-8

Αντίστοιχα, στους πίνακες T2 και T3 εμφανίζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα του πδ1 για $\lambda = 1$ και $\lambda = 100$.

T2	Gauss-Seidel for $\lambda = 1$			
n_s	Iterations	Time	$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_\infty$
16	151	0.014	6.08e-4	3.07e-6
32	654	0.237	3.34e-5	8.39e-7
64	2217	3.347	2.86e-6	5.24e-7
128	9144	61.62	2.19e-6	9.99e-8
256	27312	902	1.16e-5	1.33e-7
512	129261	17478	4.68e-6	1.33e-8

T3	Gauss-Seidel for $\lambda = 100$			
n_s	Iterations	Time	$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_\infty$
16	45	0.004	5.99e-4	2.45e-6
32	150	0.056	3.36e-5	1.22e-6
64	539	0.836	1.96e-6	3.84e-7
128	2086	14.22	3.34e-7	9.29e-8
256	6167	204	3.60e-7	2.66e-7
512	30002	4110	7.53e-7	1.33e-8

Ο πίνακας T4 εμφανίζει τα αριθμητικά αποτελέσματα της επίλυσης του πδ1 για τη μέθοδο Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση για $\lambda = 0$ και διαφορετικές διαμερίσεις. Ξεκινώντας από αριστερά προς τα δεξιά, παρουσιάζονται αναλυτικά το πλήθος της διαμέρισης, ο αριθμός των επαναλήψεων, οι μετρήσεις του χρόνου επίλυσης και οι τιμές της νόρμας του σφάλματος και του υπολοίπου. Έχουν προστεθεί οι διαμερίσεις 1024 και 2048 στοιχείων σε σχέση με τους προηγούμενους πίνακες, αφού η μέθοδος αυτή επιτρέπει την επίλυση αυτών των μεγεθών προβλήματα σε ρεαλιστικό χρόνο.

T4	Preconditioned Bi-CGSTAB for $\lambda = 0$			
n_s	Iterations	Time	$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_\infty$
16	15	0.004	6.08e-4	3.44e-6
32	27	0.024	3.35e-5	7.55e-7
64	57	0.228	2.02e-6	1.83e-7
128	116	2.221	8.42e-7	9.52e-8
256	216	18.18	2.54e-6	4.12e-8
512	410	138	5.73e-6	3.05e-8
1024	980	1351	6.84e-6	1.63e-9
2048	1939	10951	2.38e-7	2.40e-9

Στους επόμενους δύο πίνακες T5 και T6 που ακολουθούν, παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα της επίλυσης του πδ1 με τη μέθοδο Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση για τις περιπτώσεις $\lambda = 1$ και $\lambda = 100$.

T5	Preconditioned Bi-CGSTAB for $\lambda = 1$			
n_s	Iterations	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
16	15	0.004	6.06e-4	2.58e-6
32	27	0.024	3.36e-5	2.68e-7
64	56	0.226	2.23e-6	2.11e-7
128	108	2.063	8.77e-7	8.72e-8
256	206	17.30	2.30e-6	6.49e-8
512	440	148	2.83e-6	1.07e-8
1024	931	1282	3.39e-7	1.35e-9
2048	1900	10768	6.05e-6	1.66e-9

T6	Preconditioned Bi-CGSTAB for $\lambda = 100$			
n_s	Iterations	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
16	9	0.002	5.99e-4	4.93e-6
32	16	0.016	3.37e-5	1.19e-6
64	31	0.130	2.01e-6	2.73e-7
128	56	1.073	2.50e-7	8.73e-8
256	118	9.960	5.90e-7	3.96e-8
512	231	78.26	3.45e-7	9.65e-9
1024	569	783	4.18e-7	6.23e-9
2048	967	5467	4.28e-7	6.75e-10

Οι πίνακες T7, T8 και T9 εμφανίζουν τα αριθμητικά αποτελέσματα της επίλυσης του πδ1 για $\lambda = 0, 1$ και 100 αντίστοιχα με τη χρήση της ΤΠΠ με επαναληπτικό σχήμα εξομάλυνσης τη μέθοδο GS. Σημειώνεται ότι έχουν επιλεγεί οι περιπτώσεις τριών και πέντε επιπέδων εφαρμογής της ΤΠΠ. Πρέπει να τονιστεί εδώ, ότι οι επαναλήψεις που γίνονται σε κάθε επίπεδο είναι δύο τόσο στη φάση καθόδου όσο και στη φάση ανόδου του V-κύκλου. Οι μετρήσεις που εμφανίζονται για κάθε V-κύκλο είναι οι ίδιες, όπως και στην περίπτωση της μη χρήσης της ΤΠΠ.

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζουν οι πίνακες T10,T11 και T12 στην περίπτωση χρήσης της ΤΠΠ με σχήμα εξομάλυνσης τη μέθοδο Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση.

T7	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 0$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.077	8.70e-3	2.00e-2			
2	0.126	3.10e-4	1.85e-3			
3	0.167	4.60e-5	1.35e-4			
4	0.213	2.49e-6	1.58e-5			
5	0.256	2.27e-7	1.10e-6			
6	0.306	1.05e-7	1.07e-7			
7	0.357	1.27e-7	1.12e-8			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.471	3.32e-3	4.83e-3	0.279	6.19e-3	4.77e-3
2	0.858	2.51e-4	3.80e-4	0.417	2.47e-4	3.87e-4
3	1.169	2.25e-5	3.25e-5	0.555	2.74e-5	3.28e-5
4	1.535	6.19e-7	3.75e-6	0.691	1.01e-6	4.57e-6
5	1.808	1.14e-7	2.85e-7	0.821	1.25e-7	2.87e-7
6	2.194	8.65e-9	3.27e-8	0.985	1.00e-8	4.14e-8
7	2.500	8.33e-9	2.66e-9	1.108	8.26e-9	2.66e-9
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	3.685	9.80e-4	2.10e-3	1.205	4.81e-3	2.05e-3
2	7.327	2.68e-4	9.04e-5	1.878	2.25e-4	1.47e-4
3	10.39	1.42e-5	8.03e-6	2.421	2.21e-5	9.59e-6
4	13.71	4.76e-7	7.84e-7	3.018	6.35e-7	1.22e-6
5	16.43	7.28e-8	7.23e-8	3.642	7.48e-8	7.31e-8
6	19.99	1.61e-9	8.49e-9	4.259	4.37e-9	1.34e-8
7	22.94	7.84e-10	6.79e-10	4.888	5.18e-10	6.81e-10
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	34.75	2.68e-4	1.01e-3	5.074	2.58e-3	9.95e-4
2	90.55	2.72e-4	3.88e-5	7.629	2.24e-4	5.76e-5
3	120	1.11e-5	2.01e-5	10.18	1.69e-5	2.64e-6
4	123	5.26e-7	1.92e-7	12.91	4.32e-7	2.30e-7
5	202	5.84e-8	1.82e-8	15.49	6.88e-8	1.96e-8
6	237	4.05e-10	2.03e-9	18.12	2.98e-9	3.10e-9
7	298	2.61e-10	1.71e-10	20.83	1.86e-10	1.72e-10
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	386	2.67e-4	5.03e-4	22.61	8.80e-4	4.99e-4
2	1451	2.71e-4	1.87e-5	35.82	2.59e-4	2.21e-5
3	1775	1.04e-5	9.32e-7	48.60	1.30e-5	9.89e-7
4	2472	5.30e-7	9,14e-8	61.56	4.51e-7	1.03e-7
5	3189	5.49e-8	7.00e-9	73.68	6.10e-8	9.32e-9
6	3551	4.23e-10	4.40e-10	86.39	8.36e-10	5.93e-10
7	4601	2.18e-10	4.28e-11	98.49	2.03e-10	5.60e-11

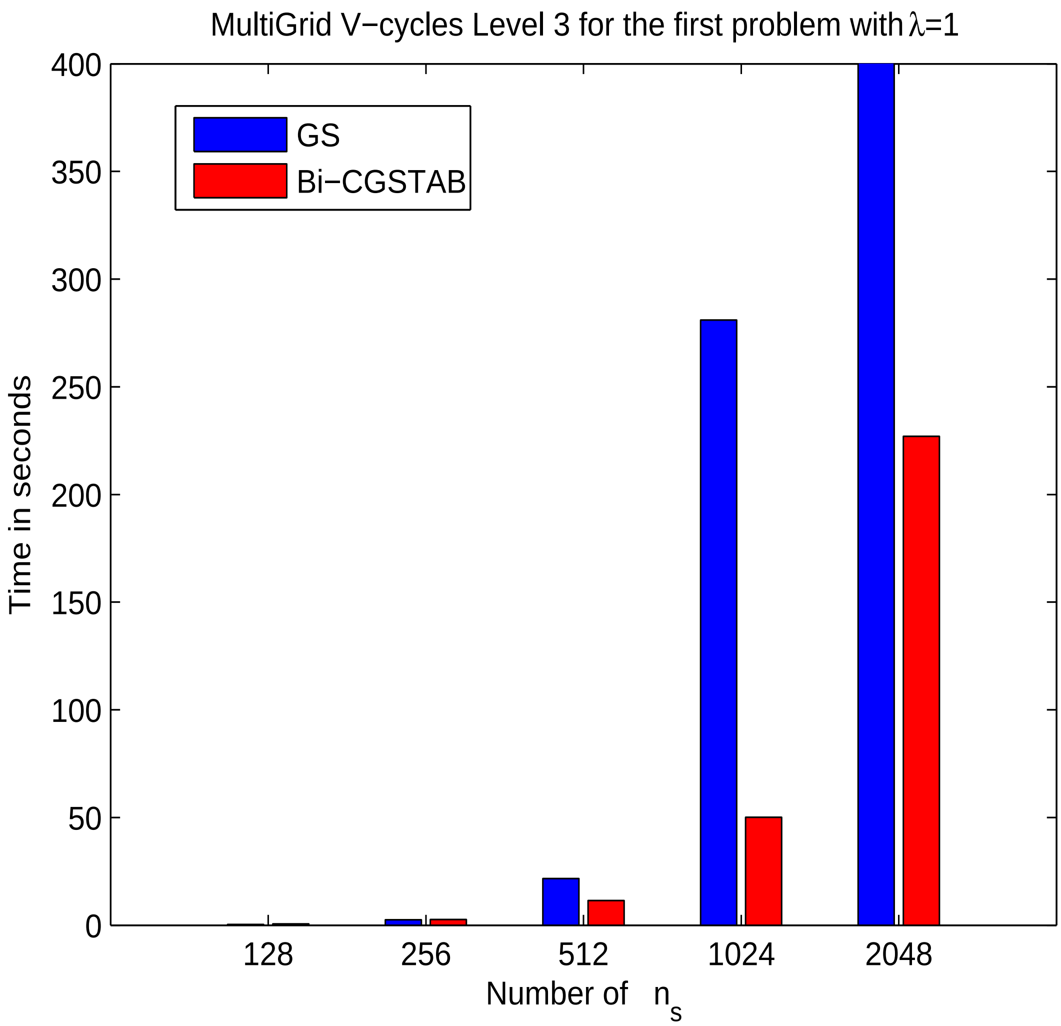
T8	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 1$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.075	8.67e-3	2.00e-2			
2	0.121	3.09e-4	1.85e-3			
3	0.163	4.56e-5	1.35e-4			
4	0.209	2.48e-6	1.58e-5			
5	0.251	2.23e-7	1.10e-6			
6	0.298	1.05e-7	1.07e-7			
7	0.342	1.27e-7	1.12e-8			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.474	3.31e-3	4.83e-3	0.279	6.16e-3	4.77e-3
2	0.826	2.50e-4	3.80e-4	0.415	2.46e-4	3.87e-4
3	1.153	2.24e-5	3.25e-5	0.551	2.72e-5	3.28e-5
4	1.509	6.18e-7	3.75e-6	0.669	9.94e-7	4.56e-6
5	1.748	1.13e-7	2.84e-7	0.835	1.23e-7	2.87e-7
6	2.118	8.64e-9	3.27e-8	0.970	1.00e-8	4.13e-8
7	2.437	8.32e-9	2.66e-9	1.106	8.25e-9	2.66e-9
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	3.565	9.78e-4	2.10e-3	1.190	4.79e-3	2.05e-3
2	6.966	2.67e-4	9.04e-5	1.809	2.24e-4	1.47e-4
3	9.931	1.41e-5	8.03e-6	2.412	2.19e-5	9.56e-6
4	13.21	4.70e-7	7.85e-7	3.015	6.31e-7	1.22e-6
5	15.79	7.19e-8	7.23e-8	3.634	7.38e-8	7.31e-8
6	19.14	1.61e-9	8.49e-9	4.250	4.33e-9	1.33e-8
7	21.66	7.78e-10	6.79e-10	4.855	5.16e-10	6.81e-10
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	34.01	2.67e-4	1.01e-3	4.951	2.57e-3	9.95e-4
2	86.85	2.71e-4	3.88e-5	7.547	2.23e-4	5.76e-5
3	117	1.10e-5	2.01e-6	10.15	1.68e-5	2.63e-6
4	158	5.20e-7	1.91e-7	12.75	4.28e-7	2.30e-7
5	192	5.79e-8	1.82e-8	15.35	6.81e-8	1.95e-8
6	225	3.95e-10	2.04e-9	17.97	2.97e-9	3.10e-9
7	281	2.58e-10	1.71e-10	20.58	1.82e-10	1.72e-10
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	374	2.53e-4	5.03e-4	22.36	8.78e-4	4.99e-4
2	1375	2.70e-4	1.87e-5	35.35	2.58e-4	2.21e-5
3	1698	1.04e-5	9.29e-7	48.03	1.29e-5	9.88e-7
4	2351	5.25e-7	9.12e-8	60.86	4.46e-7	1.03e-7
5	3027	5.44e-8	6.95e-9	72.89	6.04e-8	9.27e-9
6	3365	3.95e-10	4.40e-10	85.43	8.38e-10	5.94e-9
7	4344	2.16e-10	4.28e-11	97.38	2.01e-10	5.54e-11

T9	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 100$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.065	6.25e-3	1.67e-2			
2	0.098	2.70e-4	1.79e-3			
3	0.130	2.65e-5	1.30e-4			
4	0.168	1.82e-6	1.37e-5			
5	0.194	1.08e-7	1.04e-6			
6	0.226	1.18e-7	9.76e-8			
7	0.258	1.27e-7	1.01e-8			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.334	2.59e-3	4.95e-3	0.282	3.93e-3	4.93e-3
2	0.507	1.92e-4	3.74e-4	0.417	1.93e-4	3.77e-4
3	0.682	1.44e-5	3.22e-5	0.552	1.57e-5	3.25e-5
4	0.857	5.89e-7	3.60e-6	0.687	6.04e-7	3.88e-6
5	1.021	5.42e-8	2.81e-7	0.822	5.99e-8	2.83e-7
6	1.209	7.58e-9	2.85e-8	0.958	7.80e-9	3.10e-8
7	1.385	8.11e-9	2.62e-9	1.093	8.10e-9	2.62e-9
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	1.808	7.94e-4	2.12e-3	1.182	3.23e-3	2.08e-3
2	8.320	2.01e-4	8.73e-5	1.801	1.68e-4	1.26e-4
3	4.059	9.99e-6	8.02e-6	2.396	1.27e-5	8.15e-6
4	5.191	2.25e-7	8.22e-7	2.998	3.19e-7	1.03e-6
5	6.229	3.84e-8	7.22e-8	3.588	3.94e-8	7.27e-8
6	7.363	1.71e-9	8.33e-9	4.183	1.93e-9	1.01e-8
7	8.399	6.19e-10	6.76e-10	4.773	5.15e-10	6.78e-10
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	13.83	2.14e-4	1.02e-3	4.857	1.99e-3	1.00e-3
2	24.89	2.04e-4	3.80e-5	7.334	1.64e-4	5.33e-5
3	35.23	8.00e-6	2.01e-6	9.811	1.10e-5	2.31e-6
4	45.52	2.56e-7	1.90e-7	12.27	2.37e-7	2.23e-7
5	54.66	3.19e-8	1.82e-8	14.73	3.57e-8	1.83e-8
6	64.17	3.00e-10	2.18e-9	17.26	1.74e-9	2.69e-9
7	73.63	1.31e-10	1.70e-10	19.72	8.97e-11	1.71e-10
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	160	7.13e-5	5.03e-4	21.10	7.24e-4	5.00e-4
2	338	2.03e-4	1.83e-5	31.94	1.92e-4	2.13e-5
3	473	7.48e-6	7.45e-7	42.79	9.25e-6	9.16e-7
4	610	2.67e-7	7.37e-8	53.68	2.10e-7	8.18e-8
5	731	3.00e-8	4.79e-9	64.43	3.29e-8	6.65e-9
6	849	1.72e-10	5.22e-10	75.20	6.95e-10	6.31e-10
7	991	9.53e-11	4.28e-11	86.01	8.37e-11	4.30e-11

T10	Multigrid with Preconditioned Bi-CGSTAB Smoother for $\lambda = 0$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ / V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.143	2.41e-3	6.74e-3			
2	0.219	1.06e-4	1.77e-4			
3	0.295	2.88e-6	6.95e-6			
4	0.369	7.55e-8	2.16e-7			
5	0.442	1.22e-7	7.95e-9			
6	0.516	1.26e-7	2.59e-10			
7	0.589	1.26e-7	4.69e-11			
$n_s = 256$ / V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.648	3.77e-3	1.20e-3	0.616	4.64e-3	1.28e-3
2	1.000	2.98e-5	2.46e-5	0.950	3.10e-5	2.45e-5
3	1.343	5.12e-7	6.25e-7	1.284	4.11e-7	5.74e-7
4	1.711	2.64e-7	1.43e-7	1.618	1.05e-8	1.20e-8
5	2.053	1.85e-8	1.11e-9	1.951	7.53e-9	3.81e-10
6	2.384	1.55e-8	3.75e-10	2.285	7.84e-9	9.53e-12
7	2.715	6.87e-9	1.23e-10	2.619	7.87e-9	4.12e-13
$n_s = 512$ / V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	2.820	3.47e-4	1.98e-4	2.568	5.44e-4	2.03e-4
2	4.390	4.47e-6	3.27e-6	3.995	7.57e-6	3.41e-6
3	5.884	7.07e-8	5.11e-8	5.419	9.57e-8	5.39e-8
4	7.297	3.42e-8	1.80e-9	6.845	1.23e-8	1.71e-9
5	8.733	4.15e-8	5.97e-10	8.284	1.59e-9	1.42e-10
6	10.14	3.21e-8	1.74e-10	9.708	5.27e-10	3.29e-12
7	11.56	2.34e-8	2.52e-10	11.14	5.00e-10	1.72e-13
$n_s = 1024$ / V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	12.72	8.06e-4	1.90e-4	10.51	1.53e-3	2.30e-4
2	20.45	3.08e-6	3.04e-6	16.41	2.30e-5	2.95e-6
3	26.85	1.29e-7	4.81e-8	22.27	1.15e-7	6.48e-8
4	32.71	1.16e-7	1.37e-9	28.11	2.10e-8	9.39e-10
5	38.51	1.08e-7	3.82e-10	33.96	6.12e-9	3.90e-11
6	44.30	1.00e-7	4.58e-10	39.80	4.11e-9	3.66e-12
7	50.06	9.75e-8	2.80e-10	45.65	2.82e-9	2.58e-12
$n_s = 2048$ / V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	62.82	1.12e-3	2.44e-4	43.57	1.21e-3	2.42e-4
2	103	1.31e-5	3.06e-6	67.96	1.45e-5	2.97e-6
3	134	1.64e-7	6.93e-8	92.25	1.13e-7	6.85e-8
4	159	1.42e-7	1.48e-9	116	6.69e-8	1.24e-9
5	183	5.03e-8	1.23e-10	140	3.50e-8	3.56e-11
6	207	4.60e-8	9.04e-11	164	2.30e-8	1.67e-11
7	231	4.52e-8	1.16e-10	189	3.58e-8	1.94e-11

T11	Multigrid with Preconditioned Bi-CGSTAB Smoother for $\lambda = 1$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.142	2.40e-3	6.72e-3			
2	0.217	1.05e-4	1.77e-4			
3	0.292	2.85e-6	6.92e-6			
4	0.366	7.44e-8	2.15e-7			
5	0.439	1.22e-7	7.97e-9			
6	0.511	1.26e-7	2.56e-10			
7	0.584	1.26e-7	4.41e-11			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.641	4.43e-3	1.41e-3	0.616	5.46e-3	1.51e-3
2	0.994	4.28e-5	2.24e-5	0.949	6.51e-5	2.17e-5
3	1.341	4.18e-7	5.08e-7	1.290	6.62e-7	4.78e-7
4	1.674	1.28e-8	1.03e-8	1.629	1.46e-8	9.59e-9
5	2.005	1.16e-8	5.35e-10	1.962	7.64e-9	2.90e-10
6	2.336	7.59e-9	1.48e-10	2.296	7.86e-9	6.58e-12
7	2.665	7.52e-9	7.05e-11	2.629	7.87e-9	2.72e-13
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	2.779	3.46e-4	1.98e-4	2.551	5.41e-4	2.03e-4
2	4.315	4.44e-6	3.27e-6	3.965	7.48e-6	3.41e-6
3	5.794	7.00e-8	5.10e-8	5.379	9.33e-8	5.39e-8
4	7.193	4.38e-8	1.80e-9	6.799	1.10e-8	1.72e-9
5	8.645	5.97e-8	3.83e-9	8.211	3.85e-9	2.41e-10
6	10.04	3.77e-8	2.52e-10	9.624	3.61e-9	1.40e-11
7	11.44	2.75e-8	2.25e-10	11.03	5.64e-10	5.65e-12
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	12.70	7.92e-4	1.88e-4	10.50	1.44e-3	2.25e-4
2	20.30	3.06e-6	2.91e-6	16.37	3.86e-5	2.63e-6
3	26.71	1.34e-7	4.66e-8	22.23	6.23e-7	1.26e-7
4	32.63	1.20e-7	1.28e-9	28.07	3.27e-8	2.39e-9
5	38.53	7.21e-8	2.65e-10	33.92	2.71e-8	4.95e-11
6	44.35	6.63e-8	3.80e-10	39.79	1.96e-8	2.74e-11
7	50.14	6.20e-8	3.98e-10	45.69	1.09e-8	1.69e-11
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	62.34	1.09e-3	2.40e-4	43.56	1.19e-3	2.38e-4
2	100	1.21e-5	2.98e-6	67.86	1.36e-5	2.89e-6
3	130	1.67e-7	6.72e-8	91.99	1.11e-7	6.46e-8
4	155	1.11e-7	1.46e-9	116	5.98e-8	1.22e-9
5	179	8.75e-8	2.33e-10	140	2.48e-8	3.85e-11
6	203	7.37e-8	2.27e-10	164	2.07e-8	1.41e-11
7	227	7.19e-8	1.19e-10	188	1.82e-8	4.16e-12

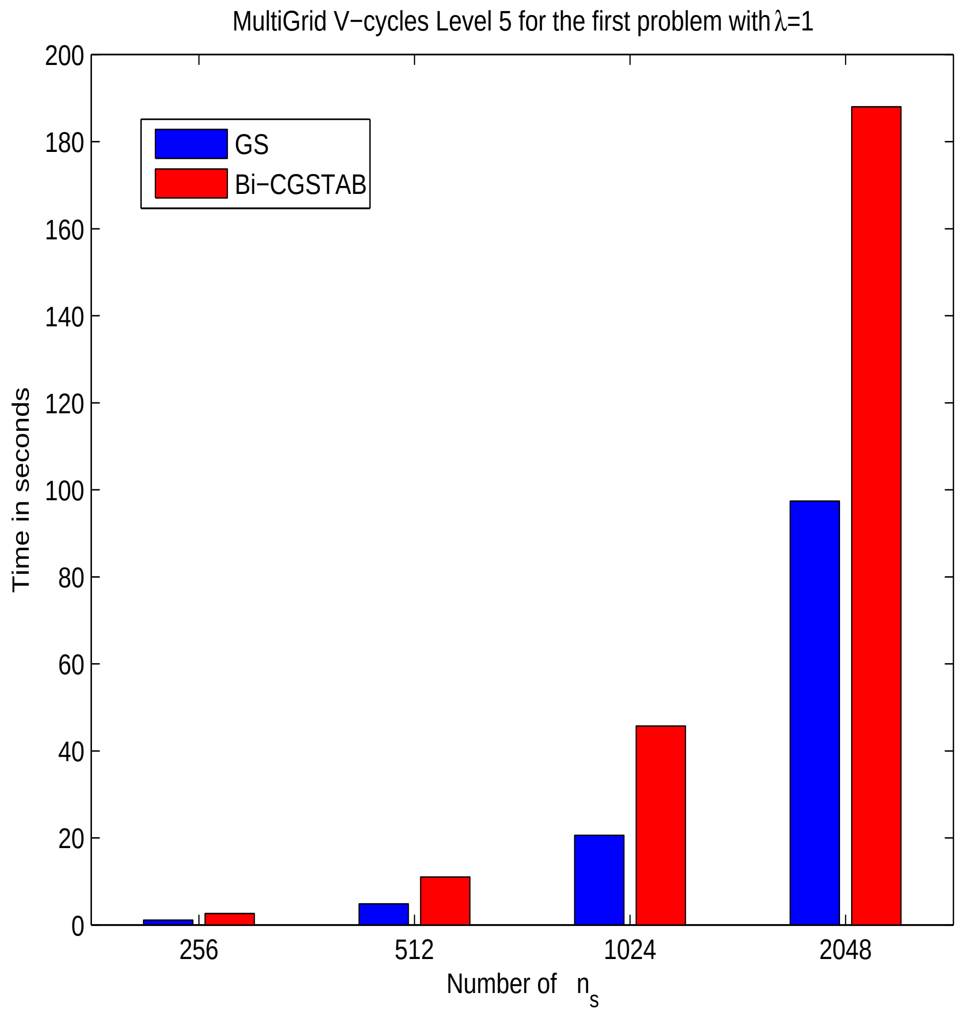
T12	Multigrid with Preconditioned Bi-CGSTAB Smoother for $\lambda = 100$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.144	1.69e-3	5.67e-3			
2	0.218	6.37e-5	1.41e-4			
3	0.292	1.37e-6	5.35e-6			
4	0.365	6.11e-8	2.00e-7			
5	0.438	1.25e-7	8.19e-9			
6	0.510	1.27e-7	3.40e-10			
7	0.583	1.27e-7	1.44e-11			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.631	2.98e-4	7.34e-4	0.619	3.32e-4	7.33e-4
2	0.969	5.76e-6	1.75e-5	0.964	5.97e-6	1.72e-5
3	1.298	2.91e-7	8.25e-7	1.293	2.96e-7	7.63e-7
4	1.625	9.24e-9	2.08e-8	1.621	7.65e-9	1.86e-8
5	1.949	7.38e-9	1.28e-9	1.949	7.44e-9	1.13e-9
6	2.294	7.89e-9	3.65e-11	2.277	7.92e-9	2.97e-11
7	2.631	7.93e-9	1.43e-12	2.605	7.93e-9	1.53e-12
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	2.701	1.80e-4	1.73e-4	2.550	5.44e-4	1.99e-4
2	4.176	2.40e-6	3.20e-6	3.964	8.48e-6	3.28e-6
3	5.600	7.91e-8	6.65e-8	5.370	1.01e-7	5.01e-8
4	6.992	5.31e-9	2.29e-9	6.812	1.95e-9	1.59e-9
5	8.380	2.72e-9	2.33e-10	8.217	5.16e-10	4.07e-11
6	9.779	7.95e-10	3.57e-11	9.624	4.95e-10	1.29e-12
7	11.16	5.31e-10	8.28e-12	11.03	4.96e-10	3.51e-14
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	11.76	3.50e-4	1.27e-4 7 10.37	2.88e-4	1.25e-4	
2	18.46	2.35e-6	1.93e-6	16.14	2.49e-6	2.02e-6
3	24.55	4.71e-8	5.52e-8	21.91	4.02e-8	5.40e-8
4	30.32	1.88e-8	1.46e-9	27.67	1.66e-9	1.41e-9
5	36.02	1.50e-8	3.32e-10	33.44	1.14e-10	2.49e-11
6	41.77	3.20e-9	6.81e-11	39.20	4.08e-11	4.70e-13
7	47.46	2.35e-9	5.40e-11	44.96	3.16e-11	4.43e-14
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	55.56	1.76e-4	5.53e-5	43.60	4.51e-4	5.59e-5
2	85.96	1.02e-6	8.44e-7	67.86	6.70e-6	9.12e-7
3	111	7.10e-8	2.10e-8	92.12	1.20e-6	2.67e-8
4	135	4.39e-8	5.83e-10	116	1.29e-8	1.28e-9
5	159	4.10e-8	2.52e-10	140	3.50e-9	2.36e-11
6	182	4.15e-8	1.58e-10	164	1.12e-9	3.87e-12
7	206	2.07e-8	2.23e-10	188	8.85e-10	3.71e-12



Σχήμα 3.2: Χρόνος επίλυσης με ΤΠΠ σε 3 επίπεδα.

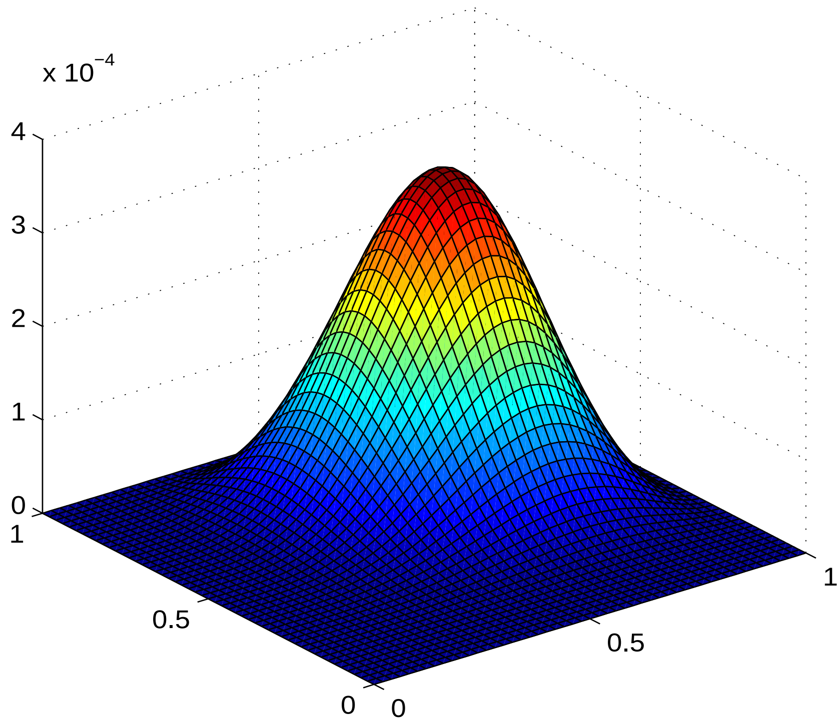
Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζονται σε ραβδόγραμμα οι μετρήσεις του χρόνου επίλυσης του πδ1 με χρήση της ΤΠΠ τριών επιπέδων. Οι στήλες με χρώμα κόκκινο αφορούν την ΤΠΠ με σχήμα εξομάλυνσης τη Bi-CGSTAB, ενώ με χρώμα μπλε αφορούν την ΤΠΠ με σχήμα εξομάλυνσης τη GS.

Σημειώνουμε ότι για λόγους καλύτερης εμφάνισης των μετρήσεων των μικρών διαμερίσεων η περίπτωση $n_s = 2048$ έχει περιοριστεί στα 400 δευτερόλεπτα, έναντι των 4344 που είναι η πραγματική τιμή του χρόνου επίλυσης για τη χρήση της μεθόδου GS.



Σχήμα 3.3: Χρόνος επίλυσης με ΤΠΠ σε 5 επίπεδα.

Αντίστοιχα, στο Σχήμα 3.3 φαίνονται οι χρόνου επίλυσης του πδ1 με χρήση της ΤΠΠ πέντε επιπέδων.



Σχήμα 3.4: Η ακριβής λύση $u = u(x, y)$ για το πρόβλημα δοκιμής 2.

3.3 Πρόβλημα δοκιμής 2

Για δεύτερο πρόβλημα δοκιμών θεωρούμε το Modified Helmholtz ΠΣΤ που έχει σαν λύση τη συνάρτηση

$$u(x, y) = \phi(x)\,\phi(y)\ ,\ \ \phi(x) = x^{9/2}\,(x-1)^2\ \ , \tag{3.3}$$

η οποία παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 3.4.

Όπως και στην περίπτωση του πδ1, ακολουθούν αριθμητικά αποτελέσματα για τη μελέτη του πδ2 σε μορφή πινάκων. Στους πρώτους τρεις πίνακες T13,T14 και T15, οι μετρήσεις που εμφανίζονται έχουν προκύψει με τη μέθοδο GS και αναφέρονται στο πδ2 για $\lambda = 0, 1$ και 100.

T13	Gauss-Seidel for $\lambda = 0$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
16	166	0.016	2.22e-7	5.74e-7
32	592	0.216	2.61e-7	1.80e-7
64	2181	3.373	3.52e-7	6.09e-8
128	8367	56.60	4.23e-7	1.83e-8
256	28785	944	9.40e-7	1.02e-8
512	100000	13346	1.81e-6	4.90e-9

T14	Gauss-Seidel for $\lambda = 1$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
16	153	0.015	2.86e-7	7.86e-7
32	500	0.182	5.55e-7	4.02e-7
64	2157	3.342	2.79e-7	5.07e-8
128	8194	54.91	3.58e-7	1.63e-8
256	32678	1076	3.58e-7	4.08e-9
512	100000	13307	1.45e-6	4.13e-9

T15	Gauss-Seidel for $\lambda = 100$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
16	42	0.004	5.65e-8	4.53e-7
32	138	0.052	4.55e-8	1.91e-7
64	515	0.789	3.78e-8	4.02e-8
128	1873	12.79	6.08e-8	1.63e-8
256	6758	218	1.21e-7	8.16e-9
512	27321	3703	1.09e-7	1.84e-9

Αντίστοιχα, στους πίνακες Τ16,Τ17 και Τ18 παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα της επίλυσης του πδ2 με τη μέθοδο Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση για $\lambda = 0, 1$ και 100.

T16	Preconditioned Bi-CGSTAB for $\lambda = 0$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
16	12	0.003	1.91e-7	6.69e-7
32	25	0.022	3.15e-8	1.46e-7
64	40	0.161	2.47e-7	6.84e-8
128	76	1.450	2.90e-7	1.80e-8
256	146	12.21	5.74e-7	9.87e-9
512	281	94.63	1.03e-6	4.39e-9
1024	559	769	3.08e-7	2.89e-9
2048	1139	6422	5.22e-7	1.28e-9

T17	Preconditioned Bi-CGSTAB for $\lambda = 1$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
16	12	0.003	1.64e-7	6.06e-7
32	25	0.022	9.53e-8	4.11e-7
64	40	0.161	1.84e-7	4.90e-8
128	74	1.404	4.22e-7	2.21e-8
256	144	12.20	4.39e-7	7.44e-9
512	286	96.86	7.94e-7	4.43e-9
1024	555	762	9.60e-7	1.52e-9
2048	1352	7671	5.22e-7	1.82e-10

T18	Preconditioned Bi-CGSTAB for $\lambda = 100$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
16	7	0.002	5.37e-8	6.72e-7
32	12	0.010	5.11e-8	3.34e-7
64	24	0.096	3.78e-8	4.64e-8
128	46	0.924	4.97e-8	1.60e-8
256	84	7.109	1.16e-7	9.15e-9
512	159	53.85	1.33e-7	2.66e-9
1024	331	457	3.41e-8	3.41e-10
2048	602	3445	1.93e-7	5.16e-10

Στην συνέχεια, έγινε χρήση της ΤΠΠ για το πδ2 και τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν φαίνονται στους πίνακες T19,T20,T21,T22,T23 και T24. Στους πρώτους τρεις πίνακες χρησιμοποιήθηκε σαν επαναληπτικό σχήμα εξομάλυνσης η μέθοδος GS, ενώ στους υπόλοιπους τρεις εφαρμόστηκε η ΤΠΠ με τη Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση ως σχήμα εξομάλυνσης.

T19	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 0$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.072	1.01e-5	3.51e-5			
2	0.124	8.59e-7	4.15e-6			
3	0.175	1.16e-7	3.07e-7			
4	0.227	6.78e-9	3.55e-8			
5	0.273	1.02e-9	2.77e-9			
6	0.324	8.67e-11	3.03e-10			
7	0.373	8.34e-12	2.60e-11			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.555	2.99e-6	9.03e-6	0.236	1.35e-5	9.08e-6
2	0.992	8.58e-7	1.09e-6	0.375	7.66e-7	1.10e-6
3	1.430	5.12e-8	7.91e-8	0.515	8.91e-8	7.97e-8
4	1.877	2.01e-9	9.96e-9	0.652	1.89e-9	1.10e-8
5	2.251	3.70e-10	7.17e-10	0.789	5.84e-10	7.20e-10
6	2.691	2.67e-11	9.14e-11	0.926	2.31e-11	1.05e-10
7	3.087	3.42e-12	6.72e-12	1.063	5.86e-12	6.74e-12
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	5.307	8.48e-7	2.91e-6	1.019	6.04e-6	2.87e-6
2	10.26	8.46e-7	2.78e-7	1.630	8.08e-7	2.82e-7
3	15.16	3.59e-8	2.00e-8	2.242	5.94e-8	2.02e-8
4	20.08	1.51e-9	2.78e-9	2.854	1.45e-9	3.03e-9
5	24.69	2.03e-10	1.81e-10	3.465	2.96e-10	1.83e-10
6	29.52	8.08e-12	2.63e-11	4.077	5.80e-12	3.07e-11
7	33.91	1.03e-12	1.74e-12	4.689	2.30e-12	1.72e-12
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	66.88	3.26e-7	1.44e-6	4.345	1.89e-6	1.44e-6
2	134	8.41e-7	7.03e-8	7.051	8.44e-7	7.15e-8
3	199	3.27e-8	5.09e-9	9.764	3.99e-8	5.47e-9
4	264	1.53e-9	8.04e-10	12.47	1.49e-9	8.66e-10
5	325	1.71e-10	4.43e-11	15.17	2.04e-10	4.67e-11
6	387	2.63e-12	7.64e-12	17.88	2.31e-12	9.01e-12
7	451	6.80e-13	5.09e-13	20.55	8.76e-13	4.92e-13
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	976	9.50e-7	7.19e-7	21.25	5.39e-7	7.19e-7
2	2073	8.36e-7	2.71e-8	35.93	8.42e-7	2.68e-8
3	3035	3.42e-8	1.99e-9	50.59	3.33e-8	2.05e-9
4	4034	1.43e-9	2.54e-10	65.23	1.55e-9	2.68e-10
5	4775	1.69e-10	1.57e-11	79.61	1.71e-10	1.55e-11
6	5706	2.29e-12	2.42e-12	94.10	9.77e-13	2.77e-12
7	6837	5.91e-13	2.19e-13	109	6.57e-13	1.52e-13

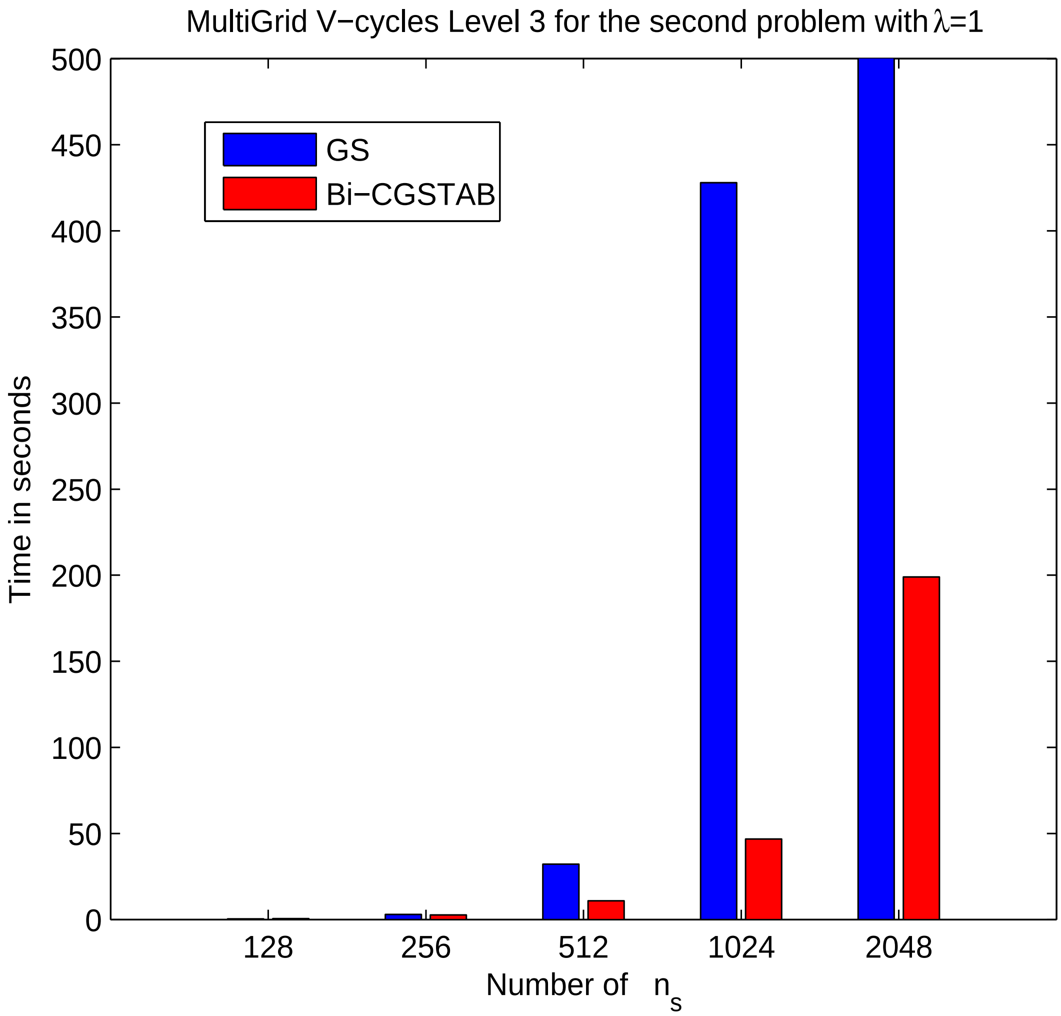
T20	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 1$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.070	9.91e-6	3.51e-5			
2	0.119	8.39e-7	4.14e-6			
3	0.170	1.13e-7	3.07e-7			
4	0.219	6.76e-9	3.54e-8			
5	0.263	9.94e-10	2.77e-9			
6	0.313	8.59e-11	3.01e-10			
7	0.360	8.26e-12	2.60e-11			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.536	2.96e-6	9.03e-6	0.236	1.32e-5	9.08e-6
2	0.961	8.37e-7	1.09e-6	0.376	7.48e-7	1.10e-6
3	1.389	4.96e-8	7.91e-8	0.515	8.56e-8	7.97e-8
4	1.815	2.02e-9	9.97e-9	0.655	1.88e-9	1.09e-8
5	2.174	3.62e-10	7.17e-10	0.792	5.66e-10	7.20e-10
6	2.597	2.67e-11	9.13e-11	0.932	2.30e-11	1.04e-10
7	2.980	3.36e-12	6.72e-12	1.069	5.73e-12	6.74e-12
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	5.081	8.43e-7	2.91e-6	1.016	5.93e-6	2.87e-6
2	9.770	8.25e-7	2.78e-7	1.622	7.88e-7	2.82e-7
3	14.43	3.49e-8	2.00e-8	2.228	5.75e-8	2.02e-8
4	19.08	1.42e-9	2.79e-9	2.835	1.38e-9	3.03e-9
5	23.41	1.93e-10	1.81e-10	3.441	2.82e-10	1.83e-10
6	27.97	8.11e-12	2.63e-11	4.047	5.82e-12	3.06e-11
7	32.11	1.01e-12	1.73e-12	4.653	2.26e-12	1.72e-12
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	64.01	3.13e-7	1.44e-6	4.287	1.85e-6	1.44e-6
2	129	8.20e-7	7.03e-8	6.978	8.22e-7	7.15e-8
3	190	3.18e-8	5.16e-9	9.674	3.87e-8	5.53e-9
4	253	1.44e-9	8.08e-10	12.36	1.41e-9	8.70e-10
5	308	1.62e-10	4.66e-11	15.04	1.93e-10	4.69e-11
6	367	2.65e-12	7.66e-12	17.72	2.27e-12	9.02e-12
7	428	6.31e-13	5.18e-13	20.41	8.20e-13	4.93e-13
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	934	9.04e-7	7.19e-7	21.01	5.29e-7	7.19e-7
2	1979	8.15e-7	2.70e-8	35.38	8.21e-7	2.67e-8
3	2896	3.31e-8	2.02e-9	49.77	3.24e-8	2.08e-9
4	3845	1.35e-9	2.56e-10	64.18	1.46e-9	2.70e-10
5	4527	1.59e-10	1.58e-11	78.28	1.62e-10	1.57e-11
6	5407	2.07e-12	2.43e-12	98.54	8.97e-13	2.78e-12
7	6488	5.59e-13	2.23e-13	107	6.21e-13	1.53e-13

T21	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 100$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.054	4.69e-6	3.52e-5			
2	0.087	4.35e-7	4.07e-6			
3	0.121	4.62e-8	2.98e-7			
4	0.154	5.17e-9	3.14e-8			
5	0.187	3.60e-10	2.64e-9			
6	0.220	4.80e-11	2.53e-10			
7	0.253	7.91e-12	2.44e-11			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.296	1.93e-6	9.04e-6	0.237	4.21e-6	9.09e-6
2	0.483	3.08e-7	1.08e-6	0.373	2.51e-7	1.08e-6
3	0.674	1.98e-8	7.84e-8	0.508	2.04e-8	7.88e-8
4	0.862	1.89e-9	9.73e-9	0.644	1.77e-9	9.48e-9
5	1.039	1.96e-10	7.07e-10	0.779	2.22e-10	7.09e-10
6	1.224	2.19e-11	7.80e-11	0.915	1.98e-11	7.36e-11
7	1.401	1.95e-12	6.61e-12	1.051	2.43e-12	6.61e-12
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	1.875	6.62e-7	2.93e-6	1.015	2.29e-6	2.93e-6
2	3.140	2.95e-7	2.77e-7	1.616	2.82e-7	2.77e-7
3	4.559	1.05e-8	1.99e-8	2.224	1.11e-8	2.01e-8
4	5.981	6.52e-10	2.90e-9	2.823	5.56e-10	2.85e-9
5	7.247	6.59e-11	1.81e-10	3.422	1.00e-10	1.82e-10
6	8.574	7.79e-12	2.51e-11	4.020	6.23e-12	2.47e-11
7	9.776	7.23e-13	1.76e-12	4.618	1.23e-12	1.70e-12
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	17.32	2.01e-7	1.45e-6	4.114	1.31e-6	1.45e-6
2	32.26	2.92e-7	7.01e-8	6.618	2.93e-7	7.07e-8
3	47.01	1.02e-8	6.37e-9	9.101	1.04e-8	6.39e-9
4	61.74	4.14e-10	8.90e-10	11.58	1.97e-10	9.09e-10
5	75.27	1.98e-11	4.97e-11	14.06	3.48e-11	4.87e-11
6	88.63	2.73e-12	7.74e-12	16.53	2.01e-12	8.40e-12
7	100	2.02e-13	6.56e-13	19.05	5.25e-13	5.04e-13
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	236	1.42e-7	7.20e-7	17.88	5.23e-7	7.20e-7
2	468	2.91e-7	2.52e-8	29.01	2.91e-7	2.47e-8
3	681	1.03e-8	2.63e-9	40.18	1.02e-8	2.68e-9
4	894	3.94e-10	2.97e-10	51.47	3.10e-10	3.02e-10
5	1084	2.73e-11	1.78e-11	62.60	1.25e-11	1.75e-11
6	1262	1.07e-12	2.50e-12	73.64	7.71e-13	2.84e-12
7	1436	8.64e-14	2.85e-13	84.65	1.79e-13	1.99e-13

T22	Multigrid with Preconditioned Bi-CGSTAB Smoother for $\lambda = 0$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.131	2.73e-6	1.20e-5			
2	0.206	4.34e-7	5.52e-7			
3	0.281	1.28e-8	1.71e-8			
4	0.355	3.25e-9	3.18e-10			
5	0.431	9.51e-10	4.13e-11			
6	0.505	1.52e-10	6.39e-12			
7	0.579	3.07e-11	1.28e-12			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.594	2.31e-6	1.05e-5	0.574	2.51e-6	1.05e-5
2	0.941	4.02e-7	4.67e-7	0.945	4.51e-7	5.00e-7
3	1.277	3.52e-8	1.30e-8	1.285	6.60e-9	1.40e-8
4	1.608	1.32e-8	3.78e-10	1.624	1.00e-9	4.60e-10
5	1.938	7.20e-9	1.96e-10	1.958	1.20e-11	1.66e-11
6	2.273	4.37e-9	5.73e-11	2.292	7.61e-13	3.57e-13
7	2.609	1.95e-9	3.92e-11	2.626	1.72e-13	1.24e-14
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	2.532	5.35e-7	7.36e-7	2.403	3.32e-6	7.39e-7
2	3.972	4.60e-8	1.69e-8	3.828	3.63e-8	1.46e-8
3	5.384	2.51e-8	5.36e-10	5.270	4.05e-9	3.81e-10
4	6.796	1.49e-8	1.95e-10	6.695	1.25e-9	9.00e-12
5	8.200	1.34e-8	6.85e-11	8.119	3.43e-10	1.10e-12
6	9.607	9.78e-9	8.33e-11	9.543	1.61e-10	8.22e-13
7	11.01	8.86e-9	3.24e-11	10.96	1.37e-11	1.19e-13
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	11.26	1.10e-6	2.21e-7	9.764	1.61e-6	8.42e-7
2	17.69	1.43e-7	4.85e-9	15.65	3.55e-8	5.60e-9
3	23.62	9.32e-8	1.85e-10	21.51	2.96e-8	1.16e-10
4	29.46	8.02e-8	2.45e-10	27.41	1.62e-8	2.28e-11
5	35.26	7.70e-8	1.08e-10	33.29	1.13e-8	1.06e-11
6	41.12	1.83e-8	9.28e-11	39.18	8.92e-9	6.32e-12
7	46.90	1.63e-8	6.80e-11	45.05	3.60e-9	4.14e-12
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	54.17	1.92e-7	6.15e-8	40.52	4.72e-7	6.67e-8
2	79.04	1.10e-7	8.32e-10	64.82	3.47e-8	1.00e-9
3	103	9.00e-8	1.32e-10	89.12	3.01e-8	2.33e-11
4	127	8.69e-8	1.56e-10	113	3.06e-8	1.84e-11
5	151	8.60e-8	6.38e-10	137	1.96e-8	1.92e-11
6	175	8.50e-8	6.05e-11	162	1.03e-8	5.01e-12
7	199	8.42e-8	6.26e-11	186	1.05e-8	5.80e-12

T23	Multigrid with Preconditioned Bi-CGSTAB Smoother for $\lambda = 1$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\lVert \mathbf{u}-\mathbf{x} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{b}-A\mathbf{x} \rVert_\infty$	Time	$\lVert \mathbf{u}-\mathbf{x} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{b}-A\mathbf{x} \rVert_\infty$
1	0.130	2.69e-6	1.27e-5			
2	0.205	4.40e-7	6.04e-7			
3	0.279	1.20e-8	1.89e-8			
4	0.353	6.44e-9	4.19e-10			
5	0.427	1.77e-10	1.80e-11			
6	0.500	6.99e-11	4.18e-12			
7	0.574	1.71e-11	9.14e-13			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\lVert \mathbf{u}-\mathbf{x} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{b}-A\mathbf{x} \rVert_\infty$	Time	$\lVert \mathbf{u}-\mathbf{x} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{b}-A\mathbf{x} \rVert_\infty$
1	0.582	2.17e-6	9.43e-6	0.569	2.46e-6	9.46e-6
2	0.923	3.57e-7	4.01e-7	0.903	4.12e-7	4.24e-7
3	1.258	3.47e-8	1.15e-8	1.238	5.62e-9	1.20e-8
4	1.589	1.12e-8	1.47e-10	1.572	8.50e-10	3.87e-10
5	1.920	6.27e-9	4.95e-11	1.906	5.92e-11	1.45e-11
6	2.262	3.58e-9	1.47e-10	2.248	1.03e-12	2.71e-13
7	2.591	1.65e-9	2.70e-11	2.582	2.53e-13	8.11-15
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\lVert \mathbf{u}-\mathbf{x} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{b}-A\mathbf{x} \rVert_\infty$	Time	$\lVert \mathbf{u}-\mathbf{x} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{b}-A\mathbf{x} \rVert_\infty$
1	2.491	5.33e-7	7.26e-7	2.392	3.04e-6	7.29e-7
2	3.919	5.30e-8	1.66e-8	3.846	3.29e-8	1.43e-8
3	5.324	2.94e-8	5.53e-10	5.264	4.19e-9	3.88e-10
4	6.725	2.53e-8	2.83e-10	6.698	1.21e-9	9.10e-12
5	8.125	1.98e-8	1.56e-10	8.116	2.55e-10	9.90e-13
6	9.526	1.62e-8	2.30e-10	9.533	4.03e-11	3.23e-13
7	10.92	1.52e-8	1.28e-10	10.95	9.50e-12	2.92e-14
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\lVert \mathbf{u}-\mathbf{x} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{b}-A\mathbf{x} \rVert_\infty$	Time	$\lVert \mathbf{u}-\mathbf{x} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{b}-A\mathbf{x} \rVert_\infty$
1	11.16	1.12e-6	2.26e-7	9.789	1.65e-6	2.48e-7
2	17.54	1.39e-7	4.95e-9	15.66	4.14e-8	5.71e-9
3	23.43	9.21e-8	2.03e-10	21.53	2.18e-8	1.19e-10
4	29.24	8.54e-8	1.45e-10	27.43	1.07e-8	1.84e-11
5	35.08	6.37e-8	1.80e-10	33.29	1.13e-8	1.07e-11
6	40.91	5.90e-8	1.15e-10	39.17	1.35e-8	1.06e-11
7	46.72	5.71e-8	1.13e-10	45.08	1.06e-8	7.75e-12
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\lVert \mathbf{u}-\mathbf{x} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{b}-A\mathbf{x} \rVert_\infty$	Time	$\lVert \mathbf{u}-\mathbf{x} \rVert_\infty$	$\lVert \mathbf{b}-A\mathbf{x} \rVert_\infty$
1	53.79	2.69e-7	6.00e-8	40.35	4.64e-7	6.49e-8
2	78.91	2.37e-7	8.57e-10	64.49	3.33e-8	9.95e-10
3	103	1.21e-7	1.47e-10	88.67	1.62e-8	1.85e-11
4	127	1.19e-7	9.12e-11	112	9.45e-9	8.67e-12
5	151	1.14e-7	1.24e-10	136	7.96e-9	3.70e-12
6	175	1.13e-7	5.29e-11	161	5.19e-9	2.06e-12
7	199	7.69e-8	1.19e-10	185	2.77e-9	4.36e-12

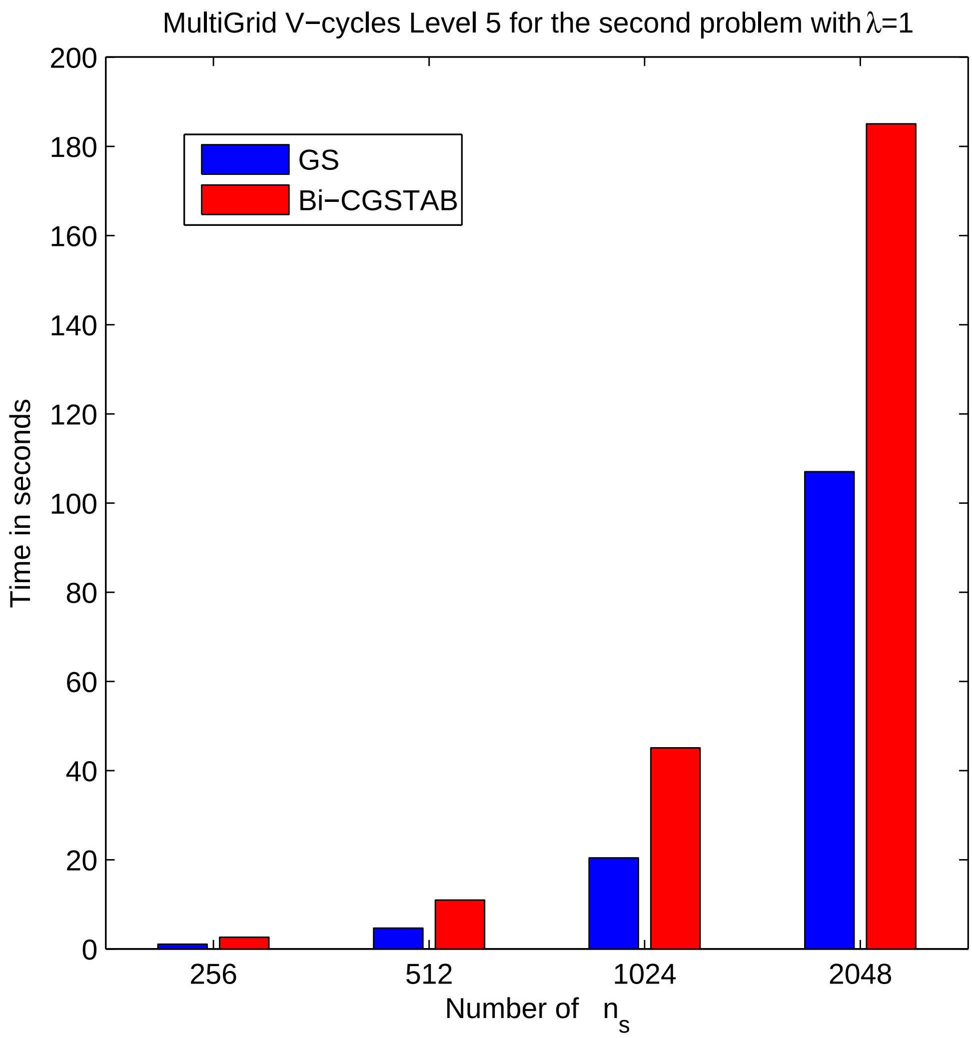
T24	Multigrid with Preconditioned Bi-CGSTAB Smoother for $\lambda = 100$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.133	2.17e-6	1.16e-5			
2	0.207	9.54e-8	4.28e-7			
3	0.281	4.17e-9	2.32e-8			
4	0.354	2.10e-10	1.04e-9			
5	0.428	1.64e-11	7.72e-11			
6	0.501	6.13e-12	2.50e-12			
7	0.574	6.25e-12	6.99e-14			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.586	1.30e-6	1.57e-6	0.559	1.35e-6	1.57e-6
2	0.914	1.46e-8	2.84e-8	0.887	1.59e-8	2.84e-8
3	1.238	2.39e-9	7.39e-10	1.215	2.59e-10	6.94e-10
4	1.561	2.10e-10	2.36e-11	1.564	1.03e-11	5.87e-11
5	1.884	5.17e-11	3.97e-12	1.892	5.14e-13	2.67e-12
6	2.227	4.38e-12	4.80e-13	2.222	4.02e-13	7.50e-14
7	2.550	7.02e-13	6.95e-14	2.550	3.91e-13	2.00e-15
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	2.500	2.22e-5	7.20e-6	2.364	3.58e-5	8.24e-6
2	3.957	1.10e-7	5.83e-8	3.770	8.79e-7	2.17e-7
3	5.362	1.08e-8	6.49e-10	5.176	6.42e-9	1.53e-9
4	6.751	3.46e-9	1.47e-10	6.581	8.13e-11	2.48e-11
5	8.140	1.41e-9	6.09e-11	7.987	1.57e-12	4.76e-13
6	9.525	5.79e-10	1.45e-11	9.392	3.89e-14	9.87e-15
7	10.91	2.45e-10	7.42e-12	10.79	2.40e-14	1.95e-16
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	10.72	1.16e-6	2.97e-7	9.620	1.05e-6	2.85e-7
2	16.84	3.47e-8	3.55e-9	15.43	1.68e-8	3.60e-9
3	22.59	9.72e-9	1.76e-10	21.20	1.20e-9	6.81e-11
4	28.37	5.45e-9	9.13e-11	26.97	1.06e-10	1.49e-12
5	34.17	3.85e-9	5.10e-11	32.79	1.49e-11	7.57e-14
6	39.84	3.32e-9	1.71e-11	38.57	7.96e-12	3.88e-14
7	45.56	2.52e-9	2.20e-11	44.36	1.74e-12	1.32e-14
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	48.78	2.49e-6	5.31e-7	40.41	2.38e-6	5.21e-7
2	76.40	8.14e-8	8.16e-9	64.64	2.51e-8	7.64e-9
3	100	4.03e-8	2.02e-10	88.81	6.82e-9	1.91e-10
4	124	3.22e-8	1.33e-10	113	1.47e-9	6.34e-12
5	148	2.89e-8	1.08e-10	137	4.13e-10	1.01e-12
6	172	2.76e-8	1.12e-10	161	8.83e-11	4.52e-13
7	195	2.63e-8	6.45e-11	185	3.59e-11	2.21e-13



Σχήμα 3.5: Χρόνος επίλυσης με ΤΠΠ σε 3 επίπεδα.

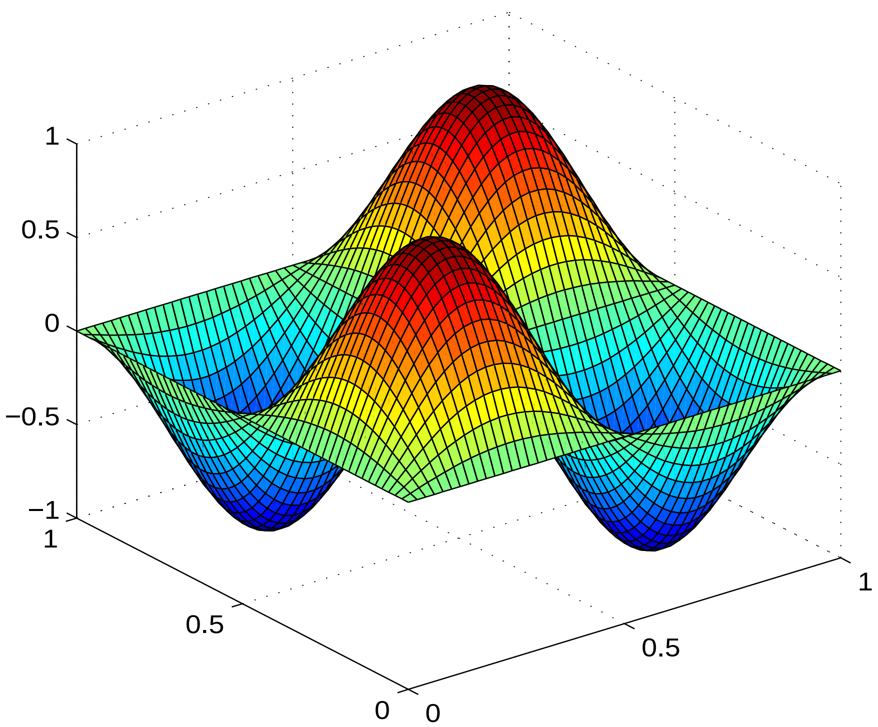
Το Σχήμα 3.5 εμφανίζει σε ραβδόγραμμα τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του χρόνου επίλυσης του πδ1 με χρήση της ΤΠΠ τριών επιπέδων με σχήματα εξομάλυνσης τις μεθόδους GS (μπλε) και Bi-CGSTAB (κόκκινο).

Σημειώνουμε ότι για λόγους καλύτερης εμφάνισης των μετρήσεων των μικρών διαμερίσεων η περίπτωση $n_s = 2048$ έχει περιοριστεί στα 500 δευτερόλεπτα, έναντι των 6488 που είναι η πραγματική τιμή του χρόνου σύγκλισης με τη χρήση της μεθόδου GS.



Σχήμα 3.6: Χρόνος επίλυσης με ΤΠΠ σε 5 επίπεδα.

Αντίστοιχα, στο Σχήμα 3.6 φαίνεται η σύγκριση των σχημάτων εξομάλυνσης GS και Bi-CGSTAB με χρήση της ΤΠΠ πέντε επιπέδων.



Σχήμα 3.7: Η ακριβής λύση $u = u(x, y)$ για το πρόβλημα δοκιμής 3.

3.4 Πρόβλημα δοκιμής 3

Θεωρούμε το Modified Helmholtz ΠΣΤ που έχει σαν λύση τη συνάρτηση

$$u(x, y) = \phi(x)\,\phi(y)\ ,\ \phi(x) = \sin(2x)\ \ , \tag{3.4}$$

η οποία παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 3.4, ως πρόβλημα δοκιμής 3 (πδ3).

Οι παρακάτω πίνακες εμφανίζουν τα αριθμητικά αποτελέσματα της επίλυσης του πδ3 με και χωρίς την χρήση της ΤΠΠ για $\lambda = 0,1$ και 100 και διαφορετικές διαμερίσεις. Παρουσιάζονται αναλυτικά το πλήθος των επαναλήψεων, οι μετρήσεις του χρόνου επίλυσης καθώς και οι τιμές της άπειρος νόρμας του σφάλματος και του υπολοίπου.

Από τον T25 έως και τον T30 εφαρμόζονται οι μέθοδοι GS και Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση, ενώ από τον T31 έως και T36 εφαρμόζονται ΤΠΠ με επαναληπτικά σχήματα εξομάλυνσης τις μεθόδους αυτές.

T25	Gauss-Seidel for $\lambda = 0$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_\infty$
16	114	0.010	4.47e-5	5.54e-6
32	397	0.148	3.05e-6	9.08e-7
64	1314	1.978	7.56e-7	5.55e-7
128	5385	34.72	3.59e-7	6.21e-8
256	20699	654	5.76e-7	2.49e-8
512	82667	10856	5.75e-7	6.23e-9

T26	Gauss-Seidel for $\lambda = 1$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_\infty$
16	113	0.010	4.48e-5	4.99e-6
32	389	0.145	3.06e-6	9.55e-7
64	1288	1.935	8.28e-7	6.15e-7
128	5321	34.73	3.54e-7	6.22e-8
256	19881	627	8.53e-7	3.74e-8
512	81705	10868	5.68e-7	6.23e-9

T27	Gauss-Seidel for $\lambda = 100$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_\infty$
16	49	0.005	5.02e-5	4.07e-6
32	175	0.065	3.04e-6	8.63e-7
64	621	0.947	1.19e-7	4.89e-7
128	2533	16.31	1.30e-7	5.57e-8
256	9526	301	3.16e-7	3.11e-8
512	38835	5115	2.28e-7	5.61e-9

T28	Preconditioned Bi-CGSTAB for $\lambda = 0$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_\infty$
16	14	0.003	4.46e-5	2.52e-6
32	19	0.018	2.91e-6	3.22e-7
64	33	0.136	3.64e-7	1.52e-7
128	63	1.258	6.11e-7	6.67e-8
256	106	9.347	3.30e-7	8.76e-9
512	183	64.13	2.61e-7	7.50e-9
1024	312	446	1.47e-7	1.24e-9
2048	353	2059	6.91e-8	1.23e-9

T29	Preconditioned Bi-CGSTAB for $\lambda = 1$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_\infty$
16	14	0.003	4.48e-5	2.65e-6
32	19	0.018	2.93e-6	3.45e-7
64	33	0.136	1.82e-7	7.40e-8
128	60	1.201	2.57e-7	3.15e-8
256	108	9.524	2.08e-7	5.77e-9
512	178	63.24	5.00e-7	3.50e-9
1024	245	350	3.06e-7	1.15e-9
2048	191	1119	2.93e-7	1.18e-9

T30	Preconditioned Bi-CGSTAB for $\lambda = 100$			
n_s	iterations	time	$\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_\infty$
16	8	0.002	5.04e-5	4.55e-6
32	15	0.014	3.22e-6	7.23e-7
64	27	0.114	2.60e-7	1.30e-7
128	50	1.012	1.00e-7	6.26e-8
256	84	7.317	1.60e-7	1.52e-8
512	133	46.98	2.71e-7	7.81e-9
1024	291	272	2.22e-7	1.87e-9
2048	191	1127	2.20e-7	9.97e-10

T31	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 0$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.065	1.76e-2	4.55e-2			
2	0.101	2.42e-3	3.34e-3			
3	0.136	1.65e-4	2.31e-4			
4	0.171	7.18e-6	2.47e-5			
5	0.207	3.61e-7	3.67e-6			
6	0.241	8.40e-8	1.61e-7			
7	0.276	1.01e-8	3.46e-8			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.360	4.89e-3	2.16e-2	0.209	3.83e-2	2.11e-2
2	0.586	2.56e-3	1.56e-3	0.408	1.02e-3	1.66e-3
3	0.813	1.10e-4	1.02e-4	0.542	1.93e-4	1.34e-4
4	1.040	4.62e-6	1.30e-5	0.676	1.16e-5	8.98e-6
5	1.268	3.26e-7	1.68e-6	0.810	3.24e-7	1.80e-6
6	1.494	5.54e-8	8.59e-8	0.944	5.67e-8	6.87e-8
7	1.704	2.22e-9	1.69e-8	1.078	3.80e-9	1.48e-8
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	2.520	1.31e-3	1.07e-2	1.144	1.67e-2	1.06e-2
2	4.478	2.54e-3	7.69e-4	1.738	2.16e-3	7.62e-4
3	6.439	9.37e-5	4.98e-5	2.332	1.56e-4	5.55e-5
4	8.395	3.28e-6	6.60e-6	2.941	2.36e-6	6.01e-6
5	10.36	3.17e-7	8.22e-7	3.535	2.71e-7	8.34e-7
6	12.30	3.28e-8	4.41e-8	4.129	3.32e-8	4.11e-8
7	13.97	9.52e-10	8.41e-9	4.722	4.11e-9	7.63e-9
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	25.30	4.98e-4	5.32e-3	4.706	4.91e-3	5.31e-3
2	48.47	2.52e-3	3.83e-4	7.238	2.47e-3	3.82e-4
3	71.61	9.09e-5	2.48e-5	9.741	1.10e-4	2.54e-5
4	94.72	3.19e-6	3.33e-6	12.28	1.96e-6	3.29e-6
5	117	3.24e-7	4.09e-7	14.78	3.22e-7	3.96e-7
6	141	1.81e-8	2.23e-8	17.28	1.71e-8	2.19e-8
7	153	5.57e-10	4.21e-9	19.77	3.03e-9	3.70e-9
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	366	7.97e-4	2.66e-3	20.85	1.33e-3	2.66e-3
2	724	2.51e-3	1.91e-4	32.52	2.51e-3	1.91e-3
3	1082	9.30e-5	1.25e-5	44.20	9.43e-5	1.24e-5
4	1440	3.02e-6	1.66e-6	55.92	2.82e-6	1.68e-6
5	1799	3.35e-7	2.05e-7	67.59	3.19e-7	1.95e-7
6	2156	9.55e-9	1.12e-8	79.35	8.68e-9	1.11e-8
7	2456	5.91e-10	2.11e-9	90.88	1.91e-9	1.82e-9

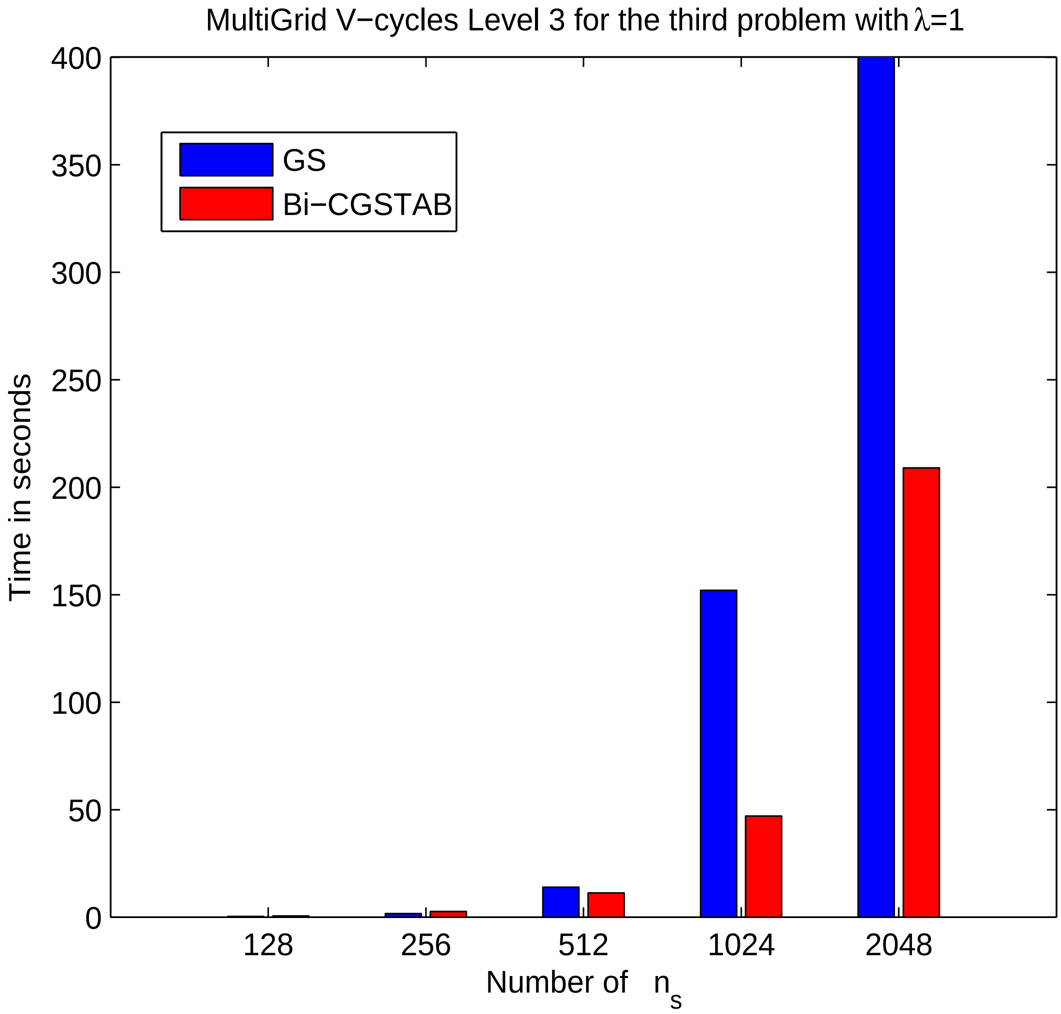
T32	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 1$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.066	1.74e-2	4.55e-2			
2	0.101	2.40e-3	3.35e-3			
3	0.137	1.62e-4	2.30e-4			
4	0.173	7.14e-6	2.47e-5			
5	0.207	3.56e-7	3.65e-6			
6	0.243	8.25e-8	1.61e-7			
7	0.278	1.01e-8	3.44e-8			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.359	4.85e-3	2.16e-2	0.267	3.77e-2	2.11e-2
2	0.583	2.53e-3	1.56e-3	0.405	1.03e-3	1.65e-3
3	0.808	1.08e-4	1.02e-4	0.540	1.90e-4	1.33e-4
4	1.033	4.58e-6	1.29e-5	0.674	1.12e-5	9.07e-6
5	1.251	3.15e-7	1.67e-6	0.808	3.07e-7	1.79e-6
6	1.475	5.50e-8	8.56e-8	0.942	5.65e-8	6.83e-8
7	1.685	2.20e-9	1.68e-8	1.076	3.67e-9	1.48e-8
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	2.477	1.29e-3	1.07e-2	1.138	1.65e-2	1.06e-2
2	4.448	2.51e-3	7.69e-4	1.728	2.14e-3	7.62e-4
3	6.398	9.24e-5	4.97e-5	2.318	1.53e-4	5.53e-5
4	8.345	3.17e-6	6.58e-6	2.908	2.35e-6	6.01e-6
5	10.29	3.08e-7	8.19e-7	3.498	2.62e-7	8.30e-7
6	12.24	3.26e-8	4.39e-8	4.088	3.31e-8	4.10e-8
7	13.88	9.47e-10	8.37e-8	4.677	3.38e-9	7.59e-9
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	25.07	6.93e-4	5.32e-3	4.696	4.86e-3	5.31e-3
2	47.97	2.49e-3	3.83e-4	7.196	2.44e-3	3.82e-4
3	70.88	8.96e-5	2.48e-5	9.697	1.08e-4	2.54e-5
4	93.78	3.08e-6	3.32e-6	12.19	1.88e-6	3.28e-6
5	116	3.14e-7	4.08e-7	14.69	3.12e-7	3.95e-7
6	136	1.80e-8	2.22e-8	17.19	1.71e-8	2.18e-8
7	152	5.22e-10	4.19e-9	19.68	3.02e-9	3.68e-9
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	359	7.88e-4	2.66e-3	20.73	1.32e-3	2.66e-3
2	708	2.48e-3	1.91e-4	32.37	2.48e-3	1.91e-4
3	1058	9.17e-5	1.25e-5	43.96	9.30e-5	1.24e-5
4	1408	2.91e-6	1.66e-6	55.52	2.71e-6	1.68e-6
5	1760	3.25e-7	2.05e-7	67.12	3.09e-7	1.94e-7
6	2109	9.52e-9	1.12e-8	78.68	8.65e-9	1.11e-8
7	2403	5.73e-10	2.10e-9	90.13	1.91e-9	1.81e-9

T33	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 100$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.062	2.96e-3	5.05e-2			
2	0.094	1.31e-3	3.69e-3			
3	0.126	4.53e-5	1.70e-4			
4	0.158	5.41e-6	2.61e-5			
5	0.190	1.87e-7	2.71e-6			
6	0.221	5.60e-8	1.49e-7			
7	0.253	1.20e-8	2.54e-7			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.312	6.97e-4	2.23e-2	0.284	3.85e-3	2.24e-2
2	0.491	1.17e-3	1.61e-3	0.419	1.12e-3	1.62e-3
3	0.669	3.93e-5	9.02e-5	0.554	4.13e-5	8.18e-5
4	0.848	3.23e-6	1.17e-5	0.689	3.21e-6	1.26e-5
5	1.016	1.53e-7	1.36e-6	0.824	2.69e-7	1.19e-6
6	1.179	3.84e-8	7.35e-8	0.959	3.80e-8	7.58e-8
7	1.349	1.54e-9	1.30e-8	1.094	1.81e-9	1.19e-8
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	1.800	2.37e-4	1.08e-2	1.156	2.36e-3	1.08e-2
2	3.051	1.13e-3	7.75e-4	1.751	1.10e-3	7.80e-4
3	4.304	3.80e-5	4.72e-5	2.356	4.03e-5	4.10e-5
4	5.553	1.89e-6	5.68e-6	2.951	1.83e-6	6.15e-6
5	6.616	1.07e-7	6.93e-7	3.545	2.53e-7	5.96e-7
6	7.780	2.52e-8	3.74e-8	4.139	2.36e-8	3.84e-8
7	8.860	7.46e-10	6.74e-9	4.733	2.57e-9	5.77e-9
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	14.76	1.19e-4	5.33e-3	4.659	6.43e-4	5.35e-3
2	27.33	1.11e-3	3.84e-4	7.126	1.11e-3	3.85e-4
3	39.93	3.80e-5	2.40e-5	9.583	3.84e-5	2.24e-5
4	52.48	1.06e-6	2.84e-6	12.06	9.90e-7	2.97e-6
5	60.03	6.65e-8	3.50e-7	14.51	1.84e-7	3.16e-7
6	71.97	1.49e-8	1.90e-8	16.95	1.36e-8	1.92e-8
7	80.33	5.12e-10	3.43e-9	19.40	2.22e-9	2.90e-9
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	190	3.24e-4	2.66e-3	20.04	1.50e-4	2.66e-3
2	371	1.11e-3	1.91e-4	31.02	1.11e-3	1.92e-4
3	553	3.86e-5	1.21e-5	42.03	3.79e-5	1.18e-5
4	734	5.69e-7	1.42e-6	53.00	5.20e-7	1.46e-6
5	868	3.80e-8	1.76e-7	63.85	1.17e-7	1.64e-7
6	1047	8.20e-9	9.62e-9	74.69	7.31e-9	9.59e-9
7	1170	3.08e-10	1.73e-9	85.50	1.55e-9	1.45e-9

T34	Multigrid with Preconditioned Bi-CGSTAB Smoother for $\lambda = 0$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.139	1.45e-3	4.06e-4			
2	0.213	1.33e-5	5.83e-6			
3	0.288	6.82e-8	9.08e-8			
4	0.361	1.06e-8	2.26e-9			
5	0.434	1.09e-8	8.28e-11			
6	0.507	1.08e-8	3.45e-12			
7	0.580	1.08e-8	4.98e-13			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.611	2.94e-4	1.19e-4	0.601	2.49e-4	1.18e-4
2	0.948	1.07e-6	2.22e-6	0.932	3.38e-6	2.15e-6
3	1.279	4.92e-8	5.34e-8	1.262	7.91e-8	5.13e-8
4	1.607	3.90e-9	1.61e-9	1.593	1.58e-9	1.31e-9
5	1.933	2.14e-9	8.30e-11	1.923	6.35e-10	3.46e-11
6	2.258	1.24e-9	4.60e-11	2.267	6.70e-10	9.25e-13
7	2.584	7.92e-10	6.26e-12	2.598	6.72e-10	5.28e-14
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	2.619	3.68e-4	1.75e-3	2.536	3.62e-4	1.72e-3
2	4.136	1.24e-5	7.96e-5	3.954	1.22e-5	7.83e-5
3	5.604	4.06e-7	1.91e-6	5.372	4.09e-7	1.96e-6
4	7.032	2.98e-8	8.40e-8	6.791	1.38e-8	8.85e-8
5	8.436	1.45e-8	1.75e-9	8.208	5.06e-10	2.29e-9
6	9.833	1.30e-8	1.13e-10	9.625	8.39e-11	1.08e-10
7	11.23	6.17e-9	1.16e-10	11.06	4.37e-11	4.68e-12
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	11.16	1.79e-4	2.00e-4	10.27	1.81e-4	1.92e-4
2	17.73	8.46e-7	3.98e-6	16.10	8.60e-7	3.93e-6
3	23.97	1.95e-7	4.32e-7	21.93	2.13e-7	7.37e-7
4	29.91	1.65e-8	1.68e-8	27.74	6.34e-9	3.78e-8
5	35.67	1.02e-8	3.81e-10	33.55	1.44e-9	1.24e-9
6	41.39	7.95e-9	8.54e-11	39.35	1.40e-9	7.95e-11
7	47.11	6.52e-9	2.68e-11	45.14	4.29e-10	1.45e-12
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	51.46	1.40e-4	3.09e-4	42.80	1.44e-4	2.89e-4
2	84.53	1.81e-6	1.24e-5	67.07	1.62e-6	1.12e-5
3	112	1.16e-7	3.38e-7	91.26	1.35e-7	3.20e-7
4	137	7.56e-8	1.09e-8	115	1.24e-8	2.16e-9
5	161	6.86e-8	3.43e-10	139	9.20e-9	4.58e-10
6	186	4.77e-8	1.06e-10	163	4.86e-9	1.02e-11
7	210	4.53e-8	5.78e-11	188	3.46e-9	2.57e-12

T35	Multigrid with Preconditioned Bi-CGSTAB Smoother for $\lambda = 1$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.138	1.45e-3	4.08e-4			
2	0.212	1.30e-5	5.84e-6			
3	0.286	6.70e-8	9.06e-8			
4	0.359	1.05e-8	2.32e-8			
5	0.432	1.09e-8	8.41e-11			
6	0.505	1.08e-8	3.33e-12			
7	0.577	1.08e-8	2.64e-13			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.610	2.96e-4	1.20e-4	0.600	2.53e-4	1.19e-4
2	0.948	1.08e-6	2.25e-6	0.932	3.40e-6	2.18e-6
3	1.279	5.09e-8	5.54e-8	1.263	8.07e-8	5.08e-8
4	1.608	3.96e-9	1.65e-9	1.595	2.36e-9	1.32e-9
5	1.933	2.09e-9	8.30e-11	1.926	6.48e-10	3.45e-11
6	2.260	1.20e-9	4.58e-11	2.257	6.74e-10	9.44e-13
7	2.591	7.60e-10	6.60e-12	2.588	6.74e-10	4.76e-14
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	2.611	2.70e-4	1.28e-3	2.522	2.67e-4	1.27e-3
2	4.124	8.78e-6	5.89e-5	3.963	8.67e-6	5.81e-3
3	5.588	3.27e-7	1.57e-6	5.379	3.20e-7	1.54e-6
4	7.033	2.63e-8	7.51e-8	6.803	1.10e-8	7.15e-8
5	8.446	1.19e-8	1.40e-9	8.233	4.98e-10	1.84e-9
6	9.849	8.70e-9	1.17e-10	9.649	1.30e-10	7.71e-11
7	11.24	4.78e-9	7.58e-11	11.06	4.52e-11	2.11e-12
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	11.19	1.76e-4	2.12e-4	10.24	1.78e-4	2.10e-4
2	17.73	9.05e-7	4.31e-6	16.04	9.11e-7	4.26e-6
3	23.94	1.97e-7	5.69e-7	21.86	2.13e-7	2.48e-7
4	29.90	1.42e-8	2.42e-8	27.67	5.11e-9	3.14e-8
5	35.61	1.06e-8	1.01e-9	33.51	2.77e-9	3.26e-10
6	41.34	9.00e-9	4.66e-11	39.33	4.39e-10	8.65e-12
7	47.08	7.72e-9	3.46e-11	45.14	9.89e-11	3.62e-13
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	51.98	1.38e-4	3.41e-4	42.88	1.42e-4	3.18e-4
2	84.77	2.08e-6	1.42e-5	67.23	1.86e-6	1.28e-5
3	112	1.05e-7	3.74e-7	91.43	1.16e-7	3.53e-7
4	137	8.11e-8	1.25e-8	115	1.29e-8	1.07e-8
5	161	6.35e-8	3.45e-10	139	9.49e-9	5.86e-10
6	185	5.71e-8	7.54e-11	164	4.39e-9	1.19e-11
7	209	5.39e-8	8.59e-11	188	2.78e-9	2.26e-12

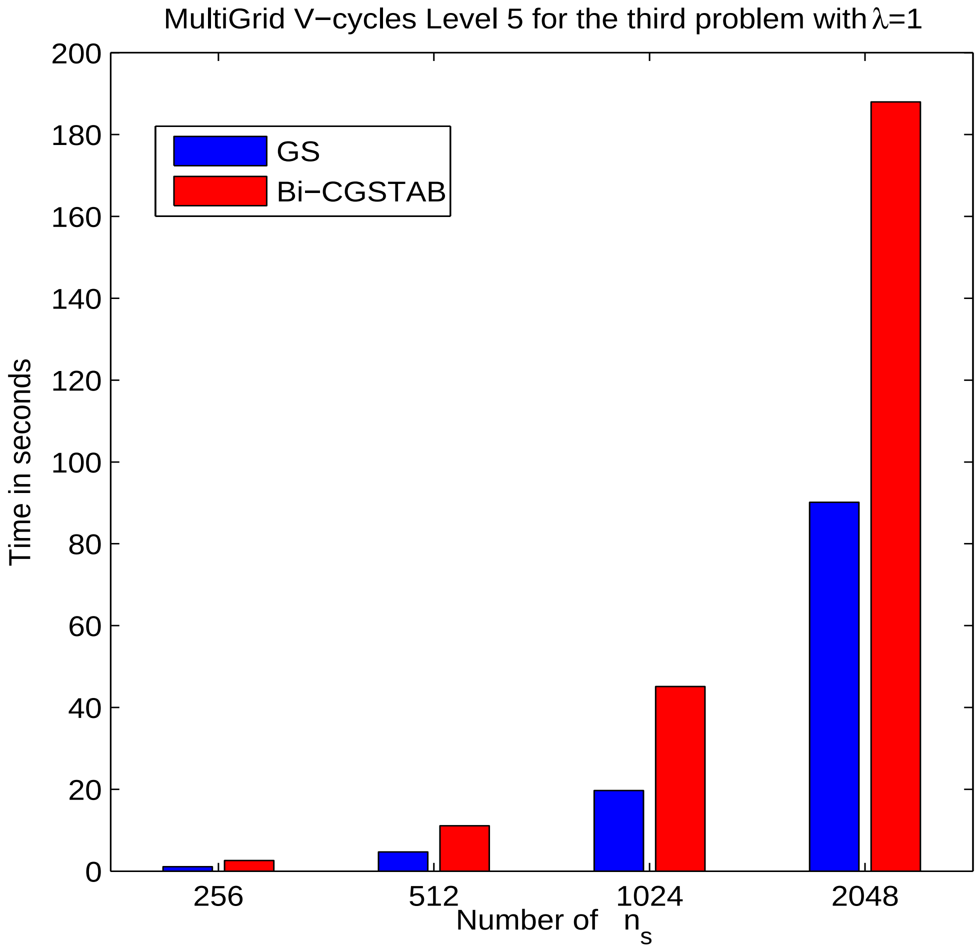
T36	Multigrid with Preconditioned Bi-CGSTAB Smoother for $\lambda = 100$					
	level=3			level=5		
$n_s = 128$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.139	4.25e-4	5.75e-4			
2	0.214	2.51e-6	1.15e-5			
3	0.288	1.46e-7	5.46e-7			
4	0.361	1.22e-8	3.55e-8			
5	0.435	1.22e-8	2.74e-9			
6	0.508	1.23e-8	4.54e-11			
7	0.582	1.23e-8	1.68e-12			
$n_s = 256$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	0.614	4.15e-4	2.14e-4	0.607	4.14e-4	2.15e-4
2	0.952	1.01e-6	4.78e-6	0.941	1.01e-6	4.79e-6
3	1.284	3.26e-9	3.84e-9	1.275	3.27e-8	8.71e-8
4	1.614	1.01e-9	3.84e-9	1.608	1.21e-9	3.82e-9
5	1.943	6.35e-10	1.44e-10	1.942	7.58e-10	1.46e-10
6	2.271	7.29e-10	6.44e-12	2.275	7.66e-10	6.46e-12
7	2.599	7.58e-10	1.21e-12	2.609	7.66e-10	3.07e-13
$n_s = 512$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	2.626	9.75e-5	5.60e-5	2.531	9.78e-5	5.60e-5
2	4.140	4.00e-7	9.70e-7	3.958	3.94e-7	9.67e-7
3	5.568	2.73e-8	4.27e-8	5.384	2.28e-8	4.52e-8
4	6.984	1.84e-9	1.12e-9	6.810	4.80e-10	1.03e-9
5	8.388	1.23e-9	5.02e-11	8.236	6.21e-11	5.17e-11
6	9.791	7.84e-10	1.86e-11	9.662	4.77e-11	1.72e-12
7	11.19	2.32e-10	5.19e-12	11.08	4.76e-11	7.21e-14
$n_s = 1024$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	10.93	8.46e-5	5.13e-5	10.34	8.71e-5	5.19e-5
2	17.32	8.36e-7	8.76e-7	16.21	2.33e-7	8.74e-7
3	23.24	4.14e-8	2.17e-7	22.07	4.15e-8	7.74e-8
4	29.11	1.54e-8	7.02e-9	27.94	5.00e-9	2.40e-9
5	34.93	1.05e-8	1.67e-10	33.81	3.59e-10	7.17e-11
6	40.76	7.52e-9	8.81e-11	39.71	1.45e-10	2.24e-12
7	46.59	5.75e-9	3.70e-11	45.56	1.06e-11	1.37e-13
$n_s = 2048$ V-cycles	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$	Time	$\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|_\infty$	$\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|_\infty$
1	47.47	6.23e-5	2.58e-5	42.83	6.20e-5	2.58e-5
2	75.92	1.13e-7	4.51e-7	67.17	4.11e-7	4.50e-7
3	100	6.26e-8	4.84e-7	91.58	3.79e-8	1.89e-8
4	124	3.01e-8	1.48e-8	115	2.88e-9	6.99e-10
5	148	1.99e-8	3.75e-10	140	1.10e-9	2.06e-11
6	172	1.69e-8	6.91e-11	164	4.50e-10	1.22e-12
7	196	1.21e-8	5.95e-11	188	1.32e-10	3.25e-13l



Σχήμα 3.8: Χρόνος επίλυσης με ΤΠΠ σε 3 επίπεδα.

Στο Σχήμα 3.8 παρουσιάζονται σε ραβδόγραμμα τα αποτελέσματα του χρόνου επίλυσης του πδ3 με χρήση της ΤΠΠ τριών επιπέδων. Οι στήλες με χρώμα κόκκινο αφορούν την ΤΠΠ με σχήμα εξομάλυνσης τη Bi-CGSTAB, ενώ με χρώμα μπλε αφορούν την ΤΠΠ με σχήμα εξομάλυνσης τη GS.

Σημειώνουμε ότι για λόγους καλύτερης εμφάνισης των μετρήσεων των μικρών διαμερίσεων η περίπτωση $n_s = 2048$ έχει περιοριστεί στα 400 δευτερόλεπτα, έναντι των 1436 που είναι η πραγματική τιμή του χρόνου σύγκλισης με τη χρήση της μεθόδου GS.



Σχήμα 3.9: Χρόνος επίλυσης με ΤΠΠ σε 5 επίπεδα.

Αντίστοιχα, στο Σχήμα 3.9 φαίνονται οι χρόνου επίλυσης του πδ3 με χρήση της ΤΠΠ πέντε επιπέδων.

Στην επόμενη παράγραφο γίνεται σχολιασμός των μετρήσεων που παρουσιάστηκαν.

3.5 Σχολιασμός αριθμητικής μελέτης

Η αριθμητική μελέτη και των τριών προβλημάτων δοκιμής που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες περιελάμβανε τη χρήση δύο επαναληπτικών μεθόδων, την GS και την Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση, ως σχήματα εξομάλυνσης της ΤΠΠ τριών και πέντε επιπέδων.

Όπως προκύπτει από τις πειραματικές μετρήσεις και των τριών προβλημάτων δοκιμής η χρήση της μεθόδου GS ως σχήμα εξομάλυνσης οδήγησε σε σημαντική μείωση του χρόνου σύγκλισης, αλλά και σε παραγωγή καλύτερης ποιοτικά προσεγγιστικής λύσης. Δηλαδή, υπήρξε κατασκευή πρεσεγγιστικής λύσης με τουλάχιστον μικρότερη κατά δύο τάξεις μεγέθους νόρμα σφάλματος και υπολοίπου. Ο χρόνος εκτέλεσης, για παράδειγμα στο πδ1 για $\lambda = 1$ και $n_s = 512$, μειώθηκε περίπου 800 φορές με την ΤΠΠ τριών επιπέδων και 3600 φορές με την ΤΠΠ πέντε επιπέδων σε σχέση με την επίλυση του γραμμικού συστήματος με χρήση της κλασσικής GS επαναληπτικής μεθόδου. Έγινε ακόμα εφικτό να επιλυθούν προβλήματα μεγαλύτερης διακριτοποίησης, όπως για $n_s = 1024$ και 2048, τα οποία δεν μπορούσαν να επιλυθούν σε ρεαλιστικό χρόνο με τη μέθοδο GS.

Στην βιβλιογραφία αναφέρεται ως αποδοτικότερη μέθοδος επίλυσης των Collocation γραμμικών συστημάτων η επαναληπτική μέθοδος Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση. Η χρήση αυτής της μεθόδου ως σχήμα εξομάλυνσης στην ΤΠΠ οδήγησε, όπως και στην περίπτωση της GS, στην παραγωγή καλύτερης ποιοτικά λύσης. Επιπλέον, σημειώθηκε πολύ μεγάλη μείωση του χρόνου εκτέλεσης με την εφαρμογή των τριών, αλλά και των πέντε επιπέδων στην ΤΠΠ, συγκριτικά με τη κλασσική μέθοδο. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στο πδ2 για $\lambda = 1$ και $n_s = 2048$ με την εφαρμογή της ΤΠΠ υπήρξε μείωση κατά 40 φορές περίπου.

Σχετικά τώρα με τη χρήση των δύο παραπάνω σχημάτων εξομάλυνσης δεν προκύπτει σαφής υπεροχή του ενός έναντι του άλλου για όλες τις περιπτώσεις δοκιμών. Όμως το σχήμα της GS υπερτερεί, όταν το μέγεθος του προβλήματος στην βάση του V-κύκλου είναι πολύ μικρό σε σχέση με το πρόβλημα στην κορυφή του. Για παράδειγμα, στο πδ1 για $\lambda = 1$, όταν η κορυφή του V-κύκλου είναι $n_s = 1024$ και η βάση του $n_s = 32$ (ΤΠΠ 5 επιπέδων), ο χρόνος εκτέλεσης με το GS σχήμα εξομάλυσνης είναι περίπου ο μισός από αυτόν που χρειάζεται το Bi-CGSTAB σχήμα εξομάλυσης για την συμπλήρωση των επτά V-κύκλων. Σε αντίθετη περίπτωση ενδείκνυται το επαναληπτικό σχήμα της Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση. Στο παραπάνω παράδειγμα, αν η βάση του V-κύκλου είναι $n_s = 128$ (ΤΠΠ 3 επιπέδων) ο χρόνος επίλυσης με το GS σχήμα εξομάλυνσης είναι περίπου 6 φορές μεγαλύτερος απ'το αν χρησιμοποιήσουμε το Bi-CGSTAB σχήμα εξομάλυσης.

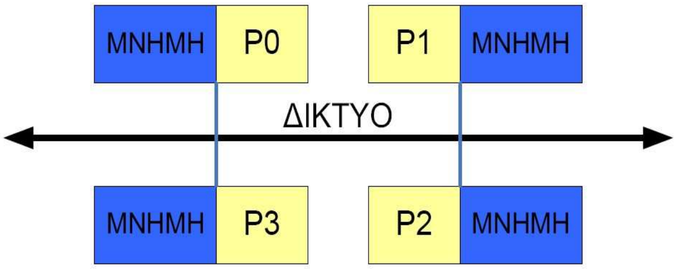
Κεφάλαιο 4

Δικτυακοί υπολογισμοί της ΤΠΠ για τη μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων Hermite Collocation

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η κατασκευή και η μελέτη της συμπεριφοράς σε ένα δικτυακό υπολογιστικό περιβάλλον ενός παράλληλου αλγορίθμου της ΤΠΠ για τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Collocation βασισμένη στα κυβικά πολυώνυμα Hermite ως συναρτήσης βάσης.

4.1 Δικτυακές υπολογιστικές αρχιτεκτονικές

Η εξέλιξη της τεχνολογίας τα τελευταία χρόνια έκανε εφικτή την κατασκευή χαμηλού κόστους πολυεπεξεργαστικών υπολογιστικών συστημάτων, με αποτέλεσμα η χρήση παράλληλων επιστημονικών υπολογισμών να είναι πλέον αρκετά διαδεδομένη για την επιτάχυνση χρονοβόρων υπολογιστικών μεθόδων [16, 17]. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι η κατασκευή ενός παράλληλου αλγορίθμου της αριθμητικής μεθόδου με την αξιοποίηση ή με την κατάλληλη προσθήκη σ'αυτόν *παράλληλων ιδιοτήτων*. Αυτό σημαίνει ότι κάποιες διαδικασίες μπορούν να υλοποιηθούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη σε κάποια χρονική στιγμή. Η χρήση παράλληλων διεργασιών έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του χρόνου επίλυσης. Επίσης, προσφέρεται η δυνατότητα να εκμεταλλευτούμε απομακρυσμένους υπολογιστικούς πόρους και να γίνει εφικτή η επίλυση μεγαλύτερων προβλημάτων.

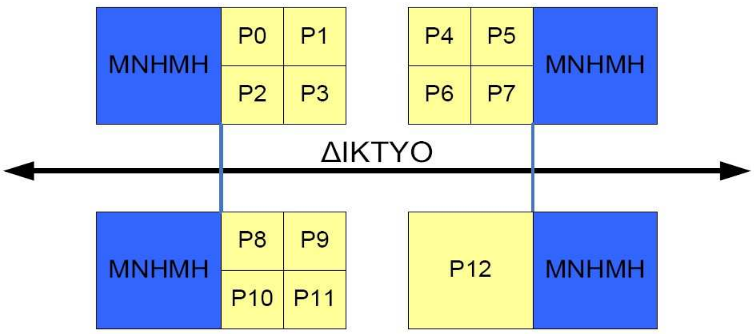


Σχήμα 4.1: Η απλούστερη αρχιτεκτονική δικτυακού υπολογιστή.

Τα κύρια χαρακτηριστικά ενός παράλληλου υπολογιστικού συστήματος είναι το πλήθος και το είδος της αρχιτεκτονικής των επεξεργαστών που διαθέτει καθώς επίσης και ο τρόπος σύνδεσης τους. Επειδή τα δικτυακά υπολογιστικά συστήματα ανήκουν στη κατηγορία των παράλληλων συστημάτων κατανεμημένης μνήμης, η πιο απλή διάταξη ενός τέτοιου συστήματος είναι αυτή που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1.

Δηλαδή, κάθε επεξεργαστής έχει την δική του μνήμη, η οποία δεν είναι προσπελάσιμη από τους υπόλοιπους. Γι'αυτό το λόγο, όταν ένας επεξεργαστής χρειαστεί δεδομένα από τη μνήμη κάποιου άλλου, για να πραγματοποιηθεί η επικοινωνία και η ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ τους, θα πρέπει να υπάρχει ένα δίκτυο επικοινωνίας, π.χ τύπου Ethernet-οπτικών ινών, καθώς και το απαραίτητο λογισμικό, το οποίο θα υποστηρίξει την ανταλλαγή των μηνυμάτων αυτών.

Σήμερα είναι εφικτή η εύκολη απόκτηση μικρών πολυεπεξεργαστικών συστημάτων κι έτσι κάποιοι υπολογιστικοί κόμβοι μπορούν να αποτελούνται από τέτοιου είδους παράλληλα συστήματα, δημιουργώντας μεικτά υπολογιστικά συστήματα, όπως ενδεικτικά παρουσιάζει το Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Μεικτό δικτυακό υπολογιστικό σύστημα.

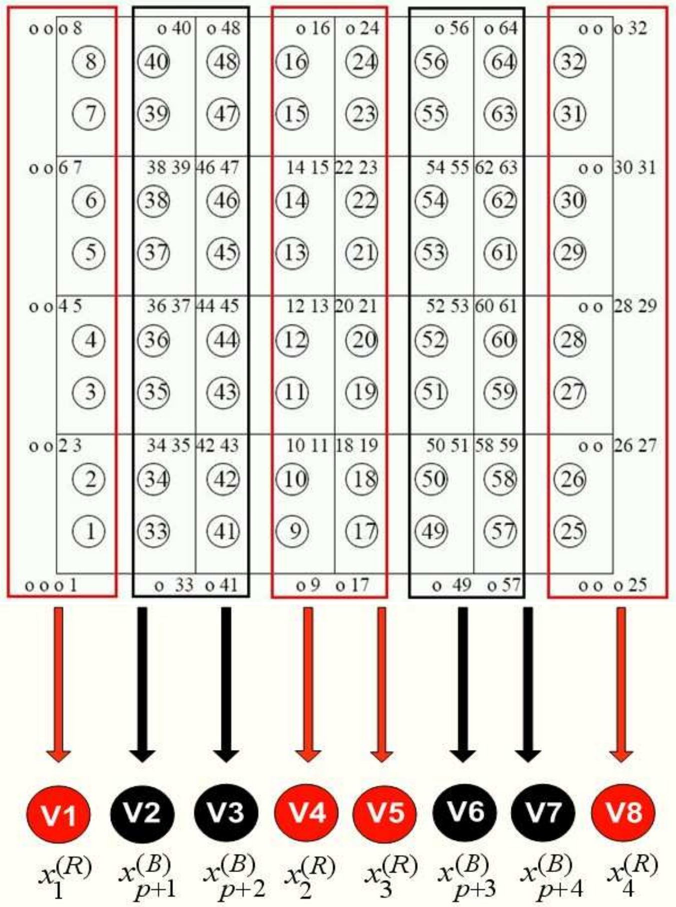
4.2 Κατασκευή παράλληλου αλγόριθμου της ΤΠΠ για αρχιτεκτονικές διανεμημένης μνήμης

Για την κατασκευή ενός αποδοτικού παράλληλου αλγόριθμου της ΤΠΠ [1, 15] για παράλληλες αρχιτεκτονικές διανεμημένης μνήμης θα πρέπει να ληφθούν υπόψη τα παράκατω:

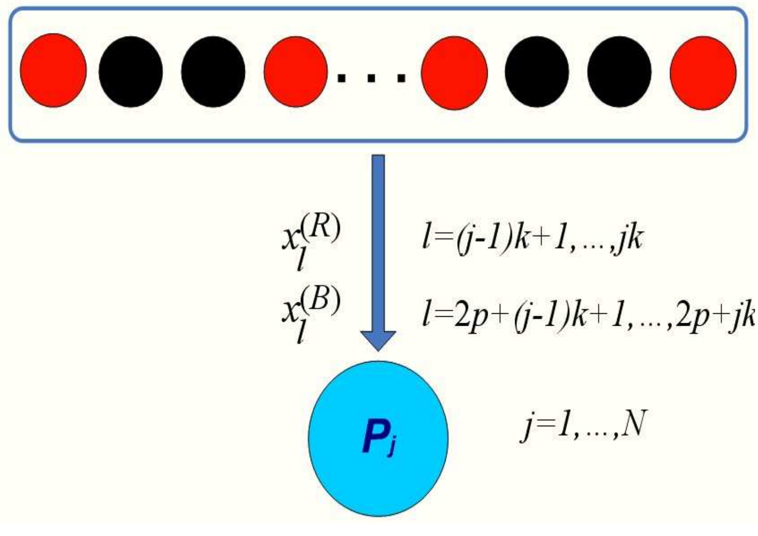
- Να γίνει ομοιόμορφη κατανομή του υπολογιστικού φόρτου στους διαθέσιμους επεξεργαστές, ανάλογα με τις δυνατότητες επεξεργασίας τους.
- Ελαχιστοποίσηση αδρανών επεξεργαστών.
- Ελαχιστοποίηση κόστος επικοινωνίας.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, αρχικά γίνεται η αντιστοίχιση ομάδων αγνώστων σε μία εικονική παράλληλη μηχανή με απεριόριστο πλήθος επεξεργαστών, ενώ στη συνέχεια υπάρχει η απεικόνιση τους σε μία αρχιτεκτονική με προκαθορισμένο αριθμό επεξεργαστών, όπως άλλωστε ισχύει και στην πραγματικότητα.
Αν θεωρήσουμε ότι έχει γίνει διαμέριση του χωρίου Ω σε $n_s = 2p$ άρτιο το πλήθος υποδιαστήματα ως προς τη x και y κατεύθυνση, αντιστοιχούμε ομάδες $2n_s$ αγνώστων σε πλήθος $2n_s$ εικονικούς επεξεργαστές με το τρόπο που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.3.
Δηλαδή, θεωρούμε ότι κάθε κάθετη γραμμή πλέγματος περιλαμβάνει δύο ομάδες, την αριστερή και τη δεξιά ομάδα αγνώστων. Κάθε τέτοια ομάδα αντιστοιχίζεται σε ένα εικονικό επεξεργαστή, καθώς και όλα τα δεδομένα που απαιτεί η αριθμητική μέθοδος για τον υπολογισμό της κάθε ομάδας αυτών των αγνώστων.

Στην περίπτωση τώρα που το παράλληλο υπολογιστικό σύστημα διαθέτει πλήθος P_j επεξεργαστές, όπου $j = 1, ..., N$ με το N να διαιρεί ακριβώς το $2n_s$, το υπολογιστικό φορτίο μπορεί να κατανεμηθεί ομοιόμορφα σε αυτούς. Έτσι προκύπτει μια ομαδοποίηση των εικονικών επεξεργαστών και κάθε τέτοια ομάδα θα αντιστοιχηθεί σε ένα πραγματικό επεξεργαστή με τον τρόπο που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.4, για την περίπτωση όπου $k = 2p/N$ άρτιος.
Όμοια αντιμετωπίζονται οι υπόλοιπες περιπτώσεις.



Σχήμα 4.3: Απεικόνιση αμάδων αγνώστων στους εικονικούς επεξεργαστές.



Σχήμα 4.4: Απεικόνιση $2k$ εικονικών επεξεργαστών.

Σύμφωνα την παραπάνω ανάλυση ο παράλληλος αλγόριθμος της επίλυσης του γραμμικού συστήματος των collocation εξισώσεων μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή για ένα παράλληλο υπολογιστικό σύστημα σταθερής διάστασης.

Παράλληλος αλγόριθμος της ΤΠΠ k-επιπέδων και $icmax$ V-κύκλων

Επιλογή αρχικής προσέγγισης $\mathbf{x}^h$ της λύσης $\mathbf{x}$ του γραμμικού συστήματος

Απεικόνιση δεδομένων στους N επεξεργαστές

for $ic = 1, 2, ..., icmax$

  Παράλληλη Εξομαλύνση του συστήματος $A^h\mathbf{x}^h = \mathbf{b}^h$ v_1 φορές

  με αρχική εκτίμηση την $\mathbf{x}^h$

  for $j = 1, ..., N$ **do in parallel**

   Αποθηκεύονται τα διανύσματα $\mathbf{x_j}^h$ και $\mathbf{b_j}^h$ στον επεξεργαστή P_j

  enddo

  for $l = 1, ..., 2k$

   if $l \leq k$ (βρισκόμαστε στη φάση καθόδου του V-κύκλου)

    Παράλληλος υπολογισμός του $\mathbf{b}^h = \mathbf{b}^h - A^h\mathbf{x}^h$

    for $j = 1, ..., N$ **do in parallel**

     $P_j \leftarrow \mathbf{b_j}^H = \mathbf{restriction}\{\mathbf{b}_j^h\}$

    enddo

    if $l = k$ (βρισκόμαστε στη βάση του V-κύκλου)

     Παράλληλη Επίλυση του συστήματος $A^H\mathbf{x}^H = \mathbf{b}^H$

     με αρχική εκτίμηση την $\mathbf{x}^H = \mathbf{0}$

    else

     Παράλληλη Εξομάλυση του συστήματος $A^H\mathbf{x}^H = \mathbf{b}^H$ v_1 φορές

     με αρχική εκτίμηση την $\mathbf{x}^H = \mathbf{0}$

    endif

for $j = 1, ..., N$ **do in parallel**

Αποθηκεύονται τα διανύσματα $\mathbf{x_j}^H$ και $\mathbf{b_j}^H$ στον επεξεργαστή P_j

enddo

else (βρισκόμαστε στη φάση ανόδου του V-κύκλου)

for $j = 1, ..., N$ **do in parallel**

$P_j \leftarrow \mathbf{x_j}^h = \mathbf{x_j}^h + \mathbf{prolongation}\{\mathbf{x}_j^H\}$

enddo

Παράλληλη Εξομάλυνση του συστήματος $A^h\mathbf{x}^h = \mathbf{b}^h$ υ_2 φορές

με αρχική εκτίμηση την $\mathbf{x}^h$

endif

for $j = 1, ..., N$ **do in parallel**

Αποθηκεύεται το διανύσμα $\mathbf{x_j}^h$ στον επεξεργαστή P_j

enddo

end

end

Συλλογή της λύσης $\mathbf{x}$ από όλους τους επεξεργαστές

Στην συνέχεια παρουσιάζονται ανλυτικά οι παράλληλοι αλγόριθμοι των διαδικασιών της παρεμβολής και της παρεκβολής το υπολογιστικό και επικοινωνιακό κόστος.

Restriction{ $\mathbf{b_j^h}$}

Διαδικασία Επικοινωνίας

for $j = 1, ..., N$ **do in parallel**

if $j = 1$ **then**

P_1 στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{b}^h_{ns+k}$ στον P_2 επεξεργαστή

elseif $j = N$ **then**

P_N στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{b}^h_{ns+(N-1)k+1}$ στον P_{N-1} επεξεργαστή

else

P_j στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{b}^h_{ns+(j-1)k+1}$ στον P_{j-1} επεξεργαστή

P_j στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{b}^h_{ns+jk}$ στον P_{j+1} επεξεργαστή

endif

enddo

Διαδικασία Υπολογισμού

for $j = 1, ..., N$ **do in parallel**

P_j υπολογίζει το $\mathbf{b}^H_j$

enddo

Prolongation$\{\, \mathbf{x_j^H} \}$

Διαδικασία Επικοινωνίας

for $j = 1, ..., N$ **do in parallel**

  if $j = 1$ **then**

    P_1 στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{x}_k^H$ στον P_2 επεξεργαστή

  elseif $j = N$ **then**

    P_N στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{x}_{(N-1)k+1}^H$ στον P_{N-1} επεξεργαστή

  else

    P_j στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{x}_{(j-1)k+1}^H$ στον P_{j-1} επεξεργαστή

    P_j στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{x}_{jk}^H$ στον P_{j+1} επεξεργαστή

  endif

enddo

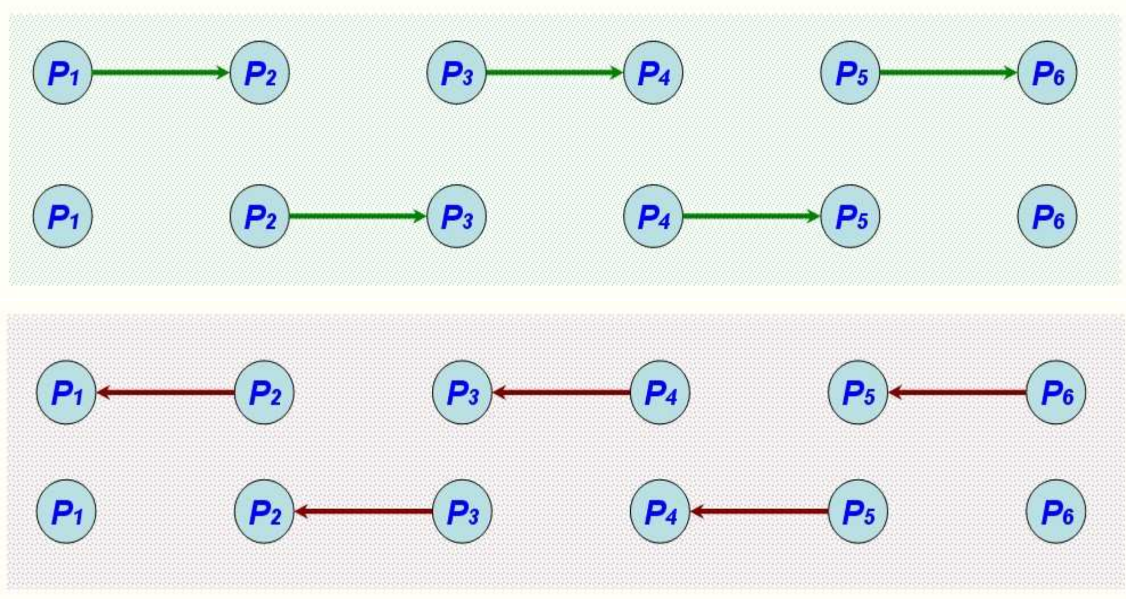
Διαδικασία Υπολογισμού

for $j = 1, ..., N$ **do in parallel**

  P_j υπολογίζει το $\mathbf{x}_j^h$

enddo

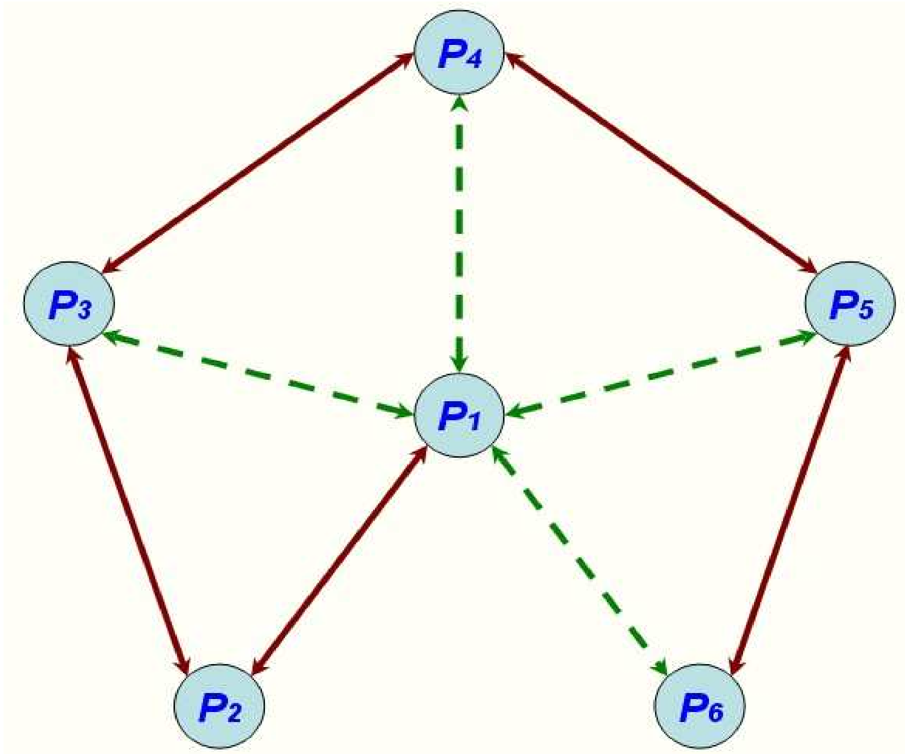
Σχετικά με τη διαδικασία της επικοινωνίας επειδή αυτή είναι αμφίδρομη ανάμεσα σε γειτονικούς επεξεργαστές, θα πραγματοποιηθεί σε τέσσερα βήματα όπως εμφανίζεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 4.5: Διαδικασία αμφίδρομης επικοινωνίας μεταξύ γειτονικών επεξεργαστών.

Αρχικά, οι περιττής αρίθμησης επεξεργαστές στέλνουν τα δεδομένα ανταλλαγής στους αντίστοιχους δεξιούς γειτονικούς επεξεργαστές τους. Στο επόμενο βήμα οι άρτιοι, στέλνουν τα δεδομένα στους αριστερούς γειτονικούς τους. Στην συνέχεια οι άρτιοι επεξεργαστές στέλνουν τα δεδομένα στους αριστερούς γειτονικούς τους. Τέλος, οι περιττοί επεξεργαστές στέλνουν τα δεδομένα στους αριστερούς γειτονικούς τους. Τονίζεται ότι σε κάθε βήμα επικοινωνίας, οι επεξεργαστές που λαμβάνουν δεδομένα βρίσκονται σε κατάσταση *λήψης* και όχι *αδράνειας*.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο τρόπος σύνδεσης των επεξεργαστών κατά το μεγαλύτερο μέρος του παράλληλου αλγορίθμου θα πρέπει να είναι σύνδεση σε σειρά (pipeline). Όμως υπάρχουν διαδικασίες οι οποίες απαιτούν την συλλογή πληροφοριών από έναν επεξεργαστή, όπως και την αποστολή πληροφοριών από έναν επεξεργαστή σε όλους του υπόλοιπους, δηλαδή επικοινωνία τύπου master-slave. Έτσι προκύπτει ανάγκη της άμεσης σύνδεσης του βασικού (master) επεξεργαστή με όλους τους άλλους (slaves). Άρα η συνολική αρχιτεκτονική σύνδεσης (Σχήμα 4.6) είναι συνδυασμός της σύνδεσης σε σειρά και του αστέρα (star).



Σχήμα 4.6: Αρχιτεκτονική τύπου Master-Slave διασύνδεσης σε σειρά/αστέρα.

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων της συμπεριφοράς του παραπάνω παράλληλου αλγορίθμου σε ένα δικτυακό υπολογιστικό σύστημα.

4.3 Υλοποίηση και μελέτη της συμπεριφοράς του παράλληλου αλγορίθμου της ΤΠΠ

Ο παράλληλος αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα υλοποιήθηκε σε ένα δυκτυακό υπολογιστικό σύστημα με τα παρακάτω τεχνικά χαρακτηριστικά:

- Αποτελείται από πολυεπεξεργαστικά συστήματα, τα οποία διαθέτουν τα ίδια ακριβώς τεχνικά χαρακτηριστικά.

- Το λογισμικό ανάπτυξης της εφαρμογής είναι η γλώσσα Fortran καθώς και το πρότυπο MPI.

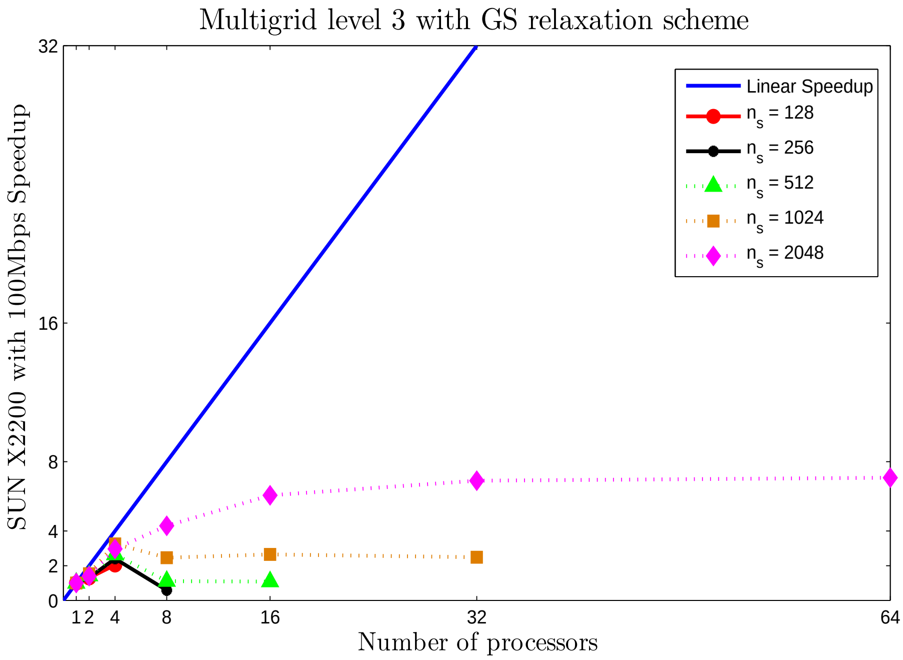
- Η διασύνδεση των κόμβων γίνεται με δίκτυο χαλκού τύπου ethernet μεταβλητής ταχύτητας.

Κάθε πολυεπεξεργαστικός κόμβος του συστήματος είναι τύπου SunFire X2200M2 [47] με δύο διαθέσιμους επεξεργαστές των δύο πυρήνων τύπου Opteron 2222@3.0Ghz, μνήμης L2 cache 1 MB ανά πυρήνα. Η συνολική μνήμη κάθε κόμβου είναι 4GB, ενώ το λειτουργικό τους σύστημα είναι το Solaris 10. Το λογισμικό ανάπτυξης της εφαρμογής είναι ο μεταγλωττιστής Fortran από το βελτιστοποιημένο γι'αυτή την αρχιτεκτονική πακέτο λογισμικού Sun Studio 12. Επίσης χρησιμοποιήθηκε το πρότυπο MPI και ειδικότερα η ελεύθερης χρήσης υλοποίηση του OpenMPI 1.2.5 [40]. Η διασύνδεση 16 υπολογιστικών κόμβων γίνεται με δίκτυο Ethernet μεταβλητής ταχύτητας 100 Mbps και 1 Gbps, τα οποία είναι τα πιο διαδεδομένα δίκτυα σήμερα.
Στα επαναληπτικά σχημάτα εξομάλυνσης Gauss-Seidel και Bi-CGSTAB με προρύθμιση GS χρησιμοποιήθηκαν οι αποδοτικοί παράλληλοι αλγόριθμοι τους, όπως παρουσιάστηκαν στις εργασίες [36, 37, 38, 39].
Χρησιμοποιήθηκε το πρώτο πρόβλημα δοκιμής (πδ1) για την εφαρμογή και μελέτη της συμπεριφοράς των παράλληλων αλγορίθμων στο παραπάνω δικτυακό υπολογιστικό σύστημα, αφού η συμπεριφορά του παράλληλου αλγορίθμου είναι ανεξάρτητη του προβλήματος δοκιμής.
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι έγινε χρήση έως και του μέγιστου αριθμού επεξεργαστών που επέτρεπε ή επίλυση του μικρότερου προβλήματος (στο πιο αραιό πλέγμα) στη βάση του V-κύκλου.
Ακολουθεί ο πίνακας T37, ο οποίος εμφανίζει τα αριθμητικά αποτελέσματα της παράλληλης

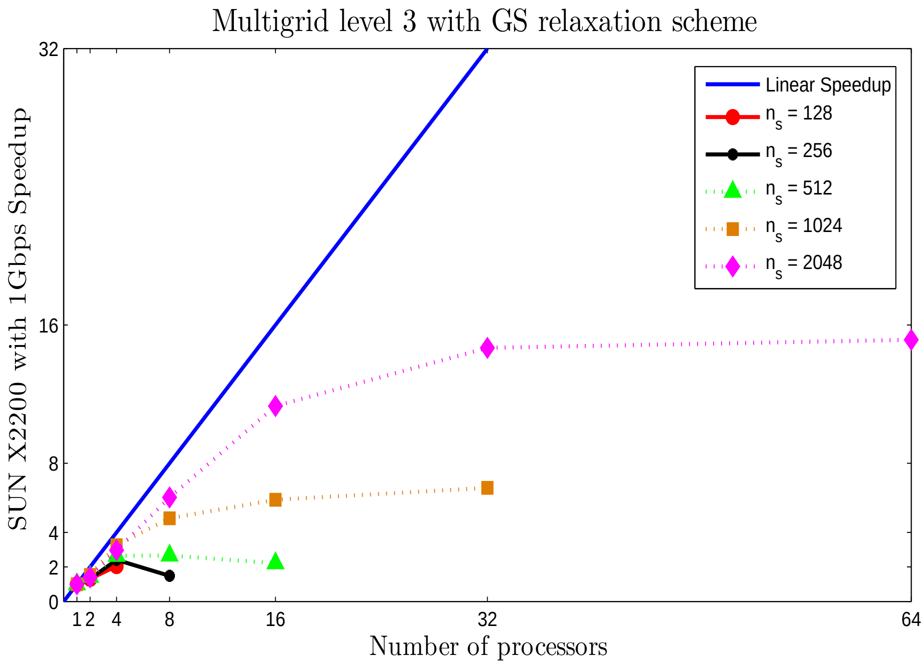
επίλυσης του πδ1 με την χρήση της ΤΠΠ τριών επιπέδων με σχήμα εξομάλυνσης τη μέθοδο GS για $\lambda = 1$ και διαφορετικές διαμερίσεις. Παρουσιάζονται αναλυτικά το πλήθος της διαμέρισης, το πλήθος των επεξεργαστών, οι μετρήσεις του χρόνου επικοινωνίας και του υπολογιστικού χρόνου επίλυσης, καθώς επίσης και ο συνολικός χρόνος επίλυσης στις περιπτώσεις που η διασύνδεση των επεξεργαστών γίνεται με δίκτυο Ethernet ταχύτητας 100 Mbps και 1 Gbps.

Τα ανάλογα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα T38 στην περίπτωση χρήσης της ΤΠΠ 5 επιπέδων.

T37	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 1$						**level=3**
		100Mbps			1Gbps		
n_s	Pcocs	Time	Tcomp	Tcomm	Time	Tcomp	Tcomm
128	1	0.342	0.342	-	0.342	0.342	-
	2	0.262	0.244	0.018	0.262	0.244	0.018
	4	0.167	0.135	0.032	0.167	0.135	0.032
256	1	2.437	2.437	-	2.437	2.437	-
	2	1.858	1.798	0.060	1.858	1.798	0.060
	4	1.011	0.899	0.112	1.011	0.899	0.112
	8	4.153	0.486	3.667	1.640	0.486	1.154
512	1	21.66	21.66	-	21.66	21.66	-
	2	15.18	14.91	0.266	15.18	14.91	0.266
	4	8.207	7.726	0.481	8.207	7.726	0.481
	8	19.49	3.988	15.50	8.132	3.988	4.144
	16	20.07	2.130	17.94	9.761	2.130	7.631
1024	1	281	281	-	281	281	-
	2	183	181	2.325	183	181	2.325
	4	86.29	83.65	2.636	86.29	83.65	2.636
	8	114	41.76	72	58.32	41.76	16.56
	16	106	22.14	84	47.72	22.14	25.58
	32	113	11.44	102	42.72	11.44	31.28
2048	1	4344	4344	-	4344	4344	-
	2	3108	3066	41.80	3108	3066	41.80
	4	1464	1424	39.65	1464	1424	39.65
	8	1011	611	400	722	611	111
	16	717	287	430	384	287	97.34
	32	629	142	487	296	142	154
	64	614	74.13	540	287	74.13	213



Σχήμα 4.7: Speedup της ΤΠΠ 3 επιπέδων με GS επιλυτή σε δίκτυο 100Mbps.

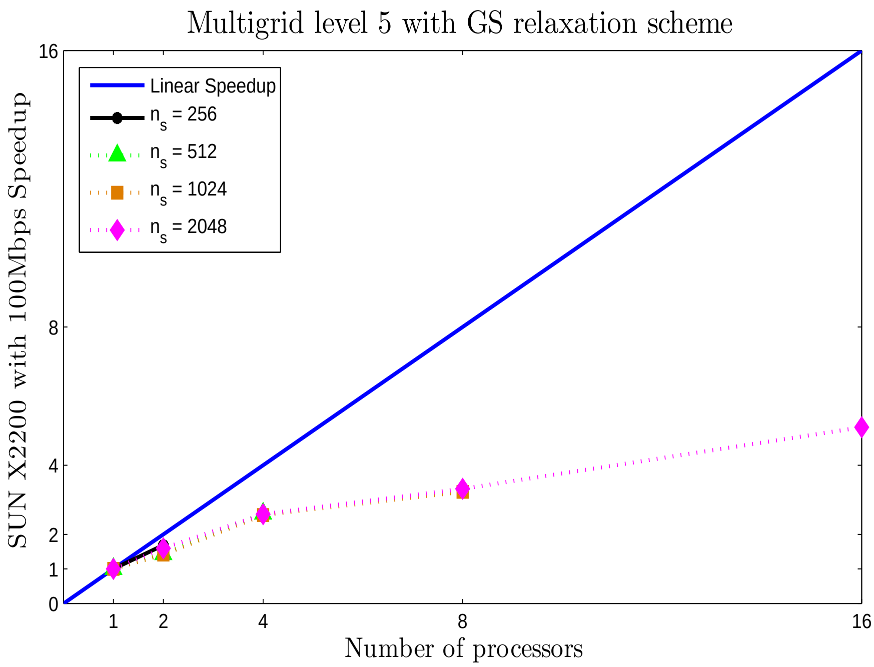


Σχήμα 4.8: Speedup της ΤΠΠ 3 επιπέδων με GS επιλυτή σε δίκτυο 1Gbps.

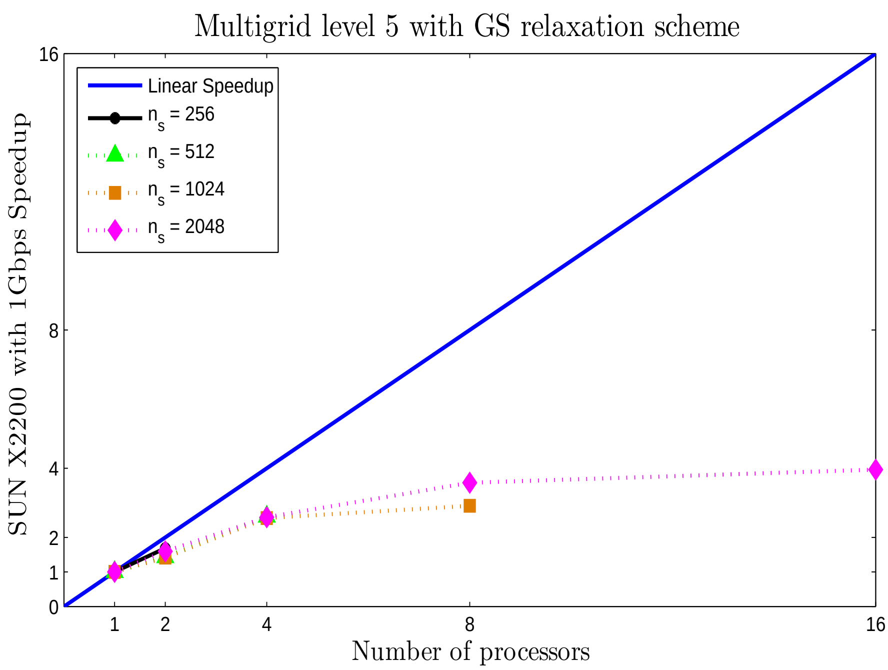
Τα Σχήματα 4.7 και 4.8 παρουσιάζουν τις γραφικές παραστάσεις του συντελεστή παράλληλης επιτάχυνσης ως συνάρτηση του αριθμού των χρησιμοποιούμενων επεξεργαστών για χρήση της ΤΠΠ τριών επιπέδων για διάφορες διαμερίσεις σε δίκτυα των 100Mbps και 1Gbps αντίστοιχα. Τονίζεται ότι ως επιλυτής σε κάθε επίπεδο χρησιμοποιήθηκε το GS επαναληπτικό σχήμα.

T38	Multigrid with Gauss-Seidel Smoother for $\lambda = 1$						**level=5**
		100Mbps			1Gbps		
n_s	Pcocs	Time	Tcomp	Tcomm	Time	Tcomp	Tcomm
256	1	1.106	1.106	-	1.106	1.106	-
	2	0.877	0.819	0.068	0.877	0.819	0.068
512	1	4.855	4.855	-	4.855	4.855	-
	2	3.427	3.341	0.086	3.427	3.341	0.086
	4	2.118	2.026	0.092	2.118	2.026	0.092
1024	1	20.58	20.58	-	20.58	20.58	-
	2	17.52	17.19	0.334	17.52	17.19	0.334
	4	9.275	8.902	0.373	9.275	8.902	0.373
	8	11.01	5.005	6.000	7.066	5.005	2.061
2048	1	97.38	97.38	-	97.38	97.38	-
	2	67.54	66.55	0.985	67.54	66.55	0.985
	4	42.72	41.53	1.191	42.72	41.53	1.191
	8	47.79	22.79	25.00	27.22	22.79	4.426
	16	39.79	13.15	26.64	24.58	13.15	11.43

Τις ανάλογες γραφικές παραστάσεις του συντελεστή επιτάχυσης για χρήση ΤΠΠ πέντε επιπέδων παρουσιάζουν τα Σχήματα 4.9 και 4.10.



Σχήμα 4.9: Speedup της ΤΠΠ 5 επιπέδων με GS επιλυτή σε δίκτυο 100Mbps.

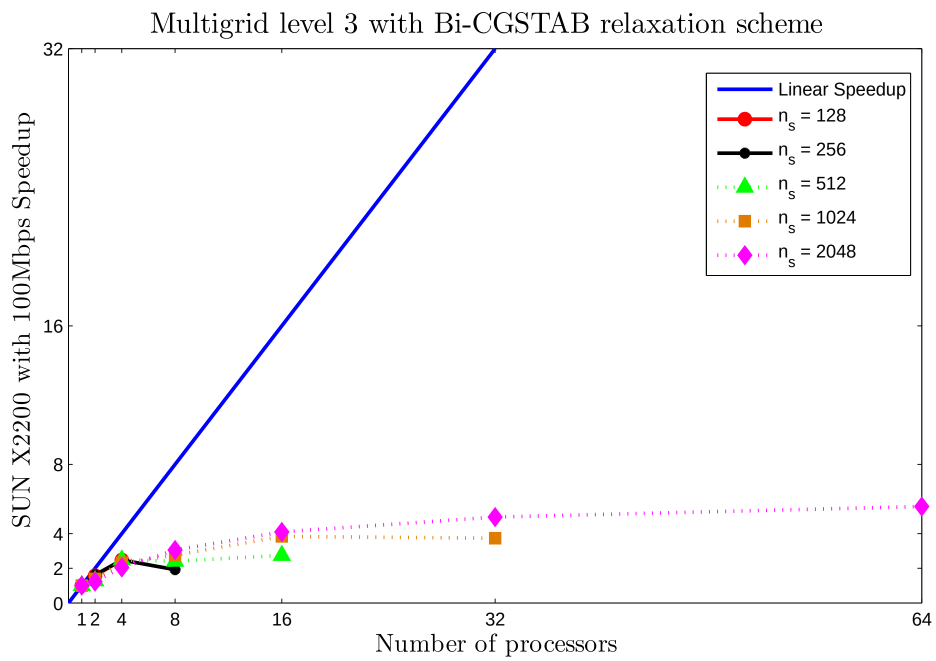


Σχήμα 4.10: Speedup της ΤΠΠ 5 επιπέδων με GS επιλυτή σε δίκτυο 1Gbps.

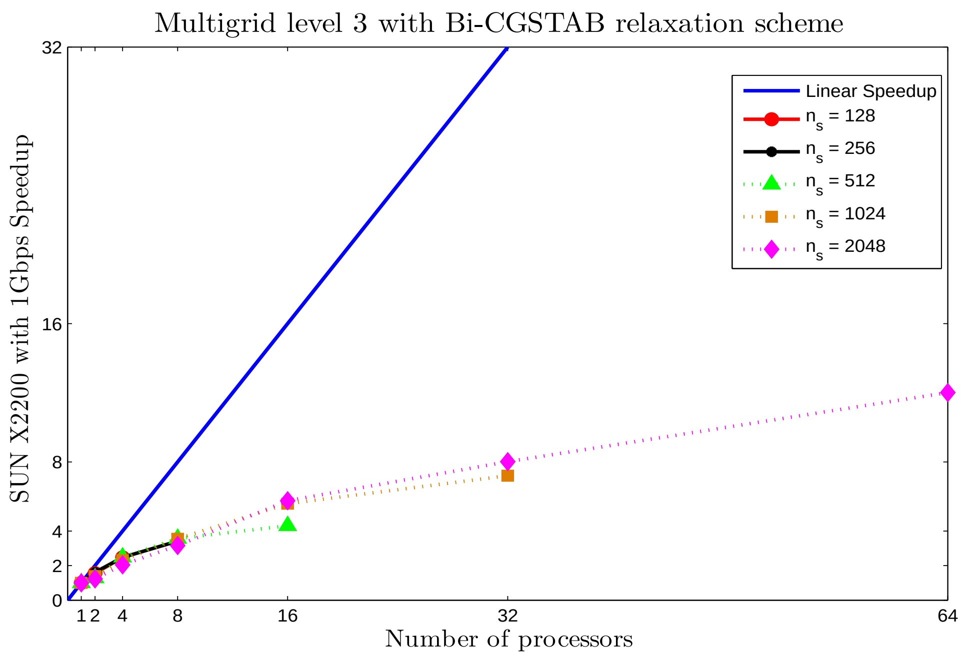
Στην συνέχεια, έγινε χρήση της ΤΠΠ 3 και 5 επιπέδων με σχήμα εξομάλυνσης τη μέθοδο Bi-CGSTAB με προρύθμιση GS. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν, παρουσιάζουν οι πίνακες T39 και T40.

T39	Multigrid with Preconditioned Bi-CGTAB Smoother for $\lambda = 1$						**level=3**
		100Mbps			1Gbps		
n_s	Pcocs	Time	Tcomp	Tcomm	Time	Tcomp	Tcomm
128	1	0.584	0.584	-	0.584	0.584	-
	2	0.373	0.360	0.013	0.373	0.360	0.013
	4	0.205	0.184	0.021	0.205	0.184	0.021
256	1	2.665	2.665	-	2.665	2.665	-
	2	1.649	1.614	0.035	1.649	1.614	0.035
	4	1.075	0.999	0.076	1.075	0.999	0.076
	8	1.388	0.448	0.940	0.779	0.448	0.331
512	1	11.44	11.44	-	11.44	11.44	-
	2	8.934	8.852	0.082	8.934	8.852	0.082
	4	4.610	4.405	0.205	4.610	4.405	0.205
	8	4.746	2.246	2.500	3.207	2.246	0.961
	16	4.161	1.361	2.800	2.657	1.361	1.296
1024	1	50.14	50.14	-	50.14	50.14	-
	2	36.01	35.51	0.498	36.01	35.51	0.498
	4	21.62	20.81	0.806	21.62	20.81	0.806
	8	18.20	10.68	7.520	14.11	10.68	3.425
	16	13.04	5.526	7.878	8.973	5.526	3.447
	32	13.42	3.393	10.03	6.966	3.393	3.568
2048	1	227	227	-	227	227	-
	2	184	181	2.529	184	181	2.529
	4	111	108	2.545	111	108	2.545
	8	74.36	53.76	20.60	71.73	53.76	17.97
	16	55.41	29.41	26.00	39.46	29.41	10.05
	32	45.79	15.68	30.11	28.33	15.68	12.65
	64	40.75	10.70	30.05	23.07	10.70	12.37

Οι γραφικές παραστάσεις των συντελεστών παράλληλης επιτάχυνσης σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές παρουσιάζονται στα σχήματα 4.11 και 4.12 που ακολουθούν. Σημειώνεται ότι επιλυτής σε κάθε επιπέδο είναι το επαναληπτικό σχήμα Bi-CGSTAB με προρύθμιση GS.



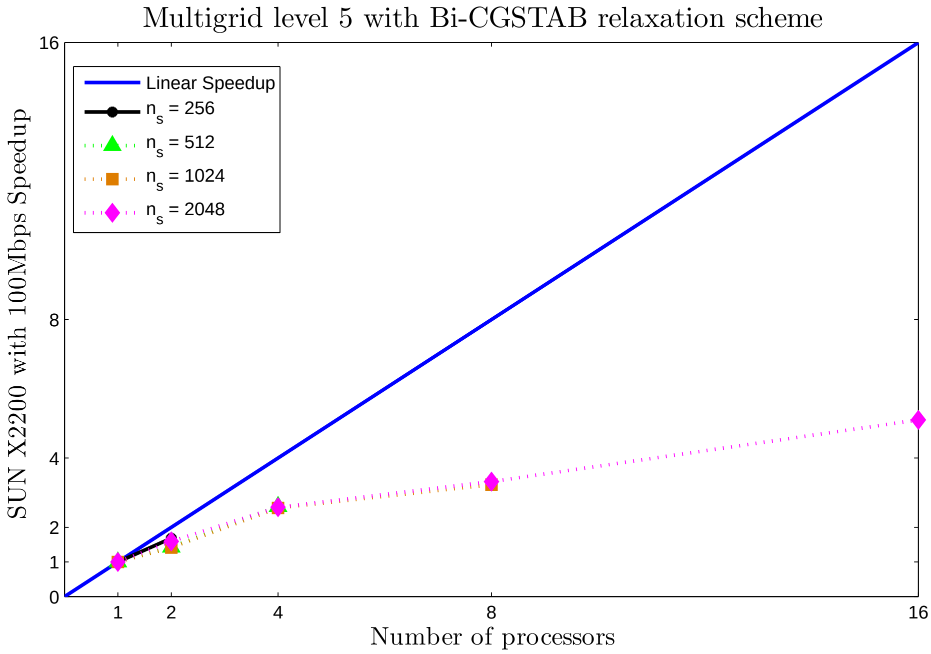
Σχήμα 4.11: Speedup της ΤΠΠ 3 επιπέδων με Bi-CGSTAB επιλυτή σε δίκτυο 100Mbps.



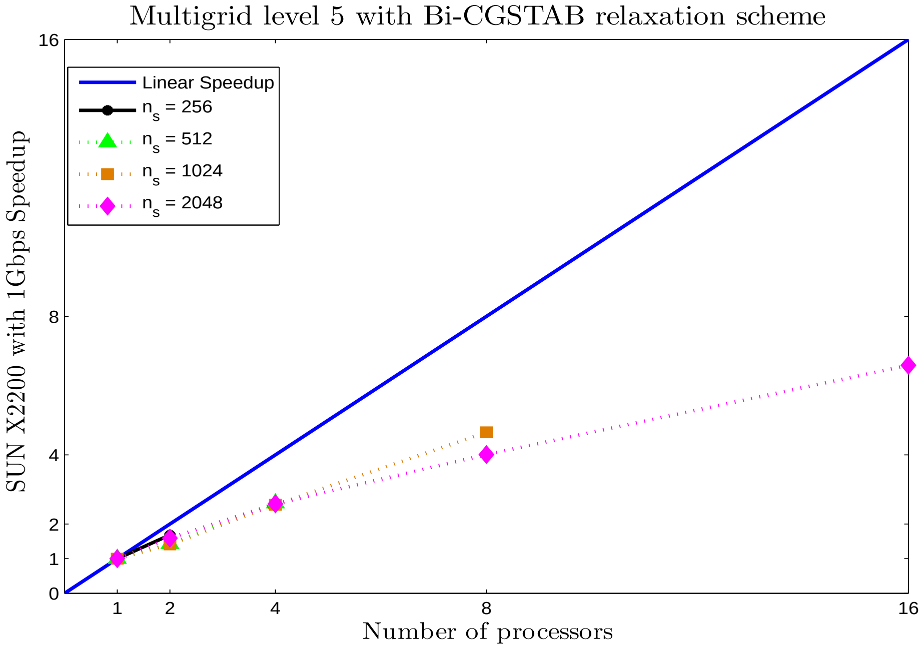
Σχήμα 4.12: Speedup της ΤΠΠ 3 επιπέδων με Bi-CGSTAB επιλυτή σε δίκτυο 1Gbps.

T40	Multigrid with Preconditioned Bi-CGTAB Smoother for $\lambda = 1$						**level=5**
		100Mbps			1Gbps		
n_s	Pcocs	Time	Tcomp	Tcomm	Time	Tcomp	Tcomm
256	1	2.629	2.629	-	2.629	2.629	-
	2	1.586	1.562	0.024	1.586	1.562	0.024
512	1	11.03	11.03	-	11.03	11.03	-
	2	8.391	8.331	0.060	8.391	8.331	0.060
	4	4.239	4.077	0.162	4.239	4.077	0.162
1024	1	45.69	45.69	-	45.69	45.69	-
	2	32.35	32.11	0.244	32.35	32.11	0.244
	4	17.87	17.50	0.374	17.87	17.50	0.374
	8	14.14	9.138	5.001	9.828	9.138	0.690
2048	1	188	188	-	188	188	-
	2	118	116	1.610	118	116	1.610
	4	72.82	70.89	1.932	72.82	70.89	1.932
	8	56.67	34.69	21.98	46.94	34.69	12.25
	16	36.86	20.86	16.00	28.55	20.86	7.693

Αν γίνει χρήση ΤΠΠ πέντε επιπέδων η συμπεριφορά των συντελεστών επιτάχυσης είναι αυτή όπως παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.13 και 4.14.

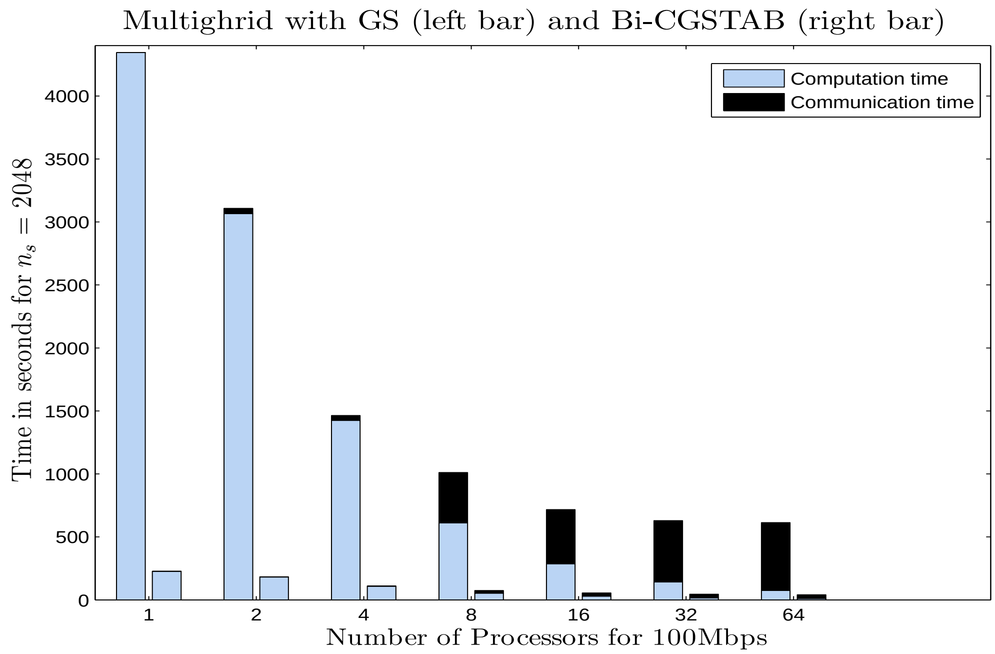


Σχήμα 4.13: Speedup της ΤΠΠ 5 επιπέδων με Bi-CGSTAB επιλυτή σε δίκτυο 100Mbps και 1Gbps.

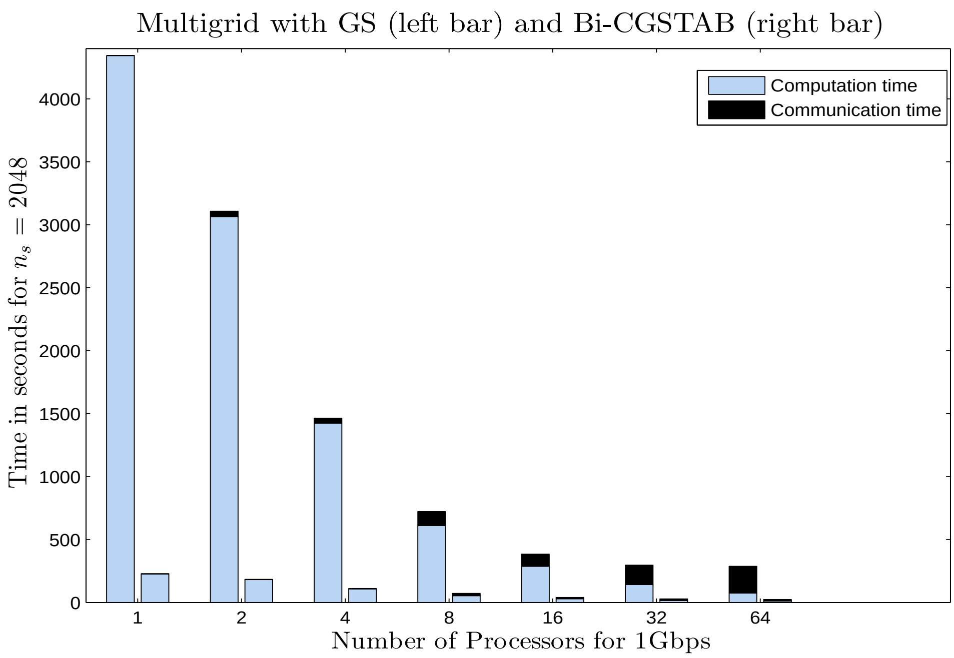


Σχήμα 4.14: Speedup της ΤΠΠ 5 επιπέδων με Bi-CGSTAB επιλυτή σε δίκτυο 100Mbps.

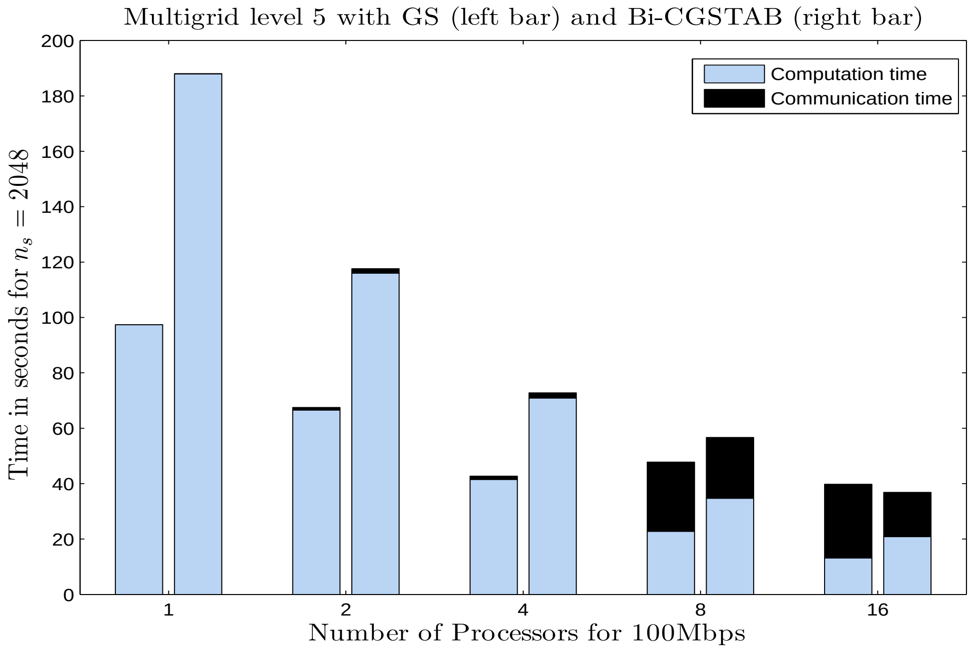
Τα παρακάτω σχήματα 4.15 μέχρι και 4.18 παρουσιάζουν το χρόνο εκτέλεσης των δυο παράλληλων αλγορίθμων σε μορφή ραβδογράμματος για τη περίπτωση 2048 πεπερασμένων στοιχείων σε κάθε χωρική διάσταση. Ειδικότερα τα δυο πρώτα εμφανίζουν τους χρόνους επικοινωνίας και υπολογισμού για μεταβλητό πλήθος επεξεργαστών κατά τη περίπτωση V-κύκλου τριών επιπέδων και για τις δυο ανάλογες επιλογές δικτύου. Αντίστοιχα τα δυο τελευταία γραφήματα παρουσιάζουν τη περίπτωση του V-κύκλου με πέντε επίπεδα.



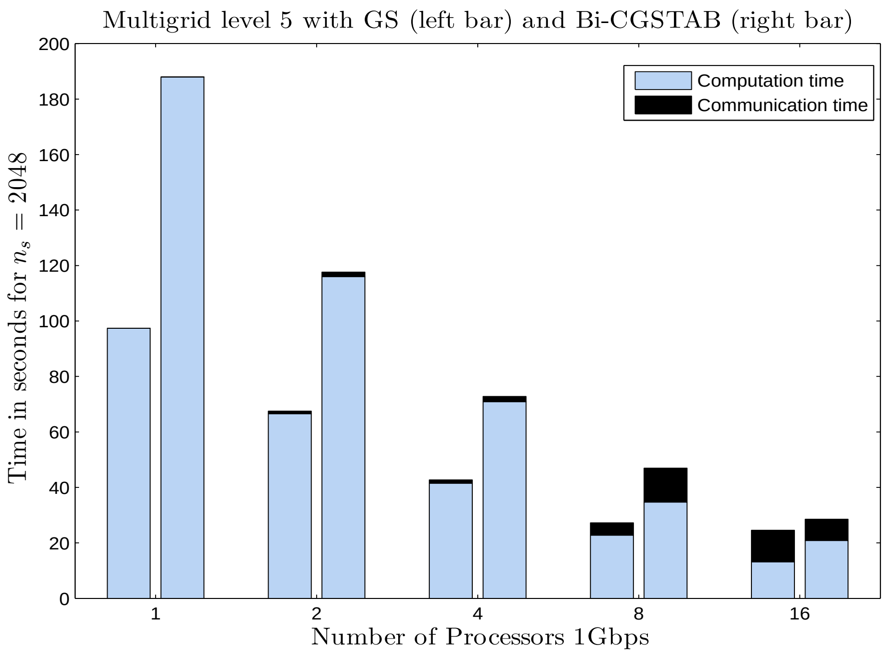
Σχήμα 4.15: Χρόνοι παράλληλης εκτέλεσης V-κύκλου τριών επιπέδων για δίκτυο 100Mbps.



Σχήμα 4.16: Χρόνοι παράλληλης εκτέλεσης V-κύκλου τριών επιπέδων για δίκτυο 1Gbps.



Σχήμα 4.17: Χρόνοι παράλληλης εκτέλεσης V-κύκλου πέντε επιπέδων για δίκτυο 100Mbps.



Σχήμα 4.18: Χρόνοι παράλληλης εκτέλεσης V-κύκλου πέντε επιπέδων για δίκτυο 1Gbps.

4.4 Σχολιασμός αριθμητικής μελέτης

Από την μέτρηση του χρόνου εκτέλεσης των παράλληλων υλοποιήσεων της ΤΠΠ με τη χρήση της μεθόδου εξομάλυνσης GS τριών και πέντε επιπέδων προκύπτει ότι υπάρχει ταχύτερη σύγκλιση με τη χρήση των πέντε επιπέδων, όπως άλλωστε και στη σειριακή περίπτωση. Αν και η χρήση της μεθόδου των τριών επιπέδων πρόσφερε τη δυνατότητα της χρήσης περισσότερων επεξεργαστών, παρόλαυτα σε όλες τις διαστάσεις του προβλήματος που μελετήθηκαν δεν σημειώθηκε μικρότερος συνολικός χρόνος παράλληλης εκτέλεσης. Από τις δύο ταχύτητες δικτύου μας προσφέρει μικρότερο χρόνο εκτέλεσης η επιλογή του ταχύτερου δικτύου, όπως άλλωστε αναμενόταν. Όμως η χρήση του δικτύου ταχύτητας 1Gbps δε μείωσε το χρόνο επικοινωνίας αναλογικά σε σχέση με τη ταχύτητα του, κάτα 10 φορές δηλαδή σύμφωνα με το δίκτυο των 100Mbps. Ο λόγος της μείωσης του χρόνου επικοινωνίας κατά το ήμισυ ή λίγο περισσότερο, οφείλεται και σε άλλους παράγοντες, όπως ο χρόνος απόκρισης των καρτών δικτύου και η ταχύτητα μεταφοράς των δεδομένων μεταξύ καρτών, επεξεργαστή και κεντρικής μνήμης του συστήματος.
Τα ίδια αποτελέσματα προέκυψαν και για τη περίπτωση της χρήσης της Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση για V-κύκλους τριών και πέντε επιπέδων, όσο αφορά τη συμπεριφορά του παράλληλου αλγορίθμου σχετικά με τη ταχύτητα του δικτύου.

Ακριβώς η αντίθετη παράλληλη συμπεριφορά εμφανίζεται κατά τη περίπτωση της Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση, όσο αφορά τα επίπεδα του V-κύκλου της ΤΠΠ. Έτσι ενώ ταχύτερη σύγκλιση εμφάνισε η παράλληλη έκδοση της GS για τα πέντε επίπεδα, στην περίπτωση της Bi-CGSTAB, η εφαρμογή τριών επιπέδων σε συνδυασμό με την αύξηση του επιτρεπόμενου αριθμού των επεξεργαστών, οδήγησε στην γρηγορότερη σύγκλιση.
Όσο αφορά την επιλογή της ταχύτερης μεθόδου εξομάλυνσης της ΤΠΠ για δικτυακές αρχιτεκτονικές επιστημονικών υπολογισμών θα πρέπει να ληφθούν τρεις βασικοί παράγοντες υπόψη. Ο πρώτος αφορά το μέγεθος του προβλήματος. Έτσι προβλήματα διακριτοποίησης με περισσότερα από 64 πεπερασμένα στοιχεία σε κάθε χωρική διάσταση λύνονται αποδοτικότερα σ'αυτή τη παράλληλη αρχιτεκτονική. Ο δεύτερος παράγοντας

αφορά τη ταχύτητα διασύνδεσης των υπολογιστικών κόμβων. Η αριθμητική μελέτη της συμπεριφοράς των παράλληλων αλγορίθμων που παρουσιάστηκαν έδειξε ότι για χαμηλής ταχύτητας δίκτυα, όπως αυτό των 100Mbps, ταχύτερη σύγκλιση εμφανίστηκε για χρήση της GS με μικρότερο πλήθος υπολογιστικών κόμβων. Αντίθετα για την περίπτωση δικτύου υψηλών ταχυτήτων και διαθεσιμότητας αρκετών επεξεργαστών η μέθοδος Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση εμφάνισε μία ελαφριά υπεροχή στο χρόνο σύγκλισης, η οποία αυξάνει, όσο αυξάνει το μέγεθος του προβλήματος.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί η σχετικά φτωχή επιτάχυνση που εμφανίζουν και οι δύο μέθοδοι εξομάλυνσης. Αυτό δικαιολογείται από το μικρό υπολογιστικό κόστος της μεθόδου, αλλά και από τη συνεχή αλλαγή του μεγέθους του προβλήματος με τη ταυτόχρονη χρήση του ίδιου πλήθους των επεξεργαστών. Δηλαδή σε κάθε επίπεδο V-κύκλου εκτελούνται μόνο δύο επαναληπτικά βήματα και στη συνέχεια θα πρέπει να αυξηθεί ή να μειωθεί το μέγεθος του προβλήματος ανάλογα με το γεγονός αν βρισκόμαστε στη φάση καθόδου ή ανόδου του V-κύκλου.

Μία αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού αποτελεί η βελτιστοποίηση μεγέθους προβλήματος και πλήθους επεξεργαστών. Έτσι ο βέλτιστος αριθμός επεξεργαστών θα υλοποιούσε μόνο τα δύο βήματα της μεθόδου εξομάλυνσης καθώς και τις υπόλοιπες διαδικασίες της ΤΠΠ σε κάθε επίπεδο του V-κύκλου. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε τέτοιο επίπεδο θα έπρεπε να υπάρχει επιπρόσθετη μεταφορά των απαραίτητων δεδομένων στους συγκεκτιμένους επεξεργαστές. Δηλαδή επεπλέον κόστος επικοινωνίας το οποίο, όπως έδειξαν οι μετρήσεις του ανάλογου παράλληλου αλγορίθμου, δεν επέτρεπε την επιτάχυνση της μεθόδου έναντι της σειριακής υλοποίησης της. Γι'αυτό φαίνεται ότι με τη παρούσα απεικόνιση των δεδομένων στους επεξεργαστές, καλύτερη επιλογή αποτελεί η διατήρηση ίδιου πλήθους επεξεργαστών σε όλα τα επίπεδα των V-κύκλων.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Σε αυτή τη διατριβή έγινε για πρώτη φορά εφαρμογή της γεωμετρικής ΤΠΠ στην αριθμητική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Collocation με συναρτήσεις βάσης τα κυβικά πολυώνυμα Hermite για την επίλυση ΠΣΤ ελλειπτικού τύπου. Ως αριθμητικά σχήματα εξομάλυνσης χρησιμοποιήθηκαν οι αποδοτικότερες μέθοδοι επίλυσης του παραγόμενου γραμμικού συστήματος εξισώσεων, οι οποίες εμφανίζονται στη σημερινή βιβλιογραφία. Αυτή είναι η GS καθώς και η Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση.

Στην συνέχεια παρουσιάστηκε η κατασκευή παράλληλων αλγορίθμων της ΤΠΠ και για τα δύο αυτά αριθμητικά σχήματα, καθώς και η υλοποίηση με την αντίστοιχη μελέτη της συμπεριφοράς των αλγορίθμων για δικτυακές αρχιτεκτονικές επιστημονικών υπολογισμών.

Η εφαρμογή της ΤΠΠ σε τρία διαφορετικού τύπου προβλήματα δοκιμών βασισμένα στο τροποποιημένο ΠΣΤ Helmholtz σε σειριακό υπολογιστικό περιβάλλον και στην συνέχεια του πδ1 σε ένα δικτυακό οδήγησε στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η εφαρμογή της ΤΠΠ οδηγεί σε σημαντικά ταχύτερη επίλυση του γραμμικού συστήματος εξισώσεων, αλλά και σε καλύτερη ποιοτικά προσέγγιση της λύσης του, σε σχέση με τη χρήση των κλασσικών αποδοτικότερων μεθόδων GS και Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση

- Η επίλυση του προβλήματος της βάσης του V-κύκλου βασισμένο στο πιο αραιό πλέγμα, καθορίζει την καταλληλότερη μέθοδο εξομάλυνσης. Έτσι αν αυτό βασίζεται σε πλήθος πεπερασμένων στοιχείων της τάξης των 8,16 ή 32 για κάθε χωρική διάσταση, τότε η GS ως μέθοδος εξομάλυνσης προσφέρει ταχύτερη σύγκλιση, διαφορετικά υπάρχει υπεροχή της Bi-CGSTAB.

- Η χρήση δικτυακών υπολογιστικών συστημάτων προσφέρει ακόμα γρηγορότερη σύγκλιση με την υλοποίηση των δύο παράλληλων αλγορίθμων της ΤΠΠ που κατασκευάστηκαν για προβλήματα διακριτοποίησης άνω των 65 χιλιάδων αγνώστων ή για 128 πεπερασμένα στοιχεία σε κάθε χωρική διάσταση.

- Αποδοτικότερη μέθοδος εξομάλυνσης της ΤΠΠ μπορεί να είναι η GS ή η Bi-CGSTAB με GS προρύθμιση ανάλογα με τη ταχύτητα δικτύου, το πλήθος των επεξεργαστών καθώς και το μέγεθος του προβλήματος. Έτσι για δίκτυα ταχυτήτων gigabit, προβλήματα με τουλάχιστον 260 χιλιάδες αγνώστους ή 256 πεπερασμενα στοιχεία σε κάθε χωρική διάσταση και διαθεσιμότητα τουλάχιστον 8 για $n_s = 256$, 16 για $n_s = 512$, 32 για $n_s = 1024$ και 64 επεξεργαστές για $n_s = 1024$, η μέθοδος Bi-CGSTAB με τρία επίπεδα V-κύκλου είναι αποδοτικότερη της GS.

Τα παραπάνω γενικά συμπεράσματα της εφαρμογής της ΤΠΠ στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Collocation δημιουργούν την εντύπωση ότι για την ρεαλιστική επίλυση ΠΣΤ η ΤΠΠ αποτελεί άριστη επιλογή είτε για σειριακά, είτε για παράλληλα υπολογιστικά περιβάλλοντα διανεμημένης μνήμης.
Γι'αυτό άλλωστε έγινε εφικτή η σειριακή επίλυση προβλήματος 17 εκατομμυρίων αγνώστων σε 1.5 λεπτό, ενώ ο παράλληλος προσδιορισμός τους χρειάστηκε περίπου 24 δευτερόλεπτα και 64 επεξεργαστές σε gigabit δίκτυο.

Βιβλιογραφία

[1] M. Adams, M. Brezina, J. Hu and R. Tuminaro "Parallel Multigrid smoothing: Polynomial versus Gauss-Seidel", *J. Comp. Physics* 188, pp. 593-610, 2003.

[2] 0. Axelsson and A. Barker, "Finite element solution of boundary value problems". *Theory and computation*, Academic Press, Orlando, Fl., 1984.

[3] N.S. Bakhvalov, "On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator", U.S.S.R. *Computation Mathematics and Mathematical Physics*, 6(1966), pp. 101-135.

[4] G. Birkiff, M. H. Schultz and R. S. Varga, "Piecewise Hermite in one and two Variables with Applications to Partial Differential Equations", *Numer. Math.* 11, 232-256, 1968.

[5] C. de Boor and Swartz, "Collocation at Gaussian Points", *SIAM J. Numer. Anal.* 10, 582-606, 1973.

[6] J. H. Bramble, "Multigrid Methods", vol. 294, *Pitman Research Notes in Mathematical Sciences*, Longman Scientific and Technical, Essex, England, 1993.

[7] A. Brandt, "Multi-level adaptive technique (MLAT) for fast numerical solutions to boundary problems, in Proceedings of the 3rd International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics", Paris, 1972. H.Cabannes and R.Temam,eds., Springer-Verlag, Berlin, 1973,pp. 82-89.

[8] A. Brandt, "Multi-level adaptive solutions to boundary value problems", *Mathematics of Computation*, 31 (1977),pp.333-390.

[9] A. Brandt, "A guide to multigrid development", *in Multigrid Methods*, W.Hackbusch and U. Trottenberg, eds.,Springer Verlag, Berlin,1982,pp. 220-312.

[10] A. Brandt, "Algebraic multigrid theory: The symmetric case", *Applied Mathematics and Computation*,19 (1986),pp.23-56.

[11] A. Brandt, S.F.McCormilk, and J.Ruge,"Algebraic multigrid (AMG) for sparse matrix equations", *in Sparsity and Its Applications*, D.J.Evans, ed.,Cambridge University Press,Cambridge, 1984, pp. 257-284.

[12] W. L. Briggs, V. E. Henson, and S. F. McCormilk, "A Multigrid Tutorial", SIAM, Philadelphia, 2000 . Second edition.

[13] S. H. Brill and G. F. Pinder, "Parallel implementation of the Bi-CGSTAB method with Block Red-Black Gauss-Seidel preconditioner applied to the Hermite Collocation discretization of partial differetial equations", *Parallel Computing*, vol. 28, pp. 399-414, 2002.

[14] C. C. Christara, "Parallel solvers for spline collocation equations", *Advances in Eng. Software*, vol. 27, pp.71-89, 1996.

[15] C. C. Christara and B. Smith, "Multigrid and Multilevel Methods for Quadratic Spline Collocation", *BIT*, vol. 37 (4), pp.781-803, 1997.

[16] A. Delis and E. Mathioudakis, "A Finite Volume Method Parallelization for the Simulation of Free Surface Shallow Water Flows", submitted *Maths and Computers in Simulation*, 2008.

[17] J. Dongarra, I. Foster, G. Fox, W. Gropp, K. Kennedy, L. Toczon and A. White, *SourceBook of Parallel Computing*, San Francisco,CA: Morgan Kaufmann Publishers, 2003.

[18] J. Douglas and T. Dupont, "Collocation Methods for Parabolic Equations in a Single Space Variable", *Springer-Verlag Lecture Notes 385*, Berlin/New York,1974.

[19] R. P. Fedorenko, "A relaxation method for solving elliptic difference equations", U.S.S.R. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1 (1962),pp. 1092-1096.

[20] R. P. Fedorenko, "The speed of convergence of one iterative process", U.S.S.R. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4 (1964),pp. 227-235.

[21] W. Hackbusch and U. Trottenberg, "Multigrid Methods", vol. 960, *Lecture Notes in Mathematics*, Spinger-Verlag, Berlin, 1982.

[22] W. Hackbusch, "Multi-Grid Methods and Applications",Vol. 4, Springer Series *in Computational Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin,1985.

[23] W. Hackbusch, "Iterative Solution of Parge Linear Systems of Equations", Springer-Verlag, New-york ,1994.

[24] A. Hadjidimos, T.S. Papatheodorou and Y. G. Saridakis, "Optimal Block Iterative Schemes for Certain Large Sparse and Non-symmetric Linear Systems", *Linear Algebra Appl.*, 110, 285-318, 1988.

[25] L. A. Hageman and D. M. Young, " Applied Iterative Methods", *Academic Press*, New York, 1981.

[26] E. N. Houstis, "Application of the method of Collocation on Lines for Solving Nonlinear Hyperbolic Problems",*Math. Comp.* 31, 443 - 456, 1977.

[27] E. N. Houstis, R. E. Lynch, T. S. Papatheodorou and J. R. Rice, "Evaluation of Numerical Methods for Elliptic Partial Differential Equations", *J Comp. Phys.* 27, 323 - 350, 1978.

[28] E. N. Houstis, W. Mitchell, J. R. Rice, "Collocation Software for Second Order Elliptic Partial Differential Equations", *ACM Trans. Math. Software* 11, 379-412, 1985.

[29] C. E. Houstis, E. N. Houstis and J.R. Rice, "Partitioning PDE Computations: Methods and Performance Evaluation", *Parallel Computing*, vol. 5, pp. 141-163, 1997.

[30] D. Jespersen, "Multigrid methods for partial differential equations", *in Studies in Numerical Analysis*, vol. 24, Studies of Mathematics, MAA, Washington D.C., 1984, pp. 270-318.

[31] Yu-Lin Lai, A. Hadjidimos, E. N. Houstis and J. R. Rice, "On the iterative solution of Hermite Collocation Equations", *SIAM J Mat. Analysics*, vol. 16 (1), pp. 254-277, 1995.

[32] S.F McCormick, ed., "Multigrid Methods", SIAM Philadelphia, 1987.

[33] S. F. McCormick, "Multilevel Adaptive Methods for Partial Differenrial Equations", vol. 6, *Fronties in Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia, 1989.

[34] S. F. McCormick, "Multilevel Projection Methods for Partial Differential Equations", vol 62, *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[35] E. N. Mathioudakis, E. P. Papadopoulou and Y. G. Saridakis, " Mapping Parallel Iterative Algorithms for PDE Computations on a Distributed Memory Computers", *Parallel Algorithms and Applications* , 8, pp. 141-154,1996.

[36] E. N. Mathioudakis, E. P. Papadopoulou and Y. G. Saridakis, "Bi-CGSTAB for collocation equations on distributed memory parallel computers" , *Numerical Mathematics and advanced applications - ENUMATH 2001*, pp. 957-966, 2003.

[37] E. N. Mathioudakis, E. P. Papadopoulou and Y. G. Saridakis, "Iterative Solution of Elliptic Collocation Systems on a Cognitive Parallel Computer", *Computers and Mathematics with applications*, vol. 48, pp. 951-970, 2004.

[38] E. N. Mathioudakis and E. P. Papadopoulou, "MPI Managment of Hermite Collocation computation on a Distributed-Shared memory system", *WSEAS Trans. on Mathematics*, vol. 5, no. 5, pp. 520-525, May 2006.

[39] E. N. Mathioudakis and E. P. Papadopoulou, "Grid computing for Bi-CGSTAB applied to the solution of modified Helmholtz equation", *INt. J. Applied Maths and comp. sciences*, vol. 4, no. 3, pp. 179-184, 2007.

[40] Open Message Passing Interface (OpenMPI) web page, *http://www.open-mpi.org.*

[41] T.S. Papatheodorou, "Inverses for a Class of Banded Matrices and Applications to Piecewise Cubic Approximation", *J. Comp. Appl. Math.* 8 (4), 285-288, 1982.

[42] T.S. Papatheodorou, "Block AOR Iteration for Nonsymmetric Matrices" , *Math. Comp. 41 (164)*, 511-525, 1983.

[43] T.S.Papatheodorou and Y.G.Saridakis, "Parallel Algorithms and Architectures for Multisplitting Iterative methods", *Pa- rallel Computing*, vol. 12, pp. 171-182, 1989.

[44] A. Ruge and K. Stüben, "Algebraic multigrid", in Multigrid Method, S.McCormick, ed., *Frontiers in Applied Mathematics*, Vol 3, SIAM, Philadelphia, 1987, CH.4.

[45] Y. Saad, "Iterative Methods for sparse linear systems", SIAM, 2003.

[46] V. V. Shaidurov, "Multigrid Methods for Finite Elements", vol. 318, Mathematics and Its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1995.

[47] SUN V240z server web page, *http://www.sun.com/servers/ entry/v240.*

[48] U. Trottenberg, C. Oosterlee, and A. Schüller, "Multigrid", Academic Press, New-York, 2001.

[49] D.M. Young, "Iterative Solution of Large Linear Systems", *Academic Press*, New York, 1981

[50] R.S. Varga, "Matrix Iterative Analysis",*Prentice Hall*, Englewood Cliffs, NJ, 1962

[51] H. A. van der Vorst, "Bi-CGSTAB : A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems", *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, vol. 13, pp. 631-644, 1992.

[52] P. Wesseling, "An Itroduction to Multigrid Methods", J. Wiley and Sons, Chichester, U.K., 1992.

[53] Jun Zhang, "Multigrid Method and fourth order compact difference scheme for 2D Poisson equation with unequal meshsize discretization", J. Comp. Physics., 179, pp. 170-179, 2002.