ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα:
Οργάνωση και Διοίκηση

Εκτίμηση της διαχρονικής αξίας του πελάτη με χρήση αλυσίδων Markov

Διατριβή που υπεβλήθη για τη μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης.

Υπό: Γεώργιο Καράκη

Χανιά 2009

©Copyright υπό Γεώργιο Καράκη, 2009

Η διατριβή του Καράκη Γεώργιου, εγκρίνεται:

κ. Γρηγορούδης Ευάγγελος
Επίκουρος Καθηγητής, Επιβλέπων _____

κ. Κουικόγλου Βασίλης
Καθηγητής _____

κ. Ματσατσίνης Νικόλαος
Καθηγητής _____

Αφιερωμένο:

Στους γονείς μου, την αδερφούλα μου και όλους όσους μπόρεσαν να με εμπνεύσουν στα δύσκολα.

Εισαγωγή σελ. 1

Κεφάλαιο 1ο
Οι αλυσίδες Μαρκόφ και η ενσωμάτωση τους σε CLV

1.1 Εισαγωγή σελ. 6
1.2 Ο μηχανισμός των συστημάτων MCM σελ. 6
1.3 Αναλύοντας μία Μαρκοβιανή αλυσίδα σελ. 11
1.4 Τα βασικά είδη αλυσίδων Markov σελ. 17
1.4.1 Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου σελ. 18
1.4.2 Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου σελ. 18
1.5 Ιδιότητες αλυσίδων Markov σελ. 19
1.5.1 Η *«Αμείωτη»* αλυσίδα σελ. 19
1.5.2 Η *«Απορροφητική»* αλυσίδα σελ. 22
1.5.3 Η *«Περιοδική»* αλυσίδα σελ. 24
1.5.4 Η *«Επαναληπτική»* αλυσίδα σελ. 26
1.5.1 Συνοψίζοντας σελ. 29
1.6 Αναλύοντας ένα πολύπλοκο σύστημα Markov σελ. 30
1.7 Το δείγμα εκμάθησης στα Μαρκοβιανά συστήματα σελ. 38

Κεφάλαιο2ο
Ο χώρος του Μάρκετινγκ και το CLV

2.1 Εισαγωγή σελ. 43
2.2 Ορισμός της CLV σελ. 44
2.3 Οι διαστάσεις του CLV σελ. 46
2.3.1 Η Αξία της Συναλλαγής σελ. 47
2.3.1.α Η Συχνότητα σελ. 47
2.3.1.β Το Μέγεθος της Συναλλαγής σελ. 48
2.3.1.γ Το Ποσοστό «Φύρας» - Απώλειας Πελατών σελ. 48
2.3.2 Η Αξία του Δικτύου σελ. 49
2.4 Τα οφέλη του CLV σελ. 50
2.5 Μέθοδοι αποτίμησης της CLV σελ. 52
2.5.1 Ένα τυπικό μοντέλο CLV σελ. 53
2.5.2 Τα μοντέλα RFM σελ. 54
2.5.3 Πιθανοθεωρητικά Μοντέλα (Probability models) σελ. 55
2.5.4 Οικονομετρικά μοντέλα (Econometric models) σελ. 56
2.5.5 Επίμονα μοντέλα (Persistence models) σελ. 56

2.5.6 Μοντέλα Επιστήμης Υπολογιστών (Computer Science models) σελ. 57
2.5.7 Μοντέλα Διάχυσης/ Ανάπτυξης (Diffusion/ Growth models) σελ. 57
2.6 Εφαρμόζοντας το CLV σελ. 58
2.7 Διακρίνοντας πελάτες και ενέργειες Marketing κατά CLV σελ. 59

Κεφάλαιο 3ο
Το μοντέλο εφαρμογής
3.1 Εισαγωγή σελ. 63
3.2 Οι βασικοί παράγοντες της καταναλωτικής συμπεριφοράς και ο τρόπος «λειτουργίας» τους σελ. 64
3.2.1 «Προσφατότητα» - Recency σελ. 65
3.2.2 Συχνότητα αγορών – Frequency σελ. 67
3.2.3 Νομισματική αξία – Monetary σελ. 68
3.3 Προβλήματα που συνοδεύουν την ανάλυση των συμπεριφορικών μεταβλητών σελ. 69
3.4 Η συμπεριφορική παράμετρος της Ικανοποίησης (Satisfaction) σελ. 71
3.5 Το σχεσιακό σύνολο του μοντέλου σελ. 79
3.6 Οι παράγοντες σύνθεσης των σεναρίων σελ. 81
3.6.1 Δομή αγοράς σελ. 81
3.6.1.α Οι αγορές με **χαμηλό βαθμό διαφοροποίησης** σελ. 83
3.6.1.β Οι αγορές με **υψηλό βαθμό διαφοροποίησης** σελ. 86
3.6.2 Είδος αγαθού σελ. 88
3.6.2.α Τα **καταναλωτικά αγαθά (perishable goods)** σελ. 90
3.6.2.β Τα **διαρκή αγαθά (durable goods)** σελ. 90

Κεφάλαιο 4ο
Σχεδίαση εφαρμογής
4.1 Οι πίνακες μετάβασης σελ. 92
4.2 Κατασκευή των επιμέρους πινάκων μετάβασης (P) σελ. 93
4.2.1 Υποθέσεις σεναρίων σελ. 94
4.2.1.α Βασικές υποθέσεις σεναρίων σελ. 94
4.2.1.β Υποθέσεις Σενάριο 1ο: Χαμηλά διαφοροποιημένα καταναλωτικά αγαθά σελ. 97
4.2.1.γ Υποθέσεις Σενάριο 2ο: Υψηλά διαφοροποιημένα καταναλωτικά αγαθά σελ. 99
4.2.1.δ Υποθέσεις Σενάριο 3ο: Χαμηλά διαφοροποιημένα διαρκή αγαθά σελ. 101

4.2.1.ε **Υποθέσεις Σενάριο 4ο: Υψηλά διαφοροποιημένα διαρκή αγαθά** σελ. 102
4.2.2 **Σχεδίαση του πίνακα μετάβασης** σελ. 103
4.2.2.α **Η κωδικοποίηση των στοιχείων των πινάκων** σελ. 104
4.2.2.β **Η επιλογή της κατανομής** σελ. 105
4.2.2.γ **Ο «ενδιάμεσος» πίνακας μετάβασης** σελ. 108
4.2.2.δ **Τα αλγοριθμικά βήματα** σελ. 109
4.2.2.ε **Η προσθήκη της ικανοποίησης στον ενδιάμεσο πίνακα μετάβασης** σελ. 111
4.3 **Σχεδίαση του διανύσματος επιβράβευσης (R)** σελ. 114
4.3.1 **Η δομή του διανύσματος επιβράβευσης** σελ. 114
4.3.2 **Η κατασκευή του διανύσματος επιβράβευσης** σελ. 115
4.4 **Το προεξοφλητικό επιτόκιο (d)** σελ. 118
4.4.1 **Το προεξοφλητικό επιτόκιο εντός της εφαρμογής** σελ. 119
4.4.2 **Προσδιορίζοντας το d εναλλακτικά** σελ. 120
4.5 **Υπολογίζοντας την CLV** σελ. 122

Κεφάλαιο 5ο
Αποτελέσματα

5.1 **Διαχρονική εξέλιξη μεγεθών** σελ. 125
5.1.1 **Διαχρονική εξέλιξη της μέσης πιθανότητας απορρόφησης** σελ. 125
5.1.2 **Διαχρονική εξέλιξη της αναμενόμενης CLV του πελάτη** σελ. 128
5.2 **Οι καταστάσεις εκκίνησης** σελ. 130
5.2.1 **Το διάνυσμα εκκίνησης** σελ. 130
5.2.2 **Χρόνοι απορρόφησης** σελ. 132
5.2.3 **Αναμενόμενη Διαχρονική αξία** σελ. 135
5.2.4 **Άριστοι χρόνοι διακοπής πελατειακής σχέσης** σελ. 139
5.2.5 **Άριστη αναμενόμενη διαχρονική αξία** σελ. 142
5.3 **Συμπεράσματα** σελ. 143
5.4 **Μελλοντικοί στόχοι** σελ. 144

Βιβλιογραφία σελ. 149

Παράρτημα σελ. 159

Ευχαριστήρια

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω πρωτίστως τους γονείς μου *Μανώλη και Δέσποινα*, καθώς υπέμειναν όλον αυτόν τον καιρό το προσωπικό μου κυρίως οικονομικό βάρος το οποίο συνέστησε η προσπάθεια που κατέβαλλα για την εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας και την ολοκλήρωση του μεταπτυχιακού προγράμματος στο οποίο συμμετείχα.

Άξιοι μνείας είναι όλα τα άτομα του εγγύως προσωπικού μου περιβάλλοντος, η αδερφούλα μου *Βέρα*, οι γονείς μου, λοιπά πρόσωπα ιδιαίτερα αγαπημένα του ευρύτερου οικογενειακού μου περιβάλλοντος καθώς και οι πολύτιμοι, στενοί φίλοι μου, χωρίς την ψυχολογική υποστήριξη των οποίων δε θα είχα καταφέρει να φτάσω στο τέρμα της συγκεκριμένης διαδρομής.

Επίσης, θα ήθελα να εξάρω, τη συμβολή κάποιον οικείων προσώπων, τα οποία εν μέσω καιρών δύσκολων για εμένα προσωπικά, μου καλλιέργησαν ένα πνεύμα ελπίδας και την επιθυμία να δώσω όλες τις δυνάμεις μου για την ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου υποχρεώσεων, ελλείψει λοιπών κινήτρων.

Ολοκληρώνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γρηγορούδη Ευάγγελο, για την καθοδήγησή του στο δύσκολο δρόμο για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Σύντομο βιογραφικό σημείωμα

Απόφοιτος της σχολής Κοινωνικών επιστημών, του τμήματος Οικονομικών επιστημών του πανεπιστημίου Κρήτης κατά το έτος 2006. Έλαβον το μεταπτυχιακό δίπλωμα ειδίκευσης από τη σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, τμήμα Οργάνωσης και Διοίκησης, κατά το έτος 2009.

Περίληψη Διπλωματικής

Οι αλυσίδες Markov, αναμφισβήτητα έχουν μία ευρύτατη εφαρμογή σε διάφορους τομείς όπως συστήματα παραγωγής, τηλεπικοινωνίες, μαθηματικούς αλγόριθμους κ.α. Χρησιμοποιούνται επίσης εκτενώς, στη μοντελοποίηση αναμονικών συστημάτων (queueing, waiting lines), όπου μεταξύ άλλων τα μοντέλα αυτά μελετούν το χρόνο αναμονής σε μία ουρά, την πιθανότητα εξυπηρέτησης εντός κάποιου χρονικού διαστήματος, αλλά και την πιθανότητα να προστεθούν νέα άτομα στο τέλος μίας ουράς.

Η χρήση τους έγκειται στη δυνατότητα πρόβλεψης (μέσω μίας πιθανοθεωρητικής προσέγγισης) μίας μελλοντικής κατάστασης στην οποία πιθανώς να περιέλθει το υπό εξέταση σύστημα , εξετάζοντας αφενός την «προϊστορία» του και αφετέρου υποθέτωντας ότι κάθε κατάσταση στην οποία περιέρχεται το σύστημα σε κάθε βήμα, εξαρτάται μόνο από την προηγούμενη κατάστασή του (Ιδιότητα Markov[1]). Εντούτοις, ένα MCM (Markov Chain Model) ενδέχεται να περιλαμβάνει σημαντικά μειονεκτήματα πολυπλοκότητας, υπολογιστικού κόστους και συλλογής δεδομένων. Οι δυσκολίες που συνιστά η συγκέντρωση πραγματικών δεδομένων για τέτοια μοντέλα, αποτελούν τον κυρίαρχο ανασταλτικό παράγοντα για την εφαρμογή τέτοιων τεχνικών από το ευρύ επιστημονικό κοινό.

Στο χώρο του Marketing, χρησιμοποιείται εκτενώς για την προσέγγιση της πιθανότητας επανάληψης αγοράς, σύναψης ή διακοπής εμπορικών σχέσεων μεταξύ εταιρίας – πελάτη, συχνότητα κατανάλωσης κ.α. Η συνδυαστική τέτοιων παραμέτρων, αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο στη δημιουργία μοντέλων προσομοίωσης της καταναλωτικής συμπεριφοράς ενός πελάτη ή μίας ομάδας

[1] Απαντάται στη διεθνή βιβλιογραφία ως Markov property, ενώ αποτελεί τη βασική παραδοχή των μοντέλων αυτών. Στη συνέχεια της εργασίας θα αναλυθεί διεξοδικότερα η παραδοχή αυτή.

πελατών με κοινά χαρακτηριστικά. Τα μοντέλα R.F.M[2]., αξιοποιώντας τις παραμέτρους αυτές έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίζουν τη μελλοντική συμπεριφορά ενός πελάτη.

Η συμπεριφορά των παραμέτρων αυτών εξαρτάται από διάφορους παράγοντες όπως την αγορά γενικότερα (μάκρο – παράγοντες), το είδος του προϊόντος, τις ανάγκες κάθε καταναλωτή, τυχόν περιορισμούς που βιώνει όπως εισόδημα κ.α. (μίκρο – παράγοντες). Επίσης, η φύση τους κατά γενικότητα, θεωρείται τυχαία και το γεγονός αυτό εγείρει έντονη κριτική γύρω από το συγκεκριμένο θέμα.

Στην παρούσα εργασία, θα γίνει μία προσπάθεια μελέτης των παραμέτρων αυτών υπό διάφορα σενάρια που θα αφορούν στην κατανομή τους αλλά και τις παραμέτρους των κατανομών αυτών και με αφορμή την ιδιαίτερα δύσκολη συλλογή δεδομένων. Συνοπτικά, στο πρώτο κεφάλαιο ο αναγνώστης θα έρθει σε επαφή με τα Μαρκοβιανά μοντέλα, σε μία προσπάθεια να δωθεί ένα βασικό υπόβαθρο για την κατανόηση του τρόπου λειτουργίας μίας Μαρκοβιανής διαδικασίας. Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα γίνει μία εισαγωγική επισκόπηση σχετικά με το Μάρκετινγκ, τη σπουδαιότητα και τις δυσκολίες της μελέτης του CLV από τη σκοπιά των επιχειρήσεων, αλλά και της χρήσης αυτής. Το τρίτο κεφάλαιο περιλαμβάνει το τμήμα της παρουσίασης του μοντέλου που θα συστηθεί. Η ανάλυση του σχεδιασμού της έρευνας που πραγματοποιήθηκε, ακολουθεί στο τέταρτο κεφάλαιο. Το πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο θα περιλαμβάνει την ανάλυση των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν από την έρευνα η οποία πραγματοποιήθηκε, τα σημαντικότερα στοιχεία αυτών, γενικότερα και ειδικότερα συμπεράσματα, καθώς και μελλοντικές αξιώσεις που θα αφορούν τόσος στο μοντέλο εφαρμογής όσο και στο σχεδιασμό της έρευνας.

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης διατριβής, θα διερευνηθεί η επίδραση εναλλακτικών μορφών του μοναδιαίου κόστους διατήρησης ενός πελάτη από την εταιρία. Επίσης θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην παρατήρηση της συμπεριφοράς του μοντέλου για διαφορετικά σενάρια σχετικά με τη φύση των παραμέτρων, καθώς και στην αναζήτηση κρίσιμων τιμών κατά τις οποίες δεν παρατηρούνται σημαντικές διαφοροποιήσεις στο μοντέλο. Επιπρόσθετα, η έρευνα θα περιέλθει στην αναζήτηση κρίσιμων τιμών (πιθανοτήτων) για την περίληψη «απορροφητικών καταστάσεων» (absorbing states), κατά την οποία δε θα παρατηρούνται σημαντικές διαφοροποιήσεις

[2] Τα 3 βασικά στοιχεία των μοντέλων αυτών (τα οποία θα αναλυθούν εκτενώς στη συνέχεια), είναι: α) **R**ecency: ο χρόνος που έχει μεσολαβήσει (σε βήματα μοντέλου) από την τελευταία αγορά, β) **F**requency: η συχνότητα αγορών και γ) **M**onetary: Η νομισματική αξία των αγορών.

για παράδειγμα στο χρόνο που απαιτείται για να θεωρηθεί ένας πελάτης «νεκρός». Ενδεικτικά αναφέρεται ότι, ως «απορροφητικό στάδιο» ορίζεται η Μαρκοβιανή κατάσταση στην οποία αν κάποιος εισέλθει, δεν μπορεί να δραπετεύσει προς άλλες καταστάσεις. Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα της διεθνούς βιβλιογραφίας απαντάται ως “Drunkard’s walk”. Τέλος, ο κυριότερος στόχος της έρευνας που θα διεξαχθεί, είναι η εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων σε αντιστοιχία με τη φύση των παραμέτρων που θα αφορούν σε βασικά στοιχεία του έκαστου υποδείγματος, όπως μέσος χρόνος επανάληψης αγοράς, απορρόφησης κ.α.

Εισαγωγή

Η σημερινή μορφή της οικονομίας και ειδικότερα της αγοράς, έχουν αποκλίνει τα μέγιστα από το πρότυπο μοντέλο της οικονομίας του Ροβινσώνα Κρούσου, αλλά και της ανταλλακτικής οικονομίας που κυριαρχούσε παγκοσμίως κατά τις απαρχές των πρώτων ολοκληρωμένων πολιτισμών. Το πρώτο νόμισμα[3] το οποίο κάνει την εμφάνισή του περίπου 2.600 χρόνια πίσω, συστήνει τα θεμέλια της σύγχρονης αγοράς. Τα διάφορα αγαθά, πλέον διακινούνται σε κάθε γεωγραφική γωνιά κι εμπορεύονται μέσω ενός σύνθετου και καθολικά αποδεκτού αγαθού το οποίο καλείται χρήμα[4]. Το χρήμα, ίσως μία από τις σπουδαιότερες εφευρέσεις σε όλη την ανθρώπινη ιστορία, λειτουργεί ενζυμικά, απλοποιώντας τους όρους[5] διεξαγωγής της συναλλαγής και αυξάνοντας την ταχύτητα περαίωσης της.

Η παραγωγή αρχίζει να μαζικοποιείται αιώνες πριν τη βιομηχανική επανάσταση και συγκεκριμένα στον πρωτογενή τομέα. Για την αντιμετώπιση της πλεονάζουσας προσφοράς, οι διάφορες οικονομίες εγκαταλείπουν σταδιακά τον εσωστρεφισμό και τον προστατευτισμό και αποδέχονται τον φιλελευθερισμό στην οικονομία και τα εμπορικά σύνορα, με λαβαροφόρο την Αγγλία. Τα πρώτα σημάδια μίας δυνητικά παγκόσμιας οικονομίας έχουν αρχίσει να γίνονται εμφανή. Η βιομηχανική επανάσταση ακολουθώντας λογικά τη ροή των γεγονότων, θα φέρει περαιτέρω μαζικοποίηση της παράγωγης σε κάθε τομέα, ενώ το συγκριτικά χαμηλό κόστος παραγωγής που συστήνεται επιπρόσθετα με τη βιομηχανική επανάσταση, θα αυξήσει σημαντικά τον ανταγωνισμό στην προσφορά αγαθών και υπηρεσιών. Νέες ανάγκες διαρκώς θα συστήνονται, συμβαδίζουσες με την εξέλιξη της τεχνολογίας.. Ο ραγδαία αυξανόμενος ανταγωνισμός σε κάθε παραγωγικό τομέα, ο οποίος πλέον αποτελεί τη συνιστώσα τόσο εγχώριων όσο και διεθνών «δυνάμεων», θα κάνει επιτακτική την

[3] Προέρχεται από τη λέξη νόμος, γεγονός που δεικνύει ότι ορίζεται από κάποια οικουμενική αρχή.

[4] Το χρήμα ωστόσο, δεν είχε πάντα τη σημερινή μορφή του (παραστατικό, μη έχοντας καμία εσωτερική αξία· αντιπροσωπεύει την αναγραφόμενη σε αυτό αξία), καθώς στα νηπιακά του βήματα συστηνόταν από πολύτιμα μέταλλα όπως ο χρυσός και αντιπροσώπευε την εσωτερική – εμπορευματική του αξία (περιεκτικό).

[5] Πλέον όλα τα αγαθά είναι εμπορεύσιμα μεταξύ τους και σε οποιεσδήποτε ποσότητες, καθώς αντιπροσωπεύονται από το χρήμα και τις διάφορες υποδιαιρέσεις τους. Έτσι όλα τα αγαθά μεταφράζονται πλέον σε πλούτο, με όρους τους οποίους καθορίζει μία αρχή (συνήθως η πολιτεία – πόλις).

εξεύρεση εναλλακτικών τρόπων διαφοροποίησης των αγαθών, σε μία προσπάθεια αύξησης του περιθωρίου του κέρδους πάνω από τα επίπεδα που ορίζει μία αμιγώς ανταγωνιστική αγορά. Μία αρχαία τεχνική αρχίζει να αποκτά σύγχρονη δομή και να αναγνωρίζεται σταδιακά και καθολικά ως επιστήμη. Το Μάρκετινγκ.

Το Μάρκετινγκ το οποίο προέρχεται από τον αγγλικό όρο *"Market"* και σημαίνει αγορά, ορολογιακά προσδιορίζει μία οργανωμένη προσπάθεια από πλευράς επιχειρήσεων ώστε να ικανοποιηθούν οι ανάγκες αλλά και οι επιθυμίες των καταναλωτών. Αποτελεί μία διαρκή διαδικασία αντιστοίχησης προϊόντων ή υπηρεσιών, με (κάθε) έναν «μοναδικό[6]» πελάτη-στόχο, δεδομένων των αναγκών και των επιθυμιών του. Βασικός σκοπός είναι να κατασκευαστούν τα αντίστοιχα αγαθά με τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες που ο πελάτης επιθυμεί, να του γνωστοποιηθούν και τέλος να κατασταθούν διαθέσιμα προς αυτόν μέσα από τα κανάλια διανομής και στην ιδανική τιμή.

Ο *Robert Bartels* στο βιβλίο του *The History of Marketing Thought* [1] δίνει μία ενδιαφέρουσα επισκόπηση της εξελικτικής πορείας της θεωρίας του Μάρκετινγκ κατά τον τελευταίο αιώνα. Σημειώνει, πως πρωτοεμφανίστηκε ως ένα παρακλάδι των Εφαρμοσμένων Οικονομικών. Ωστόσο, δεν παραβλέπει το γεγονός ότι σύντομα το Μάρκετινγκ αποσπάστηκε και αυτονομήθηκε[7], δεχόμενο επεκτάσεις και προσθήκες και από άλλες επιστήμες όπως την επιστήμη της Συμπεριφοράς. Πλέον ενσωματώνει θεωρίες από το σύνολο των Κοινωνικών επιστημών (Οικονομικά, Ψυχολογία, Κοινωνιολογία). Σπουδαιότατο ρόλο εντούτοις, στις τεχνικές και τις θεωρίες που διέπουν το σύγχρονο Μάρκετινγκ, διαδραμάτισε και η δουλειά του *Paul Samuelson* (βλ. [65]), όπου επίσημα για πρώτη φορά στον επιστημονικό κόσμο η Οικονομική Σκέψη ενώνει μονοπάτια με τα Μαθηματικά. Οι διάφορες σχέσεις πλέον ποσοτικοποιούνται και η μαθηματική σκέψη έρχεται να δώσει μία νέα ώθηση σε όλες τις Κοινωνικές Επιστήμες και τις προσκείμενες σε αυτές (όπως το Μάρκετινγκ).

---

[6] Το γεγονός ότι κάθε πελάτης είναι μοναδικός ως προς τις ανάγκες του, αποτελεί την πεμπτουσία του σύγχρονου Μάρκετινγκ.

[7] Πολλοί μελετητές αναφέρουν ως «σημείο καμπής» των σημαντικών αυτών αλλαγών στην επιστήμη του Μάρκετινγκ, τη δουλειά του Wroe Alderson, *Marketing Behavior and Executive Action* (βλ. [66]), ο οποίος και χαρακτηρίζεται ως ο πατέρας του σύγχρονου Μάρκετινγκ.

Στο σύγχρονο κόσμο, ο καπιταλισμός[8] προσπαθεί να εξηγήσει τις δομές της σύγχρονης οικονομίας παγκοσμίως. Το «κάποτε» αόρατο χέρι του Adam Smith, πλέον έχει δώσει τη θέση του σε θεωρίες και συστήματα τα οποία έχουν τη δυνατότητα να περιγράφουν με μεγάλη ακρίβεια πως λειτουργεί η αγορά τόσο σε ότι αφορά το μάκρο-περιβάλλον, όσο και το μίκρο. Μία αγορά η οποία αποτελεί ίσως το πλέον δυναμικό σύστημα, μέσα στο οποίο δραστηριοποιούνται ποικίλοι παράγοντες (αστάθμητοι και μη) και μηχανισμοί ικανοί να προκαλέσουν σε ανύποπτο χρόνο απροσδόκητες μεταβολές. Για τω λόγω αυτόν, τις τελευταίες δεκαετίες ενισχύεται όλο και περισσότερο η προσπάθεια πρόβλεψης, πρόγνωσης και προσομοίωσης της συμπεριφοράς των διαφόρων αυτών παραγόντων. Οι καταναλωτές (είτε αναφερόμαστε σε μονάδες – φυσικά πρόσωπα, είτε σε εταιρίες – νομικά πρόσωπα) όντας ένα βασικό κομμάτι αυτών (των παραγόντων), αλλά και ο κινητήριος μοχλός της αναπαραγωγής του πλούτου παγκοσμίως, έχουν γίνει αντικείμενο εκτενέστατων τέτοιων μελετών. Η αναζήτηση των συντελεστών που επιδρούν στην καταναλωτική συμπεριφορά μίας μονάδος (όπως αυτή προσδιορίστηκε παραπάνω) καθώς και του τρόπου με τον οποίο αυτοί επιδρούν (ρυθμοί μεταβολής, συντελεστές συσχέτισης κ.α.), έχει χριστεί εξέχουσας σημασίας από τους ειδικούς του χώρου του Μάρκετινγκ.

Στην προσπάθειά μας όμως να προσομοιώσουμε τη συμπεριφορά ενός καταναλωτή, να αντιληφθούμε την ψυχοσύνθεση του (τις ανάγκες του υπαρκτές και δυνητικές) ή τους λόγους οι οποίοι τον οδηγούν σε κάποια εμπορική πράξη και στη συνέχεια να προσπαθήσουμε να προβλέψουμε τη μελλοντική του συμπεριφορά· ή διαφορετικά να τον «χειραγωγήσουμε ωθώντας τον προς την κατεύθυνση όπου εμείς θέλουμε (επανάληψη αγοράς, αύξηση συχνότητας αγορών, αφοσίωση, δημιουργία νέων αναγκών κ.α.), είναι σαν να επιχειρούμε να ανοίξουμε τους ασκούς του Αιόλου. Ίσως κάτι τέτοιο να ακούγεται σαν κινδυνολογία, όμως θυμίζει έντονα την ιστορία της πυρηνικής βόμβας. Ξεκίνησε σαν ένα «ρομαντικό όνειρο» για την επίλυση των ενεργειακών προβλημάτων παγκοσμίως, παρόλα αυτά η κατάχρησή της είχε καταστροφικά αποτελέσματα αφήνοντας κατάλοιπα και για τις μελλοντικές γενιές. Κατά αναλογία λοιπόν, η κατάχρηση τέτοιων πληροφοριών όπως οι προσδιοριστικοί παράγοντες (σε συνεργασία με τον τρόπο) που διαμορφώνουν τη συμπεριφορά κάθε

[8] Ο καπιταλισμός, κατά τη γνώμη μου αποτελεί ένα σπουδαίο οικονομικό σύστημα, το οποίο ωστόσο παραμένει τόσο εξιδανικευμένο όσο η «Πολιτεία» του Πλάτωνα. Η εύρυθμη λειτουργία του, προϋποθέτει την ορθότατη λειτουργία των διαφόρων μηχανισμών που δρουν στο εσωτερικό μίας οικονομίας (εθνικής, διεθνούς ή παγκόσμιας). Μηχανισμοί είτε κρατικοί (παρεμβατικοί) είτε προερχόμενοι από το εσωτερικό της αγοράς (αυτοκάθαρση).

οικονομικά δρώντα στο εσωτερικό μίας αγοράς, μπορούν να επιφέρουν αρνητικές επιπτώσεις στον ίδιο τον καταναλωτή δημιουργώντας ανελαστικότητες (σε οικονομικούς όρους) στη ζήτηση κάθε αγαθού. Ένα παράδειγμα που μπορούμε να αντλήσουμε από το χώρο του μάρκετινγκ, είναι η διαφοροποίηση ενός προϊόντος (product differentiation[9]). Με τον όρο αυτόν εννοούμε τη δημιουργία των συνθηκών[10] υπό τις οποίες ένα προϊόν που ανήκει αρχικά σε μία ανταγωνιστική[11] αγορά, να εμφανίζεται ως παρεκλίνων των παρεμφερών του στη συνέχεια. Κατά αυτόν τον τρόπο έχει αποδεικτεί η εμφάνιση μονοπωλιακών διαρθρώσεων (βλ. [15], [17]), που παρέχει τη δυνατότητα διαφορετικής τιμολόγησης του προϊόντος, από πλευράς επιχειρήσεων. Σε κοινωνικό – οικονομικούς όρους, κάτι τέτοιο μεταφράζεται σε απώλεια ευημερίας[12] από πλευράς καταναλωτή η οποία μετακυλίεται κατά ένα τμήμα της στον παραγωγό, ενώ υπάρχει ένα ακόμη τμήμα της το οποίο χάνεται. Συνεπώς το κοινωνικό σύνολο ζημιώνεται πέραν των καταναλωτών ως μονάδες.

Η πυρηνική ενέργεια παρά ταύτα, έχει εφαρμογές σε πολλούς χρήσιμους τομείς της ανθρώπινης ζωής. Παρόμοια, και η προσπάθεια κατανόησης της συμπεριφοράς των οικονομικά δρώντων, δεν ενέχει μόνο κινδύνους. Η εστίαση του σχεδιασμού των αγαθών (υλικών και άυλων) πάνω στον (κάθε) καταναλωτή, προσπαθώντας να ικανοποιηθούν οι μοναδικές ανάγκες κάθε ενός, φέρει μία σειρά από πλεονεκτήματα και για τον ίδιο τον καταναλωτή. Η χρησιμότητα[13] που προκύπτει από την κατανάλωση διαφόρων αγαθών θα μεγιστοποιείται. Τα αγαθά θα εξειδικεύονται ώστε

---

[9] Αποτελεί μία από τις σημαντικότερες περιοχές αποφάσεων στη στρατηγική μάρκετινγκ μιας επιχείρησης, σε σχέση με τα προϊόντα των ανταγωνιστών. Η «τεχνική» αυτή έχει ως στόχο να προσδώσει θελκτικότητα απέναντι στους καταναλωτές σε ένα αγαθό συγκρίνοντας και αναδεικνύοντας τις μοναδικές του ιδιότητες έναντι των λοιπών ανταγωνιστικών. Κατά τον τρόπο αυτόν δημιουργούνται συγκριτικά πλεονεκτήματα για την κάθε εταιρία που υιοθετεί τέτοιες τεχνικές, γεγονός που έχει άμεσο αντίκτυπο στο περιθώριο κέρδους της επιχείρησης αυτής. Για περισσότερα στοιχεία ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [2], [13], [14], [15], [16], [17], [21].

[10] Τεχνητά μέσα όπως διαφήμιση, χωρίς να αλλάξουμε την παραγωγική διαδικασία ή τη σύσταση του προϊόντος. Η τεχνική αυτή αποτελεί μόλις ένα τμήμα του συνόλου των τεχνικών διαφοροποίησης. Καλείται «*Διαφοροποίηση με βάση το Συναίσθημα*», καθώς διαμορφώνεται η αντίληψη στον καταναλωτή ότι το προϊόν διαφέρει χωρίς αυτό να ισχύει.

[11] Με τον όρο ανταγωνιστικό προϊόν εννοούμε ότι παρουσιάζει τις ίδιες χρηστικές ιδιότητες, ίδια τιμολόγηση και δε διαφέρει σημαντικά έως καθόλου από τα υπόλοιπα του χώρου.

[12] Ο όρος ευημερία (welfare) αποτελεί έναν οικονομικό όρο, η ανάλυση του οποίου κρίνεται εκτός των αναγκών της παρούσας εργασίας. Για περισσότερα στοιχεία ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [3], [12].

[13] Η χρησιμότητα ως θεωρία (Utility Theory: βλ. [3], [12]), οφείλει κατά πολλούς την εμφάνισή της στον Άγγλο φιλόσοφο της περιόδου του Διαφωτισμού Jeremy Bentham. Εντούτοις λογίζεται άξιον αναφοράς το γεγονός ότι πολλοί ερευνητές θεωρούν πως οι ρίζες της εκτείνονται μέχρι την αρχαία Ελλάδα και αποδίδουν την εμφάνισή της στο φιλόσοφο Επίκουρο. Ως έννοια, ορίζεται ως ο βαθμός ικανοποίησης που προκύπτει από την κατανάλωση ενός αγαθού (είναι σαν να αποδίδουμε δηλαδή έναν βαθμό σε κάποια συναισθηματική κλίμακα). Χρησιμοποιείται εκτενώς στα Οικονομικά (και ειδικά στα Οικονομικά της Ευημερίας ή Welfare Economics) και τον τομέα των Αποφάσεων.

να ικανοποιούν μοναδικές απαιτήσεις. Η ποιότητα των προσφερομένων αγαθών θα ενισχύεται διαρκώς (στην προσπάθεια τέρψης των καταναλωτών) και μαζί της η ανταγωνιστικότητα τους.

Η ανάγκη κατανόησης της συμπεριφοράς των καταναλωτών είναι αδιαμφισβήτη. Η διαρκής ανάγκη για ανάπτυξη η οποία τροφοδοτείται μέσω του καταναλωτισμού, είναι ο κυριότερος εκφραστής της αντίληψης αυτής. Τα εργαλεία που απαιτούνται για την εξαγωγή των πληροφοριών αυτών, βρίσκονται ήδη στη διάθεση των ειδικών. Το μόνο που απομένει είναι να διασφαλιστεί ο τρόπος που θα διαχειριστούν τα ευρήματα αυτά.

Κεφάλαιο 1ο

Οι αλυσίδες Markov

1.1 Εισαγωγή

Τα συστήματα Markov (MCMs), οφείλουν την ονομασία τους και γενικότερα την ύπαρξή τους, σε έναν εξαίρετο Ρώσο μαθηματικό του περασμένου αιώνα, τον Andrei Markov (Andrei Andreyevich Markov). Η ενασχόλησή του με τις στοχαστικές ανελίξεις, του απέδωσε αναγνωρισιμότητα, ενώ δημιούργησε νέες οδούς στην παρατήρηση και ανάλυση στοχαστικών φαινομένων. Τα συστήματα αυτά χαρακτηρίστηκαν ως αλυσίδες (Markov Chains), περιγράφοντας μία, κατά έναν τρόπο, αλληλουχική συμπεριφορά των φαινομένων που περικλείονται σε κάθε τέτοιο σύστημα.

1.2 Ο μηχανισμός των συστημάτων MCM

Ένα στοχαστικό φαινόμενο χαρακτηρίζεται ως μία διαδικασία Markov, όταν περιλαμβάνει μία μοναδική και βασικότατη ιδιότητα, η οποία καλείται ιδιότητα Markov (Markov Property). Βάσει της ιδιότητας αυτής, μία στοχαστική διαδικασία με διακριτές καταστάσεις[14] αποτελεί μία αλυσίδα Markov αν και μόνο αν η πιθανότητα το υπό εξέταση σύστημά μας να περιέλθει στο μέλλον (σε κάποια χρονική στιγμή) σε κάποια κατάσταση, εξαρτάται **μόνο** από την παρατηρούμενη κατάσταση στην αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή. Συνεπώς γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι στην εξελικτική πορεία του συστήματος, το σύνολο των παρελθουσών καταστάσεων δε φέρει καμία επίδραση στο σύστημα, πέραν της άμεσα παρελθούσης. Η ιδιότητα αυτή, απαντάται στη διεθνή βιβλιογραφία ως η ιδιότητα της έλλειψης μνήμης (memory – less property). Ωστόσο, το σύνολο των παρελθουσών παρατηρήσεων σχετικά με τις καταστάσεις του συστήματος ανά χρονική στιγμή, αποτελούν το βασικότερο τμήμα των Μαρκοβιανών διαδικασιών (αλλά και του συνόλου των στοχαστικών ανελίξεων).

[14] Για παράδειγμα, εξετάζοντας τον καιρό, κάποιες ενδεικτικές διακριτές (ασφαλώς διαχωρίσιμες) καταστάσεις είναι: α) ηλιοφάνεια, β) συννεφιά, γ) βροχή.

Όπως θα δειχθεί και παρακάτω, οι παρατηρήσεις αυτές συστήνουν το δείγμα εκμάθησης του μοντέλου μας στην προσπάθεια προσέγγισης της πιθανότητας να παρατηρηθεί μία συγκεκριμένη κατάσταση στο σύστημά μας στο μέλλον, δεδομένης της πρότερης παρατηρούμενης κατάστασης.

Σε ότι αφορά τη Στατιστική επιστήμη, η τελευταία διατύπωση συστήνει τη δεσμευμένη ή υπό συνθήκη πιθανότητα (conditional probability). Την πιθανότητα δηλαδή να συμβεί ένα συγκεκριμένο γεγονός (στο μέλλον), δεδομένου του ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί ένα άλλο γεγονός (στο παρόν ή το παρελθόν). Για να αρχίσουμε λοιπόν να δίνουμε μία πιο απτή μορφή στη Μαρκοβιανή θεωρία, ας υποθέσουμε ένα τυχαίο σύστημα του οποίου γνωρίζουμε τις δυνατές καταστάσεις (τις οποίες μπορεί να λάβει). Υποθέτουμε ότι αυτές ανήκουν στο σύνολο X, για το οποίο ισχύει:

$$X = \{ A, B, \Gamma \}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι το σύστημά μας ακολουθεί τη Μαρκοβιανή παραδοχή (ιδιότητα). Τέλος, ας υποθέσουμε ότι η παρατηρούμενη κατάσταση κάποια τυχαία χρονική στιγμή στο σύστημά μας, είναι γνωστή. Κατά τον τρόπο αυτό, μπορούμε να προσεγγίσουμε και τις πιθανές καταστάσεις στο μέλλον. Συνεπώς αυτό που ζητείται, περιγράφεται ως εξής:

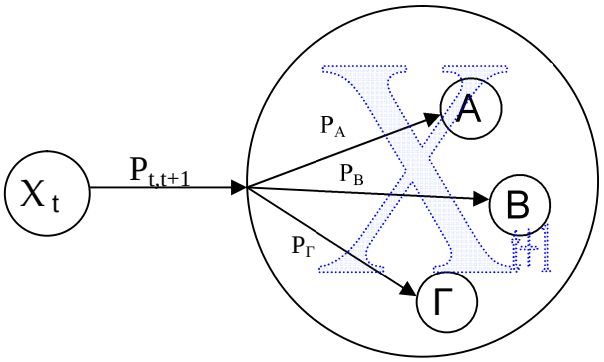
$$P(X_{t+1} \mid X_t) \qquad (1.1)$$

Όπου:

- X_t : η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t

Αλγεβρικά αυτό μπορεί να δειχθεί με το παρακάτω σχήμα:

Η διαδικασία μετάβασης μεταξύ 2 διαδοχικών χρονικών περιόδων



σχ. 1.1

- $P_{t,t+1}$: ορίζεται ως η «πιθανότητα μετάβασης» (transition probability) του συστήματος από τη χρονική στιγμή t στη χρονική στιγμή t+1 σε κάποια κατάσταση. Έτσι αν Α, Β, Γ όλες οι δυνατές καταστάσεις, τότε η πιθανότητα να περιέλθει σε μία εξ αυτών, είναι εξ ορισμού ίση με τη μονάδα. Ωστόσο, ο αντικειμενικός μας στόχος, είναι ο προσδιορισμός των μερικών πιθανοτήτων P_A, P_B, P_Γ. Συνεπώς, αν P_A=p και P_B=q, τότε $P_\Gamma = 1 - p - q$

Η σχέση (1.1), προκύπτει ως ισοδύναμη της πιθανότητας το σύστημα να περιέλθει σε κάποια κατάσταση σε μία δεδομένη μελλοντική χρονική στιγμή, δεδομένων όλων των καταστάσεων στις οποίες έχει περιέλθει αυτό, στο παρελθόν. Το γεγονός αυτό συνιστά και τη Μαρκοβιανή υπόθεση. Συνεπώς, η παραδοχή αυτή μπορεί να δειχθεί αλγεβρικά με την παρακάτω ισότητα (1.2).

$$P(\mathrm{X}_{t+1} = x_{t+1} \mid \mathrm{X}_t = x_t, \mathrm{X}_{t-1} = x_{t-1,}, ..., \mathrm{X}_0 = x) = P(\mathrm{X}_{t+1} = x_{t+1} \mid \mathrm{X}_t = x_t) \qquad (1.2)$$

Εντούτοις, στην πράξη η Μαρκοβιανή θεωρία είθισται να εφαρμόζεται σε μοντέλα πιο πολύπλοκα, γεγονός που φέρει αντίκτυπο τόσο στις αλγεβρικές σχέσεις μετάβασης όσο και στις τιμές τους. Το βέλος στο παραπάνω σχήμα (σχ. 1.1), το οποίο δεικνύει μία σχέση μετάβασης (δηλαδή την πιθανότητα το σύστημα να μετακυληθεί από τη γνωστή κατάσταση στην περίοδο t σε κάποια εκ των Α, Β, Γ στην επόμενη χρονική στιγμή t+1), αντιπροσωπεύει έναν τεράστιο μηχανισμό προσδιοριστικών παραγόντων που καθορίζουν την τελική έκβαση του συστήματος (παρατηρούμενη κατάσταση) κάθε χρονική στιγμή. Ο μηχανισμός αυτός, παραμένει «κρυμμένος» πίσω από τις απλές αυτές στατιστικές σχέσεις. Στο γεγονός αυτό έγκειται και η σπουδαιότητα των Μαρκοβιανών μοντέλων, καθώς δεν καθίσταται απαραίτητη η πλήρης ανάλυση έκαστου υπό εξέταση συστήματος.

Για παράδειγμα, όταν προσπαθούμε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα επανάληψης αγοράς ενός πελάτη, δεν είναι απαραίτητο να αναλύσουμε το συνολικό μακροοικονομικό περιβάλλον της αγοράς (πληθωρισμός, ποσοστά ανεργίας, επενδυτικά/ αποταμιευτικά επιτόκια, κατά κεφαλήν Α.Ε.Π. – κάτι το οποίο επιβάλλει η θεωρία της Κατανάλωσης[15]). Μπορούμε να το πράξουμε μονομερώς,

[15] Η αναφορά γίνεται στην ταυτότητα του Εθνικού Εισοδήματος, η οποία μπορεί να μετασχηματιστεί έτσι ώστε να αφορά αυτούσια την Κατανάλωση (C), εθνική αλλά και ιδιωτική. Για περισσότερα στοιχεία ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [5].

παρατηρώντας για παράδειγμα την ποσότητα αγορών για συγκεκριμένο αγαθό, για βραχυχρόνια διαστήματα (π.χ. 10 ώρες ομιλίας το μήνα για περίπτωση κινητής τηλεφωνίας, 1 κιλό ψωμί ανά 2 ημέρες). Βέβαια, πρέπει να γίνει αντιληπτό, ότι καθώς παρατηρούμε τη συμπεριφορά μίας παραμέτρου (καιρός, επανάληψη αγοράς κ.α.) στη διάρκεια του χρόνου, τότε η παράμετρος αυτή ενσωματώνει το σύνολο της συμπεριφοράς του υπό εξέταση συστήματος. Δηλαδή, στην παραπάνω περίπτωση, η ποσότητα αγοράς ενός αγαθού διαχρονικά, ενσωματώνει και τη συμπεριφορά όλων αυτών των μάκρο και μίκρο παραγόντων που «διαμορφώνουν» την αγορά – οικονομία. Παρά ταύτα, όταν οι παρατηρήσεις προέρχονται από ένα μικρό δείγμα τόσο σε αριθμό παρατηρήσεων όσο και σε βάθος χρόνου, τότε κατά κανόνα μειώνεται η προβλεπτική ικανότητα του έκαστου μοντέλου. Το γεγονός αυτό, θα αναλυθεί διεξοδικότερα στη συνέχεια κι εφόσον περιγραφεί πιο αναλυτικά ένα μοντέλο Markov.

Η τελευταία έκφραση (1.2), αποτελεί και το βασικό στόχο των μοντέλων αυτών. Ο προσδιορισμός δηλαδή της πιθανότητας μετάβασης. Υπενθυμίζεται όμως ότι τα συστήματα στα οποία εφαρμόζονται οι τεχνικές αυτές, τελούν κατά γενικότητα υπό καθεστώς ρίσκου[16]. Πρέπει ωστόσο να υπογραμμιστεί εδώ η διαχρονική αξία των στοχαστικών αυτών διαδικασιών. Η προσέγγιση του μελλοντικού αποτελέσματος στο έκαστο υπό εξέταση σύστημα, ως μία πιθανότητα να πραγματοποιηθεί, δηλώνει την πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος καθαυτού, δεδομένου ότι δε διαφοροποιείται σημαντικά στο μέλλον το περιβάλλον του συστήματος από το οποίο αρχικά αντλήθηκαν οι παρατηρήσεις μας, εάν το σύστημα συνεχίσει να «τρέχει» στο διηνεκές (επ' άπειρον).

Η τελευταία διατύπωση, συστήνει και το **Νόμο των Μεγάλων Αριθμών**[17] (Law of Large Numbers – LNN). Κατά συνέπεια, είναι ευκολότερο να εξαχθούν συμπεράσματα για μία (αυθαίρετα) μεγάλη χρονική περίοδο στο μέλλον σχετικά με το σύστημα που εξετάζεται και τη συμπεριφορά του, σε αντίθεση με μία μονομερή παρατήρηση μίας κάποιας μελλοντικής χρονικής περιόδου για το σύστημα αυτό.

[16] Δε γνωρίζουμε με ασφάλεια τι θα συμβεί στο μέλλον. Έχουμε μονάχα μία πιθανολογική προσέγγιση της μελλοντικής έκβασης.

[17] Σύμφωνα με τον ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα ενός γεγονότος Α, είναι το όριο του λόγου του αριθμού που παρατηρήθηκε το συμβάν Α ως προς τον συνολικό αριθμό που επαναλήφθηκε το πείραμα, καθώς ο αριθμός αυτός τείνει στο **άπειρο**. Κατ' αντιστοιχία, ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών περιγράφει το γεγονός κατά το οποίο ο μέσος μίας τυχαίας μεταβλητής τείνει να προσεγγίζει μία σταθερή τιμή, καθώς ο αριθμός των παρατηρήσεών μας σχετικά με τη μεταβλητή αυτή τείνει στο άπειρο (Jacob Bernoulli, 1713), βλ. [6].

Δηλαδή είναι πιο εύκολο να προσδιοριστεί πόσες χρονικές «περίοδοι» πρέπει να παρέλθουν ώστε το σύστημά μας να περιέλθει τουλάχιστον μία φορά σε κάποια δεδομένη κατάσταση, αντί να προσδιοριστεί με ακρίβεια η κατάσταση σε κάποια μελλοντική περίοδο. Εναλλακτικά, σε τέτοιες περιπτώσεις, μπορούν να χρησιμοποιηθούν άλλες προσεγγίσεις όπως μέγιστης πιθανότητας εμφάνισης κ.α. Κάτι τέτοιο φαντάζει απόλυτα λογικά εάν κάποιος αναλογιστεί το απλό πείραμα τύχης της ρίψης ενός «κανονικού» ζαριού. Τα δυνατά ενδεχόμενα – καταστάσεις είναι:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Λόγω της υπόθεσης του κανονικού ζαριού, κάθε ενδεχόμενο φέρει την εξής πιθανότητα να πραγματοποιηθεί σε κάθε επανάληψη ρίψης:

$$P(X_i) = \frac{1}{N_X}$$

- X_i: Συμβολίζει την πραγματοποίηση κάποιου εκ των ενδεχομένων του συνόλου Χ σε κάθε i ρίψη του ζαριού. Άρα: $X_i \in$ Χ και $i \in \{1, 2, ..., \infty\}$
- N_X: Ο αριθμός των δυνατών ενδεχομένων του συνόλου Χ. Συνεπώς, $N_X = 6$ για το παραπάνω σύστημα και $P(X_i) = \frac{1}{6}\ \forall i$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουν πραγματοποιηθεί 5 ρίψεις και τα αποτελέσματα αυτών είναι:

$$X_1 = 4,\ X_2 = 2,\ X_3 = 5,\ X_4 = 6,\ X_5 = 1$$

Ενδεικτικά αναφέρεται πως η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί η συγκεκριμένη ακολουθία σε 5 διαδοχικές ρίψεις ενός κανονικού ζαριού είναι ίση με την πιθανότητα να παρατηρηθεί οποιαδήποτε άλλη ακολουθία αποτελεσμάτων (σε 5 διαδοχικές ρίψεις), όπως και να έχουμε την περίπτωση ένα ενδεχόμενο να πραγματοποιείται και στις 5 επαναλήψεις (π.χ. $X_1 = 3$, $X_2 = 3$, $X_3 = 3$, $X_4 = 3$, $X_5=3$) . Η πιθανότητα αυτή, ισούται με: $\frac{1}{6^5}$. Η πιθανότητα τώρα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο $X_6 = 3$, δεδομένων και των προηγούμενων αποτελεσμάτων, είναι ίση με 1/6.

$$P(X_6 = 3) = P(X_6 = 3 \mid X_5 = 1, X_4 = 6, X_3 = 5, X_2 = 2, X_1 = 4) = P(X_i) = \frac{1}{6}$$

Βέβαια, αυτό ισχύει λόγω «ανεξαρτησίας ενδεχομένων[18]», κάτι το οποίο δεν απαντάται στα Μαρκοβιανά υποδείγματα. Ωστόσο, το παραπάνω παράδειγμα χρησιμοποιείται για να δείξει τη σπουδαιότητα του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών, ο οποίος όπως προαναφέρθηκε, διέπει κάθε στοχαστικό φαινόμενο (συμπεριλαμβανομένων των Μαρκοβιανών). Το μόνο για το οποίο μπορούμε να είμαστε σίγουροι συμπερασματικά για το παραπάνω σύστημα, είναι ότι καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνει (τείνει προς το άπειρο), τότε η αναμενόμενη πιθανότητα εμφάνισης κάθε ενδεχομένου του συνόλου X θα συγκλίνει στην τιμή 1/6.

Επιστρέφοντας τώρα στη Μαρκοβιανή θεωρία και τη διαχρονική αξία των υποδειγμάτων αυτών, η παραπάνω προσέγγιση η οποία θα δειχτεί στη συνέχεια πως μπορεί να αξιοποιηθεί και πρακτικά μέσα στο κάθε σύστημα, μας δίνει πληροφορίες για την αναμενόμενη συχνότητα εμφάνισης κάθε κατάστασης. Το γεγονός αυτό, αποτελεί μία βασικότατη ιδιότητα των Μαρκοβιανών μοντέλων. Ένα εργαλείο άκρως απαραίτητο στη διαδικασία λήψης αποφάσεων υπό καθεστώς ρίσκου, όπως είναι οι αποφάσεις που αφορούν σε διοικητικά θέματα (χάραξη στρατηγικής) στο εσωτερικό μίας επιχείρησης.

1.3 Αναλύοντας μία Μαρκοβιανή αλυσίδα

Όπως προαναφέρθηκε, αυτό που διακρίνει τις αλυσίδες Markov από τις λοιπές στοχαστικές διαδικασίες, είναι η ύπαρξη της ιδιότητας Markov (Markov Property). Γενικά λοιπόν ισχύει, δεδομένου του ότι X_t συμβολίζει την παρούσα κατάσταση και κατά αναλογία X_{t-1}, X_{t+1} την παρελθούσα και τη μελλοντική κατάσταση (αντίστοιχα) του υπό εξέταση συστήματος, ότι το μέλλον, δοθέντος του παρόντος και του παρελθόντος, εξαρτάται **μόνο** από το παρόν.

Μία τυχαία αλυσίδα Markov τώρα, περιγράφεται ως εξής. Αρχικά γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχει ένα σύνολο δυνατών καταστάσεων X τα οποία καλούνται states (καταστάσεις). Για το σύνολο X ισχύει:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

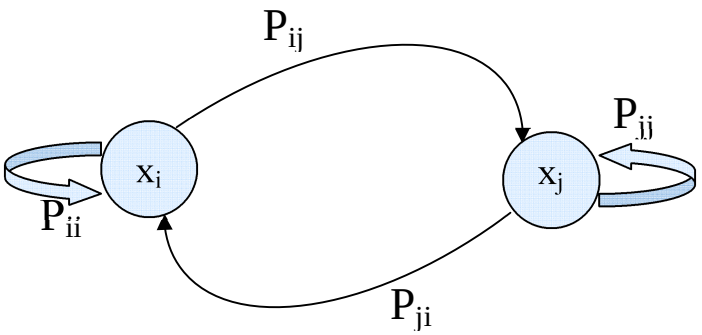
[18] Δύο ενδεχόμενα A, B καλούνται στατιστικά ή στοχαστικά ανεξάρτητα, αν και μόνο αν:

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ και } P(B \mid A) = P(B) \text{ και } A \neq B.$$

Δηλαδή, η εμφάνιση του ενός δε συνεπάγεται ή αποκλείει την εμφάνιση του άλλου.

Το μοντέλο ξεκινά ευρισκόμενο σε κάποια από τις καταστάσεις αυτές. Η αρχική κατάσταση, μπορεί να είναι είτε γνωστή, είτε να την προκαθορίσουμε εμείς. Διαφορετικά μπορούμε να υποθέσουμε κάποια «τυχαία» κατανομή σχετικά με τις καταστάσεις αυτές. Δεν αποτελεί παρά ταύτα, τόσο σημαντικό τμήμα της εξελικτικής πορείας του μοντέλου **στο διηνεκές** η αρχική του θέση. Ωστόσο, όταν η ανάλυση συγκεντρώνεται κυρίως σε βραχυχρόνια πλαίσια, ή αφορά σε μαρκοβιανά μοντέλα τα οποία διέπονται από ιδιαίτερες ιδιότητες (μη – τακτικότητα αλυσίδας) οι οποίες θα περιγραφούν στη συνέχεια, τότε αναδεικνύεται η σπουδαιότητα του τμήματος αυτού.

Σε κάθε διαδοχική περίοδο, το μοντέλο μετακινείται σταδιακά από κατάσταση σε κατάσταση. Κάθε τέτοια κίνηση καλείται βήμα (step). Έτσι, εάν η αλυσίδα βρίσκεται στην παρούσα χρονική στιγμή στην κατάσταση x_i και στο επόμενο βήμα μετακινηθεί στην κατάσταση x_j (με $x_i, x_j \in X$), το βήμα αυτό συμβολίζεται ως $x_i \to x_j$. Το οποίο δεικνύει και τη δυνατότητα μετάβασης από τη μία κατάσταση στην άλλη. Η πιθανότητα πραγματοποίησης του βήματος αυτού, καλείται πιθανότητα μετάβασης (transition probability) και συμβολίζεται ως p_{ij}. Το σχήμα 1.2 προσφέρει μία διαγραμματική απεικόνιση ενός απλούστατου μοντέλου Markov με 2 δυνατές καταστάσεις x_i και x_j καθώς και τις πιθανότητες μετάβασης από και προς κάθε κατάσταση.



σχ. 1.2

Οι πιθανότητες Pii και Pjj, δείχνουν τη δυνατότητα το σύστημα να παραμείνει στην ίδια κατάσταση στην (κάθε) επόμενη χρονική περίοδο. Γενικά, τα βέλη υποδηλώνουν τη δυνατότητα το σύστημα να μετακυληθεί από την κατάσταση την οποία ξεκινάνε αυτά, στην κατάσταση την οποία καταλήγουν. Έτσι, όταν δύο «κόμβοι» δεν ενώνονται με κάποιο βέλος, δεν υπάρχει δυνατότητα μετακύλησης από τη μία κατάσταση προς την άλλη και η μεταξύ τους πιθανότητα μετάβασης είναι 0. Διαφορετικά, η υπό συνθήκη πιθανότητα να μεταβεί το μοντέλο σε κάποια

κατάσταση x_y από μία πρότερη κατάσταση x_x, δεδομένου ότι οι 2 αυτοί κόμβοι δεν ενώνονται με σχέση μετάβασης (βέλος), θα είναι ίση με:

$$P(x_y \mid x_z) = p_{zy} = 0$$

Τα στοιχεία τώρα, που αποτελούν τις πιθανότητες μετάβασης, συστήνουν το βασικότερο τμήμα ενός μαρκοβιανού μοντέλου. Συγκεντρωμένα όλα (οι πιθανότητες μετάβασης) σε έναν τετραγωνικό πίνακα, παράγουν τον πίνακα (μήτρα) μετάβασης (transition matrix). Η τοποθέτησή τους, εξαρτάται από τις διασταυρούμενες γραμμές και στήλες. Συγκεκριμένα, κάθε γραμμή αναφέρεται στις δυνατές καταστάσεις την παρούσα χρονική στιγμή, ενώ οι στήλες αφορούν τις καταστάσεις μετάβασης. Ο πίνακας μετάβασης γενικά, περιλαμβάνει την πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός στο επόμενο βήμα του μοντέλου, δεδομένης της παρούσας κατάστασης, όποια και αν είναι αυτή. Συνεπώς, κάθε στοιχείο του πίνακα αυτού, αποτελεί την υπό συνθήκη πιθανότητα, δεδομένης της κατάστασης που περιγράφει η αντίστοιχη γραμμή του στοιχείου, να πραγματοποιηθεί το γεγονός (κατάσταση) της αντίστοιχης στήλης.. Συμπερασματικά, το στοιχείο P_{ij} αντιστοιχεί στη γραμμή i και τη στήλη j. Σχεδιάζοντας τη μήτρα μετάβασης για το παραπάνω σχήμα (σχ. 1.2), έχουμε:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_i & x_j \end{array} \\ \begin{array}{c} x_i \\ x_j \end{array} & \begin{pmatrix} p(x_i \mid x_i) & p(x_j \mid x_i) \\ p(x_i \mid x_j) & p(x_j \mid x_j) \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_i & x_j \end{array} \\ \begin{array}{c} x_i \\ x_j \end{array} & \begin{pmatrix} p_{ii} & p_{ij} \\ p_{ji} & p_{jj} \end{pmatrix} \end{array}$$

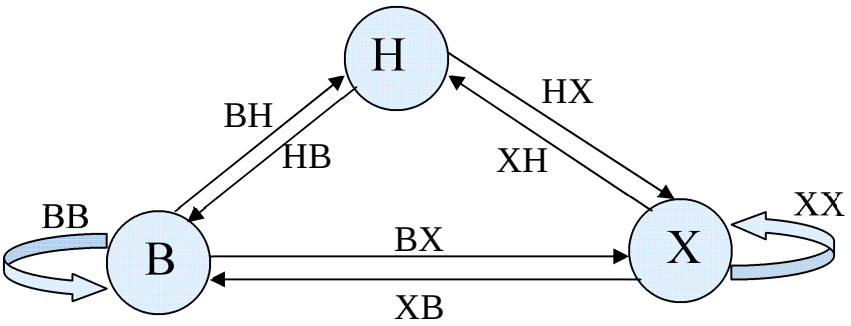
Οι Kemeny, Snell και Thomson[19], μέσα από τη δουλειά τους, μας προμηθεύουν με ένα απλό μαθηματικό παράδειγμα μίας μαρκοβιανής αλυσίδας. Το παράδειγμα αυτό αντλείται από το διάσημο βιβλίο του L. Frank Baum (1900), «*Ο Θαυμάσιος Μάγος του Οζ*». Σύμφωνα με το βιβλίο, στον κόσμο του Οζ, ο καιρός φαίνεται να έχει μία ιδιαίτερη «συμπεριφορά». Χαρακτηριστικά αναφέρεται ότι, ο κόσμος του Οζ είναι ευλογημένος από πολλά πράγματα, όχι όμως και από καλό καιρό. Είναι αδύνατον να παρατηρηθεί καλός καιρός 2 συνεχόμενες ημέρες. Έτσι, εάν κάποια μέρα ο καιρός είναι καλός, τότε είναι εξίσου πιθανό την επόμενη είτε να βρέχει, είτε να χιονίζει. Επιπρόσθετα, εάν ο καιρός είναι βροχερός ή χιονίζει, η πιθανότητα να

[19] J. G. Kemeny, J. L. Snell, G. L. Thompson, (1974). *Introduction to Finite Mathematics*, (3rd ed). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall [67].

παραμείνει ίδιος και την επόμενη ημέρα είναι ίση. Τέλος, εάν υπάρξει αλλαγή καιρού από αυτές τις καταστάσεις (βροχή ή χιόνι), μόνον τις μισές φορές θα παρατηρηθεί ηλιοφάνεια. Όλα αυτά τα δεδομένα, είναι επαρκή για να σχεδιαστούν οι σχέσεις, οι πιθανότητες και τελικά, ο πίνακας μετάβασης. Το σύνολο των δυνατών καταστάσεων για το παραπάνω σύστημα ορίζεται το K, για το οποίο ισχύει:

K = {

Η πρώτη ενέργεια που μπορεί να γίνει, είναι η σχεδίαση των σχέσεων μετάβασης. Αυτό είναι δυνατό, καθώς το συγκεκριμένο σύστημα παραμένει απλό. Σε διαφορετική περίπτωση (πολυάριθμες καταστάσεις), η διαγραμματική απεικόνιση θα καθίστατο εν γένει ανέφικτη. Προκύπτει συνεπώς το παρακάτω διάγραμμα (σχ. 1.3) σχέσεων μετάβασης.



σχ. 1.3

Τα στοιχεία BH, BH, BX, XB, XH, XX, HB, HX περιγράφουν τις σχέσεις μετάβασης. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ωστόσο, ότι δεν υπάρχει κανένα βέλος ροής από την κατάσταση H (Ήλιος) προς την ίδια κατάσταση (δεν υπάρχει σχέση HH). Αυτό συμβαίνει καθώς εξ' υποθέσεως είναι γνωστό ότι δε γίνεται να παρατηρηθεί καλός καιρός επί 2 συνεχόμενες ημέρες. Πλέον, είναι εύκολο να κατασκευαστεί ο πίνακας μετάβασης του παραπάνω προβλήματος (πίνακας 1.1).

πίνακας 1.1

	B	H	X
B	BB	BH	BX
H	HB	—	HX
X	XB	XH	XX

Εντούτοις, αντικειμενικός στόχος είναι η αριθμητική απόδοση των σχέσεων μετάβασης. Η υπό συνθήκη πιθανότητα παρατήρησης του κάθε γεγονότος, δεδομένων των πρότερα παρατηρούμενων (καταστάσεων). Όπως έχει επαναδιατυπωθεί, η συγκεκριμένη εργασία αποτελεί μία εμπειρική διαδικασία εντοπισμού των πιθανοτήτων μετάβασης. Παρά ταύτα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι πληροφορίες που αντλούνται μέσα από το ίδιο το βιβλίο, παρέχουν τη δυνατότητα ανάπτυξης ενός συστήματος εξισώσεων για την εύρεση των πιθανοτήτων αυτών. Συγκεκριμένα, έχουμε:

- BB = XX (1)

  Η πιθανότητα ο καιρός να παραμείνει ίδιος μετά από βροχή ή χιόνι.

- HH = 0 (2)

  Η πιθανότητα να παρατηρηθεί καλοκαιρία επί 2 συνεχόμενες ημέρες.

- HB = HX (3)

  Η πιθανότητα να παρατηρηθεί βροχή ή χιόνι μετά από καλοκαιρία .

- $BX = BH = \frac{BB}{2}$ και $XB = XH = \frac{XX}{2}$ (4)

  Η πιθανότητα να αλλάξει ο καιρός.

- BX + BB + BH = XB + XX + XH = HB + HX + HH =1 (5)

  Η πιθανότητα από μία συγκεκριμένη κατάσταση, να μεταβεί το σύστημα σε οποιαδήποτε άλλη.

- $BX, BB, BH, XB, XX, XH, HH, HB, HX \in [0,1]$ (6)

  Ο περιορισμός μη αρνητικότητας καθώς και το σύνολο τιμών των πιθανοτήτων μετάβασης (η συνολική πιθανότητα παρατήρησης όλων των δυνατών ενδεχομένων αθροίζει στη μονάδα).

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, λαμβάνουμε τις σχετικές τιμές μετάβασης από κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη. Συνεπώς, έχουμε:

Από (2), (3), (5) και (6):

- $HH = 0$ και $HB = HX = \frac{1}{2}$

Από (4), (5) και (6):

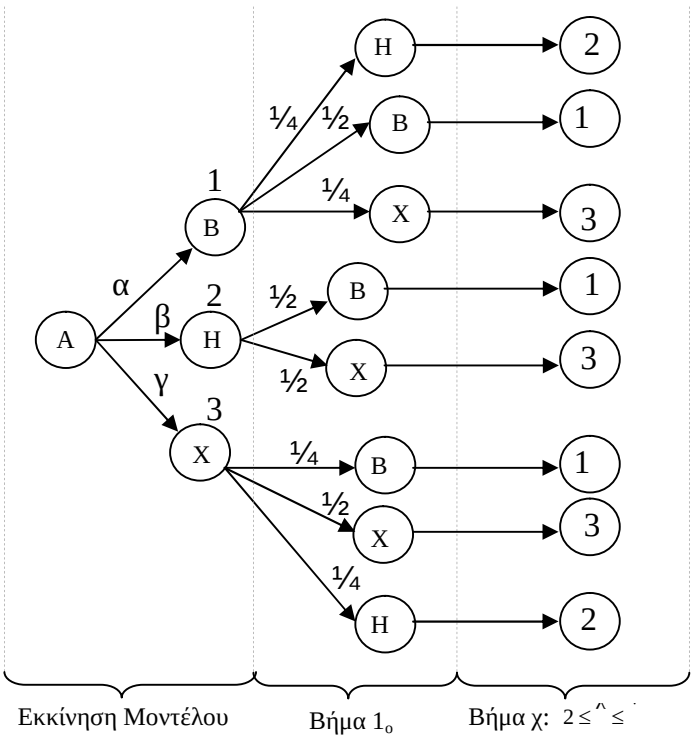
- ΒΗ = ΧΗ = ΒΧ = ΧΒ = $\frac{1}{4}$ και ΒΒ = ΧΧ = $\frac{1}{2}$

Έτσι διαμορφώνεται ο παρακάτω πίνακας μετάβασης (πίνακας 1.2) για « τον κόσμο του Οζ».

πίνακας 1.2

	Β	Η	Χ
Β	½	¼	¼
Η	½	0	½
Χ	¼	¼	½

Η ροή του συγκεκριμένου συστήματος στο χρόνο, μπορεί να απεικονιστεί με τη βοήθεια ενός δενδροδιαγράμματος (σχ. 1.4).



σχ. 1.4

Το παραπάνω σχήμα (σχ. 1.4), αποτελεί την αναλυτική μορφή του σχήματος 1.3. Το τμήμα Α αποτελεί ένα σύνολο πληροφόρησης, το οποίο δίνει την κατανομή

των πιθανοτήτων α, β, γ. Των πιθανοτήτων εμφάνισης μίας εκ των δυνατών καταστάσεων (Β, Η, Χ) στην αρχή του μοντέλου (πρώτη ημέρα), όπως περιεγράφη και παραπάνω. Το μοντέλο μετακυλίεται κατά το πρώτο βήμα, δεδομένης της αρχικής κατάστασης (εκκίνησης) και βάσει των αντίστοιχων υπό συνθήκη πιθανοτήτων σε κάποια εκ των δυνατών καταστάσεων. Στα ακόλουθα βήματα, το μοντέλο συνεχίζει να «προχωρά» ακολουθώντας την αρχική νομοτέλεια (σε ότι αφορά την αρχική κατανομή των υπό συνθήκη πιθανοτήτων). Τα σύνολα που σημαίνονται με 1, 2, 3 (βήμα χ), αντιπροσωπεύουν την επανάληψη των αντίστοιχων κόμβων, όπως αυτοί παρουσιάζονται μέσα από το διάγραμμα (στο τμήμα εκκίνησης του μοντέλου). Ο συνολικός αριθμός των βημάτων παραμένει αόριστος (ν), εξασφαλίζοντας έτσι την εγκυρότητα του μοντέλου είτε βραχυχρόνια (μικρός αριθμός βημάτων), ή ακόμα και στο διηνεκές (άπειρα βήματα).

1.4 Τα βασικά είδη αλυσίδων Markov

Τα μοντέλα Markov, διακρίνονται σε 2 βασικές κατηγορίες. Η παράμετρος που τα καθιστά διαχωρίσιμα (στις 2 αυτές βασικές κατηγορίες), αφορά στο χρόνο κατά τον οποίο μπορούν να παρατηρηθούν διαφορές στις καταστάσεις έκαστου υποδείγματος. Το γεγονός αυτό έχει αντίκτυπο στον τρόπο λειτουργίας των συγκεκριμένων μοντέλων, διαφοροποιώντας τον χρονικό ορίζοντα μετακύλησης των συστημάτων αυτών από βήμα σε βήμα Σύμφωνα λοιπόν με την παράμετρο του χρόνου, τα μαρκοβιανά μοντέλα χωρίζονται σε: 1) Συνεχούς χρόνου και 2) Διακριτού χρόνου. Ωστόσο, παρατηρούνται και άλλες κατηγοριοποιήσεις μοντέλων που αφορούν σε λοιπούς παράγοντες, που σχετίζονται με κανόνες που διέπουν τις πιθανότητες μετακύλησης από κατάσταση σε κατάσταση για κάθε βήμα του μοντέλου. Κατά τον τρόπο αυτόν, τα μοντέλα μπορούν να διακριθούν σε: α) Αλυσίδες με σταθερές πιθανότητες μετάβασης (stationary transition probability chains) και β) Αλυσίδες με μη – σταθερές πιθανότητες μετάβασης (non-stationary transition probability chains). Μία ακόμη ιδιαίτερη κατηγορία αλυσίδων Markov, καλούνται μονότονες (monotone Markov Chains). Χαρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι η προσέγγιση των πιθανοτήτων μετάβασης μέσω άνω και κάτω φραγμών – ορίων. Εντούτοις το βασικό αντικείμενο μελέτης της συγκεκριμένης εργασίας θα περιέλθει γύρω από αλυσίδες διακριτού χρόνου με σταθερές πιθανότητες μετάβασης.

1.4.1 Αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου

Απαντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία ως Continuous – time Markov chains. Όπως αποκαλύπτει και η ονομασία τους, στα συγκεκριμένα μοντέλα οι μεταβολές στις διάφορες δυνητικές καταστάσεις του υπό εξέταση συστήματος, είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Έτσι, μία αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, μπορεί να οριστεί ως μία στοχαστική διαδικασία η οποία περιλαμβάνει την Μαρκοβιανή ιδιότητα και για την οποία ισχύει:

$$P(X(t+h) = y \mid X(h) = z, X(u) = x(u), 0 \le u \le h\} = P\{X(t+h) = y \mid X(h) = z)$$

Η εκκίνηση του συστήματος γίνεται τη χρονική στιγμή u όπου το σύστημα περιέρχεται στην κατάσταση x(u). Η μεταβολή του συστήματος εξαρτάται μόνο από την αμέσως προηγούμενη παρατηρηθείσα κατάσταση. Οι δείκτες h, u και t+h αντιπροσωπεύουν τις χρονικές περιόδους στις οποίες παρατηρείται διαφοροποίηση στην κατάσταση του μοντέλου. Έτσι, αν T το χρονικό σύνολο μέσα στο οποίο λειτουργεί το μοντέλο, τότε ισχύει: $\{h, u, t, t+h \in T \mid h \neq u \neq t \neq t+h \neq h-u\}$. Γεγονός που είναι ενδεικτικό του μηχανισμού λειτουργίας των συγκεκριμένων συστημάτων υπό συνεχή χρόνο. Συμπερασματικά, σε ότι αφορά τα βήματα τέτοιων μοντέλων, αυτά μπορούν να χαρακτηριστούν ως μη προκαθορισμένα. Η χρήση τους πραγματοποιείται εκτενώς σε Αναμονικά συστήματα (Waiting systems – queueing) αλλά και μοντέλα Επιβίωσης (Survival Analysis models).

1.4.2 Αλυσίδες Markov διακριτού χρόνου

Περισσότερο γνωστά ως Discreet – time Markov chains, τα συγκεκριμένα μοντέλα οφείλουν επίσης την ονομασία τους στο χρονικό ορίζοντα κατά τον οποίο εξετάζονται για μεταβολές. Οι περίοδοι – βήματα μοντέλων που εμπίπτουν στην κατηγορία αυτή, είναι προκαθορισμένες και ίσες. Τα μοντέλα με τις αντίστοιχες ιδιότητες όπως αυτές θα περιγραφούν παρακάτω, θα αποτελέσουν το βασικό αντικείμενο εφαρμογής στην παρούσα εργασία.

Ορίζοντας ένα μοντέλο Markov διακριτού χρόνου, ας γίνει πρώτα η υπόθεση μιας τυχαίας στοχαστικής διαδικασίας[20] $\{X_n,\ n = 0,1,2,...\}$ η οποία παίρνει τιμές σε ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο πιθανών τιμών. Το σύνολο αυτό,

[20] Ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο εξελίσσεται τυχαία στο χρόνο.

συμβολίζεται από το σύνολο των μη-αρνητικών ακεραίων {0, 1, 2, ...}. Εάν X_n=i, τότε η διαδικασία είναι στην κατάσταση i τη χρονική στιγμή n. Γίνεται επίσης η υπόθεση ότι οποτεδήποτε η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i, υπάρχει μια συγκεκριμένη πιθανότητα P_{ij} να μετακυληθεί σε (άμεσα) επόμενο βήμα στην κατάσταση j. Συνοψίζοντας, μία στοχαστική διαδικασία καλείται σειρά Markov διακριτού χρόνου, εάν ισχύει:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i,\ X_{n\text{-}1} = i_{n\text{-}1,\ \ldots,}\ X_0 = i_0) \ = \ P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij},\ \forall\ i,\ j$$

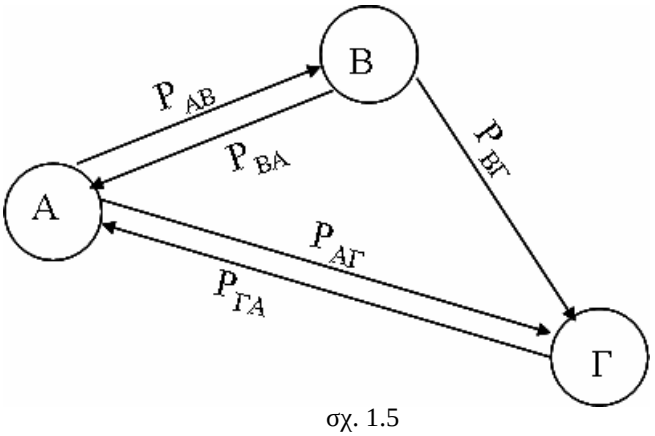
1.5 Ιδιότητες αλυσίδων Markov

Πέραν της βασικής ιδιότητας έλλειψης μνήμης (όπως περιεγράφη στην αρχή) η οποία διέπει όλα τα μοντέλα Markov, διαφορετικά Μαρκοβιανά συστήματα εμφανίζουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, τα οποία προσδίδουν μοναδικές ιδιότητες στον τρόπο λειτουργίας των. Οι ιδιότητες αυτές συνοψίζονται αμέσως παρακάτω καθώς και τα χαρακτηριστικά που τις διακρίνουν.

1.5.1 Η *«Αμείωτη»* αλυσίδα

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή στη διεθνή βιβλιογραφία ως «Irreducibility», ενώ απαντάται στην ελληνική, ακόμα και ως «Μη Υποβιβάσιμη». Εάν κάποιο μοντέλο δομείται από την ιδιότητα αυτήν, τότε είναι δυνατόν από κάθε κατάσταση (του μοντέλου) να φτάσουμε σε οποιαδήποτε άλλην. Το γεγονός αυτό δεν είναι απαραίτητο να συντελείται σε ένα μόνο βήμα. Κάτι τέτοιο επαφίεται στη διαχρονική και αδιάκοπτη λειτουργία του μοντέλου, ώστε η πρόσβαση από κάποια δεδομένη κατάσταση σε κάποια άλλη να γίνει ακόμα και εμμέσως δυνατή.

Η δυνατότητα μετάβασης από ένα στάδιο – κατάσταση σε κάποιο άλλο, όπως επαναδιατυπώθηκε, δεικνύεται μέσω ενός βέλους το οποίο ενώνει δύο states. Για παράδειγμα $x_i \rightarrow x_j$. Κατά τον τρόπο αυτόν απεικονίζεται η **μονόδρομη** δυνατότητα μετάβασης από το x_i στο x_j είτε άμεσα είτε έμμεσα (η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η μετακύληση από το x_j στο x_i δεν είναι εφικτή). Για να γίνει κατανοητή η έμμεση δυνατότητα μετάβασης, ας υποθέσουμε το παρακάτω σύστημα (σχ. 1.5).



σχ. 1.5

Χάριν απλούστευσης, γίνεται η υπόθεση ότι το μοντέλο δε μπορεί να μείνει στην ίδια κατάσταση για δύο συνεχόμενες περιόδους. Αποτυπώνοντας τώρα όλες τις σχέσεις μετάβασης αλγεβρικά έχουμε:

- $(A \leftrightarrow B) \equiv (\leftrightarrow \quad \rightarrow \quad {}_{AB} \quad \rightarrow \quad {}_{BA}$
- $(A \leftrightarrow \Gamma) \equiv (\Gamma \leftrightarrow A) \mid P(A \rightarrow \quad {}_{A} \quad \rightarrow$
- $B \rightarrow \Gamma \mid P(B \rightarrow \Gamma) = P_B$

Εάν η εκκίνηση του μοντέλου γίνει στην κατάσταση Γ (ή περιέλθει μία τυχαία περίοδο στην κατάσταση αυτή) γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η μετάβαση στην κατάσταση Β στην αμέσως επόμενη χρονική περίοδο είναι ανέφικτη. Συνεπώς, η πιθανότητα πραγματοποίησης της μετάβασης από το Γ στο Β θα είναι:

$$P(B \mid \Gamma) = P(X_{n+1} = B \mid X_n = \Gamma) = P_{\Gamma B} = 0 \ \forall n \in N$$

Ωστόσο, θεωρώντας ότι το σύστημα εκκινεί στην κατάσταση Γ (μία τυχαία χρονική στιγμή - χάρη στην ιδιότητα έλλειψης μνήμης), μπορεί να μετακυληθεί διαδοχικά στην κατάσταση Α και από το χρονικό εκείνο σημείο να μεταβεί στη Β. Παρατηρείται λοιπόν ότι η (υπό συνθήκη) πιθανότητα δεδομένου ότι το σύστημα βρίσκεται στο state Γ να περάσει στο μέλλον (σε κάποια χρονική στιγμή πλην της επόμενης) στο Β είναι μη μηδενική. Χαρακτηριστικά, η πιθανότητα μετάβασης στο Β από το Γ για πρώτη φορά, ισούται με:

$$P(B \mid \quad {}_{N} \quad {}_{\Gamma A} \quad {}_{\nu+1} \quad {}_{A\Gamma} \quad {}_{\nu} \quad {}_{AB}$$

όπου:

- N: ο ελάχιστος αριθμός περιόδων για να περιέλθει το σύστημα στην κατάσταση Β αρχόμενου από την Γ. Στην αρχή της εξίσωσης δεν υφίσταται ως δύναμη, αλλά ως ενδεικτικό των απαιτούμενων περιόδων, μέχρι το σύστημα να περιέλθει στην κατάσταση Β. Συνεπώς για το N ισχύει:

$$N \in 2^{*} \quad \in \mathbb{N}$$

- ν: Ο αριθμός περιόδων όπου το σύστημα θα μετακινείται μεταξύ της Γ και Α κατάστασης, πριν μεταβεί από την Α στη Β. Για το ν ισχύει:

$$\nu = \frac{N - 2}{2} = \kappa - 1$$

- P_{ij}: Η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην j. Με i, j $\in$ [A, B, .

Συμπερασματικά, αν $\kappa = 1 \rightarrow N = 2$, τότε ν = 0 και η πιθανότητα $P(B \mid \Gamma)$ θα ισούται με:

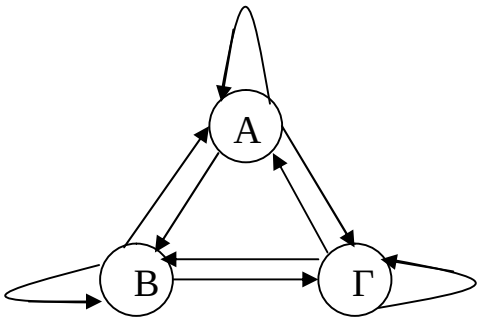
$$P(B \mid \Gamma) = \quad {}_{\Gamma A} \quad {}_{AB}$$

Γενικά, μπορεί να ειπωθεί ότι μία αλυσίδα καλείται αμείωτη όταν για οποιοδήποτε ζεύγος καταστάσεων i, j οι οποίες ανήκουν στο χώρο των δυνατών καταστάσεων του συστήματος υπάρχουν μη αρνητικοί αριθμοί θ, ξ για τους οποίους ισχύει:

$$P_{ij}^{\theta} > 0,\ P_{ji}^{\xi} > 0 \mid \theta, \xi \geq 0\ \forall i, j \in X$$

Πρέπει εδώ να αναφερθεί, ότι η συγκεκριμένη ιδιότητα απαντάται εκτενώς και ως ιδιότητα της *«Εργοδικότητας»* (Ergodicity). Μία ιδιάζουσα περίπτωση «Εργοδικών» αλυσίδων καλούνται *«Τακτικές»* (Regural: εξ ου και η ιδιότητα της Τακτικότητας - Regularity). Ως «Τακτική» καλείται η αλυσίδα της οποίας η μετάβαση από οποιοδήποτε στάδιο προς οποιοδήποτε άλλο (τα οποία ανήκουν στο χώρο των δυνατών της καταστάσεων Χ) σε οποιοδήποτε βήμα του μοντέλου (N) μπορεί να πραγματοποιηθεί. Κατά συνέπεια, η πιθανότητα μετάβασής του σε οποιοδήποτε βήμα, είναι θετική. Το σχήμα 1.6 παρέχει ένα παράδειγμα τέτοιων μοντέλων. Αλγεβρικά, ένα «Τακτικό» σύστημα περιγράφεται ως εξής:

$$P_{ij}^{n} > 0\ \forall\ i, j \in X, n \in N$$



σχ. 1.6

Ένα ιδιαίτερο γνώρισμα όλων των «*Εργοδικών*» αλυσίδων είναι η δυνατότητα προσδιορισμού των πιθανοτήτων μετάβασης στο μέλλον σε οποιαδήποτε (χρονική) περίοδο και μεταξύ οποιωνδήποτε καταστάσεων υψώνοντας τον πίνακα μετάβασης στην αντίστοιχη δύναμη – περίοδο και εντοπίζοντας το στοιχείο εκείνο που αφορά την υπό συνθήκη πιθανότητα μετακύλησης από την πρότερη (αρχική) κατάσταση στην επόμενη (στοιχείο ij). Στην προσπάθεια λοιπόν να προσδιοριστεί η πιθανότητα μετάβασης την περίοδο n από την αρχική κατάσταση i στην j, αρκεί ο υπολογισμός της παρακάτω σχέσης:

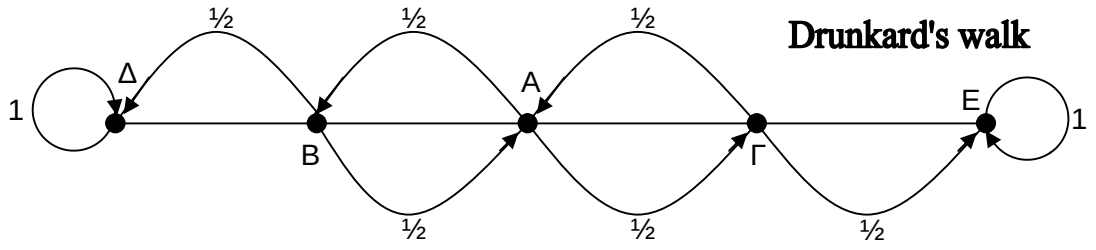
$$(i \rightarrow j)^{(n)} \ : \ P^{(n)}(j \mid i) = P_{ij}^{n} = (\overbrace{P * P * ... * P}^{n})_{ij}$$

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης κρίνεται εκτός στόχων εργασίας και για τω λόγω αυτόν παραλείπεται. Η μη δυνατότητα μετάβασης τώρα από κάποιο στάδιο σε κάποιο άλλο καταργεί κατά συνέπεια με τα παραπάνω την ιδιότητα της εργοδικότητας καθώς και τα λειτουργικά χαρακτηριστικά που τη συνοδεύουν. Μία πολύ γνωστή περίπτωση κατά την οποία μία αλυσίδα παύει να χαρακτηρίζεται ως «αμείωτη», υφίσταται κατά την ύπαρξη απορροφητικών σταδίων (absorbing states). Η αναφορά αυτών έγινε (ενδεικτικά) στον πρόλογο της παρούσας εργασίας.

1.5.2 Η «*Απορροφητική*» αλυσίδα

«Απορροφητικό», καλείται ένα στάδιο – κατάσταση στο οποίο εάν περιέλθει το σύστημά μας, τότε αδυνατεί να ξεφύγει προς λοιπές καταστάσεις. Αποτελεί μία ειδική κατηγορία αλυσίδων Markov. Είναι επομένως προφανές ότι η παραδοχή περί μετάβασης προς οποιαδήποτε κατάσταση από οποιαδήποτε (που πρέπει να ισχύει για τις αμείωτες αλυσίδες), καταρρίπτεται εξ υποθέσεως ύπαρξης απορροφητικών σταδίων. Η επισκόπηση του γνωστού μοντέλου που αναπαριστά τον «Περίπατο του

Μεθυσμένου» («Drunkard's Walk»), θα είναι διαφωτιστικό της καινούριας ορολογίας και του τρόπου με τον οποίο επηρεάζει ένα σύστημα εν τη παρουσία της.



σχ. 1.7

Το παραπάνω σχήμα (σχ. 1.7) αποτελεί τη διαγραμματική απεικόνιση του μοντέλου αυτού. Ως προς τη φιλολογία του μοντέλου, θεωρείται ότι ένας άνθρωπος (μεθυσμένος), αρχικά βρίσκεται σε κάποιο σημείο της διαδρομής ΔΕ. Εάν βρεθεί σε κάποιο εκ των σημείων Α, Β, Γ, αντιμετωπίζει την ίδια πιθανότητα ($\frac{1}{2}$) να πάει είτε δεξιά είτε αριστερά. Στο άκρο Δ της διαδρομής, βρίσκεται το σπίτι του, όπου εάν καταφέρει να φτάσει, τελικά μένει εκεί. Το γεγονός αυτό αντιπροσωπεύεται από το βέλος ανακύκλησης και την πιθανότητα επανάληψης του ενδεχομένου Δ (εάν σαφώς φτάσει το σύστημα στην κατάσταση Δ: $P(\Delta \mid \Delta) = 1$). Κατά παρόμοιο τρόπο, στο άκρο Ε της διαδρομής βρίσκεται ένα μπαρ, όπου επίσης εάν φτάσει (ο άνθρωπος της ιστορίας), θα μείνει εκεί ($P(\mathrm{E} \mid \mathrm{E}) = 1$). Τα σημεία – καταστάσεις Δ, Ε αποτελούν απορροφητικά στάδια, γεγονός που επαληθεύεται βάσει διαγράμματος από τη μη δυνατότητα μετάβασης προς άλλες καταστάσεις. Όλες οι δυνατές σχέσεις μετάβασης του παραπάνω συστήματος, παρουσιάζονται παρακάτω:

- $\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B} \equiv \mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{A} \mid \mathrm{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{1}{2} = \mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$
- $\mathrm{A} \leftrightarrow \Gamma \equiv \Gamma \leftrightarrow \mathrm{A} \mid \mathrm{P}(\Gamma \mid \mathrm{A}) = \frac{1}{2} = \mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \Gamma)$
- $\Gamma \rightarrow \mathrm{E} \mid \mathrm{P}(\mathrm{E} \mid \Gamma) = \frac{1}{2}$
- $\mathrm{B} \rightarrow \Delta \mid \mathrm{P}(\Delta \mid \mathrm{B}) = \frac{1}{2}$
- $\Delta \rightarrow \Delta \mid \mathrm{P}(\Delta \mid \Delta) = 1$
- $\mathrm{E} \rightarrow \mathrm{E} \mid \mathrm{P}(\mathrm{E} \mid \mathrm{E}) = 1$

Απορροφητικές καταστάσεις

Ο πίνακας μετάβασης του παραπάνω μοντέλου διαμορφώνεται ως εξής (πίνακας 1.3):

πίνακας 1.3: Πίνακας μετάβασης μοντέλου Drunkard's walk

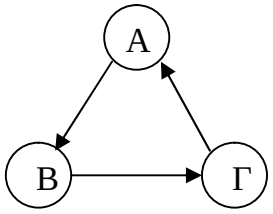
	Δ	Β	Α	Γ	Ε
Δ	1	0	0	0	0
Β	½	0	½	0	0
Α	0	½	0	½	0
Γ	0	0	½	0	½
Ε	0	0	0	0	1

Ιδιαίτερα στοιχεία που χρίζουν εξέχουσας σημασίας και μελέτης κατά την ύπαρξη αλυσίδων με τις συγκεκριμένες ιδιότητες («απορροφητικές» αλυσίδες), αποτελούν ο προσδιορισμός του (μέσου) χρόνου (σε βήματα μοντέλου) που απαιτείται ώστε το σύστημα τελικά να περιέλθει σε κάποιο απορροφητικό στάδιο, η πιθανότητα να καταλήξει σε κάποια συγκεκριμένη απορροφητική κατάσταση (όταν υπάρχουν περισσότερες της μίας, καθώς είναι δεδομένη η πιθανότητα απορρόφησης του συστήματος στο διηνεκές), η πιθανότητα το σύστημα τελικά να οδηγηθεί σε απορρόφηση, ο αναμενόμενος χρόνος (βήματα – φορές) που μπορεί να βρεθεί σε κάθε μεταβατική κατάσταση (Α, Β, Γ) προτού απορροφηθεί κ.α. Οι παράγοντες που αναμένεται να καθορίσουν τα στοιχεία αυτά, είναι η αρχική θέση (κατάσταση εκκίνησης του μοντέλου) αλλά και οι επιμέρους πιθανότητες μετάβασης. Εναλλακτικά μπορούν να αναζητηθούν κρίσιμες τιμές (πιθανότητες απορρόφησης – μετάβασης) ώστε το σύστημα να μην οδηγείται σε απορρόφηση πριν το πέρας κάποιων περιόδων, με κάποιο επίπεδο σημαντικότητας – στατιστικό σφάλμα.

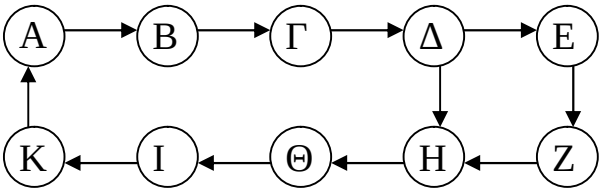
1.5.3 Η *«Περιοδική»* αλυσίδα

Το φαινόμενο της περιοδικότητας (periodicity) είναι γνωστό καθώς απαντάται σε πολλές επιστήμες αλλά και την καθημερινότητα (περιοδικά: βιβλία τα οποία εκδίδονται ανά προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα). Γενικά περιγράφει την επανάληψη εμφάνισης ενός γεγονότος ανά δεδομένες (ίσες) χρονικές περιόδους. Σε

ότι αφορά τις στοχαστικές ανελίξεις γενικότερα και ειδικότερα τα Μαρκοβιανά συστήματα, περιοδική καλείται μία αλυσίδα η οποία περιλαμβάνει μία ή περισσότερες καταστάσεις στις οποίες η δυνατότητα επανακύλησης αποτελεί ένα περιοδικό φαινόμενο. Μπορεί δηλαδή να πραγματοποιηθεί ανά δεδομένα χρονικά διαστήματα. Παρακάτω (σχ. 1.8), παρουσιάζονται διαγραμματικά δύο περιπτώσεις περιοδικών αλυσίδων.



σχ. 1.8.α



σχ. 1.8.β

Στο πρώτο σχήμα (σχ. 1.8.α) παρατηρούνται 3 κόμβοι (Α, Β, Γ). Το σύστημα μετακινείται διαδοχικά μεταξύ αυτών. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι κάθε κατάσταση επαναλαμβάνεται ανά τρεις περιόδους. Συνεπώς, η αντίστοιχη αλυσίδα είναι περιοδική με περίοδο 3γ όπου $\gamma \in \mathbb{N}$. Κατά αναλογία, το σύστημα του διαγράμματος 1.8.β, περιλαμβάνει 10 κόμβους. Κάθε κατάσταση εκ των Α, Β, Γ, Δ, Η, Θ, Ι, Κ μπορεί να επαναληφθεί μετά από ν ή ν + 2 βήματα, με ν =8γ. Οι καταστάσεις Ε, Ζ μπορούν να επαναληφθούν μόνον μετά από 10γ βήματα ή ν +2. Είναι επομένως κατανοητό ότι το σύστημα δεν παρουσιάζει κάποια σταθερή περίοδο επανάληψης των ενδεχομένων – καταστάσεων του. Η περίπτωση αυτή, δίνει τη δυνατότητα του πλήρους ορισμού της ιδιότητας της περιοδικότητας μίας αλυσίδας.. Συνεπαγωγικά, ένα στάδιο i θεωρείται ότι έχει περίοδο k, όταν η επάνοδος στο state i μπορεί να πραγματοποιηθεί σε k πολλαπλάσια βήματα για τα οποία ισχύει:

$$T_i = k = \text{ΜΚΔ}\{n : P(X_n = i \mid X_0 = i) > 0\}$$

Δηλαδή το k είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των βημάτων n που απαιτούνται, ώστε εκκινώντας το σύστημα από την τυχαία κατάσταση i, η πιθανότητα να επιστρέψει σε αυτήν (μετά από πολλαπλάσια του n βήματα) είναι θετική. Ωστόσο, εάν k=1 τότε το στάδιο καλείται «απεριοδικό». Η απορροφητική κατάσταση, αποτελεί μία ιδιάζουσα περίπτωση απεριοδικών καταστάσεων, καθώς:

$$P(X_t = i \mid X_{t-n} = i) = 1 \ \forall t, t-n > 0 \quad \text{με } n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάζοντας πάλι το σχήμα 1.8.β, παρατηρείται ότι η επανάληψη των καταστάσεων συμβαίνει κάθε 8γ και 10γ βήματα ($\gamma \in \mathbb{N}$). Εφαρμόζοντας τον

παραπάνω τύπο, λαμβάνεται ότι $k = \text{ΜΚΔ}\{8,10,16,18,....\} = 2$ είναι η περίοδος του συστήματος. Ωστόσο, πρέπει να διευκρινιστεί εδώ, πως το γεγονός αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι αναμένεται η επανάληψη των καταστάσεων κάθε 2 βήματα (αλλά ανά πολλαπλάσια του 2). Ένα θεώρημα το οποίο απορρέει από την ιδιότητα της περιοδικότητας, περιγράφει πως αν για 2 τυχαίες καταστάσεις i, j οι οποίες επικοινωνούν μεταξύ τους (δηλαδή ισχύει $i \leftrightarrow j$) ισχύει $T_i = \theta$, τότε συνεπαγωγικά η περίοδος επανάληψης της κατάστασης j θα είναι ίση με αυτή της i. Άρα, για i, j με $i \leftrightarrow j = j \leftrightarrow i$, τότε $T_i = T_j$.

1.5.4 Η *«Επαναληπτική»* αλυσίδα

Μία αλυσίδα καλείται «Επαναληπτική» (Recurrent) ή «Επίμονη» (Persistent), όταν για κάποια κατάσταση i που ανήκει σε αυτήν (στο χώρο των δυνατών καταστάσεων του συστήματος – αλυσίδας), η πιθανότητα το σύστημα να επιστρέψει στο (κάθε) συγκεκριμένο state σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων - περιόδων, είναι ίση με τη μονάδα. Ουσιαστικά, η ιδιότητα αυτή περιγράφει ένα γεγονός το οποίο τελείται με βεβαιότητα (θα πραγματοποιηθεί στο μέλλον) και όχι υπό καθεστώς είτε αβεβαιότητας είτε ρίσκου. Κατ' αναλογία, η ιδιότητα αυτή μπορεί να αφορά σε επιμέρους στάδια ή τμηματικά σε επιμέρους αλυσίδες εκ του συνόλου.

Εξετάζοντας ξανά το σύστημα του σχήματος 1.8.β, κάθε τμήμα – κατάσταση της τμηματικής αλυσίδας $\text{Η} \to \Theta \to \text{Ι} \to \text{Κ} \to \text{Α} \to \text{Β} \to \Gamma \to \Delta$, αναμένεται να παρατηρηθούν τουλάχιστον μία φορά κάθε 10 βήματα. Δεν ισχύει το ίδιο και για τις καταστάσεις Ε, Ζ. Δεδομένου ότι οι σχέσεις μετάβασης υφίστανται (βάσει βέλους μετάβασης, υπάρχει αντίστοιχη αυστηρά θετική πιθανότητα) όπως υποδεικνύει το διάγραμμα και κάνοντας την υπόθεση ότι το μοντέλο συνεχίζει να «τρέχει» αδιαλείπτως (στο διηνεκές) για πεπερασμένο αριθμό βημάτων (ακόμα και για έναν αυθαίρετα μεγάλο αριθμό βημάτων ο οποίος ωστόσο δε θα προσεγγίζει το άπειρο), υπάρχει πάντα η πιθανότητα, το σύστημα να μη μεταβεί ποτέ στην κατάσταση Ε και κατά συνέπεια στη Ζ, διερχόμενο από την κατάσταση Δ. Η αναφορά στο άπειρο γίνεται (βάσει και του νόμου των «Μεγάλων αριθμών»), για το λόγο του ότι η πιθανότητα εμφάνισης της κατάστασης Ε και συνεπώς της Ζ μετά από άπειρο αριθμό περιόδων (για τις οποίες το σύστημα βρίσκεται σε αδιάκοπτη λειτουργία), γίνεται πλέον βέβαια, καθώς το άπειρο συνιστά έναν αριθμό αυθαίρετα μεγάλο, στον οποίο κάθε «δυνατό» ενδεχόμενο αναμένεται να εμφανιστεί τουλάχιστον μία φορά με πιθανότητα 1. Αλγεβρικά, ισχύει:

- Για τον κόμβο Δ: $P(\mathrm{E}\,|\,\Delta)+P(\mathrm{H}\,|\,\Delta)=1$ και $P(\mathrm{E}|$ [illegible] άρα $P(\mathrm{E}\,|\,\Delta)=P_{\Delta\mathrm{E}}=a<1$. Συνεπώς υπάρχει 1-α πιθανότητα το σύστημα εφόσον φτάσει στον κόμβο Δ, να μην περάσει από τους κόμβους Ε, Ζ. Η πιθανότητα αυτή φθίνει καθώς αναζητείται η σχετική συχνότητα το σύστημα να μην περάσει ούτε μία φορά από τον κόμβο Ε ύστερα από n περιόδους.

Οι κόμβοι Ε, Ζ καλούνται μεταβατικοί (transient). Η λειτουργία τους είναι εκ διαμέτρου αντίθετη με αυτή των επαναληπτικών κόμβων (Α, Β, Γ, Δ, Η, Θ, Ι, Κ). Η διαφορά μεταξύ επαναληπτικής και μεταβατικής κατάστασης - αλυσίδας είναι, ότι ενώ στην επαναληπτική η πιθανότητα να επιστρέψει το σύστημα στην ίδια κατάσταση είναι 1, στη μεταβατική υπάρχει μία θετική πιθανότητα να μην επιστρέψει «ποτέ» (το σύστημα) στην κατάσταση αυτή.

Στην περίπτωση τώρα όπου η πιθανότητα επιστροφής του συστήματος σε οποιαδήποτε κατάσταση i (εκ των δυνατών) είναι ίση με τη μονάδα, τότε η αλυσίδα αυτή καλείται «Γνήσια Επαναληπτική» (Positive Recurrent). Ένα τέτοιο σύστημα (στην πιο απλή του μορφή), αναπαριστά το σχήμα 1.8.α. Το συγκεκριμένο μοντέλο αφορά σε ένα ντετερμινιστικό σύστημα, στο οποίο η μετάβαση από τη μία κατάσταση σε κάποια άλλη είναι προκαθορισμένη. Η μόνη πιθανοθεωρητική προσέγγιση σε ένα τέτοιο μοντέλο, μπορεί να αφορά μόνο στην κατανομή των πιθανοτήτων των καταστάσεων ως αρχικές.

Παρατηρώντας κάποιος πολύ προσεκτικά τη δομή των αλυσίδων 1.8.α και 1.8.β μπορεί να κάνει μία απλή παρατήρηση η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί ακόμα και ως αξίωμα σχετικά με τον προσδιορισμό μίας αλυσίδας ως γνησίως επαναληπτικής.

Πρόταση: *Εάν σε ένα τυχαίο μαρκοβιανό (ή γενικότερα στοχαστικό) σύστημα (το οποίο δομείται από την ιδιότητα της Έλλειψης Μνήμης) υπάρχει τουλάχιστον μία κλειστή διαδρομή ή κύκλωμα (ένα σύνολο καταστάσεων τα οποία ενώνονται μεταξύ τους μέσω κάποιας διαδρομής από την οποία είναι δυνατόν να μη διαφύγουμε) το οποίο δεν περιλαμβάνει όλες τις καταστάσεις του συστήματος, τότε σε καμία περίπτωση το σύστημα αυτό δε μπορεί να χαρακτηριστεί ως γνησίως επαναληπτικό.*

Στο σημείο αυτό κρίνεται αναγκαίο να αποσαφηνιστεί η έννοια του κυκλώματος, κάτι το οποίο ομοιάζει τα μέγιστα με το γνωστό ηλεκτρικό κύκλωμα στη βάση του ότι και τα 2 αφορούν κάποια κλειστή διαδρομή. Ως

κύκλωμα (circuit), περιγράφεται το μονοπάτι το οποίο συνδέει έναν κόμβο με τον εαυτό του. Ένα κύκλωμα, καλείται κύκλος (cycle), όταν κατά μήκος της διαδρομής – μονοπατιού δεν απαντώνται επαναληπτικοί κόμβοι. Μερικά παραδείγματα θα είναι πιο διαφωτιστικά της παραπάνω ορολογίας. Τα παραδείγματα αυτά θα αντληθούν από τα σχήματα της ενότητας αυτής.

<u>Παραδείγματα κυκλωμάτων:</u>

- (Σχ. 1.3): Οι κόμβοι Χ και Β (αυτούσιοι) με πιθανότητα επανάληψης σε κάθε περίοδο $P(X \mid X)$ και $P(B \mid B)$ αντίστοιχα. Συνιστούν κύκλους.
- (Σχ. 1.5): Οι διαδρομές:

  $\mathrm{A} \rightleftarrows \mathrm{B}$, $\mathrm{B} \rightleftarrows \mathrm{A}$, $\mathrm{B} \rightleftarrows \Gamma$ και $\Gamma \rightleftarrows \mathrm{B}$
- (Σχ. 1.7): Οι απορροφητικοί κόμβοι Δ και Ε
- (Σχ. 1.8.β): Η διαδρομή:

  $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \Gamma \to \Delta \to \mathrm{H} \to \Theta \to \mathrm{I} \to \mathrm{K} \to \mathrm{A}$

Σε ότι αφορά τώρα την απόδειξη της παραπάνω πρότασης, αυτή καθίσταται εύκολη, εάν κάποιος αναλογιστεί πως σε κάποια κλειστή διαδρομή, τμήμα εκ του συνόλου του μοντέλου - αλυσίδας, το σύστημα είναι δυνατόν να ανακυκλώνεται μεταξύ των καταστάσεων που βρίσκονται στο «εσωτερικό» της διαδρομής, χωρίς να διαφεύγει «ποτέ» (λόγω της έλλειψης μνήμης των συστημάτων αυτών) προς τις λοιπές καταστάσεις του συστήματος. Για παράδειγμα στο σχήμα 1.8.β, έγινε η υπόθεση ότι:

$$P(\mathrm{E} \mid \Delta) = P_{\Delta\mathrm{E}} = a$$

Όμως:

$$P(\mathrm{E} \mid \Delta) + P(\mathrm{H} \mid \Delta) = 1 \text{ και } P(\mathrm{E}|$$

Άρα:

$$P(\mathrm{E} \mid \Delta) = P_{\Delta\mathrm{E}} = a \in (0,1)$$

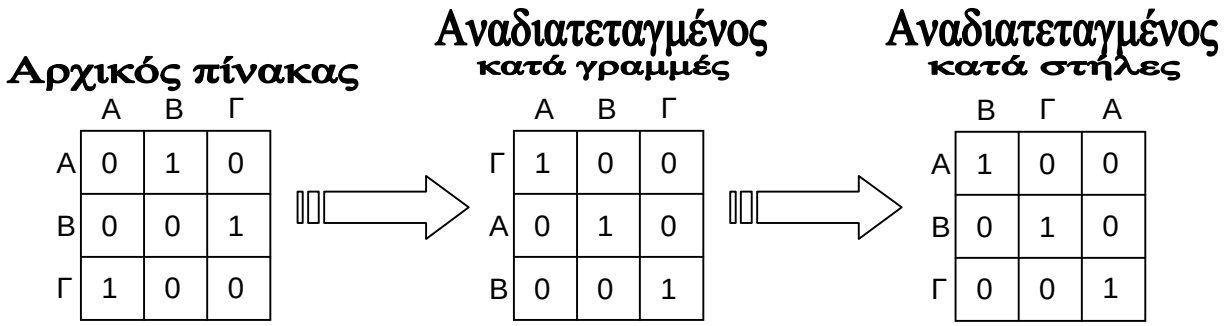
Κατά συνέπεια, κάθε φορά που το σύστημα φτάνει στην κατάσταση Δ ανεξαρτήτως του τι έχει συμβεί στην ιστορία του συστήματος (στις προγενέστερες

περιόδους), θα αντιμετωπίζει μία πιθανότητα $1-a$ να μη μεταβεί στις καταστάσεις Ε, Ζ.

Ωστόσο, στις περισσότερες περιπτώσεις, η γραφική αναπαράσταση του μοντέλου θεωρείται δύσκολη έως αδύνατη λόγω πολυπλοκότητας αυτού (πολλαπλές καταστάσεις και σχέσεις μετάβασης). Ο ερευνητής έχει συνήθως πρόσβαση μόνο στον πίνακα μετάβασης ο οποίος παραμένει το βασικότερο εργαλείο των μαρκοβιανών ανελίξεων. Για το λόγο αυτόν, η παραπάνω πρόταση μπορεί να διαφοροποιηθεί, ώστε να αφορά μόνο στον έλεγχο του πίνακα μετάβασης για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τις ιδιότητες γενικότερα του συστήματος.

1.5.5 <u>Συνοψίζοντας</u>

Επαναληπτική, θεωρείται κάθε κατάσταση j της οποίας η μετάβαση από κάποια (όχι απαραίτητα μία) κατάσταση i θα είναι ίση με 1. Δηλαδή $\exists\, j \neq i \mid P_{ij} = 1$. Διαφορετικά, αν $j = i$, τότε i (ομοίως j) απορροφητική κατάσταση, γεγονός που καταρρίπτει τη δυνατότητα ύπαρξης γνησίως επαναληπτικής αλυσίδας, δεδομένου ότι $i \subset \mathrm{X}$ (η κατάσταση i δεν είναι η μοναδική από το χώρο X των εφικτών καταστάσεων), σύμφωνα και με τον ορισμό της γνησίως επαναληπτικής αλυσίδας. Εάν $i = X$ τότε το σύστημα παύει να καλείται στοχαστικό καθώς πλέον αφορά σε φαινόμενα που πραγματοποιούνται με βεβαιότητα (ντετερμινιστικά συστήματα). Ομοίως, εάν $\exists i, j \mid P_{ij} < 1$, τότε η κατάσταση i καλείται μεταβατική. Αν $0 < P_{ij} < 1 \;\forall\; i, j \mid$, τότε η αλυσίδα καλείται τακτική. Κάθε τακτική αλυσίδα δε μπορεί να περιλαμβάνει επαναληπτικά ή απορροφητικά στάδια. Αν υπάρχουν n, i, j τέτοια ώστε $0 \leq P_{ij} < 1$ και $P_{ij}^{n} > 0$ με $n \in \mathbb{N}$ και $i, j \in \mathrm{X}$, τότε η αλυσίδα καλείται απλώς εργοδική (ή αμείωτη όχι όμως απαραίτητα τακτική, καθώς θα πρέπει να αντικατασταθεί η ισο – ανισότητα με αυστηρή ανισότητα). Αν τώρα $\sum_{i=1}^{\mathrm{X}} p_{ij} = 1 \;\forall j$ (στήλη), $\sum_{j=1}^{\mathrm{X}} p_{ij} = 1 \;\forall i$ (γραμμή) και $p_{iy} = 0$, $p_{zj} = 0$ με $y \in \{X - j\}$ και $z \in \{X - i\}$ τότε η αλυσίδα αυτή καλείται γνησίως επαναληπτική. Στην ουσία, αντιπροσωπεύει έναν πίνακα του οποίου τα στοιχεία (είτε ανά στήλη είτε ανά γραμμή) εάν διαταχθούν κατάλληλα, συστήνουν έναν μοναδιαίο πίνακα (τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου 1 και όλα τα υπόλοιπα 0). Για παράδειγμα σχεδιάζοντας τον πίνακα μετάβασης για την αλυσίδα του σχήματος 1.8.α παίρνουμε (σχ. 1.9):



σχ. 1.9

1.6 Αναλύοντας ένα πολύπλοκο σύστημα Markov

Η κατανόηση των χαρακτηριστικών που συνθέτουν τα συγκεκριμένα συστήματα καθώς και η λειτουργία αλλά και οι ιδιότητες τους, μπορούν να γίνουν ευκολότερα με τη χρήση παραδειγμάτων.

Αρχικά ας γίνει η υπόθεση ενός ομογενούς[21] τακτικού (σχ. 1.6) Μαρκοβιανού συστήματος (Homogenous Regular MCM) με 3 καταστάσεις (Α, Β, Γ). Βάσει της υπόθεσης της τακτικότητας, είναι γνωστό εξ αρχής ότι είναι δυνατή η μετάβαση από οποιαδήποτε κατάσταση προς οποιαδήποτε. Ένα τέτοιο σύστημα παρουσιάζει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά με πολύ μεγάλο ενδιαφέρον. Ο παρακάτω πίνακας (πίνακας 1.4) περιλαμβάνει το σύνολο των πιθανοτήτων μετάβασης για κάθε κατάσταση.

πίνακας 1.4: Τυχαίος πίνακας μετάβασης

	Α	Β	Γ
Α	0.17	0.22	0.61
Β	0.39	0.55	0.06
Γ	0.4	0.2	0.4

Επίσης, γίνεται η υπόθεση ύπαρξης ενός διανύσματος **u** το οποίο δίνει την κατανομή των πιθανοτήτων για την κατάσταση στην οποία μπορεί να βρίσκεται το σύστημα τη χρονική στιγμή $t = 0$ (ακριβώς πριν εκκινήσει το σύστημα). Συνεπώς για το διάνυσμα u θα ισχύει:

[21] Ομογενές καλείται κάθε σύστημα του οποίου οι πιθανότητες μετάβασης είναι ανεξάρτητες του χρόνου – περιόδου στην οποία ευρίσκεται το μοντέλο.

$$u = \begin{bmatrix} P^{(0)}(X = \text{A}) \\ P^{(0)}(X = \text{B}) \\ P^{(0)}(X = \Gamma) \end{bmatrix} \text{ με } \sum P^{(0)}(X) = 1,\ i \in X = \{\text{A},\ \ \ \ \} \text{ και } P^{(0)}(X = i) \in [0,1]$$

Έτσι, εάν είναι γνωστό με βεβαιότητα ότι το σύστημα αρχικά θα βρίσκεται στην κατάσταση Α, τότε το διάνυσμα u θα πάρει τη μορφή $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται, αν είναι γνωστό με βεβαιότητα ότι (το σύστημα) θα βρίσκεται σε κάποια εκ των λοιπών καταστάσεων. Διαφορετικά, μπορεί να υποτεθεί ότι οι αρχική κατανομή είναι ομοιόμορφη ($u = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.33 \\ 0.33 \end{bmatrix}$) ή οποιασδήποτε άλλης μορφής. Ακόμη και άγνωστη.

Μία ερώτηση που ζητεί απάντηση σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι που θα βρίσκεται το σύστημα μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό περιόδων (n). Όπως περιγράφηκε και παραπάνω, μία βασικότατη ιδιότητα των Μαρκοβιανών συστημάτων είναι η ύψωση του πίνακα μετάβασης στη δύναμη της περιόδου η οποία εξετάζεται, λαμβάνοντας με τον τρόπο αυτόν τις πιθανότητες το σύστημα να βρίσκεται κατά την περίοδο αυτήν στην κατάσταση που περιγράφει η κάθε στήλη, εκκινώντας από αυτήν της αντίστοιχης γραμμής. Γνωρίζοντας συνεπώς μέσω του διανύσματος εκκίνησης (u) την κατάσταση στην οποία βρίσκεται αρχικά το σύστημα (γίνεται η υπόθεση ότι $X_0 = \text{A}$), είναι δυνατόν να προσεγγιστεί η πιθανότερη κατάσταση 3 περιόδους μετά την εκκίνηση ($n = 3$). Αυτό που ζητείται, αλγεβρικά προσδιορίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$\max P_{Aj}(u \otimes P^3)$$

Ζητείται δηλαδή το στοιχείο της γραμμής Α με τη μέγιστη πιθανότητα που προκύπτει από το διάνυσμα $Z = u' \otimes P^3$. Οι πιθανότητες το σύστημα να περιέλθει σε οποιαδήποτε κατάσταση σε αυτές τις τρεις περιόδους, εκκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση Α, Β, Γ, φαίνεται στους παρακάτω πίνακες (πίνακες 1.5.α, 1.5.β, 1.5.γ).

Διαχρονική εξέλιξη τυχαίου πίνακα μετάβασης

πίνακας 1.5.α

P^1:

	Α	Β	Γ
Α	0.17	0.22	0.61
Β	0.39	0.55	0.06
Γ	0.4	0.2	0.4

πίνακας 1.5.β

P^2:

	Α	Β	Γ
Α	0.3587	0.2809	0.3609
Β	0.3048	0.4003	0.2949
Γ	0.3060	0.2780	0.4160

πίνακας 1.5.γ

P^3:

	Α	Β	Γ
Α	0.3147	0.3053	0.3800
Β	0.3259	0.3462	0.3279
Γ	0.3268	0.3034	0.3697

Η χρήση των πινάκων αυτών έγκειται στη δυνατότητα να προσδιοριστεί η πιθανότερη κατάσταση κατά την περίοδο n χωρίς να υπάρχει καμία γνώση για την κατάσταση εκκίνησης του συστήματος. Επιστρέφοντας στην πρότερη υπόθεση ($X_0 = \text{Α}$), λαμβάνοντας τον πίνακα Z, είναι εύκολο να προσδιοριστεί η τιμή της προηγούμενης σχέσης, που είναι και ο παρών στόχος. Συνεπώς:

$$Z = u' \otimes P^3 = [0.3147,\ 0.3053,\ 0.3800] = [P^3(\text{Α}),\ P^3(\text{Β}),\ P^3(\Gamma)]$$

Παρατηρείται λοιπόν ότι εκκινώντας από την κατάσταση Α ($X_0 = \text{Α}$), το σύστημα είναι το πιθανότερον να βρεθεί στην κατάσταση Γ κατά την περίοδο 3. Αυτό συμβαίνει καθώς το στοιχείο Z_{13} έχει τη μέγιστη τιμή εν συγκρίσει με τα υπόλοιπα. Ωστόσο, οι διαφορές δεν είναι τόσο σημαντικές ώστε να μπορεί να γίνει κάποια «επιλογή» με ασφάλεια. Επίσης, μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό ότι το διάνυσμα γραμμή Z, είναι η πρώτη γραμμή του διανύσματος P^3 (πίνακας 1.5.γ). Αυτό ισχύει λόγω του ότι στην αρχή έγινε η υπόθεση ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος ήταν γνωστή. Κατ' αναλογία εάν $X_0 = \text{Β}$ ή $X_0 = \Gamma$ τότε το διάνυσμα Z θα αποτελεί αντίστοιχα τη 2η ή 3η γραμμή του διανύσματος P^3.

Κατ' αντιστοιχία, εάν το διάνυσμα u έχει τη μορφή $u = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.33 \\ 0.33 \end{bmatrix}$, τότε ο πίνακας Z θα είναι $Z = [0.3193,\ 0.3151,\ 0.3556]$. Διάφορα σενάρια μπορούν να εξεταστούν, ακολουθώντας τη διαδικασία αυτήν για οποιαδήποτε αρχική κατανομή καταστάσεων και για οποιαδήποτε περίοδο του συστήματος.

Τα συγκεκριμένα συστήματα (ομογενή – τακτικά), εμφανίζουν μία ακόμα ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ιδιότητα. Καθώς το σύστημα μετακυλίεται διαδοχικά από περίοδο σε περίοδο στις διάφορες καταστάσεις, οι πιθανότητες των μελλοντικών

καταστάσεων τείνουν να εμφανίζουν μία ομοιογένεια και να προσεγγίζουν μία συγκεκριμένη τιμή. Επεκτείνοντας την ιδιότητα αυτήν, οι πιθανότητες των μελλοντικών («στο διηνεκές») καταστάσεων του συστήματος εμφανίζονται ανεξάρτητες της αρχικής καταστάσεως. Το γεγονός αυτό, το οποίο θα περιγραφή αναλυτικότερα στη συνέχεια, έχει ισχύ γενικότερα σε εργοδικά συστήματα και όχι μόνο στα ιδιόμορφα εργοδικά – τακτικά. Για την ανάλυση του φαινομένου αυτού, έχει ενδιαφέρον να ελεγχθούν οι πίνακες P^5, P^7 και P^{11} (πίνακες 1.6.α, 1.6.β, 1.6.γ) του παραπάνω μοντέλου.

πίνακας 1.6.α

P^5:

	Α	Β	Γ
Α	0.3222	0.3161	0.3617
Β	0.3228	0. 3211	0.3561
Γ	0.3229	0.3159	0.3612

πίνακας 1.6.β

P^7:

	Α	Β	Γ
Α	0.3226	0.3174	0.3600
Β	0.3226	0.3180	0.3593
Γ	0.3226	0.3174	0.3600

πίνακας 1.6.γ

P^{11}:

	Α	Β	Γ
Α	0.3226	0.3176	0.3598
Β	0.3226	0.3176	0.3598
Γ	0.3226	0.3176	0.3598

Κάθε πίνακας P υψωμένος σε δύναμη μεγαλύτερη του 11 θα είναι ίδιος ακριβώς με τον πίνακα P^{11}. Δηλαδή, κάθε γραμμή των πινάκων P^n με $n \geq 11$ θα είναι ίση με ένα διάνυσμα w για το οποίο θα ισχύει:

$$P^n = \begin{bmatrix} w \\ w \\ w \end{bmatrix} \text{ με } n \geq 11 \text{ και } w = \left[0.3226,\ 0.3176,\ 0.3598\ \right]$$

Το διάνυσμα w έχει μία ακόμα χρήση. Δείχνει σε τι ποσοστό αναμένεται στο μέλλον να εμφανιστεί η κάθε κατάσταση του μοντέλου, υπό τη βασική προϋπόθεση ότι το μοντέλο θα συνεχίσει να τρέχει στο διηνεκές. Ανατρέχοντας για λίγο στα περασμένα, το μαρκοβιανό σύστημα του καιρού στον «Κόσμο του Οζ», συνέστηνε έναν πίνακα μετάβασης εργοδικό και όχι τακτικό (πίνακας 1.2), καθώς ήταν αδύνατο να υπάρξει 2 συνεχόμενες ημέρες ηλιοφάνεια (μετάβαση από την κατάσταση Η κάποια τυχαία χρονική στιγμή n στην ίδια κατάσταση Η τη χρονική στιγμή $n+1$, σχ. 1.3). Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με παραπάνω, βρίσκεται ότι για $n = 7$, τότε $P^n = P^7 = \begin{bmatrix} w \\ w \\ w \end{bmatrix}$ όπου $w = [0.4\ 0.2\ 0.4]$, το οποίο σημαίνει ότι η κατάσταση Η (ήλιος) αναμένεται να εμφανίζεται μόνον μία φορά ανά 5 ημέρες.

Εντούτοις, τα παραπάνω συστήματα, παραμένουν ιδιαιτέρα απλοϊκά. Περιπλέκοντας περισσότερο το μοντέλο και προσθέτοντας ένα απορροφητικό στάδιο, η δομή και λειτουργία του διαφοροποιείται σημαντικά. Η σημαντικότερη τροποποίηση που επιδέχεται ένα τέτοιο σύστημα (με την προσθήκη ενός απορροφητικού σταδίου) είναι το γεγονός ότι το σύστημα κάποια στιγμή θα περιέλθει σε «στασιμότητα», εισελθόν στην απορροφητική κατάσταση. Το φαινόμενο αυτό, είναι τόσο θεωρητικό, όσο και πρακτικό. Από θεωρητική σκοπιά, γίνεται η υπόθεση ότι για οποιοδήποτε επίπεδο πιθανοτήτων μετάβασης από όλες τις μεταβατικές καταστάσεις (όλες τις καταστάσεις πλην της απορροφητικής) προς το απορροφητικό στάδιο, εάν το σύστημα συνεχίσει στο διηνεκές, τότε θα περιέλθει νομοτελειακά κάποια στιγμή σε «απορρόφηση» (λόγω του αυθαίρετα μεγάλου χρόνου λειτουργίας, διηνεκές). Πρακτικά το φαινόμενο αυτό αποδεικνύεται, μελετώντας έναν πίνακα μετάβασης ο οποίος περιλαμβάνει ένα ή περισσότερα απορροφητικά στάδια.

Για την απόδειξη αυτού, ας γίνει αρχικά η υπόθεση ενός τυχαίου μοντέλου με τον παρακάτω πίνακα μετάβασης (πίνακας 1.7).

πίνακας 1.7: Τυχαίος πίνακας μετάβασης με απορροφητικό στάδιο

	Α	Β	Γ
Α	0.38	0.01	0.61
Β	0	1	0
Γ	0.53	0.05	0.42

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η κατάσταση Β αποτελεί το απορροφητικό στάδιο. Οι καταστάσεις Α και Γ συνθέτουν το μεταβατικό τμήμα του μοντέλου. Το τμήμα δηλαδή εντός του οποίου το μοντέλο **μπορεί** (υπάρχει η δυνατότητα) να ανακυκλώνεται σε κάθε περίοδο. Εξαιρώντας το στάδιο Β, μπορεί να ειπωθεί ότι οι λοιπές καταστάσεις συνθέτουν μία τακτική αλυσίδα (τμηματική). Από τις καταστάσεις αυτές, το ενδεχόμενο μετάβασης προς την Β, φαντάζει πολύ μακρινό ώστε να πραγματοποιηθεί λόγω των πολύ μικρών πιθανοτήτων $P(B|A)=0.01$ και $P(B|\Gamma)=0.05$. Ωστόσο η θεωρία λέει ότι τελικά κάποτε το σύστημα θα «απορροφηθεί» (θα περιέλθει στην κατάσταση Β).

Ο παραπάνω πίνακας μπορεί να αναδιαταχθεί, ώστε να ομαδοποιηθούν οι μεταβατικές και οι απορροφητικές καταστάσεις (γενικότερα ακόμη και για

περιπτώσεις με 2 ή περισσότερα απορροφητικά στάδια). Ένας τέτοιος πίνακας (αναδιατεταγμένος ανά ομάδες καταστάσεων) καλείται κανονικός (κανονική μορφή – canonical form). Ο πίνακας 1.8.α, αποτελεί την κανονική μορφή του πίνακα 1.7.

Αναδιάταξη πίνακα μετάβασης με απορροφητικό στάδιο σε κανονική μορφή

πίνακας 1.8.α

	Α	Γ	Β
Α	0.38	0.61	0.01
Γ	0.51	0.44	0.05
Β	0	0	1

πίνακας 1.8.β

	Tr	Abs
Tr	**Q**	**R**
Abs	**0**	**I**

Ο πίνακας 1.8.β, συστήνει τη γενική μορφή ενός «κανονικού» πίνακα μετάβασης. Αν υποτεθεί ότι Χ είναι το σύνολο των δυνατών καταστάσεων, τότε ισχύει:

$$X = Tr \bigcup Abs \text{ και } Tr \bigcap Abs = \varnothing$$

Το σύνολο Tr (**Tr**ansient), περιλαμβάνει όλες εκείνες τις καταστάσεις (μεταβατικές) i, j για τις οποίες ισχύει:

$$P_{ij}, P_{ji} \in [0,1] \ \forall i \neq j \text{ και } P_{ij}, P_{ji} \in [0,1) \ \forall \ i = j$$

Το σύνολο Abs (**Abs**orbing), περιλαμβάνει όλες εκείνες τις καταστάσεις (απορροφητικές) k, m για τις οποίες ισχύει:

$$P_{kk}, P_{mm} = 1 \ \forall k, m \text{ και } P_{km}, P_{mk} = 0 \ \forall \ k \neq m$$
$$k, m \neq i, j$$

Κατά συνέπεια, ο πίνακας Q θα αποτελεί έναν τετραγωνικό μη μηδενικό πίνακα διαστάσεων $x \otimes x$, όπου x ο αριθμών των (μεταβατικών) καταστάσεων που ανήκουν στο σύνολο Tr, ενώ ο πίνακας I αποτελεί έναν μοναδιαίο πίνακα $y \otimes y$ διαστάσεων, όπου y ο αριθμών των (απορροφητικών) σταδίων που ανήκουν στο σύνολο Abs. Ο τμηματικός πίνακας 0 που ορίζεται από τα στοιχεία Tr, Abs, αποτελεί έναν μηδενικό πίνακα (όλα τα στοιχεία του μηδέν) διαστάσεων $y \otimes x$. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι ο συγκεκριμένος πίνακας περιλαμβάνει τα ενδεχόμενα μετάβασης από τις απορροφητικές καταστάσεις, προς μεταβατικά στάδια, κάτι εξ ορισμού αδύνατο.

Τέλος, ο πίνακας R, διαστάσεων $x \otimes y$, περιλαμβάνει τις πιθανότητες να περιέλθει το σύστημα σε (κάποια) απορροφητική κατάσταση. Κατά κανόνα, είναι ένας πίνακας μη μηδενικός (εφόσον υπάρχουν απορροφητικά στάδια).

Σημαντικά ερωτήματα επί αντίστοιχων μοντέλων τα οποία αξιώνουν απαντήσεων, όπως έχει γίνει αναφορά και νωρίτερα στο τμήμα των απορροφητικών αλυσίδων, είναι ο αριθμός των περιόδων ώστε το σύστημα να απορροφηθεί, η αναζήτηση κρίσιμων τιμών ώστε το σύστημα για παράδειγμα να μην περιέλθει σε απορρόφηση σε πεπερασμένο αριθμό περιόδων κ.α. Κάθε πίνακας στην κανονική του μορφή, επιδέχεται περαιτέρω μελέτης στην προσπάθεια να δοθούν οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά. Κατά τω λόγω αυτόν, είναι δυνατόν να γίνει εφαρμογή της ιδιότητας των εργοδικών αλυσίδων που περιγράφηκε παραπάνω (ως προς τη χρήση του πίνακα P^n). Συνεπώς ο πίνακας αυτός μπορεί να υψωθεί σε οποιαδήποτε δύναμη που θα αντιπροσωπεύει την αντίστοιχη περίοδο λειτουργίας του μοντέλου για την εξαγωγή συμπερασμάτων που θα αφορούν στη διαχρονική πορεία του μοντέλου. Σε ότι αφορά στο παρών απορροφητικό σύστημα που μελετάται, βασικά συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν από την παρατήρηση των νέων πινάκων (πίνακες 1.9.α-γ).

Διαχρονική εξέλιξη πίνακα μετάβασης σε κανονική μορφή

πίνακας 1.9.α

P^7:

	Α	Γ	Β
Α	0.3784	0.4367	0.1850
Γ	0.3651	0. 4213	0.2136
Β	0	0	1

πίνακας 1.9.β

P^{16}:

	Α	Γ	Β
Α	0.2838	0.3276	0.3886
Γ	0.2739	0.3161	0.4101
Β	0	0	1

πίνακας 1.9.γ

P^{58}:

	Α	Γ	Β
Α	0.0742	0.0857	0.8401
Γ	0.0716	0.0827	0. 8457
Β	0	0	1

Όπως παρατηρείται, οι τιμές των στοιχείων του τμήματος Q, διαγράφουν μία (γνησίως) φθίνουσα πορεία. Βάσει του ότι περιγράφηκε νωρίτερα, σχετικά με το τι αντιπροσωπεύει ο πίνακας μετάβασης P^n, το γεγονός αυτό δεικνύει τη διαρκώς μειούμενη πιθανότητα το σύστημα να συνεχίσει να ανακυκλώνεται εντός των μεταβατικών του σταδίων καθώς ο αριθμός n των περιόδων αυξάνει. Η συλλογιστική πορεία που ακολουθείται για την απόδειξη ότι ένα απορροφητικό σύστημα αναμένεται να περιέλθει σε «στασιμότητα» (απορρόφηση) κάποια στιγμή στο μέλλον με πιθανότητα 1, είναι η ίδια με το γεγονός που μόλις περιεγράφη ($P_{ij} < 1 \; \forall \; i, j \in Q \Rightarrow P_{ij}^n \to 0$ για $n \to \infty$). Ήδη κατά την 58η περίοδο (πίνακας 1.9.γ) οι πιθανότητες το σύστημα αρχόμενο σε κάποια εκ των μεταβατικών

καταστάσεων να συνεχίσει να βρίσκεται σε αυτές (μετά από 58 περιόδους), έχουν περιέλθει σε πολύ χαμηλά επίπεδα (έχουν συρρικνωθεί πέραν του 80%). Κατ' αντιστοιχία, οι τιμές των στοιχείων του πίνακα R, αυξάνουν συνεχώς, καθώς γίνεται εντονότερο το ενδεχόμενο το σύστημα να απορροφηθεί κάποια στιγμή στο μέλλον. Επιλύοντας μαθηματικά προκύπτει πως η περίοδος κατά την οποία το σύστημα πλέον δεν αναμένεται να βρεθεί σε κανένα εκ των μεταβατικών σταδίων[22], δηλαδή το n για το οποίο θα ισχύει Q^n=0 (κάθε στοιχείο του πίνακα Q^n θα είναι μηδενικό), είναι η 220η. Ωστόσο αυτό εξαρτάται από τα επίπεδα σημαντικότητας που θα δοθούν. Παρά ταύτα, σημειώνεται ότι κατά την περίοδο $n = 311$, οι πιθανότητες το σύστημα να βρεθεί σε κάποιο εκ των μεταβατικών σταδίων, γίνονται μικρότερες του αριθμού e^{-52}. Διατυπώνοντας διαφορετικά την τελευταία διαπίστωση, μπορεί να γραφεί ότι:

$$Q^n \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty$$

Τέλος, μπορεί να γίνει η παρακάτω διαγραμματική αντιστοιχία του πίνακα μετάβασης απορροφητικών συστημάτων με εργοδικά:

$$\mathbf{P^n} = \begin{array}{c|cc} & \text{Tr} & \text{Abs} \\ \hline \text{Tr} & \mathbf{Q^n} & \mathbf{R^*} \\ \hline \text{Abs} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}$$

πίνακας 1.10

Ο πίνακας R^* είναι το μόνο τμήμα του πίνακα P (ενός απορροφητικού συστήματος), για τον οποίο δε μπορεί να υπάρχει ακριβής πληροφόρηση σχετικά με τα στοιχεία του στο μέλλον. Ο λόγος είναι η ίδια η δομή του τμηματικού πίνακα R (μη τετραγωνικός και μη μηδενικός).

Τέλος, είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ο μέσος χρόνος (σε βήματα μοντέλου) για τον οποίο ένα σύστημα αρχόμενο από κάποια μεταβατική κατάσταση, να οδηγηθεί σε κάποιο απορροφητικό στάδιο. Σε πρώτη φάση, πρέπει να γίνει ο

[22] Για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, αναζητήθηκε η τιμή της μεταβλητής i, για την οποία η μέση πιθανότητα να περιέλθει το σύστημα στην κατάσταση απορρόφησης από οποιαδήποτε εκ των μεταβατικών καταστάσεων του (Α, Γ), θα είναι μεγαλύτερη του επιπέδου 0,999 ή 99,9%. Εντούτοις αναφέρεται πως η αναμενόμενη πιθανότητα το σύστημα να περιέλθει στην κατάσταση Β μετά από 147 περιόδους, είναι ίση με 99%. Η αναφορά αυτή γίνεται για να τονιστεί η βελτίωση της πιθανότητας αυτής κατά 0.9% μετά το πέρας (220-147) 73 περιόδων, αλλά και η εκθετική αύξηση του αριθμού των περιόδων, καθώς αυξάνεται το διάστημα αυτό εμπιστοσύνης (πιθανότητα απορρόφησης).

προσδιορισμός της μήτρας N η οποία καλείται **θεμελιώδης** (fundamental) του πίνακα μετάβασης P για ένα απορροφητικό σύστημα. Αποδεικνύεται ότι η μήτρα N προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$N = I + \overbrace{Q + Q^2 + Q^3 + ...}^{n} = (I - Q)^{-1}$$

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης, θεωρείται εκτός στόχων εργασίας, ενώ ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [8]. Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, θεωρείται ότι $Q^n = 0$ για $n \to \infty$. Η χρήση του πίνακα N έγκειται στο γεγονός ότι μέσω αυτού, μπορεί να προσδιοριστεί ο αριθμός των φορών που αναμένεται να βρεθεί το σύστημα σε κάποια κατάσταση j αρχόμενο από κάποια κατάσταση i. Το γεγονός αυτό περιγράφει κάθε στοιχείο n_{ij} του πίνακα N.

Ο προσδιορισμός τώρα του μέσω χρόνου απορρόφησης, δίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

$$t = N \otimes c$$

Ο πίνακας c είναι ένα διάγραμμα στήλη $\chi \otimes 1$ διαστάσεων (όπου χ ο αριθμός των μεταβατικών καταστάσεων), του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα ($c_{i1} = 1$). Ο πίνακας t είναι επίσης ένα διάνυσμα στήλη $\chi \otimes 1$ διαστάσεων, κάθε στοιχείο του οποίου αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βημάτων που αναμένεται να βρεθεί το σύστημα σε οποιαδήποτε μεταβατική κατάσταση αρχόμενο από την κατάσταση i, καθώς το σύστημα συνεχίζει τη λειτουργία του στο άπειρο ($n \to \infty$) και προτού απορροφηθεί. Ουσιαστικά, το γινόμενο $N \otimes c$ αποτελεί το κατά γραμμή άθροισμα των στοιχείων του πίνακα N. Συνεπώς, για το παραπάνω μοντέλο θα έχουμε:

$$N = \begin{bmatrix} 15.5125 & 16.8975 \\ 14.1274 & 17.1745 \end{bmatrix} \text{ και } c = \begin{bmatrix} 32.4100 \\ 31.3019 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Α} \\ \Gamma \end{Bmatrix}$$

Συμπερασματικά, το παραπάνω μοντέλο, αρχόμενο από την κατάσταση Α, αναμένεται να χρειαστεί 32 βήματα (ένα περισσότερο σε σχέση με την κατάσταση Γ) προτού απορροφηθεί. Ωστόσο, αναφέρεται ότι τα μεγέθη αυτά αποτελούν αναμενόμενες τιμές. Κατά συνέπεια, πρέπει να λαμβάνονται με προσοχή και σκεπτικισμό και όχι ως μοναδικές και ακριβείς τιμές.

1.7 Το δείγμα εκμάθησης στα Μαρκοβιανά συστήματα

Ολοκληρώνοντας το παρόν κεφάλαιο, πρέπει να καταστεί σαφές γιατί το δείγμα εκμάθησης έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει προβλήματα ακόμα και σε ένα αρτιότατα ανεπτυγμένο μοντέλο. Για οποιοδήποτε σύστημα, είτε εάν αντικειμενικός στόχος είναι ο προσδιορισμός της καταναλωτικής συμπεριφοράς ενός πελάτη προς μία φίρμα είτε η πρόγνωση του καιρού, σε πρώτο στάδιο πρέπει να γίνει η συλλογή των δεδομένων (βάσει των προσδιοριστικών παραγόντων όπως επανάληψη αγοράς, επίπεδα υγρασίας κ.α.) και εν συνεχεία ο σχεδιασμός του μοντέλου (δυνατές καταστάσεις καθώς και δυνατότητα μετάβασης).

Τη σπουδαιότητα του σταδίου αυτού και συγκεκριμένα σε έρευνες προσομοίωσης της καταναλωτικής συμπεριφοράς, υπογραμμίζει ο Elie Ofek ([42]). Τονίζει την εξέχουσα σημασία των «ιστορικών δεδομένων» και του τρόπου συλλογής αυτών, καθιστώντας τα απαραίτητα για τον ορθό προσδιορισμό του μοτίβου της καταναλωτικής συμπεριφοράς έκαστου πελάτη, από πλευράς επιχείρησης.

Εάν τώρα γίνει περιορισμός της έρευνας σε ένα βραχυχρόνιο διάστημα από το οποίο θα αντληθούν τα δεδομένα, τότε η πιθανότητα απώλειας ενδεχομένων (μετάβαση από κάποιες καταστάσεις προς κάποιες άλλες) με μικρή σχετικά πλην όμως σημαντική συχνότητα εμφάνισης, είναι αρκετά μεγάλη. Κατ’ επέκταση, κάποια ενδεχόμενα (καταστάσεις, αναφορικά με μαρκοβιανά συστήματα) αναμένεται είτε να υπερεκτιμηθούν είτε να υποεκτιμηθούν. Ένας χρυσός κανόνας που διέπει κάθε στοχαστικό μοντέλο (φαινόμενο), ο οποίος προέρχεται από το «Νόμο των Μεγάλων Αριθμών», περιγράφει το γεγονός κατά το οποίο καθώς ο αριθμός των παρατηρήσεων αυξάνεται, η κατανομή των ενδεχομένων που μελετώνται, τείνει προς την πραγματική τους.

Ωστόσο, ειδικά σε συστήματα μελέτης της συμπεριφοράς του καταναλωτή, υπάρχουν και άλλοι παράγοντες οι οποίοι μπορούν να επηρεάσουν την ακρίβεια και την εγκυρότητα ενός μοντέλου. Η αγορά ενός προϊόντος, αποτελεί ένα ιδιαίτερα σύνθετο γεγονός από την αρχή (έρευνα αγοράς) μέχρι και την πραγματοποίηση της. Υποκινείται από τη θέληση του καταναλωτή να ικανοποιήσει μία ανάγκη του. Εντούτοις, η ανάγκη δεν αποτελεί ένα μονοδιάστατο φαινόμενο, καθότι υπάρχει η ανάγκη για ένδυση για παράδειγμα, αλλά και η ανάγκη για ένδυση από μία συγκεκριμένη φίρμα ρούχων (Dolce & Gabbana, Ralph Lauren κ.α.). Ενώ στην πραγματικότητα η διαφορά στην ποιότητα μπορεί να μην είναι με αντικειμενικά κριτήρια αντιληπτή (πολύ μικρή έως ανύπαρκτη λόγω ποιότητας υλικών, κατασκευής

κ.α.) κάθε καταναλωτής αντιλαμβάνεται διαφορετικά κάθε φίρμα (συναισθηματικοί παράγοντες - αφοσίωση που αφορούν στη διαφοροποίηση των αγαθών όπως έγινε αναφορά και κατά την εισαγωγή). Το γεγονός της υποκειμενικής αντιλαμβανόμενης ποιότητας, έχει σαν αποτέλεσμα την επαύξηση της ικανοποίησης που απολαμβάνει ένας καταναλωτής και κατ' επέκταση της («υποκειμενικής») χρησιμότητας που αποκομίζει από τη χρήση μίας συγκεκριμένης φίρμας (πιο ακριβής σε σχέση με μία πιο φθηνή ίδιας ποιότητας).. Η προσεκτική επισκόπηση του γεγονότος αυτού, φέρνει στο προσκήνιο πρόσθετους προσδιοριστικούς παράγοντες. Η διαφορά στην υστεροφημία μίας εταιρίας και των αγαθών τα οποία προωθεί (παράγοντας που εν γένει καθορίζει το συναισθηματικό τμήμα της ικανοποίησης έναντι του λογικού το οποίο αφορά στην ολοκλήρωση της κάθε ανάγκης όπως στο παράδειγμα της ένδυσης), συνήθως αποτυπώνεται στην τιμή που λαμβάνει ο καταναλωτής για την απόκτηση του αντίστοιχου αγαθού. Κάθε καταναλωτής παρά ταύτα, δεν έχει την ίδια «δυνατότητα πρόσβασης» σε κάθε αγαθό. Ένας βασικός ανασταλτικός παράγοντας, είναι το εισόδημα. Το εισόδημα συνήθως χρησιμοποιείται στην οικονομική επιστήμη ως περιορισμός (εισοδηματικός περιορισμός: $\overline{Y}$), στην προσπάθεια προσδιορισμού του αρίστου επιπέδου χρησιμότητας ($U_{\max}$) που μπορεί να αποκομίσει ένα άτομο, από την κατανάλωση ενός αγαθού (και κατ' επέκταση αποταμίευση ή επένδυση του υπολειμματικού εισοδήματος του). Η ανάγκη είναι δεδομένη, όπως και η προσπάθεια ικανοποίησης της. Το διαφοροποιόν στοιχείο είναι ο τρόπος με τον οποίο θα ικανοποιηθεί η κάθε ανάγκη. Συνήθως τα διάφορα επίπεδα εισοδήματος για κάθε οικονομικά δρώντα, αποτελούν μία παράμετρο στάσιμη βραχυχρόνια. Μεταβολές (σημαντικές ώστε να θεωρηθεί ότι ο καταναλωτής μπορεί να μεταπηδήσει σε διαφορετική κλίμακα εισοδήματος), θεωρείται ότι λαμβάνουν χώρα είτε σε μεσοχρόνιες είτε σε μακροχρόνιες περιόδους. Μία τέτοια μεταβολή, είναι δυνατόν να στρεβλώσει πλήρως την καταναλωτική συμπεριφορά ενός ατόμου. Δηλαδή, ενώ από την εφαρμογή ενός μαρκοβιανού συστήματος για συγκεκριμένη εταιρία και πελάτη θα ήταν πλέον αναμενόμενη η συνέχιση της συνεργασίας μεταξύ των 2 πλευρών (επανάληψη αγοράς), χωρίς εν τω μεταξύ να είναι γνωστόν το πώς κινείται το εισόδημα του συγκεκριμένου πελάτη, έξαφνα θα παρατηρούταν μία διακοπή της σχέσης τους (από πλευράς πελάτη), η οποία θα ήταν αδύνατο να εξηγηθεί από τα δεδομένα του συστήματος. Για να έρθουν τα τελευταία στοιχεία σε σύνδεση με τα παραπάνω, εάν συνεπώς τα δεδομένα (από το δείγμα εκμάθησης) αντλούνταν εξ'

αρχής από μία μικρή χρονική περίοδο, τότε θα ήταν πολύ πιθανό το σύστημα να σφάλει στο μέλλον και με πολύ σημαντικές αποκλίσεις.

Επιπρόσθετα, κάθε αγορά (με την ευρεία έννοια η οποία περιλαμβάνει τις επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στο εσωτερικό της και εμπορεύονται κάποιο αγαθό ή περισσότερα με σχετικά μεγάλο βαθμό ομοιογένειας - παρεμφερή) συστήνεται από κάποια ιδιαίτερα γνωρίσματα. Ο παράγοντας που καθιστά την κάθε αγορά «μοναδική», είναι το είδος του αγαθού το οποίο πραγματεύονται οι διάφορες εταιρείες. Οι μοναδικές ιδιότητες κάθε αγαθού επιβάλλουν μία προσεκτικότερη ανάλυση και σχεδιασμό των μοντέλων προσομοίωσης της καταναλωτικής συμπεριφοράς ενός πελάτη. Για παράδειγμα ο χρόνος επανάληψης αγοράς ενός προϊόντος ή μίας υπηρεσίας, ο οποίος αποτελεί έναν από τους βασικότερους προσδιοριστικούς παράγοντες που συνθέτουν το μοτίβο της καταναλωτικής δράσης ενός ατόμου, μπορεί να παρουσιάζει σημαντικότατες διαφοροποιήσεις μεταξύ των διαφόρων αγαθών. Μία βασικότατη διάκριση[23] των αγαθών, είναι επαρκώς περιγραφική του φαινομένου αυτού. Σύμφωνα με αυτή, τα αγαθά διακρίνονται σε: α) Διαρκή και β) Καταναλωτά Ως Διαρκή, ορίζονται τα αγαθά τα οποία έχουν τη δυνατότητα να εξυπηρετήσουν (ικανοποιήσουν) την ίδια ανάγκη πολλές φορές (ενδύματα, αυτοκίνητο, κατοικία). Καταναλωτά, καλούνται τα αγαθά τα οποία προορίζονται για την άμεση και πρόσκαιρη ικανοποίηση μίας ανάγκης (τρόφιμα). Κατά συνέπεια, ο ορισμός των καταναλωτών αγαθών, υποδηλώνει την επανάληψη αγοράς σε μικρότερα χρονικά διαστήματα (ημερήσια έως και μερικές εβδομάδες) και με μεγαλύτερη συχνότητα, σε αντίθεση με τα διαρκή (μερικοί μήνες έως και κάποια χρόνια), τα οποία συνήθως λογίζονται και ως επένδυση. Κατά αντιστοιχία με τα προβλήματα τα οποία μπορούν να ενσωματωθούν σε μοντέλα πρόβλεψης και προέρχονται από το δείγμα εκμάθησης, η χρησιμοποίηση ενός μικρού (το οποίο θα αντλείται από μία μικρή περίοδο μελέτης των προσδιοριστικών παραγόντων όπως της επανάληψης και της συχνότητας αγοράς) συνόλου δεδομένων (παρατηρήσεων) σε περιπτώσεις διαρκών αγαθών, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι δε μπορεί να περιέχει σε καμία περίπτωση την αξία της πληροφορίας που είναι απαραίτητη. Συνεπώς το σύστημα είναι πλέον αναμενόμενο να σφάλει. Επίσης, το γεγονός ότι η μελέτη μπορεί να αφορά σε καταναλωτά αγαθά με πολύ χαμηλό (μέσο) χρόνο επανάληψης της αγοράς, δεν αποτελεί «ευαγγέλιο» για τη χρήση «μικρού συνόλου» παρατηρήσεων.

[23] Μία τυπική ανάλυση των τρόπων με τους οποίους διακρίνονται τα αγαθά, παρατίθεται στο παράρτημα Π.1 της εργασίας

Το πολιτικό και οικονομικό πλαίσιο μέσα στο οποίο δραστηριοποιούνται οι διάφορες αγορές ανά τον κόσμο, συνιστά έναν βασικότατο παράγοντα – συνήγορο της δυναμικής τους φύσης και της συχνής μεταβολής τους (για παράδειγμα υψηλός πληθωρισμός – συχνή αύξηση των τιμών).

Συμπερασματικά, η διαδικασία σχεδιασμού και ανάπτυξης όλων των μοντέλων αυτών, πρέπει να τελείται υπό ιδιαίτερη προσοχή. Γενικά, όσο πιο δυναμικό (υποκείμενο σε μεταβολές) είναι ένα σύστημα, τόσο πιο ευπαθές καθίσταται σε σφάλματα πρόβλεψης. Η σωστή ανάπτυξη του, μελετώντας προσεκτικά τις δομές και τις ιδιότητές του, μπορεί να μειώσει την πιθανότητα λάθους πρόβλεψης, όχι όμως και να την εξαλείψει.

Κεφάλαιο 2ο

Ο χώρος του Μάρκετινγκ και το CLV

2.1 Εισαγωγή

Η πραγματικότητα των σύγχρονων αγορών, επιτάσσει τον αέναο ανταγωνισμό μεταξύ των εταιριών σε μία προσπάθεια επιβίωσης αρχικά και καθιέρωσης τους κατά συνέχεια, εντός ενός διαρκώς διευρυνόμενου διεθνικού εμπορικού χάρτη. Επιπρόσθετα, το προφίλ του σύγχρονου καταναλωτή, περιγράφει μία οντότητα νοήμονα (με υψηλό δείκτη καταναλωτικής ευφυΐας, καθώς είναι σε θέση μόνος του κατά γενικότητα να διαπραγματευτεί τις ανάγκες του, να κατανοήσει τα οφέλη του και να διαμορφώσει τους όρους που τον ευνοούν σε κάθε συναλλαγή, είτε εμπορική, είτε διαπροσωπική), με διαρκώς εκφυλιζόμενες μοναδικές ανάγκες και με εύκολη πρόσβαση στην πληροφόρηση (γύρω από την αγορά, τους όρους της, τις νέες τεχνολογίες και κατά συνέπεια τα νέα τεχνολογικά και ποιοτικά πρότυπα της κάθε εποχής). Στο συγκεκριμένο γεγονός, σημαντικότατο ρόλο επιτελεί και το διαρκώς αυξανόμενο μέσο μορφωτικό επίπεδο, εκκινώντας από τις αναπτυσσόμενες χώρες (και όχι μόνο τις ανεπτυγμένες).

Το σύνολο των φαινομένων αυτών, περιγράφουν τις συνθήκες του σύγχρονου εμπορικού περιβάλλοντος στην ολότητά του. Ένα περιβάλλον το οποίο επιπρόσθετα μαστίζεται από αβεβαιότητα η οποία πλέον δραπετεύει εκτός των εθνικών ορίων κάθε χώρας – κράτους και ανατροφοδοτείται τόσο πολιτικά όσο και οικονομικά, από τις επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις (σχέσεις) των διαφόρων χωρών σε διμερή και πολυμερή επίπεδα. Για τω λόγω αυτόν, έχει καταστεί από πλευράς επιχειρήσεων, πρωτεύουσας σημασίας η εξεύρεση τεχνικών (όπως ευρεσιτεχνίες, επένδυση σε Έρευνα και Ανάπτυξη – R&D, συστήματα διαχείρισης πελατών – CRM κ.α.) οι οποίες θα μπορούν να προσδώσουν στις επιχειρήσεις αυτές συγκριτικά πλεονεκτήματα έναντι των ανταγωνιστών τους.

Το CLV, αποτελεί, μια τέτοια «τεχνική», που έχει τη βάση της στις αρχές διαχείρισης πελατών. Η διαχρονική αξία του πελάτη, θεωρείται ως ένα πολύ

σπουδαία τμήμα του σύγχρονου Marketing. Από πλευράς ειδικών, υπάρχει ομοφωνία πως παρατηρώντας και καταγράφοντας τη διαχρονική συμπεριφορά κάθε πελάτη της μία επιχείρηση, αποκτά πρόσβαση σε μία πληθώρα προνομίων και δη έναντι στις λοιπές επιχειρήσεις του κλάδου, οι οποίες δεν υιοθετούν τέτοιες τεχνικές (βλ. [42], [46]). Όμως, για να μπορεί να γίνει πιο διαυγής ο λόγος για τον οποίο ο όρος αυτός συνιστά έναν πολύ σπουδαίο παράγοντα του σύγχρονου Marketing, πρώτα πρέπει να οριστεί σαφώς η έννοια του CLV, καθώς και οι διαστάσεις που το συνθέτουν.

2.2 Ορισμός της CLV

Ως CLV (Customer Lifetime Value – Διαχρονική Αξία Καταναλωτή), ορίζεται η «συνολική μελλοντική» (χρηματοοικονομική) αξία που επιφέρει έκαστος καταναλωτής σε κάποια εταιρία, αφαιρώντας τα **κόστη απόκτησης** (acquisition costs: τα κόστη που σχετίζονται με κάθε ενέργεια από πλευράς επιχείρησης η οποία στοχεύει στο να φέρει για πρώτη φορά σε επαφή έναν δυνητικό πελάτη – prospect με την εταιρία, μέσω διενέργειας μίας εμπορικής συναλλαγής – αγοράς υπηρεσίας ή προϊόντος) και **διατήρησης** (retention costs: κάθε ενέργεια από πλευράς επιχείρησης με σκοπό να προσπαθήσει να κρατήσει τον πελάτη στο πελατολόγιό της, γεγονός που επαληθεύεται μέσω της επανάληψης αγοράς από πλευράς καταναλωτή) αυτού. Στις συγκεκριμένες κατηγορίες κόστεων, περιλαμβάνονται κόστη για κίνητρα επανάληψης αγοράς (incentives' costs) ή επιβράβευσης (reward programs' costs) για παράδειγμα από την υψηλή συχνότητα αγορών, καθώς και «κόστη από εκπτώσεις» που σχετίζονται με μακροχρόνια δέσμευση του καταναλωτή που προκύπτει μέσα από την επανάληψη αγορών (για μεγάλα χρονικά διαστήματα).

Ο Knie – Anderssen[24] (2001), παρέχει μία συνοπτικότερη ερμηνεία του CLV, χαρακτηρίζοντάς το ως ένα προεξοφλημένο μέγεθος των μελλοντικών χρηματικών ποσών (που προέρχονται από κάποιον πελάτη), με διαφορές στο πως ορίζονται τα ποσά αυτά. Ο ορισμός αυτός που παρέχει ο ίδιος, αποτελεί παράλληλα ένα προσωπικό σχόλιο για τη δυσκολία ερμηνείας της διαχρονικής αξίας ενός καταναλωτή, αλλά και τη σύγχυση που συνοδεύει τον όρο αυτόν. Χαρακτηριστικά, θεωρεί πως ενώ όλοι αντιλαμβάνονται την πραγματική έννοια του συγκεκριμένου όρου, πολλοί «ειδικοί» σπεύδουν να τον ερμηνεύσουν ή και να τον αναλύσουν διαφορετικά. Η σύγχυση αυτή επαφίεται στο γεγονός ότι εσφαλμένα πολλοί επιστήμονες του χώρου, σπεύδουν να ταυτίσουν την κερδοφορία ενός πελάτη

[24] Πρόεδρος της AISAM (Association Internationale des Sociétés d' Assurance Mutuelle).

(Customer Profitability) με το CLV (βλ. [68]). Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί και η «φιλονικία» μεταξύ 2 ομάδων επιστημόνων, των Jain and Singh ([69]) και Berger and Nasr (βλ. [9]). Οι πρώτοι υποστηρίζουν πως δε νοείται CLV χωρίς κόστη απόκτησης και κατά συνέπεια πρέπει να περιλαμβάνονται στην ανάλυση. Πεποίθηση που έρχεται σε ολική αντίθεση με τους δεύτερους.

Φως στο συγκεκριμένο πρόβλημα, αποπειρόνται να ρίξουν οι Pfeifer, Haskins and Conroy (βλ. [39]) μέσα από τη δουλειά τους: *"Customer Lifetime Value, Customer Profitability, and the Treatment of Acquisition Spending"* (2005). Συνοπτικά, αναφέρουν πως το CLV ορίζεται χρηματοοικονομικά και συνιστά προεξόφληση, ενώ το CP[25] αποτελεί μία έννοια καθαρά λογιστική. Καταληκτικά σημειώνουν πως ο σημαντικότερος διαφοροποιός παράγοντας, αποτελεί το γεγονός ότι στον πρώτο όρο υπεισέρχεται η διάσταση του χρόνου – διαχρονικότητα (καθώς αφορά σε ένα μέγεθος που μελετάται σε βάθος χρόνου, π.χ. σειράς ετών), ενώ το δεύτερο είναι περισσότερο στατικό, καθώς αφορά σε κέρδη για συγκεκριμένη περίοδο (για παράδειγμα μία λογιστική χρήση). Ο Arthur Middleton Hughes[26] (1998) προσφέρει έναν διαφορετικό τρόπο διάκρισης των 2 εννοιών. Χαρακτηρίζει το CLV ως μία πιθανοθεωρητική προσέγγιση, ενώ καλεί το CP ως έναν ντετερμινιστικό όρο που αφορά σε «πραγματοποιηθέντα έσοδα και έξοδα». Τέλος, ο Kumar (βλ. [41]) μη ερχόμενος σε ρήξη με τους παραπάνω, περιγράφει το CLV σαν την αξία που προσδίδει – δημιουργεί η σχέση μεταξύ πελάτη επιχείρησης διαχρονικά. Θεωρεί ότι είναι μία «προς τα εμπρός» ανάλυση της επίδοσης ενός καταναλωτή, σε αντίθεση με όλες τις λοιπές μεθόδους που αποτελούν οπισθόδρομες αναλύσεις (π.χ. CP, SoW: Share of Wallet, HP: Historical Profit κ.α.). Η προσέγγιση του τελευταίου γύρω από το CLV, αποκαλύπτει ένα ακόμα πρόβλημα που περιστρέφεται γύρω από την ανάλυση της διαχρονικής αξίας ενός καταναλωτή. Κάνοντας χρήση του όρου αξία, ίδιος αναφέρεται σε κάθε όφελος (οικονομικό) που έχει τη δυνατότητα να αναπαράγει η σχέση αυτή (πελάτη – φίρμας), είτε αυτό είναι άμεσο (έσοδα από αγορές), είτε έμμεσο (word – of – mouth). Ωστόσο, αναφέρεται ενδεικτικά πως καμία ανάλυση μέχρι τώρα δεν έχει αυτή τη δυνατότητα να συμπεριλάβει τα έμμεσα οφέλη, προσδιορίζοντας έτσι την πραγματική αξία ενός πελάτη. Αυτό έγκειται κατά έναν λόγο στην αδυναμία παρατήρησης και καταγραφής των έμμεσων αυτών οφελών από

[25] Ως Customer Profitability (Κερδοφορία Πελάτη), μπορεί να οριστεί ως η λογιστική διαφορά μεταξύ εσόδων και κόστεων τα οποία προέρχονται από μία συγκεκριμένη σχέση ενός πελάτη με την επιχείρηση και για συγκεκριμένη περίοδο.
[26] Αντιπρόεδρος: The Database Marketing Institute

πλευράς επιχειρήσεων (βλ. [51]). Εντούτοις, στην πλειονότητα των περιπτώσεων τα οφέλη αυτά παραλείπονται, λόγω μη σωστής αντίληψης της πραγματικής έννοιας του CLV.

Συνοψίζοντας, ως CLV μπορεί να οριστεί η παροντική αξία των συνολικών ταμειακών ροών (παρελθοντικών, τρεχουσών και μελλοντικών) που αποδίδονται στη γενικότερη σχέση ενός συγκεκριμένου πελάτη με μία εταιρία. Επεκτείνοντας και συνδέοντας τον τελευταίο ορισμό με την Πελατειακή Κερδοφορία (Customer Profitability), το CLV μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα της συνολικής αναμενόμενης αξίας του πελάτη σε κάθε χρονική στιγμή για το διάστημα το οποίο ο πελάτης παραμένει και θα παραμένει ενεργός στην εταιρία. Δηλαδή:

$$CLV^{x} = \sum_{t=0}^{T} CP_{t}^{x}$$

Όπου:

- x: Αναφέρεται στον υπό εξέταση πελάτη της εταιρίας
- t: Οι διάφορες επιμέρους χρονικές περίοδοι κατά τις οποίες η εμπορική σχέση του πελάτη x με την εταιρία θεωρείται ενεργή.
- T: Η χρονική στιγμή κατά την οποία θεωρείται πως διακόπτεται η εμπορική σχέση του πελάτη x με την επιχείρηση.

Για την ορθότερη όμως κατανόηση της έννοιας του CLV, θα πρέπει να αναλυθούν οι διαστάσεις που το συνθέτουν. Αυτό γίνεται εφικτό μέσω της συνάρτησης της διαχρονικής αξίας του καταναλωτή, όπως την παρουσιάζουν οι Pease, Marfise and Wright (βλ. [40]).

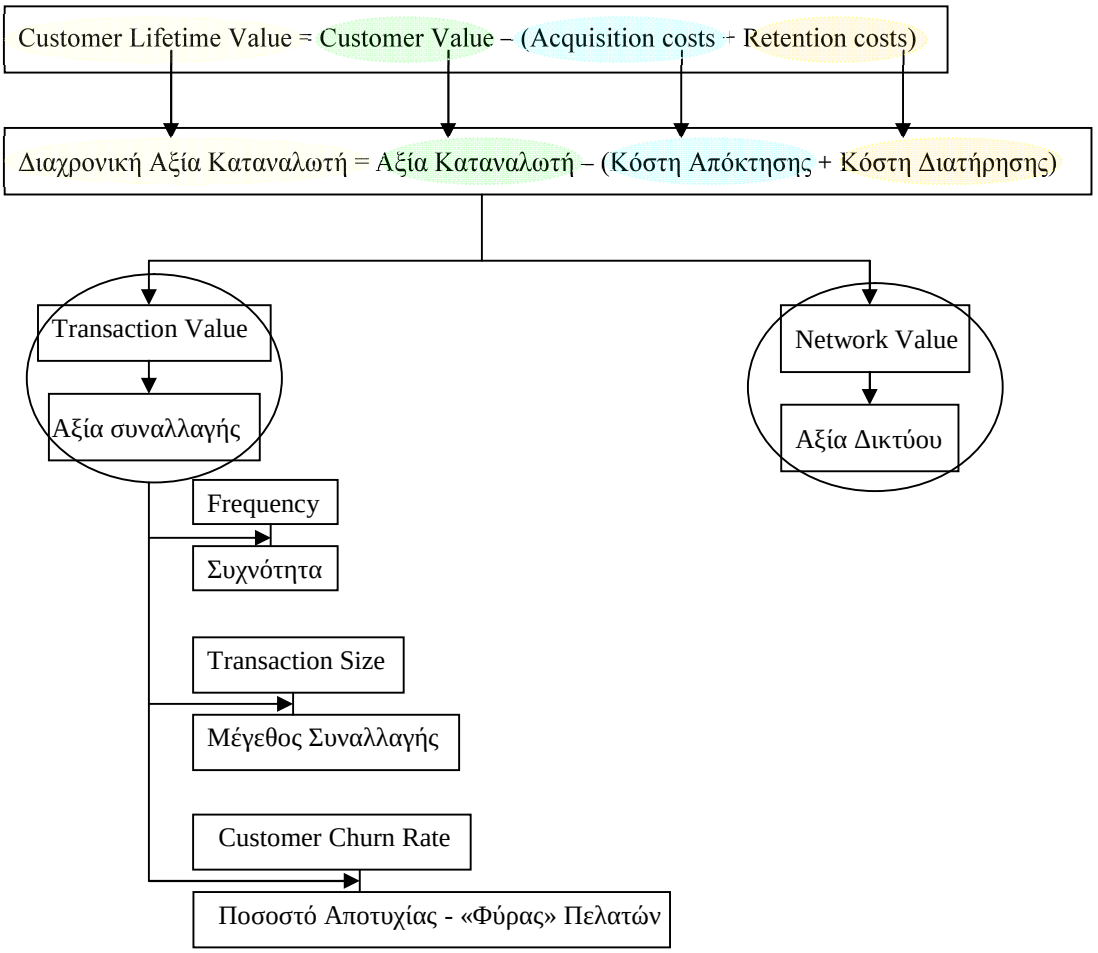
2.3 Οι διαστάσεις του CLV

Αρχικά, ως CLV ορίστηκε η διαφορά μεταξύ συνολικής αξίας του καταναλωτή και των κόστεων απόκτησης και διατήρησης από πλευράς εταιρίας. Με εφαλτήριο τον ορισμό αυτόν, η συνάρτηση που παραθέτουν οι Pease, Marfise and Wright καθώς και οι διαστάσεις στις οποίες δύναται να αναλυθεί το CLV, παρατίθενται στο παρακάτω σχήμα (σχ. 2.1).

Όπως δεικνύει και το σχήμα, οι διαστάσεις της αξίας του καταναλωτή (οι οποίες αφορούν τα εν δυνάμει οφέλη που αποκομίζει μία εταιρία από τη σχέση της με κάθε

πελάτη) διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες. Αυτές είναι 1) η Αξία της Συναλλαγής και 2) η Αξία του Δικτύου.

Ανάλυση της Διαχρονικής Αξίας του Καταναλωτή



σχ. 2.1

2.3.1 Η Αξία της Συναλλαγής

Αναφέρεται στη συνολική αξία που προκύπτει από την καταναλωτική συμπεριφορά του κάθε πελάτη (όπως αυτή παρατηρείται βάσει ιστορικών στοιχείων αυτού) και αφορά στην κατανόηση της αλληλεπίδρασης για παράγοντες όπως κατανάλωση προϊόντων ή υπηρεσιών, δίκτυα διανομής κ.α. Η διάσταση αυτή, με τη σειρά της διακρίνεται σε τρεις υπό – κατηγορίες: α) Τη Συχνότητα (Frequency), β) Το Μέγεθος της Συναλλαγής (Transaction size) και γ) Το Ποσοστό Μεταστροφής ή Ποσοστό «Φύρας» - Απώλειας Πελατών (Customer Churn Rate).

2.3.1.α Η Συχνότητα

Αφορά στο πόσο συχνά έρχεται ο πελάτης σε επαφή με την εταιρία για προϊόντα ή υπηρεσίες. Αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι σε έρευνες μελέτης της διαχρονικής

αξίας του καταναλωτή σε εταιρίες τηλεπωλήσεων ή δημοπρασιών μέσω του διαδικτύου, λαμβάνεται υπόψη και η συχνότητα με την οποία ο χρήστης – πελάτης επισκέπτεται μία ιστοσελίδα, προτού προβεί σε κάποια αγορά και όχι μόνο η συχνότητα αγορών (βλ. [9], [44]). Ωστόσο, η διάσταση αυτή, κρίνεται απαραίτητο να αναλύεται συνήθως παράλληλα με μία άλλη παράμετρο του χρόνου που αφορά στο διάστημα που έχει μεσολαβήσει από την τελευταία επίσκεψη ή συνηθέστερα αγορά (Recency). Αυτό γίνεται με σκοπό οι παρατηρήσεις που λαμβάνονται να είναι πιο «αντικειμενικές».

2.3.1.β Το Μέγεθος της Συναλλαγής

Αφορά στον όγκο των συναλλαγών τόσο σε απόλυτες μονάδες, όσο και σε χρηματικές. Εκτενώς χρησιμοποιείται ο μέσος όγκος συναλλαγών ως ένας δείκτης της μελλοντικής αναμενόμενης αξίας συναλλαγών ενός πελάτη. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί πως, η μελλοντική αξία των συναλλαγών ορίζεται ως η «επένδυση» σε χρηματικές μονάδες που είναι διατεθειμένος να διαθέσει ο πελάτης ως αντίτιμο για τα αγαθά ή υπηρεσίες που θα απαιτήσει να λάβει στο μέλλον.

2.3.1.γ Το Ποσοστό «Φύρας» - Απώλειας Πελατών

Η συγκεκριμένη διάσταση αναφέρεται στο ποσοστό «αποτυχίας» (Customer Churn Rate) διατήρησης των ήδη υπαρχόντων - ενεργών πελατών της εταιρίας, ή καλύτερα στο ποσοστό - ρυθμό με τον οποίο οι πελάτες μίας συγκεκριμένης εταιρίας μεταναστεύουν προς ανταγωνιστικές επιχειρήσεις. Η διάσταση αυτή συνιστά εξωτερικεύσεις και επιδράσεις που σχετίζονται με πρόσθετα κόστη, καθώς για κάθε μονάδα η οποία δραπετεύει προς άλλη ανταγωνιστική φίρμα, η επιχείρηση αυτή θα πρέπει να προσπαθήσει να προσεγγίσει από την αρχή τον πελάτη αυτόν, γεγονός που προϋποθέτει (εν δυνάμει) νέα κόστη απόκτησης. Εντούτοις αποτελεί ένα σημαντικότατο εργαλείο στα χέρια των επιχειρήσεων, καθώς εάν οι επιχειρήσεις μπορέσουν να αντιληφθούν τους λόγους για τους οποίους οι πελάτες τους μεταναστεύουν αλλά και τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι πιθανότερο να μεταναστεύσουν, τότε θα είναι σε θέση να διαμορφώσουν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη στρατηγική τους, περιορίζοντας παράλληλα και τα κόστη διατήρησης σε πελάτες που δεν αναμένεται να παραμείνουν στο δυναμικό της εταιρίας αυτής.

2.3.2 Η Αξία του Δικτύου

Όπως επισημαίνεται χαρακτηριστικά, υπάρχουν πολλά οφέλη (ακόμη και δευτερογενή) πέραν της παρατηρούμενης αξίας που φαίνεται να δημιουργεί ένας μεμονωμένος πελάτης. Τα οφέλη αυτά, όπως αναφέρφηκε παραπάνω, είναι πολύ δύσκολο να παρατηρηθούν και να καταγραφούν στο σύνολό τους. Εντούτοις, είναι πολύ πιθανό να αντιστοιχούν σε πολύ υψηλή αξία αποδιδόμενα σε «αντικειμενικές» (χρηματικές) μονάδες με αποτέλεσμα συνήθως να υποεκτιμάται σημαντικά ή ακόμα και να παραβλέπεται η πραγματική αξία κάθε καταναλωτή. Γεγονός που αναπαράγει πρόσθετα προβλήματα, όπως εσφαλμένη στόχευση της εταιρίας σε λιγότερο (δυνητικά) επικερδείς πελάτες.

Κατά συνέπεια, η διάσταση αυτή αναφέρεται στα οφέλη που προέρχονται εμμέσως από τη σχέση πελάτη – επιχείρησης, όπως είναι το referral value (η αξία δηλαδή που αναπαράγεται από κάποιον πελάτη συστήνοντας την εταιρία ή τα αγαθά της σε άλλους δυνητικούς πελάτες είτε συνειδητά ως συνεργαζόμενος με την εταιρία αυτή, είτε «ασυνείδητα» ως ένδειξη της «ευγνωμοσύνης» του για την υψηλή ποιότητα αγαθών που απολαμβάνει). Η αξία αυτή προκύπτει μέσω του word – of – mouth (της «επικοινωνίας» δηλαδή από στόμα σε στόμα μεταξύ πελατών είτε ενεργών είτε δυνητικών) ως ένα μέσο διάδοσης της φήμης της εταιρίας, το οποίο κατ' επέκταση αποτελεί μία μορφή παθητικού Marketing από πλευράς επιχειρήσεως (βλ. [45], [46]). Χαρακτηρίζεται ως παθητικό Marketing, καθώς η επιχείρηση δύναται ακόμα και να μη λαμβάνει συμμετοχή (άμεσα) στη διαδικασία αυτή, ενώ θεωρείται ως η λιγότερο κοστοβόρα και μία από τις πλέον αποδοτικές μορφές προώθησης μίας εταιρίας. Τη σπουδαιότητα της διαδικασίας αυτής, υπογραμμίζουν οι Villanueva, Yoo and Hanssens (βλ. [70]), επισημαίνοντας πως οι πελάτες που αποκτώνται μέσω του word – of – mouth, είναι 2 φορές πιο «ωφέλιμοι» για μία εταιρία, από όσους αποκτώνται απλά μέσω λοιπών ενεργειών Marketing της ίδιας εταιρίας.

Το σημαντικό στοιχείο που περιλαμβάνεται στη συγκεκριμένη διάσταση, είναι το γεγονός ότι πλέον οι επιχειρήσεις αντιλαμβάνονται την αγορά ως ένα δυναμικό, διασυνδεόμενο μεταξύ των καταναλωτών δίκτυο, καθαιρώντας πλέον την απαρχαιωμένη αντίληψη της αγοράς ως ένα στατικό άθροισμα πολλών ανεξάρτητων μονάδων. Είναι πλέον κατανοητό ότι ο κάθε πελάτης έχει τη δυνατότητα να ασκεί επίδραση σε κάθε άτομο – μονάδα με τα οποία έρχεται σε επαφή αλλά και να αλληλεπιδρά, να δέχεται ταυτόχρονα επιδράσεις ή ακόμα και μονόδρομα.

Το word – of – mouth (ως ένα τμήμα που προσδίδει προστιθέμενη αξία σε κάποιον πελάτη και ένα κομμάτι της διάστασης που αφορά στην Αξία του Δικτύου μίας μονάδας), αποτελεί μία διαδικασία η οποία συνδέεται άρρηκτα με τα επίπεδα ικανοποίησης και αφοσίωσης ενός πελάτη, και κατά αντιστοιχία με τα οφέλη τα οποία δυνητικά το συνοδεύουν (ένας πελάτης μπορεί να συστήσει τη φίρμα σε κάποιους φίλους του, «εξαλείφοντας» έτσι τα κόστη απόκτησης από πλευράς επιχειρήσεως για τις μονάδες αυτές). Την παρατήρηση αυτή τονίζουν και οι Jones and Sasser (1995), ενώ υπογραμμίζουν τη σπουδαιότητα δημιουργίας πελατών – «Αποστόλων» (Apostles: που μπορούν να διαδώσουν τη φήμη της εταιρίας), μέσω του Αποστολικού Μοντέλου (The Apostle Model) που παρουσιάζουν (βλ. [27]). Τέλος, περιγράφουν και τις συνθήκες που απαιτούνται για τη δημιουργία τέτοιων πελατών. Οι ίδιοι επισημαίνουν ότι οι πελάτες πρέπει να αντιμετωπίζονται ως περιουσιακά στοιχεία, τονίζοντας με τον τρόπο αυτόν τη σπουδαιότητα που ενέχει η σχέση μεταξύ πελάτη και επιχείρησης. Την άποψη αυτή συμμερίζονται και οι Stahl, Matzler and Hinterhube (βλ. 43), προσθέτωντας πως οι σχέσεις με τους πελάτες από πλευράς εταιριών θα πρέπει να εκλαμβάνονται ως επενδυτικές αποφάσεις και οι πελάτες κατά αναλογία ως περιουσιακά στοιχεία τα οποία αναπαράγουν πρόσοδο (πεποίθηση που αποτελεί και ένα από τα δόγματα του σύγχρονου Marketing).

2.4 Τα οφέλη του CLV

Το βασικό ερώτημα που χρίζει απάντησης ωστόσο, είναι οι λόγοι οι οποίοι καθιστούν τόσο σπουδαίο και πλέον επιτακτικό τον προσδιορισμό της Διαχρονικής Αξίας του Πελάτη. Οι Pease, Marfise and Wright (βλ. [40]) σημειώνουν πως η πιο ακριβή και σημαντική πώληση – επένδυση που κάνει μία επιχείρηση, είναι η πρώτη επαφή με κάθε πελάτη. Κατά τη διάρκεια αυτής της συναλλαγής, είτε κερδίζεται είτε χάνεται η εμπιστοσύνη του πελάτη, ανοίγοντας παράλληλα ή φράζοντας αντίστοιχα το δρόμο για διάφορα οφέλη (όπως διατήρηση, αφοσίωση κ.α.). Εντούτοις, τόσο οι Dowling and Uncles (βλ. [71]), όσο οι Reinartz and Kumar (βλ. [72]) και Gupta and Lehmann (βλ. [51]), υποστηρίζουν πως οι μακροχρόνιοι πελάτες (ιδιότητα που ενδέχεται να δεικνύει αφοσίωση), δεν είναι κατ’ ανάγκη και επικερδείς. Συνεπώς, ποια είναι τα ιδιαίτερα αυτά στοιχεία που ανάγουν τη σπουδαιότητα του CLV, εφόσον μέσω της διαδικασίας αυτής δεν αναζητώνται ούτε οι πελάτες που φέρονται αρχικά επικερδείς, αλλά ούτε και οι πελάτες που αναμένεται να παραμείνουν περισσότερο χρονικό διάστημα στο ενεργητικό μίας εταιρίας (βλ. [50], [51], [55],

[59]); Οι Pfeifer, Haskins and Conroy (βλ. [39]) επισημαίνουν ότι ενώ ένας πελάτης μπορεί να εμφανίζεται στην αρχή ως μη κερδοφόρος, είναι πιθανό να έχει υψηλότατο CLV. Τι σημαίνει όμως αυτό πραγματικά;

Ο Elie Ofek (βλ. [42]) παρατηρεί και υποδεικνύει, πως κάθε επιχείρηση μέσω του CLV μπορεί να έχει σωστότερη εικόνα της κερδοφορίας των πελατών της. Πεποίθηση που ενστερνίζονται και οι Pfeifer, Haskins and Conroy (βλ. [39]), Gupta and Lehmann (βλ. [51]), Blattberg, Malthouse and Neslin (βλ. [50]). Με τον τρόπο αυτόν, μπορεί να διακρίνει έναν πελάτη ιδιαίτερα κερδοφόρο, ακόμα και όταν αυτός αρχικά εμφανίζεται να μην αποφέρει κέρδη. Κατά αντιστοιχία, οι επιχειρήσεις μπορούν πλέον να «κατηγοριοποιούν» τους πελάτες τους, να διακρίνουν τους πραγματικά (δυνητικά) κερδοφόρους από τους κοστοβόρους, να διακόπτουν τις οικονομικές σχέσεις με πελάτες τη χρονική στιγμή που αναμένεται να γίνονται αυτοί επιζήμιοι, περιορίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τις απώλειές τους και αντίστοιχα να αναπτύσσουν και να εφαρμόζουν στοχευμένες πολιτικές – στρατηγικές για τους πελάτες αυτούς που φέρονται ως οι πλέον «ωφέλιμοι».Ο Vijay Kumar (βλ. [41]), σημειώνει επιπρόσθετα πως η μεθοδολογία αυτή βοηθάει τους υπευθύνους για τη χάραξη των στρατηγικών των διαφόρων επιχειρήσεων, να υιοθετήσουν τις σωστές τεχνικές, δραστηριότητες – στρατηγικές στο παρόν ώστε να μεγιστοποιήσουν την κερδοφορία των εταιριών στο μέλλον. Αποκαλύπτει, πως στα πρόσθετα οφέλη τα οποία συνοδεύουν το CLV, βρίσκονται η αύξηση την αφοσίωσης των πελατών και κατά συνέπεια η αύξηση της πιθανότητας επανάληψης αγοράς, αλλά και η πιθανότητα κάθε πελάτης να συστήσει τη φίρμα αυτή σε άλλους δυνητικούς (καθιέρωση referral marketing). Οι Stahl, Matzler, and Hinterhube (βλ. [43]) προχωράνε την ανάλυση αυτή ένα βήμα παραπέρα, συνδέοντας την υιοθέτηση του CLV με την αύξηση της τιμής της μετοχής μίας επιχείρησης (πεποίθηση που ασπάζονται και οι Wiesel and Skiera, βλ. [73], Gupta and Lehmann, (βλ. 51]) και V. Kumar, βλ. [41]). Γεγονός που εν τέλει φαντάζει λογικό, αναλογιζόμενος κανείς ότι το CLV αποτελεί τη μεθοδολογία μεγιστοποίησης των οφελών (κερδών, μεριδίου αγοράς, αύξησης αφοσίωσης κ.α.) που μπορεί να αποκομίσει κάθε εταιρία εφαρμόζοντας στοχευμένες στρατηγικές.

Παρά ταύτα, αξίζει να σημειωθεί πως τα οφέλη από την υιοθέτηση του CLV (ως τεχνικής «επόπτευσης» της πελατειακής δραστηριότητας – πραγματικής και δυνητικής – των πελατών μίας εταιρίας), δεν είναι μονόδρομα (δεν περιέρχονται μόνο στην πλευρά της επιχειρήσεως). Ο Kumar (βλ. [41]) σημειώνει πως μέσω του CLV

επωφελούνται πραγματικά και οι ίδιοι οι πελάτες, καθώς οι εταιρίες μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις ανάγκες τους και κατά συνέπεια να «προμηθεύουν» τους ίδιους με περισσότερο στοχευμένα αγαθά (ικανοποιώντας αποτελεσματικότερα τις ανάγκες τους).

2.5 Μέθοδοι αποτίμησης της CLV

Η δυσκολία ορισμού της CLV, καθώς και τα συνοδευόμενα το γεγονός αυτό προβλήματα, όπως η μη σωστή κατανόησή της ως έννοια και η μη δυνατότητα προσδιορισμού και μέτρησης όλων των οφελών (όπως αυτά περιεγράφησαν παραπάνω) που μπορεί να αναπαράγει η σχέση ενός συγκεκριμένου πελάτη με συγκεκριμένη φίρμα (βλ. [41], [43], [50]), δεν είναι τα μοναδικά στοιχεία που αποτελούν παράγοντες ανασταλτικούς για τον ορθό (αριθμητικό) προσδιορισμό της. Οι Stahl, Matzler and Hinterhuber (βλ. [43]), παρατηρούν πως υπάρχουν προβλήματα ακριβούς προσδιορισμού και των κόστεων τα οποία αναπαράγει μία τέτοια σχέση. Το πρόβλημα αυτό υπογραμμίζουν και οι Blattberg, Malthouse and Neslin (βλ. [50]), επισημαίνοντας την άτυπη «διαμάχη» μεταξύ 2 διαφορετικών «φιλοσοφιών» που επικρατούν στη διεθνή βιβλιογραφία. Στο πρώτο «στρατόπεδο» ανήκουν οι υπερασπιστές της άποψης ότι ως κόστη θα πρέπει να λαμβάνονται τα συνολικά κόστη ανά πελάτη (MTC: $\frac{\text{Συνολικά κόστη}}{\text{αριθμός πελατών}}$ [27]), μίας επιχείρησης (βλ. [74]), ενώ στον αντίποδα οι «πολέμιοι» της ιδέας αυτής, υποστηρίζοντας ότι ως κόστη που αναπαράγει κάθε πελατειακή σχέση θα πρέπει να θεωρούνται τα μεταβλητά κόστη (MVC: $\frac{\text{Μεταβλητά κόστη}}{\text{αριθμός πελατών}}$ [28]) ανά πελατειακή σχέση (βλ. [68]).

Πρόσθετα προβλήματα στην ορθή αποτίμηση της διαχρονικής αξίας ενός πελάτη, όπως αναφέρουν οι Gupta et al. (βλ. [56]), φέρει το γεγονός ότι τα περισσότερα μοντέλα δε δύνανται να ενσωματώσουν την ανταγωνιστικότητα της αγοράς (η οποία για παράδειγμα θα μπορούσε να αποδίδεται σε όρους SoW), καθώς η πρόσβαση σε αυτή την πληροφορία είναι πολύ δύσκολη. Με τον τρόπο αυτόν,

[27] Η συγκεκριμένη προσέγγιση απαντάται στη διεθνή βιβλιογραφία ως: “Full Costing”.

[28] Παραταύτα, η προσέγγιση αυτή, γνωστή και ως “Marginal Costing”, χαίρει σημαντικών παραλλαγών, καθώς υπάρχουν προσεγγίσεις οι οποίες δέχονται ως μεταβλητά κόστη, τα κόστη που δημιουργεί κάθε μοναδική σχέση πελάτη εταιρίας, όπως αποστολή ηλεκτρονικού ταχυδρομείου ή καταλόγων προς τη μονάδα αυτήν, μίσθωση επικοινωνιακού κέντρου ή διαμεσολαβητή και άλλα λοιπά είτε κόστη απόκτησης, είτε διατήρησης, πάντα για τη συγκεκριμένη μονάδα (εταιρία ή ιδιώτη).

συνήθως υποεκτιμάται η CLV, επειδή δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί σε μεγάλο βαθμό η πιθανότητα διατήρησης ή αντίστοιχα «μετανάστευσης» κάποιου πελάτη.

Εντούτοις, οι πρώτοι προτείνουν 5 άξονες δράσης για τον ορθότερο δυνατό προσδιορισμό της Διαχρονικής Αξίας ενός Πελάτη, οι οποίες είναι δυνατόν να ενσωματωθούν σε κάθε μοντέλο μέτρησης της CLV. Αυτοί είναι:

- Ακριβής καταμερισμός των κόστεων που συνιστά κάθε **συγκεκριμένη, μοναδική** πελατειακή σχέση, σύμφωνα με τους πόρους όπου αυτή δεσμεύει.
- Προσδιορισμός όλων των οφελών, νομισματικών και μη που δημιουργεί κάθε **συγκεκριμένη, μοναδική** πελατειακή σχέση.
- Προσδιορισμός τυχόν αλλαγών στα κόστη και τα έσοδα τα οποία αναμένεται να αναπαράγει κάθε **συγκεκριμένη, μοναδική** πελατειακή σχέση και οι οποίες ενδέχεται να παρατηρηθούν κατά τη διάρκεια της αναμενόμενης «ζωής» της.
- Προεξόφληση όλων των μελλοντικών «εισροών» που προκύπτουν από κάθε **συγκεκριμένη, μοναδική** πελατειακή σχέση για τον αναμενόμενο χρόνο «ζωής» αυτής, σε όρους του σήμερα.
- Εκτίμηση των ρίσκων που περιλαμβάνει κάθε **συγκεκριμένη, μοναδική** πελατειακή σχέση.

Παρακάτω, θα ακολουθήσει η συνοπτική παράθεση των σημαντικότερων ειδών μοντέλων, τα οποία είναι δυνατόν αν αναλύσουν και να εκτιμήσουν την πελατειακή LV (Lifetime Value).

2.5.1 Ένα τυπικό μοντέλο CLV

Το πλέον απλό μοντέλο μέτρησης της διαχρονικής πελατειακής αξίας μίας μονάδας ή μίας ομοιογενούς ομάδας πελατών, συντίθεται ως εξής:

$$CLV_i = \sum_{t=0}^{T} \frac{\left(p_t^i - c_t^i\right) r_t^i}{\left(1+d\right)^t}$$

Όπου:

- CLV_i: Η καταναλωτική αξία του πελάτη ή της ομάδας i.
- t: Η χρονική περίοδος που εξετάζεται.

- p_t^i: Το έσοδο που επιφέρει στην εταιρία ο πελάτης ή η ομάδα πελατών i, τη χρονική στιγμή t.
- c_t^i: Το κόστος της σχέσης «πελάτη» i και επιχείρησης τη χρονική στιγμή t. Θεωρείται ότι τη χρονική στιγμή t = 0 το κόστος αυτό είναι ίσο με το κόστος απόκτησης το οποίο συμβολίζεται με AC (Acquisition cost).
- r_t^i: Η πιθανότητα παραμονής του «πελάτη» i στην επιχείρηση κατά τη χρονική στιγμή t. Ωστόσο αναφέρεται ότι εάν το μέγεθος αυτό είναι σταθερό, τότε σε κάθε χρονική στιγμή η πιθανότητα αυτή είναι ίση με r^t για κάθε χρονική στιγμή t.
- d: Είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο.
- T: Το σύνολο των περιόδων που εξετάζονται, ή διαφορετικά ο χρονικός ορίζοντας.

2.5.2 Τα μοντέλα RFM

Το παλαιότερο είδος μοντέλων μέτρησης της διαχρονικής αξίας, είναι τα μοντέλα RFM, τα οποία αριθμούν περίπου 30 χρόνια δράσης. Τα μοντέλα αυτά κάνουν χρήση 3 βασικών συμπεριφορικών παραμέτρων[29], προσπαθώντας να προβλέψουν την καταναλωτική συμπεριφορά είτε μεμονωμένων καταναλωτών, είτε ομάδων καταναλωτών (με κοινά χαρακτηριστικά). Συγκεκριμένα, τα μοντέλα αυτά εξετάζουν την ιστορικότητα των 3 βασικών συμπεριφορικών μεταβλητών (ιστορικά στοιχεία αυτών) για κάθε υπό εξέταση μονάδα ή ομάδα, συνδυάζοντας τα επιμέρους επίπεδα των μεταβλητών R, F, M σε καταστάσεις περιγραφικές της καταναλωτικής συμπεριφοράς της υπό εξέτασης μονάδας και με τον τρόπο αυτόν διαμορφώνουν εκτιμήσεις - scores για την αναμενόμενη καταναλωτική συμπεριφορά αυτών στο μέλλον, κατηγοριοποιώντας τους αντίστοιχα σε ανάλογες ομοιογενείς ομάδες πελατειακής αξίας (βλ. [9], [54], [60], [62], [75]).

Ωστόσο, τα μοντέλα αυτά έχουν δεχθεί έντονη κριτική κυρίως για το γεγονός μη δυνατότητας πρόβλεψης της καταναλωτικής συμπεριφοράς μεσοχρόνια ή

[29] **Recency: Προσφατότητα** – το διάστημα που έχει μεσολαβήσει από την τελευταία αγορά, **Frequency: Συχνότητα αγορών** εντός μίας συγκεκριμένης περιόδου και **Monetary: Νομισματική αξία** – Η αξία των πραγματοποιηθέντων συναλλαγών εντός της περιόδου αυτής.

μακροχρόνια[30]. Επίσης, πολλοί ερευνητές θεωρούν ότι οι μεταβλητές RFM δεν αποτελούν ικανούς δείκτες της καταναλωτικής συμπεριφοράς, παρά τη δυνατότητα κωδικοποίησης της ιστορικής συμπεριφοράς κάποιας μονάδας. Παραταύτα, αναφέρεται ότι οι Bucknix and Van den Poel (βλ. [76]) και οι Fader et al. (βλ. [61]), χωρίς να έρχονται σε αντιδιαστολή με την πεποίθηση αυτήν, αποδεικνύουν πως οι μεταβλητές RFM ενσωματωμένες σε μοντέλα CLV, μπορούν να προβλέψουν με ακρίβεια τη διαχρονική αξία ενός πελάτη. Τέλος, τα μοντέλα αυτά δεν έχουν δυνατότητα να περιλάβουν στην ανάλυση τους ενέργειες Marketing από πλευράς επιχειρήσεων, οι οποίες είναι πολύ πιθανό να διαμορφώνουν σημαντικά την παρατηρηθείσα συμπεριφορά ενός καταναλωτή. Εντούτοις, ως πλεονέκτημα των μοντέλων αυτών καταλογίζεται η ευκολία εφαρμογής αυτών, καθώς και η δυνατότητα πρόσβασης στην απαραίτητη πληροφόρηση.

2.5.3 Πιθανοθεωρητικά Μοντέλα (Probability models)

Στην κατηγορία αυτήν, εμπίπτουν τα μοντέλα που κάνουν χρήση στοχαστικών δαιδικασιών για τον προσδιορισμό της LV (lifetime value) ενός πελάτη (βλ. [9], [54], [60], [61],). Το σύνολο των μοντέλων αυτών, κάνει κάποιες υποθέσεις σχετικά με τις παραμέτρους που μετέχουν στο κάθε μοντέλο, όπως για παράδειγμα την κατανομή που ακολουθούν μεγέθη σαν την πιθανότητα παραμονής, τη συχνότητα αγορών, το διάστημα που έχει μεσολαβήσει από την τελευταία αγορά, την ετερογένεια των συναλλαγών στον πληθυσμό των πελατών ή σε επιμέρους πληθυσμούς, των όγκο των συναλλαγών και τη διασπορά τους κ.α. Με τον τρόπο αυτόν, γίνεται μία προσπάθεια εκτίμησης της συμπεριφοράς των μεγεθών αυτών (αναμενόμενη τιμή σε κάθε χρονική περίοδο), με απώτερο στόχο την πρόβλεψη της διαχρονικής αξίας ενός πελάτη ή μίας ομάδας πελατών. Οι προϋποθέσεις ορθής λειτουργίας των μοντέλων αυτών, αποτελούν τον βασικότερο ανασταλτικό παράγοντα (αναφέρεται χαρακτηριστικά πως για τη λειτουργία του μοντέλου Pareto/NBD – βλ. [77], είναι απαραίτητο η ετερογένεια του γενικότερου όγκου των συναλλαγών για τον πληθυσμό των πελατών να ακολουθεί την κατανομή Γάμμα). Τα μοντέλα που κάνουν χρήση αλυσίδων Markov, εμπίπτουν στη γενικότερη αυτή κατηγορία, ωστόσο η λειτουργία τους διαφέρει σε πολύ σημαντικό βαθμό, καθώς δεν απαιτούν τόσο εξειδικευμένες προϋποθέσεις.

[30] Αναφέρεται χαρακτηριστικά, ότι τα μοντέλα RFM έχουν προβλεπτική δυνατότητα μόνο για την επόμενη από την υπό εξέταση περίοδο (βλ. [9], [54]).

2.5.4 Οικονομετρικά μοντέλα (Econometric models)

Τα μοντέλα αυτά ταυτίζονται σε μεγάλο βαθμό με τα πιθανοθεωρητικά μοντέλα πρόβλεψης της CLV, κάνοντας χρήση παρόμοιων τεχνικών για τη μελέτη και εκτίμηση των παραμέτρων τους. Μελετούν ξεχωριστά τα 3 βασικά στοιχεία[31] υπό τα οποία συντίθεται η διαχρονική αξία, καθώς και τις επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις αυτών· και στη συνέχεια μοντελοποιούν την πελατειακή LV, συνδυάζοντάς τα υπό μία συνάρτηση αξίας (βλ. [9], [54], [59], [60], [63]). Για την επιμέρους μοντελοποίηση των μεγεθών αυτών, επιστρατεύονται τεχνικές όπως λογιστικά μοντέλα, probit, μοντέλα Κινδύνου (Hazard models), Διάχυσης (Diffusion models), αλυσίδες Markov, εκφάνσεις του μοντέλου Pareto/NBD κ.α. Χαρακτηριστικά αναφέρεται πως η μοντελοποίηση της απόκτησης νέων πελατών τελείται με τη βοήθεια συνήθως μοντέλων logit, probit, Pareto/NBD και μοντέλων Διάχυσης ενώ αντίθετα η συμπεριφορά της παραμέτρου η οποία αναφέρεται στη διατήρηση των ήδη υπαρχόντων πελατών μελετάται με τη χρήση μοντέλων Markov, Κινδύνου αλλά και logit, probit μοντέλων. Ο αναλυτικός χαρακτήρας των μοντέλων αυτών, συνιστά την αιχμή του δόρατός τους, ενώ το υψηλό υπολογιστικό φόρτο θεωρείται ως η αχίλλειος πτέρνα τους.

2.5.5 Επίμονα μοντέλα (Persistence models)

Τα μοντέλα αυτά ομοιάζουν αρκετά με τα οικονομετρικά μοντέλα μέτρησης της CLV, στο μέτρο του ότι προσεγγίζουν την πελατειακή LV βάσει των 3 βασικών στοιχείων, όπως αυτά περιεγράφησαν και παραπάνω. Η δυναμική των μοντέλων αυτών, έγκειται στη δυνατότητα παρακολούθησης μεγάλων χρονοσειρών σχετικά με τη συμπεριφορά των μεγεθών αυτών και κατόπιν εκτίμησης της συμπεριφοράς τους σε μακροχρόνια πλαίσια (βλ. [9], [54], [64], [78]. Για την ορθή λειτουργία τους, είναι απαραίτητη η πρόσβαση σε μεγάλο όγκο δεδομένων, γεγονός που χαρακτηρίζεται ως μειονέκτημα, καθώς επίσης και η δυσκολία τους να συλλάβουν την επίδραση διαφόρων επιμέρους μεγεθών στις βασικές μεταβλητές του υποδείγματος (όπως για παράδειγμα την επίδραση του μεγέθους του WoM στην απόκτηση νέων πελατών). Εντούτοις, διακρίνονται για την προβλεπτική τους ικανότητα και ιδιαίτερα στο

[31] Τα 3 βασικά στοιχεία που συνθέτουν τη διαχρονική αξία ενός πελάτη για τέτοιου είδους μοντέλα και όχι μόνο, θεωρούνται: α) η απόκτηση νέων πελατών (Customer Acquisition), β) η διατήρηση των ήδη υπαρχόντων (Customer Retention), καθώς και γ) η επέκταση αυτών (Customer Expansion and Margin), νοώντας την επέκταση των συναλλαγών των πελατών αυτών σε λοιπά προϊόντα της ίδιας φίρμας (cross-selling), παρεμφερή ή μη, την αύξηση του όγκου των συναλλαγών αυτών κ.α.

διηνεκές. Στην κατηγορία αυτήν μπορούν να ενταχθούν και τα μοντέλα που κάνουν χρήση Μαρκοβιανών διαδικασιών.

2.5.6 Μοντέλα Επιστήμης Υπολογιστών (Computer Science models)

Τα μοντέλα αυτά ενσωματώνουν τεχνικές ταξινόμησης, κατάταξης, εκμάθησης μηχανών, αλγόριθμους εξόρυξης πληροφορίας κ.α., όπως δέντρα αποφάσεων, νευρωνικά δίκτυα, μηχανές υποστήριξης αποφάσεων και λοιπές μη παραμετρικές τεχνικές, στην προσπάθεια προσδιορισμού των επενεργούντων στην πελατειακή διαχρονική αξία παραγόντων σε πρώτη φάση και στη συνέχεια εκτίμηση της καθαυτής CLV (βλ. [9], [10], [53], [54]). Επίσης διακρίνονται για την προβλεπτική τους ικανότητα και ιδιαίτερα για την ικανότητά τους να διαχειριστούν μεγάλο όγκο πληροφοριών, με μικρό συγκριτικά υπολογιστικό κόστος. Ωστόσο, ακόμα αντιμετωπίζονται με ιδιαίτερο σκεπτικισμό πρώτον λόγω του ότι αποτελούν σύγχρονες τεχνικές[32], κυρίως όμως επειδή η βιβλιογραφία σε ότι αφορά την εκτίμηση της CLV έχει κατακλυστεί από παραμετρικές τεχνικές (όπως οι πιθανοθεωρητικές προσεγγίσεις).

2.5.7 Μοντέλα Διάχυσης/ Ανάπτυξης (Diffusion/ Growth models)

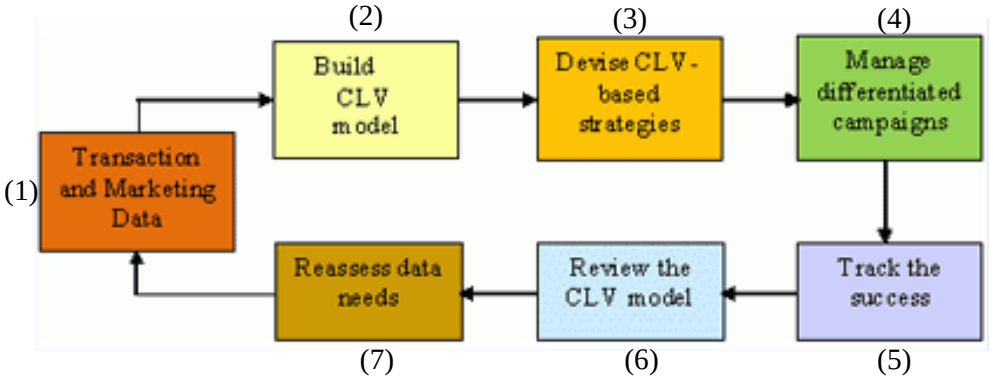
Μέσω των τεχνικών αυτών γίνεται αρχικά η μελέτη της εξελικτικής πορείας μεγεθών όπως η πιθανότητα απόκτησης ή διατήρησης ενός πελάτη, το επιτόκιο προεξόφλησης κ.α. Η αναμενόμενη αυτή εξελικτική πορεία τους, στη συνέχεια μοντελοποιείται και υπεισέρχεται σε ένα γενικότερο μοντέλο εκτίμησης της πελατειακής CLV (βλ. [9], [54], [79]) . Για παράδειγμα, μπορεί να εφαρμοστεί ένα εξειδικευμένο μοντέλο ανάπτυξης (βλ. [80]), το οποίο θα μελετά τον τρόπο όπου διάφοροι παράγοντες (για παράδειγμα πρόθεση επαναγοράς, WoM, εξειδικευμένες τεχνικές Marketing από πλευράς επιχειρήσεως) επηρεάζουν την πιθανότητα απόκτησης πελατών (αποδίδοντας βάρη στους παράγοντες αυτούς, τα οποία θα αποτελούν και τις παραμέτρους του συγκεκριμένου μοντέλου) και κατά αυτόν τον τρόπο να εκτιμηθεί τμηματικά η πελατειακή LV ή ακόμα και το CE (Customer Equity).

[32] Η διεθνής βιβλιογραφία για τέτοιες τεχνικές που μελετούν τη CLV ειδικότερα, είναι ιδιαίτερα περιορισμένη.

2.6 Εφαρμόζοντας το CLV

Ο δυναμικός χαρακτήρας του CLV όπως και των περισσοτέρων τεχνικών της θεωρίας του Marketing αλλά και στα πλαίσια σχεδιασμού στρατηγικών από πλευράς επιχειρήσεων, επιβάλλει τη διαρκή επιτήρησή του και προσαρμογή του στα επίσης δυναμικά δεδομένα της αγοράς (μεταβλητά ως προς το χρόνο). Ο ορθός σχεδιασμός και εν συνεχεία ο ορθός προσδιορισμός της αξίας ενός πελάτη, δεν αποτελούν τα μοναδικά τμήματα απαραίτητα για τη σωστή λειτουργία της τεχνικής αυτής στο σύνολό της. Κάθε επιχείρηση θα πρέπει να είναι σε θέση να αναπροσαρμόζει τις διαστάσεις της τεχνικής αυτής στα τρέχοντα δεδομένα. Να επανεξετάζει τα μοντέλα αποτίμησης της διαχρονικής αξίας των πελατών που εφαρμόζει και να ρυθμίζει αντίστοιχα τις στοχευμένες στρατηγικές της.

Ο V. Kumar (βλ. [41]), περιγράφει την τεχνική αυτή στο σύνολό της, ως έναν φαύλο κύκλο, ο οποίος ναι μεν έχει σημείο εκκίνησης, όμως εν συνεχεία (πρέπει να) ακολουθεί μία αδιάκοπτη διαδρομή. Έναν «βρόγχο». Στο παρακάτω σχήμα (σχ 2.2) παρατίθεται ο τρόπος με τον οποίο το CLV, πρέπει να εφαρμόζεται, να ελέγχεται και να αναπροσαρμόζεται (κυκλικά και αδιάλειπτα) σύμφωνα με τον Kumar. Ο ίδιος ορίζει ως σημείο εκκίνησης, τον κόμβο που σημαίνεται ως "Transaction and Marketing Data". Ο κόμβος αυτός αναφέρεται στη συλλογή των δεδομένων τα οποία προέρχονται από τις συναλλαγές των πελατών με την έκαστο εταιρία, αλλά και από λοιπές πηγές άντλησης πληροφοριών, όπως ερωτηματολόγια, ανταποκρίσεις σε ηλεκτρονικούς καταλόγους αγαθών, έρευνες μέσω τηλεφώνου κ.α. Ορίζοντας τον κόμβο αυτόν ως αρχικό, ο Kumar, επαναφέρει και αναδεικνύει το θέμα της σπουδαιότητας της συλλογής δεδομένων (όπως αυτό παρουσιάστηκε ειδικά για Μαρκοβιανά μοντέλα στο προηγούμενο κεφάλαιο και την ενότητα 1.7 – «*Το δείγμα εκμάθησης στα Μαρκοβιανά συστήματα*»)



(Πηγή: V. Kumar. "*Tough times call for CLV*". 2009)
σχ. 2.2

Το βασικότατο στοιχείο της διαδικασίας που περιγράφει το παραπάνω σχήμα, είναι η διατήρηση των βημάτων στο διηνεκές, ώστε να αποφεύγονται σφάλματα εκτίμησης της διαχρονικής αξίας κάθε πελάτη. Γεγονός με εξωτερικεύσεις στην ανάπτυξη, την εφαρμογή και την επιτυχία των στρατηγικών κάθε επιχείρησης και κατά συνέπεια στη βιωσιμότητάς της. Το παραπάνω σχήμα επίσης επισημαίνει το ρόλο του CLV, ως τον ρυθμιστή για την ανάπτυξη και την εφαρμογή των διαφόρων στοχευμένων στρατηγικών κάθε επιχείρησης (μετάβαση από το 2ο βήμα – ανάπτυξη μοντέλου CLV στα βήματα 3 – σχεδιασμός στρατηγικών βάσει αποτελεσμάτων μοντέλου CLV και 4 διαχείριση των στοχευμένων αυτών στρατηγικών). Τα βήματα 5, 6 και 7 αποτελούν τα ελεγκτικά τμήματα της διαδικασίας αυτής. Αρχικά, (στο 5ο στάδιο) ελέγχεται η επιτυχία των διαφόρων επιμέρους στρατηγικών (π.χ. πολιτικές διάκρισης τιμών για πελάτες με υψηλό CLV, ή προγράμματα διατήρησης – αφοσίωσης για νεότερους πελάτες και η επίδρασή τους στην καταναλωτική δραστηριότητα συγκεκριμένων κατηγοριών πελατών). Στο 6ο βήμα, γίνεται έλεγχος του μοντέλου βάσει των επιδράσεων των εφαρμοσμένων από το 4 βήμα στρατηγικών, ενώ στο 7ο επανεκτιμώνται οι ανάγκες σε δεδομένα (ένα τμήμα που μπορεί να αποτρέπει πολλά προβλήματα τα οποία σχετίζονται με την επιτυχία του εφαρμοζόμενου μοντέλου CLV). Η διαδικασία επανεκκινεί εισάγοντας τα νέα (εν δυνάμει) δεδομένα και αναπροσαρμόζωντας το μοντέλο από την αρχή αν κριθεί απαραίτητο (και κατ’ επέκταση ρυθμίζοντας ανάλογα τις διάφορες στρατηγικές κάθε επιχείρησης).

2.7 Διακρίνοντας πελάτες και ενέργειες Marketing κατά CLV

Σύμφωνα με τους Blattberg, Getz και Thomas (βλ. [81]), το σύνολο των πελατών μίας επιχείρησης, διακρίνεται σε 5 κατηγορίες. Κάθε επιχείρηση διακρίνοντας κατά τον τρόπο αυτόν τους πελάτες της (δυνητικούς και μη), έχει τη δυνατότητα να εφαρμόσει διαφορετικές στρατηγικές σε κάθε επιμέρους πληθυσμό, αντλώντας διαφορετικά οφέλη (μεγιστοποιώντας για την ακρίβεια τα οφέλη που μπορεί να λάβει) από αυτούς (σύμφωνα και με τις ιδιότητες που περιλαμβάνει ο κάθε πληθυσμός). Οι επιμέρους αυτοί πληθυσμοί περιγράφονται ως εξής:

- **Δυνητικοί πελάτες (Prospects):** Οι καταναλωτές που δεν ανήκουν στον πληθυσμό των ενεργών πελατών της έκαστου εταιρίας, αλλά είναι εν δυνάμει πελάτες της. Κατά συνέπεια, οι ενέργειες του Marketing και οι στρατηγικές που μπορούν να

εφαρμοστούν στον συγκεκριμένο πληθυσμό πελατών, έχουν σα σκοπό την προσέγγιση και «δημιουργία» νέων πελατών. Το στάδιο αυτό (βλ. Pease, Marfise and Wright, [40] και Ofek, [42]) είναι ιδιαίτερα σημαντικό, γιατί τίθενται οι βάσεις για μακροχρόνια ικανοποίηση αλλά και πιθανή διατήρηση του πελάτη. Έτσι εάν η εταιρία δημιουργήσει πολύ υψηλές προσδοκίες σε κάποιους νέους (δυνητικούς) πελάτες, αδυνατώντας να ανταπεξέλθει στις προσδοκίες αυτές, τότε ενώ αναμένεται να συνάψει εμπορικές σχέσεις με αυτούς με ιδιαίτερη ευκολία, νομοτελειακά η σχέση αυτή αναμένεται να καταλήξει σε βραχυχρόνιο διάστημα (γεγονός που συνάμα επηρεάζει την πρόσοδο που μπορεί να δημιουργήσει κάθε νέος πελάτης αλλά και τα ποσοστά διατήρησης των νέων αυτών πελατών).

- **Καινούριοι πελάτες (First – Time Byers):** Αναφέρεται στον πληθυσμό των πελατών που μόλις πραγματοποίησαν την πρώτη τους συναλλαγή με την υπό ανάλυση φίρμα. Το ποσοστό απώλειας (βλ. § 2.3.1.γ) για τη συγκεκριμένη κατηγορία πελατών, είναι ιδιαίτερα υψηλό και σε αυτό τον τομέα θα πρέπει να στοχεύει η κατεύθυνση του αντίστοιχου στοχευμένου Marketing. Η κατηγορία αυτή, χρίζει ιδιαίτερης προσοχής από πλευράς επιχειρήσεως, καθώς τα «μέλη» της ενδέχεται να φέρουν (δυνητικά) υψηλή διαχρονική αξία, όμως η πληροφόρηση για την καταναλωτική τους συμπεριφορά είναι ιδιαίτερα περιορισμένη.

- **Πρώιμοι Πελάτες (Early Repeat Byers)**: Το πλήθος των πελατών που επιβεβαιώνουν σε έναν βαθμό τη συνέχιση της εμπορικής τους σχέσης με την εταιρία, επαναλαμβάνοντας πρώιμα κάποια συναλλαγή. Η συγκεκριμένη ομάδα πελατών εμφανίζει μεγαλύτερη διάθεση επανάληψης αγοράς και κατά συνέπεια διατήρησης (της εμπορικής τους σχέσης) σε σχέση με την προηγούμενη,. Επίσης, η εμπιστοσύνη τους προς τη φίρμα αυξάνει και συνεπαγωγικά μειώνεται το ποσοστό διαφυγής αυτών προς άλλες εταιρίες. Αντίστοιχα, αυξάνει και η πληροφόρηση από πλευράς εταιρίας, σχετικά με το καταναλωτικό μοτίβο των πελατών που βρίσκονται στην κατηγορία αυτή, με συνέπεια η έκαστη επιχείρηση να αρχίζει να αποκτά μία πιο ολοκληρωμένη άποψη για τη συνολική αξία που αναμένεται να φέρουν οι πελάτες αυτοί.

- **Πάγιοι Πελάτες (Core Customers):** Οι μονάδες της συγκεκριμένης κατηγορίας, αποτελούν κατά βάσει τους πλέον αφοσιωμένους πελάτες κάθε επιχείρησης. Η πιθανότητα μεταστροφής αυτών είναι πολύ μικρή, ενώ η πιθανότητα

και συχνότητα επανάληψης αγοράς σημαντικά υψηλότερες των υπολοίπων κατηγοριών. Κατά αντιστοιχία, και τα ποσοστά διατήρησης αυτών, αλλά και η αξία όπου γεννούν.

- **Πρόσκαιροι Πελάτες (Core Defectors):** Η συγκεκριμένη κατηγορία διακρίνεται από χαμηλή αφοσίωση. Τέτοιοι πελάτες θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ακόμα και ως «νομάδες[33]», καθώς σπάνια μένουν προσκολλημένοι σε μία συγκεκριμένη φίρμα. Οι λόγοι είναι ποικίλοι, έλευση νέων ανταγωνιστών, χαμηλή ικανοποίηση από την ποιότητα συγκεκριμένου προϊόντος, ενέργειες marketing (απόκτησης) από λοιπές εταιρίες, κ.α. Συνήθως οι μονάδες της συγκεκριμένης κατηγορίες εμφανίζονται να μεταπηδούν σε ανταγωνιστικές εταιρίας ακόμα και για υψηλότατα επίπεδα ικανοποίησης. Κατά συνέπεια, τέτοιοι πελάτες συνιστούν εν γένει χαμηλά οφέλη (αναπαράγουν χαμηλή καταναλωτική αξία, ενώ οι εμπορικές σχέσεις που συνάπτουν συχνά συνιστούν πολύ υψηλά κόστη) για κάθε εταιρία. Εντούτοις, κάθε εταιρία υποχρεούται να γνωρίζει τους λόγους αυτούς για τους οποίους οι εν λόγω πελάτες οδηγούνται προς άλλες ανταγωνιστικές φίρμες και να στρέψουν τις ενέργειες του Marketing για τη συγκεκριμένη κατηγορία προς την αντίστοιχη κατεύθυνση.

Αντίθετα, οι Pease , Marfise and Wright (βλ. [40]) εστιάζουν στη σπουδαιότητα της τμηματοποίησης του πελατολογίου κάθε επιχείρησης, συγκλίνοντας προς μία περισσότερο εξειδικευμένη κατηγοριοποίηση πελατών κάθε εταιρίας (αυστηρά βάσει των αποτελεσμάτων του CLV). Με αφορμή μία έρευνα για την ανάλυση της διαχρονικής αξίας των πελατών της εταιρίας “Federal Express” που διενεργήθηκε στο εσωτερικό της εταιρίας, οι ίδιοι παρουσιάζουν 4 βασικές κατηγορίες διάκρισης κάθε πελατολογίου (βάσει μόνο της διαχρονικής αξίας που φαίνεται και αναμένεται να αναπαράγουν οι πελάτες της εταιρίας αυτής). Οι επιμέρους κατηγορίες είναι οι εξής:

- **Σταθεροί πελάτες (Stable customers):** Αντιστοιχεί στην κατηγορία των παγίων πελατών του Boston. Αποτελεί δηλαδή τον πυρήνα του πελατολογίου κάθε επιχείρησης και τη βασική πηγή κερδών τους (καθώς συνδυάζουν υψηλή πρόσοδο με χαμηλά κόστη εξυπηρέτησης). Διακρίνονται από πολύ υψηλές τιμές διαχρονικής αξίας, ενώ μέσα από την έρευνα αυτή προκύπτει πως οι πελάτες της κατηγορίας

[33] Καθότι μεταναστεύουν συχνά προς άλλες φίρμες – προϊόντα.

αυτής δύνανται να αναπαράγουν ακόμα και 3 φορές τη διαχρονική αξία του μέσου πελάτη της επιχείρησης

- **«Αναπτυσσόμενοι» Αγοραστές (Growing Shippers):** Το βασικό στοιχείο που τους διακρίνει από τις λοιπές κατηγορίες, είναι η υψηλή διαχρονική τους αξία που εμφανίζουν για μικρό εν συγκρίσει με τους παραπάνω χρόνο σύναψης της εμπορικής τους σχέσης με την εταιρία.

- **«Μεσοπρόθεσμοι» Πελάτες (Six – Month Lapsed Customers):** Οι πελάτες της κατηγορίας αυτής φέρονται να αντιστοιχούν σε μέτρια επίπεδα διαχρονικής αξίας, παρά το γεγονός ότι έχουν διατηρήσει την εμπορική τους σχέση με την επιχείρηση για ένα σαφές χρονικό διάστημα.

- **«Εποχικοί» Αγοραστές (Seasonal Shippers):** Ως μία ιδιαίτερη κατηγορία διάκρισης των πελατών της εταιρίας, παρατηρήθηκε μία ομάδα πελατών η οποία επαναλάμβανε αγορές σε περιοδικά και μεσοπρόθεσμα ή μακροπρόθεσμα χρονικά διαστήματα. Ωστόσο, η συγκεκριμένη ομοιάζει τα μέγιστα με τους «Πρόσκαιρους» πελάτες του Boston. Πελάτες «καιροσκόποι» οι οποίοι ανακυκλώνονται μεταξύ των διαφόρων ανταγωνιστικών εταιριών και κατά συνέπεια αντιστοιχούν σε πολύ χαμηλή διαχρονική αξία.

Εντούτοις, υπενθυμίζεται ότι η βασική λειτουργία κάθε CLV δεν είναι μόνον η ομαδοποίηση του πληθυσμού των πελατών κάθε εταιρίας, αλλά κυρίως η ανακάλυψη των ιδιοτήτων που συνθέτουν τους επιμέρους πληθυσμούς ώστε κάθε στρατηγική που θα εφαρμοστεί πάνω τους να είναι στοχευμένη (αποκλειστικά για συγκεκριμένη ομάδα με τις δικές της μοναδικές ιδιότητες) και αποτελεσματικότερη.

Κεφάλαιο 3ο

Ανάλυση του μοντέλου εφαρμογής

3.1 Εισαγωγή

Το πρώτο βήμα στη διαδικασία ανάπτυξης της εφαρμογής, είναι ο σχεδιασμός των διαφορετικών καταστάσεων, περιγραφικών της συμπεριφοράς ενός καταναλωτή. Για να πραγματοποιηθεί ωστόσο το στάδιο αυτό, είναι επιτακτικής ανάγκης αρχικά η επιλογή των προσδιοριστικών παραγόντων που έχουν τη δύναμη να αποδώσουν κατά τω πλησιέστερω τη συμπεριφορά αυτή. Τα μοντέλα RFM (όπου βασικοί παράγοντές συμπεριφοράς είναι: α) **R**ecency: ο χρόνος που έχει μεσολαβήσει από την τελευταία αγορά, β) **F**requency: η συχνότητα αγορών και γ) **M**onetary: η νομισματική αξία των αγορών) παρέχουν έναν γενικότερο τρόπο προσομοίωσης της καταναλωτικής συμπεριφοράς μίας μονάδας (φυσικού προσώπου – ατόμου ή νομικού – εταιρίας), απαλλαγμένη από εξειδικεύσεις που σχετίζονται με μοναδικές δομές αγοράς, ιδιότητες προϊόντων (ανάλογα με το είδος τους) κ.α. Για παράδειγμα, εάν αντικειμενικός στόχος είναι ο προσδιορισμός του καταναλωτικού «μοτίβου» που φαίνεται να ακολουθεί ένας πελάτης ο οποίος συμμετέχει σε ηλεκτρονικές δημοπρασίες· στην περίπτωση αυτή θα ήταν επιθυμητό να περιληφθούν ειδικότεροι παράγοντες όπως αριθμός επισκέψεων ή συμμετοχών σε δημοπρασίες (ηλεκτρονικές) πριν από κάποια τελική αγορά (βλ. [10], [44]). Διαφορετικά, είναι πολύ λογικό κάποια αγαθά ή υπηρεσίες να σχετίζονται με τις εποχές ή τον καιρό (σε αντίθεση με κάποια άλλα), όπως για παράδειγμα η αγορά των παγωτών, όπου αναμένεται σε μία μέρα υψηλών θερμοκρασιών, να παρατηρηθούν υψηλότερες πιθανότητες κατανάλωσης για κάθε εν δυνάμει πελάτη.

Ωστόσο, το βασικό μειονέκτημα της προσέγγισης αυτής, μέσω των αλυσίδων Markov, έγκειται στην εκθετική αύξηση του αριθμού των δυνατών καταστάσεων του υποδείγματος, καθώς αυξάνουν οι υπό – καταστάσεις των κύριων παραμέτρων συμπεριφοράς. Έτσι, για τις 3 παραμέτρους R.F.M και υποθέτοντας ότι η καθεμιά αναλύεται επαρκώς σε 3 υπό – καταστάσεις (π.χ. χαμηλή, μέση, υψηλή), οι δυνατές

καταστάσεις (states) του υποδείγματος φθάνουν τις 27. Ο αριθμός αυτός γιγαντώνεται (27^2), στην προσπάθεια να προσεγγιστούν όλες οι δυνατές σχέσεις μετάβασης. Η μόνη διαφοροποίηση είναι ότι οι σχέσεις μετάβασης δεν είναι αναγκαίο να φτάνουν απόλυτα τον αριθμό αυτόν, καθώς είναι πολύ πιθανό να μην είναι δυνατή η μετακύληση από κάποια states σε κάποια άλλα. Ωστόσο, ο πίνακας μετάβασης, ο οποίος αποτελεί το συγκεντρωτικό τμήμα όλων των σχέσεων - πιθανοτήτων μετάβασης θα παραμένει NxN διαστάσεων (όπου N = αριθμός επιπέδων Recency * αριθμός επιπέδων Frequency * αριθμός επιπέδων Monetary).

Γίνεται εύκολα αντιληπτός συνεπώς, ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται το επίπεδο δυσκολίας του υποδείγματος, εάν υποτεθούν περισσότερες υπό – καταστάσεις για τις βασικές μεταβλητές ή γίνει προσπάθεια ενσωμάτωσης μίας ακόμα μεταβλητής στο υπόδειγμα. Είναι συμπερασματικά πολύ σημαντικό, αρχικά να γίνεται πάντα προσπάθεια περιορισμού των υπό – καταστάσεων των μεταβλητών στις πλέον απαραίτητες, χωρίς να θυσιάζεται η ακρίβεια του μοντέλου. Παραταύτα, σε πολλές έρευνες, τα επιμέρους επίπεδα χρησιμοποιούνται αυθαίρετα, με αποτέλεσμα τη δίχως λόγο αύξηση του υπολογιστικού φόρτου και της πολυπλοκότητας του συστήματος.

Οι βασικές παράμετροι του συγκεκριμένου υποδείγματος οι οποίες θα εξεταστούν υπό διάφορα σενάρια είναι: α) **R**ecency, β) **F**requency, γ) **M**onetary και δ) **S**atisfaction. Στη διαδικασία σχεδιασμού της εφαρμογής ωστόσο, σημαντικότατο ρόλο θα τελέσουν και τα σενάρια υπό τα οποία θα ελεγχθούν οι συμπεριφορές των παραμέτρων αυτών αλλά και του υποδείγματος ως ολότητα. Το βασικό αίτιο έγκειται στο γεγονός ότι κάθε σενάριο θα θέσει τα πλαίσια για τη «δραστηριότητα - συμπεριφορά» των υπό ανάλυση παραμέτρων. Τα σενάρια τα οποία θα αφορούν στη δομή μίας συγκεκριμένης ως προς τις γενικές ιδιότητές της πλην όμως τυχαίας αγοράς καθώς δε θα εξιδανικεύονται επιμέρους γνωρίσματά αυτής όπως η ειδική περιγραφή του προϊόντος, όντας «φανταστικά» θα πρέπει να περιγράφουν σε μεγάλο βαθμό υπαρκτές καταστάσεις - αγορές και να αντιπροσωπεύουν το κατά δύναμει μεγαλύτερο φάσμα περιπτώσεων (αγορών).

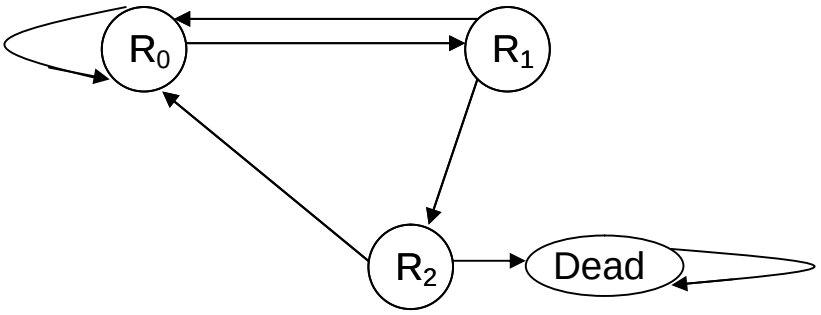
3.2 Οι βασικοί παράγοντες της καταναλωτικής συμπεριφορές και ο τρόπος «λειτουργίας» τους

Αρχικά, θα πρέπει να γίνει η περιγραφή των 3 βασικών συμπεριφορικών παραμέτρων (R, F, M). Οι παράμετροι αυτές, αναμένεται να περιγράφουν σε κάθε

χρονική στιγμή (βήμα μοντέλου) τον τρόπο με τον οποίο δρα καταναλωτικά ο κάθε υπό εξέταση πελάτης και ταυτόχρονα να δίνουν πληροφορίες για την πιθανή μελλοντική του δράση.

3.2.1 «Προσφατότητα» - Recency

R: Η συγκεκριμένη παράμετρος, αποτελεί έναν δείκτη μέτρησης του διαστήματος (χρονικού) που έχει μεσολαβήσει από την τελευταία πραγματοποιηθείσα αγορά από πλευράς του υπό εξέταση πελάτη. Μετρά δηλαδή το χρόνο μεταξύ της τρέχουσας περιόδου και της περιόδου την οποία πραγματοποιήθηκε η τελευταία αγορά (για τον πελάτη). Αποτελεί ίσως την κυριότερη παράμετρο στα μοντέλα RFM, καθώς είναι ο ρυθμιστής που καθορίζει εάν ένας πελάτης είναι ενεργός (πραγματοποίηση αγοράς την τρέχουσα περίοδο), ανενεργός (μη παρατηρηθείσα αγορά για σχετικά μικρό αριθμό περιόδων) ή «νεκρός» - «χαμένος» (όταν θεωρείται πως έχει διακόψει την εμπορική του σχέση με την εταιρία για οποιονδήποτε λόγο (όπως για παράδειγμα στην περίπτωση όπου έχει μεταναστεύσει προς κάποια άλλη ανταγωνιστική εταιρία).



σχ. 3.1

Το παραπάνω σχήμα (σχ. 3.1) περιγράφει τον τρόπο λειτουργίας της παραμέτρου αυτής. Το R_0 δεικνύει την επανάληψη αγοράς στην τρέχουσα περίοδο. Αν ο καταναλωτής επαναλάβει αγορά και στην επόμενη περίοδο, το σύστημα επανακυλίεται στην κατάσταση R_0. Στην περίπτωση όπου δε λάβει χώρα κάποια αγορά στην επόμενη περίοδο, τότε ο καταναλωτής παραμένει αδρανής και συνεπώς μεταπηδά στην κατάσταση R_1, η οποία αντιπροσωπεύει το γεγονός ότι ο καταναλωτής δεν έχει έρθει σε εμπορική επαφή με την επιχείρηση για (τουλάχιστον) μία περίοδο. Εάν στο νέο βήμα του μοντέλου παρατηρηθεί αγορά, τότε έχουμε επιστροφή στην κατάσταση R_0. Διαφορετικά το σύστημα μεταβαίνει στην R_2, στην

οποία ο καταναλωτής είναι αδρανής για περισσότερες από μία περιόδους (το R_2 τυπικά μπορεί να θεωρηθεί ως μία σύνθετη κατάσταση στην οποία ο καταναλωτής δεν πραγματοποιεί αγορά για περισσότερες από μία περιόδους, χάριν απλούστευσης).

Σε ένα κανονικό υπόδειγμα οι περίοδοι αυτές όπου ο καταναλωτής είναι ανενεργός, οφείλουν να διακρίνονται σαφώς). Όσο ο καταναλωτής είναι ανενεργός, μπορεί πάντα να επιστρέψει στην κατάσταση R_0. Γενικά, από κάθε κατάσταση R_x (με $x \in \mathbb{N}$), οι δυνατές μεταβάσεις είναι είτε προς την R_0, (ακόμη και επανακύληση στην ίδια κατάσταση), είτε προς την R_{x+1}. Εάν ο καταναλωτής παραμείνει ανενεργός για μεγάλο χρονικό διάστημα, τότε συνήθως θεωρείται χαμένος για πάντα (lost-for-good ή dead). Ωστόσο, κάτι τέτοιο εξαρτάται εξ' ολοκλήρου από τις υποθέσεις του υποδείγματος. Αναφέρεται παρά ταύτα, πως πολλά μοντέλα που χρησιμοποιούν τη χρονική διάσταση της «επανάληψης αγοράς» (το διάστημα δηλαδή που μεσολαβεί ανάμεσα σε 2 χρονικές στιγμές επαναγοράς) για έναν πελάτη ως συμπεριφορική μεταβλητή, αβίαστα θεωρούν πως αν κάποιος πελάτης δεν πραγματοποιήσει κάποια αγορά εντός συγκεκριμένου αριθμού περιόδων, τότε περιέρχεται στην αφάνεια και παύει να υφίσταται ως πελάτης από την επιχείρηση (θεωρείται δηλαδή πως δεν πρόκειται να ξαναγυρίσει). Ωστόσο, το γεγονός αυτό είναι άξιο κριτικής, δεδομένου ότι η ανάγκη ωθεί στην αγορά κάποιου αγαθού προς ικανοποίησή της. Κατά συνέπεια, ένας πελάτης που δεν φαίνεται να πραγματοποιεί αγορά για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, ενδέχεται να μην υπάρχει η ανάλογη ανάγκη που χρίζει ικανοποίησης και συνεπώς ο πελάτης να μην έχει «χαθεί» - μεταβεί προς ανταγωνιστική εταιρία (στο σημείο αυτό φαίνεται η σπουδαιότητα της χρήσης του share – of – wallet). Με τον προαναφερθέντα τρόπο όμως, παρατηρούνται υπερεκτιμήσεις κόστους αλλά και λανθασμένες κατηγοριοποιήσεις πελατών ως «νεκροί - dead» ή νέοι γεγονός με αντίκτυπο τόσο στα κόστη (προς απόκτηση ή διατήρηση του εν λόγω πελάτη) όσο και στο σχεδιασμό της στρατηγικής της επιχείρησης.

Η κατάσταση dead (βλ. σχ. 3.1), η οποία αποτελεί ένα απορροφητικό στάδιο (εάν το σύστημα περιέλθει σε αυτό, τότε δε μπορεί να ξεφύγει όπως δείχνουν και τα βέλη μετάβασης βλ. § 1.5.2), αντιπροσωπεύει το γεγονός κατά το οποίο λόγω του ότι ο καταναλωτής είναι ανενεργός για πολλές περιόδους, τότε θεωρείται «νεκρός». Ο «θάνατος» αυτός αναφέρεται στον τερματισμό των εμπορικών σχέσεων μεταξύ του πρώτου και της εταιρίας στην οποία εφαρμόζεται το μοντέλο. Σε οικονομικούς όρους, σημαίνει ότι εάν η εταιρία θέλει να επανασυνάψει σχέσεις (εμπορικές) μαζί του, θα

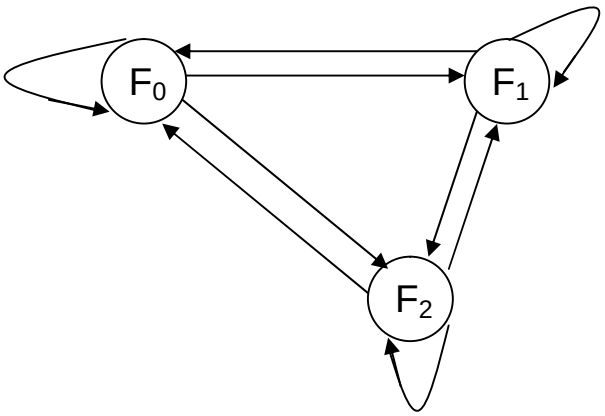
πρέπει να τον προσεγγίσει από την αρχή. Γεγονός που σημαίνει νέα κόστη απόκτησης (acquisition costs – κόστη προσέγγισης από την αρχή, σαν να μην υπήρχε ποτέ πριν «συνεργασία» μεταξύ τους).

3.2.2 Συχνότητα αγορών – Frequency

F: Η μεταβλητή αυτή, περιγράφει τον αριθμό των συναλλαγών που έχει πραγματοποιήσει ο έκαστος (υπό εξέταση) πελάτης, εντός ενός συγκεκριμένου διαστήματος – περιόδου. Οι υπό – καταστάσεις της μεταβλητής αυτής μπορούν είτε να αφορούν σε απόλυτα μεγέθη των πραγματοποιηθέντων συναλλαγών (ωστόσο αναφέρεται ότι εφόσον οι τιμές της είναι φυσικοί αριθμοί, τότε ενδέχεται να λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή εντός ενός «λογικού» συνόλου, για παράδειγμα $F \in \mathbb{N} \mid \{0,1,2,...,10\}$), με αποτέλεσμα κατά τον τρόπο αυτόν να αυξάνει ο όγκος των πράξεων και να τροφοδοτείται η πολυπλοκότητα του υποδείγματος), είτε να είναι ενδεικτικές αυτών (να αφορούν δηλαδή σε κάποια διατεταγμένη κλίμακα, όπως χαμηλή, μέτρια, υψηλή, στην προσπάθεια περιορισμού του αριθμού των υπό - καταστάσεων και των συνοδευόμενων αυτών προβλημάτων).

Σε ότι αφορά τώρα τη λειτουργία της μεταβλητής αυτής (σχ. 3.2), τα πράγματα απλοποιούνται. Οι σχέσεις μετάβασης είναι μεν περισσότερες από την πρώτη περίπτωση ακόμη και για ίδιο αριθμό υπό – καταστάσεων, εντούτοις αυτό συμβαίνει καθώς το σύστημα είναι δυνατόν να μετακυληθεί από κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη (συνιστά μία «Τακτική» αλυσίδα – βλ. 1.5.5). Κάτι τέτοιο είναι απόλυτα λογικό εάν κάποιος αναλογιστεί το απλό παράδειγμα μίας νοικοκυράς η οποία πραγματοποιεί τα ψώνια της από ένα πολυκατάστημα (supermarket). Τη μία εβδομάδα (περίοδο – βήμα μοντέλου) μπορεί να κάνει πολλές αγορές, καλύπτοντας πλήρως τις ανάγκες της σε τρόφιμα και λοιπά είδη ανάγκης (κατάσταση F_2). Αντίθετα, την επόμενη εβδομάδα – περίοδο, μπορεί απλά να αγοράσει ένα αντικείμενο το οποίο διαπίστωσε ότι της έλειπε (ή ακόμη και τίποτα – κατάσταση F_0), να συνεχίσει να πραγματοποιεί πολλές αγορές, βάσει πάντα των αναγκών της (κατάσταση F_2), ή ακόμα και να πραγματοποιήσει έναν μικρότερο όγκο συναλλαγών από το συγκεκριμένο κατάστημα (κατάσταση F_1). Κατά τον τρόπο αυτόν, οι υπό – καταστάσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν εντός του υποδείγματος, θα είναι οι εξής:

- F_0: χαμηλή συχνότητα αγορών.
- F_1: μέτρια συχνότητα αγορών.
- F_2: υψηλή συχνότητα αγορών.



σχ. 3.2

3.2.3 Νομισματική αξία – Monetary

M: Όπως δεικνύει και το όνομα της συγκεκριμένης μεταβλητής, ο παράγοντας αυτός αφορά στην παρατήρηση του όγκου των συναλλαγών, που διενήργησε ο έκαστος υπό εξέταση πελάτης, αποδιδόμενες σε νομισματικές μονάδες. Προφανώς αποτελεί ένα μέγεθος το οποίο εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τις τιμές της προηγούμενης παραμέτρου (συχνότητας). Είναι αναμενόμενο, καθώς αυξάνει η συχνότητα των αγορών εντός μίας περιόδου, να αυξάνει παράλληλα και η νομισματική αξία αυτών (χωρίς η εν δυνάμει μεταξύ τους σχέση να είναι είτε γραμμική, είτε 1 – 1[34], βλ. [50]). Εντούτοις, επειδή επίσης αφορά σε ένα μέγεθος που μπορεί να λάβει οποιεσδήποτε τιμές στο χώρο των μη αρνητικών αριθμών, κρίνεται σκόπιμη η κωδικοποίηση των αποτελεσμάτων του, αντιστοιχώντας τα επίσης σε ανάλογη διατεταγμένη κλίμακα.

Κάθε κατηγορία νομισματικής αξίας μπορεί να αποτελεί μία πιθανοθεωρητική επισκόπηση της δυνητικής (αναμενόμενης) αξίας που αναπαράγει το σύνολο των πελατών για κάθε επίπεδο της F. Κατά τον τρόπο αυτόν, μπορεί να επιτευχθεί πρόσβαση σε διάφορα σενάρια όπως χείριστο, ιδανικό, πιθανότερο κ.α. Η μέση τιμή των κατανομών αυτών, μπορεί να αποτελέσει ένα (απλό και εύκολο) μέτρο του κάθε επιπέδου M. Τα περισσότερα μοντέλα υποθέτουν ομοιόμορφη κατανομή της νομισματικής αξίας για τα επιμέρους επίπεδα αυτής, και κατά συνέπεια δέχονται άκριτα ως τιμή τον μέσο κάθε επιπέδου. Γεγονός το οποίο είναι άξιο κριτικής, καθώς όπως σημειώνουν και οι Pfeifer and Carraway (βλ. [4]), ο αριθμητικός μέσος δεν

[34] Τα υψηλότερα επίπεδα F δεν υποδηλώνουν αυστηρά και υψηλότερα επίπεδα M. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει πως αν επιχειρηθεί διάταξη του συνόλου των δυνατών καταστάσεων μεταξύ F και M (δηλαδή όλοι οι δυνατού συνδυασμοί μεταξύ F και M), τότε η αλυσίδα που θα προκύψει, θα είναι «Τακτική».

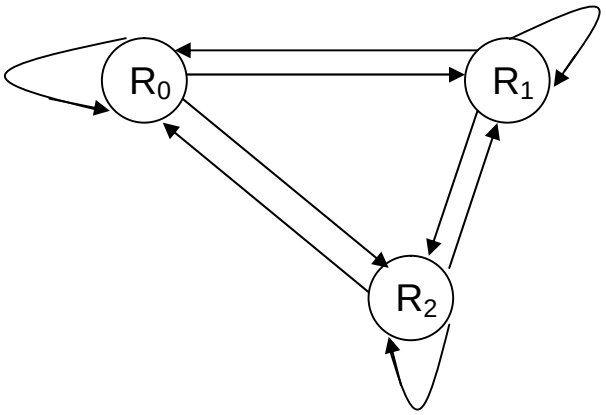
αποτελεί μέτρο κατάλληλο για την παράμετρο της νομισματικής αξίας του συνόλου των πελατών, εφόσον είναι επιτακτικό το στοιχείο αυτό να είναι πιο εξιδανικευμένο (όπως για παράδειγμα αναμενόμενα έσοδα, κέρδη του πελάτη x).

Τα επιμέρους επίπεδα της M που θα χρησιμοποιηθούν, είναι τα παρακάτω:

- M_0: χαμηλή νομισματική αξία.
- M_1: μέτρια νομισματική αξία.
- M_2: υψηλή νομισματική αξία.

Κατά αντιστοιχία, η λειτουργία της παραμέτρου αυτής, είναι όμοια με της προαναφερθείσας μεταβλητής (F), όπως και περιγράφει το παρακάτω σχήμα (σχ. 3.3).

Λειτουργία συμπεριφορικής μεταβλητής R (προσφατότητα)



σχ. 3.3

3.3 Προβλήματα που συνοδεύουν την ανάλυση των συμπεριφορικών μεταβλητών

Υπάρχουν πληθώρα παραγόντων, οι οποίοι έχουν τη δύναμη να «παραποιήσουν» τη συμπεριφορά κάθε καταναλωτή, όπως αυτή δύναται να περιγραφεί από τις λοιπές συμπεριφορικές μεταβλητές R, F, M (σύμφωνα με τους Thomas O. Jones and W. Earl Sasser, Jr. (βλ. 27): «*παρόλο που οι παράμετροι αυτές είναι σημαντικοί δείκτες της πραγματικής συμπεριφοράς ενός πελάτη, ενδέχεται κάποιες φορές να οδηγούν σε εσφαλμένα συμπεράσματα*»).

Στοιχεία που αφορούν στο προφίλ του εκάστοτε πελάτη, έχει παρατηρηθεί ότι παρουσιάζουν σημαντικότατες εξωτερικεύσεις στην καταναλωτική συμπεριφορά τους. Οι Cummings and Ostrom (βλ. [31]), υπογραμμίζουν πως η ευαισθησία στην τιμή αλλά και διάφορα κατώφλια αδιαφορίας για διαφορετικά επίπεδα τιμών, είναι μοναδικά στοιχεία ατομικής συμπεριφοράς και εξαρτώνται από το προφίλ του κάθε καταναλωτή. Το συμπέρασμα αυτό, σε σύνδεση και με το γεγονός ότι η ελαστικότητα

της τιμής μπορεί να αποτελέσει έναν δείκτη αφοσίωσης (Pessemier, βλ. [28]), είναι ικανά να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο ενδέχεται να παρατηρούνται στρεβλώσεις στην καταναλωτική συμπεριφορά διαφόρων πελατών ακόμα και για ίδια επίπεδα των διαφόρων συμπεριφορικών μεταβλητών.

Άλλα τέτοια στοιχεία είναι το διάστημα συνεργασίας μεταξύ πελάτη – επιχείρησης (όσο πιο παλιός ένας πελάτης σε μία συγκεκριμένη εταιρία τόσο πιο πιστός εμφανίζεται, βλ. [33], [49]), η γνώση – "knowledge" (όπου αναφέρεται στη γνώση της ποιότητας των αγαθών μίας εταιρίας αλλά και του τρόπου «λειτουργίας» αυτής γενικότερα, από πλευράς πελάτη, καθώς και η πρόσβαση στην πληροφόρηση που μπορεί να έχει κάθε καταναλωτής για την ποιότητα του συνόλου των αγαθών του κλάδου, βλ. [32], [49]), το επίπεδο μόρφωσης (το οποίο φέρεται να διαμορφώνει τις προσδοκίες των καταναλωτών· έτσι για υψηλότερα επίπεδα μόρφωσης παρατηρούνται υψηλότερες προσδοκίες, γεγονός που έχει άμεσο και σημαντικό αντίκτυπο στην ικανοποίηση – βλ. [32], [33] – δεδομένου ότι αυτή ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ αντιλαμβανόμενης και προσδοκώμενης ποιότητας), η ηλικία (οι μεγαλύτεροι ηλικιακά άνθρωποι παρουσιάζονται πιο ικανοποιημένοι είτε λόγω μεγαλύτερης απαισιοδοξίας, είτε λόγω χαμηλότερων προσδοκιών, βλ. [22], [82], [83]), το φύλλο (οι γυναίκες παρουσιάζονται γενικά πιο αφοσιωμένες από τους άντρες, βλ., [26], [34], [83], [84], [85], [86], [87], [88], [89]), το εισόδημα (η ικανοποίηση σχετίζεται υψηλά και θετικά με την παράμετρο Monetary – monetary spendings για υψηλότερα επίπεδα ετήσιου εισοδήματος, ενώ δεν ισχύει το ίδιο για χαμηλότερα επίπεδα, βλ. [26]).

Όλοι αυτοί οι παράγοντες ενισχύουν την ανάγκη για κατάτμηση του συνολικού πληθυσμού των πελατών (customer segmentation) για κάθε επιχείρηση – αγαθό, ώστε να γίνεται δυνατή η μελέτη ομάδων (εκ του πληθυσμού) που φέρουν ίδιους παράγοντες οι οποίοι διαμορφώνουν παρόμοιες καταναλωτικές συμπεριφορές. Με τον τρόπο αυτόν αναμένεται να ενισχυθεί η αξία της πληροφορίας που λαμβάνεται, καθώς ελαχιστοποιείται η διακύμανση των παρατηρήσεων που αφορούν στις συμπεριφορικές μεταβλητές. Ωστόσο, κάτι τέτοιο συνιστά πρόσθετα προβλήματα κυρίως όγκου εργασίας, καθώς θα πρέπει να ελεγχθούν τα επιμέρους χαρακτηριστικά που ενδέχεται να επενεργούν στην καταναλωτική συμπεριφορά και να προσδιοριστεί και ο βαθμός επίδρασής τους σ' αυτήν. Στη συνέχεια τα χαρακτηριστικά αυτά να αναγνωριστούν εντός συγκεκριμένων ομάδων, ώστε να γίνει τελικά η τμηματοποίηση του πληθυσμού. Εντούτοις, ο Louis W. Stern (βλ. [90]) παρατηρεί πως η μονομερής

επισκόπηση πιθανών επιμέρους πληθυσμών, εντός του συνόλου των πελατών μίας εταιρίας ή ακόμα και του συνόλου της αγοράς, βασισμένη αποκλειστικά σε δημογραφικά στοιχεία αποκρύπτει κατά κόρον τις πραγματικές ανάγκες αυτών. Συνεπώς, τα αποτελέσματα αναμένεται αν είναι συγκεχυμένα, αν όχι εσφαλμένα. Για τω λόγω αυτόν κρίνεται απαραίτητη η εξεύρεση εναλλακτικών τρόπων ανάλυσης της καταναλωτικής συμπεριφοράς.

3.4 Η συμπεριφορική παράμετρος της Ικανοποίησης (Satisfaction)

S: Η ικανοποίηση, κατά τις τελευταίες δεκαετίες, θεωρείται πλέον ένα αναπόσπαστο κομμάτι της καταναλωτικής συμπεριφοράς. Η περίληψή της σε μοντέλα πρόγνωσης κρίνεται απαραίτητη (βλ. [50], [51], [56]). Καθώς όμως υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία ως προς την εφαρμογή απλών ή πολυπλοκότερων μοντέλων R.F.M, η σύνδεση τους με τα επίπεδα ικανοποίησης ενός πελάτη δεν απαντάται τόσο συχνά. Βασική αιτία, είναι η μη δυνατότητα πρόσβασης σε τέτοιου είδους πληροφορίες ακόμα και από τις ίδιες τις εταιρείες.

Τα συμπεράσματα που απορρέουν ωστόσο από τη μελέτη της ικανοποίησης[35] (βλ. [18], [19], [20], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [29], [33], [49], [50]) και τη σύνδεσή της με λοιπούς παράγοντες όπως η επανάληψη αγοράς (repurchase) από μέρους καταναλωτών (βλ. [18], [25]) ή η κερδοφορία (profitability) και το μερίδιο αγοράς (market share) από μέρους μίας επιχείρησης (βλ. [23], [24]), συνηγορούν κατά τω πλείστω στην ύπαρξης μίας θετικής συσχέτισης μεταξύ τους. Μίας σχέσης συνήθως «ασθενούς» (ενώ και κατά κάποιες περιπτώσεις ισχυρής) πλην όμως στατιστικά σημαντικής, εξηγώντας «στρεβλώσεις[36]» στους συνοδευόμενους την ικανοποίηση παράγοντες.

Παραταύτα, ενώ η (θετική) καταναλωτική ικανοποίηση αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για όλα τα οφέλη που εν γένει θεωρείται ότι τη συνοδεύουν, δεν αποτελεί και ικανή συνθήκη. Συγκεκριμένες έρευνες κατά το παρελθόν (βλ. [18], [25], [26], [27]) απέδειξαν ότι η υψηλή ικανοποίηση, δε σημαίνει απαραίτητα και επανάληψη αγοράς. Βασικοί λόγοι αυτού του μέχρι πρότινος παραδόξου, μπορούν να αποτελέσουν το προφίλ του καταναλωτή (βλ. [18], [22], [26], [32], [33], [82], [83]), η μορφή της αγοράς (βλ. [19], [20], [21], [25], [26], [27], [28], [31], [72], [91], [92]) αλλά και λοιποί εξωγενής (αστάθμητοι) παράγοντες (όπως μάκρο – περιβάλλον).

[35] Στη διεθνή βιβλιογραφία απαντάται ως CS: Customer Satisfaction
[36] Διαφοροποιήσεις στη συμπεριφορά τους που αποδίδονται (και εξηγούνται στατιστικά) στα διάφορα επίπεδα ικανοποίησης.

Γεγονός που έχει άμεσο αντίκτυπο (αλλά και δευτερογενείς επιδράσεις) στα χρηματοοικονομικά, μικροοικονομικά και μακροοικονομικά μεγέθη κάθε επιχείρησης (βλ. [23], [24], [72], [93], [94], [95], [96], [97]).

Τα γενικότερα συμπεράσματα που εξάγονται από τις έρευνες αυτές, οδηγούν στην ανάγκη προσέγγισης της ικανοποίησης μέσω μίας διαφορετικής οπτικής (βλ. [27], [29], [50]). Συνεπώς, ενώ η υψηλή ικανοποίηση δε μεταφράζεται αυστηρά σε υψηλότερα επίπεδα όλων αυτών των παραγόντων που προαναφέρθηκαν (και κατά κύριω λόγω της επανάληψης της αγοράς˙ ωστόσο έχει αποδεικτεί ότι συσχετίζεται υψηλά θετικά με την πρόθεση επαναγοράς – repurchase intentions – βλ.[18], [25], [26], [51], [54], [98]), τα χαμηλά επίπεδα ικανοποίησης («αρνητική» ικανοποίηση) συμβαδίζουν σε μεγάλο βαθμό με τη μη επανάληψη αγοράς (βλ. [22], [29], [30], [35], [36]) αλλά και χαμηλότερα επίπεδα των λοιπών παραγόντων πάντα για μη μονοπωλιακές αγορές (βλ. [17], [20], [27]). Την πεποίθηση αυτήν, καθώς και το γεγονός της παρατήρησης ισχυρότερων επιδράσεων στους διάφορους προαναφερθέντες παράγοντες περιγράφουν οι Anderson and Sullivan (βλ. [29]), καθώς και οι Bougie, Pieters and Zeelenberg (βλ. [35]). Επίσης, η αποφυγή αγαθών από καταναλωτές με υψηλότερο βαθμό «δυσαρέσκειας», υπογραμμίζεται από τους Johnson and Fornell (βλ. [22]).

Οι τελευταίες παρατηρήσεις, μπορούν να αποτελέσουν το εφαλτήριο για την επισκόπηση και μελέτη της ικανοποίησης υπό διαφορετικό πρίσμα, εξετάζοντας αντίστοιχα τα επίπεδα δυσαρέσκειας του καταναλωτή. Κάτι τέτοιο αναμένεται να αντιμετωπίσει προβλήματα που σχετίζονται με τη συσχέτιση της ικανοποίησης με όλα τα λοιπά προαναφερθέντα μεγέθη.

Εντούτοις, ακόμα και η συγκεκριμένη συμπεριφορική παράμετρος, αναμένεται να μη δύναται να προσπελάσει όλα τα προβλήματα όπως αυτά περιγράφηκαν στην παράγραφο 3.4 και να δώσει ακριβέστερα συμπεράσματα για την αναμενόμενη συμπεριφορά μεταβλητών όπως οι R (recency), F (frequency) και M (monetary) πάντα για μοντέλα RFM αλλά και γενικότερα. Υπενθυμίζεται πως, κάθε καταναλωτής είναι μοναδικός όπως μοναδική είναι και η καταναλωτική συμπεριφορά του. Όπως παρουσιάζουν χαρακτηριστικά στη δουλειά τους οι Vittal και Kamakura ([18]), κάθε καταναλωτής ενδέχεται να παρουσιάζει (διαφορετικά) κατώφλια αδιαφορίας και επίπεδα ανοχής και κατά συνέπεια να υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις στην καταναλωτική συμπεριφορά κάθε πελάτη για κάθε διάσταση ικανοποίησης. Για το λόγο αυτόν, είναι δυνατόν ο δείκτης «ικανοποίησης - δυσαρέσκειας» να υποστεί

κάποιες πρόσθετες διαμορφώσεις, ώστε να μπορεί να προσεγγιστεί ως μία πιθανότητα μεταστροφής του κάθε καταναλωτή προς άλλα παρεμφερή (ανταγωνιστικά) προϊόντα.

Αρχικά, ας γίνει η υπόθεση ότι ο υπό εξέταση καταναλωτής είναι ο καταναλωτής x. Το επίπεδο ικανοποίησης του (satisfaction: S^x) είναι γνωστό ή διαφορετικά μπορούμε να γνωρίζουμε το επίπεδο δυσαρέσκειάς του (dissatisfaction: D^x). Επίσης, ας υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές αυτές έχουν μία 3 – βαθμιαία κλίμακα μέτρησης.

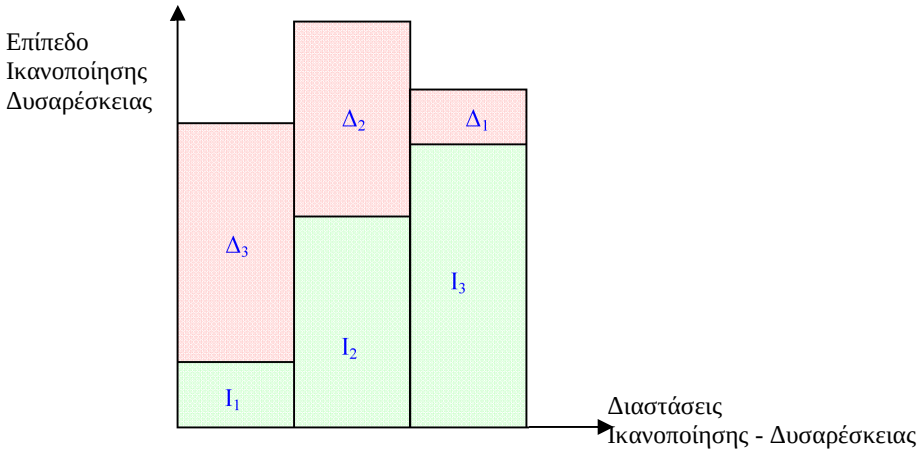
Δεδομένου ότι η εταιρεία είναι σε θέση να γνωρίζει το επίπεδο ικανοποίησης (ή δυσαρέσκειας) ενός πελάτη της, κατά συνέπεια θα είναι σε θέση να γνωρίζει και τα «μέσα επίπεδα[37]» ικανοποίησης – δυσαρέσκειας του συνόλου των πελατών της. Το γεγονός αυτό, σημαίνει ότι η επιχείρηση θα είναι σε θέση να γνωρίζει την κατανομή της μεταβλητής ικανοποίησης – δυσαρέσκειας για το δικό της πελατολόγιο (μέτρα κεντρικής τάσης: γύρω από ποια διάσταση συγκεντρώνεται ο μεγαλύτερος αριθμός των παρατηρήσεων ειδικά για περισσότερες διαστάσεις, μέτρα διασποράς: πως κατανέμονται οι παρατηρήσεις αυτές κ.α.), ενώ με ανάλογη ευκολία, θα μπορεί να έχει στην κατοχή της και την κατανομή της μεταβλητής αυτής για την αγορά ως σύνολο. Έστω τώρα ότι ο καταναλωτής αυτός (x) εμφανίζει ένα επίπεδο ικανοποίησης που αντιστοιχεί στην i διάσταση (ικανοποίησης – δυσαρέσκειας) με $i \in [1,2,3]$ και $\nu = i_{\max} = 3$. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε :

$$S_i^x \equiv D_{\nu+1-i}^x = D_{4-i}^x$$

καθώς όσο υψηλότερη είναι η παρατηρούμενη ικανοποίηση, τόσο χαμηλότερη αναμένεται να είναι η δυσαρέσκεια, όπως ενδεικτικά παρουσιάζει και στο σχήμα 3.4.

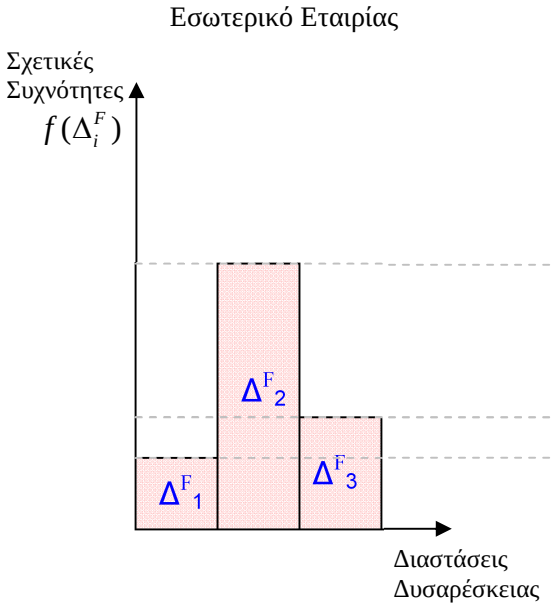
Ας γίνει ακόμη η υπόθεση ότι η κατανομή της μεταβλητής **Δυσαρέσκεια** στο εσωτερικό της εταιρείας αλλά και στην αγορά γενικότερα, είναι αυτή που παρουσιάζεται στα σχήματα 3.5.α και 3.5.β αντίστοιχα.

[37] Δεδομένου ότι η μεταβλητή Ικανοποίηση έχει βαθμωτή κλίμακα μέτρησης,

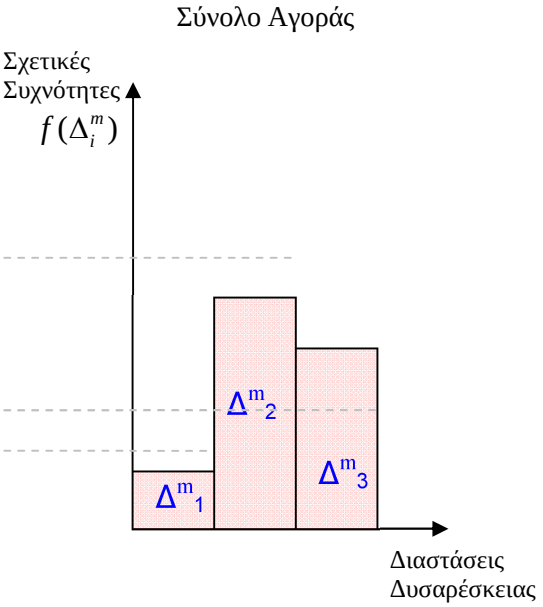


- I_1: Λίγο Ικανοποιημένος/ η
- I_2: Μέτρια Ικανοποιημένος/ η
- I_3: Πολύ Ικανοποιημένος/ η
- Δ_1: Λίγο δυσαρεστημένος/ η
- Δ_2: Μέτρια Δυσαρεστημένος/ η
- Δ_3: Πολύ Δυσαρεστημένος/ η

σχ 3.4



σχ. 3.5.α



σχ. 3.5.β

Όπου:

- Δ_i^F : Η i διάσταση δυσαρέσκειας για την επιχείρηση F
- Δ_i^m : Η i διάσταση δυσαρέσκειας για το σύνολο της αγοράς
- $f(\Delta_i^F)$: Η σχετική συχνότητα της διάστασης i στην επιχείρηση F
- $f(\Delta_i^m)$: Η σχετική συχνότητα της διάστασης i στην αγορά

Με τη βοήθεια πλέον των 2 κατανομών, ο βαθμός (ή πιθανότητα) μεταστροφής, ή διαφορετικά η παράμετρος που επηρεάζει το συναισθηματικό τμήμα της

καταναλωτικής συμπεριφοράς ενός πελάτη, μπορεί να προσδιορίζεται μέσω του παρακάτω τύπου:

$$P(S \geq S_i^x) = \int_1^i G^m(z)dz - \frac{N_f}{N_m}\int_1^i G^F(z)dz \quad (3.1)$$

Όπου:

- $P(S \geq S_i^x)$: Η πιθανότητα ο καταναλωτής x δεδομένου ότι εμφανίζει επίπεδο δυσαρέσκειας $S_i^x = D_{v+1-i}^x$, αν μετακινηθεί προς ανταγωνιστικό (παρεμφερές) προϊόν (και κατ' επέκταση φίρμα), να αποκτήσει τουλάχιστον το ίδιο ή υψηλότερο επίπεδο ικανοποίησης και κατά αναλογία τουλάχιστον το ίδιο (ή χαμηλότερο επίπεδο δυσαρέσκειας).
- ν: Ο αρχικός αριθμός διαστάσεων της παραμέτρου της δυσαρέσκειας
- $G^m(z)$: Η συνάρτηση κατανομής της ικανοποίησης – δυσαρέσκειας στην αγορά (market).
- $G^F(z)$: Η συνάρτηση κατανομής της ικανοποίησης – δυσαρέσκειας στην εταιρεία που εξετάζεται (Firm).
- N_t^m: Ο αριθμός των (ενεργών) πελατών στο σύνολο της αγοράς m τη χρονική στιγμή t.
- N_t^F: Ο αριθμός των (ενεργών) πελατών της εταιρείας F τη χρονική στιγμή t.
- $\frac{N_t^F}{N_t^m} = \left(\frac{N^F}{N^m}\right)_t$: Το μερίδιο αγοράς της επιχείρησης F σε όρους πλήθους ενεργών πελατών, τη χρονική στιγμή t.
- t: Η χρονική περίοδος ή διαφορετικά για μοντέλα που κάνουν χρήση αλυσίδων Markov, το βήμα του μοντέλου.

Ο όρος του μεριδίου αγοράς στην παραπάνω σχέση (3.1), χρησιμοποιείται ώστε να σταθμιστεί η επίδραση των δεικτών ικανοποίησης στο εσωτερικό της εταιρίας με τους συνολικούς δείκτες ικανοποίησης της αγοράς και κατά συνέπεια να εξαλειφθεί η επίδραση αυτή. Έτσι λαμβάνεται υπόψη μόνον η πιθανότητα ο καταναλωτής να

διαμορφώσει τουλάχιστον τα ίδια (ή καλύτερα) επίπεδα δυσαρέσκειας, μακριά όμως από την επιχείρηση στην οποία βρίσκεται ήδη (πιθανότητα «μετανάστευσης»).

Με τον τρόπο αυτόν (σχέση (3.1)), πέραν του ότι η «ικανοποίηση προσεγγίζεται ως μία πιθανότητα μεταστροφής, ο δείκτης αυτός έχει τη δυνατότητα να περιγράφει την **ανάγκη** κάθε καταναλωτή για την εξεύρεση ενός «καλύτερου» αγαθού (που θα του παρέχει τουλάχιστον την ίδια ή υψηλότερη ικανοποίηση, είτε αυτό είναι υλικό είτε άυλο), καθώς και την πιθανότητα να συμβεί κάτι τέτοιο, σταθμίζοντας το σύνολο της αγοράς. Επιπρόσθετα, έχει τη δυνατότητα να προσμετρά και την επίδραση (συνολικά και όχι σε απόλυτες μονάδες) που έχει το Word – Of – Mouth (WOM: αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο μεταδίδεται η πληροφορία για ένα αγαθό και την «ποιότητά» του από «στόμα σε στόμα», δηλαδή από πελάτη σε (εν δυνάμει) πελάτη, βλ. §2.3.2, [45]) στη διαδικασία επιλογής ενός (ανταγωνιστικού) προϊόντος.

Διευκρινίζεται, ότι εφόσον είναι γνωστές οι σχετικές συχνότητες για κάθε επίπεδο δυσαρέσκειας τόσο στα πλαίσια της επιχείρησης (σχ. 3.5.α) όσο και σε ότι αφορά την αγορά συνολικά (σχ. 3.5.β), τότε η εταιρεία είναι σε θέση να γνωρίζει και με ακρίβεια τις 2 συναρτήσεις κατανομής. Επίσης, το γεγονός ότι οι διαστάσεις ικανοποίησης – δυσαρέσκειας είναι πάντα ένας πεπερασμένος αριθμός που ανήκει σε ένα διακριτό σύνολο τιμών (για παράδειγμα 1, 2, 3, …, N και ποτέ 0.34), γίνεται εύκολα αντιληπτό, ότι τα ολοκληρώματα θα αφορούν στα αθροίσματα των επιμέρους σχετικών συχνοτήτων όπως υποδεικνύουν και οι δείκτες των ολοκληρωμάτων. Κατά συνέπεια, ο παραπάνω τύπος μπορεί να αντικατασταθεί από τον εξής ισοδύναμό του:

$$P(S \geq S_i^x) = \sum_{y=1}^{i} f(\Delta_y^m) - \frac{N_F}{N_m} \sum_{y=1}^{i} f(\Delta_y^F) \quad (3.2)$$

Το σύνολο τιμών που μπορεί να λάβει η παραπάνω σχέση, προφανώς ανήκει στο διάστημα (0, 1). Τα πολύ χαμηλά επίπεδα της τιμής ή ακόμα και οι σχεδόν μηδενικές τιμές αυτής, έχουν λογική εξήγηση καθώς ο καταναλωτής θεωρείται σχεδόν απίθανο να «μεταναστεύσει» προς άλλη εταιρεία (βάσει της παραμέτρου της δυσαρέσκειας). Παραταύτα, το επίπεδο τιμών της είναι συνεχές (μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα [0, 1] με την τιμή 0 να έχει καθαρά θεωρητικό χαρακτήρα, καθώς προφανώς θα αφορά σε αμιγές μονοπώλιο – μία και μοναδική εταιρία στον κλάδο) και κατ’ επέκταση συνιστά προβλήματα ανάλυσης (κατά μία βάση, συγκρισιμότητας). Για τω λόγω αυτόν, κρίνεται επιτακτική η κωδικοποίηση των αποτελεσμάτων αυτών. Ένας πρόσθετος λόγος για τον οποίο εντείνεται η ανάγκη

για κωδικοποίηση τους, είναι το γεγονός ότι η συγκεκριμένη παράμετρος, εισερχόμενη σε ένα μοντέλο CLV το οποίο κάνει χρήση αλυσίδων Markov, θα πρέπει να μπορεί να αποδοθεί σε καταστάσεις περιγραφικές μίας συγκεκριμένης (αναμενόμενης) συμπεριφοράς (και όχι να αφορά σε συνεχείς τιμές).

Ένας προτεινόμενος τρόπος βασίζεται στον αρχικό αριθμό διαστάσεων στις οποίες διακρίνεται η υπό εξέταση μεταβλητή. Σε πρώτη φάση, έγινε η υπόθεση ότι ο αριθμός αυτός είναι ίσος με ν. Επειδή, στην επιστήμη της στατιστικής κάθε μοντέλο και παρατήρηση είναι υποκείμενες σε σφάλματα λόγω τυχαιότητας όσο καλά και αν προσπαθήσουμε να δομήσουμε το «πρόβλημά» μας, post hoc θεωρείται ότι πάντα θα υπάρχει έστω μία μικρή πιθανότητα ο πελάτης να μεταναστεύσει. Ακόμα και για σχεδόν μηδενικά αποτελέσματα της παραπάνω σχέσης (3.2). Συνεπώς προτείνεται η παρακάτω κωδικοποίηση των αποτελεσμάτων της πιθανότητας μεταστροφής. Για ν διαστάσεις θα έχουμε και ν καταστάσεις της συμπεριφορικής παραμέτρου οι οποίες θα αντιστοιχούν στα διάφορα επίπεδα τιμών της σχέσης (3.2). Τα όρια των επιπέδων αυτών θα προσδιορίζονται ως εξής:

Για το r άνω και κάτω όριο θα ισχύει:

$$r_{\min} = (r-1)\frac{100}{\nu}$$

και

$$r_{\max} = r\frac{100}{\nu} \text{ με } r \in [1,\ \nu]$$

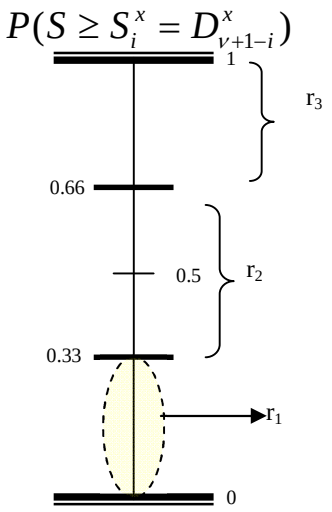
Απεικονίζοντας σχηματικά τις τελευταίες σχέσεις και κάνοντας την υπόθεση ότι ν=3 θα έχουμε το αποτέλεσμα του σχήματος 3.6. Ωστόσο, τα όρια που θα διακρίνουν τις επιμέρους καταστάσεις της παραμέτρου της δυσαρέσκειας - μεταστροφής (και κατ' αντιστοιχία της ικανοποίησης, μπορούν να προκύψουν και με διαφορετικούς τρόπους. Μία διαφορετική προσέγγιση, είναι να θεωρηθεί πως για ιδιαίτερα χαμηλές τιμές (που προσεγγίζουν το μηδέν), υπάρχει μία τιμή λάθους P_e (μικρή) η οποία θα αφορά στην (μικρή) πιθανότητα μεταστροφής για τις τιμές αυτές της σχέσης (3.2). Ερμηνευτικά, το γεγονός αυτό θα αντιστοιχεί σε μία κατάσταση πιθανότατα ακόμα και αφοσίωσης (loyalty) όπου ο καταναλωτής θα είναι πολύ δύσκολο να μεταναστεύσει προς άλλη επιχείρηση, είτε λόγω υψηλού κόστους αναζήτησης

(involvement[38]) είτε λόγω αφοσίωσης στη φίρμα (brand loyalty), ή ακόμα και λόγω συμβολαίων τα οποία δεσμεύουν τον πελάτη σε συγκεκριμένη καταναλωτική συμπεριφορά (contractual – settings). Οι λοιπές καταστάσεις μπορούν ακολούθως να προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο που παρουσιάστηκε παραπάνω, με μόνη διαφορά ο επιμερισμός του συνόλου τιμών της σχέσης (3.2) στις διάφορες καταστάσεις να τελείται ως εξής:

$$r_{\min} = P_e + (r-1)\frac{100-P_e}{\nu}$$

και

$$r_{\max} = P_e + (r-1)\frac{100-P_e}{\nu} \text{ με } r \in [1,\ \nu+1]$$



σχ. 3.6

- $r_{\min}^1 = 0$
- $r_{\max}^1 = 0.33^-$
- $r_{\min}^2 = 0.33$
- $r_{\max}^2 = 0.66^-$
- $r_{\min}^3 = 0.66$
- $r_{\max}^3 = 0.999 \simeq 1$

Διαφορετικά, μπορούν να προταθούν και άλλοι τρόποι, οι οποίοι να κάνουν χρήση κατωφλιών, λαμβάνοντας υπόψη τυχόν σφάλματα όταν οι διάφορες τιμές της σχέσης (3.2) προσεγγίζουν τις κρίσιμες τιμές των ορίων. Ωστόσο, στην παρούσα έρευνα, η συμπεριφορική μεταβλητή της ικανοποίησης, δε θα υποστεί οποιεσδήποτε διαφοροποιήσεις με σκοπό την απλούστευση της ερευνητικής διαδικασίας. Οι επιμέρους υπο - καταστάσεις αυτής, θα ακολουθήσουν την τριβαθμιαία κλίμακα των υπολοίπων συμπεριφορικών μεταβλητών. Έτσι, θα έχουμε:

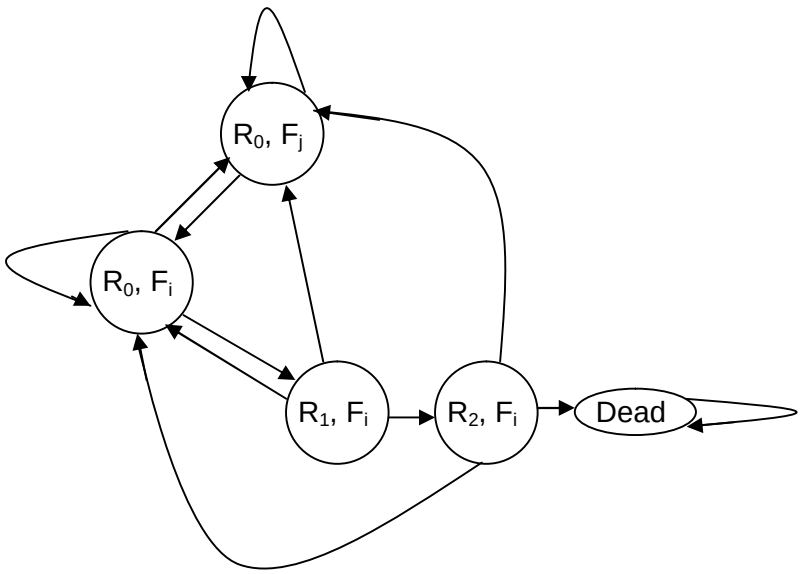
- S_1: Χαμηλή ικανοποίηση
- S_2: Μέτρια ικανοποίηση
- S_3: Υψηλή ικανοποίηση

[38] Βλ. [26], [99]

3.5 Το σχεσιακό σύνολο του μοντέλου

Τοποθετώντας πλέον όλες τις συμπεριφορικές παραμέτρους στο εσωτερικό του υποδείγματος, καθίσταται σαφές ότι οι (μεταξύ τους) σχέσεις αρχίζουν να πολυπλοκοποιούνται. Το σχήμα 3.7 παρέχει μία πρώτη επισκόπηση του γεγονότος αυτού και του τρόπου με τον οποίο διαφοροποιείται η «λειτουργία» έκαστης παραμέτρου αλληλεπιδρώντας με τις υπόλοιπες. Το ιδιαίτερο γνώρισμα στο παρακάτω τμήμα του ολικού μοντέλου, είναι το γεγονός ότι ενώ η μεταβλητή R διατηρεί τις ιδιότητες τις αναλλοίωτες (όπως αυτές περιεγράφησαν παραπάνω, σχ. 3.3), στην ανάλυση υπεισέρχεται πλέον ένας περιορισμός σχετικά με την F. Χαρακτηριστικά, δεδομένου ότι ένας πελάτης πραγματοποιεί αγορά στην τρέχουσα περίοδο (R_0), η μεταβλητή F μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή. Το γεγονός αυτό απεικονίζουν οι δείκτες i,j (όπου $i, j \in F \mid i \neq j$). Ωστόσο, εάν παρέλθουν περίοδοι αδράνειας για τον καταναλωτή, καθώς η τιμή του R αυξάνει διαδοχικά ($R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow ...R_N \rightarrow R_{N+1}$), η τιμή της συχνότητας αγορών δε μπορεί να αλλάξει εφόσον δεν επαναλαμβάνεται αγορά εντός ίδιας περιόδου και συνεπώς αυτή παραμένει στατική ($R_0,F_i \rightarrow R_1,F_i \rightarrow ... \rightarrow R_N,F_i \rightarrow R_{N+1},F_i$).

Η λειτουργία ενός Μαρκοβιανού συστήματος με 2 συμπεριφορικές μεταβλητές (R, F)



σχ. 3.7

Στην περίπτωση όπου εξεταστεί το σχεσιακό σύνολο μεταξύ της Recency και της μεταβλητής Monetary, δε θα παρατηρηθεί καμία διαφοροποίηση εν συγκρίσει με το παραπάνω σχήμα. Ωστόσο, το γεγονός ότι ο δείκτης ικανοποίησης δεν είναι τέλεια συσχετισμένος με την επανάληψη (ή μη) αγοράς, τότε η ανάλυση των μεταβλητών

αυτών ταυτόχρονα, αναμένεται να δώσει ένα πλήρες σύνολο σχέσεων (μία «Τακτική» αλυσίδα), καθώς η ικανοποίηση ενδέχεται να μεταβάλλεται (είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω), ακόμα και στην περίπτωση όπου ο καταναλωτής δεν πραγματοποιεί αγορά του υπό εξέταση προϊόντος ή υπηρεσίας ή από την αντίστοιχη φίρμα. Η λογική πίσω από τη συγκεκριμένη πρόταση κείται στο γεγονός ότι κατά την περίοδο την οποία στο υπό εφαρμογή μοντέλο ο καταναλωτής παρουσιάζεται αδρανής, εξωγενείς παράγοντες μπορούν να επηρεάζουν την ικανοποίηση του, όπως κατανάλωση ανταγωνιστικού αγαθού (υλικού ή άυλου), word-of mouth κ.α., παράγοντες τους οποίους σε καμία περίπτωση δε μπορεί να περιλάβει κανένα μοντέλο (ακόμα).

Ολοκληρώνοντας το σχεσιακό σύνολο του μοντέλου το οποίο θα εφαρμοστεί, είναι πλέον δυνατός ο προσδιορισμός του αριθμού όλων των δυνατών σχέσεων (για τις οποίες οι πιθανότητες μετάβασης μπορούν να πραγματοποιηθούν βάσει υποθέσεων), δίνοντας έτσι έναν πρώιμο δείκτη της πολυπλοκότητας του υπό εφαρμογή μοντέλου. Βάσει της αρχικής υπόθεσης, τα δυνατά στάδια των μεταβλητών Frequency, Monetary και Satisfaction θα είναι 3. Στην παρούσα εφαρμογή, οι διαφορετικές καταστάσεις της μεταβλητής Recency, θα είναι επίσης 3 (για λόγους απλότητας). Ωστόσο, για να προσδιοριστεί ο βαθμός της πολυπλοκότητας του μοντέλου συναρτήσει του αριθμού των δυνατών σχέσεων των διαφορετικών σταδίων των συμπεριφορικών μεταβλητών, τα διάφορα στάδια των θα θεωρηθούν άγνωστα, ώστε ο μαθηματικός τύπος του αριθμού των σχέσεων μετάβασης να καλύπτει κάθε περίπτωση.

Έστω, ότι ο αριθμός των καταστάσεων της μεταβλητής Recency προσδιορίζεται ως R_N. Δεδομένου ότι πρέπει να περιληφθεί και το στάδιο «θανάτου» του πελάτη, τότε γίνεται η υπόθεση ότι τα συνολικά επιμέρους states για την R θα είναι R_N+1. Παρομοίως, ο αριθμός των καταστάσεων των λοιπών μεταβλητών θα είναι F_N, M_N, S_N. Ο αριθμός τώρα των σχέσεων μετάβασης (X) υπό τις υποθέσεις οι οποίες αναλύθηκαν παραπάνω, θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

$$X=(R_N*F_N*M_N*S_N)*[(F_N*M_N*S_N)+\frac{R_N+1}{R_N}]$$

Βέβαια κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι ενώ ο πίνακας μετάβασης θα περιλαμβάνει $(R_N*F_N*M_N*S_N)^2$ σχέσεις (μετάβασης), μόνον X από αυτές, στη «χείριστη» περίπτωση, αναμένεται να είναι δυνατό να παρατηρηθούν (η πιθανότητα

εμφάνισής τους να μην είναι μηδενική). Ο ακριβής αριθμός αναμένεται να καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τα υπό εξέταση σενάρια.

3.6 Οι παράγοντες σύνθεσης των σεναρίων

Στη διαδικασία σχεδιασμού των σεναρίων υπό τα οποία θα αναλυθεί η καταναλωτική συμπεριφορά ενός τυχαίου πελάτη, προέκυψαν 2 βασικοί παράγοντες ικανοί να ομαδοποιήσουν την πληθώρα των διαφόρων μοντέλων αγορών και ταυτόχρονα να περιγράψουν το σημαντικότερο πλήθος αυτών. Οι 2 αυτοί παράγοντες, αναλύονται σε 2 επιμέρους καταστάσεις, η αντιστοίχηση των οποίων με κάθε μία από τις που εμπίπτουν σε διαφορετική κατηγορία, παράγει έναν αριθμό 4 διαφορετικών σεναρίων. Οι παράγοντες αυτοί είναι οι εξής:

3.6.1 Δομή αγοράς

Ο όρος «Δομή της αγοράς» στην οικονομική επιστήμη, αναφέρεται στο χαρακτηρισμό κάθε αγοράς ως Ανταγωνιστικής, Ολιγοπωλιακής, ή Μονοπωλιακής (μαζί με τις ποικίλες εκφάνσεις τους). Ο χαρακτηρισμός αυτός αντιστοιχεί σε ένα πλήθος ιδιοτήτων που συνοδεύουν κάθε τέτοια ιδιαίτερη «δομή». Η παραπάνω θεωρία, μπορεί να επεκταθεί ασφαλώς, ώστε να περιλαμβάνει τον τρόπο κατά τον οποίο κάποιες εσωτερικές[39] ιδιότητες του αγαθού (υλικού ή άυλου) που πραγματεύεται κάθε αγορά, επηρεάζουν την καθαυτή δομή της αγοράς. Τα βασικά είδη δομών αγοράς τα οποία εμφανίζουν σημαντικές μεταξύ τους αποκλίσεις στη λειτουργία τους αλλά και τη νομοτέλειά τους, είναι ο ανταγωνισμός και η μονοπωλιακή διάρθρωση αυτών.

Ο όρος μονοπωλιακή διάρθρωση, αναφέρεται στην προσέγγιση κατά το πλησιέστερο μίας αγοράς στη μορφή του μονοπωλίου (βλ. [15], [17]), χωρίς απαραίτητα την ύπαρξη μίας μοναδικής εταιρίας (ως παράδειγμα αναφέρεται η ύπαρξη καρτέλ σε κάποιους κλάδους παραγωγής ή παροχής υπηρεσιών, γεγονός που δίνει τη δυνατότητα στις επιχειρήσεις μετέχουσες στην παράνομη αυτή ομοσπονδία να λειτουργούν είτε ως μονοπωλητές διαμορφώνοντας ανελαστικότητες στην προσφορά ενός αγαθού (βλ. [3], [12], [15], [17], [21]), είτε ως «κυρίαρχοι[40]».

[39] Εσωτερικές καλούνται οι ιδιότητες που αφορούν στον τρόπο παραγωγής ενός προϊόντος ή μίας υπηρεσίας (διαδικασία παραγωγής και υλικά), την χρηστική αξία αυτού αλλά και το πώς το αντιλαμβάνεται το σύνολο των καταναλωτών.

[40] Ο όρος κυρίαρχος αναφέρεται στη δυνατότητα των επιχειρήσεων αυτών να καθορίσουν την τιμή πώλησης του έκαστου αγαθού στον κλάδο (ακόμα και αν υπάρχουν επιχειρήσεις εκτός του καρτέλ, οι

Καταστάσεις που έχουν τη δυνατότητα να διαμορφώσουν στρεβλώσεις[41] ακόμα και στη συμπεριφορά ενός καταναλωτή (βλ. [21], [27]) και βάσει της θεωρίας της χρησιμότητας (ανελαστικότητα τιμής – απώλεια κοινωνικής ευημερίας, βλ. [5]). Επιπρόσθετα, η ύπαρξη μίας μοναδικής εταιρείας σε κάποιον κλάδο, δε μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας (ειδικά για την παρούσα εργασία), καθώς κάθε καταναλωτής θεωρείται μη δυνάμενος να **διαπραγματευτεί** τις («οικονομικές[42]») ανάγκες του (βλ. [27]). Τον κινητήριο μοχλό στη διαδικασία πραγματοποίησης και επανάληψης αγοράς.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα, τα ευρήματα από έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τους Jones and Sasser, (βλ. [27]). Βάσει των ευρημάτων τους, οι ίδιοι παρατηρούν με έμφαση ότι, ενώ πολλοί πελάτες εμφάνιζαν ιδιαίτερα γνωρίσματα υψηλής αφοσίωσης (υψηλό share – of – wallet, υψηλή επανάληψη αγοράς, συχνότητα και ικανοποίηση), όταν οι όροι της αγοράς διαφοροποιούνταν (αύξηση ανταγωνισμού με είσοδο νέων εταιριών στον κλάδο, όπως το παράδειγμα της σταθερής τηλεφωνίας στην Ελλάδα πριν από μερικά χρόνια), τότε πολλοί από τους πελάτες αυτούς μετανάστευαν με σχετική ευκολία προς ανταγωνιστικές φίρμες. Περιγράφοντας οι ίδιοι με τον τρόπο αυτόν την εικόνα ενός πελάτη – «όμηρου» (hostage).

Κατά συνέπεια, το επιστημονικό ενδιαφέρον στρέφεται σε αγορές όπου συνυπάρχουν τουλάχιστον 2 εν ενεργεία επιχειρήσεις, οι οποίες ανταγωνίζονται μεταξύ τους (είτε ως προς την τιμή, είτε ως προς την ποσότητα). Για καθαρά βιβλιογραφικούς λόγους, αναφέρεται πως ο κλασικός ορισμός μίας ανταγωνιστικής αγοράς επιτάσσει την ύπαρξη μεγάλου αριθμού επιχειρήσεων που πραγματεύονται το «ίδιο» προϊόν (δηλαδή δεν παρατηρούνται σημαντικές διαφορές μεταξύ των ανταγωνιστικών προϊόντων του ίδιου κλάδου), ενώ η πληροφόρηση του καταναλωτή είναι τέλεια.

Επιστρέφοντας τώρα στον τρόπο με τον οποίο οι εσωτερικές ιδιότητες έκαστου αγαθού που ορίζει την κάθε αγορά μπορεί και να καθορίσει τη δομή της, παράγοντας διαφοροποιός των ποικίλων μορφών αγοράς, θα μπορούσε να αποτελέσει ο βαθμός

οποίες δραστηριοποιούνται στον κλάδο αυτόν), την ποσότητα «παραγωγής» ή ακόμα και άλλους όρους λειτουργίας του κλάδου (τιμή πρώτων υλών – μονοψώνιο κ.α.).

[41] Τέτοια είδη στρεβλώσεων περιγράφονται εκτενώς στη μικροοικονομική θεωρία και τη θεωρία της κοινωνικής ευημερίας (όπως έχει γίνει αναφορά και σε προηγούμενη ενότητα). Για περισσότερα στοιχεία, ο αναγνώστης παραπέμπεται ενδεικτικά στο σύγγραμμα [12] Varian R. Hal, (1992). Μικροοικονομική: Μία σύγχρονη προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική Επιστημονική Βιβλιοθήκη

[42] Οικονομικές ανάγκες, όπως και οικονομικά αγαθά καλείται κάθε τι το οποίο αποτιμάται σε χρηματικές μονάδες και η ικανοποίησή τους ή απόκτησή τους, απαιτεί το οικονομικό αυτό αντίτιμο.

διαφοροποίησης μεταξύ των «ανταγωνιστικών» αγαθών (βλ. [13], [14], [15], [16], [17], [22]). Δηλαδή το κατά πόσο είτε σε αντικειμενικούς όρους (υλικά, τεχνολογία κατασκευής κ.α.), είτε σε υποκειμενικούς (πως αντιλαμβάνεται κάθε καταναλωτής τα διάφορα ανταγωνιστικά αγαθά του κλάδου, προσδίδοντας τους κάποια συναισθηματική αξία η οποία μπορεί είτε να αυξάνει, αλλά είτε και να μειώνει την χρηστική τους αξία στα μάτια του ίδιου καταναλωτή), τα ανταγωνιστικά αυτά αγαθά διαφέρουν. Οι Johnson και Fornell (βλ. [22]), επιβεβαιώνουν ότι η διάκριση μίας αγοράς βάσει του παράγοντα της διαφοροποίησης του αγαθού (στη θέση της οποίας χρησιμοποιούν τον όρο ομοιογένεια), είναι ένας ικανός παράγοντας κατηγοριοποίησης των αγορών.

Ο παράγοντας αυτός αναμένεται να επηρεάσει τη συμπεριφορά της μεταβλητής που σχετίζεται με την «ικανοποίηση», «S» (είτε αυτή αφορά στην καθαυτή "Satisfaction[43]" – όπως απαντάται στην διεθνή βιβλιογραφία – είτε αφορά σε κάποια τυχαία μεταβλητή (δυσαρέσκεια, όπως αυτή προσδιορίστηκε στο τμήμα 3.4) που έρχεται να περιγράψει την ύπαρξη κάποιου μη μετρήσιμου σε αντικειμενικές μονάδες παράγοντα που ενδέχεται να επηρεάζει τη διαδικασία αγοράς ενός ή περισσοτέρων αγαθών για κάθε καταναλωτή). Επίσης, εξωτερικεύσεις χάριν του βαθμού διαφοροποίησης των αγαθών ενός κλάδου, αναμένεται να δημιουργηθούν και στη μεταβλητή που αφορά στην επανάληψη αγοράς. Ωστόσο, κάτι τέτοιο αναμένεται να παρατηρηθεί εμμέσως του παράγοντα ικανοποίησης και δεδομένου του αποδεδειγμένου, θετικού βαθμού συσχέτισης (όχι όμως κατ' ανάγκη υψηλού) μεταξύ ικανοποίησης και επανάληψης αγοράς (βλ. [18], [19], [25], [29]). Κατά τον τρόπο αυτόν, είναι δυνατόν να διακριθούν 2 επιμέρους κατηγορίες αγορών:

3.6.1.α Οι αγορές με **χαμηλό βαθμό διαφοροποίησης**

Στην κατηγορία αυτήν υπάγονται όλες οι αγορές στις οποίες χαρακτηριστικό γνώρισμα είναι ο χαμηλός βαθμός αφοσίωσης των καταναλωτών λόγω της μεγάλης ομοιότητας (ομοιογένειας: Johnson and Fornell, 1991) που παρουσιάζουν τα προϊόντα των διαφόρων επιχειρήσεων του κλάδου. Τέτοιες αγορές τείνουν προς δομές υψηλού

[43] Βάσει του κλασσικού ορισμού, ως Ικανοποίηση ορίζεται η διαφορά μεταξύ προσδοκώμενης και αντιλαμβανόμενης ποιότητας που προκύπτει (για κάποιον καταναλωτή) από τη χρήση κάποιου αγαθού. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί και να γίνει αντιληπτό ότι λόγω της ιδιαίτερης φύσης του παράγοντα «ικανοποίηση» (ημιδομημένος καθώς αποτελεί μία αφηρημένη και μη καλώς προσδιορισμένη έννοια – αποτιμά μία διαφορά σε συναισθηματικό επίπεδο, κάτι το οποίο δεν είναι δυνατόν να αποδοθεί σε αντικειμενικές μετρήσιμες και καλώς διακριτές μονάδες), η χρήση του γίνεται μόνο στα πλαίσια καθορισμού της μέθεξης του στη διαμόρφωση της καταναλωτικής συμπεριφοράς ενός τυχαίου καταναλωτή.

ανταγωνισμού. Το μεγαλύτερο πλήθος των καταναλωτών, ανακυκλώνονται διαρκώς μεταξύ του πελατολογίου των διαφόρων εταιριών (του κλάδου). Ο Anderson, E.W. (1996) παρουσιάζει μέσα από τη δουλειά του (βλ. [20]) ευρήματα, σύμφωνα με τα οποία αποδεικνύεται ότι ο μέσος δείκτης ικανοποίησης σε τέτοιες αγορές είναι σημαντικά υψηλότερος σε σχέση με άλλες μορφές (αγοράς) λιγότερο ανταγωνιστικές. Κάθε καταναλωτής είναι δύσκολο να επαναλαμβάνει αγορές συνεχώς από μία μόνο φίρμα. Οι Lemon, White and Winer (βλ. 96), Reinartz and Kumar (βλ. [41]) και Seiders, Voss, Grewal, and Godfrey (βλ. [26]), σημειώνουν ότι σε χαμηλά διαφοροποιημένες αγορές, οι καταναλωτές δε νιώθουν την «υποχρέωση» να δώσουν όλο το «μερίδιο του πορτοφολιού» τους (share – of – wallet) για συγκεκριμένο είδος αγαθού, σε μία μόνο εταιρία (γεγονός με σαφές αντίκτυπο τόσο στην παράμετρο **F**requency, όσο και στην παράμετρο **M**onetary). Οι τελευταίοι, καθώς και οι Anderson (βλ. [19], [20]) και He, Chan and Tse (βλ. [25]) προσπαθώντας να συνδέσουν τα μέσα υψηλά επίπεδα ικανοποίησης με την αφοσίωση (για συγκεκριμένου είδους αγορές), υπογραμμίζουν ότι η υψηλή ικανοποίηση δε σημαίνει απαραίτητα και υψηλή επανάληψη αγοράς (για την υπό εξέταση φίρμα). Μία εξήγηση των συμπερασμάτων αυτών προσπαθούν να δώσουν οι Singh and Vives (βλ. [15]), Anderson (βλ. [21]) και He, Chan and Tse (βλ. [25]), εξετάζοντας την ελαστικότητα της τιμής για καταναλωτές που δραστηριοποιούνται σε τέτοιες αγορές. Παρατηρούν λοιπόν, ότι οι πελάτες εμφανίζονται πιο «ελαστικοί» σε μεταβολές της τιμής. Δηλαδή, η ποσοστιαία μεταβολή στην ποσότητα, εμφανίζεται μεγαλύτερη αυτής της τιμής. Η εξήγηση που παρέχεται, είναι ότι υπάρχουν πολλές αξιόλογες εναλλακτικές (next – best alternatives) και κατά συνέπεια οι πελάτες είναι ιδιαίτερα επιρρεπείς σε μεταστροφές. Γεγονός που με τη σειρά του καταργεί την πιθανότητα για υψηλή αφοσίωση (loyalty) και διατήρηση (retention: την πιθανότητα δηλαδή, ένας πελάτης να παραμείνει ενεργός επί μακρών σε μία συγκεκριμένη εταιρεία). Τέλος τα συμπεράσματα αυτά ενισχύουν οι Jones and Sasser (βλ. [27]), οι οποίοι σημειώνουν ότι οι υψηλοί δείκτες ικανοποίησης σε τέτοιες αγορές δε μπορούν να αποτελέσουν μέτρο ικανό για την αντιστοίχηση τους με υψηλές τιμές των συμπεριφορικών μεταβλητών R και F.

Αναλύοντας τώρα τα παραπάνω σε όρους μοντέλου, η κατανομή της παραμέτρου «Ικανοποίηση» (S) αναμένεται να εμφανίζει την υψηλότερη συγκέντρωση για τα υψηλότερα επίπεδα (ικανοποίησης και κατά αντιστοιχία για τα χαμηλότερα επίπεδα «Δυσαρέσκειας»). Ωστόσο, η μεταβλητή αυτή αναμένεται να μη

μετέχει ενεργά στη συνολική διαμόρφωση της συμπεριφοράς κάθε καταναλωτή για τη συγκεκριμένη υποκατηγορία – τμήμα σεναρίου (το γεγονός της υψηλής ικανοποίησης δεν είναι αναγκαίο να συμβαδίζει με υψηλές τιμές των R, F, M). Ο λόγος είναι το γεγονός ότι τα αγαθά ενώ θα είναι σε πολύ μεγάλο βαθμό όμοια, οι επιχειρήσεις αναμένεται να ανταγωνίζονται μεταξύ τους σε διαφορετικούς τομείς όπως προσφορές κ.α. Συνεπώς, κάθε καταναλωτής αναμένεται να παραμένει στην κάθε εταιρία για κάποιο βραχυχρόνιο διάστημα (καθαρά καιροσκοπικά), ανεξαρτήτων επιπέδων ικανοποίησης ή άλλων παρεμφερών παραγόντων.

Η παράμετρος R, δεχόμενη επιρροές και από την S αναμένεται να παρουσιάζει υψηλή «κεντρική τάση», με το μεγαλύτερο μέρος των παρατηρήσεων να στρέφονται γύρω από τον μέτριο και μεγάλο χρόνο επανάληψης αγοράς (δεδομένου ότι οι βασικές υποκαταστάσεις για την εν λόγω μεταβλητή θα είναι α) χαμηλός, β) μέτριος, γ) υψηλός χρόνος επανάληψης αγοράς). Εντούτοις, οι F και M αναμένεται να εξαρτώνται σε μεγαλύτερο βαθμό από το είδος του αγαθού.

Η πιθανότητα τώρα, κάποιος πελάτης να «χαθεί» πρόσκαιρα (δηλαδή να παραμείνει ανενεργός για ένα σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα σε όρους μοντέλου) είναι πολύ μεγάλη. Σε τέτοιες περιπτώσεις αγορών, ο καταναλωτής είναι φρόνιμο να εικάζεται ότι ποτέ δεν περνάει στο στάδιο του να διακόψει εις αεί την εμπορική του σχέση με την υπό ανάλυση φίρμα (η αναφορά γίνεται για το απορροφητικό στάδιο που χαρακτηριστικά καλείται ως “dead state”) και ειδικά αν τα επίπεδα της ικανοποίησής του είναι υψηλά. Κατά συνέπεια, είναι δυνατόν να γίνει αρχικά η υπόθεση ότι η πιθανότητα κάποιος καταναλωτής να περιέλθει στο απορροφητικό στάδιο είναι πολύ μικρή έως μηδενική (για τα μεγαλύτερα επίπεδα ικανοποίησης, ακόμα και αν έχει παρέλθει μεγάλο διάστημα από την τελευταία αγορά του από την υπό εξέταση εταιρία). Σε διαφορετική περίπτωση, αν κάποιος πελάτης φέρεται να διακόπτει τη σχέση του με κάποια εταιρεία, όταν τα επίπεδα ικανοποίησής του είναι χαμηλά, τότε μπορεί να γίνει με σχετική ασφάλεια η υπόθεση ότι ο καταναλωτής αυτός θα πρέπει να θεωρηθεί χαμένος (lost – for – good). Οποιαδήποτε επανάληψη αγοράς, ενδέχεται σε πολύ μεγάλο βαθμό να είναι καθαρά συμπτωματική. Η εταιρεία θα πρέπει να τον προσεγγίσει και να τον πείσει από την αρχή (γεγονός που συνιστά νέα κόστη απόκτησης – acquisition costs).

Συμπερασματικά, σε ότι αφορά τη μεταβλητή «R», οι επιμέρους πιθανότητες μετάβασης από τα χαμηλότερα επίπεδα της (τα οποία εκφράζουν υψηλή συχνότητα επανάληψης αγοράς) προς τα υψηλότερα (χαμηλότερες συχνότητες αγοράς),

αναμένεται να έχουν μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης δεδομένου και του γεγονότος ότι η ικανοποίηση και κατ' επέκταση η αφοσίωση είναι θετικά αλλά όχι ένα προς ένα συσχετισμένες με την επανάληψη αγοράς (βλ. [18], [49]).

3.6.1.β Οι αγορές με **υψηλό βαθμό διαφοροποίησης**

Σε τέτοιου είδους αγορές, τα παρεμφερή αγαθά παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές μεταξύ τους. Οι εναλλακτικές «περιορίζονται» καθώς κανένα αγαθό δεν αναμένεται να ομοιάζει με τα υπόλοιπα. Κατά συνέπεια, οι καταναλωτές προσκολλώνται σε ένα αγαθό, το οποίο ταιριάζει με τον καλύτερο τρόπο στις ανάγκες τους. Αποτέλεσμα, είναι η παρατήρηση υψηλής επανάληψης αγοράς, συχνότητας αγορών από τη συγκεκριμένη φίρμα αλλά και share – of – wallet για το προϊόν της φίρμας αυτής (παρατηρήσεις που υπονοούν υψηλή αφοσίωση). Οι Jones and Sasser (βλ. [27]) παρατηρούν ότι οι συμπεριφορικές μεταβλητές R, F, M είναι καλοί δείκτες αφοσίωσης, ωστόσο θα πρέπει να αναλύονται παράλληλα με παραμέτρους όπως η μακροβιότητα (longevity) και η διατήρηση (retention), αναφερόμενοι στην χρονική περίοδο κατά την οποία «συνεργάζονται» πελάτης – επιχείρηση και δη για τέτοιες μορφές αγοράς. Επιπρόσθετα, θα πρέπει να ελέγχονται και τα επίπεδα ικανοποίησης προτού κάποιος οδηγηθεί στο συμπέρασμα της αφοσίωσης για έναν καταναλωτή. Υπενθυμίζεται η περίπτωση του πελάτη – ομήρου (hostage). Το ενδεχόμενο αυτό υποστηρίζουν και Chebat and Amor (βλ. [37]), παρατηρώντας ότι όταν η ικανοποίηση είναι χαμηλή, η πιθανότητα μετανάστευσης (migration) εξαρτάται σημαντικά και από το κόστος μεταστροφής[44] (βλ. [37], [100], [101]). Έτσι, για υψηλά διαφοροποιημένες αγορές οι οποίες συνιστούν υψηλά κόστη μεταστροφής για τους καταναλωτές, η επίδραση της χαμηλής ικανοποίησης αναμένεται να μετριάζεται περισσότερο χάριν στα κόστη αυτά. Επεκτείνοντας τις παρατηρήσεις τους, σημειώνουν ότι οι υψηλά διαφοροποιημένες αγορές – υψηλά κόστη μεταστροφής, εμφανίζουν καταναλωτές με υψηλότερο μέσο χρόνο διατήρησης (retention), άρα χαμηλότερη πιθανότητα διακοπής και κατ' επέκταση υψηλότερη πιθανότητα επαναγοράς, ακόμα και αν τα επίπεδα ικανοποίησης είναι χαμηλά (ακόμα περισσότερο για υψηλότερα τέτοια επίπεδα). Ωστόσο, τα γεγονός αυτό δε συμβαδίζει κατ' ανάγκη και με υψηλότερα επίπεδα συχνότητας αγορών (frequency), πέραν αυτών που τους υποβάλλουν οι ανάγκες τους. Κατά αναλογία, εάν ένας πελάτης φέρει

[44] Ο όρος απαντάται στη διεθνή βιβλιογραφία ως switching cost, (βλ. [33], [37]).

υψηλά επίπεδα R, F, M ενώ ο δείκτης ικανοποίησης του είναι χαμηλός (βλ. [26], [27]), τότε ενδέχεται ο πελάτης αυτός να μη μπορεί να βρει κάποια καλύτερη εναλλακτική και να συμβιβάζεται με το καλύτερο δυνατό διαθέσιμο (αγαθό). Εντούτοις, ο Chebat (2002) παρατηρεί ότι ακόμα και όταν η αγορά συνιστά υψηλά κόστη μεταστροφής (switching costs) – υψηλή διαφοροποίηση αγαθού, μακροχρόνια ο πελάτης θα οδηγηθεί σε μετανάστευση (migration). Σημειώνεται εδώ ότι σε όρους Μαρκοβιανών μοντέλων κάτι τέτοιο περιγράφει την ύπαρξη Κρυμμένων Αλυσίδων (βλ. John Larchevêque: "*Notes on Hidden Markov Models*[45]", [7], [8]). Παραταύτα κάτι τέτοιο παραμένει εκτός των στόχων της εργασίας αυτής.

Αναλύοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις, σε τέτοιου είδους αγορές η «κεντρική τάση» της μεταβλητής «R» αναμένεται να εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από τη μεταβλητή «S» (ανάλογα με το είδος του αγαθού, αναμένεται να είναι χαμηλή – συχνή επαναγορά – προς μέτρια). Οι καταναλωτές επιλέγουν με προσοχή το «μοναδικό» αγαθό που τους ενδιαφέρει και προσκολλώνται σε αυτό. Ο λόγος είναι ότι τα αγαθά παρουσιάζονται σημαντικώς διαφορετικά στα μάτια των καταναλωτών (όπως έγινε αναφορά και παραπάνω). Για υψηλότερα επίπεδα «S», πολύ δύσκολα οι πελάτες εγκαταλείπουν την εμπορική τους σχέση με την εταιρία για να «μεταναστεύσουν» προς κάποια ανταγωνιστική, έστω και βραχυχρόνια (μικρή πιθανότητα μεταστροφής). Αντίθετα, τα χαμηλότερα επίπεδα ικανοποίησης, είναι πολύ πιθανό να οδηγήσουν τον πελάτη μακριά από την αντίστοιχη εταιρία για πάντα (στάδιο απορρόφησης – "dead state"). Ωστόσο, κάτι τέτοιο δε μπορεί να θεωρηθεί ως δεδομένο, καθώς κάθε φίρμα δεν προσφέρει το ίδιο αγαθό (λόγω υψηλής διαφοροποίησης, όπως συμβαίνει στην αγορά) έτσι ώστε κάθε πελάτης να έχει έναν αριθμό (πραγματικών) εναλλακτικών. Εντούτοις, μακροχρόνια και καθώς μεταβάλλονται οι «όροι[46]» με τους οποίους δραστηριοποιείται κάθε επιχείρηση σε κάθε κλάδο, είναι δεδομένο ότι ένας καταναλωτής με χαμηλά επίπεδα ικανοποίησης, θα επιλέξει διαφορετική φίρμα και αγαθό, το οποίο ενδέχεται να ταιριάζει καλύτερα στις ανάγκες του. Κατά συνέπεια, ένας τέτοιος καταναλωτής απορροφάται και χάνεται για πάντα. Το γεγονός αυτό συνεπώς, ενδέχεται να επηρεάζει «αρνητικά» την παράμετρο R, ωθώντας την κεντρική της τάση προς τα πάνω.

[45] Πηγή: http://research.microsoft.com/en-us/um/people/johnlarc/notes/HMM.pdf

[46] Στον μακροχρόνιο ορίζοντα, θεωρείται ότι κάθε επιχείρηση μπορεί να μεταβάλει την παραγωγική της διαδικασία και κατά συνέπεια να διαμορφώσει σημαντικά διαφορετικά το αγαθό το οποίο προσφέρει.

Σε ότι αφορά τώρα την κατανομή της «S», ο μικρότερος όγκος των παρατηρήσεων αναμένεται να συγκεντρώνεται στα υψηλότερα επίπεδα ικανοποίησης, ακριβώς λόγω «μονοπωλιακής» δράσης των εταιριών. Για υψηλότερα επίπεδα «S» συνεπώς, θα παρατηρούνται χαμηλότερα επίπεδα R και υψηλοτέρα F και M, πάντα και σε σχέση με το είδος του αγαθού (όπως θα παρουσιαστεί αμέσως παρακάτω). Συμπερασματικά, μπορεί να γίνει η υπόθεση (με σχετική ασφάλεια) ότι για τα υψηλότερα επίπεδα «S», ο πελάτης επαναλαμβάνει αγορές από την ίδια την εταιρία (πάντα βάσει των αναγκών του), με σημαντικά μικρή πιθανότητα να περιέλθει σε κάποιο απορροφητικό στάδιο διακοπής της εμπορικής τους σχέσης. Καθώς τα επίπεδα της μεταβλητής «S» μειώνονται, θα μειώνεται αντίστοιχα η αγοραστική συχνότητα του καταναλωτή (όχι όμως σημαντικά). Κάτι που σημαίνει ότι θα παρατηρείται αύξηση της τιμής R, και μείωση των τιμών των F και M. Ενώ, δρώντας αντιστρόφως ανάλογα η πιθανότητα μεταστροφής και εν τέλει μετάβασης προς το στάδιο της απορρόφησης θα είναι σημαντικότερη.

3.6.2 Είδος αγαθού

Το είδος του προϊόντος (υλικό ή άυλο), αναφέρεται στη δυνατότητα διάκρισης και χαρακτηρισμού ενός προϊόντος βάσει κάποιων γενικότερων ιδιοτήτων που είναι συνυφασμένες με τη φύση του. Όλα τα αγαθά δεν παρουσιάζουν τα ίδια χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα, κάποια αγαθά προορίζονται για την ικανοποίηση πρόσκαιρων αναγκών (φαγητό), ενώ άλλα έχουν τη δυνατότητα ικανοποίησης αναγκών διαχρονικά (αυτοκίνητο). Το γεγονός αυτό από μόνο του συνιστά συμπεριφορικές εξωτερικεύσεις σε ότι αφορά τις μεταβλητές «R», «F» και «M» (βλ. [38]), δεδομένου ότι τα μεγέθη τα οποία αντιπροσωπεύουν δεν έχουν αναχθεί σε κάποια σχετική κλίμακα (δηλαδή η σύγκριση γίνεται με απόλυτα μεγέθη). Έτσι, η συγκεκριμένη παράμετρος, αναμένεται να καθορίσει σημαντικά τη διάσταση του χρόνου (παράμετρος R) για τις επιμέρους μεταβλητές του μοντέλου καθώς και τις παραμέτρους F και M όπως παρατηρούν και οι Bank and Riedel, (βλ. [38]).

Ωστόσο, ένα θέμα που χρίζει ιδιαίτερης ανάλυσης, είναι κατά πόσο τα αγαθά θα έπρεπε να διακρίνονται περαιτέρω (σε ανεξάρτητες κατηγορίες και όχι υποκατηγορίες) σε προϊόντα (υλικά αγαθά) και υπηρεσίες (άυλα). Για παράδειγμα, σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τους Jones and Sasser, (βλ. [27]) στην εταιρία Xerox, βρέθηκε ότι οι υψηλά ικανοποιημένοι πελάτες ήταν 6 φορές πιο πιθανό να εμφανίσουν αφοσίωση και κατ’ επέκταση επανάληψη αγοράς. Παράλληλα ευρήματα

άλλων ερευνών για τη σύγκριση της σχέσης και της επίδρασης της ικανοποίησης αλλά και λοιπών παραγόντων όπως η αντιλαμβανόμενη ποιότητα (perceived quality) και οι προσδοκίες (expectations) επί προϊόντων και υπηρεσιών, αποκαλύπτουν πως η πιθανότητα επαναγοράς (repurchase likelihood) στις υπηρεσίες είναι υψηλότερη, αν και η επίδραση αυτών στην πιθανότητα επαναγοράς είναι σημαντικότερη στα προϊόντα (βλ. [19]).

Φως στο συγκεκριμένο ερώτημα μπορούν να ρίξουν οι έρευνες των Anderson (βλ. [19]), Anderson, Fornell and Lehmann (βλ. [23]), Anderson, Fornell and Rust (βλ. [24]), Anderson (2001), Chebat and Ben-Amor (βλ. [37]). Ο πρώτος, παρατηρεί πως η αντιλαμβανόμενη ποιότητα, οι προσδοκίες, η ικανοποίηση καθώς και η επίδραση αυτών στην πιθανότητα επανάληψης αγοράς, γενικώς εμφανίζεται υψηλότερη στα προϊόντα. Αντίθετα, η καθαυτή επανάληψη αγοράς φέρεται ως υψηλότερη στις υπηρεσίες. Επίσης, οι τελευταίοι, στην προσπάθεια τους να συνδυάσουν τα συναισθήματα ενός πελάτη, με την καταναλωτική του συμπεριφορά και την πιθανότητα μετανάστευσης αυτού, επισημαίνουν ότι τα επίπεδα παραπόνων είναι υψηλότερα στους τομείς των υπηρεσιών. Παραταύτα, υπογραμμίζουν ότι η πιθανότητα μεταστροφής, εμφανίζεται συγκριτικά χαμηλότερη στις υπηρεσίες. Το «παράδοξο» αυτό, αποδίδουν στην προσωπική επαφή του πελάτη με την επιχείρηση, μέσω των στελεχών της έκαστου εταιρίας. Κατά πόσο όμως τα στοιχεία αυτά αποτελούν μέτρο ικανό για «επιβεβλημένη» διάκριση των αγαθών σε προϊόντα και υπηρεσίες; Οι ίδιοι (Chebat and Ben-Amor, 2007), θεωρούν πως τα φαινόμενα αυτά μετριάζονται σημαντικά ή ακόμα και εξαλείφονται λόγω του ότι τα υλικά αγαθά πλέον συνοδεύονται από πληθώρα υπηρεσιών. Πεποίθηση που ενστερνίζεται και ο Anderson (2001), αναφέροντας ότι τα περισσότερα σύγχρονα αγαθά έχουν σαν συστατικό τους υπηρεσίες (για παράδειγμα γραμμή εξυπηρέτησης πελατών, εξουσιοδοτημένο συνεργείο επισκευών κ.α.). Συνεπώς με ένα σχετικό επίπεδο ασφάλειας, μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι τα αγαθά δε χρίζουν περαιτέρω διάκρισης σε προϊόντα και υπηρεσίες, καθώς δεν υπάρχουν σημαντικά ευρήματα που να δεικνύουν διαφορές στην καταναλωτική συμπεριφορά ενός ατόμου, μεταξύ των δύο κατηγοριών.

Κατά αντιστοιχία με τα παραπάνω, ο παράγοντας του είδους του αγαθού, μπορεί με τη σειρά του να αναλυθεί σε 2 υποκατηγορίες. Κατά σειρά, (όπως αυτά αναλύθηκαν αρχικά) τα αγαθά και κατ’ επέκταση τα υπο – σενάρια τα οποία είναι

δυνατόν να αναπαραχθούν, διακρίνονται σε καταναλωτά ή καταναλωτικά (πρόσκαιρη ικανοποίηση ανάγκης) και διαρκή (διαχρονική ικανοποίηση μίας ανάγκης).

3.6.2.α Τα **καταναλωτικά αγαθά (perishable goods)**

Λόγω του ότι προορίζονται για την άμεση και πρόσκαιρη ικανοποίηση αναγκών, οι ιδιότητες οι οποίες τα συνοδεύουν συνηγορούν σε υψηλούς δείκτες επανάληψης αγοράς και συχνότητας και κατά συνέπεια (όντας αντιστρόφως ανάλογα) σε μικρό συγκριτικά κόστος ανά μονάδα αγοράς (σε ότι αφορά τη μεταβλητή M). Η μεταβλητή «R» αναμένεται να εμφανίζει χαμηλότερη «κεντρική τάση» βάσει των δεδομένων αυτών (δεδομένης της ποιοτικής της κλίμακας διαβάθμισης των διαφόρων επιπέδων), στοιχείο που περιγράφει την υψηλή επανάληψη αγοράς. Εντούτοις, οι Bank and Riedel (2003) σημειώνουν πως το γεγονός ότι τα αγαθά που εμπίπτουν στη συγκεκριμένη κατηγορία αποτελούν προϊόντα καθημερινής χρήσης, επιτρέπουν στους καταναλωτές να μην αναλώνονται ιδιαίτερα στην επιλογή του «καλύτερου». Γεγονός που περιγράφει χαμηλή εμπλοκή – low involvement (βλ. [26], [99]) και κατ' επέκταση μικρότερη πιθανότητα εμφάνισης αφοσίωσης. Το στοιχείο αυτό, αναφέρεται σε αντιστοιχία και με τις επιδράσεις που αναμένεται να παρατηρηθούν σε διαστάσεις όπως η διατήρηση του καταναλωτή (customer retention), η επανάληψη αγοράς (repurchase), η συχνότητα (frequency) και το «μερίδιο του πορτοφολιού» (share – of – wallet), μετριάζοντας έτσι την αρχική επίδραση στις συμπεριφορικές μεταβλητές που περιγράφουν τη διάσταση του χρόνου και του όγκου της συναλλαγής (R, F,M).

3.6.2.β Τα **διαρκή αγαθά (durable goods)**

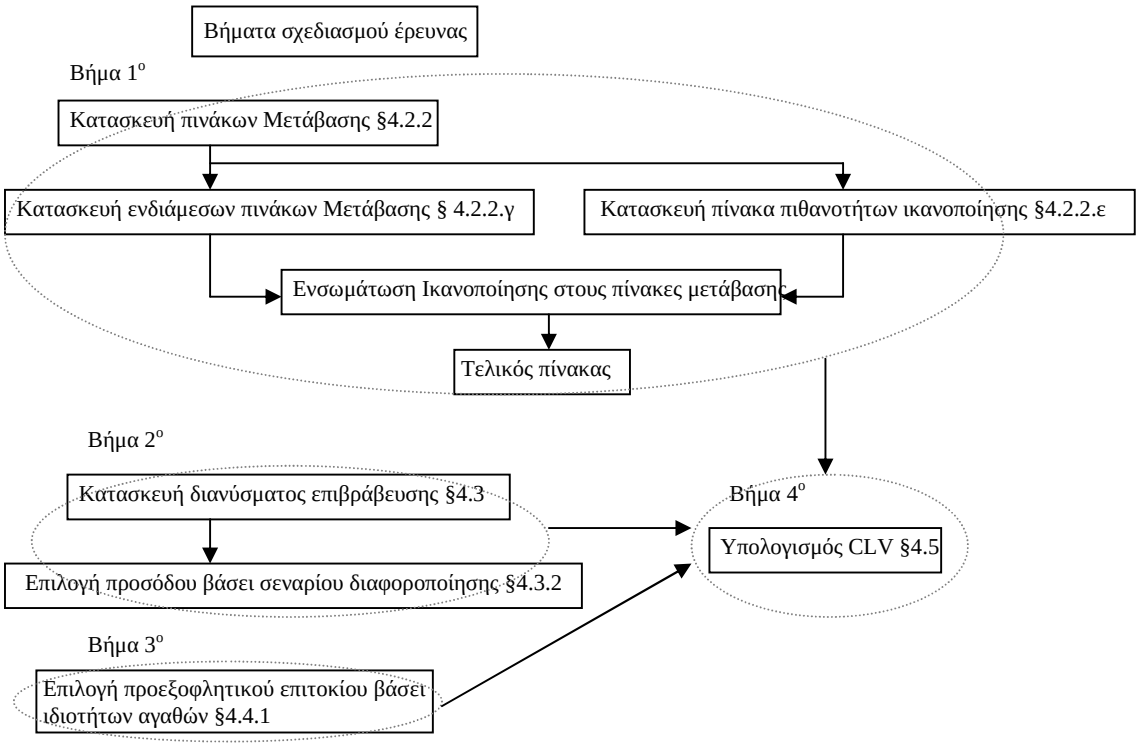
Αντίθετα με τα παραπάνω, τα διαρκή αγαθά για τω λόγω του ότι έχουν τη δυνατότητα να ικανοποιήσουν την ίδια ανάγκη πολλές φορές (διαχρονικότητα), αναμένεται να παρουσιάζουν «μικρότερους» δείκτες επανάληψης αγοράς και συχνότητας αγορών (εντός κάποιας περιόδου βάσει μοντέλου). Οι Bank and Riedel (βλ. [38]), παρατηρούν ότι ο καταναλωτής, την αγορά ενός διαρκούς αγαθού τη βιώνει ως επένδυση και μάλιστα μη αναστρέψιμη. Με τον τρόπο αυτό, θέλουν να υπογραμμίσουν τη σημαντικότητα και το βάρος που έχει κάθε αγορά διαρκούς αγαθού για ένα καταναλωτή, προσθέτοντας στην ανάλυση την αίσθηση του υψηλού πραγματικού κόστους και ιδιαίτερα του κόστους ευκαιρίας. Επεκτείνοντας τις παρατηρήσεις τους, μπορεί να γίνει με ασφάλεια η υπόθεση ότι αν η ικανοποίηση από

ένα διαρκές αγαθό είναι μικρή, τότε η πιθανότητα επανάληψης της αγοράς αυτού συρρικνώνεται. Ωστόσο, για να είναι ασφαλέστερη η γενίκευση αυτή, θα πρέπει παράλληλα να ελέγχεται και ο παράγοντας της διαφοροποίησης της αγοράς. Το στοιχείο αυτό, ενισχύεται και από τα ευρήματά τους, σύμφωνα με τα οποία η επανάληψη αγοράς για διαρκή αγαθά εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό και από τις προσδοκίες στην τιμή, υπονοώντας ότι θα είναι εντονότερη σε πιο ανταγωνιστικές αγορές (χαμηλή διαφοροποίηση). Ένα στοιχείο που αξίζει παρατήρησης, είναι το γεγονός ότι η πρόθεση επαναγοράς αναμένεται να εμφανίζει σφάλματα εκτίμησης (κυρίως υπερεκτίμησης), βασιζόμενη στα τρέχοντα επίπεδα ικανοποίησης του έκαστου καταναλωτή. Παρά τη σαφή σχέση που διαπιστώνεται μεταξύ ικανοποίησης και πρόθεσης για επανάληψη αγοράς ειδικότερα για τέτοια αγαθά (βλ. [18], [38], Reichheld and Teal, βλ. [102]). Το βήμα για μία τέτοια παρατήρηση, δίνεται λόγω του ότι η πραγματική ικανοποίηση για τέτοιου είδους αγαθά διαμορφώνεται διαχρονικά (εμφανίζει χρονική υστέρηση) και αναμένεται να φθίνει με την πάροδο του χρόνου.

Σε ότι αφορά τώρα το κόστος απόκτησής, αυτό είναι συγκριτικά μεγαλύτερο των της προηγούμενης κατηγορίας (συνεπώς, η νομισματική αξία που αναπαράγουν θα είναι σημαντικά υψηλότερη). Μία αναλογία ως προς το κεφάλαιο που δαπανάται από τα νοικοκυριά μεταξύ διαρκών και καταναλωτών αγαθών συνολικά, θέλει το ύψος για διαρκή να φτάνει ακόμα και το 30% (του συνολικού προϋπολογισμού ενός νοικοκυριού) σε αντίθεση με τον πολύ μικρό όγκο και συχνότητα αγοράς αυτών. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως το γεγονός της μικρής συχνότητας αγορών που τα συνοδεύει, υπογραμμίζει πως η επανάληψη αγοράς αυτών υπόκειται σε ένα περιβάλλον μάκρο, όπου οι όροι αγοράς διαφοροποιούνται από μάκρο – περίοδο σε μάκρο – περίοδο.

Κεφάλαιο 4ο

Σχεδίαση του πειράματος



4.1 Οι πίνακες μετάβασης

Όπως έχει γίνει αναφορά και κατά τον πρόλογο, πρωταρχικός στόχος της παρούσας εργασίας, είναι ο προσδιορισμός της διαχρονικής αξίας του καταναλωτή, υπό διαφορετικά σενάρια αγορών (όπως αυτά συστήθηκαν παραπάνω). Για τη σχεδίαση λοιπόν του συγκεκριμένου πειράματος, αρχικά έπρεπε να προσδιοριστεί ο πίνακας μετάβασης για κάθε σενάριο. Εντούτοις, η πρόσβαση σε δεδομένα για τις ανάγκες της εργασίας, ήταν σχεδόν αδύνατη. Κατά συνέπεια έπρεπε να εξευρεθούν εναλλακτικοί τρόποι συγκέντρωσης δεδομένων (για τη σύσταση των διαφόρων πινάκων μετάβασης). Για το λόγο αυτόν, επελέγη η γέννηση των δεδομένων, μέσω μίας μεθοδολογίας γέννησης αριθμών, οι οποίοι θα υπόκειντο σε συγκεκριμένους περιορισμούς και κανόνες.

Ο όρος κανόνες, αναφέρεται κυρίως στη νομοτέλεια κάθε σεναρίου. Δηλαδή στον τρόπο που αναμένεται να επενεργούν οι ιδιότητες που συστήνει κάθε σενάριο (αφοσίωση, κόστος «μεταστροφής»[47], συμμετοχή[48] κ.α.), στις 4 βασικές συμπεριφορικές μεταβλητές του γενικότερου μοντέλου (κατανομές μεταβλητών, trade-offs κ.α.). Οι περιορισμοί, καθορίζονται επίσης σε σημαντικό βαθμό, από το έκαστο σενάριο. Ωστόσο, αφορούν και περισσότερο μαθηματικές σχέσεις, όπως το γεγονός ότι εφόσον κάθε γραμμή του πίνακα μετάβασης αποτελεί την πιθανή κατάσταση (του καταναλωτή) σε κάθε χρονική στιγμή και τα στοιχεία ανά στήλη τις πιθανές καταστάσεις μετάβασης σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή (τα οποία μεταφράζονται σε πιθανότητες μετάβασης), τότε κάθε γραμμή υπόκειται στους βασικούς περιορισμούς πιθανότητας. Έτσι θα πρέπει:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 \text{ και } 0 \le p_{ij} \le 1 \ \forall i, j \in X$$

όπου:

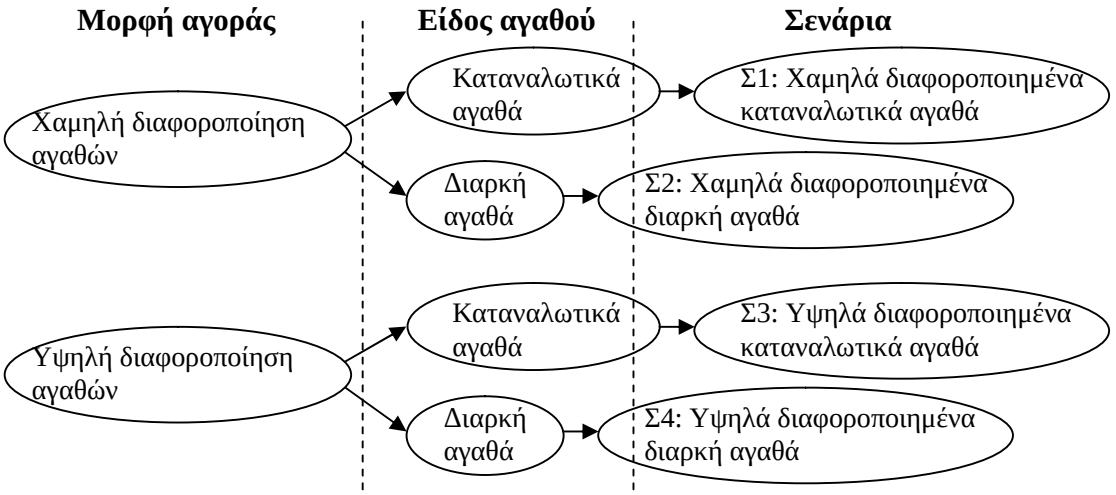
- X: το σύνολο των δυνατών καταστάσεων του μοντέλου
- p_{ij}: η πιθανότητα μετάβασης της κατάστασης που περιγράφει η γραμμή i στην κατάσταση που περιγράφει η στήλη j.

4.2 Κατασκευή των επιμέρους πινάκων μετάβασης (P)

Οι 2 διαστάσεις ανά παράγοντα διάκρισης των επιμέρους αγορών (όπως παρουσιάστηκαν στο τμήμα 3.6), συνδυαζόμενες δίνουν έναν συνολικό αριθμό 4 διαφορετικών σεναρίων και κατ' επέκταση 4 διαφορετικών πινάκων μετάβασης (με μοναδικές ιδιότητες ανά σενάριο ελέγχου), τα οποία έχουν τη δυνατότητα να περιγράψουν το σύνολο των διαφόρων μορφών αγορών. Το παρακάτω σχήμα (σχήμα 4.1) είναι ενδεικτικό του τρόπου με τον οποίο διαμορφώνονται τα σενάρια αυτά. Τα σχήματα που περιλαμβάνονται στο τέλος κάθε περιγραφόμενου βάσει των υποθέσεων σεναρίου (σχ. 4.3, 4.4, 4.5, 4.6), είναι ενδεικτικό των υποθέσεων του κάθε σεναρίου εκείνου. Για τα συγκεκριμένα σχήματα, έχει γίνει η υπόθεση ότι η βασική παράμετρος που καθορίζει και τις λοιπές συμπεριφορικές μεταβλητές, είναι η ικανοποίηση (για την οποία πολύ εύκολα μπορεί να γίνει η αντιστοίχιση με τη δυσαρέσκεια, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο τμήμα 3.5). Η μεταβλητή M παραλείπεται από τα σχήματα αυτά χάριν ευκολίας (πολύ υψηλή συσχέτιση με F, όχι

[47] βλ. Switching cost
[48] Βλ. Involvement

όμως 1–1), καθώς θεωρείται ότι εξαρτάται από τη συχνότητα των αγορών (F) εντός μίας περιόδου.



σχήμα 4.1

Η παρουσίαση των σεναρίων στην παρούσα φάση θα είναι μονοδιάστατη χωρίς να περιλαμβάνονται πιθανότητες μετάβασης προς επιμέρους καταστάσεις (για παράδειγμα: $P(R_2F_3M_2S_3 \mid R_1F_3M_2S_3)$), αλλά μόνο οι βασικοί κανόνες που θα διακρίνουν και θα συνοδεύουν κάθε σενάριο – πίνακα μετάβασης.

4.2.1 Υποθέσεις σεναρίων

Στην παρούσα ενότητα, αναλύονται τα βασικά χαρακτηριστικά που αναμένεται να διέπουν κάθε σενάριο και κατ' επέκταση κάθε πίνακα μετάβασης. Τα χαρακτηριστικά αυτά, εκφέρονται ως υποθέσεις, ενώ αναλύεται παράλληλα και η αναμενόμενη επίδρασή τους στους πίνακες μετάβασης. Αρχικά θα ν' αναλυθούν οι βασικές υποθέσεις που αναμένεται να απαντώνται σε κάθε πίνακα μετάβασης ανεξαρτήτου σεναρίου, ενώ στη συνέχεια, θα αναλυθεί κάθε σενάριο ξεχωριστά, μόνο ως προς τις αναμενόμενες διαφοροποιήσεις από τα προηγούμενα

4.2.1.α Βασικές υποθέσεις σεναρίων

- Γενικά, τα επίπεδα της ικανοποίησης είναι πιθανότερο να παραμείνουν το ίδιο από τη μία περίοδο στην άλλη. Ωστόσο, είναι ευκολότερο να μειωθούν, από ότι να αυξηθούν. Κάτι τέτοιο βέβαια εξαρτάται και από τη γνώση (knowledge) του πελάτη για την αγορά.

- Οι διάφορες καταστάσεις περιγραφικές της έντασης της κατανάλωσης για κάθε περίοδο, κατατάσσονται με σειρά πιθανότητας να παρατηρηθούν, ως εξής:

$$\{F,M\}: P(1,1) > P(2,1) > P(3,1) > P(3,2) > P(2,2) > P(3,3) > P(2,3) > P(1,2) > P(1,3)$$

- Το πηλίκο M/S (τιμή νομισματικής αξίας/ τιμή ικανοποίησης) μπορεί να αποτελέσει έναν διαφοροποιημένο πρώιμο δείκτη ικανοποίησης ως προς το κόστος. Κατά συνέπεια, όσο πιο μικρό είναι για κάθε δεδομένο επίπεδο ικανοποίησης και καθώς αυτό βαίνει προς χαμηλότερα επίπεδα, τόσο πιο «ικανοποιημένος» θα είναι ο πελάτης. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι θα ισχύει:

$$S(\frac{M_1}{S_3}) > S(\frac{M_2}{S_3}) > S(\frac{M_3}{S_3}) > S(\frac{M_1}{S_2}) > S(\frac{M_2}{S_2}) > S(\frac{M_3}{S_2}) > S(\frac{M_1}{S_1}) > S(\frac{M_2}{S_1}) > S(\frac{M_3}{S_1})$$

  Κατά τον τρόπο αυτόν, λαμβάνεται υπόψη και το value – for – money. Έτσι, ο «δείκτης» αυτός, μπορεί να αποτελέσει και έναν τυπικό δείκτη της απογοήτευσης του πελάτη (σε σχέση και με το έκαστο σενάριο), για τις πιθανότητες μετάβασης προς καταστάσεις επανάληψης αγοράς, διατήρησης της κατανάλωσης (για υψηλότερα επίπεδα κατανάλωσης), ή ακόμα και αύξησης αυτής.

- Η υψηλότερη συχνότητα (F) εντός μίας περιόδου σε σχέση με τα αντίστοιχα υψηλότερα επίπεδα της νομισματικής αξίας (M) των αγορών του πελάτη, μπορεί να αποτελέσει έναν δείκτη επαλήθευσης της ικανοποίησης που αποκόμισε τελικά ο καταναλωτής, σταθμίζοντας τον όγκο των συναλλαγών αυτού. Αντίστοιχα, τα χαμηλά επίπεδα αυτών για οποιοδήποτε επίπεδο S (ακόμα και το υψηλότερο), μπορούν να δηλώνουν επιφυλακτικότητα και λογικά να μην εξηγούν την αναμενόμενη συμπεριφορά που περιγράφει το επίπεδο κάθε της ικανοποίησης. Για παράδειγμα, έστω S=1 και F, M = (1,1). Συνεπώς ενώ αναμένεται κάποιος πελάτης να μην επαναλάβει αγορά για σενάριο χαμηλής διαφοροποίησης (την επόμενη περίοδο), λόγω επιφυλακτικότητας, - χαμηλό F, M – ενδέχεται να παρατηρηθούν κάποιες καταστάσεις επανάληψης αγοράς (χαμηλή πιθανότητα επανάληψης, πλην όμως θετική). Ωστόσο, καθώς αυξάνει το S η πιθανότητα αυτή αναμένεται να αυξάνει (σημαντικά ή μη). Οι διάφοροι συνδυασμοί F και M μπορούν να διακριθούν κατά τον τρόπο αυτόν, ως εξής:

  (F,M):

- (1,1), (2,1), (1,2): Υψηλή Επιφυλακτικότητα – Χαμηλή επαλήθευση
- (3,1), (2,2): Μέση Επιφυλακτικότητα – Μέση επαλήθευση
- (3,2), (2,3), (3,3), (1,3): Χαμηλή Επιφυλακτικότητα – Υψηλή επαλήθευση

- Τα διάφορα επίπεδα κατανάλωσης διακρίνονται σε 3 βασικές κατηγορίες, ως εξής:

  Επίπεδα κατανάλωσης (F, M):

  - Χαμηλά επίπεδα: (1,1), (2,1), (3.1)
  - Μέσα επίπεδα: (3,2), (2,2)
  - Υψηλά επίπεδα: (3,3), (2,3), (1,2), (1,3)

- Οι καταστάσεις ενδεικτικές υψηλών επιπέδων κατανάλωσης $[(F,M):(3,3),(2,3),(1,2),(1,3)]$, μπορούν να θεωρηθούν ενδείξεις αφοσίωσης και της εμπιστοσύνης του πελάτη προς την εταιρία.. Κατά συνέπεια, πάντα οι μεταβάσεις προς τις καταστάσεις αυτές θα έχουν μικρότερη πιθανότητα (δεδομένου και του σεναρίου), με κύρια προτεραιότητα παρατηρούμενα υψηλά επίπεδα R,F,M κατά την προηγούμενη περίοδο.

- Κατά τη μη επανάληψη αγοράς, ενώ οι τιμές των F, M δε δύνανται να μεταβάλλονται, πέραν του R (αυξάνει),αναμένεται να παρατηρείται μεταβολή ακόμα και στην ικανοποίηση. Η αιτία πίσω από το γεγονός αυτό, είναι η πιθανότητα ο πελάτης να πραγματοποιεί αγορές από άλλη φίρμα (όντας ανενεργός αλλά όχι «νεκρός» στην υπό εξέταση φίρμα, ή ακόμα και λόγω ενεργειών marketing όπως word – of – mouth, προσφορές κ.α.), γεγονός που είναι αδύνατο να παρατηρηθεί. Εντούτοις, καθώς το R αυξάνει, επίσης αναμένεται να αυξάνει η πιθανότητα μεταβολής της ικανοποίησης (ο χρόνος λειτουργεί αρνητικά).

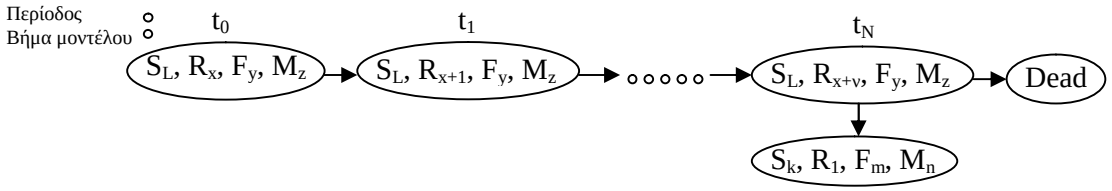
Σημείωση: Η γνώση του πελάτη σχετικά με την αγορά, μπορεί να προκύπτει ως η μέση πιθανότητα μετάβασης της συγκεκριμένης μονάδας σε καταστάσεις διαφορετικών επιπέδων ικανοποίησης κατά τις περιόδους όπου δεν παρατηρείται επανάληψη αγοράς. Δηλαδή, ο μέσος όρος των τιμών των στοιχείων των διαγωνίων πινάκων (βλ. παράρτημα πίνακες μετάβασης: γραμμές: 1111 έως 2333 x στήλες: 2111 έως 3333), τα οποία δε βρίσκονται πάνω στην κύρια διαγώνιο αυτών.

4.2.1.β Υποθέσεις Σενάριο 1ο: Χαμηλά διαφοροποιημένα καταναλωτικά αγαθά

Το παρόν σενάριο, συστήνει μία αγορά άκρως ανταγωνιστική (βλ. § 3.6.1.α και § 3.6.2.α). Το γεγονός αυτό συνεπάγεται πως ο καταναλωτής δεν έχει κανένα πρόβλημα ή δέσμευση (commitment) ώστε να διαφύγει προς άλλη φίρμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

- Εξηγώντας το φαινόμενο αυτό σε όρους «συμμετοχής» ("involvement"), ο οποιοσδήποτε καταναλωτής που αντιλαμβάνεται την υπό εξέταση αγορά ως χαμηλής διαφοροποίησης[49] (καθώς οι ιδιότητες των καταναλωτικών αγαθών είναι καθολικά αναγνωρίσιμες), δεν αναγνωρίζει κανένα κόστος (οικονομικό ή γενικότερο όπως χρόνο) ακόμη και όταν μετακυλίεται συνεχώς από φίρμα σε φίρμα. Το γεγονός αυτό αναμένεται να εμφανίζεται έντονα ακόμα και για υψηλότερα επίπεδα ικανοποίησης (μετριάζοντας την πιθανότητα επανάληψης αγοράς για οποιοδήποτε επίπεδο ικανοποίησης), καθώς ο πελάτης μπορεί να επιστρέψει οποιαδήποτε στιγμή στη φίρμα (επανάληψη αγοράς) για την οποία εμφάνιζε την υψηλότερη ικανοποίηση.
- Είναι πλέον αναμενόμενο, τα χαμηλότερα επίπεδα ικανοποίησης να μην οδηγούν σε επανάληψη αγοράς τουλάχιστον βραχυχρόνια (καθώς στον μακροχρόνιο ορίζοντα όλοι οι όροι αναμένεται να διαφοροποιηθούν). Σε όρους μοντέλου, αυτό μεταφράζεται σε μηδενική πιθανότητα μετάβασης (του μοντέλου) σε καταστάσεις επανάληψης αγοράς από καταστάσεις χαμηλής ικανοποίησης. Εντούτοις αναφέρεται ότι τυχόν παρατηρήσεις επανάληψης αγοράς για τα μικρότερα επίπεδα ικανοποίησης είναι δυνατές, όμως μπορούν να αποδοθούν με ασφάλεια στην τυχαιότητα. Κατά συνέπεια, μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι οι συγκεκριμένες πιθανότητες μετάβασης θα είναι μηδενικές. Παραταύτα, είναι σημαντικό το γεγονός αυτό να αποδοθεί και σχηματικά, ώστε να είναι δυνατή η απεικόνιση όλων των δυνατών περιπτώσεων μετάβασης ή μη για το συγκεκριμένο φαινόμενο (σχ. 4.2).

[49] Ήτοι αγορά υψηλού ανταγωνισμού.

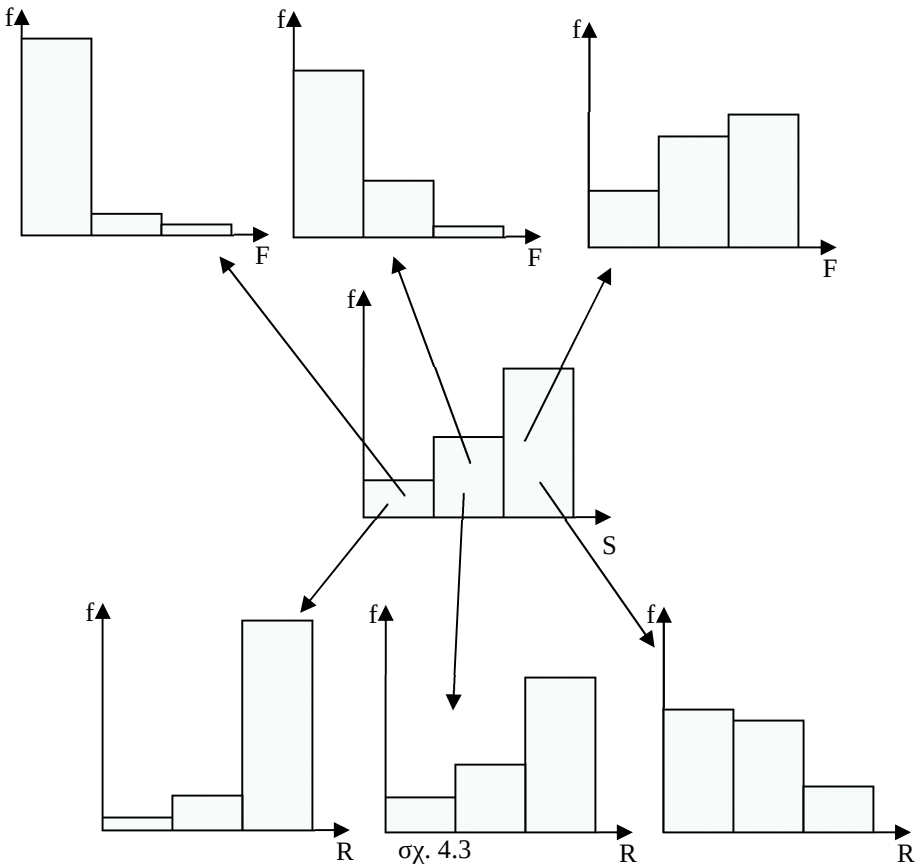


σχ. 4.2

όπου:

- t_0: Η χρονική περίοδος κατά την οποία παρατηρείται αρχικά η χαμηλή ικανοποίηση, η οποία δεικνύεται ως S_L. Το σχήμα αυτό περιγράφει το γεγονός κατά το οποίο στην περίπτωση παρατήρησης χαμηλής ικανοποίησης, υπάρχει μοναδική πιθανότητα μετάβασης προς κατάσταση η οποία θα δηλώνει μη επανάληψη αγοράς (γεγονός που θα δεικνύεται με αύξηση στο αμέσως επόμενο επίπεδο της μεταβλητής της «Προσφατότητας» – Recency), για τις αμέσως επόμενες χρονικές περιόδους. Εντούτοις, κατόπιν παρέλευσης κάποιων χρονικών περιόδων, ο πελάτης είναι πιθανότερο να επιστρέφει (γεγονός που περιγράφεται με R_1), ενώ μπορεί κάλλιστα να παρατηρηθεί οποιοδήποτε επίπεδο των λοιπών μεταβλητών κατά την περίοδο αυτή (περίοδος: t_N). Η πιθανότητα να περιέλθει ο πελάτης την ίδια χρονική περίοδο στο «νεκρό στάδιο» τουλάχιστον βραχυχρόνια, είναι πολύ μικρή και η περίπτωση αυτή συνιστά τη μοναδική περίπτωση ο πελάτης να περιέλθει στο «νεκρό» στάδιο για το συγκεκριμένο σενάριο.

- Γενικά, η υψηλή ικανοποίηση αναμένεται να μεταφράζεται σε υψηλότερες πιθανότητες επανάληψης αγοράς και συνεπώς μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης χαμηλών επιπέδων R και αντίστοιχα υψηλότερων F και M σε σχέση με τα χαμηλότερα επίπεδα S. Εντούτοις, υπενθυμίζεται πως ο κάθε πελάτης δε νιώθει καμία δέσμευση και συνεπώς είναι αναμενόμενο ακόμα και για τα υψηλότερα επίπεδα S τα επίπεδα των F και M να παραμένουν μέτρια (λόγω του ότι ο πελάτης αυτός αναμένεται να πραγματοποιεί αγορές από περισσότερες από μία φίρμες – χαμηλό Share – of – Wallet).
- Δεν αναμένεται να υπάρχει καμία σημαντική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών R, F και ειδικά για το συγκεκριμένο σενάριο. Δεδομένου ότι ο καταναλωτής δεν παρουσιάζει καμία δέσμευση (επαναλαμβάνεται ότι μπορεί να πραγματοποιεί αγορές από περισσότερες φίρμες οι οποίες πραγματεύονται το ίδιο αγαθό ακόμα και την ίδια περίοδο).



σχ. 4.3

- Τέλος, ειδικά για το συγκεκριμένο σενάριο, οι πιθανότητες μετάβασης στο «νεκρό» στάδιο είναι μηδενικές (εκτός της περίπτωσης που προαναφέρθηκε), ακριβώς λόγω του χαμηλού προσωπικού κόστους που αντιλαμβάνεται κάθε πελάτης, όταν αυτός ανακυκλώνεται συνεχώς μεταξύ διαφόρων εταιρειών ακόμα και από περίοδο σε περίοδο (σενάριο always – a – share).

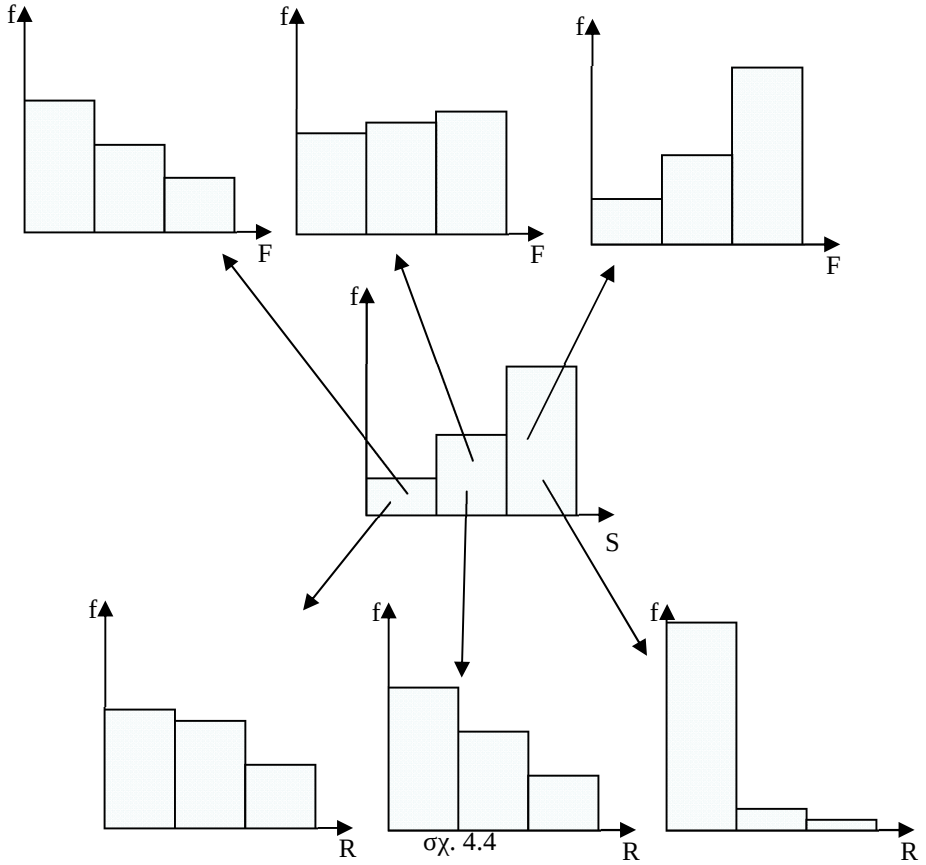
4.2.1.γ <u>Υποθέσεις Σενάριο 2ο: Υψηλά διαφοροποιημένα καταναλωτικά αγαθά</u>

- Όταν η ικανοποίηση είναι χαμηλή (S=1), ο πελάτης συνήθως διαφεύγει (δεν επαναλαμβάνει αγορά), ακόμα και μακροχρόνια (R=3). Κατά συνέπεια η πιθανότητα να μεταβεί σε ανενεργή κατάσταση, θα είναι υψηλότερη, από οποιαδήποτε άλλη πιθανότητα επανάληψης αγοράς. Ο κυριότερος λόγος για τον οποίο αναμένεται να μην είναι μηδενική η πιθανότητα επιστροφής ακόμα και για πολύ χαμηλά επίπεδα ικανοποίησης, είναι κυρίως, το σχετικά χαμηλό κόστος μεταστροφής (switching cost). Επιπρόσθετα, οι μη μηδενικές πλην όμως πολύ μικρές πιθανότητες επανάληψης αγοράς για τα χαμηλότερα επίπεδα ικανοποίησης, μπορούν να αποδοθούν και στην περίπτωση ενός

«εγκλωβισμένου» πελάτη («hostage»). Εντούτοις, ακόμα και για την περίπτωση αυτήν, οι καταστάσεις ενδεικτικές της υψηλής αφοσίωσης (F,M: 1,3>1,2,>2,3>3,3), αναμένεται να εμφανίζουν μηδενικές πιθανότητες μετάβασης (προς αυτές).

- Τα υψηλότερα επίπεδα ικανοποίησης (S=3), συνιστούν επανάληψη αγοράς και αποτελούν αναγκαία και ικανή συνθήκη, λόγω του υψηλού βαθμού διαφοροποίησης των αγαθών (εξιδανικευμένα αγαθά). Κατά συνέπεια, θα είναι πιο πιθανό ο πελάτης να επαναλαμβάνει αγορά (σε σχέση πάντα και με τον παρατηρούμενο όγκο συναλλαγών), παρά να διαφεύγει.
- Οι καταστάσεις υψηλής κατανάλωσης οι οποίες είναι κι ενδεικτικές (έως έναν βαθμό) της αφοσίωσης του πελάτη (για παράδειγμα F,M:1,2 1,3), φέρουν σημαντικά μεγαλύτερες πιθανότητες εμφάνισης σε σύγκριση με το προηγούμενο σενάριο.
- Για μέτρια επίπεδα ικανοποίησης, ο πελάτης μπορεί να επαναλαμβάνει αγορά, κυρίως σε ότι αφορά τα χαμηλότερα ή μέσα επίπεδα κατανάλωσης (όχι για τα επίπεδα που δηλώνουν παράλληλα και αφοσίωση), καθώς ενδέχεται κατά μία περίπτωση το αγαθό να αντιστοιχεί κατά τω πλησιέστερω στις ανάγκες του και ειδικότερα καθώς αυξάνει το R.
- Σε ότι αφορά την ικανοποίηση γενικότερα, λόγω της υψηλής διαφοροποίησης των αγαθών, ισχύουν τα εξής:

$$P(S_t = 3 \mid S_{t-1} = 1) = 0 \text{ και } P(S_t = 1 \mid S_{t-1} = 3) \geq 0$$



σχ. 4.4

4.2.1.δ Υποθέσεις Σενάριο 3ο: Χαμηλά διαφοροποιημένα διαρκή αγαθά

- Η παράμετρος που συνιστά σημαντικές διαφοροποιήσεις, είναι αυτή του χρόνου. Κατά συνέπεια, είναι πολύ δύσκολο, ο έκαστος πελάτης, να πραγματοποιήσει αγορά 2 συνεχόμενες περιόδους. Οπότε είναι συνήθως πιο πιθανή η μετάβαση από μία κατάσταση αγοράς τουλάχιστον μέσης ή υψηλής κατανάλωσης σε μία κατάσταση μη επανάληψης. Δηλαδή:

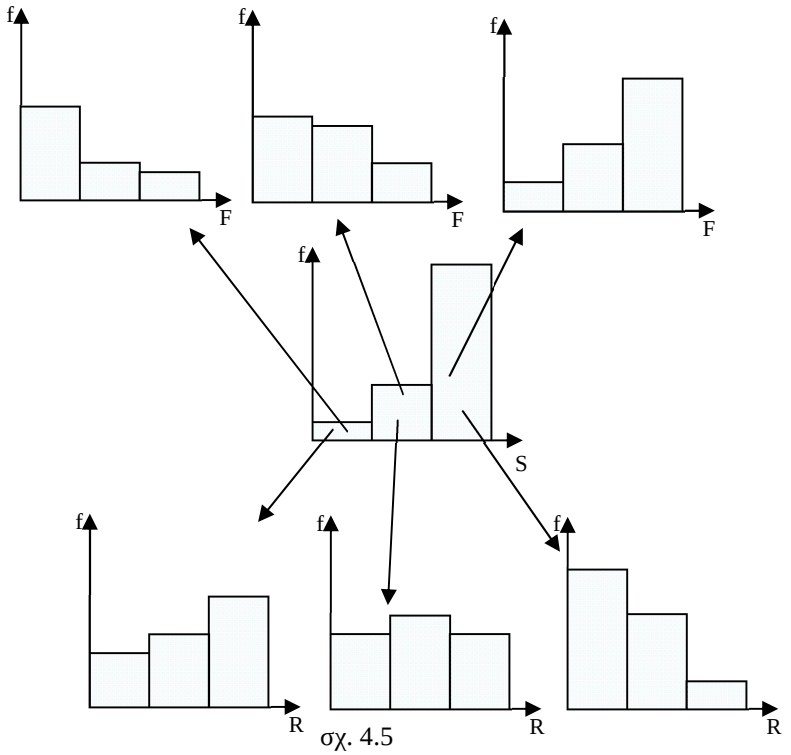
$$P(R_t = 2 \mid R_{t-1} = 1) >> P(R_t = 1 \mid R_{t-1} = 1)$$

- Η μετάβαση από μέτριες και υψηλές καταστάσεις κατανάλωσης προς επίσης μέτριες ή υψηλές εντός 2 περιόδων, είναι αδύνατες ή σχεδόν αδύνατες για 2 συνεχόμενες περιόδους επανάληψης αγοράς. Η πιθανότητα αυτή αναμένεται να αυξάνει, καθώς αυξάνει και το R.

- Λόγω της χαμηλής διαφοροποίησης, η αφοσίωση αναμένεται χαμηλή (όπως και στο1ο σενάριο). Κατά συνέπεια, η υψηλή ικανοποίηση, είναι αναγκαία όχι όμως και ικανή συνθήκη για αγορά και επανάληψη αγοράς.

- Για τα υψηλότερα επίπεδα ικανοποίησης και κατά την παρέλευση μεγάλου χρονικού διαστήματος κατά το οποίο ο πελάτης δεν έχει πραγματοποιήσει αγορά (R=3), είναι πολύ πιθανότερη η επανάληψη αγοράς, έναντι της διαφυγής του πελάτη.

- Αντίθετα, όταν τα επίπεδα ικανοποίησης είναι χαμηλότερα (S=1), είναι πολύ πιθανότερη η διαφυγή του πελάτη (μόνιμα → μοντέλο: lost – for – good), ενώ εμφανίζονται σημαντικές πιθανότητες επανάληψης αγοράς (για τα χαμηλότερα επίπεδα S), μόνον μακροχρόνια (R=3). Ο λόγος είναι ότι το συγκεκριμένο σενάριο, αν και περιγράφει μία αγορά χαμηλής διαφοροποίησης (υψηλού ανταγωνισμού), λόγω του είδους των αγαθών στα οποία αναφέρεται (διαρκή), συνιστά σημαντικά κόστη (switching costs - involvement) για κάθε πελάτη (τα διαρκή αγαθά λαμβάνονται ως επενδύσεις π.χ. ηλεκτρικές συσκευές).



σχ. 4.5

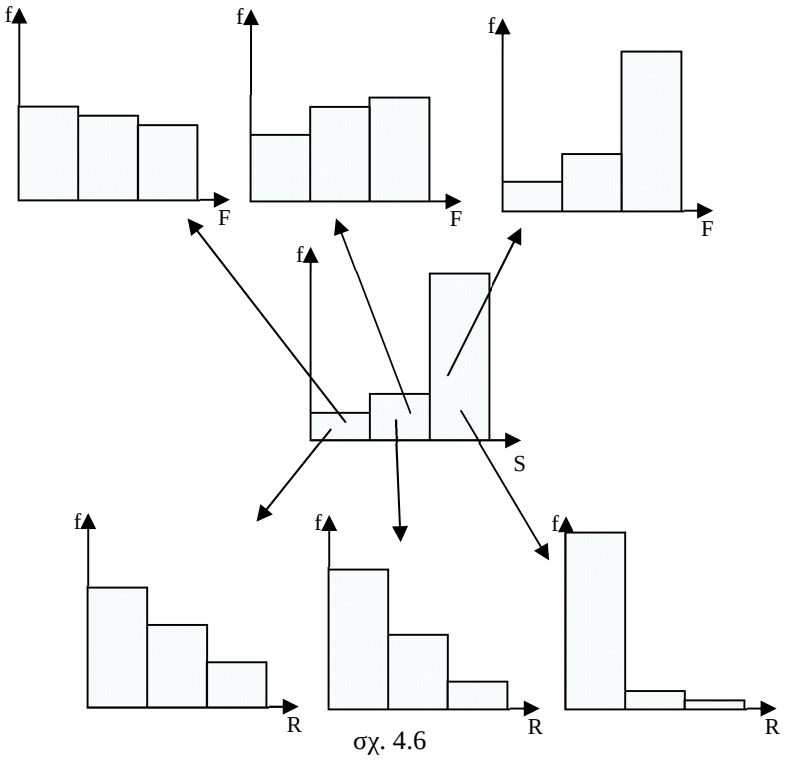
4.2.1.ε <u>Υποθέσεις Σενάριο 4ο: Υψηλά διαφοροποιημένα διαρκή αγαθά</u>

- Επειδή το κόστος μεταστροφής είναι ιδιαίτερα υψηλό, ο πελάτης έχει μεγάλη πιθανότητα να επαναλάβει αγορά, ακόμα και για μέτρια επίπεδα ικανοποίησης.

- Οι αρχικές υποθέσεις περί επιφυλακτικότητας κι επαλήθευσης, δεν ισχύουν, ακριβώς λόγω του υψηλού switching cost. Κατά συνέπεια, τα υψηλά επίπεδα ικανοποίησης, είναι αναγκαία συνθήκη για επανάληψη αγοράς, αλλά και ικανή.
- Το παρατηρηθέν επίπεδο κατανάλωσης την τρέχουσα περίοδο, θα καθορίζει και τις πιθανότητες μετάβασης αλλά και τις δυνατές καταστάσεις, την επόμενη περίοδο. Κατά συνέπεια, θα ισχύει:

$$P((122S_i)_t \mid (123S_i)_{t-1}) < P((122S_i)_t \mid (111S_i)_{t-1})$$

- Επίσης, για $R \leq 2$, η πιθανότητα ο πελάτης να μεταβεί σε καταστάσεις κατανάλωσης χαμηλότερου «μέσου κόστους» (ανά συναλλαγή, όπως αυτό παρουσιάστηκε στην αρχή (F.M: 1.1, 2.1, 2.2, 3.2, 3.3), είναι πιθανότερο να παρατηρηθούν, προερχόμενες από χαμηλές καταστάσεις κατανάλωσης της προηγούμενης περιόδου.



σχ. 4.6

4.2.2 <u>Σχεδίαση του πίνακα μετάβασης</u>

Η κεντρική ιδέα για τη γέννηση των τυχαίων αριθμών – πιθανοτήτων, οι οποίες θα δομούσαν έκαστο πίνακα μετάβασης (κάθε σεναρίου), ήταν η κωδικοποίηση των στοιχείων των πινάκων αυτών με τρόπο τέτοιο ώστε να καθίστατο δυνατή η περίληψη και περιγραφή κάθε ενεργού περιορισμού, κανόνων και υποθέσεων (όπως αυτοί

περιεγράφησαν παραπάνω), στον οποίο θα μπορούσε να υπόκειται το κάθε τέτοιο στοιχείο.

4.2.2.α Η κωδικοποίηση των στοιχείων των πινάκων

Η κωδικοποίηση, πραγματοποιήθηκε, σε 2 βασικά στάδια. Αρχικά, τελέστηκε ομαδοποίηση των διαφόρων στοιχείων (κατά σειρά πίνακα) σε ομάδες, αφού πρώτα εξαλήφθηκε η συμπεριφορική παράμετρος της ικανοποίησης από τις δυνητικές μελλοντικές καταστάσεις – στήλες (βλ. σχ. 4.7). ο κύριος λόγος είναι η αποφυγή προβλημάτων συγκρισιμότητας μεταξύ των διαφόρων στοιχείων. Κατά τον τρόπο αυτόν οι στήλες κάθε πίνακα ομαδοποιήθηκαν πλέον, βάσει των διαφόρων επιπέδων των RFM, έτσι ώστε κάθε στοιχείο να αντιστοιχεί μοναδικά σε μία ομάδα, ενδεικτική της αναμενόμενης πιθανότητάς του και βάσει της παρατηρηθείσας καταστάσεως που περιέγραφε έκαστη γραμμή (ξεχωριστά). Με τον τρόπο αυτόν, τα επιμέρους στοιχεία, κατατάχθηκαν σε 5 ομάδες σύμφωνα με την παρακάτω κατηγοριοποίηση:

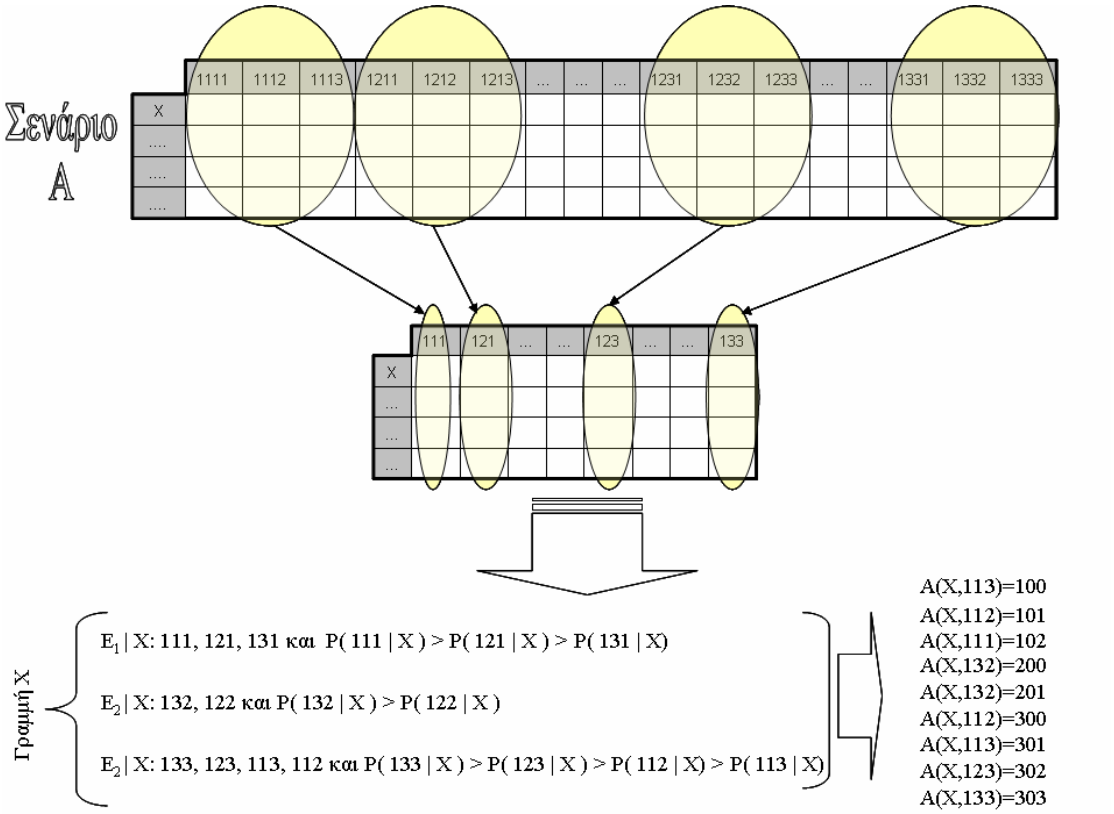
- E_1: Υψηλή αναμενόμενη πιθανότητα εμφάνισης.
- E_2: Μέτρια αναμενόμενη πιθανότητα εμφάνισης.
- E_3: Χαμηλή αναμενόμενη πιθανότητα εμφάνισης.
- 0: Τα στοιχεία που εμφανίζουν μηδενική πιθανότητα
- e_0: Τα στοιχεία τα οποία εμφανίζουν πολύ μικρή πιθανότητα παρατήρησης, σχεδόν μηδενική πλην όμως θετική. Η τιμή αυτή, ορίστηκε ως: $e_0 = 10^{-3}$, λαμβάνοντας υπόψη και το σύνολο των ενεργών στοιχείων κατά γραμμή του πίνακα, τα οποία συνθέτουν τη συνολική πιθανότητα μετάβασης στην επόμενη περίοδο του μοντέλου. Το σύνολο των στοιχείων αυτών, αναμένεται να μην ξεπερνάει τα 10x3[50] (για κάθε σενάριο).

Εν συνεχεία πραγματοποιήθηκε ταξινόμηση των στοιχείων αυτών εντός των ομάδων (στις οποίες νωρίτερα τοποθετήθηκαν), σε αύξουσα σειρά, ώστε η γέννηση των «τυχαίων» πιθανοτήτων, να ακολουθούσε τους περιορισμούς που έθεταν από κοινού η κατάταξη και ταξινόμηση των στοιχείων αυτών.

[50] Οι 10 βασικές καταστάσεις κατανάλωσης (F,M), οι οποίες κάθε μία είναι δυνατόν να αναλυθεί στις 3 διαφορετικές διαστάσεις ικανοποίησης.

Κατόπιν ολοκλήρωσης της διαδικασίας αυτής, οι διάφοροι πίνακες «μετάβασης», είχαν λάβει πλέον μία πρώιμη μορφή, προ γεννήσεως των επιμέρους πιθανοτήτων (βλ. παράρτημα/ Αλγόριθμοι/ Δημιουργία πινάκων μετάβασης). Το παρακάτω σχεδιάγραμμα (σχ. 4.7), είναι περιγραφικό του τρόπου κωδικοποίησης των διαφόρων στοιχείων, ανά γραμμή. Συνοπτικά, μπορεί να ειπωθεί πως το πρώτο νούμερο του κάθε κωδικοποιημένου στοιχείου, δεικνύει την ομάδα στην οποία ανήκει, ενώ τα υπόλοιπα, αντιστοιχούν στη θέση την οποία καταλαμβάνει (εντός της ομάδας αυτής), εφόσον τοποθετηθούν με αύξουσα σειρά εντός των διαφόρων ομάδων.

Σχηματισμός και κωδικοποίηση ενδιάμεσου πίνακα (§ 4.2.2.γ)



σχ. 4.7

4.2.2.β <u>Η επιλογή της κατανομής</u>

Η επιλογή της κατανομής υπό την οποία θα αναπαράγονταν οι επιμέρους πιθανότητες των διαφόρων στοιχείων των πινάκων μετάβασης, έγινε με γνώμονα την ευκολία χρήσης και προσαρμοστικότητας της στα ποικίλα σενάρια. Για τω λόγω

αυτόν, επελέγη η κατανομή Βήτα (Beta[51]). Η κατανομή αυτή, αποτελεί μία εκδοχή της διωνυμικής κατανομής, θεωρώντας ότι περιγράφει α-1 ανεξάρτητα γεγονότα, με πιθανότητα p (κατανεμημένη ομοιόμορφα) και β-1 με πιθανότητα 1-p (ομοίως).

Η κυριότερη ιδιαιτερότητα της συγκεκριμένης κατανομής έγκειται στο γεγονός ότι φέρει 2 ανεξάρτητες παραμέτρους (α, β με $\alpha, \beta > 0$), για διάφορες τιμές των οποίων είναι δυνατό να παραχθούν ποικίλες διαφορετικές κατανομές, γνωστές (όπως κανονική, ομοιόμορφη) και μη (διαφορετικών ιδιοτήτων, όπως ασυμμετρία κ.α.), ενώ το εύρος τιμών που μπορεί να λάβει η συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής, η οποία περιγράφεται από τη συγκεκριμένη κατανομή, προσδιορίζεται στο διάστημα [0, 1].

Ειδικότερα, σχετικά με τη συγκεκριμένη κατανομή, μπορούν να παρατηρηθούν τα εξής στοιχεία:

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} * x^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

όπου:

- α, β: οι τιμές των παραμέτρων της κατανομής *Βήτα*, με $\alpha, \beta > 0$
- Β(α, β): η τιμή της κατανομής Β, για τις παραμέτρους α, β για την οποία ισχύει:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{a-1} * (1-x)^{\beta-1} dx$$

Μέση (αναμενόμενη) τιμή:

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Διακύμανση:

$$Var(x) = \frac{\alpha * \beta}{(\alpha + \beta)^2 * (\alpha + \beta + 1)}$$

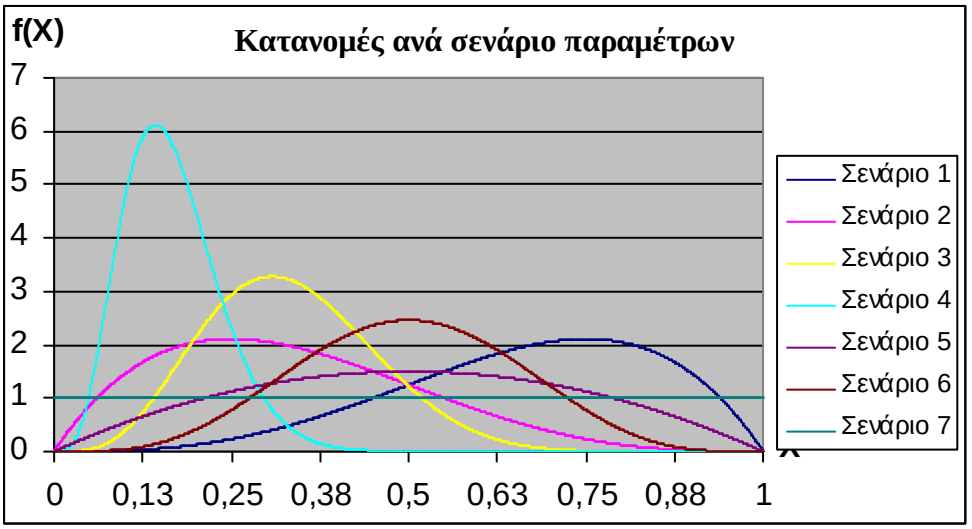
Στην παρούσα εφαρμογή, εξετάστηκε η συμπεριφορά των πινάκων μετάβασης (π.χ. ως προς τους μέσους χρόνους απορρόφησης), αλλά και οι επιπτώσεις στο CLV (μέγιστο CLV, ή αναμενόμενο ανά περίοδο), για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων α και β της κατανομής Βήτα. Οι διάφορες αυτές τιμές, συνέστησαν ένα πλήθος νέων

[51] Βλ. *Papoulis* A. *"Probability, random variables and stochastic processes"*. McGraw-Hill. 1984.

σεναρίων (ως προς την εν δυνάμει συμπεριφορά των συμπεριφορικών μεταβλητών του μοντέλου – RFMS), υπό τα οποία θα εξετάζονταν κάθε φορά τα βασικά σενάρια που αφορούσαν στο είδος των αγορών. Ο επόμενος πίνακας (πίνακας 4.1) περιλαμβάνει συνοπτικά τα σενάρια ως προς τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β, καθώς και τις ιδιότητες αυτών. Το σχήμα 4.8 περιλαμβάνει τα συγκεντρωτικά διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας (f(X)) για κάθε σενάριο ως προς τις παραμέτρους της κατανομής Βήτα.

πίνακας 4.1: *Στοιχεία παραμέτρων α και β κατανομής Βήτα*

	Παράμετροι κατανομών		Στοιχεία κατανομών		
Σενάριο	α	β	Μέσος όρος	Διακύμανση	Ασυμμετρία
1	2	4	0,33	0,03	0,50
2	4	2	0,67	0,03	-0,50
3	5	10	0,33	0,01	0,59
4	5	25	0,17	0,00	1,25
5	2	2	0,50	0,05	0,00
6	5	5	0,50	0,02	0,00
7	1	1	0,50	0,08	0,00



σχ. 4.8

- Σενάρια 1, 3, 4: Αφορά σε καταναλωτή, ο οποίος φέρεται να έχει κάποια πρότυπα ποιότητας (το ύψος των οποίων μπορεί να καθοριστεί από την ασυμμετρία της κατανομής αυτής – όσο μεγαλύτερη η τιμή της τόσο πιο υψηλά τα πρότυπα ποιότητας). Κατά συνέπεια, αν κάποιο αγαθό δεν εμφανίζει τις βασικές αυτές ιδιότητες που περιγράφονται από το πρότυπο του καταναλωτή, δε γίνεται εύκολα αρεστό και κατά συνέπεια οι πιθανότητες

παρατήρησης ενός οποιουδήποτε γεγονότος βαίνουν προς χαμηλότερες τιμές (υψηλή απαιτητικότητα)

- Σενάριο 2ο: Αντίθετα με τα προηγούμενα, η κατανομή που περιγράφεται από το συγκεκριμένο σενάριο, αφορά σε άτομα με χαμηλή απαιτητικότητα (ως προς τα πρότυπα ποιότητας).
- Σενάρια 5, 6: Αφορά σε έναν καταναλωτή, χωρίς πρότυπα ποιότητας στην καταναλωτική του συμπεριφορά. Η διακύμανση της κατανομής ορίζει την πιθανότητα εμφάνισης των διαφόρων ενδεχομένων.
- Σενάριο 7ο: Αφορά σε έναν καταναλωτή, ο οποίος δεν εμφανίζει καμία δέσμευση στην καταναλωτική συμπεριφορά του. Κατά συνέπεια, η επανάληψη αγοράς, εξαρτάται από αστάθμητους παράγοντες.

4.2.2.γ Ο «ενδιάμεσος» πίνακας μετάβασης

Για τη γέννηση των πιθανοτήτων των διαφόρων στοιχείων, αρχικά χρησιμοποιήθηκαν 2 αλγόριθμοι (βλ. παράρτημα/ Αλγόριθμοι/ Αλγόριθμος COD1 και Mile1). Ο πρώτος (COD1) σκοπό είχε τη δημιουργία των επιθυμητών τιμών των στοιχείων, ενώ ο δεύτερος (Mile1) επαναλάμβανε την πρώτη αλγοριθμική διαδικασία, όσες φορές του ζητούταν[52], λαμβάνοντας κάθε φορά τη μέση τιμή του έκαστου στοιχείου, όπως αυτή προέκυπτε από κάθε επανάληψη. Σκοπός, η εξάλειψη παρατηρήσεων - τιμών που θα αποδίδονταν σε τυχαιότητα και θα δημιουργούσαν μεροληψίες.

Η ολοκλήρωση των 2 αυτών αλγοριθμικών διαδικασιών παρέχει ως αποτέλεσμα έναν «ενδιάμεσο» πίνακα μετάβασης, ο οποίος στη συνέχεια θα επεξεργαστεί περαιτέρω πριν καταλήξει στην τελική του μορφή.

Οι βασικές είσοδοι τώρα για τον πρώτο αλγόριθμο, είναι οι παράμετροι της κατανομής Beta (α, β: οι οποίες προκαθορίζονταν), καθώς και ο κωδικοποιημένος πίνακας του έκαστου σεναρίου (h). Ο δεύτερος αλγόριθμος χρησιμοποιεί ως κύρια είσοδο τον επιθυμητό αριθμό επαναλήψεων (n), ενώ παράλληλα ορίζονται και οι παράμετροι της κατανομής (a, b), αλλά και ο κωδικοποιημένος πίνακας μετάβασης (h), ώστε να αποδώσει ο αλγόριθμος αυτός τις συγκεκριμένες τιμές στον πρώτο αλγόριθμο (ο οποίος τρέχει στο εσωτερικό του δευτέρου).

[52] Εμπειρικά, επελέγη ως άριστος αριθμός επαναλήψεων οι 25 (n=25), καθώς τα αποτελέσματα δεν εμφανίζουν σημαντικές διαφοροποιήσεις για μεγαλύτερες τιμές του n.

4.2.2.δ Τα αλγοριθμικά βήματα

Βήμα 1ο: Ο αρχικός πίνακας, διασπάται σε τέσσερις ίδιων διαστάσεων, όπου ο καθένας φέρει στοιχεία μόνο μίας ομάδας, με τα λοιπά στοιχεία που δεν ανήκουν στην ομάδα αυτήν, να λαμβάνουν την τιμή 0. Τα στοιχεία τα οποία εξ υποθέσεως είναι μηδενικά, ή έχουν λάβει την τιμή e_0, συγκεντρώνονται σε έναν πίνακα, εφόσον οι τιμές τους είναι προκαθορισμένες (για το συγκεκριμένο πίνακα, δε θα ζητηθεί να αναπαραχθεί καμία απολύτως τιμή).

Βήμα 2ο: Τα στοιχεία του κάθε νέου πίνακα, τοποθετούνται κατά γραμμή σε αύξουσα σειρά. Για παράδειγμα, η γραμμή του παραπάνω πίνακα (πίνακας 4.7) για την 3η ομάδα (χαμηλή πιθανότητα εμφάνισης), θα λάβει την εξής μορφή:

Γραμμή Χ	0	0	0	…	…	…	0	0	300	301	302	303

Βήμα 3ο: Για κάθε μη μηδενικό στοιχείο (των πινάκων των τριών βασικών ομάδων), θα γεννηθεί μία πιθανότητα υπό τις παραμέτρους που έχουν επιλεγεί και εντός των ορίων τα οποία προκαθορίζονται από την ομάδα στην οποία ανήκει κάθε πίνακας. Τα όρια αυτά κατά συνέπεια, προσδιορίζουν την ομαδοποίηση των επιμέρους πιθανοτήτων (χαμηλή, μέση και υψηλή πιθανότητα), στους κωδικοποιημένους πίνακες μετάβασης και συνάμα, το χώρο μέσα στον οποίο θα γεννηθούν οι πιθανότητες αυτές για κάθε αντίστοιχη ομάδα (πιθανότητας). Η ομαδοποίηση που ακολουθήθηκε, είναι η εξής:

- e_i, u_i: κατώτερο και ανώτερο όριο της ομάδας i
- Υψηλή πιθανότητα: i=1
- Μέτρια πιθανότητα: i=2
- Χαμηλή πιθανότητα i=3

Υποκείμενα στους εξής περιορισμούς:

$$e_i = u_{i+1} + \bar{e} \text{ με } +,\ u_4 = e_0 = 10^{-3},\ \ \bar{e} = 10^{-17} \text{ και } u_1 = 1$$

Η επιλογή των ορίων αυτών, έγινε με τη βοήθεια της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της Beta. Καταρχάς, το ανώτερο όριο της τρίτης ομάδας u_3, προσδιορίζεται με τρόπο τέτοιο, ώστε κατόπιν της κανονικοποίησης των γεννημένων αριθμών, η τιμή - πιθανότητα κάθε στοιχείου όπου θα ανήκει στην τρίτη ομάδα, να

είναι ασφαλώς μεγαλύτερη από την ελάχιστη θετική πιθανότητα (e_0), όποια και αν οριστεί η τιμή της. Για τω λόγω αυτόν, το u_3 προσδιορίζεται με τον εξής τρόπο.

$$e_{3,Tr} \geq e_0 * sum(\max(Tr(j,:)))$$

όπου:

- $e_{3,Tr}$: Το κατώτερο όριο για το κάθε Tr σενάριο, με $Tr = \{$ ´ ´ ´ ´ .
- Tr: ο πίνακας μετάβασης με τις γεννημένες τιμές, προ κανονικοποιήσεως, για κάθε σενάριο.
- $sum(\max(Tr(j,:)))$: το μέγιστο άθροισμα όλων των j γραμμών του πίνακα Tr.

Επιλύοντας μαθηματικά την παραπάνω σχέση για τη συγκεκριμένη έρευνα, θα έχουμε:

$$sum(\max(Tr(j,:))) = (\max(Tr(j,:) > 0)) * \max(Tr(j,i))$$

$$\text{με} \quad \max(Tr(j,:) > 0) = 10 \text{ και } \max(Tr(j,i))$$

$$\text{άρα: } e_{3,I} \geq 0.001*10*1 \rightarrow e_{3,I} \geq 0.01$$

Κατά ακολουθία, για τον προσδιορισμό των υπολοίπων ορίων (άνω και κάτω), οι ομάδες προσδιορίζονται έτσι, ώστε το 33% των υπολοίπων παρατηρήσεων της κατανομής $f(x)$ (όπως αυτή παρουσιάστηκε παραπάνω), δηλαδή για $x \in [e_3, 1]$, να μένει κάτω από το ανώτερο όριο της 3ης ομάδας (u_3) και το ανώτερο όριο της 2ης ομάδας (u_2) να αφήνει κατά αντιστοιχία από κάτω του το 66% των παρατηρήσεων.

<u>Βήμα 4ο</u>: Τα νέα στοιχεία των διαφόρων πινάκων, τα οποία φέρουν πλέον τις «ενδεικτικές» τιμές των πιθανοτήτων μετάβασης (προς τις βασικές καταστάσεις RFM), επανατοποθετούνται στις αρχικές τους θέσεις και στη συνέχεια, οι τέσσερις πίνακες προστίθενται (κατά στοιχείο) επανασυνθέτοντας τον πίνακα μετάβασης, ο οποίος αποτελεί τον αντικειμενικό σκοπό αυτής της αλγοριθμικής διαδικασίας.

<u>Βήμα 5ο</u>: Στο τελευταίο αυτό βήμα, οι διάφορες γεννημένες πιθανότητες, σταθμίζονται, έτσι ώστε κάθε στήλη να αθροίζει στη μονάδα. Με την ολοκλήρωση του σταδίου αυτού, ο τελικός πίνακας που λαμβάνεται (μέσω και του αλγορίθμου Mile1), αποτελεί τον «ενδιάμεσο» πίνακα μετάβασης του κάθε σεναρίου (καθώς ακόμα απουσιάζει η συμπεριφορική μεταβλητή της ικανοποίησης).

4.2.2.ε Η προσθήκη της ικανοποίησης στον ενδιάμεσο πίνακα μετάβασης

Ο πίνακας που έχει ληφθεί μέχρι αυτή τη στιγμή (ενδιάμεσος), δε μπορεί ακόμα να χρησιμοποιηθεί αυτούσιος για την λήψη των επιθυμητών αποτελεσμάτων. Ο λόγος, όπως προαναφέρθηκε, είναι η απουσία της μεταβλητής της ικανοποίησης. Για την ανάλυση του ενδιάμεσου πίνακα, στον τελικό πίνακα μετάβασης (για κάθε σενάριο), χρησιμοποιήθηκαν 2 νέες αλγοριθμικές διαδικασίες (βλ. παράρτημα Random, final1). Η κεντρική ιδέα πίσω από τις 2 αυτές διαδικασίες, είναι η ανάλυση κάθε στοιχείου του «ενδιάμεσου» πίνακα σε ένα οριζόντιο διάνυσμα διαστάσεων $1 \otimes 3$, αφού πρώτα έχει προσδιοριστεί η αναμενόμενη ένταση πιθανότητας για κάθε επιμέρους διάσταση ικανοποίησης, βάσει και του στοιχείου που περιγράφει κάθε γραμμή και στήλη του «ενδιάμεσου» πίνακα. Για το λόγω αυτόν κάθε βασικό σενάριο (βάσει μορφής αγοράς), κωδικοποιήθηκε σε δύο νέους πίνακες (h, p). Ο πρώτος (h) περιελάμβανε την αναμενόμενη κατανομή της «έντασης» της πιθανότητας κάθε στοιχείου του «ενδιάμεσου» πίνακα, καθώς αυτό θα αναλυόταν πλέον (οριζόντια) σε τρία νέα στοιχεία (που θα αντιπροσώπευαν τις διαστάσεις της ικανοποίησης), ενώ ο δεύτερος (p) την ταξινόμηση των στοιχείων αυτών (κατά φθίνουσα σειρά), εντός του – κατά στοιχείο του ενδιάμεσου πίνακα – διανύσματος. Για παράδειγμα, έστω ότι εξεταζόταν από τον ενδιάμεσο πίνακα η παρακάτω πιθανότητα μετάβασης:

$$P_X(121 \mid 2112) = a$$

όπου:

- X: το σενάριο δομής της αγοράς
- $P(121 \mid 2112) = a$: η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση R=2, F=1, M=1 και S=2 στην κατάσταση R=1, F=2 και M=1, με $a \in (0,1)$

Το νέο ζητούμενο, για να διαμορφωθεί ο τελικός πίνακας μετάβασης, είναι πλέον ο προσδιορισμός των εξής πιθανοτήτων:

- $P(1211 \mid 2112) = a * x$
- $P(1212 \mid 2112) = a * y$
- $P(1213 \mid 2112) = a * z$

με $x, y, z \in [0,1]$ και $x + y + z = 1$

Σύμφωνα με τις βασικές υποθέσεις των σεναρίων, είχε γίνει η παραδοχή ότι για κάθε σενάριο, είναι πάντα πιο πιθανό να παρατηρηθεί το ίδιο «επίπεδο» ικανοποίησης

μεταξύ διαδοχικών περιόδων, ενώ για τα υπόλοιπα επίπεδα ικανοποίησης, είναι πιθανότερο να μειωθεί η παρατηρούμενη πιθανότητά, παρά να αυξηθεί. Κατά συνέπεια, η πρώτη πληροφορία που μπορούσε να γίνει γνωστή, ήταν η ταξινόμηση των πιθανοτήτων αυτών. Έτσι θα είχαμε:

$$P(1212\,|\,2112) > P(1211\,|\,2112) > P(1213\,|\,2112) \rightarrow y > x > z$$

και τα νέα αυτά στοιχεία θα εισέρχονταν σε ένα διάνυσμα διαστάσεων $1 \otimes 3$ κωδικοποιημένα ως εξής:

$$v_{(121\,|\,2112)} = \{2,1,3\} \text{ και } p(v_{(121\,|\,2112)}(1,1)) = 2$$

Γεγονός που δεικνύει ότι το στοιχείο 1,1 του διανύσματος $v_{(121\,|\,2112)}$ στον πίνακα p, αναμενόταν να έχει τη δεύτερη μεγαλύτερη πιθανότητα μετάβασης, εντός του διανύσματος αυτού. Πρέπει εδώ να σημειωθεί, ότι εάν κάποιο από τα στοιχεία, ή και περισσότερα αναμενόταν να είναι μηδενικό, τότε λάμβανε την τιμή μηδέν. Με τον τρόπο αυτόν ο νέος πίνακας (p) είχε πλέον τριπλάσιο αριθμό στηλών, σε σύγκριση με κάθε «ενδιάμεσο». Δηλαδή, θεωρείτο πως κάθε στοιχείο των «ενδιάμεσων» πινάκων, αποτελούσε ένα σύνθετο στοιχείο, μία σύνθετη πιθανότητα. Πέραν τούτου, δε μπορούσε να καταστεί εύκολα γνωστό το πόσο μεγαλύτερη ή μικρότερη θα ήταν η κάθε επιμέρους πιθανότητα εντός κάθε διανύσματος v_i. Για τω λόγω αυτόν (όπως προαναφέρθηκε), κάθε «ενδιάμεσος» πίνακας κωδικοποιήθηκε περαιτέρω, ώστε κάθε στοιχείο του να φέρει μία ενδεικτική κατανομή της «<u>έντασης</u>» της πιθανότητας των επιμέρους στοιχείων του διανύσματος v_i. Ο παρακάτω πίνακας (πίνακας 4.2) παρουσιάζει συνοπτικά την κωδικοποίηση που ακολουθήθηκε.

πίνακας 4.2: *Πιθανότητες ταξινομημένων στοιχείων για την προσθήκη της ικανοποίησης στον κάθε ενδιάμεσο πίνακα*

	Πιθανότητες ταξινομημένων στοιχείων		
Κωδ.	1	2	3
0	0	0	0
1	b	m	s
2	b	m	m
3	b	s	s
4	b	b	b
5	b	b	m
6	b	b	s
7	b	b	0
8	b	m	0
9	b	s	0

Για την παραπάνω κωδικοποίηση, θεωρήθηκε ότι τα b, m, s, δεικνύουν την ένταση της πιθανότητας μετάβασης για τα στοιχεία που σημαίνονταν με 1, 2, 3 στον πίνακα p, καθορίζοντας τα όρια υπό τα οποία θα γεννιόταν κάθε τέτοια πιθανότητα. . Έτσι, είχαμε:

- b: υψηλή πιθανότητα *(big)→(high)*
- m: μέτρια πιθανότητα *(medium)→(medium)*
- s: χαμηλή πιθανότητα *(small)→(low)*

Με τα όρια να προσδιορίζονται όπως ακριβώς και κατά την γέννηση των τιμών του ενδιάμεσου πίνακα. Έτσι, εάν ένα στοιχείο $X_{i,j}$ (με i γραμμή και j στήλη ενδιάμεσου πίνακα για το σενάριο X) έφερε την τιμή 0, θεωρούταν πως η κατανομή της έντασης της πιθανότητας του, ήταν ομοιόμορφη και κατά συνέπεια τα x,y,z λάμβαναν την τιμή $\frac{1}{3}$. Ακόμα και αν $X_{i,j}$ είχε τιμή μηδέν.

Παρόμοια, εάν $h(X_{i,j})=1$, τότε για παράδειγμα το στοιχείο του διανύσματος v_i, το οποίο θα είχε τιμή 1, θα λάμβανε υψηλή πιθανότητα μετάβασης, το στοιχείο του διανύσματος v_i, το οποίο θα είχε τιμή 2, θα λάμβανε μέτρια πιθανότητα μετάβασης και το στοιχείο του διανύσματος v_i, το οποίο θα είχε τιμή 3, θα λάμβανε χαμηλή πιθανότητα μετάβασης. Οι τιμές αυτές επίσης εξαρτόνταν από τις τιμές των παραμέτρων της κατανομής Βήτα υπό τις οποίες είχε αρχικά γεννηθεί ο κάθε ενδιάμεσος πίνακας, αλλά και από τις ιδιότητες τις οποίες σύστηνε κάθε βασικό σενάριο. Για τω λόγω αυτόν, ως είσοδοι για τις συγκεκριμένες αλγοριθμικές διαδικασίες (βλ. παράρτημα/ Αλγόριθμοι/ Random, final1), πέραν των νέων κωδικοποιημένων πινάκων αλλά και του κάθε ενδιάμεσου πίνακα, χρησιμοποιούνταν και οι παράμετροι α και β της κατανομής Βήτα, οι οποίες είχαν χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του κάθε «ενδιάμεσου» πίνακα.

Με την ολοκλήρωση και αυτών των αλγοριθμικών διαδικασιών, πλέον κάθε πίνακας μετάβασης είχε λάβει την τελική του μορφή, ενώ χαρακτηριζόταν από 2 βασικά στοιχεία: 1) τις τιμές των παραμέτρων της κατανομής Βήτα (α, β)[53] και 2) το σενάριο που περιέγραφε τη δομή της αγοράς (Α, Β, Γ, Δ). Με τον τρόπο αυτόν, δημιουργήθηκαν 28 εν δυνάμει διαφορετικοί πίνακες μετάβασης προς ανάλυση.

[53] Σε ένα σύνολο 7 διαφορετικών σεναρίων, όπως περιγράφει και ο πίνακας 4.1.

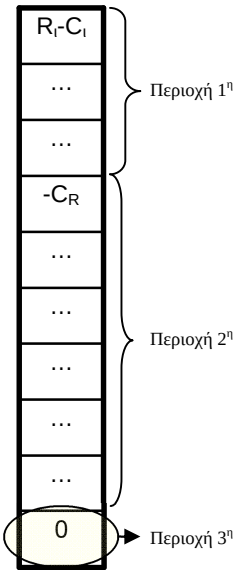
4.3 Σχεδίαση του διανύσματος επιβράβευσης (R)

Το διάνυσμα επιβράβευσης (reward vector), το οποίο αποτελεί ένα από τα αναπόσπαστα και σημαντικότατα τμήματα του CLV, κατ' ουσία αποτελεί την αντιστοίχιση της καταναλωτικής κατάστασης του πελάτη, με το «οικονομικό όφελος» το οποίο ο ίδιος (εξαιτίας της παρατηρούμενης κατάστασης στην οποία βρίσκεται ή ενδέχεται να βρίσκεται σε κάθε περίοδο του μοντέλου) αποφέρει στην εταιρία. Μέσω του διανύσματος αυτού, καθίσταται πλέον δυνατό να προσδιοριστεί η αναμενόμενη χρηματική αξία του έκαστου πελάτη (σταθμισμένη βάσει της πιθανότητας – πίνακα μετάβασης να βρεθεί σε κάθε τέτοια κατάσταση) για κάθε μελλοντική χρονική στιγμή.

4.3.1 Η δομή του διανύσματος επιβράβευσης

Το διάνυσμα επιβράβευσης μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι αποτελείται από 3 βασικές περιοχές. Οι περιοχές αυτές αντιστοιχούν γενικά, στην επανάληψη ή μη αγοράς από τον έκαστο πελάτη, στην τρέχουσα περίοδο. Κατά συνέπεια, προσδιορίζονται σε αντιστοιχία με την τιμή της μεταβλητής R (κατά γραμμή) στον πίνακα μετάβασης. Έτσι, για τις καταστάσεις οι οποίες δηλώνουν επανάληψη αγοράς (R=1: ενεργός πελάτης), οι αντίστοιχες γραμμές του διανύσματος επιβράβευσης, αναμένεται να είναι μη αρνητικές (εντούτοις αναφέρεται ότι κάτι τέτοιο εξαρτάται εξίσου από την ένταση των αγορών του πελάτη για την τρέχουσα περίοδο και το κόστος – μεταβλητό, κόστος απόκτησης και διατήρησης – που αντιστοιχεί ανά πελάτη. Δηλαδή τους πόρους που δαπανά η εταιρία για τη διατήρηση της συγκεκριμένης πελατειακής σχέσης).

Όμοια, οι γραμμές για τις οποίες $R > 1$, αναφέρονται σε καταστάσεις μη επανάληψης αγοράς (ανενεργός πελάτης) και κατά συνέπεια, δεν αναμένεται να γεννούν κανένα έσοδο για την επιχείρηση, σε ότι αφορά πάντα τον υπό εξέταση πελάτη. Αποτέλεσμα, οι αντίστοιχες γραμμές του διανύσματος επιβράβευσης, να συνιστούν τη βασική περιοχή του διανύσματος αυτού παρουσιαζόμενες αυστηρά αρνητικές. Η περιοχή η οποία ολοκληρώνει το διάνυσμα επιβράβευσης, αντιστοιχεί στην κατάσταση απομάκρυνσης του πελάτη από την εταιρία διαπαντός (απορρόφηση: κατάσταση «dead»), γεγονός που δηλώνει ότι η εταιρία σταματά να δαπανά πόρους για διατήρηση του πελάτη και αναγνωρίζει πως ο πελάτης αυτός έχει χαθεί για πάντα. Συνεπώς, η τελευταία γραμμή του διανύσματος, σημαίνεται με την τιμή «0». Το ακόλουθο σχήμα παρουσιάζει μία σύνοψη των παραπάνω αναφερομένων (σχ 4.3).



σχ. 4.9

Όπου:

- R_i-C_i: είναι το κέρδος που προσδιορίζεται από την αντίστοιχη i γραμμή του πίνακα μετάβασης και εξαρτάται από τα επίπεδα των F,M αλλά και το συνολικό μεταβλητό κόστος της επιχείρησης ($R^i_{evenue} - C^i_{ost}$).
- C_R: είναι το κόστος διατήρησης του πελάτη, για κάθε περίοδο κατά την οποία αυτός φέρεται ως ανενεργός ($C^{ost}_{Retention}$).

4.3.2 <u>Η κατασκευή του διανύσματος επιβράβευσης</u>

Για την κατασκευή του διανύσματος επιβράβευσης,, λόγω της μη ύπαρξης πραγματικών δεδομένων, έγινε αρχικά η αναγωγή του κόστους C_i όπως εμφανίζεται και στο παραπάνω σχήμα (σχ. 4.9), στην μονάδα. Κατά τον τρόπο αυτόν αποφεύγεται η αυθαίρετη προσπάθεια προσδιορισμού του κόστους. Ωστόσο αναφέρεται, ότι είναι δυνατόν το κόστος να λαμβάνεται και με διαφορετικούς τρόπους κυρίως υπό την απαραίτητη προϋπόθεση της ύπαρξης δεδομένων. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποτελέσει και μία μελλοντική αξίωση σε ότι αφορά των προσδιορισμό του CLV με τη βοήθεια αλυσίδων Markov. Για τω λόγω αυτόν διακρίνονται 2 βασικές προτάσεις:

1. Ως κόστος μπορεί να λαμβάνεται το μεταβλητό κόστος ανά πελάτη (ενεργό), το οποίο αφορά στους δεσμευμένους πόρους από πλευράς επιχειρήσεως βραχυχρόνια, οι οποίοι καταναλίσκωνται στις διάφορες δραστηριότητες της. Εντούτοις, αναφέρεται ότι υπάρχουν εργασίες οι οποίες έχουν κινηθεί προς την κατεύθυνση αυτήν. Ωστόσο η ιδιαιτερότητα της παραπάνω εφαρμογής καθιστά την ενσωμάτωση του κόστους υπό την μορφή αυτήν, μία άκρως δελεαστική πρόταση. Επιπρόσθετα αναφέρεται πως το μεταβλητό κόστος, έναντι του συνολικού κόστους ή των κόστεων απόκτησης και διατήρησης του πελάτη, το πρώτο αναμένεται να υπερεκτιμά το κόστος που συνιστά ένας πελάτης σε μία επιχείρηση (για παράδειγμα σταθερά κόστη ανεξαρτήτου λειτουργίας ή μη της επιχειρήσεως δε θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη), ενώ τα τελευταία είναι

δύσκολο να διακριθούν και αναμένεται να υποεκτιμούν το κόστος που απαιτεί η («διαρκής») εξυπηρέτηση ενός πελάτη.

2. Εναλλακτικά, δεδομένου ότι το κόστος θα αφορά στην οποιαδήποτε μορφή κόστους ανά πελάτη, θα είναι δυνατό να λαμβάνεται είτε η κατανομή των ενεργών πελατών της επιχείρησης διαχρονικά και κατά επέκταση ο αριθμός των πελατών να προσδιορίζεται μέσω της κατανομής αυτής, ώστε να λαμβάνεται το κόστος ανά πελάτη, είτε ο αριθμός των ενεργών πελατών να αποτελέσει ένα ακόμα μέγεθος το οποίο θα λαμβάνεται επίσης με τη βοήθεια αλυσίδων Markov, προσδιορίζοντας έτσι σε κάθε μελλοντική χρονική στιγμή των αναμενόμενο αριθμό (ενεργών) πελατών .

Εφόσον υποτέθηκε ότι το κόστος ισοδυναμεί με μία μονάδα (σε μία σχετική πλέον κλίμακα μέτρησης και όχι σε απόλυτα μεγέθη), η τιμή των στοιχείων της 1ης περιοχής (δηλαδή το κομμάτι του διανύσματος που αφορά στην επανάληψη αγοράς) προσδιορίστηκε ως το ποσοστό (των καθαρών κερδών) πάνω από το κόστος. Χάριν της δεύτερης αυτής υποθέσεως, ήταν πλέον δυνατό να διακριθούν 2 βασικά σενάρια, για τη σύσταση του διανύσματος επιβράβευσης.

Τα αγαθά χαμηλής διαφοροποίησης, στα οποία το περιθώριο κέρδους αναμένεται σημαντικά μικρότερο (λόγω της υψηλά ανταγωνιστικής δομής της αγοράς) και τα αγαθά υψηλής διαφοροποίησης (μορφές που προσομοιάζουν μονοπωλιακές δομές), στα οποία το ποσοστό κέρδους αναμένεται υψηλό. Για τα 2 αυτά βασικά σενάρια, επίσης υποτέθηκε ότι το περιθώριο κέρδους, προέρχεται από μία κατανομή κανονική της οποίας τα όρια είναι γνωστά (ώστε να αποφευχθούν περαιτέρω μεροληψίες κατά τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των διαφόρων σεναρίων). Τα στοιχεία των κατανομών για τις 2 διαφορετικές κατηγορίες σεναρίων περιγράφονται παρακάτω (πίνακας 4.3).

Προσδιορίζοντας πλέον την κατανομή των κερδών, τα στοιχεία που αφορούσαν στην 1η περιοχή του διανύσματος (επανάληψη αγοράς), ήταν δυνατό ακόμα και να γεννηθούν βάσει της περιγραφείσας κατανομής και του αντίστοιχου σεναρίου. Εντούτοις το ποσοστό των καθαρών κερδών θεωρήθηκε σταθερό ανά σενάριο διαφοροποίησης και ίσο με τον μέσο όρο αυτού, ώστε να καταστεί η συγκρισιμότητα των διαφόρων σεναρίων, πιο απλή.

πίνακας 4.3: *Πρόσοδος ανά σενάριο διαφοροποίησης*

Σενάριο	Χαμηλή διαφοροποίηση	Υψηλή διαφοροποίηση
	(1)	(2)
Μέσος	0,175	0,425
Μέγιστο	0,3	0,7
Ελάχιστο	0,05	0,15
Διακύμανση	0,001420455	0,006875
Ασυμμετρία	0	0

Τέλος, πρέπει να καταστεί άκρως κατανοητό, ότι το κόστος που επιφέρει κάθε πελάτης σε κάθε επιχείρηση, αντιστοιχεί με το κόστος των πόρων τους οποίους δεσμεύει η σχέση κάθε (μοναδικού) πελάτη με την επιχείρηση. Κατά επέκταση, ενώ για τον προσδιορισμό του κέρδους (στις καταστάσεις επανάληψης αγοράς) αρκεί ο προσδιορισμός του (μέσου μεταβλητού) κόστους που συνιστά γενικά η κάθε συναλλαγή - αγοραπωλησία (κανάλια διανομής, γραμμή παραγωγής, τμήμα marketing κ.α.), όταν ο πελάτης είναι ανενεργός (κατάσταση μη επανάληψης αγοράς αλλά όχι απορρόφησης), τότε δε δεσμεύει το ίδιο σύνολο πόρων και κατά συνέπεια το κόστος για τις καταστάσεις μη επανάληψης αγοράς διαφοροποιείται (έναντι των πρώτων). Στην περίπτωση αυτήν, θα πρέπει να περιλαμβάνεται το μέσο κόστος διατήρησης, όπως είναι το κόστος το οποίο προέρχεται από τις ενέργειες marketing (διαφημιστικές καμπάνιες, ηλεκτρονικούς καταλόγους, newsletter κ.α.). Συνοψίζοντας, το συνολικό κόστος της επιχείρησης, μπορεί να αναλύεται ως εξής:

$$TC = FC + \overline{(VC - C_{marketing}) + C_{marketing}}$$

και

$$AVC^{*} = \frac{VC - C_{marketing}}{n_{ενεργοί\ +\ δυνητικοί\ πελάτες}} + C_{marketing} * (\frac{n_{ενεργών} + n_{δυνητικών} + n_{ανενεργών}}{N})$$

όπου:

- $C_{marketing}$: Το συνολικό κόστος που προέρχεται από κυρίως τις ενέργειες marketing, και αποσκοπεί στην απόκτηση (νέων) πελατών, αλλά και τη διατήρηση των ήδη υπαρχόντων (ενεργών και ανενεργών με σκοπό την επανάληψη αγοράς).

- N: ο συνολικός αριθμός πελατών (ενεργών, ανενεργών και δυνητικών)
- n_i: ο αριθμός των πελατών με την ιδιότητα i

Κατά συνέπεια το κόστος (αν λαμβάνεται το μέσο για λόγους απλούστευσης) που συνιστά ο κάθε πελάτης ο οποίος θα επαναλαμβάνει αγορά, θα είναι ίσο με:

$$AVC_{ενεργών\ πελατών} = \frac{VC - C_{marketing}}{n_{ενεργοί\ +\ δυνητικοί\ πελάτες}} + C_{marketing} * (\frac{n_{ενεργών} + n_{δυνητικών}}{N})$$

Ενώ το κόστος ανά πελάτη, ο οποίος θα παραμένει ανενεργός, θα είναι ίσο με:

$$AVC_{ανενεργών\ πελατών} = C_{marketing} * (\frac{n_{ανενεργών}}{N})\ ]$$

Η παραπάνω ανάλυση του κόστους αποτελεί μία ακόμη προτεινόμενη καινοτομία, καθώς δεν απαντάται σε καμία άλλη έρευνα. Ωστόσο, η εφαρμογή της προϋποθέτει την ύπαρξη δεδομένων. Παραταύτα, στην παρούσα εφαρμογή, το κόστος διατήρησης θεωρήθηκε σταθερό για όλα τα σενάρια και ίσο με 0,001 μονάδες. Ο λόγος αφορά επίσης σε θέματα συγκρισιμότητας μεταξύ των διαφόρων σεναρίων.

4.4 Το προεξοφλητικό επιτόκιο (d)

Ως προεξοφλητικό επιτόκιο (discount rate), ορίζεται το επιτόκιο με το οποίο η μελλοντική υπεραξία που γεννά το κεφάλαιο (επενδεδυμένο «σήμερα») μετατρέπεται σε παρούσα (σημερινή) αξία. Ο συγκεκριμένος ορισμός, από μόνος του δείχνει τη χρονική διάσταση του παραπάνω όρου. Κατά συμπέρασμα, ο όρος αυτός αποτελεί ίσως το βασικότερο παράγοντα (μοναδικός μαζί με τη Recency) ο οποίος μπορεί «αυτόματα να διαφοροποιήσει τη χρονική διάσταση (περίοδο), μέσα στο μοντέλο εφαρμογής. Για τω λόγω αυτόν, θα πρέπει να προσδιορίζεται και σε σχέση με το χρονικό διάστημα που αντιπροσωπεύει κάθε διάσταση της συμπεριφορικής μεταβλητής R (Recency). Για παράδειγμα, δεχόμενοι το d ως μία σταθερή τιμή η οποία αντιπροσωπεύει το αναμενόμενο ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης, τότε ανάγουμε την κάθε περίοδο του μοντέλου, σε ένα έτος. Αντίστοιχα, αν θεωρηθεί το d ως η τιμή για ένα διαφορετικό διάστημα χρόνου (για παράδειγμα: μήνας, 3μηνο, 4μηνο, 6μηνο, 8ετία), διαφοροποιείται κατά τον ίδιο τρόπο η πραγματική περίοδος του μοντέλου.

Πρέπει, ωστόσο να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στο σύνολο των περιόδων T (για τις οποίες ζητείται να προσδιοριστεί η CLV) αλλά και της μεταβλητής της προσφατότητας (Recency). Όταν αυτές περιλαμβάνουν ή αναφέρονται σε μεγάλα χρονικά διαστήματα, τότε το d θα πρέπει συνήθως να αναπροσαρμόζεται. Ειδικά, στην περίπτωση που η ανάλυση αφορά σε χώρες - οικονομίες με έντονες μακρο-οικονομικές διακυμάνσεις. Για τω λόγω αυτόν, το d μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια της διάστασης του χρόνου (t), ως d_t και να προσδιορίζεται ανάλογα προς το την περίοδο t.

4.4.1 Το προεξοφλητικό επιτόκιο εντός της εφαρμογής

Η ιδιότητα του d σχετικά με το χρόνο, υπογραμμίζει την ανάγκη για διάκριση αυτού, σχετικά με την κατηγοριοποίηση των σεναρίων ως προς το είδος των αγαθών. Όπως αναλύθηκε σε προηγούμενη ενότητα (βλ. §3.6), η χρονική διάσταση της εφαρμογής αναμένεται να επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από το είδος του αγαθού που περιγράφεται. Κατά συνέπεια, μία περίοδος σε όρους μοντέλου για καταναλωτικά αγαθά, αναμένεται να είναι πολύ μικρότερη σε πραγματικούς όρους από ότι για διαρκή αγαθά. Το συμπέρασμα αυτό, οδηγεί στην ανάγκη για διαφορετικό προσδιορισμό του d, όταν το σενάριο περιγράφει καταναλωτά αγαθά και διαφορετικό για διαρκή.

Στην παρούσα εφαρμογή, το d προσδιορίστηκε με τη βοήθεια του πληθωρισμού. Αυτό έγινε, καθώς το προεξοφλητικό επιτόκιο οφείλει πάντα να προσφέρει μία προστασία, πάνω από τα επίπεδα του πληθωρισμού, δεδομένου και του γεγονότος ότι ο πληθωρισμός είναι ο ρυθμός με τον οποίο απαξιώνεται το διακρατηθέν (μη επενδεδυμένο) χρήμα. Έτσι, για τα σενάρια που θα αφορούσαν σε καταναλωτικά αγαθά, το d προσδιορίστηκε ως 0,26%, ενώ για τα σενάρια που θα αφορούσαν σε διαρκή αγαθά, προσδιορίστηκε ως 3,41%. Τα στοιχεία για τον πληθωρισμό, παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (πίνακας 4.4).

πίνακας 4.4: *Πίνακας στοιχείων πληθωρισμού. Ελλάδα, περίοδος 1995 – 2003*

1995-2003	Monthly Inflation	Monthly Cross-Sectional Std. Deviation	Monthly Cross-Sectional Skewness	Annual Inflation	Annual Cross-Sectional Std. Deviation	Annual Cross-Sectional Skewness	Unemployment
Mean	0.26	1.31	0.88	3.41	5.10	0.80	10.91
Maximum	2.37	4.26	5.63	9.38	8.06	5.14	12.76
Minimum	-1.36	0.62	-6.28	-1.17	3.11	-2.17	9.18
Std. Dev.	0.65	0.62	2.69	2.33	1.23	1.66	0.91
Skewness	0.45	2.33	-0.60	0.50	0.08	0.67	-0.00
Kurtosis	4.19	10.25	2.81	2.52	2.25	2.87	2.27
Normality	0.01	0.00	0.05	0.08	0.31	0.03	0.46
Observations	96	96	96	96	96	96	70

πηγή: Inflation & the cross-sectional distribution of prices in the E.U. periphery (2007)

4.4.2 Προσδιορίζοντας το d εναλλακτικά

Σε ότι αφορά τα δεδομένα του πίνακα 4.4, άξιο αναφοράς είναι το γεγονός, ότι κατά την περίοδο 1995 – 2003, κατά την οποία συνελέγησαν τα παραπάνω δεδομένα τόσο η εγχωρία οικονομία όσο και οι διεθνείς, βρέθηκαν στο απόγειο τους, διαγράφοντας διαρκώς σημαντικούς ρυθμούς ανάπτυξης. Το γεγονός αυτό από μόνο του, εύλογα είναι ικανό να εγείρει έντονη κριτική, σχετικά με το πόσο είναι ικανά τα δεδομένα τα οποία προέρχονται από την περίοδο αυτήν, να δώσουν μία γενική μορφή του επιπέδου του πληθωρισμού (ή να χρησιμοποιηθούν αντί του προεξοφλητικού επιτοκίου) για την Ελλάδα αλλά και γενικότερα. Κύριος λόγος, τα δεδομένα δεν είναι αμερόληπτα και απαλλαγμένα από ακραίες τιμές, καθώς οι μεγάλοι ρυθμοί ανάπτυξης της περιόδου αυτής, διευρύνουν τη διασπορά των παρατηρήσεων όλων των οικονομικών μεγεθών (όπως δείκτη τιμών, προεξοφλητικό επιτόκιο κ.α.) και ωθούν τη μέση τιμή προς τα επάνω. Παραταύτα, τα συγκεκριμένα δεδομένα θα χρησιμοποιηθούν, με σκοπό να δειχθεί ένας εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού του προεξοφλητικού επιτοκίου με τη βοήθεια μίας κατανομής περιγραφικής αυτού (κυρίως για σταθερές οικονομικά περιόδους[54]), αντί μίας προκαθορισμένης (μέσης) τιμής, λαμβάνοντας έτσι υπόψη και τυχόν μικρότερες ή μεγαλύτερες διακυμάνσεις στον πολιτικό και οικονομικό τομέα, γενικότερα ή ειδικότερα.

Με τη βοήθεια τώρα της κατανομής Βήτα (Beta), είναι δυνατή η κατασκευή μίας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, με τα χαρακτηριστικά που περιγράφονται από τον παραπάνω πίνακα (μέση τιμή, τυπική απόκλιση, ασυμμετρία και κύρτωση).

[54] Περιόδους χωρίς έντονες διακυμάνσεις στο ευρύτερο μακρο – περιβάλλον, εθνικά αλλά και διεθνώς.

Υπενθυμίζεται, όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο τμήμα (βλ. § 4.2.2.β), πως τα χαρακτηριστικά της κατανομής βήτα είναι οι 2 βασικές παράμετροι (α, β), αλλά και το πεδίο ορισμού της ([0, 1]). Για το λόγω αυτόν, καθίσταται δυνατή η κατασκευή μίας καμπύλης που να προσομοιώνει τη συμπεριφορά του επιπέδου του πληθωρισμού (ή κατ' ανάλογο τρόπο του προεξοφλητικού επιτοκίου), βάσει των χαρακτηριστικών του.

Για την κατασκευή της επιθυμητής κατανομής, βασικός στόχος είναι ο προσδιορισμός των παραμέτρων της κατανομής βήτα (α,β). Για να γίνει αυτό, πρέπει πρώτα κανείς να κατανοήσει τον μηχανισμό της κατανομής βήτα, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατό αυτή να ληφθεί, από την ομοιόμορφη κατανομή. Την τροποποίηση που επιδέχεται η τυχαία μεταβλητή X, ώστε να πάρουμε τη συνάρτηση κατανομής βήτα με παραμέτρους α, β, περιγράφει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, όπως επίσης παρουσιάστηκε σε προηγούμενο τμήμα (βλ. § 4.2.2.β). Εντούτοις στη βασική της μορφή, αφορά σε μία συνάρτηση με κλειστά πεπερασμένα άκρα. Κατά συνέπεια, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή βήτα, μπορεί να ξαναγραφεί με τον εξής τρόπο:

Επειδή:

$$x \rightarrow [0,1]$$

μετασχηματίζοντας, παίρνουμε:

$$X = (u-l)*x+l \text{ και } X \rightarrow [l,u]$$

και συνεπώς:

$$F(x) = \frac{(x-l)^{\alpha-1}*(u-x)^{\beta-1}}{Beta(a,b)*(u-l)^{(\alpha+\beta-1)}}$$

όπου:

- l, u: το κατώτερο και το ανώτερο όριο του πεδίου ορισμού της μεταβλητής X (αντίστοιχα).

Για να εκτιμηθούν όμως τα α, β (αντικειμενικός σκοπός), είναι γνωστό ότι:

$$E(X) = l + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)*(u-l) \quad (4.1)$$

και

$$Var(X) = \left(\frac{\alpha*\beta}{(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta+1)}\right)*(u-l)^2 \quad (4.2)$$

Γνωρίζοντας λοιπόν τη μέση τιμή και τη διακύμανση της παρατηρούμενης μεταβλητής (Χ=πληθωρισμός στην παρούσα περίπτωση), είναι πλέον δυνατός ο προσδιορισμός των παραμέτρων της κατανομής που θα προσομοιώνει την του πληθωρισμού, επιλύοντας ένα σύστημα 2 αγνώστων με 2 εξισώσεις (4.1, 4.2 και πίνακας 4.4).

Οι τιμές των παραμέτρων για τον μηνιαίο και ετήσιο πληθωρισμό (d), παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (πίνακας 4.5). Με τον τρόπο αυτόν, καθίσταται δυνατό να ληφθεί υπόψη και το γενικότερο μάκρο – περιβάλλον στο οποίο δραστηριοποιείται μία επιχείρηση, αναπαράγοντας διαφορετικά επίπεδα πληθωρισμού για κάθε περίοδο (μηνιαία, ετήσια ή αντίστοιχα και των υποδιαιρέσεων αυτών με τις ανάλογες μετατροπές), υπό την κατανομή βήτα και τις αντίστοιχες – εκτιμημένες παραμέτρους αυτής.

πίνακας 4.5: Στατιστικά στοιχεία εναλλακτικού προεξοφλητικού επιτοκίου

Discount rate	Μηνιαίο d	Ετήσιο d
Μέσος (%)	0,26	3,41
Μέγιστο (%)	2,37	9,38
Ελάχιστο (%)	-1,36	-1,17
Std. Dev.	0,65	2,33
Ασυμμετρία	0,45	0,5
Κύρτοση	4,19	2,52
παράμετρος α	3,0795	1,7524
παράμετρος β	4,0110	2,2842

4.5 Υπολογίζοντας την CLV

Πλέον, ο προσδιορισμός της διαχρονικής αξίας ενός καταναλωτή είναι εφικτός, καθώς έχουν προσδιοριστεί πλήρως όλα εκείνα τα «συστατικά» τα οποία συνθέτουν την CLV. Το επόμενο σχήμα (σχήμα 4.10) δείχνει συνοπτικά τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί το CLV ανά περίοδο.

Η σχέση των 2 πινάκων, όπως παρουσιάζει το παρακάτω σχήμα (σχ. 4.10), δίνει το αναμενόμενο κέρδος για τον υπό εξέταση πελάτη, σε κάθε χρονική στιγμή (t). Το αναμενόμενο αυτό κέρδος, επειδή περιλαμβάνει εκτιμήσεις σε μελλοντικές περιόδους, θα πρέπει να μεταφράζεται σε σημερινούς όρους χρήματος. Αυτό πραγματοποιείται με τη βοήθεια του προεξοφλητικού επιτοκίου (όπως προαναφέρθηκε). Η συνολική CLV, λαμβάνεται τελικά ως το άθροισμα της αναμενόμενης CLV σε κάθε περίοδο (t). Εκφραζόμενες οι παραπάνω σχέσεις μαθηματικά, δίνουν τον παρακάτω τύπο για τη CLV:

$$\mathrm{CLV_i} = (\sum_{t=0}^{T} \left(D^{-1} * P\right)^t * R) = \sum_{t=0}^{T} (\left(\frac{P}{D}\right)^t * R)$$

όπου:

- $\mathrm{CLV_i}$: Η διαχρονική αξία του i καταναλωτή
- T: το σύνολο των περιόδων
- t: η υπό εξέταση περίοδος με $t \in [0,T]$
- $D=1+d$: με d το προεξοφλητικό επιτόκιο.
- P: ο πίνακας μετάβασης
- R: το διάνυσμα επιβράβευσης

Ωστόσο, πρέπει να αναφερθεί, ότι εφόσον η συγκεκριμένη σχέση μεταξύ πελάτη – εταιρίας συνιστά πρόσθετα κόστη απόκτησης ή διατήρησης, όπως ειδικές προσφορές, μίσθωση ειδικού προσωπικού, καναλιού διανομής, τηλεφωνικού κέντρου εξυπηρέτησης κ.α., τότε τα κόστη αυτά θα πρέπει να συνυπολογίζονται (μόνο) για τη συγκεκριμένη σχέση. Για τω λόγω αυτόν, η τελευταία εξίσωση μπορεί να διαμορφωθεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει και τέτοιες περιπτώσεις. Κατά αντιστοιχία, θα ισχύει:

$$\mathrm{CLV_i} = [\sum_{t=0}^{T} \left(D^{-1} * P\right)^t * R_i] - C_i^{Acquisition}$$

όπου:

- $\mathrm{R_i}$: Το «ειδικό» διάνυσμα επιβράβευσης για τον πελάτη i, το οποίο αναμένεται να περιλαμβάνει και τα ειδικά κόστη διατήρησης για τον πελάτη αυτόν
- $C_i^{Acquisition}$: Το «ειδικό» πάγιο κόστος απόκτησης για τον πελάτη i.

Πίνακας Μετάβασης: $(P)^t$

	R_1, F_1, M_1, S_1	...	...	R_1, F_N, M_N, S_N	R_2, F_1, M_1, S_1	...	...	R_2, F_N, M_N, S_N	...	...	R_N, F_1, M_1, S_1	...	...	R_N, F_N, M_N, S_N	"Dead" State
R_1, F_1, M_1, S_1	α11	...	...	α1n	...	...	...	...	0	0	0	0	0	0	0
.....	α21	...	...	α2n	...	...	...	...	0	0	0	0	0	0	0
.....	...	...	...	...	...	...	...	...	0	0	0	0	0	0	0
R_1, F_N, M_N, S_N	αn1	...	...	αnn	...	...	...	...	0	0	0	0	0	0	0
R_2, F_1, M_1, S_1	β11	...	...	β1n	0	0	0	0	...	...	0	0	0	0	0
.....	β21	...	...	β24	0	0	0	0	...	...	0	0	0	0	0
.....	...	...	...	...	0	0	0	0	...	...	0	0	0	0	0
R_2, F_N, M_N, S_N	βn1	...	...	βn4	0	0	0	0	...	...	0	0	0	0	0
.....	x11	...	...	x1n	0	0	0	0	0	0	...	...	...	...	0
.....	...	...	...	...	0	0	0	0	0	0	...	...	...	...	0
R_N, F_1, M_1, S_1	n11	...	...	n1n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
.....	n21	...	...	n2n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
.....	...	...	...	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
R_N, F_N, M_N, S_N	nn1	...	...	nnn	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
"Dead" state	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Διάνυσμα Επιβράβευσης :R

R_i-C_i
...
...
R_i-C_i
-C_R
...
...
...
...
...
...
...
...
...
-C_R
0

Ενεργός πελάτης

Ανενεργός πελάτης

Χαμένος για πάντα

σχ. 4.10

Κεφάλαιο 5ο

Αποτελέσματα

5.1 Αποτελέσματα

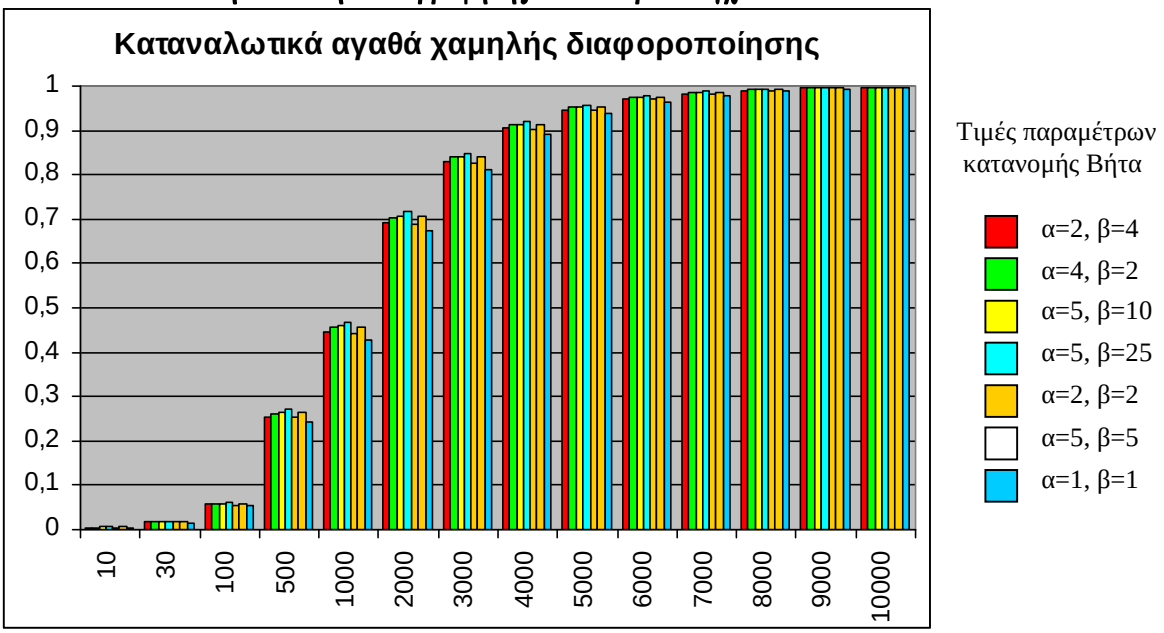
5.1.1 Διαχρονική εξέλιξη της μέσης πιθανότητας απορρόφησης

Ένα από τα μεγέθη που παρουσιάζει ενδιαφέρον ως προς τη μελέτη του σε σχέση και με το έκαστο σενάριο ελέγχου, είναι η μέση πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου για διαφορετικά σενάρια των παραμέτρων της κατανομής που χρησιμοποιήθηκε. Οι συγκεκριμένες διαφορετικές ιδιότητες, γεννούν ένα πλήθος 7 διαφορετικών περιπτώσεων, ανά σενάριο δομής αγοράς. Τα παρακάτω σχήματα (σχήματα 5.1 – 5.4), είναι ενδεικτικά των διαφοροποιήσεων που παρατηρούνται, ανά σενάριο ελέγχου.

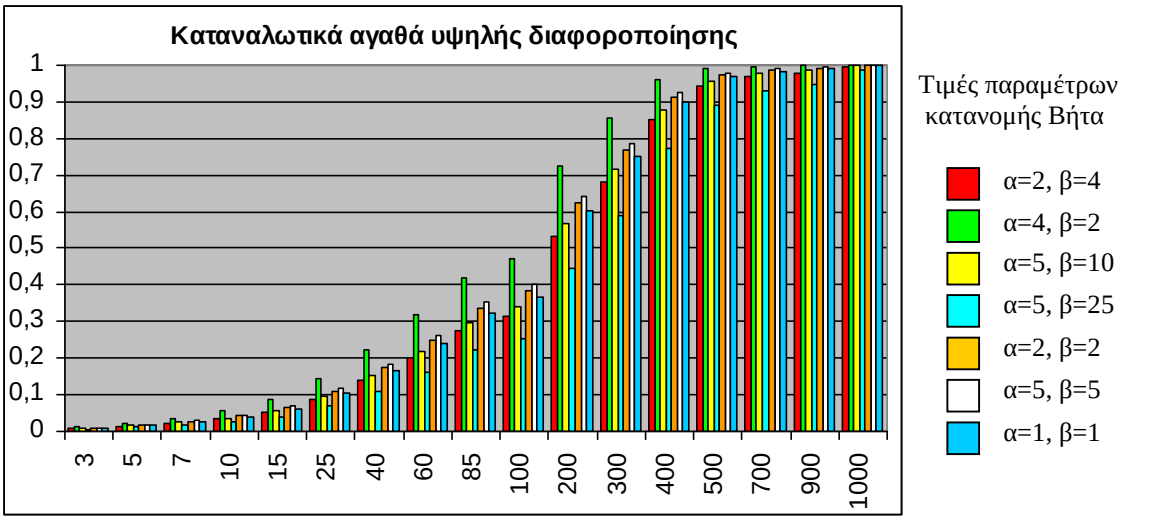
Στον κατακόρυφο άξονα, περιλαμβάνεται η μέση αναμενόμενη πιθανότητα απορρόφησης (του πελάτη), ενώ ο οριζόντιος άξονας αναφέρεται στην περίοδο του μοντέλου. Οι σημαντικές διαφοροποιήσεις ως προς τις περιόδους (ανά σενάριο ελέγχου), δικαιολογούνται βάσει της δομής της αγοράς (switching costs, involvement, loyalty κ.α.). Οι διαφορετικοί χρωματισμοί ανά μπάρα (σε κάθε διάγραμμα) αντιπροσωπεύουν ένα συγκεκριμένο σενάριο ως προς τις τιμές των παραμέτρων της κατανομής, η οποία εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο αναμένεται να περιγράφεται η συμπεριφορά κάθε συμπεριφορικής μεταβλητής.

Η πρώτη παρατήρηση που μπορεί να πραγματοποιηθεί, είναι η επαλήθευση της αρχικής υπόθεσης ότι όσο μικρότερα κόστη (switching costs) και συμμετοχή (involvement) συνιστά μία αγορά, τόσο πιο εύκολα αναμένεται να ανακυκλώνεται ο έκαστος πελάτης μεταξύ των διαφόρων εταιριών οι οποίες δραστηριοποιούνται στην περιγραφείσα αγορά. Κατά συνέπεια, τόσο πιο δύσκολα αναμένεται να χάνεται ένας πελάτης μόνιμα.

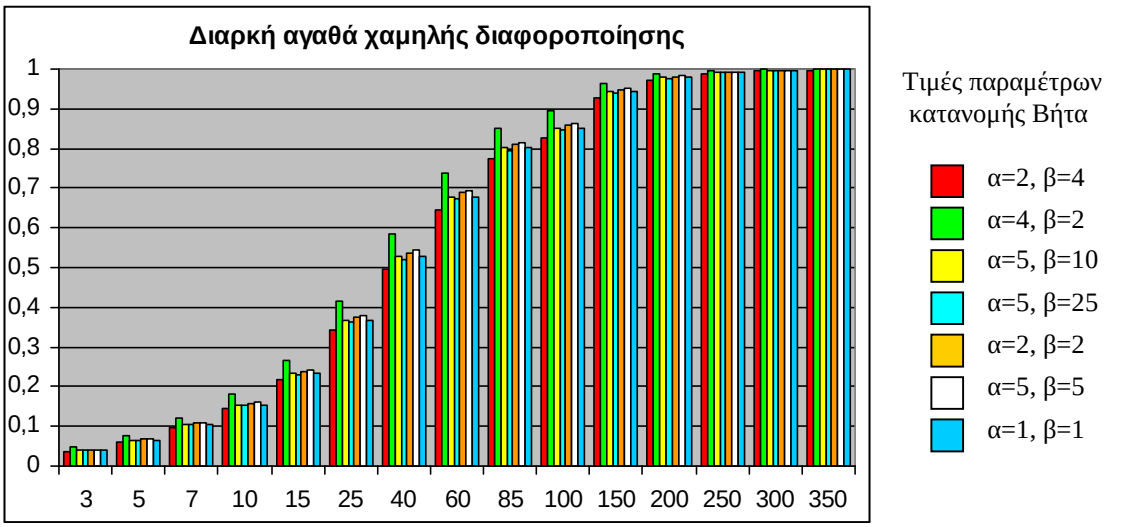
Μέση πιθανότητα απορρόφησης ανά σενάριο ελέγχου



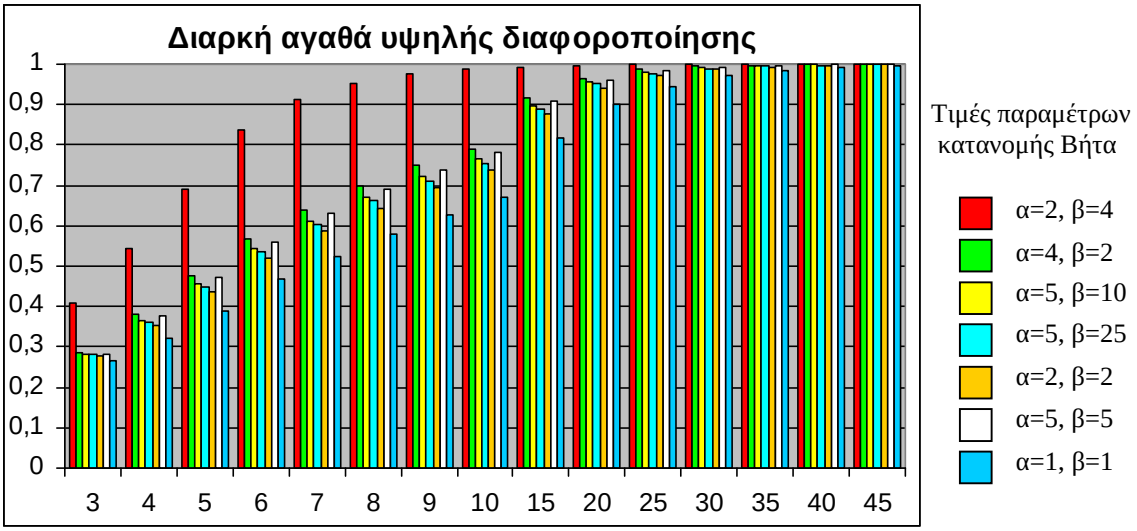
σχήμα 5.1



σχήμα 5.2



σχήμα 5.3



σχήμα 5.4

Οι πολύ υψηλές τιμές των περιόδων λειτουργίας του μοντέλου και ειδικά για τα πρώτα 2 σενάρια, μπορούν να ερμηνεύονται ως καθαρά θεωρητικές καθώς μπορεί να θεωρηθεί πως παραπέμπουν σε σενάρια όπου ο πελάτης σπάνια χάνεται (σενάρια always – a – share). Σε αντίθεση με το τελευταίο σενάριο, όπου οι τιμές αυτές φαντάζουν πιο πραγματικές.

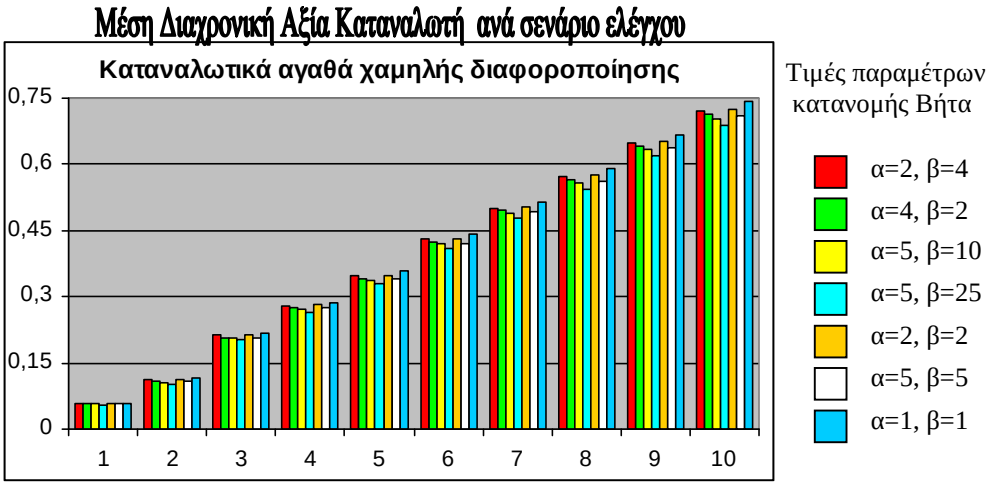
Το σενάριο που περιγράφει αγορές χαμηλής διαφοροποίησης, παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια (μικρότερη διασπορά) ως προς τις πιθανότητες απορρόφησης. Αντίθετα, υπάρχουν τιμές των παραμέτρων α και β (της κατανομής βήτα), για τις οποίες στα εναπομείναντα σενάρια, παρουσιάζονται ιδιαίτερα ακραίες πιθανότητες απορρόφησης, ανά σενάριο ελέγχου. Τα σημεία που παρουσιάζουν ιδιαίτερη προσοχή, είναι τα εξής:

- Σχήμα 5.2: για τις τιμές των παραμέτρων α=4 και β=2, η πιθανότητα απορρόφησης παρατηρείται κατά μέσον όρο κατά 30% (29,9634%) μεγαλύτερη από τον μέσο όρο των υπολοίπων περιπτώσεων (για το συγκεκριμένο σενάριο). Αντίθετα, για α=5 και β=25, οι πιθανότητες απορρόφησης παρουσιάζονται να υστερούν κατά 26,62% κατά μέσον όρο, από τον μέσο όρο των υπολοίπων.
- Σχήμα 5.3: Ομοίως, αν α=4 και β=2 τότε η μέση πιθανότητα απορρόφησης, παρουσιάζεται αυξημένη κατά 8,3%.
- Σχήμα 5.4: Τέλος, για α=2 και β=4, τότε η πιθανότητα απορρόφησης εμφανίζεται μεγαλύτερη κατά 27,24% (εν συγκρίσει με τη μέση τιμή των

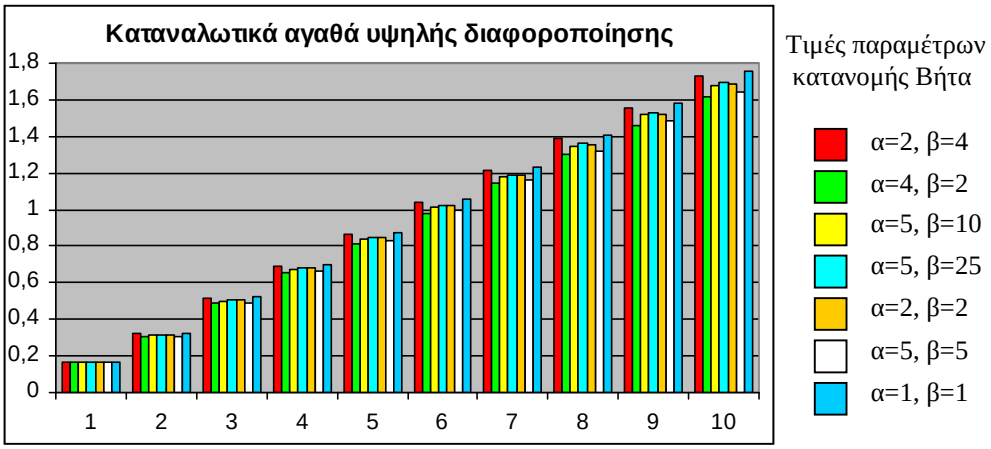
υπολοίπων περιπτώσεων) για τις πρώτες 30 περιόδους. Ενώ, για α=1 και β=1, τότε η πιθανότητα αυτή είναι μειωμένη κατά 14,35%.

5.1.2 Διαχρονική εξέλιξη της αναμενόμενης CLV του πελάτη

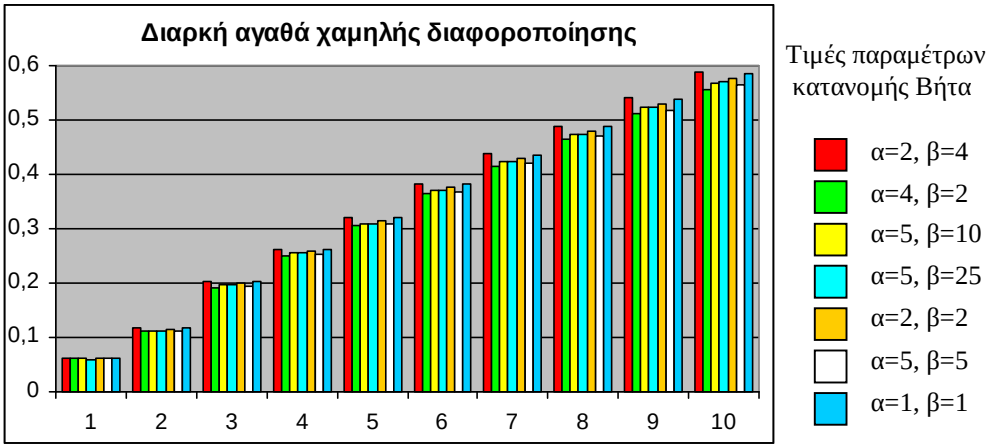
Τα διάφορα σενάρια τόσο ως προς τη μορφή της αγοράς, όσο και ως προς τις τιμές των παραμέτρων της κατανομής (η οποία ενδέχετω να περιγράφει τη συμπεριφορά των βασικών μεταβλητών του μοντέλου), ελέγχθησαν ως προς την αξία που αναμένεται να γεννήσει ο έκαστος πελάτης (βάσει έκαστου σεναρίου), σε ένα διάστημα 10 περιόδων. Επαναλαμβάνεται, πως η περίοδος στην οποία αναφέρεται το κάθε σενάριο, εξαρτάται σε πολύ μεγάλο βαθμό από το είδος του αγαθού που περιγράφει κάθε σενάριο (καταναλωτικό ή διαρκές). Στα παρακάτω σχήματα (5.5 – 5.8), παρουσιάζεται η αναμενόμενη διαχρονική αξία του καταναλωτή για κάθε τέτοιο σενάριο και περίπτωση.



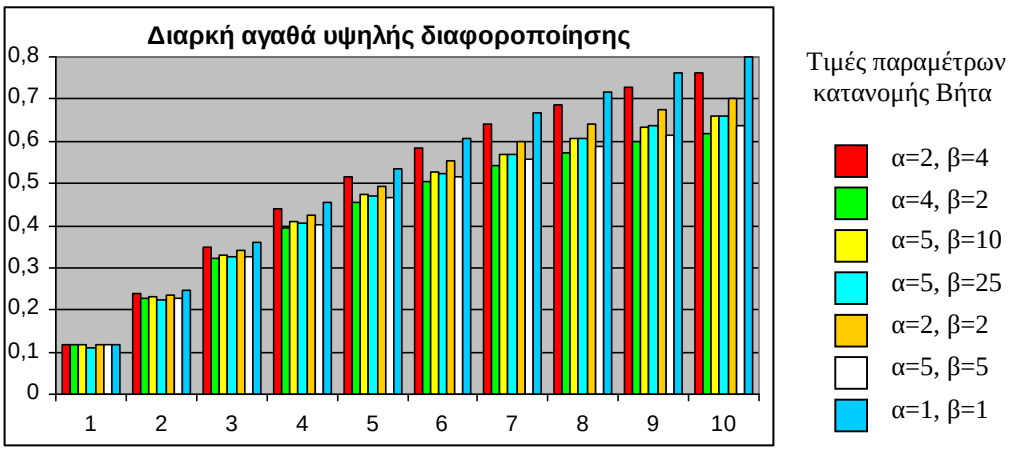
σχήμα 5.5



σχήμα 5.6



σχήμα 5.7



σχήμα 5.8

Ο οριζόντιος άξονας στα παραπάνω σχήματα, αναφέρεται στην αναμενόμενη CLV, ενώ ο οριζόντιος στις περιόδους του μοντέλου. Τα πρώτα 3 σχήματα (σχήματα 5.5 – 5.7), φέρονται να εμφανίζουν μία γραμμική σχέση μεταξύ περιόδων και CLV, σε αντίθεση με το σχήμα 5.8, όπου η σχέση αυτή φέρεται ως καμπυλόγραμμη. Η υπόθεση αυτή, αποδεικνύεται υπολογίζοντας τον έλεγχο συσχέτισης για τα συγκεκριμένα δεδομένα και πραγματοποιώντας τον αντίστοιχο έλεγχο στατιστικής σημαντικότητας της αποδιδόμενης τιμής του συντελεστή συσχέτισης (βλ. παράρτημα: Π.3. πίνακες αποτελεσμάτων). Άξιο παρατήρησης, είναι το γεγονός ότι για κάθε σενάριο, οι περιπτώσεις που αφορούν σε ζεύγη τιμών 2, 4 και 1,1 για τις παραμέτρους α και β, εμφανίζουν την υψηλότερη αναμενόμενη CLV. Για την πρώτη περίπτωση, η μέση αναμενόμενη CLV είναι υψηλότερη (κατά μέσο όρο) κατά 9,73%, ενώ για την τελευταία περίπτωση, κατά 13,79%. Το ποσοστό αυτό, φτάνει ακόμα και το 21,93% κατά την 10η περίοδο, γεγονός που δεικνύει ξεκάθαρα, τα πρόσθετα οικονομικά οφέλη που μπορεί να αποκομίσει μία εταιρία, από πελάτες με διαφορετικά καταναλωτικά προφίλ.

5.2 Οι καταστάσεις εκκίνησης

5.2.1 Το διάνυσμα εκκίνησης

Όπως αναφέρθηκε και στο τμήμα 1.5, για Μαρκοβιανά μοντέλα με την ιδιότητα της εργοδικότητας (βλ. § 1.5.1), τα οποία είναι δυνατό να συνεχίσουν τη λειτουργία τους στο διηνεκές, η κατάσταση στο «μακρινό» μέλλον στην οποία αναμένεται να βρεθούν, είναι ανεξάρτητη της καταστάσεως από την οποία ενδέχεται να εκκινήσουν. Εντούτοις η νομοτέλεια των συστημάτων αυτών διαφοροποιείται τα μέγιστα, εάν περιληφθούν στο μοντέλο ένα ή περισσότερα απορροφητικά στάδια. Για τω λόγω αυτόν κρίθηκε απαραίτητος ο έλεγχος τυχόν καταστάσεων, οι οποίες παρατηρούμενες κατά την απόκτηση του πελάτη (απαρχή πελατειακής σχέσης), ενδέχετω να δημιουργούσαν διαφοροποιήσεις (σημαντικές) στην αναμενόμενη CLV αλλά και τους χρόνους απορρόφησης και άριστους χρόνους διακοπής της πελατειακής σχέσης. Ο έλεγχος αυτός ήταν δυνατό να περαιωθεί με τη βοήθεια του διανύσματος εκκίνησης.

Ως διάνυσμα εκκίνησης, προσδιορίζεται ένα διάνυσμα στήλη, όπου στη μία διάσταση έχει το μήκος του πίνακα μετάβασης και το οποίο φέρει τις κατανομές για τις αναμενόμενες ή επιθυμητές καταστάσεις εκκίνησης του μοντέλου και κατ' επέκταση, του υπό εξέταση πελάτη. Δηλαδή, αν πίνακας μετάβασης ≡ P και διάνυσμα εκκίνησης ≡ w, τότε:

$$P \Rightarrow P_{n\otimes n} \rightarrow w \Rightarrow w_{n\otimes 1}$$

Ως προς τις διαφορετικές καταστάσεις εκκίνησης, διερευνήθηκαν 11 βασικά διαφορετικά σενάρια[55], για κάθε σενάριο μορφής αγοράς και περιπτώσεις παραμέτρων κατανομής γέννησης αριθμών. Πρέπει εντούτοις να αναφερθεί πως η δομή του διανύσματος εκκίνησης εξαρτάται από το γεγονός το οποίο περιγράφει, ενώ πρέπει να υπενθυμιστεί ότι αφορά σε πιθανότητες παρατήρησης κάποιων καταστάσεων κατά την εκκίνηση του μοντέλου. Κατά συνέπεια, το σύνολο των τιμών των στοιχείων του, θα πρέπει να αθροίζουν στη μονάδα. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι ο πελάτης εκκινεί από τη δεδομένη χρονική στιγμή (R=1), χωρίς να γνωρίζουμε τίποτα για τις τιμές των μεταβλητών F, M, S, τότε κάθε στοιχείο του διανύσματος w για το οποίο στον πίνακα μετάβασης ισχύει R=1 θα έχει μία

[555555] Αρχικά τα σενάρια ως προς την κατάσταση εκκίνησης, ήταν 17, περιλαμβάνοντας και τις διαφορετικές καταστάσεις για κάθε επίπεδο των συμπεριφορικών μεταβλητών F, M. Εντούτοις, κρίθηκε απαραίτητη η ανάλυση μόνο των 11 παραπάνω σεναρίων, τα οποία ήταν ικανά να γεννήσουν ένα σύνολο 308 διαφορετικών περιπτώσεων, μελετώντας χρόνους και CLV.
(11 *περιπτώσεις καταστάσεων εκκίνησης*)⊗(7 *σενάρια παραμέτρων κατανομής* ⊗ *μορφές αγοράς*)
Τα βασικά σενάρια τα οποία διερευνήθηκαν, ήταν τα: w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16}, w_{17}.

(αυστηρά) θετική πιθανότητα (μη μηδενική) να παρατηρηθεί (σε ένα σύνολο $n_R \otimes n_F \otimes n_M \otimes n_S = 1 \otimes 3 \otimes 3 \otimes 3 = 27$ στοιχείων). Δεδομένου τώρα ότι δεν είναι γνωστό κάποιο στοιχείο για τις F, M, S, θα πρέπει να υποτεθεί ομοιόμορφη κατανομή. Συνεπώς η πιθανότητα εμφάνισης κάθε τέτοιου στοιχείου, θα είναι $\frac{1}{Nw_x} = \frac{1}{27}$ (όπου Nw_x: ο αριθμός των «ενεργών» στοιχείων του διανύσματος w, που περιγράφει το σενάριο εκκίνησης x).

Τα διαφορετικά σενάρια καταστάσεων εκκίνησης που ελέχθησαν, είναι τα εξής:

- w_1: Άγνωστη κατάσταση εκκίνησης (για κάθε R, F, M, S πλην της καταστάσεως απορρόφησης)
- w_2: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή (για κάθε F, M, S με R=1)
- w_3: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με χαμηλή ικανοποίηση (για κάθε F, M με R=1 και S=1)
- w_4: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με μέτρια ικανοποίηση (για κάθε F, M με R=1 και S=2)
- w_5: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με υψηλή ικανοποίηση (για κάθε F, M με R=1 και S=3)
- w_6: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με χαμηλή συχνότητα αγορών (για κάθε M, S με R=1 και F=1)
- w_7: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με μέτρια συχνότητα αγορών (για κάθε M, S με R=1 και F=2)
- w_8: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με υψηλή συχνότητα αγορών (για κάθε M, S με R=1 και F=3)
- w_9: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με χαμηλή νομισματική αξία αγορών (για κάθε F, S με R=1 και M=1)
- w_{10}: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με χαμηλή νομισματική αξία αγορών (για κάθε F, S με R=1 και M=1)
- w_{11}: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με μέτρια νομισματική αξία αγορών (για κάθε F, S με R=1 και M=2)
- w_{12}: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με επιφυλακτικότητα[56] (για κάθε S και καταστάσεις RFM: 111, 112, 121)

[56] βλ. § 4.2.1.α

- w_{13}: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με επαλήθευση[57] (για κάθε S και καταστάσεις RFM: 113, 122, 123, 131, 132, 133)
- w_{14}: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με επαλήθευση και χαμηλή ικανοποίηση (για S=1 και καταστάσεις RFM: 113, 122, 123, 131, 132, 133)
- w_{15}: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με επαλήθευση και υψηλή ικανοποίηση (για S=3 και καταστάσεις RFM: 113, 122, 123, 131, 132, 133)
- w_{16}: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με επιφυλακτικότητα και χαμηλή ικανοποίηση (για S=1 και καταστάσεις RFM: 111, 112, 121)
- w_{17}: εκκίνηση την παρούσα χρονική στιγμή με επιφυλακτικότητα και υψηλή ικανοποίηση (για S=3 και καταστάσεις RFM: 111, 112, 121)

5.2.2 Χρόνοι απορρόφησης

Άξιο ελέγχου είναι η παρατήρηση της διαφοροποίησης του αναμενόμενου χρόνου απορρόφησης του πελάτη, όταν αυτός εκκινεί από διαφορετικές καταστάσεις. Ως κριτήριο προσδιορισμού της περιόδου απορρόφησης, τέθηκε η περίοδος κατά την οποία η μέση πιθανότητα απορρόφησης θα έφτανε το 99,9%. Κατά αναλογία, είναι δυνατός ο προσδιορισμός των χρόνων απορρόφησης και για μικρότερα επίπεδα, ενώ πρέπει να αναφερθεί ότι καθώς μειώνει το συγκεκριμένο επίπεδο, η περίοδος αναμένεται να φθίνει εκθετικά.

Η διαγραμματική απεικόνιση των μέσων χρόνων απορρόφησης για διάφορες καταστάσεις εκκίνησης για τα σενάρια που αναφέρονται σε καταναλωτικά αγαθά, ήταν αδύνατη, ώστε να παρατηρηθούν τυχόν διαφοροποιήσεις. Για το λόγω αυτόν, τα συγκεκριμένα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα:

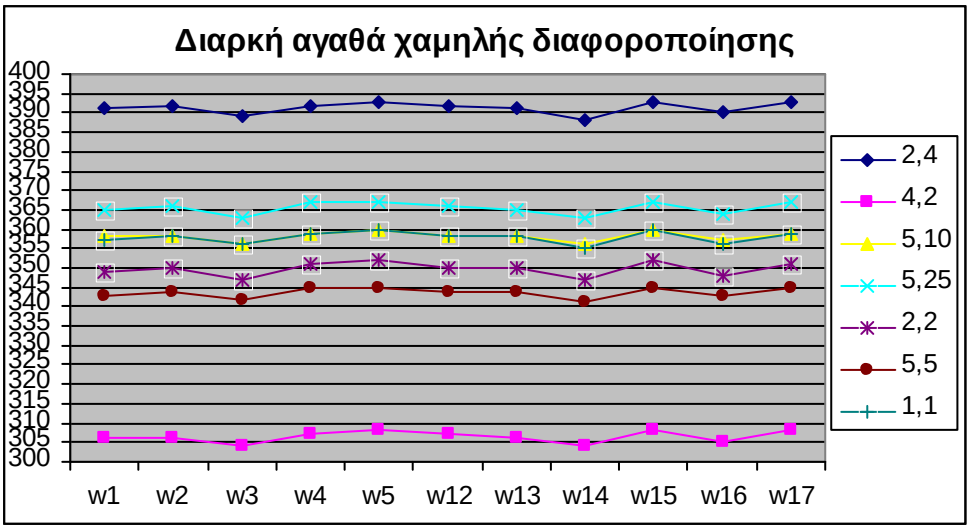
[57] βλ. § 4.2.1.α

πίνακας 5.1: **Χρόνοι απορρόφησης - Καταναλωτικά αγαθά**

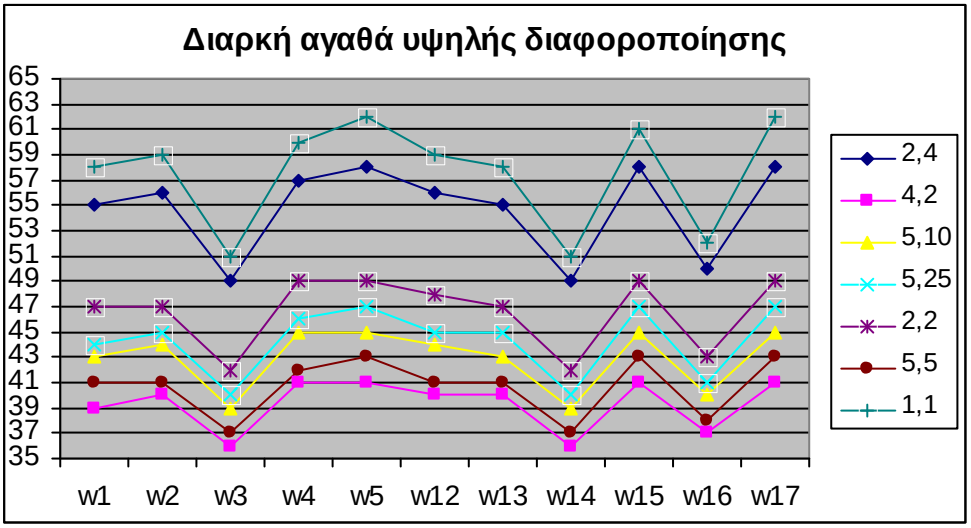
		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
Χαμηλή διαφοροποίηση	**2,4**	11758	11760	11758	11760	11761	11760	11760	11758	11762	11758	11761
	4,2	11350	11351	11350	11352	11353	11352	11351	11349	11353	11350	11352
	5,10	11260	11262	11260	11262	11263	11262	11261	11260	11263	11260	11263
	5,25	10954	10955	10954	10955	10957	10955	10955	10953	10957	10954	10956
	2,2	11854	11855	11853	11856	11857	11855	11855	11853	11857	11854	11856
	5,5	11282	11283	11282	11284	11285	11284	11283	11281	11285	11282	11284
	1,1	12356	12358	12356	12358	12359	12358	12358	12355	12360	12356	12359
Υψηλή διαφοροποίηση	**2,4**	1814	1815	1812	1817	1817	1816	1815	1811	1818	1815	1817
	4,2	1064	1065	1062	1066	1066	1066	1064	1061	1066	1065	1066
	5,10	1642	1644	1641	1645	1645	1645	1643	1640	1645	1644	1645
	5,25	2320	2322	2319	2323	2323	2323	2322	2318	2324	2321	2323
	2,2	1409	1410	1407	1411	1412	1411	1410	1406	1412	1409	1411
	5,5	1337	1339	1336	1340	1340	1340	1338	1335	1340	1339	1340
	1,1	1491	1492	1489	1493	1494	1493	1492	1487	1495	1492	1494

Γίνεται εύκολα αντιληπτό, ότι τα υψηλά επίπεδα ικανοποίησης σενάριο, παρατηρούμενα κατά την πρώτη επαφή του πελάτη με την εταιρία (w_5, w_{15} και w_{17}), οδηγούν σε αύξηση του αναμενόμενου χρόνου παραμονής του πελάτη στην εταιρία. Ο μέγιστος αναμενόμενος χρόνος διαφυγής του πελάτη, για το πρώτο σενάριο, είναι οι 10953 περίοδοι, ενώ ως μέγιστη τιμή, φέρονται οι 12360. Αντίστοιχα, για το δεύτερο σενάριο, τα ακρότατα παρουσιάζονται για τις περιόδους 1061 και 2324. Η διακύμανση των χρόνων απορρόφησης για διαφορετικές καταστάσεις εκκίνησης, παρουσιάζεται καλυτέρα στα παρακάτω διαγράμματα τα οποία αναφέρονται σε αγορές διαρκών αγαθών.

Αναμενόμενοι χρόνοι απορρόφησης ανά σενάριο ελέγχου και θέση εκκίνησης



σχήμα 5.9



σχήμα 5.10

Τα παρατηρούμενα ακρότατα, φαίνεται ότι εξαρτώνται τόσο από το σενάριο ελέγχου, όσο και από την κατάσταση εκκίνησης αλλά και το προφίλ του καταναλωτή (το οποίο περιγράφεται μέσω των παραμέτρων α και β της κατανομής Βήτα). Κατά ανάλογο τρόπο, το αναμενόμενο εύρος τιμών των χρόνων απορρόφησης για διαρκή αγαθά, είναι [304, 393] για χαμηλής διαφοροποίησης και [36, 62] για υψηλής διαφοροποίησης.

Υποθέτοντας πως το προφίλ των διαφόρων πελατών είναι δυνατόν να περιγράφεται συνολικά από τα 7 διαφορετικά σενάρια ως προς τις τιμές των παραμέτρων της κατανομής Βήτα, ενώ αυτά κατανέμονται ομοιόμορφα στον πληθυσμό των πελατών της υπό εξέτασης εταιρίας, είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι μέσες τιμές των χρόνων απορρόφησης, καθώς και η διασπορά αυτών, για κάθε σενάριο ελέγχου και κατάσταση εκκίνησης. Ο παρακάτω πίνακας παρέχει τα συγκεκριμένα στοιχεία.

πίνακας 5.2: *Στατιστικά στοιχεία χρόνων απορρόφησης ανά σενάριο ελέγχου και θέση εκκίνησης*

Σενάριο ελέγχου	Στατιστικά	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
Α	Mean	11544,9	11546,3	11544,7	11546,7	11547,9	11546,6	11546,1	11544,1	11548,1	11544,9	11547,3
	C.V.	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041
Β	Mean	1582,4	1583,9	1580,9	1585,0	1585,3	1584,9	1583,4	1579,7	1585,7	1583,6	1585,1
	C.V.	0,254	0,254	0,254	0,254	0,254	0,254	0,254	0,255	0,254	0,254	0,254
Γ	Mean	352,7	353,4	351,0	354,3	355,0	353,6	353,1	350,6	355,0	351,9	354,6
	C.V.	0,073	0,073	0,073	0,073	0,072	0,073	0,073	0,073	0,072	0,073	0,072
Δ	Mean	46,7	47,4	42,0	48,6	49,3	47,6	47,0	42,0	49,1	43,0	49,3
	C.V.	0,154	0,154	0,139	0,151	0,159	0,154	0,148	0,139	0,154	0,136	0,159

Εξαρχής, είχε γίνει η παρατήρηση της υψηλής ομοιογένειας των αποτελεσμάτων που αφορούσαν στο πρώτο σενάριο ελέγχου (Α: καταναλωτικά αγαθά χαμηλής διαφοροποίησης). Το γεγονός αυτό πιστοποιείται, συγκρίνοντας το μέτρο διασποράς των αποτελεσμάτων αυτών ($A_{C.V.}$) με τα των υπολοίπων σεναρίων ελέγχου. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποδοθεί στο ότι οι καταναλωτές (όπως περιεγράφη και στα τμήματα 3.6 και 4.2.1.β) δεν εμφανίζουν καμία δέσμευση ως προς οποιαδήποτε φίρμα, λόγω του πολύ χαμηλού επιπέδου αφοσίωσης του κλάδου, αλλά και του κόστους μεταστροφής του πελάτη. Επίσης, το γεγονός ότι τα συγκεκριμένα αγαθά δε συνιστούν σημαντικό πραγματικό κόστος για τον καταναλωτή και κατά συνέπεια ο καταναλωτής αγοράζει διαχρονικά με γνώμονα λοιπούς μη οικονομικούς παράγοντες (όπως για παράδειγμα το κατάστημα που βρίσκεται πιο κοντά του τη χρονική στιγμή κατά την οποία προκύπτει η ανάγκη), ενισχύει περαιτέρω την παραπάνω παρατήρηση.

Η μεγαλύτερη διασπορά παρατηρήσεων, παρατηρείται για το σενάριο όπου αναφέρεται σε χαμηλά διαφοροποιημένα καταναλωτικά αγαθά (Γ). Ως αιτία μπορεί να θεωρηθεί το γεγονός, ότι ενώ στο συγκεκριμένο σενάριο είναι υπαρκτή η ιδιότητα της αφοσίωσης (λόγω υψηλής διαφοροποίησης), τα αγαθά που περιγράφει συνοδεύονται από πολύ μικρό κόστος (πραγματικό αλλά και κόστος μεταστροφής). Κατά συνέπεια ενώ κάποιοι πελάτες ενδέχεται να εμφανίζουν αφοσίωση, κάποιοι άλλοι αναμένεται να πραγματοποιούν συναλλαγές πιο «ελεύθερα».

Η μεγαλύτερη ποσοστιαία απόκλιση μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης τιμής (χρόνων απορρόφησης), παρατηρείται για το σενάριο Δ (υψηλά διαφοροποιημένα διαρκή αγαθά). Το σενάριο αυτό (όπως έχει περιγραφεί και στα τμήματα 3.6 και 4.2.1.ε), εμφανίζει την υψηλότερη αφοσίωση, γεγονός που μπορεί να αιτιολογήσει επαρκώς τη συγκεκριμένη παρατήρηση. Η συγκεκριμένη διαφορά, φτάνει κατά το μέγιστο της (σε απόλυτες τιμές) τις 26 περιόδους (βλ. σχήμα 5.10), ενώ η μέγιστη ποσοστιαία απόκλιση των μέσων τιμών σε σχέση με τη θέση εκκίνησης, φτάνει τις 17,38 ποσοστιαίες μονάδες.

5.2.3 <u>Αναμενόμενη Διαχρονική αξία</u>

Ο επόμενος πίνακας (πίνακας 5.3) περιλαμβάνει τις μέσες τιμές και τη διασπορά για κάθε σενάριο ελέγχου και θέση εκκίνησης του συστήματος.

πίνακας 5.3: *Στατιστικά Διαχρονικής αξίας Καταναλωτή, ανά σενάριο ελέγχου και θέση εκκίνησης*

Σενάριο ελέγχου	Στατιστικά	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
Α	Mean	0,752	0,715	0,638	0,705	0,802	0,721	0,712	0,633	0,811	0,648	0,782
	C.V.	0,022	0,024	0,019	0,026	0,027	0,021	0,025	0,019	0,030	0,019	0,021
Β	Mean	1,733	1,687	1,459	1,754	1,849	1,704	1,679	1,434	1,862	1,510	1,823
	C.V.	0,027	0,028	0,023	0,026	0,033	0,025	0,029	0,024	0,036	0,021	0,028
Γ	Mean	0,598	0,572	0,469	0,592	0,655	0,577	0,570	0,463	0,663	0,481	0,641
	C.V.	0,018	0,020	0,015	0,016	0,029	0,017	0,022	0,016	0,034	0,015	0,021
Δ	Mean	0,678	0,691	0,254	0,806	1,013	0,720	0,677	0,239	1,006	0,285	1,028
	C.V.	0,090	0,097	0,054	0,083	0,120	0,096	0,097	0,052	0,117	0,057	0,126

Τα συγκεκριμένα στοιχεία αφορούν στις πρώτες 10 περιόδους της λειτουργίας του μοντέλου. Η (μέση) αναμενόμενη CLV (όπως επανελήφθει στην ενότητα 4.5), έχει αποδοθεί σε σχετικές τιμές. Εντούτοις υπενθυμίζεται ότι η αναλογία πραγματικών περιόδων μεταξύ των 2 πρώτων σεναρίων (Α, Β) και των 2 τελευταίων (Γ, Δ), είναι περίπου 12 προς 1. η αναλογία αυτή προκύπτει μέσω του προεξοφλητικού επιτοκίου (μηνιαία για σενάρια Α, Β και ετήσιο για Γ, Δ) που χρησιμοποιήθηκε για κάθε σενάριο (βλ. § 4.4). Για τω λόγω αυτόν, για την ώρα είναι δυνατή η σύγκριση της CLV μόνο ανά 2 σενάρια (Α – Β και Γ – Δ).

Η ιδιαίτερα μεγάλη απόκλιση μεταξύ των μέσων για τα πρώτα 2 σενάρια, σε σχέση και με τα παρόμοια επίπεδα διασποράς, αφήνει σαφέστατους υπαινιγμούς για τα οφέλη από την ύπαρξη της ιδιότητας της διαφοροποίησης μεταξύ 2 αγορών που πραγματεύονται κατά τα λοιπά, ίδιο είδος προϊόντων. Η παρατήρηση αυτή, δε γίνεται εύκολα αντιληπτή για τα υπόλοιπα 2 σενάρια, λόγω της διαφοράς στη διασπορά των παρατηρήσεων. Για τω λόγω αυτόν κρίνεται επιτακτικός ο έλεγχος της διαφοράς των μέσων για κάθε δεδομένη θέση εκκίνησης, και κάθε σενάριο ελέγχου.

Οι έλεγχοι που πραγματοποιήθηκαν, αφορούσαν στην αναζήτηση των ιδιοτήτων (περιγραφόμενες από τη θέση εκκίνησης) οι οποίες ενδέχετω να δημιουργούσαν αποκλίσεις από τη μέση αναμενόμενη CLV ανά σενάριο ελέγχου. Υπό το πρίσμα αυτό διενεργήθηκαν έλεγχοι 8 διαφορετικών περιπτώσεων, ως ακολούθως:

- Περίπτωση 1η: Επίδραση χαμηλής ικανοποίησης κατά την εκκίνηση του μοντέλου (S=1) στη μέση αναμενόμενη CLV (ανάλυση αποκλίσεων μεταξύ w_2 και w_3)

- Περίπτωση 2η: Επίδραση μέτριας ικανοποίησης (S=2) κατά την εκκίνηση του μοντέλου στη μέση αναμενόμενη CLV (ανάλυση αποκλίσεων μεταξύ w_2 και w_4)
- Περίπτωση 3η: Επίδραση υψηλής ικανοποίησης (S=3) κατά την εκκίνηση του μοντέλου στη μέση αναμενόμενη CLV (ανάλυση αποκλίσεων μεταξύ w_2 και w_3)
- Περίπτωση 4η: Επίδραση χαμηλής κατανάλωσης (επιφυλακτικότητα) κατά την εκκίνηση του μοντέλου στην μέση αναμενόμενη CLV (ανάλυση αποκλίσεων μεταξύ w_2 και w_{12})
- Περίπτωση 5η: Επίδραση «υψηλής» κατανάλωσης (επαλήθευση) κατά την εκκίνηση του μοντέλου στην μέση αναμενόμενη CLV (ανάλυση αποκλίσεων μεταξύ w_2 και w_{12})
- Περίπτωση 6η: Διαφοροποιήσεις στα μέσα επίπεδα CLV που μπορούν (πιθανώς να αποδοθούν στα διαφορετικά επίπεδα έντασης κατανάλωσης (επιφυλακτικότητα – επαλήθευση: ανάλυση αποκλίσεων μεταξύ w_{12} και w_{13})
- Περίπτωση 7η: Επίδραση υψηλής κατανάλωσης (επαλήθευση) κατά την εκκίνηση του μοντέλου στην μέση αναμενόμενη CLV απαλλαγμένη από της επιδράσεις της ικανοποίησης (ανάλυση αποκλίσεων μεταξύ αποκλίσεων των ζευγών $w_3 – w_5$ και $w_{14} – w_{15}$)
- Περίπτωση 8η: Επίδραση χαμηλής κατανάλωσης (επιφυλακτικότητα) κατά την εκκίνηση του μοντέλου στην μέση αναμενόμενη CLV απαλλαγμένη από της επιδράσεις της ικανοποίησης (ανάλυση αποκλίσεων μεταξύ αποκλίσεων των ζευγών $w_3 – w_5$ και $w_{16} – w_{17}$)

Οι πίνακες των αποτελεσμάτων, περιλαμβάνονται στο παράρτημα (§Π.3 - Πίνακες Αποτελεσμάτων – Έλεγχος διαφοράς μέσων ανά σενάριο ελέγχου). Άξιο παρατήρησης είναι το γεγονός ότι κάθε κατάσταση εκκίνησης εμφανίζει στρεβλώσεις στη μέση αναμενόμενη διαχρονική αξία ενός καταναλωτή και για κάθε σενάριο ελέγχου, Ωστόσο, για το σενάριο Δ (υψηλά διαφοροποιημένα διαρκή αγαθά), αποδεικνύεται ότι η μέση CLV είναι ανεξάρτητη του επιπέδου κατανάλωσης που περιγράφεται από τις συμπεριφορικές μεταβλητές F, M. Κατά συνέπεια, οι διαφοροποιήσεις αφορούν μόνο στα διαφορετικά επίπεδα της παρατηρούμενης

ικανοποίησης. Κάτι τέτοιο μπορεί να αποδοθεί στα υψηλά επίπεδα αφοσίωσης που αναμένονται στη συγκεκριμένη μορφή αγοράς.

Για την περαιτέρω ανάλυση του CLV μεταξύ του συνόλου των διαφόρων σεναρίων, καθώς και τα εν δυνάμει οφέλη που τα συνοδεύουν είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός της μέσης διαχρονικής αξίας, ανά αντικειμενική περίοδο. Στον επόμενο πίνακα, οι τιμές έχουν προσδιοριστεί με περίοδο βάσης των 1 μήνα.

πίνακας 5.3: *Μέση Διαχρονική Αξία Καταναλωτή, ανά «αντικειμενική» περίοδο ελέγχου*

Σενάριο ελέγχου	Στατιστικά	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
Α	Mean	0,006	0,006	0,005	0,006	0,007	0,006	0,006	0,005	0,007	0,005	0,007
Β		0,014	0,014	0,012	0,015	0,015	0,014	0,014	0,012	0,016	0,013	0,015
Γ		0,060	0,057	0,047	0,059	0,066	0,058	0,057	0,046	0,066	0,048	0,064
Δ		0,068	0,069	0,025	0,081	0,101	0,072	0,068	0,024	0,101	0,028	0,103

Αν θεωρηθεί ότι καθώς αυξάνουν τα κόστη μεταστροφής αλλά και η συμμετοχή του καταναλωτή, αυξάνει και η ισχύς της αφοσίωσης εντός των διαφόρων μορφών αγοράς, γίνεται πλέον ξεκάθαρο το πώς μεταβάλλονται τα οικονομικά οφέλη για τις διάφορες επιχειρήσεις. Δεδομένης της υψηλής ικανοποίησης, μία εταιρία η οποία δραστηριοποιείται σε έναν κλάδο με εντονότατη την ιδιότητα της αφοσίωσης, είναι δυνατό να λαμβάνει κέρδη αυξημένα ακόμα και κατά 1416,8% για κάθε περίοδο – μήνα (δεδομένων των υποθέσεων που έχουν προηγηθεί σχετικά και με τα κόστη διατήρησης). Δηλαδή την εν δυνάμει ποσοστιαία μεταβολή μεταξύ των σεναρίων Α και Δ, όταν το σύστημα εκκινεί από τη θέση υψηλής ικανοποίησης (w_5). Εντούτοις, ακόμα και όταν δεν είναι δυνατό να γνωρίζουμε από ποια κατάσταση εκκινεί ένας πελάτης ή κατά ποια χρονική περίοδο εκκινεί, τα εν δυνάμει οικονομικά οφέλη από την ύπαρξη έντονης αφοσίωσης (μεταξύ του σεναρίου Δ και του Α) αναμένεται να είναι υψηλότερα κατά 981,5% ($\frac{[\Delta(w_1) - \mathrm{A}(w_1)]}{\mathrm{A}(w_1)}$). Αξίζει εντούτοις να σημειωθεί πως η παρούσα ανάλυση, αφορά σε βραχυχρόνια πλαίσια. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αναμένεται να παρουσιάσει η εξέταση των οφελών της αφοσίωσης στο διηνεκές.

Ο επόμενος πίνακας (πίνακας 5.4) περιλαμβάνει τα οφέλη της αφοσίωσης για τα διάφορα σενάρια (ως προς τη διαχρονική αξία ενός τυχαίου πελάτη), θεωρώντας ως σενάριο βάσης τα χαμηλά διαφοροποιημένα καταναλωτικά αγαθά (σενάριο Α).

πίνακας 5.4: Μέσα σχετικά οφέλη αφοσίωσης με σενάριο βάσης Α

Σενάριο ελέγχου	Στατιστικά	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
Α	Mean	0,006	0,006	0,005	0,006	0,007	0,006	0,006	0,005	0,007	0,005	0,007
Β		1,305	1,361	1,288	1,488	1,306	1,364	1,359	1,266	1,295	1,331	1,329
Γ		8,549	8,604	7,826	9,076	8,810	8,606	8,604	7,784	8,800	7,907	8,829
Δ		9,815	10,605	3,787	12,722	14,168	10,987	10,411	3,536	13,875	4,277	14,774

5.2.4 Άριστοι χρόνοι διακοπής πελατειακής σχέσης

Ως άριστος χρόνος διακοπής της πελατειακής σχέσης, προσδιορίζεται η περίοδος κατά την οποία τα αναμενόμενα κέρδη γίνονται μηδενικά. Αντίστοιχα, κάθε εταιρία μπορεί να θέσει διαφορετικές συνθήκες για τον προσδιορισμό των συγκεκριμένων μεγεθών, όπως τα αναμενόμενα κέρδη να προσεγγίζουν ένα κατώτατο αυστηρά θετικό επίπεδο. Η επισκόπηση των διαφορετικών παραμέτρων περιγραφής της κατανομής Βήτα (α, β), παρέχει ένα εκτιμώμενο εύρος των άριστων χρόνων διακοπής της πελατειακής σχέσης, από το σύνολο του πληθυσμού των πελατών της εταιρίας. Με τον τρόπο αυτόν, οι παρατηρήσεις δε σταθμίζονται (όπως για παράδειγμα γίνεται όταν εκτιμάται το μέσο εύρος), λαμβάνοντας υπόψη κάθε προφίλ πελάτη, όσο δύσκολο και αν είναι αυτό να παρατηρηθεί. Το εύρος τιμών για κάθε σενάριο ελέγχου, ανεξαρτήτου σημείου εκκίνησης, καθώς και κάποιες πληροφορίες σχετικά με την κατανομή των παρατηρήσεων αυτών, δίνεται στον παρακάτω πίνακα (πίνακας 5.5):

πίνακας 5.5: *Μέσοι χρόνοι απορρόφησης και στατιστικά στοιχεία, ανά σενάριο ελέγχου*

		Εύρος τιμών		Στατιστικά		
		Μέγιστο	Ελάχιστο	Μέσος	Διάμεσος	C.V.
Σενάριο ελέγχου	Α	1327	1381	1351,725	1347	0,012
	Β	564	930	734,067	723	0,190
	Γ	77	87	82,275	83	0,03
	Δ	21	37	27,883	27	0,182

Οι αρχικές επισημάνσεις για τη διασπορά των παρατηρήσεων ως προς τους χρόνους απορρόφησης ανά σενάριο ελέγχου, διατηρούνται. Η σύγκριση του μέσου για κάθε σενάριο ελέγχου, με την αντίστοιχη διάμεσο, μπορεί να δώσει μία σύντομη εκτίμηση της ασυμμετρίας της κάθε κατανομής. Μπορεί να υποτεθεί, ότι για τα σενάρια ελέγχου Γ, και Δ η κατανομή προσεγγίζει την κατανομή. Αντίθετα, για τα 2 πρώτα σενάρια, παρατηρείται αριστερή ασυμμετρία των παρατηρήσεων.

Οι τιμές των παραμέτρων α και β για τις οποίες εμφανίζονται ακρότατα, ανά σενάριο ελέγχου, είναι οι ακόλουθες:

- Σενάριο ελέγχου Α:
  ελάχιστη τιμή: 1327, (α, β) = (5, 25)
  μέγιστη τιμή: 1381, (α, β) = (1, 1)
- Σενάριο ελέγχου Β
  ελάχιστη τιμή: 564, (α, β) = (4, 2)
  μέγιστη τιμή: 930, (α, β) = (5, 25)
- Σενάριο ελέγχου Γ:
  ελάχιστη τιμή: 77, (α, β) = (4, 2)
  μέγιστη τιμή: 87, (α, β) = (2, 4)
- Σενάριο ελέγχου Δ:
  ελάχιστη τιμή: 21, (α, β) = (4, 2)
  μέγιστη τιμή: 37, (α, β) = (1, 1)

Το γεγονός της παρατήρησης ακροτάτων τιμών για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων α και β, γεννά την ανάγκη για εύρεση τυχόν περιπτώσεων οι οποίες κυριαρχούν έναντι των υπολοίπων. Περιπτώσεις δηλαδή, οι οποίες για κάθε σενάριο ελέγχου συστηματικά δίνουν καλύτερες τιμές. Η κατάταξη των διαφόρων περιπτώσεων παραμέτρων των κατανομών α και β για τα διάφορα σενάρια ελέγχου, δίνεται ακολούθως:

- Σενάριο ελέγχου Α: $(5,25) < (5,10) < (5,5) < (4,2) < (2,4) < (2,2) < (1,1)$
- Σενάριο ελέγχου Β: $(4,2) < (5,5) < (2,2) < (1,1) < (5,10) < (2,4) < (5,25)$
- Σενάριο ελέγχου Γ: $(4,2) < (5,5) < (2,2) < (5,10) < (5,25) < (1,1) < (2,4)$
- Σενάριο ελέγχου Δ: $(4,2) < (5,5) < (5,10) < (5,25) < (2,2) < (2,4) < (1,1)$

Άξιο παρατήρησης είναι το γεγονός ότι, για κάποιες τιμές των παραμέτρων, για όλα τα σενάριο παρατηρούνται γνησίως καλύτερες επιδόσεις σε ότι αφορά τους άριστους χρόνους διακοπής (ενώ για το σύνολο των περιπτώσεων δεν είναι δυνατή η σύγκριση γενικά). Οι παρατηρήσεις αυτές, συνοψίζονται παρακάτω:

- $(5,10) < (2,4)$
- $(4,2) < (2,2) < (1,1)$
- $(4,2) < (2,4)$
- $(5,5) < (2,4)$

Συσχετίζοντας τις επιμέρους κατατάξεις μεταξύ των διαφόρων σεναρίων ελέγχου, είναι δυνατό να προσδιοριστεί ένας δείκτης της ομοιομορφίας της λειτουργίας των σεναρίων ως προς τις ιδιότητες και τη νομοτέλειά τους. Ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall[58], φαντάζει το καλύτερο μέτρο εκτίμησης, δεδομένου ότι τα δεδομένα ως προς τις τιμές των α και β αφορούν σε κατατάξεις. Ο παρακάτω πίνακας (πίνακας 5.6) παρέχει τις εκτιμήσεις αυτές:

πίνακας 5.6: *Συσχετίσεις*

			Α	Β	Γ	Δ
Kendall's tau	Α	Συντελεστής συσχέτισης	1,000	-,238	-,143	-,048
		Sig. (2-tailed)	.	,453	,652	,881
		N	7	7	7	7
	Β	Συντελεστής συσχέτισης	-,238	1,000	-,048	,429
		Sig. (2-tailed)	,453	.	,881	,176
		N	7	7	7	7
	Γ	Συντελεστής συσχέτισης	-,143	-,048	1,000	-,238
		Sig. (2-tailed)	,652	,881	.	,453
		N	7	7	7	7
	Δ	Συντελεστής συσχέτισης	-,048	,429	-,238	1,000
		Sig. (2-tailed)	,881	,176	,453	.
		N	7	7	7	7

Η υψηλότερη τιμή του δείκτη Ταυ (t), εμφανίζεται κατά τη σύγκριση της κατάταξης των παραμέτρων α και β των σεναρίων ελέγχου Β και Δ. Ωστόσο, ακόμα και η συγκεκριμένη τιμή δεν εμφανίζει στατιστική σημαντικότητα (για επίπεδο σημαντικότητας 5% και κατά ακολουθία μπορεί να αποδοθεί σε τυχαιότητα). Κατά συνέπεια, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο άριστος χρόνος διακοπής μίας πελατειακής σχέσης, εξαρτάται τόσο από τη μορφή της αγοράς, όσο και από το καταναλωτικό προφίλ έκαστου πελάτη.

Υπενθυμίζεται εντούτοις, ότι για την εκτίμηση των μέτρων κεντρικής τάσης και διασποράς αλλά και των υπολοίπων μεγεθών, έχει υποτεθεί ότι η πιθανότητα παρατήρησης των διαφόρων καταναλωτικών μοτίβων, τα οποία περιγράφονται από

[58] βλ. Kendall's tau

τις διαφορετικές τιμές των παραμέτρων της κατανομής Βήτα, είναι ίση για όλες τις περιπτώσεις.

Παραταύτα, κάθε επιχείρηση, γνωρίζοντας το δυνατό εύρος τιμών για το σύνολο των πελατών της και για την αγορά στην οποία δραστηριοποιείται, είναι δυνατό να εξετάσει διαφορετικά σενάρια αποδοτικότητας μίας συγκεκριμένης στρατηγικής, όπως βέλτιστη και χείριστη απόδοση. Επίσης, είναι σε θέση να προσδιορίσει τη μέση αναμενόμενη διαχρονική αξία ανά περίοδο, σε αντιστοιχία με τον άριστο χρόνο διακοπής μίας τυχαίας πελατειακής σχέσης και το εύρος τιμών αυτού. Έτσι, με τον τρόπο αυτόν, είναι δυνατή η εκτίμηση της άριστης αναμενόμενης CLV.

5.2.5 Άριστη αναμενόμενη διαχρονική αξία

Το συγκεκριμένο μέγεθος, αποτελεί τον πλέον σημαντικό δείκτη για κάθε επιχείρηση, καθώς θεωρείται το μέτρο εκτίμησης της αποδοτικότητας ενός πελάτη διαχρονικά. Προσδιορίζοντάς το, η κάθε εταιρία έχει πλέον τη δυνατότητα να κατατάξει τους διαφόρους πελάτες της σε ομοιογενείς ομάδες αποδοτικότητας και εν συνεχεία να διαμορφώσει στοχευμένες στρατηγικές (βλ. § 2.7) για κάθε τέτοια ομάδα, μεγιστοποιώντας τα εν δυνάμει οφέλη.

Στον επόμενη πίνακα (πίνακας 5.7), παρουσιάζεται η μέση διαχρονική αξία ενός τυχαίου πελάτη, σταθμισμένη ως προς τα διάφορα καταναλωτικά μοτίβα (διάφορες τιμές παραμέτρων α και β).

πίνακας 5.7: Άριστη Διαχρονική Αξία ανά σενάριο ελέγχου και θέση εκκίνησης

Σενάριο ελέγχου	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
Α	23,140	23,124	23,023	23,117	23,231	23,132	23,120	23,015	23,243	23,040	23,208
Β	24,927	25,015	24,498	25,196	25,352	25,115	24,965	24,340	25,379	24,813	25,299
Γ	1,411	1,395	1,253	1,429	1,503	1,402	1,391	1,241	1,512	1,276	1,484
Δ	0,800	0,825	0,314	0,964	1,196	0,858	0,808	0,295	1,188	0,352	1,213

Είναι σαφές το γεγονός, ότι η θέση εκκίνησης παίζει σημαντικότατο ρόλο στη διαμόρφωσης της αξίας του πελάτη στο διηνεκές (μέχρι τον άριστο χρόνο διακοπής της πελατειακής σχέσης). Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, οι καταστάσεις οι οποίες περιγράφουν υψηλότερα επίπεδα ικανοποίησης, παρουσιάζουν συστηματικά υψηλότερες επιδόσεις της CLV. Εντούτοις, πρέπει να αναφερθεί ότι τα παραπάνω μεγέθη δεν είναι δυνατό να συγκριθούν μεταξύ τους, ούτε και ανά ζεύγη (βάσει είδους αγαθού), καθώς για κάθε σενάριο ελέγχου, αλλά και θέση εκκίνησης,

παρουσιάζονται διαφορετικοί άριστοι χρόνοι διακοπής. Αποτέλεσμα, να μη μπορούν να γίνουν εύκολα αντιληπτά τα οφέλη της αφοσίωσης. Ο επόμενος πίνακας (πίνακας 5.8) παρουσιάζει την μέση αναμενόμενη CLV ανά αντικειμενική περίοδο (μήνα).

πίνακας 5.8: *Στατιστικά στοιχεία Άριστης Διαχρονικής Αξίας, ανά σενάριο ελέγχου και θέση εκκίνησης*

Σενάριο ελέγχου	Στατιστικά	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
Α	Μέσος	0,00143	0,00143	0,00142	0,00142	0,00143	0,00143	0,00143	0,00142	0,00143	0,00142	0,00143
	Διασπορά	0,01757	0,01774	0,01749	0,01783	0,01778	0,01762	0,01780	0,01752	0,01790	0,01749	0,01773
Β	Μέσος	0,00282	0,00283	0,00278	0,00285	0,00287	0,00284	0,00283	0,00276	0,00287	0,00281	0,00286
	Διασπορά	0,02081	0,02073	0,02127	0,02039	0,02132	0,02017	0,02105	0,02163	0,02172	0,02077	0,02015
Γ	Μέσος	0,01714	0,01695	0,01535	0,01725	0,01813	0,01701	0,01690	0,01526	0,01822	0,01558	0,01790
	Διασπορά	0,01091	0,01245	0,01217	0,00937	0,01587	0,01213	0,01350	0,01051	0,01635	0,00896	0,01073
Δ	Μέσος	0,02869	0,02911	0,01300	0,03309	0,03953	0,02997	0,02881	0,01228	0,03942	0,01425	0,03991
	Διασπορά	0,01660	0,02297	0,01217	0,01164	0,04110	0,02259	0,01761	0,00955	0,04129	0,01562	0,03839

Γίνεται πλέον ξεκάθαρο, ότι η αναμενόμενη CLV ανά («αντικειμενική») περίοδο, εξαρτάται τόσο από την κατάσταση εκκίνησης του πελάτη (ειδικά το επίπεδο ικανοποίησης w_3-w_5, καθώς το σενάριο που συγκρίνει τα ακραία επίπεδα κατανάλωσης για δεδομένα επίπεδα ικανοποίησης w_{12}-w_{13} δεν παρουσιάζει σημαντικές διαφοροποιήσεις), όσο και τη δομή της αγοράς στην οποία δραστηριοποιείται μία εταιρία (σενάριο ελέγχου).

Τα οφέλη από την αφοσίωση, μπορούν να «μεταφραστούν» και ως οφέλη της εταιρίας, χάριν διαφοροποίησης ή μονοπωλιακής διάρθρωσης της αγοράς στην οποία δραστηριοποιείται. Δηλαδή, τα οφέλη που προκύπτουν από την επιτυχημένη διαφοροποίηση μίας εταιρίας εντός συγκεκριμένου κλάδου παραγωγής, γεγονός (που όπως προαναφέρθηκε στο τμήμα 3.6.1) που επιτρέπει στην εταιρία αυτή να πραγματοποιεί κέρδη μονοπωλητή.

Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα αλλά και τις υποθέσεις υπό τις οποίες διενεργήθηκε η παρούσα έρευνα, τα συγκεκριμένα οφέλη (οικονομικά) ανά είδος αγαθού μπορούν να φτάσουν ακόμα και 100,25% για καταναλωτικά αγαθά, ενώ για διαρκή ακόμα και 122,93% (υπό την προϋπόθεση της υψηλής ικανοποίησης).

5.3 Συμπεράσματα

Οι παράγοντες κατάτμησης της αγοράς (βλ. § 3.6), ενέχουν ιδιότητες οι οποίες τείνουν να διαμορφώνουν και να διαφοροποιούν σημαντικότατα τα διάφορα μεγέθη που συνοδεύουν την ανάλυση της CLV. Με τη γνώση αυτή, κάθε επιχείρηση μπορεί να γνωρίζει τα εν δυνάμει οφέλη (κυρίως οικονομικά) από το λανσάρισμα μίας διαφημιστικής καμπάνιας με στόχο τη διαφοροποίηση του αγαθού της.

Επιπρόσθετα, ομαδοποιώντας κάθε επιχείρηση τους πελάτες σύμφωνα με την ιδιότητα του καταναλωτικού τους μοτίβου (όπως περιεγράφη από τις τιμές των παραμέτρων α και β της κατανομής Βήτα), έχει τη δυνατότητα να γνωρίζει την εν δυνάμει αποδοτικότητα στο διηνεκές για κάθε δυνητικό πελάτη της (βλ. § 2.7, prospects). Αυτό έχει ως συνέπεια την εκ των προτέρων γνώση των ιδανικών στρατηγικών κινήσεων από πλευράς επιχείρησης, με σκοπό τη μεγιστοποίηση της αποδοτικότητας του συγκεκριμένου πελάτη.

Επίσης, η επιτυχία κάθε στρατηγικής της έκαστου εταιρίας, μπορεί να αποτιμάται με τη βοήθεια της CLV, λαμβάνοντας υπόψη και τη χρονική διάσταση. Ωστόσο, πρέπει να δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στην πρώτη επαφή με τον πελάτη, καθώς όπως αποδεικνύεται, η αρχική κατάσταση του πελάτη τουλάχιστον σε ότι αφορά την ικανοποίηση που αυτός αποκόμισε (κατά την πρώτη επαφή με την εταιρία), συνιστά ένας ακόμα παράγοντα διαφοροποίησης της CLV.

Επιπλέον, ιδιαίτερη βαρύτητα θα πρέπει να δίνεται στο σχεδιασμό του διανύσματος επιβράβευσης, προσδιορίζοντας με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια τα κόστη που συνιστά κάθε συναλλαγή (κατά τις περιόδους όπου ο πελάτης εμφανίζεται να επαναλαμβάνει αγορά – ενεργός) αλλά και διατήρηση πελατειακής σχέσης (κατά τις περιόδους όπου ο πελάτης παρατηρείται ανενεργός). Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει στην επιλογή του άριστου κόστους απόκτησης και διατήρησης, το οποίο θα μεγιστοποιεί την CLV κάθε πελάτη.

Ο προσδιορισμός των άριστων χρόνων διακοπής κάθε πελατειακής σχέσης, παρέχει στην εταιρία τη δυνατότητα ελαχιστοποίησης του κόστους που συνιστά κάθε τέτοια σχέση. Το γεγονός αυτό, σε σχέση και με τα παραπάνω, μπορεί να δώσει το άριστο κόστος για κάθε στρατηγική.

5.4 Μελλοντικοί στόχοι

Η δυναμική φύση τόσο της αγοράς γενικότερα, όσο και του μοντέλου το οποίο εφαρμόστηκε, καθιστούν επιτακτική την περαιτέρω επέκτασή του, με σκοπό τη βελτίωση της λειτουργίας του, αλλά και την εξεύρεση λοιπόν παραγόντων που επενεργούν στη νομοτέλειά του, στην προσπάθεια προσομοίωσης της πραγματικής συμπεριφοράς των καταναλωτών.

- Πρώτιστης ανάγκης, είναι το πάντρεμα του CLV με ένα άλλο καίριο θέμα της επιστήμης του Marketing, το Customer Segmentation. Δηλαδή, την ομαδοποίηση του

πληθυσμού των πελατών κάθε εταιρίας, με σκοπό τον προσδιορισμό του Customer Equity. Ο τελευταίος όρος αναφέρεται στη διαχρονική αξία του συνόλου των πελατών μίας εταιρίας, μέγεθος που αποτελεί το πλέον ιδανικό μέτρο της αποδοτικότητας μίας εφηρμοσμένης (ή προς εφαρμογή) στρατηγικής, αλλά και της γενικότερης αποδοτικότητας μίας εταιρίας που προκύπτει από τις κύριες εμπορικές της δραστηριότητες.

- Με τη βοήθεια της δημογραφικής επιστήμης, είναι δυνατό να λάβουμε περισσότερες πληροφορίες γύρω από το καταναλωτικό προφίλ δυνητικών πελατών, εξετάζοντας εν ενεργεία πελάτες, ομαδοποιώντας τους βάσει συγκεκριμένων παρατηρηθέντων δημογραφικών τους στοιχείων κι εν τέλει κατηγοριοποιώντας τους εν δυνάμει πελάτες στις κατηγορίες αυτές για αντίστοιχα παρατηρηθέντα δημογραφικά στοιχεία..

- Μία ακόμα ενδιαφέρουσα πρόταση είναι η προσπάθεια προσδιορισμού της πιθανότητας η αύξηση της πελατειακής αφοσίωσης ή ακόμα και του delightment από τις επιχειρήσεις, (για παράδειγμα μέσω συμβολαίων - επιδοτήσεων ή άλλων προγραμμάτων επιβράβευσης και αφοσίωσης, όπως τα miles που αφορούν σε εταιρίες αερομεταφορών) να οδηγεί σε απορροφητικές καταστάσεις επανάληψης αγοράς.. Γεγονός που αποτελεί την πλέον επιθυμητή κατάσταση από πλευράς επιχειρήσεων. Ωστόσο, θα πρέπει πρώτα να προσδιοριστεί σαφώς με τη βοήθεια των συμπεριφορικών μεταβλητών η ιδιότητα της αφοσίωσης.

- Επιπρόσθετα, θα πρέπει να γίνουν προσπάθειες ενσωμάτωσης του referral value, δηλαδή των οφελών από το word-of-mouth, για τον σωστότερο προσδιορισμό του CLV. Ένα απτότατο παράδειγμα, για το πώς μπορεί να επενεργεί το word-of-mouth, μπορεί να αντληθεί με τη βοήθεια της επιστήμης της ψυχολογίας και συγκεκριμένα την ψυχολογία της μάζας (Crowd Psychology) και τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώνονται οι πεποιθήσεις και οι ανάγκες ενός ατόμου μέσα σε ένα κοινωνικό σύνολο στο οποίο είναι πλήρως ενταγμένο (ένα άτομο – μονάδα). Ιδανικό παράδειγμα είναι το πείραμα με το κύμα στις κερκίδες ενός γηπέδου. Μία ομάδα ατόμων (μικρού αριθμού μελών) μπορεί να συμπαρασύρει ολόκληρο το στάδιο σε κύμα. Αντλώντας ένα παρόμοιο φαινόμενο από το χώρο του Marketing, είναι η προσπάθεια δημιουργίας από πλευράς επιχειρήσεων κινητής τηλεφωνίας μίας ευρύτερης «υψηλά προνομιακής ομάδας» πελατών και η διαρκής διεύρυνση της

ομάδας αυτής, εντός της οποίας τα άτομα θα νιώθουν ότι ανήκουν σε ένα «εξέχον» σύνολο. Τέτοιες ομάδες είναι οι What's up για την Cosmote, η CU a lot για τη Vodafone και η Free 2 go (F2G) για τη Wind με target group κυρίως τους νέους.

- Σε ότι αφορά τώρα τη μεταβλητή R που ίσως είναι το βασικότερο τμήμα των μοντέλων R.F.M, προτείνεται μία πρωτότυπη διαδικασία για τον προσδιορισμό των διαφόρων επιμέρους καταστάσεων της, η οποία έχει τη δυνατότητα να απαλλάξει το μοντέλο από υποκειμενικότητες που θα αφορούν στη διάσταση του χρόνου. Εξετάζοντας την πληροφόρηση που σχετίζεται με τη μεταβλητή R, σε πρώτο βήμα εξάγεται η μέγιστη χρονική περίοδος κατά την οποία ενώ ο πελάτης παραμένει αδρανής (δεν πραγματοποιεί αγορά), και στη συνέχεια πραγματοποιεί αγορά. Ας θεωρηθεί η περίοδος αυτή T_R. Επίσης λαμβάνεται ένας σταθμισμένος μέσος της R είτε από το σύνολο της αγοράς (ανταγωνιστικές επιχειρήσεις, αν κι εφόσον η αγορά παρουσιάζει μεγάλο βαθμό ομοιογένειας – ανταγωνιστικότητας, όπως η αγορά κινητής τηλεφωνίας), είτε από το σύνολο της πελατείας της ίδιας της εταιρείας (όταν το προϊόν θεωρείται διαφοροποιημένο σε επίπεδο αγοράς, ή οι δομές της αγοράς τείνουν προς περισσότερο μονοπωλιακές μορφές – ολιγοπώλιο ή έντονος βαθμός διαφοροποίησης, όπως η αγορά ένδυσης). Λέγοντας σταθμισμένος μέσος και με γνώση των προβλημάτων που πιθανώς ενέχει ένα τέτοιο μέγεθος, εννοείται η απαλλαγή του μεγέθους από ακραίες τιμές Έτσι, είτε μπορούν να απομακρυνθούν εμπειρικά παρατηρήσεις με πολύ μικρή συχνότητα εμφάνισης είτε να αναζητηθεί ο ένας μέσος για τον οποίο θα μεγιστοποιείται ο αριθμός των παρατηρήσεων, ενώ ταυτόχρονα θα ελαχιστοποιείται η διακύμανση. Ας θεωρηθεί η περίοδος αυτή M_R. Ο αριθμός των διαφορετικών καταστάσεων θα είναι ο πλησιέστερος ακέραιος (στρογγυλοποιημένος προς τα πάνω) ο οποίος προκύπτει από το πηλίκο: $\frac{T_R}{M_R} = R_N$

- Σχετικά τώρα με τον προσδιορισμό του κόστους, στο διάνυσμα επιβράβευσης, ως κόστος μπορεί να λαμβάνεται το μεταβλητό κόστος ανά πελάτη (ενεργό), το οποίο αφορά στους δεσμευμένους πόρους από πλευράς επιχειρήσεως βραχυχρόνια, οι οποίοι καταναλίσκωνται στις διάφορες δραστηριότητες αυτής. Εντούτοις, αναφέρεται ότι υπάρχουν εργασίες οι οποίες έχουν κινηθεί προς την κατεύθυνση αυτήν. Ωστόσο η ιδιαιτερότητα της παραπάνω εφαρμογής καθιστά την ενσωμάτωση του κόστους υπό την μορφή αυτήν, μία άκρως δελεαστική πρόταση. Εναλλακτικά, δεδομένου ότι το κόστος θα αφορά στην οποιαδήποτε μορφή κόστους ανά πελάτη, θα είναι δυνατό να

λαμβάνεται είτε η κατανομή των ενεργών πελατών της επιχείρησης διαχρονικά και κατά επέκταση ο αριθμός των πελατών να προσδιορίζεται μέσω της κατανομής αυτής, ώστε να λαμβάνεται το κόστος ανά πελάτη, είτε ο αριθμός των ενεργών πελατών να αποτελέσει ένα ακόμα μέγεθος το οποίο θα λαμβάνεται επίσης με τη βοήθεια αλυσίδων Markov, προσδιορίζοντας έτσι σε κάθε μελλοντική χρονική στιγμή των αναμενόμενο αριθμό πελατών (ενεργών, ανενεργών και δυνητικών) Συνοψίζοντας, το συνολικό κόστος της επιχείρησης, μπορεί να αναλύεται ως εξής:

$$TC = FC + \overline{(VC - C_{marketing}) + C_{marketing}}^{AVC}$$

και

$$AVC^{*} = \frac{VC - C_{marketing}}{n_{ενεργοί\ +\ δυνητικοί\ πελάτες}} + C_{marketing} * (\frac{n_{ενεργών} + n_{δυνητικών} + n_{ανενεργών}}{N})$$

όπου:

- $C_{marketing}$: Το συνολικό κόστος που προέρχεται από κυρίως τις ενέργειες marketing, και αποσκοπεί στην απόκτηση (νέων) πελατών, αλλά και τη διατήρηση των ήδη υπαρχόντων (ενεργών και ανενεργών με σκοπό την επανάληψη αγοράς).
- N: ο συνολικός αριθμός πελατών (ενεργών, ανενεργών και δυνητικών)
- n_i: ο αριθμός των πελατών με την ιδιότητα i

Κατά συνέπεια το κόστος (αν λαμβάνεται το μέσο για λόγους απλούστευσης) που συνιστά ο κάθε πελάτης ο οποίος θα επαναλαμβάνει αγορά, θα είναι ίσο με:

$$AVC_{ενεργών\ πελατών} = \frac{VC - C_{marketing}}{n_{ενεργοί\ +\ δυνητικοί\ πελάτες}} + C_{marketing} * (\frac{n_{ενεργών} + n_{δυνητικών}}{N})$$

Ενώ το κόστος ανά πελάτη, ο οποίος θα παραμένει ανενεργός, θα είναι ίσο με:

$$AVC_{ανενεργών\ πελατών} = C_{marketing} * (\frac{n_{ανενεργών}}{N})$$

➢ Τέλος, ιδιαίτερη σημασία θα πρέπει να δοθεί στον προσδιορισμό της συμπεριφορικής μεταβλητής που αφορά στην ικανοποίηση. Όπως αναλύθηκε και στο

τμήμα 3.4, θα ήταν ενδιαφέρουσα η περίληψη όχι της ικανοποίησης αλλά εναλλακτικών μεγεθών που θα σταθμίζουν τη συσχέτιση μεταξύ συναισθηματικής κατάστασης καταναλωτή και επανάληψης αγοράς, πρόθεσης επαναγοράς, πιθανότητας μεταστροφής κ.α. (όπως αναλύθηκε και στο τμήμα 3.4). Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί η δυσκολία συγκέντρωσης τέτοιου είδους πληροφόρησης.

Βιβλιογραφία

[1] Bartels, Robert, (1988). *The History of Marketing Thought* (3rd edition). Columbus: Publishing Horizons.

[2] Σιώμκος, Γ., (2004). *Στρατηγικό Μάρκετινγκ* (2η Έκδοση). Εκδόσεις Σταμούλης.

[3] Nickolson, Walter, (1998). *Μικροοικονομική Θεωρία: βασικές αρχές και προεκτάσεις* (7η Έκδοση). Εκδόσεις Κριτική Επιστημονική Βιβλιοθήκη.

[4] Pfeifer, Phillip E. and Carraway, Robert, L., "Modeling Customer Relationships As Markov Chains". *Journal of Interactive Marketing*, 14 (2), Spring 2000, pp. 43-55

[5] Scarth, William, (2004). *Μακροοικονομική: Μία εισαγωγή σε προχωρημένες μεθόδους*. Εκδόσεις Κριτική

[6] Billingsley, Patrick, (1995). *Probability and Measure* (3rd Edition). John Wiley & Sons

[7] Revuz, D., (1984). *Markov Chains, (Revised Edition).* Elsevier Science Publishers B.V.

[8] Kijima, Masaaki, (1997). *Markov Processes for Stochastic Modeling*, (1st Edition). Chapman & Hal

[9] Berger, B. D. and Nasr N. I., Customer lifetime value: Marketing models and applications. *Journal of Interactive Marketing*, 12 (1): 1998, pp. 17 – 30.

[10] Paauwe, Peter and Van der Puuten, Peter and Van Wezel, Michiel. DTMC: An Actionable e-Customer Lifetime Value Model Based on Markov Chains and Decision Trees. *9th International Conference on Electronic Commerce*, August 2007, pp. 19 – 22.

[11] Sheldon, M. Ross, (1983). *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons

[12] Varian R. Hal, (1992). *Μικροοικονομική: Μία σύγχρονη προσέγγιση*. Εκδόσεις Κριτική Επιστημονική Βιβλιοθήκη

[13] Caves, R.E. and Williamson, P. J., "What Is Product Differentiation, Really?". *Journal of Industrial Economics*, Vol. 34, December 1985, pp. 113-132

[14] Shaked, A. and Sutton, J., "Product Differentiation and Industrial Structure", J*ournal of Industrial Economics,*Vol. 36, December 1987, pp. 131-146

[15] Singh, N. and Vives, X., "Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly". *Rand Journal of Economics*, Vol. 15, Winter 1984, pp. 546-554

[16] Larissa S. Kyj and Myroslaw J. Kyj., "Customer Service: Product Differentiation in International Markets", *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, Vol. 24 No. 4, 1994, pp. 41-49

[17] Chamberlin, E.H., *The Theory of Monopolistic Competition*, 6th ed., Harvard University press, Cambridge, MA, 1950

[18] Mittal Vikas and Kamakura Wagner A., *"Satisfaction, Repurchase Intent, and Repurchase Behavior: Investigating the Moderating Effect of Customer Characteristics"*, *Journal of Marketing Research*, Vol. 38, February 2001, pp. 131–142

[19] Anderson, E.W., "Cross-category variation in customer satisfaction and retention". *Marketing Letters*, Vol. 5(1), 1994, pp. 19–30.

[20] Anderson, E.W. *"Customer satisfaction and price tolerance"*. *Marketing Letters*, Vol. 7(3), 1996, pp. 265–274.

[21] Häckner Jonas, "A Note on Price and Quantity Competition in Differentiated Oligopolies". *Journal of Economic Theory*, Vol. 93, 2000, pp. 233–239.

[22] Johnson, D. Michael and Claes Fornell, "A Framework for Comparing Customer Satisfaction Across Individuals and Product Categories". *Journal of Economic Psychology*, Vol.12 (2), 1991, pp. 267-286.

[23] Anderson, E.W., Fornell, C. and Lehmann D.R., "Customer satisfaction, market share, and profitability: findings from Sweden". *Journal of Marketing*, Vol. 58 (3), 1994, pp. 53–66.

[24] Anderson, E.W., Fornell, C. and Rust, R. "Customer satisfaction, productivity, and profitability: differences between goods and services". *Marketing Science*, Vol. 16 (2), 1997, pp. 129–145.

[25] Yanqun He, Lai K. Chan and Siu-Keung Tse, “From consumer satisfaction to repurchase intention: The role of price tolerance in a competitive service market”. *Total Quality Management & Business Excellence*, Vol. 19 (9), September 2008, pp.949 — 961

[26] Kathleen Seiders, Glenn B. Voss, Dhruv Grewal, and Andrea L. Godfrey. “Do Satisfied Customers Buy More? Examining Moderating Influences in a Retailing Context”. *Journal of Marketing*, Vol. 69, October 2005, pp. 26–43

[27] Thomas O. Jones and W. Earl Sasser, Jr, *“Why satisfied customers defect”*. Harvard Business Review, Vol. 73, November–December 1995, pp. 88–99

[28] Edgar A. Pessemier, “A New Way to Determine Buying Decisions”. *Journal of Marketing*, Vol. 24, October 1959, pp. 41–46

[29] Anderson, Eugene W., and Mary W. Sullivan. "The Antecedents and Consequences of Customer Satisfaction". *Marketing Science*, Vol.12 Spring 1993, pp. 125-143.

[30] Anderson, R., *"*Consumer dissatisfaction: the effect of disconfirmed expectancy on perceived product performance*"*, *Journal of Marketing Research*, Vol. 10, 1973, pp. 38-44.

[31] Cummings W. Theodore and Ostrom L. Lonnie. “Measuring Price Thresholds Using Social Judgment Theory”. *Journal of the Academy of Marketing Science*, Vol. 10, No. 4, Fall 1982, pp. 395-409.

[32] Coulter Robin A. , Price Linda L. , Feick Lawrence and Micu Camelia. “The evolution of consumer knowledge and sources of information: Hungary in transition”. *Journal of the Academy of Marketing Science*, Vol. 33 (4), September 2005, pp. 604-619.

[33] Athanassopoulos Antreas D. **“**Customer Satisfaction Cues To Support Market Segmentation and Explain Switching Behavior”. *Journal of Business Research* Vol. 47 (3), March 2000, pp. 191-207.

[34] Melnyk Valentina, Van Osselaer Stijn M.J. and Bijmolt Tammo H.A. *“Are Women More Loyal Customers than Men? Gender Differences in Loyalty to Firms and Individual Service Providers”*. *Journal of Marketing*, Vol. 73 (4), July 2009, pp. 82-96.

[35] Bougie R., Pieters R., and Zeelenberg M. "Angry Customers don't Come Back, They Get Back: The Experience and Behavioral Implications of Anger and Dissatisfaction in Services". *Journal of the Academy of Marketing Science*, Vol. 31, October 2003, pp. 377 - 393.

[36] Sirgy, M. Joseph. "Toward a Psychological Model of Consumer Satisfaction/ Dissatisfaction". *New Findings on Consumer Satisfaction and Complaining*, 1980, pp. 40-47.

[37] Jean-Charles Chebat and Kaïs Ben-Amor. "Switching costs' emotional effects on dissatisfied customers' behaviour". *Journal of financial transformation*, Vol. 21, November 2007.

[38] Bank Peter and Riedel Frank. "Optimal Dynamic Choice of Durable and Perishable Goods". *Bonn Econ Discussion Papers*, Vol. 28, 2003.

[39] Pfeifer E. Phillip, Haskins E. Mark and Conroy M. Robert. "Customer Lifetime Value, Customer Profitability, and the Treatment of Acquisition Spending". *Journal of Managerial Issues*, Vol. 17 (1), Spring 2005, pp. 11-25.

[40] Pease J., Marfise S. and Wright D. "Measuring and Managing Customer Lifetime Value". *Oracle White Papers*, 2002.

[41] Kumar V. *"Tough Times Call for CLV"*. Harvard Business School Publishing, March 2009. (Πηγή: http://robinson.gsu.edu/news/newsmakers/vk_economist09.html)

[42] Ofek E. *"Customer Profitability and Lifetime Value"*. Harvard Business School Publishing, August 2002.

[43] Stahl K. Heinz, Matzler K. and Hinterhube H. Hans. **"**Linking customer lifetime value with shareholder value". *Industrial Marketing Management*, Vol.32 (4), May 2003, pp. 267-279.

[44] Etzion O., Fisher A. and Wasserkrug S. *"e-CLV: A Modeling Approach for Customer Lifetime Evaluation in e – Commerce Domains, with an Application and Case Study for Online Auctions". Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on e-Technology, e-Commerce and e-Service.* IEEE, Computer Society, 2004, pp. 149 – 156.

[45] Kumar V., Petersen Andrew J. and Leone Robert P. *"How Valuable Is Word of Mouth? Identify the customers who bring in the most referrals. Then capitalize on that knowledge"*. Harvard Business Review. 2007.

[46] Kumar V. *"Managing Customers for Profit: Strategies to Increase Profits and Build Loyalty"*. Wharton School Publishing . 2008.
(Πηγή:http://books.google.gr/books?id=h4cgi_Rcs0QC&pg=PA95&lpg=PA95&dq=managing+customers+for+profit+kumar&source=bl&ots=EBXCalAwv_&sig=iAWWAwuXzz_63bCq0dWkzaWpuMI&hl=el&ei=8hR8SrzVCsP4_Ab4q6DoBw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=2#v=onepage&q=&f=false)

[47] Ching Wai Ki and Michael K. Ng. *"Markov Chains: Models, Algorithms and Applications"*. Springer US. 2006, Vol. 83. [Chapter 5: *"Markov Decision Process for Customer Lifetime Value"*. pp. 87-109].
(Πηγή:http://www.springerlink.com/content/x560121p72r48v61/)

[48] *Grinstead* M. Charles and *Snell* J. Laurie. *"Introduction to Probability"*. American Mathematical Society. 2003. [Chapter 11: *"Markov Chains"*. pp. 405 – 470.
(Πηγή:http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/Chapter11.pdf και http://math.dartmouth.edu/~prob/prob/prob.pdf)

[49] Hicks Jessica M., Page Thomas J. Jr, Behe Bridget K., Dennis Jennifer H. and Fernandez R. Thomas. "Delighted Consumers Buy Again". *Journal of Consumer Satisfaction, Dissatisfaction and Complaining Behavior.* 2005, Vol.18, pp. 94 – 104.

[50] Blattberg C. Robert, Malthouse C. Edward and Neslin A. Scott. "Customer Lifetime Value: Empirical Generalizations and Some Conceptual Questions". *Journal of Interactive Marketing.* 2009, Vol. 23, (2), pp. 157 – 168.

[51] _____. *"Handbook of Marketing Decision Models"*. Springer US. 2008, Vol. 121. [Chapter 8: Gupta S. and Lehmann R. Donald. *"Models of Costumer Value"*. pp. 255 - 290].
(Πηγή: http://www.springerlink.com/content/u6717315x822019k/)

[52] Donkers Bas, Verhoef C. Peter and Martijn G. de Jong. *"Modeling CLV: A test of competing models in the insurance industry"*. *Quantitative Marketing and Economics.* 2007, Vol. 5 (2), pp. 163-190

[53] Pfeifer P. and Bang H. "Non-Parametric Estimation of Mean Customer Lifetime Value". *Journal of Interactive Marketing.* 2005, Vol. 19, pp. 48–66.

[54] Gupta S., Hanssens D., Hardie B., Kahn W., Kumar V., Lin N., Ravishanker N. and Sriram S. *"Modeling Customer Lifetime Value"*. *Journal of Service Research*. 2006, Vol. 9, pp. 139 – 156.

[55] Crowder M., Hand J. D. and Krzanowski W. "On optimal intervention for customer lifetime value". *European Journal of Operational Research*. 2007, Vol. 183, pp. 1550–1559.

[56] Evans G. *"Measuring and Managing Customer Value"*. Work Study. 2002, Vol. 51, (3), pp. 134-139.

[57] Glady N., Baesens B. and Croux C. *"Modeling Customer Loyalty Using Customer Lifetime value"*. Department of Decision Sciences and Information Management.
(Πηγή: https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/120983/1/KBI_0618.pdf)

[58] Rosset S., Neumann E., Eick U. and Vatnik N. "Customer Lifetime Value Models for Decision Support". *Data Mining and Knowledge Discovery*. 2003, Vol. 7, pp. 321–339.

[59] Venkatesan R. and Kumar V. "A Customer Lifetime Value Framework for Customer Selection and Resource Allocation Strategy". *Journal of Marketing.* 2004. Vol. 68, pp. 106–125.

[65] Sohrabi B. and Khanlari A. . "Customer Lifetime Value (CLV) Measurement Based on RFM Model". *Iranian Accounting & Auditing Review*, Spring 2007,Vol. 14 No. 47, pp 7- 20.

[61] Fader S. P. and Hardie G. S. B. "Probability Models for Customer – Base Analysis". *Journal of Interactive Marketing*. 2009, Vol. 23, pp. 61–69.

[62] Colombo R. and Jiang W. "A Stochastic RFM Model". *Journal of Interactive Marketing.* Summer 1999, Vol. 13, (3), pp. 2-12.

[63] Verhoef C. P. "The Use of Econometric Models to Predict Customer Lifetime Value". *Medium Econometrische Toepassingen.* 2004, Vol. 12, (3), pp. 47 – 50.

[64] Thomakos D., Kottaridi C. and Méndez-Carbajo D. "Inflation Dynamics and the Cross-Sectional Distribution of Prices in the E.U Periphery". *International Trade and Economic Dynamics.* Takashi Kamihigashi and Laixun Zhao (eds.). September 2008, pp. 443-69.

[65] Samuelson A. P. (1983). *"Foundation of Economic Analysis"*. Harvard University Press.

[66] Anderson W. (1957). "*Marketing Behavior and Executive Action*". Richard D. Irwin Inc.

[67] Kemeny J. G., Snell J. L., Thompson G. L., (1974). *Introduction to Finite Mathematics,* (3rd ed). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[68] Mulhern, F.J. "Customer profitability *analysis:* measurement, concentration, and research directions", *Journal of Interactive Marketing.* 1999, Vol. 13, (3), pp. 372 – 381.

[69] Jain D., Singh S. S. "Customer lifetime value research in marketing: A review and future directions". *Journal of Interactive Marketing*. 2002**,** Vol. 16, (2), pp. 34 – 46

[70] Villanueva J., Yoo S., and Hanssens D. M. *"The impact of marketing-induced versus word-of-mouth customer acquisition on customer equity". Journal of* Marketing *Research.* 2006, Vol. 45, (1), pp. 48-59.

[71] Dowling R. G., Uncles M. (1997). *"Do customer loyalty programs really work?"*. Sydney : Centre for Corporate Change, Australian Graduate School of Management

[72] Reinartz W., Kumar, V. "On the profitability of long-life customers in a noncontractual setting: an empirical investigation and implications *for Marketing"*. *Journal of Marketing*. 2000, Vol. 64, pp. 17–35.

[73] Skiera B, Wiesel T. "Linking Customer Metrics to Shareholder Value". *Journal of Service Research.* 2006, *Vol*. 9, (2), 156-167.

[74] Searcy, D. L. "Using activity-based costing to assess channel/customer profitability". *Management Accounting Quarterly*. (Winter, 2004), pp. 51-60.

[75] *Aggelis, V., Christodoulakis, D.* “Customer Clustering using RFM analysis”. *International Journal of Electronic Customer Relationship Management.* 2005, *Vol*. 1, (4), *pp*.354–373.

[76] Buckinx, W. and Van den Poel, D. "Customer base analysis: Partial defection of behaviorally- loyal clients in a non- contractual FMCG retail setting". *European Journal of Operational Research.* 2005, Vol. 164, (1), pp.252- 268.

[77] Schmittlein D. C., and *Morrison* D. G. and *Colombo* R. “Counting your customers: who are they and what will they do next*?”*. *Management Science archive*. 1987, Vol. 33 , (1), pp. 1-24.

[78] Dekimpe M. G, Hanssens D. M. “The Persistence of Marketing Effects on Sales”. *Marketing Science*. 2004, Vol. 23, (3), pp. 364 – 390.

[79] *Thomas* J. S., *Blattberg* R. C., *Fox* E. J. “Recapturing Lost Customers”. *Journal of Marketing Research*. 2004, Vol. 41, (1), pp. 31–45.

[80] *Gupta* S., *Lehmann* D. R., *Stuart* J. A. “Valuing customers”. *Journal of Marketing Research.* 2004, Vol. 41, (1), pp. 7-18.

[81] Blattberg R. C., Getz G., Thomas S. J. (2001). “Customer Equity: Building and Managing Relationships as Valuable Assets”. Harvard Business School Press.

[82] Pickle, Hal B. and *Bruce R.* "Consumerism, Product Satisfaction-Dissatisfaction: An Empirical Investigation". *The Southern Journal of Business.* 1972, Vol. 7, pp.87–100

[83] Ratchford, B. T. “The economics of consumer knowledge”. *Journal of Consumer Research.* 1999, Vol. 26, (2). Pp. 99-114.

[84] Meyers-*Levy*, J. “The Effect of Gender Differences in Hemispheric Asymmetry on Judgment”. *Advances in Consumer Research*. *1988,* Vol. 15, pp. 169-173.

[85] Meyers-Levy, J. "The influence of sex roles on judgement", *Journal of Consumer Research*, Vol. 14 pp.522-530

[86] Meyers-Levy, J., Maheswaran, D. "Exploring differences in males’ and females’ processing strategies", *Journal of Consumer Research*. 1991, Vol. 18, pp.63-97.

[87] Meyers-Levy, J., Sternthal, B. "Gender differences in the use of message cues and judgements", *Journal of Marketing Research*. 1991 Vol. 28, pp.84-96.

[88] Fischer, E., Arnold, S. "Sex, gender identity, gender role attitudes and consumer behavior", *Psychology and Marketing*. 1994, Vol. 11 (2), pp.163-182.

[89] Fisher R. J., Dube L.. “Gender differences in responses to emotional advertising: A social desirability perspective”. *Journal of Consumer Research.* 2005, Vol. 31, pp. 850-858.

[90] Louis W. Stern, Adel El A. “The demographic and behavioral characteristics of each customer”. *Harvard Business Review*. (July–August 1987), pp. 34–41.

[91] Inman, J.J., Dyer S.S. and Jia J. "A Generalized Utility Model of Disappointment and Regret Effects on Post-Choice Valuation," *Marketing Science*, Vol. 16, pp. 97-111.

[92] Inman J.J. and Zeelenberg M. “Regret repeat versus switch decisions: The attenuation role of decision justifiability”. *Journal of Consumer Research.* 2002, Vol. 29, pp. 116-128.

[93] Bolton, R. N. “A dynamic model of the duration of the customer’s relationship with a continuous service provider: The role of satisfaction”. *Marketing Science.* 1998 Vol. 17, (1), pp. 45-65.

[94] Bolton, R. N. and Lemon K. N. “A dynamic model of customers’ usage of services: Usage as an antecedent and consequence of satisfaction’. *Journal of Marketing Research*. 1999, Vol. 36, (2), pp. 171-186.

[95] Garbarino E. and Johnson M. S. “The different roles of satisfaction, trust, and commitment in customer relationships”. *Journal of marketing*. 1999, Vol. 63, (2), pp. 70 - 87.

[96] Lemon, K. N., White T. B., and Winer R. S. “Dynamic customer relationship management: Incorporating future considerations into the service retention decision”. *Journal of Marketing*. 2002, Vol. 66, pp. 1-14.

[97] Gustafsson, A., Johnson M. D. and Roos I. “The effects of customer satisfaction, relationship commitment dimensions, and triggers on customer retention”. *Journal of Marketing.* 2005, Vol. 69, pp. 210-218.

[98] Mazursky, D. and Geva A. "Temporal Decay in Satisfaction-Purchase Intention Relationship." *Psychology and Marketing.* 1989, Vol. 6, pp. 211-227.

[99] Mittal, B. “A comparative analysis of four scales of consumer involvement”. *Psychology & Marketing*, 1995, Vol. 12, (7), pp. 663 - 682.

[100] Grønhaug K. and Gilly M. C. “A transaction cost approach to consumer dissatisfaction and complaint actions”. *Journal of Economic Psychology*. 1991, Vol.12, pp. 165-183.

[101] Ping, R.A. Jr. "The effects of satisfaction and structural constraints of retailer exiting, voice, loyalty, opportunism, and neglect". *Journal of Retailing.* 1993. Vol. 69, (3), pp.320-352.

[102] Reichheld, F. F. and Teal T. (1996) *“The Loyalty Effect the Hidden Force Behind Growth, Profits, and Lasting Value”*. Boston, Mass: Harvard Business School Press.

Παράρτημα

Π.1 Η διάκριση των αγαθών

Ως αγαθό, ορίζεται κάθε μέσο με το οποίο ικανοποιούνται οι διάφορες ανάγκες των ανθρώπων. Η ικανοποίηση μίας ανάγκης, συστήνει τον όρο της χρησιμότητας, η οποία εξαρτάται από τις μοναδικές «ιδιότητες» κάθε ατόμου (γνωρίσματα που συνθέτουν την προσωπικότητα ενός ατόμου αλλά και κάθε άτομο στην ολότητα του). Τα αγαθά στο σύνολό τους κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τη φύση των γνωρισμάτων που τα περιβάλουν.

Τα αγαθά διακρίνονται βάσει της δυνατότητας «εύρεσής» τους σε :

Ελεύθερα αγαθά (Free goods)

Είναι εκείνα που υπάρχουν σε αφθονία σε σχέση με τις ανάγκες που καλύπτουν όπως για παράδειγμα ο αέρας που αναπνέουμε, ο ήλιος που απολαμβάνουμε το καλοκαίρι, το νερό μίας τρεχούμενης πηγής κ.α.

Οικονομικά αγαθά (Economic goods)

Είναι εκείνα που βρίσκονται σε σχετική **ανεπάρκεια** συγκριτικά με τις ανάγκες που καλύπτουν. Η ύπαρξη τους είναι αποτέλεσμα κάποιας (τεχνητής) παραγωγικής διαδικασίας και η απόκτησή τους συνιστά εμπορικό φαινόμενο (τη διενέργεια κάποιας συναλλαγής). Η διαθεσιμότητα αυτών (ή των υλικών που τα συνθέτουν) είναι ο βασικότερος παράγοντας ο οποίος καθορίζει την οικονομική τους αξία. Τέτοια είναι το ψωμί, ο άνθρακας, η ηλεκτρική ενέργεια, οι ηλεκτρικές συσκευές κ.α. Τα οικονομικά αγαθά, χαίρουν περαιτέρω διάκρισης σε 2 βασικότατες κατηγορίες. Αυτές είναι τα υλικά αγαθά (κάθε τι απτό και βάσει του ορισμού του αγαθού) και τα άυλα αγαθά που καλούνται και υπηρεσίες.Οι βασικότερες κατηγορίες των υλικών αγαθών, βάσει της ιδιότητας που τα διακρίνει είναι:

1. **Βάσει του βαθμού επεξεργασίας που έχουν υποστεί, σε:**

Πρωτογενή (Primary goods)

Πρωτογενή είναι εκείνα τα αγαθά που δεν είναι αποτέλεσμα της λειτουργίας της παραγωγής όπως το ακατέργαστο ξύλο και μεταλλεύματα κ.α.

Παράγωγα

Παράγωγα είναι εκείνα τα αγαθά που προέρχονται από την παραγωγική διαδικασία με τη βοήθεια των παραγωγικών μέσων όπως τα μηχανήματα.

2. **Βάσει του αριθμού των φορών που μπορούν να ικανοποιήσουν μία ανάγκη:**

Διαρκή (Durable goods)

Διαρκή είναι εκείνα τα αγαθά που δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσια για την άμεση ή έμμεση ικανοποίηση αναγκών, αλλά με παροχή από διαδοχικές υπηρεσίες π.χ. οι κατοικίες.

Καταναλωτά (Non Durable, Perishable goods)

Καταναλωτά αγαθά είναι εκείνα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσια και μόνο μια φορά για την ικανοποίηση αναγκών όπως τα τρόφιμα.

Σημείωση: Όμως υπάρχουν και κάποια αγαθά τα οποία μπορούν χρησιμοποιηθούν και ως διαρκή και ως καταναλωτά για παράδειγμα η εκτροφή μιας αγελάδας , η οποία δίνει το γάλα της ως διαρκές αγαθό ενώ το κρέας της χρησιμοποιείται μία και μόνο φορά δηλαδή ως καταναλωτό.

3. **Βάσει της δυνατότητας χρήσης τους**

Τελικά (Final goods)

Τελικά αγαθά είναι εκείνα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν όπως είναι χωρίς καμία άλλη επεξεργασία, από τους καταναλωτές π.χ. τα φρούτα, λαχανικά.

Ενδιάμεσα (Intermediate goods)

Ενδιάμεσα είναι εκείνα τα αγαθά που δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσια από τους καταναλωτές, χρησιμοποιούνται όμως στην παραγωγική διαδικασία ως ύλη, για την παραγωγή άλλων αγαθών π.χ. το ύφασμα, οι πρώτες ύλες. Η διάκριση αυτή των αγαθών αναφέρεται σε ολόκληρη την παραγωγική διαδικασία και όχι μόνο στο στάδιο της παραγωγής.

Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες κατηγορίες αγαθών, όπως τα αγαθά Giffen, τα κατώτερα (inferior), τα κανονικά (ordinary), τα αγαθά πολυτελείας (luxury), τα συμπληρωματικά (complementary), τα υποκατάστατα (substitute), τα δημόσια (public) κ.α.

Π.2 Αλγόριθμοι

Π.2.1 Δημιουργία πινάκων μετάβασης

Π.2.1.α Αλγόριθμος: **COD1**

```
function A = COD1(a,b,h)
% Τμήμα 1ο
% Στο συγκεκριμένο τμήμα, πραγματοποιείται ο προσδιορισμός των ορίων
των
% ομάδων.
e(1,1,1)= 0.4041;, e(1,1,2)=0.2372;, e(1,1,3)=0.01;, u(1,1,1)=1;,
u(1,1,2)=0.4041;, u(1,1,3)=0.2372;
% Τμήμα 2ο
% Στο τμήμα αυτό, ο αρχικός πίνακας h (κωδικοποιημένος, διασπάται σε
4
% τμήματα βάσει των διαφόρων επιπέδων πιθανότητας εμφάνισης:
%[10<=X<20] υψηλό --> πίνακας g1
%[20<=X<30] μέσο --> πίνακας g2
%[30>=X] χαμηλό --> πίνακας g3
%[0<=X<10] μηδενικές ή πολύ μικρές πιθανότητες --> πίνακας g0
% και γεννιούνται οι επιμέρους πιθανότητες έτσι ώστε:
% P(30)<P(31)<P(30+i)<P(20)<P(21)<P(20+i)<P(10)<P(11)<P(10+i)
% με 10>i>=2
% Βασικό h: h=xlsread('data_h12');
% Εναλλακτικά h
% h=[10 10 20 0; 21 21 20 e];
% h=[10 10 20 21; 30 0 20 10; 21 21 20 e];
% h=[10 10 11 e 20 20 12 13; 21 22 20 11 10 30 31 30; 13 14 22 11 12
21 20 10];
for i=1:length(h(1,:));
    for j=1:length(h(:,1));
        if h(j,i)<100;
            g0(j,i)=h(j,i);
        elseif h(j,i)>=100;
            g0(j,i)=0;
        end
        if h(j,i)>=100 & h(j,i)<200;
            g1(j,i)=h(j,i);
        elseif h(j,i)<100 | h(j,i)>=200;
            g1(j,i)=0;
        end
if h(j,i)>=200 & h(j,i)<300;
            g2(j,i)=h(j,i);
        elseif h(j,i)<200 | h(j,i)>=300;
            g2(j,i)=0;
end
if h(j,i)>=300;
            g3(j,i)=h(j,i);
        elseif h(j,i)<300;
            g3(j,i)=0;
end
    end
end
% Τμήμα 3ο
% Γίνεται ταξινόμηση των στοιχείων των πινάκων g(i), από το μικρότερο
στο
% μεγαλύτερο, ώστε να γίνει ργότερα δυνατή η γέννηση αριθμών με
αύξανόμενη
% πιθανότητα, για κάθε ομάδα.
% for i=1:length(h(1,:))
```

```
% end
for j=1:length(h(:,1))
    sortg1(j,:)=sort(g1(j,:));
    sortg2(j,:)=sort(g2(j,:));
    sortg3(j,:)=sort(g3(j,:));
end
% Τμήμα 4ο
% Θα γεννηθούν αριθμοί βάσει της κατηγορίας πιθανότητας που ανήκουν
% και σε
% αυξανόμενη ισχύ, βάσει των αντίστοιχων υποθέσεων.
for i=1:length(h(1,:))
for j=1:length(h(:,1))
if sortg1(j,i)==0;
        sortG1(j,i)=0;
    elseif sortg1(j,1)>0;
        sortG1(j,1)=(((u(1,1,1)-e(1,1,1))*betarnd(a,b))+(e(1,1,1)));
        elseif sortg1(j,i)>0 & sortg1(j,i-1)==0 & i>=2;
        sortG1(j,i)=(((u(1,1,1)-e(1,1,1))*betarnd(a,b))+(e(1,1,1)));
elseif sortg1(j,i)>0 & sortg1(j,i)==sortg1(j,i-1) & i>=2;
    sortG1(j,i)=sortG1(j,i-1);
    elseif sortg1(j,i)>0 & sortg1(j,i-1)>0 & sortg1(j,i)>sortg1(j,i-
1) & i>=2;
        sortG1(j,i)=(((u(1,1,1)-sortG1(j,i-
1))*betarnd(a,b))+(sortG1(j,i-1)));
    else
        'error4.1'
end
if sortg2(j,i)==0;
        sortG2(j,i)=0;
    elseif sortg2(j,1)>0;
        sortG2(j,1)=(((u(1,1,2)-e(1,1,2))*betarnd(a,b))+(e(1,1,2)));
        elseif sortg2(j,i)>0 & sortg2(j,i-1)==0 & i>=2;
        sortG2(j,i)=(((u(1,1,2)-e(1,1,2))*betarnd(a,b))+(e(1,1,2)));
elseif sortg2(j,i)>0 & sortg2(j,i)==sortg2(j,i-1) & i>=2;
    sortG2(j,i)=sortG2(j,i-1);
    elseif sortg2(j,i)>0 & sortg2(j,i-1)>0 & sortg2(j,i)>sortg2(j,i-
1) & i>=2;
        sortG2(j,i)=(((u(1,1,2)-sortG2(j,i-
1))*betarnd(a,b))+(sortG2(j,i-1)));
    else
        'error4.2'
end
if sortg3(j,i)==0;
        sortG3(j,i)=0;
    elseif sortg3(j,1)>0;
        sortG3(j,1)=(((u(1,1,3)-e(1,1,3))*betarnd(a,b))+(e(1,1,3)));
        elseif sortg3(j,i)>0 & sortg3(j,i-1)==0 & i>=2;
        sortG3(j,i)=(((u(1,1,3)-e(1,1,3))*betarnd(a,b))+(e(1,1,3)));
elseif sortg3(j,i)>0 & sortg3(j,i)==sortg3(j,i-1) & i>=2;
    sortG3(j,i)=sortG3(j,i-1);
    elseif sortg3(j,i)>0 & sortg3(j,i-1)>0 & sortg3(j,i)>sortg3(j,i-
1) & i>=2;
        sortG3(j,i)=(((u(1,1,3)-sortG3(j,i-
1))*betarnd(a,b))+(sortG3(j,i-1)));
    else
        'error4.3'
end
end
end
clear sortg1 sortg2 sortg3 e(1,1,1) e(1,1,2) e(1,1,3) u(1,1,1)
u(1,1,2) u(1,1,3) a b i j s
```

```
% Τμήμα 5ο
% γίνεται επανατοποθέτηση των στοιχείων, έτσι ώστε οι διάφορες
πιθανότητες
% που γεννήθηκαν να παραπέμπουν στα αντίστοιχα στοιχεία του αρχικού
πίνακα
% h και στη συνέχεια συντίθεται η μήτρα Tr,η οποία είναι η αντίστοιχη
της
% h, περιλαμβάνοντας πιθανότητας αντί της κωδικοποίησης.
for j=1:length(h(:,1))
for x=fliplr(0:length(h(1,:))-1)
if isempty(find(g1(j,:)==100+x))>0;
continue
elseif isempty(find((g1(j,:))==100+x))==0 &
length(find((g1(j,:))==100+x))==1;
    g1(j,find((g1(j,:))==100+x))=max(sortG1(j,:));
    k=max(sortG1(j,:));
    sortG1(j,find((sortG1(j,:))==k))=zeros(1);
elseif isempty(find((g1(j,:))==100+x))==0 &
length(find((g1(j,:))==100+x))>1;
    w=find((g1(j,:))==100+x);
    y=find(sortG1(j,:)==(max(sortG1(j,:))));
    for p=1:length(find((g1(j,:))==100+x))
        g1(j,w(1,p))=sortG1(j,y(1,p));
        sortG1(j,y(1,p))=zeros(1);
    end
else
    'error5.1'
end
end
end
for j=1:length(h(:,1))
for x=fliplr(0:length(h(1,:))-1)
if isempty(find(g2(j,:)==200+x))>0;
continue
elseif isempty(find((g2(j,:))==200+x))==0 &
length(find((g2(j,:))==200+x))==1;
    g2(j,find((g2(j,:))==200+x))=max(sortG2(j,:));
    k=max(sortG2(j,:));
    sortG2(j,find((sortG2(j,:))==k))=zeros(1);
elseif isempty(find((g2(j,:))==200+x))==0 &
length(find((g2(j,:))==200+x))>1;
    w=find((g2(j,:))==200+x);
    y=find(sortG2(j,:)==(max(sortG2(j,:))));
    for p=1:length(find((g2(j,:))==200+x))
        g2(j,w(1,p))=sortG2(j,y(1,p));
        sortG2(j,y(1,p))=zeros(1);
    end
else
    'error5.2'
end
end
end
for j=1:length(h(:,1))
for x=fliplr(0:length(h(1,:))-1)
if isempty(find(g3(j,:)==300+x))>0;
continue
elseif isempty(find((g3(j,:))==300+x))==0 &
length(find((g3(j,:))==300+x))==1;
    g3(j,find((g3(j,:))==300+x))=max(sortG3(j,:));
    k=max(sortG3(j,:));
    sortG3(j,find((sortG3(j,:))==k))=zeros(1);
```

```
elseif isempty(find((g3(j,:))==300+x))==0 &
length(find((g3(j,:))==300+x))>1;
    w=find((g3(j,:))==300+x);
    y=find(sortG3(j,:)==(max(sortG3(j,:))));
    for p=1:length(find((g3(j,:))==300+x))
        g3(j,w(1,p))=sortG3(j,y(1,p));
        sortG3(j,y(1,p))=zeros(1);
    end
else
    'error5.3'
end
end
end
Tr=g1+g2+g3+g0;
% Τμήμα 6ο
% Από το σημείο αυτό και πέρα, διαμορφώνεται ο πίνακας h --> Tr ως
% A, δηλαδή μήτρα μετάβασης σεναρίου A (χαμηλή διαφοροποίηση
% καταναλωτικών αγαθών, βάσει όλων των περιορισμών και των υποθέσεων
που
% έχουν γίνει αρχικά.
for i=1:length(Tr(1,:));
    for j=1:length(Tr)
        if Tr(j,i)~=0.001
            A(j,i)=Tr(j,i)*((1-
(3*0.001*sum(Tr(j,:)==0.001)))/(sum(Tr(j,:))-
(0.001*sum(Tr(j,:)==0.001))));
        else
            A(j,i)=Tr(j,i);
        end
    end
end
clear sortG1 sortG2 sortG3 g1 g2 g3 g0 w y k p x j Tr e h i
```

Π.2.1.β Αλγόριθμος: **Mile1**

```
function A = Mile1 (n, a, b, h)
% Πραγματοποιεί n επαναλήψεις της γεννήτριας αριθμών COmpleteD1, και
% σταθμίζει κάθε στοιχείο που λαμβάνει από κάθε επανάληψη, κατά την
% ολοκλήρωσή του αλγορίθμου, τα αποτελέσματα, να είναι κατά το δυνατό
% αμερόληπτα και ο πίνακας A που θα ληφθεί, να είναι ο τελικός
πίνακας
% μετάβασης του σεναρίου A.
A=zeros(length(h(:,1)),length(h(1,:)));
for f=1:n
    TransMatrA=COD1 (a, b, h);
    A=(A*(f-1) + TransMatrA)/f;
    end
end
```

Π.2.1.γ Αλγόριθμος: **Random**

```
function g = Random(a,b,h)
% Ανάλυση πίνακα με ικανοποίηση βάσει κατανομών
% Ενδεικτικά inputs: g=Random(2,4,[1 0 7 4; 6 2 9 8])
% Τμήμα 1ο: Προσδιορισμός ορίων
e(1,1,4)=0.01;, u(1,1,4)=e(1,1,4); e0=10^-4;
for i=3:-1:1;
    u(1,1,i)=0.0001;
    while betacdf(u(1,1,i),a,b)<(((3+((3-i)*(i-1)))/(3*i))*(1-
e(1,1,4)))+e(1,1,4)
        u(1,1,i)=u(1,1,i)+0.0001;
```

```
    end
    e(1,1,i)=u(1,1,i+1)+e0;
end
% Τμήμα 2ο ¨Γέννηση πιθανοτήτων για τη συμπεριφορική μεταβλητή της
ικανοποίησης
f=zeros(length(h(:,1)), length(h(1,:))*3); g=zeros(length(h(:,1)),
length(h(1,:))*3);
for i=1:length(h(1,:))
    for j=1:length(h)
if h(j,i)==1
    for t=1:3
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,t) | f(j,t+((i-1)*3))>u(1,1,t)
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    end
    elseif h(j,i)==2
        for t=1:3
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,t) & t==1
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,2) & t>1 | f(j,t+((i-1)*3))>u(1,1,2)
& t>1
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
        end
elseif h(j,i)==3
    for t=1:3
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,t) & t==1 | f(j,t+((i-
1)*3))>u(1,1,t) & t==1
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,3) & t>1 | f(j,t+((i-1)*3))>u(1,1,3)
& t>1
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    end
elseif h(j,i)==4
    for t=1:3
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,1)
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    end
elseif h(j,i)==5
    for t=1:3
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,1) & t<3
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,2) & t==3 | f(j,t+((i-
1)*3))>u(1,1,2) & t==3
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    end
elseif h(j,i)==6
    for t=1:3
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,1) & t<3
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,3) & t==3 | f(j,t+((i-
1)*3))>u(1,1,3) & t==3
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
```

```
    end
    elseif h(j,i)==7
        for t=1:3
            while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,1) & t<3
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
            end
        end
elseif h(j,i)==8
    for t=1:3
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,t) & t<3 | f(j,t+((i-1)*3))>u(1,1,t)
& t<3
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    end
elseif h(j,i)==9
    for t=1:3
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,t) & t==1 | f(j,t+((i-
1)*3))>u(1,1,t) & t==1
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    while f(j,t+((i-1)*3))<e(1,1,3) & t==2 | f(j,t+((i-
1)*3))>u(1,1,3) & t==2
        f(j,t+((i-1)*3))=betarnd(a,b);
    end
    end
 elseif h(j,i)==0
     for t=1:3
    f(j,t+((i-1)*3))=0;
     end
    else
    're-define h(i,j) between 0 and 9'
end
    end
end
% Τμήμα 3ο: Κανονικοποίηση
for i=1:3:length(f(1,:))
    for j=1:length(f(:,1))
        if f(j,i) + f(j,i+1) + f(j,i+2)>0
            for k=0:2
            g(j,i+k)=f(j,i+k)/(f(j,i)+f(j,i+1)+f(j,i+2));
            end
        else
            0;
        end
    end
end
```

Π.2.1.δ Αλγόριθμος: **final1**

```
function c = final1(a, b, p, h, z)
% Ολοκλήρωση του πίνακα μετάβασης με ανάλυση ικανοποίησης βάσει
κατανομής αυτής για κάθε στοιχείο
% Ενδεικτικό input: c=final1(2,4, [0 2 1 3 2 1; 2 3 1 0 0 0], [7 2; 4
0], [0.54 0.27 ; 0.82 0]);
w=zeros(length(p),length(p(1,:)));
g=Random(a,b,h);
for i=1:3:length(p(1,:))
    for j=1:length(p)
        r=[p(j,i), p(j,i+1), p(j,i+2)];
        d=[g(j,i), g(j,i+1), g(j,i+2)];
            if min(d)~=0;
                while min(d)<1
```

```
        r(1,find(r==max(r)))=min(d);
        d(1,find(d==min(d)))=d(1,find(d==min(d)))+3;
                end
            elseif min(d)==0 & sum(d)>0
                while min(d)<1
                d(1,find(d==0))=3;
                r(1,find(r==max(r)))=min(d);
        d(1,find(d==min(d)))=d(1,find(d==min(d)))+3;
                end
            else sum(d)==0;
                r=zeros(1,3);
            end
        for k=1:3
            w(j,k+i-1)=r(1,k);
        end
        % p(j,i+find(r==max(r)))-1)=
    end
end
for i=1:length(z(1,:))
    for j=1:length(z)
        for k=1:3
        c(j, k+(i-1)*3)=w(j,k+(i-1)*3)*z(j,i);
        end
    end
end
```

Π.2.2 Αλγόριθμοι επεξεργασίας δεδομένων

Π.2.2.α Αλγόριθμος: **tools**

```
function g = tools1 (p, b, r, f)
% Εύρεση πιθανότητας απορρόφησης για διάφορες περιόδους που
% περιγράφονται από το διάνυσμα r.
% b: Το όριο της πιθανότητας απορρόφησης.
% p: Ο χρόνος εκκίνησης του μοντέλου για την εύρεσης του χρόνου
% απορρόφησης.
w=zeros(82,1, 17);
k=zeros(length(r), 1, 17); s=zeros(27,1,17);, y=zeros(1, 82, 17);,
t=zeros(1, 1, 17);
s(:, :, 1)=zeros(27, 1);
s(:, :, 2)=ones(27,1);
s(:, :, 3)=[1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1;
0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0];
s(:, :, 4)=[0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0;
1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0];
s(:, :, 5)=[0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0;
0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1];
s(:, :, 6)=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 7)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 8)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1;
1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
s(:, :, 9)=[1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1;
1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 10)=[0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0];
s(:, :, 11)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1];
s(:, :, 12)=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
```

```
s(:, :, 13)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1;
1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
s(:, :, 14)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1;
0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0];
s(:, :, 15)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0;
0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1];
s(:, :, 16)=[1; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 17)=[0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
for v=2:17
for i=1:length(s)
w(i,1,v)=s(i,1,v)/sum(s(:,1, v));
end
end
clear i
% Πιθανοτητα απορρόφησης για δεδομένες περιόδους r
for v=1:17
    if v==1
for j=1:length(r)
d=f^(r(j,1));
k(j, 1, v)=(sum(d(:,82))-1)/81;
end
    else
        for j=1:length(r)
y(:, :, v)=w(:,:,v)'*f^(r(j,1));
k(j, 1, v)=y(1, 82, v);
        end
    end
end
clear j y
% με διάνυσμα εκκίνησης προσδιορισμός t: P(dead)>=0.999
for v=1:17
    a=0;
    c=f^p;
    if v==1
        d=c;
        while (sum(d(:,82))-1)/81<b
            a=a+1;
            d=d*f^a;
        end
        t(:,:,v)=p+a;
    else
        d=w(:,:,v)'*c;
        while d(1,82)<b
            a=a+1;
            d=w(:,:,v)'*(c*f^a);
        end
    t(1,1,v)=p+a;
    end
end
for i=1:17
g(:,i)=[k(:,:,i); i; t(:,:,i)];
end
```

Π.2.2.β Αλγόριθμος: **clv1**

```
function lap = clv1(n, x, i, k, f)
% Εύρεση CLV για 1-n περιόδους μοντέλου
% n: οι περίοδοι του μοντέλου i=1 καταναλωτά, i=2 διαρκή, k=1 χαμηλή
% διαφοροποίηση, k=2 υψηλή διαφοροποίηση, f=πίνακας μετάβασης,
w=διάνυσμα
% εκκίνησης, m: το επίπεδο για τη γέννηση του περιθωρίου του κέρδους,
με 1:
% χαμηλό, 2: μέτριο και 3: υψηλό. Αντίστοιχα a: η γεννήτρια του
περιθωρίου
% του κέρδους. x: η τιμή των παραμέτρων της ομοιόμορφης κατανομής,
υπό την
% οποία γεννιέται το περιθώριο κέρδους.
y=zeros(1, n);, s=zeros(27,1,17);, r=zeros(length(f),1,2);,
w=zeros(82,1, 17); z=zeros(1,1,3); G=zeros(n,1,17);
e=zeros(1,1,2);, u=zeros(1,1,2);, l=zeros(1,1,2);, g=zeros(1,1,2);
v=zeros(1,1,2);, p=zeros(1,1,2);
e(1,1,1)=0.26;, e(1,1,2)=3.41;, u(1,1,1)=2.37;, u(1,1,2)=9.38;,
l(1,1,1)=-1.36;, l(1,1,2)=-1.17; v(1,1,1)=0.65;, v(1,1,2)=2.33;
h=zeros(1,1,2);, q=zeros(1,1,2);, h(1,1,1)=0.3; h(1,1,2)=0.7;,
q(1,1,1)=0.005; q(1,1,2)=0.15;
% e: ο μέσος , u: η μέγιστη τιμή, l: η ελάχιστη τιμή, v: η τυπική
απόκλιση της
% κατανομής του πληθωρισμού για το σενάριο i.
% p, g: βοηθητικές μεταβλητές
% Τμήμα 1ο: Κατασκευή διανύσματος εκκίνησης
s(:, :, 1)=zeros(27, 1);
s(:, :, 2)=ones(27,1);
s(:, :, 3)=[1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1;
0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0];
s(:, :, 4)=[0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0;
1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0];
s(:, :, 5)=[0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0;
0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1];
s(:, :, 6)=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 7)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 8)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1;
1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
s(:, :, 9)=[1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1;
1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 10)=[0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0];
s(:, :, 11)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1];
s(:, :, 12)=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 13)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1;
1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
s(:, :, 14)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1;
0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0];
s(:, :, 15)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0;
0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1];
s(:, :, 16)=[1; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 17)=[0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
for t=1:81
    w(t,1,1)=1/81;
```

```
end
for j=2:17
for t=1:length(s)
w(t,1,j)=s(t,1,j)/sum(s(:,1, j));
end
end
clear t j s
% Προσδιορισμός παραμέτρων κατανομής για προεξοφλητικό επιτόκιο
a=0.0001;
g(1,1,i)=(u(1,1,i)-e(1,1,i))/(e(1,1,i)-l(1,1,i));
p(1,1,i)=((g(1,1,i)*(a^2))/((((g(1,1,i)*a)+a)^2)*((g(1,1,i)*a)+a+1)))
*((u(1,1,i)-l(1,1,i))^2);
while p(1,1,i)>(v(1,1,i)^2)
    a=a+0.0001;

p(1,1,i)=((g(1,1,i)*(a^2))/((((g(1,1,i)*a)+a)^2)*((g(1,1,i)*a)+a+1)))
*((u(1,1,i)-l(1,1,i))^2);
end
b=g(1,1,i)*a;
clear g v p
% Κατασκευή διανύσματος επιβράβευσης
for j=0:8
    for m=1:3
        if (j*9)+((m-1)*3)<=27
            z(1,1,m)=betarnd(x, x);
            while betacdf(z(1,1,m), x, x)>(m/3) | betacdf(z(1,1,m),
x, x)<=((m-1)/3)
                z(1,1,m)=betarnd(x, x);
            end
            r(j*9+(m-1)*3+1,1,k)=(((h(1,1,k)-
q(1,1,k))*z(1,1,m))+q(1,1,k))+1;
            r(j*9+(m-1)*3+2,1,k)=(((h(1,1,k)-
q(1,1,k))*z(1,1,m))+q(1,1,k))+1;
            r(j*9+(m-1)*3+3,1,k)=(((h(1,1,k)-
q(1,1,k))*z(1,1,m))+q(1,1,k))+1;
        else
            r((j*9)+((m-1)*3)+1, 1, k)=-1;
            r((j*9)+((m-1)*3)+2, 1, k)=-1;
            r((j*9)+((m-1)*3)+3, 1, k)=-1;
        end
    end
end
clear j m z
% υπολογισμός CLV
for j=1:17
    for t=1:n
        d=((u(1,1,i)-l(1,1,i))*betarnd(a,b))+l(1,1,i);
        y(1,t,j)=(w(:,:,j)')*(f/(1-(d/100))^t)*r(:, :, k);
        if t==1
            G(t,1,j)=y(1,t,j);
        else
            G(t,1,j)=y(1,t,j)+G(t-1,1,j);
        end
    end
lap(:, j)= G(:, 1, j);
end
```

Π.2.2.γ Αλγόριθμος: **zero1**

```
function lap =zero1(p, k, f)
% Εύρεση του άριστου χρόνου διακοπής της συνεργασίας πελάτη
επιχείρησης.
% Συνθήκη, όταν η οριακή αναμενόμενη αύξηση του CLV (για την επόμενη
% περίοδο, γίνει μη θετική (μηδενική η οριακά αρνητική). p:
1=καταναλωτικά
% αγαθά, 2= διαρκή, k: 1=χαμηλή διαφοροποίηση, 2=υψηλή διαφοροποίηση.
r=zeros(82,1,2);,
h=zeros(1,1,2);, q=zeros(1,1,2);, h(1,1,1)=0.3; h(1,1,2)=0.7;,
q(1,1,1)=0.005; q(1,1,2)=0.15;
s=zeros(27,1,17);, w=zeros(82,1,17);, i=zeros(1,1,17);,
t=zeros(1,17);
d=[0.26, 3.41];
s(:, :, 1)=zeros(27, 1);
s(:, :, 2)=ones(27,1);
s(:, :, 3)=[1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1;
0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0];
s(:, :, 4)=[0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0;
1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0];
s(:, :, 5)=[0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0;
0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1];
s(:, :, 6)=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 7)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 8)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1;
1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
s(:, :, 9)=[1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1;
1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 10)=[0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0];
s(:, :, 11)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1];
s(:, :, 12)=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 13)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1;
1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
s(:, :, 14)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1;
0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0];
s(:, :, 15)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0;
0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1];
s(:, :, 16)=[1; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 17)=[0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
for m=1:81
    w(m,1,1)=1/81;
end
for j=2:17
for m=1:length(s)
w(m,1,j)=s(m,1,j)/sum(s(:,1, j));
end
end
clear m s j
% Κατασκευή του διανύσματος επιβράβευσης
for j=1:81
    if j<=27;
        r(j,1,k)=(h(1,1,k)-q(1,1,k))/2;
    else j>27;
```

```
        r(j,1,k)=-0.001;
    end
end
% Προσδιορισμός άριστου χρόνου διακοπής
for j=1:17
    i(1,1,j)=2;
    g=w(:,:,j)'*f^i(1,1,j);
    y=g(1, 82);
    clv=(w(:,:,j)')*((f/(1+(d(1,p)/100)))^i(1,1,j))*r(:, :, k);
    while clv>0.001
        if y<0.999;
            i(1,1,j)=i(1,1,j)+1;
            g=w(:,:,j)'*f^i(1,1,j);
            y=g(1, 82);
            clv=(w(:,:,j)')*((f/(1+(d(1,p)/100)))^i(1,1,j))*r(:, :,
k);
        else y>=0.999;
            t(1,j)=i(1,1,j);
        end
    end
    t(1,j)=i(1,1,j);
    if j==1;
        a=1;
        n=w(:,:,j)'*(f^a);
        while n(1,82)<0.999
            a=a+1;
            n=w(:,:,1)'*(f^a);
        end
        u(1,j)=a;
    else j>1;
        u(1,j)=0;
    end
    lap(:,j)=[t(1,j); u(1,j)];
end
```

Π.2.2.δ Αλγόριθμος: **last**

```
function c = last(p,k,t,f)
% Εύρεση της μέγιστης αναμενόμενης CLV
s=zeros(27,1,17);, r=zeros(length(f),1,2);, w=zeros(82,1, 17);
h=zeros(1,1,2);, q=zeros(1,1,2);, h(1,1,1)=0.3; h(1,1,2)=0.7;,
q(1,1,1)=0.005; q(1,1,2)=0.15;
d=[0.26, 3.41];
% p=1 καταναλωτά, p=2 διαρκή, k=1 χαμηλή, διαφοροποίηση, k=2 υψηλή
% διαφοροποίηση, f=πίνακας μετάβασης, t: το διάνυσμα των αριστων
% χρόνων διακοπής, για κάθε σενάριο.
% h,q τα όρια της κανονικής κατανομής του περιθωρίου του κέρδους
% d: το προεξοφλητικό επιτόκιο, w: το διάνυσμα εκκίνησης.
% Τμήμα 1ο: Κατασκευή διανύσματος εκκίνησης
s(:, :, 1)=zeros(27, 1);
s(:, :, 2)=ones(27,1);
s(:, :, 3)=[1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1;
0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0];
s(:, :, 4)=[0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0;
1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0];
s(:, :, 5)=[0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0;
0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1];
s(:, :, 6)=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 7)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
```

```
s(:, :, 8)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1;
1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
s(:, :, 9)=[1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1;
1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 10)=[0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0];
s(:, :, 11)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1];
s(:, :, 12)=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 13)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1;
1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
s(:, :, 14)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1;
0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0];
s(:, :, 15)=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0;
0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1];
s(:, :, 16)=[1; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
s(:, :, 17)=[0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;
0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
for j=1:81
    w(j,1,1)=1/81;
end
for j=2:17
for m=1:length(s)
w(m,1,j)=s(m,1,j)/sum(s(:,1, j));
end
end
clear s j m
% Κατασκευή διανύσματος επιβράβευσης
for j=1:81
    if j<=27;
        r(j,1,k)=(h(1,1,k)-q(1,1,k))/2;
    else j>27;
        r(j,1,k)=-0.001;
    end
end
clear j
for j=1:length(t)
    for i=1:t(1,j)
        q=w(:,:,j)'*((f/(1+(d(1,p)/100)))^i)*r(:,:,k);
        if i==1;
            v(i,1)=q;
        else i>1;
            v(i,1)=q+v(i-1,1);
        end
    end
    c(1,j)=v(t(1,j),1);
end
```

Π.3 Πίνακες αποτελεσμάτων

Σενάριο ελέγχου Α – Χαμηλά διαφοροποιημένα καταναλωτικά αγαθά

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Α – παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=4

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,006	0,005	0,006	0,005	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,004	0,006	0,004
30	0,018	0,017	0,018	0,017	0,016	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,018	0,016	0,018	0,016
100	0,057	0,056	0,057	0,056	0,055	0,056	0,056	0,056	0,056	0,056	0,056	0,056	0,056	0,058	0,055	0,057	0,056
500	0,255	0,254	0,255	0,254	0,253	0,254	0,254	0,254	0,254	0,254	0,254	0,254	0,254	0,255	0,253	0,255	0,253
1000	0,444	0,444	0,444	0,444	0,443	0,444	0,444	0,444	0,444	0,444	0,444	0,444	0,444	0,445	0,443	0,444	0,443
2000	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691	0,691
3000	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828	0,828
4000	0,905	0,905	0,905	0,905	0,904	0,905	0,905	0,905	0,905	0,905	0,905	0,905	0,905	0,905	0,904	0,905	0,904
5000	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947
6000	0,971	0,971	0,971	0,971	0,970	0,971	0,971	0,971	0,971	0,971	0,971	0,971	0,971	0,971	0,970	0,971	0,971
7000	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984
8000	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991
9000	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
10000	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
15000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
16000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
17000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
18000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
19000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	11758	11760	11758	11760	11761	11760	11760	11760	11760	11760	11760	11760	11760	11758	11762	11758	11761

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Α – παράμετροι κατανομής βήτα: α=4, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,006	0,005	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,004	0,006	0,005
30	0,018	0,017	0,018	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,018	0,017	0,018	0,017
100	0,059	0,058	0,059	0,058	0,058	0,058	0,058	0,058	0,058	0,058	0,058	0,058	0,058	0,059	0,058	0,059	0,058
500	0,263	0,262	0,263	0,262	0,261	0,262	0,262	0,262	0,262	0,262	0,262	0,262	0,262	0,263	0,261	0,262	0,261
1000	0,456	0,455	0,456	0,455	0,455	0,455	0,456	0,456	0,455	0,456	0,456	0,455	0,456	0,456	0,455	0,456	0,455
2000	0,704	0,704	0,704	0,704	0,703	0,704	0,704	0,704	0,704	0,704	0,704	0,704	0,704	0,704	0,703	0,704	0,704
3000	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839	0,839
4000	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912	0,912
5000	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952
6000	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974
7000	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986
8000	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992
9000	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
10000	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
15000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
16000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
17000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
18000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
19000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	11350	11351	11350	11352	11353	11352	11351	11351	11351	11351	11351	11352	11351	11349	11353	11350	11352

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Α – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=10

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,006	0,005	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,007	0,004	0,006	0,005
30	0,018	0,018	0,018	0,017	0,017	0,017	0,018	0,018	0,017	0,018	0,018	0,017	0,018	0,019	0,017	0,018	0,017
100	0,060	0,059	0,060	0,059	0,058	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,060	0,058	0,059	0,058
500	0,264	0,264	0,264	0,264	0,263	0,264	0,264	0,264	0,264	0,264	0,264	0,264	0,264	0,264	0,263	0,264	0,263
1000	0,459	0,458	0,459	0,458	0,458	0,458	0,458	0,458	0,458	0,458	0,458	0,458	0,458	0,459	0,458	0,459	0,458
2000	0,707	0,707	0,707	0,707	0,706	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,706	0,707	0,706
3000	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841
4000	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914
5000	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953
6000	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975
7000	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986
8000	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993
9000	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
10000	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
15000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
16000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
17000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
18000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
19000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	11260	11262	11260	11262	11263	11262	11262	11261	11262	11262	11261	11262	11261	11260	11263	11260	11263

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Α – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=25

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,006	0,006	0,007	0,005	0,005	0,005	0,006	0,006	0,005	0,006	0,006	0,005	0,006	0,007	0,005	0,006	0,005
30	0,019	0,018	0,019	0,018	0,017	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,019	0,017	0,019	0,017
100	0,061	0,060	0,061	0,060	0,060	0,060	0,060	0,061	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,061	0,059	0,061	0,060
500	0,271	0,270	0,271	0,270	0,269	0,270	0,270	0,270	0,270	0,270	0,270	0,270	0,270	0,271	0,269	0,270	0,269
1000	0,468	0,467	0,468	0,467	0,467	0,467	0,467	0,467	0,467	0,467	0,467	0,467	0,467	0,468	0,467	0,468	0,467
2000	0,717	0,717	0,717	0,717	0,716	0,717	0,717	0,717	0,717	0,717	0,717	0,717	0,717	0,717	0,716	0,717	0,716
3000	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849	0,849
4000	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920	0,920
5000	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957
6000	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977
7000	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988
8000	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994
9000	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
10000	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
15000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
16000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
17000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
18000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
19000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	10954	10955	10954	10955	10957	10955	10955	10955	10955	10955	10955	10955	10955	10953	10957	10954	10956

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Α – παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,006	0,005	0,006	0,005	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,004	0,006	0,004
30	0,018	0,017	0,018	0,016	0,016	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,018	0,016	0,017	0,016
100	0,057	0,056	0,057	0,056	0,055	0,056	0,056	0,056	0,056	0,056	0,056	0,056	0,056	0,057	0,055	0,057	0,055
500	0,253	0,252	0,253	0,252	0,252	0,252	0,252	0,252	0,252	0,252	0,252	0,252	0,252	0,253	0,251	0,253	0,252
1000	0,442	0,441	0,442	0,441	0,441	0,441	0,441	0,441	0,441	0,441	0,441	0,441	0,441	0,442	0,441	0,442	0,441
2000	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688
3000	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826
4000	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903	0,903
5000	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946
6000	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970
7000	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983	0,983
8000	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991
9000	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
10000	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
15000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
16000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
17000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
18000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
19000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	11854	11855	11853	11856	11857	11855	11855	11855	11855	11855	11855	11855	11855	11853	11857	11854	11856

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Α – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=5

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,006	0,005	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,007	0,004	0,006	0,005
30	0,018	0,017	0,018	0,017	0,017	0,017	0,017	0,018	0,017	0,017	0,018	0,017	0,018	0,019	0,017	0,018	0,017
100	0,060	0,059	0,060	0,059	0,058	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,060	0,058	0,059	0,058
500	0,264	0,263	0,264	0,263	0,263	0,263	0,263	0,263	0,263	0,263	0,263	0,263	0,263	0,264	0,263	0,264	0,263
1000	0,458	0,457	0,458	0,457	0,457	0,457	0,457	0,458	0,457	0,457	0,458	0,457	0,458	0,458	0,457	0,458	0,457
2000	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706	0,706
3000	0,841	0,841	0,841	0,841	0,840	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,841	0,840	0,841	0,840
4000	0,914	0,914	0,914	0,914	0,913	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,914	0,913	0,914	0,913
5000	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953	0,953
6000	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975
7000	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986
8000	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993
9000	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
10000	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
15000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
16000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
17000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
18000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
19000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	11282	11283	11282	11284	11285	11283	11283	11283	11283	11283	11283	11284	11283	11281	11285	11282	11284

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Α – παράμετροι κατανομής βήτα: α=1, β=1

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,006	0,005	0,006	0,005	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,004	0,006	0,004
30	0,017	0,016	0,017	0,016	0,015	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,017	0,015	0,017	0,015
100	0,055	0,054	0,055	0,054	0,053	0,054	0,054	0,054	0,054	0,054	0,054	0,054	0,054	0,055	0,053	0,055	0,053
500	0,244	0,243	0,244	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,244	0,243	0,244	0,243
1000	0,428	0,428	0,429	0,428	0,427	0,428	0,428	0,428	0,428	0,428	0,428	0,428	0,428	0,429	0,427	0,428	0,428
2000	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673	0,673
3000	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813	0,813
4000	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893
5000	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939	0,939
6000	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965
7000	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980
8000	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989
9000	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993
10000	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
15000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
16000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
17000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
18000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
19000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
20000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	12356	12358	12356	12358	12359	12358	12358	12358	12358	12358	12358	12358	12358	12355	12360	12356	12359

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Α - παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=4

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,093	0,057	-0,001	0,042	0,130	0,063	0,057	0,051	0,062	0,055	0,055	0,065	0,053	-0,001	0,133	-0,001	0,125
2	0,166	0,112	0,009	0,109	0,218	0,119	0,111	0,105	0,118	0,111	0,107	0,120	0,108	0,001	0,228	0,025	0,198
3	0,237	0,212	0,149	0,199	0,288	0,213	0,212	0,210	0,214	0,210	0,212	0,212	0,212	0,145	0,300	0,155	0,264
4	0,316	0,279	0,201	0,265	0,371	0,283	0,279	0,274	0,283	0,277	0,277	0,284	0,277	0,197	0,381	0,209	0,351
5	0,390	0,346	0,256	0,337	0,446	0,351	0,346	0,341	0,351	0,345	0,343	0,351	0,344	0,250	0,457	0,268	0,423
6	0,462	0,429	0,354	0,417	0,517	0,432	0,430	0,426	0,433	0,428	0,428	0,432	0,428	0,350	0,529	0,363	0,493
7	0,538	0,501	0,420	0,488	0,593	0,505	0,501	0,496	0,505	0,499	0,498	0,505	0,498	0,415	0,604	0,429	0,571
8	0,611	0,572	0,487	0,561	0,667	0,576	0,572	0,567	0,576	0,570	0,569	0,576	0,570	0,482	0,679	0,498	0,644
9	0,684	0,648	0,569	0,637	0,739	0,652	0,649	0,645	0,652	0,647	0,646	0,652	0,647	0,564	0,751	0,579	0,716
10	0,758	0,721	0,639	0,709	0,814	0,725	0,721	0,716	0,725	0,719	0,718	0,725	0,719	0,634	0,825	0,649	0,791

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Α - παράμετροι κατανομής βήτα: α=4, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,094	0,059	-0,001	0,048	0,131	0,065	0,059	0,054	0,063	0,057	0,057	0,067	0,056	-0,001	0,134	-0,001	0,125
2	0,166	0,109	0,010	0,109	0,209	0,120	0,108	0,100	0,117	0,107	0,104	0,121	0,103	0,001	0,216	0,027	0,194
3	0,234	0,207	0,149	0,202	0,271	0,211	0,206	0,204	0,210	0,206	0,206	0,211	0,205	0,145	0,279	0,157	0,255
4	0,313	0,277	0,207	0,269	0,354	0,283	0,276	0,271	0,282	0,274	0,274	0,284	0,273	0,203	0,361	0,215	0,341
5	0,386	0,342	0,260	0,338	0,428	0,350	0,341	0,335	0,348	0,340	0,338	0,351	0,337	0,253	0,436	0,272	0,414
6	0,457	0,423	0,354	0,418	0,497	0,429	0,422	0,418	0,427	0,421	0,421	0,429	0,420	0,349	0,505	0,364	0,482
7	0,532	0,495	0,423	0,489	0,574	0,502	0,494	0,489	0,500	0,493	0,492	0,503	0,491	0,418	0,581	0,432	0,559
8	0,605	0,565	0,489	0,560	0,647	0,573	0,564	0,559	0,570	0,563	0,562	0,573	0,561	0,483	0,654	0,500	0,632
9	0,677	0,640	0,568	0,635	0,718	0,647	0,639	0,635	0,645	0,639	0,638	0,648	0,637	0,563	0,726	0,578	0,703
10	0,750	0,713	0,640	0,707	0,792	0,720	0,712	0,707	0,718	0,711	0,710	0,720	0,709	0,635	0,799	0,650	0,777

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Α - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=10

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,093	0,057	-0,001	0,042	0,130	0,063	0,057	0,051	0,062	0,055	0,055	0,065	0,053	-0,001	0,133	-0,001	0,125
2	0,164	0,107	0,009	0,102	0,209	0,116	0,106	0,099	0,115	0,105	0,100	0,118	0,101	0,001	0,217	0,025	0,194
3	0,232	0,206	0,149	0,197	0,272	0,209	0,206	0,203	0,209	0,204	0,203	0,209	0,204	0,145	0,279	0,156	0,256
4	0,310	0,273	0,202	0,261	0,355	0,279	0,273	0,267	0,279	0,270	0,269	0,281	0,269	0,199	0,362	0,210	0,342
5	0,382	0,337	0,254	0,329	0,428	0,344	0,336	0,331	0,344	0,335	0,332	0,346	0,333	0,248	0,435	0,266	0,413
6	0,453	0,419	0,350	0,410	0,496	0,423	0,418	0,414	0,424	0,417	0,415	0,425	0,415	0,346	0,503	0,359	0,481
7	0,527	0,489	0,417	0,479	0,572	0,495	0,489	0,484	0,495	0,487	0,486	0,497	0,485	0,412	0,579	0,426	0,557
8	0,599	0,558	0,481	0,550	0,644	0,564	0,558	0,552	0,565	0,556	0,554	0,566	0,554	0,476	0,651	0,492	0,629
9	0,670	0,633	0,561	0,624	0,714	0,639	0,633	0,628	0,639	0,631	0,630	0,640	0,630	0,556	0,722	0,571	0,699
10	0,742	0,704	0,631	0,695	0,787	0,710	0,704	0,699	0,710	0,702	0,701	0,712	0,701	0,626	0,795	0,640	0,773

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Α - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=25

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,091	0,054	-0,001	0,034	0,129	0,058	0,055	0,049	0,058	0,052	0,052	0,061	0,050	-0,001	0,132	-0,001	0,124
2	0,160	0,103	0,008	0,091	0,208	0,110	0,104	0,095	0,110	0,101	0,097	0,113	0,098	0,001	0,217	0,023	0,191
3	0,227	0,202	0,148	0,188	0,270	0,204	0,203	0,199	0,204	0,201	0,201	0,204	0,201	0,145	0,279	0,154	0,251
4	0,304	0,266	0,197	0,248	0,352	0,270	0,267	0,261	0,270	0,264	0,263	0,272	0,262	0,193	0,360	0,205	0,337
5	0,374	0,328	0,247	0,314	0,423	0,334	0,328	0,322	0,334	0,326	0,324	0,336	0,324	0,240	0,432	0,259	0,405
6	0,443	0,410	0,344	0,395	0,490	0,413	0,410	0,405	0,413	0,408	0,407	0,414	0,407	0,340	0,499	0,353	0,471
7	0,516	0,477	0,407	0,461	0,564	0,482	0,478	0,472	0,482	0,476	0,475	0,484	0,474	0,402	0,572	0,416	0,547
8	0,586	0,545	0,469	0,530	0,635	0,549	0,545	0,539	0,550	0,543	0,541	0,552	0,541	0,464	0,643	0,480	0,617
9	0,655	0,619	0,550	0,604	0,703	0,623	0,620	0,614	0,623	0,617	0,616	0,625	0,616	0,545	0,712	0,559	0,685
10	0,726	0,688	0,617	0,672	0,775	0,692	0,689	0,683	0,693	0,686	0,685	0,694	0,685	0,612	0,783	0,626	0,758

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Α - παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,094	0,058	-0,001	0,045	0,131	0,065	0,058	0,052	0,063	0,056	0,056	0,066	0,054	-0,001	0,134	-0,001	0,125
2	0,167	0,113	0,009	0,112	0,217	0,121	0,112	0,105	0,120	0,110	0,109	0,122	0,108	0,001	0,227	0,026	0,198
3	0,238	0,213	0,149	0,203	0,286	0,214	0,213	0,211	0,214	0,210	0,213	0,214	0,212	0,145	0,297	0,156	0,263
4	0,318	0,281	0,204	0,270	0,369	0,286	0,281	0,276	0,286	0,279	0,279	0,287	0,278	0,200	0,378	0,213	0,350
5	0,392	0,349	0,260	0,343	0,444	0,355	0,349	0,344	0,354	0,346	0,346	0,355	0,346	0,254	0,455	0,273	0,423
6	0,465	0,432	0,357	0,423	0,516	0,436	0,432	0,428	0,435	0,429	0,431	0,436	0,430	0,352	0,527	0,367	0,493
7	0,541	0,504	0,425	0,495	0,593	0,509	0,504	0,499	0,508	0,502	0,502	0,510	0,501	0,420	0,603	0,435	0,572
8	0,615	0,576	0,493	0,568	0,667	0,581	0,576	0,571	0,581	0,573	0,574	0,582	0,573	0,487	0,678	0,504	0,645
9	0,688	0,653	0,574	0,644	0,740	0,657	0,653	0,649	0,657	0,650	0,651	0,657	0,650	0,569	0,751	0,585	0,718
10	0,762	0,726	0,646	0,717	0,815	0,731	0,726	0,721	0,730	0,723	0,724	0,731	0,723	0,641	0,825	0,656	0,793

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Α - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=5

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,094	0,058	-0,001	0,045	0,131	0,064	0,058	0,053	0,063	0,056	0,056	0,066	0,054	-0,001	0,134	-0,001	0,125
2	0,165	0,108	0,010	0,106	0,209	0,118	0,108	0,099	0,117	0,106	0,101	0,121	0,102	0,001	0,216	0,026	0,195
3	0,233	0,207	0,149	0,200	0,271	0,210	0,207	0,203	0,210	0,205	0,204	0,211	0,204	0,145	0,278	0,156	0,257
4	0,312	0,275	0,205	0,266	0,355	0,281	0,275	0,269	0,281	0,273	0,272	0,284	0,271	0,201	0,361	0,213	0,343
5	0,385	0,340	0,257	0,335	0,429	0,348	0,340	0,333	0,347	0,338	0,335	0,350	0,335	0,251	0,436	0,270	0,415
6	0,456	0,422	0,353	0,415	0,497	0,427	0,422	0,416	0,427	0,420	0,418	0,429	0,418	0,348	0,504	0,362	0,483
7	0,531	0,493	0,421	0,485	0,574	0,499	0,493	0,487	0,499	0,491	0,489	0,501	0,489	0,416	0,580	0,430	0,560
8	0,603	0,563	0,486	0,556	0,646	0,569	0,563	0,556	0,569	0,561	0,558	0,572	0,558	0,480	0,653	0,497	0,633
9	0,675	0,638	0,566	0,631	0,717	0,644	0,638	0,632	0,644	0,636	0,634	0,646	0,634	0,561	0,724	0,576	0,704
10	0,748	0,710	0,637	0,703	0,791	0,716	0,710	0,704	0,716	0,708	0,706	0,718	0,706	0,632	0,797	0,646	0,777

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Α - παράμετροι κατανομής βήτα: α=1, β=1

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,094	0,059	-0,001	0,046	0,131	0,065	0,058	0,053	0,064	0,056	0,056	0,067	0,054	-0,001	0,134	-0,001	0,125
2	0,169	0,117	0,009	0,118	0,224	0,123	0,116	0,112	0,123	0,114	0,114	0,123	0,114	0,001	0,236	0,026	0,198
3	0,243	0,218	0,149	0,206	0,299	0,218	0,218	0,218	0,219	0,215	0,220	0,216	0,219	0,145	0,315	0,156	0,266
4	0,324	0,287	0,205	0,275	0,382	0,290	0,287	0,284	0,291	0,284	0,287	0,290	0,286	0,200	0,396	0,213	0,355
5	0,399	0,358	0,263	0,351	0,460	0,361	0,358	0,355	0,362	0,354	0,357	0,360	0,357	0,257	0,475	0,276	0,429
6	0,474	0,442	0,361	0,431	0,534	0,443	0,442	0,441	0,445	0,439	0,443	0,442	0,442	0,357	0,550	0,371	0,502
7	0,551	0,515	0,430	0,505	0,612	0,518	0,515	0,513	0,519	0,512	0,515	0,517	0,515	0,425	0,627	0,440	0,582
8	0,627	0,590	0,501	0,580	0,688	0,592	0,589	0,587	0,594	0,586	0,589	0,591	0,589	0,495	0,703	0,512	0,657
9	0,702	0,668	0,583	0,657	0,763	0,670	0,668	0,666	0,671	0,664	0,668	0,669	0,667	0,578	0,779	0,593	0,731
10	0,778	0,742	0,656	0,732	0,839	0,745	0,742	0,740	0,746	0,739	0,742	0,744	0,741	0,651	0,854	0,666	0,808

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Α – ανεξαρτήτων παραμέτρων α, β

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,093	0,057	-0,001	0,043	0,131	0,063	0,058	0,052	0,062	0,055	0,055	0,065	0,054	-0,001	0,133	-0,001	0,125
2	0,165	0,110	0,009	0,107	0,214	0,118	0,109	0,102	0,117	0,108	0,105	0,120	0,105	0,001	0,223	0,025	0,196
3	0,235	0,209	0,149	0,199	0,279	0,211	0,209	0,207	0,212	0,207	0,208	0,211	0,208	0,145	0,290	0,156	0,259
4	0,314	0,277	0,203	0,265	0,363	0,282	0,277	0,272	0,282	0,274	0,274	0,283	0,274	0,199	0,371	0,211	0,345
5	0,387	0,343	0,257	0,335	0,437	0,349	0,343	0,337	0,349	0,341	0,340	0,350	0,339	0,250	0,447	0,269	0,417
6	0,459	0,425	0,353	0,415	0,507	0,429	0,425	0,421	0,429	0,423	0,423	0,430	0,423	0,349	0,517	0,363	0,487
7	0,534	0,496	0,420	0,486	0,583	0,501	0,496	0,492	0,501	0,494	0,494	0,502	0,493	0,416	0,592	0,430	0,564
8	0,606	0,567	0,486	0,558	0,656	0,572	0,567	0,562	0,572	0,565	0,564	0,573	0,564	0,481	0,666	0,497	0,637
9	0,679	0,643	0,567	0,633	0,728	0,647	0,643	0,638	0,647	0,641	0,640	0,648	0,640	0,562	0,738	0,577	0,708
10	0,752	0,715	0,638	0,705	0,802	0,720	0,715	0,710	0,720	0,713	0,712	0,721	0,712	0,633	0,811	0,648	0,782

Σενάριο ελέγχου Β – Υψηλά διαφοροποιημένα καταναλωτικά αγαθά

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Β – παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=4

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,013	0,009	0,024	0,002	0,000	0,006	0,009	0,011	0,006	0,009	0,012	0,004	0,011	0,030	0,000	0,012	0,000
5	0,020	0,015	0,026	0,011	0,008	0,013	0,015	0,017	0,013	0,015	0,017	0,012	0,017	0,031	0,008	0,016	0,009
7	0,028	0,023	0,035	0,018	0,016	0,021	0,023	0,025	0,020	0,023	0,025	0,019	0,024	0,040	0,015	0,024	0,017
10	0,039	0,034	0,046	0,029	0,027	0,032	0,034	0,036	0,031	0,034	0,036	0,030	0,036	0,051	0,026	0,035	0,028
15	0,057	0,052	0,064	0,048	0,045	0,050	0,052	0,054	0,050	0,052	0,054	0,049	0,054	0,069	0,045	0,053	0,046
25	0,092	0,087	0,099	0,083	0,081	0,085	0,088	0,089	0,085	0,088	0,090	0,084	0,089	0,104	0,080	0,088	0,082
40	0,143	0,138	0,149	0,134	0,132	0,136	0,138	0,140	0,136	0,138	0,140	0,135	0,140	0,153	0,131	0,139	0,133
60	0,205	0,201	0,211	0,198	0,195	0,200	0,201	0,203	0,199	0,202	0,203	0,199	0,203	0,215	0,195	0,202	0,196
85	0,278	0,274	0,283	0,270	0,269	0,272	0,274	0,275	0,272	0,274	0,276	0,271	0,275	0,287	0,268	0,275	0,269
100	0,318	0,314	0,323	0,311	0,309	0,313	0,314	0,316	0,312	0,314	0,316	0,312	0,315	0,326	0,309	0,315	0,310
200	0,534	0,531	0,537	0,529	0,528	0,530	0,531	0,532	0,530	0,531	0,532	0,530	0,532	0,540	0,528	0,532	0,528
300	0,681	0,680	0,684	0,678	0,677	0,679	0,680	0,680	0,679	0,680	0,681	0,679	0,680	0,685	0,677	0,680	0,678
500	0,851	0,850	0,852	0,850	0,849	0,850	0,850	0,851	0,850	0,851	0,851	0,850	0,851	0,853	0,849	0,851	0,850
750	0,943	0,942	0,943	0,942	0,942	0,942	0,942	0,942	0,942	0,942	0,942	0,942	0,942	0,943	0,942	0,942	0,942
900	0,968	0,967	0,968	0,967	0,967	0,967	0,967	0,967	0,967	0,967	0,967	0,967	0,967	0,968	0,967	0,967	0,967
1000	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978
1500	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	1814	1815	1812	1817	1817	1816	1815	1815	1816	1815	1815	1816	1815	1811	1818	1815	1817

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Β – παράμετροι κατανομής βήτα: α=4, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,018	0,013	0,034	0,004	0,000	0,009	0,013	0,016	0,009	0,012	0,016	0,006	0,016	0,043	0,000	0,016	0,000
5	0,032	0,024	0,037	0,018	0,016	0,021	0,024	0,026	0,022	0,023	0,026	0,019	0,026	0,045	0,015	0,023	0,017
7	0,044	0,037	0,052	0,031	0,028	0,034	0,037	0,039	0,034	0,036	0,040	0,032	0,039	0,059	0,027	0,036	0,029
10	0,063	0,055	0,070	0,050	0,047	0,053	0,056	0,058	0,053	0,055	0,058	0,050	0,058	0,077	0,046	0,055	0,048
15	0,093	0,086	0,100	0,080	0,077	0,083	0,086	0,088	0,083	0,085	0,088	0,081	0,088	0,107	0,077	0,085	0,078
25	0,150	0,143	0,156	0,138	0,135	0,141	0,143	0,145	0,141	0,143	0,146	0,139	0,145	0,163	0,135	0,143	0,136
40	0,229	0,223	0,235	0,218	0,216	0,220	0,223	0,225	0,221	0,222	0,225	0,219	0,225	0,241	0,215	0,222	0,216
60	0,323	0,317	0,328	0,313	0,311	0,315	0,318	0,319	0,316	0,317	0,319	0,314	0,319	0,333	0,311	0,317	0,312
85	0,424	0,420	0,429	0,416	0,414	0,418	0,420	0,421	0,418	0,420	0,421	0,417	0,421	0,433	0,414	0,420	0,415
100	0,478	0,474	0,482	0,470	0,469	0,472	0,474	0,475	0,472	0,473	0,475	0,471	0,475	0,486	0,469	0,474	0,469
200	0,727	0,725	0,729	0,723	0,723	0,724	0,725	0,726	0,725	0,725	0,726	0,724	0,726	0,732	0,723	0,725	0,723
300	0,858	0,857	0,859	0,856	0,855	0,856	0,857	0,857	0,856	0,856	0,857	0,856	0,857	0,860	0,855	0,856	0,855
500	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961	0,962	0,961	0,961	0,961
750	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992
900	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
1000	0,998	0,998	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,998	0,998	0,998
1500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	1064	1065	1062	1066	1066	1065	1065	1064	1065	1065	1064	1066	1064	1061	1066	1065	1066

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Β – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=10

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,013	0,009	0,024	0,002	0,000	0,006	0,009	0,011	0,006	0,009	0,011	0,004	0,011	0,031	0,000	0,011	0,000
5	0,022	0,016	0,026	0,012	0,010	0,014	0,016	0,018	0,014	0,016	0,018	0,012	0,018	0,032	0,010	0,015	0,011
7	0,030	0,025	0,036	0,020	0,018	0,023	0,025	0,026	0,022	0,024	0,027	0,021	0,026	0,041	0,018	0,024	0,019
10	0,042	0,037	0,048	0,032	0,030	0,035	0,037	0,038	0,035	0,037	0,039	0,033	0,039	0,053	0,030	0,037	0,031
15	0,062	0,057	0,068	0,052	0,051	0,055	0,057	0,058	0,055	0,057	0,059	0,053	0,059	0,073	0,050	0,057	0,051
25	0,100	0,096	0,106	0,091	0,090	0,094	0,096	0,097	0,094	0,096	0,098	0,092	0,097	0,111	0,089	0,096	0,090
40	0,155	0,151	0,161	0,147	0,145	0,149	0,151	0,152	0,149	0,151	0,153	0,148	0,153	0,165	0,145	0,151	0,146
60	0,224	0,219	0,228	0,216	0,214	0,218	0,220	0,221	0,218	0,219	0,221	0,216	0,221	0,233	0,214	0,219	0,215
85	0,301	0,297	0,305	0,294	0,293	0,296	0,298	0,299	0,296	0,297	0,299	0,295	0,299	0,309	0,292	0,297	0,293
100	0,344	0,340	0,348	0,337	0,336	0,339	0,340	0,341	0,339	0,340	0,342	0,338	0,342	0,352	0,336	0,340	0,336
200	0,569	0,567	0,572	0,565	0,564	0,566	0,567	0,568	0,566	0,567	0,568	0,565	0,568	0,574	0,564	0,567	0,564
300	0,717	0,716	0,719	0,714	0,714	0,715	0,716	0,716	0,715	0,716	0,716	0,715	0,716	0,720	0,714	0,716	0,714
500	0,878	0,877	0,879	0,877	0,877	0,877	0,877	0,878	0,877	0,877	0,878	0,877	0,878	0,879	0,877	0,877	0,877
750	0,957	0,957	0,958	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,958	0,957	0,957	0,957
900	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,978	0,977	0,977	0,977
1000	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985	0,985
1500	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	1642	1644	1641	1645	1645	1644	1644	1643	1644	1644	1643	1645	1643	1640	1645	1644	1645

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Β – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=25

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,009	0,006	0,017	0,001	0,000	0,005	0,006	0,008	0,005	0,006	0,008	0,003	0,007	0,021	0,000	0,010	0,000
5	0,015	0,011	0,018	0,008	0,007	0,010	0,011	0,012	0,010	0,011	0,012	0,009	0,012	0,021	0,007	0,012	0,008
7	0,021	0,017	0,025	0,014	0,013	0,016	0,017	0,018	0,016	0,017	0,018	0,015	0,018	0,028	0,012	0,019	0,013
10	0,030	0,026	0,034	0,023	0,021	0,025	0,026	0,027	0,025	0,026	0,027	0,024	0,027	0,037	0,021	0,028	0,022
15	0,044	0,040	0,048	0,037	0,036	0,039	0,040	0,042	0,039	0,040	0,041	0,038	0,041	0,051	0,035	0,042	0,037
25	0,072	0,069	0,076	0,065	0,064	0,067	0,068	0,070	0,068	0,068	0,070	0,067	0,069	0,079	0,064	0,070	0,065
40	0,113	0,109	0,116	0,106	0,105	0,108	0,109	0,110	0,108	0,109	0,110	0,107	0,110	0,119	0,105	0,111	0,106
60	0,164	0,161	0,167	0,158	0,157	0,160	0,161	0,162	0,160	0,161	0,162	0,159	0,162	0,170	0,156	0,162	0,157
85	0,224	0,221	0,227	0,218	0,217	0,220	0,221	0,222	0,220	0,221	0,222	0,219	0,222	0,230	0,217	0,222	0,218
100	0,258	0,255	0,261	0,252	0,251	0,254	0,255	0,256	0,254	0,255	0,256	0,253	0,256	0,263	0,251	0,256	0,252
200	0,449	0,447	0,451	0,445	0,444	0,446	0,447	0,447	0,446	0,447	0,447	0,446	0,447	0,453	0,444	0,448	0,445
300	0,591	0,589	0,593	0,588	0,587	0,589	0,589	0,590	0,589	0,589	0,590	0,588	0,590	0,594	0,587	0,590	0,588
500	0,774	0,774	0,775	0,773	0,772	0,773	0,774	0,774	0,773	0,774	0,774	0,773	0,774	0,776	0,772	0,774	0,773
750	0,893	0,892	0,893	0,892	0,892	0,892	0,892	0,893	0,892	0,892	0,893	0,892	0,893	0,894	0,892	0,893	0,892
900	0,931	0,931	0,932	0,931	0,931	0,931	0,931	0,931	0,931	0,931	0,931	0,931	0,931	0,932	0,931	0,931	0,931
1000	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949	0,949
1500	0,989	0,988	0,989	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,989	0,988	0,988	0,988
2000	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2500	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	2320	2322	2319	2323	2323	2322	2322	2321	2322	2322	2321	2323	2322	2318	2324	2321	2323

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Β – παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,015	0,010	0,027	0,002	0,000	0,007	0,010	0,013	0,007	0,011	0,012	0,005	0,012	0,033	0,000	0,015	0,000
5	0,025	0,018	0,030	0,014	0,011	0,016	0,018	0,020	0,016	0,019	0,019	0,015	0,020	0,035	0,010	0,020	0,012
7	0,034	0,028	0,041	0,023	0,020	0,026	0,028	0,030	0,026	0,029	0,029	0,025	0,030	0,046	0,019	0,031	0,021
10	0,048	0,042	0,055	0,037	0,034	0,040	0,042	0,044	0,040	0,043	0,043	0,039	0,044	0,060	0,034	0,045	0,036
15	0,071	0,065	0,078	0,061	0,058	0,064	0,065	0,067	0,064	0,066	0,067	0,062	0,067	0,083	0,057	0,068	0,059
25	0,116	0,110	0,122	0,106	0,103	0,108	0,110	0,112	0,108	0,111	0,111	0,107	0,112	0,127	0,102	0,113	0,104
40	0,179	0,173	0,184	0,169	0,166	0,172	0,173	0,175	0,172	0,174	0,174	0,171	0,175	0,189	0,166	0,176	0,167
60	0,255	0,251	0,260	0,247	0,244	0,249	0,250	0,252	0,249	0,251	0,251	0,248	0,252	0,264	0,244	0,253	0,245
85	0,341	0,337	0,346	0,334	0,332	0,336	0,337	0,338	0,336	0,338	0,338	0,335	0,338	0,349	0,331	0,339	0,332
100	0,388	0,384	0,392	0,381	0,379	0,383	0,384	0,385	0,383	0,385	0,385	0,382	0,385	0,395	0,379	0,386	0,380
200	0,625	0,623	0,628	0,621	0,620	0,622	0,623	0,624	0,622	0,623	0,623	0,622	0,623	0,630	0,619	0,624	0,620
300	0,771	0,769	0,772	0,768	0,767	0,769	0,769	0,770	0,769	0,769	0,769	0,768	0,769	0,773	0,767	0,770	0,767
500	0,914	0,913	0,915	0,913	0,913	0,913	0,913	0,914	0,913	0,913	0,914	0,913	0,914	0,915	0,913	0,914	0,913
750	0,975	0,975	0,975	0,974	0,974	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,975	0,974	0,975	0,974
900	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988
1000	0,993	0,993	0,993	0,993	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,992	0,993	0,992
1500	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
2000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	1409	1410	1407	1411	1412	1410	1410	1410	1410	1410	1410	1411	1410	1406	1412	1409	1411

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Β – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=5

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,008	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,015	0,010	0,028	0,003	0,000	0,007	0,010	0,013	0,007	0,011	0,014	0,005	0,013	0,035	0,000	0,014	0,000
5	0,026	0,019	0,031	0,015	0,013	0,017	0,019	0,022	0,017	0,020	0,022	0,016	0,021	0,037	0,012	0,019	0,013
7	0,036	0,030	0,042	0,025	0,022	0,027	0,030	0,032	0,027	0,030	0,032	0,026	0,032	0,048	0,022	0,030	0,023
10	0,051	0,045	0,057	0,040	0,037	0,042	0,045	0,047	0,042	0,045	0,047	0,041	0,047	0,063	0,037	0,045	0,038
15	0,075	0,069	0,081	0,064	0,062	0,067	0,069	0,071	0,067	0,069	0,071	0,065	0,071	0,087	0,062	0,070	0,063
25	0,122	0,116	0,127	0,111	0,109	0,114	0,116	0,118	0,114	0,116	0,118	0,112	0,118	0,133	0,109	0,116	0,110
40	0,187	0,182	0,192	0,177	0,176	0,180	0,182	0,184	0,180	0,182	0,184	0,178	0,184	0,197	0,175	0,182	0,176
60	0,267	0,262	0,272	0,258	0,257	0,260	0,262	0,264	0,260	0,262	0,264	0,259	0,264	0,276	0,256	0,263	0,257
85	0,356	0,352	0,360	0,348	0,347	0,350	0,352	0,353	0,350	0,352	0,353	0,349	0,353	0,364	0,346	0,352	0,347
100	0,404	0,400	0,408	0,397	0,395	0,398	0,400	0,401	0,398	0,400	0,401	0,397	0,401	0,411	0,395	0,400	0,396
200	0,644	0,642	0,647	0,640	0,639	0,641	0,642	0,643	0,641	0,642	0,643	0,641	0,643	0,649	0,639	0,642	0,640
300	0,788	0,786	0,789	0,785	0,785	0,786	0,786	0,787	0,786	0,787	0,787	0,786	0,787	0,791	0,785	0,787	0,785
500	0,925	0,924	0,925	0,924	0,923	0,924	0,924	0,924	0,924	0,924	0,924	0,924	0,924	0,925	0,923	0,924	0,924
750	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,980	0,979	0,979	0,979
900	0,990	0,990	0,991	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,990	0,990	0,990
1000	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994
1500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	1337	1339	1336	1340	1340	1339	1339	1338	1339	1339	1338	1340	1338	1335	1340	1339	1340

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Β – παράμετροι κατανομής βήτα: α=1, β=1

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,015	0,010	0,029	0,002	0,000	0,007	0,010	0,014	0,008	0,010	0,013	0,004	0,013	0,037	0,000	0,012	0,000
5	0,024	0,017	0,031	0,013	0,009	0,015	0,017	0,020	0,016	0,017	0,019	0,014	0,019	0,038	0,008	0,018	0,011
7	0,033	0,027	0,042	0,022	0,017	0,024	0,027	0,030	0,026	0,027	0,029	0,023	0,029	0,049	0,016	0,028	0,020
10	0,046	0,040	0,055	0,035	0,031	0,038	0,040	0,043	0,039	0,040	0,042	0,037	0,042	0,062	0,030	0,042	0,033
15	0,068	0,062	0,077	0,057	0,053	0,060	0,062	0,065	0,061	0,062	0,064	0,059	0,064	0,083	0,052	0,064	0,055
25	0,110	0,105	0,119	0,100	0,096	0,102	0,105	0,107	0,104	0,105	0,106	0,101	0,107	0,125	0,095	0,106	0,098
40	0,170	0,165	0,178	0,160	0,157	0,163	0,165	0,167	0,164	0,165	0,166	0,162	0,167	0,184	0,156	0,166	0,159
60	0,244	0,239	0,251	0,235	0,231	0,237	0,239	0,241	0,238	0,239	0,240	0,236	0,240	0,256	0,230	0,240	0,233
85	0,326	0,322	0,333	0,318	0,315	0,320	0,322	0,324	0,321	0,322	0,323	0,320	0,323	0,337	0,314	0,323	0,317
100	0,372	0,368	0,377	0,364	0,361	0,366	0,368	0,369	0,367	0,368	0,369	0,365	0,369	0,382	0,361	0,369	0,363
200	0,605	0,602	0,608	0,600	0,598	0,601	0,602	0,603	0,602	0,602	0,603	0,601	0,603	0,611	0,598	0,603	0,599
300	0,751	0,750	0,754	0,748	0,747	0,749	0,750	0,750	0,749	0,750	0,750	0,749	0,750	0,755	0,747	0,750	0,748
500	0,902	0,901	0,902	0,900	0,900	0,901	0,901	0,901	0,901	0,901	0,901	0,901	0,901	0,903	0,900	0,901	0,900
750	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969	0,969	0,970	0,969	0,969	0,969
900	0,985	0,984	0,985	0,984	0,984	0,984	0,984	0,985	0,984	0,984	0,985	0,984	0,985	0,985	0,984	0,985	0,984
1000	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990
1500	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
2000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	1491	1492	1489	1493	1494	1493	1492	1492	1492	1492	1492	1493	1492	1487	1495	1492	1494

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου B - παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=4

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,206	0,165	0,003	0,220	0,273	0,171	0,166	0,160	0,171	0,165	0,160	0,176	0,160	0,003	0,273	0,003	0,273
2	0,389	0,320	0,075	0,399	0,486	0,336	0,319	0,305	0,336	0,319	0,305	0,348	0,306	0,038	0,496	0,149	0,467
3	0,565	0,515	0,309	0,571	0,666	0,523	0,514	0,508	0,522	0,514	0,509	0,525	0,510	0,289	0,680	0,349	0,636
4	0,743	0,691	0,471	0,753	0,851	0,700	0,690	0,684	0,699	0,691	0,684	0,702	0,686	0,452	0,864	0,507	0,824
5	0,919	0,865	0,635	0,930	1,031	0,875	0,864	0,857	0,874	0,864	0,857	0,878	0,859	0,613	1,045	0,678	1,002
6	1,092	1,041	0,813	1,105	1,207	1,051	1,040	1,034	1,050	1,041	1,034	1,053	1,036	0,791	1,222	0,856	1,177
7	1,265	1,215	0,983	1,280	1,382	1,225	1,214	1,207	1,224	1,214	1,207	1,228	1,209	0,961	1,397	1,028	1,353
8	1,437	1,388	1,153	1,453	1,557	1,398	1,386	1,379	1,397	1,387	1,379	1,401	1,381	1,130	1,571	1,200	1,527
9	1,608	1,559	1,323	1,626	1,729	1,570	1,558	1,550	1,569	1,558	1,550	1,573	1,553	1,299	1,744	1,372	1,699
10	1,778	1,730	1,491	1,797	1,901	1,741	1,729	1,720	1,740	1,729	1,720	1,744	1,723	1,466	1,916	1,542	1,871

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου B - παράμετροι κατανομής βήτα: α=4, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,204	0,163	0,003	0,211	0,273	0,167	0,163	0,157	0,168	0,163	0,157	0,173	0,157	0,003	0,273	0,003	0,273
2	0,375	0,306	0,076	0,380	0,462	0,322	0,305	0,290	0,324	0,306	0,288	0,339	0,290	0,038	0,468	0,154	0,449
3	0,535	0,487	0,304	0,540	0,618	0,495	0,486	0,480	0,497	0,487	0,477	0,503	0,479	0,283	0,627	0,346	0,600
4	0,703	0,654	0,459	0,712	0,791	0,662	0,653	0,646	0,664	0,654	0,644	0,670	0,646	0,440	0,798	0,497	0,776
5	0,867	0,816	0,612	0,878	0,958	0,825	0,815	0,807	0,827	0,816	0,805	0,835	0,806	0,589	0,966	0,658	0,943
6	1,028	0,980	0,777	1,041	1,122	0,989	0,979	0,971	0,991	0,980	0,969	0,999	0,970	0,753	1,130	0,825	1,105
7	1,188	1,142	0,936	1,204	1,285	1,152	1,141	1,133	1,153	1,142	1,130	1,162	1,132	0,911	1,294	0,985	1,269
8	1,347	1,302	1,093	1,365	1,447	1,312	1,301	1,292	1,314	1,302	1,289	1,323	1,291	1,067	1,455	1,145	1,430
9	1,505	1,460	1,249	1,525	1,607	1,471	1,459	1,450	1,473	1,461	1,448	1,482	1,449	1,222	1,616	1,304	1,590
10	1,661	1,618	1,404	1,683	1,766	1,629	1,617	1,607	1,631	1,618	1,604	1,640	1,606	1,376	1,774	1,461	1,749

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου B - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=10

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,206	0,166	0,003	0,220	0,273	0,171	0,166	0,160	0,171	0,166	0,160	0,176	0,160	0,003	0,273	0,003	0,273
2	0,383	0,314	0,075	0,396	0,472	0,329	0,314	0,299	0,330	0,316	0,297	0,344	0,299	0,038	0,479	0,148	0,458
3	0,551	0,502	0,308	0,561	0,637	0,509	0,501	0,496	0,510	0,504	0,492	0,516	0,495	0,288	0,647	0,348	0,618
4	0,725	0,674	0,468	0,739	0,816	0,682	0,674	0,668	0,682	0,676	0,665	0,689	0,667	0,450	0,824	0,504	0,800
5	0,895	0,843	0,627	0,911	0,990	0,851	0,842	0,835	0,852	0,845	0,832	0,860	0,834	0,606	0,999	0,671	0,973
6	1,064	1,014	0,800	1,081	1,160	1,022	1,013	1,006	1,023	1,016	1,003	1,030	1,005	0,778	1,169	0,844	1,142
7	1,232	1,182	0,967	1,251	1,330	1,191	1,181	1,175	1,192	1,185	1,171	1,200	1,174	0,944	1,339	1,012	1,312
8	1,398	1,350	1,131	1,419	1,499	1,359	1,349	1,342	1,360	1,352	1,338	1,368	1,341	1,107	1,508	1,179	1,481
9	1,564	1,516	1,296	1,586	1,666	1,525	1,515	1,508	1,526	1,518	1,504	1,535	1,507	1,271	1,675	1,345	1,648
10	1,728	1,681	1,459	1,752	1,832	1,691	1,680	1,673	1,692	1,683	1,669	1,701	1,672	1,434	1,841	1,511	1,814

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου B - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=25

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,206	0,166	0,003	0,223	0,273	0,172	0,167	0,161	0,172	0,166	0,161	0,177	0,161	0,003	0,273	0,003	0,273
2	0,386	0,315	0,070	0,400	0,475	0,330	0,314	0,301	0,329	0,314	0,302	0,341	0,302	0,038	0,485	0,133	0,457
3	0,556	0,505	0,308	0,564	0,642	0,513	0,503	0,498	0,512	0,503	0,499	0,516	0,499	0,291	0,655	0,343	0,615
4	0,731	0,679	0,471	0,744	0,821	0,686	0,678	0,672	0,686	0,678	0,673	0,690	0,673	0,456	0,833	0,500	0,798
5	0,903	0,848	0,630	0,918	0,997	0,857	0,847	0,840	0,856	0,847	0,841	0,862	0,841	0,612	1,009	0,667	0,973
6	1,073	1,021	0,807	1,088	1,168	1,030	1,020	1,014	1,029	1,020	1,014	1,034	1,015	0,789	1,180	0,843	1,143
7	1,243	1,192	0,975	1,260	1,340	1,200	1,190	1,184	1,200	1,191	1,185	1,205	1,185	0,957	1,352	1,012	1,315
8	1,412	1,361	1,142	1,430	1,510	1,370	1,360	1,353	1,369	1,360	1,354	1,375	1,354	1,123	1,523	1,180	1,485
9	1,580	1,530	1,310	1,599	1,680	1,539	1,529	1,522	1,538	1,529	1,522	1,544	1,523	1,291	1,692	1,349	1,654
10	1,747	1,697	1,477	1,768	1,848	1,707	1,696	1,689	1,706	1,696	1,690	1,712	1,690	1,457	1,861	1,517	1,823

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου B - παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,205	0,164	0,003	0,216	0,273	0,169	0,164	0,159	0,170	0,164	0,159	0,175	0,159	0,003	0,273	0,003	0,273
2	0,385	0,315	0,076	0,391	0,479	0,331	0,315	0,299	0,331	0,315	0,300	0,344	0,301	0,038	0,487	0,151	0,463
3	0,554	0,505	0,307	0,558	0,650	0,512	0,505	0,499	0,512	0,505	0,499	0,517	0,499	0,287	0,662	0,347	0,626
4	0,729	0,678	0,466	0,737	0,830	0,684	0,678	0,671	0,685	0,677	0,671	0,690	0,672	0,448	0,841	0,501	0,809
5	0,900	0,847	0,626	0,909	1,006	0,855	0,847	0,839	0,855	0,846	0,839	0,861	0,840	0,604	1,017	0,669	0,983
6	1,068	1,018	0,799	1,079	1,177	1,026	1,019	1,011	1,027	1,017	1,011	1,032	1,012	0,778	1,188	0,842	1,153
7	1,236	1,187	0,965	1,250	1,347	1,195	1,188	1,179	1,196	1,186	1,180	1,202	1,180	0,943	1,359	1,009	1,324
8	1,403	1,355	1,129	1,418	1,517	1,363	1,355	1,346	1,364	1,353	1,347	1,370	1,347	1,106	1,528	1,176	1,493
9	1,568	1,521	1,294	1,586	1,685	1,530	1,522	1,513	1,531	1,520	1,514	1,537	1,514	1,271	1,696	1,342	1,661
10	1,733	1,687	1,457	1,752	1,851	1,696	1,687	1,678	1,696	1,685	1,679	1,703	1,679	1,433	1,863	1,506	1,827

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου B - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=5

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,205	0,164	0,003	0,216	0,273	0,170	0,164	0,158	0,169	0,164	0,159	0,175	0,159	0,003	0,273	0,003	0,273
2	0,379	0,310	0,076	0,386	0,467	0,327	0,310	0,292	0,326	0,309	0,293	0,341	0,294	0,038	0,474	0,152	0,452
3	0,542	0,493	0,306	0,548	0,626	0,502	0,494	0,484	0,502	0,492	0,486	0,508	0,486	0,286	0,635	0,347	0,606
4	0,712	0,662	0,464	0,722	0,800	0,671	0,662	0,653	0,671	0,661	0,654	0,677	0,655	0,446	0,809	0,500	0,784
5	0,878	0,827	0,620	0,891	0,971	0,837	0,827	0,817	0,837	0,826	0,818	0,845	0,818	0,598	0,980	0,663	0,953
6	1,043	0,994	0,788	1,057	1,137	1,004	0,994	0,983	1,004	0,993	0,985	1,011	0,985	0,766	1,146	0,832	1,119
7	1,206	1,159	0,950	1,223	1,303	1,169	1,159	1,148	1,169	1,157	1,149	1,177	1,149	0,927	1,312	0,996	1,285
8	1,369	1,322	1,110	1,387	1,468	1,333	1,322	1,310	1,333	1,320	1,311	1,341	1,312	1,086	1,477	1,159	1,449
9	1,530	1,484	1,271	1,550	1,631	1,495	1,484	1,472	1,496	1,483	1,473	1,503	1,474	1,246	1,640	1,321	1,612
10	1,689	1,645	1,429	1,711	1,793	1,656	1,645	1,633	1,657	1,643	1,634	1,665	1,634	1,403	1,802	1,482	1,774

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Β - παράμετροι κατανομής βήτα: α=1, β=1

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,206	0,165	0,003	0,218	0,273	0,170	0,165	0,160	0,170	0,164	0,160	0,175	0,160	0,003	0,273	0,003	0,273
2	0,391	0,324	0,076	0,399	0,495	0,336	0,322	0,313	0,338	0,324	0,309	0,347	0,312	0,038	0,510	0,153	0,467
3	0,570	0,523	0,308	0,573	0,687	0,525	0,520	0,522	0,527	0,523	0,517	0,525	0,521	0,287	0,708	0,349	0,643
4	0,751	0,701	0,468	0,757	0,878	0,704	0,699	0,700	0,706	0,702	0,695	0,705	0,699	0,449	0,899	0,506	0,836
5	0,929	0,877	0,634	0,936	1,063	0,882	0,875	0,876	0,883	0,878	0,871	0,883	0,875	0,611	1,085	0,679	1,018
6	1,105	1,057	0,814	1,113	1,243	1,060	1,054	1,056	1,062	1,058	1,050	1,061	1,054	0,791	1,267	0,858	1,196
7	1,280	1,233	0,985	1,291	1,422	1,237	1,230	1,231	1,238	1,234	1,226	1,238	1,230	0,962	1,446	1,032	1,374
8	1,454	1,407	1,156	1,466	1,599	1,412	1,405	1,405	1,413	1,408	1,400	1,413	1,404	1,131	1,623	1,206	1,551
9	1,627	1,581	1,328	1,641	1,775	1,586	1,579	1,579	1,587	1,582	1,574	1,587	1,578	1,302	1,799	1,379	1,726
10	1,798	1,753	1,497	1,814	1,949	1,759	1,751	1,751	1,759	1,755	1,746	1,760	1,750	1,470	1,973	1,551	1,899

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Β – ανεξαρτήτων παραμέτρων α, β

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,206	0,165	0,003	0,218	0,273	0,170	0,165	0,159	0,170	0,165	0,159	0,175	0,160	0,003	0,273	0,003	0,273
2	0,384	0,315	0,075	0,393	0,477	0,330	0,314	0,300	0,331	0,315	0,299	0,343	0,300	0,038	0,485	0,149	0,459
3	0,553	0,504	0,307	0,559	0,646	0,511	0,503	0,498	0,512	0,504	0,497	0,516	0,499	0,287	0,659	0,347	0,621
4	0,727	0,677	0,467	0,738	0,827	0,684	0,676	0,671	0,685	0,677	0,670	0,689	0,671	0,449	0,838	0,502	0,804
5	0,899	0,846	0,626	0,910	1,002	0,855	0,845	0,839	0,855	0,846	0,837	0,861	0,839	0,605	1,014	0,669	0,978
6	1,068	1,018	0,800	1,081	1,173	1,026	1,017	1,011	1,027	1,018	1,009	1,032	1,011	0,778	1,186	0,843	1,148
7	1,236	1,187	0,966	1,251	1,344	1,196	1,186	1,180	1,196	1,187	1,178	1,201	1,180	0,944	1,357	1,010	1,319
8	1,403	1,355	1,131	1,420	1,514	1,364	1,354	1,347	1,364	1,355	1,346	1,370	1,347	1,107	1,527	1,178	1,488
9	1,569	1,522	1,296	1,587	1,682	1,531	1,521	1,513	1,531	1,521	1,512	1,537	1,514	1,272	1,695	1,345	1,656
10	1,733	1,687	1,459	1,754	1,849	1,697	1,686	1,679	1,697	1,687	1,677	1,704	1,679	1,434	1,862	1,510	1,823

Σενάριο ελέγχου Γ – χαμηλά διαφοροποιημένα διαρκή αγαθά

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Γ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=4

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,014	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,040	0,038	0,093	0,018	0,004	0,035	0,038	0,041	0,035	0,039	0,040	0,033	0,041	0,099	0,003	0,080	0,006
5	0,076	0,060	0,096	0,047	0,037	0,059	0,060	0,061	0,059	0,061	0,060	0,059	0,061	0,101	0,033	0,085	0,044
7	0,108	0,097	0,140	0,082	0,069	0,096	0,097	0,098	0,096	0,098	0,097	0,095	0,098	0,146	0,065	0,128	0,077
10	0,154	0,143	0,184	0,129	0,117	0,143	0,143	0,144	0,142	0,144	0,144	0,142	0,144	0,190	0,113	0,173	0,124
15	0,225	0,216	0,253	0,203	0,192	0,215	0,216	0,217	0,215	0,217	0,217	0,215	0,217	0,258	0,189	0,243	0,198
25	0,351	0,343	0,374	0,332	0,323	0,343	0,343	0,344	0,342	0,344	0,344	0,342	0,344	0,379	0,320	0,366	0,328
40	0,503	0,497	0,520	0,488	0,481	0,496	0,496	0,497	0,496	0,497	0,497	0,496	0,497	0,524	0,479	0,514	0,485
60	0,651	0,647	0,664	0,641	0,636	0,647	0,647	0,647	0,646	0,647	0,647	0,646	0,647	0,666	0,635	0,659	0,639
85	0,776	0,773	0,784	0,770	0,766	0,773	0,773	0,774	0,773	0,773	0,773	0,773	0,773	0,785	0,765	0,781	0,768
100	0,828	0,826	0,834	0,823	0,821	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,826	0,836	0,820	0,832	0,822
150	0,929	0,928	0,932	0,927	0,926	0,928	0,928	0,928	0,928	0,928	0,928	0,928	0,928	0,932	0,926	0,931	0,927
200	0,971	0,970	0,972	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,972	0,969	0,971	0,970
250	0,988	0,988	0,988	0,988	0,987	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,987	0,988	0,988
300	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
350	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
400	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
450	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
600	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
750	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	391	392	389	392	393	392	392	391	392	391	391	392	391	388	393	390	393

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Γ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=4, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,016	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,048	0,047	0,109	0,024	0,007	0,044	0,046	0,050	0,043	0,048	0,049	0,040	0,050	0,116	0,007	0,094	0,008
5	0,094	0,077	0,113	0,063	0,056	0,076	0,076	0,079	0,075	0,078	0,078	0,074	0,079	0,119	0,055	0,100	0,059
7	0,134	0,123	0,166	0,106	0,097	0,121	0,122	0,126	0,120	0,124	0,124	0,119	0,125	0,173	0,096	0,153	0,100
10	0,191	0,180	0,220	0,164	0,156	0,179	0,179	0,183	0,178	0,181	0,181	0,177	0,182	0,226	0,155	0,208	0,159
15	0,277	0,268	0,303	0,254	0,247	0,266	0,267	0,270	0,266	0,269	0,269	0,265	0,269	0,309	0,245	0,293	0,249
25	0,424	0,416	0,445	0,405	0,399	0,415	0,416	0,418	0,415	0,417	0,417	0,414	0,418	0,449	0,398	0,436	0,401
40	0,590	0,585	0,605	0,577	0,573	0,584	0,584	0,586	0,583	0,585	0,585	0,583	0,585	0,608	0,572	0,599	0,574
60	0,739	0,736	0,749	0,731	0,728	0,736	0,736	0,737	0,735	0,736	0,736	0,735	0,737	0,751	0,728	0,745	0,729
85	0,852	0,850	0,857	0,847	0,846	0,850	0,850	0,851	0,850	0,850	0,850	0,850	0,851	0,859	0,846	0,855	0,846
100	0,895	0,893	0,899	0,891	0,890	0,893	0,893	0,894	0,893	0,894	0,894	0,893	0,894	0,899	0,890	0,897	0,891
150	0,966	0,966	0,967	0,965	0,965	0,966	0,966	0,966	0,966	0,966	0,966	0,966	0,966	0,968	0,965	0,967	0,965
200	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,989	0,990	0,989	0,989	0,989
250	0,996	0,996	0,997	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,997	0,996	0,997	0,996
300	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
350	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
400	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
450	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
600	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
750	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	306	306	304	307	308	307	307	306	307	306	306	307	306	304	308	305	308

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Γ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=10

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,014	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,041	0,040	0,093	0,020	0,006	0,036	0,040	0,043	0,037	0,041	0,041	0,034	0,043	0,099	0,005	0,081	0,006
5	0,080	0,065	0,096	0,053	0,046	0,063	0,065	0,067	0,064	0,066	0,065	0,063	0,066	0,101	0,044	0,086	0,049
7	0,115	0,105	0,143	0,090	0,081	0,103	0,105	0,107	0,104	0,106	0,105	0,102	0,106	0,149	0,080	0,132	0,085
10	0,165	0,155	0,191	0,142	0,133	0,154	0,155	0,157	0,154	0,156	0,155	0,152	0,157	0,196	0,131	0,181	0,136
15	0,242	0,233	0,266	0,221	0,213	0,232	0,233	0,235	0,232	0,234	0,233	0,230	0,234	0,270	0,212	0,257	0,216
25	0,375	0,368	0,395	0,358	0,352	0,367	0,368	0,369	0,367	0,369	0,368	0,366	0,369	0,399	0,351	0,387	0,354
40	0,533	0,528	0,548	0,520	0,515	0,527	0,528	0,529	0,527	0,528	0,528	0,526	0,528	0,550	0,514	0,542	0,517
60	0,683	0,679	0,693	0,674	0,671	0,679	0,679	0,680	0,679	0,680	0,679	0,678	0,680	0,695	0,670	0,689	0,672
85	0,805	0,803	0,811	0,799	0,797	0,802	0,803	0,803	0,802	0,803	0,803	0,802	0,803	0,812	0,797	0,809	0,798
100	0,854	0,852	0,859	0,850	0,848	0,852	0,852	0,853	0,852	0,853	0,852	0,852	0,853	0,859	0,848	0,857	0,849
150	0,945	0,944	0,946	0,943	0,943	0,944	0,944	0,944	0,944	0,944	0,944	0,944	0,944	0,947	0,942	0,946	0,943
200	0,979	0,979	0,980	0,978	0,978	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,980	0,978	0,979	0,978
250	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992
300	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
350	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
400	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
450	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
600	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
750	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	358	358	356	359	360	358	358	358	358	358	358	358	358	356	360	357	359

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Γ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=25

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,014	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,042	0,041	0,096	0,020	0,005	0,038	0,040	0,043	0,037	0,041	0,044	0,035	0,044	0,102	0,005	0,084	0,007
5	0,081	0,065	0,100	0,051	0,044	0,064	0,065	0,065	0,063	0,065	0,066	0,063	0,066	0,105	0,042	0,089	0,048
7	0,115	0,104	0,146	0,088	0,078	0,103	0,104	0,105	0,102	0,105	0,106	0,102	0,105	0,152	0,076	0,134	0,083
10	0,164	0,153	0,193	0,138	0,129	0,153	0,153	0,154	0,151	0,154	0,155	0,151	0,155	0,198	0,127	0,182	0,133
15	0,239	0,230	0,266	0,216	0,208	0,229	0,230	0,231	0,228	0,230	0,232	0,228	0,231	0,271	0,206	0,256	0,211
25	0,371	0,363	0,393	0,352	0,345	0,362	0,363	0,364	0,362	0,364	0,364	0,361	0,364	0,397	0,343	0,384	0,348
40	0,527	0,521	0,543	0,512	0,507	0,520	0,521	0,521	0,520	0,521	0,522	0,520	0,522	0,546	0,506	0,537	0,509
60	0,676	0,672	0,688	0,667	0,663	0,672	0,672	0,673	0,672	0,672	0,673	0,671	0,673	0,690	0,662	0,683	0,664
85	0,799	0,796	0,806	0,793	0,790	0,796	0,796	0,796	0,796	0,796	0,797	0,796	0,796	0,807	0,790	0,803	0,791
100	0,848	0,847	0,854	0,844	0,842	0,847	0,847	0,847	0,846	0,847	0,847	0,846	0,847	0,855	0,842	0,852	0,843
150	0,941	0,941	0,943	0,940	0,939	0,941	0,941	0,941	0,941	0,941	0,941	0,940	0,941	0,944	0,939	0,943	0,939
200	0,977	0,977	0,978	0,977	0,976	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977	0,978	0,976	0,978	0,976
250	0,991	0,991	0,992	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992	0,991	0,991	0,991
300	0,997	0,997	0,997	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	0,997	0,996
350	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
400	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	0,999	1,000	0,999
450	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
600	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
750	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	365	366	363	367	367	366	366	366	366	366	365	366	365	363	367	364	367

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Γ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,015	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,043	0,041	0,100	0,019	0,005	0,038	0,041	0,045	0,039	0,042	0,043	0,035	0,045	0,108	0,004	0,086	0,007
5	0,084	0,067	0,104	0,054	0,043	0,066	0,067	0,068	0,066	0,068	0,067	0,065	0,068	0,110	0,040	0,091	0,050
7	0,119	0,107	0,152	0,091	0,079	0,106	0,107	0,109	0,107	0,108	0,108	0,105	0,109	0,159	0,076	0,138	0,087
10	0,170	0,159	0,200	0,144	0,132	0,158	0,158	0,161	0,158	0,159	0,159	0,156	0,160	0,207	0,129	0,187	0,139
15	0,248	0,238	0,276	0,225	0,214	0,237	0,238	0,240	0,237	0,239	0,238	0,236	0,239	0,281	0,211	0,264	0,220
25	0,383	0,375	0,406	0,364	0,356	0,374	0,375	0,377	0,375	0,376	0,375	0,373	0,376	0,411	0,353	0,396	0,360
40	0,542	0,536	0,559	0,528	0,522	0,535	0,536	0,537	0,536	0,536	0,536	0,535	0,537	0,562	0,520	0,552	0,525
60	0,692	0,688	0,703	0,683	0,678	0,688	0,688	0,689	0,688	0,688	0,688	0,687	0,688	0,706	0,677	0,699	0,681
85	0,812	0,810	0,819	0,807	0,804	0,810	0,810	0,810	0,810	0,810	0,810	0,809	0,810	0,821	0,803	0,816	0,805
100	0,861	0,859	0,866	0,856	0,854	0,859	0,859	0,859	0,859	0,859	0,859	0,859	0,859	0,867	0,854	0,864	0,856
150	0,948	0,948	0,950	0,947	0,946	0,948	0,948	0,948	0,948	0,948	0,948	0,948	0,948	0,951	0,946	0,949	0,946
200	0,981	0,981	0,982	0,980	0,980	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,982	0,980	0,981	0,980
250	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993
300	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
350	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
400	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
450	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
600	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
750	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	349	350	347	351	352	350	350	350	350	350	350	350	350	347	352	348	351

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Γ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=5

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,015	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,043	0,042	0,098	0,020	0,006	0,040	0,042	0,044	0,038	0,042	0,044	0,035	0,045	0,105	0,006	0,085	0,007
5	0,084	0,069	0,102	0,055	0,050	0,068	0,069	0,069	0,067	0,069	0,070	0,066	0,070	0,107	0,048	0,090	0,052
7	0,120	0,110	0,150	0,094	0,087	0,109	0,110	0,111	0,108	0,110	0,112	0,106	0,112	0,156	0,085	0,137	0,089
10	0,172	0,162	0,199	0,147	0,140	0,161	0,162	0,163	0,160	0,162	0,164	0,159	0,164	0,205	0,139	0,188	0,142
15	0,251	0,242	0,276	0,229	0,222	0,242	0,242	0,243	0,241	0,242	0,244	0,239	0,244	0,281	0,221	0,265	0,224
25	0,388	0,381	0,408	0,370	0,364	0,380	0,381	0,381	0,379	0,381	0,382	0,378	0,382	0,412	0,364	0,400	0,366
40	0,548	0,542	0,563	0,534	0,530	0,542	0,542	0,543	0,541	0,543	0,543	0,541	0,543	0,566	0,530	0,556	0,532
60	0,698	0,694	0,708	0,689	0,686	0,694	0,694	0,695	0,694	0,695	0,695	0,693	0,695	0,710	0,686	0,704	0,687
85	0,818	0,816	0,824	0,812	0,811	0,815	0,815	0,816	0,815	0,816	0,816	0,815	0,816	0,825	0,810	0,821	0,811
100	0,865	0,864	0,870	0,861	0,860	0,864	0,864	0,864	0,863	0,864	0,864	0,863	0,864	0,871	0,860	0,868	0,860
150	0,951	0,950	0,953	0,949	0,949	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,953	0,949	0,952	0,949
200	0,982	0,982	0,983	0,982	0,981	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982	0,983	0,981	0,982	0,981
250	0,993	0,993	0,994	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994	0,993	0,994	0,993
300	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
350	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
400	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
450	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
600	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
750	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	343	344	342	345	345	344	344	344	344	344	344	344	344	341	345	343	345

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Γ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=1, β=1

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,015	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,043	0,040	0,099	0,019	0,004	0,039	0,040	0,042	0,039	0,040	0,042	0,035	0,043	0,105	0,003	0,086	0,006
5	0,081	0,065	0,102	0,053	0,039	0,065	0,064	0,065	0,066	0,064	0,064	0,064	0,065	0,108	0,035	0,091	0,048
7	0,116	0,104	0,149	0,090	0,075	0,105	0,104	0,105	0,105	0,104	0,104	0,103	0,105	0,154	0,070	0,137	0,084
10	0,166	0,155	0,196	0,141	0,127	0,155	0,154	0,155	0,156	0,154	0,154	0,154	0,155	0,202	0,123	0,186	0,135
15	0,243	0,233	0,271	0,221	0,208	0,233	0,232	0,233	0,234	0,233	0,233	0,232	0,233	0,275	0,204	0,261	0,215
25	0,376	0,368	0,399	0,358	0,347	0,368	0,368	0,368	0,369	0,368	0,368	0,367	0,369	0,403	0,344	0,391	0,353
40	0,534	0,528	0,551	0,520	0,512	0,528	0,527	0,528	0,528	0,527	0,527	0,527	0,528	0,554	0,510	0,545	0,516
60	0,684	0,679	0,695	0,674	0,669	0,679	0,679	0,680	0,680	0,679	0,679	0,679	0,680	0,697	0,667	0,691	0,672
85	0,805	0,803	0,812	0,799	0,796	0,803	0,802	0,803	0,803	0,802	0,802	0,802	0,803	0,813	0,795	0,810	0,798
100	0,854	0,852	0,860	0,850	0,848	0,852	0,852	0,852	0,853	0,852	0,852	0,852	0,852	0,861	0,847	0,858	0,849
150	0,945	0,944	0,947	0,943	0,942	0,944	0,944	0,944	0,944	0,944	0,944	0,944	0,944	0,947	0,942	0,946	0,943
200	0,979	0,979	0,980	0,978	0,978	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,979	0,980	0,978	0,980	0,978
250	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992	0,992
300	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
350	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
400	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
450	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
600	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
750	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	357	358	356	359	360	358	358	358	358	358	358	358	358	355	360	356	359

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Γ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=4

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,091	0,061	-0,001	0,067	0,116	0,064	0,061	0,057	0,064	0,060	0,057	0,068	0,057	-0,001	0,116	-0,001	0,115
2	0,161	0,117	0,011	0,137	0,204	0,119	0,117	0,115	0,120	0,116	0,115	0,122	0,115	0,007	0,210	0,019	0,190
3	0,225	0,203	0,125	0,211	0,273	0,203	0,203	0,203	0,204	0,202	0,203	0,203	0,203	0,122	0,282	0,131	0,254
4	0,292	0,263	0,171	0,275	0,343	0,265	0,263	0,262	0,265	0,263	0,261	0,266	0,262	0,168	0,351	0,178	0,327
5	0,353	0,320	0,217	0,336	0,407	0,322	0,320	0,319	0,323	0,320	0,318	0,323	0,319	0,213	0,417	0,226	0,389
6	0,410	0,384	0,287	0,397	0,467	0,384	0,383	0,383	0,385	0,383	0,382	0,385	0,383	0,283	0,476	0,296	0,447
7	0,465	0,438	0,336	0,453	0,525	0,439	0,438	0,437	0,440	0,437	0,436	0,441	0,437	0,331	0,534	0,346	0,505
8	0,517	0,489	0,383	0,506	0,579	0,491	0,489	0,488	0,492	0,489	0,488	0,492	0,488	0,378	0,589	0,394	0,559
9	0,567	0,541	0,435	0,558	0,630	0,542	0,541	0,540	0,543	0,540	0,539	0,543	0,540	0,429	0,641	0,445	0,610
10	0,614	0,588	0,479	0,606	0,680	0,590	0,588	0,587	0,590	0,588	0,586	0,591	0,587	0,473	0,690	0,490	0,659

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Γ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=4, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,090	0,060	-0,001	0,068	0,114	0,062	0,060	0,058	0,063	0,060	0,058	0,065	0,058	-0,001	0,115	-0,001	0,112
2	0,157	0,111	0,011	0,134	0,187	0,113	0,112	0,107	0,115	0,110	0,107	0,117	0,108	0,007	0,190	0,019	0,181
3	0,217	0,192	0,123	0,205	0,248	0,193	0,193	0,190	0,194	0,191	0,190	0,195	0,190	0,120	0,251	0,129	0,240
4	0,281	0,251	0,170	0,268	0,316	0,253	0,252	0,249	0,255	0,250	0,249	0,256	0,249	0,167	0,319	0,177	0,310
5	0,338	0,305	0,213	0,326	0,376	0,307	0,306	0,302	0,309	0,304	0,302	0,310	0,302	0,208	0,380	0,222	0,369
6	0,392	0,364	0,277	0,383	0,431	0,365	0,365	0,361	0,367	0,363	0,361	0,368	0,361	0,272	0,435	0,286	0,423
7	0,444	0,415	0,325	0,436	0,486	0,417	0,416	0,413	0,419	0,414	0,413	0,421	0,413	0,320	0,490	0,334	0,478
8	0,492	0,464	0,368	0,486	0,537	0,466	0,465	0,460	0,468	0,462	0,461	0,469	0,461	0,363	0,540	0,379	0,529
9	0,538	0,511	0,415	0,534	0,584	0,513	0,512	0,508	0,515	0,510	0,508	0,516	0,508	0,410	0,588	0,426	0,576
10	0,582	0,555	0,457	0,579	0,630	0,557	0,556	0,552	0,559	0,554	0,552	0,561	0,552	0,451	0,634	0,469	0,622

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Γ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=10

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,091	0,060	-0,001	0,066	0,116	0,064	0,060	0,057	0,064	0,060	0,057	0,067	0,057	-0,001	0,116	-0,001	0,115
2	0,159	0,113	0,011	0,134	0,194	0,116	0,113	0,109	0,116	0,112	0,110	0,120	0,109	0,007	0,198	0,019	0,186
3	0,220	0,196	0,125	0,206	0,256	0,197	0,196	0,194	0,197	0,196	0,195	0,199	0,194	0,122	0,261	0,130	0,247
4	0,286	0,255	0,172	0,269	0,325	0,258	0,256	0,252	0,258	0,255	0,253	0,261	0,253	0,169	0,329	0,178	0,317
5	0,344	0,310	0,216	0,328	0,386	0,313	0,311	0,307	0,313	0,310	0,308	0,316	0,307	0,212	0,391	0,224	0,378
6	0,399	0,371	0,283	0,387	0,443	0,373	0,371	0,368	0,373	0,370	0,369	0,376	0,368	0,279	0,447	0,291	0,433
7	0,452	0,424	0,332	0,441	0,499	0,426	0,424	0,420	0,426	0,423	0,422	0,430	0,421	0,327	0,503	0,340	0,489
8	0,503	0,473	0,377	0,492	0,551	0,476	0,474	0,470	0,476	0,473	0,471	0,479	0,470	0,372	0,556	0,386	0,541
9	0,550	0,522	0,426	0,541	0,600	0,525	0,523	0,519	0,525	0,522	0,520	0,529	0,519	0,421	0,605	0,436	0,590
10	0,595	0,568	0,469	0,588	0,647	0,571	0,569	0,564	0,571	0,567	0,566	0,574	0,565	0,464	0,652	0,480	0,637

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Γ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=25

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,090	0,058	-0,001	0,060	0,115	0,063	0,058	0,053	0,063	0,058	0,053	0,067	0,053	-0,001	0,115	-0,001	0,113
2	0,158	0,112	0,011	0,130	0,195	0,115	0,112	0,108	0,116	0,112	0,107	0,120	0,108	0,007	0,199	0,019	0,186
3	0,220	0,196	0,124	0,204	0,259	0,198	0,196	0,193	0,198	0,196	0,194	0,200	0,194	0,122	0,265	0,130	0,248
4	0,285	0,254	0,170	0,266	0,328	0,258	0,255	0,251	0,259	0,254	0,251	0,261	0,251	0,166	0,333	0,177	0,318
5	0,344	0,310	0,214	0,326	0,390	0,313	0,310	0,306	0,314	0,310	0,306	0,317	0,306	0,209	0,395	0,224	0,379
6	0,399	0,371	0,282	0,385	0,447	0,374	0,372	0,368	0,375	0,371	0,368	0,378	0,368	0,277	0,453	0,291	0,435
7	0,453	0,424	0,329	0,439	0,503	0,427	0,424	0,420	0,428	0,424	0,420	0,431	0,420	0,324	0,509	0,340	0,492
8	0,504	0,474	0,375	0,491	0,556	0,477	0,474	0,470	0,479	0,474	0,470	0,481	0,470	0,369	0,562	0,386	0,544
9	0,551	0,524	0,425	0,541	0,605	0,527	0,524	0,520	0,528	0,523	0,520	0,531	0,520	0,419	0,612	0,436	0,593
10	0,597	0,569	0,468	0,588	0,653	0,573	0,570	0,566	0,574	0,569	0,565	0,577	0,566	0,462	0,659	0,480	0,641

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Γ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,091	0,061	-0,001	0,069	0,115	0,064	0,060	0,058	0,064	0,061	0,058	0,066	0,058	-0,001	0,116	-0,001	0,114
2	0,160	0,115	0,011	0,137	0,199	0,117	0,115	0,114	0,118	0,115	0,114	0,120	0,113	0,007	0,205	0,019	0,186
3	0,222	0,199	0,124	0,209	0,265	0,199	0,199	0,200	0,200	0,199	0,200	0,199	0,200	0,121	0,274	0,130	0,248
4	0,288	0,259	0,171	0,273	0,334	0,261	0,259	0,258	0,261	0,259	0,259	0,262	0,258	0,168	0,341	0,178	0,320
5	0,347	0,315	0,216	0,333	0,397	0,317	0,315	0,314	0,317	0,315	0,315	0,318	0,314	0,211	0,405	0,226	0,380
6	0,403	0,377	0,283	0,392	0,455	0,378	0,377	0,376	0,378	0,376	0,376	0,379	0,376	0,278	0,463	0,293	0,437
7	0,457	0,430	0,332	0,447	0,511	0,431	0,430	0,429	0,431	0,429	0,429	0,433	0,429	0,326	0,520	0,342	0,494
8	0,508	0,480	0,377	0,499	0,564	0,482	0,480	0,479	0,482	0,479	0,480	0,483	0,479	0,372	0,573	0,389	0,547
9	0,555	0,530	0,427	0,549	0,614	0,531	0,530	0,528	0,531	0,529	0,529	0,533	0,529	0,421	0,623	0,439	0,596
10	0,601	0,576	0,470	0,596	0,662	0,578	0,576	0,574	0,577	0,575	0,575	0,579	0,574	0,464	0,671	0,483	0,644

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Γ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=5

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,091	0,061	-0,001	0,069	0,115	0,064	0,061	0,058	0,064	0,061	0,058	0,067	0,058	-0,001	0,116	-0,001	0,114
2	0,158	0,112	0,011	0,137	0,190	0,115	0,113	0,109	0,115	0,113	0,109	0,119	0,109	0,007	0,193	0,019	0,183
3	0,219	0,194	0,124	0,208	0,251	0,196	0,194	0,193	0,195	0,195	0,192	0,197	0,193	0,121	0,255	0,130	0,242
4	0,284	0,254	0,172	0,271	0,320	0,256	0,254	0,252	0,256	0,255	0,251	0,259	0,252	0,169	0,323	0,179	0,312
5	0,342	0,308	0,215	0,330	0,380	0,311	0,309	0,306	0,311	0,309	0,305	0,314	0,306	0,211	0,384	0,225	0,372
6	0,396	0,368	0,281	0,388	0,436	0,370	0,368	0,366	0,370	0,369	0,365	0,373	0,366	0,277	0,440	0,290	0,427
7	0,449	0,421	0,330	0,442	0,491	0,423	0,421	0,418	0,423	0,421	0,418	0,426	0,418	0,325	0,495	0,339	0,483
8	0,499	0,470	0,374	0,492	0,543	0,472	0,470	0,467	0,472	0,471	0,467	0,476	0,467	0,369	0,547	0,385	0,535
9	0,546	0,518	0,423	0,541	0,591	0,521	0,518	0,516	0,521	0,519	0,515	0,524	0,515	0,417	0,595	0,434	0,583
10	0,590	0,563	0,465	0,587	0,638	0,566	0,564	0,561	0,566	0,564	0,560	0,570	0,560	0,460	0,642	0,477	0,629

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Γ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=1, β=1

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,091	0,061	-0,001	0,069	0,116	0,064	0,062	0,059	0,064	0,061	0,059	0,066	0,059	-0,001	0,117	-0,001	0,114
2	0,161	0,118	0,011	0,137	0,205	0,119	0,119	0,115	0,119	0,118	0,117	0,121	0,116	0,007	0,213	0,019	0,190
3	0,225	0,203	0,124	0,210	0,275	0,203	0,204	0,202	0,201	0,203	0,205	0,202	0,204	0,121	0,286	0,130	0,254
4	0,292	0,263	0,172	0,273	0,344	0,264	0,264	0,261	0,263	0,263	0,263	0,265	0,262	0,168	0,354	0,178	0,325
5	0,351	0,320	0,218	0,334	0,408	0,321	0,322	0,318	0,320	0,320	0,321	0,322	0,320	0,214	0,419	0,227	0,387
6	0,408	0,383	0,286	0,394	0,467	0,383	0,384	0,381	0,381	0,383	0,384	0,383	0,382	0,282	0,479	0,295	0,445
7	0,463	0,436	0,335	0,450	0,525	0,437	0,438	0,435	0,436	0,437	0,437	0,438	0,436	0,330	0,536	0,344	0,502
8	0,514	0,488	0,382	0,503	0,579	0,488	0,489	0,486	0,487	0,488	0,488	0,489	0,487	0,376	0,590	0,392	0,556
9	0,563	0,538	0,432	0,553	0,630	0,538	0,540	0,536	0,537	0,538	0,539	0,539	0,538	0,426	0,641	0,442	0,606
10	0,609	0,585	0,476	0,601	0,678	0,585	0,586	0,583	0,584	0,585	0,585	0,586	0,584	0,470	0,690	0,487	0,654

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Γ – ανεξαρτήτων παραμέτρων α, β

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,091	0,060	-0,001	0,067	0,115	0,064	0,060	0,057	0,064	0,060	0,057	0,067	0,057	-0,001	0,116	-0,001	0,114
2	0,159	0,114	0,011	0,135	0,196	0,116	0,114	0,111	0,117	0,114	0,111	0,120	0,111	0,007	0,201	0,019	0,186
3	0,221	0,198	0,124	0,208	0,261	0,198	0,198	0,197	0,199	0,197	0,197	0,199	0,197	0,121	0,268	0,130	0,248
4	0,287	0,257	0,171	0,271	0,330	0,259	0,258	0,255	0,259	0,257	0,255	0,261	0,255	0,168	0,336	0,178	0,318
5	0,346	0,313	0,216	0,330	0,392	0,315	0,313	0,310	0,315	0,313	0,311	0,317	0,311	0,211	0,399	0,225	0,379
6	0,401	0,374	0,283	0,389	0,449	0,375	0,374	0,372	0,376	0,374	0,372	0,377	0,372	0,278	0,456	0,292	0,435
7	0,455	0,427	0,331	0,444	0,506	0,429	0,427	0,425	0,429	0,427	0,425	0,431	0,425	0,326	0,512	0,341	0,492
8	0,505	0,477	0,377	0,496	0,558	0,479	0,477	0,474	0,479	0,477	0,475	0,481	0,475	0,371	0,565	0,387	0,544
9	0,553	0,526	0,426	0,545	0,608	0,528	0,527	0,524	0,529	0,526	0,524	0,531	0,524	0,420	0,615	0,437	0,593
10	0,598	0,572	0,469	0,592	0,655	0,574	0,573	0,570	0,575	0,572	0,570	0,577	0,570	0,463	0,663	0,481	0,641

Σενάριο ελέγχου Δ – Υψηλά διαφοροποιημένα διαρκή αγαθά

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Δ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=4

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,113	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,294	0,271	0,686	0,108	0,018	0,256	0,274	0,282	0,252	0,279	0,281	0,248	0,282	0,705	0,021	0,648	0,014
3	0,457	0,408	0,713	0,302	0,209	0,397	0,408	0,419	0,399	0,409	0,415	0,391	0,416	0,731	0,212	0,677	0,204
4	0,579	0,544	0,794	0,462	0,377	0,535	0,545	0,553	0,538	0,545	0,549	0,532	0,551	0,807	0,379	0,768	0,372
5	0,713	0,689	0,861	0,635	0,572	0,682	0,690	0,695	0,685	0,690	0,693	0,680	0,693	0,869	0,574	0,843	0,569
6	0,848	0,836	0,927	0,807	0,773	0,832	0,836	0,839	0,833	0,836	0,838	0,831	0,838	0,931	0,774	0,917	0,772
7	0,920	0,913	0,961	0,898	0,880	0,911	0,913	0,915	0,912	0,913	0,914	0,911	0,914	0,964	0,881	0,956	0,879
8	0,958	0,954	0,979	0,946	0,937	0,953	0,954	0,955	0,953	0,954	0,955	0,953	0,955	0,981	0,937	0,977	0,936
9	0,978	0,976	0,989	0,971	0,967	0,975	0,976	0,976	0,975	0,976	0,976	0,975	0,976	0,990	0,967	0,988	0,966
10	0,988	0,987	0,994	0,985	0,982	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987	0,995	0,982	0,994	0,982
15	0,994	0,993	0,997	0,992	0,991	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,997	0,991	0,997	0,991
20	0,997	0,996	0,998	0,996	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,998	0,995	0,998	0,995
25	0,998	0,998	0,999	0,998	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,997	0,999	0,997
30	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,999
35	1,000	0,999	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	0,999	1,000	0,999
40	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
45	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
50	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
60	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	55	56	49	57	58	56	56	55	56	56	55	56	55	49	58	50	58

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Δ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=4, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,114	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,208	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,303	0,285	0,690	0,135	0,029	0,268	0,285	0,301	0,261	0,294	0,299	0,256	0,299	0,708	0,037	0,653	0,014
4	0,433	0,379	0,694	0,253	0,190	0,365	0,382	0,390	0,373	0,381	0,383	0,363	0,387	0,713	0,190	0,657	0,190
5	0,523	0,477	0,723	0,384	0,323	0,463	0,479	0,487	0,470	0,477	0,482	0,460	0,485	0,740	0,324	0,688	0,320
6	0,601	0,568	0,788	0,486	0,431	0,557	0,570	0,577	0,563	0,570	0,571	0,555	0,575	0,801	0,432	0,763	0,427
7	0,668	0,638	0,819	0,570	0,526	0,629	0,640	0,646	0,634	0,640	0,641	0,628	0,644	0,830	0,527	0,797	0,524
8	0,723	0,698	0,849	0,642	0,604	0,691	0,700	0,705	0,695	0,700	0,701	0,689	0,703	0,858	0,605	0,830	0,602
9	0,769	0,749	0,875	0,701	0,670	0,742	0,750	0,754	0,746	0,750	0,751	0,741	0,752	0,882	0,671	0,860	0,668
10	0,807	0,790	0,895	0,751	0,725	0,785	0,791	0,795	0,788	0,791	0,792	0,784	0,793	0,902	0,725	0,883	0,723
15	0,922	0,915	0,958	0,900	0,889	0,913	0,916	0,917	0,914	0,916	0,916	0,913	0,917	0,960	0,889	0,953	0,888
20	0,969	0,966	0,983	0,959	0,955	0,965	0,966	0,967	0,965	0,966	0,966	0,965	0,966	0,984	0,955	0,981	0,955
25	0,987	0,986	0,993	0,984	0,982	0,986	0,986	0,987	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,994	0,982	0,992	0,982
30	0,995	0,994	0,997	0,993	0,993	0,994	0,994	0,995	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,997	0,993	0,997	0,993
35	0,998	0,998	0,999	0,997	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,997	0,999	0,997
40	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,999
45	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
50	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
60	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	39	40	36	41	41	40	40	40	40	40	40	40	40	36	41	37	41

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Δ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=10

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,113	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,206	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,299	0,280	0,687	0,130	0,025	0,263	0,282	0,296	0,260	0,292	0,290	0,253	0,294	0,705	0,028	0,649	0,019
4	0,419	0,366	0,691	0,234	0,174	0,347	0,373	0,379	0,359	0,375	0,364	0,350	0,374	0,709	0,173	0,653	0,176
5	0,504	0,457	0,718	0,356	0,296	0,441	0,460	0,469	0,450	0,462	0,458	0,441	0,465	0,735	0,297	0,683	0,296
6	0,578	0,545	0,781	0,455	0,399	0,530	0,549	0,555	0,539	0,550	0,546	0,531	0,552	0,794	0,399	0,754	0,399
7	0,643	0,613	0,810	0,537	0,491	0,600	0,617	0,621	0,608	0,617	0,613	0,602	0,618	0,822	0,491	0,787	0,491
8	0,697	0,672	0,839	0,608	0,568	0,661	0,675	0,679	0,668	0,675	0,672	0,662	0,676	0,849	0,568	0,819	0,568
9	0,744	0,722	0,864	0,668	0,634	0,713	0,725	0,728	0,718	0,725	0,722	0,714	0,726	0,873	0,634	0,848	0,634
10	0,783	0,764	0,885	0,718	0,690	0,757	0,767	0,769	0,761	0,767	0,765	0,757	0,768	0,892	0,690	0,871	0,690
15	0,905	0,897	0,950	0,877	0,864	0,894	0,898	0,899	0,896	0,898	0,897	0,894	0,898	0,953	0,864	0,943	0,864
20	0,958	0,955	0,978	0,946	0,941	0,953	0,955	0,956	0,954	0,955	0,955	0,954	0,956	0,979	0,941	0,975	0,941
25	0,982	0,980	0,990	0,976	0,974	0,980	0,980	0,981	0,980	0,980	0,980	0,980	0,981	0,991	0,974	0,989	0,974
30	0,992	0,991	0,996	0,990	0,989	0,991	0,991	0,992	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,996	0,989	0,995	0,989
35	0,997	0,996	0,998	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,998	0,995	0,998	0,995
40	0,998	0,998	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,998	0,999	0,998
45	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	0,999	1,000	0,999
50	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
60	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	43	44	39	45	45	44	43	43	44	43	44	44	43	39	45	40	45

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Δ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=25

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,112	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,204	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,298	0,282	0,685	0,133	0,028	0,263	0,284	0,299	0,262	0,289	0,295	0,249	0,298	0,704	0,031	0,648	0,023
4	0,415	0,361	0,689	0,219	0,174	0,342	0,368	0,372	0,356	0,359	0,367	0,342	0,370	0,708	0,173	0,652	0,175
5	0,497	0,450	0,715	0,342	0,292	0,433	0,455	0,461	0,444	0,449	0,456	0,430	0,460	0,733	0,293	0,680	0,290
6	0,571	0,537	0,779	0,440	0,392	0,522	0,542	0,546	0,532	0,536	0,542	0,521	0,545	0,792	0,392	0,753	0,391
7	0,635	0,603	0,807	0,521	0,482	0,591	0,608	0,611	0,600	0,603	0,608	0,590	0,610	0,819	0,483	0,784	0,482
8	0,688	0,662	0,835	0,592	0,559	0,651	0,666	0,669	0,659	0,661	0,666	0,650	0,668	0,845	0,559	0,816	0,558
9	0,734	0,712	0,861	0,652	0,624	0,703	0,716	0,718	0,710	0,712	0,715	0,702	0,717	0,869	0,624	0,844	0,623
10	0,774	0,755	0,881	0,704	0,679	0,747	0,758	0,759	0,752	0,754	0,757	0,746	0,759	0,888	0,680	0,867	0,679
15	0,898	0,890	0,946	0,867	0,856	0,886	0,891	0,892	0,889	0,890	0,891	0,886	0,892	0,950	0,856	0,940	0,856
20	0,954	0,950	0,976	0,940	0,935	0,949	0,951	0,951	0,950	0,950	0,951	0,949	0,951	0,977	0,935	0,973	0,935
25	0,979	0,978	0,989	0,973	0,971	0,977	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,977	0,978	0,990	0,971	0,988	0,971
30	0,991	0,990	0,995	0,988	0,987	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,990	0,995	0,987	0,995	0,987
35	0,996	0,996	0,998	0,995	0,994	0,995	0,996	0,996	0,995	0,995	0,996	0,995	0,996	0,998	0,994	0,998	0,994
40	0,998	0,998	0,999	0,998	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,997	0,999	0,997
45	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	0,999	1,000	0,999
50	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	0,999
60	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	44	45	40	46	47	45	45	45	45	45	45	45	45	40	47	41	47

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Δ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,114	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,205	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,297	0,276	0,687	0,119	0,021	0,257	0,277	0,294	0,257	0,285	0,285	0,250	0,288	0,706	0,024	0,651	0,014
4	0,405	0,352	0,691	0,221	0,145	0,330	0,361	0,367	0,346	0,356	0,356	0,333	0,362	0,710	0,146	0,655	0,141
5	0,484	0,436	0,716	0,334	0,257	0,416	0,442	0,449	0,430	0,438	0,438	0,418	0,444	0,733	0,259	0,683	0,253
6	0,555	0,520	0,778	0,428	0,354	0,502	0,526	0,532	0,516	0,522	0,522	0,505	0,528	0,792	0,356	0,751	0,350
7	0,618	0,586	0,806	0,508	0,444	0,570	0,592	0,596	0,582	0,588	0,588	0,573	0,593	0,818	0,445	0,782	0,440
8	0,671	0,644	0,832	0,578	0,521	0,630	0,648	0,653	0,641	0,645	0,645	0,632	0,649	0,843	0,522	0,812	0,518
9	0,717	0,694	0,857	0,637	0,588	0,682	0,698	0,702	0,691	0,695	0,695	0,684	0,699	0,866	0,589	0,839	0,585
10	0,757	0,737	0,877	0,688	0,645	0,726	0,740	0,743	0,734	0,738	0,738	0,728	0,741	0,884	0,646	0,862	0,643
15	0,886	0,876	0,942	0,853	0,833	0,871	0,878	0,879	0,875	0,877	0,877	0,872	0,878	0,946	0,834	0,935	0,832
20	0,946	0,942	0,973	0,931	0,922	0,940	0,943	0,943	0,941	0,942	0,942	0,940	0,943	0,974	0,922	0,969	0,921
25	0,975	0,973	0,987	0,968	0,963	0,972	0,973	0,973	0,972	0,973	0,973	0,972	0,973	0,988	0,963	0,986	0,963
30	0,988	0,987	0,994	0,985	0,983	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987	0,994	0,983	0,993	0,983
35	0,994	0,994	0,997	0,993	0,992	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,997	0,992	0,997	0,992
40	0,997	0,997	0,999	0,997	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,999	0,996	0,999	0,996
45	0,999	0,999	0,999	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,998	0,999	0,998
50	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	0,999	1,000	0,999
60	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	47	47	42	49	49	48	47	47	47	47	47	48	47	42	49	43	49

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Δ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=5

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,113	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,207	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,301	0,283	0,688	0,132	0,029	0,266	0,284	0,299	0,261	0,295	0,294	0,255	0,297	0,707	0,034	0,651	0,021
4	0,427	0,377	0,692	0,246	0,193	0,362	0,380	0,389	0,369	0,381	0,381	0,359	0,386	0,711	0,196	0,655	0,185
5	0,516	0,471	0,720	0,373	0,319	0,458	0,472	0,482	0,463	0,474	0,477	0,453	0,480	0,737	0,323	0,686	0,312
6	0,592	0,561	0,784	0,474	0,424	0,549	0,562	0,570	0,554	0,564	0,564	0,546	0,568	0,797	0,427	0,758	0,418
7	0,659	0,630	0,815	0,558	0,517	0,620	0,632	0,638	0,625	0,633	0,633	0,618	0,636	0,826	0,520	0,793	0,512
8	0,713	0,689	0,844	0,629	0,595	0,681	0,691	0,696	0,685	0,691	0,692	0,679	0,694	0,854	0,597	0,825	0,590
9	0,759	0,739	0,870	0,689	0,660	0,733	0,741	0,745	0,736	0,741	0,741	0,731	0,744	0,878	0,662	0,854	0,656
10	0,798	0,781	0,891	0,739	0,714	0,776	0,782	0,786	0,778	0,783	0,783	0,774	0,785	0,897	0,716	0,878	0,711
15	0,916	0,909	0,955	0,891	0,881	0,907	0,909	0,911	0,908	0,910	0,910	0,906	0,910	0,957	0,882	0,949	0,880
20	0,965	0,962	0,981	0,955	0,951	0,961	0,962	0,963	0,962	0,962	0,962	0,961	0,963	0,982	0,951	0,979	0,950
25	0,985	0,984	0,992	0,981	0,979	0,984	0,984	0,985	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,993	0,980	0,991	0,979
30	0,994	0,993	0,997	0,992	0,991	0,993	0,993	0,994	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994	0,997	0,991	0,996	0,991
35	0,997	0,997	0,999	0,997	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,999	0,996	0,998	0,996
40	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,998
45	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	0,999
50	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
60	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	41	41	37	42	43	41	41	41	41	41	41	41	41	37	43	38	43

Πιθανότητα απορρόφησης ανά περίοδο μοντέλου Δ – παράμετροι κατανομής βήτα: α=1, β=1

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,113	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,205	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,293	0,265	0,687	0,092	0,016	0,245	0,272	0,277	0,251	0,273	0,271	0,242	0,276	0,705	0,019	0,650	0,009
4	0,381	0,321	0,691	0,178	0,094	0,298	0,327	0,337	0,318	0,325	0,321	0,302	0,330	0,709	0,103	0,654	0,077
5	0,446	0,391	0,712	0,285	0,175	0,370	0,394	0,408	0,387	0,394	0,392	0,370	0,401	0,730	0,184	0,677	0,157
6	0,508	0,467	0,772	0,373	0,254	0,445	0,471	0,483	0,462	0,470	0,468	0,448	0,476	0,788	0,263	0,741	0,237
7	0,564	0,525	0,796	0,447	0,332	0,506	0,529	0,540	0,521	0,528	0,526	0,508	0,533	0,809	0,340	0,768	0,316
8	0,613	0,579	0,820	0,513	0,403	0,562	0,582	0,592	0,575	0,582	0,579	0,564	0,586	0,832	0,411	0,795	0,389
9	0,657	0,627	0,842	0,570	0,469	0,612	0,630	0,638	0,623	0,630	0,628	0,614	0,633	0,853	0,475	0,821	0,455
10	0,696	0,669	0,860	0,619	0,528	0,656	0,671	0,679	0,666	0,672	0,670	0,657	0,675	0,870	0,534	0,841	0,516
15	0,834	0,819	0,924	0,793	0,740	0,812	0,820	0,825	0,817	0,820	0,819	0,813	0,822	0,929	0,744	0,914	0,734
20	0,909	0,901	0,958	0,887	0,858	0,897	0,902	0,904	0,900	0,902	0,901	0,897	0,903	0,961	0,860	0,953	0,854
25	0,950	0,946	0,977	0,938	0,922	0,944	0,946	0,948	0,945	0,946	0,946	0,944	0,947	0,979	0,923	0,974	0,920
30	0,973	0,970	0,988	0,966	0,957	0,969	0,971	0,971	0,970	0,971	0,970	0,969	0,971	0,988	0,958	0,986	0,956
35	0,985	0,984	0,993	0,981	0,977	0,983	0,984	0,984	0,984	0,984	0,984	0,983	0,984	0,994	0,977	0,992	0,976
40	0,992	0,991	0,996	0,990	0,987	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,997	0,987	0,996	0,987
45	0,996	0,995	0,998	0,994	0,993	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,998	0,993	0,998	0,993
50	0,998	0,997	0,999	0,997	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,999	0,996	0,999	0,996
60	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	0,999	1,000	0,999
70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Συνθήκη απορρόφησης	Αναμενόμενος χρόνος απορρόφησης																
P=0,999	58	59	51	60	62	59	59	58	59	59	59	59	58	51	61	52	62

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Δ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=4

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,150	0,116	0,003	0,120	0,226	0,119	0,119	0,111	0,133	0,109	0,107	0,131	0,109	0,003	0,222	0,003	0,236
2	0,263	0,238	0,031	0,273	0,411	0,242	0,240	0,233	0,255	0,230	0,230	0,251	0,232	0,030	0,406	0,034	0,420
3	0,362	0,350	0,094	0,396	0,561	0,357	0,352	0,342	0,368	0,343	0,340	0,368	0,342	0,088	0,555	0,104	0,572
4	0,447	0,440	0,129	0,501	0,689	0,448	0,442	0,429	0,459	0,432	0,428	0,459	0,430	0,121	0,683	0,144	0,701
5	0,518	0,517	0,163	0,592	0,797	0,528	0,519	0,505	0,538	0,509	0,505	0,539	0,506	0,153	0,790	0,182	0,810
6	0,579	0,583	0,193	0,669	0,888	0,595	0,585	0,570	0,605	0,575	0,570	0,607	0,572	0,181	0,881	0,215	0,902
7	0,631	0,639	0,217	0,735	0,966	0,652	0,641	0,625	0,662	0,631	0,626	0,665	0,627	0,204	0,959	0,243	0,980
8	0,675	0,687	0,239	0,791	1,032	0,701	0,689	0,672	0,710	0,679	0,673	0,714	0,674	0,224	1,024	0,267	1,047
9	0,713	0,728	0,257	0,839	1,088	0,743	0,729	0,712	0,751	0,719	0,713	0,756	0,714	0,241	1,080	0,288	1,103
10	0,745	0,763	0,272	0,879	1,136	0,778	0,764	0,746	0,786	0,754	0,747	0,791	0,748	0,256	1,128	0,305	1,151

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Δ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=4, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,150	0,118	0,003	0,126	0,224	0,120	0,120	0,113	0,134	0,110	0,110	0,131	0,111	0,003	0,218	0,003	0,235
2	0,252	0,227	0,031	0,268	0,382	0,231	0,228	0,222	0,242	0,218	0,220	0,240	0,221	0,030	0,377	0,034	0,391
3	0,336	0,323	0,092	0,376	0,501	0,330	0,323	0,316	0,339	0,315	0,315	0,339	0,315	0,087	0,496	0,103	0,511
4	0,404	0,396	0,125	0,464	0,599	0,405	0,396	0,387	0,413	0,387	0,388	0,414	0,387	0,118	0,594	0,139	0,610
5	0,459	0,455	0,154	0,534	0,677	0,466	0,455	0,445	0,473	0,446	0,447	0,475	0,445	0,145	0,672	0,172	0,689
6	0,503	0,504	0,179	0,591	0,740	0,515	0,503	0,493	0,522	0,494	0,494	0,525	0,493	0,168	0,735	0,199	0,752
7	0,538	0,542	0,198	0,637	0,791	0,555	0,541	0,530	0,561	0,533	0,533	0,565	0,531	0,186	0,785	0,221	0,803
8	0,567	0,573	0,213	0,675	0,832	0,587	0,572	0,561	0,592	0,564	0,564	0,597	0,562	0,201	0,826	0,238	0,844
9	0,590	0,599	0,226	0,705	0,865	0,613	0,597	0,586	0,618	0,589	0,589	0,623	0,587	0,213	0,859	0,252	0,877
10	0,609	0,619	0,236	0,729	0,892	0,634	0,618	0,606	0,638	0,609	0,609	0,644	0,607	0,222	0,886	0,264	0,904

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Δ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=10

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,151	0,117	0,003	0,121	0,226	0,120	0,120	0,111	0,134	0,108	0,109	0,131	0,110	0,003	0,222	0,003	0,236
2	0,256	0,230	0,031	0,268	0,391	0,237	0,230	0,224	0,247	0,219	0,225	0,243	0,223	0,030	0,388	0,034	0,397
3	0,345	0,331	0,093	0,383	0,518	0,341	0,331	0,322	0,348	0,320	0,326	0,348	0,323	0,088	0,514	0,104	0,524
4	0,418	0,409	0,127	0,476	0,623	0,421	0,407	0,398	0,427	0,396	0,403	0,428	0,399	0,120	0,620	0,141	0,629
5	0,477	0,473	0,158	0,554	0,708	0,488	0,471	0,461	0,492	0,460	0,467	0,494	0,463	0,149	0,705	0,176	0,715
6	0,526	0,526	0,185	0,617	0,778	0,542	0,524	0,513	0,546	0,513	0,520	0,549	0,515	0,174	0,775	0,206	0,784
7	0,566	0,570	0,206	0,669	0,835	0,587	0,567	0,556	0,590	0,556	0,564	0,593	0,558	0,194	0,832	0,230	0,841
8	0,599	0,605	0,223	0,711	0,882	0,624	0,602	0,590	0,626	0,591	0,599	0,630	0,593	0,210	0,879	0,249	0,888
9	0,626	0,635	0,237	0,746	0,920	0,654	0,631	0,619	0,656	0,620	0,628	0,660	0,622	0,223	0,917	0,265	0,927
10	0,648	0,658	0,249	0,775	0,952	0,679	0,655	0,642	0,680	0,643	0,652	0,685	0,645	0,234	0,949	0,278	0,958

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Δ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=25

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,148	0,111	0,003	0,106	0,224	0,115	0,114	0,103	0,130	0,101	0,101	0,128	0,102	0,003	0,219	0,003	0,233
2	0,253	0,225	0,031	0,257	0,386	0,231	0,225	0,218	0,243	0,215	0,216	0,241	0,217	0,029	0,383	0,034	0,392
3	0,342	0,327	0,093	0,373	0,513	0,337	0,326	0,317	0,345	0,318	0,317	0,346	0,317	0,088	0,510	0,104	0,519
4	0,416	0,404	0,126	0,468	0,619	0,417	0,403	0,394	0,424	0,395	0,394	0,427	0,393	0,119	0,615	0,141	0,626
5	0,477	0,470	0,158	0,548	0,705	0,485	0,467	0,458	0,490	0,461	0,459	0,495	0,458	0,149	0,701	0,176	0,712
6	0,527	0,524	0,184	0,613	0,776	0,541	0,521	0,511	0,545	0,516	0,513	0,551	0,511	0,174	0,772	0,206	0,783
7	0,568	0,569	0,206	0,667	0,834	0,587	0,565	0,555	0,590	0,560	0,557	0,597	0,555	0,194	0,830	0,230	0,841
8	0,602	0,606	0,224	0,711	0,882	0,625	0,601	0,591	0,627	0,597	0,593	0,635	0,591	0,211	0,878	0,250	0,889
9	0,630	0,636	0,238	0,748	0,921	0,656	0,631	0,621	0,658	0,627	0,623	0,666	0,621	0,224	0,918	0,266	0,929
10	0,653	0,661	0,250	0,778	0,954	0,682	0,656	0,645	0,683	0,652	0,647	0,692	0,645	0,236	0,950	0,280	0,961

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Δ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=2, β=2

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,151	0,119	0,003	0,127	0,226	0,121	0,121	0,114	0,134	0,111	0,110	0,131	0,112	0,003	0,221	0,003	0,236
2	0,260	0,236	0,031	0,274	0,401	0,243	0,234	0,230	0,251	0,227	0,229	0,249	0,229	0,030	0,397	0,034	0,411
3	0,354	0,342	0,093	0,393	0,538	0,353	0,339	0,333	0,357	0,333	0,334	0,358	0,333	0,088	0,533	0,104	0,549
4	0,432	0,424	0,128	0,492	0,653	0,439	0,420	0,414	0,441	0,415	0,416	0,444	0,415	0,121	0,648	0,142	0,664
5	0,496	0,494	0,160	0,574	0,748	0,511	0,489	0,482	0,511	0,485	0,486	0,516	0,483	0,151	0,742	0,178	0,759
6	0,549	0,552	0,187	0,643	0,826	0,572	0,546	0,538	0,570	0,543	0,544	0,576	0,540	0,177	0,820	0,209	0,838
7	0,594	0,600	0,210	0,700	0,891	0,622	0,594	0,585	0,618	0,591	0,592	0,625	0,588	0,197	0,885	0,234	0,904
8	0,631	0,640	0,228	0,747	0,945	0,664	0,633	0,624	0,659	0,631	0,632	0,667	0,627	0,215	0,939	0,255	0,958
9	0,662	0,674	0,244	0,787	0,990	0,698	0,666	0,657	0,692	0,664	0,665	0,701	0,660	0,230	0,984	0,273	1,003
10	0,687	0,701	0,257	0,820	1,027	0,727	0,693	0,684	0,720	0,691	0,692	0,730	0,687	0,242	1,021	0,287	1,041

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Δ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=5, β=5

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,151	0,118	0,003	0,126	0,227	0,120	0,121	0,114	0,135	0,110	0,110	0,131	0,112	0,003	0,222	0,003	0,236
2	0,255	0,229	0,031	0,271	0,386	0,233	0,230	0,224	0,246	0,219	0,222	0,242	0,223	0,030	0,381	0,034	0,395
3	0,342	0,328	0,093	0,382	0,507	0,334	0,328	0,320	0,346	0,318	0,320	0,344	0,319	0,088	0,502	0,104	0,519
4	0,413	0,403	0,127	0,473	0,608	0,412	0,403	0,394	0,422	0,392	0,394	0,422	0,393	0,120	0,602	0,142	0,621
5	0,470	0,465	0,158	0,547	0,689	0,475	0,465	0,454	0,485	0,454	0,456	0,486	0,454	0,148	0,683	0,176	0,703
6	0,516	0,515	0,183	0,607	0,755	0,527	0,515	0,504	0,536	0,504	0,506	0,538	0,504	0,172	0,748	0,205	0,769
7	0,554	0,556	0,203	0,656	0,808	0,568	0,555	0,543	0,577	0,544	0,546	0,580	0,544	0,191	0,801	0,227	0,823
8	0,584	0,589	0,220	0,695	0,851	0,602	0,588	0,576	0,611	0,577	0,579	0,614	0,576	0,207	0,844	0,246	0,866
9	0,609	0,616	0,233	0,727	0,886	0,630	0,615	0,602	0,638	0,604	0,605	0,642	0,602	0,220	0,879	0,261	0,902
10	0,629	0,637	0,244	0,753	0,915	0,652	0,637	0,623	0,660	0,625	0,627	0,664	0,624	0,230	0,907	0,273	0,931

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Δ - παράμετροι κατανομής βήτα: α=1, β=1

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,151	0,119	0,003	0,126	0,227	0,120	0,120	0,116	0,136	0,110	0,111	0,131	0,113	0,003	0,222	0,003	0,236
2	0,267	0,245	0,031	0,283	0,420	0,251	0,244	0,239	0,261	0,234	0,239	0,258	0,238	0,030	0,413	0,034	0,435
3	0,369	0,361	0,094	0,408	0,582	0,371	0,361	0,352	0,378	0,351	0,355	0,379	0,352	0,089	0,572	0,105	0,601
4	0,457	0,455	0,128	0,515	0,720	0,468	0,454	0,442	0,473	0,443	0,448	0,476	0,444	0,121	0,709	0,144	0,743
5	0,532	0,536	0,162	0,608	0,838	0,553	0,534	0,521	0,555	0,524	0,530	0,560	0,524	0,152	0,825	0,182	0,865
6	0,596	0,606	0,192	0,688	0,939	0,626	0,604	0,589	0,626	0,593	0,600	0,633	0,593	0,180	0,925	0,216	0,968
7	0,651	0,666	0,217	0,756	1,025	0,688	0,664	0,647	0,686	0,653	0,659	0,695	0,652	0,203	1,010	0,244	1,057
8	0,698	0,717	0,238	0,815	1,099	0,741	0,715	0,697	0,738	0,704	0,710	0,748	0,702	0,223	1,083	0,268	1,132
9	0,739	0,761	0,257	0,865	1,162	0,787	0,758	0,739	0,783	0,747	0,754	0,793	0,745	0,240	1,145	0,289	1,197
10	0,773	0,799	0,272	0,908	1,217	0,826	0,796	0,776	0,821	0,785	0,792	0,832	0,782	0,255	1,199	0,307	1,253

Αναμενόμενη CLV ανά περίοδο μοντέλου Δ – ανεξαρτήτων παραμέτρων α, β

Περίοδος	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
1	0,150	0,117	0,003	0,122	0,226	0,119	0,119	0,112	0,134	0,109	0,108	0,130	0,110	0,003	0,221	0,003	0,236
2	0,258	0,233	0,031	0,271	0,397	0,238	0,233	0,227	0,249	0,223	0,226	0,246	0,226	0,030	0,392	0,034	0,406
3	0,350	0,337	0,093	0,387	0,531	0,346	0,337	0,329	0,354	0,328	0,330	0,355	0,329	0,088	0,526	0,104	0,542
4	0,427	0,419	0,127	0,484	0,645	0,430	0,418	0,408	0,437	0,409	0,410	0,439	0,409	0,120	0,639	0,142	0,656
5	0,490	0,487	0,159	0,565	0,738	0,501	0,486	0,475	0,506	0,477	0,478	0,509	0,476	0,150	0,731	0,177	0,750
6	0,542	0,544	0,186	0,633	0,815	0,560	0,543	0,531	0,564	0,534	0,535	0,568	0,533	0,175	0,808	0,208	0,828
7	0,586	0,592	0,208	0,689	0,879	0,608	0,590	0,577	0,612	0,581	0,582	0,617	0,579	0,196	0,872	0,233	0,893
8	0,622	0,631	0,226	0,735	0,932	0,649	0,629	0,616	0,652	0,620	0,621	0,658	0,618	0,213	0,925	0,253	0,946
9	0,653	0,664	0,242	0,774	0,976	0,683	0,661	0,648	0,685	0,653	0,654	0,692	0,650	0,227	0,969	0,271	0,991
10	0,678	0,691	0,254	0,806	1,013	0,711	0,688	0,674	0,713	0,680	0,681	0,720	0,677	0,239	1,006	0,285	1,028

Πίνακας συσχέτισης τμήμα 5.1.2

Correlations

		Περίοδοι		Περίοδοι		Περίοδοι
α=2, β=4	Pearson Correlation	,980**	Kendall's tau	1,000**	Spearman's rho	1,000**
	Sig. (2-tailed)	,000		.		.
	N	10		10		10
α=4, β=2	Pearson Correlation	,966**		1,000**		1,000**
	Sig. (2-tailed)	,000		.		.
	N	10		10		10
α=5, β=10	Pearson Correlation	,971**		1,000**		1,000**
	Sig. (2-tailed)	,000		.		.
	N	10		10		10
α=5, β=25	Pearson Correlation	,972**		1,000**		1,000**
	Sig. (2-tailed)	,000		.		.
	N	10		10		10
α=2, β=2	Pearson Correlation	,974**		1,000**		1,000**
	Sig. (2-tailed)	,000		.		.
	N	10		10		10
α=5, β=5	Pearson Correlation	,968**		1,000**		1,000**
	Sig. (2-tailed)	,000		.		.
	N	10		10		10
α=1, β=1	Pearson Correlation	,982**		1,000**		1,000**
	Sig. (2-tailed)	,000		.		.
	N	10		10		10

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Πίνακες ελέγχων διαφοράς μέσων ανά σενάριο ελέγχου

Έλεγχος διαφοράς μέσων – Σενάριο ελέγχου Α

	Test Value = 0					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
Περίπτωση1η	19,992	9	,000	,07602	,0674	,0846
Περίπτωση2η	10,441	9	,000	,00959	,0075	,0117
Περίπτωση3η	-28,277	9	,000	-,08561	-,0925	-,0788
Περίπτωση4η	-9,319	9	,000	-,00604	-,0075	-,0046
Περίπτωση5η	9,319	9	,000	,00302	,0023	,0038
Περίπτωση6η	9,319	9	,000	,00906	,0069	,0113
Περίπτωση7η	10,874	9	,000	,01358	,0108	,0164
Περίπτωση8η	-10,874	9	,000	-,02716	-,0328	-,0215

Έλεγχος διαφοράς μέσων – Σενάριο ελέγχου Β

	Test Value = 0					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
Περίπτωση1η	31,259	9	,000	,21462	,1991	,2301
Περίπτωση2η	-29,368	9	,000	-,06351	-,0684	-,0586
Περίπτωση3η	-29,779	9	,000	-,15111	-,1626	-,1396
Περίπτωση4η	-9,552	9	,000	-,01521	-,0188	-,0116
Περίπτωση5η	9,552	9	,000	,00760	,0058	,0094
Περίπτωση6η	9,552	9	,000	,02281	,0174	,0282
Περίπτωση7η	8,419	9	,000	,03228	,0236	,0409
Περίπτωση8η	-8,419	9	,000	-,06455	-,0819	-,0472

Έλεγχος διαφοράς μέσων – Σενάριο ελέγχου Γ

	Test Value = 0					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
Περίπτωση1η	20,810	9	,000	,09114	,0812	,1010
Περίπτωση2η	-10,919	9	,000	-,01586	-,0191	-,0126
Περίπτωση3η	-25,590	9	,000	-,07528	-,0819	-,0686
Περίπτωση4η	-11,465	9	,000	-,00439	-,0053	-,0035
Περίπτωση5η	11,465	9	,000	,00219	,0018	,0026
Περίπτωση6η	11,465	9	,000	,00658	,0053	,0079
Περίπτωση7η	8,831	9	,000	,01007	,0075	,0127
Περίπτωση8η	-8,831	9	,000	-,02014	-,0253	-,0150

Έλεγχος διαφοράς μέσων – Σενάριο ελέγχου Δ

	Test Value = 0					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
Περίπτωση1η	9,560	9	,000	,31855	,2432	,3939
Περίπτωση2η	-6,688	9	,000	-,07501	-,1004	-,0496
Περίπτωση3η	-11,015	9	,000	-,24353	-,2936	-,1935
Περίπτωση4η	-12,396	9	,000	-,02184	-,0258	-,0179
Περίπτωση5η	12,396	9	,000	,01092	,0089	,0129
Περίπτωση6η	12,396	9	,000	,03276	,0268	,0387
Περίπτωση7η	1,943	9	,084	,00265	-,0004	,0057
Περίπτωση8η	-1,943	9	,084	-,00530	-,0115	,0009

Πίνακας άριστων χρόνων διακοπής πελατειακής σχέσης – τμήμα 5.5

α	β	Σενάριο ελέγχου	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
2	4	Α	1359	1359	1359	1359	1359	1359	1359	1358	1359	1359	1359
		Β	812	813	811	814	814	813	813	810	814	813	814
		Γ	86	86	85	86	86	86	86	85	87	85	86
		Δ	32	33	28	34	35	33	32	27	34	28	35
4	2	Α	1347	1347	1347	1347	1347	1347	1347	1347	1347	1347	1347
		Β	566	567	565	567	568	567	566	564	568	567	567
		Γ	78	78	77	78	78	78	78	77	78	77	78
		Δ	24	25	21	25	26	25	24	21	26	22	26
5	10	Α	1341	1342	1341	1342	1342	1342	1342	1341	1342	1341	1342
		Β	760	761	760	762	762	762	761	759	762	761	762
		Γ	83	83	82	83	83	83	83	82	83	82	83
		Δ	26	26	23	27	28	27	26	23	28	23	28
5	25	Α	1327	1327	1327	1327	1328	1327	1327	1327	1328	1327	1328
		Β	929	929	928	930	930	930	929	927	930	929	930
		Γ	83	83	83	84	84	83	83	82	84	83	84
		Δ	27	27	23	28	29	27	27	23	29	24	29
2	2	Α	1363	1363	1363	1363	1364	1363	1363	1363	1364	1363	1364
		Β	690	691	690	692	692	692	691	689	693	691	692
		Γ	82	82	81	83	83	82	82	81	83	82	83
		Δ	28	28	24	29	30	29	28	24	30	25	30
5	5	Α	1344	1344	1344	1344	1345	1344	1344	1344	1345	1344	1345
		Β	664	665	663	666	666	665	665	662	666	665	666
		Γ	81	81	81	82	82	82	81	80	82	81	82
		Δ	25	25	22	26	27	25	25	22	27	22	27
1	1	Α	1380	1380	1380	1380	1381	1380	1380	1380	1381	1380	1380
		Β	722	723	720	723	724	723	722	719	724	722	724
		Γ	83	83	82	84	84	83	83	82	84	83	84
		Δ	33	34	28	35	36	34	34	28	36	29	37

Στατιστικά άριστων χρόνων διακοπής πελατειακής σχέσης

		Εύρος τιμών		Στατιστικά			
		Μέγιστο	Ελάχιστο	Μέσος	Διάμεσος	Διακύμανση	C.V.
Σενάριο ελέγχου	Α	1327	1381	1351,725	1347	255,1815	0,012038
	Β	564	930	734,0667	723	11499,88	0,190137
	Γ	77	87	82,275	83	5,402507	0,030186
	Δ	21	37	27,88333	27	14,63695	0,182182

Πίνακας μέγιστης αναμενόμενης CLV

α	β	Σενάριο ελέγχου	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
2	4	Α	23,379	23,364	23,258	23,356	23,478	23,370	23,361	23,248	23,492	23,274	23,451
		Β	28,019	28,110	27,548	28,305	28,476	28,216	28,057	27,376	28,506	27,894	28,414
		Γ	1,490	1,475	1,323	1,508	1,594	1,480	1,473	1,311	1,609	1,346	1,566
		Δ	0,923	0,956	0,356	1,107	1,404	0,990	0,938	0,334	1,394	0,399	1,422
4	2	Α	23,008	22,992	22,896	22,989	23,089	23,002	22,986	22,888	23,098	22,913	23,071
		Β	18,632	18,721	18,242	18,892	19,026	18,833	18,663	18,079	19,044	18,569	18,990
		Γ	1,317	1,300	1,165	1,338	1,396	1,309	1,296	1,153	1,402	1,187	1,386
		Δ	0,683	0,700	0,274	0,825	1,000	0,728	0,686	0,258	0,993	0,308	1,012
5	10	Α	22,719	22,702	22,605	22,696	22,804	22,713	22,697	22,597	22,813	22,622	22,786
		Β	25,655	25,736	25,239	25,921	26,048	25,849	25,680	25,075	26,065	25,567	26,015
		Γ	1,409	1,391	1,256	1,424	1,491	1,400	1,386	1,246	1,498	1,276	1,479
		Δ	0,744	0,763	0,298	0,900	1,091	0,793	0,748	0,280	1,088	0,333	1,097
5	25	Α	22,085	22,067	21,974	22,053	22,174	22,076	22,062	21,966	22,184	21,990	22,153
		Β	31,460	31,525	31,063	31,694	31,818	31,602	31,486	30,946	31,841	31,297	31,771
		Γ	1,422	1,404	1,264	1,438	1,513	1,414	1,399	1,251	1,521	1,287	1,497
		Δ	0,756	0,773	0,303	0,915	1,103	0,809	0,756	0,285	1,099	0,339	1,110
2	2	Α	23,597	23,582	23,477	23,577	23,692	23,589	23,578	23,468	23,705	23,494	23,666
		Β	23,403	23,499	22,980	23,675	23,844	23,586	23,457	22,841	23,871	23,255	23,794
		Γ	1,414	1,400	1,253	1,435	1,513	1,405	1,397	1,240	1,525	1,279	1,488
		Δ	0,809	0,833	0,316	0,977	1,207	0,867	0,817	0,297	1,200	0,354	1,221
5	5	Α	22,901	22,884	22,789	22,880	22,984	22,896	22,878	22,780	22,993	22,805	22,968
		Β	22,061	22,151	21,670	22,328	22,456	22,257	22,098	21,516	22,473	21,977	22,421
		Γ	1,381	1,363	1,230	1,402	1,460	1,374	1,359	1,217	1,465	1,253	1,449
		Δ	0,712	0,727	0,287	0,861	1,034	0,757	0,712	0,270	1,025	0,321	1,051
1	1	Α	24,289	24,277	24,163	24,271	24,397	24,279	24,275	24,154	24,416	24,180	24,358
		Β	25,259	25,365	24,741	25,554	25,798	25,461	25,316	24,546	25,853	25,130	25,688
		Γ	1,443	1,430	1,278	1,460	1,552	1,432	1,429	1,267	1,568	1,301	1,520
		Δ	0,975	1,020	0,361	1,162	1,535	1,061	0,999	0,338	1,513	0,409	1,581

Στατιστικά μέσης αναμενόμενης CLV

Μέγιστο	Ελάχιστο	Μέσος	Τυπική απόκλιση	Συντελεστής μεταβλητότητας
24,41612	21,96618	23,12558	0,656033	0,028368
31,84071	18,07914	24,99936	3,85522	0,154213
1,609128	1,153209	1,392064	0,09006	0,064695
1,580562	0,258365	0,80936	0,293392	0,362499