

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ  
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ  
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ  
ΣΕ ΑΣΥΜΜΟΡΦΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ  
ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ Θ.  
ΤΣΕΛΙΚΗΣ

*Επιβλέπων Καθηγητής:*  
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΡΟΒΑΣ  
*Τριμελής Επιτροπή:*  
Δ. ΡΟΒΑΣ  
Β.ΚΟΥΚΟΓΛΟΥ  
Ι.ΝΙΚΟΛΟΣ

7 Δεκεμβρίου 2010



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΑΠΟΚΤΗΣΗΣ ΤΟΥ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ  
ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ  
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ  
ΤΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ



# Περιεχόμενα

|        |                                                                                                          |    |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1      | Περίληψη Εργασίας                                                                                        | 7  |
| 2      | Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων                                                                     | 13 |
| 3      | Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων σε μια διάσταση                                                     | 19 |
| 3.0.1  | Η διαφορική εξίσωση Helmholtz . . . . .                                                                  | 19 |
| 3.0.2  | Διακριτοποίηση της εξίσωσης Helmholtz . . . . .                                                          | 21 |
| 3.0.3  | Προβολή κατά Galerkin . . . . .                                                                          | 22 |
| 3.0.4  | Αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Helmholtz                                                     | 24 |
| 3.0.5  | Η διαφορική εξίσωση Poisson . . . . .                                                                    | 25 |
| 3.0.6  | Αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Poisson .                                                     | 28 |
| 3.0.7  | Η διαφορική εξίσωση Poisson με οριακές συνθήκες τύπου Neumann στο $x_0 = 1$ . . . . .                    | 32 |
| 4      | Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων σε δύο διαστάσεις                                                   | 35 |
| 4.0.8  | Η μερική διαφορική εξίσωση Poisson: . . . . .                                                            | 35 |
| 4.0.9  | Λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Poisson με $f = 1$ και $u _{\partial\Omega} = 1$ . . . . .          | 37 |
| 4.0.10 | Η μερική διαφορική εξίσωση Poisson με Neumann οριακές συνθήκες σε ένα τμήμα του $\partial\Omega$ . . . . | 42 |
| 5      | Εισαγωγή στις μεθόδους χωρίς πλέγμα                                                                      | 45 |
| 6      | Η μέθοδος των νοητών χωρίων                                                                              | 51 |
| 6.0.11 | Θεμελίωση του προβλήματος με Dirichlet οριακές συνθήκες . . . . .                                        | 52 |
| 6.0.12 | Θεμελίωση με νοητά χωρία με Dirichlet οριακές συνθήκες . . . . .                                         | 52 |

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.0.13 Διακριτοποίηση του προβλήματος με<br>Dirichlet οριακές συνθήκες . . . . . | 54 |
| 7 Η μέθοδος των νοητών χωρίων σε μια διάσταση                                    | 57 |
| 8 Η μέθοδος των νοητών χωρίων σε δύο διαστάσεις                                  | 63 |
| 9 Συμπεράσματα                                                                   | 77 |
| 10 Παράρτημα                                                                     | 79 |

# Κεφάλαιο 1

## Περίληψη Εργασίας

Μια μερική διαφορική εξίσωση είναι μια σχέση που αφορά μια άγνωστη συνάρτηση κάποιων μεταβλητών και τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης αυτής, ως προς αυτές τις μεταβλητές. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις συναντώνται στην διατύπωση και συνεπώς στην επίλυση προβλημάτων, όπως η μετάδοση θερμότητας και η διάδοση του ήχου, καθώς και σε προβλήματα ελαστικότητας και ροής ρευστών.

Πληθώρα φυσικών προβλημάτων απαιτούν τη λύση κάποιων μερικών διαφορικών εξισώσεων, αλλά αναλυτική επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που τα περιγράφουν δύναται να έχουμε μόνο σε λιγοστές και συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Γεννιέται λοιπόν η ανάγκη για αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Για να έχουμε όμως ένα καλώς ορισμένο πρόβλημα, για να μπορούμε δηλαδή να μιλήσουμε για ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε κάποιες πληροφορίες που αφορούν τη λύση στο σύνορο των διαστημάτων ή των χωρίων που ορίζεται η μερική διαφορική εξίσωση. Είναι δηλαδή απαραίτητο να γνωρίζουμε τις συνοριακές συνθήκες. Αυτό γίνεται φανερό στο ακόλουθο παράδειγμα:

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε τη σχετικά απλή μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = 0$$

σε ένα χωρίο  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι

$$u(x, y) = f(y),$$

με  $f$  να είναι μια τυχαία συνάρτηση του  $y$ . Για να οδηγηθούμε σε μία και μοναδική τέτοια  $f$  είναι εμφανές ότι χρειαζονται περαιτέρω πληροφορίες. Χρειαζόμαστε λοιπόν πληροφορίες για το τι συμβαίνει στο σύνορο του  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ . Στην

παρούσα μεταπτυχιακή εργασία θα μας απασχολήσουν οι ακόλουθοι τρεις τύποι συνοριακών συνθηκών. Συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, τύπου Neumann καθώς και συνοριακές συνθήκες και των δυο αυτών τύπων ορισμένες σε διαφορετικά τμήματα του  $\partial\Omega$ . Αναλυτικότερα:

**Συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet:**

Η λύση  $u(x, y)$  σε ένα χωρίο  $\Omega$  πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$u(x, y) = f(x, y)$$

στο  $\partial\Omega$ , όπου  $f(x, y)$  δεδομένη συνάρτηση ορισμένη στο  $\partial\Omega$ . Οι συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet καλούνται και ουσιώδεις (essential) συνοριακές συνθήκες.

**Συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann:**

Οι συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann καθορίζουν τις τιμές που πρέπει να πάρει η παράγωγος της λύσης  $u(x, y)$  στο  $\partial\Omega$ :

$$-\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y)$$

στο  $\partial\Omega$ , όπου  $g$  δεδομένη συνάρτηση ορισμένη στο  $\partial\Omega$  και  $n$  το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο  $\partial\Omega$ . Για να έχει ένα πρόβλημα μοναδική λύση, οι συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann, δεν γίνονται να ορίζονται σε όλο το  $\partial\Omega$  αλλά σε ένα τμήμα του. Οι συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann συνήθως χαρακτηρίζονται και φυσικές (natural) συνοριακές συνθήκες.

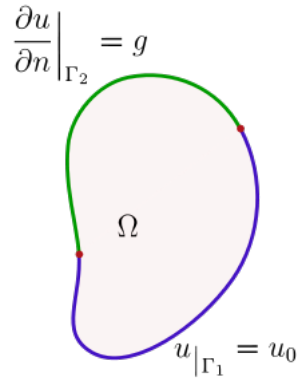
**Συνοριακές συνθήκες και των δυο τύπων:**

Έστω ένα χωρίο  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Χωρίζουμε το  $\partial\Omega$  σε δύο τμήματα  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$ , ώστε στο  $\Gamma_1$  να έχουμε συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, ενώ στο  $\Gamma_2$  συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann.

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε αριθμητικά μια μερική διαφορική εξίσωση ορισμένη σε ένα χωρίο  $\Omega$ , με δοσμένες συνοριακές συνθήκες. Η πλέον διαδεδομένη μέθοδος αριθμητικής επίλυσης μ.δ.ε. είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

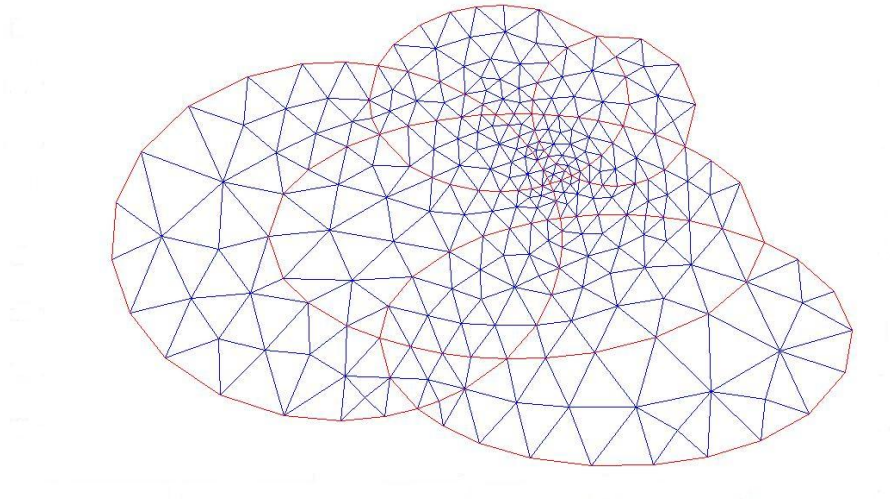
Αρχικά, πρέπει να αντικατασταθεί το αρχικό συνεχές πρόβλημα άπειρης διάστασης, από ένα πεπερασμένο ώστε να είναι δυνατή η επίλυσή του με χρήση Η/Υ. Πρέπει επομένως να γίνει διακριτοποίηση του χωρίου  $\Omega$ , χωρισμός δηλαδή του  $\Omega$  σε υποπεριοχές, με αποτέλεσμα να δημιουργείται έτσι ένα πλέγμα. Λύνουμε στους κόμβους του πλέγματος που έχει δημιουργηθεί και έχουμε έτσι μια προσέγγιση της πραγματικής λύσης. Τα πλέγματα αυτά, δηλαδή οι διαμερίσεις των χωρίων, είναι σύμμορφα, καλύπτουν δηλαδή εξολοκλήρου το χωρίο





Σχήμα 1.1: Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών.

$\Omega$ . Εδώ ανακύπτουν ερωτήματα για το πόσο καλή είναι η κάθε προσέγγιση, αλλά αυτά τα ερωτήματα θα μας απασχολήσουν στην συνέχεια της εργασίας αυτής. Συμπερασματικά, στην κλασική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, ορίζουμε πρώτα το χωρίο στο οποίο θέλουμε να λύσουμε την μ.δ.ε. και στη συνέχεια κατασκευάζουμε το πλέγμα. Ένα πλέγμα με τριγωνικά στοιχεία σε ένα τυχαίο χωρίο  $\Omega$  φαίνεται στο σχήμα 1.2. Πολλές φορές όμως, σε πολλές πρακ-

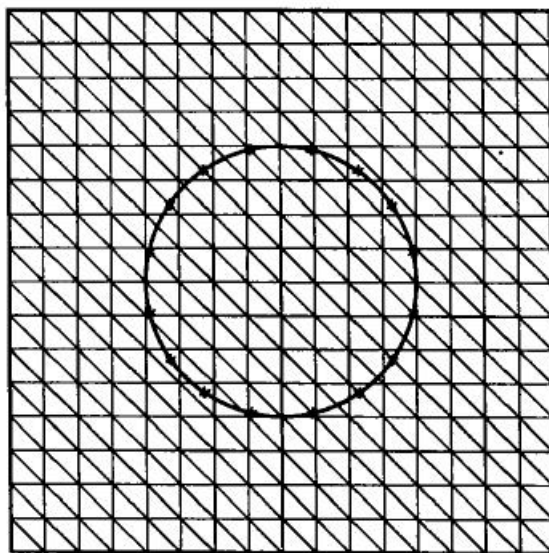


Σχήμα 1.2: Τυχαίο τριγωνοποιημένο χωρίο χρησιμοποιώντας το pde toolbox του matlab.

τικές εφαρμογές, χρειάζεται επαναλαμβανόμενη επίλυση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης, σε ένα χωρίο το οποίο χρονικά αλλάζει, σε μικρό ή μεγάλο βαθμό.

Απαιτείται λοιπόν μεταβολή και του ίδιου του πλέγματος. Ιδίως σε πολύπλοκα χωρία η διαδικασία αυτή είναι αρκετά ακριβή και σε πολλές περιπτώσεις δε μπορεί να γίνει με αυτοματοποιημένο τρόπο. Γενικά, η επανατριγωνοποίηση του χωρίου είναι μια χρονοβόρα διαδικασία και συνεπώς είναι κάτι που θέλουμε να αποφεύγουμε.

Στην προσπάθεια να αντιμετωπιστούν τέτοια προβλήματα, τα τελευταία χρόνια αναπτύσσονται κάποιες μέθοδοι που τους έχει αποδοθεί ο χαρακτηρισμός μέθοδοι χωρίς πλέγμα (meshless methods). Παραδείγματα τέτοιων μεθόδων είναι η μέθοδος XFEM (extended finite element method), η MLS (moving least squares method) και άλλες. Στην πραγματικότητα ο χαρακτηρισμός μέθοδοι χωρίς πλέγμα δεν είναι ακριβώς αντιπροσωπευτικός. Το πλέγμα υπάρχει αλλά είναι ορισμένο με τέτοιον τρόπο ώστε να είναι ανεξάρτητο του χωρίου που λύνουμε την μ.δ.ε. Υπό μια έννοια το πλέγμα προϋπάρχει του χωρίου. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 1.3. Μια μέθοδος χωρίς πλέγμα που θα μας



Σχήμα 1.3: Δομημένο πλέγμα και κυκλικό χωρίο επίλυσης.

απασχολήσει σε αυτή την μεταπτυχιακή εργασία, είναι η μέθοδος των νοητών χωρίων (fictitious domain method). Η μέθοδος αυτή βασίζεται στη χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange ορισμένων στο σύνορο του χωρίου. Η μέθοδος των νοητών χωρίων δίνει την δυνατότητα για γρήγορους επιλύτες σε πολύπλοκες γεωμετρίες, σε αντίθεση με την κλασική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Μια από τις δυσκολίες που συνεπάγεται η μέθοδος αυτή είναι ότι χρειάζονται πολλοί υπολογισμοί ποσοτήτων που σχετίζονται με την γεωμετρία του χωρίου, καθώς

και αποθήκευσή τους.

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, θα μελετηθεί η εξίσωση Poisson, μια μ.δ.ε. η οποία συναντάται σε προβλήματα μετάδοσης θερμότητας, ελαστικότητας κλπ, και θα αναπτυχθούν τρόποι και αλγόριθμοι επίλυσής της με τη μέθοδο των νοητών χωρίων. Θα μελετηθούν ζητήματα ευστάθειας, σύγκλισης και πολυπλοκότητας και θα συγκριθεί η μέθοδος με τις καθιερωμένες μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα η διάρθρωση αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας είναι η ακόλουθη: Αρχικά θα παρουσιαστούν οι βασικές αρχές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και θα περιγραφεί η χρησιμότητά της με την παράθεση κάποιων από τις πολυάριθμες εφαρμογές της. Στη συνέχεια, στα κεφάλαια 3 και 4 θα διατυπωθούν και θα λυθούν προβλήματα σε μια και δύο διαστάσεις αντίστοιχα ενώ θα μελετηθούν οι λύσεις και ο ρυθμός σύγκλισης σε αυτές. Στο κεφάλαιο 5 θα γίνει μια ανασκόπηση των μεθόδων χωρίς πλέγμα (meshless methods) ενώ στο κεφάλαιο 6 θα γίνει η παρουσίαση και η θεμελίωση της μεθόδου νοητών χωρίων (fictitious domain method). Τέλος στα κεφάλαια 7 και 8 θα διατυπωθούν και θα λυθούν τα αντίστοιχα προβλήματα των κεφαλαίων 3, 4 με την μέθοδο των νοητών χωρίων. Επίσης θα μελετηθούν οι λύσεις και ο ρυθμός σύγκλισης σε αυτές και θα συγκριθούν με τα αποτελέσματα της κλασικής μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Ακολουθούν τα συμπεράσματα της εργασίας αυτής ενώ στο παράρτημα παρατίθενται μαθηματικοί ορισμοί και συναφή θεωρήματα που αφορούν τις μεθόδους που μελετήθηκαν.

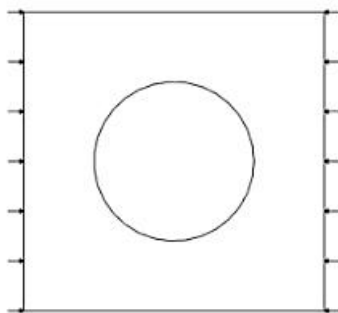


## Κεφάλαιο 2

### Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Πολλά φυσικά φαινόμενα μπορούν να διατυπωθούν και να περιγραφούν με μερικές διαφορικές εξισώσεις. Στη γενική περίπτωση, η λύση αυτών των εξισώσεων με αναλυτικές μεθόδους σε τυχαία χωρία είναι σχεδόν αδύνατη. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μια αριθμητική μέθοδο με την οποία οι εξισώσεις αυτές λύνονται προσεγγιστικά [1].

Έστω μια πλάκα η οποία έχει μια τρύπα της οποίας θέλουμε να βρούμε την κατανομή θερμοκρασίας, όπως στο σχήμα 2.1. Είναι λογικό να γράψουμε την

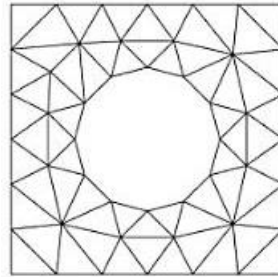


Σχήμα 2.1: Πλάκα με μια τρύπα.

εξίσωση διάχυσης θερμότητας για κάθε σημείο στο εσωτερικό της πλάκας. Η λύση όμως αυτής της μερικής διαφορικής εξίσωσης σε πολύπλοκες γεωμετρίες, όπως για παράδειγμα η επιφάνεια μιας μηχανής, είναι αδύνατη με αναλυτικές μεθόδους όπως για παράδειγμα ο χωρισμός μεταβλητών. Επίσης αριθμητικές μέθοδοι όπως η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών δε ξεπερνούν τα προβλήματα που δημιουργούνται από τυχαίες και πολύπλοκες γεωμετρίες.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η βασική ιδέα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, όπως έχει προαναφερθεί, είναι ο χωρισμός του χωρίου σε υποπεριοχές τις οποίες καλούμε *στοιχεία*, τα οποία οριοθετούνται από *κόμβους*. Οδηγούμαστε έτσι σε μια προσέγγιση της λύσης όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2. Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων μας



Σχήμα 2.2: Προσέγγιση μέσω διακριτοποίησης.

εφοδιάζει με μια συστηματική μεθοδολογία με την οποία η λύση, στο παράδειγμά μας η θερμοκρασία της πλάκας, μπορεί να καθοριστεί από ένα πρόγραμμα σε Η/Υ [2]. Σε γραμμικά προβλήματα η λύση προκύπτει από τη λύση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων στο οποίο οι άγνωστοι (οι θερμοκρασίες στους κόμβους) είναι όσοι και οι κόμβοι [3]. Για να μπορούμε να μιλήσουμε για μια ακριβή λύση χρειάζονται χιλιάδες κόμβοι οπότε η λύση μέσω προγραμμάτων σε Η/Υ μοιάζει μονόδρομος. Γενικά η προσέγγιση της λύσης βελτιώνεται όσο αυξάνουμε το πλήθος των στοιχείων (άρα και των κόμβων), αλλά κάτι τέτοιο αυξάνει και τον χρόνο που απαιτείται για την λύση [1].

Η μέθοδος άρχισε να αναπτύσσεται την δεκαετία του '50 στην βιομηχανία αεροναυπηγικής. Η πρώτη δημοσίευση που περιέγραφε την μεθοδολογία της μεθόδου ήρθε το 1956 από τους M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin και L.J. Topp [5]. Αρχικά η ακαδημαϊκή κοινότητα ήταν αρκετά επικριτική όσον αφορά τη μέθοδο και πολλά επιστημονικά περιοδικά αρνούνταν να δημοσιεύσουν εργασίες πάνω στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Κατά τη δεκαετία του '60 μαθηματικοί, οι οποίοι είχαν αρχίσει να ασχολούνται με το μαθηματικό υπόβαθρο της μεθόδου, ανακάλυψαν μια δημοσίευση του Courant (1946) [6] στην οποία χρησιμοποιούσε τριγωνικά στοιχεία για να λύσει προβλήματα δόνησης. Πολλοί μαθηματικοί ισχυρίζονται ότι η συγκεκριμένη δημοσίευση αποτελεί την ανακάλυψη της μεθόδου. Κατά τη διάρκεια της εν λόγω δεκαετίας καλύφθηκε το κενό που υπήρχε στο θεωρητικό κομμάτι της μεθόδου, και αποδείχθηκε ότι για γραμμικά προβλήματα οι λύσεις που προκύπτουν από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνουν στις πραγματικές. Με άλλα λόγια αποδείχθηκε ότι καθώς αυξάνεται το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων οι λύσεις που προκύπτουν τείνουν στην πραγματική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

---

Κατά τη δεκαετία του '60 άρχισαν να αναπτύσσονται και τα πρώτα προγράμματα, τα οποία ήταν δωρεάν καθώς τότε δεν είχε αναγνωριστεί ακόμα η εμπορική αξία των υπολογιστικών πακέτων και προγραμμάτων. Το πρώτο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων αναπτύχθηκε από τον E. Wilson ενώ λίγο αργότερα, το 1965, η NASA άρχισε να αναπτύσει ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων που θα διαχειριζόταν πλήθος διαφορετικών προβλημάτων το οποίο ονομάστηκε NASTRAN. Περίπου ταυτόχρονα ο J. Swanson για λογαριασμό της εταιρείας Westinghouse Electric άρχισε να αναπτύσει το πρόγραμμα ANSYS, αρχικά για την ανάλυση πυρηνικών αντιδραστήρων. Επίσης, άξια αναφοράς είναι τα προγράμματα LS-DYNA και ABAQUS τα οποία άρχισαν να αναπτύσσονται το 1989 και 1978 αντίστοιχα. Όλα τα προγράμματα που αναφέρθηκαν έχουν με την πάροδο όλων αυτών των χρόνων εξελιχθεί και χρησιμοποιούνται από πλήθος εταιρειών και βιομηχανιών και σήμερα. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι στενά συνδεδεμένη με τη σχεδίαση και ανάπτυξη προϊόντων με χρήση Η/Υ, δηλαδή με συστήματα CAD και CAM. Βέβαια λόγω ασυμβατότητας των βάσεων δεδομένων των συστημάτων CAD και των πεπερασμένων στοιχείων, η γέννηση πλεγμάτων αποτελεί ακόμα μια χρονοβόρα διαδικασία αλλά σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να συγκριθεί ο χρόνος που χρειάζεται για τη σχεδίαση, ανάπτυξη και παραγωγή ενός προϊόντος με το χρόνο που χρειαζόταν παλαιότερα.

Στη συνέχεια δίνονται κάποια ενδεικτικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου, μέσα από τα οποία φαίνεται και το τεράστιο εύρος των εφαρμογών της [1].

α. ανάλυση πίεσης και θερμότητας για βιομηχανικά εξαρτήματα όπως ηλεκτρονικές συσκευές, μηχανές αυτοκίνησης και μηχανές αεροσκαφών.

β. σεισμική ανάλυση και πρόβλεψη της συμπεριφοράς κτιρίων και πόλεων σε περίπτωση σεισμού.

γ. ανάλυση της συμπεριφοράς αυτοκινήτων τρένων και αεροσκαφών σε περίπτωση σύγκρουσης.

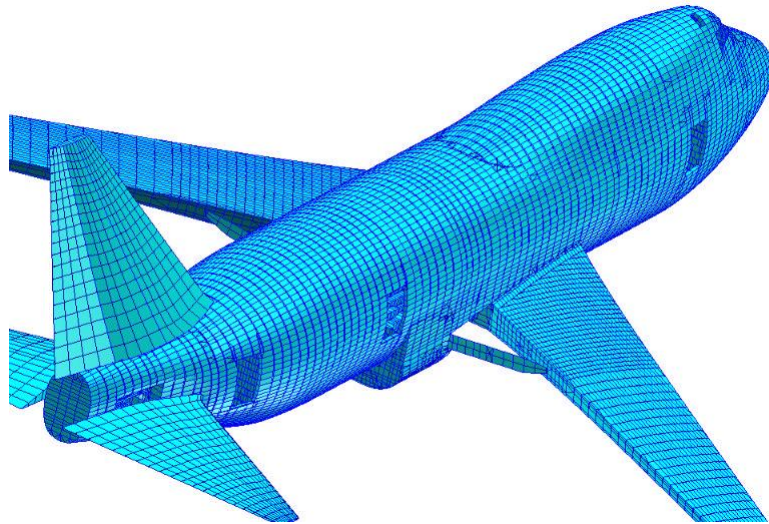
δ. ανάλυση ροής ρευστών και ροής αέρα σε συστήματα εξαερισμού.

ε. ηλεκτρομαγνητική ανάλυση του σήματος κεραίων και σημάτων αεροσκαφών.

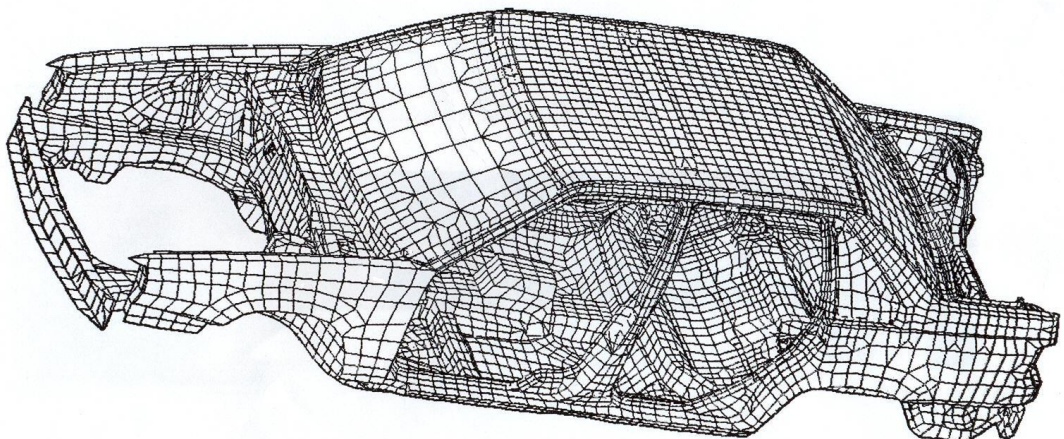
ζ. ανάλυση χειρουργικών διαδικασιών όπως για παράδειγμα πλαστική χειρουργική, διόρθωση σκολίωσης κ.α.

Στις εικόνες 2.3 και 2.4 φαίνονται τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων για τη μελέτη αντοχής και δυναμικής συμπεριφοράς ενός αεροσκάφους και ενός αυτοκινήτου.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία παίζει σημαντικό ρόλο και στην ιατρική. Στο σχήμα 2.5 φαίνονται κάποια μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων για τον προσδιορισμό ροϊκών πεδίων στην καρδιακή χώρα.



Σχήμα 2.3: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων ενός αεροσκάφους.

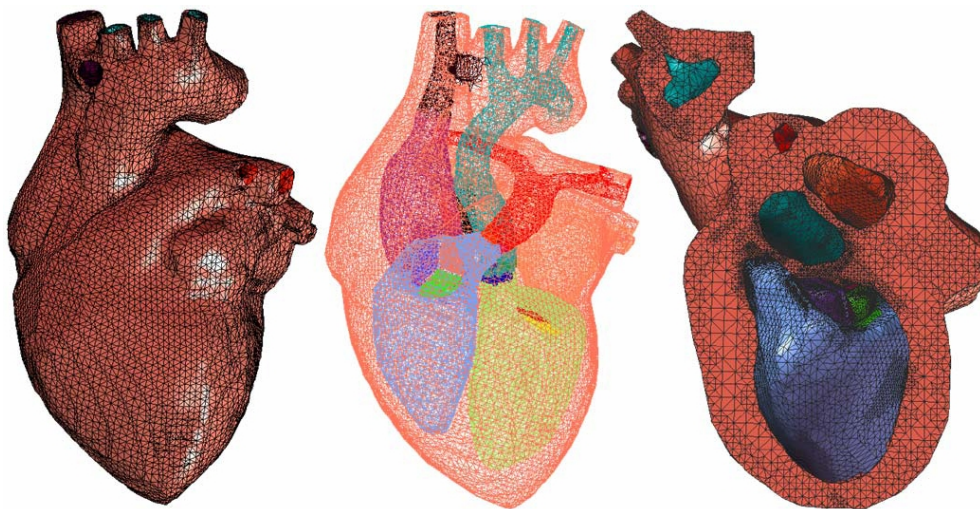


Σχήμα 2.4: Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων ενός αυτοκινήτου.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

---



Σχήμα 2.5: Μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων της ανθρώπινης καρδιάς.

*ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ  
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ*

---

## Κεφάλαιο 3

# Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων σε μια διάσταση

### 3.0.1 Η διαφορική εξίσωση Helmholtz

Έστω η διαφορική εξίσωση Helmholtz

$$-u'' + c^2 u = f, x \in (0, 1) \equiv \Omega$$

με ομογενείς dirichlet συνοριακές συνθήκες στο  $\partial\Omega = \{0, 1\}$

$$u(0) = u(1) = 0 .$$

Η λύση  $u \in H_0^1(0, 1)$ . Πολλαπλασιάζουμε με μια συνάρτηση  $w \in H_0^1(0, 1)$  και ολοκληρώνουμε στο  $(0, 1)$  οπότε προκύπτει η μεταβολική μορφή (variational form) της εξίσωσης:

$$\int_0^1 w' u' dx + c^2 \int_0^1 w u dx = \int_0^1 w f dx ,$$

$$u, w \in H_0^1(0, 1) .$$

Διατυπώνουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

**Πρόβλημα 1:**

Να βρεθεί  $u \in H_0^1(0, 1)$  τέτοια ώστε

$$a(u, w) = F(w) , \quad \forall w \in H_0^1(0, 1) ,$$

όπου

$$a(u, w) := \int_0^1 w' u' dx + c^2 \int_0^1 w u dx$$

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---

και

$$F(w) := \int_0^1 w f dx .$$

Για κάθε  $F \in H^{-1}(0,1)$  το πρόβλημα 1 έχει μοναδική λύση  $u \in H_0^1(0,1)$  και επιπλέον υπάρχει  $c > 0$  τέτοιο ώστε:

$$\|u\|_{H_0^1} \leq c \|f\|_{H^{-1}(0,1)} .$$

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης προκύπτει από το θεώρημα Lax-Milgram το οποίο παραθέτουμε στη συνέχεια.

#### Θεώρημα (Lax-Milgram):

Έστω  $V$  ένας χώρος Hilbert και  $\alpha(\cdot, \cdot)$  μια διγραμμική μορφή στον  $V$  με τις εξής δύο ιδιότητες:

1.  $|\alpha(u, w)| \leq C \|u\|_V \|w\|_V$

(η διγραμμική μορφή είναι άνω φραγμένη ή συνεχής)

2.  $|\alpha(u, u)| \geq c \|u\|_V^2$

(η διγραμμική μορφή έχει την ιδιότητα της συμπίεστότητας)

Τότε, για κάθε  $f \in V'$ , όπου  $V'$  ο δυϊκός χώρος του  $V$ , υπάρχει μοναδική λύση  $u \in V$  της εξίσωσης

$$\alpha(u, w) = \langle f, w \rangle$$

και ισχύει ότι

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{c} \|f\|_{V'} .$$

Αποδεικνύουμε τις δύο προϋποθέσεις για την διγραμμική μορφή  $a$ :

Για την πρώτη προϋπόθεση του Lax-Milgram έχουμε:

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &= \left| \int_0^1 w' u' dx + c^2 \int_0^1 w u dx \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 |w' u'| dx + c^2 \int_0^1 |w u| dx \leq \\ &\leq \max(1, c^2) \left( \int_0^1 |w' u'| dx + \int_0^1 |w u| dx \right) \leq \\ &\leq \bar{c} \left( \left( \int_0^1 (w')^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 (u')^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^1 w^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\ &\leq \bar{c} (\|w\|_{H^1} \|u\|_{H^1} + \|w\|_{L^2} \|u\|_{L^2}) \leq \\ &\leq \bar{c} \|w\|_{H^1} \|u\|_{H^1} + \bar{c} \|w\|_{H^1} \|u\|_{H^1} = \end{aligned}$$

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---

$$= 2\bar{c}||w||_{H^1}||u||_{H^1} .$$

Για την δεύτερη προϋπόθεση του Lax-Milgram έχουμε:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 (u')^2 dx + c^2 \int_0^1 u^2 dx \geq \\ &\geq \min(1, c^2) \left( \int_0^1 (u')^2 dx + \int_0^1 u^2 dx \right) = \\ &= c||u||_{H^1}^2 . \end{aligned}$$

Επιπλέον υπάρχει  $b > 0$  ώστε

$$||u||_{H^1} \leq \frac{1}{b} ||f||_{H^{-1}(0,1)} .$$

#### 3.0.2 Διακριτοποίηση της εξίσωσης Helmholtz

Η διακριτή μορφή του προβλήματος 1 διατυπώνεται στο ακόλουθο πρόβλημα:  
**Πρόβλημα 2:**

Να βρεθεί  $u_h \in V_h$ , όπου  $V_h$  διακριτός υπόχωρος του  $H_0^1(0, 1)$  τέτοια ώστε

$$a(u_h, w_h) = F(w_h) , \quad \forall w_h \in W_h ,$$

όπου  $W_h$  διακριτός υπόχωρος του  $H_0^1(0, 1)$ . Από το θεώρημα του Cea [28] (οι ορισμοί των παραπάνω χώρων βρίσκονται στο παράρτημα), προκύπτει ότι το διακριτό πρόβλημα έχει μοναδική λύση και επιπλέον η λύση  $u_h$  ικανοποιεί την ανισότητα

$$||u - u_h||_{V_h} \leq \frac{\bar{c}}{c} \inf_{w_h \in W_h} ||u - w_h||_{W_h} .$$

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι αν η διγραμμική μορφή  $a$  είναι συμμετρική (εδώ είναι προφανές ότι ισχύει αυτό), τότε η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$$||u - u_h||_{V_h} \leq \sqrt{\frac{\bar{c}}{c}} \inf_{w_h \in W_h} ||u - w_h||_{W_h} .$$

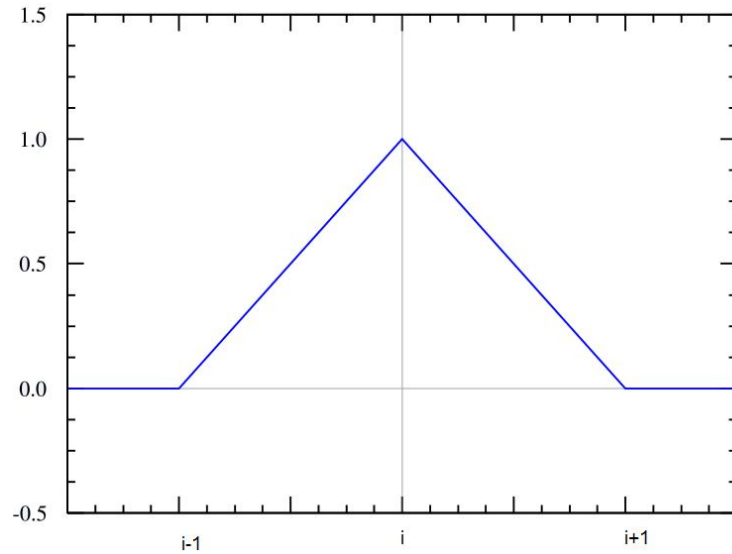
Στη συνέχεια διαλέγουμε συναρτήσεις βάσης για τους διακριτούς υπόχωρους του  $H_0^1(0, 1)$  και εφαρμόζουμε τη μέθοδο Galerkin .

### 3.0.3 Προβολή κατά Galerkin

Έστω  $V_h \subset H_0^1$  πεπερασμένης διάστασης. Υπάρχουν πολλές επιλογές για τον  $V_h$ , στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων όμως συνήθως επιλέγουμε τον χώρο των κατά τμήματα γραμμικών πολυωνυμικών συναρτήσεων [3]. Σαν βάση του  $V_h$  ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_i) \cup (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

Το  $i$  παίρνει τιμές από 1 μέχρι  $n$  όπου  $n+1$  το πλήθος των κόμβων, ενώ  $x_i$  είναι η συντεταγμένη του κόμβου  $i$ . Η  $\Phi_i$  καλείται συνάρτηση στέγης (tent function) και σε κάθε κόμβο η γραφική της παράσταση δίνεται στο σχήμα 3.1. Ξεκινώντας από το πρόβλημα 2, η εξίσωση που καλούμαστε να διατυπώσουμε



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης βάσης  $\Phi_i$ .

σε μορφή πινάκων ώστε να λύσουμε τελικά ένα γραμμικό σύστημα είναι

$$a(u_h, w_h) = F(w_h), \quad \forall w \in V_h,$$

όπου

$$a(u_h, w_h) := \int_0^1 w_h' u_h' dx + c^2 \int_0^1 w_h u_h dx$$

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---

και

$$F(w_h) := \int_0^1 w_h f_h dx .$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^1 \frac{du_h}{dx} \frac{dw_h}{dx} dx + c^2 \int_0^1 u_h w_h dx = \int_0^1 f v_h dx , \forall w_h \in V_h$$

με

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} u_{hi} \Phi_i(x)$$

και

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} w_{hi} \Phi_i(x) ,$$

οπότε οδηγούμαστε στην σχέση

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left[ \int \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx \right] u_{hi} + \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \int \Phi_i \Phi_j dx \right] u_{hi} = \sum_{i=1}^{n+1} \int f \Phi_j dx$$

$$\forall 1 \leq j \leq n+1 .$$

Την παραπάνω σχέση την γράφουμε στη μορφή

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_{hi} + \sum_{i,j=1}^{n+1} m_{ij} u_{hi} = \sum_{j=1}^{n+1} f_j ,$$

όπου

$$a_{ij} = \int \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx$$

και

$$m_{ij} = \int \Phi_i \Phi_j dx ,$$

η οποία τελικά σε μορφή πινάκων γράφεται

$$A u_h + M u_h = F ,$$

ή

$$(A + M) u_h = F .$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα ορίζονται σε κάθε στοιχείο. Ο πίνακας  $A$  καλείται μητρώο δυσκαμψίας (stiffness matrix) και ο  $M$  καλείται μητρώο μάζας (mass matrix). Ο τρόπος που δημιουργούνται σε προγραμματιστικό επίπεδο αναλύεται στην επόμενη ενότητα. Οι δύο πίνακες είναι θετικά ορισμένοι οπότε έχουν ιδιοτιμές διαφορετικές του μηδενός και συνεπώς είναι αντιστρέψιμοι. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος μπορεί να γίνει με ευθείς ή επαναληπτικές μεθόδους (π.χ. με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων).

### 3.0.4 Αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Helmholtz

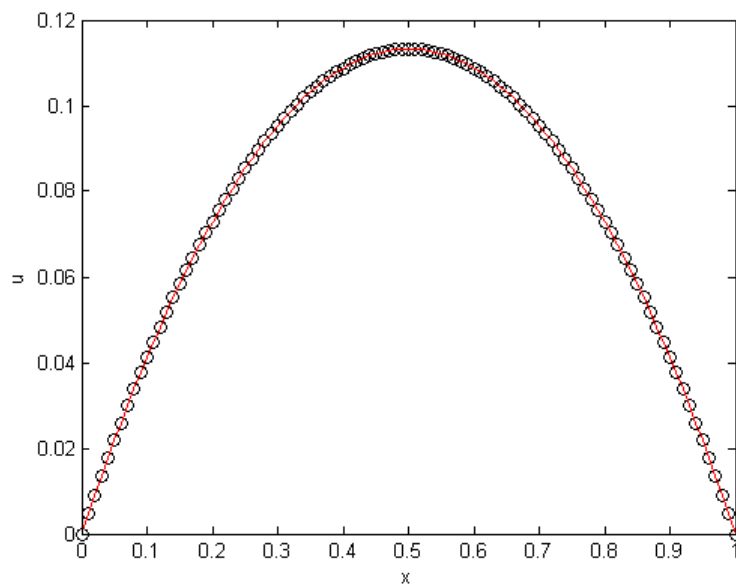
Θα λύσουμε την εξίσωση Helmholtz με  $c = 1$  και  $f = 1$ , με συνοριακές συνθήκες  $u(0) = u(1) = 0$ . Έχοντας υπολογίσει την αναλυτική λύση της

$$-u'' + u = 1$$

με

$$u(0) = u(1) = 0 ,$$

παραθέτουμε δύο γραφήματα που στο πρώτο (σχήμα 3.2) έχουμε κάνει γραφική παράσταση της λύσης με πεπερασμένα στοιχεία και της αναλυτικής λύσης, και στο δεύτερο (βλ. σχήμα 3.3) φαίνεται το σφάλμα προσέγγισης της αναλυτικής λύσης. Η λύση που μελετάμε προκύπτει από ένα αραιό πλέγμα των 100 κόμβων. Στο σχήμα 3.4 φαίνεται μια περιοχή σε μεγέθυνση που δείχνει πόσο κοντά είναι οι δύο λύσεις.

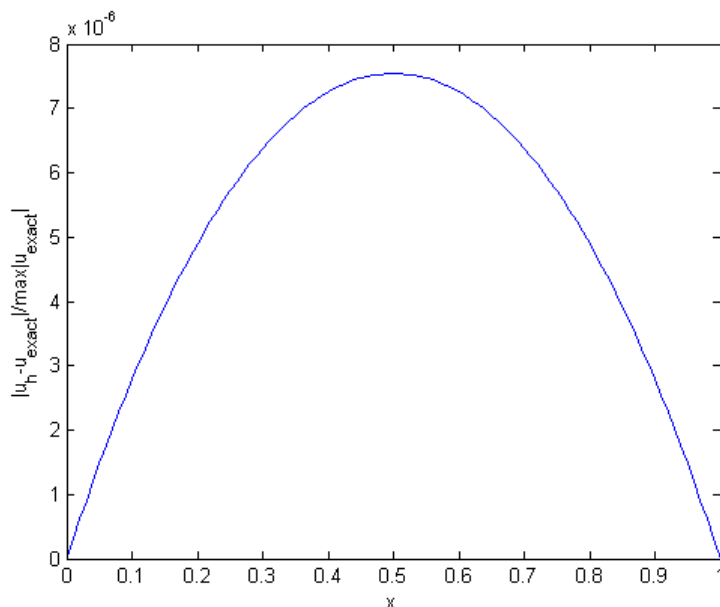


Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση των λύσεων.



### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---



Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση σφάλματος.

#### 3.0.5 Η διαφορική εξίσωση Poisson

Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση Poisson :

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$$

στο  $\Omega \equiv (0, 1)$  με

$$u(0) = u(1) = 0 .$$

Η Poisson προκύπτει από την Helmholtz θέτοντας  $c = 0$ . Παρόλα αυτά θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με προηγούμενως. Θα ξεκινήσουμε από την μεταβολική διατύπωση του προβλήματος, θα προχωρήσουμε στη διακριτοποίηση, θα κάνουμε την προβολή κατά Galerkin και τελικά θα λύσουμε την εξίσωση Poisson επεξηγώντας τους αλγόριθμους που δημιουργήθηκαν. Τέλος θα γίνει μελέτη σύγκλισης στην λύση χρησιμοποιώντας την  $H^1$  νόρμα. Διατυπώνουμε το ακόλουθο συνεχές πρόβλημα:

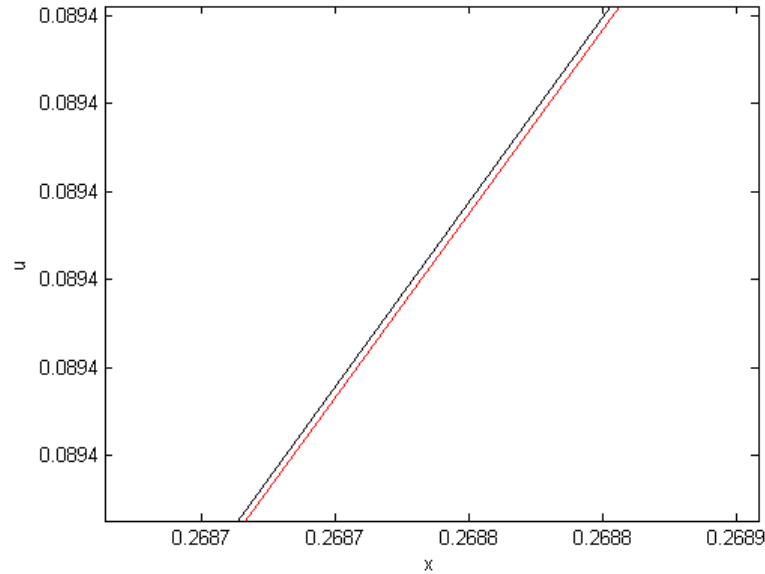
#### Πρόβλημα 3:

Να βρεθεί  $u \in H_0^1(0, 1)$  τέτοια ώστε

$$a(u, w) = F(w) , \forall w \in H_0^1(0, 1) ,$$

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---



Σχήμα 3.4: Μεγέθυνση περιοχής του γραφήματος των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz .

όπου

$$a(u, w) := \int_0^1 w' u' dx$$

και

$$F(w) := \langle f, w \rangle .$$

Για κάθε  $F \in H^{-1}(0, 1)$  το πρόβλημα 1 έχει μοναδική λύση  $u \in H_0^1(0, 1)$  και επιπλέον υπάρχει  $d > 0$  τέτοιο ώστε:

$$\|u\|_{H_0^1} \leq d \|f\|_{H^{-1}(0,1)} .$$

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα προκύπτουν από το θεώρημα Lax-Milgram και οι αποδείξεις των προϋποθέσεων του θεωρήματος είναι άμεσες όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης Helmholtz .

Το επόμενο βήμα είναι να μεταφερθούμε από τον απειροδιάστατο χώρο  $H_0^1$  σε έναν υπόχωρο του πεπερασμένης διάστασης, να διακριτοποιήσουμε δηλαδή το πρόβλημα ώστε να μπορούμε να κατασκευάσουμε αλγόριθμους επίλυσής του. Έστω  $V_h \subset H_0^1$  πεπερασμένης διάστασης. Σαν βάση του  $V$  θα χρησιμοποιή-

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---

σουμε πάλι τις συναρτήσεις

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_i) \cup (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

Το  $i$  παίρνει τιμές από 1 μέχρι  $n$  όπου  $n+1$  το πλήθος των κόμβων, ενώ  $x_i$  είναι η συντεταγμένη του κόμβου  $i$ . Έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

**Πρόβλημα 4:**

$$a(u_h, w_h) = F(w_h), \forall w \in W_h,$$

όπου

$$a(u_h, w_h) := \int_0^1 w'_h u'_h dx$$

και

$$F(w_h) := \int_0^1 w_h f_h dx,$$

ενώ ο  $W_h$  είναι διακριτός υπόχωρος του  $H_0^1(0, 1)$  με βάση του τις συναρτήσεις  $\Phi_i$ . Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης προκύπτουν πάλι από το θεώρημα του Cea, και η λύση  $u_h$  ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|u - u_h\|_{V_h} \leq \sqrt{\frac{\bar{d}}{\underline{d}}} \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_{W_h},$$

όπου  $\bar{d}$  και  $\underline{d}$  θετικές σταθερές.

#### Προβολή κατά Galerkin

Από την σχέση  $a(u_h, w_h) = \langle f, w_h \rangle$ ,  $v_h \in V_h$  έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^1 \frac{du_h}{dx} \frac{dw_h}{dx} dx = \int_0^1 f w_h dx, \forall w_h \in V_h$$

με

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} u_{hi} \Phi_i(x)$$

και άρα έχουμε:

$$\int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^{n+1} u_{hi} \frac{d\Phi_i}{dx}(x) \right] \frac{dw_h}{dx} dx = \int_0^1 f w_h dx \quad \forall w_h \in V_h \Rightarrow$$

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---

$$\int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^{n+1} u_{hi} \frac{d\Phi_i}{dx}(x) \right] \frac{d\Phi(j)}{dx} dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n+1} f\Phi(j) dx \Rightarrow$$

διότι είναι  $w_h = w_{hi}\Phi_i$  που απλοποιούνται στα 2 μέλη.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left[ \int \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx \right] u_{hi} = \int \sum_{i=1}^{n+1} f\Phi(j) dx, \forall 1 \leq j \leq n+1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_{hi} = \sum_{j=1}^{n+1} f_j,$$

όπου

$$a_{ij} = \int \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx$$

η οποία τελικά παίρνει τη μορφή

$$Au_h = F.$$

Τα ολοκληρώματα στα παραπάνω αθροίσματα που δεν περιέχουν άκρα είναι ορισμένα πάνω σε κάθε τριγωνικό στοιχείο  $T_h \in \mathcal{T}$ , όπου  $\mathcal{T}$  η τριγωνοποίηση (ή αλλιώς η διαμέριση) που έχουμε ορίσει. Ο πίνακας  $A$  είναι συμμετρικός αφού το εσωτερικό γινόμενο  $a(\cdot, \cdot)$  είναι συμμετρικό, καθώς επίσης και θετικά ορισμένος. Αφού ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές και συνεπώς διάφορες του μηδέν οπότε τελικά προκύπτει ότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος. Η λύση του γραμμικού συστήματος είναι

$$u_h = A^{-1}F.$$

#### 3.0.6 Αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Poisson

Στην εξίσωση  $-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$  στο  $(0, 1)$  με  $u(0) = u(1) = 0$  θέτουμε  $f = 1$ . Στο διάστημα  $(0, 1)$  ξεκινάμε με μια διακριτοποίηση στην οποία οι κόμβοι δεν ισαπέχουν όπως στη λύση της Helmholtz, η οποία προκύπτει ως εξής: Στο Matlab κάνουμε τα ακόλουθα:

```
t=linspace(0,1,10);
x=sin((pi/2)*t);
C=[x'];
```

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---

Το διάνυσμα  $C$  περιέχει τις συντεταγμένες των κόμβων. Εδώ ορίζουμε δύο πίνακες  $E$ ,  $N$ , οι οποίοι περιέχουν τις πληροφορίες για τα στοιχεία και τους κόμβους αντίστοιχα. Οι πίνακες  $E$  και  $N$  είναι ουσιαστικά οι πίνακες συνδεσιμότητας κόμβων και στοιχείων. Για το αρχικό διάνυσμα  $C$  οι δύο πίνακες  $E$  και  $N$  είναι:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

και

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0.1736 \\ 3 & 0.3420 \\ 4 & 0.5000 \\ 5 & 0.6428 \\ 6 & 0.7660 \\ 7 & 0.8660 \\ 8 & 0.9397 \\ 9 & 0.9848 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Η μορφή των  $E$  και  $N$  είναι η ακόλουθη:

$$E = \begin{bmatrix} \text{όνομα στοιχείου} & , & 1\text{ος κόμβος} & , & 2\text{ος κόμβος} \end{bmatrix}$$

και

$$N = \begin{bmatrix} \text{όνομα κόμβου} & , & x \text{ συντεταγμένη} \end{bmatrix}.$$

Για να δημιουργήσουμε τον πίνακα  $A$  (stiffness matrix) υπολογίζουμε πρώτα τον πίνακα που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο  $A^e$ . Είναι:

$$A^e = \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_i}{dx} dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_{i+1}}{dx} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\Phi_{i+1}}{dx} \frac{d\Phi_i}{dx} dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\Phi_{i+1}}{dx} \frac{d\Phi_{i+1}}{dx} dx \end{bmatrix}$$

ο οποίος τελικά είναι

$$A^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{i+1}-x_i} & -\frac{1}{x_{i+1}-x_i} \\ -\frac{1}{x_{i+1}-x_i} & \frac{1}{x_{i+1}-x_i} \end{bmatrix}.$$

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---

Αν  $n_i$  και  $n_{i+1}$  οι κόμβοι που ορίζουν το  $i$ -στοιχείο για να δημιουργήσουμε τον πίνακα  $A$  ο οποίος είναι τετραγωνικός με διάσταση όση και ο αριθμός των κόμβων κάνουμε την εξής ανάθεση:

$$A([n_i \ n_{i+1}], [n_i \ n_{i+1}]) = A([n_i \ n_{i+1}], [n_i \ n_{i+1}]) + A^e$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για όλα τα στοιχεία του πλέγματος και έχουμε δημιουργήσει έτσι τον πίνακα  $A$ . Το δεξί μέρος της εξίσωσής μας προκύπτει πολλαπλασιάζοντας από αριστερά ένα διάνυσμα που όλες οι συντεταγμένες του είναι ίσες με τη μονάδα, με τον πίνακα  $M$  (MassMatrix) ο οποίος παρόμοια με τον  $A$  δημιουργείται με την ίδια ακριβώς ανάθεση:

$$M([n_i \ n_{i+1}], [n_i \ n_{i+1}]) = M([n_i \ n_{i+1}], [n_i \ n_{i+1}]) + M^e$$

όπου

$$\begin{aligned} M^e &= \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_i \Phi_i & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_i \Phi_{i+1} \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_{i+1} \Phi_i & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_{i+1} \Phi_{i+1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{x_{i+1}-x_i}{3} & \frac{x_{i+1}-x_i}{6} \\ \frac{x_{i+1}-x_i}{6} & \frac{x_{i+1}-x_i}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Συνεπώς το δεξί μέλος της εξίσωσης πινάκων που λύνουμε για το πρόβλημα που έχουμε διατυπώσει είναι:

$$F = M * \text{ones}(\text{length}(M), 1);$$

Για να μπορούμε να λύνουμε το πρόβλημα με μεγάλο αριθμό κόμβων ώστε να επιτυγχάνεται καλύτερη προσέγγιση της λύσης, πυκνώνουμε το πλέγμα παρεμβάλλοντας κάθε φορά έναν κόμβο ανάμεσα στους δύο που οριοθετούν κάθε στοιχείο. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικά η διάσταση του πίνακα  $A$  είναι ίση με 10. Πυκνώνοντας το πλέγμα κατά 7 διαδοχικές φορές ο πίνακας  $A$  έχει διάσταση 1153. Παίρνουμε δηλαδή λύση με 1153 κόμβους. Για να πάρουμε τη λύση βέβαια πρέπει να ορίσουμε και να εφαρμόσουμε τις οριακές συνθήκες, στο 0 και στο 1. Εδώ ορίζουμε ομογενείς συνοριακές συνθήκες τύπου dirichlet  $u(0) = 0$  και  $u(1) = 0$ . Στο σχήμα 3.5 φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης.

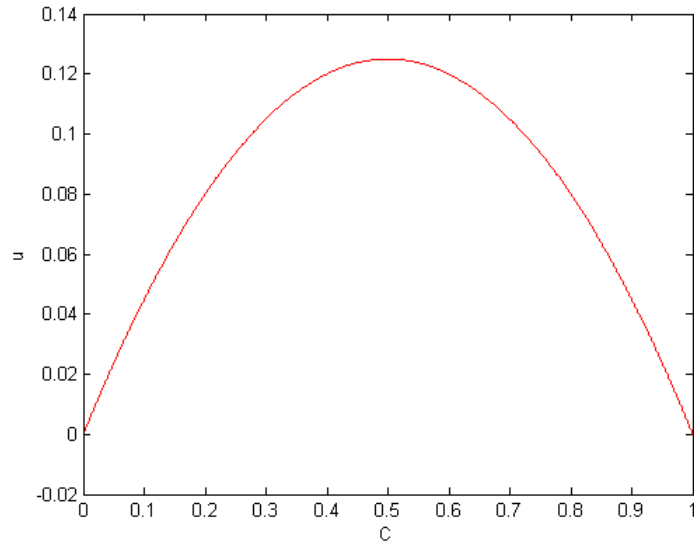
Λύνουμε το ίδιο πρόβλημα με προηγούμενως, σε πλέγμα με ισαπέχοντες κόμβους. Στο σχήμα 3.6 φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης.

Θα μελετήσουμε τώρα την σύγκλιση του αλγορίθμου που έχει κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας την διακριτή  $H^1$  νόρμα. Ο αλγόριθμος για τη μελέτη σύγκλισης ακολουθεί τα εξής βήματα.

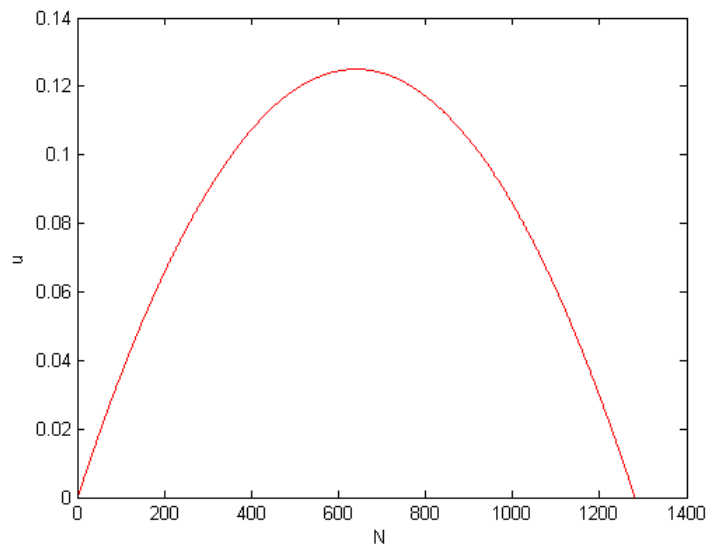
**Βήμα 1.** Αρχικά λύνουμε σε ένα πολύ πυκνό πλέγμα και τη λύση  $u_h$  που

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---



Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση της λύσης σε ανομοιογενές πλέγμα με 1153 κόμβους.

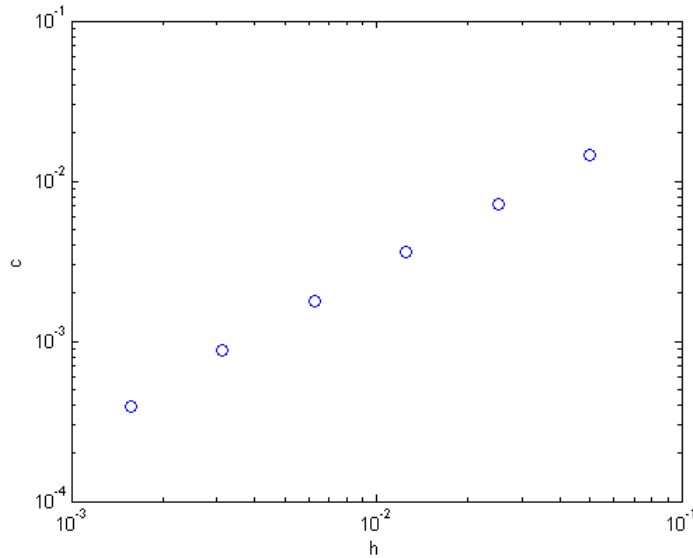


Σχήμα 3.6: Γραφική παράσταση των σημείων  $(N(i), u(i))$  σε ομοιογενές πλέγμα με 1281 κόμβους.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

προκύπτει τη θεωρούμε την ακριβή λύση του προβλήματος.

**Βήμα 2.** Για κάθε  $i$  από 1 μέχρι το πλήθος των πυκνώσεων που πήραμε τη λύση  $u_h$  παίρνουμε μια λύση  $u$  την οποία την προβάλλουμε στο τελικό πλέγμα και σε κάθε επανάληψη υπολογίζουμε την διακριτή  $H^1$  νόρμα για την οποία έχουμε  $\|u_h - u\|_{H^1}^2 = (u_h - u)' * (A + M) * (u_h - u)$ . Δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο ένα διάνυσμα  $c$  με αυτές τις τιμές. Στο διάνυσμα  $h$  υπάρχει η διάμετρος του πλέγματος που παίρνουμε τη λύση  $u$  πριν την προβάλλουμε κάθε φορά στο τελικό πλέγμα ώστε να έχουν νόημα οι παραπάνω πράξεις. Σαν διάμετρο του πλέγματος ορίζουμε το ελάχιστο μήκος των στοιχείων. Τελικά κάνουμε γραμμική παλινδρόμηση μεταξύ των  $\log(c)$  και  $\log(h)$  και η κλίση της ευθείας που προκύπτει μας δίνει την σύγκλιση, η οποία πρέπει να είναι γραμμική δηλαδή κοντά στο 1. Πράγματι η κλίση της ευθείας στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι  $p = 1.0338$ . Στο σχήμα 3.7 φαίνεται το log-log γράφημα των  $c$  και  $h$ , ενώ στο σχήμα 3.8 φαίνεται η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης των σημείων του σχήματος 3.7.



Σχήμα 3.7: Γράφημα log log των διανυσμάτων  $c$  και  $h$ .

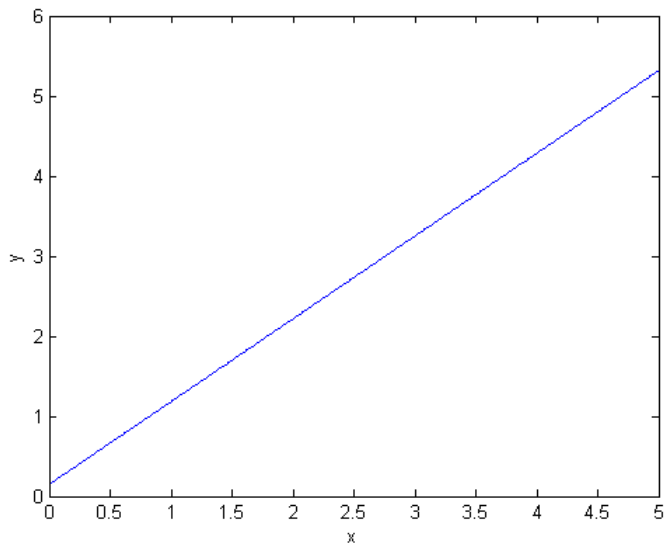
#### 3.0.7 Η διαφορική εξίσωση Poisson με οριακές συνθήκες τύπου Neumann στο $x_0 = 1$

Έστω η διαφορική εξίσωση Poisson



### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---



Σχήμα 3.8: Ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης των σημείων του γραφήματος 3.7.

$$-u''(x) = f(x) , \quad x \in (0, 1)$$

με

$$u(0) = 0$$

και

$$u'(1) = b .$$

Για κάθε  $w \in W$  , όπου

$$W = \{w \in H^1(0, 1) : w(0) = 0\} ,$$

ολοκληρώνοντας στο  $(0, 1)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 u'' w dx &= \int_0^1 f w dx \implies \\ \int_0^1 u' w' dx &= \int_0^1 f w dx + [u' w]_0^1 \implies \\ \int_0^1 u' w' dx &= \int_0^1 f w dx + u'(1)w(1) - u'(0)w(0) \implies \\ \int_0^1 u' w' dx &= \int_0^1 f w dx + b w(1) . \end{aligned}$$

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---

Περνώντας τώρα σε διακριτούς υποχώρους των παραπάνω χώρων και χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις βάσης  $\Phi_i$  που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως, προκύπτει ότι η Neumann οριακή συνθήκη στο  $x_0 = 1$  επηρεάζει μόνο την τελευταία συντεταγμένη του διανύσματος στο δεξί μέρος της εξίσωσης. Με παρόμοια λογική, αν είχαμε Neumann οριακή συνθήκη στο  $x_0 = 0$ , θα άλλαζε η πρώτη συντεταγμένη του εν λόγω διανύσματος.

## Κεφάλαιο 4

# Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων σε δύο διαστάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό ακολουθώντας τη δομή του κεφαλαίου 3 διατυπώνουμε και λύνουμε την μερική διαφορική εξίσωση Poisson σε δύο διαστάσεις.

### 4.0.8 Η μερική διαφορική εξίσωση Poisson:

Διατυπώνουμε το εξής συνεχές πρόβλημα σε δύο διαστάσεις:

**Πρόβλημα 5:**

Να βρεθεί  $u(x, y) \in V$ , τέτοια ώστε

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), u \in V,$$

$$u|_{\partial\Omega} = g,$$

όπου

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = g\}.$$

Ολοκληρώνοντας και πολλαπλασιάζοντας με μια συνάρτηση δοκιμής (test function)  $w \in H_0^1(\Omega)$ , με την ίδια λογική όπως στο πρόβλημα μιας διάστασης, έχουμε

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w d\Omega = \int_{\Omega} f w d\Omega.$$

η οποία γράφεται, εύρεση του  $u \in V$  τέτοιου ώστε

$$a(u, w) = F(w), \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

όπου

$$a(u, w) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w d\Omega .$$

Από την ανισότητα Poincare-Friedrich έχουμε ότι υπάρχει  $c > 0$  τέτοιο ώστε

$$c\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq |w|_{H^1}, \forall w \in H_0^1 .$$

Από την ανισότητα αυτή προκύπτει ότι υπάρχει  $\gamma > 0$  τέτοιο ώστε

$$a(u, u) \geq \gamma \|u\|_{H_0^1}^2, \forall u \in V ,$$

οπότε έχουμε ότι ισχύει η ιδιότητα της συμπίεστότητας για την διγραμμική μορφή  $a$ . Η  $a$  είναι επίσης φραγμένη οπότε το πρόβλημα 5 έχει μοναδική λύση από το θεώρημα Lax-Milgram . Διαλέγοντας διακριτούς υποχώρους των παραπάνω χώρων διατυπώνουμε το πρόβλημα 5 σε διακριτή μορφή:

#### Πρόβλημα 6:

Να βρεθεί  $u_h \in V_h$  τέτοια ώστε για κάθε  $w_h \in W_h$ , όπου  $W_h, V_h$  πεπερασμένοι υπόχωροι του  $H_0^1$ , να ισχύει:

$$a(u_h, w_h) = F(w_h), u_h \in V_h, w_h \in W_h ,$$

όπου

$$a(u_h, w_h) = \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla w_h d\Omega .$$

Αναλυτικότερα έχουμε την εξίσωση:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} d\Omega = \int_{\Omega} f w d\Omega .$$

Εδώ ο χώρος στον οποίο ανήκει η συνάρτηση  $w$  είναι πάλι ο χώρος των συνεχών κατα τμήματα γραμμικών συναρτήσεων και οι συναρτήσεις βάσης  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k$  για κάθε τριγωνικό στοιχείο με κόμβους  $i(x_i, y_i), j(x_j, y_j), k(x_k, y_k)$  είναι οι εξής:

$$\Phi_i(x, y) = \frac{1}{2E} (x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y)$$

$$\Phi_j(x, y) = \frac{1}{2E} (x_k y_i - x_i y_k + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y)$$

$$\Phi_k(x, y) = \frac{1}{2E} (x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y) ,$$

όπου  $E$  είναι το εμβαδόν του στοιχείου το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} \right|$$

Έχοντας κάνει την προβολή κατά Galerkin, καταλήγουμε στην εξίσωση πινάκων

$$Au = F.$$

#### 4.0.9 Λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Poisson με $f = 1$ και $u|_{\partial\Omega} = 1$

Ο πίνακας  $A$  προκύπτει από την ανάθεση για όλα τα στοιχεία του πλέγματος

$$A([n_i \ n_{i+1} \ n_{i+2}], [n_i \ n_{i+1} \ n_{i+2}]) = A([n_i \ n_{i+1} \ n_{i+2}], [n_i \ n_{i+1} \ n_{i+2}]) + A^e$$

όπου  $n_i \ n_{i+1} \ n_{i+2}$  οι κόμβοι κάθε στοιχείου με φορά αντίστροφη των δεικτών του ρολογιού, και

$$A^e = \int_{\Omega^e} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \end{bmatrix} \right) d\Omega^e.$$

Ως  $\Omega^e$  ορίζουμε την επιφάνεια του κάθε στοιχείου. Είναι:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{y_j - y_k}{2E}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \frac{x_k - x_j}{2E}$$

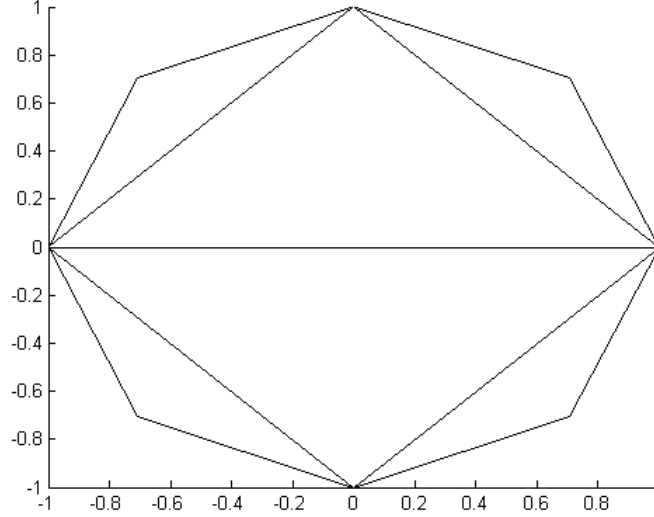
$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} = \frac{y_k - y_i}{2E}$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} = \frac{x_i - x_k}{2E}$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = \frac{y_i - y_j}{2E}$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} = \frac{x_j - x_i}{2E},$$

οπότε έχουμε δημιουργήσει τον πίνακα  $A$ . Ξεκινάμε να λύσουμε σε ένα οκτάγωνο με ένα πλέγμα έξι στοιχείων και οκτώ κόμβων αρχικά. Το πλέγμα μας και



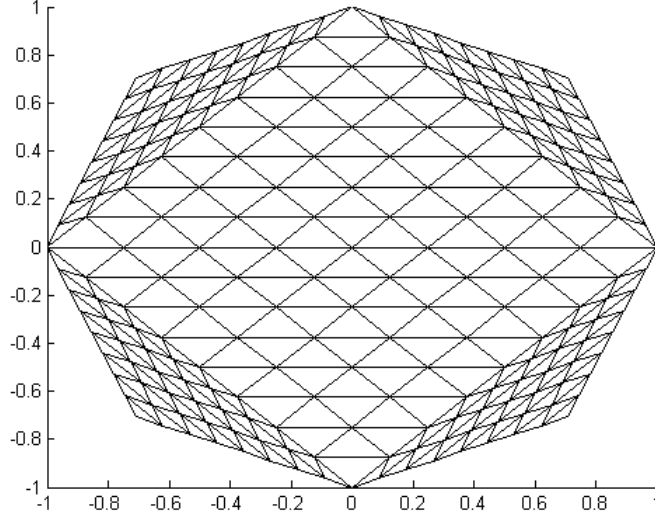
Σχήμα 4.1: Ανομοιογενές πλέγμα 8 κόμβων και 6 στοιχείων

το οκτάγωνο παρουσιάζονται στο σχήμα 4.1. Οι πληροφορίες για την αρίθμηση των κόμβων και για την αρίθμηση των στοιχείων καταχωρούνται στους πίνακες  $N$  και  $E$  και μας δίνουν τη δυνατότητα ανάπτυξης αλγορίθμων πύκνωσης του πλέγματος. Το σκεπτικό και η λογική της πύκνωσης που εφαρμόζεται εδώ είναι ότι παίρνουμε το μέσο κάθε πλευράς κάθε τριγωνικού στοιχείου και ενώνουμε τα μέσα αυτά. Έτσι κάθε στοιχείο δίνει τη θέση του σε 4 νέα στοιχεία. Η πύκνωση γίνεται χρησιμοποιώντας τους  $N$  και  $E$ . Αρχικά δημιουργούμε τους  $N$  και  $E$  οι οποίοι αντιστοιχούν στο καινούριο πλέγμα. Για να καλέσουμε τις συναρτήσεις που δημιουργούν τους πίνακες αυτούς είναι κάθε φορά απαραίτητο να δημιουργούμε τον πίνακα  $C$ , ο οποίος διαβάζει τις γραμμές του  $E$  και κάθε γραμμή του περιέχει τις συντεταγμένες των κόμβων που απαρτίζουν κάθε στοιχείο. Η πύκνωση αυτή καλείται ομοιόμορφη.

Μετά από 2 πυκνώσεις του αρχικού μας πλέγματος έχουμε 384 στοιχεία και 225 κόμβους και το καινούριο πλέγμα που προκύπτει φαίνεται στο σχήμα 4.2.

Το διάνυσμα  $F$  στην εξίσωση  $Au = F$  είναι:  $F = Mf$  όπου  $f$  διάνυσμα με όλες τις συντεταγμένες του ίσες με 1, και  $M$  ο mass matrix ο οποίος προκύπτει από την ανάθεση

$$M([n_i \ n_{i+1} \ n_{i+2}], [n_i \ n_{i+1} \ n_{i+2}]) = M([n_i \ n_{i+1} \ n_{i+2}], [n_i \ n_{i+1} \ n_{i+2}]) + M^e ,$$



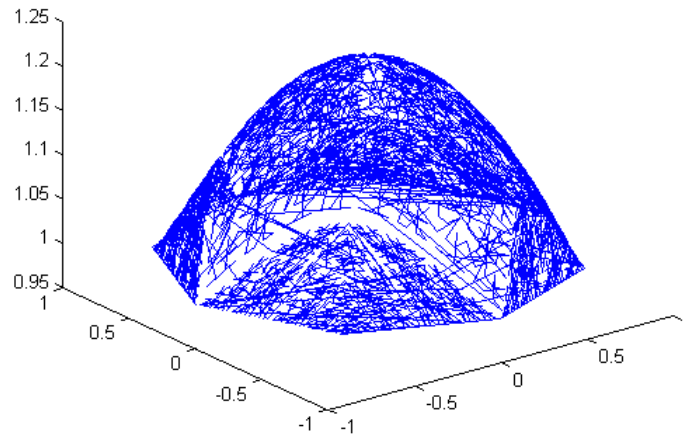
Σχήμα 4.2: Το πλέγμα του σχήματος 4.1 μετά από δύο πυκνώσεις

όπου

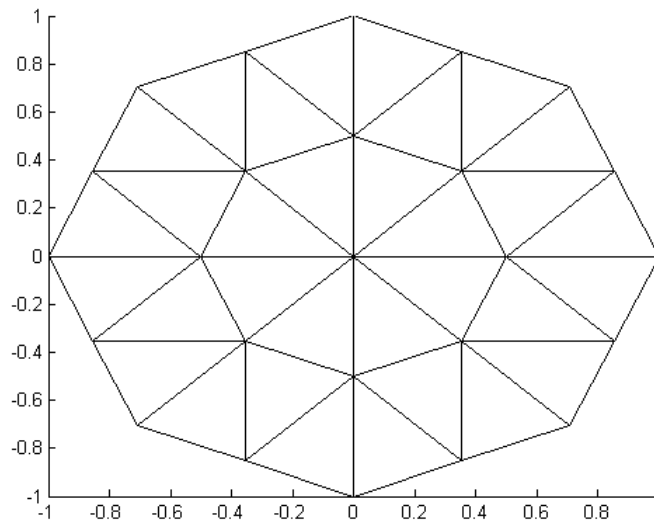
$$M^e = \int_{\Omega^e} \left( \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{bmatrix} [\Phi_i \ \Phi_j \ \Phi_k] + \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{bmatrix} [\Phi_i \ \Phi_j \ \Phi_k] \right) d\Omega^e.$$

Στους κόμβους οι οποίοι είναι στο σύνορο δηλαδή πάνω στο οκτάγωνο απαιτούμε  $u(x, y) = 1$ . Οι συνοριακοί κόμβοι διακρίνονται ως εξής. Στον πίνακα  $N$  το τέταρτο στοιχείο κάθε γραμμής έχει την τιμή 0 ή 1. Η τιμή 1 δείχνει ότι ο κόμβος είναι στο σύνορο του χωρίου. Επομένως στους κόμβους με την ένδειξη 1 εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες αλλάζοντας κατάλληλα τον πίνακα  $A$  καθώς και το διάνυσμα  $F$ . Πυκνώνοντας το πλέγμα 5 φορές η λύση που προκύπτει από ένα πλέγμα 3201 κόμβων και 6144 στοιχείων φαίνεται στο σχήμα 4.3. Για λόγους πληρότητας λύνουμε την εξίσωση Poisson με  $f = 1$  και  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , σε ομοιογενές πλέγμα. Η γραφική παράσταση της λύσης με 4225 κόμβους και 8192 στοιχεία φαίνεται στο σχήμα 4.5, ενώ το πλέγμα που ξεκινήσαμε να πυκνώνουμε φαίνεται στο σχήμα 4.4.

Τέλος, στα σχήματα 4.6 και 4.7 παρατίθενται τα γραφήματα που αφορούν τη σύγκλιση των αλγορίθμων που αναπτύχθηκαν. Παρόμοια με το μονοδιάστατο πρόβλημα και με έναν αλγόριθμο αντίστοιχο με αυτόν που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, υπολογίζουμε την διακριτή  $H^1$  νόρμα σε κάθε πλέγμα και κάνουμε  $\log \log$  γράφημα των διανυσμάτων  $c$  και  $h$ , όπου  $c$  το διάνυσμα που



Σχήμα 4.3: Γραφική παράσταση της λύσης με  $u|_{\partial\Omega} = 1$



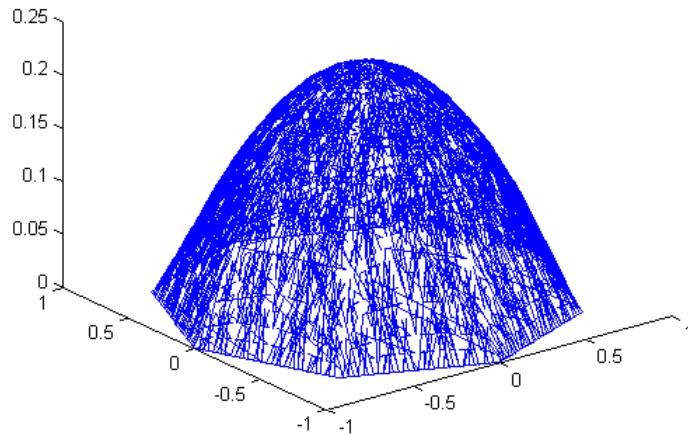
Σχήμα 4.4: Ομοιογενές πλέγμα 25 κόμβων και 32 στοιχείων

περιέχει τις νόρμες και  $h$  το διάνυσμα που περιέχει τη διάμετρο του πλέγματος. Η κλίση της ευθείας που κάνει γραμμική παλινδρόμηση στα σημεία  $(h(i), C(i))$



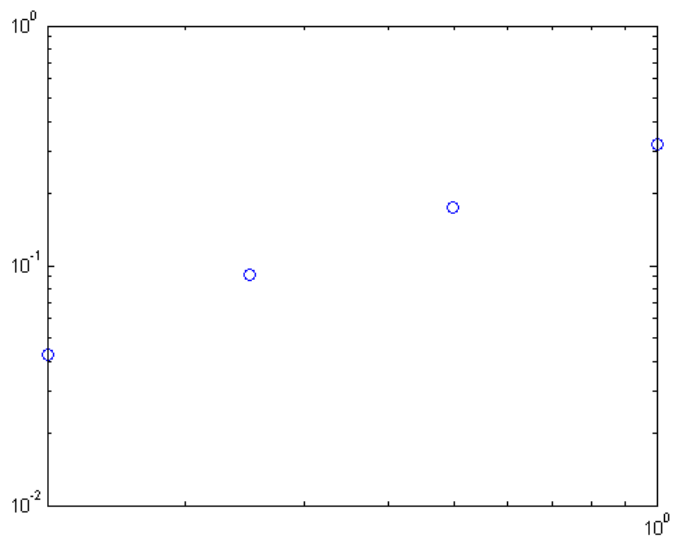
#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

---

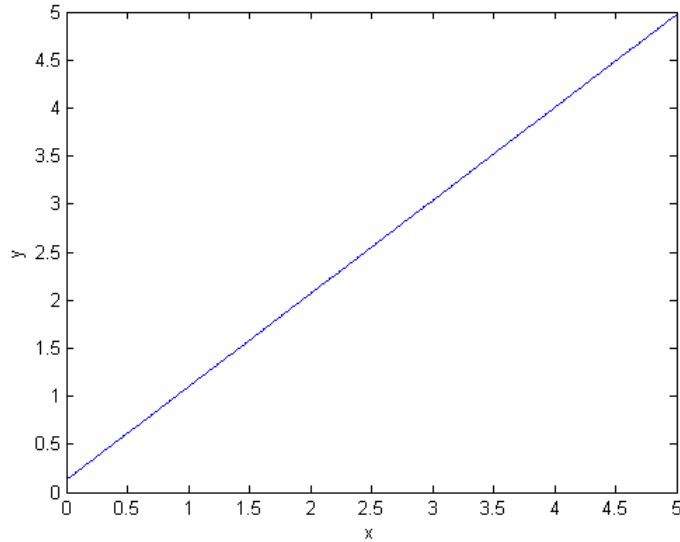


Σχήμα 4.5: Γραφική παράσταση της λύσης με  $u|_{\partial\Omega} = 0$

έχει κλίση 0.9687, αποτέλεσμα που συμφωνεί πλήρως με την a priori θεωρία αφού η σύγκλιση πρέπει να είναι γραμμική.



Σχήμα 4.6: Γράφημα  $\log \log$  των διανυσμάτων  $c$  και  $h$ .



Σχήμα 4.7: Ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης των σημείων του γραφήματος .

#### 4.0.10 Η μερική διαφορική εξίσωση Poisson με Neumann οριακές συνθήκες σε ένα τμήμα του $\partial\Omega$

Έστω η μερική διαφορική εξίσωση Poisson σε ένα χωρίο  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$-\Delta u = f, \quad u(x, y) \in H^1(\Omega)$$

με

$$u = g$$

στο  $\Gamma_1$  και

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q$$

στο  $\Gamma_2$ , όπου  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$  και  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . Για κάθε συνάρτηση  $w \in H_0^1(\Omega)$  πολλαπλασιάζοντας με  $w$  και ολοκληρώνοντας στο  $\Omega$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla w d\Omega &= \int_{\Omega} f w d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} w ds \Rightarrow \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla w d\Omega &= \int_{\Omega} f w d\Omega + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} w ds \Rightarrow \end{aligned}$$

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

---

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla w d\Omega = \int_{\Omega} f w d\Omega + \int_{\Gamma_2} q w ds .$$

Περνώντας τώρα σε διακριτούς υποχώρους των παραπάνω χώρων και χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις βάσης  $\Phi_i$  που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως, προκύπτει ότι οι Neumann οριακές συνθήκες στο  $\Gamma_2$  ουσιαστικά παράγουν ένα ακόμη διάνυσμα το οποίο προστίθεται στο δεξί μέρος της εξίσωσής μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ  
ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

---

## Κεφάλαιο 5

# Εισαγωγή στις μεθόδους χωρίς πλέγμα

Οι μέθοδοι χωρίς πλέγμα είναι μια ιδιαίτερη κατηγορία αριθμητικών αλγορίθμων προσομοίωσης για την προσομοίωση των φυσικών φαινομένων. Οι παραδοσιακοί αλγόριθμοι προσομοίωσης στηρίζονται σε ένα πλέγμα, ενώ οι εν λόγω μέθοδοι χρησιμοποιούν αντίθετα τη γεωμετρία του αντικειμένου ή του χωρίου άμεσα για τους υπολογισμούς. Οι μέθοδοι αυτές υπάρχουν για την μηχανική των ρευστών καθώς επίσης και για την μηχανική των στερεών. Μερικές μέθοδοι είναι σε θέση να χειριστούν και τις δύο περιπτώσεις. Οι μέθοδοι χωρίς πλέγμα αποβάλλουν την παραδοσιακή αντίληψη η οποία στηρίζεται στην ύπαρξη πλέγματος στην περιοχή πάνω στην οποία λύνουμε μια μερική διαφορική εξίσωση, και στηρίζονται σε μια προσέγγιση μορίων (είτε Lagrangian είτε Eulerian) της περιοχής του προβλήματος. Ένας στόχος των μεθόδων αυτών είναι να διευκολυνθεί περισσότερο η προσομοίωση, αλλά και να απαντήσει σε προβλήματα που απαιτούν την αντιμετώπιση μεγάλων παραμορφώσεων, σύνθετης γεωμετρίας, μη γραμμικής συμπεριφοράς των εκάστοτε υλικών, καθώς και ασυνεχειών και ιδιομορφιών γενικότερα. Παραδείγματος χάριν η τήξη ενός στερεού ή η διαδικασία παγώματος ενός υγρού μπορούν να προσομοιωθούν με τέτοιες μεθόδους. Οι μέθοδοι χωρίς πλέγμα αποτελούν ελκυστική εναλλακτική λύση συγκρινόμενες με την κλασσική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (FEM), για εκείνο το κομμάτι της κοινότητας της εφαρμοσμένης μηχανικής το οποίο θεωρεί τις διαδικασίες γέννησης και πύκνωσης του πλέγματος δυσκολότερες και υπολογιστικά ακριβότερες από το υπόλοιπο της ανάλυσης [7].

Στην πάροδο των τελευταίων τριών δεκαετιών έχουν προταθεί και παρουσιαστεί πολλές meshless μέθοδοι. Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι ενώ όλες αυτές οι μέθοδοι χαρακτηρίζονται σαν μέθοδοι άνευ πλέγματος, δεν ισχύει κάτι τέτοιο κυριολεκτικά για όλες τους. Οι μέθοδοι που βασίζονται στη μέθοδο *Galerkin* για παράδειγμα προϋποθέτουν κάποιας μορφής πλέγμα (cell structure).

Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποιες από τις σημαντικότερες μεθόδους χωρίς πλέγμα.

#### A. The smoothed particle hydrodynamics (SPH)

Η εμφάνιση των μεθόδων χωρίς πλέγμα τοποθετείται στους Monaghan, Gingold και Lucy [8,9,10] (1977) , οι οποίοι ανέπτυξαν μια Λανγκραντζιανή μέθοδο η οποία βασίζεται στη μέθοδο εκτιμήσεων πυρήνων (Kernel Estimates method) για τη μοντελοποίηση προβλημάτων αστροφυσικής. Η μέθοδος SPH βασίζεται στην ιδέα αντικατάστασης ενός υγρού από κινούμενα σωματίδια-μόρια, καθώς και στο μετασχηματισμό των μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν, στα ολοκληρώματα των εκτιμήσεων πυρήνων (kernel estimates integrals).

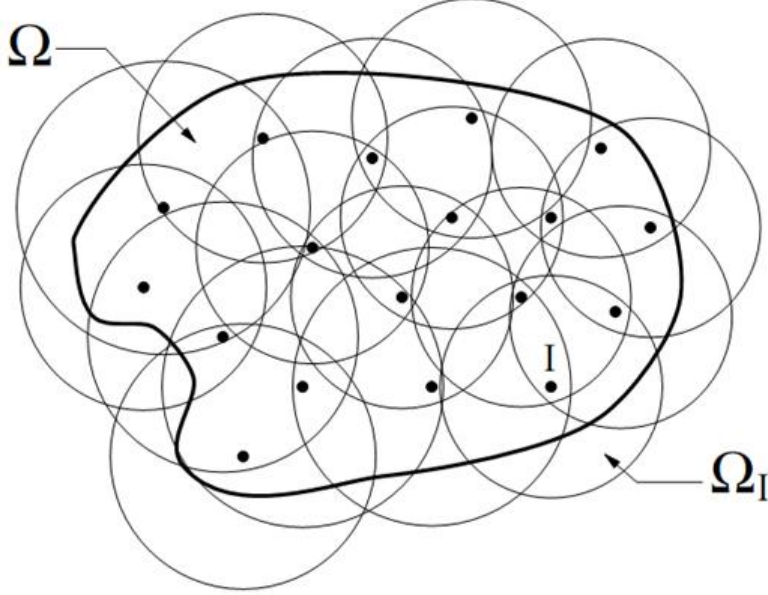
Παρά την επιτυχία της SPH στην μοντελοποίηση προβλημάτων αστροφυσικής, η μέθοδος αυτή μπόρεσε να εφαρμοστεί και σε άλλου είδους προβλήματα μόνο μετά τη δεκαετία του '90. Μέσω αυτής της πιο πλατιάς εφαρμογής της μεθόδου έγιναν φανερές κάποιες «αδυναμίες της μεθόδου» με κυριότερη την δυσκολία στην εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών κάθε προβλήματος. Η εν λόγω δυσκολία είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η SPH αρχικά δημιουργήθηκε για να μοντελοποιήσει ανοικτά και όχι φραγμένα προβλήματα. Η μέθοδος έχει εφαρμοστεί με μεγάλη επιτυχία σε προβλήματα ελεύθερης επιφάνειας, φαινόμενα εκρήξεων, μετάδοσης θερμότητας καθώς και σε άλλα προβλήματα υπολογιστικής μηχανικής. Σύμφωνα με τον Monaghan η λύση  $u(x)$  σε ένα χωρίο  $\Omega$  δίνεται από τη σχέση

$$u^h(x) = \int_{\Omega} w(x-y, h) u(y) d\Omega$$

όπου  $u$  η προσέγγιση,  $w$  η συνάρτηση πυρήνα (kernel function) και  $h$  ένα μέτρο μεγέθους του κάθε στοιχείου. Η συνάρτηση  $w$  ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1.  $w(x-y, h) > 0$  σε μια υποπεριοχή  $\Omega_I$  του  $\Omega$ .
2.  $w(x-y, h) = 0$  εκτός του  $\Omega_I$ .
3.  $\int_{\Omega} w(x-y, h) d\Omega = 1$ .
4.  $w(s, h)$  είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση με  $s = ||x-y||$ .
5.  $w(s, h) \rightarrow \delta(s)$  καθώς  $h \rightarrow 0$  όπου  $\delta$  η συνάρτηση Dirac .

Ένα κατάλληλο πλέγμα για τη μέθοδο SPH φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



#### B. The diffuse element method (DEM)

Η πρώτη μέθοδος χωρίς πλέγμα που στηρίχτηκε στη τεχνική προβολής του Galerkin προτάθηκε το 1991 από τους Nayroles και Touzot [11]. Η DEM σύμφωνα με πολλούς ερευνητές ήταν εκείνη η άνευ πλέγματος μέθοδος η οποία άρχισε να προκαλεί το ενδιαφέρον της ερευνητικής κοινότητας για αυτές τις μεθόδους.

#### Γ. The element-free Galerkin method (EFG)

Το 1994 ο Belytschko [12] εισήγαγε την μέθοδο element-free galerkin, μια επέκταση της μεθόδου του Nayroles η οποία εμφανίζει μια σειρά βελτιώσεων σε σύγκριση με την (DEM) όπως οι εξής:

1. Καθορισμός των παραγώγων προσέγγισης

Στην DEM οι παράγωγοι της προσεγγιστικής συνάρτησης  $U^h$  προκύπτουν θεωρώντας τους συντελεστές  $b$  της πολωνυμικής βάσης  $p$  σαν σταθερές, έτσι ώστε

$$\frac{dU^h(x)}{dx} = \frac{dp^T(x)}{dx}b(x)$$

Στην EFG χρησιμοποιείται η πλήρης μορφή των παραγώγων έτσι ώστε

$$\frac{dU^h(x)}{dx} = \frac{dp^T(x)}{dx}b(x) + p^T(x)\frac{db(x)}{dx}$$

Ο Belytschko υποστήριξε ότι αν αγνοούνται οι παράγωγοι του  $b(x)$  η ακρίβεια της μεθόδου εξασθενεί σημαντικά.

2. Εφαρμογή των Dirichlet συνοριακών συνθηκών

Στην DEM οι συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet δεν ικανοποιούνται απευθείας. Στην EFG χρησιμοποιούνται πολλαπλασιαστές Lagrange στην ασθενή μορφή της εξίσωσης ώστε να γίνει εφαρμογή των οριακών συνθηκών.

Οι βελτιώσεις που έγιναν αύξησαν το υπολογιστικό κόστος όμως η μέθοδος EFG είναι ακριβέστερη από την DEM .

#### Δ. Reproducing kernel particle method (RKPM)

Το 1995 ο Liu [13] πρότεινε την μέθοδο RKPM σε μια προσπάθειά του να διορθώσει την έλλειψη ευστάθειας της μεθόδου SPH . Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε με μεγάλη επιτυχία στη ρευστομηχανική, στην ανάλυση δονήσεων καθώς και σε άλλες εφαρμογές.

#### Ε. Finite point method (FPM)

Η μέθοδος FPM προτάθηκε το 1996 από τον Onate και συναδέλφους του [14]. Αρχικά παρουσιάστηκε για να μοντελοποιηθούν προβλήματα ροής υγρών αλλά αργότερα βρήκε εφαρμογή και σε άλλα προβλήματα όπως για παράδειγμα σε προβλήματα ελαστικότητας.

#### Ζ. Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG)

Το 1998 οι Atluri και Zhu [15] εισήγαγαν την MLPG, η οποία παρουσιάζει μια διαφορετική προσέγγιση στη κατασκευή μιας άνευ πλέγματος μεθόδου. Βασίζεται στην ιδέα της τοπικής ασθενούς μορφής (local weak form) η οποία «καταργεί» την ανάγκη για κελιά-στοιχεία και συνεπώς η αριθμητική ολοκλήρωση γίνεται με μια «άνευ πλέγματος» έννοια. Η MLPG χρησιμοποιεί την μέθοδο Petrov-Galerkin για να απλοποιηθεί το ολοκλήρωμα της ασθενούς μορφής. Η μέθοδος MLPG αρχικά διατυπώθηκε χρησιμοποιώντας την μέθοδο MLS και αργότερα ο Atluri επέκτεινε αυτή την διατύπωση σε άλλες τεχνικές προσεγγίσεων χωρίς πλέγμα. Η ελευθερία για την επιλογή test function στην μέθοδο Petrov-Galerkin δίνει και τις διαφορετικές εκδοχές της MLPG . Η MLPG και οι διάφορες εκδοχές της έχουν χρησιμοποιηθεί για τη λύση μεγάλου εύρους προβλημάτων με κυριότερα τα προβλήματα ακτίνας Euler-Bernoulli (Euler-Bernoulli beam problems) [18].



#### Η. Radial basis functions (RBF)

Οι ακτινωτές συναρτήσεις βάσης πρωτοεφαρμόστηκαν στη λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων το 1991 από τον Kansa [16]. Κατά τη διάρκεια της τελευταίας δεκαετίας η συγκεκριμένη μέθοδος δεν τυγχάνει ερευνητικής προσοχής και θα μπορούσε να χαρακτηριστεί μη εξελίξιμη τα τελευταία χρόνια. Βέβαια υπάρχει μεγάλο πλήθος δημοσιεύσεων, κυρίως για την μαθηματική απόδειξη της μεθόδου. Μια ολοκληρωμένη παρουσίαση του μαθηματικού υπόβαθρου της μεθόδου έχει γίνει από τον Buhmann [29].

#### Θ. Point Interpolation method (PIM)

Η μέθοδος σημειακής παρεμβολής χρησιμοποιεί για την κατασκευή της προσέγγισης την τεχνική της πολυωνυμικής παρεμβολής, που διατυπώθηκε σαν εναλλακτική της μεθόδου κινούμενων ελαχίστων τετραγώνων (moving least squares method) από τον Liu το 2001 [17]. Η PIM όμως παρουσιάζει δύο βασικά μειονεκτήματα: Το πρώτο είναι ότι ο πίνακας παρεμβολής (interpolation matrix) είναι μη αντιστρέψιμος και το δεύτερο ότι η μέθοδος δεν εγγυάται την συνέχεια της συνάρτησης προσέγγισης (approximation function). Ο Liu προσπάθησε με διάφορους τρόπους να ξεπεράσει τα δύο αυτά προβλήματα της μεθόδου και η κατάληξη ήταν η μέθοδος τοπικής παρεμβολής ακτινικών σημείων (local radial point interpolation method).

#### Ι. Άλλες μέθοδοι

Στη διεθνή βιβλιογραφία εμφανίζεται ένας μεγάλος αριθμός μεθόδων οι οποίες εμπίπτουν στην κατηγορία των μεθόδων χωρίς πλέγμα εκ των οποίων οι σημαντικότερες αναφέρθηκαν παραπάνω. Παρόλα αυτά υπάρχουν κάποιες μέθοδοι που τυγχάνουν μεγάλης ερευνητικής προσοχής που αξίζει να αναφερθούν. Μια εξ' αυτών είναι η μέθοδος H-p Cloud η οποία διατυπώθηκε αρχικά το 1995 από τους Duarte και Oden [19]. Επίσης το 2000 οι De και Bathe διατύπωσαν την μέθοδο των πεπερασμένων σφαιρών (finite spheres method ) [20] η οποία εμπίπτει στην κατηγορία των διαφόρων εκδοχών της μεθόδου Petrov-Galerkin (MLPG ). Στην συνέχεια παρουσιάζεται η μέθοδος νοητών χωρίων (fictitious domain method ), η οποία είναι και η άνευ πλέγματος μέθοδος που θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία [21,22,23].



## Κεφάλαιο 6

### Η μέθοδος των νοητών χωρίων

Οι μέθοδοι νοητών χωρίων (fictitious domain methods) ή (domain embedding methods) εισήχθησαν από τους Hyman και Saul'en 50 χρόνια πριν. Από τότε έχουν εφαρμοστεί σε σειρά προβλημάτων αυξημένης πολυπλοκότητας. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην εισαγωγή, η βασική ιδέα πίσω από τη μέθοδο αυτή, είναι ότι αντί να λύσουμε κατευθείαν στο χωρίο που μας ενδιαφέρει λύνουμε σε ένα μεγαλύτερο και πιο απλό που το περιέχει. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι ότι με κατάλληλες προϋποθέσεις και ανάπτυξη κατάλληλων αλγορίθμων και προγραμμάτων σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να επιτύχουμε λύση των προβλημάτων σε μικρότερο χρόνο. Υπάρχουν πολλοί τρόποι υλοποίησης αυτής της απλής ιδέας αλλά στην παρούσα εργασία θα περιοριστούμε στην εφαρμογή της μεθόδου με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange στο σύνορο. Έστω ότι μας ενδιαφέρει να λύσουμε μια μερική διαφορική εξίσωση σε ένα χωρίο με επαναληπτικό τρόπο. Έστω δηλαδή ότι στη διάρκεια κάποιου χρόνου θέλουμε να λύσουμε κάποιες φορές αλλά κάθε φορά υπάρχει μια διαφοροποίηση στο χωρίο που λύνουμε. Μια τέτοια περίπτωση είναι πολύ χρονοβόρα με κλασικές μεθόδους, αφού κάθε φορά θα δημιουργούμε το πλέγμα από την αρχή. Με τη μέθοδο των νοητών χωρίων όμως αφού το πλέγμα μας είναι καθορισμένο, το μόνο που θα αλλάξει θα είναι κάποια στοιχεία της γεωμετρίας του συνόρου γεγονός που καθιστά τη μέθοδο πολύ γρηγορότερη σε τέτοιες περιπτώσεις. Παρόλο που τέτοιες μέθοδοι τυγχάνουν μεγάλης ερευνητικής προσοχής, υπάρχει πλήθος προβλημάτων που δεν έχουν εφαρμοστεί ακόμα. Βέβαια επειδή το ερευνητικό ενδιαφέρον είναι μεγάλο ο αριθμός των δημοσιεύσεων και των εφαρμογών της μεθόδου αυξάνεται συνεχώς [25].

### 6.0.11 Θεμελίωση του προβλήματος με Dirichlet οριακές συνθήκες

Έστω  $\omega$  φραγμένη περιοχή του  $\mathbb{R}^d$ , ( $d \geq 1$ ) και έστω  $\gamma$  το  $\partial\omega$ . Υποθέτουμε ότι το  $\gamma$  είναι συνεχές κατά Lipschitz . Έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα [21]: Δοσμένης  $f$  στον  $H^{-1}(\omega)$  και  $g$  στον  $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$  να βρεθεί συνάρτηση  $u$  τέτοια ώστε

$$-\Delta u = f$$

στο  $\omega$  και

$$u = g$$

στο  $\gamma$ . Το πρόβλημα έχει μοναδική λύση  $u$  στον  $H^1(\omega)$  από το θεώρημα Lax-Milgram . Η  $u$  είναι επίσης λύση του ακόλουθου προβλήματος: Να βρεθεί  $u \in V_g$  τέτοια ώστε

$$\alpha_\omega(u, w) = \langle f, w \rangle \quad \forall u \in H^1(\omega)$$

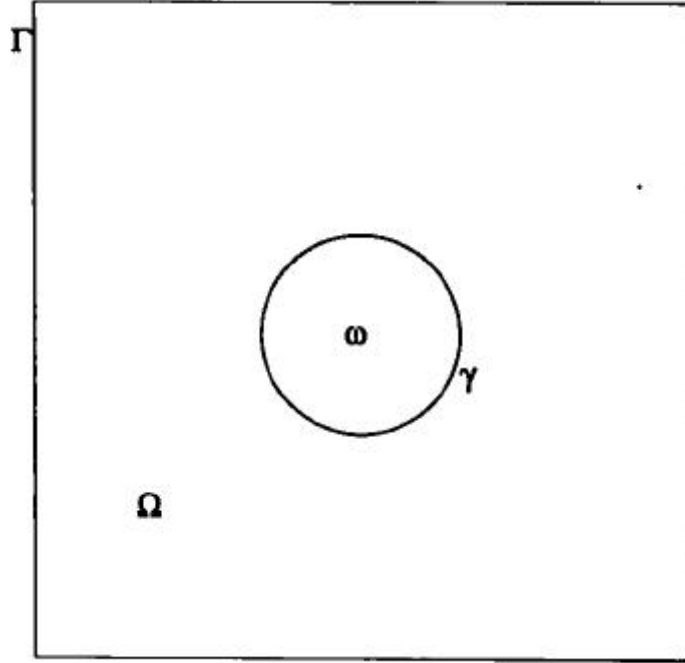
όπου

$$\alpha_\omega(u, w) = \int_\omega \nabla u \nabla w dx, \quad \forall u \in V_g, w \in H^1(\omega),$$

$V_g = \{u | u \in H^1(\omega), u = g \text{ στο } \gamma\}$  και  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  η δυϊκή απεικόνιση μεταξύ των χώρων  $H^{-1}(\omega)$  και  $H_0^1(\omega)$ . Ο χώρος  $H_0^1(\omega)$  περιέχει εκείνες τις συναρτήσεις  $u$  που ανήκουν στον  $H^1(\omega)$  για τις οποίες ισχύει ότι  $u = 0$  στο  $\partial\omega$ .

### 6.0.12 Θεμελίωση με νοητά χωρία με Dirichlet οριακές συνθήκες

Έστω δύο χωρία  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  και  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  τέτοια ώστε  $\bar{\omega} \subset \Omega$  και  $\Gamma$  το σύνορο του  $\Omega$  όπως στην παρακάτω εικόνα. Είναι  $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ .



Ορίζουμε ένα συναρτησιακό Lagrange

$$L : V \times H^{-\frac{1}{2}}(\gamma) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ως εξής:

$$L(w, \mu) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} \tilde{f} w dx - \langle \mu, w - g \rangle$$

όπου  $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$  και  $\tilde{f}|_{\Omega} = f$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι η δυϊκή απεικόνιση μεταξύ των χώρων  $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  και  $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$  ενώ ο  $V$  είναι ένας κλειστός υπόχωρος του  $H^1(\Omega)$ , μια κατάλληλη επιλογή είναι ο ίδιος ο  $H^1(\Omega)$  ή ο  $H_0^1(\Omega)$ .

Ισοδύναμα το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Να βρεθούν  $(\tilde{u}, \lambda) \in V \times H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  τέτοια ώστε

$$a_{\Omega}(\tilde{u}, w) = \int_{\Omega} \tilde{f} w dx + \langle \lambda, w \rangle \quad \forall w \in V ,$$

$$\langle \mu, \tilde{u} - g \rangle = 0 \quad , \forall \mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$$

όπου

$$a_{\Omega}(\tilde{u}, w) = \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \nabla w d\Omega .$$

Αν  $w|_{\omega} \in H_0^1(\omega)$  και  $w = 0 \in \Omega - \bar{\omega}$  τότε η  $\tilde{u}$  ικανοποιεί τη σχέση

$$a_{\omega}(\tilde{u}, w) = \int_{\omega} \tilde{f} w dx \quad \forall w \in H_0^1(\omega) .$$

Αλλάζοντας το συμβολισμό στο παραπάνω πρόβλημα, για  $(u, \lambda) \in V \times H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  τα παραπάνω γράφονται ως εξής: Να βρεθεί  $(u, \lambda) \in V \times H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  έτσι ώστε για κάθε  $(w, \mu) \in V \times H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$

$$a(u, w) + b(w, \lambda) = \langle f, w \rangle$$

$$b(u, \mu) = \langle g, \mu \rangle .$$

Σε μορφή γραμμικών διαφορικών τελεστών το παραπάνω πρόβλημα γράφεται:

$$Au + B\lambda = f$$

$$B^T u = g .$$

Η διγραμμική μορφή  $a$  έχει τις ιδιότητες της συμμετρίας και της συμπίεστότητας όπως έχει αναλυθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Επειδή η διγραμμική μορφή  $b$  ικανοποιεί τη Babuska-Brezzi inf-sup συνθήκη, υπάρχει μοναδικό  $\lambda$  ώστε το πρόβλημα σαγματικού σημείου να έχει μοναδική λύση. Η inf-sup συνθήκη που ικανοποιείται είναι η εξής:

$$\exists \beta > 0 : \inf_{\lambda} \sup_v \frac{b(v, \lambda)}{\|v\|_V \|\lambda\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)}} \geq \beta ,$$

η οποία γράφεται επίσης:

$$\exists \beta > 0 : \forall \lambda \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma) : \sup_{v \in V} \frac{b(v, \lambda)}{\|v\|_V} \geq \beta \|\lambda\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} .$$

### 6.0.13 Διακριτοποίηση του προβλήματος με Dirichlet οριακές συνθήκες

Έστω  $V_h$  ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του χώρου  $V$  και  $\Lambda_h$  πεπερασμένος υπόχωρος του  $L^2(\gamma)$ . Το πρόβλημα σε πεπερασμένη διάσταση διατυπώνεται ως εξής: Να βρεθούν  $(u_h, \lambda_h) \in V_h \times \Lambda_h$  τέτοια ώστε

$$a_{\Omega}(\tilde{u}_h, w_h) = \int_{\Omega} \tilde{f} w_h dx + \int_{\gamma} \lambda_h w_h d\gamma \quad \forall w_h \in V_h ,$$

$$\int_{\gamma} (u_h - g_h) \mu_h d\gamma = 0 \quad \forall \mu_h \in \Lambda_h$$

όπου  $g_h$  μια προσέγγιση της  $g$ . Θεωρώντας τα  $\lambda_h$  σταθερά βγαίνουν από το ολοκλήρωμα. Χρησιμοποιούμε και πάλι τις συναρτήσεις βάσης του χώρου των κατά τμήματα συνεχών γραμμικών πολυωνυμικών συναρτήσεων στον οποίο ανήκουν τα  $w_h$

$$\Phi_i(x, y) = \frac{1}{2E} (x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y)$$

$$\Phi_j(x, y) = \frac{1}{2E} (x_k y_i - x_i y_k + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y)$$

$$\Phi_k(x, y) = \frac{1}{2E} (x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y)$$

όπου  $E$  είναι το εμβαδόν του στοιχείου με κόμβους  $i, j$  και  $k$ , και το διακριτοποιημένο πρόβλημα γράφεται σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$Au + B\lambda = f,$$

$$B^T u = g$$

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης προκύπτει πάλι από την inf-sup συνθήκη, η οποία αποδεικνύεται ότι ισχύει και σε χώρους πεπερασμένης διάστασης [4]. Ο πίνακας  $A$  είναι ο stiffness matrix του πλέγματος στο χωρίο  $\Omega$ . Αναφέρεται δηλαδή στο σύνολο των κόμβων. Ο πίνακας  $B$  περιέχει τις πληροφορίες για τους συνοριακούς κόμβους, οι οποίοι δημιουργούνται όταν τοποθετούμε μέσα στο  $\Omega$  το χωρίο  $\omega$  στο οποίο τελικά θέλουμε να λύσουμε. Ο  $B$  είναι αραιός πίνακας του οποίου το πλήθος των γραμμών του ισούται με το πλήθος των συνοριακών κόμβων που δημιουργούνται, και το πλήθος των στηλών του ισούται με το σύνολο των κόμβων του προϋπάρχοντος πλέγματος στο  $\Omega$ . Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι λύνουμε ένα σύστημα

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

και παίρνουμε τη λύση  $u$  η οποία όμως έχει διάσταση ίση με το πλήθος των κόμβων στο πλέγμα του  $\Omega$ . Με μια διαδικασία που θα περιγραφεί στη συνέχεια, από τις συντεταγμένες της λύσης  $u$  κρατάμε αυτές που ανήκουν στο  $\omega$ . Ο πίνακας  $B$  περιέχει τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των συναρτήσεων βάσης  $\Phi(x, y)$  πάνω στα ευθύγραμμα τμήματα των στοιχείων στα οποία παρεμβάλλο-

νται οι καινούριοι συνοριακοί κόμβοι, και ο αυστηρός ορισμός του καθώς και η αλγοριθμική διαδικασία που τον δημιουργεί παρατίθενται σε επόμενο κεφάλαιο.

*Παρατήρηση:*

Στην περίπτωση που έχουμε Neumann οριακές συνθήκες σε ένα τμήμα του  $\partial\omega$ , όπως έχουμε περιγράψει και στα κεφάλαια 2 και 3, αλλάζουν τα  $f$  και  $g$  στο δεξί μέρος του συστήματος πινάκων που λύνουμε.



## Κεφάλαιο 7

### Η μέθοδος των νοητών χωρίων σε μια διάσταση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράφηκε η φιλοσοφία της μεθόδου των νοητών χωρίων. Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπώσουμε και θα λύσουμε την διαφορική εξίσωση Poisson με  $f = 1$  και θα γίνει σύγκριση της μεθόδου και των αποτελεσμάτων με την κλασσική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων.

Θα λύσουμε την  $-u'' = 1$  στο  $(-1, 2)$ . Συνοριακές συνθήκες δεν θα εφαρμόσουμε άμεσα στο πρόβλημα όπως στην μέθοδο Galerkin, αυτό που θέλουμε όμως είναι στο 0 και στο 1 η συνάρτηση  $u$  να μηδενίζεται. Ξεκινάμε με ένα ομοιόμορφο πλέγμα στο  $(-1, 2)$ . Ο πίνακας  $N$  ο οποίος περιέχει τους κόμβους και τις συντεταγμένες για το αρχικό αυτό πλέγμα είναι ο εξής:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1.0000 \\ 2 & -0.8500 \\ 3 & -0.7000 \\ 4 & -0.5500 \\ 5 & -0.4000 \\ 6 & -0.2500 \\ 7 & -0.1000 \\ 8 & 0.0500 \\ 9 & 0.2000 \\ 10 & 0.3500 \\ 11 & 0.5000 \\ 12 & 0.6500 \\ 13 & 0.8000 \\ 14 & 0.9500 \\ 15 & 1.1000 \\ 16 & 1.2500 \\ 17 & 1.4000 \\ 18 & 1.5500 \\ 19 & 1.7000 \\ 20 & 1.8500 \\ 21 & 2.0000 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι στις θέσεις  $x = 0$  και  $x = 1$  δεν αντιστοιχούν κόμβοι. Πυκνώνουμε το πλέγμα αρκετές φορές και δημιουργούμε τον πίνακα  $A$  ο οποίος αντιστοιχεί σε όλους τους κόμβους του  $(-1, 2)$ . Όπως προκύπτει από την περιγραφή και μαθηματική θεμελίωση της μεθόδου καλούμαστε να λύσουμε το εξής σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} A^N & B^{N \times 2} \\ B^{2 \times N} & 0^{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  οι ζητούμενοι πολλαπλασιαστές Lagrange, ενώ τα 0 και 0 στην προτελευταία και τελευταία συντεταγμένη αντίστοιχα στο δεξί μέρος της εξίσωσης είναι οι οριακές συνθήκες στις θέσεις  $x = 0$  και  $x = 1$ . Ο πίνακας  $B$  είναι

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

---

της μορφής

$$B = \begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_1(1) \\ \Phi_2(0) & \Phi_2(1) \\ \vdots & \vdots \\ \Phi_N(0) & \Phi_N(1) \end{bmatrix},$$

όπου  $N$  ο αριθμός των κόμβων στο  $(-1, 2)$ . Εμάς όμως μας ενδιαφέρει η λύση στο  $[0, 1]$ . Επομένως από την λύση  $u_h$  που προκύπτει κρατάμε τις τιμές που αντιστοιχούν στους κόμβους εντός του  $(0, 1)$ . Προκύπτει έτσι η λύση  $u_h$  με τη μέθοδο των νοητών χωρίων. Μέσω του πίνακα  $B$  εφαρμόζονται ουσιαστικά οι οριακές συνθήκες, αφού η δομή του είναι τέτοια που επηρεάζει μόνο τους κόμβους που βρίσκονται εκατέρωθεν των 0 και 1. Στο σχήμα 7.1 φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης η οποία προέκυψε από πλέγμα 1281 κόμβων στο  $[-1, 2]$ , με 427 κόμβους να αντιστοιχούν στο  $(0, 1)$ . Παρατηρούμε ότι η λύση  $u$  μηδενίζεται κοντά στα 0 και 1. Στο σχήμα 7.2 φαίνεται σε μεγέθυνση η περιοχή κοντά στο 0. Επίσης εξετάζοντας την ελάχιστη τιμή της λύσης παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

```
min(uf)
ans =
-1.5259e-007
```

Είναι φανερό ότι η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών γίνεται με αποτελεσματικό τρόπο. Το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange που προκύπτει από τη λύση του παραπάνω συστήματος είναι το

$$l = \begin{bmatrix} 1.500 \\ 1.500 \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας με την κλασική Galerkin υπολογίζουμε τη λύση  $u_1$  σε 321 κόμβους, και με νοητά χωρία τη λύση  $u_2$  σε 427 κόμβους αντίστοιχα. Η σύγκριση της μέγιστης και της ελάχιστης διαφοράς των δύο λύσεων δίνει τα εξής αποτελέσματα:

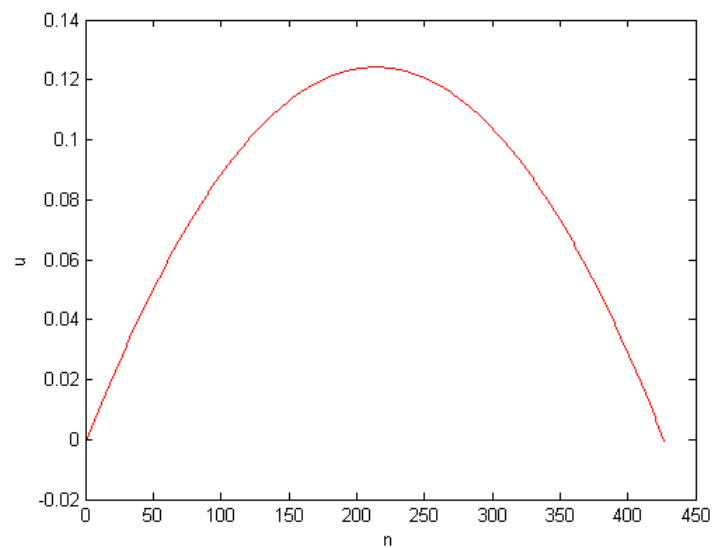
```
max=abs(max(u1)-max(u2))
min=abs(min(u1)-min(u2))
```

```
max =
7.8064e-004
```

```
min =
```

3.9032e-004

Η διαφορά των δύο λύσεων είναι της τάξης του  $10^{-4}$  ενώ οι λύσεις που συγκρίναμε έχουν προκύψει σε αρκετά πιο αραιά πλέγματα απο αυτά που πήραμε γραφικές παραστάσεις των λύσεων.

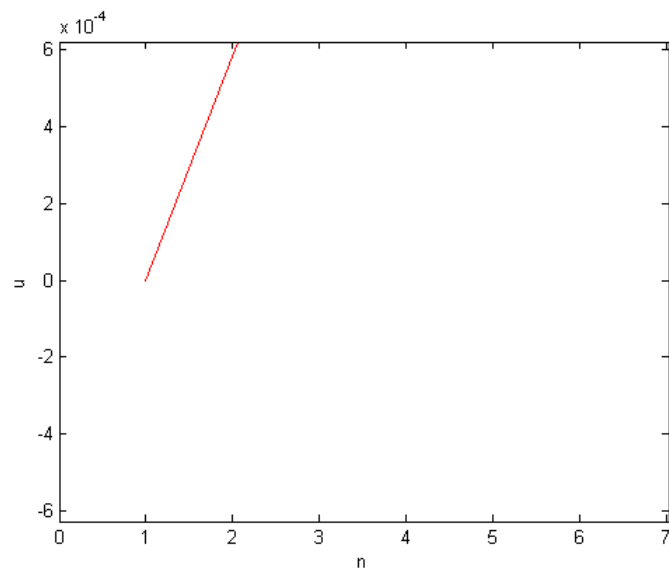


Σχήμα 7.1: Γραφική παράσταση της λύσης με νοητά χωρία σε 427 κόμβους

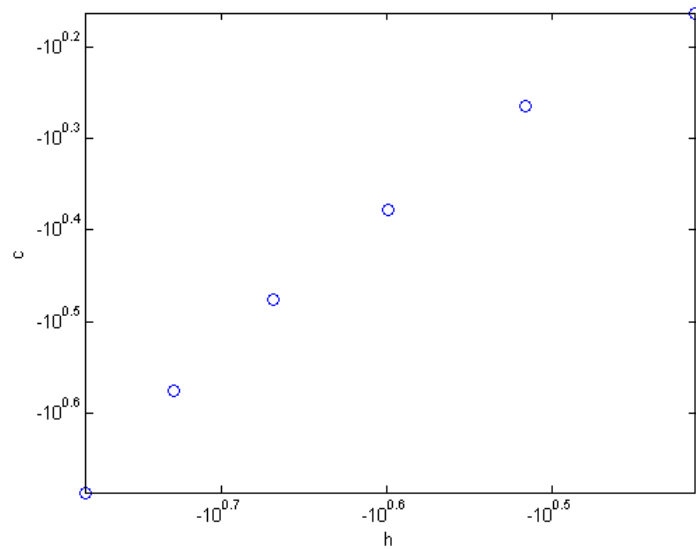
Τέλος, με την ίδια ακριβώς λογική με τα προηγούμενα προβλήματα μελετάμε πάλι τη σύγκλιση των αλγορίθμων χρησιμοποιώντας την  $H^1$  νόρμα. Στα σχήματα 7.3 και 7.4 φαίνονται τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής. Η κλίση της ευθείας του σχήματος είναι 0.9640.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

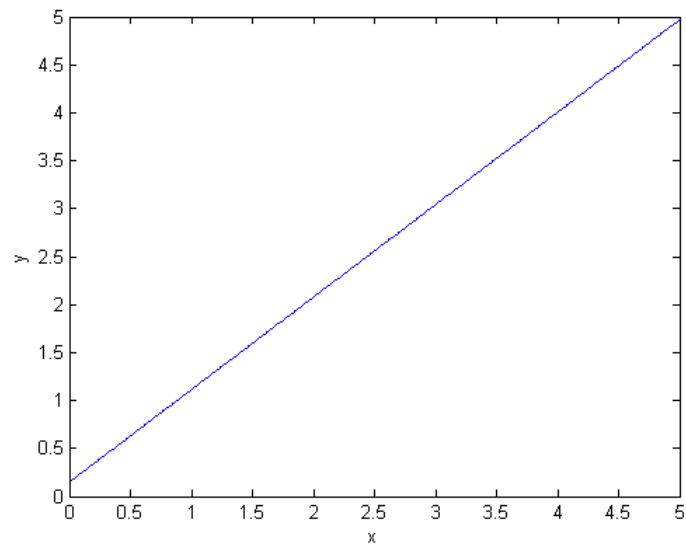
---



Σχήμα 7.2: Συμπεριφορά της λύσης κοντά στο 0



Σχήμα 7.3: Γράφημα  $\log \log$  των διανυσμάτων  $c$  και  $h$

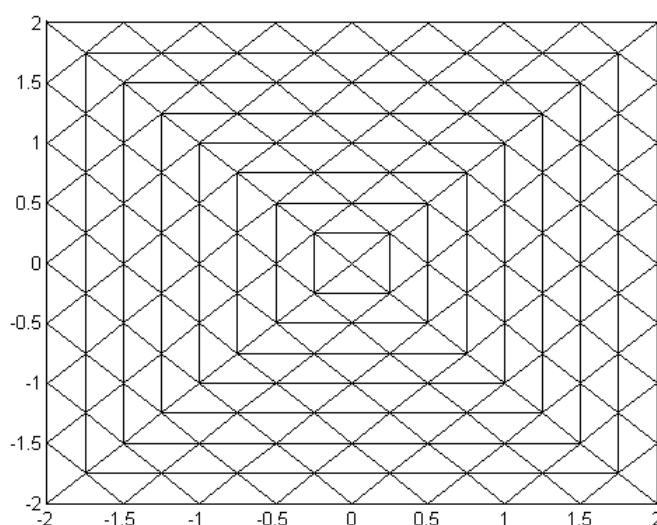


Σχήμα 7.4: Ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης των σημείων του γραφήματος

## Κεφάλαιο 8

### Η μέθοδος των νοητών χωρίων σε δύο διαστάσεις

Έστω ένα τετραγωνικό χωρίο  $\Omega$  με ένα πλέγμα 145 κόμβων και 256 στοιχείων όπως φαίνεται στο σχήμα 8.1. Στο υπάρχον αυτό πλέγμα βυθίζουμε ένα

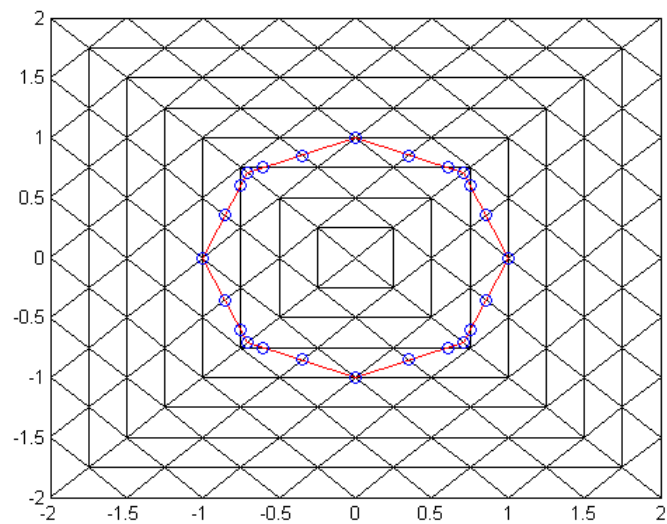


Σχήμα 8.1: Πλέγμα 145 κόμβων και 256 στοιχείων σε τετραγωνικό χωρίο

κανονικό οκτάγωνο, σαν αυτό που έχουμε χρησιμοποιήσει σαν χωρίο επίλυσης στο πρόβλημα δύο διαστάσεων με την κλασική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Στο σχήμα 8.2 φαίνονται με κύκλους οι κόμβοι που δημιουργούνται στο σύνορο, σαν σημεία τομής του προϋπάρχοντος πλέγματος με το οκτάγωνο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ο αλγόριθμος που υπολογίζει και αποθηκεύει τους κόμβους αυτούς σαρώνει ουσιαστικά το πλέγμα και βρίσκει τις συντεταγμένες των κόμβων λύνοντας συστήματα ευθειών. Η αρίθμηση των κόμβων αυτών ξεκινάει από το σημείο με συντεταγμένες  $(-1, 0)$  και συνεχίζεται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Έτσι δημιουργείται ένας πίνακας  $EF$  ο οποίος παρατίθεται για το συγκεκριμένο πλέγμα παρακάτω, ο οποίος στην πρώτη στήλη περιέχει το όνομα του κόμβου, στην δεύτερη και στην τρίτη στήλη περιέχει τις συντεταγμένες του και στην τέταρτη στήλη τον αριθμό του στοιχείου στο οποίο ανήκει ο τεχνητά δημιουργηθείς κόμβος.



Σχήμα 8.2: Το χωρίο  $\omega$  μέσα στο πλέγμα του σχήματος

|     |    |          |         |     |
|-----|----|----------|---------|-----|
| EF= | 1  | -1       | 0       | 214 |
|     | 2  | -0.85355 | 0.35355 | 216 |
|     | 3  | -0.75    | 0.60355 | 215 |
|     | 4  | -0.70711 | 0.70711 | 138 |
|     | 5  | -0.60355 | 0.75    | 140 |
|     | 6  | -0.35355 | 0.85355 | 139 |
|     | 7  | 0        | 1       | 134 |
|     | 8  | 0.35355  | 0.85355 | 136 |
|     | 9  | 0.60355  | 0.75    | 135 |
|     | 10 | 0.70711  | 0.70711 | 106 |
|     | 11 | 0.75     | 0.60355 | 108 |



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

---

|    |          |          |     |
|----|----------|----------|-----|
| 12 | 0.85355  | 0.35355  | 107 |
| 13 | 1        | 0        | 102 |
| 14 | 0.85355  | -0.35355 | 104 |
| 15 | 0.75     | -0.60355 | 103 |
| 16 | 0.70711  | -0.70711 | 42  |
| 17 | 0.60355  | -0.75    | 44  |
| 18 | 0.35355  | -0.85355 | 43  |
| 19 | 0        | -1       | 38  |
| 20 | -0.35355 | -0.85355 | 40  |
| 21 | -0.60355 | -0.75    | 39  |
| 22 | -0.70711 | -0.70711 | 218 |
| 23 | -0.75    | -0.60355 | 220 |
| 24 | -0.85355 | -0.35355 | 219 |

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει πρέπει να δημιουργήσουμε και να λύσουμε το εξής πρόβλημα:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

Ο αλγόριθμος που δημιουργεί τον πίνακα  $A$  έχει αναλυθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Υπενθυμίζουμε ότι ο  $A$  είναι ο mass matrix που είναι ο πίνακας του συστήματος για την κλασική μέθοδο Galerkin χωρίς όμως να έχουν εφαρμοστεί σε αυτόν οι συνοριακές συνθήκες. Η θέση των  $B$  και  $B^T$  εξαρτάται από τον ορισμό τους ώστε να συμφωνούν οι διαστάσεις και να έχει νόημα το σύστημα πινάκων που λύνουμε. Στη συνέχεια περιγράφουμε τον αλγόριθμο που δημιουργεί τον πίνακα  $B$ .

### Περιγραφή αλγορίθμου για την δημιουργία του πίνακα $B$ .

Έχουμε στη διάθεσή μας εκτός του πίνακα  $EF$  που έχει περιγραφεί, τους πίνακες  $N$  και  $E$  οι οποίοι περιέχουν τις πληροφορίες για τους κόμβους και για τα στοιχεία αντίστοιχα και είναι της μορφής:

*ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ*

---

$N = \left[ \text{όνομα κόμβου} , x \text{ συντεταγμένη} , y \text{ συντεταγμένη} , \text{δείκτης που δείχνει αν ο κόμβος είναι στο σύνορο} \right]$

και

$E = \left[ \text{όνομα στοιχείου} , 1\text{ος κόμβος} , 2\text{ος κόμβος} , 3\text{ος κόμβος} \right]$

Επίσης έχουμε στη διάθεσή μας τις συναρτήσεις βάσης που ορίζονται σε κάθε στοιχείο:

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{2E} \left( x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \right)$$

$$\Phi_2(x, y) = \frac{1}{2E} \left( x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y \right)$$

$$\Phi_3(x, y) = \frac{1}{2E} \left( x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y \right)$$

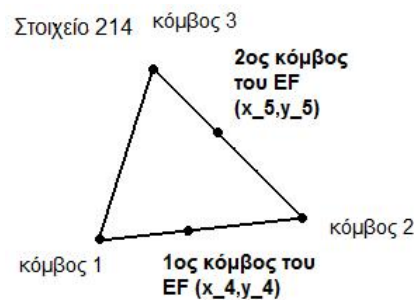
με

$(x_1, y_1)$  τις συντεταγμένες του 1ου κόμβου ,

$(x_2, y_2)$  τις συντεταγμένες του 2ου κόμβου ,

$(x_3, y_3)$  τις συντεταγμένες του 3ου κόμβου .

Ο πρώτος και ο δεύτερος κόμβος του  $EF$  ανήκουν στο στοιχείο 214.



Ο αλγόριθμος διαβάζει το τέταρτο στοιχείο κάθε γραμμής του  $EF$  το οποίο είναι όνομα στοιχείου. Ανατρέχει στην αντίστοιχη γραμμή του πίνακα  $E$  (στο παράδειγμά μας θα ανατρέξει στην γραμμή 214) και βλέπει ποιοί κόμβοι αποτελούν το στοιχείο αυτό. Έστω ότι η 214 γραμμή του  $E$  είναι:

214   39   117   119

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

---

Τώρα για κάθε έναν από τους παραπάνω κόμβους ο αλγόριθμος ανατρέχει στον πίνακα  $N$ . Στην 39 γραμμή του  $N$  είναι τα

$$(x_{39}, y_{39}) \longrightarrow (x_1, y_1)$$

στην 117 γραμμή του  $N$  είναι τα

$$(x_{117}, y_{117}) \longrightarrow (x_2, y_2)$$

και στην 119 γραμμή του  $N$  είναι τα

$$(x_{119}, y_{119}) \longrightarrow (x_3, y_3) .$$

Η αντιστοίχιση αυτή γίνεται για να χρησιμοποιηθούν οι  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  και  $\Phi_3$ . Η αντιστοίχιση με τα  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  γίνεται για κάθε τρίγωνο που συναντά στην θέση  $EF(i, 4)$  για  $1 \leq i \leq \text{length}(EF)$ . Ορίζουμε τώρα τα εξής:

$$\beta = \Phi_1(x_4, y_4)$$

όπου  $(x_4, y_4) = (EF(1, 2), EF(1, 3))$ , (γενικά θα είναι  $(EF(i, 2), EF(i, 3))$ ), και

$$B = \Phi_1(x_5, y_5)$$

όπου  $(x_5, y_5) = (EF(2, 2), EF(2, 3))$ , (γενικά θα είναι  $(EF(i+1, 2), EF(i+1, 3))$ ) και αν  $A = (x_4, y_4)$  και  $B = (x_5, y_5)$  υπολογίζει την απόσταση των  $A, B$ :  $v = d(A, B)$ . Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των  $\Phi$  πάνω στα τμήματα  $AB$  χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία είναι  $\int_{AB} \Phi_1$  (δηλαδή  $\int_{AB} \Phi_{39}$ ):

$$\int_{AB} \Phi_1 = \int_{AB} \Phi_{39} = \frac{(B + \beta)v}{2}$$

και η ποσότητα αυτή αποθηκεύεται στη θέση  $(1, 39)$  του  $B$  του οποίου οι διαστάσεις είναι  $(n, N)$ , με  $n$  τη διάσταση του  $EF$  και  $N$  το πλήθος των κόμβων του  $\Omega$ . Ομοίως θα έχουμε:

$$\beta = \Phi_2(x_4, y_4) = \Phi_{117}(x_4, y_4)$$

$$B = \Phi_2(x_5, y_5) = \Phi_{117}(x_5, y_5)$$

και με αντίστοιχο τρόπο

$$\int_{AB} \Phi_2 = \int_{AB} \Phi_{117} = \frac{(B + \beta)v}{2}$$

και η ποσότητα αυτή αποθηκεύεται στη θέση  $(1, 117)$  του  $B$ . Με τη ίδια ακριβώς λογική για τον κόμβο 119 θα έχουμε:

$$\beta = \Phi_3(x_4, y_4) = \Phi_{119}(x_4, y_4)$$

$$B = \Phi_3(x_5, y_5) = \Phi_{119}(x_5, y_5)$$

και στη θέση (1, 119) αποθηκεύεται η ποσότητα

$$\int_{AB} \Phi_3 = \int_{AB} \Phi_{119} = \frac{(B + \beta)v}{2}.$$

Αφού ολοκληρώθηκε η πρώτη γραμμή του  $EF$  ο αλγόριθμος προχωράει στην δεύτερη όπου στο παράδειγμά μας βρίσκει το στοιχείο 216 και κάνει ακριβώς τα ίδια αποθηκεύοντας στις αντίστοιχες θέσεις της δεύτερης γραμμής του  $B$  κ.ο.κ. Έχουμε δημιουργήσει έτσι τον αραιό πίνακα  $B$ . Στην συνέχεια αρκεί να ορίσουμε το δεξί μέλος της εξίσωσής μας και να προχωρήσουμε στην λύση του προβλήματος. Το δεξί μέλος είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα  $f$  το οποίο έχει μήκος όση και η διάσταση του πίνακα  $A$  δίνεται από την εξής σχέση:

$$f = M * \text{ones}(\text{length}(M), 1)$$

Πιο συγκεκριμένα πολλαπλασιάζουμε τον mass matrix  $M$  από δεξιά με ένα διάνυσμα του οποίου όλες οι συντεταγμένες ισούνται με τη μονάδα.

Το διάνυσμα  $g$  που αφορά τις συνοριακές συνθήκες θεωρούμε ότι έχει όλες τις συντεταγμένες του ίσες με μηδέν. Στην περίπτωση που  $g = 0$  ο πίνακας  $B$  είναι διαφορετικός από τον πίνακα που προκύπτει από την παραπάνω αλγοριθμική διαδικασία. Για να γίνει ξεκάθαρο αυτό κοιτάζουμε τον όρο  $Bu = 0$  του παρακάτω συστήματος πινάκων. Εδώ, ο συγκεκριμένος πολλαπλασιασμός θα μας δώσει ένα διάνυσμα  $n \times 1$ , που θα ισούται με το μηδενικό διάνυσμα. Το τυχαίο στοιχείο στη θέση  $i$  θα είναι:

$$(B_i + \beta_i)\frac{v}{2} + (B_j + \beta_j)\frac{v}{2} + (B_k + \beta_k)\frac{v}{2} = 0,$$

όπου τα  $\frac{v}{2}$  διαγράφονται.

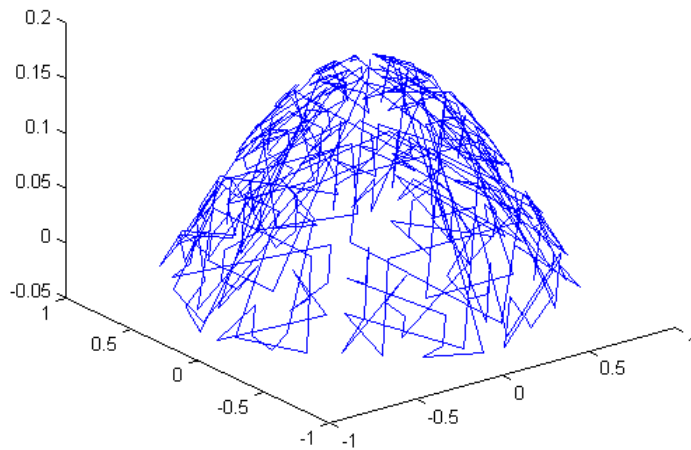
Λύνουμε στο matlab το σύστημα

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

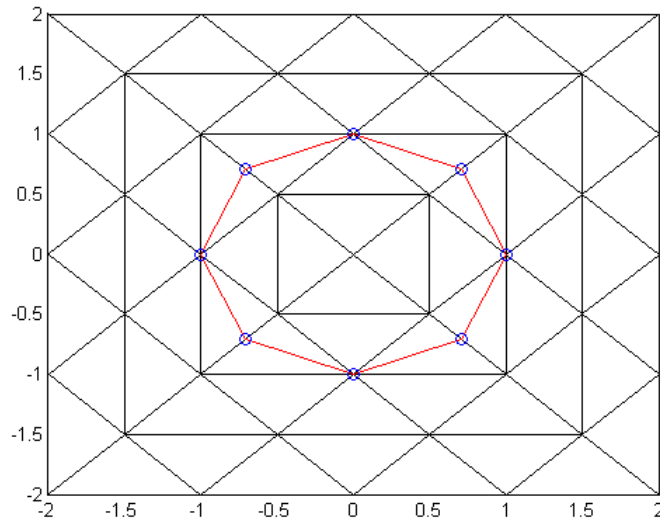
---

και έχουμε έτσι την λύση  $u$  η οποία έχει διάσταση ίση με το πλήθος των κόμβων του  $\Omega$ . Από το σύνολο αυτών των λύσεων με έναν αλγόριθμο κρατάμε τις λύσεις που αντιστοιχούν στους εσωτερικούς κόμβους του  $\omega$  και έχουμε έτσι τη λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης  $-\Delta u = 1$  με  $u|_{\partial\omega} = 0$ . Στο σχήμα 8.3 φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης στο  $\omega$ . Η λύση αναφέρεται σε 365 εσωτερικούς κόμβους από τους 2233 συνολικούς κόμβους του  $\Omega$ . Ουσιαστικά στο σχήμα 8.3 φαίνεται η επιφάνεια της λύσης, που αν είχαμε πυκνότερο πλέγμα στο  $\omega$  θα έμοιαζε περισσότερο με το σχήμα 4.5. Η προσέγγιση των συνοριακών συνθηκών  $u|_{\partial\omega} = 0$  δεν είναι ικανοποιητική μιας και  $\min(u) = -0.030858$ , σε πυκνότερα πλέγματα όμως η προσέγγιση βελτιώνεται. Για την μερική διαφορική εξίσωση που λύνουμε με  $u|_{\partial\omega} = 0$  αποδεικνύεται [21] ότι  $\|u_h - u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ , καθώς  $h \rightarrow 0$ , δηλαδή για πλέγματα στα οποία η διάμετρος τείνει στο μηδέν. Στην συνέχεια εξετάζουμε τη σύγκλιση της μεθόδου.



Σχήμα 8.3: Γραφική παράσταση της λύσης της εξίσωσης  $-\Delta u = 1$  με  $u|_{\partial\omega} = 0$  σε αραιό πλέγμα

Αρχικά λύνουμε σε ένα αραιό πλέγμα όπως αυτό του σχήματος 8.4 με τη μέθοδο νοητών χωρίων σε όλο το  $\Omega$ : Στη συνέχεια περιοριζόμαστε στο κανονικό οκτάγωνο που οριοθετεί το χωρίο  $\omega$  και πυκνώνουμε αυτό το πλέγμα. Στο πλέγμα αυτό λύνουμε πάλι (με την κλασική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων αυτή τη φορά) και την λύση αυτή την καλούμε  $u_h$ . Στη συνέχεια την λύση  $u$  (η οποία έχει προκύψει με τη μέθοδο των νοητών χωρίων) αφού την έχουμε



Σχήμα 8.4: Αραιό πλέγμα όπου φαίνονται τα  $\Omega$  και  $\omega$

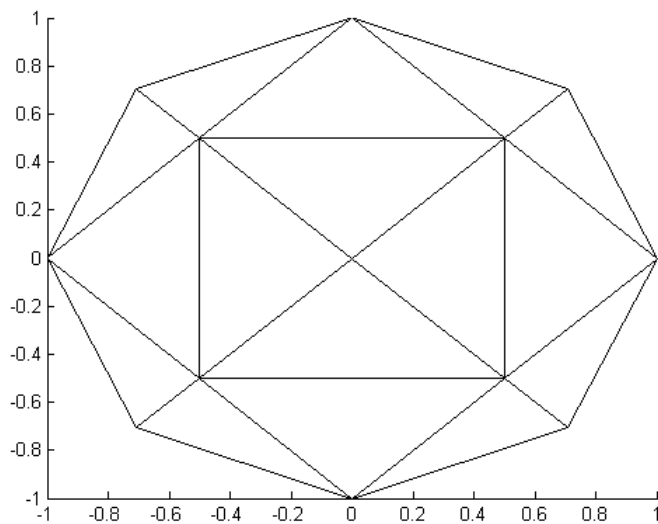
περιορίσει στο χωρίο  $\omega$ , την προβάλλουμε στο τελικό πλέγμα που έχουμε την λύση  $u_h$ . Έχουμε έτσι λύσεις ίσων διαστάσεων και μπορούμε να υπολογίσουμε την  $H^1$  νόρμα. Το χωρίο  $\omega$  για το παραπάνω πλέγμα φαίνεται στα γραφήματα 8.5 και 8.6. Στο πρώτο γράφημα φαίνεται μόνο το χωρίο  $\omega$  ενώ στο δεύτερο φαίνεται το  $\omega$  μετά από δύο πυκνώσεις.

Στο αραιό αυτό πλέγμα παρατηρούμε ότι κοντά στο  $\partial\omega$  οι περιοχές που δημιουργούνται είναι όλες τριγωνικές. Αυτό δεν ισχύει στη γενική περίπτωση. Για την ακρίβεια, στο συγκεκριμένο πρόβλημα το παραπάνω πλέγμα είναι το μόνο στο οποίο έχουμε μόνο τριγωνικές περιοχές. Παρακάτω παρουσιάζονται πυκνότερα πλέγματα στα οποία δημιουργούνται τετράπλευρα σε κάποιες περιοχές κοντά στο  $\partial\omega$ . Στις περιπτώσεις αυτές τριγωνοποιούμε τις περιοχές αυτές έχοντας δημιουργήσει τους απαραίτητους αλγόριθμους, κάνοντας τις απαραίτητες αλλαγές στους πίνακες  $E$  και  $N$  δηλαδή, και τότε είμαστε σε θέση να πυκνώσουμε τα πλέγματα και να λύσουμε με πεπερασμένα στοιχεία, ή επίσης να προβάλλουμε λύσεις σε πυκνότερα πλέγματα.

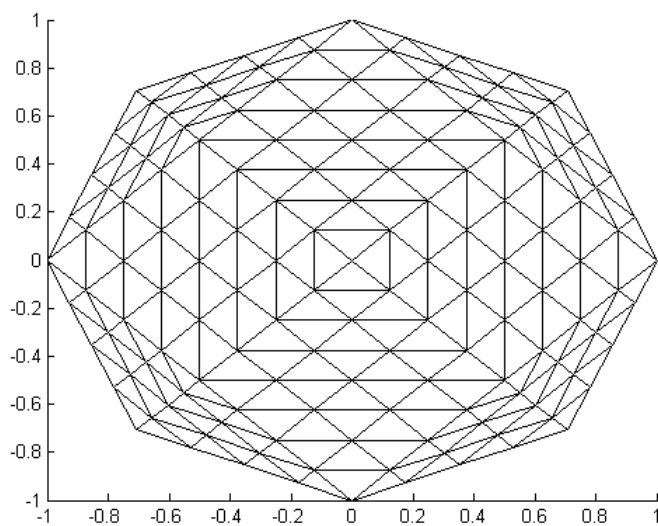
Στην συνέχεια λύνουμε στο αμέσως πυκνότερο πλέγμα με τη μέθοδο των νοητών χωρίων. Το επόμενο πλέγμα φαίνεται στο σχήμα 8.7: Απομονώνουμε πάλι το χωρίο  $\omega$ . Εδώ παρατηρούμε περιοχές που δημιουργούνται τετράπλευρα. Στο γράφημα 8.8 παρουσιάζεται μια τέτοια περιοχή σε μεγέθυνση. Τριγωνοποιούμε το  $\omega$  και το πλέγμα που προκύπτει φαίνεται στο γράφημα 8.9. Ομοίως με πριν

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

---

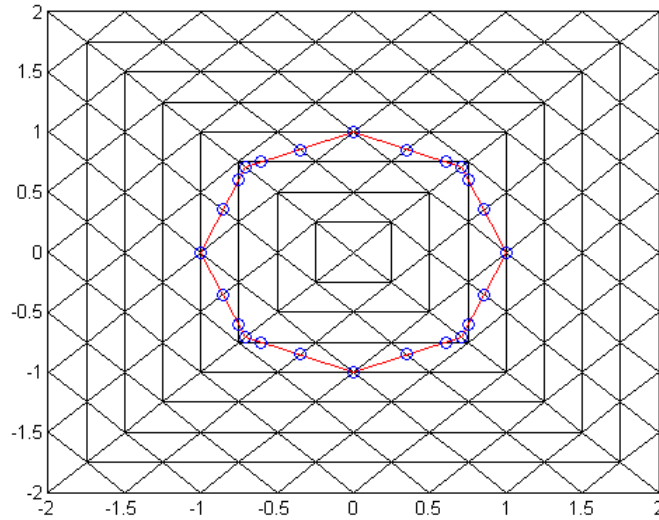


Σχήμα 8.5: Το χωρίο  $\omega$

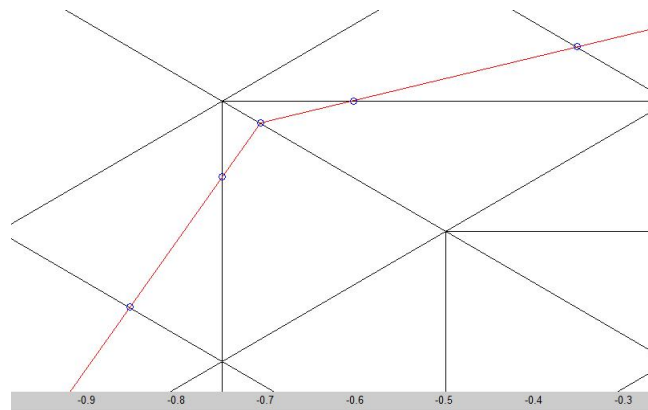


Σχήμα 8.6: Το χωρίο  $\omega$  μετά απο δύο πυκνώσεις

από την λύση που αναφέρεται στο  $\Omega$  κρατάμε την λύση περιορισμένη στο  $\omega$  και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με προηγούμενως. Πυκνώνουμε το  $\omega$ ,



Σχήμα 8.7: Το πλέγμα του σχήματος 8.4 μετά από μια πυκνώση



Σχήμα 8.8: Περιοχή στην οποία δημιουργείται τετράπλευρο

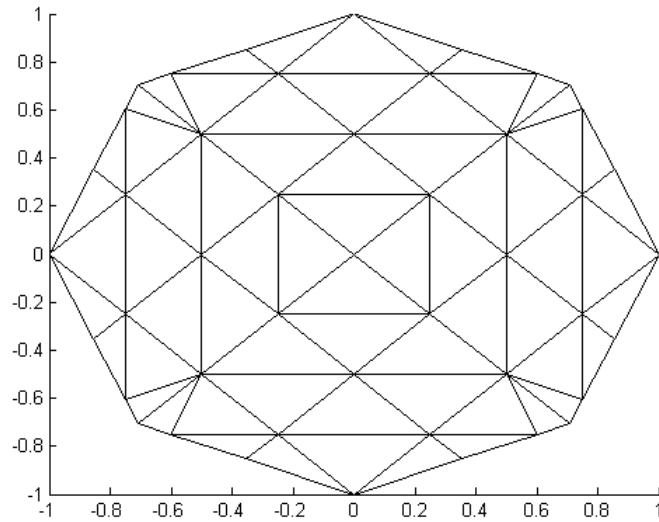
και λύνουμε με την κλασική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων οπότε παίρνουμε έτσι την λύση  $u_h$ . Στο γράφημα 8.10 φαίνεται το  $\omega$  μετά από μία πυκνώση. Πυκνώνουμε μια ακόμη φορά το πλέγμα του σχήματος 8.7 και στο σχήμα 8.12 φαίνεται το  $\omega$  μετά από την τριγωνοποίησή του.

Έχοντας λύσει με πεπερασμένα στοιχεία (προκύπτει η λύση  $u_h$ ), προβάλλουμε την λύση  $u$  (η οποία έχει προκύψει με τη μέθοδο των νοητών χωρίων) στο πλέγμα που πήραμε την λύση  $u_h$  και υπολογίζουμε ξανά την  $H^1$  νόρμα.

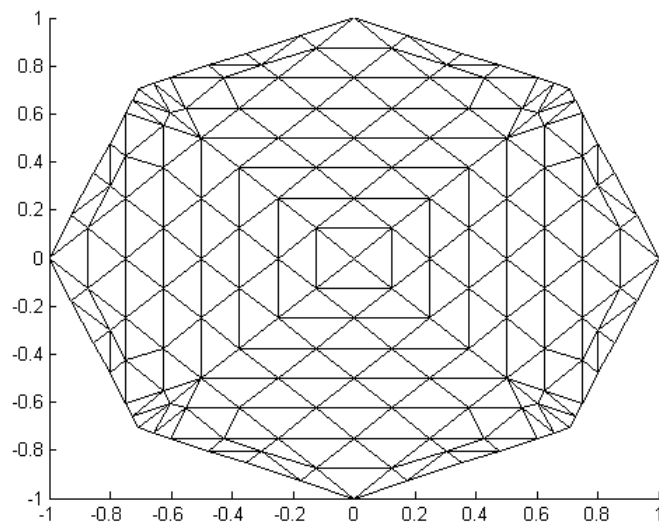


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

---

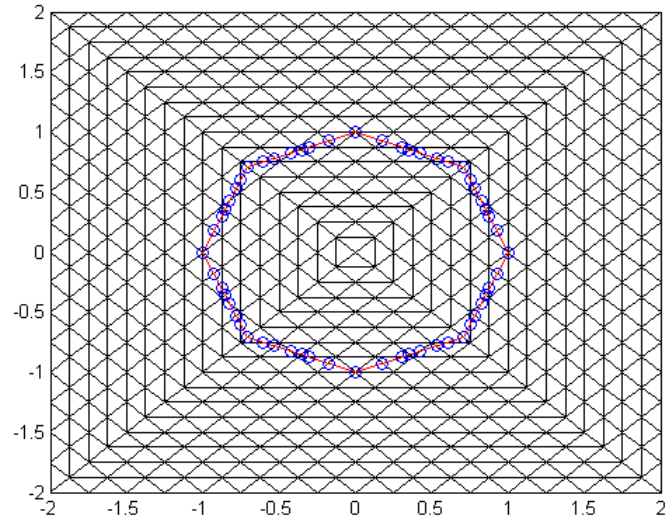


Σχήμα 8.9: Το πλέγμα του σχήματος 8.7 μετά από τριγωνοποίηση

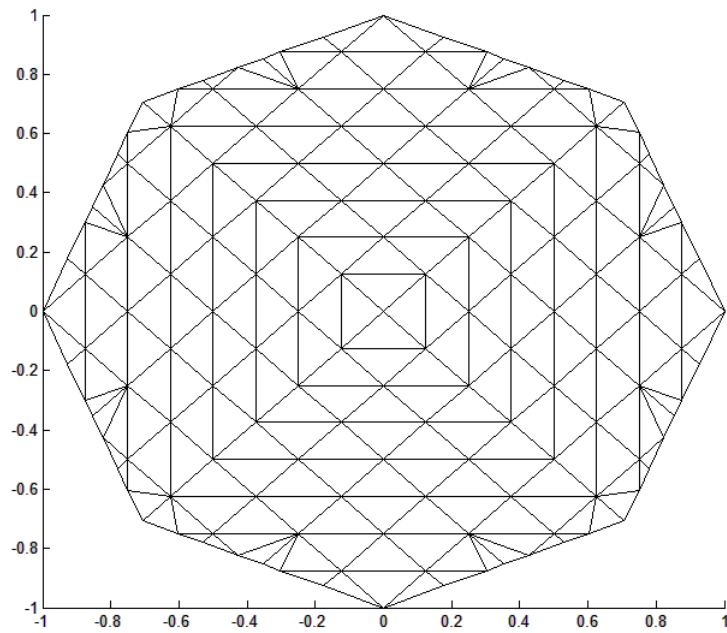


Σχήμα 8.10: Το πλέγμα του σχήματος 8.9 μετά από μια πύκνωση

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και αποθηκεύουμε κάθε φορά το αποτέλεσμα σε ένα διάνυσμα  $c$ . Επίσης δημιουργούμε το διάνυσμα  $h$ , το οποίο περιέχει



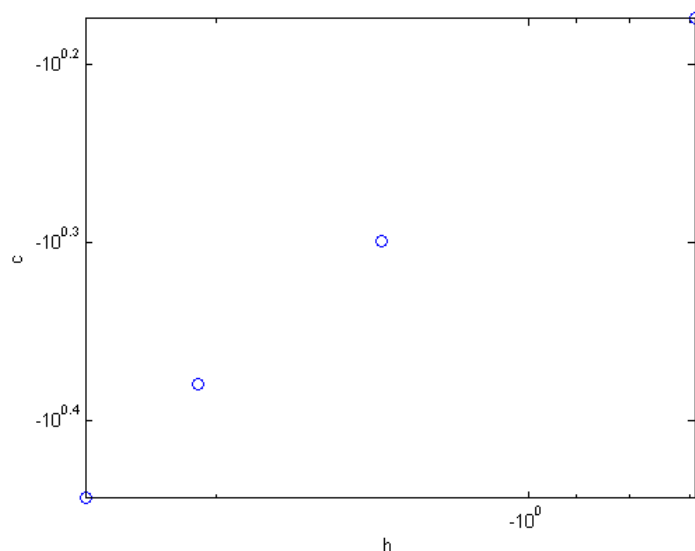
Σχήμα 8.11: Το πλέγμα του σχήματος 8.7 μετά από μια ακόμη πύκνωση



Σχήμα 8.12: Το  $\omega$  όπως προκύπτει από τη πλέγμα του σχήματος 8.11 μετά από την τριγωνοποίησή του

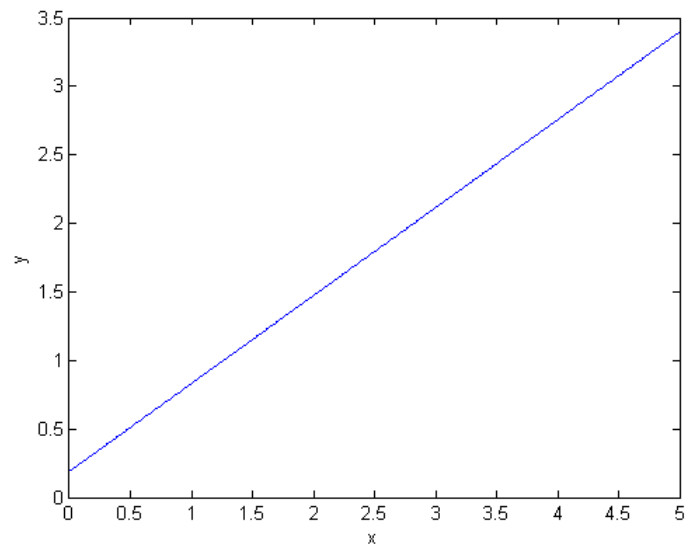
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΝΟΗΤΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

τη διάμετρο του πλέγματος στο  $\omega$  για κάθε λύση που προκύπτει με τη μέθοδο των νοητών χωρίων. Το  $h$  προκύπτει πολύ εύκολα αφού σε κάθε πύκνωση η διάμετρος του καινούριου πλέγματος ισούται με το μισό της διαμέτρου του προηγούμενου πλέγματος. Ο ρυθμός σύγκλισης στην λύση που έχουμε θεωρήσει ακριβή λύση του προβλήματος προκύπτει όπως και σε όλα τα προβλήματα που έχουν αναλυθεί σε προηγούμενα κεφάλαια ως εξής: Δημιουργούμε τα σημεία  $(\log h_i, \log c_i)$  και στη συνέχεια κάνουμε γραμμική παλινδρόμηση στα σημεία αυτά. Η κλίση αυτής της ευθείας είναι ο ρυθμός σύγκλισης. Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο γραφήματα που αφορούν την σύγκλιση των αλγορίθμων που αναπτύχθηκαν όπως περιγράφηκαν παραπάνω. Γράφημα  $\log \log$  των σημείων  $(c(i), (h(i)))$ :



Σχήμα 8.13: Γράφημα  $\log \log$  των σημείων  $(c(i), (h(i)))$

*Παρατήρηση:* Αν τα σημεία τομής του  $\partial\omega$  με το πλέγμα του  $\Omega$  είναι κόμβοι του  $\Omega$ , τότε με έναν έλεγχο θέτουμε σε αυτά απευθείας  $u = g$ , όπου  $g$  η τιμή που θέλουμε να έχει η συνάρτηση  $u$  στο σύνορο.



Σχήμα 8.14: Γραφική παράσταση της ευθείας παλινδρόμησης των σημείων  $(\log(c(i)), \log(h(i)))$  της οποίας η κλίση είναι 0.68161

## Κεφάλαιο 9

### Συμπεράσματα

Στην μεταπτυχιακή αυτή εργασία μελετήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και η μέθοδος νοητών χωρίων. Διατυπώθηκαν και λύθηκαν οι συνήθειες και μερικές διαφορικές εξισώσεις Poisson με τις προαναφερθείσες μεθόδους και με προγραμματισμό σε matlab . Στα κεφάλαια 2 και 6 λύθηκαν τα προβλήματα μιας διάστασης, ενώ στα κεφάλαια 3 και 7 τα προβλήματα δύο διαστάσεων. Όσον αφορά τα προβλήματα μιας διάστασης, οι διαφορές των δύο μεθόδων σε ταχύτητα και προσέγγιση της λύσης είναι ελάχιστες. Η μέθοδος των νοητών χωρίων, αν και με τελείως διαφορετική φιλοσοφία από την κλασική μέθοδο, προσεγγίζει τη λύση και τις συνοριακές συνθήκες με μεγάλη ακρίβεια. Στις δύο διαστάσεις, οι δύο μέθοδοι παρουσιάζουν αρκετές διαφορές στην σύγκλιση. Η μέθοδος των νοητών χωρίων ενδείκνυται για περιπτώσεις που θέλουμε να αποφύγουμε την επαναλαμβανόμενη γέννηση και πύκνωση πλεγμάτων. Η σύγκλιση της μεθόδου στην πραγματική λύση είναι αποδεδειγμένη, τα πλέγματα όμως από τα οποία προκύπτει αυτή η λύση πρέπει να είναι αρκετά πυκνότερα από τα αντίστοιχα στην κλασική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης, σε προγραμματιστικό επίπεδο, η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στη μέθοδο νοητών χωρίων είναι δυσκολότερη από την κλασική μέθοδο. Η δυσκολία έγκειται στο ότι σε αρκετές περιπτώσεις είναι αρκετά δύσκολος ο εντοπισμός των σημείων τομής του χωρίου  $\omega$  στο οποίο μας ενδιαφέρει η λύση, με το πλέγμα του χωρίου  $\Omega$  στο οποίο λύνουμε. Οι αλγόριθμοι που δημιουργήθηκαν για τους σκοπούς αυτής της εργασίας εξαρτώνται σε κάποιο βαθμό από τη δομή του πλέγματος και την γεωμετρία του  $\partial\omega$ , το οποίο στα προβλήματα που λύθηκαν ήταν ένα κανονικό οκτάγωνο. Για την περαιτέρω αυτοματοποίηση της μεθόδου ώστε αυτή να χειρίζεται πιο περίπλοκες γεωμετρίες, χρειάζεται να αναπτυχθούν γενικότεροι κώδικες. Η ανάπτυξη τέτοιων γενικών προγραμμάτων ξεπερνά τους σκοπούς αυτής της εργασίας αλλά αποτελεί ένα ελκυστικό πεδίο μελλοντικής έρευνας. Επίσης, σε προγραμματιστικό επίπεδο πάλι, η μορφή του  $\partial\omega$  καθορίζει και το πόσο εύκολα ή δύσκολα μπορούμε να υπολογίσουμε

τα επικαμπύλια ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην θεμελίωση και εφαρμογή της μεθόδου. Συχνά χρειάζεται αριθμητική ολοκλήρωση και εκεί ανακύπτουν ζητήματα προσέγγισης και πολυπλοκότητας. Τέλος, ένα σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου, όπως τουλάχιστον εξετάστηκε και υλοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, είναι η ευστάθεια του συστήματος

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

το οποίο λύνουμε. Ο πίνακας

$$K = \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

σε αρκετές περιπτώσεις τείνει να είναι σχεδόν μη αντιστρέψιμος. Αυτό ωφείλεται στο ότι κάποιοι κόμβοι του  $\partial\omega$  είναι κόμβοι του προϋπάρχοντος πλέγματος ή αν δεν ισχύει κάτι τέτοιο, είναι πολύ κοντά σε προϋπάρχοντες κόμβους. Χαλάει έτσι η γραμμική ανεξαρτησία των γραμμών του πίνακα  $K$  και συνεπώς επηρεάζεται η αντιστρεψιμότητά του. Τέτοια προβλήματα αποτελούν επίσης ελκυστικό πεδίο περαιτέρω έρευνας, σε θεωρητικό επίπεδο αυτή τη φορά. Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος νοητών χωρίων αποτελεί μια εναλλακτική μέθοδο όπου οι συνοριακές συνθήκες εφαρμόζονται με έναν πραγματικά καινοτόμο τρόπο. Με την μέθοδο αυτή αποφεύγουμε την πύκνωση των πλεγμάτων κάθε φορά που λύνουμε σε λίγο διαφοροποιημένο  $\partial\omega$ , κάτι που αυτόματα την καθιστά πιο γενική και σε τέτοιες περιπτώσεις πιο γρήγορη. Συναντάμε όμως περισσότερες δυσκολίες στην υλοποίηση και τον προγραμματισμό της από ότι στη κλασική μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Τελικά, ο χρόνος που χρειάστηκε για να υλοποιηθεί και να προγραμματιστεί η μέθοδος νοητών χωρίων σε δύο διαστάσεις στην εργασία αυτή, ήταν πολύ περισσότερος από τον χρόνο που χρειάστηκε για να αναπτυχθούν αλγόριθμοι που πυκνώνουν τα πλέγματα. Σε συνθήκες επαναλαμβανόμενης επίλυσης προφανώς η μέθοδος είναι ασύγκριτα πιο γρήγορη από την κλασική μέθοδο, ο χρόνος όμως που θα χρειαστεί για να λειτουργήσει η μέθοδος προγραμματιστικά σε τέτοια περίπτωση, θα είναι σημαντικός.

# Κεφάλαιο 10

## Παράρτημα

Εδώ παρατίθενται κάποιοι ορισμοί καθώς και θεωρήματα που αφορούν τη δομή των χώρων στους οποίους δουλεύουμε.

**Ορισμός 1:** Ένας χώρος Hilbert (συμβ.  $H$ ) είναι ένας πραγματικός (ή μιγαδικός) χώρος εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο, ο οποίος είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος με μετρική την επαγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο. Πλήρης μετρικός χώρος ονομάζεται κάθε μετρικός χώρος που έχει την ιδιότητα κάθε βασική ακολουθία του χώρου να συγκλίνει σε σημείο του χώρου.

### Παραδείγματα χώρων Hilbert :

1. Προφανώς ο ίδιος ο  $H$  και ο  $\{0\}$ .
2. Έστω  $T : H \longrightarrow K$  μια συνεχής γραμμική απεικόνιση από τον  $H$  σε κάποιον άλλο γραμμικό χώρο  $K$ . Τότε το σύνολο  $\ker T$  είναι χώρος Hilbert. Σημειώνεται εδώ ότι ο πυρήνας της απεικόνισης  $T$  (συμβ.  $\ker T$ ) είναι το σύνολο που περιέχει τα διανύσματα  $u$  του  $H$  για τα οποία ισχύει  $Tu = 0$ .
3. Έστω  $x \in H$ . Ορίζουμε  $x^\perp := \{v \in H : (v, x) = 0\}$ . Τότε ο  $x^\perp$  είναι υπόχωρος του  $H$  και συνεπώς χώρος Hilbert. Αυτό γίνεται ξεκάθαρο αν παρατηρήσουμε ότι  $x^\perp = \ker L_x$ , όπου  $L_x$  είναι το γραμμικό συναρτησιακό

$$L_x : v \longrightarrow (v, x) .$$

**Πυθαγόρεια μονάδα:** Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των χώρων Hilbert είναι η εξής: Έστω δύο διανύσματα  $u, v \in H$ . Λέμε ότι τα  $u, v$  είναι ορθογώνια

αν  $(u, v) = 0$ . Για δύο οποιαδήποτε ορθογώνια διανύσματα ενός χώρου Hilbert ισχύει ότι

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι αυτό ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος ορθογώνιων ανα δύο διανυσμάτων.

**Δύικότητα:** Έστω ένας χώρος Hilbert  $H$ . Ο δύικός του χώρος  $H'$  είναι ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών συναρτήσεων που ορίζονται στον  $H$  και παίρνουν τιμές στο  $\mathbb{R}$  ή στο  $\mathbb{C}$ , ανάλογα με το ποιο είναι το σώμα πάνω στο οποίο έχουμε ορίσει το εσωτερικό γινόμενο. Στον  $H'$  ορίζουμε τη νόρμα

$$\|f\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |f(x)| .$$

Η νόρμα αυτή ικανοποιεί το νόμο του παραλληλογράμμου οπότε ο  $H'$  είναι και αυτός χώρος εσωτερικού γινομένου. Είναι επίσης πλήρης οπότε είναι χώρος Hilbert . Μια καλύτερη περιγραφή του  $H'$  καθώς και σύνδεσή του με τον  $H$ , γίνεται μέσω του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz . Σύμφωνα με αυτό, για κάθε  $u \in H$  υπάρχει μοναδικό  $f_u \in H'$  το οποίο ορίζεται μέσω του εσωτερικού γινομένου ως εξής:

$$f_u(x) = (x, u) , x \in H .$$

**Χώροι Lebesgue :** Οι χώροι Lebesgue είναι χώροι συναρτήσεων που σχετίζονται με χώρους μέτρου  $(X, M, \mu)$ , όπου  $X$  ένα οποιοδήποτε σύνολο,  $M$  μια  $\sigma$  άλγεβρα και  $\mu$  ένα αριθμήσιμο προσθετικό μέτρο στο  $X$ . Έστω  $L^2(X, \mu)$  ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων στο  $X$ , για τις οποίες το ολοκλήρωμα Lebesgue του τετραγώνου της απόλυτης τιμής της συνάρτησης είναι πεπερασμένο. Πιο συγκεκριμένα να ισχύει

$$\int_X |f|^2 d\mu < \infty .$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στον χώρο  $L^2(X, \mu)$  ορίζεται ως εξής:

$$(f, g) = \int_X f(t)g(t)d\mu(t) .$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwarz και ο χώρος εφοδιασμένος με αυτό το εσωτερικό γινόμενο είναι πλήρης.



**Χώροι Sobolev :** Οι χώροι Sobolev της μορφής  $W^{s,2}$  είναι χώροι Hilbert. Οι χώροι αυτοί είναι χώροι συναρτήσεων με εσωτερικό γινόμενο στους οποίους όμως ορίζεται διαφορισμότητα. Για τον λόγο αυτό οι χώροι αυτοί είναι χρήσιμοι στην θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Για  $s \geq 1$  και  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , ο χώρος  $H^s(\Omega)$  περιέχει τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ( $L^2$ ), των οποίων οι ασθενείς παράγωγοι (weak derivatives) τάξης μέχρι και  $s$  είναι επίσης  $L^2$  συναρτήσεις. Το εσωτερικό γινόμενο στον  $H^s(\Omega)$  είναι:

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)\bar{g}(x)dx + \int_{\Omega} Df(x) \cdot D\bar{g}(x)dx + \dots + \int_{\Omega} D^s f(x) \cdot D^s \bar{g}(x)dx .$$

Οι χώροι Sobolev ορίζονται και όταν ο  $s$  δεν είναι ακέραιος. Τέτοιοι χώροι ορίζονται παρακάτω. Στο σημείο αυτό δίνουμε τον ορισμό της ασθενούς παραγώγου.

**Ορισμός 2:** Δοσμένης περιοχής  $\Omega$ , ορίζουμε σαν σύνολο των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων το

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f : f \in L^1(K) ,$$

για κάθε  $K$  συμπαγές υποσύνολο του  $\Omega$ .

**Ορισμός 3:** Μια δοσμένη συνάρτηση  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  έχει ασθενή παράγωγο  $D^a f$  αν υπάρχει συνάρτηση  $g \in L^1_{loc}(\Omega)$  τέτοια ώστε

$$\int_{\Omega} g(x)f(x)dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} f(x)\phi^a(x)dx \quad \forall \phi \in D(\Omega) .$$

Αν υπάρχει τέτοια  $g$  τότε  $g = D^a f$ .

*Παρατήρηση:* Γενικά οι χώροι Sobolev είναι χώροι Banach (δηλαδή γραμμικοί χώροι με νόρμα) αλλά όχι κατά ανάγκη χώροι Hilbert . Ένας γενικός ορισμός των χώρων αυτών θα μπορούσε να είναι ο ακόλουθος:

**Ορισμός 4:** Ένας χώρος Sobolev (συμβ.  $W_p^k(\Omega)$ ) ορίζεται ως το παρακάτω σύνολο:

$$W_p^k(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : \|f\|_{W_p^k(\Omega)} < \infty\} ,$$

όπου

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \left( \sum_{|a| \leq k} \|D_w^a f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

για την περίπτωση όπου  $1 \leq p < \infty$ , ενώ στη περίπτωση όπου  $p = \infty$  είναι

$$\|f\|_{W_{\infty}^k(\Omega)} := \max_{|a| \leq k} \|D_w^a f\|_{L^{\infty}(\Omega)} .$$

*Σημείωση:* Οι  $L^p(\Omega)$  νόρμες ορίζονται ως εξής: Για  $1 \leq p < \infty$  είναι

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

και για την περίπτωση όπου  $p = \infty$  είναι

$$\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} := \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} .$$

Ο ορισμοί των χώρων  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\omega)$  και  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$  (οι οποίοι είναι trace spaces) καθώς και οι νόρμες που μπορούν να οριστούν σε αυτούς μπορούν να βρεθούν σε διάφορα βιβλία, ενδεικτικά εδώ παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [28].

# Βιβλιογραφία

- [1] Jacob Fish and Ted Belytschko, *A First Course in Finite Elements*, Wiley, 2007.
- [2] P.I.Kattan, *Matlab guide to Finite Elements*, Springer, 2002.
- [3] Y.W.Kwon, and H.Bang, *The Finite Element Method using Matlab*, CRC Press, 1997.
- [4] S.Brener and L.R.Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 2002.
- [5] M.J.Turner, R.W.Clough, H.C.Martin and L.J.Topp, *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, J. Aeronautical Society, Vol. 23, 1956.
- [6] R.Courant, *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.49, 1943.
- [7] T.Belytschko, *Meshless Methods: An Overview and Recent Developments*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, Pages 3-47, 1996.
- [8] J.J.Monaghan, *Smoothed particle hydrodynamics*, Annual review of astronomy and astrophysics, Vol. 30, pages 543-574, 1992.
- [9] L.B.Lucy, *A numerical approach to the testing of the fission hypothesis*, Astronomical Journal, Vol. 82, 1977.
- [10] R.A.Gingold and J.J.Monaghan, *Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars*, Royal Astronomical Society, Monthly Notices, Vol. 181, pages 375-389, 1977.

- [11] B.Nayroles, G.Touzot and P.Villon, *Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements*, Computational Mechanics Vol. 10, pages 307-318, 1991.
- [12] T.Belytschko, Y.Y.Lu and L.Gu, *Element-Free Galerkin Methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.37, pages 229-256, 1994.
- [13] W.K.Liu, S.Jun and Y.F.Zhang, *Reproducing Kernel Particle Methods*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 20, pages 1081-1106, 1995.
- [14] E.Onate, S.Idelsohn, O.Zienkiewicz and R.Taylor, *A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, pages 3839-3866, 1996.
- [15] S.N.Atluri, H.T.Liu and Z.D.Han, *Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method For Elasticity Problems*, Computer Modeling in Engineering Sciences, Vol. 14, pages 141-152, 2006.
- [16] E.J.Kansa and Y.C.Hon, *Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions: Applications to elliptic partial differential equations*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 39, pages 123-137, 2000.
- [17] G.R.Liu and Y.T.Gu, *A point interpolation method for two-dimensional solids*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 50, pages 937-951, 2001.
- [18] I.S.Raju, D.R.Phillips and T.Krishnamurthy, *Meshless Local Petrov-Galerkin Euler-Bernoulli Beam Problems: A Radial Basis Function Approach*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.
- [19] J. Tinsley Oden, C. Armando Duarte, C. Arm, O. Duarte, *Solution of Singular Problems Using h-p Clouds*, In MAFELAP 96, 1996.
- [20] S.De and K.J.Bathe, *The method of finite spheres*, Computational Mechanics, Vol. 25, pages 329-345, 2000.
- [21] R.Glowinski, *A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 111, pages 283-303, 1994.

- 
- [22] R.Glowinski, *Numerical simulation of a multi-store separation phenomenon: A fictitious domain approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, pages 5566-5581, 2006.
  - [23] R.Glowinski, *A Fictitious Domain Approach to the Direct Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow past Moving Rigid Bodies: Application to Particulate Flow*, Journal of Computational Physics, Vol. 169, 2001
  - [24] T.Strouboulis, *The generalized finite element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000.
  - [25] R.Glowinsky and Yu.Kuznetsov, *Distributed Lagrange multipliers based on fictitious domain method for second order elliptic problems*, Comp. methods in applied mechanics and engineering, 2006.
  - [26] T.Strouboulis, *The design and analysis of the Generalized Finite Element Method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998.
  - [27] P.G.Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, SIAM, 2002.
  - [28] C.Grossmann, H.Roos and M.Stynes, *Numerical treatment of partial differential equations*, Springer, 2007.
  - [29] M.D. Buhmann, *Radial Basis Functions*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003.