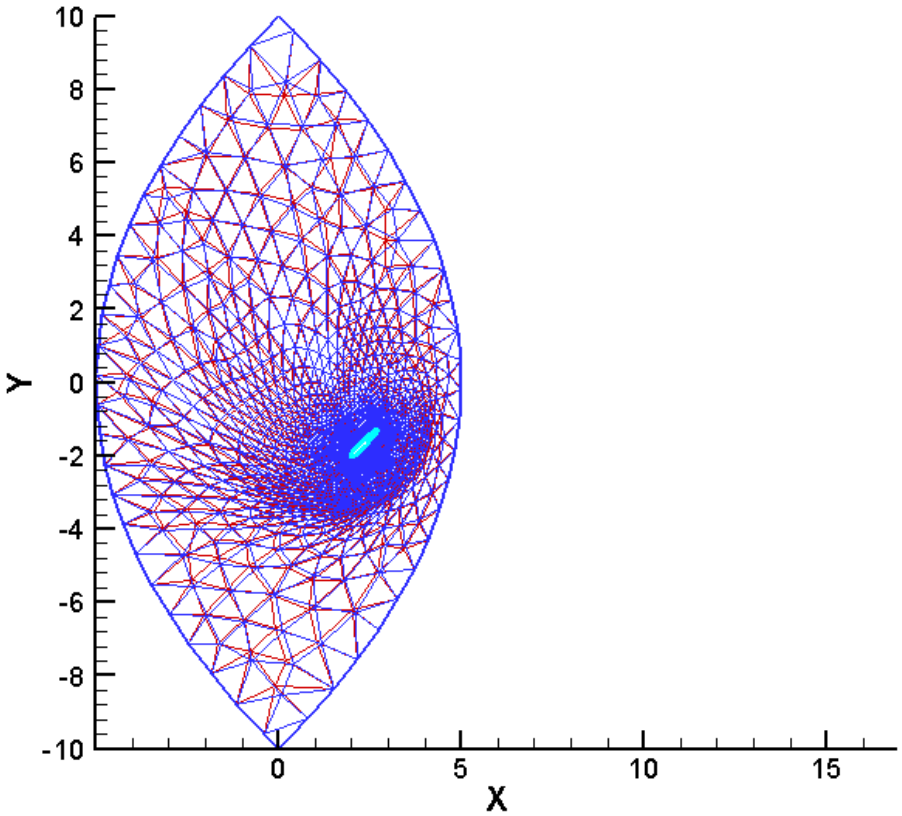
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ



Μεθοδολογίες παραμόρφωσης και τροποποίησης μη δομημένων υβριδικών υπολογιστικών πλεγμάτων

Διατριβή που υπεβλήθη για τη μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων
για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

υπό

Πολυζώη Ε. Κουσκουρή

Επιβλέπων καθηγητής: Ιωάννης Κ. Νικολός

Χανιά, Δεκέμβριος 2011

© Copyright υπό Πολυζώη Κουσκουρή, Χανιά 2011

Η διατριβή του Πολυζώη Κουσκουρή, εγκρίνεται

Ιωάννης Κ. Νικολός
Επίκουρος καθηγητής, Επιβλέπων

_____

Δημήτριος Ρόβας
Επίκουρος καθηγητής _____

Ανάργυρος Δελής
Επίκουρος καθηγητής _____

Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα

Ο Πολυζώης Κουσκουρής γεννήθηκε στην Πάτρα το 1986, όπου μεγάλωσε και ολοκλήρωσε τη βασική του εκπαίδευση στο 2^{ο} Λύκειο Πατρών. Το 2003 εισήχθη στο Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών του Πολυτεχνείου Πατρών. Το 2009 αποφοίτησε με βαθμό 7,42 και εισήχθη στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης, στον Τομέα Συστημάτων Παραγωγής. Με την εργασία αυτή ολοκληρώνει τις μεταπτυχιακές σπουδές του.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας και των μεταπτυχιακών σπουδών μου νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τον κ. Ι. Νικολό, ο οποίος ήταν ο επιβλέπων της εργασίας αυτής. Η προσφορά του στο πρόσωπό μου είναι πολύ μεγάλη και δεν περιορίζεται μόνο στην πολύ καλή συνεργασία και καθοδήγηση. Επίσης ευχαριστώ τους καθηγητές Δ. Ρόβα και Α.Δελή, για την τιμή που μου έκαναν με το να είναι μέλη της εξεταστικής επιτροπής.

Ευχαριστώ τον καθηγητή Γερμανικών κ. Κωνσταντίνο Πάνη για την πολύτιμη βοήθειά του.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένειά μου για τη στήριξή τους και το κουράγιο που εξακολουθούν να επιδεικνύουν.

«Σας εύχομαι να κάνετε, ότι δεν μπορείτε να κάνετε…».

Μίκης Θεοδωράκης.
Συνθέτης.

Περιεχόμενα

Πρόλογος 8
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή 10
1.1 Διαμόρφωση πλέγματος (CFD) 10
1.2 Παραμόρφωση πλέγματος με χρήση Radial Basis Functions (RBFs) 11
1.3 Υβριδικά πλέγματα 13
Κεφάλαιο 2: Βασική θεωρία 14
2.1 Παρεμβολή με χρήση Radial Basis Functions 14
2.2 Laplacian εξομάλυνση 17
2.3 Μετρική Συνάρτηση παραμόρφωσης 18
Κεφάλαιο 3: Αλγόριθμος υπολογισμού παραμόρφωσης 20
3.1 Αλγόριθμος 2D πλέγματος 20
3.1.1 Είσοδος δεδομένων 20
3.1.2 Δημιουργία και επίλυση συστήματος 20
3.1.3 Χρήση Laplacian εξομάλυνσης 21
3.1.4 Χρήση μετρικής συνάρτησης 21
3.2 Αλγόριθμος υβριδικού (2D) πλέγματος 22
3.3 Αλγόριθμος υβριδικού (3D) πλέγματος 22
3.3.1 Είσοδος δεδομένων 22
3.3.2 Καθορισμός τριγώνων 23
3.3.3 Καθορισμός ακμών 25
3.3.4 Ανάθεση δεικτών (index) 26
Κεφάλαιο 4: Πιστοποίηση του αλγορίθμου 29
4.1 Τριγωνικό πλέγμα 29
4.2 Υβριδικό πλέγμα (2D) 58
4.3 Υβριδικό πλέγμα (3D) 103
Κεφάλαιο 5: Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα 127
5.1 Ανακεφαλαίωση της εργασίας 127
5.2 Συμπεράσματα 127
5.3 Προτάσεις 128
Βιβλιογραφία 130

Πρόλογος

Η αυτοματοποιημένη παραγωγή και τροποποίηση μη δομημένου πλέγματος αποτελεί ένα πεδίο, το οποίο ανθεί τις τελευταίες δεκαετίες στον τομέα της έρευνας. Θα πρέπει να επισημανθεί η διαφορά των δομημένων και μη δομημένων πλεγμάτων: μία σημαντική διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι τα δομημένα πλέγματα χαρακτηρίζονται από σταθερό πλήθος γειτονικών στοιχείων για κάθε εσωτερικό κόμβο τους. Σε αντίθεση με εκείνων των μη δομημένων πλεγμάτων όπου είναι επιτρεπτό το μεταβλητό πλήθος των γειτονικών στοιχείων για κάθε κόμβο.

Η κατασκευή μη δομημένων πλεγμάτων δεν περιορίζεται μόνο σε διδιάστατα χωρία, περιλαμβάνοντας μεθόδους τριγωνικών και τετραπλευρικών στοιχείων, αλλά επεκτείνεται και σε τριδιάστατα χωρία, με μεθόδους τετραεδρικών, πυραμιδικών, πρισματικών και εξαεδρικών στοιχείων. Πολλές εφαρμογές πραγματεύονται την κατασκευή επιφανειακών πλεγμάτων, ενώ άλλες την μετέπειτα επεξεργασία του πλέγματος και τη βελτίωσή του μέσω εξομάλυνσης, εκκαθάρισης και τοπικής βελτίωσης. Υπάρχουν όμως και άλλα σχετικά θέματα που αφορούν στην κατασκευή προσαρμόσιμων, ανισοτροπικών και καρτεσιανών πλεγμάτων, καθώς και ζητήματα δομών δεδομένων και γεωμετρικής αναπαράστασης.

Σκοπός της παρούσης εργασίας αποτελεί η αξιολόγηση της μεθοδολογίας παραμόρφωσης των πλεγμάτων με βάση τις Radial Basis Functions (RBFs), στις περιπτώσεις μεγάλων παραμορφώσεων μη δομημένων υβριδικών πλεγμάτων, που χρησιμοποιούνται για την επίλυση εξισώσεων ροής. Η παραμόρφωση πλέγματος είναι ένα βασικό στοιχείο σε διάφορες μεθοδολογίες βελτιστοποίησης (αεροδυναμική) με χρήση της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (**C**omputational **F**luid **D**ynamics), καθώς και σε μεθοδολογίες ρευστό-δομικής αλληλεπίδρασης (**F**luid **S**tructure **I**nteraction), όπου οι υπολογισμοί μεταξύ υπολογιστικής μηχανικής των κατασκευών (**C**omputational **S**tructural **M**echanics) και CFD αλγορίθμων απαιτούν την επαναλαμβανόμενη παραμόρφωση του υπολογιστικού πλέγματος.

Από τη στιγμή που κρίνεται απαγορευτική η ανακατασκευή του υπολογιστικού πλέγματος, είναι απαραίτητη η χρήση γρήγορων εργαλείων παραμόρφωσης πλεγμάτων. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σήμερα, όπως είναι η μέθοδος του ανάλογου ελατηρίου, απλές αλγεβρικές μέθοδοι, η transfinite παρεμβολή (TFI), η λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων, καθώς και μέθοδοι που βασίζονται στις Radial Basis Functions. Οι μέθοδοι που βασίζονται σε RBFs παρουσιάζουν σχετικά μικρό υπολογιστικό κόστος, ενώ διατηρούν τη γενική ποιότητα του αρχικού πλέγματος μετά την παραμόρφωση. Είναι ανεξάρτητες από τις συνδέσεις πλεγμάτων και, ως εκ τούτου, δομημένα, μη δομημένα και υβριδικά πλέγματα μπορούν να αντιμετωπιστούν με τον ίδιο τρόπο.

Η RBF παρεμβολή έχει χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της μετατόπισης των εσωτερικών κόμβων ροής λόγω της μετατόπισης των κόμβων στο στερεό όριο. Υπάρχουν διάφοροι τύποι RBF, οι οποίοι είναι κατάλληλοι για παρεμβολή πολυμεταβλητών δεδομένων. Πέρα από τις πολυωνυμικές υπάρχει και μια άλλη κατηγορία η οποία διαιρείται σε δυο βασικές υποκατηγορίες: συναρτήσεις με τοπική και με ολική υποστήριξη (local και global support). Στην πρώτη περίπτωση, οι κόμβοι του πλέγματος που βρίσκονται μέσα σε ένα κύκλο (2D) ή σφαίρα (3D) με ακτίνα r γύρω από ένα κέντρο της RBF επηρεάζονται από την μετακίνηση του κέντρου αυτού. Αντίθετα, συναρτήσεις με ολική υποστήριξη δεν γίνονται ίσες με

μηδέν έξω από μια ορισμένη ακτίνα, αλλά καλύπτουν όλο το χώρο παρεμβολής. Σε αυτήν την εργασία χρησιμοποιούνται διάφοροι τύποι RBF, όπως η Gaussian, Multiquadric, Inverse Multiquadric και Inverse quadric, καθώς και πολυωνυμικές, ενώ παρουσιάζεται λεπτομερώς η μεθοδολογία παραμόρφωσης μέσω RBF συναρτήσεων.

Η μεθοδολογία παραμόρφωσης πλέγματος με RBF χρησιμοποιήθηκε για την επιβολή μεγάλων παραμορφώσεων σε 2D μη δομημένα υβριδικά πλέγματα γύρω από αεροτομές, συμπεριλαμβανομένης της μετατόπισης και περιστροφής της αεροτομής με βάση την αρχή των συντεταγμένων της αεροτομής. Έγινε αντιληπτό ότι, για τόσο μεγάλες παραμορφώσεις, μερικές από τις χρησιμοποιούμενες RBF απέτυχαν να παράγουν αποδεκτά παραμορφωμένα πλέγματα. Προκειμένου να βελτιωθεί η ποιότητα των πλεγμάτων, συνδυάστηκε με τη διαδικασία της Laplacian εξομάλυνσης. Υιοθετήθηκε μια μετρική συνάρτηση για την μέτρηση της ποιότητας του πλέγματος, που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της ποιότητας των παραμορφωμένων, με και χωρίς τη Laplacian εξομάλυνση. Τα αποτελέσματα για τα μη δομημένα τριγωνικά και υβριδικά πλέγματα παρουσιάζονται σε ένα πλήθος διαγραμμάτων, οδηγώντας σε χρήσιμα συμπεράσματα.

Θα πρέπει να επισημανθεί πως οι αλγόριθμοι κωδικοποιήθηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran στο υπολογιστικό περιβάλλον του Microsoft Visual Studio 2008, ενώ τα διαγράμματα κατασκευάστηκαν με τη βοήθεια του λογισμικού *Tecplot 9.0.*

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Διαμόρφωση πλέγματος (CFD)

Το ενδιαφέρον της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD) για την μετακίνηση μεγάλων πλεγμάτων έχει αυξηθεί κατά τη διάρκεια της τελευταίας δεκαετίας. Η ανάγκη για προσομοίωση ροών και / ή παραμόρφωση σωμάτων αυξάνεται συνεχώς. Δύο βασικά στοιχεία χαρακτηρίζουν αυτή την τεχνολογία. Από τη μια χαρακτηρίζονται από ακριβή στο χρόνο διακριτοποιημένα συστήματα για τη μετακίνηση μεγάλων πλεγμάτων (γνωστά ως δυναμικά συστήματα), και εύρωστους αλγορίθμους για την ενημέρωση της θέσης των σημείων του πλέγματος. Ο Charbel Farhat [1], στην εργασία του, παρουσιάζει, μερικές από τις θεωρητικές και υπολογιστικές προόδους στον τομέα αυτό, όπου απλά δείγματα τέτοιων εφαρμογών έχουν λάβει χώρα στον τομέα της αερο-ελαστικότητας και στην διεπιστημονική βελτιστοποίηση, καταλήγοντας με μια σύντομη περιγραφή για τις μελλοντικές τάσεις και εφαρμογές.

Η παραμόρφωση των πτερυγίων υπό την επίδραση του πεδίου ροής πρέπει να ληφθεί υπ' όψη για την επίλυση του πεδίου ροής, οπότε απαιτείται και η αντίστοιχη αναδημιουργία του υπολογιστικού πλέγματος. Επειδή η εκ νέου κατασκευή του υπολογιστικού πλέγματος σε κάθε βήμα της υπολογιστικής διαδικασίας είναι υπολογιστικά απαγορευτική, απαιτείται η ύπαρξη ενός γρήγορου εργαλείου μετακίνησης/παραμόρφωσης του υπολογιστικού πλέγματος. Τα τελευταία χρόνια έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι για την μετακίνηση/παραμόρφωση του πλέγματος. Η κλασική μέθοδος, που χρησιμοποιεί τη μέθοδο του ανάλογου ελατηρίου (analog spring) για την επαγωγή παραμορφώσεων στις ακμές του πλέγματος, προτάθηκε αρχικά από τον Batina [2] για μη δομημένα πλέγματα και επεκτάθηκε αργότερα από τους Robinson et al. [3] για δομημένα πλέγματα. Η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να διαχειριστεί μεγάλες παραμορφώσεις, αλλά επειδή είναι μια επαναληπτική μέθοδος που προσομοιάζει τη δημιουργία πλέγματος με επίλυση ελλειπτικής διαφορικής εξίσωσης, αποδεικνύεται χρονοβόρα, ειδικά για πλέγματα μεγάλου μεγέθους. Ειδικές περιπτώσεις της παραπάνω προσέγγισης περιλαμβάνουν τη χρήση Laplacian και Biharmonic τελεστών [4]. Στη συγκεκριμένη εργασία δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στα πλεονεκτήματα, τα οποία συνοψίζονται ως εξής: ότι οι δύο όροι μπορούν να καθορίζονται σε κάθε σύνορο/όριο του πλέγματος, και παράλληλα η ακεραιότητα ενός πλέγματος σε ένα κινούμενο οριακό στρώμα μπορεί να διατηρηθεί ως οριακές μετακινήσεις και η μεγαλύτερη επιφανειακή παραμόρφωση μπορεί να είναι ανεκτή από τη χρήση biharmonic εξισώσεων. Επίσης αναφέρεται και το κύριο μειονέκτημα, το οποίο είναι το υπολογιστικό κόστος.

Οι Cizmas και Gargoloff [5] πρότειναν μια γενιά πλεγμάτων και αλγορίθμων παραμόρφωσης για πτερύγια με μεγάλες παραμορφώσεις. Πρώτον, η τεχνική του ανάλογου ελατηρίου εφαρμόστηκε για την παραμόρφωση των κόμβων σε ένα στρώμα πλέγματος και κατά δεύτερο λόγο, τα στρώματα ήταν παραμορφωμένα, έτσι ώστε να είναι κάθετα προς τα όρια του χώρου και στην επιφάνεια της πτέρυγας. Όλες οι παραπάνω μέθοδοι απαιτούν την επίλυση ενός αραιού (sparse) συστήματος εξισώσεων, για όλους τους κόμβους του πλέγματος, που μπορεί να

λυθεί προσεγγιστικά για μικρό αριθμό επαναλήψεων. Επιπλέον, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι ο αλγόριθμος για τη διαμόρφωση του πλέγματος είχε το πλεονέκτημα να διατηρεί την τοπολογία του πλέγματος αμετάβλητη, η οποία είναι επωφελής για την επίλυση της ροής.

Οι Schuster et al. [6] και οι Bhardwaj et al. [7] χρησιμοποίησαν μία απλή αλγεβρική μέθοδο για να παραμορφώσουν το πλέγμα, αναδιανέμοντας τους κόμβους κατά μήκος γραμμών του πλέγματος σε διεύθυνση κάθετη στο στερεό τοίχωμα. Η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να προκαλέσει προβλήματα για πολύπλοκες γεωμετρίες στερεού τοιχώματος, αφού στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι δύσκολο να προσδιοριστεί η κάθετη διεύθυνση στην οποία πραγματοποιείται η παραμόρφωση. Επιπλέον, η μέθοδος περιορίζεται για μικρές παραμορφώσεις, ενώ σε μεγάλες παραμορφώσεις οδηγεί σε πολύ χαμηλή ποιότητα πλέγματος και τομή των ακμών του.

Ο Eriksson [8] πρότεινε μια μέθοδο Transfinite παρεμβολής (TFI) για την επαναδιακριτοποίηση υπολογιστικών χωρίων, η οποία όμως δεν είναι κατάλληλη για πολλαπλά υποχωρία. Οι Hartwich και Agrawal [9] συνδύασαν την μέθοδο των ελατηρίων με τη μέθοδο TFI για την επαναδιακριτοποίηση πλεγμάτων που αποτελούνται από πολλαπλά υποχωρία (multi-blocks). Η μέθοδος των ελατηρίων χρησιμοποιήθηκε για την μετακίνηση των οριακών ακμών κάθε υποχωρίου και στη συνέχεια η μέθοδος TFI εφαρμόστηκε για να αναδημιουργήσει τα πλέγματα στα παραμορφωμένα υποχωρία. Η παραπάνω μέθοδος βελτιώθηκε από τους Potsdam και Guruswamy [10], ενώ εφαρμόστηκε και παράλληλη επεξεργασία. Οι Lian et al. [11] πρότειναν έναν συνδυασμό μεθόδων TFI και στρατηγικών master/slave για την μετακίνηση του πλέγματος σε πολλαπλά υποχωρία. Η στρατηγική master/slave αφορά τη σχέση μεταξύ των κόμβων στην επιφάνεια ενός υποχωρίου (master points) και των κόμβων σε γειτονικά υποχωρία (slave points). Η μέθοδος εξελίχθηκε από τους Kamakoti and Shyy [10].

Οι Bijl et al. [12] διερευνούν στη μελέτη τους την τοπική προσαρμοστική βελτίωση των μη δομημένων εξαεδρικών πλεγμάτων για υπολογισμούς της ροής, ενώ δοκιμάζεται παράλληλα μια προσαρμοστική στρατηγική που αναπτύχθηκε για μη δομημένα εξαεδρικά πλέγματα για σταθερές συνθήκες ροής.

Μια διαφορετική κατηγορία μεθόδων υιοθετεί την επίλυση μερικής διαφορικής εξίσωσης για την μετακίνηση των κόμβων του πλέγματος, φροντίζοντας την πύκνωση των κόμβων σε περιοχές με μεγάλες μεταβολές στη συνάρτηση που επιλύεται στο εν λόγω πλέγμα [13], [14], [15]. Η μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα για τριδιάστατα πλέγματα.

1.2 Παραμόρφωση πλέγματος με χρήση Radial Basis Functions (RBFs)

Υπάρχουν αμέτρητες περιπτώσεις όπου μια συνάρτηση θα πρέπει να παρεμβοληθεί χρησιμοποιώντας μόνο ένα πεπερασμένο σύνολο διακριτών τιμών. Οι Radial Basis Functions ανήκουν στην κατηγορία αυτή. Συνδυάζουν, ακτινική συμμετρία, εύκολη προσαρμογή καθώς προσαρμόζονται ομαλά στις έντονες συγκλίσεις και πάντα παρέχουν μοναδική λύση στο πρόβλημα για ξεχωριστά σύνολα δεδομένων [17].

Υπάρχουν πολλές μελέτες οι οποίες βασίζονται σε RBF. Οι Armin Beckert και Holger Wendland [18] επικεντρώθηκαν σε ένα συντηρητικό σχήμα ζεύξης για κώδικα υπολογιστική ρευστοδυναμική (CFD) και υπολογιστικής μηχανικής με πεπερασμένα στοιχείς (FE) που βασίζονται στην πολυμεταβλητή παρεμβολή χρησιμοποιώντας Radial Basis Functions με σταθερή υποστυήριξη. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το σχήμα προσομοίωσης πολλών μεταβλητών παρεμβολής με χρήση Radial Basis Functions φαίνεται να είναι πιο συμφέρων σε σύγκριση με τις αντίστοιχες RBF με ολική υποστήριξη.

Η μέθοδος των de Boer et al. [19] [20] [21] χρησιμοποιεί Radial Basis Functions (RBF) για να υπολογίσει την μετακίνηση των κόμβων στο πλέγμα. Αρχικά, οι RBF χρησιμοποιούνται μόνο για τους κόμβους στο στερεό όριο, αλλά η μέθοδος επεκτάθηκε σε όλους τους κόμβους του πλέγματος. Η μέθοδος αυτή απαιτεί τη λύση του συστήματος μόνο για τους κόμβους στο στερεό τοίχωμα που παραμορφώνεται, ενώ η μετακίνηση των εσωτερικών κόμβων μπορεί να γίνει εύκολα με παράλληλη επεξεργασία. Η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε επίσης από τους Jakobsson και Amoignon στο [22]. Οι μέθοδοι που βασίζονται σε RBF παρουσιάζουν μικρό υπολογιστικό κόστος, ενώ διατηρούν τη γενική ποιότητα του αρχικού πλέγματος μετά από την μετακίνηση.

Μια άλλη εργασία στο συγκεκριμένο αντικείμενο έρχεται από τους Morris et al. [23]. Η χρήση παραμετροποίησης (RBFs) για παρεμβολή των συντεταγμένων του πλέγματος παρέχει ταυτόχρονη παραμόρφωση της σχεδίασης της επιφάνειας και της αντίστοιχης του πλέγματος.

Οι Rendall και Allen σε σύντομο χρονικό διάστημα ανέπτυξαν δύο μεθόδους με βάση τις παραπάνω θεωρίες. Αρχικά [24] παρουσιάζουν μια μέθοδο η οποία είναι ανεξάρτητη από τη συνδεσιμότητα και παράγει υψηλής ποιότητας πλέγματα, εκτός από το γεγονός ότι είναι υπολογιστικά ακριβή για τα μεγάλα πλέγματα. Η αποτελεσματικότητα της τεχνικής βελτιώνεται με τη μείωση του αριθμού των επιφανειακών σημείων, που χρησιμοποιούνταν για τον καθορισμό των παραμορφώσεων της επιφάνειας, ενώ μια μικρή απόκλιση της θέσης διορθώθηκε με μια απλή διαταραχή, που συνδυάζει μια κύρια μέθοδο basis function και κατά δεύτερον μια τοπική μέθοδο διόρθωσης. Είναι σκόπιμο να αναφερθεί ότι η ποιότητα των πλεγμάτων έχει αποδειχθεί ότι διατηρείται εξαιρετικά καλή για όλη την περιοχή. Επιπλέον, [25] παρουσίασαν μια πολύ αποτελεσματική μέθοδο υψηλής ποιότητας μετακίνησης πλεγμάτων με Radial Basis Functions, οι οποίες είναι κατάλληλες για την μετακίνηση των πλεγμάτων.

Προηγούμενη εργασία από τους συγγραφείς είχε δείξει ότι η βασιζόμενη σε RBFs παραμόρφωση πλέγματος είναι εξαιρετικά αποτελεσματική, διατηρώντας την ορθογωνικότητα και την παραγωγή εξαιρετικά υψηλής ποιότητας πλεγμάτων, αλλά είναι δυνητικά ακριβή υπολογιστικά, λόγω της εξάρτησης του συνολικού όγκου του πλέγματος από ένα μεγάλο αριθμό σημείων επιφάνειας. Σε αυτή τη μελέτη [26] η ίδια ομάδα έρευνας πρότεινε μια μέθοδο, η οποία χρησιμοποιεί μια επιλεγμένη συνάρτηση σφάλματος στην επιφάνεια των πλεγμάτων για να επιλέξει ένα μειωμένο υποσύνολο επιφανειακών σημείων. Αυτό το υποσύνολο περιέχει έναν αρκετά περιορισμένο αριθμό σημείων, ούτως ώστε να καταστεί ο όγκος γρήγορα παραμορφώσιμος, ενώ στη συνέχεια χρησιμοποιείται μία συνάρτηση διόρθωσης για να διορθώσει τα επιφανειακά σημεία που δεν περιλαμβάνονται αρχικά στη διαδικασία.

Ο Lefrançois [27] πρότεινε τη μέθοδο του "Moving Submesh Approach" (MSA), η οποία υποθέτει την παραμόρφωση ενός ψευδο-υλικού, η οποία πραγματοποιείται σε ένα αραιό πλέγμα και μειώνει σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο. Το πλέγμα ανανεώνεται χρησιμοποιώντας μια τεχνική παρεμβολής που βασίζεται στη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων. Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί τόσο για δομημένα όσο και για μη δομημένα πλέγματα. Στην [28] παρουσίασε μια πολύ απλή αλγεβρική μέθοδο για την παραμόρφωση μη δομημένων πλεγμάτων, η οποία απαιτεί χαμηλό υπολογιστικό κόστος. Η μέθοδος είναι σε θέση να επιβάλλει μεγάλες παραμορφώσεις. Οι αλγεβρικές μέθοδοι, οι οποίες χρησιμοποιούν απλές ή πιο σύνθετες τεχνικές παρεμβολής, έχουν ένα σημαντικό πλεονέκτημα χαμηλού υπολογιστικού κόστους, και εύκολα μπορούν να προσαρμοστούν σε περιπτώσεις πολλαπλών επεξεργαστών, που χρησιμοποιούνται στους παράλληλους υπολογισμούς.

1.3 Υβριδικά πλέγματα

Η χρήση μη δομημένων πλεγμάτων στον τομέα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD) έχει γίνει ευρέως διαδεδομένη κατά τη διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών, όπως αναφέρθηκε ανωτέρω, λόγω της ικανότητάς τους να διακριτοποιούν αυθαίρετες πολύπλοκες γεωμετρίες και την ευελιξία στην υποστήριξη της λύσης με βάση τις προσαρμογές πλέγματος προς ενίσχυση της ακρίβειας και αποδοτικότητας της λύσης [29-35]. Στην αρχή της ανάπτυξης των μη δομημένων πλεγμάτων, τριγωνικά / τετραεδρικά πλέγματα εφαρμόστηκαν κατά κύριο λόγο στην αντιμετώπιση πολύπλοκων γεωμετριών. Πρόσφατα, μικτά ή υβριδικά πλέγματα, συμπεριλαμβανομένων πολλών διαφορετικών τύπων κελιών έχουν κερδίσει έδαφος, λόγω της βελτιωμένης απόδοσης και της ακρίβειας που δίνουν (υβριδικά πλέγματα με πρισματικά / τετραεδρικά στοιχεία [36], μικτά πλέγματα που περιλαμβάνουν πρίσματα / πυραμίδες / εξαεδρικά στοιχεία [37], προσαρμοστικές μέθοδοι σε καρτεσιανό πλέγμα [38-46]). Διάφορες μέθοδοι επίλυσης ροών σε υβριδικά πλέγματα παρουσιάζονται στις εργασίες [47] έως [54].

Κεφάλαιο 2: Βασική θεωρία

2.1 Παρεμβολή με χρήση Radial Basis Functions

Η παρεμβολή των Radial Basis Function μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει τη μετατόπιση των εσωτερικών κόμβων ενός υπολογιστικού πλέγματος, δοθείσης της μετατόπισης των κόμβων στα όρια του πλέγματος (η οποία μπορεί να είναι μη μηδενική για κάποιους κόμβους και μηδενική για κάποιους άλλους κόμβους του πλέγματος). Αν υπολογιστεί η μετατόπιση (διάνυσμα) των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος και προστεθεί στο αρχικό διάνυσμα θέσης του κάθε κόμβου του εν λόγω πλέγματος, προκύπτει η τελική του θέση. Στους οριακούς κόμβους που αντιστοιχούν στο παραμορφούμενο στρερεό τοίχωμα (π.χ. αεροτομή, ή πτέρυγα) επιβάλουμε μη μηδενική μετατόπιση, ενώ στους υπόλοιπους οριακούς κόμβους επιβάλουμε μηδενική μετατόπιση.

Η λειτουργία της συνάρτησης παρεμβολής *s*, που δίδεται στη συνέχεια, είναι να περιγράφει την μετατόπιση σε όλο το πεδίο του πλέγματος:

$$s(\boldsymbol{x}) = \quad \boldsymbol{x} + \sum_{i=}^{N} \qquad \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x} \tag{1}$$

Όπου:

- s είναι η συνάρτηση παρεμβολής
- P είναι ένα πολυώνυμο χαμηλού βαθμού, συνήθως γραμμικό ή τετραγωνικό (γραμμικό στην περίπτωση που εξετάζουμε)
- Φ είναι μια πραγματική συνάρτηση, που καλείται basis function, η οποία είναι συνάρτηση της Ευκλείδιας απόστασης ενός σημείου από το κέντρο της
- $||x||$ είναι η ευκλείδια απόσταση ενός κόμβου από το αντίστοιχο κέντρο της RBF
- $\boldsymbol{x}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός εσωτερικού κόμβου του πλέγματος
- $\boldsymbol{x}_i$ είναι τα διανύσματα θέσης των κέντρων των RBF ($\mathbf{x}_i=[x_i, y_i, z_i]$), δηλαδή στο δικό μας πρόβλημα οι συντεταγμένες των οριακών κόμβων του πλέγματος (όπου τοποθετούνται τα κέντρα των RBFs), όπου είναι γνωστές οι μετατοπίσεις (επιβάλλονται).
- N είναι το πλήθος των κέντρων των RBF (το πλήθος των οριακών κόμβων του πλέγματος στην προκείμενη περίπτωση).

Η RBF αποτελείται από ένα σταθμισμένο άθροισμα μιας συμμετρικής RBF Φ που τοποθετείται στα κέντρα $\boldsymbol{x}_i$ και του χαμηλού βαθμού πολυωνύμου p. Λαμβάνοντας

υπόψη ένα σύνολο N σημείων με διανυσματα θέσης $\boldsymbol{x}_i$ και τις τιμές f_i, η διαδικασία της εξεύρεσης της s, έτσι ώστε,

$$s(\boldsymbol{x}_i) = f_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{2}$$

καλείται παρεμβολή. Η συνάρτηση παρεμβολής ορίζεται από τα λ_i (τους συντελεστές του αθροίσματος), μαζί με τους συντελεστές του πολυωνύμου $p(x)$. Αυτοί είναι οι άγνωστοι κατά την επίλυση του γραμμικού συστήματος που προκύπτει. Οι τιμές f_i είναι οι μετατοπίσεις που επιβάλονται από τον χρήστη σε όλους τους οριακούς κόμβους του πλέγματος (στα κέντρα των RBF), με την επιπρόσθετη απαίτηση να ισχύει:

$$\sum_{i=}^{N} {}_i q \;\; x_i \tag{2α}$$

για όλα τα πολυώνυμα q με βαθμό μικρότερο ή ίσο με αυτόν του πολυωνύμου p. Ο ελάχιστος βαθμός του πολυωνύμου εξαρτάται από την επιλογή των basis functions. Εάν οι basis functions είναι υπό συνθήκη θετικά ορισμένες με τάξη $m \leq$ τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού (γραμμικό).

Αν θεωρηθεί ότι ένα σύνολο $\{P_1, \ldots, P_L\}$ είναι μια μονώνυμη βάση για πολυώνυμα p βαθμού και $c = (c_1, \ldots, c_l)$, είναι οι συντελεστές που δίνουν τους όρους του $p(x)$ όσον αφορά αυτή τη βάση, τότε οι συνθήκες παρεμβολής (ότι δηλαδή $s(x_i) = f_i$) είναι δυνατόν να γραφτούν σε μορφή πίνακα ως ένα γραμμικό σύστημα,

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \tag{3}$$

όπου A είναι ο πίνακας παρεμβολής (n x n)

$$A_{ij} = \Phi(||\boldsymbol{x}_{ki} - \boldsymbol{x}_{kj}||) \qquad 1 \leq i, \;\; j \leq N \tag{4}$$

Και $\boldsymbol{P}$ είναι ο πίνακας (n x 4), που καθορίζεται από τις σταθερές για να παρεμβάλει όλα τα πρώτου βαθμού πολυώνυμα

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x_{k1}^0 & y_{k1}^0 & z_{k1}^0 \\ 1 & x_{k2}^0 & y_{k2}^0 & z_{k2}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{kN}^0 & y_{kN}^0 & z_{kN}^0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Εδώ έχουν εισαχθεί τα διανύσματα

$$f = \qquad)_{i=}^{N} \tag{6}$$

Όπου το *c* είναι το διάνυσμα των συντελεστών για το *p* πολυώνυμο.
Τελικά, το πολυώνυμο *p* γίνεται

$$p\ \mathbf{x} = + + + + , \tag{7}$$

όπου $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο τύπος του υπολογισμού των μετατοπίσεων σε κάθε κατεύθυνση συντεταγμένων

$$s_x(\boldsymbol{x}) = + + + + \sum_{i=} \qquad \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x}\ \|) \tag{8}$$

$$s_y(\boldsymbol{x}) = + + + + \sum_{i=} \qquad \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x}\ |) \tag{9}$$

$$s_z(\boldsymbol{x}) = + + + + \sum_{i=} \qquad \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x}\ \|) \tag{10}$$

No.	*Name*	*Φ(ξ)*
1	CP C^0	$(1-\xi)^2$
2	CP C^2	$(1-\xi)^4(4\xi+1)$
3	CP C^4	$(1-\xi)^6((35/3)\xi^2+6\xi+1)$
4	CP C^6	$(1-\xi)^8(32\xi^3+25\xi^2+8\xi+1)$
5	CTPS C^0	$(1-\xi)^5$
6	CTPS C^1	$1+(80/3)\xi^2-40\xi^3+15\xi^4-(8/3)\xi^5+20\xi^2\log(\xi)$
7	CTPS C_a^2	$1-30\xi^2-10\xi^3+45\xi^4-6\xi^5-60\xi^3\log(\xi)$
8	CTPS C_b^2	$1-20\xi^2+80\xi^3-45\xi^4-16\xi^5+60\xi^4\log(\xi)$

Πίνακας 1: RBF με τοπική υποστήριξη

Υπάρχουν διάφορες radial basis functions που διατίθεται στη βιβλιογραφία και είναι κατάλληλες για παρεμβολή πολυμεταβλητών δεδομένων. Μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες: με τοπική και με ολική υσποστήριξη. Όταν χρησιμοποιείται μια radial basis function με τοπική υποστήριξη, οι κόμβοι του πλέγματος μέσα σε ένα κύκλο (2D) ή σε μια σφαίρα (3D) με ακτίνα *r* γύρω από ένα κέντρο x_j επηρεάζονται από την κίνηση του κέντρου αυτού. Συναρτήσεις με ολική υποστήριξη δεν γίνονται ίσες με το μηδέν έξω από μια ορισμένη ακτίνα, αλλά καλύπτουν όλο το χώρο παρεμβολής, ο οποίος οδηγεί σε πυκνά συστήματα πινάκων. Η μελέτη αυτή περιλαμβάνει και τις δύο περιπτώσεις. Από τη μία πλευρά, στον Πίνακα 1 δίνονται διάφορες RBF με τοπικη υποστήριξη. Όλες οι RBF με τοπική υποστήριξη είναι διαβαθμισμένες με την ακτίνα *r*, έτσι ώστε να χρησιμοποιείται ως μεταβλητή του η αδιάστατη μεταβλητή $\xi = x / r$, όπου το *r* παίρνει τιμές που

ορίζονται από τον χρήστη. Οι τέσσερις πρώτες συναρτήσεις βασίζονται σε πολυώνυμα και οι τέσσερις τελευταίες είναι μια σειρά συναρτήσεων που βασίζονται στο thin plate spline [20].

Οι συναρτήσεις RBF με τοπική υποστήριξη έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \ , \quad 0 \leq \quad \leq \qquad \Phi(\mathbf{x}) = 0 \ , \ x>1 \qquad (11)$$

Από την άλλη πλευρά, στον πίνακα 2 δίνονται διάφορες RBF με ολική υποστήριξη. Ο Franke [55], στη σύγκριση των πολυμεταβλητών μεθόδων προσέγγισης, θεώρησε μερικές radial basis functions συμπεριλαμβανομένων της thin plate spline. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε εν συντομία μερικές από αυτές τις συναρτήσεις.

Multiquadric Biharmonics

Εδώ επιλέγεται $\varphi(r) = (R^2 + a^2)^{1/2}$, όπου *c* είναι μια πραγματική σταθερά. Ο Franke βρήκε ότι αυτή η radial basis function παρέχει την πιο ακριβή παρεμβολή επιφανειών από όλες τις μεθόδους που δοκιμάστηκαν για παρεμβολή σε δύο διαστάσεις. Επιπλέον, η μέθοδος λειτούργησε καλύτερα όταν το c επιλέχθηκε να είναι κοντά στη μέση απόσταση.

Gaussian

Υπάρχουν πολλοί λόγοι για να συμβουλεύσει τους χρήστες να αποφύγουν την Gaussian $\varphi(r) = \exp(-aR^2)$. Ο Franke το (1982) διαπίστωσε ότι είναι πολύ ευαίσθητη στην επιλογή της παραμέτρου c, όπως αναμενόταν.

Inverse Multiquadric Biharmonics

Εδώ επιλέγεται $\varphi(r) = (R^2 + a^2)^{-1/2}$. Και πάλι ο Franke βρήκε ότι αυτή η radial basis function μπορεί να παρέχει εξαιρετικές προσεγγίσεις, ακόμα και όταν ο αριθμός των κέντρων είναι μικρός.

No.	*Name*	*Φ(ξ)*
1	Multiquadric Biharmonics	$(a^2+x^2)^{1/2}$
2	Gaussian	$\exp(-ax)^2$
3	Inverse Multiquadric Biharmonics	$(1/(a^2+x^2))^{1/2}$
4	Inverse Quadric Biharmonics	$1/(1+x^2)$

Πίνακας 2: RBF with global support

2.2 Laplacian εξομάλυνση

Η βασική Laplacian εξομάλυνση [56] είναι μια επαναληπτική διαδικασία που επανατοποθετεί κάθε κόμβο του πλέγματος ώστε να είναι στη θέση της μέσης τιμής του κάθε ενός από τους κόμβους που συνδέονται με αυτόν. Αυτό λειτουργεί πολύ καλά για τις κυρτές περιοχές της γεωμετρίας. Ωστόσο, μπορεί να αποτύχει για στοιχεία κοντά σε κοιλότητες. Για να αποφευχθεί αυτό μπορούν να εισαχθούν

περιορισμοί στην εφαρμογή της. Στην ενότητα αυτή δίνεται η περιγραφή μιας περιορισμένης εφαρμογής Laplacian εξομάλυνσης.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για κάθε κόμβο είναι ο ακόλουθος:

- Υπολογισμό της θέσης όπου η Laplacian εξομάλυνσης θα εφαρμοστεί στον κόμβο και την προβλεπόμενη νέα κομβική θέση για την αντίστοιχη καμπύλη ή την περιοχή του.
- Loop (επανάληψη μέχρι αυθαίρετα την επιλεγμένη τιμή των 20 επαναλήψεων).
- Υπολογισμό μετρικής παραμόρφωσης για τα γειτονικά στοιχεία.
- Αν η νέα τοποθεσία είναι "αποδεκτή", τότε έξοδος από το βρόχο.
- Αν η νέα τοποθεσία δεν είναι "αποδεκτή", τότε μείωση των προτεινόμενων αποστάσεων στο μισό και καθορισμό αυτής ως τη νέα θέση.

2.3 Μετρική Συνάρτηση παραμόρφωσης

Οι μετρικές των παραμορφώσεων του πλέγματος [56] μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον ποσοτικό καθορισμό της τελικής ποιότητας του πλέγματος. Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν ως οδηγός εξομάλυνσης (smoothing), περιορίζοντας την μετακίνηση κατά τη διάρκεια εκτέλεσης της Laplacian εξομάλυνσης, οδηγώντας σε βελτιστοποίηση στηριζόμενη στην εξομάλυνση. Η επιλογή της κατάλληλης μετρικής είναι σημαντική. Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικά από τα κριτήρια με βάση τα οποία μια μετρική μπορεί να επιλεγεί περιλαμβάνει:

- Η απόδοση (επειδή χρησιμοποιείται αρκετές φορές).
- Η καταλληλότητα χρήσης από έναν αλγόριθμο εξομάλυνσης (smoothing).
- Η συνέχεια, δεδομένου ότι οι τιμές των παραγώγων είναι απαραίτητες για να καθορίσουν την κατεύθυνση στην οποία ελαχιστοποιείται η μετρική.
- Ακρίβεια στην περιγραφή (για το ποιά παραμόρφωση στοιχείου πρόκειται).
- Κατά προτίμηση θα εξακολουθεί να προσδιορίζεται με αντιστροφή του στοιχείου, έτσι ώστε ελαφρώς ανεστραμμένα στοιχεία να μπορούν να επισκευαστούν.
- Εφαρμογή σε μεικτά πλέγματα.

Οι μετρικές παραμορφώσεων για τετράεδρα και πρίσματα πρέπει να είναι συμβατές μεταξύ τους, έτσι ώστε εξομάλυνση των quad-dominant πλεγμάτων να μην υπερτονίζει την ποιότητα του ενός σχήματος έναντι του άλλου στοιχείου σε ένα συγκεκριμένο κόμβο.

Η μετρική παραμόρφωση (για 2D πλέγματα) εφαρμόστηκε μόνο για τριγωνικά στοιχεία. Η όλη διαδικασία παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Αρχικά βρίσκεται η κάθε πλευρά του κάθε τριγώνου, από τις συντεταγμένες του κάθε κόμβου. Ο τύπος έχει ως εξής:

$$A = \sqrt{\qquad\qquad + \qquad\qquad} \tag{12}$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι ακτίνες του εγγεγραμμένου *(R_{circ})* και περιγεγραμμένου *($R_{inscribed}$)* κύκλου αντίστοιχα για κάθε τρίγωνο. Ο τύπος παρουσιάζεται στη συνέχεια:

$$Rcirc = \frac{(abc)}{\sqrt{(a + \quad + \quad + \quad + \quad}} \qquad (13)$$

Και

$$R_{inscribed} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b + \quad + \quad + \quad}{(a + \quad + \quad}} \qquad (14)$$

Επιπλέον, υπολογίζεται και ο λόγος τους για το κάθε τρίγωνο:

$$Ratio = \frac{R_{circ}}{R_{inscribed}} \qquad (15)$$

Ολοκληρώνοντας, υπολογίζεται το ποσοστό των στοιχείων του πλέγματος που ανήκουν σε συγκεκριμένη περιοχή τιμών της μετρικής, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.

Ratio	*% (Πριν την Laplacian εξομάλυνση)*	*% (Μετά την Laplacian εξομάλυνση)*
2.0		
2.0-2.1		
2.1-2.2		
2.2-2.3		
2.3-2.4		
2.4-2.5		
>2.5		

Πίνακας 3: Διακύμανση ποσοστού μετρικής συνάρτησης

Κεφάλαιο 3: Αλγόριθμος υπολογισμού παραμόρφωσης

3.1 Αλγόριθμος 2D πλέγματος

Για το διδιάστατο τριγωνικό πλέγμα ο αλγόριθμος χαρακτηρίζεται από τρία τμήματα. Το κυρίως πρόγραμμα, που αποτελεί τον κορμό του προγράμματος και επιπλέον τη χρήση δυο modules.

3.1.1 Είσοδος δεδομένων

Από τα δυο modules το ένα αφορά την εύρεση των ακμών και το άλλο την επίλυση του γραμμικού συστήματος που σχηματίζεται. Βασική και πρωταρχική κίνηση αποτελεί η διαδικασία εισαγωγής των αρχείων δεδομένων. Στη συνέχεια γίνεται η δήλωση της Radial Basis Function που θα χρησιμοποιηθεί, καθώς και γεωμετρικοί υπολογισμοί και αρχικοί υπολογισμοί. Αυτού του είδους οι υπολογισμοί γίνονται μια και μοναδική φορά, προσφέροντας στον επιλύτη τις αρχικές πληροφορίες για την υπολογιστική διαδικασία που ακολουθεί.

Ο αλγόριθμος αρχικά προσπελαύνει το αρχείο που περιέχει το διδιάστατο τριγωνικό πλέγμα, που διακριτοποιεί το χώρο γύρω από την υπό εξέταση γεωμετρία. Το αρχείο εισόδου του πλέγματος περιέχει τον αριθμό των κόμβων και τον αριθμό των κελιών, καθώς και τους κόμβους που αποτελούν το κάθε τρίγωνο, όπως και την τοπολογική δομή αυτών. Δίνονται δηλαδή οι φυσικές συντεταγμένες κάθε κόμβου του πλέγματος, ενώ στη συνέχεια καθορίζονται οι κόμβοι που αποτελούν την υπό εξέταση γεωμετρία (αεροτομή) καθώς και τα όρια του πλέγματος.

3.1.2 Δημιουργία και επίλυση συστήματος

Με τη χρήση δυναμικών πινάκων διαβάζονται και σχηματίζονται οι πίνακες με τον αριθμό των τριγωνικών κελιών, τον αριθμό των κόμβων του πλέγματος, καθώς και των οριακών κόμβων από τους οποίους αποτελείται η αεροτομή. Θα πρέπει να επισημανθεί πως οι οριακοί κόμβοι αποτελούνται από τους κόμβους της αεροτομής και τους οριακούς κόμβους του πλέγματος (περιοχές εισόδου - εξόδου της ροής). Για την εύρεση της νέας θέσης των κόμβων, με την εφαρμογή μιας γραμμικής μετατόπισης και μιας περιστροφής, θα πρέπει να σχηματιστεί το κατάλληλο σύστημα. Με αφορμή αυτό, σχηματίζουμε το σύστημα που θα πρέπει να λυθεί γραμμικά, έχοντας ορίσει κάθε φορά και τον τύπο της Radial Basis Function που επιθυμούμε. Έχοντας ορίσει το σύστημα, δηλώνουμε την μετατόπιση και την περιστροφή που επιθυμούμε να έχει η αεροτομή και μόνο, έχοντας πακτώσει όλους τους υπόλοιπους οριακούς κόμβους. Η γραμμική επίλυση του συστήματος, στηρίζεται στη γνωστή μέθοδο της LU Decomposition. Στο σημείο αυτό καλείται η συνάρτηση αυτή, μέσα από το δηλωθέν module, που περιλαμβάνει τη συνάρτηση LU Decomposition (LUDCMP) και την LU BACK SUBSTITUTION (LUBSKB). Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζεται για τον κάθε κόμβο της αεροτομής η μετατόπισή του, η

οποία προστίθεται στην αρχική του θέση, προκειμένου να προκύψει η τελική νέα θέση.

3.1.3 Χρήση Laplacian εξομάλυνσης

Για την βελτίωση της ποιότητας του πλέγματος, γίνεται χρήση της γνωστής μεθόδου Laplacian εξομάλυνσης. Βασική προϋπόθεση αποτελεί η εύρεση των ακμών. Με αφορμή αυτό, καλούμε το δεύτερο module, που σκοπό έχει αυτό ακριβώς. Έχοντας δηλώσει τις απαραίτητες μεταβλητές, όπως ο αριθμός των ακμών και των κελιών, τον αριθμό των ακμών κάθε κελιού και τον αριθμό κόμβου του πλέγματος, που αντιστοιχεί στον αριθμό κόμβου τριγώνου, καλούμε την υπορουτίνα REFINIT, με την οποία θα βρεθούν οι ακμές που σχηματίζουν το πλέγμα. Η εύρεση στηρίζεται στη σάρωση όλων των τριγώνων και των κορυφών κάθε τριγώνου του πλέγματος. Στη συνέχεια εφαρμόζεται η διαδικασία της εξομάλυνσης ως εξής:

- Για κάθε εσωτερικό κόμβο εντοπίζονται τα κέντρα των τριγώνων στα οποία ανήκει.
- Υπολογίζεται η μέση τιμή των συντεταγμένων των παραπάνω κέντρων. Η θέση που αντιστοιχεί στις συντεταγμένες που υπολογίζονται ορίζει τη θέση στην οποία θα μετακινηθεί ο εσωτερικός κόμβος, αν αυτό είναι επιτρεπτό.
- Ελέγχεται η εγκυρότητα του πλέγματος που θα προκύψει μετά την μετακίνηση του κόμβου. Η μετακίνηση του κόμβου πραγματοποιείται μόνο αν αυτή κριθεί επιτρεπτή, εφόσον δηλαδή δεν προκύπτουν τομές μεταξύ των στοιχείων του πλέγματος.
- Επανάληψη των παραπάνω βημάτων για κάθε εσωτερικό κόμβο του πλέγματος.

Τα παραπάνω βήματα συνιστούν έναν κύκλο της διαδικασίας Laplacian εξομάλυνσης. Το πλήθος των κύκλων της διαδικασίας καθορίζονται από το χρήστη. Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκαν 5 επαναλήψεις.

3.1.4 Χρήση μετρικής συνάρτησης

Ολοκληρώνοντας τον αλγόριθμο πραγματοποιείται υπολογισμός της μετρικής της ποιότητας του πλέγματος. Ο υπολογισμός γίνεται και πριν και μετά τη διαδικασία της εξομάλυνσης, ώστε να φανεί η επίδραση της εξομάλυνσης στην ποιότηατ του πλέγματος .

Αρχικά βρίσκονται οι πλευρές του κάθε τριγώνου από τις συντεταγμένες των κορυφών τους. Υπολογίζονται οι ακτίνες των περιγεγραμμένων και εγγεγραμμένων κύκλων για κάθε τρίγωνο και υπολογίζεται ο λόγος για το κάθε τρίγωνο. Πραγματοποιώντας τον υπολογισμό για όλα τα τρίγωνα του πλέγματος υπολογίζεται και το ποσοστό των τριγώνων σε κάθε διαφορετική περιοχή τιμών της μετρικής, που δίνει μια εικόνα της ποιότητας του πλέγματος.

3.2 Αλγόριθμος υβριδικού (2D) πλέγματος

Ο αλγόριθμος για το υβριδικό πλέγμα, βασίζεται στον αλγόριθμο για το τριγωνικό πλέγμα με ορισμένες διαφορές. Ο αλγόριθμος αρχικά προσπελαύνει το αρχείο που περιέχει το διδιάστατο υβριδικό πλέγμα, που διακριτοποιεί το χώρο γύρω από την υπό εξέταση γεωμετρία. Γενικά το αρχείο εισόδου του πλέγματος περιέχει τον αριθμό των κόμβων, τον αριθμό των τριγωνικών κελιών, τον αριθμό των τετράπλευρων κελιών, καθώς και τους κόμβους που αποτελούν το κάθε τρίγωνο και το κάθε τετράπλευρο, όπως και την τοπολογική δομή αυτών. Δίνονται δηλαδή οι φυσικές συντεταγμένες κάθε κόμβου του πλέγματος, ενώ στη συνέχεια καθορίζονται οι κόμβοι που αποτελούν την υπό εξέταση γεωμετρία (αεροτομή), καθώς και τα όρια του πλέγματος. Η εφαρμογή της Laplacian εξομάλυνσης γίνεται τόσο για τα τριγωνικά, όσο και για τα τετράπλευρα στοιχεία. Αντιθέτως, η χρήση της μετρικής αφορά μόνο τα τριγωνικά στοιχεία.

3.3 Αλγόριθμος υβριδικού (3D) πλέγματος

Για το υβριδικό τριδιάστατο πλέγμα, ο αλγόριθμος χαρακτηρίζεται επίσης από τρία τμήματα: το κυρίως πρόγραμμα που αποτελεί τον κορμό της διαδικασίας και επιπλέον δυο modules.

3.3.1 Είσοδος δεδομένων

Αρχικά πραγματοποιείται η διαδικασία εισαγωγής δεδομένων. Στη συνέχεια γίνεται η δήλωση της Radial Basis Function που θα χρησιμοποιηθεί, καθώς και γεωμετρικοί υπολογισμοί και αρχικοί υπολογισμοί. Αυτού του είδους υπολογισμοί, πραγματοποιούνται για μια και μοναδική φορά, προσφέροντας στον επιλύτη πληροφορίες για την υπολογιστική διαδικασία που θα ακολουθήσει.

Ο αλγόριθμος κάνει χρήση του πρώτου module, όπου γίνεται και η προσπέλαση του αρχείου που περιέχει το τριδιάστατο πλέγμα, που διακριτοποιεί το χώρο γύρω από την υπό εξέταση γεωμετρία. Ο αλγόριθμος έχει τη δυνατότητα να δέχεται αρχείο με format “.cfx5”. Γενικά το αρχείο εισόδου του πλέγματος περιέχει τον αριθμό των κόμβων, των τετραέδρων, των πρισμάτων και των πυραμίδων, που αποτελούν το υβριδικό πλέγμα καθώς και την τοπολογική δομή αυτών. Δίνονται δηλαδή οι φυσικές συντεταγμένες κάθε κόμβου του πλέγματος, ενώ στη συνέχεια καθορίζονται οι τέσσερις, πέντε και έξι κορυφές του κάθε τύπου στοιχείου αντίστοιχα. Τέλος, παρέχει και κατάλληλες πληροφορίες για τα όρια του χωρίου (εκεί όπου επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες). Με βάση τη μορφή του αρχείου παρέχεται και ένας δείκτης (index) για κάθε κόμβο, που ουσιαστικά δίνει άμεση πληροφορία για το που εντοπίζεται, αν δηλαδή ανήκει στην επιφάνεια της γεωμετρίας, σε πλαϊνά οριακά τοιχώματα, στις οριακές επιφάνειες εισόδου και εξόδου, σε οποιαδήποτε τομή των παραπάνω επιφανειών ή αν αποτελεί απλά έναν εσωτερικό κόμβο του πλέγματος. Με τον παραπάνω τρόπο δομής δεδομένων καθίσταται δυνατή η περιγραφή ενός τριδιάστατου υβριδικού μη-δομημένου πλέγματος γύρω από μια γεωμετρία. Επιπλέον ανοίγεται και σαρώνεται και ένα

δεύτερο αρχείο εισόδου, το οποίο περιέχει τον αριθμό των επιφανειών που απαρτίζουν το πλέγμα, καθώς και τον εκάστοτε κωδικό που τις χαρακτηρίζει. Οι υπόλοιποι υπολογισμοί, που απαιτούνται για να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος με τα επιθυμητά αποτελέσματα, περιγράφονται στη συνέχεια.

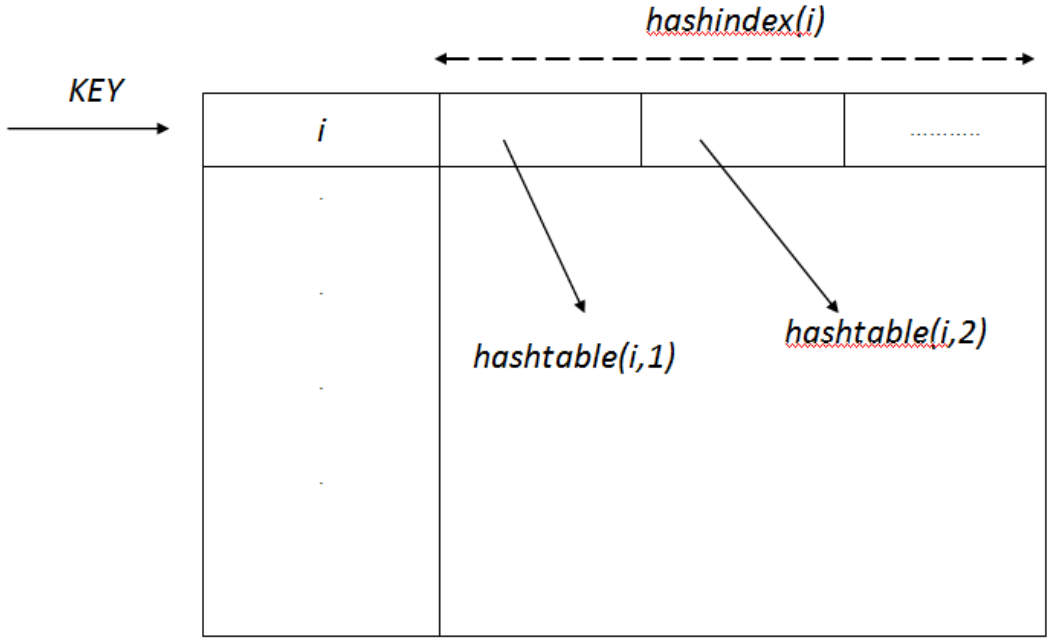
3.3.2 Καθορισμός τριγώνων

Στη συνέχεια καλείται μια άλλη υπορουτίνα, που έχει ως σκοπό να καθορίσει τον τύπο του κάθε κελιού (είτε είναι τρίγωνο είτε τετράπλευρο), που απαρτίζουν τα τετράεδρα, τα πρίσματα και τις πυραμίδες του πλέγματος. Η μοναδική δομή δεδομένων του πλέγματος, που είναι διαθέσιμη μέχρι τώρα για τον αλγόριθμο, είναι η λίστα με τις τέσσερις, πέντε και έξι κορυφές του κάθε τετραέδρου, πρίσματος και πυραμίδας αντίστοιχα. Γενικά η συγκεκριμένη υπορουτίνα πρέπει να εξετάσει τα τέσσερα τρίγωνα που απαρτίζουν κάθε τετράεδρο αρχικά και είτε να τα αναγνωρίσει ως νέα τρίγωνα, δίνοντάς τους μια αρίθμηση, είτε να τα αγνοήσει, σε περίπτωση που ταυτοποιηθούν με άλλα που έχουν ήδη προσπελαθεί. Παράλληλα, πρέπει σε κάθε νέο τρίγωνο να ορίσει τους τρεις κόμβους που αποτελούν τις κορυφές του. Σε κάθε περίπτωση, η αρίθμηση των εδρών των τετραέδρων και των κορυφών των τριγώνων δεν είναι τυχαία. Σύμφωνα με την αρίθμηση των κορυφών κάθε τετραέδρου, που έχει ληφθεί από το αντίστοιχο αρχείο εισόδου, απέναντι από την *i* κορυφή του τετραέδρου ορίζεται η *i* έδρα του. Η σάρωση όλων των τετραέδρων και η εξαντλητική σύγκριση κάθε έδρας του με τις ήδη αναγνωρισμένες έδρες κρίνεται απαγορευτική, καθώς ο όγκος δεδομένων που προκύπτει έχει υπερβολικά μεγάλο μέγεθος, οπότε συνεπάγεται ιδιαίτερα αυξημένες υπολογιστικές απαιτήσεις. Η λειτουργία λοιπόν της υπορουτίνας πρέπει να βασιστεί σε μια περισσότερο αποδοτική ιδέα.

Η εφαρμογή της εν λόγω υπορουτίνας βασίστηκε σε μια διαφορετική αλλά εξίσου απλή δομή δεδομένων, που καλείται «πίνακας επαναδιατύπωσης» (hash table). [Η χρήση της παραπάνω δομής δεδομένων θεωρείται από τη βιβλιογραφία ιδανική για την συγκεκριμένη λειτουργία και για τρισδιάστατο μη-δομημένο πλέγμα].

Ειδικότερα, σαρώνονται όλα τα τετράεδρα και εξετάζονται διαδοχικά οι τέσσερις έδρες κάθε τετραέδρου. Για κάθε έδρα, προσδιορίζεται ένα κύριο κλειδί (KEY) και μια διατεταγμένη σειρά από τρία κλειδιά *(K1,K2,K3).* Συγκεκριμένα, έστω ότι μια έδρα έχει τρεις κορυφές, τις *NC1, NC2, NC3*. Στην πραγματικότητα, τα *NC1, NC2, NC3* είναι απλά ακέραιες τιμές. Από τον ορισμό του κυρίως κλειδιού γίνεται αντιληπτό ότι σε ένα πλέγμα από *n* κόμβους είναι δυνατό να βρεθούν έως και *n* διαφορετικά κύρια κλειδιά. Στην πράξη βέβαια δεν συμβαίνει αυτό, καθώς αναμένεται να βρεθούν έδρες με το ίδιο κύριο κλειδί. Ωστόσο η διατεταγμένη τριάδα των κλειδιών *K1,K2,K3* είναι μοναδική για κάθε έδρα. Το κύριο κλειδί (KEY) χρησιμοποιείται για την συγκρότηση ενός πίνακα (hash table), ο οποίος αναφέρει για κάθε κύριο κλειδί πόσες έδρες έχουν εντοπιστεί να χαρακτηρίζονται από αυτό. Εφ' όσον μπορούν να βρεθούν έως και *n* διαφορετικά κλειδιά, ο πίνακας θα έχει *n* γραμμές, καθεμία εκ των οποίων θα αναφέρεται και σε ένα πιθανό κύριο κλειδί. Σε όλες τις γραμμές δεν παρουσιάζεται ο ίδιος αριθμός στηλών, αλλά τόσες όσες και οι έδρες που χαρακτηρίζονται από το αντίστοιχο κλειδί. Το πλήθος των εδρών που

έχουν το ίδιο κύριο κλειδί *i* δίνεται από μια μεταβλητή, έστω την *hashindex(i)*. Σχηματικά:



Πίνακας 4: Σχηματική αναπαράσταση του πίνακα επαναδιατύπωσης.

Η συγκρότηση του παραπάνω πίνακα γίνεται δυναμικά, καθώς σαρώνονται τα τετράεδρα. Για κάθε ένα, και για κάθε μία έδρα του *j* με *j=1,..,4*, υπολογίζονται τα *KEY, K1, K2, K3*. Στη συνέχεια ελέγχεται αν έχουν εντοπιστεί ήδη άλλες έδρες με το συγκεκριμένο κύριο κλειδί, έστω το κλειδί *i*. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε η υπό εξέταση έδρα αποτελεί μια νέα έδρα, οπότε αυτή παίρνει αρίθμηση, ενημερώνεται ο πίνακας στην αντίστοιχη γραμμή, αποθηκεύονται σε λίστες οι τρεις κορυφές της και η διατεταγμένη τριάδα *K1,K2,K3,* ενημερώνεται ότι η j-οστή έδρα του τετραέδρου είναι η συγκεκριμένη και αυξάνεται κατά ένα το πλήθος των εδρών, που έχουν αναγνωριστεί. Στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή έχουν ήδη εντοπιστεί και άλλες έδρες με το ίδιο κλειδί *i* (περίπτωση hashindex(i)>0), τότε η υπό εξέταση έδρα συγκρίνεται με τις έδρες που αναφέρονται στην αντίστοιχη γραμμή του πίνακα. Το πλήθος των συγκρίσεων που θα γίνουν καθορίζεται από την μεταβλητή hashindex(i). Κατά τη σύγκριση ελέγχεται η διατεταγμένη τριάδα των κλειδιών *K1,K2,K3*. Αν αυτή είναι ίδια για τις δύο έδρες, τότε έχουμε ταυτοποίηση και απλά προσπελαύνεται μια έδρα, που έχει ήδη αναγνωριστεί και αριθμηθεί, οπότε απλά ενημερώνεται ότι η συγκεκριμένη είναι η *j*-οστή έδρα του τετραέδρου. Αν κατά τις συγκρίσεις δεν βρεθεί κάποια έδρα της αντίστοιχης γραμμής του πίνακα να συμπίπτει με την υπό εξέταση έδρα, τότε απλά εντοπίζεται μια νέα έδρα, που τυχαίνει να έχει ίδιο κύριο κλειδί με άλλες έδρες, οπότε γίνονται οι ίδιες ενέργειες που έγιναν κατά τον εντοπισμό νέας έδρας.

Η υπορουτίνα, που μόλις περιγράφτηκε, χαρακτηρίζεται από αξιοσημείωτη αποδοτικότητα, αν συγκριθεί με αυτή της εξαντλητικής σύγκρισης κάθε έδρας με τις ήδη αναγνωρισμένες. Για την ολοκληρωμένη διαδικασία αυτής της υπορουτίνας, η τακτική αυτή εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο για τις πυραμίδες και τα πρίσματα με τον κατάλληλο αριθμό τριγώνων κάθε φορά. Η χρήση του πίνακα και του κύριου κλειδιού, που μπορεί να είναι το ίδιο για περισσότερες από μία έδρες, μειώνει

δραστικά το πλήθος των συγκρίσεων που απαιτούνται για την αναγνώριση μιας νέας έδρας και, κατά συνέπεια, μειώνει αποτελεσματικά την υπολογιστική απαίτηση της υπορουτίνας. Στο τέλος της λειτουργίας της έχουν παραχθεί δύο νέες απαραίτητες δομές δεδομένων του πλέγματος: η πρώτη περιέχει τις τέσσερις έδρες κάθε τετραέδρου και η δεύτερη τις τρεις κορυφές κάθε έδρας (και τα αντίστοιχα για τα υπόλοιπα σχήματα).

3.3.3 Καθορισμός ακμών

Στη συνέχεια καλείται μια υπορουτίνα, που σκοπό έχει τον καθορισμό των ακμών του πλέγματος. Η λειτουργία της βασίζεται στην αξιοποίηση της δομής των κορυφών των τριγώνων και παραλληλογράμμων. Ως αποτέλεσμα αποδίδει μια δομή, που περιέχει τους ακραίους κόμβους κάθε ακμής και μια άλλη, που καθορίζει τις ακμές που συγκροτούν κάθε τρίγωνο. Η λογική στηρίζεται στη σάρωση όλων των τριγώνων και παραλληλογράμμων αντίστοιχα και στην απαρίθμηση των ακμών τους, αποδίδοντας μια μόνο αρίθμηση σε κάθε ακμή. Κατά τον καθορισμό των ακμών κάθε τριγώνου και παραλληλογράμμου, απέναντι από την *i* κορυφή εντοπίζεται η *i* ακμή του τριγώνου. Η υλοποίηση της υπορουτίνας βασίστηκε σε έναν πίνακα «επαναδιατύπωσης» (hash table).

Σύμφωνα με αυτόν, σαρώνονται όλα τα τρίγωνα και παραλληλόγραμμα και εξετάζονται μια προς μια οι ακμές, που σχηματίζονται από τις κορυφές τους ανά δυο. Για κάθε ακμή ορίζεται το κύριο κλειδί (KEY) και μια διατεταγμένη δυάδα κλειδιών *(K1,K2)* συναρτήσει των ακραίων κόμβων *NA1* και *NA2* της ακμής.

Όμοια με την προηγούμενη υπορουτίνα κατά την σάρωση των τριγώνων αρχικά και των αντίστοιχων ακμών που σχηματίζουν, συγκροτείται ο πίνακας επαναδιατύπωσης (hash table), χρησιμοποιώντας το κύριο κλειδί κάθε ακμής. Εξετάζοντας την j-οστή ακμή κάθε τριγώνου, αφού προσδιοριστεί το κύριο κλειδί και η διατεταγμένη δυάδα κλειδιών, εξετάζεται αν έχουν ήδη βρεθεί ακμές, που να έχουν το ίδιο κύριο κλειδί και, αν υπάρχουν, ελέγχεται το πλήθος τους. Αν δεν υπάρχει άλλη ακμή με το ίδιο κύριο κλειδί, τότε η ακμή θεωρείται νέα, οπότε λαμβάνει αρίθμηση, ορίζονται οι ακραίοι κόμβοι της, ενημερώνεται ο πίνακας, αποθηκεύεται η διατεταγμένη δυάδα κλειδιών της και αυξάνει κατά ένα το πλήθος των ακμών που έχουν εντοπιστεί. Στην αντίθετη περίπτωση, συγκρίνεται η διατεταγμένη δυάδα κλειδιών της ακμής που εξετάζεται με τις αντίστοιχες δυάδες των ακμών που υποδεικνύει ο πίνακας. Επειδή ακριβώς κάθε δυάδα είναι μοναδική για κάθε ακμή, σε αντίθεση με το κύριο κλειδί, η εύρεση μιας ακμής του πίνακα με ίδια δυάδα με την αντίστοιχη της ακμής που εξετάζεται σημαίνει ότι η ακμή προσπελαύνεται για τουλάχιστον δεύτερη φορά (ταυτοποίηση ακμών), οπότε απλά ενημερώνεται η ταυτότητα της j-οστής ακμής του τριγώνου. Εάν ωστόσο δεν υπάρξει ταυτοποίηση κατά τις συγκρίσεις, η ακμή αντιμετωπίζεται ως νέα και διεξάγονται οι αντίστοιχες ενέργειες. Με τον ίδιο τρόπο, περατώνεται και η διαδικασία για τα παραλληλόγραμμα. Η χρήση της συγκεκριμένης δομής (hash table) προσφέρει αξιοσημείωτη αποδοτικότητα στην υπορουτίνα μειώνοντας αισθητά το υπολογιστικό κόστος.

3.3.4 Ανάθεση δεικτών (index)

Επόμενο βήμα αποτελεί η κλήση της συνάρτησης που σχετίζεται με την ανάθεση των δεικτών (index) στον τύπο στοιχείων ή στους κόμβους του πλέγματος. Ένας δείκτης μπορεί να αναφέρεται είτε σε κάποιο κόμβο είτε σε κάποιο στοιχείο, υποδεικνύοντας άμεσα την τοποθεσία του στο πλέγμα που εξετάζεται. Η συνάρτηση που καλείται εξαρτάται άμεσα από το format του αρχείου εισόδου του πλέγματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δύο αρχεία εισόδου με διαφορετικό format, που περιγράφουν το ίδιο πλέγμα, έχουν διαφορετική δομή, αλλά προσφέρουν και διαφορετικές πληροφορίες. Ανάλογα λοιπόν με το format του αρχείου εισόδου καλείται και η αντίστοιχη υπορουτίνα, που αξιοποιεί τα δεδομένα εισόδου και αναθέτει δείκτες στις δομές δεδομένων που αναπτύχθηκαν.

Ένα αρχείο εισόδου πλέγματος με προκαθορισμένο format παρέχει εκτός από τη λίστα των τετραέδρων που απαρτίζουν το τρισδιάστατο πλέγμα, τους δείκτες των κόμβων και τις συντεταγμένες των κόμβων. Πρόκειται για μια αυθαίρετη δομή. Χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι οι δείκτες είναι ουσιαστικά προεπιλεγμένες τιμές, που δίνουν άμεση πληροφορία για τη σχετική θέση του κάθε κόμβου στο πλέγμα. Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται όλες οι ισχύουσες τιμές, που μπορεί να πάρει ο δείκτης ενός κόμβου καθώς και η αντίστοιχη θέση του:

Τιμή δείκτη	**Θέση κόμβου**
0	Εσωτερικό πλέγματος
1	Επιφάνεια της υπό εξέταση γεωμετρίας
2	Όριο εξόδου της ροής (outlet)
3	Όριο εισόδου της ροής (inlet)
51	Στερεό τοίχωμα (solid wall)
91	Τομή γεωμετρίας-στερεού τοιχώματος
92	Τομή ορίου εξόδου της ροής-στερεού τοιχώματος
93	Τομή ορίου εισόδου της ροής-στερεού τοιχώματος
23	Τομή ορίου εισόδου της ροής- ορίου εξόδου της ροής-στερεού τοιχώματος
32	Τομή ορίου εισόδου της ροής- ορίου εξόδου της ροής

Πίνακας 5: Αναπαράσταση δεικτών για κάθε κόμβο

Με δεδομένους τους δείκτες των κόμβων του πλέγματος από το αρχείο εισόδου, η υπορουτίνα αποδίδει αντίστοιχους δείκτες στους τύπους των στοιχείων του πλέγματος. Οι δομές αυτές είναι απαραίτητες για τον επιλύτη, καθώς στη συνέχεια θα ανατεθούν οι οριακές συνθήκες στα όρια του πεδίου της ροής,

χρησιμοποιώντας τους δείκτες τόσο των στοιχείων, όσο και των κόμβων. Στη συνέχεια παρατίθεται ο πίνακας με τις ισχύουσες τιμές που μπορεί να πάρει ο δείκτης ενός στοιχείου και η αντίστοιχη σχετική θέση του:

Τιμή δείκτη	***Θέση στοιχείου***
0	Εσωτερικό πλέγματος
1	Επιφάνεια της υπό εξέτασης γεωμετρίας
2	Όριο εξόδου της ροής (outlet)
3	Όριο εισόδου της ροής (inlet)
51	Στερεό τοίχωμα (solid wall)

Πίνακας 6: Αναπαράσταση δεικτών για κάθε κόμβο

Για την ανάθεση των δεικτών των κόμβων των στοιχείων, ακολουθήθηκε μια άλλη διαδικασία. Προς διευκόλυνση της όλης διαδικασίας, έγιναν ορισμένες μεταβολές στους δείκτες μερικών κόμβων σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα:

Τιμή δείκτη	***Αντίστοιχη τιμή δείκτη***
91	700
51	500
0	5000

Πίνακας 7: Αναπαράσταση δεικτών για κάθε κόμβο

Και χρησιμοποιήθηκε μια υπορουτίνα κατά την οποία καθορίστηκε με βάση τον εκάστοτε δείκτη σε ποιο σημείο ανήκει ο κάθε κόμβος και το κάθε στοιχείο του πλέγματος. Και αφού επιτεύχθηκε αυτό, η προσωρινή μεταβολή των δεικτών αυτών αναιρέθηκε.

Στη συνέχεια ορίστηκε ένας μετρητής κόμβων, όπου με βάση την τιμή του δείκτη, καθορίζεται ο αριθμός των κόμβων που στην ουσία ανήκει σε κάθε περιοχή του πλέγματος. Αυτή η κίνηση επεκτάθηκε και για τους οριακούς κόμβους, τους κόμβους δηλαδή που απαρτίζουν την υπό εξέταση γεωμετρία, συμπεριλαμβανομένης και τους κοινούς κόμβους (τομές) με το περιεχόμενό τους.
Προτού προβούμε στην πραγματοποίηση υπολογισμών, χρησιμοποιήθηκε μια άλλη υπορουτίνα, κατά την οποία γίνεται η εξαγωγή των δεδομένων για την απεικόνιση του όλου πλέγματος στο format του λογισμικού tecplot.

Επόμενο βήμα αποτελεί η δημιουργία του κατάλληλου συστήματος και η επίλυσή του. Με χρήση δυναμικών πινάκων και με την επιλογή της εκάστοτε Radial Basis Function, στηριζόμενοι στη θεωρία των RBF, γίνεται εφικτή η διαμόρφωση και η επίλυση του γραμμικού συστήματος. Αρχικά ορίζουμε τη γραμμική μετατόπιση των κόμβων της στερεής επιφάνειας (της πτέρυγας), όπως είχε γίνει και στο διδιάστατο πλέγμα (για την εαεροτομή). Στη συνέχεια ορίζεται και η περιστροφή της υπό εξέταση γεωμετρίας. Στα τριδιάστατα πλέγματα, η περιστροφή γίνεται ή κατά "x-y" ή κατά "x-z". Πρώτα υπολογίζεται η γωνία περιστροφής: "$tan\theta=y-y_0/x-x_0$". Στην περίπτωση όπου "$x-x_0=0$", τότε θεωρείται ότι η γωνία είναι 90^0. Έπειτα υπολογίζεται το μέτρο της απόστασης των δυο διανυσμάτων "$|r|=dsqrt[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]$". Στον ακόλουθο Πίνακα 8 παρουσιάζεται αναλυτικά η τυποποίηση της περιστροφής και για τις δυο διευθύνσεων περιστροφών.

Διεύθυνση περιστροφής	x-y
Γωνία περιστροφής	$\tan\theta = y-y_0/x-x_0$, αν $x-x_0=0 \rightarrow \theta=90^0$
Μέτρο απόστασης	$\lvert r\rvert = dsqrt[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]$
X	X = Γραμμική μετατόπιση+ x_0+ $\lvert r\rvert * \cos(f+\theta-x)$
Y	Y= Γραμμική μετατόπιση+ y_0+ $\lvert r\rvert * \sin(f+\theta-y)$
Z	Z = Γραμμική μετατόπιση+ z_0
Διεύθυνση περιστροφής	x-z
Γωνία περιστροφής	$\tan\theta = z-z_0/x-x_0$, αν $x-x_0=0 \rightarrow \theta=90^0$
Μέτρο απόστασης	$\lvert r\rvert = dsqrt[(x-x_0)^2+(z-z_0)^2]$
X	X = Γραμμική μετατόπιση+ x_0+ $\lvert r\rvert * \sin(f+\theta-x)$
Y	Y= Γραμμική μετατόπιση+ y_0
Z	Z = Γραμμική μετατόπιση+ z_0+ $\lvert r\rvert * \cos(f+\theta-z)$

Πίνακας 8: Τυποποίηση περιστροφής και για τις δυο διευθύνσεις περιστροφών

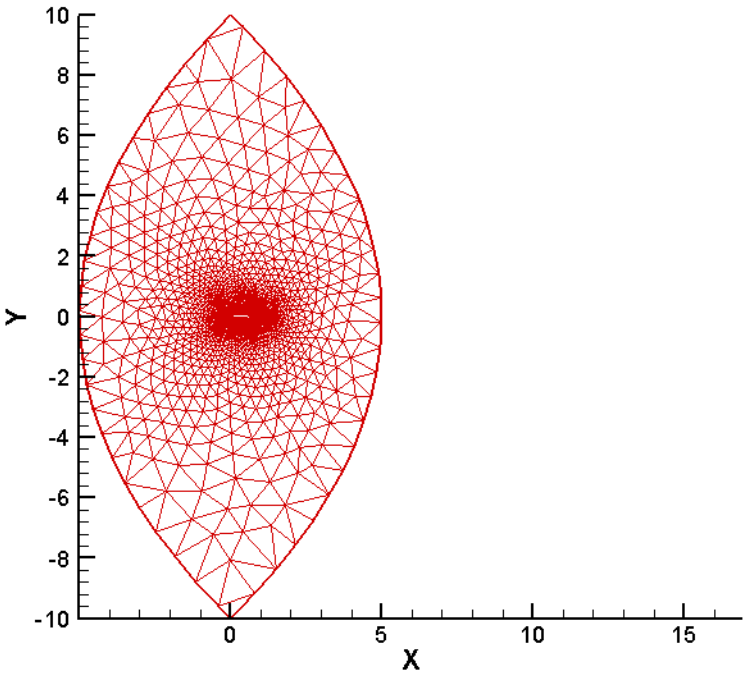
Έχοντας ορίσει τη μετατόπιση και την περιστροφή που επιθυμούμε να έχει η υπό εξέταση γεωμετρία και μόνο και έχοντας πακτώσει όλους τους υπόλοιπους κόμβους, η γραμμική επίλυση του συστήματος, στηρίζεται στη γνωστή μέθοδο της LU Decomposition. Στο σημείο αυτό καλείται η συνάρτηση αυτή, μέσα από το δηλωθέν module που περιλαμβάνει τη συνάρτηση LU Decomposition (LUDCMP) και την LU BACK SUBSTITUTION (LUBSKB). Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζεται για τον κάθε κόμβο της υπό εξέταση γεωμετρίας η μετατόπισή του, η οποία προστίθεται στην αρχική του θέση, προκειμένου να προκύψει η τελική νέα θέση.

Κεφάλαιο 4: Πιστοποίηση του αλγορίθμου

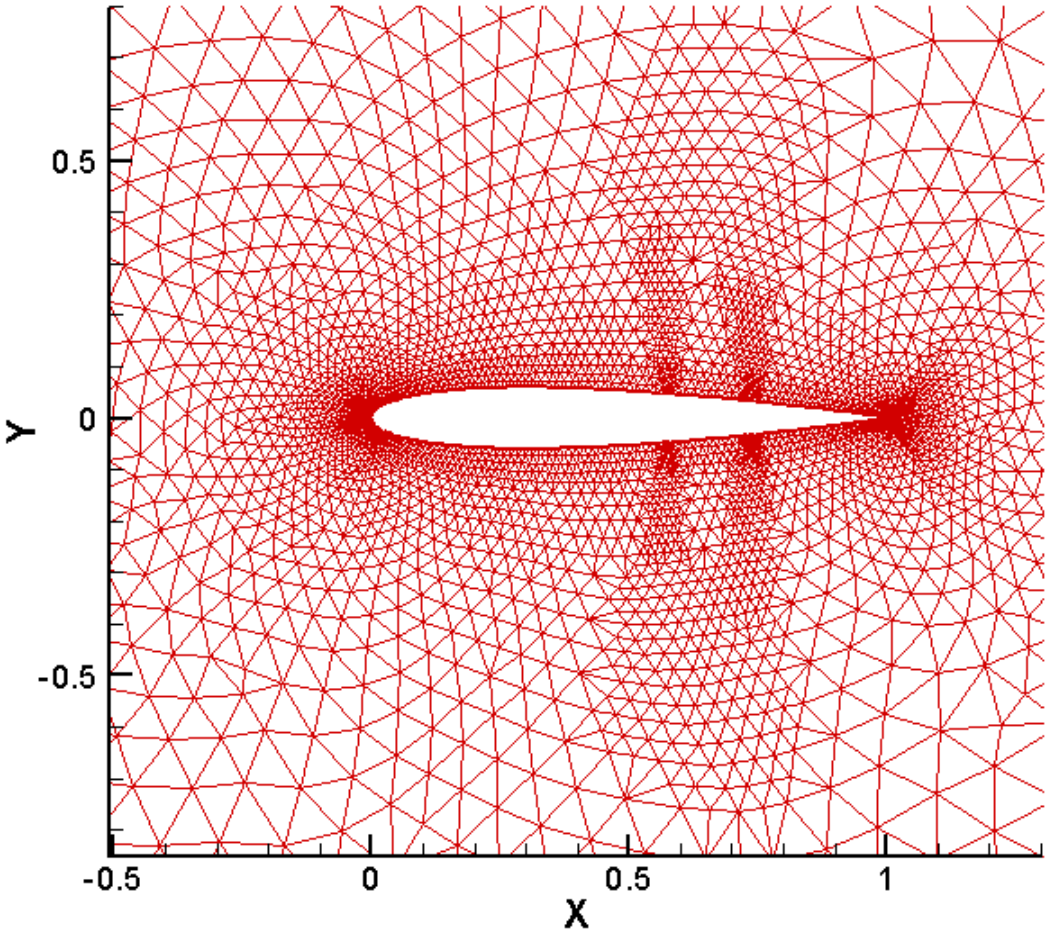
Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου, ξεκινώντας με το τριγωνικό διδιάστατο πλέγμα, συνεχίζοντας με το διδιάστατο υβριδικό πλέγμα και καταλήγοντας στο τριδιάστατο υβριδικό πλέγμα. Σκοπός είναι να παρουσιάσουμε την κάθε RBF και να αποτυπώσουμε τη συμπεριφορά όχι μόνο του πλέγματος αλλά και της αεροτομής, γι'αυτό το λόγο τα γραφήματα εστιάζουν και στο συνολικό πλέγμα αλλά και στην αεροτομή και τη συμπεριφορά του πλέγματος κοντά σε αυτήν. Αυτό επιτυγχάνεται, λαμβάνοντας κάθε φορά ορισμένες παραμέτρους όπως είναι ο συντελεστής "r" για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις όπου οι τιμές που του έχουν τεθεί με απώτερο στόχο την σύγκριση είναι 2, 5 και 8, καθώς και ο συντελεστής *"α"* για τις Multiquadric, Inverse Multiquadric και Gaussian, όπου έχει θεωρηθεί ίσο με 1 και 0.8. Επίσης σημειώνεται οτι στα διαγράμματα ακολουθήθηκε συγκεκριμένο format ονομασίας: ***(RBF,x,y,z,angle,r(const),axis-rotation(3D))***.

4.1 Τριγωνικό πλέγμα

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε πρόκειται για ένα μη δομημένο πλέγμα (που κατασκευάστηκε με το λογισμικό Delaundo 5.4), το οποίο αποτελείται από 2365 κόμβους και από 4580 τριγωνικά κελιά. Η αεροτομή που αποτέλεσε και μέρος της μελέτης πέρα από αυτή του πλέγματος, είναι η NACA0012. Ο χρόνος περάτωσης της κάθε περίπτωσης υπολογίστηκε σε περίπου 18 sec. Το πλέγμα και η αεροτομή που πρόκειται να επεξεργαστούν έχουν την ακόλουθη μορφή, που παρουσιάζεται στις Εικόνες 4.1, 4.2.



Εικόνα 4.1: Απεικόνιση του υπό εξέταση 2D τριγωνικού πλέγματος.

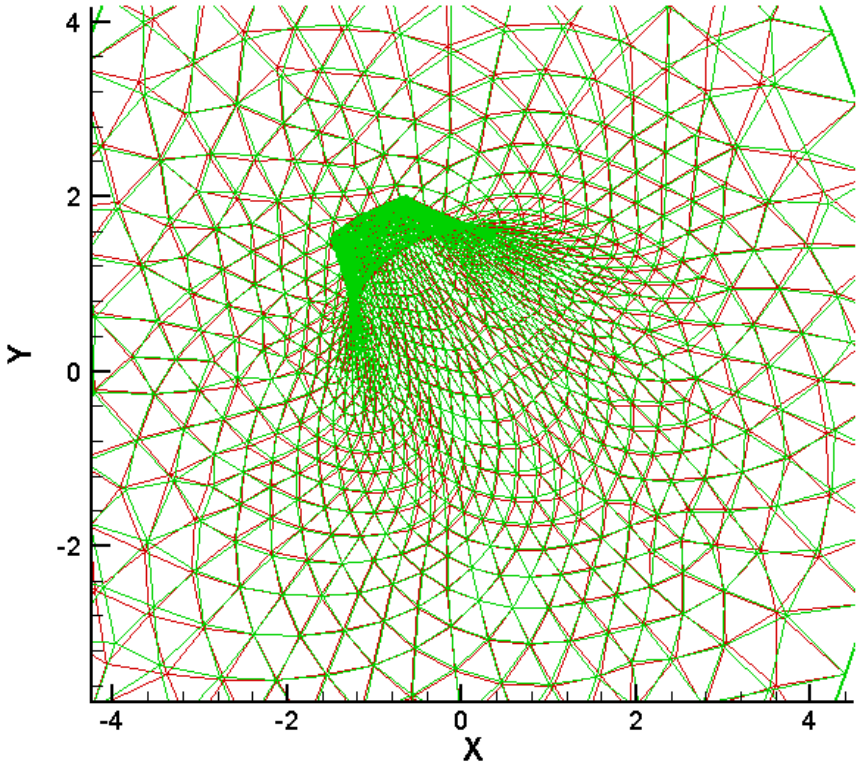


Εικόνα 4.2: Απεικόνιση του υπό εξέταση 2D πλέγματος στην περιοχή της αεροτομής.

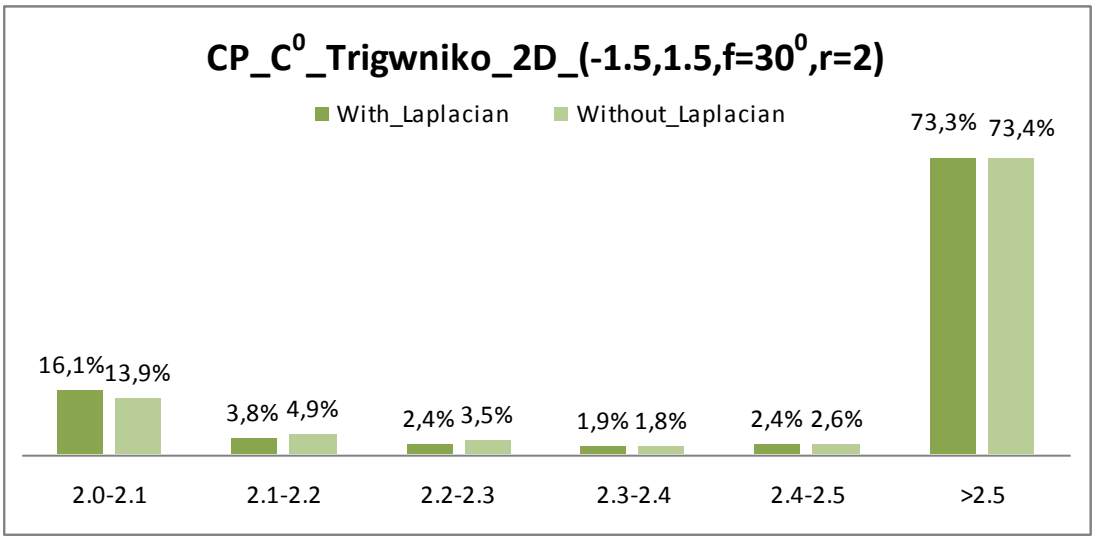
Στη συνέχεια παρατιθενται οι απεικονίσεις των αποτελεσμάτων της μεθοδολογίας που εφαρμόστηκε, για όλες τις διαφορετικές συναρτήσεις που δοκιμάστηκαν για μεταφορά και περιστροφή της αεροτομής. Επίσης παρατίθενται και τα διαγράμματα της μετρικής συνάρτησης της ποιότητας του πλέγματος, πριν και μετά την εφαρμογή της εξομάλυνσης.

Radial Basis Function με τοπική υποστήριξη (with compact support)

CP C^0 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=2)

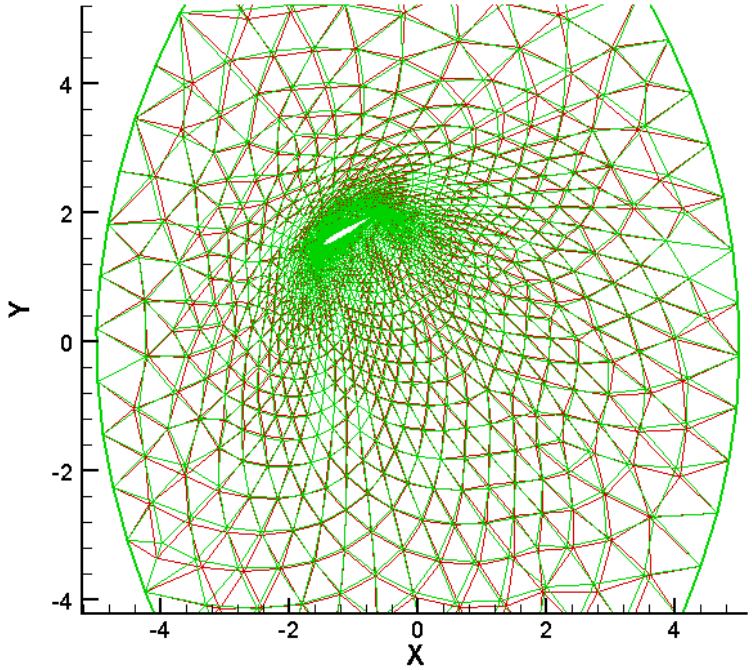


Εικόνα 4.3: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

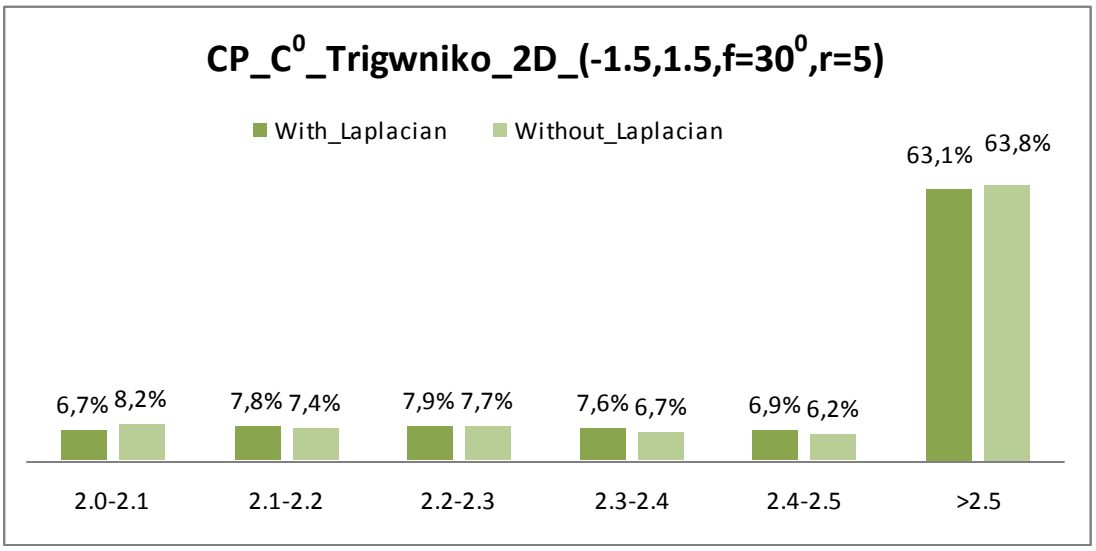


Εικόνα 4.4: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0.

CP C^0 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=5)

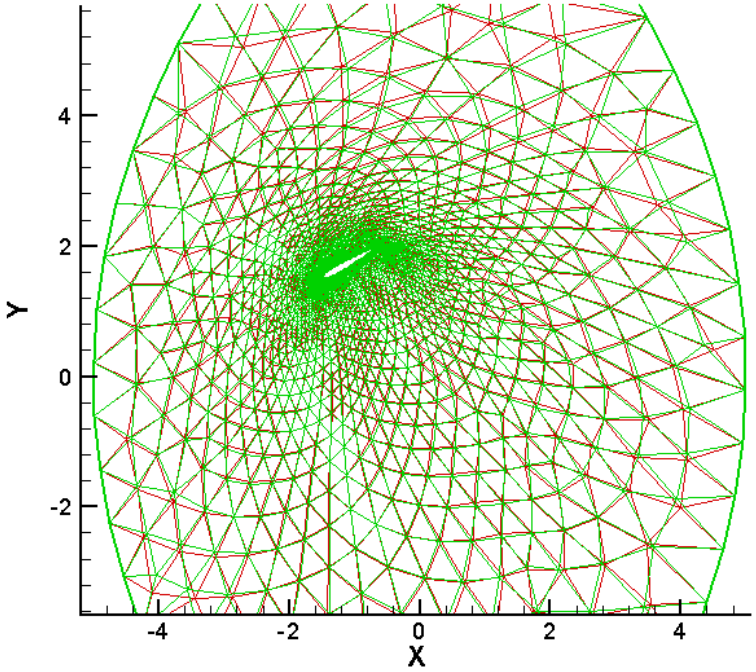


Εικόνα 4.5: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

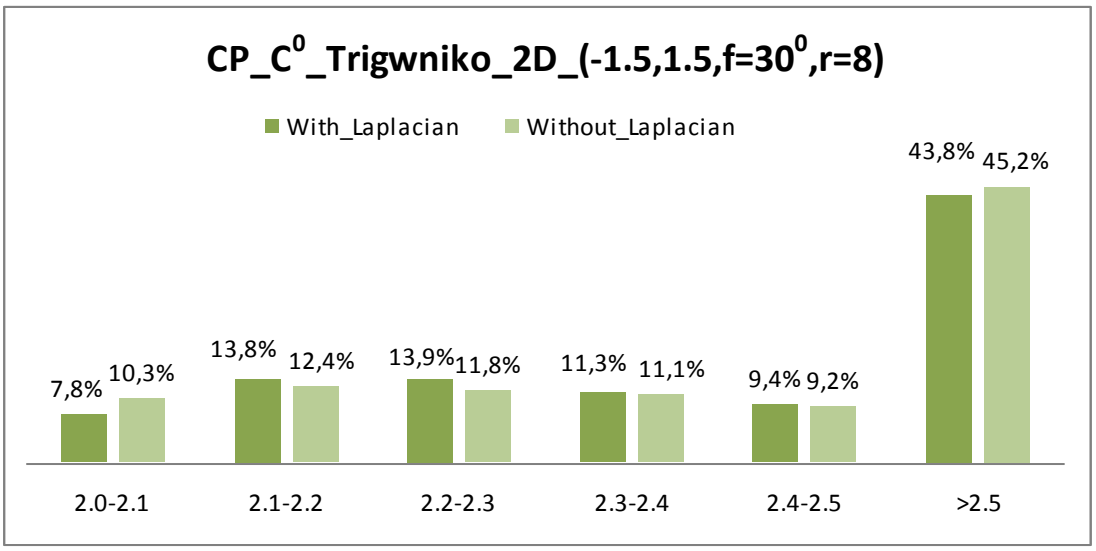


Εικόνα 4.6: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

CP C^0 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=8)

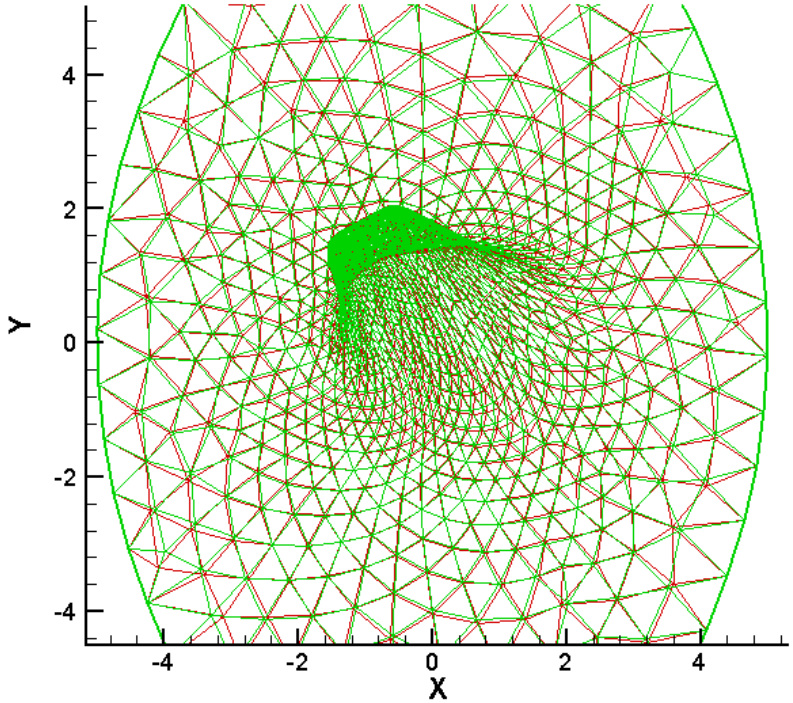


Εικόνα 4.7: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

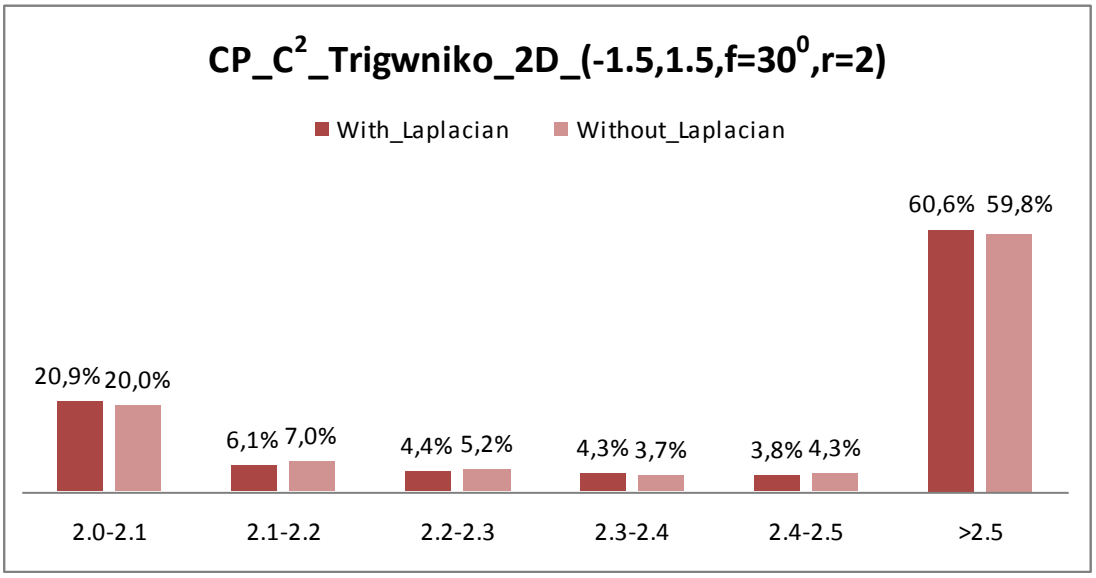


Εικόνα 4.8: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

CP C^2 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=2)

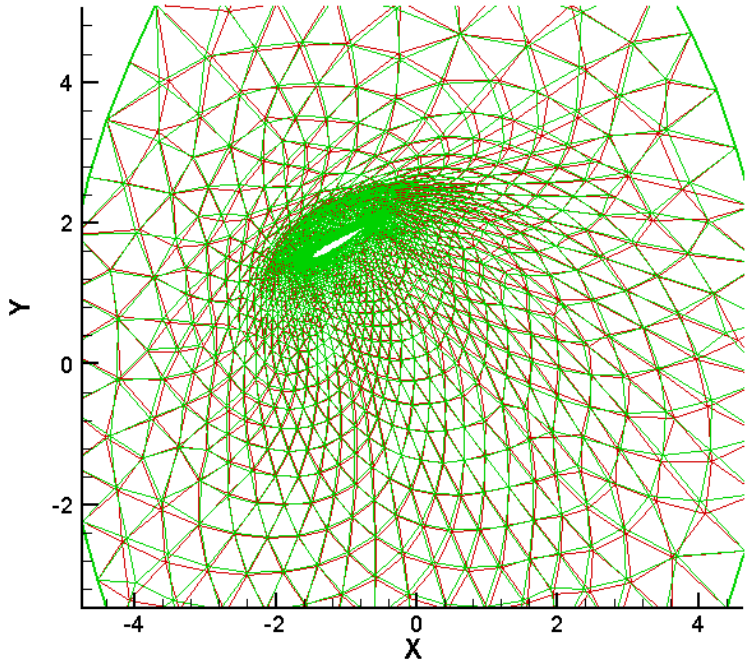


Εικόνα 4.9: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

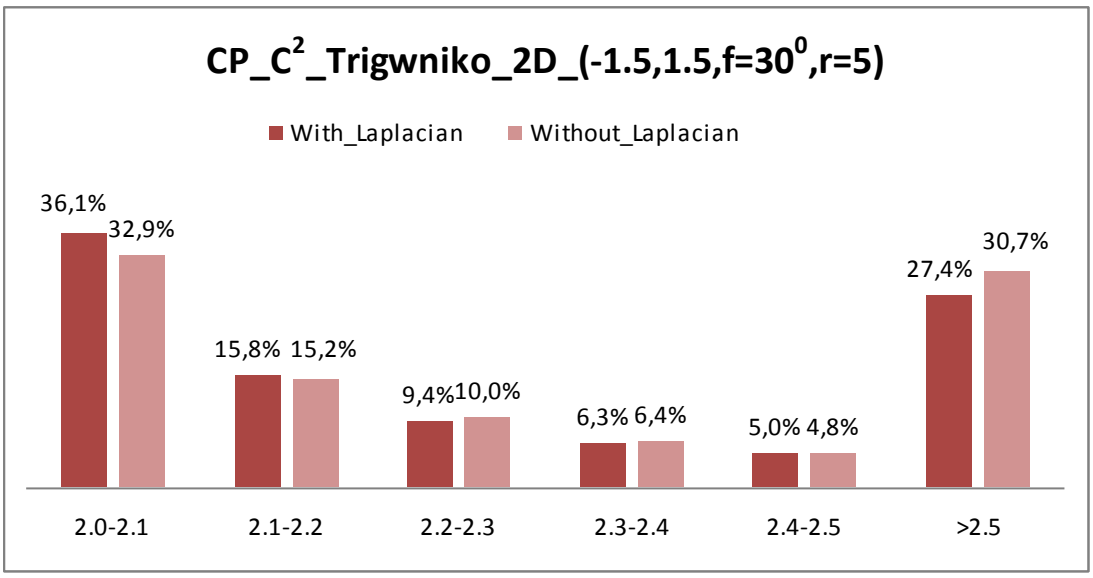


Εικόνα 4.10: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CPC2

CP C^2 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=5)

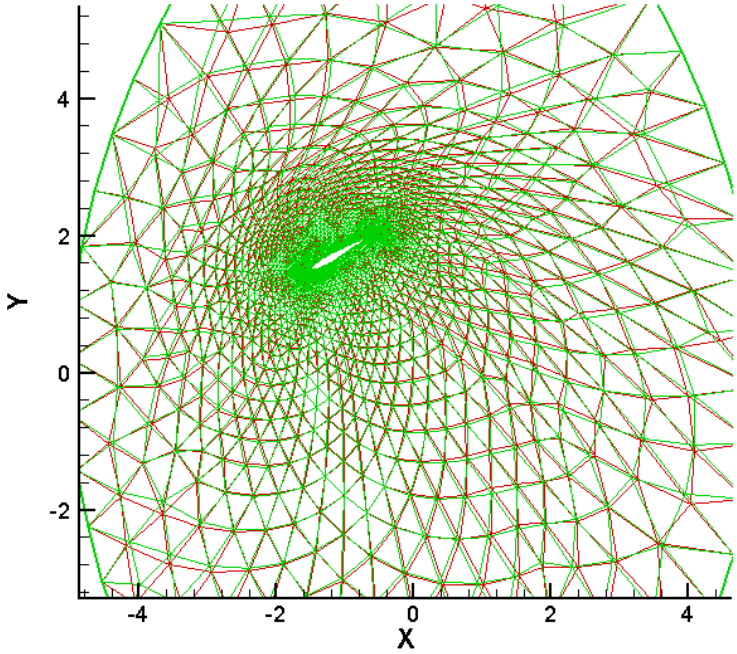


Εικόνα 4.11: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

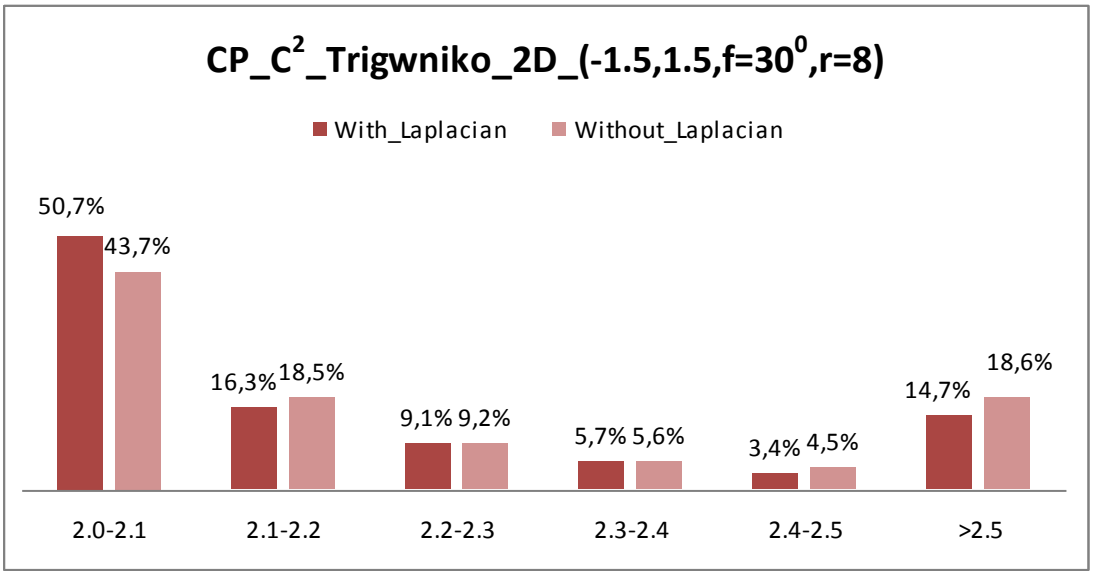


Εικόνα 4.12: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

CP C^2 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=8)

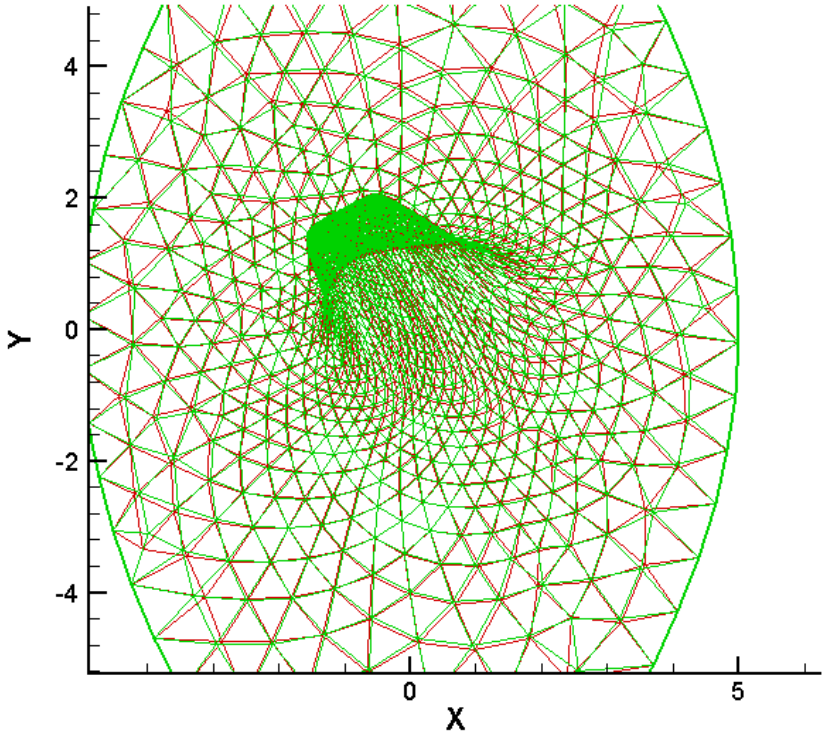


Εικόνα 4.13: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

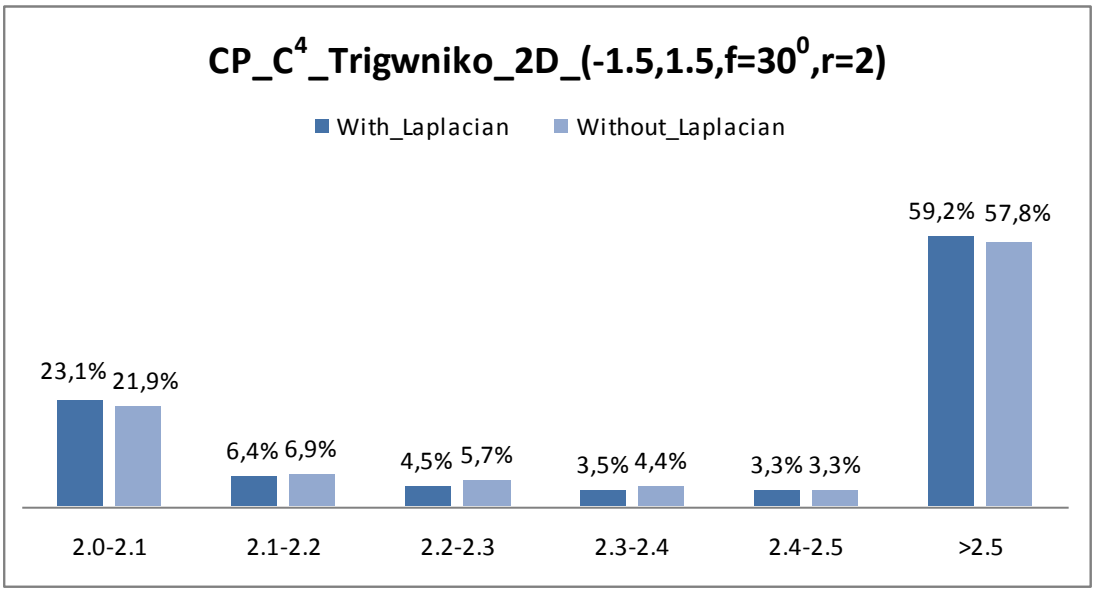


Εικόνα 4.14: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

CP C^4 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=2)

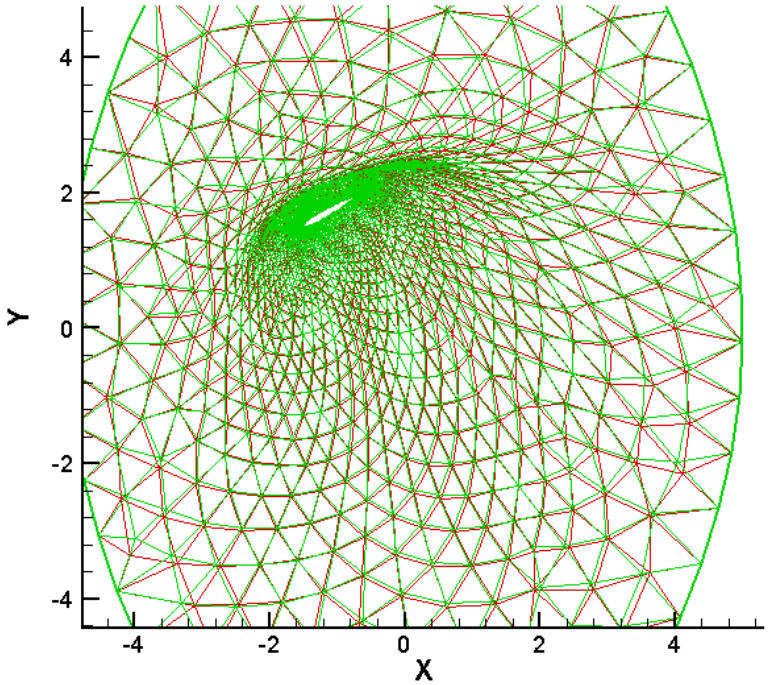


Εικόνα 4.15: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

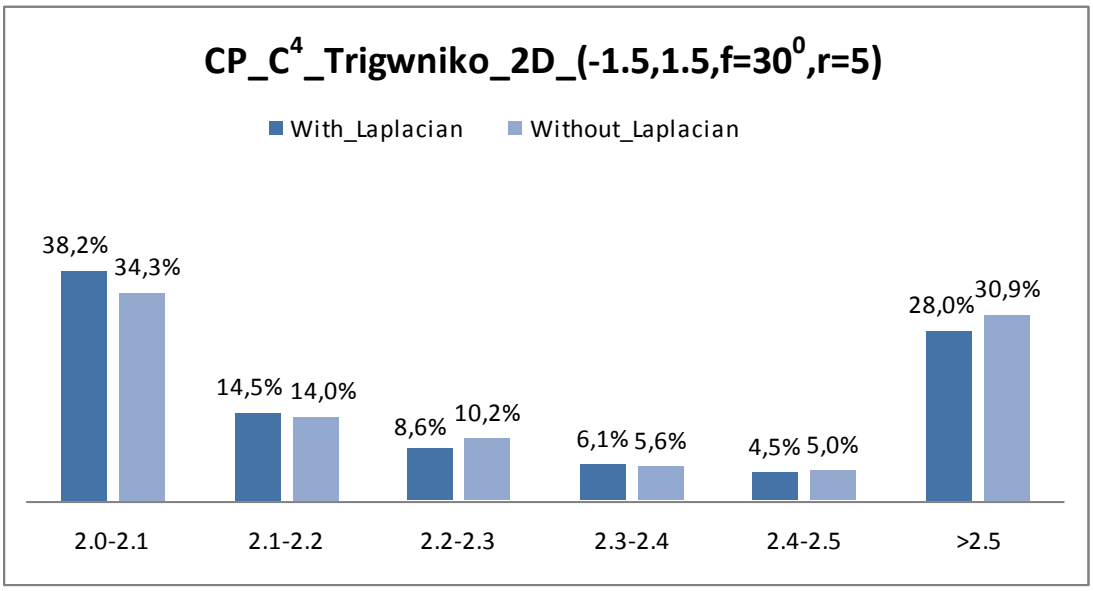


Εικόνα 4.16: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

CP C^4 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=5)

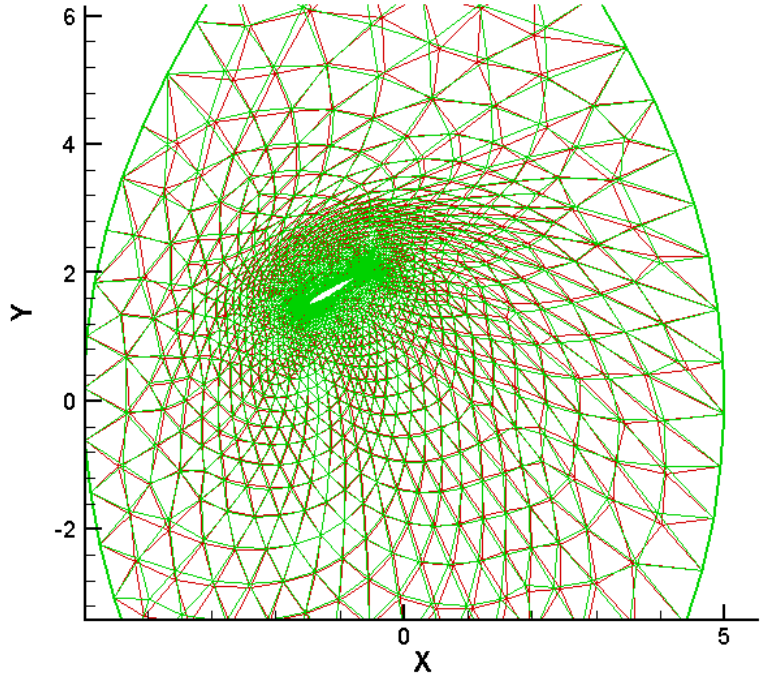


Εικόνα 4.17: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

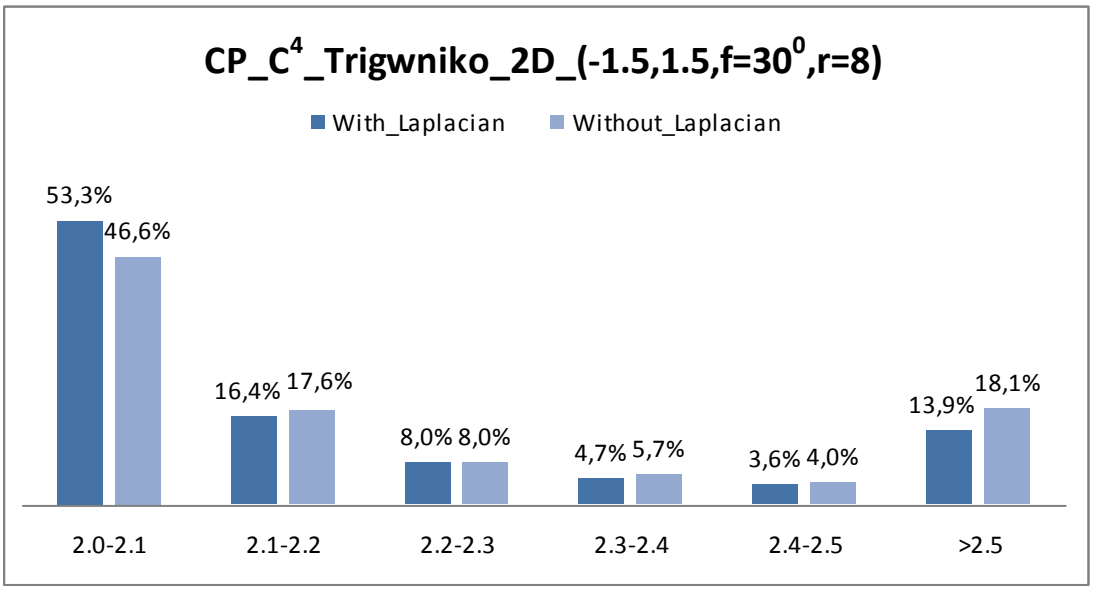


Εικόνα 4.18: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

CP C^4 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=8)

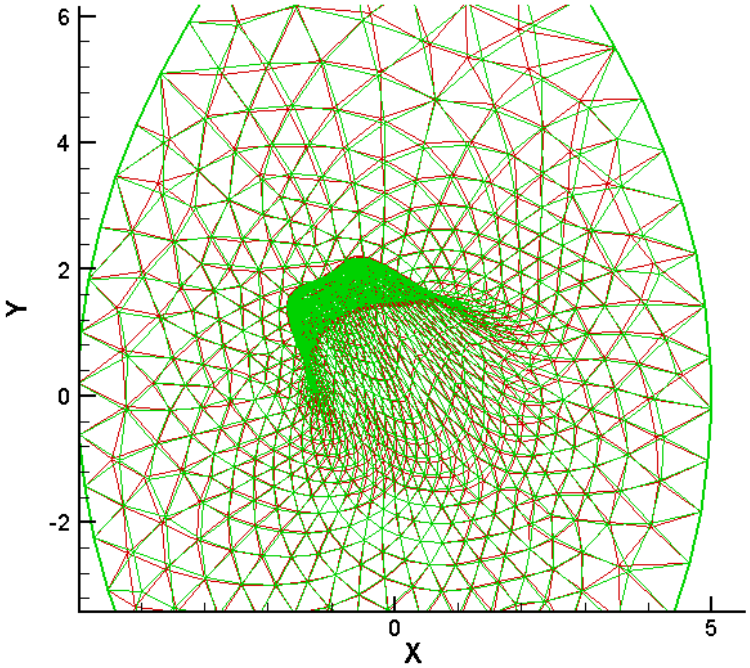


Εικόνα 4.19: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

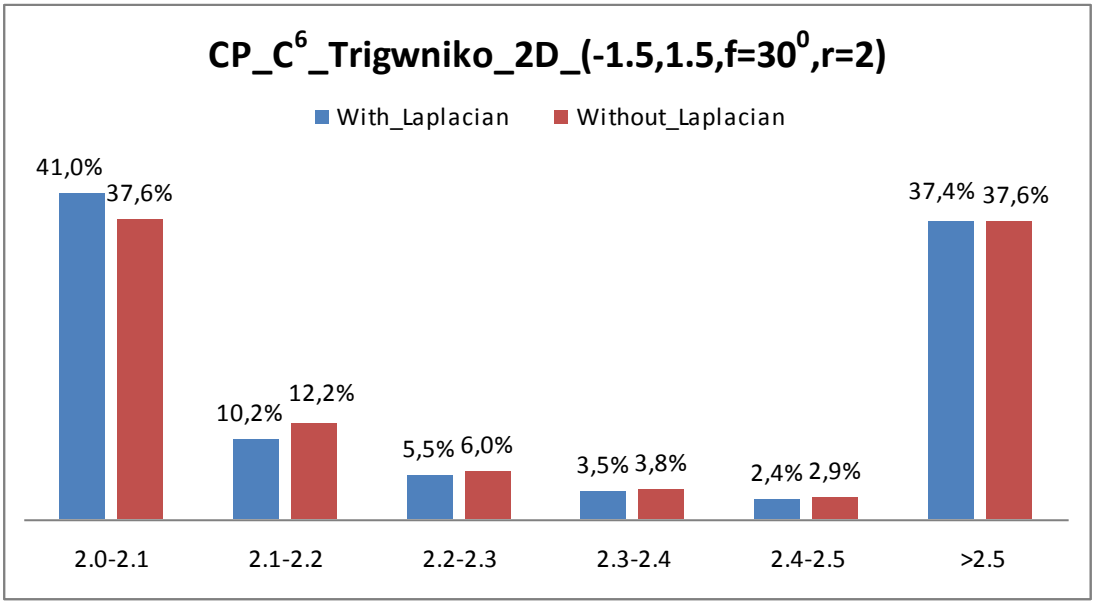


Εικόνα 4.20: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

CP C^6 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=2)

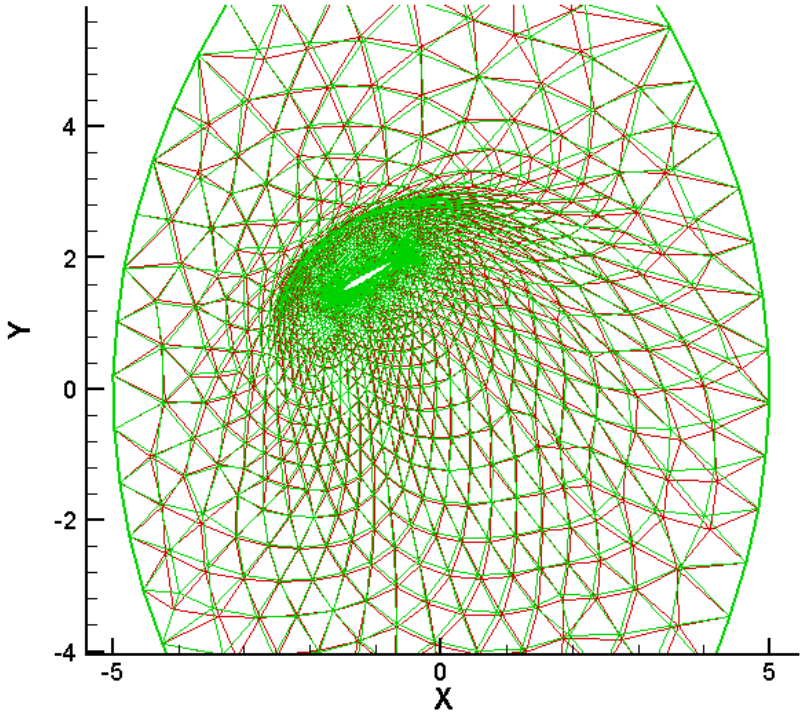


Εικόνα 4.21: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

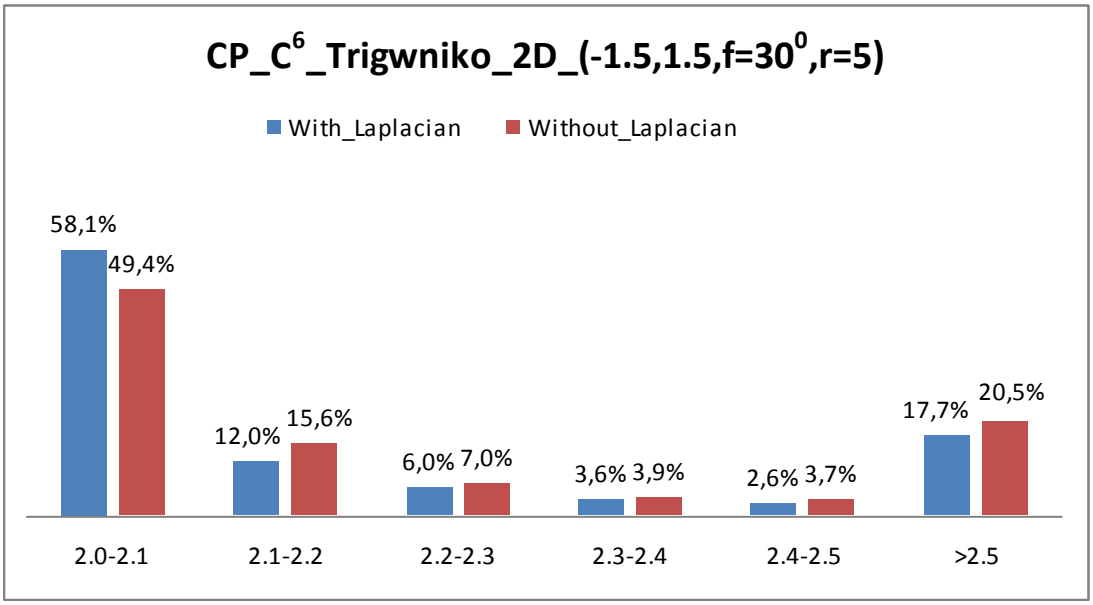


Εικόνα 4.22: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

CP C^6 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=5)

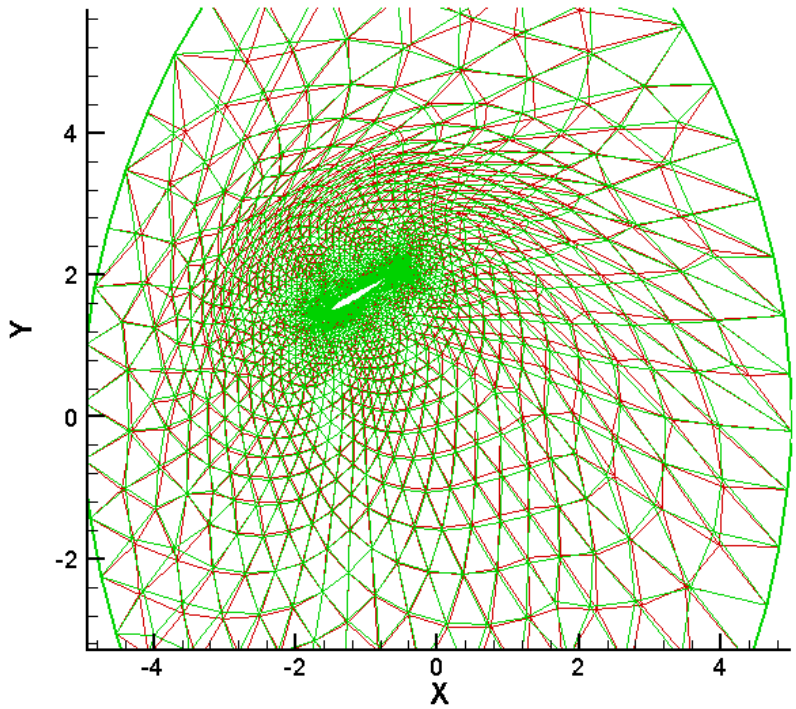


Εικόνα 4.23: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

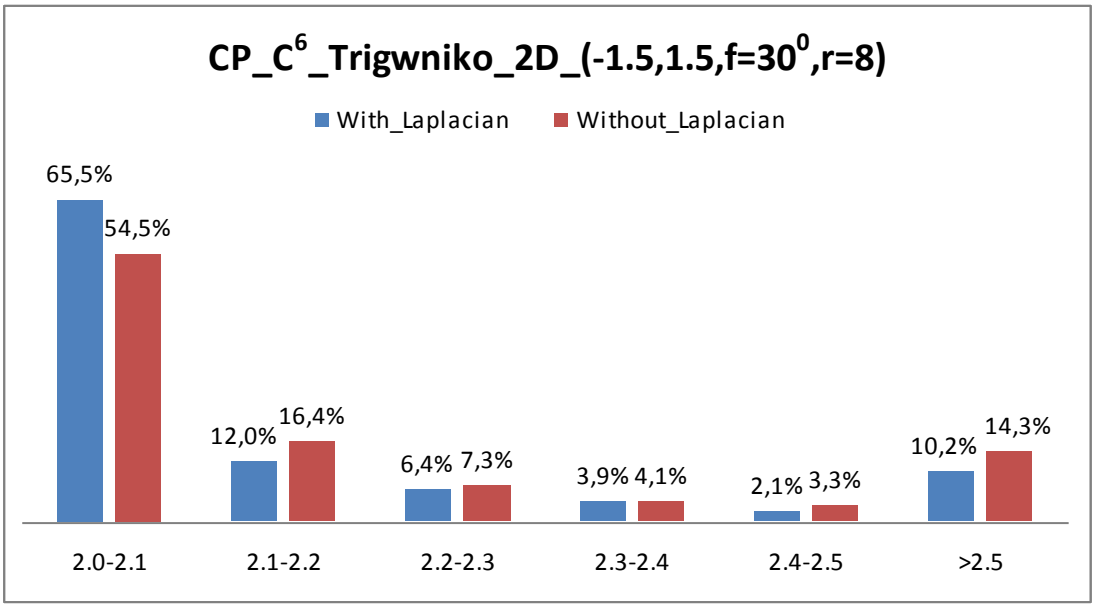


Εικόνα 4.24: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

CP C^6 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=8)

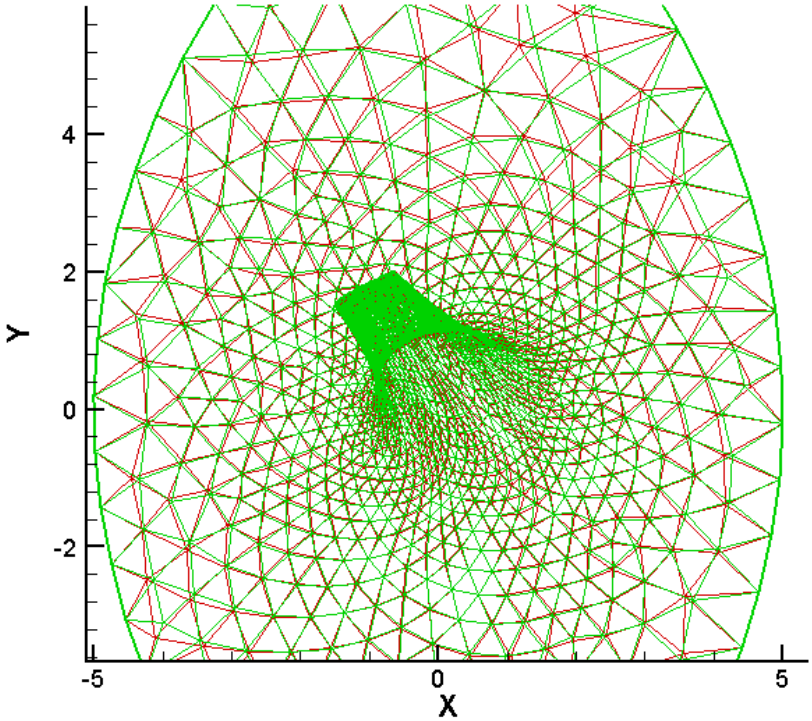


Εικόνα 4.25: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

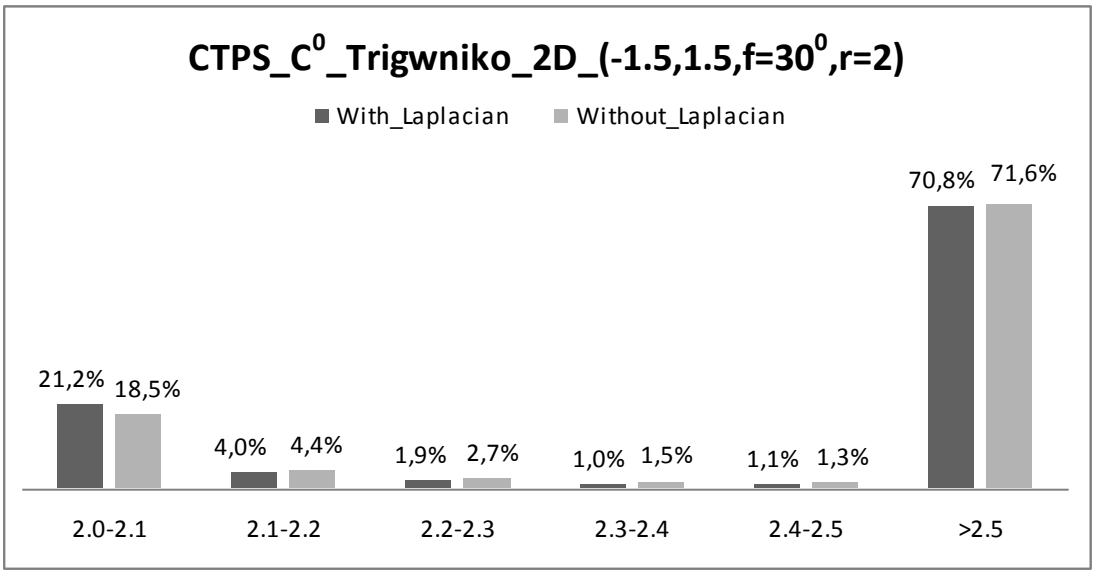


Εικόνα 4.26: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

CTPS C^0 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=2)

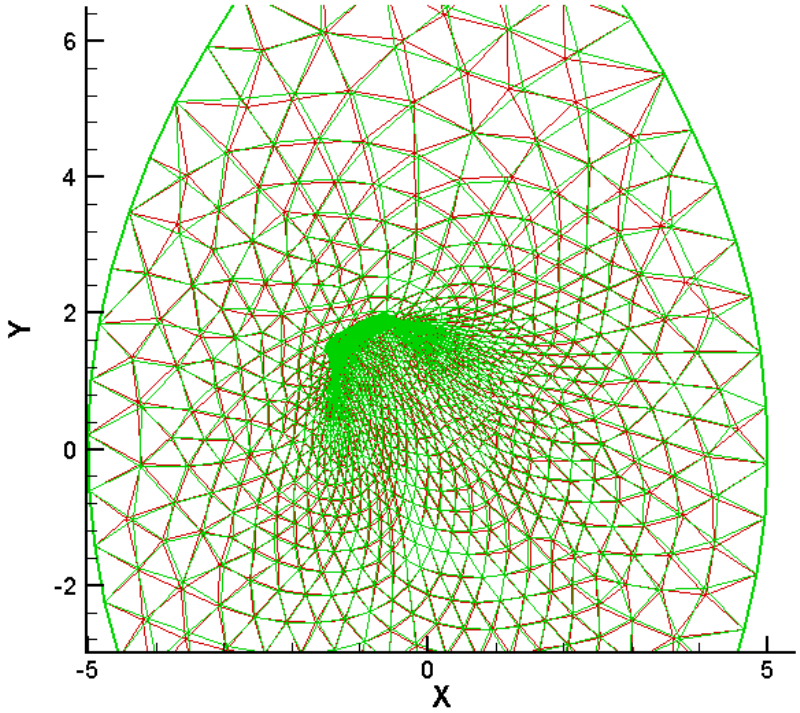


Εικόνα 4.27: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

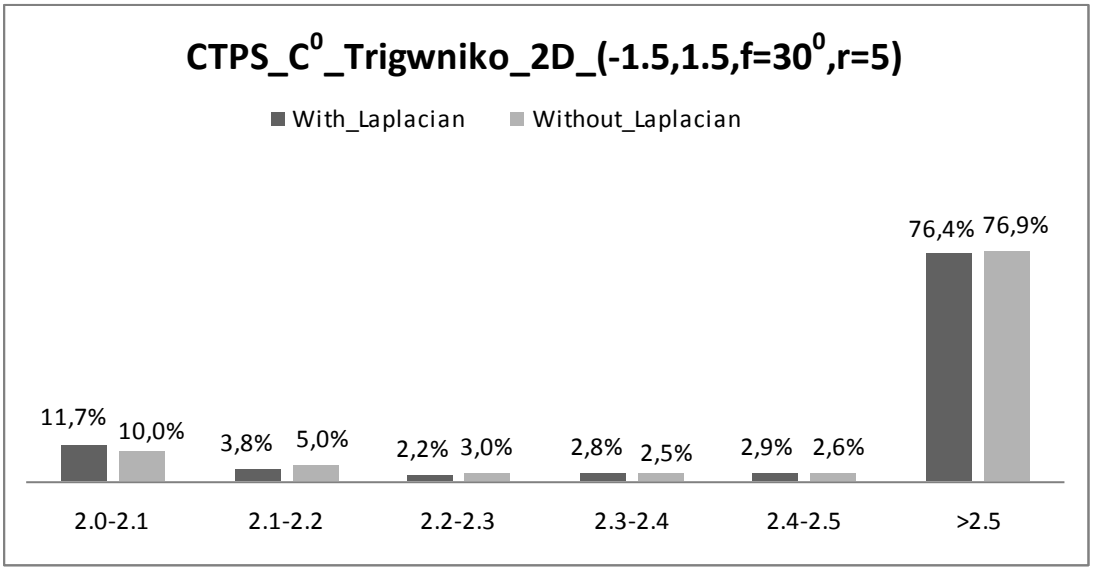


Εικόνα 4.28: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

CTPS C^0 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=5)

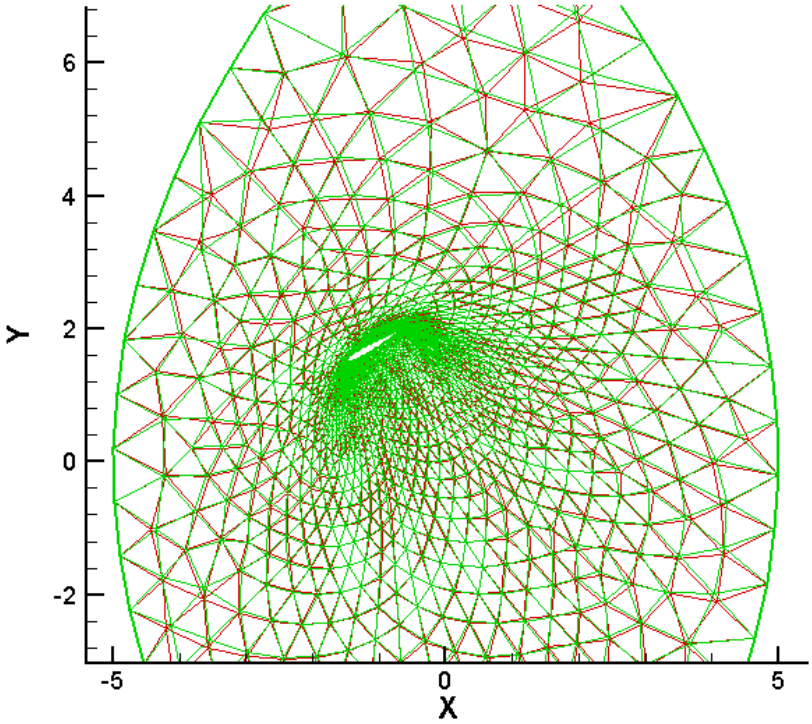


Εικόνα 4.29: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

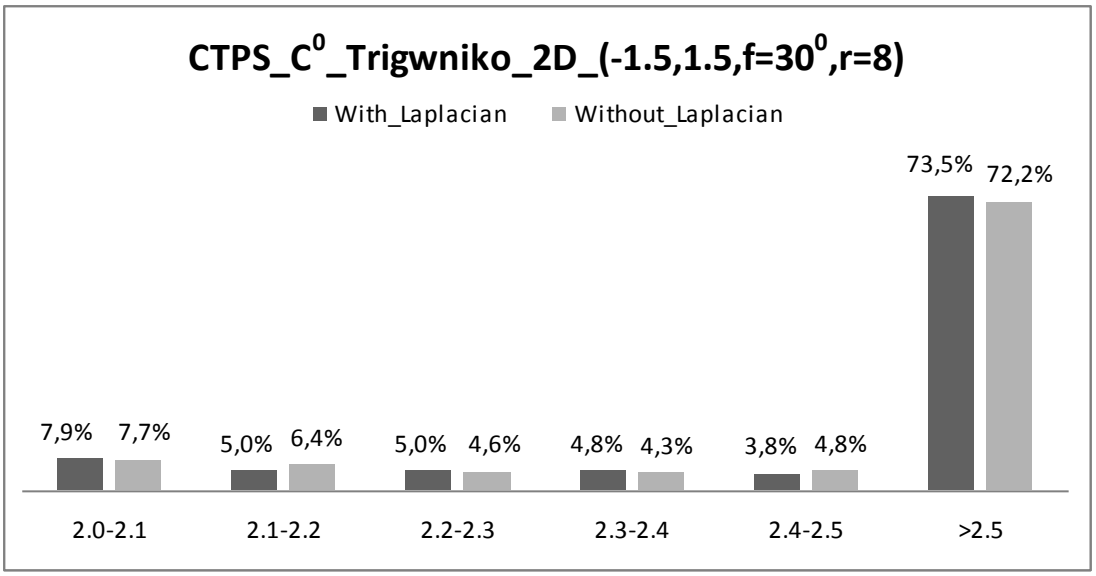


Εικόνα 4.30: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

CTPS C^0 περίπτωση (-1.5, 1.5, f=30^0, r=8)



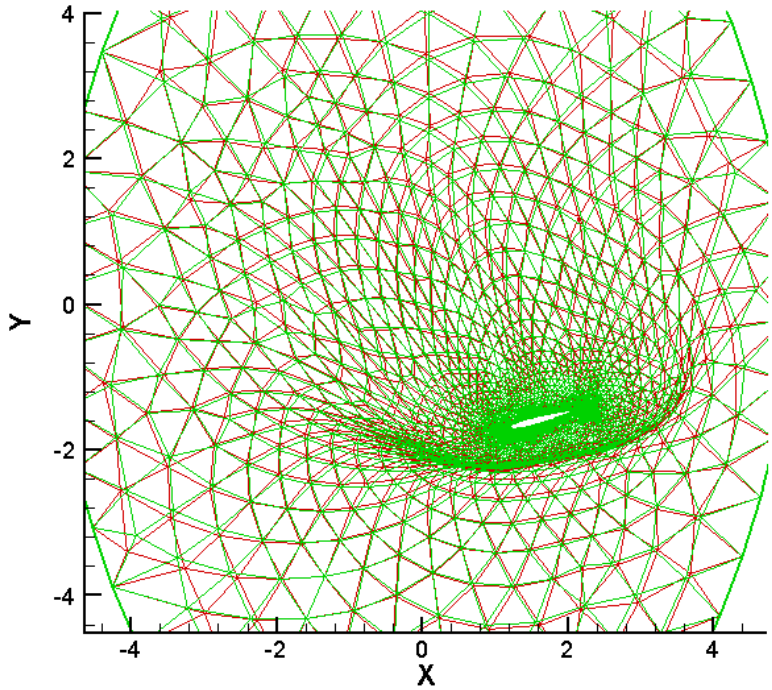
Εικόνα 4.31: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0



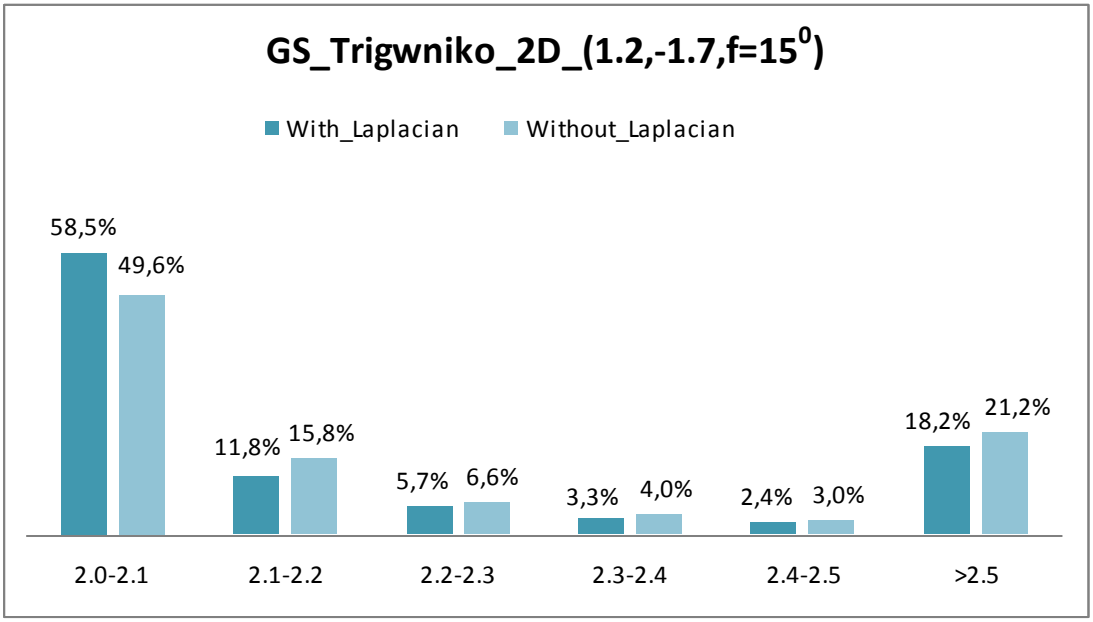
Εικόνα 4.32: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

Radial Basis Function with global support

Gaussian περίπτωση (1.2, -1.7, f=15^0)

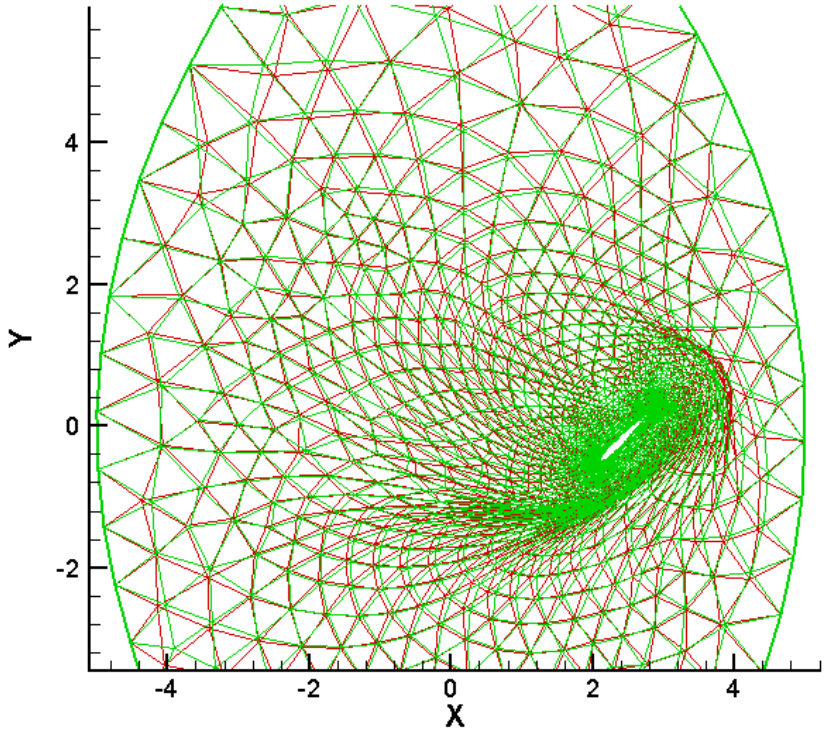


Εικόνα 4.33: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

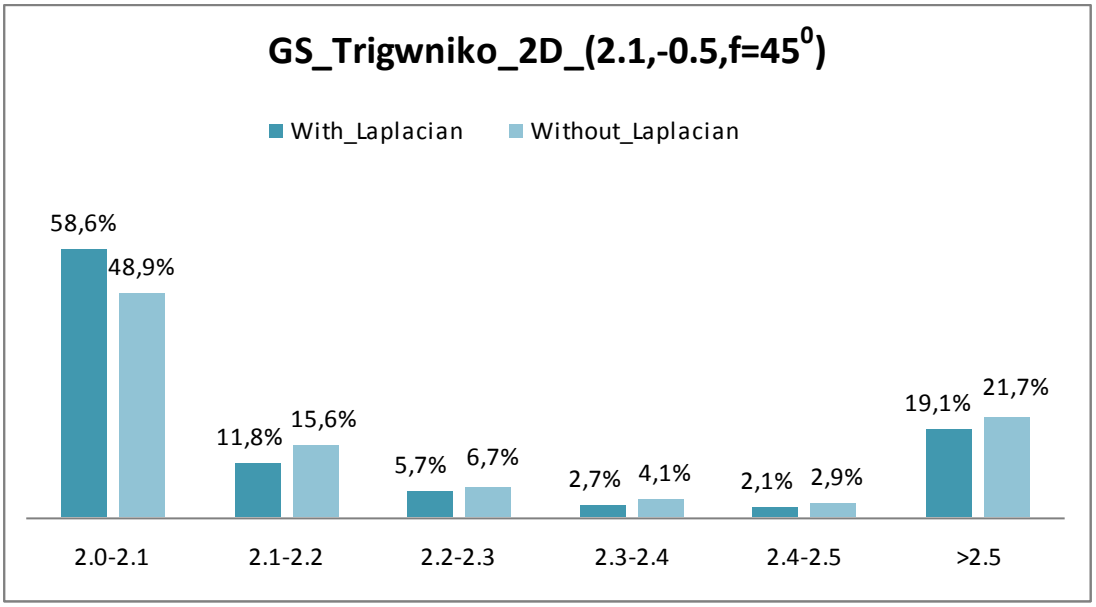


Εικόνα 4.34: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

Gaussian περίπτωση (2.1,-0.5,f=45^0)

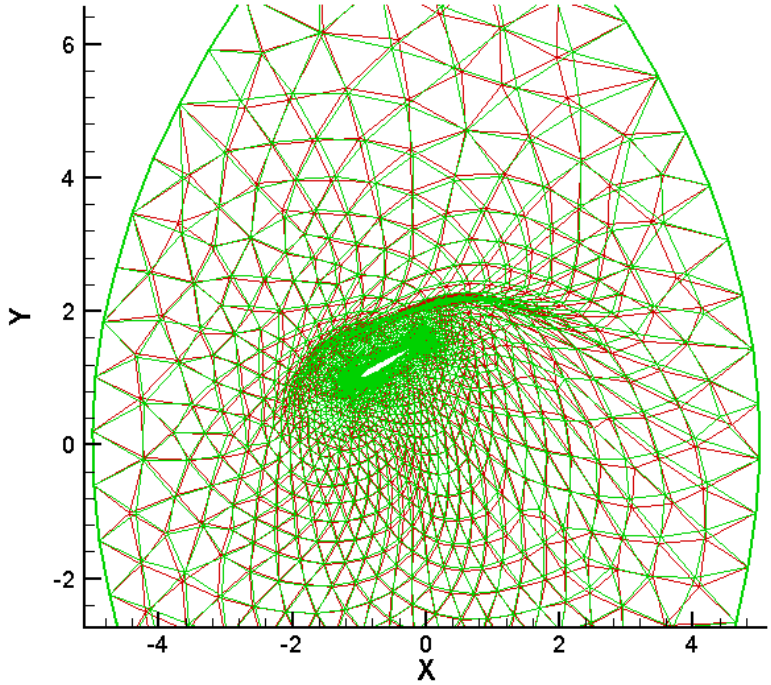


Εικόνα 4.35: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

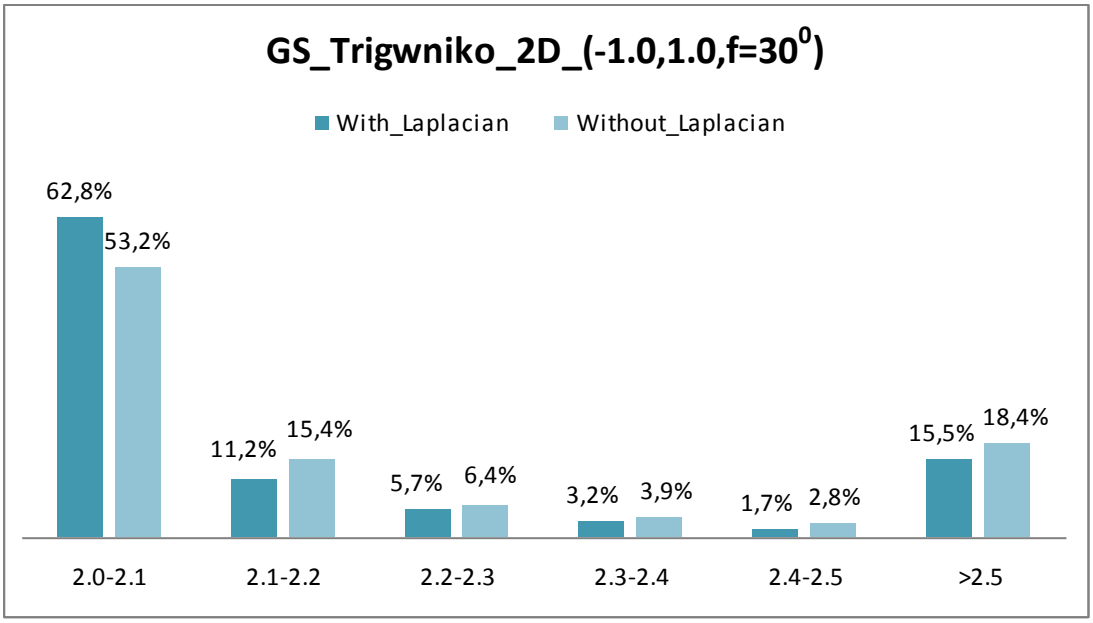


Εικόνα 4.36: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

Gaussian περίπτωση (-1.0, 1.0, f=30^0)

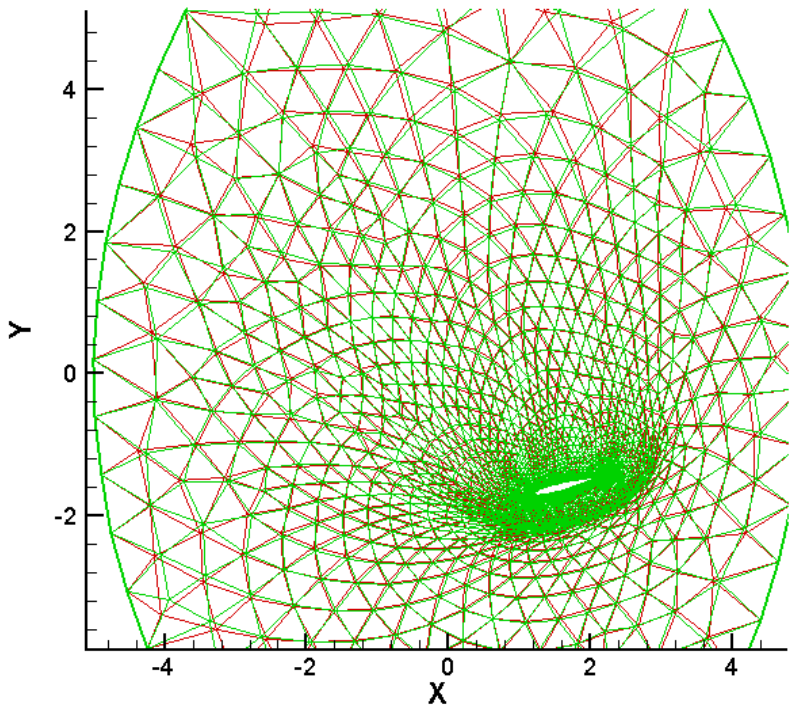


Εικόνα 4.37: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

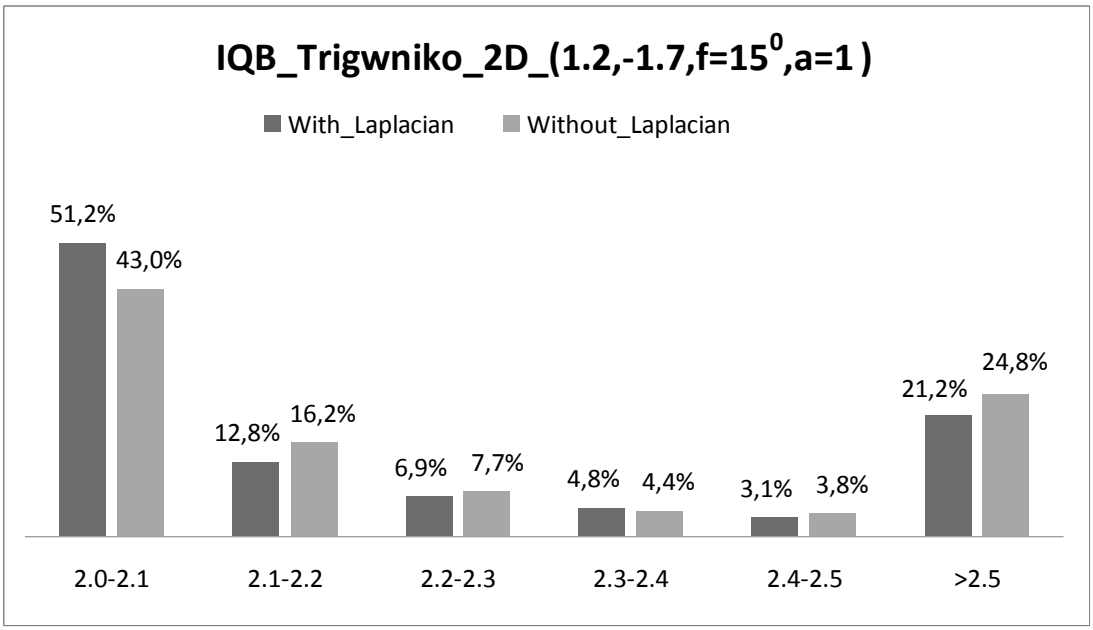


Εικόνα 4.38: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

Inverse Quadric περίπτωση (1.2, -1.7, f=15^0 , a=1)

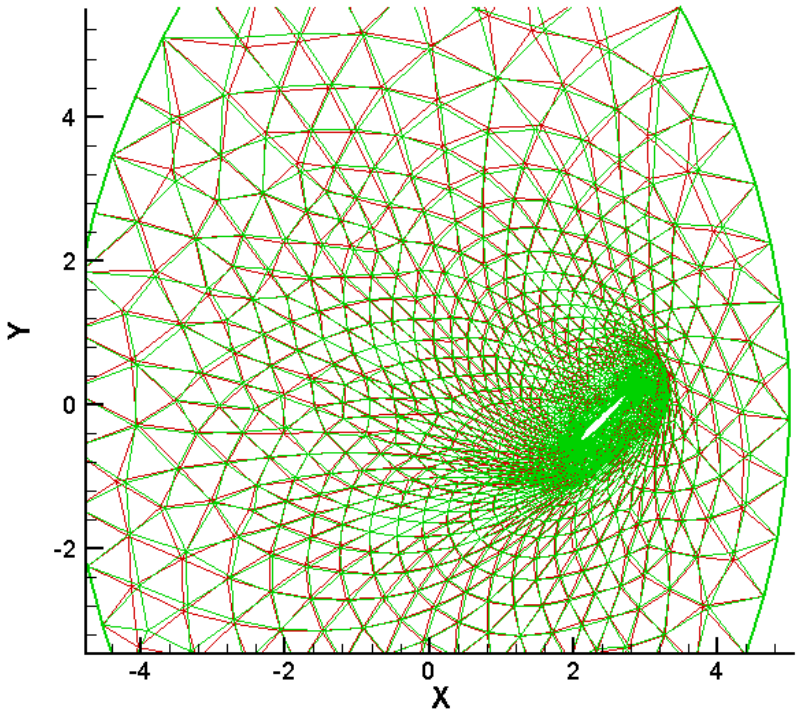


Εικόνα 4.39: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

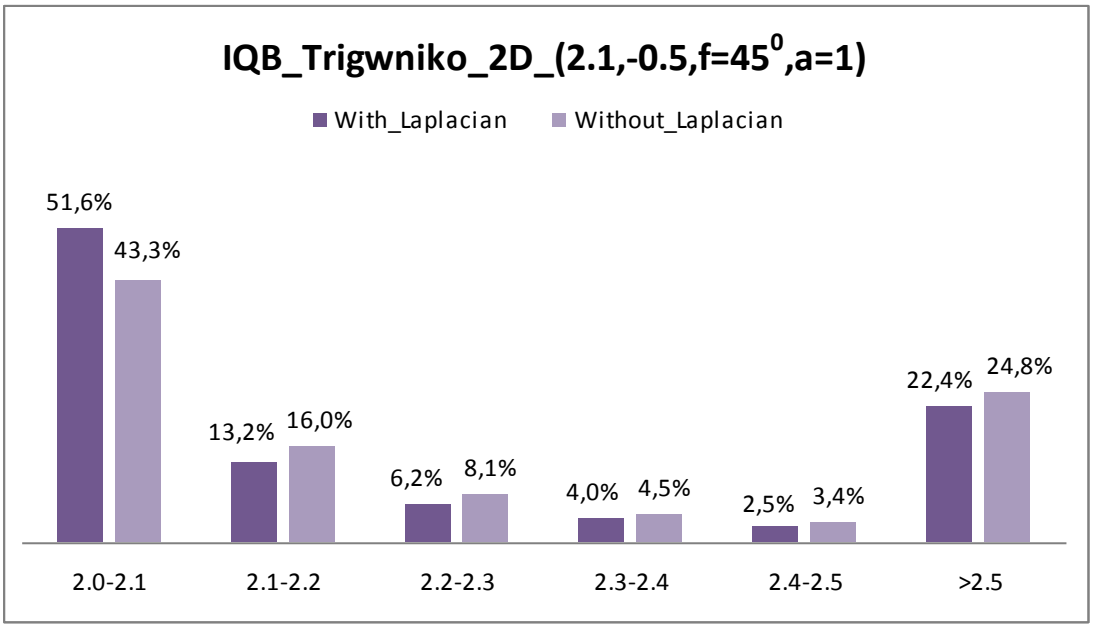


Εικόνα 4.40: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

Inverse Quadric περίπτωση (2.1, -0.5, f=45^0, a=1)

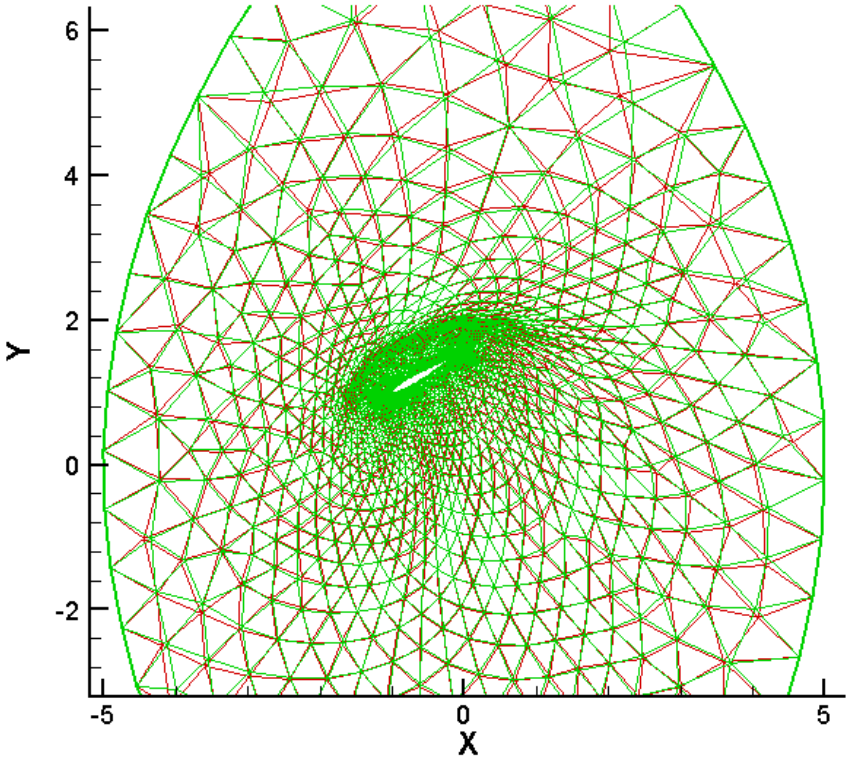


Εικόνα 4.41: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

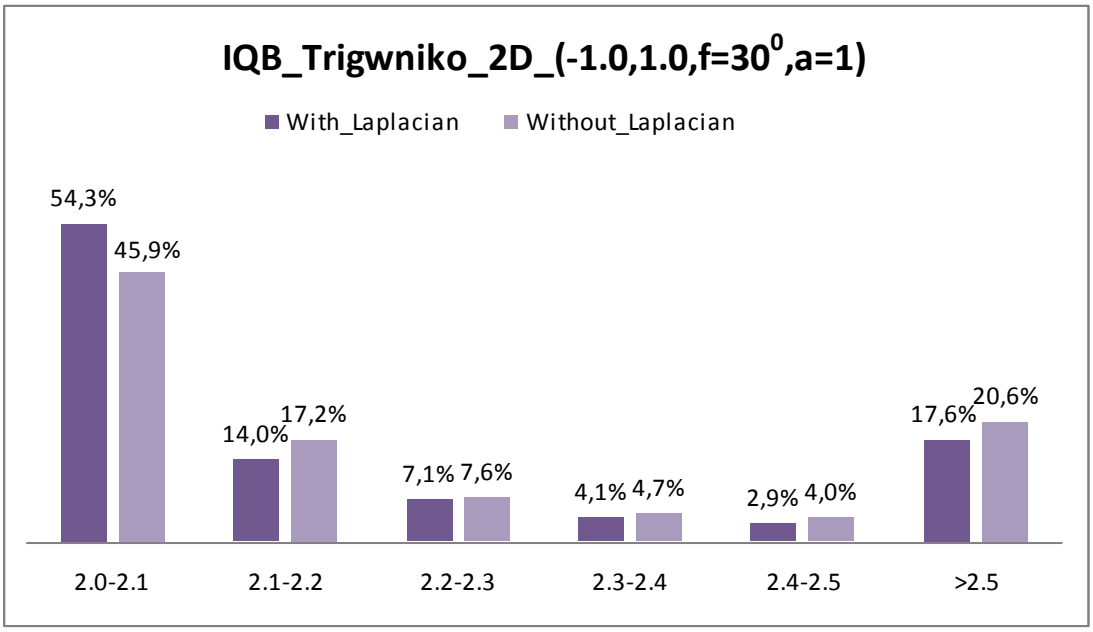


Εικόνα 4.42: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

Inverse Quadric περίπτωση (-1.0, 1.0, f=30^0, a=1)

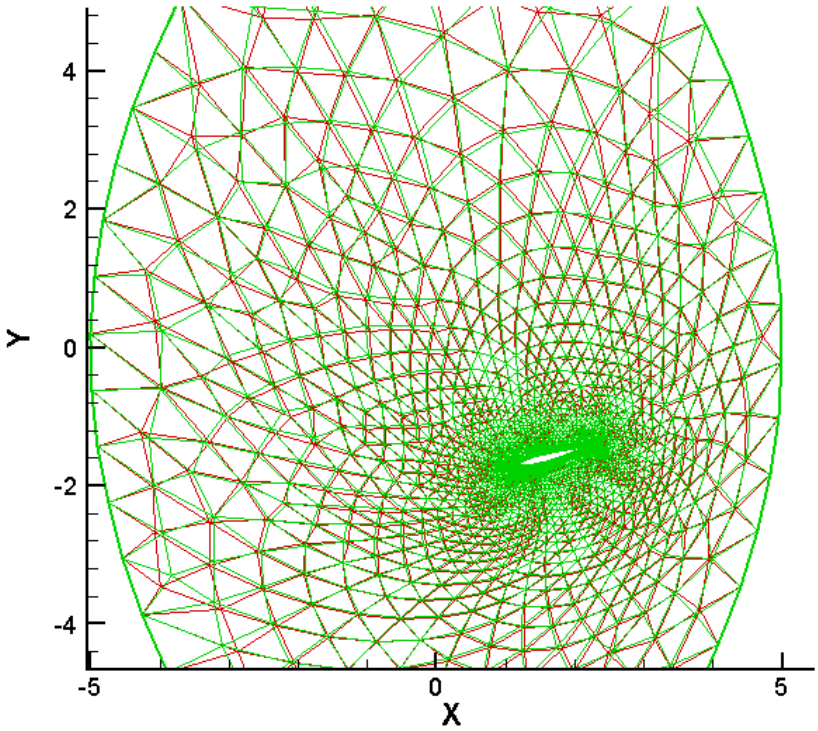


Εικόνα 4.43: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

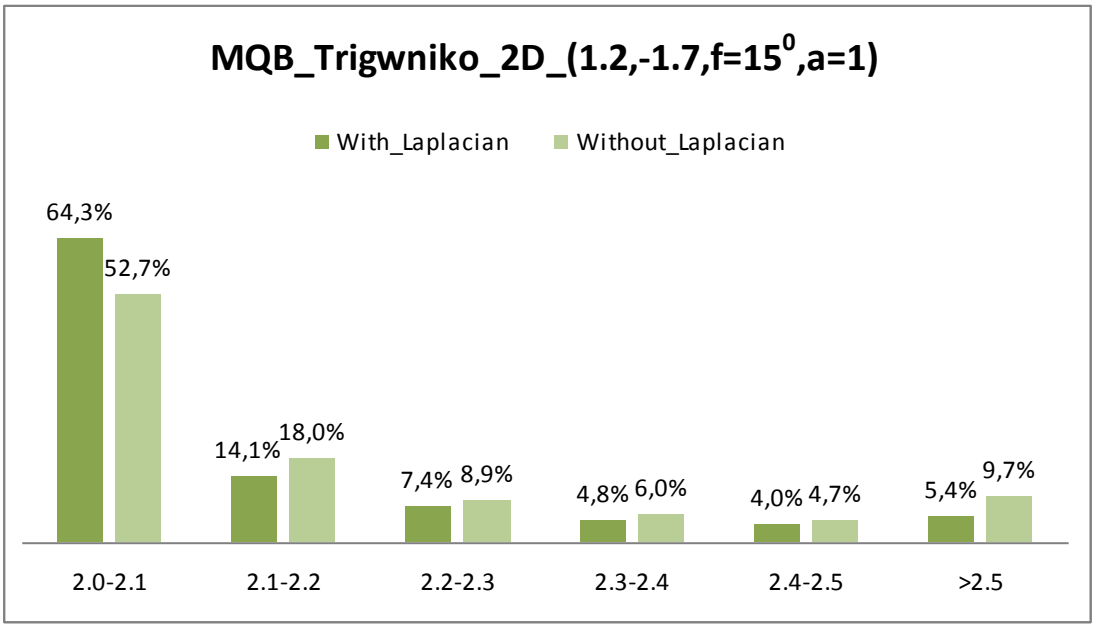


Εικόνα 4.44: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

Multiquadric περίπτωση (1.2, -1.7, f=15^0, a=1)

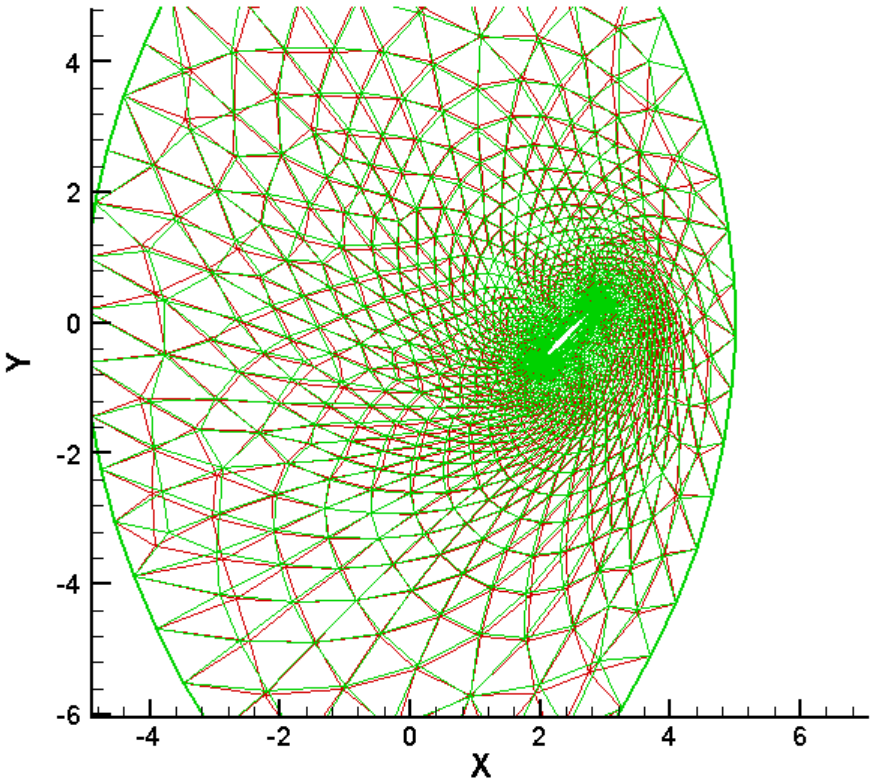


Εικόνα 4.45: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

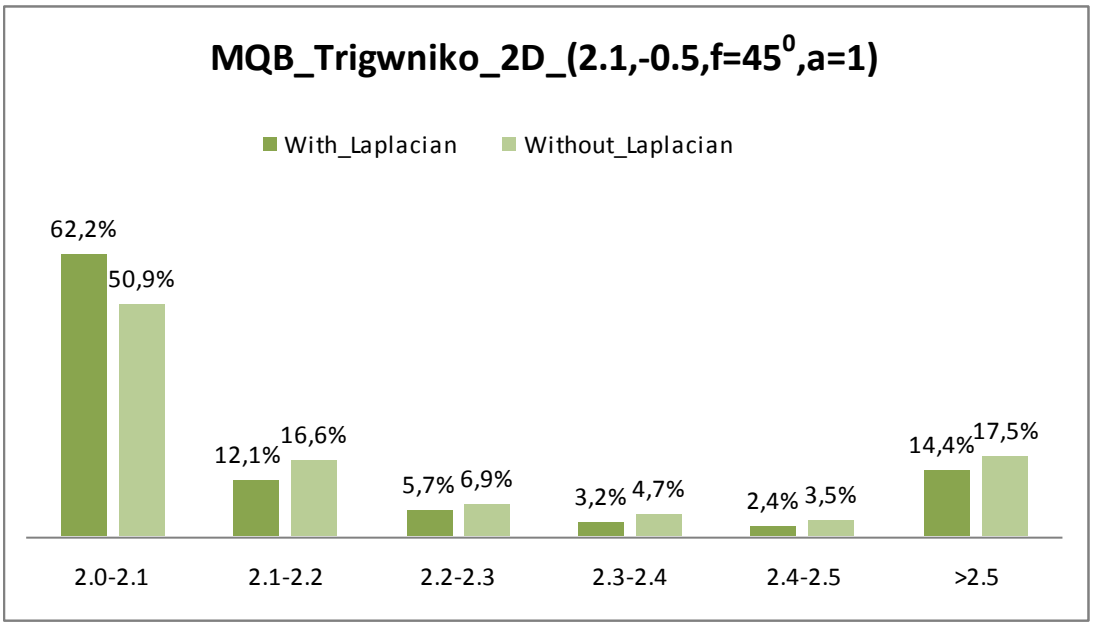


Εικόνα 4.46: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

Multiquadric περίπτωση (2.1, -0.5, f=45^0, a=1)

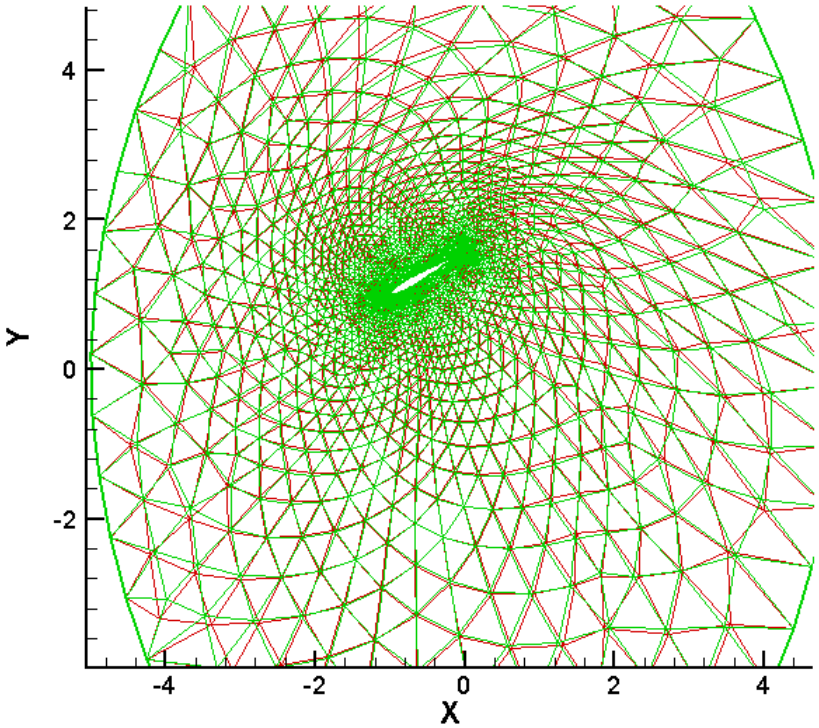


Εικόνα 4.47: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

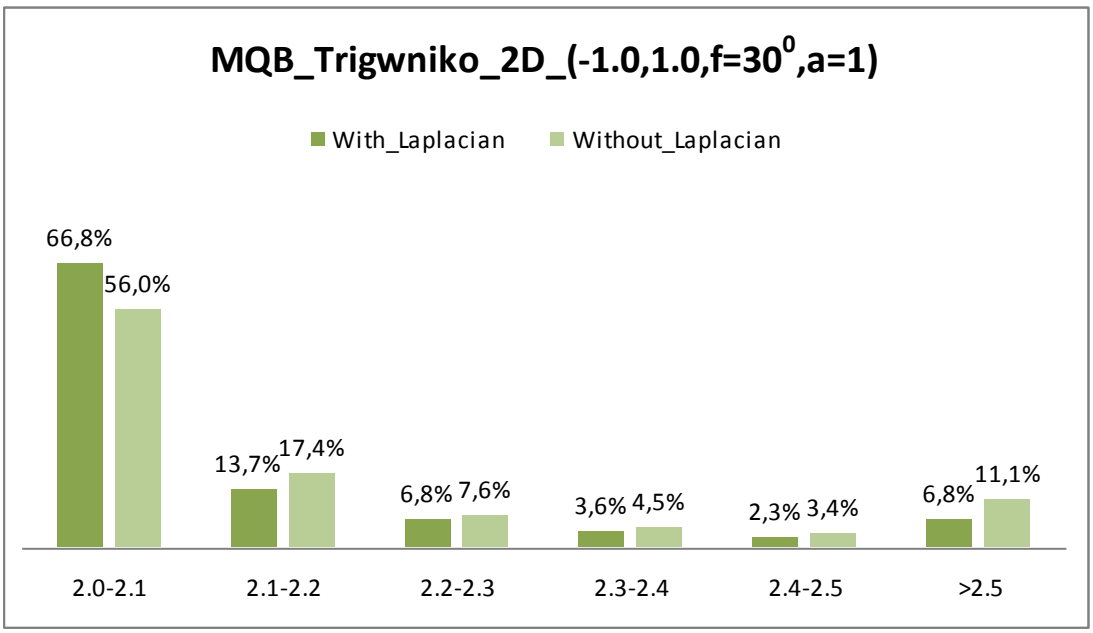


Εικόνα 4.48: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

Multiquadric περίπτωση (-1.0, 1.0, f=30^0, a=1)

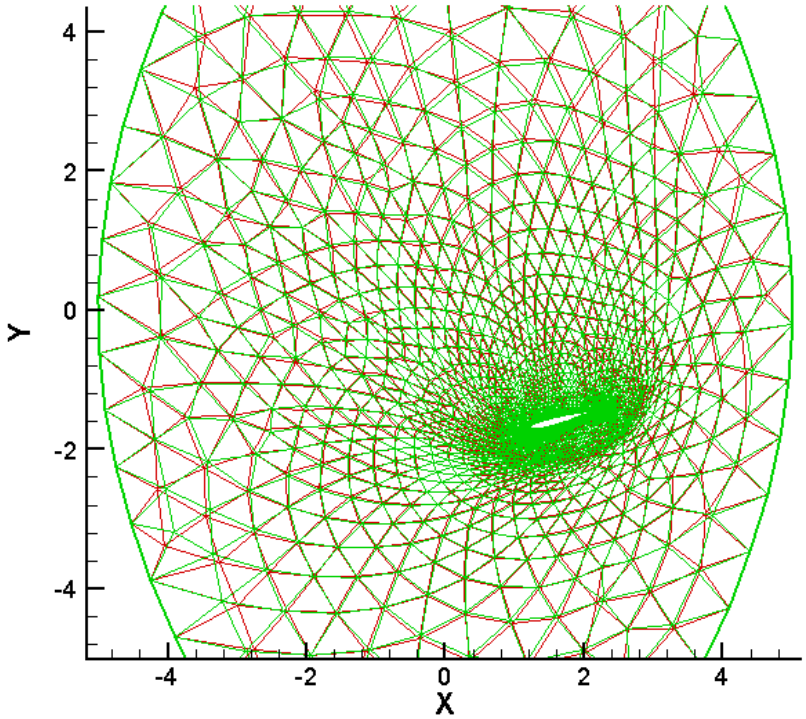


Εικόνα 4.49: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

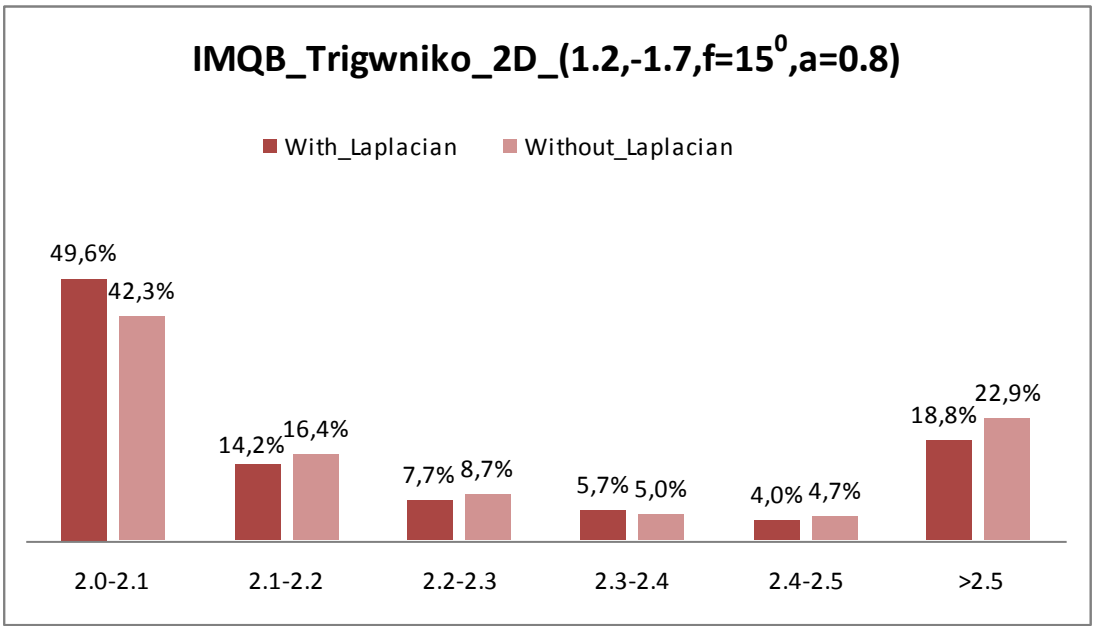


Εικόνα 4.50: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

Inverse Multiquadric περίπτωση (1.2, -1.7, f=15^0, a=0.8)

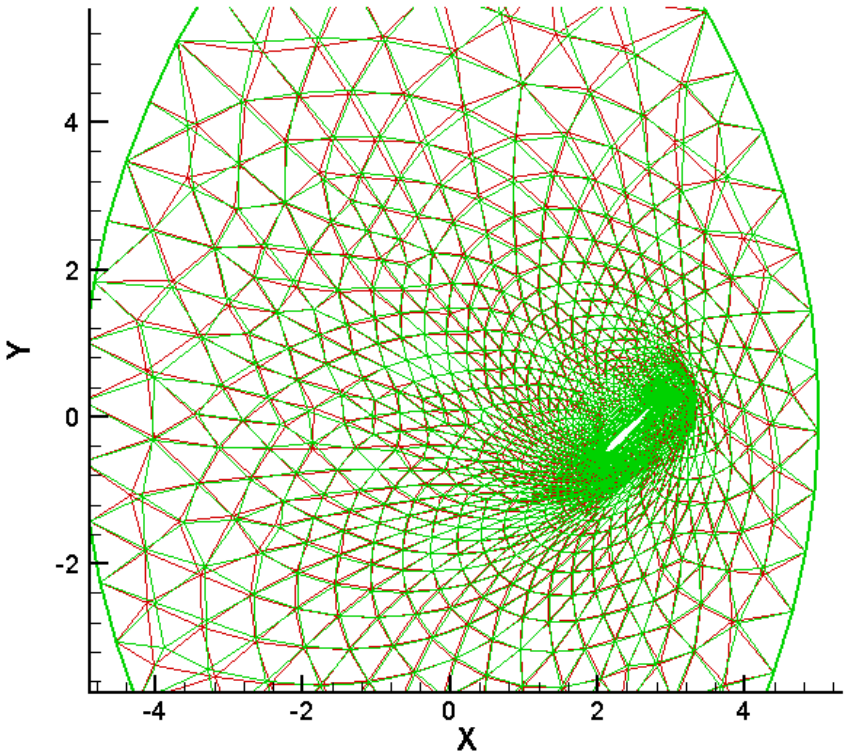


Εικόνα 4.51: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

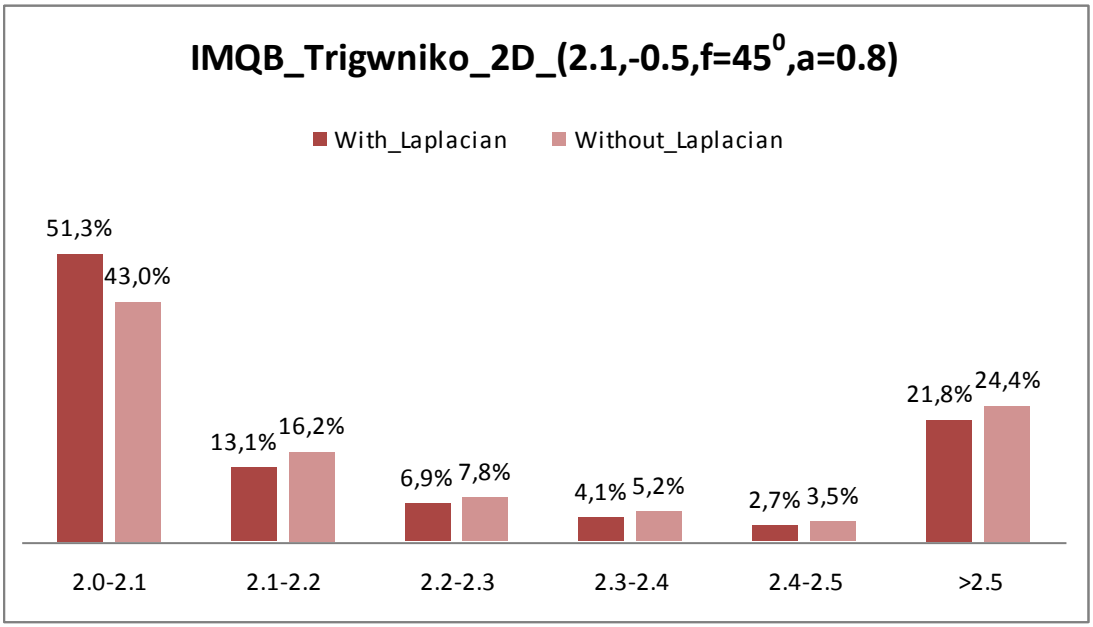


Εικόνα 4.52: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

Inverse Multiquadric περίπτωση (2.1, -0.5, f=45^0, a=0.8)

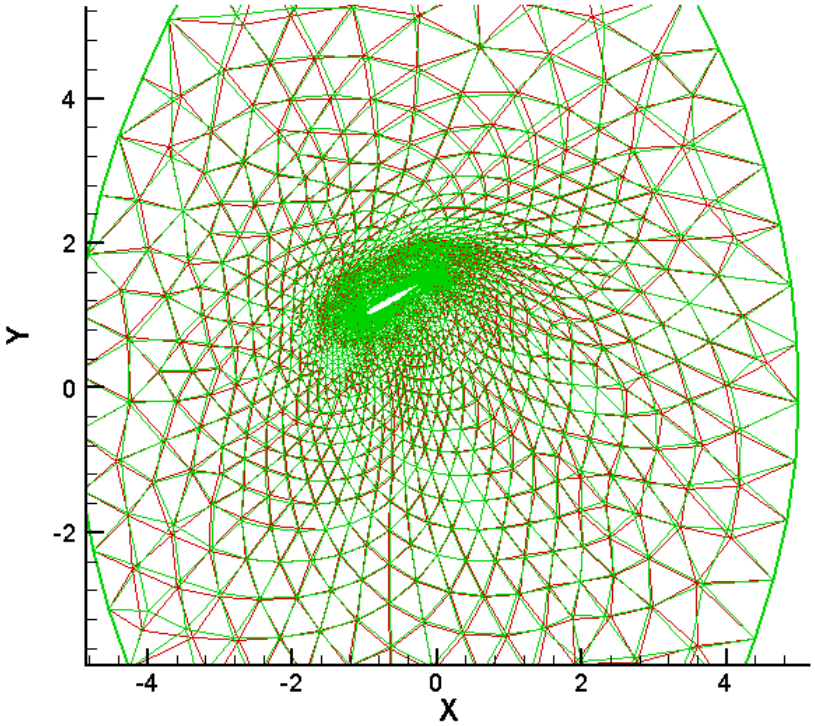


Εικόνα 4.53: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

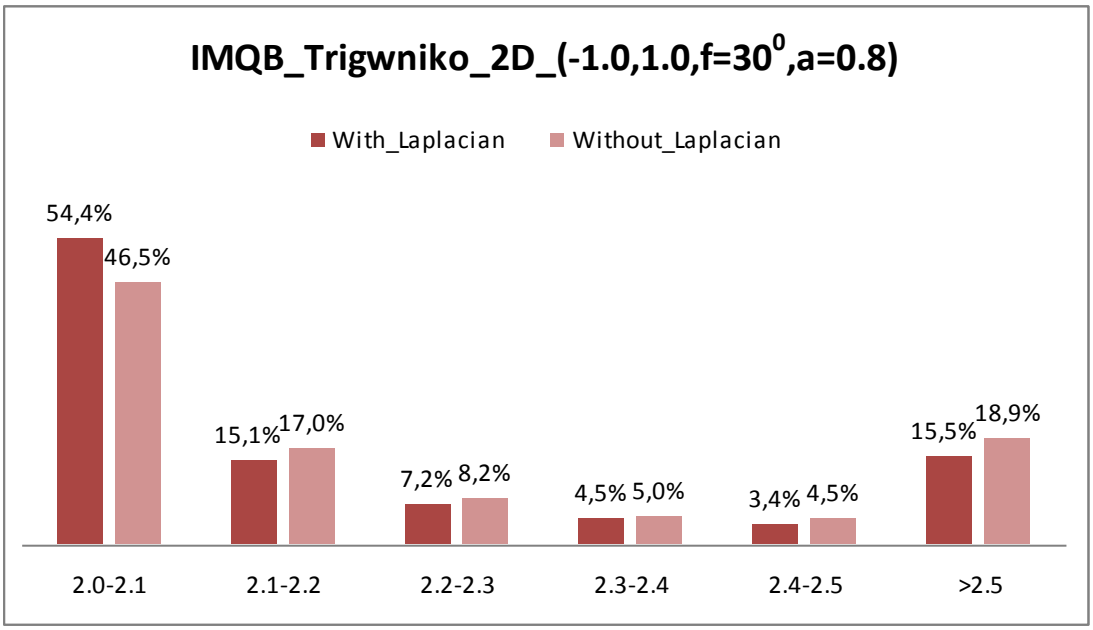


Εικόνα 4.54: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

Inverse Multiquadric περίπτωση (-1.0, 1.0, f=30^0, a=0.8)



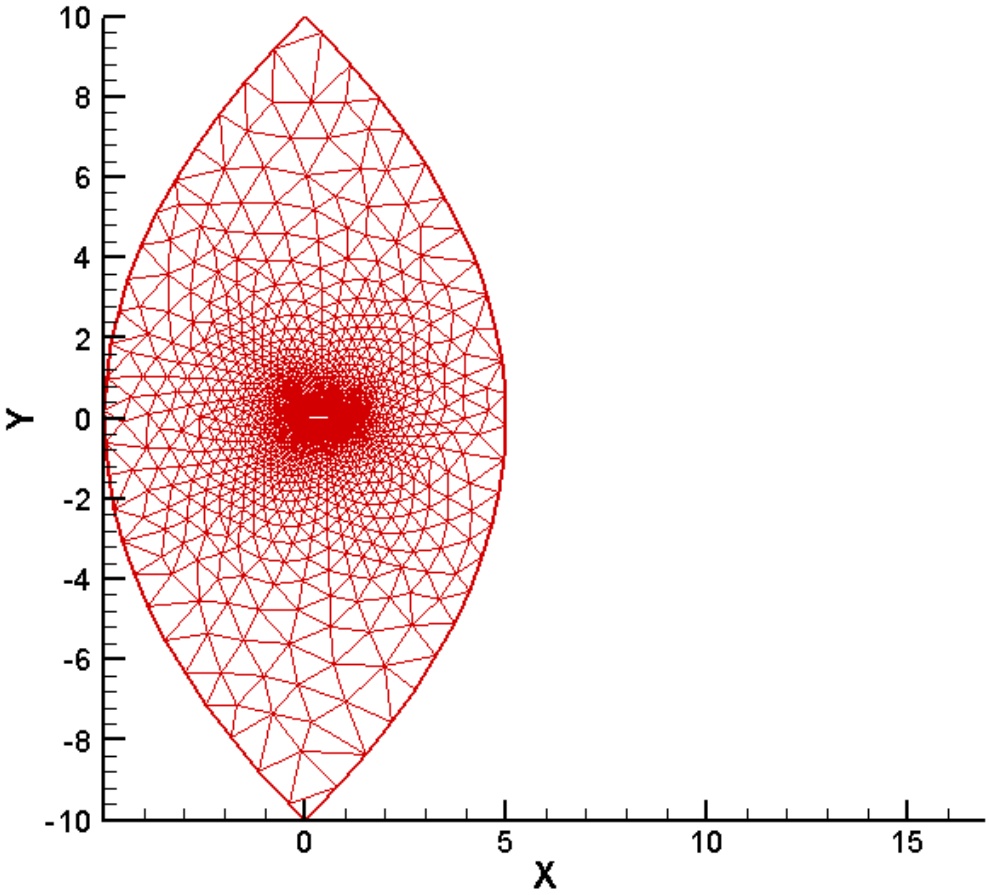
Εικόνα 4.55: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB



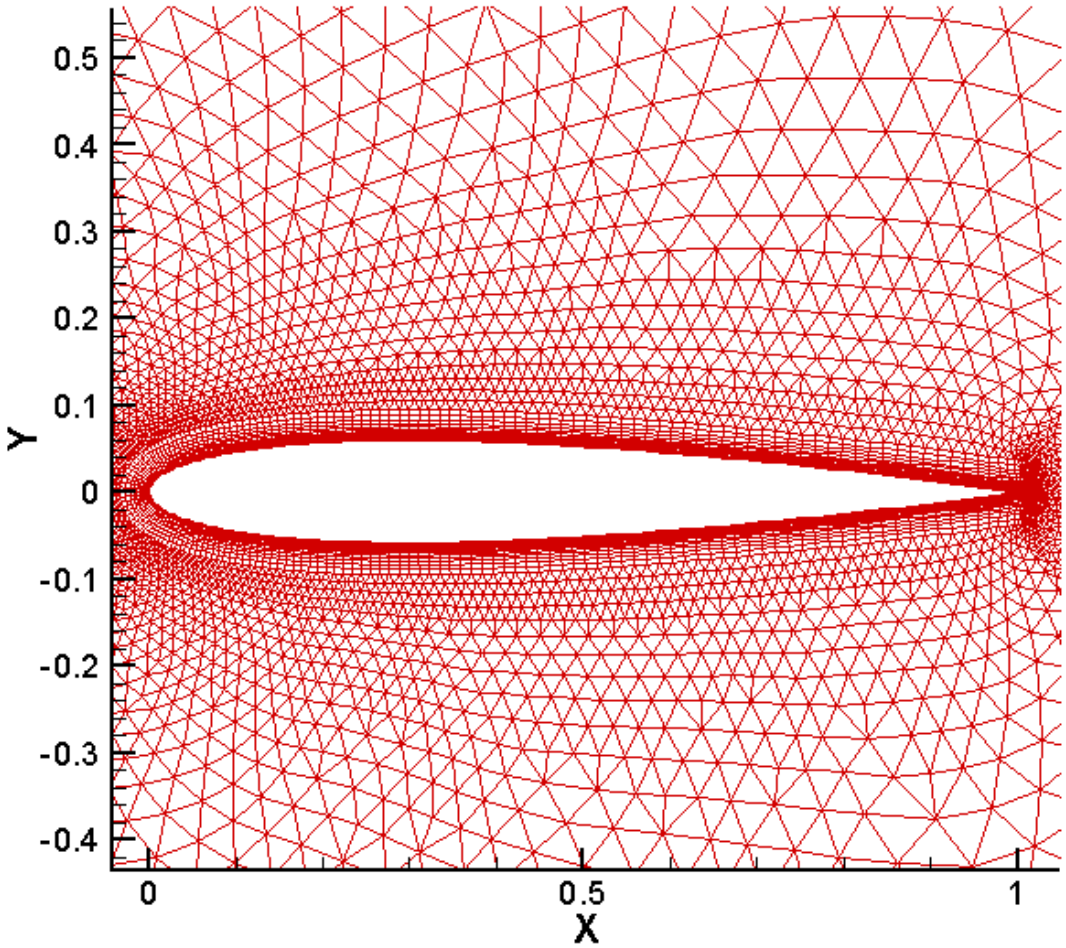
Εικόνα 4.56: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

4.2 Υβριδικό πλέγμα (2D)

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε είναι ένα μη δομημένο πλέγμα, το οποίο αποτελείται από 6758 κόμβους 7492 τριγωνικά κελιά και από 2884 τετραεδρικά κελιά. Η αεροτομή που χρησιμοποιήθηκε είναι και εδώ η NACA0012. Ο χρόνος περάτωσης της κάθε περίπτωσης υπολογίστηκε σε περίπου 50-60 sec. Το πλέγμα παρουσιάζεται στις Εικόνες 4.57 και 4.58.



Εικόνα 4.57 Απεικόνιση του υπό εξέταση υβριδικού 2D πλέγματος.

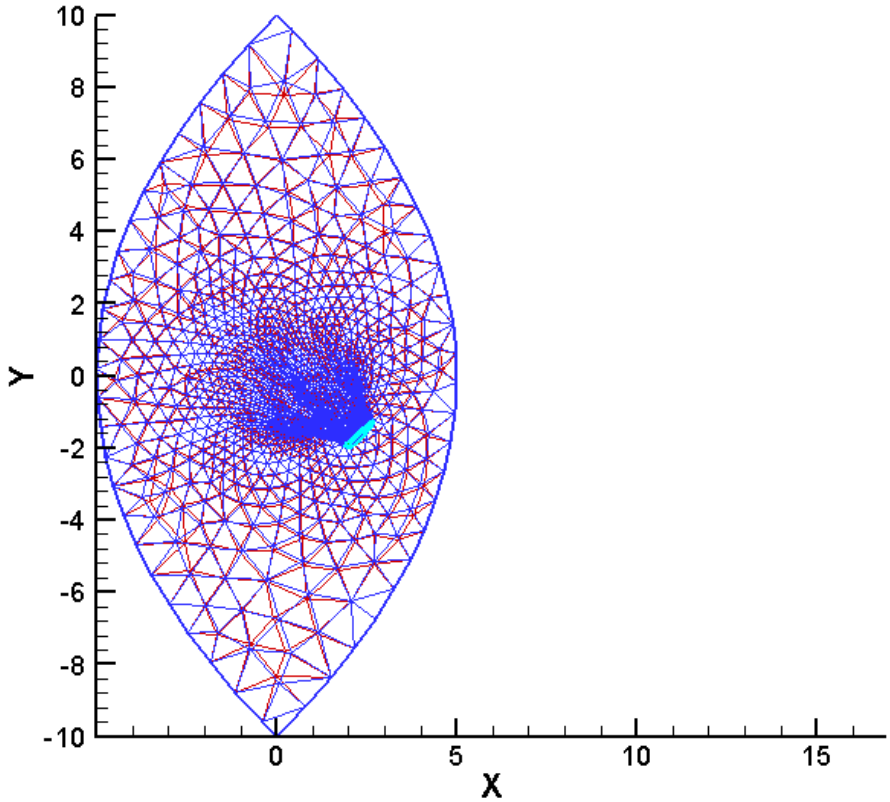


Εικόνα 4.58 Απεικόνιση του υπό εξέταση υβριδικού 2D πλέγματος στην περιοχή της αεροτομής.

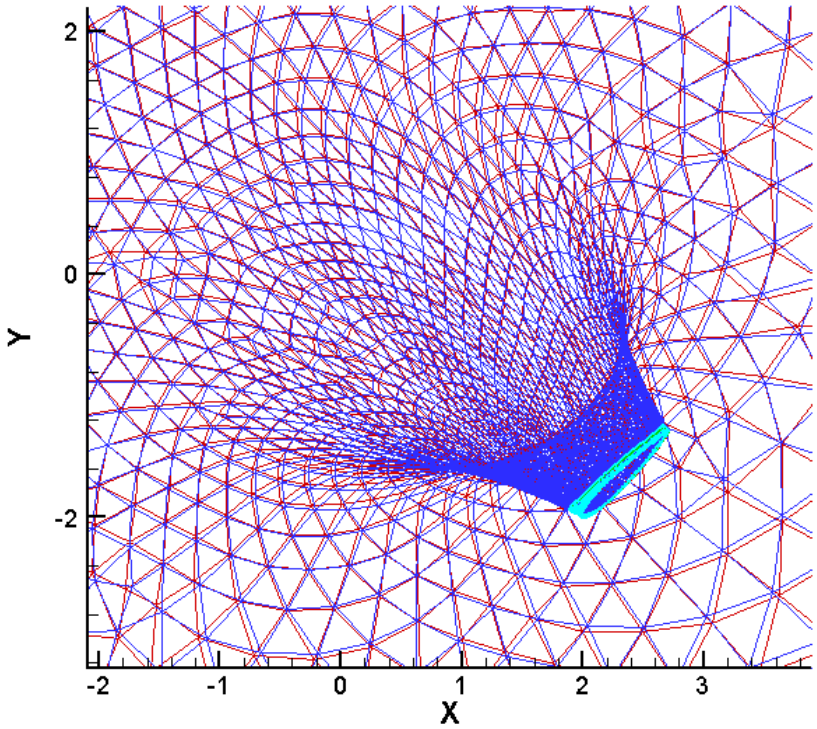
Στη συνέχεια παρατιθενται οι απεικονίσεις των αποτελεσμάτων της μεθοδολογίας που εφαρμόστηκε, για όλες τις διαφορετικές συναρτήσεις που δοκιμάστηκαν για μεταφορά και περιστροφή της αεροτομής. Επίσης παρατίθενται και τα διαγράμματα της μετρικής συνάρτησης της ποιότητας του πλέγματος, πριν και μετά την εφαρμογή της εξομάλυνσης.

Radial Basis Function with compact support

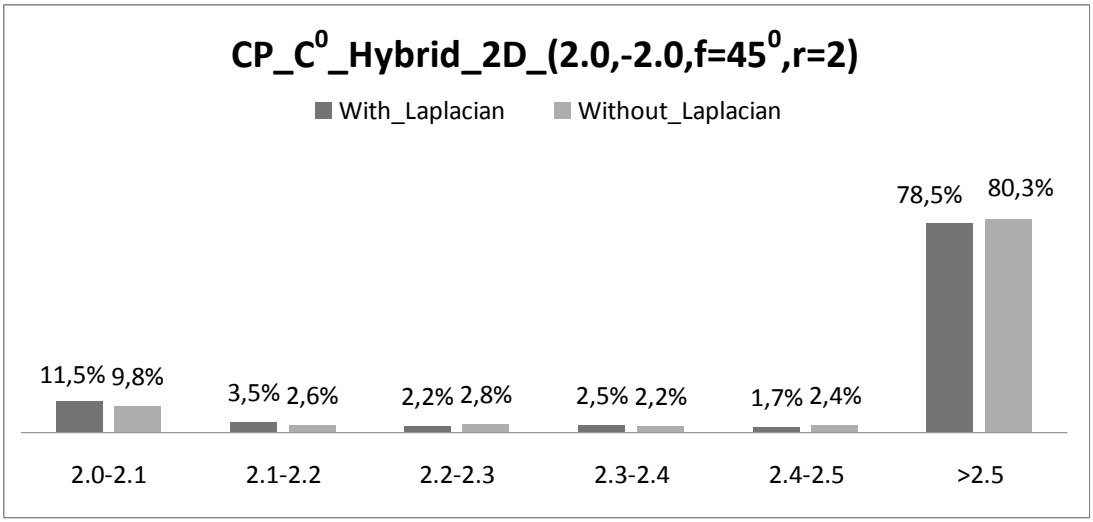
CP C^0 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=2.0)



Εικόνα 4.59: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

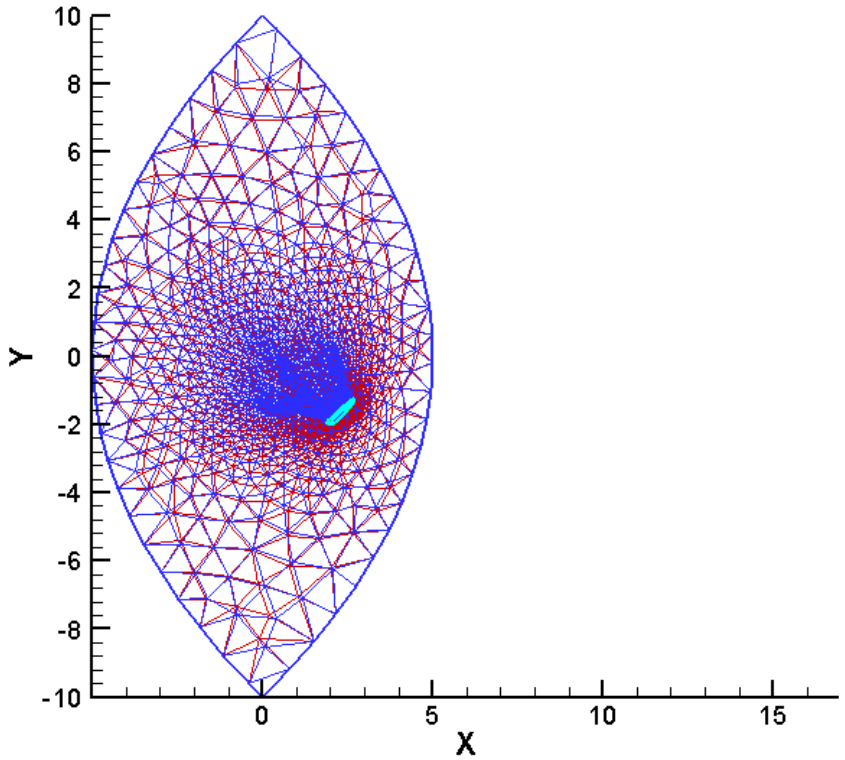


Εικόνα 4.60: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

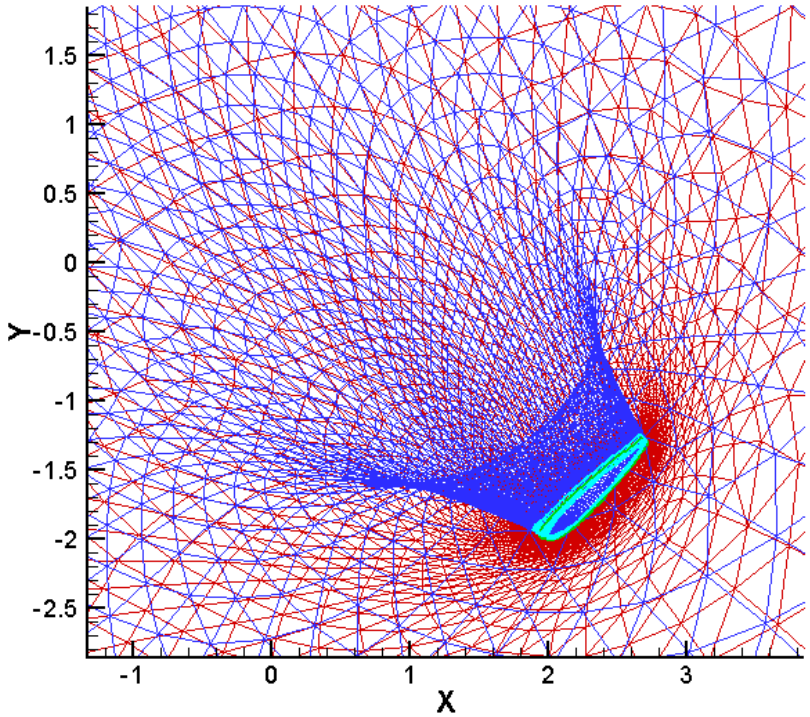


Εικόνα 4.61: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

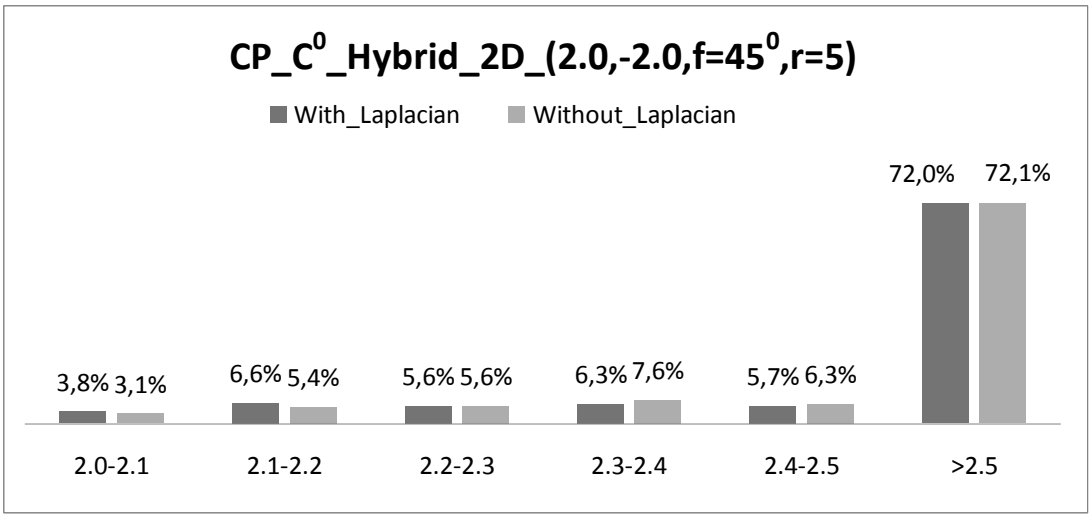
CP C^0 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=5.0)



Εικόνα 4.62: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

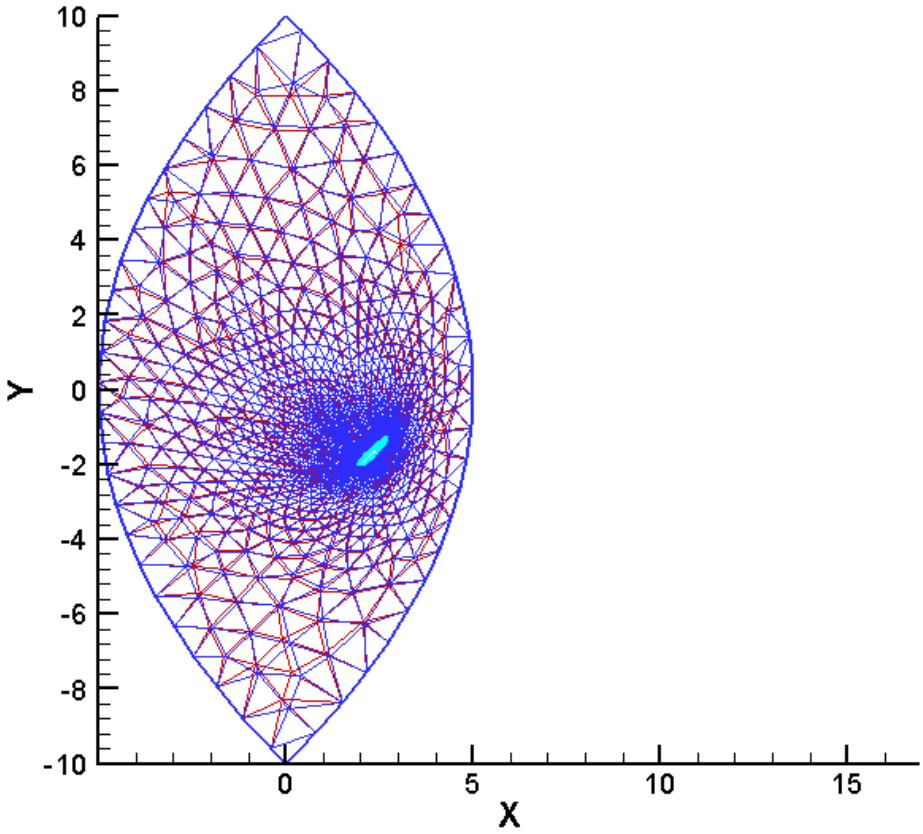


Εικόνα 4.63: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

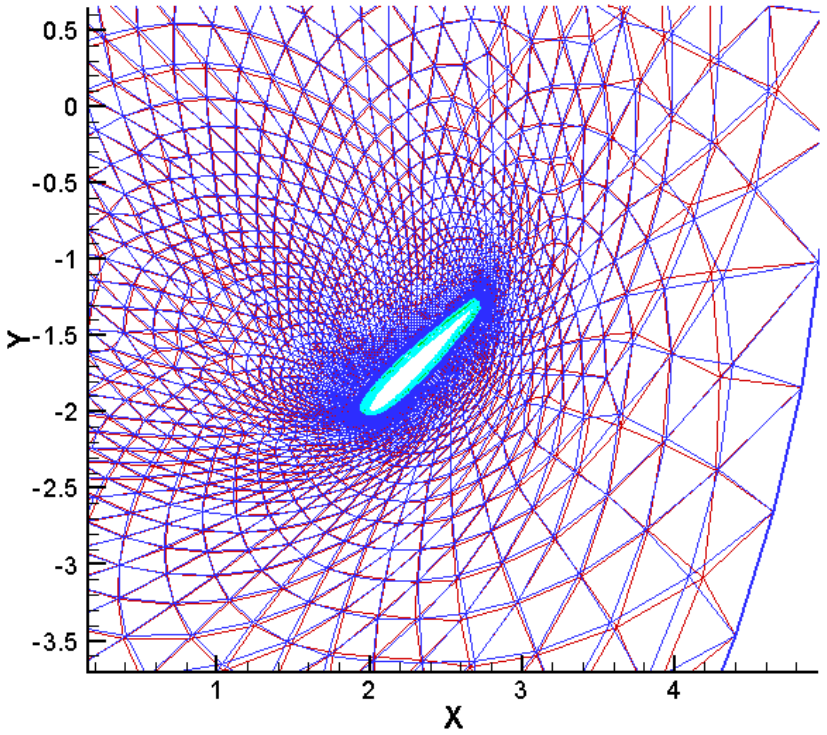


Εικόνα 4.64: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

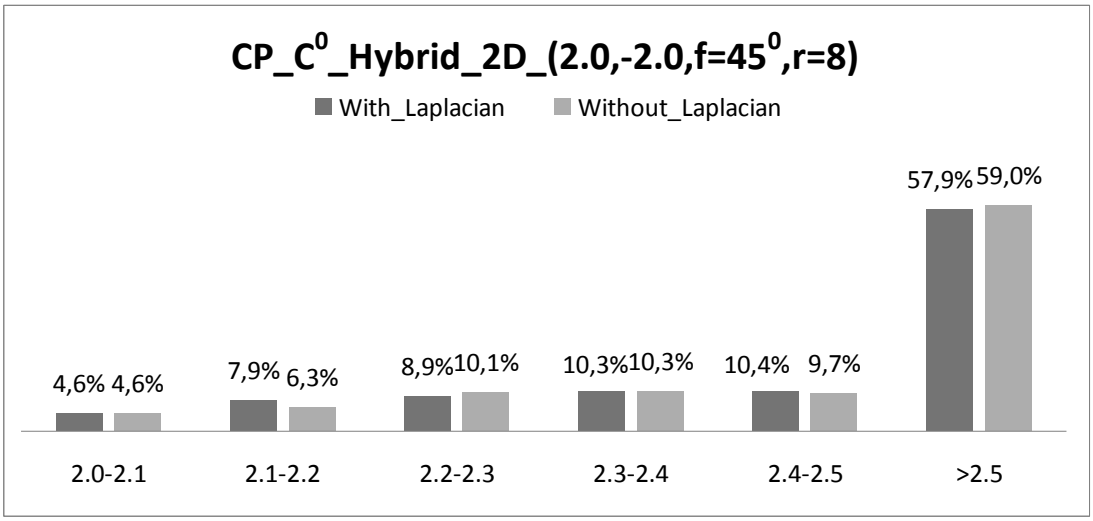
CP C^0 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=8.0)



Εικόνα 4.65: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

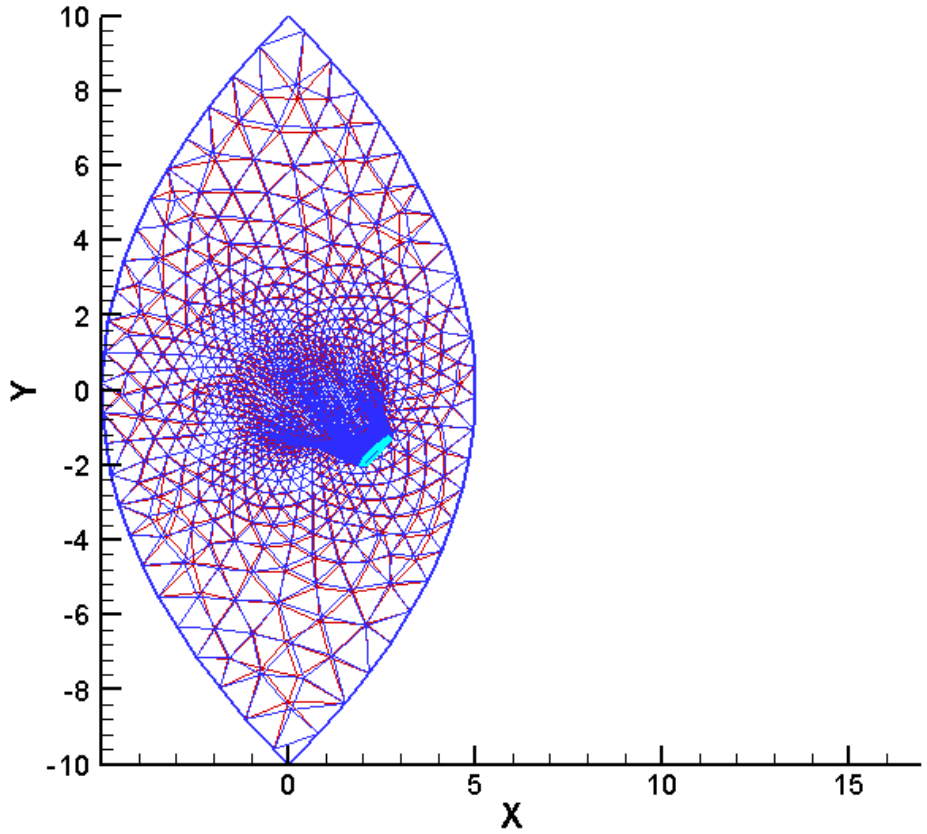


Εικόνα 4.66: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

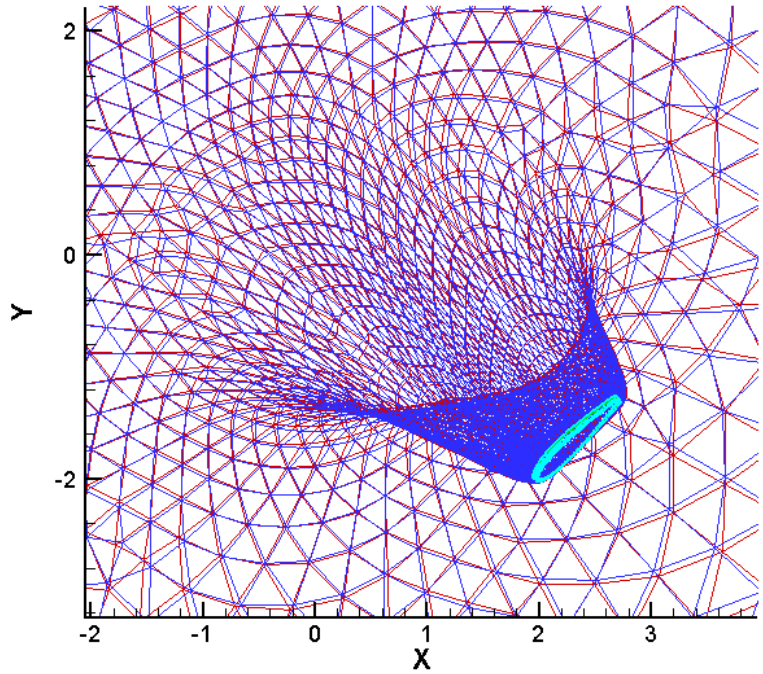


Εικόνα 4.67: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

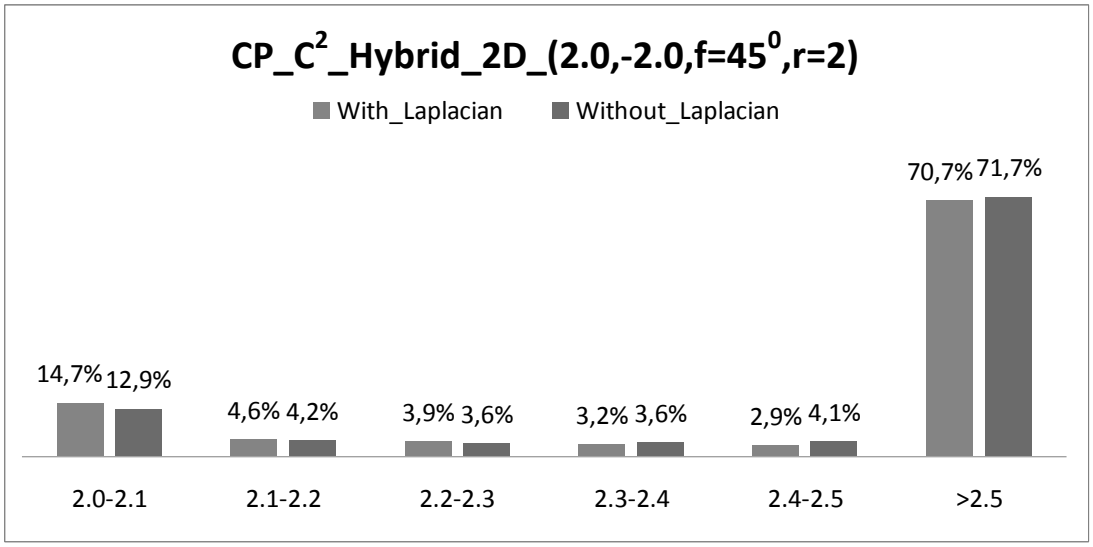
CP C^2 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=2.0)



Εικόνα 4.68: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

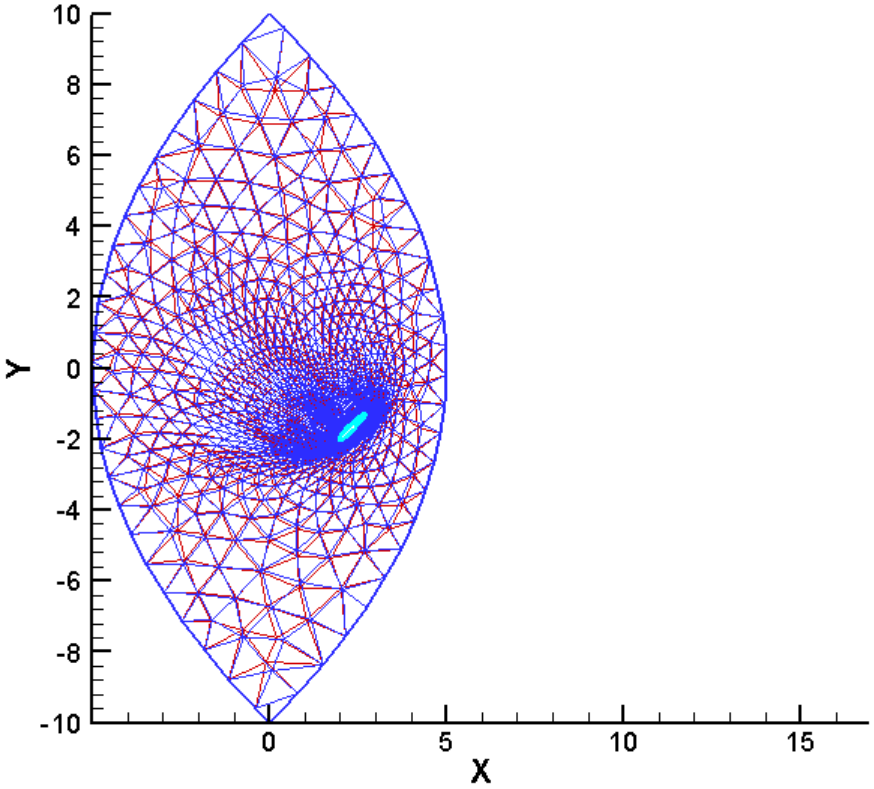


Εικόνα 4.69: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

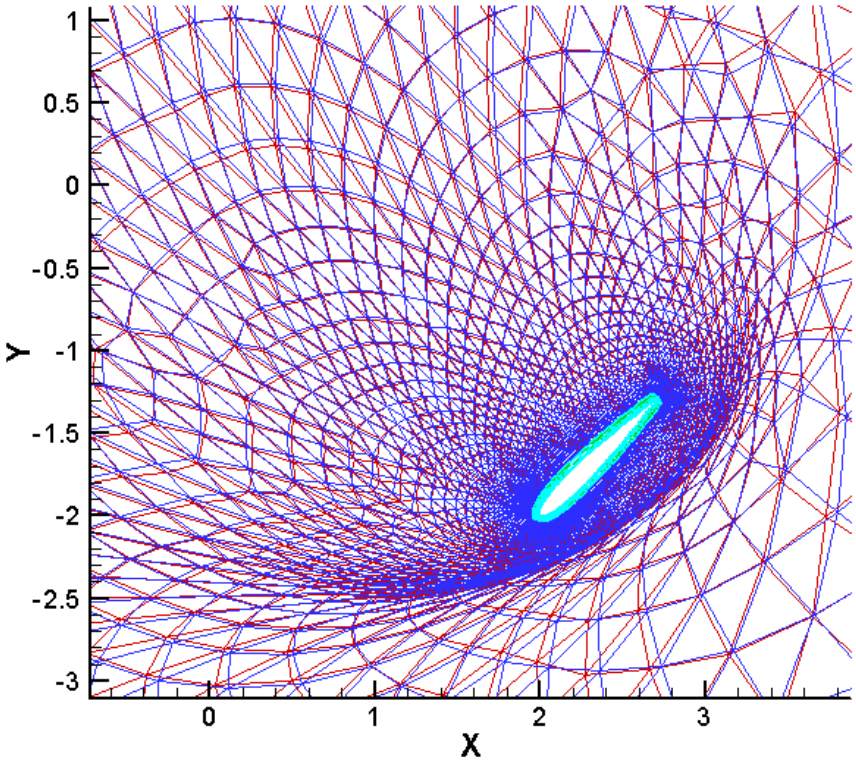


Εικόνα 4.70: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

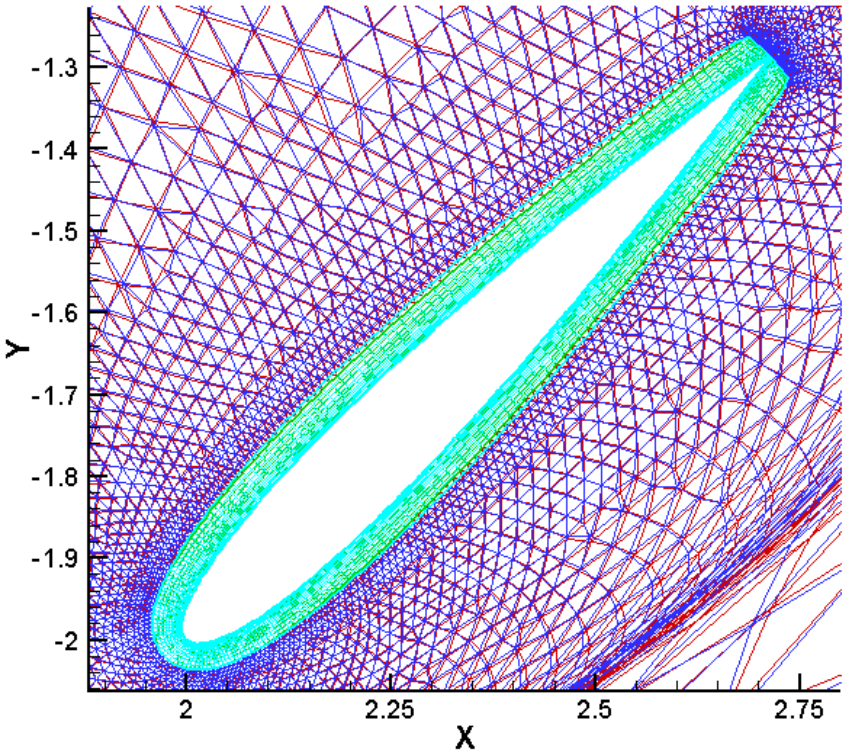
CP C^2 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=5.0)



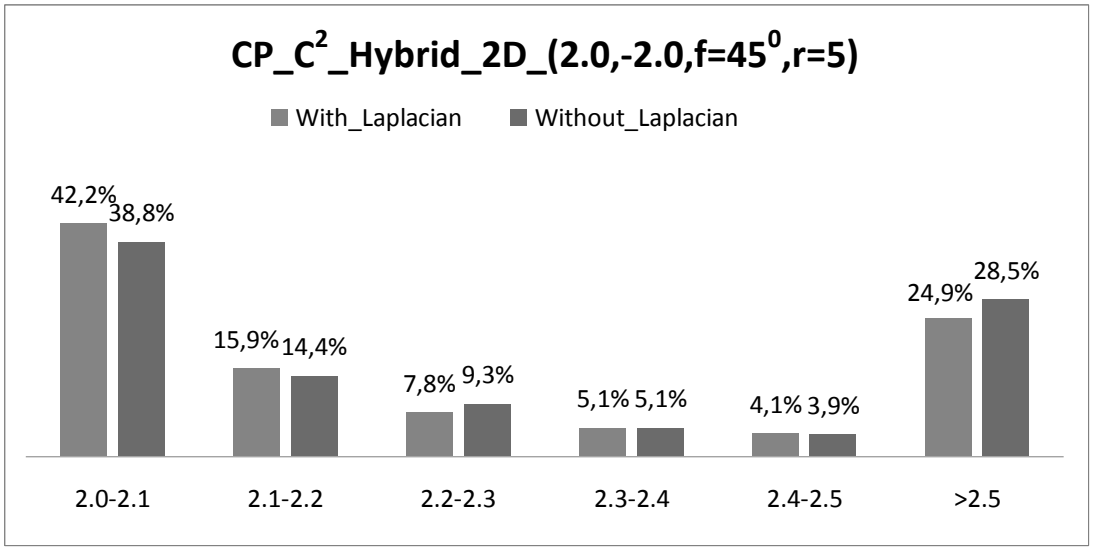
Εικόνα 4.71: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2



Εικόνα 4.72: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

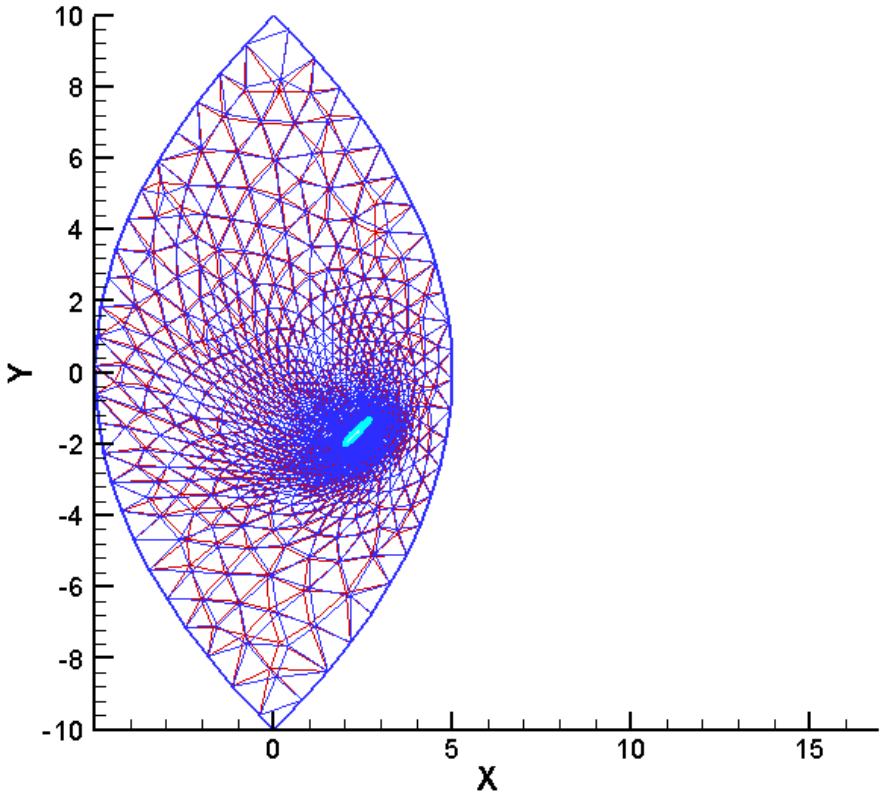


Εικόνα 4.73: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

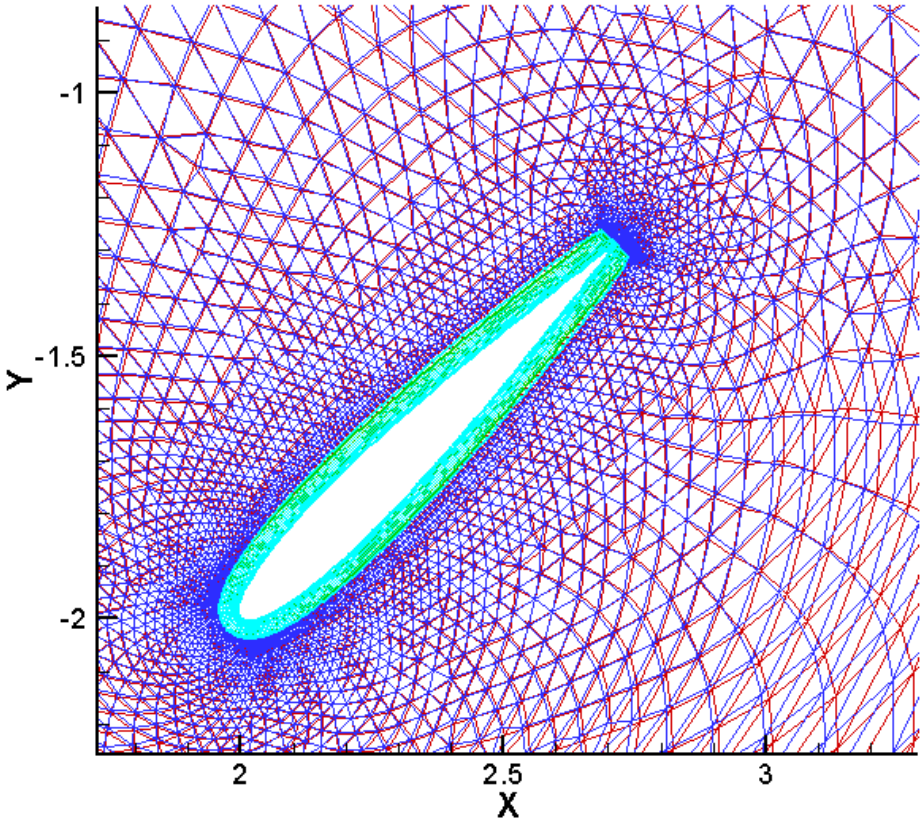


Εικόνα 4.74: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

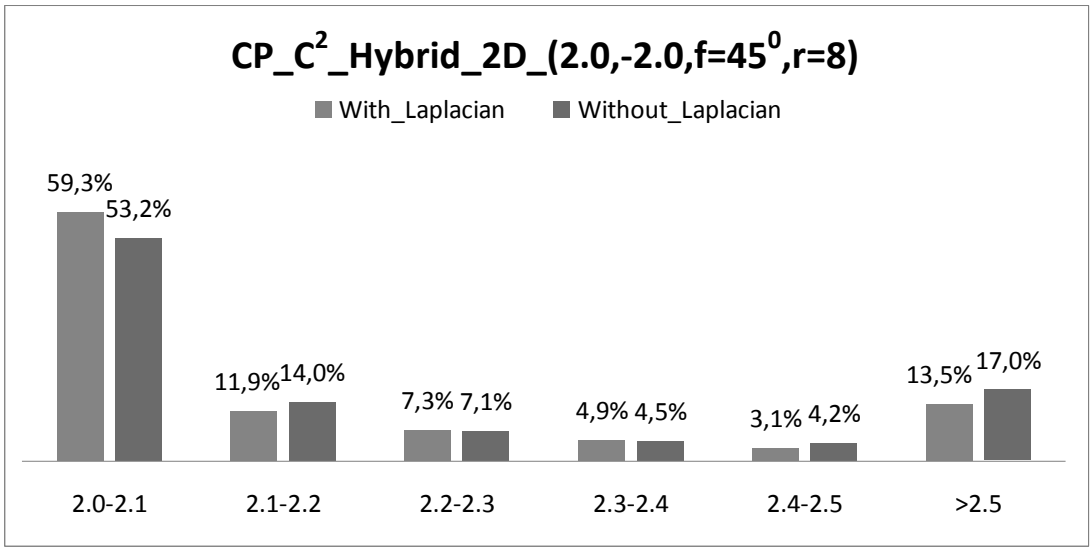
CP C^2 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=8.0)



Εικόνα 4.75: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

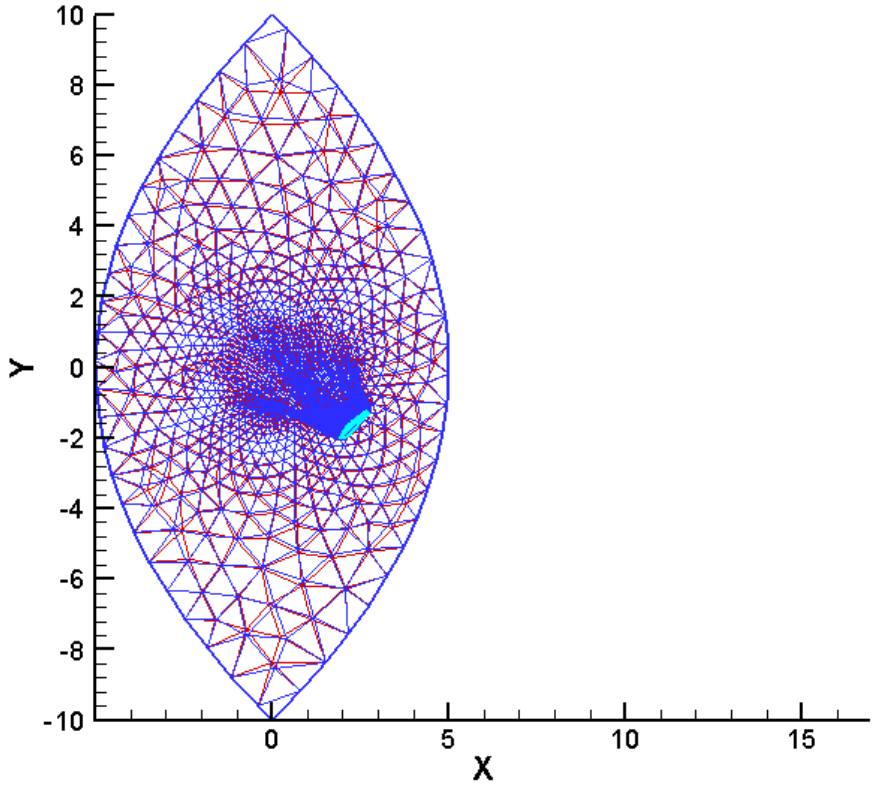


Εικόνα 4.76: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

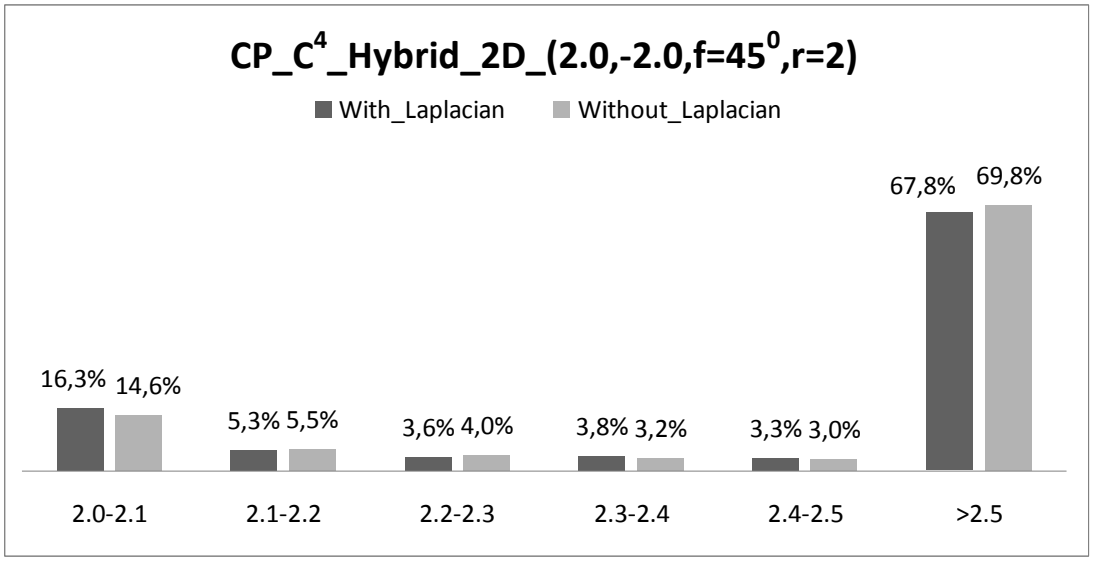


Εικόνα 4.77: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

CP C^4 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=2.0)

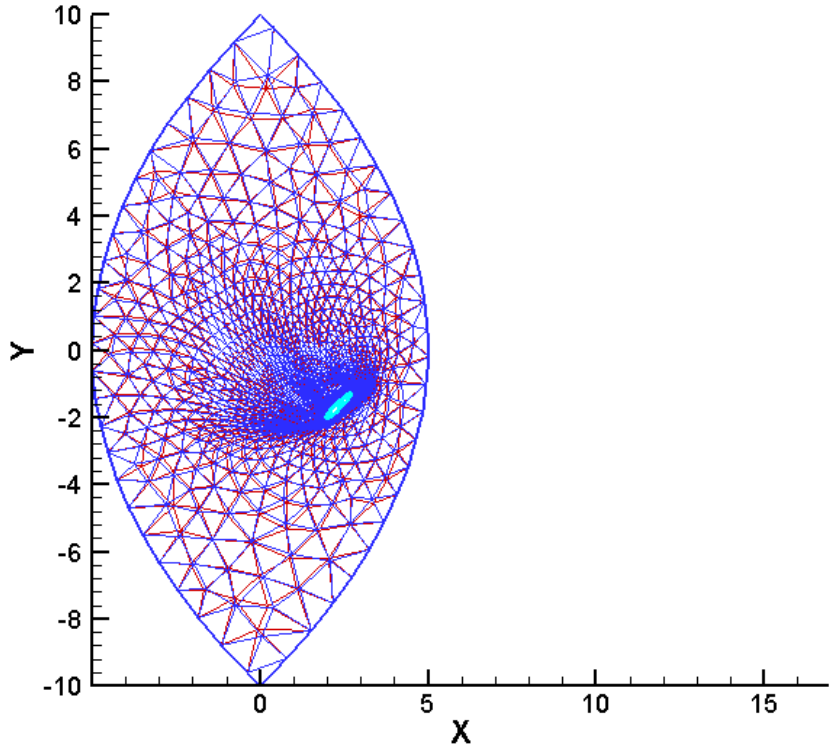


Εικόνα 4.78: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

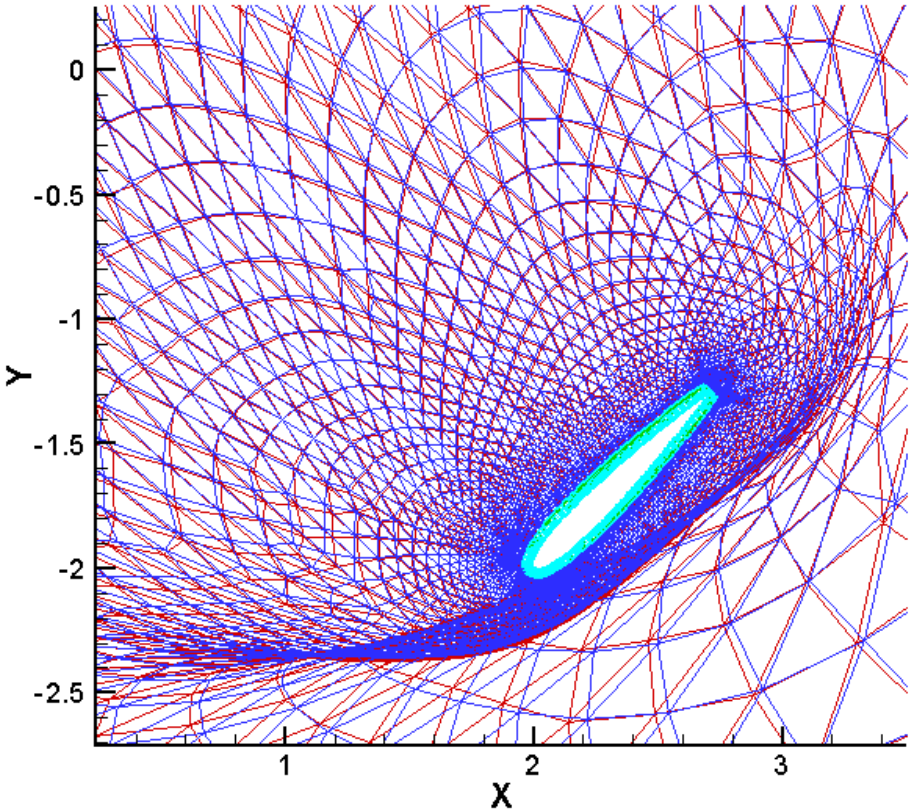


Εικόνα 4.79: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

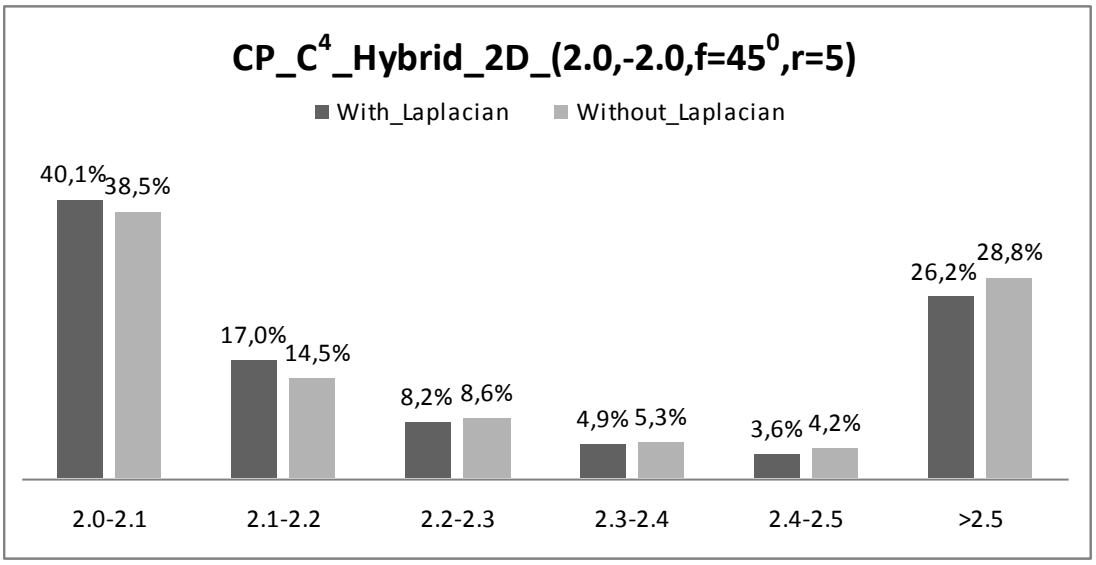
CP C^4 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=5.0)



Εικόνα 4.80: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

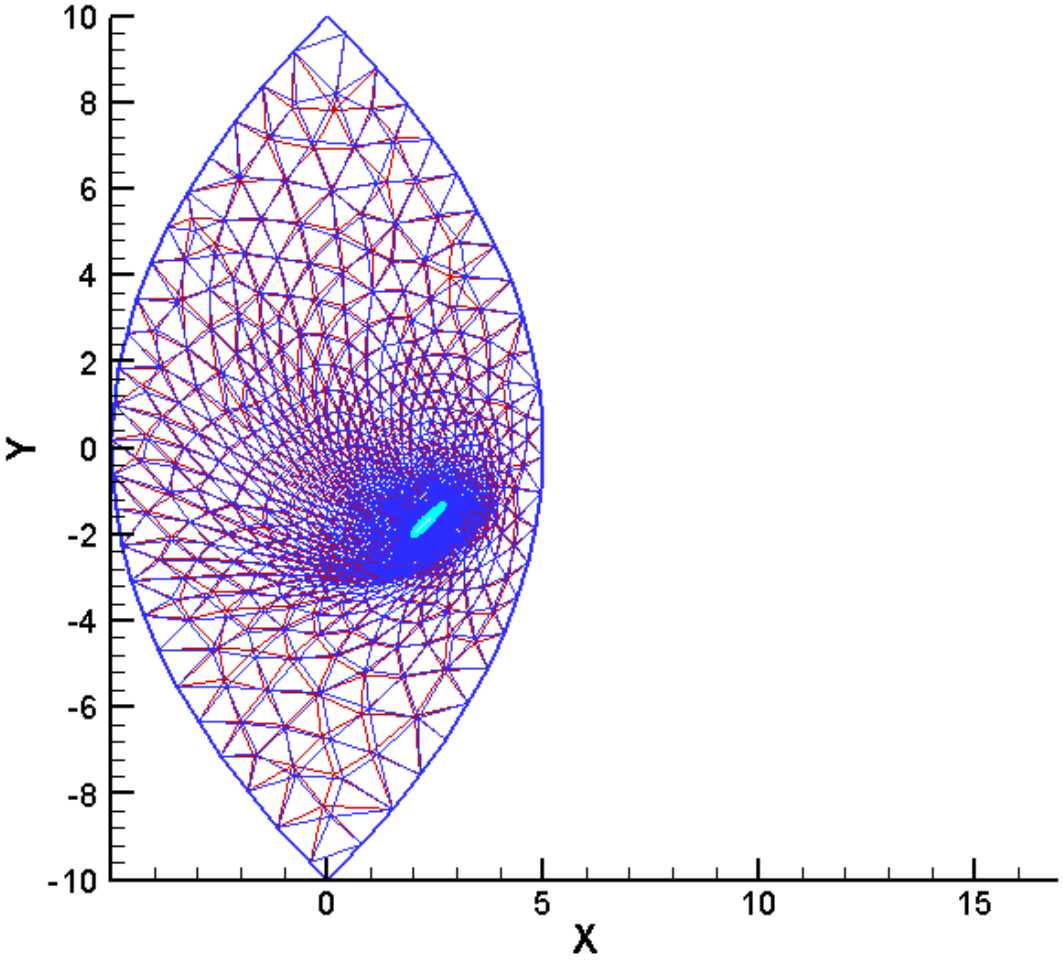


Εικόνα 4.81: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

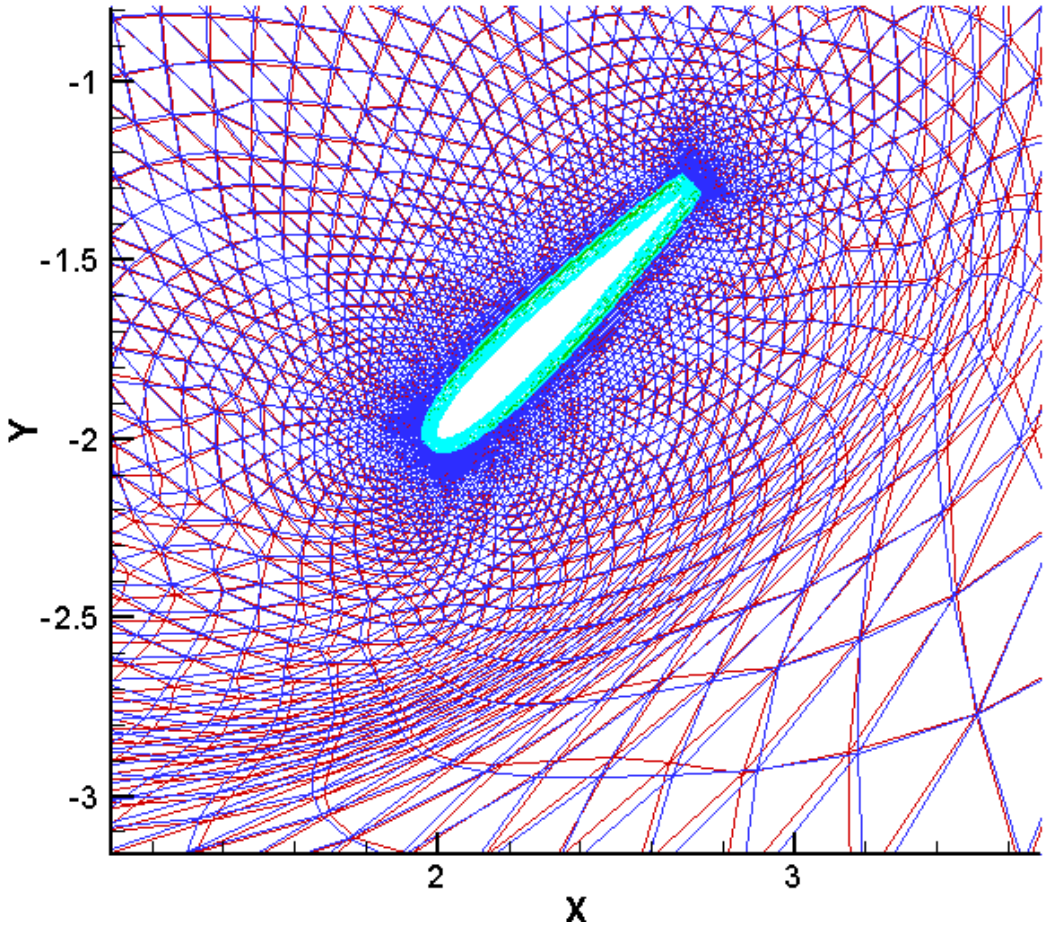


Εικόνα 4.82: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

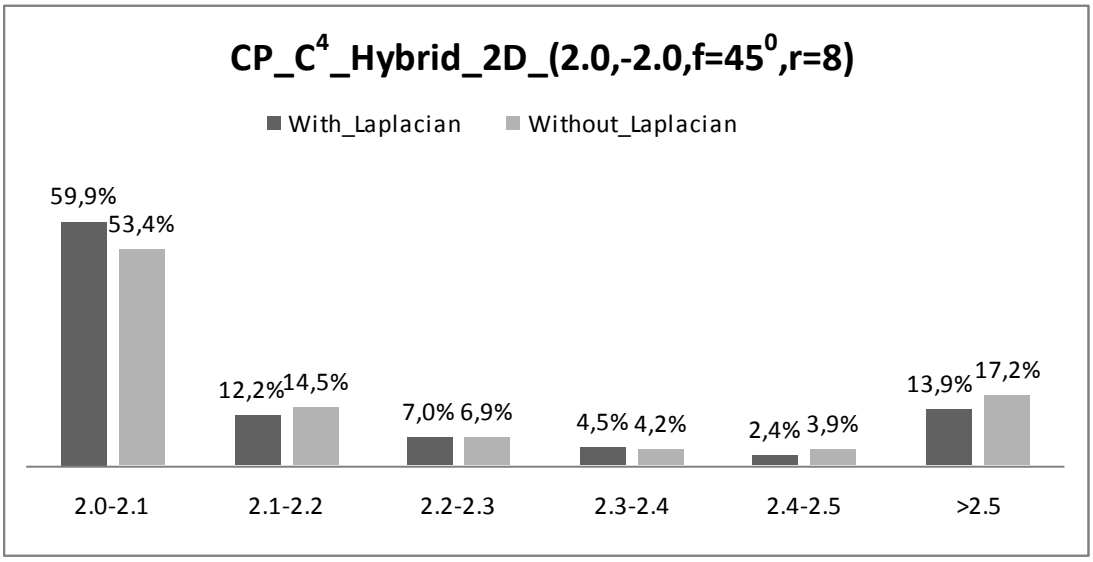
CP C^4 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=8.0)



Εικόνα 4.83: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

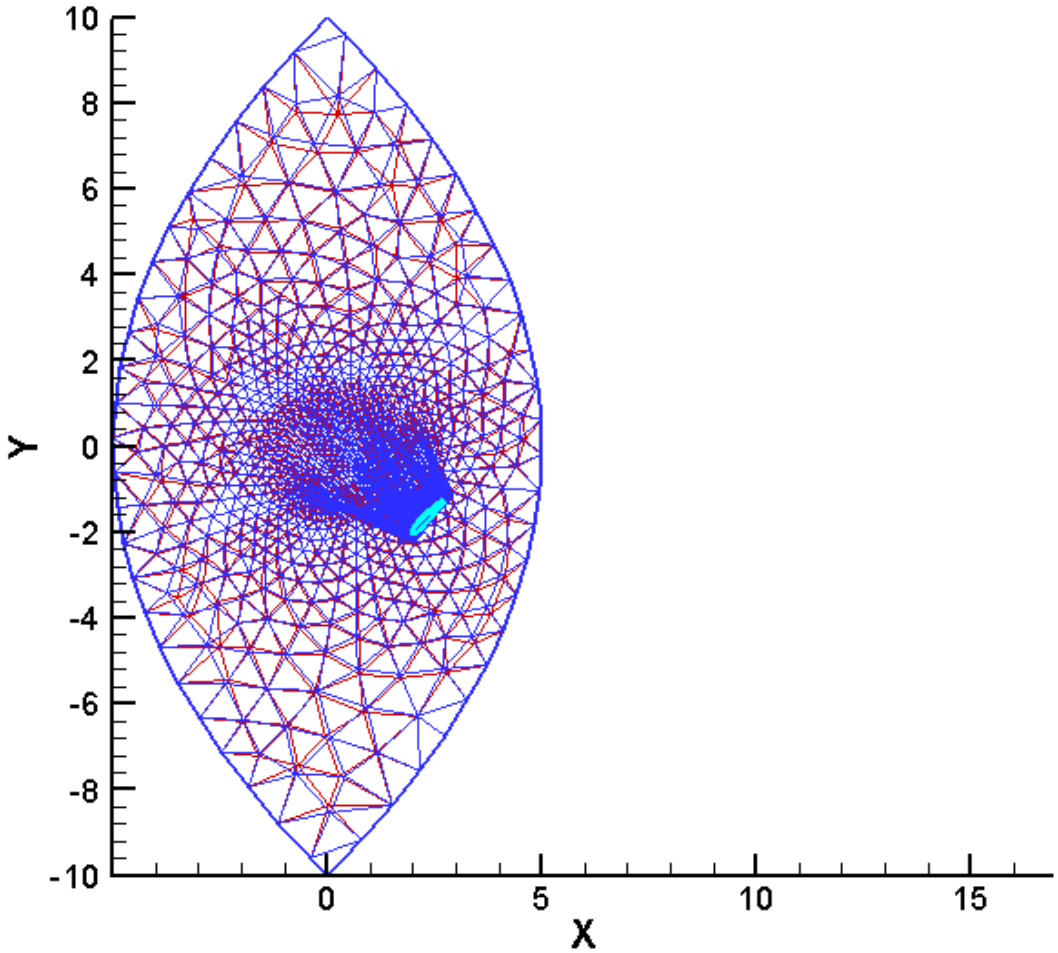


Εικόνα 4.84: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

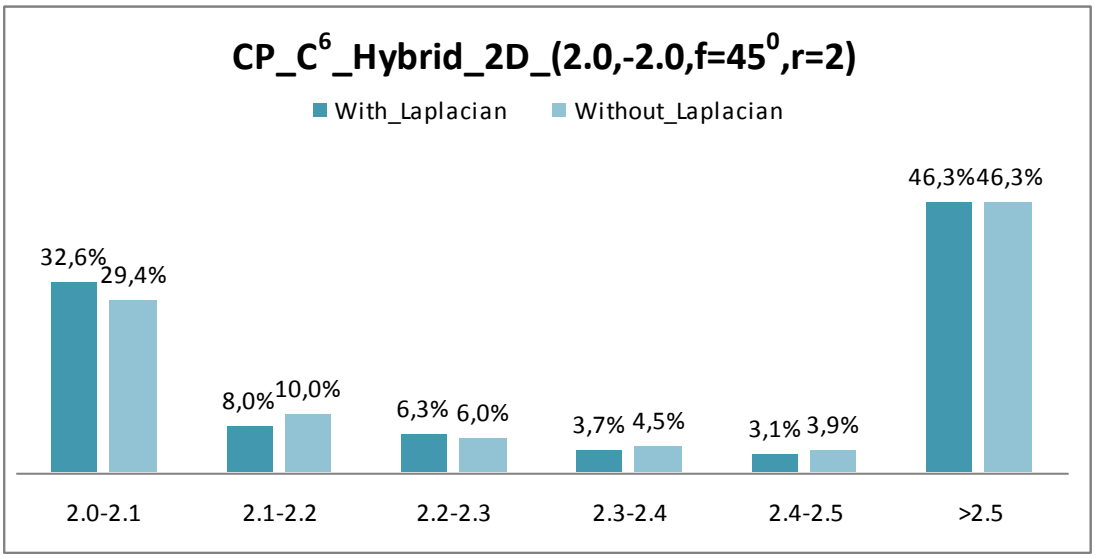


Εικόνα 4.85: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

CP C^6 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=2.0)

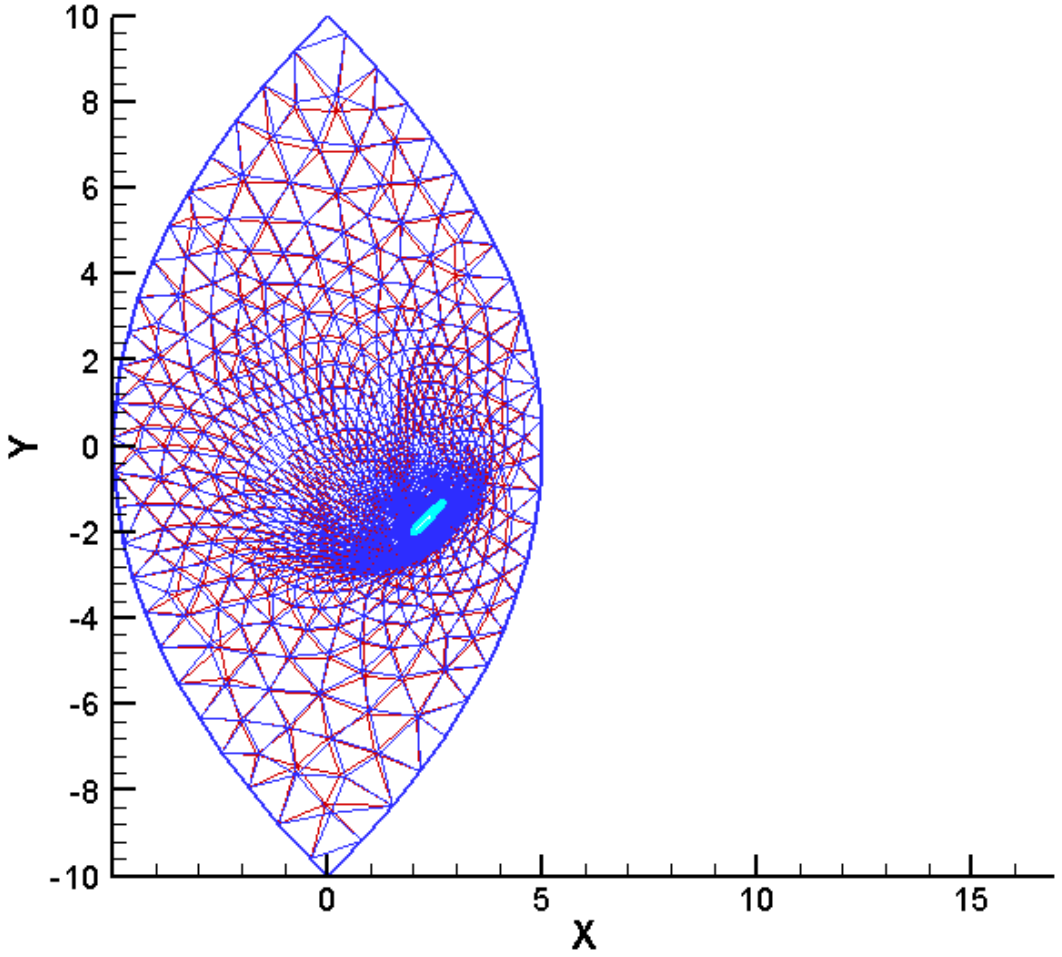


Εικόνα 4.86: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

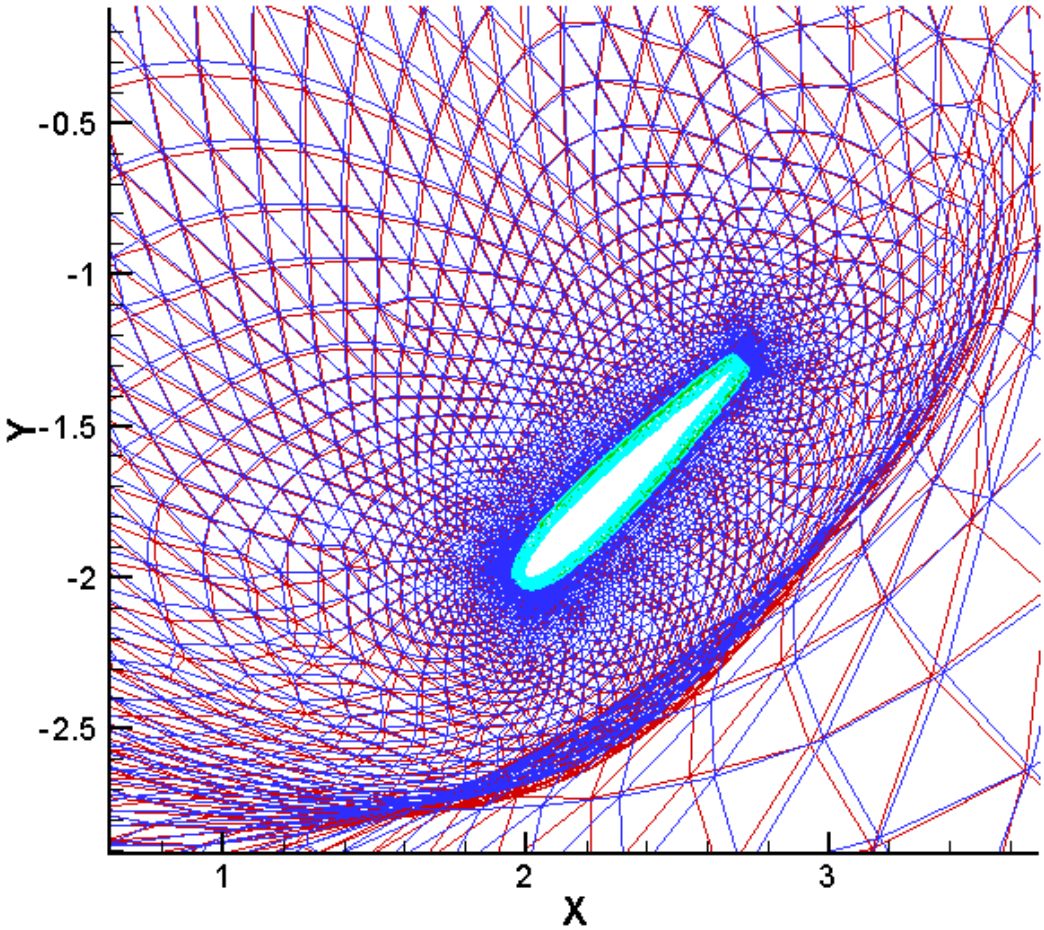


Εικόνα 4.87: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

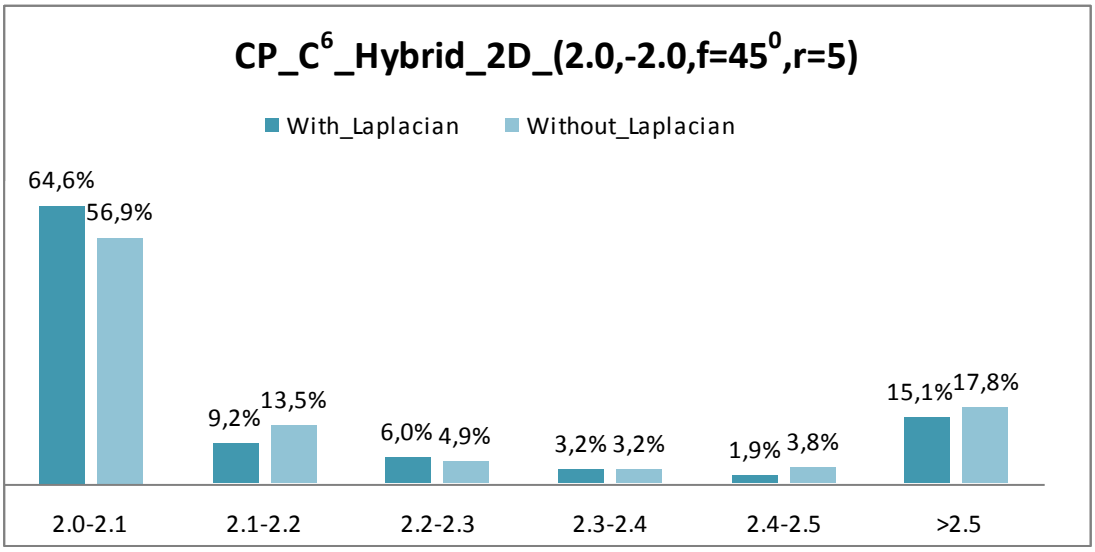
CP C^6 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=5.0)



Εικόνα 4.88: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

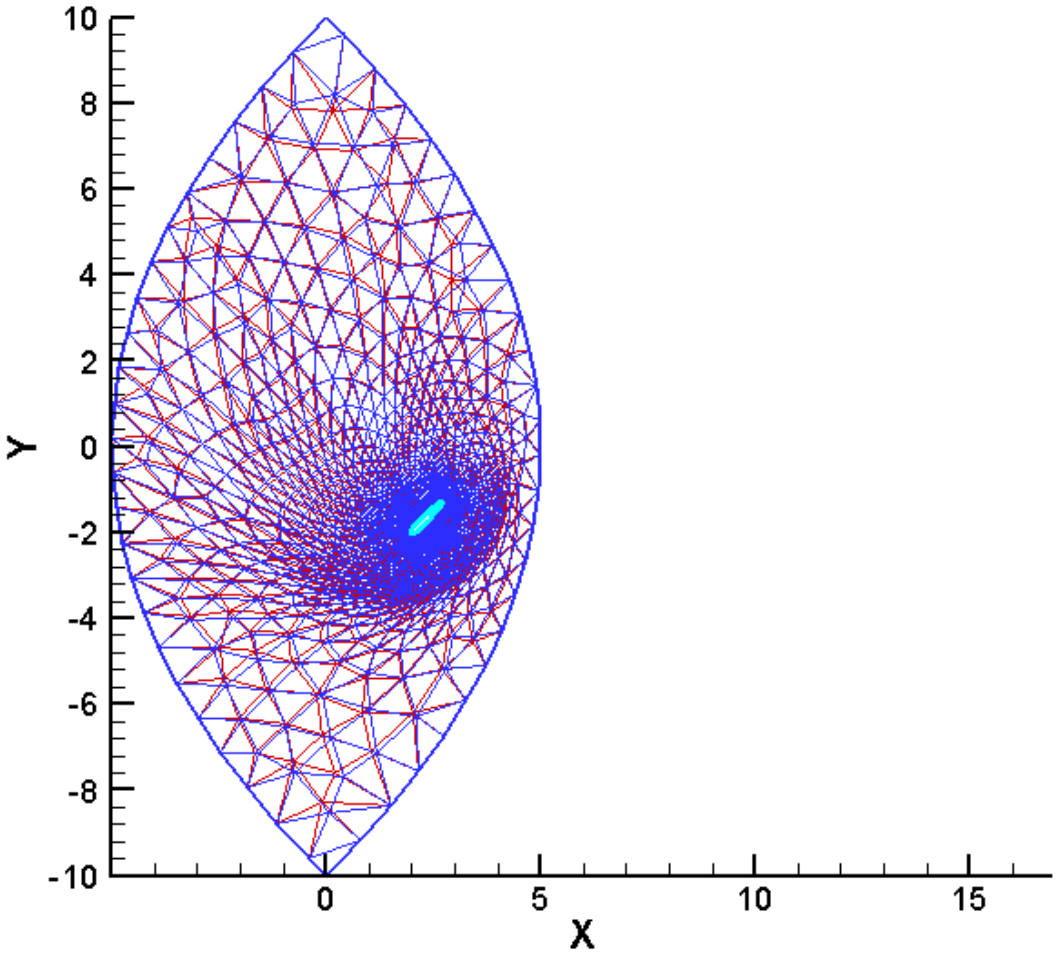


Εικόνα 4.89: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

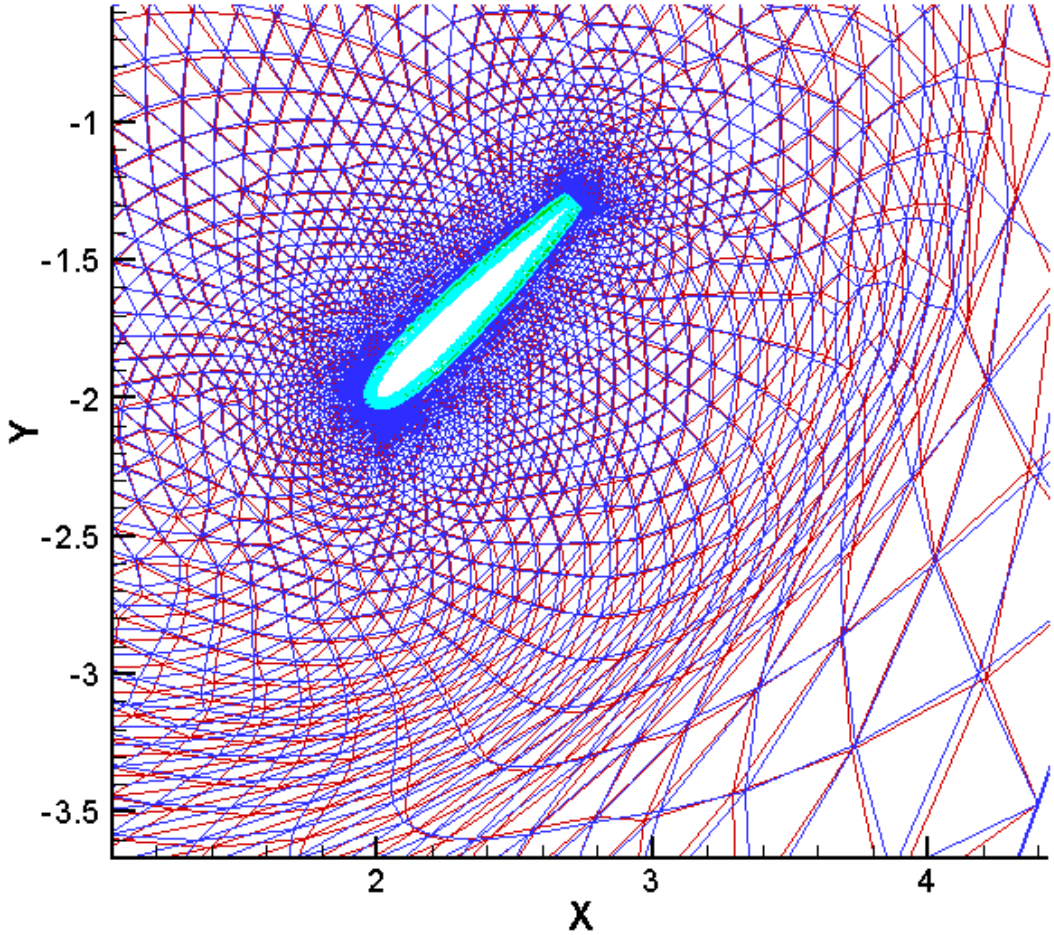


Εικόνα 4.90: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

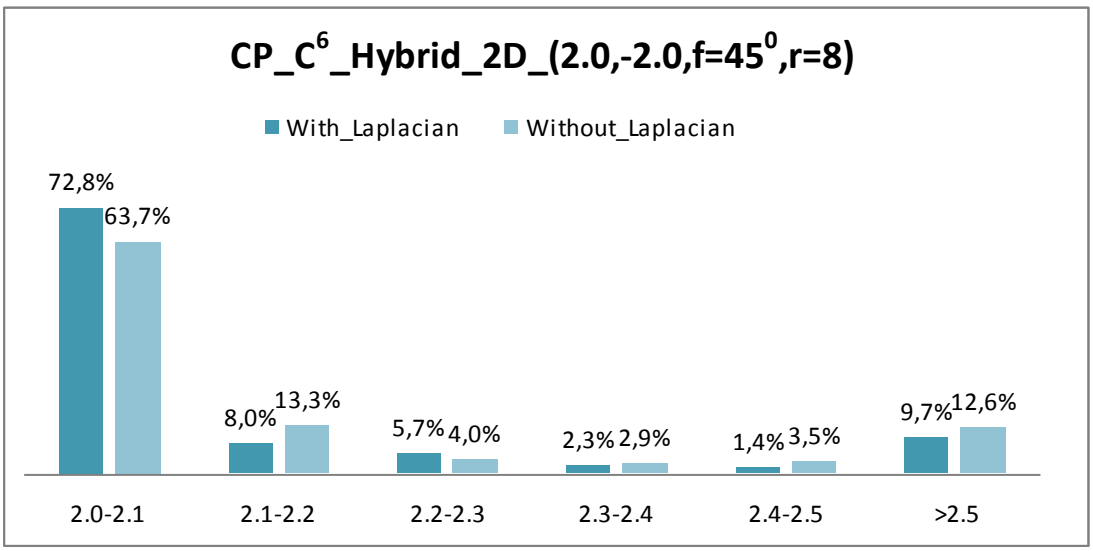
CP C^6 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=8.0)



Εικόνα 4.91: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

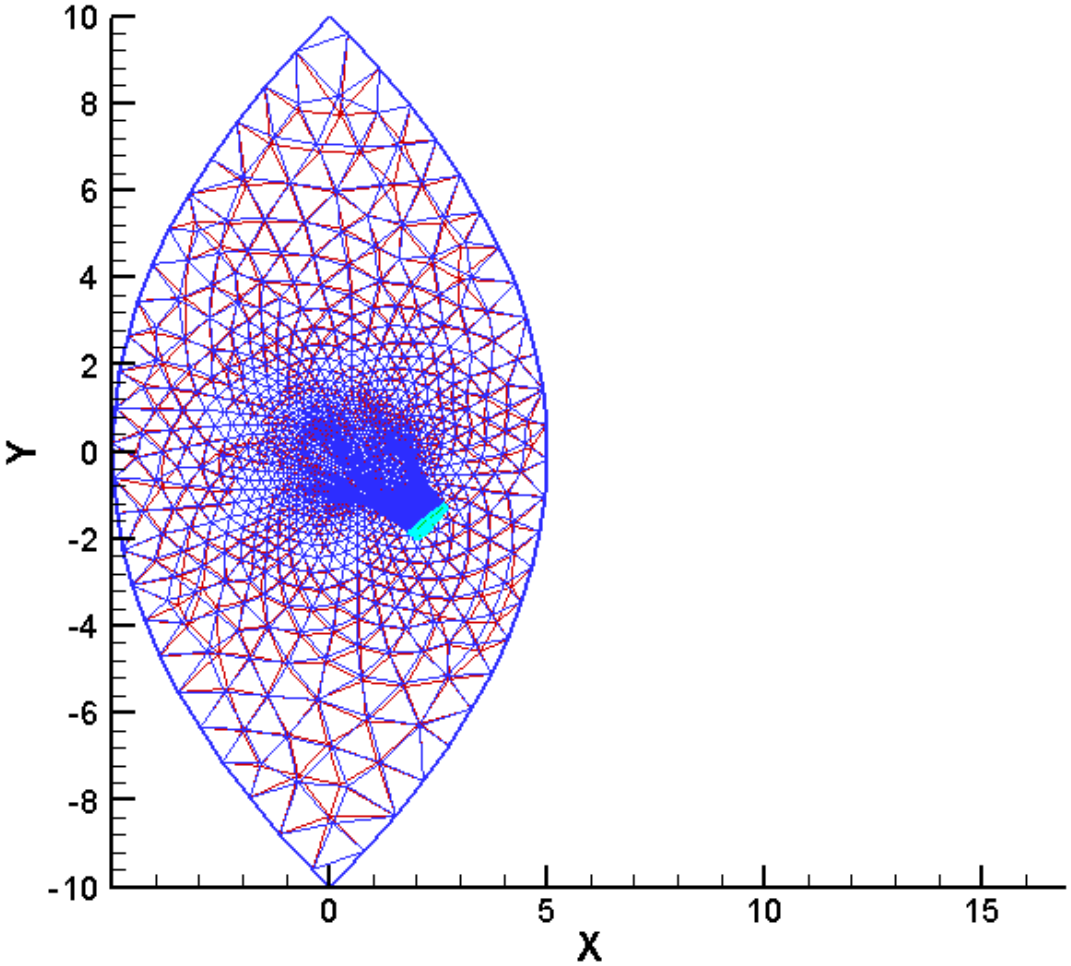


Εικόνα 4.92: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

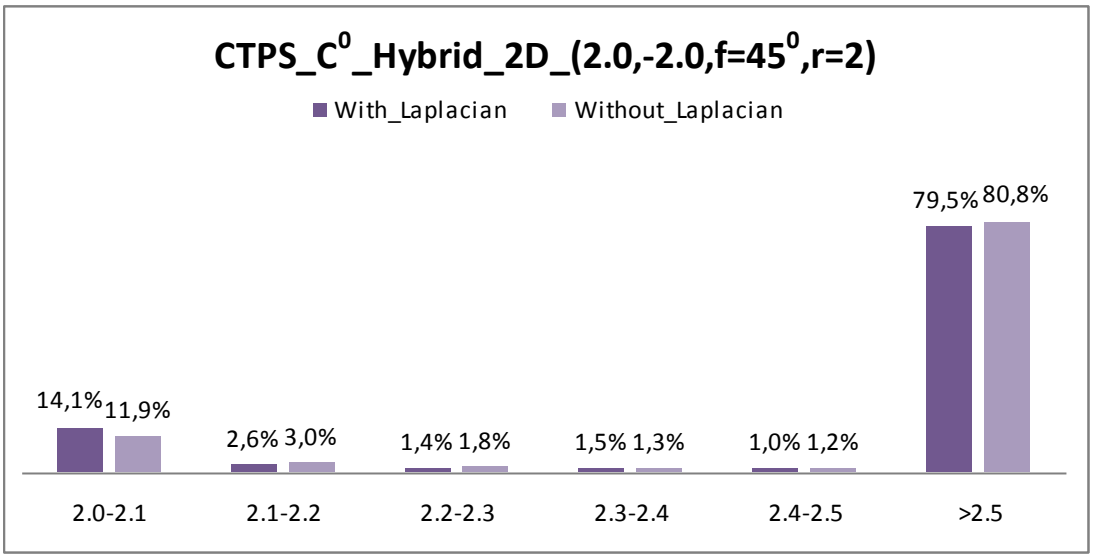


Εικόνα 4.93: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

CTPS C^0 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=2.0)

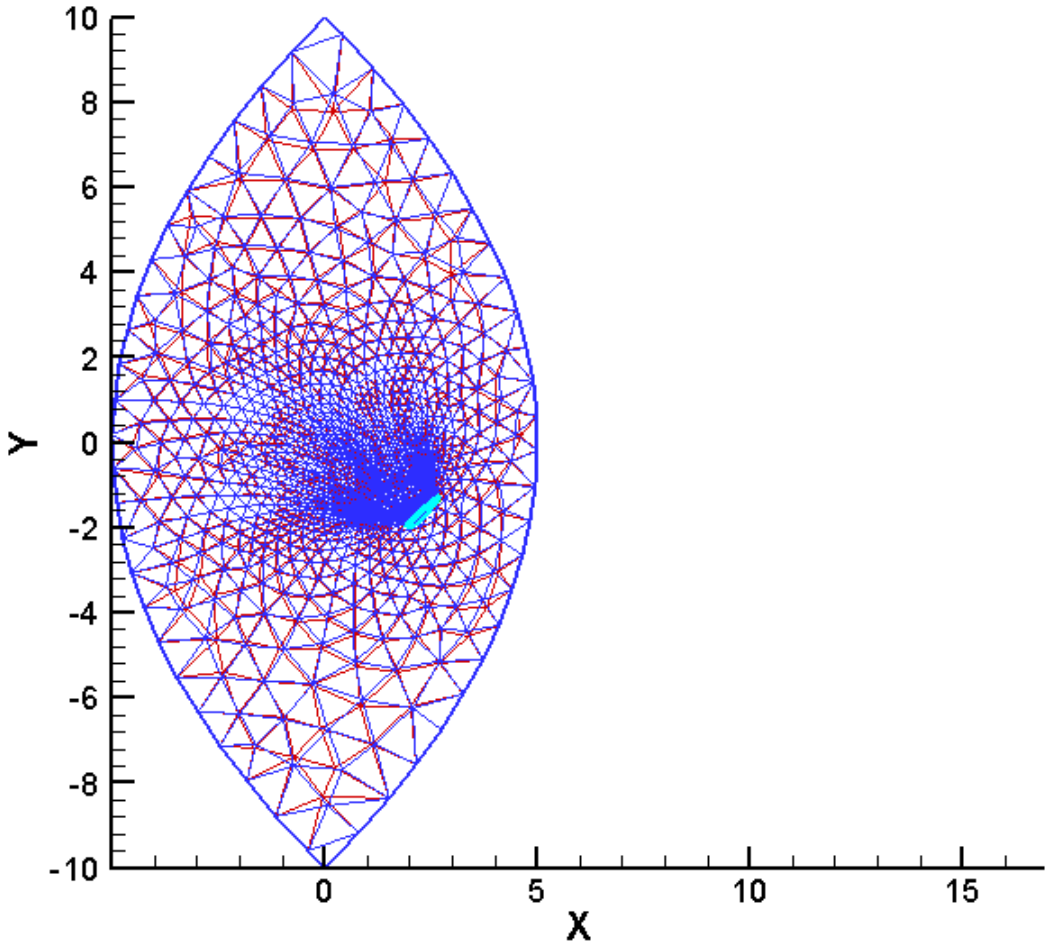


Εικόνα 4.94: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

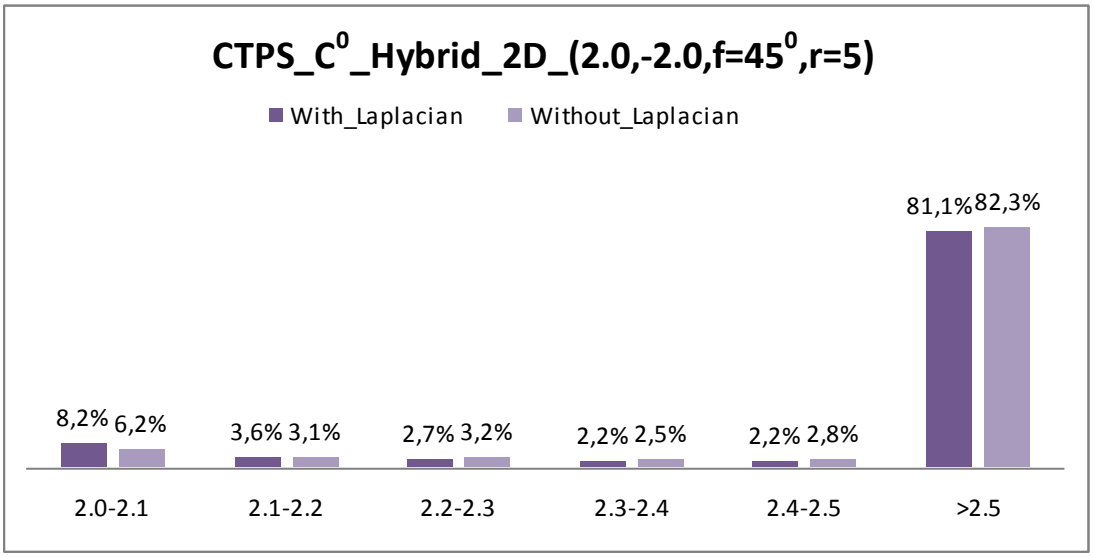


Εικόνα 4.95: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

CTPS C^0 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=5.0)

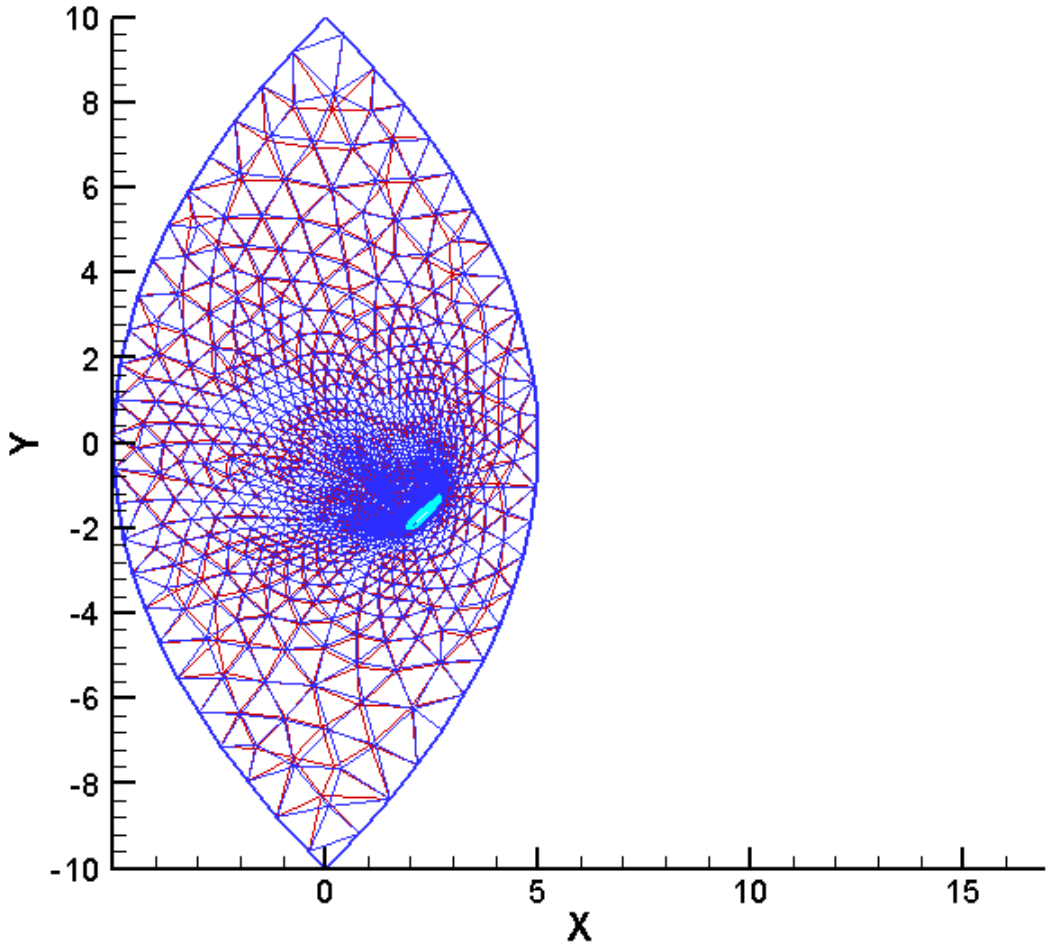


Εικόνα 4.96: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

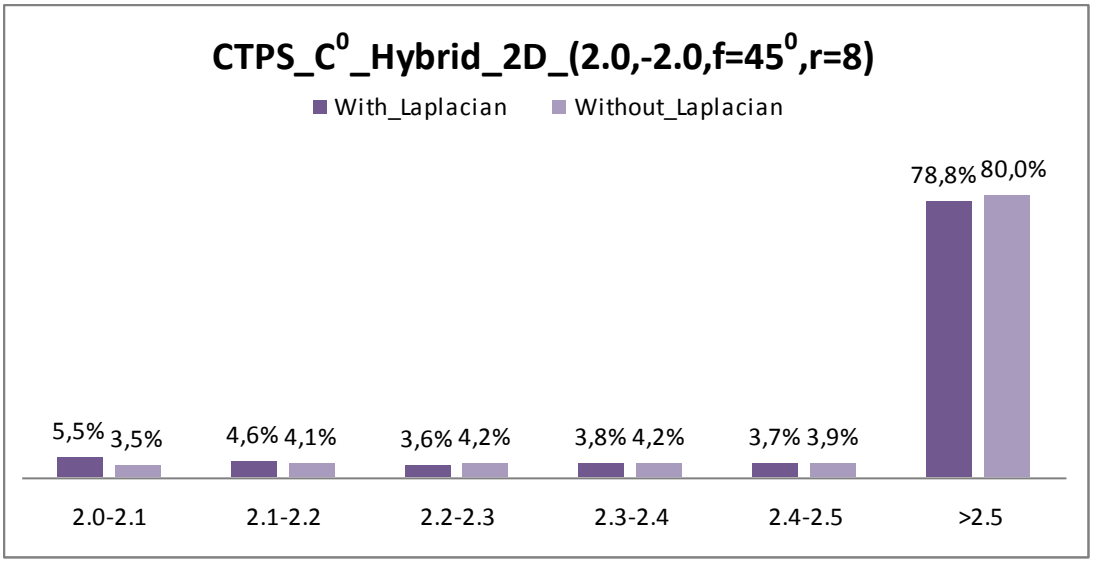


Εικόνα 4.97: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

CTPS C^0 περίπτωση (2.0,-2.0,f=45^0,r=8.0)



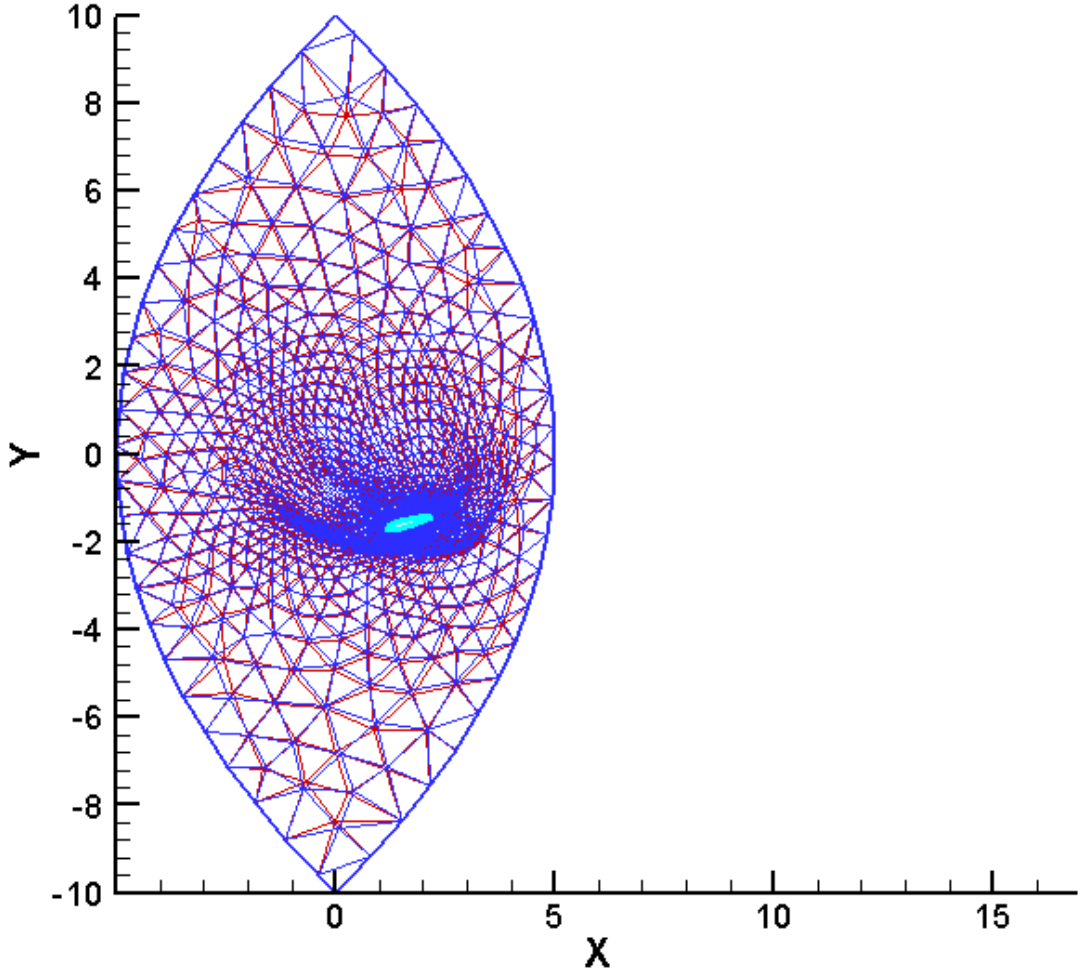
Εικόνα 4.98: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0



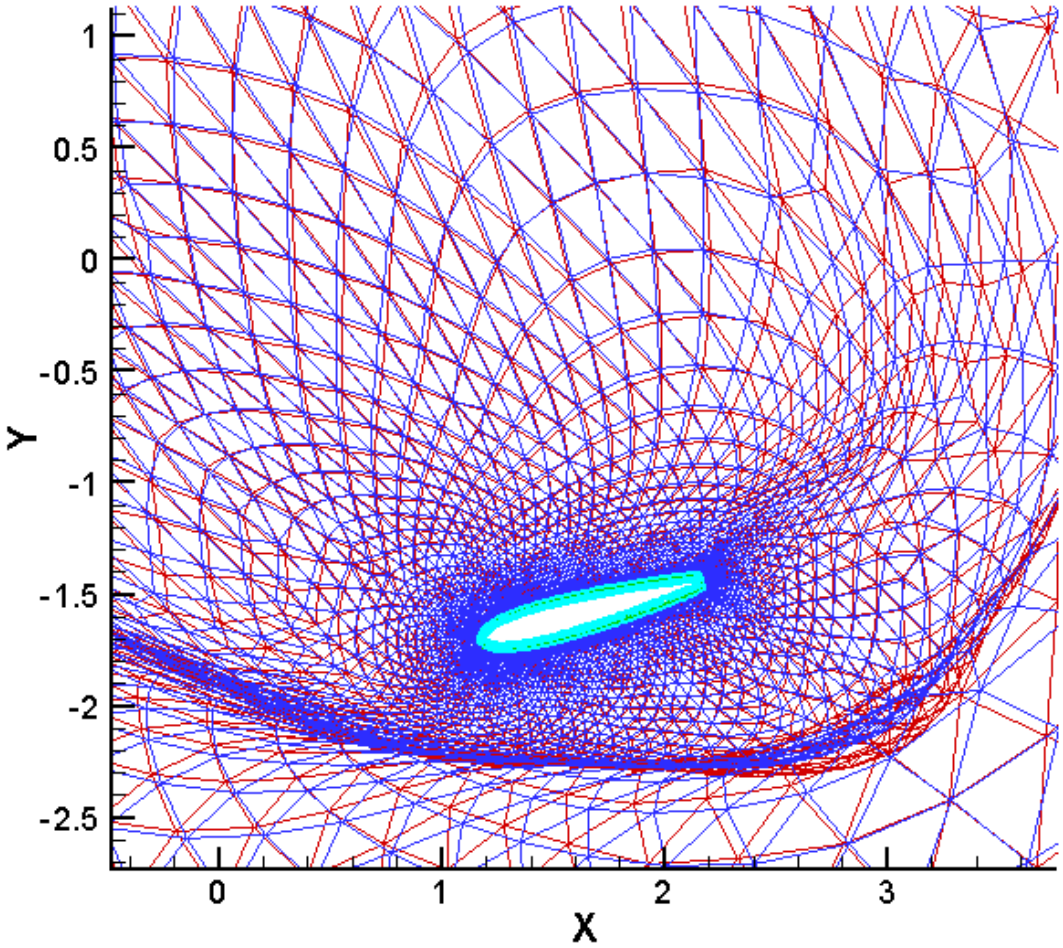
Εικόνα 4.99: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

Radial Basis Function with global support

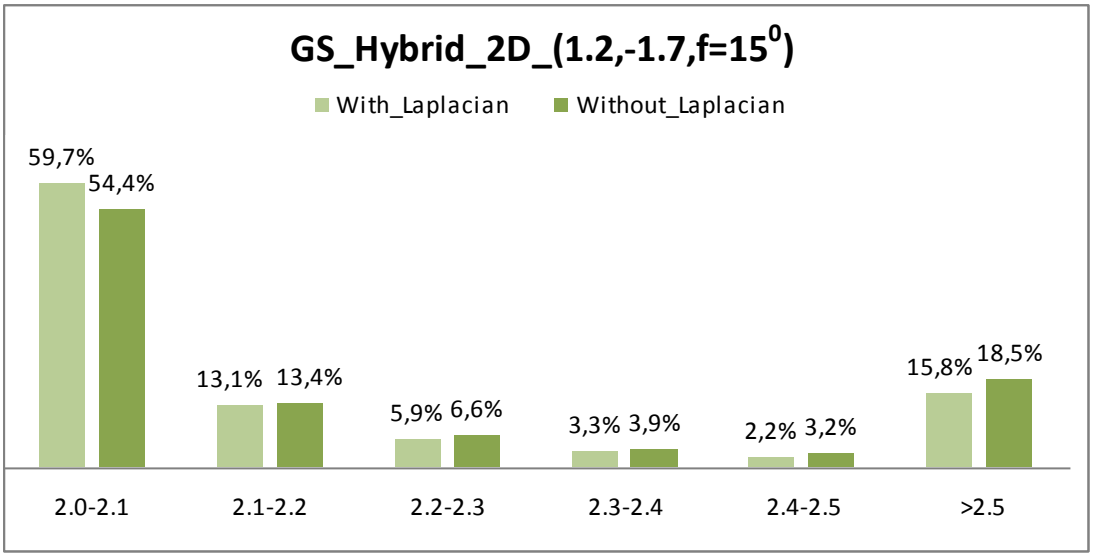
Gaussian περίπτωση (1.2,-1.7,f=15^0)



Εικόνα 4.100: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

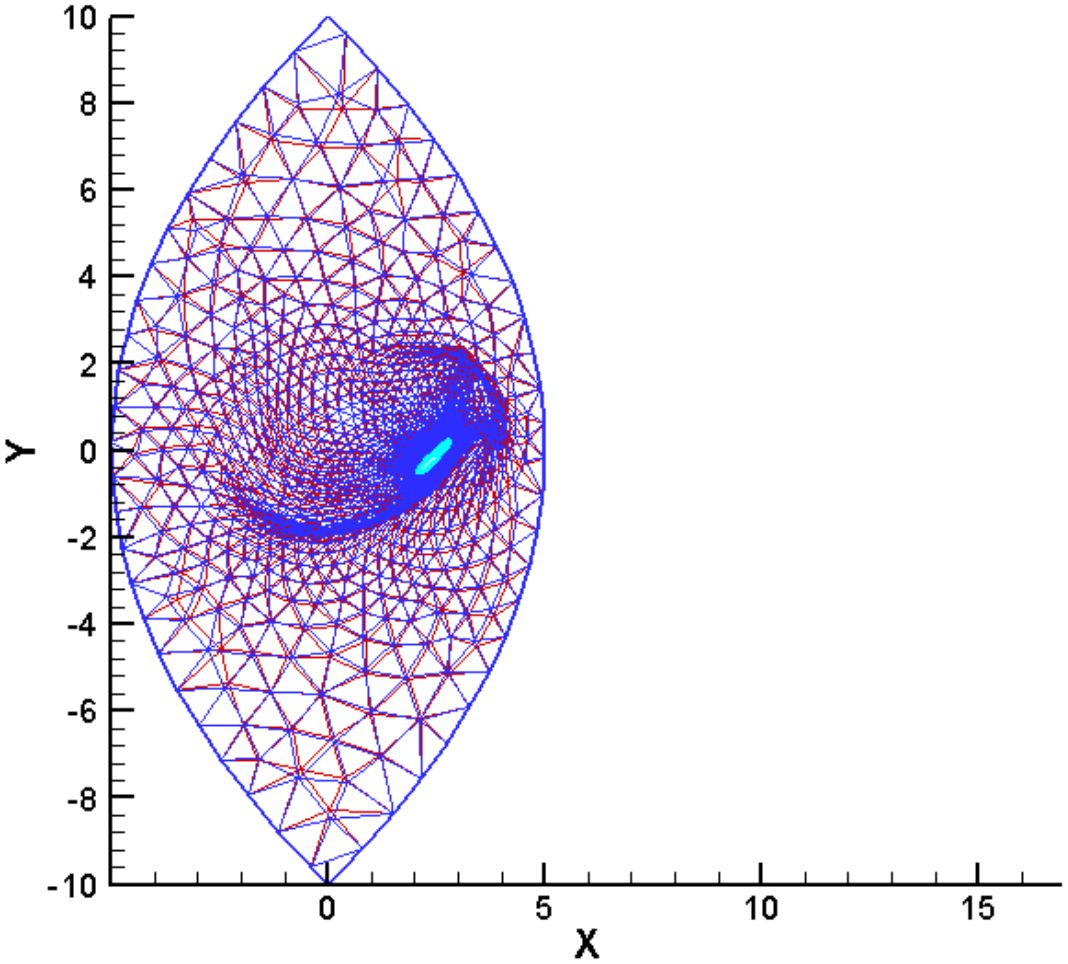


Εικόνα 4.101: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

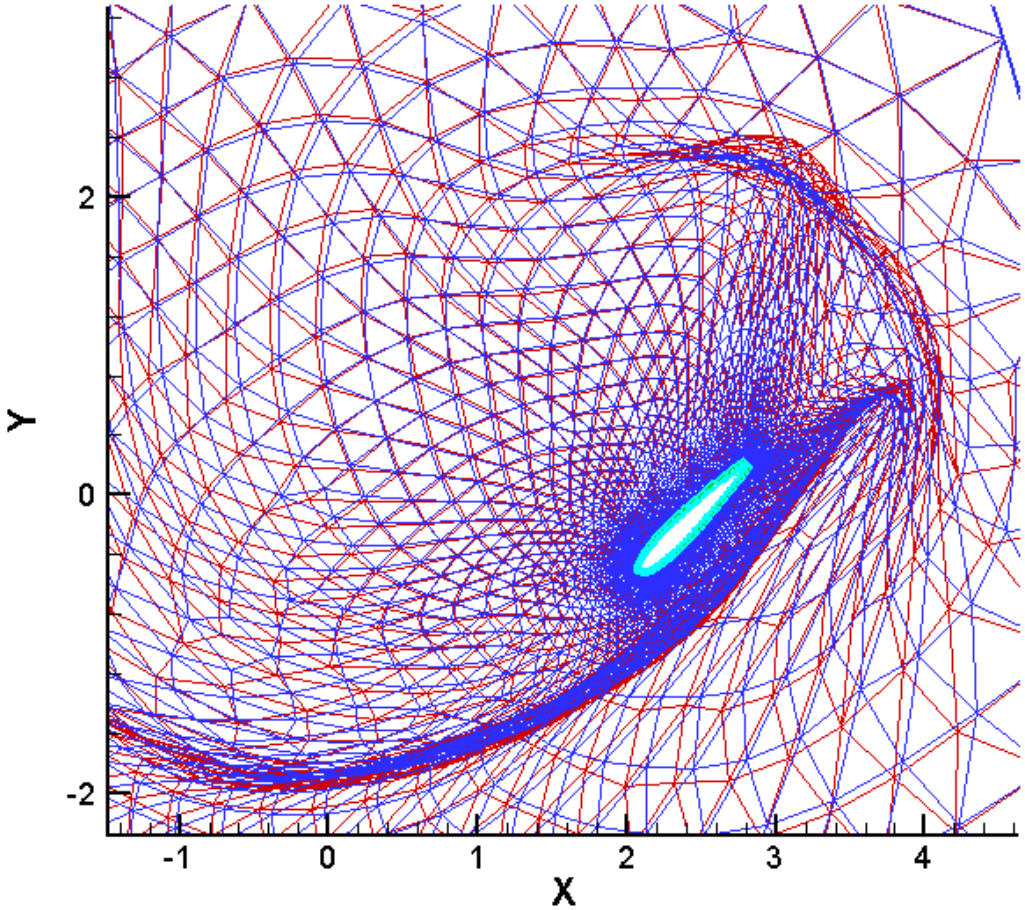


Εικόνα 4.102: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

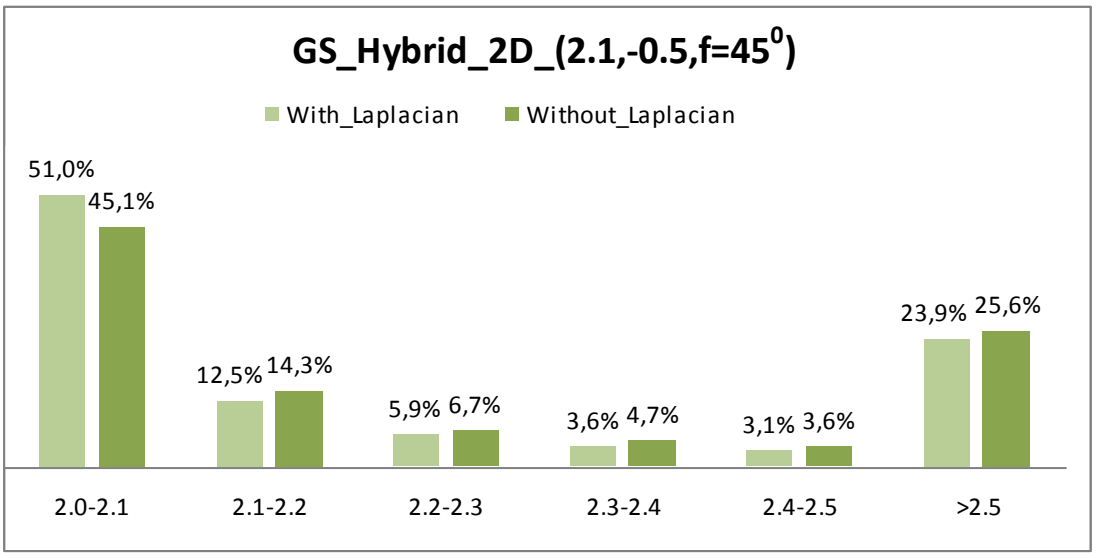
Gaussian περίπτωση (2.1,-0.5,f=45^0)



Εικόνα 4.103: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

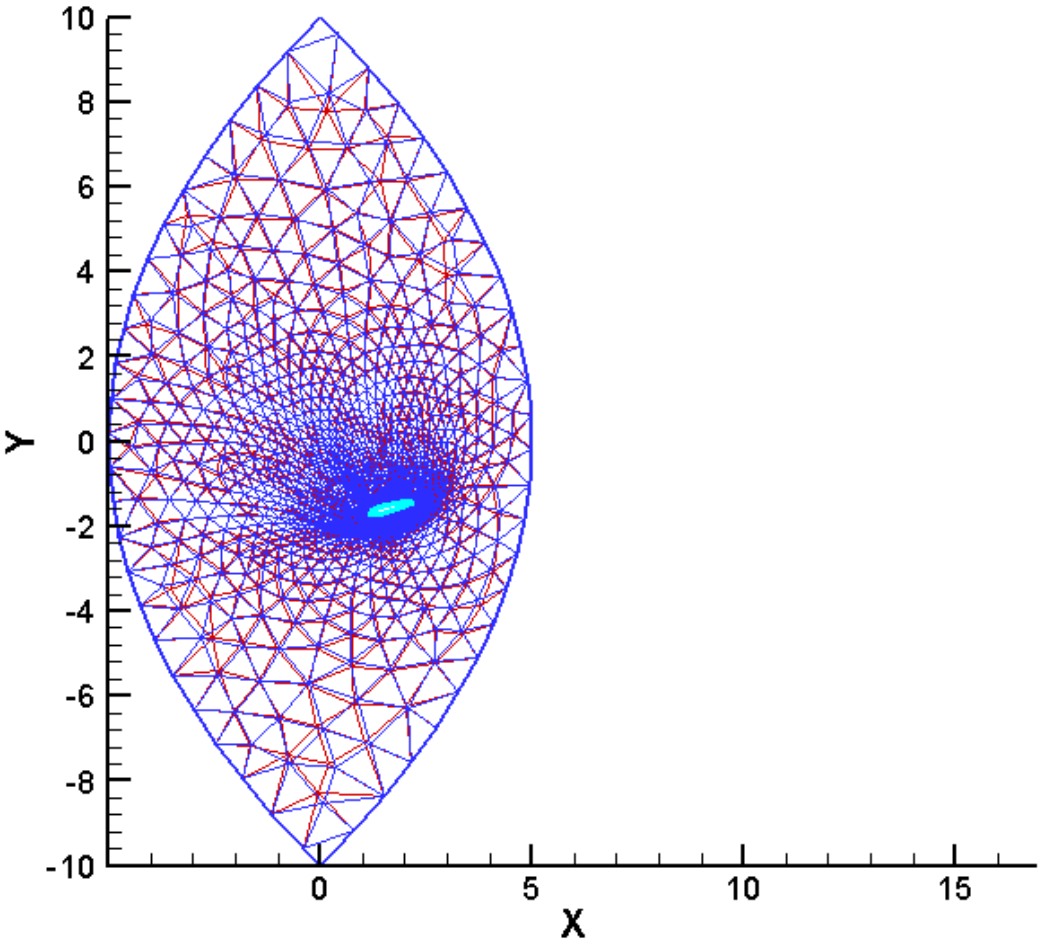


Εικόνα 4.104: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

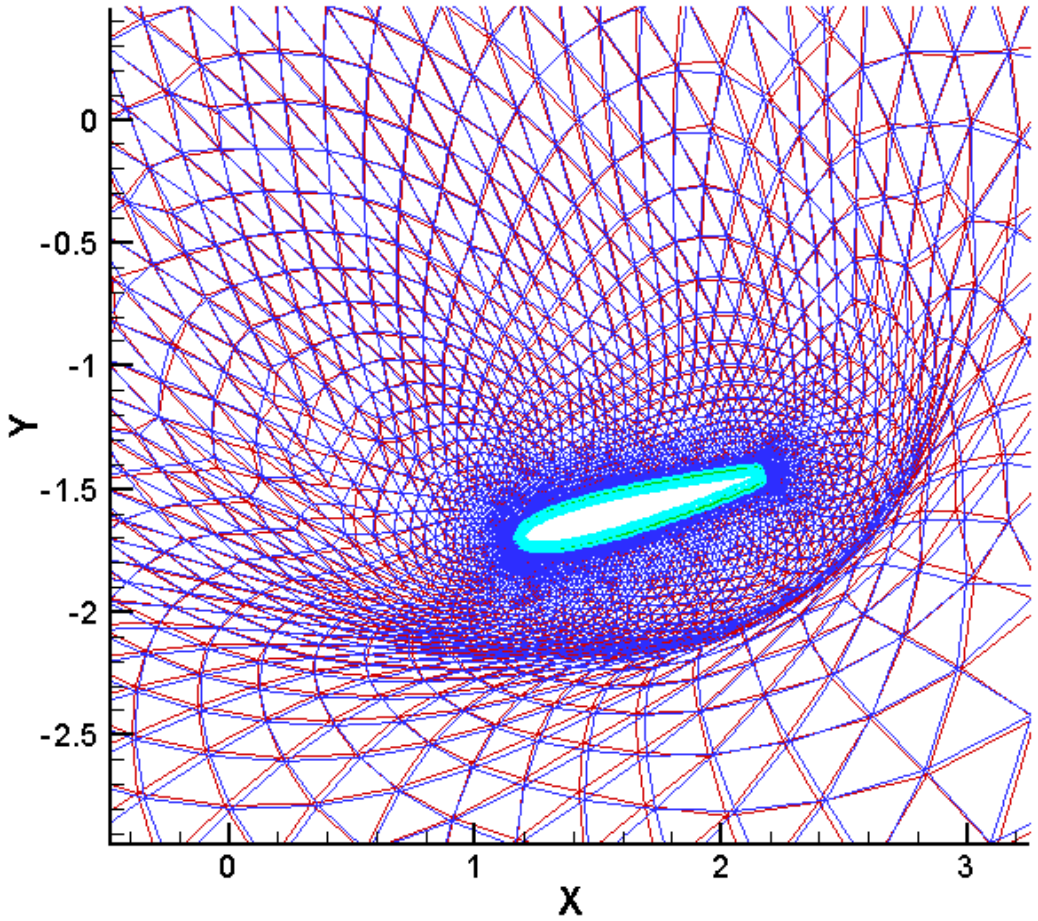


Εικόνα 4.105: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

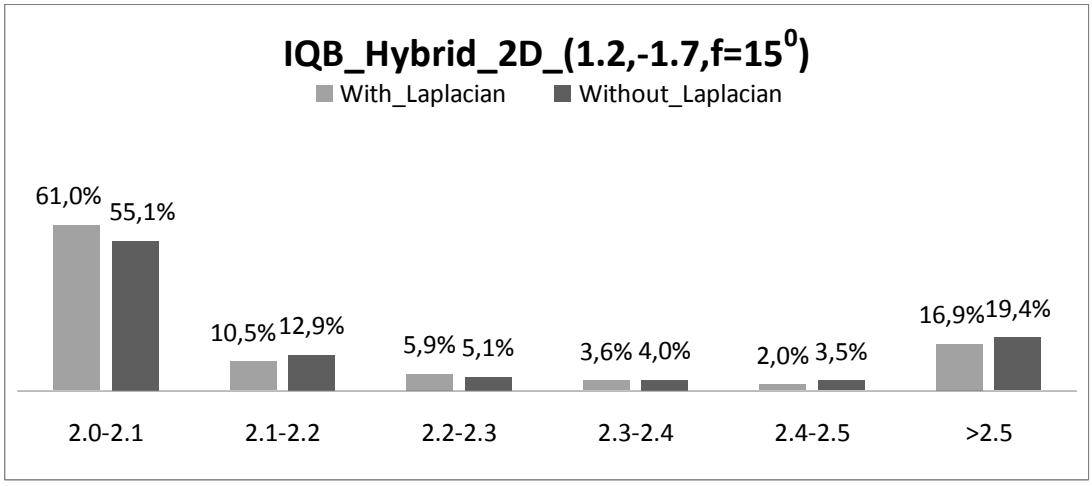
Inverse Quadric περίπτωση (1.2,-1.7,f=15^0)



Εικόνα 4.106: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

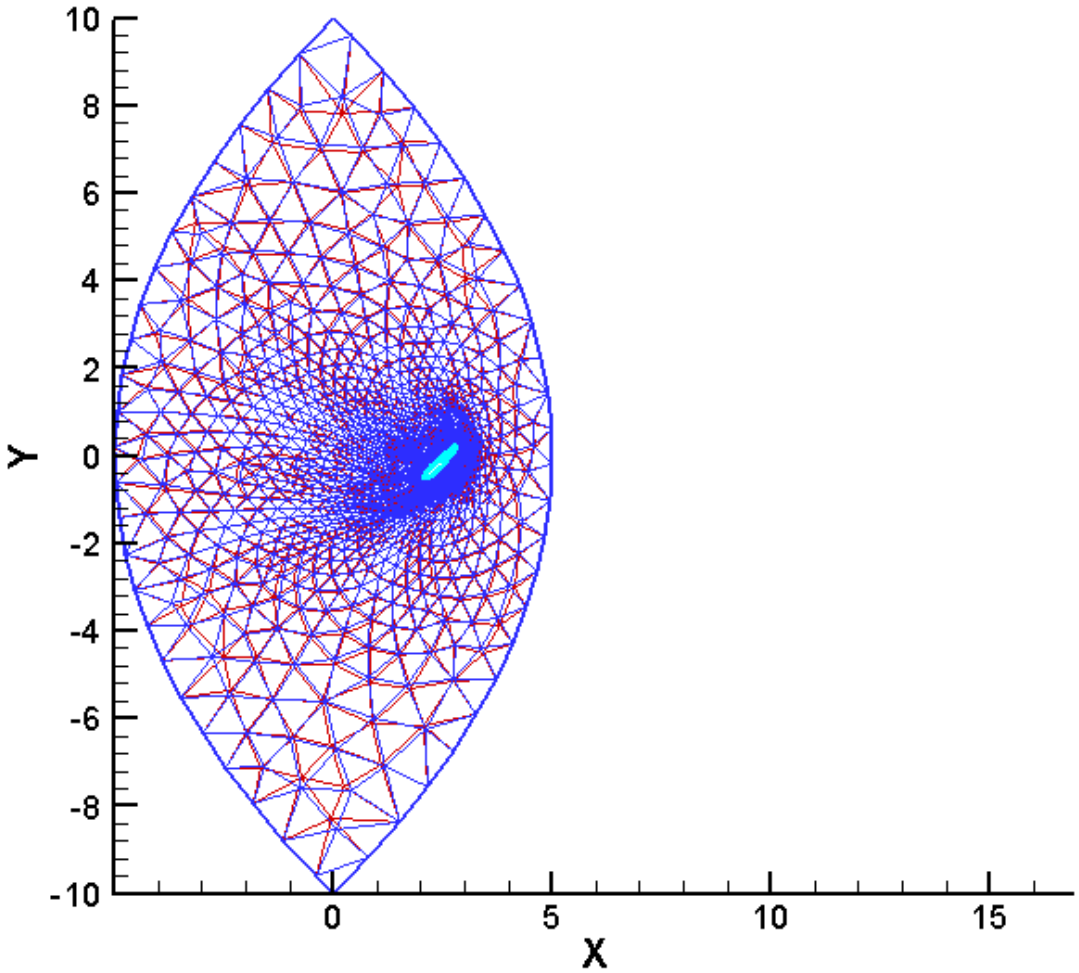


Εικόνα 4.107: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

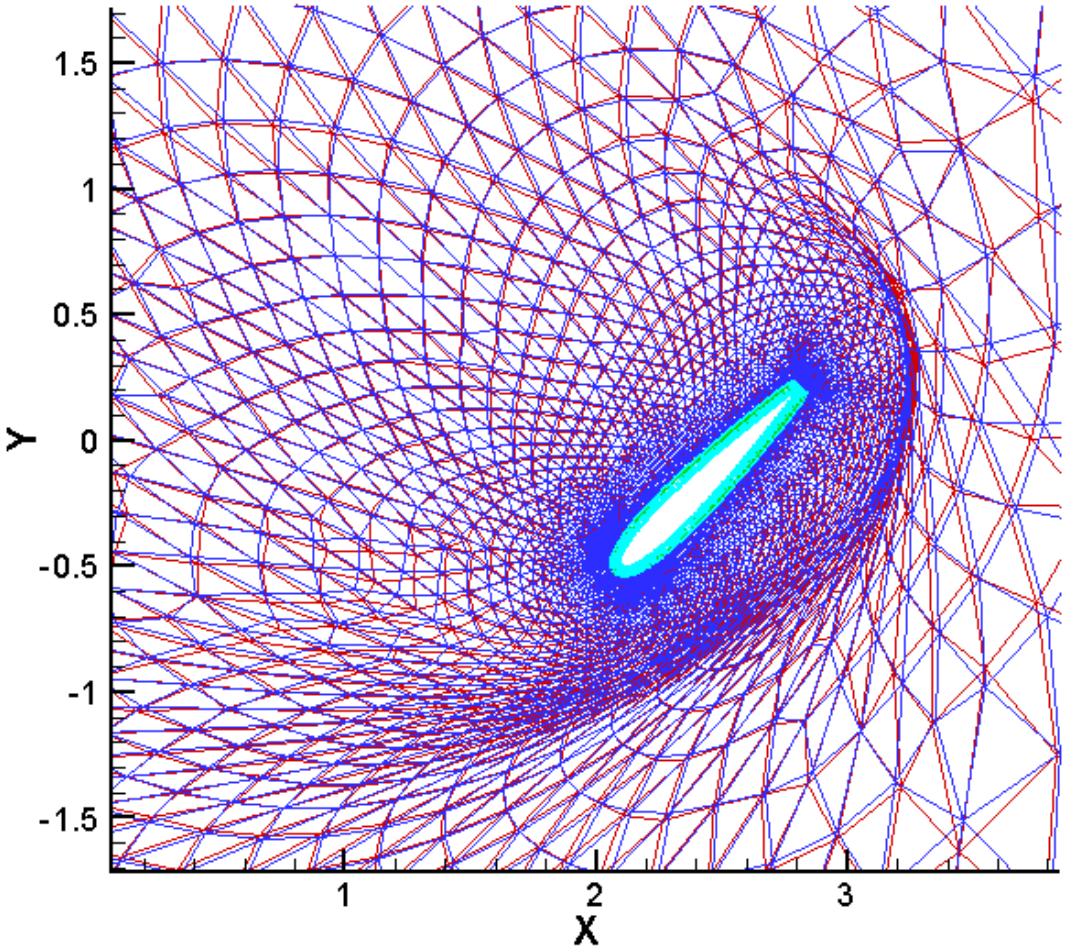


Εικόνα 4.108: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

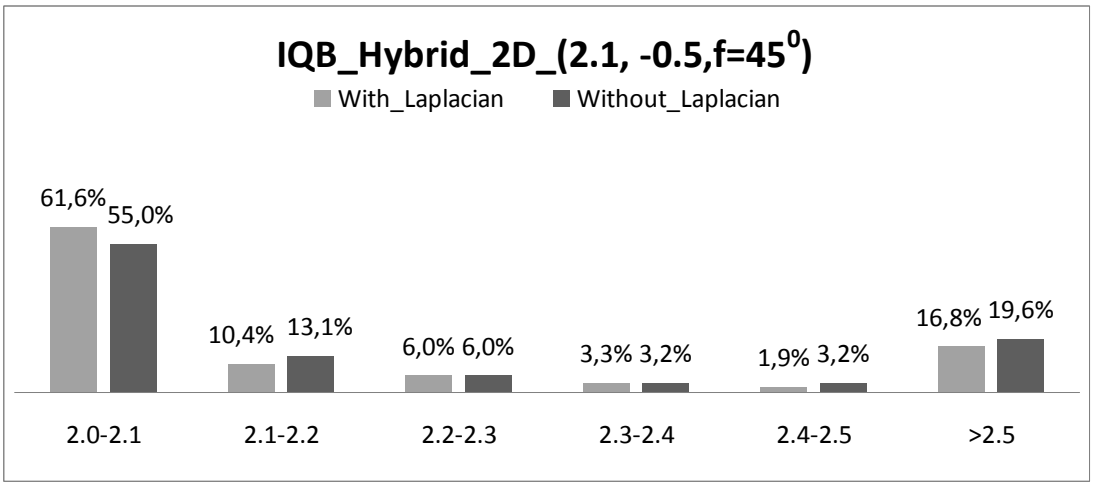
Inverse Quadric περίπτωση (2.1,-0.5,f=45^0)



Εικόνα 4.109: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

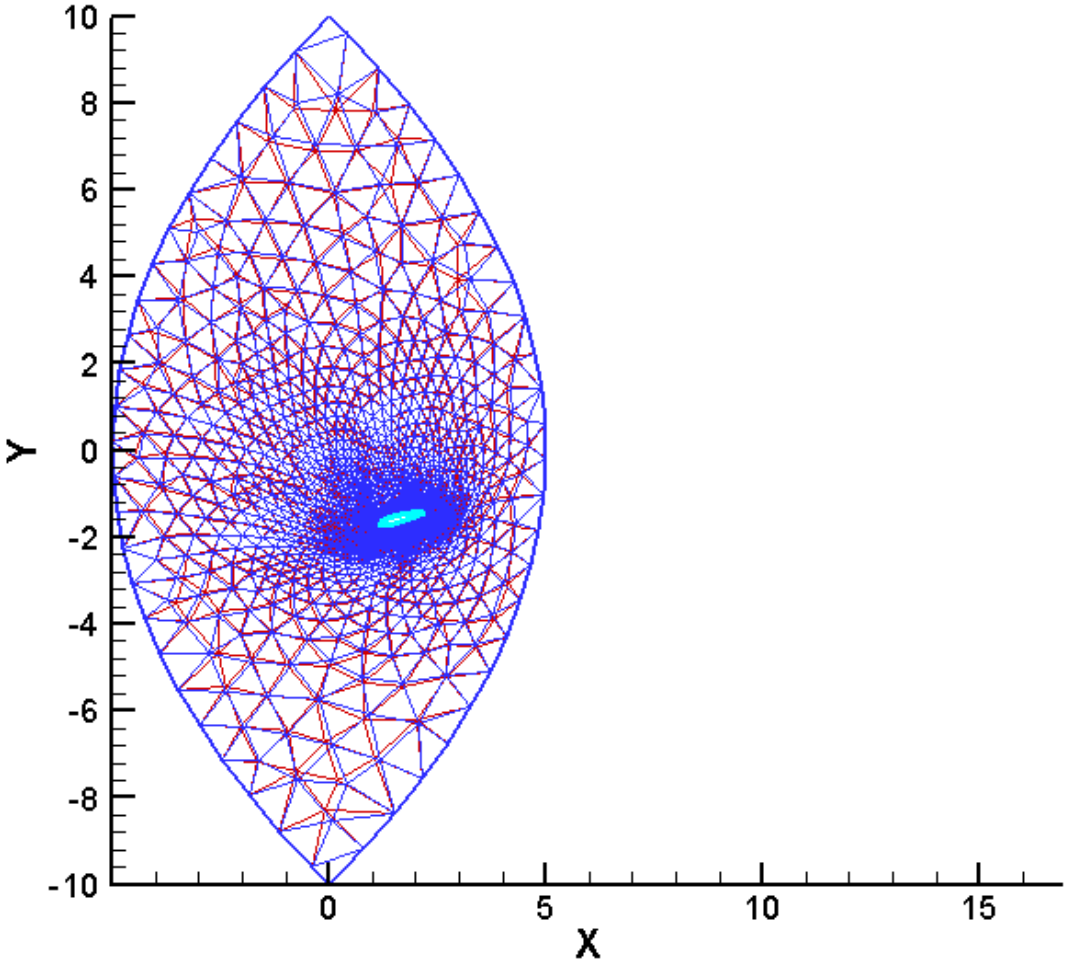


Εικόνα 4.110: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

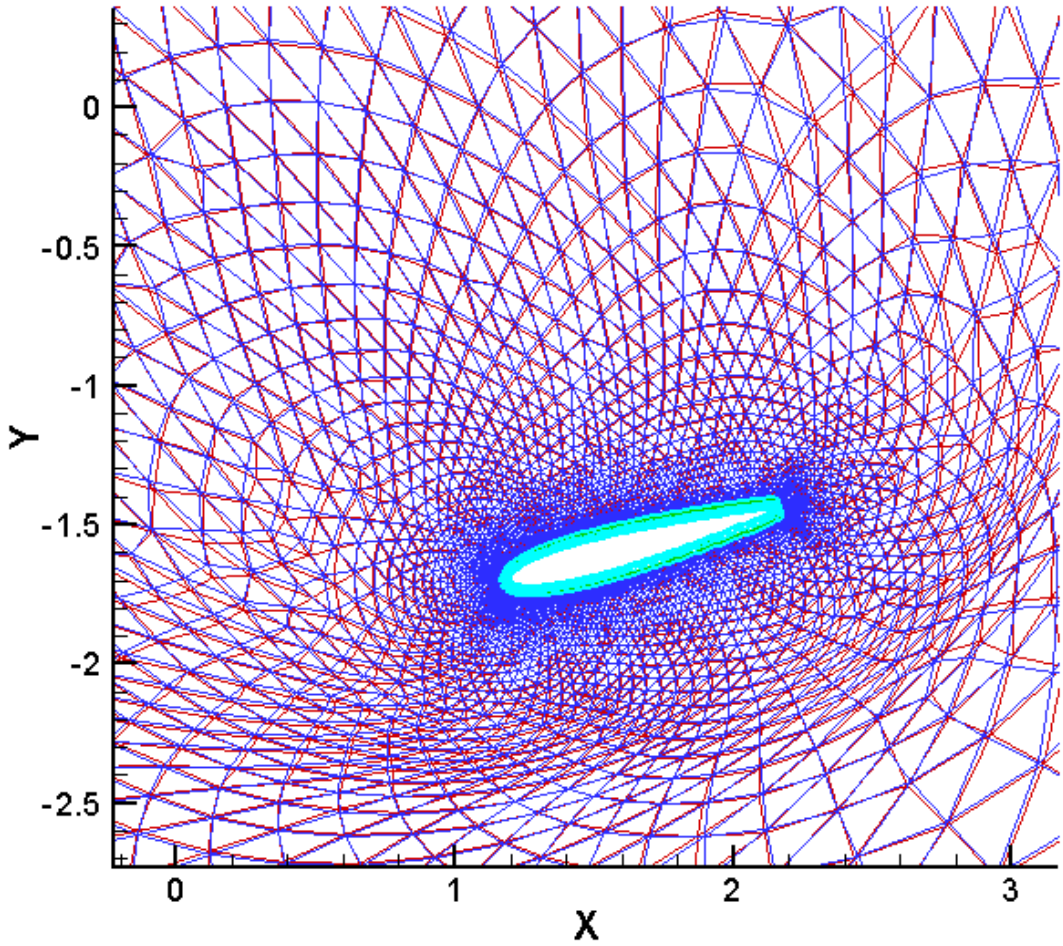


Εικόνα 4.111: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IQB

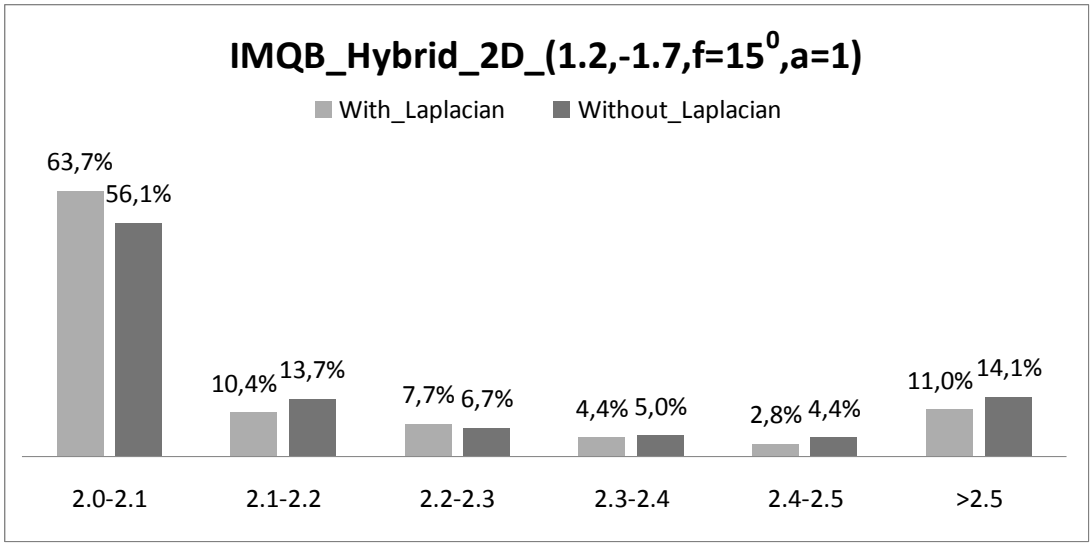
Inverse Multiquadric περίπτωση (1.2,-1.7,f=15^0,a=1)



Εικόνα 4.112: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

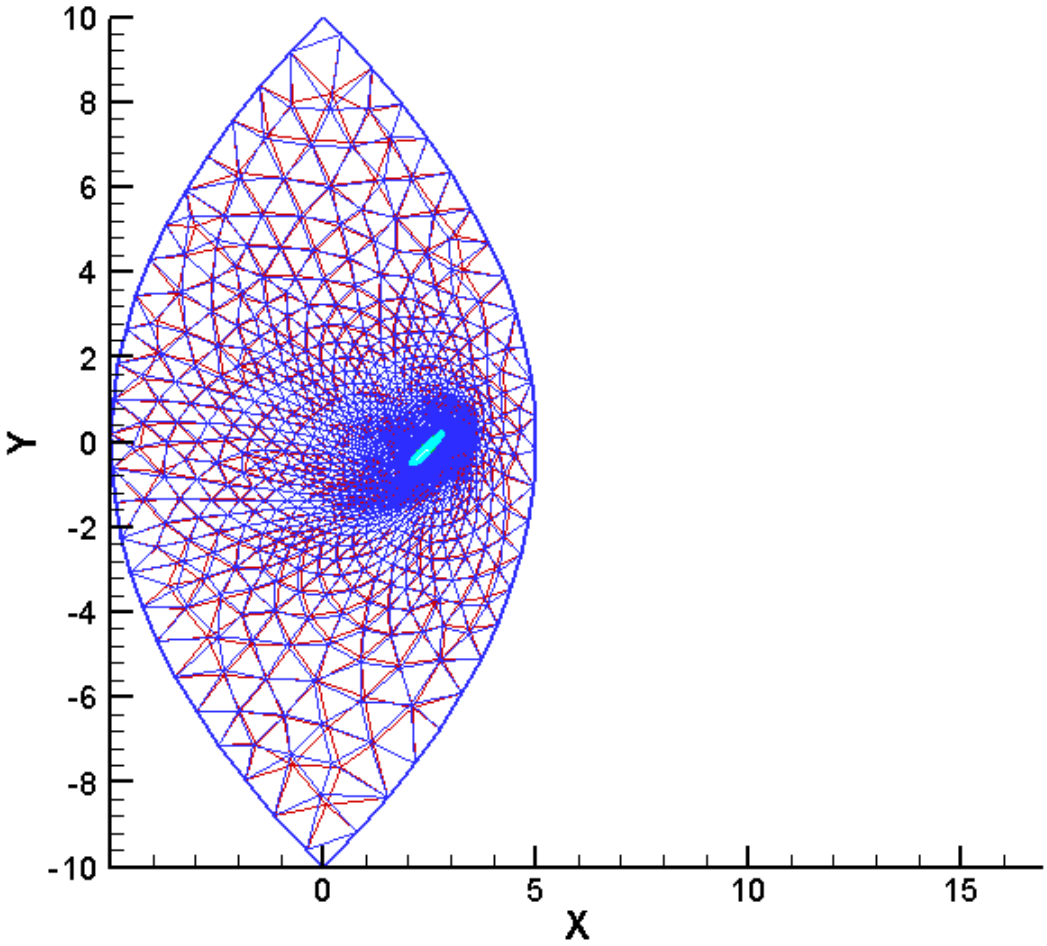


Εικόνα 4.113: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

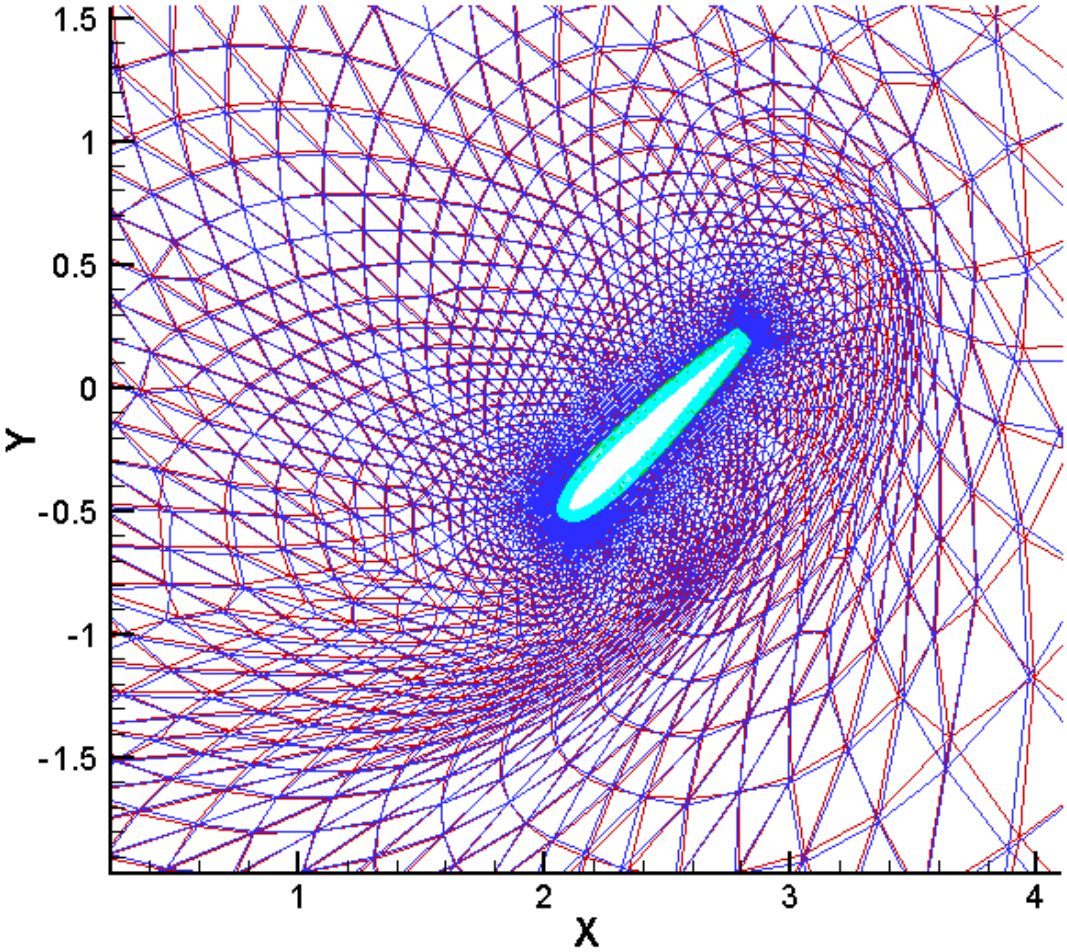


Εικόνα 4.114: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

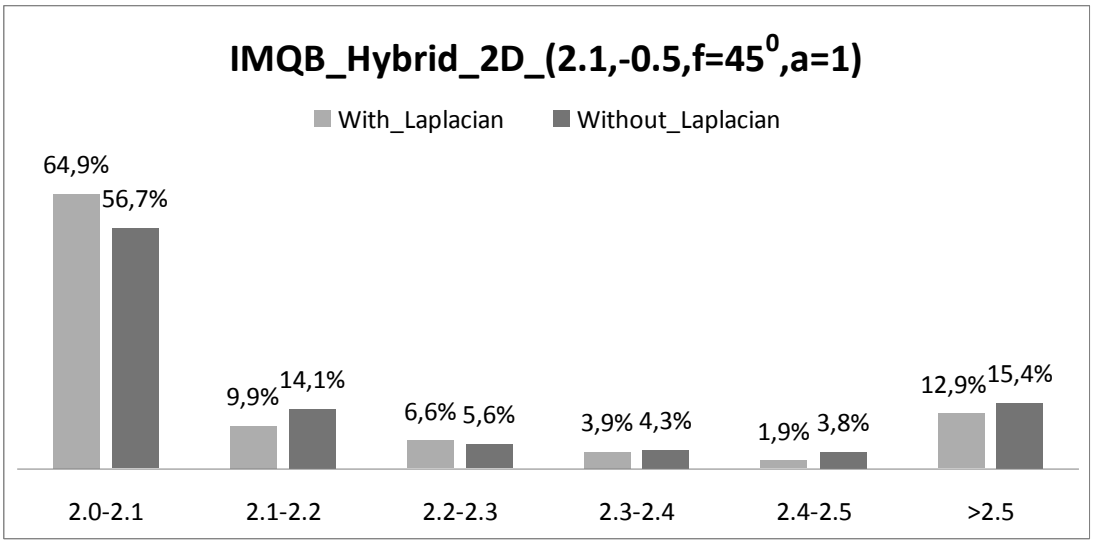
Inverse Multiquadric περίπτωση (2.1,-0.5,f=45^0,a=1)



Εικόνα 4.115: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

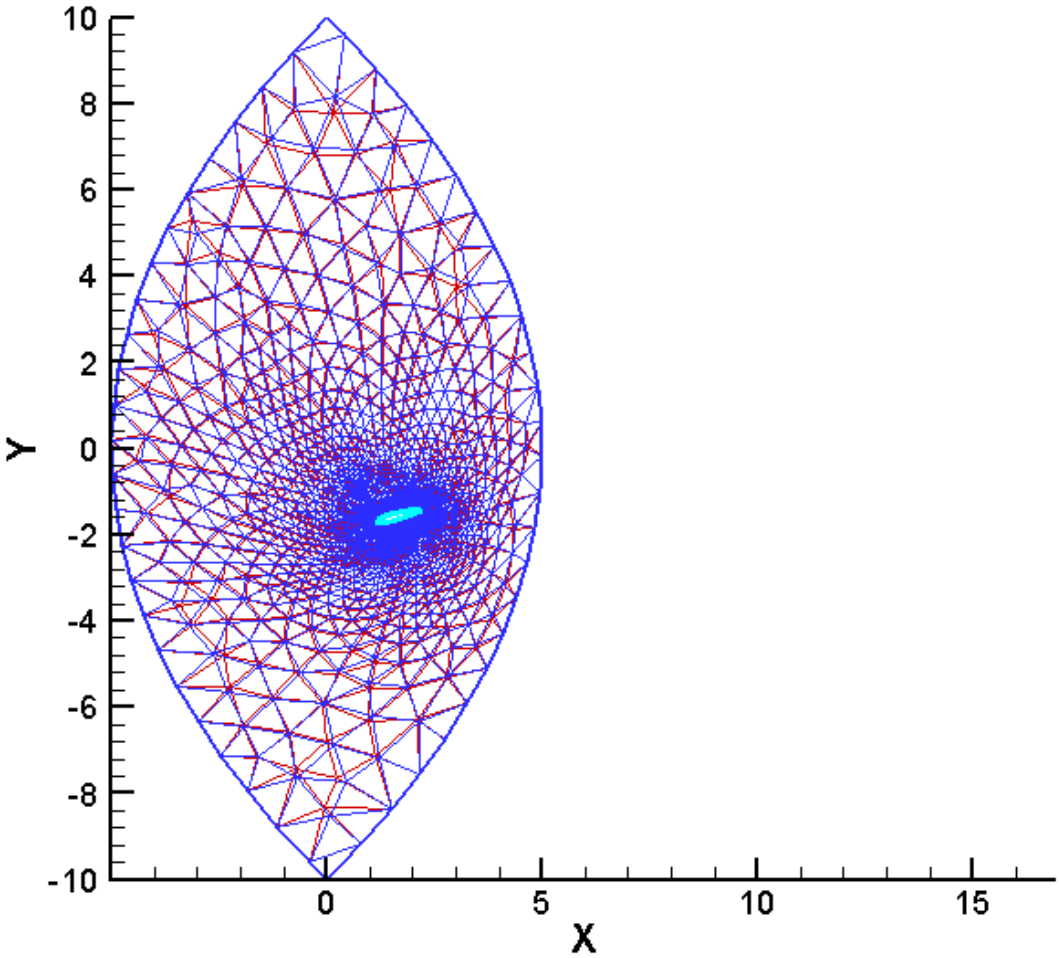


Εικόνα 4.116: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

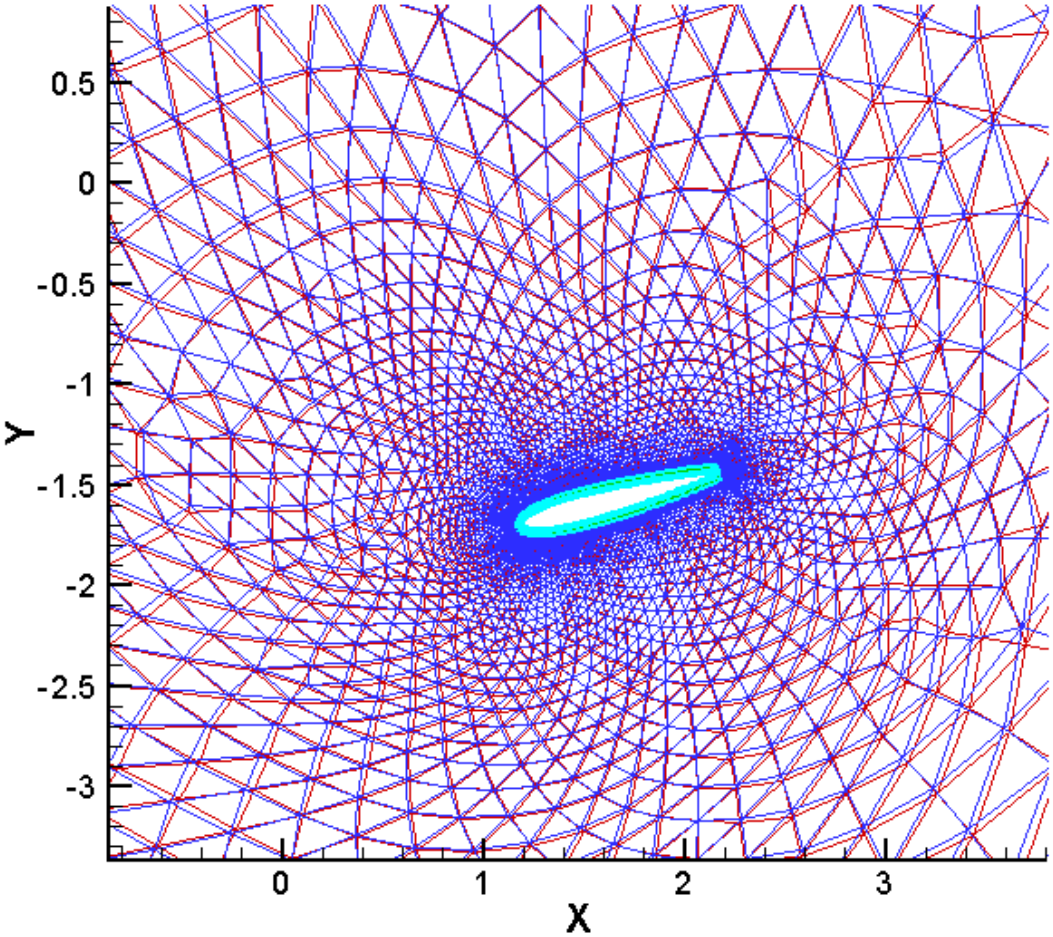


Εικόνα 4.117: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

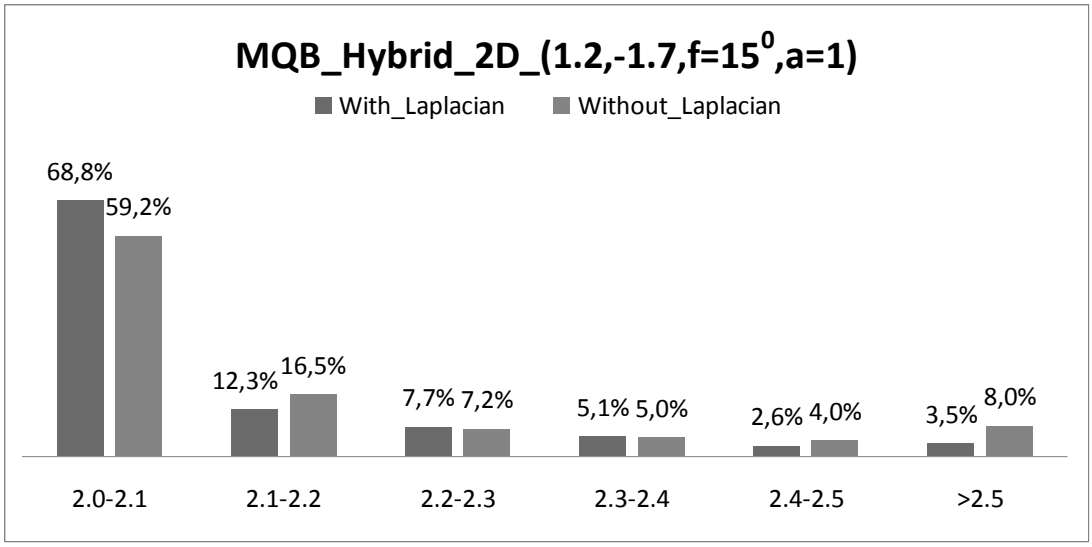
Multiquadric περίπτωση (1.2,-1.7,f=15^0,a=1)



Εικόνα 4.118: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

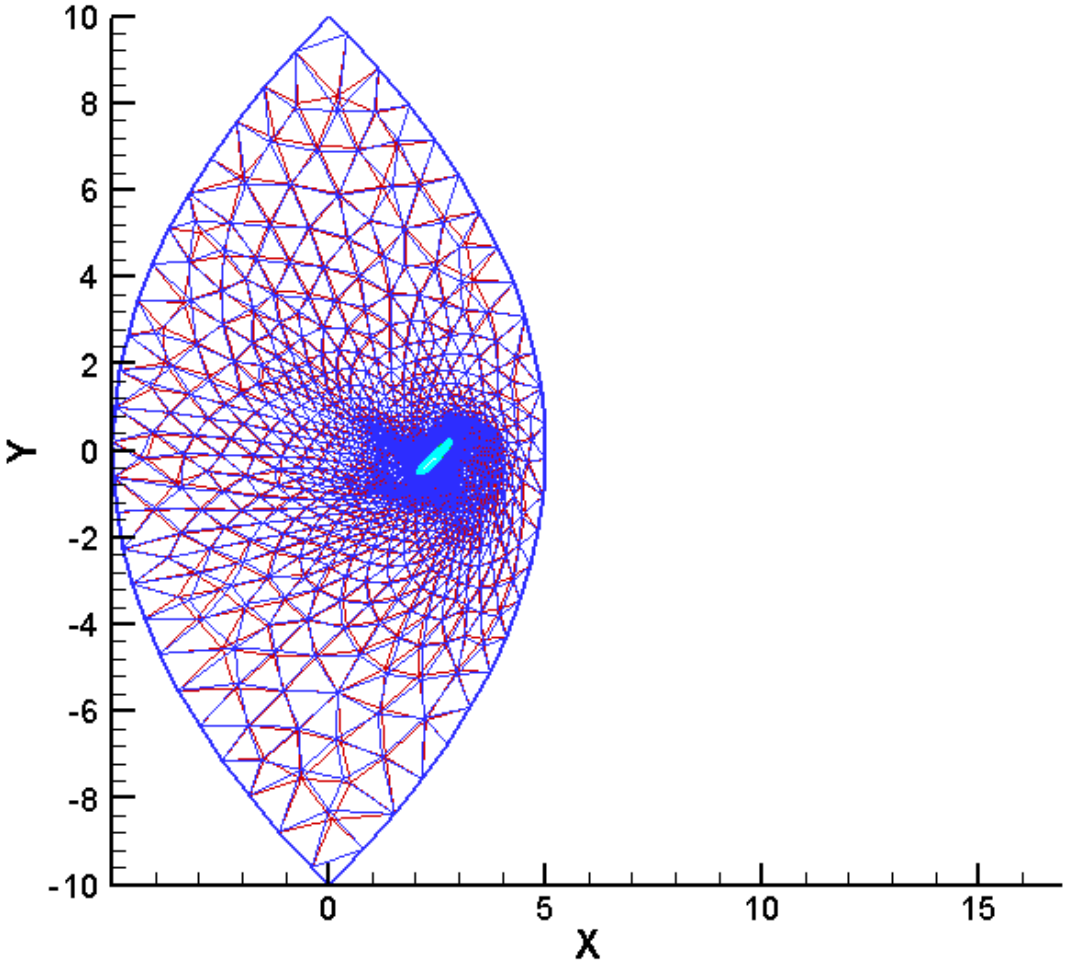


Εικόνα 4.119: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

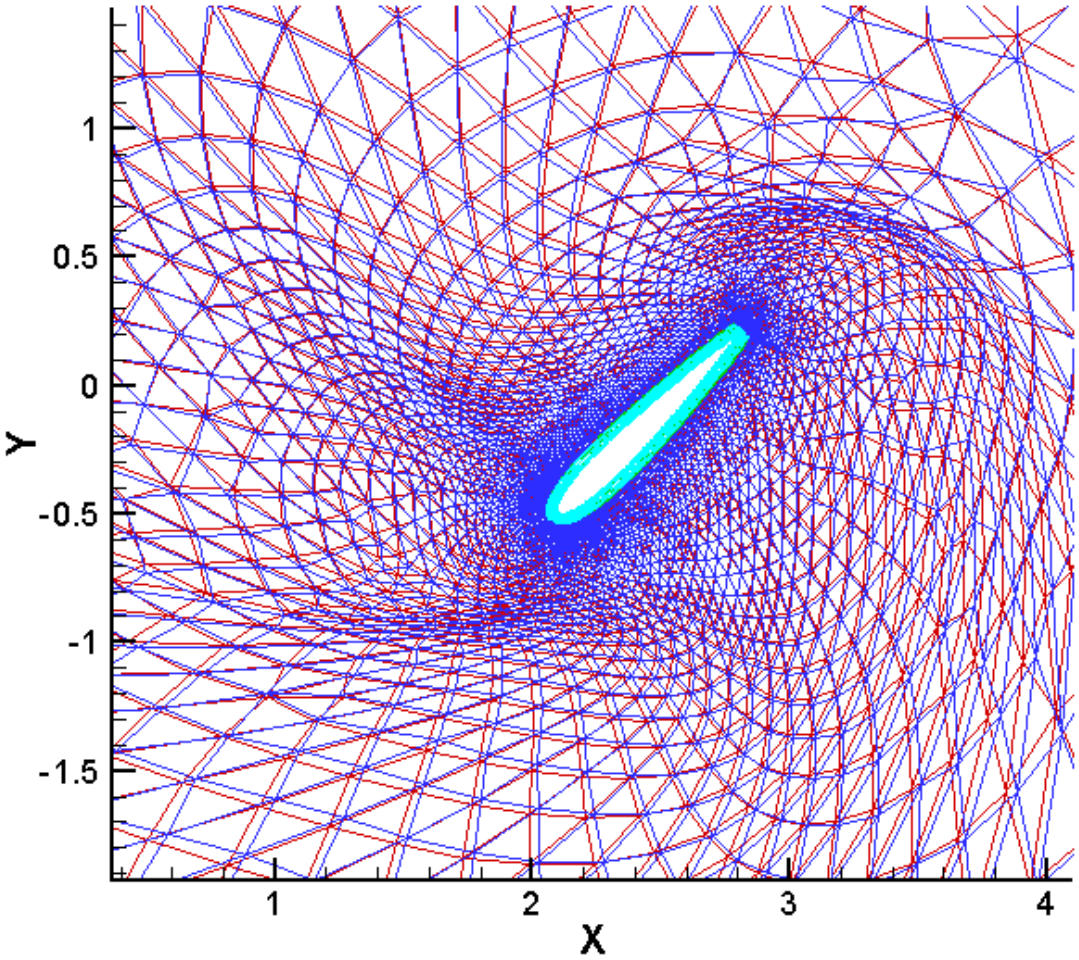


Εικόνα 4.120: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

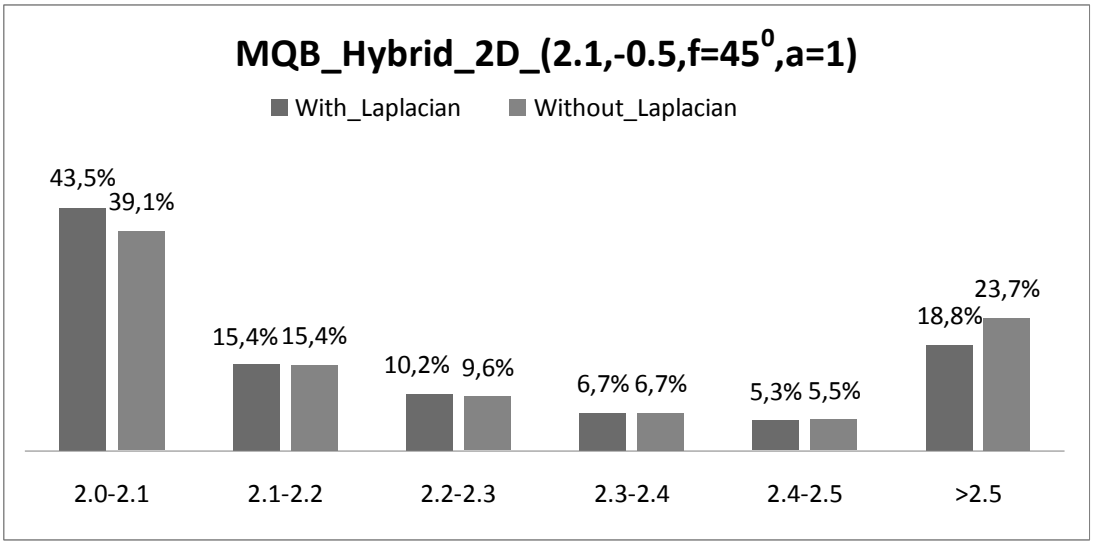
Multiquadric περίπτωση (2.1,-0.5 f=15^0,a=1)



Εικόνα 4.121: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB



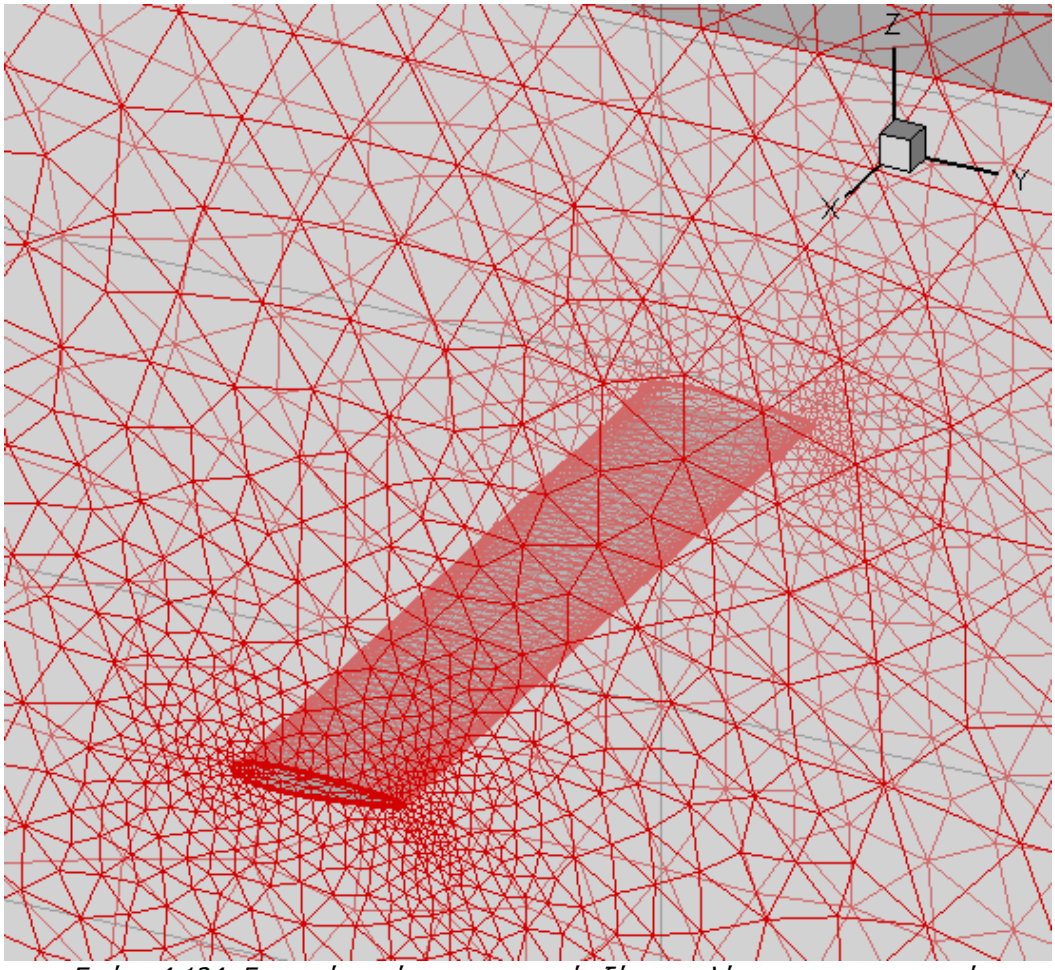
Εικόνα 4.122: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB



Εικόνα 4.123: Γραφική παράσταση της ποιότητας του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

4.3 Υβριδικό πλέγμα (3D)

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε πρόκειται για ένα μη δομημένο πλέγμα το οποίο αποτελείται από 28230 κόμβους στο σύνολο και από 98844 τετράεδρα, 17731 πρισματικά κελιά και 29 κελιά πρισματικών στοιχείων. Ο χρόνος περάτωσης της κάθε περίπτωσης υπολογίστηκε στα 18-20 min. Ο συντελεστής r ορίστηκε να είναι ίσος με 1.0 . Το πλέγμα που πρόκειται να επεξεργαστεί έχει την ακόλουθη μορφή (Εικόνα 4.124).

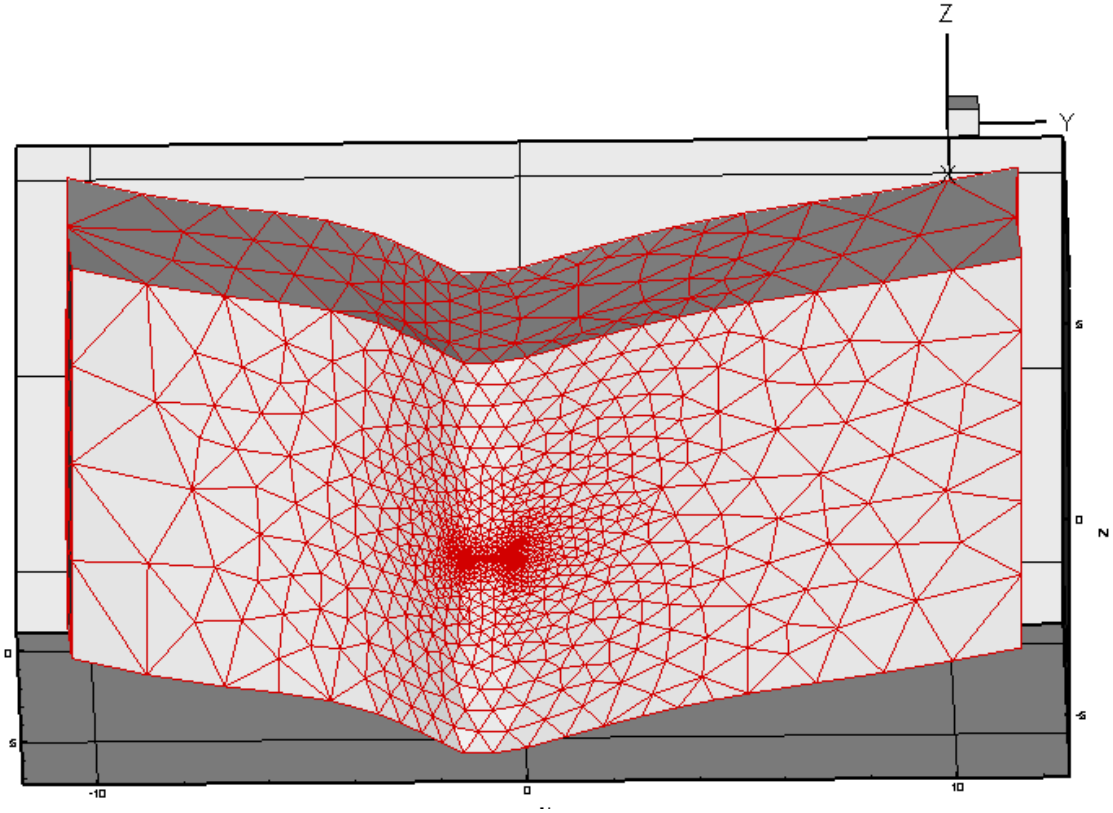


Εικόνα 4.124: Γραφική παράσταση του υπό εξέταση πλέγματος και αεροτομής

Στη συνέχεια παρατιθενται οι απεικονίσεις των αποτελεσμάτων της μεθοδολογίας που εφαρμόστηκε, για όλες τις διαφορετικές συναρτήσεις που δοκιμάστηκαν για μεταφορά και περιστροφή της πτέρυγας. Η αξιολόγηση είναι μόνο ποιοτική διότι η μετρική συνάρτηση δεν μπορεί να εφαρμοστεί για μη τετραεδρικά στοιχεία.

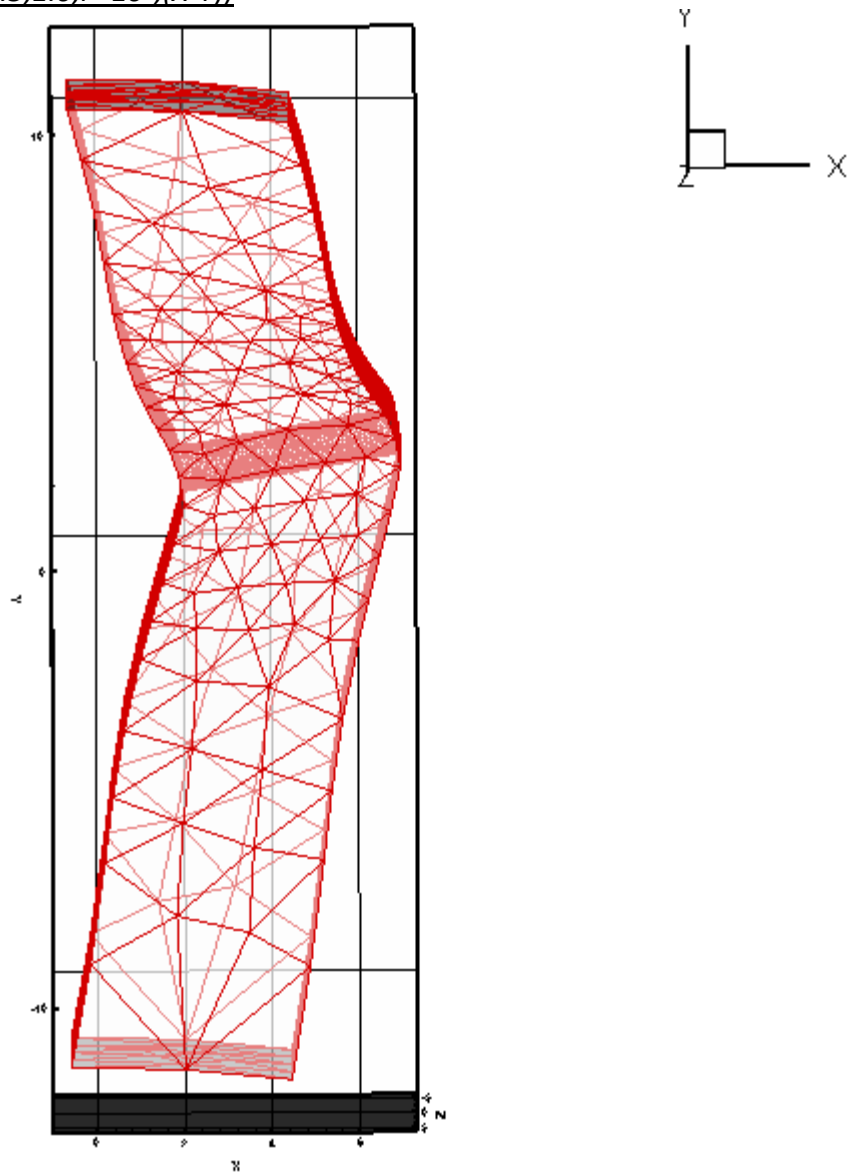
Radial Basis Function with compact support

CP C^0 (2.0,-1.5,-1.0)



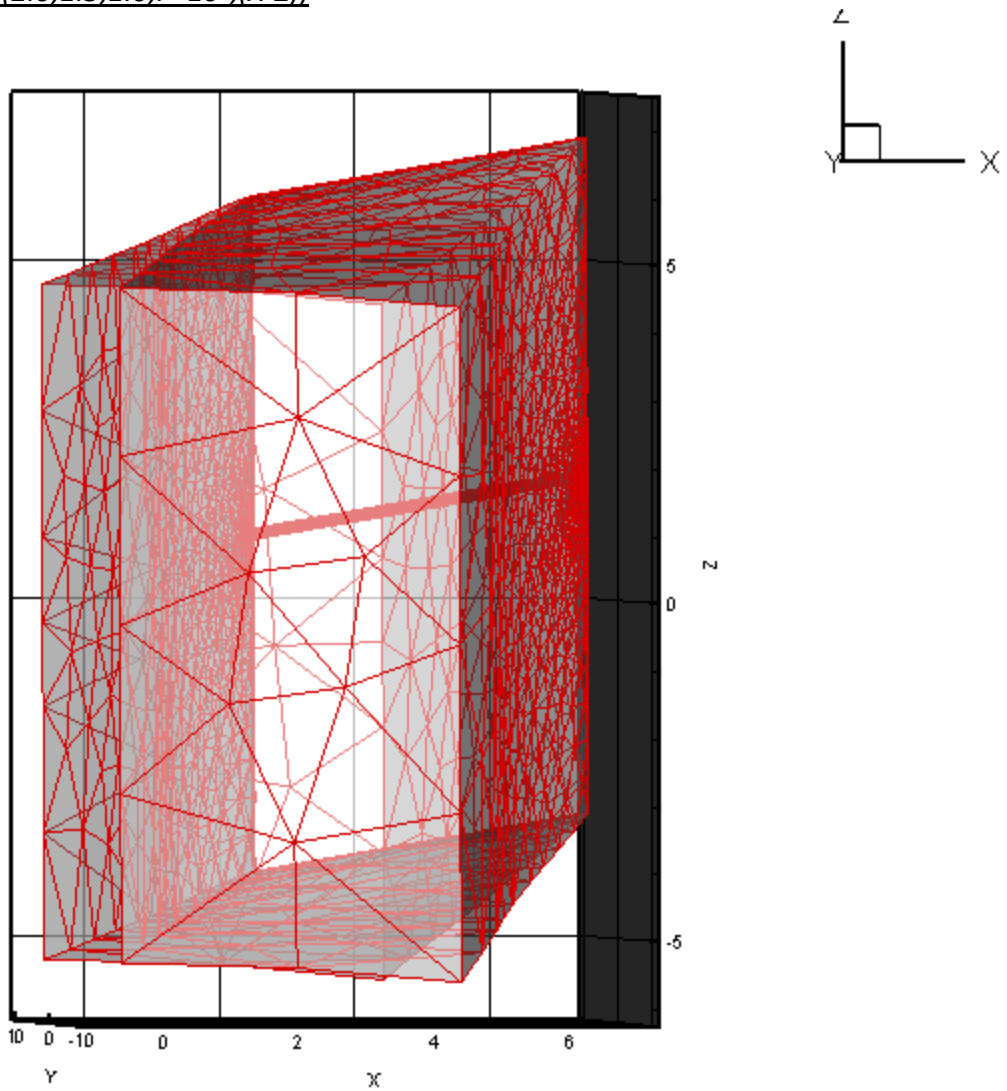
Εικόνα 4.125: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0

CP C^0 (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Y))



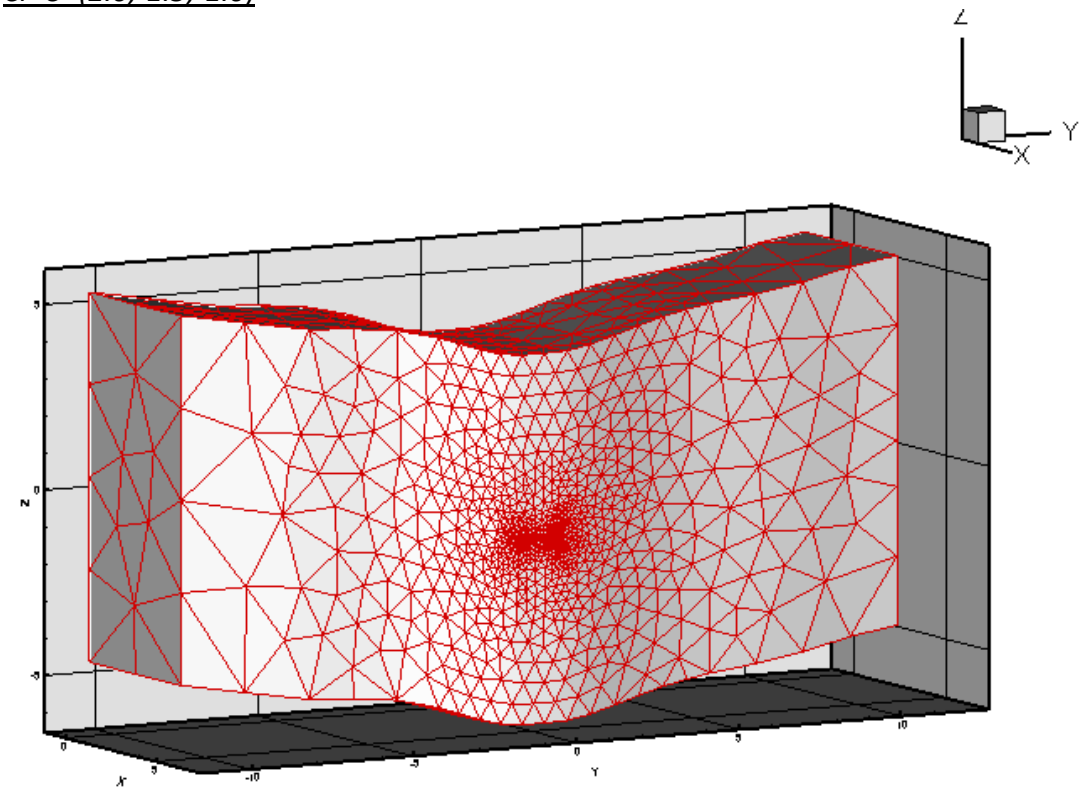
Εικόνα 4.126: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0 (X-Y)

CP C^0 (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Z))



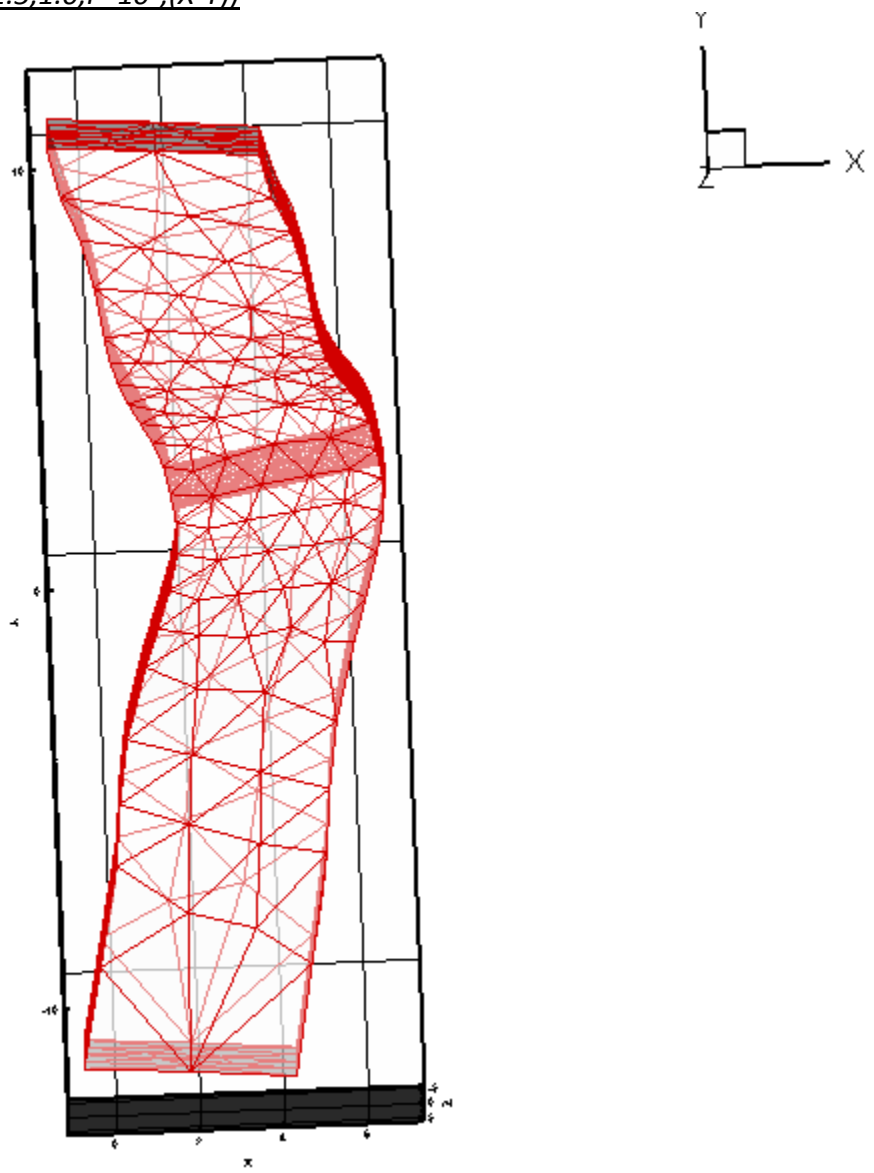
Εικόνα 4.127: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^0 (X-Z)

CP C^2 (2.0,-1.5,-1.0)



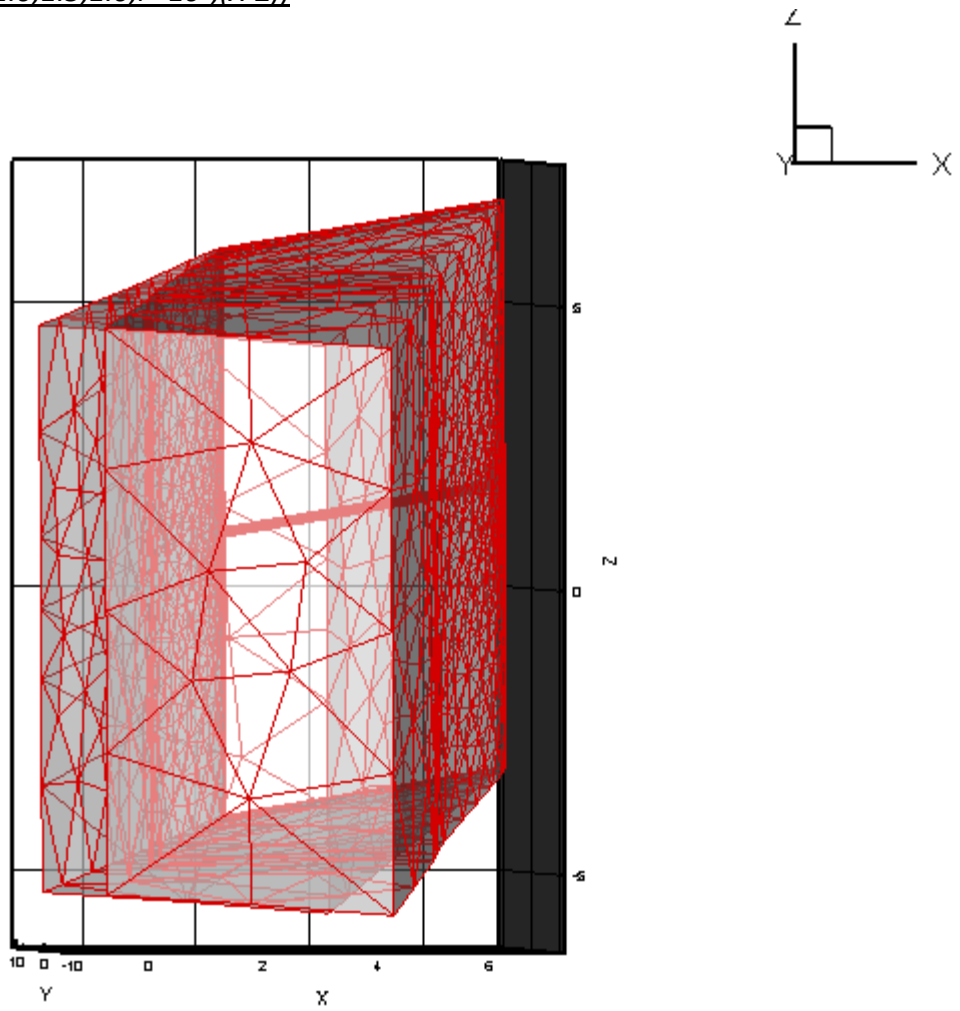
Εικόνα 4.128: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2

CP C^2 (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Y))



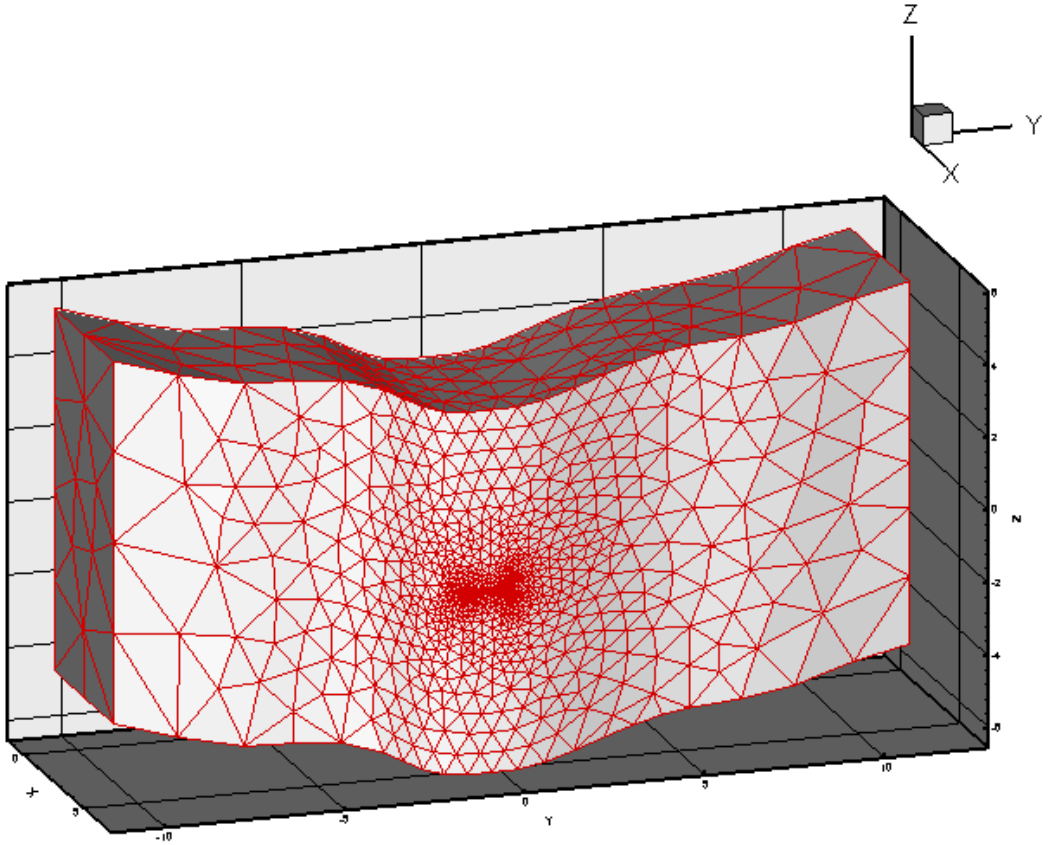
Εικόνα 4.129: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2 (X-Y)

CP C^2 (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Z))



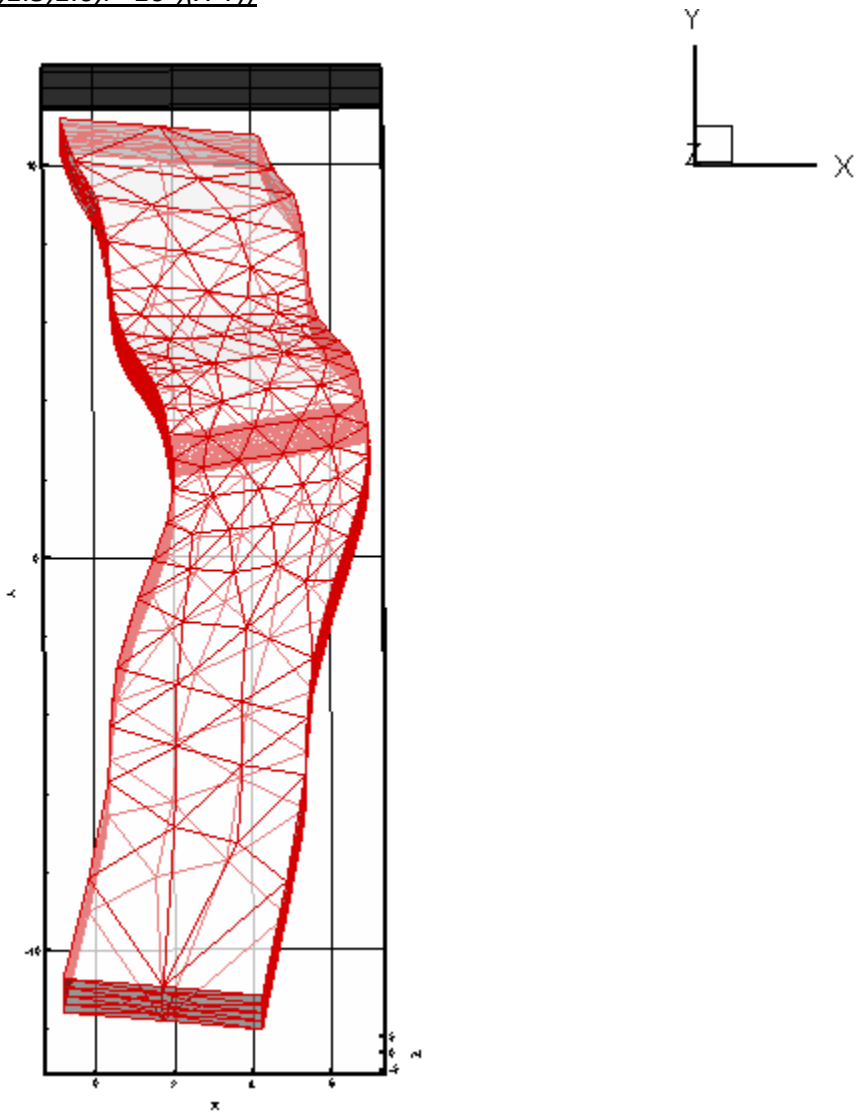
Εικόνα 4.130: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^2 (X-Z)

CP C^4 (2.0,-1.5,-1.0)



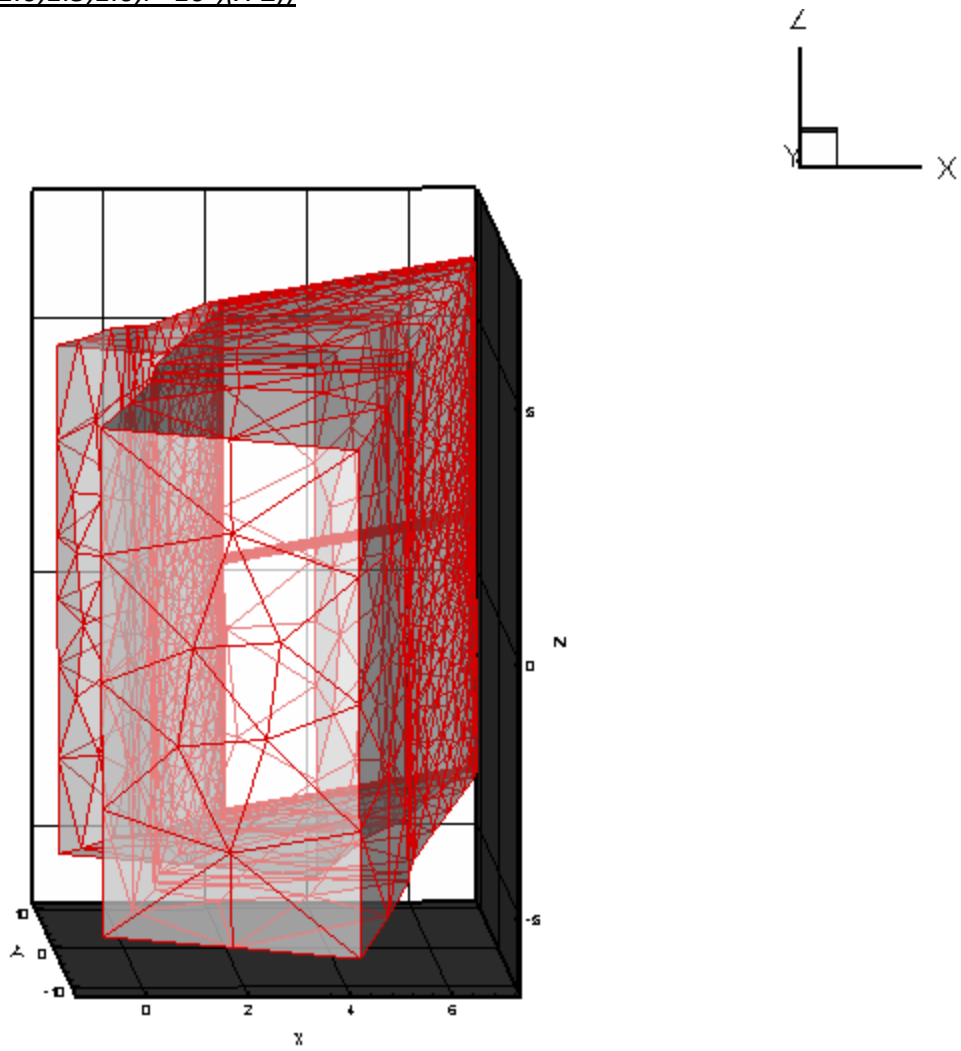
Εικόνα 4.131: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4

CP C^4 (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Y))



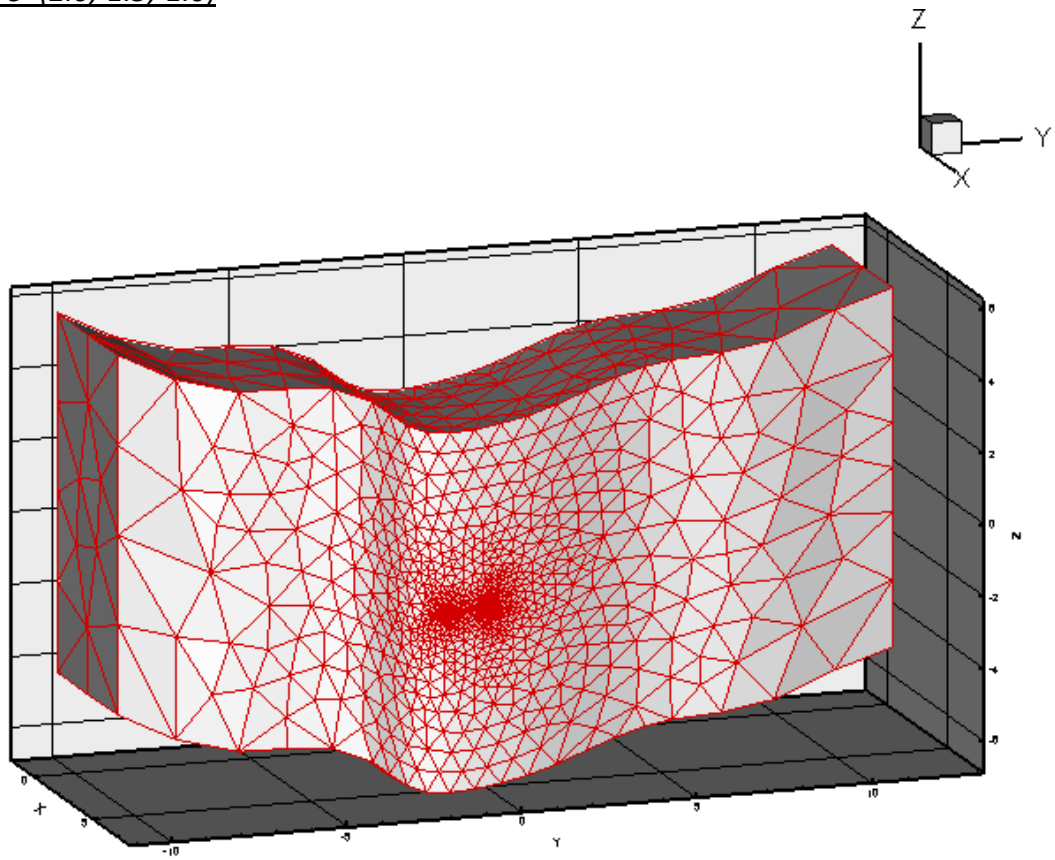
Εικόνα 4.132: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4 (X-Y)

CP C^4 (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Z))



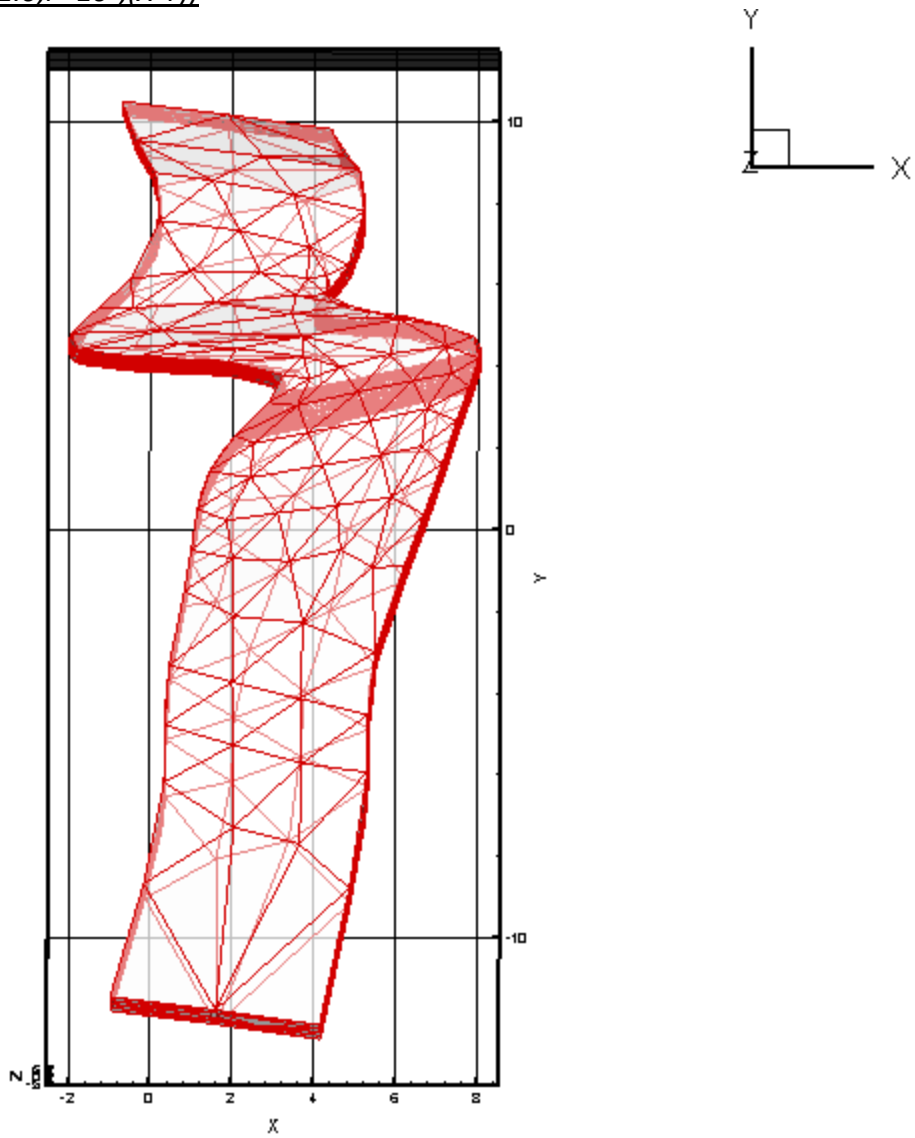
Εικόνα 4.133: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^4 (X-Z)

CP C^6 (2.0,-1.5,-1.0)



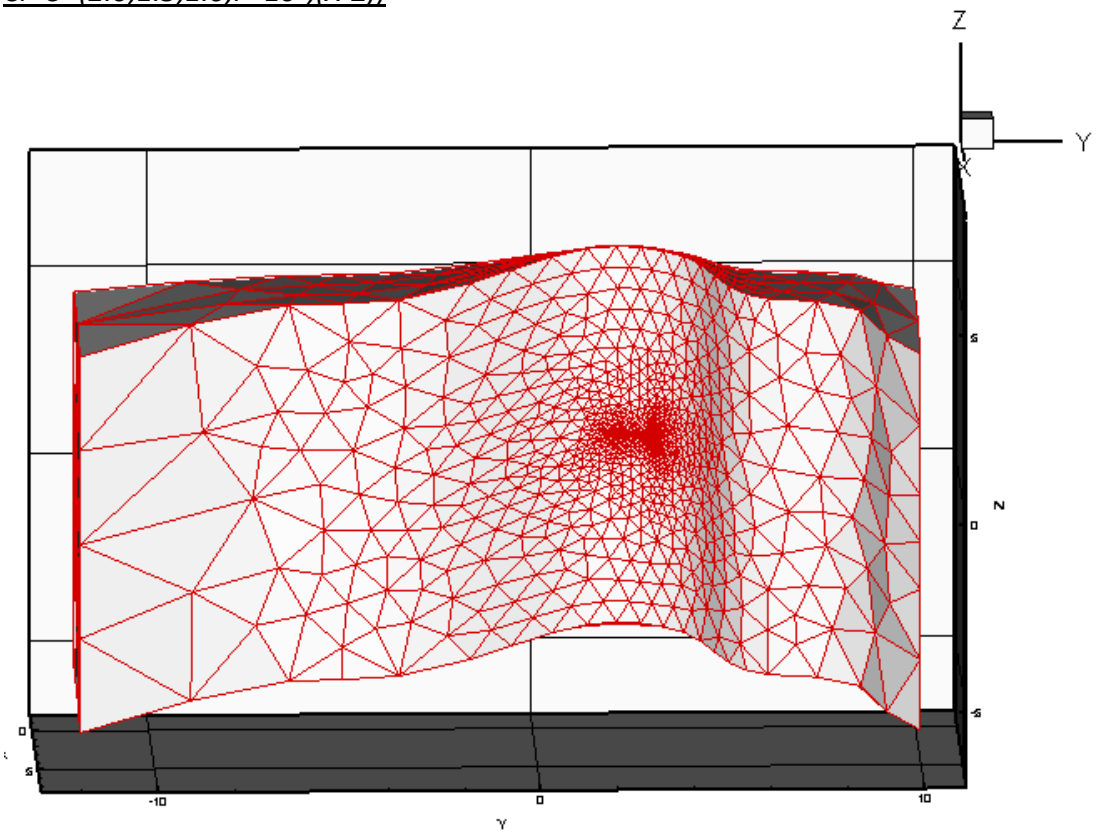
Εικόνα 4.134: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6

CP C^6 (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Y))



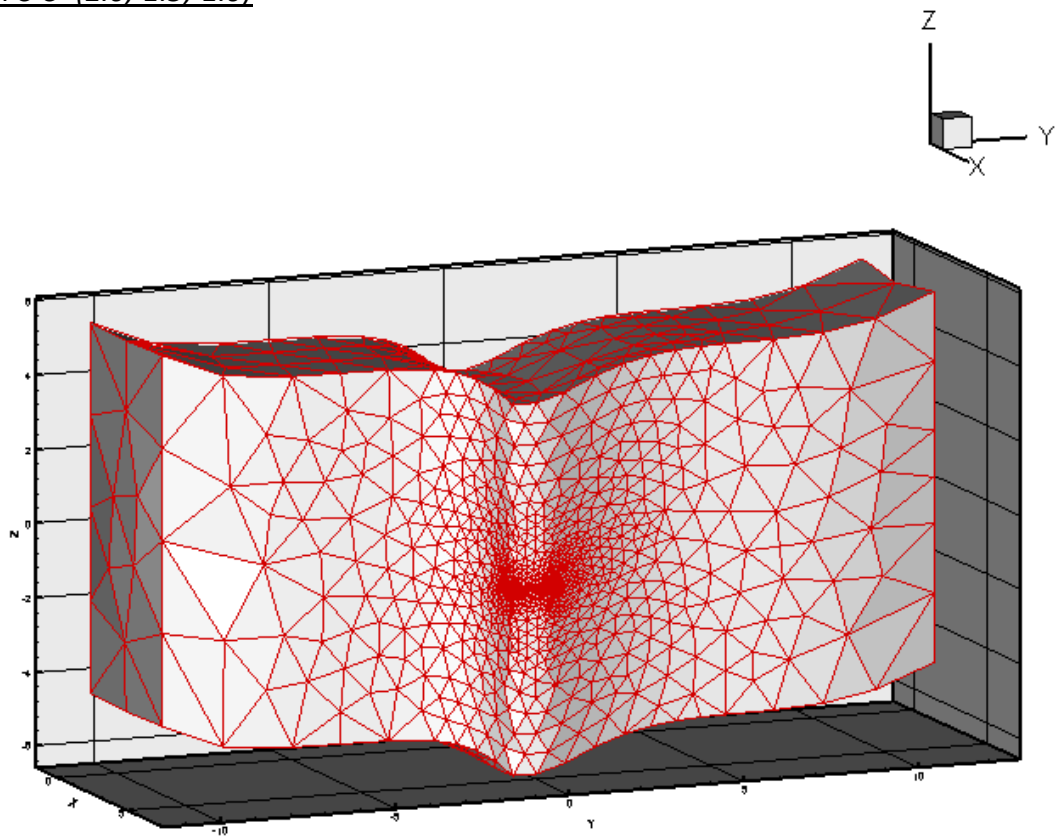
Εικόνα 4.135: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6 (X-Y)

CP C^6 (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Z))



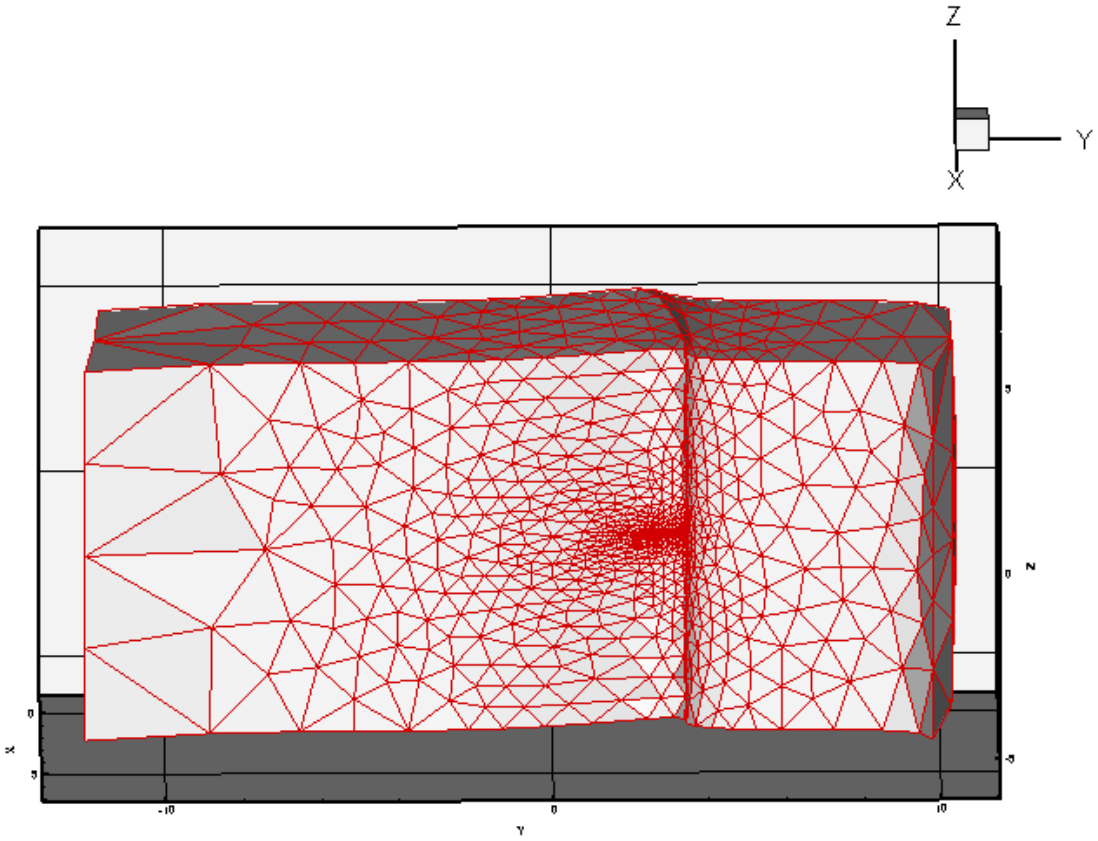
Εικόνα 4.136: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CP C^6 (X-Z)

CTPS C^0 (2.0,-1.5,-1.0)



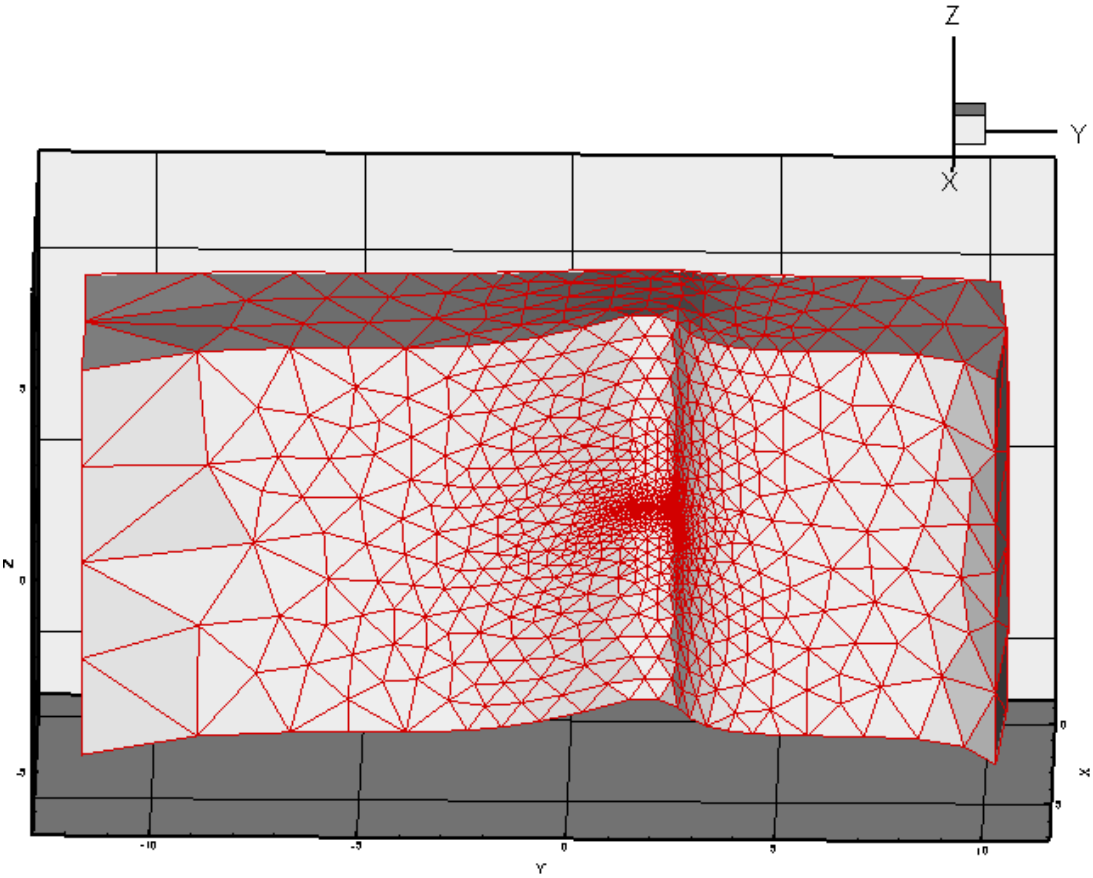
Εικόνα 4.137: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0

CTPS C^0 (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Y))



Εικόνα 4.138: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0 (X-Y)

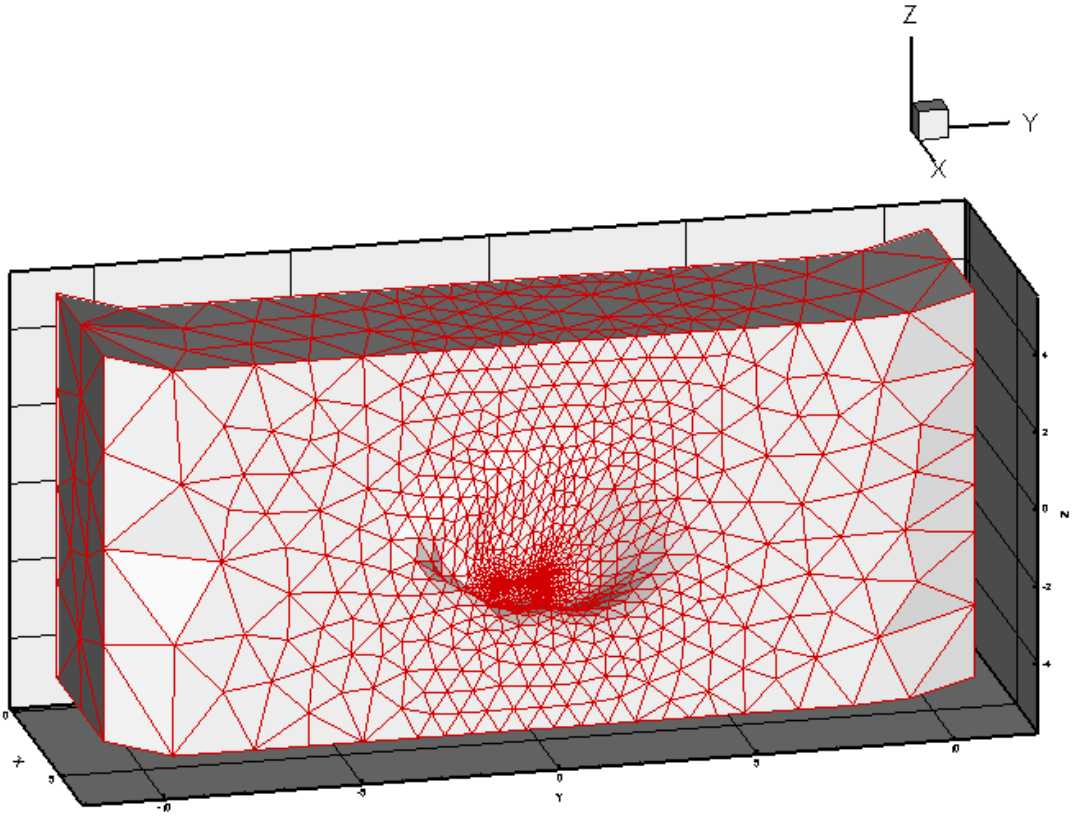
CTPS C^0 (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Z))



Εικόνα 4.139: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της CTPS C^0 (X-Z)

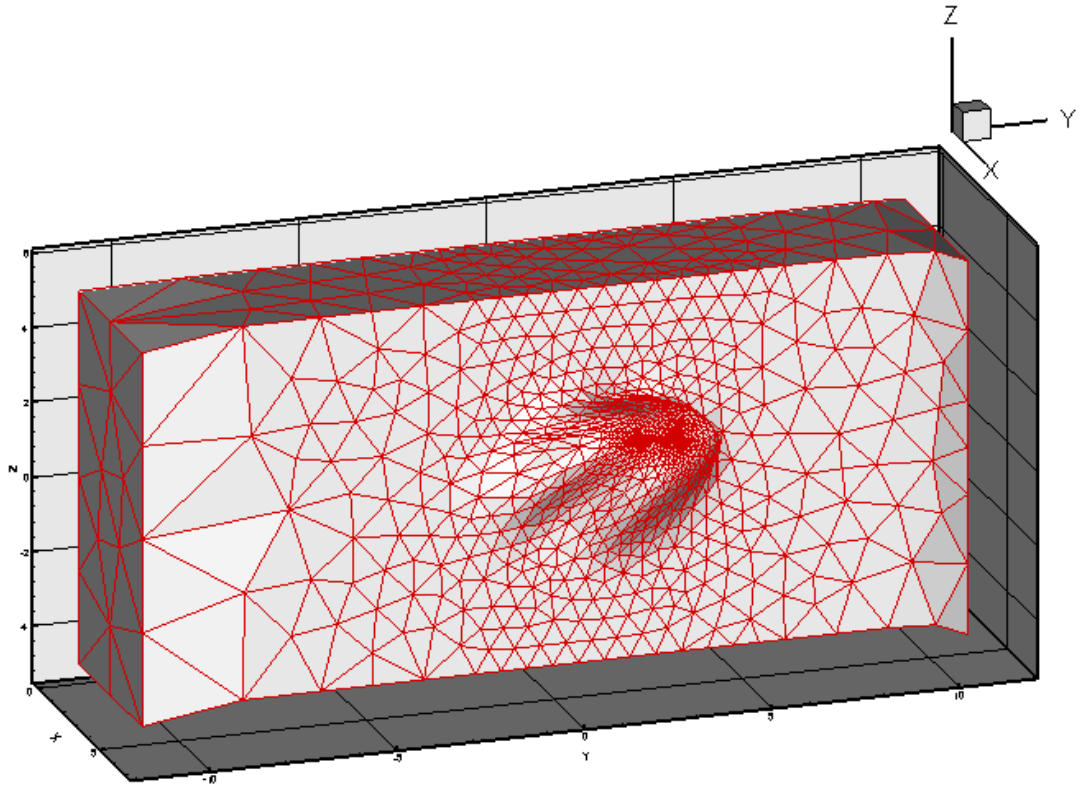
Radial Basis Function with global support

GAUSSIAN (2.0,-1.5,-1.0)



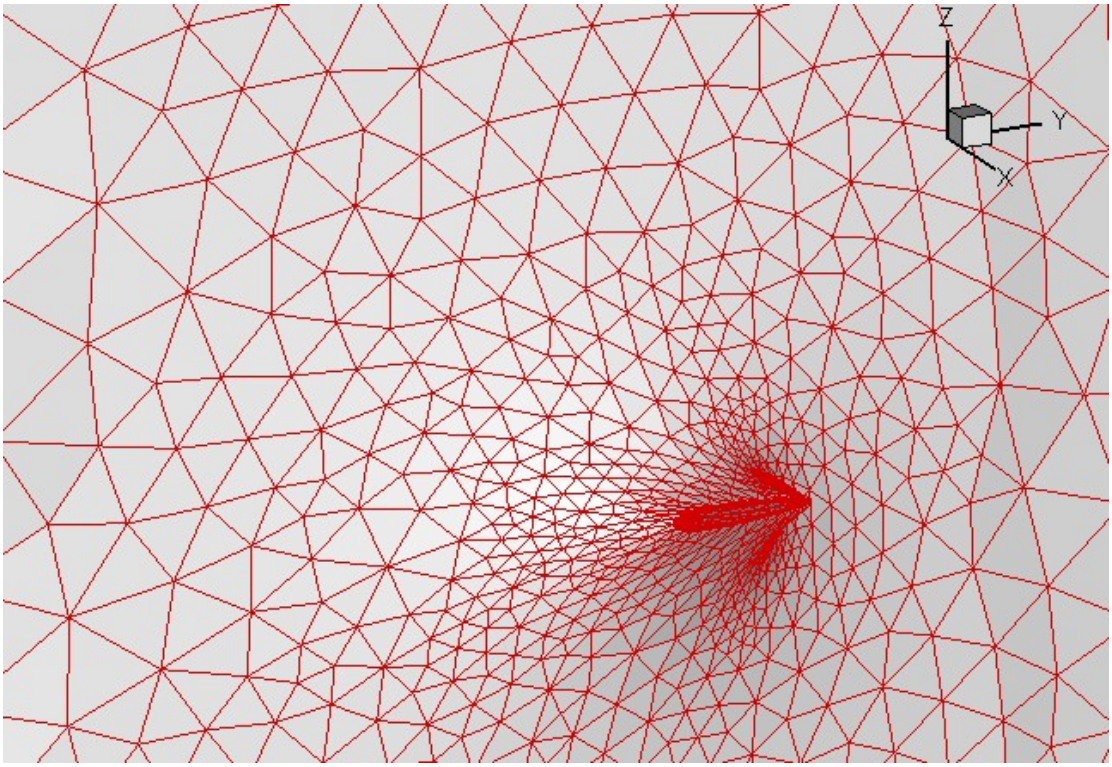
Εικόνα 4.140: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS

GAUSSIAN (2.0,1.5,1.0,F=10^0,(X-Z))



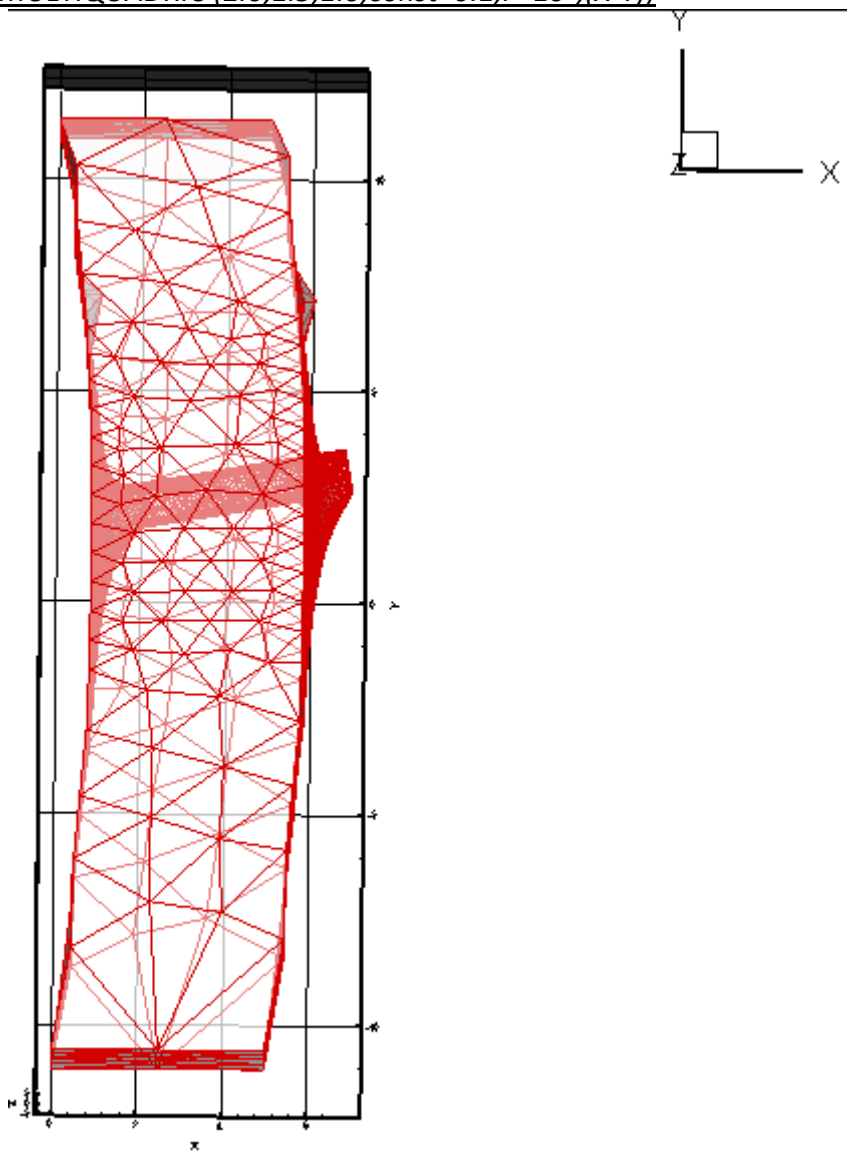
Εικόνα 4.141: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της GS (X-Z)

INVERSE MULTIQUADRIC (2.0,1.5,1.0,const=0.1)



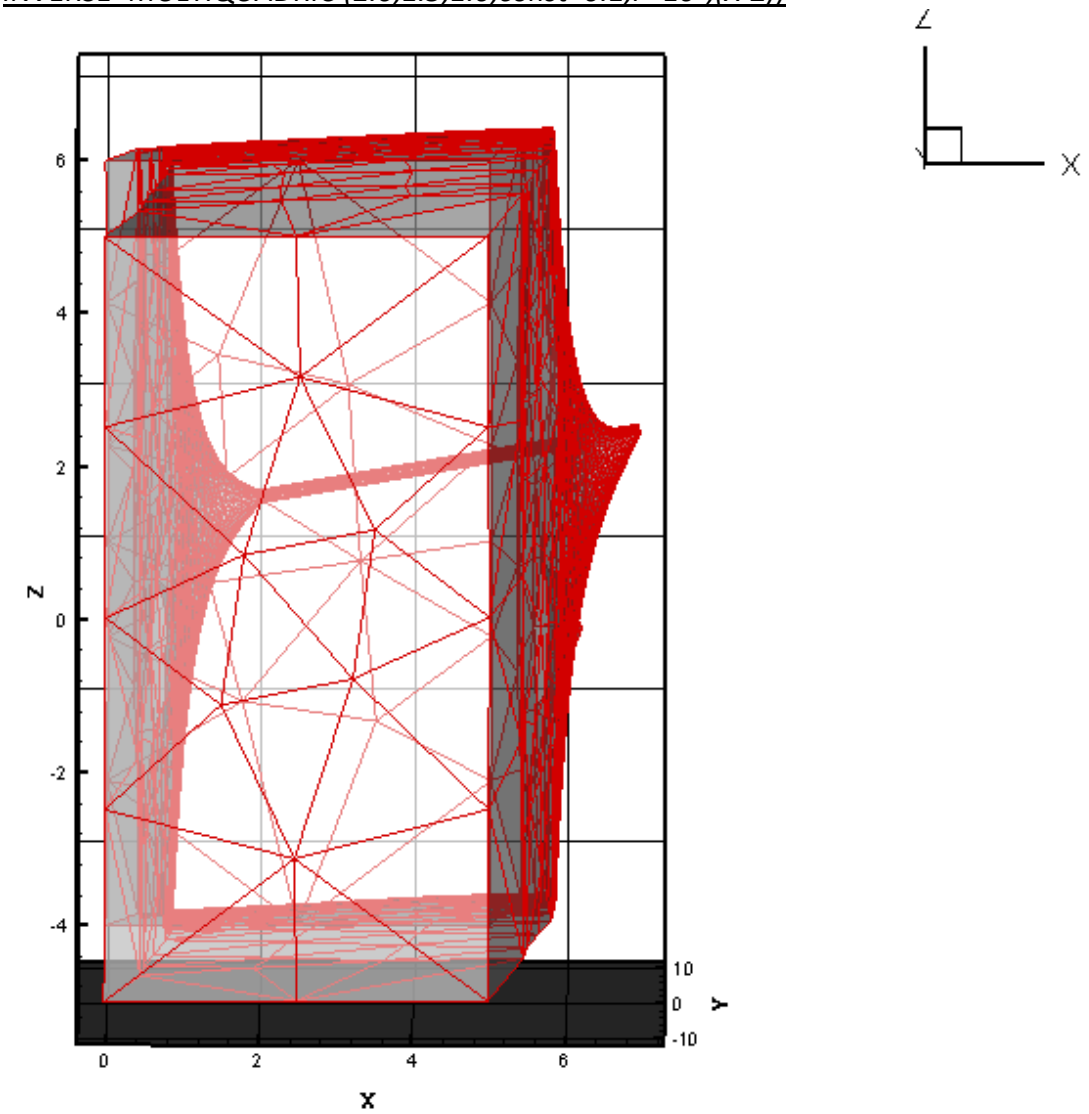
Εικόνα 4.142: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB

INVERSE_MULTIQUADRIC (2.0,1.5,1.0,const=0.1,F=10^0,(X-Y))



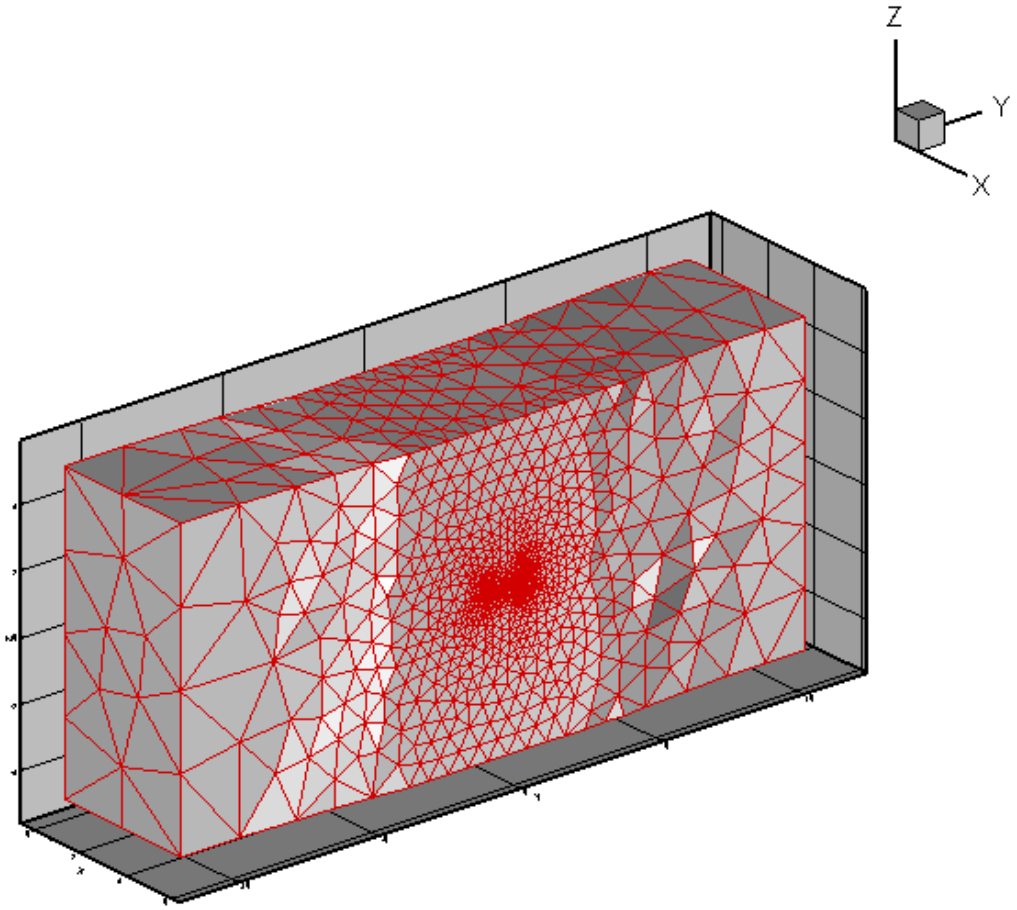
Εικόνα 4.143: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB (X-Y)

INVERSE MULTIQUADRIC (2.0,1.5,1.0,const=0.1,F=10^0,(X-Z))



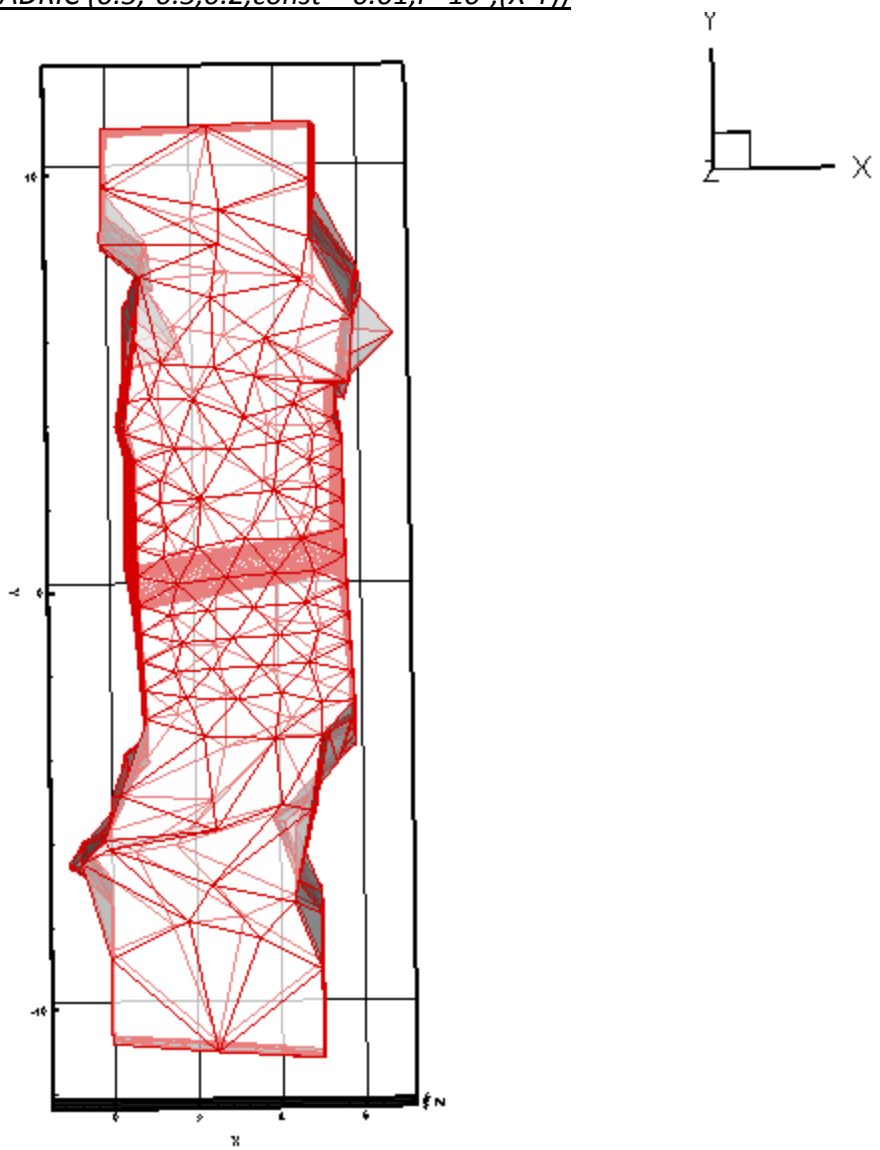
Εικόνα 4.144: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της IMQB (X-Z)

MULTIQUADRIC (0.5,-0.5,0.2,const = 0.01)



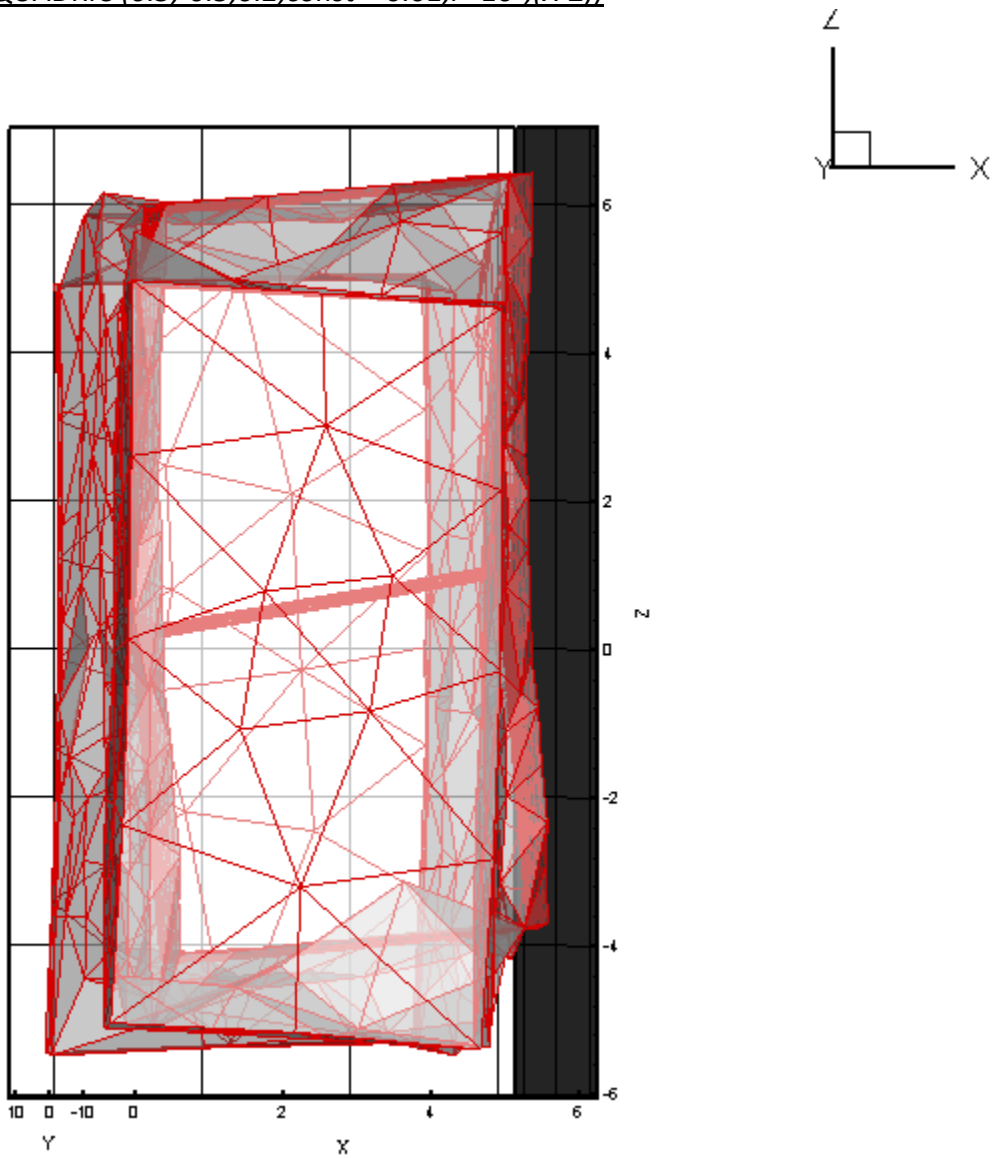
Εικόνα 4.145: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB

MULTIQUADRIC (0.5,-0.5,0.2,const = 0.01,F=10^0,(X-Y))



Εικόνα 4.146: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB (X-Y)

MULTIQUADRIC (0.5,-0.5,0.2,const = 0.01,F=10^0,(X-Z))



Εικόνα 4.147: Γραφική παράσταση της συμπεριφοράς του πλέγματος, με και χωρίς χρήση της Laplacian εξομάλυνσης στην περίπτωση της MQB (X-Z)

Κεφάλαιο 5: Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα

5.1 Ανακεφαλαίωση της εργασίας

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκαν μεθοδολογίες παραμόρφωσης και τροποποίησης μη δομημένων υβριδικών υπολογιστικών πλεγμάτων. Το λογισμικό που αναπτύχθηκε βασίστηκε στη θεωρία των Radial Basis Functions με απώτερο στόχο την αξιολόγηση της καταλληλότητας κάθε συνάρτησης που εξετάστηκε για την ομαλή παραμόρφωση του πλέγματος, μετά την μεταφορά και περιστροφή της αεροτομής ή της πτέρυγας αντίστοιχα. Η εφαρμογή της διαδικασίας Laplacian εξομάλυνσης συνέβαλε κατά πολύ στη βελτίωση της ποιότητας του πλέγματος μετά τη διαδικασία της παραμόρφωσης, ενώ η μετρική συνάρτηση παρείχε μια ολοκληρωμένη γραφική κυρίως εικόνα της όλης μεταβολής της ποιότητας του πλέγματος. Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε σε διαφορετικές περιπτώσεις γεωμετριών, παράγοντας χωρικά πλέγματα ικανοποιητικής ποιότητας σε μικρό χρονικό διάστημα για 2D γεωμετρίες, αλλά σε αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα για 3D γεωμετρίες.

5.2 Συμπεράσματα

- Όσον αφορά το τριγωνικό πλέγμα και συγκεκριμένα για τις Radial Basis Function με Compact Support παρατηρείται ότι όσο ο συντελεστής $"r"$ αυξάνεται τόσο βελτιώνεται και η ποιότητα του πλέγματος, καθώς αποφεύγεται το ενδεχόμενο αναδίπλωσης του πλέγματος (και η δημιουργία κελιών με αρνητικό όγκο).
- Αυτό επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα που παρατίθενται, ενώ με τη χρήση της Laplacian εξομάλυνσης βελτιώνεται η ποιότητα του πλέγματος (σε μερικούς τύπους RBF συναρτήσεων περισσότερο και σε άλλους λιγότερο).
- Πιό καλή συμπεριφορά διαπιστώνεται από τα γραφήματα για τις Radial Basis Function με Global Support. Για τις περιπτώσεις που δοκιμάστηκαν με τον αλγόριθμο, παρατηρείται μια συμπεριφορά ομαλής μετακίνησης του πλέγματος μαζί με την μετακίνηση της αεροτομής, επιβεβαιώνοντας επίσης τη βελτίωσης της ποιότητας με την εφαρμογή της Laplacian εξομάλυνσης.
- Για το υβριδικό διδιάστατο πλέγμα παρατηρείται η ίδια τάση με την περίπτωση των τριγωνικών στοιχείων. Ότι δηλαδή για μικρές τιμές του συντελεστή $"r"$ η ποιότητα του πλέγματος παρεκκλίνει των επιθυμητών αποτελεσμάτων, όπως επιβεβαιώνεται και από τις κακές τιμές της μετρικής συνάρτησης που προκύπτουν πριν και μετά την εφαρμογή της Laplacian εξομάλυνσης.
- Όσον αφορά τις περιπτώσεις των συναρτήσεων των Radial Basis Function με Global Support, η κατάσταση είναι λίγο διαφορετική. Για τις περιπτώσεις που δοκιμάστηκαν παρατηρείται ότι στην περίπτωση της Gaussian RBF εμφανίζεται μια οριακή κατάσταση του πλέγματος, το οποίο σε μερικές περιπτώσεις αναδιπλώνεται, γεγονός που είναι μη αποδεκτό (αρνητικοί όγκοι). Αντιθέτως στην περίπτωση της Inverse Multiquadric τα γραφήματα είναι ικανοποιητικά. Οι γραφικές παραστάσεις της Inverse Multiquadric

χαρακτηρίζονται από τοπικές αλλά ικανοποιητικές παραμορφώσεις πλέγματος, χωρίς αναδιπλώσεις, ενώ οι αντίστοιχες της Multiquadric, αποτελούν ίσως την καλύτερη επιλογή, όπως μαρτυρούν τόσο τα γραφήματα των πλεγμάτων όσο και τα γραφήματα των μετρικών συναρτήσεων. Αυτό αναφέρεται επίσης και στη βιβλιογραφία [55].

- Η κατάσταση περιπλέκεται στις περιπτώσεις του υβριδικού τριδιάστατου πλέγματος. Το πλήθος διαφορετικών τύπων κελιών έχει ως αποτέλεσμα την κάθε φορά διαφορετική συμπεριφορά του πλέγματος. Στις περιπτώσεις των Radial Basis Function με Compact Support και συγκεκριμένα στην περίπτωση της CP C^0 παρατηρείται μια ομαλή παραμόρφωση τόσο γραμμική όσο και περιστροφική του πλέγματος και της γεωμετρίας. Η ίδια συμπεριφορά συνεχίζεται και για τις περιπτώσεις CP C^2 και CP C^4. Αντιθέτως στην περίπτωση της CP C^6 παρατηρείται μια διαφορετική συμπεριφορά λιγότερο ομαλή, η οποία ομαλοποιείται σε κάποιο βαθμό στην περίπτωση της CTPS C^0.
- Όσον αφορά τις περιπτώσεις των συναρτήσεων των Radial Basis Function με Global Support, η συμπεριφορά είναι διαφορετική σε κάθε περίπτωση. Αξιοσημείωτη είναι η συμπεριφορά του πλέγματος στην περίπτωση της Gaussian.
- Παρατηρώντας τα διαγράμματα που προέκυψαν από τη μετρική συνάρτηση, διαπιστώνεται ότι όταν οι τιμές κυμαίνονται (για 2D) κυρίως μεταξύ του 2.1 μέχρι και του 2.4 τότε η γραφική αποτύπωση του πλέγματος κρίνεται ικανοποιητική, ενώ όταν οι τιμές κυμαίνονται πάνω από το 2.5, τότε στις περισσότερες των περιπτώσεων η συμπεριφορά του πλέγματος δεν είναι αποδεκτή, καθώς το πλέγμα συνήθως αναδιπλώνεται (αρνητικοί όγκοι).
- Πρέπει να σημειωθεί πως, λόγω της ιδιαιτερότητας της κάθε συνάρτησης, υπήρξαν περιπτώσεις κατά τις οποίες το πλέγμα για συγκεκριμένες μετατοπίσεις ή υπό ορισμένο εύρος περιστροφής, το πλέγμα και η γεωμετρία δεν μπορούσε να σχηματιστεί καθώς έβγαινε εκτός ορίων.
- Επιπλέον πρέπει να σημειωθεί πως ο συντελεστής $"a"$ στην Gaussian, Inverse Multiquadric και Multiquadric, αποδίδει και ξεχωριστές κάθε φορά συμπεριφορές πλέγματος και γεωμετρίας.

Αυτό που πρέπει να ληφθεί υπόψιν είναι πως στις περιπτώσεις τις οποίες η παραμόρφωση δεν είναι αποδεκτή, καθώς είτε το πλέγμα διπλώνει, είτε βγαίνει εκτός ορίων, δε σημαίνει απαραιτήτως πως υπάρχει κάποιο λάθος. Απλά η κάθε συνάρτηση έχει και τη δική της μοναδική συμπεριφορά, η οποία σε ορισμένες συνθήκες και με τις συγκεκριμένες παραμέτρους απλά δεν ανταποκρίνεται στις προσδοκίες μας.

5.3 Προτάσεις

Το επιστημονικό πεδίο που εξετάστηκε έχει αναμφίβολα μεγάλο περιθώριο για περαιτέρω έρευνα και βελτίωση των έως τώρα αποτελεσμάτων. Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία έχει αντίστοιχα περιθώρια βελτίωσης και εξέλιξης. Συνοπτικά προτείνονται τα ακόλουθα θέματα μελέτης:

- Η εφαρμογή της Laplacian εξομάλυνσης και της μετρικής συνάρτησης για κάθε είδος στοιχείου στο τριδιάστατο πλέγμα θα μπορούσε να αποτελέσει πιθανό επόμενο βήμα.
- Η δοκιμή και άλλων συναρτήσεων πέρα από αυτές που δοκιμάστηκαν.
- Πολύ σημαντικός στόχος είναι η προσπάθεια μείωσης του υπολογιστικού κόστους της διαδικασίας, είτε με εφαρμογή παράλληλης επεξεργασίας είτε με εφαρμογή πιο γρήγορων μεθόδων επίλυσης, είτε με εφαρμογή έξυπνων τρόπων μείωσης του μεγέθους του συστήματος (δηλαδή να μην χρησιμοποιούνται όλοι οι κόμβοι για τον σχηματισμό του γραμμικού συστήματος). Η επίλυση του συστήματος είναι με διαφορά η πιο χρονοβόρα διαδικασία του αλγορίθμου και η μείωση του συγκεκριμένου χρόνου θα καταστήσει τη μέθοδο πρακτικά εφαρμόσιμη για μεγάλα υβριδικά μη δομημένα τριδιάστατα πλέγματα.

Βιβλιογραφία

[1] Farhat, C., “CFD on moving grids: from theory to realistic flutter, maneuvering, and multidisciplinary optimization”, International Journal of Computational Fluid Dynamics, 19: 8, 595 — 603, 2005.
[2] Batina, J.T., “Unsteady Euler algorithm with unstructured dynamic mesh for complex-aircraft aeroelastic analysis”, AIAA-89-1189, 1989.
[3] Robinson, B.A., Batina J.T., Yang H.T.Y., “Aeroelastic analysis of wings using the Euler equations with a deforming mesh”, Journal of Aircraft, 28(11), pp. 781–788, 1991.
[4] Helenbrook, B.T., “Mesh deformation using the biharmonic operator”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 56, pp. 1007–1021, 2003.
[5] Cizmas, P. G. A., Gargoloff, J.I., “Mesh Generation and Deformation Algorithm for Aero-elasticity
Simulations”.
[6] Schuster, D.M., Vadyak, J., Atta, E., “Static aeroelastic analysis of fighter aircraft using a three-dimensional Navier–Stokes algorithm”, Journal of Aircraft, 27(9), pp. 820–825, 1990.
[7] Bhardwaj, M.K., Kapania, K., Reichenbach, E., Guruswamy, G.P., “Computational fluid dynamics/computational structural dynamics interaction methodology for aircraft wings”, AIAA Journal, 36(12), pp. 2179–2186, 1998.
[8] Eriksson, L.E., “Generation of boundary-conformation grids around wing-body configurations using transfinite interpolation”, AIAA Journal, 20(10), pp. 1313–1320, 1982.
[9] Hartwich, P.M., Agrawal, S., “Method for perturbing multiblock patched grids in aeroelastic and design optimization applications”, AIAA Paper 97-2038, 1997.
[10] Potsdam, M.A., Guruswamy, G.P., “A parallel multiblock mesh movement scheme for complex aeroelastic applications”, AIAA-2001-0716, 2001.
[11] Lian, Y., Shyy, W., Viieru, D., Zhang, B., “Membrane wing aerodynamics for micro aerial vehicles”, Progress in Aerospace Science, 39, pp. 425–465, 2003.
[12] Kamakoti, R., Shyy, W., “Moving grid computations for turbulent, aeroelastic flows” AIAA-2003-3719, 2003.
[13] Bijl, H., van Zuijlen, A. H., van Mameren, A., “Validation of adaptive unstructured hexahedral mesh computations of flow around a wind turbine airfoil”, Int. J. Numer. Meth. Fluids 48:929–945, 2005.
[14] Huang, W., Ren, Y., Russell, R.D., “Moving mesh methods based on moving mesh partial differential equations”, Journal of Computational Physics,113, pp. 279–290, 1994.
[15] Huang, W., Russell, R.D., “Moving mesh strategy based on a gradient flow equation for two-dimensional problems”, SIAM Journal of Scientific Computing, 20(3), pp. 998–1015, 1999.
[16] Huang, W., “Practical aspects of formulation and solution of moving mesh partial differential equations” Journal of Computational Physics, 171, pp. 753–775, 2001.
[17] Myridis, N. E., “Radial Basis Functions, by M.D. Buhmann”, Contemporary Physics, 51: 5, 454, First published on: 09 March 2010 (iFirst).
[18] Beckert, A., Wendland, H., “Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions”, Aerosp. Sci. Technol. 5 125–134, 2001.
[19] de Boer, A., van der Schoot, M., Bijl, H., “New method for mesh moving based on Radial Basis Function interpolation”, Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2006.
[20] de Boer, A., van der Schoot, M., Bijl, H., “Mesh deformation based on Radial Basis Function interpolation”, Computers and Structures, 85, pp. 784–795, 2007.

[21] Van Zuijlen, A.H., de Boer, A., Bijl, H., “Higher - order time integration through smooth mesh deformation for 3D fluid–structure interaction simulations”, Journal of Computational Physics, 224, pp. 414–430, 2007.
[22] Jakobsson, S., Amoignon, O., “Mesh deformation using radial basis functions for gradient-based aerodynamic shape optimization”, Computers & Fluids 36, pp. 1119–1136, 2007.
[23] Morris, A. M., Rendall, T.C.S., Allen, C.B., “CFD-based optimization of aerofoils using radial basis functions for domain element parameterization and mesh deformation”, Int. J. Numer. Meth. Fluids 58:827–860 DOI: 10.1002/fld, 2008.
[24] Rendall, T.C.S., Allen, C.B., “Efficient mesh motion using radial basis functions with data reduction algorithms”, Journal of Computational Physics 228 6231–6249, 2009.
[25] Rendall, T.C.S., Allen, C.B., “Parallel efficient mesh motion using radial basis functions with application to multi-bladed rotors”, Int. J. Numer. Meth. Engng 81:89–105 DOI: 10.1002/nme, 2010.
[26] Rendall, T.C.S., Allen, C.B., “Reduced surface point selection options for efficient mesh deformation using radial basis functions”, Journal of Computational Physics 229:2810–2820, 2010.
[27] Lefrancois, E., “A simple mesh deformation technique for fluid–structure interaction based on a submesh approach”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 75, pp.1085–1101, 2008.
[28] Gerhold, T., Neumann, J., “The Parallel Mesh Deformation of the DLR TAU-Code”, In C. Tropea et al. (Eds.): New Res. in Num. and Exp. Fluid Mech. VI, NNFM 96, pp. 162–169, 2007.
[29] Jameson A, Baker TJ, Weatherill NP., “Calculation of inviscid transonic flow over a complete aircraft”, AIAA Paper 86-0103, 1986.
[30] Peraire J, Vahdati M, Morgan K, Zienkiewicz OC., “Adaptive remeshing for compressible flow computations”, J Comput Phys 72:449–66, 1987.
[31] Lohner R, Parikh P., “Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing front method”, Int J Numer Meth Fluids 8:1135–49, 1988.
[32] Anderson WK., “A grid generation and flow solution method for the Euler equations on unstructured grids”, J Comput Phys 110:23–38, 1994.
[33] Venkatakrishnan V., “A perspective on unstructured grid flow solvers”, AIAA Paper 95-0667, January 1995.
[34] Pirzadeh S., “Three-dimensional unstructured viscous grids by the advancing-layers method”, AIAA J 34(1):43–9, 1996.
[35] Weatherill NP., “Unstructured grids: procedures and applications”, In: Thompson JF, Soni BK, editors. Handbook of grid generation, CRC Press; 1998 [Chapter 26].
[36] Kallinderis Y, Khawaja A, McMorris H., “Hybrid prismatic/tetrahedral grid generation for complex geometries”, AIAA J 34:291–8, 1996.
[37] Coirier WJ, Jorgenson PCE., “A mixed volume grid approach for the Euler and Navier–Stokes equations”, AIAA Paper 96-0762, January 1996.
[38] Bayyuk SA, Powell KG, van Leer B., “A simulation technique for 2D unsteady inviscid flows around arbitrarily moving and deforming bodies of arbitrarily geometry”, AIAA Paper 93-3391-CP, 1993.
[39] Coirier WJ, Powell KG., “Solution-adaptive Cartesian cell approach for viscous and inviscid flows”, AIAA J 34:938–45, 1996.
[40] Aftosmis MJ, Berger MJ, Melton JE., “Robust and efficient Cartesian mesh generation for component-based geometry”, AIAA Paper No 97-0196, 1997.
[41] Karman SL. SPLITFLOW: “a 3D unstructured Cartesian/prismatic grid CFD code for complete geometries”, AIAA-95-0343, 1995.
[42] Wang ZJ., “A fast nested multi-grid viscous flow solver for adaptive Cartesian/quad grids”, Int J Numer Meth Fluids 33(5):657–80, 2000.

[43] Wang ZJ, Chen RF., “Anisotropic solution-adaptive viscous Cartesian grid method for turbulent flow simulation”, AIAA J 40:1969–78, 2002.
[44] Zhang LP, Zhang HX, Gao SC., “A Cartesian/unstructured hybrid grid solver and its applications to 2D/3D complex inviscid flow fields”, In: Proceedings of the 7th International Symposium on CFD, Beijing, China, p. 347–52, September 1997.
[45] Zhang LP, Yang YJ, Zhang HX., “Numerical simulations of 3D inviscid/viscous flow fields on Cartesian / unstructured / prismatic hybrid grids”, In: Proceedings of the 4th Asian CFD Conference, Mianyang, Sichuan, China, September 2000.
[46] Murman S, Aftosmis M, Berger M., “Implicit approaches for moving boundaries in a 3-d Cartesian method,” AIAA Paper 2003-1119, 2003.
[47] Zhang, L.P., Wang, Z.J., “A block LU-SGS implicit dual time-stepping algorithm for hybrid dynamic meshes,” Computers & Fluids 33 891–916, 2004.
[48] Van Leer, B., Mulder, W.A., “Relaxation methods for hyperbolic conservation laws”, In: Proceedings of the INRIA Workshop on Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics, Rocquencourt, France, December 1983.
[49] Chen, R.F., Wang, Z.J., “Fast, block lower–upper symmetric Gauss Seidel scheme for arbitrary grids”, AIAA J 38(12):2238–45, 2000.
[50] Jameson, A., Caughey, D.A., “How many steps are required to solve the Euler equations of steady compressible flow: in search of a fast solution algorithm”, In: 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, CA, June 2001.
[51] Liu, X., Qin, N., Xia, H., “Fast dynamic grid deformation based on Delaunay graph mapping”, Journal of Computational Physics 211 405–423, 2006.
[52] Allen, C.B., “Parallel universal approach to mesh motion and application to rotors in forward flight”, Int. J. Numer. Meth. Engng 69:2126–2149, 2007.
[53] Geuzaine, P., and Essers J.A., “Hybrid-Cartesian Grid Procedure for the Simulation of Compressible Turbulent Flows”.
[54] Whitehouse, G.R., Boschitsch, A.H., Smith M.J., Lynch, C.E., Brown, R.E., “Investigation of Mixed Element Hybrid Grid-Based CFD Methods for Rotorcraft Flow Analysis”.
[55] Franke, R., “Scattered data interpolation: tests of some methods", Math. of Comp. 38, pp. 181-200. 1982
[56] Canann, S.A., Tristano, J.R., Staten, M.L., “An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes”, 275 Technology Drive Canonsburg, PA 15317