

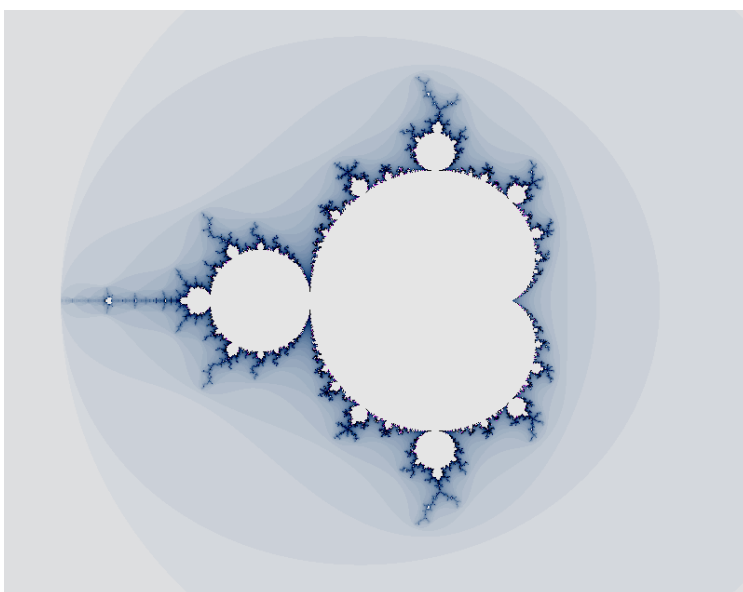


ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

*Η Γεωμετρία
των Συνόλων Αστάθειας
Ρητών Μιγαδικών Συναρτήσεων*

του Ηλία Γ. Πιτσιλαδή



Επιβλέπων Καθηγητής: Ι. Γρυσπολάκης

ΧΑΝΙΑ
ΜΑΙΟΣ 2009

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ.....	10
1.1 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ	10
1.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ	10
1.2.1. Εισαγωγικά και γενικοί ορισμοί από την Μιγαδική Ανάλυση.....	10
1.2.2.Μιγαδικά Δυναμικά Συστήματα.....	11
1.2.3.Ταξινόμηση σταθερών σημείων	13
1.2.4.Το σύνολο Αστάθειας και σύνολο Ευστάθειας Δυναμικού Συστήματος.....	15
1.2.5. Παραδείγματα τροχιών κοντά σε σταθερά σημεία.....	17
1.2.6 Παραδείγματα Συνόλων Αστάθειας.....	21
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΩΝ ΤΟΜΩΝ	22
2.1 ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ - ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ.....	22
2.1.1 Εισαγωγικά	22
2.1.2 Οι έννοιες της Σχετικής Τροχιάς και της Δυναμικής αλληλεπίδρασης.....	22
2.2 ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.....	27
2.2.1 Ορισμός και αναγκαιότητα της έννοιας αυτής	27
2.2.2 Γενικές ιδιότητες επιφανειών μέτρου.....	28
2.2.3 Η επιφάνεια μέτρου Δυναμικής συνάρτησης σταθερού σημείου πολωνύμου	31
2.3 ΤΟΜΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.....	34
2.3.1 Μοναδιαίες Τομές Μιγαδικού Δυναμικού Συστήματος.....	34
2.3.2 Η Κύρια Μοναδιαία Τομή.....	39
2.3.3 Συνεκτικότητα των Μοναδιαίων Τομών	43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ ΕΛΞΗΣ.....	46
3.1 ΟΙ ΠΥΡΗΝΕΣ ΕΛΞΗΣ & ΟΙ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΕΛΚΥΣΤΗ	46
3.1.1 Εισαγωγικά	46
3.1.2 Η Ελκτική Περιοχή Ελκυστή	46
3.1.3 Τα βασικά υποσύνολα της Ελκτικής Περιοχής Ελκυστή.....	47
3.1.4 Ελκτική Περιοχή και Μοναδιαίες Τομές	51
3.2 ΕΥΤΑΚΤΙΚΗ ΕΛΞΗ	53
3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ.....	55
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΠΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ.....	58
4.1 ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΤΟΜΗ.....	58
4.1.1 Εισαγωγικά	58
4.1.2 Προβολές σημείου σε καμπύλη.....	59
4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ	65

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΜΟΝΑΔΙΑΙΕΣ ΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ.....	72
5.1 ΟΙ ΠΡΟΕΙΚΟΝΕΣ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΩΝ ΤΟΜΩΝ	72
5.1.1 Εισαγωγικά	72
5.1.2 Ακολουθίες Συνόλων	72
5.1.3 Η Ακολουθία των προεικόνων της Κύριας Μοναδιαίας Τομής σταθερού σημείου	73
5.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ	80
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΥΠΟΒΙΒΑΣΙΜΟΤΗΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ.....	86
6.1 ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	86
6.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	92
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΑ ΝΕΦΗ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....	95
7.1 ΟΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΝΙΕΤΤΑ-ΝΕΥΤΟΝ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	95
7.2 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΑ ΝΕΦΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.....	99
7.2.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί	99
7.2.2 Το Νέφος των Περιοδικών Κύκλων	103
7.2.3 Η Μέση Ακτίνα Αστάθειας και η Απαγορευτική Αρχή της.....	108
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	111

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διατριβή αναφέρεται στα μιγαδικά δυναμικά συστήματα και έχει ως κύριο αντικείμενο την επίλυση των ακόλουθων προβλημάτων:

α) τον υπολογισμό της απόστασης ελκυστή από το σύνολο Julia του πολυωνυμικού δυναμικού συστήματος και β) τον υπολογισμό του κέντρου βάρους των συνόλων Julia.

Για την επίλυση των δυο αυτών προβλημάτων εισάγονται αντίστοιχα δύο νέες ερευνητικές προσεγγίσεις-εργαλεία, η *θεωρία των μοναδιαίων τομών* καθώς και τα *πολυωνυμικά νέφη σημείων*.

Μέσω αυτών κατασκευάζονται κατάλληλες ακολουθίες συνόλων οι οποίες προσεγγίζουν είτε το σύνολο Julia είτε κάποια συνεκτική συνιστώσα του συνόλου ευστάθειας.

ABSTRACT

This thesis refers to complex dynamical systems and has as its main object the solution of the following problems:

- a) the explicit computation of the distance of the attractor from Julia set of a polynomial dynamical system
- b) the explicit computation of the weight center of the Julia sets.

The solution of the problems is achieved by introducing two novel theoretical tools, one is the so called *unital cut* and the other the so called *polynomial point clouds*.

Utilizing both these tools appropriate sequences of sets are constructed which are shown to converge either to the Julia set or to some connected components of the stability set.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

A. Ερευνητικοί στόχοι της διατριβής

Η διδακτορική διατριβή αναφέρεται στην περιοχή των Μιγαδικών Δυναμικών Συστημάτων ή της Μιγαδικής Δυναμικής. Το πρωτογενές ερευνητικό ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην ανάπτυξη Αναλυτικών και Υπολογιστικών μεθόδων για την επίλυση των παρακάτω προβλημάτων:

Πρόβλημα 1: Υπολογισμός της απόστασης ελκυστή από το σύνολο αστάθειας (ή σύνολο Julia) του δυναμικού συστήματος.

Πρόβλημα 2: Υπολογισμός του κέντρου βάρους των συνόλων αστάθειας των Μιγαδικών Δυναμικών Συστημάτων που παράγονται από μιγαδικά πολυώνυμα.

Η ανάπτυξη της σχετικής μεθοδολογίας έγινε από μηδενική βάση διότι:

1. Οι υπάρχουσες μέθοδοι του Διαφορικού Λογισμού και της Υπολογιστικής Ανάλυσης, δεν μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα σε μορφοκλασματικούς γεωμετρικούς σχηματισμούς, όπως είναι στη γενικότητά τους τα σύνολα Julia.
2. Η υπάρχουσα μαθηματική πληροφορία στην περιοχή των Μιγαδικών Δυναμικών Συστημάτων όσο και η τρέχουσα ερευνητική τάση διεθνώς, κατευθύνεται κυρίως σε ζητήματα μείζονος τοπολογικού ενδιαφέροντος. Για παράδειγμα η προσβασιμότητα του συνόλου αστάθειας από την περιοχή του απείρου, η τοπολογική του υφή, η διασπασιμότητα του και άλλα.
3. Επίσης, αν και υπάρχει σημαντική πληροφορία για την τοπική συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος σε περιοχές σταθερών σημείων, η υπολογιστική της αξιοποίηση παρουσιάζει δυσχέρειες, δεδομένου ότι οι περιοχές αυτές παραμένουν γεωμετρικά ακαθόριστες.

Η μεθοδολογία επίλυσης των παραπάνω προβλημάτων βασίστηκε σε δύο νέες έννοιες-θεωρήσεις στη Μιγαδική Δυναμική βάσει των οποίων κατασκευάζονται κατάλληλες ακολουθίες συνόλων οι οποίες προσεγγίζουν απερίοριστα, είτε κάποια συνεκτική συνιστώσα του συνόλου Ευστάθειας είτε το σύνολο Αστάθειας του δυναμικού συστήματος. Η πρώτη φέρει το όνομα *Θεωρία Μοναδιαίων Τομών*, για το 1^ο πρόβλημα και η δεύτερη *Πολυωνυμικά νέφη σημείων*, για το 2ο πρόβλημα.

Παρά το γεγονός ότι η κατασκευή αυτών των εννοιών έγινε με αποκλειστικό γνώμονα την επάρκειά τους στην αντιμετώπιση και επίλυση των παραπάνω προβλημάτων, η χρησιμότητά τους φαίνεται να μην περιορίζεται στα στενά όρια αυτών, αλλά να επεκτείνεται και σε ζητήματα γενικότερου ενδιαφέροντος στην περιοχή της Μιγαδικής Δυναμικής. Για παράδειγμα η Θεωρία των Μοναδιαίων Τομών αποτελεί ένα εργαλείο για τη διερεύνηση της *Ελκτικής περιοχής* ενός ελκυστή (βλ. Κεφάλαιο 3) αλλά και γενικότερα για τον προσδιορισμό του συνόλου Ευστάθειας του Δυναμικού συστήματος (βλ. Κεφάλαιο 5)

B. Συνοπτική παρουσίαση της διατριβής ανά κεφάλαιο

Η διδακτορική διατριβή αναπτύσσεται στα Κεφάλαια 2^ο έως 7^ο. Ειδικότερα

Στο 1^ο κεφάλαιο με τίτλο *Βασικές έννοιες από τη Μιγαδική Δυναμική* δίνονται συνοπτικά τα απολύτως απαραίτητα στοιχεία της Μιγαδικής Δυναμικής τα οποία χρησιμοποιούνται άμεσα ή έμμεσα στην εργασία.

Στο 2^ο κεφάλαιο με τίτλο *Η Θεωρία των Μοναδιαίων Τομών* εισάγεται η έννοια της *δυναμικής αλληλεπίδρασης* η οποία αποτελεί την κεντρική έννοια πάνω στην οποία δομείται η θεωρία αυτή. Ειδικότερα ενδιαφέρει, η αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται μεταξύ ενός σταθερού σημείου z_k και των υπολοίπων σημείων z του δυναμικού συστήματος. Η δυναμική αλληλεπίδραση, η οποία μπορεί να είναι *ελκτική*, *απωθητική* ή *ουδέτερη*, εκφράζεται μέσω μιας ακολουθίας μιγαδι-

κών συναρτήσεων $(D_{f^{on}, z_k})_{n \in \mathbb{N}}$, όπου $D_{f^{on}, z_k}(z) = \begin{cases} \frac{f^{on}(z) - z_k}{z - z_k}, & z \neq z_k \\ (f'(z_k))^n, & z = z_k \end{cases}$. Ειδικότερα, αν

$|D_{f^{on}, z_k}(z)| < 1$ τότε το σημείο z δέχεται έλξη από το z_k στην n -επανάληψη, αν $|D_{f^{on}, z_k}(z)| > 1$

δέχεται απόθληση και αν $|D_{f^{on}, z_k}(z)| = 1$ δέχεται ουδέτερη δράση.

Ως μοναδιαία τομή B_{f^{on}, z_k} n -τάξης του Μιγαδικού Δυναμικού Συστήματος στο σταθερό του σημείο z_k , ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z του επιπέδου τα οποία δέχονται έλξη στην n -επανάληψη, δηλαδή είναι το σύνολο $B_{f^{on}, z_k} = \{z \in \mathbb{C} / |D_{f^{on}, z_k}(z)| < 1\}$, $n = 1, 2, \dots$. Ιδιαίτερη σημασία για τη Μιγαδική Δυναμική, έχει κύρια μοναδιαία τομή $\hat{B}_{f^{on}, z_k}$ του $z_k \in X_f$, η οποία ορίζεται ως η συνεκτική συνιστώσα $\hat{B}_{f^{on}, z_k} \subseteq B_{f^{on}, z_k}$ στην οποία το z_k ανήκει στην κλειστή της θήκη. Από την μελέτη και διερεύνηση των γεωμετρικών και δυναμικών χαρακτηριστικών των συνόλων B_{f^{on}, z_k} και $\hat{B}_{f^{on}, z_k}$ μπορεί να ληφθεί μετρήσιμη πληροφορία για την κατάσταση του Δυναμικού Συστήματος κοντά στο σταθερό σημείο z_k . Τα σύνολα B_{f^{on}, z_k} και $\hat{B}_{f^{on}, z_k}$ μπορούν να απεικονιστούν γραφικά με την βοήθεια πακέτων μαθηματικού λογισμικού (MAPLE, MATLAB κλπ). Εφαρμογές της θεωρίας αυτής δίνονται στο 3^ο και 5^ο Κεφάλαιο.

Στο 3ο κεφάλαιο με τίτλο η *Γεωμετρία της Έλξης* γίνεται εφαρμογή της παραπάνω θεωρίας στην *ελκτική περιοχή* ενός ελκυστή, μέσω της οποίας αναδεικνύονται δύο χαρακτηριστικές ακολουθίες κυκλικών περιοχών αυτής. Ειδικότερα:

1. Αποδεικνύεται ότι στο εσωτερικό της ελκτικής περιοχή W_{z_k} ενός ελκυστή z_k υπάρχει μια ακολουθία ομόκεντρων κυκλικών περιοχών $S_n \subset W_{z_k}$, $n = 1, 2, \dots$ με κέντρο τον ελκυστή, οι οποίες ονομάζονται *πυρήνες έλξης* και στις οποίες οι τροχιές των σημείων τους παρουσιάζουν *σπειροειδή ευταξία*¹ συγκεκριμένης τάξης. Κάθε πυρήνας S_n , $n = 1, 2, \dots$ χαρακτηρίζεται από την ακτίνα του r_n , $n = 1, 2, \dots$ και από τον φυσικό αριθμό n , ο οποίος δηλώνει την *τάξη* του. Οι ακτίνες r_n , $n = 1, 2, \dots$ των *πυρήνων έλξης* είναι υπολογιστικά προσδιορίσιμοι και αναπτύσσεται μέθοδος για τον υπολογισμό τους. Σε πρακτικό επίπεδο αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να προσδιοριστεί μια τουλάχιστον κυκλική περιοχή με κέντρο τον ελκυστή, η οποία να περιέχεται με απόλυτη βεβαιότητα στην ελκτική περιοχή του.
2. Αποδεικνύεται ότι η απόσταση του ελκυστή z_k από το σύνολο αστάθειας J_f είναι το όριο της ακολουθίας των ακτίνων r_n , $n = 1, 2, \dots$ των πυρήνων έλξης, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \text{dist}(z_k, J_f)$. Το αποτέλεσμα αυτό αξιοποιείται για τον υπολογισμό της απόστασης του ελκυστή από το σύνολο αστάθειας.
3. Προσδιορίζεται μια ακολουθία κυκλικών περιοχών S_n^* , $n = 1, 2, \dots$ με κέντρο τον ελκυστή, η οποία λέγεται ακολουθία των *περιοχών διασποράς* του ελκυστή, όπου στο εσωτερικό κάθε

¹ Ο όρος αποσαφηνίζεται στη σελ. 53

μιας περιέχεται ολόκληρη η ελκτική περιοχή του δηλαδή $W_{z_k} \subset S_n^*, n=1,2,\dots$ ενώ εκτός αυτής, ο ελκυστής παραμένει ανενεργός.

4. Αποδεικνύεται ότι η ένωση των άπειρων προεικόνων κάθε πυρήνα έλξης $S_n, n=1,2,\dots$ παράγει ολόκληρη την ελκτική περιοχή του ελκυστή, δηλαδή $W_{z_k} = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(S_n), \forall n \in \mathbb{N}$

5. Ορίζεται η έννοια της *Ευτακτικής Έλξης*.

Στο **4ο κεφάλαιο** με τίτλο *Βελτιστοποίηση επί Πολυωνυμικών Τομών* αναπτύσσεται αυτοδύναμα μέθοδος για τον υπολογισμό της ελάχιστης και μέγιστης απόστασης ενός σημείου του μιγαδικού επιπέδου από καμπύλες της μορφής $|f(x+iy)| = r$ με $r > 0$, όπου $f(z)$ μιγαδικό πολυώνυμο. Οι καμπύλες αυτές, οι οποίες γενικά έχουν εκτενή και πολύπλοκη έκφραση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ονομάζονται *‘πολυωνυμικές τομές’*.

Παράδειγμα πολυωνυμικής τομής είναι η καμπύλη με εξίσωση:

$$x^8 + 4x^6y^2 + 6x^4y^4 + 2x^5 + 4x^2y^6 - 4x^3y^2 + y^8 - 6xy^4 + x^2 + y^2 = 2, \text{ η οποία προέρχεται από}$$

το μιγαδικό πολυώνυμο $f(z) = z^4 + z$ με $r = 2$. Το έναυσμα για την έρευνα και την λύση του ζητήματος, αποτέλεσε η ανάγκη υπολογισμού των όρων της ακολουθίας των ακτίνων

$r_n, n=1,2,\dots$ των πυρήνων έλξης στο 3^ο Κεφάλαιο το όριο των οποίων, όπως αναφέρθηκε, δίνει την απόσταση του ελκυστή από το σύνολο αστάθειας.

Στο **5ο κεφάλαιο** με τίτλο *Μοναδιαίες Τομές και Ευστάθεια* αποδεικνύεται ότι, όλα τα είδη των Ευσταθών περιοχών (ελκτικές, τύπου Siegel και παραβολικού τύπου), αν και αναπτύσσουν διαφορετική δυναμική, παράγονται με τον ίδιο τρόπο από την συνάρτηση f του δυναμικού συστήματος. Ακριβέστερα αποδεικνύεται ότι, ο συνολοθεωρητικός τελεστής $L = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}$

παράγει όλα τα είδη των ευσταθών περιοχών ενός δυναμικού μιγαδικού συστήματος όταν δρα στις *κύριες μοναδιαίες τομές* του. Η αξία αυτού του αποτελέσματος εντοπίζεται στην πληροφορία ότι, όλα τα διαφορετικά είδη των περιοχών ευστάθειας μπορούν να περιγραφούν με ενιαίο μαθηματικό συμβολισμό, μέσω του τελεστή L .

Στο **6ο κεφάλαιο** με τίτλο *Υποβιβασιμότητα Πολυωνύμου* εισάγεται και επιλύεται το πρόβλημα της *υποβιβασιμότητας* του πολυωνύμου που παράγει ένα Μιγαδικό Δυναμικό Σύστημα, δηλαδή το ζήτημα της υποκατάστασής του από κάποιο άλλο πολυώνυμο, μικρότερου βαθμού, το οποίο παράγει τα ίδια δυναμικά αποτελέσματα. Είναι γνωστό από την θεωρία της Μιγαδικής Δυναμικής ότι τα σύνολα αστάθειας των (διαφορετικών) πολυωνύμων f και f^{on} ταυτίζονται για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $J(f) = J(f^{on})$. Το ερώτημα το οποίο τίθεται και απαντάται στο κεφάλαιο αυτό είναι:

Το πρόβλημα υποβιβασμού: Δοθέντος πολυωνύμου g , να βρεθεί, αν υπάρχει πολυώνυμο f μικρότερου βαθμού, $\deg(f) < \deg(g)$ τέτοιο ώστε, τα αντίστοιχα σύνολα αστάθειάς τους $J(f) = J(g)$ να συμπίπτουν.

Το πρόβλημα της υποβιβασιμότητας, πέρα από το θεωρητικό ενδιαφέρον που παρουσιάζει, σχετίζεται άμεσα με τα δύο κεντρικά προβλήματα 1^ο και 2^ο που τέθηκαν αρχικά και που πραγματεύεται η διατριβή. Πράγματι, ο υποβιβασμός του αρχικού πολυωνύμου σε κάποιο άλλο μικρότερου βαθμού (εφόσον είναι εφικτός), θα έχει ως συνέπεια να μειωθεί σημαντικά ο υπολογιστικός φόρτος που απαιτείται για την επίλυση των δύο αυτών προβλημάτων.

Στο 7ο κεφάλαιο με τίτλο *Πολυωνυμικά Νέφη & Εφαρμογές* εισάγεται η έννοια του νέφους σημείων, τα οποία γενικά είναι ακολουθίες υποσυνόλων του μιγαδικού επιπέδου $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και των οποίων οι όροι $\Phi_n \subset \mathbb{C}$ έχουν πεπερασμένο πληθάρημο, δηλαδή $\text{card}(\Phi_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα νέφη τα οποία παράγονται από την ακολουθία $\{f^{on}\}_{n \geq 0}$ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f (πχ ως ρίζες, ως σταθερά σημεία ως κρίσιμα σημεία και άλλα, κάθε όρου της f^{on}) τα οποία ονομάζονται *πολυωνυμικά νέφη σημείων*. Ένα σημαντικό πολυωνυμικό νέφος είναι το νέφος των περιοδικών κύκλων $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $X_n \equiv X_{f^{on}} = \{z \in \mathbb{C} / f^{on}(z) = z, n \in \mathbb{N}\}$ το οποίο εκ κατασκευής προσεγγίζει το σύνολο Julia του δυναμικού συστήματος. Τα κυριότερα αποτελέσματα αυτής της προσέγγισης είναι:

1. Ο υπολογισμός του κέντρου βάρους $M(J_f)$ του συνόλου αστάθειας που δυναμικού συστήματος που παράγεται από πολυώνυμο $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} \dots + a_1 z + a_0$ και το οποίο αποδεικνύεται ότι είναι $M(J_f) = -\frac{1}{m} \frac{a_{m-1}}{a_m}$. Δηλαδή το κέντρο βάρους διαμορφώνεται αποκλειστικά από το λόγο των δυο μεγιστοβάθμιων συντελεστών και τον βαθμό του πολυωνύμου. Άμεση συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι ότι στα πολυώνυμα μεγάλου βαθμού (δηλαδή με βαθμό $m \rightarrow \infty$) το κέντρο βάρους του συνόλου αστάθειας τους, τείνει στην αρχή των αξόνων.
2. Αποδεικνύεται ότι μέσω του συντελεστή a_m του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} \dots + a_1 z + a_0$ το δυναμικό σύστημα ορίζει ένα μέγιστο για την απόσταση του ελκυστή από το σύνολο Julia. Ειδικότερα, η απόσταση ενός ελκυστή ή ενός σημείου Siegel z_0 από το σύνολο αστάθειας J_f ενός μιγαδικού πολυωνύμου $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} \dots + a_1 z + a_0$, δεν μπορεί να υπερβεί την ποσότητα $\frac{1}{m\sqrt[m]{|a_m|}}$. δηλαδή
$$\text{dist}(z_0, J_f) \leq \frac{1}{m\sqrt[m]{|a_m|}}.$$
3. Τέλος, κατασκευάζονται ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών οι οποίες συγκλίνουν αντίστοιχα προς το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο των ριζών πολυωνύμου, χωρίς να επιλυθεί το πολυώνυμο. Οι κατασκευές αυτές βασίζονται στους τύπους Vietta-Newton.

Γ. Νέες έννοιες της Διδακτορικής Διατριβής

Οι λέξεις κλειδιά της διατριβής, οι οποίες εισάγουν νέες έννοιες στη Μιγαδική Δυναμική είναι: Σχετική τροχιά, δυναμική αλληλεπίδραση, μοναδιαία τομή μιγαδικού δυναμικού συστήματος, πολυωνυμική τομή, πυρήνας έλξης ελκυστή, περιοχή διασποράς ελκυστή, ευτακτική έλξη, προβολικό σύνολο σημείου σε πολυωνυμική τομή, τελεστής ευστάθειας, υποβιβασιμότητα πολυωνύμου, πολυωνυμικό νέφος, μέση ακτίνα αστάθειας.

Δ. Γραφικά της διατριβής -λογισμικό

Για την γραφική απεικόνιση-σχεδίαση των επιφανειών μέτρου, των μοναδιαίων τομών και των πολυωνυμικών νεφών χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό MAPLE 9, ενώ για την απεικόνιση των συνόλων Julia χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό XaoS 3.1. Τα υπόλοιπα σχήματα και διαγράμματα, ποιοτικού χαρακτήρα, έγιναν με το MS Word.

Ευχαριστίες

Θερμές ευχαριστίες στον επιβλέποντα Καθηγητή του Γενικού Τμήματος και νυν Πρύτανη του Πολυτεχνείου Κρήτης κ. ***Ιωακείμ Γρυσπολάκη***, για τον χρόνο που διέθεσε αφειδώς, το συνεχές ενδιαφέρον, την καθοδήγηση και επιστημονική υποστήριξη που παρείχε στην εκπόνηση της διδακτορικής μου διατριβής, στην δύσβατη, παράξενη και αινιγματική περιοχή της Χαώδους Μιγαδικής Δυναμικής.

Χανιά Μάιος 2009

Ηλίας Πιτσιλαδής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

1.1 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Έστω μιγαδική αναλυτική συνάρτηση f . Συμβολίζουμε ως:

1. $X_f = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = z\}$, το σύνολο των σταθερών σημείων (fixed points) της f .
2. $\Omega_f = \{z \in \mathbb{C} / f'(z) = 0\}$, το σύνολο των κρίσιμων σημείων (critical points) του f .
3. $R_f = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = 0\}$, τις ρίζες του πολωνύμου f .
4. $f^{-on}(A) = \{z \in \mathbb{C} / f^{on}(z) \in A, n = 1, 2, \dots\}$, την n -τάξης προεικόνα ενός συνόλου $A \subset \mathbb{C}$.
5. $f^{-on}(z_k) = \{z \in \mathbb{C} / f^{on}(z) = z_k, n = 1, 2, \dots\}$, την n -τάξης προεικόνα του σταθερού σημείου z_k .
6. $W_{f, z_k} = \{z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k\}$, την ελκτική περιοχή (basin of attraction) του ελκυστή z_k .
7. $D(z_0, r)$, τον ανοικτό κυκλικό δίσκο κέντρου z_0 και ακτίνας r δηλαδή $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r\}$.
8. $card(X)$, τον πληθάρημο του συνόλου X .
9. J_f , το σύνολο Αστάθειας του Μιγαδικού Δυναμικού Συστήματος ή σύνολο Julia.
10. F_f , το σύνολο Ευστάθειας του Μιγαδικού Δυναμικού Συστήματος σύνολο Fatou.
11. K_f , την πλήρωση του συνόλου Αστάθειας filled in Julia set.

1.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

1.2.1. Εισαγωγικά και γενικοί ορισμοί από την Μιγαδική Ανάλυση

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των απολύτως αναγκαίων εννοιών, ορισμών και θεωρημάτων της Μιγαδικής Δυναμικής, χωρίς αποδείξεις, τα οποία είτε χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη της διατριβής είτε η αναφορά σε αυτά κρίνεται απαραίτητη για την εννοιολογική συνοχή της παρουσίασης. Η εργασία αναφέρεται αποκλειστικά σε αναλυτικές συναρτήσεις και ειδικότερα σε πολωνυμικές συναρτήσεις. Υπενθυμίζονται οι ακόλουθοι ορισμοί:

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ μιγαδικής μεταβλητής λέγεται *αναλυτική ή ολόμορφη* σε ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου A . Αν επί πλέον είναι και 1-1 (ή ισοδύναμα $f'(z) \neq 0, \forall z \in A$), η συνάρτηση ονομάζεται *σύμμορφη*.

Έστω μια ακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μιγαδικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής η οποία ορίζεται σε ένα σύνολο $H \subset \mathbb{C}$. Η ακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει *ομοιόμορφα* στο $H \subset \mathbb{C}$ εάν

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m, n > N(\varepsilon), \forall z \in H \Rightarrow |f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Η ακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο $H \subset \mathbb{C}$ εάν για κάθε $z \in H$ υπάρχει περιοχή $U(z) \subset H$ στην οποία ο περιορισμός της ακολουθίας $\{f_n|_{U(z)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα, δηλαδή η σύγκλιση της $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφη επί των συμπαγών υποσυνόλων του H .

Μια οικογένεια $\tilde{f}$ μιγαδικών συναρτήσεων λέγεται κανονική οικογένεια στο σύνολο $H \subset \mathbb{C}$ αν κάθε ακολουθία συναρτήσεων της $\tilde{f}$ περιέχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο H .

Λέξεις κλειδιά Οι λέξεις κλειδιά της Μιγαδικής Δυναμικής, με την αγγλική ορολογία τους, που χρησιμοποιούνται στην διατριβή είναι: *ελκυστής (attractor)*, *υπέρ-ελκυστής (super attractor)*, *σταθερό σημείο τύπου Siegel (Siegel fixed point)*, *σταθερό σημείο τύπου Cremer (Cremer fixed point)*, *απωθητικό σταθερό σημείο (repelling fixed point)*, *παραβολικό σταθερό σημείο (parabolic fixed point)*, *σύνολο αστάθειας δυναμικού συστήματος (unstable set ή Julia set)*, *σύνολο Ευστάθειας δυναμικού συστήματος (stable set ή Fatou set)*, *ελκτική περιοχή ελκυστή (basin of attraction)*, *δίσκος Siegel (Siegel disk)*

1.2.2. Μιγαδικά Δυναμικά Συστήματα

Με τον όρο *Διακριτό Δυναμικό Σύστημα* εννοείται μία τριάδα (Φ, f, δ) όπου Φ τοπολογικός χώρος, $f: \Phi \rightarrow \Phi$ μία απεικόνιση και $\delta: z_{n+1} = f(z_n)$ μία επαναληπτική διαδικασία παραγωγής τροχιών $(z_n)_{n \geq 0}$ στον χώρο Φ μέσω της f . Αν ως Φ επιλεγεί η σφαίρα του Riemann $\Phi = \tilde{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ και f αναλυτική μιγαδική συνάρτηση, τότε η τριάδα $(\tilde{\mathbb{C}}, f, \delta)$ συνιστά ένα Μιγαδικό Δυναμικό Σύστημα.

A. Τροχίες και Αναλλοίωτα υποσύνολα

Έστω $z \in \tilde{\mathbb{C}}$, τότε η n -επανάληψη ή η n -εικόνα του z κάτω από την f είναι το σημείο $z_n = f^{on}(z) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n-\text{φορές}}(z) \in \tilde{\mathbb{C}}$. Η προς τα εμπρός τροχιά του $z \in \tilde{\mathbb{C}}$ (forward orbit) ορίζεται ως το σύνολο $Orbit_f^+(z) = \{f^{on}(z) / n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$.

Ένα σύνολο $A \subset \tilde{\mathbb{C}}$ θα λέγεται αναλλοίωτο (invariant set) κάτω από την f αν ισχύει $f(A) \subset A$ και πλήρως αναλλοίωτο (completely invariant set) αν $f(A) = A = f^{-1}(A)$. Είναι προφανές ότι κάθε τροχιά είναι αναλλοίωτη κάτω από την f .

B. Περιοδικά σημεία- Σταθερά σημεία- Κύκλοι

Ένα σημείο $z \in \mathbb{C}$ θα λέγεται περιοδικό (periodic point) με περίοδο m , αν m είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η $f^{om}(z) = z$. Ιδιαίτερα αν η περίοδος $m = 1$ δηλαδή $f(z) = z$, τότε το z θα λέγεται σταθερό σημείο. Το σύνολο των σταθερών σημείων του δυναμικού συστήματος $(\mathbb{C}, f, \delta)$ είναι το σύνολο των σταθερών σημείων της f δηλαδή

$X_f = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = z\}$. Η προς τα εμπρός τροχιά $Orbit_f^+(z_0)$ ενός περιοδικού σημείου $z_0 \in \mathbb{C}$ με περίοδο m είναι πεπερασμένο σύνολο m στοιχείων και λέγεται κύκλος, δηλαδή το σύνολο $Orbit_f^+(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_{m-1}\} = \{z_0, f(z_0), \dots, f^{o(m-1)}(z_0)\}$ είναι κύκλος.

Γ. Ιδιότητα περιοδικού σημείου

Έστω περιοδικό σημείο z_0 περιόδου m και ο κύκλος του $Orbit_f^+(z_0) = \{z_0, z_1, \dots, z_{m-1}\}$. Παρα-

τηρούμε ότι για κάθε $z_k \in Orbit_f^+(z_0)$ ο αριθμός $\lambda(z_k) = \left. \frac{df^{om}(z)}{dz} \right|_{z=z_k} = f'(z_0)f'(z_1)\dots f'(z_{m-1})$

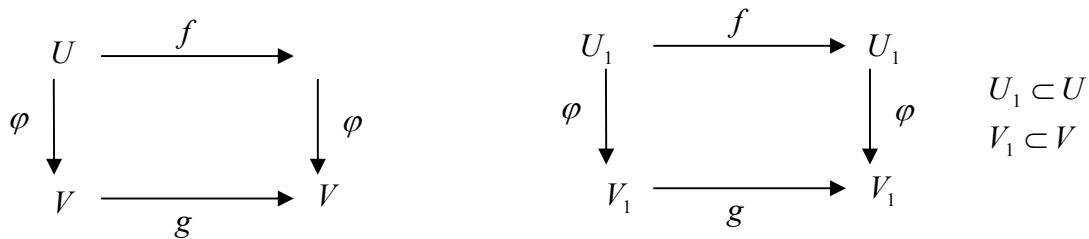
είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του z_k . Αποδεικνύεται επίσης ότι είναι και ανεξάρτητος από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται *ιδιοτιμή* του z_0 ή *ιδιοτιμή του κύκλου*. Στην περίπτωση σταθερού σημείου $z_0 \in X_f$ η ιδιοτιμή του είναι $\lambda(z_0) = f'(z_0)$. Οι ιδιοτιμές είναι ουσιώδεις παράμετροι του δυναμικού συστήματος αφού καθορίζουν πλήρως την δυναμική γύρω από τα περιοδικά ή σταθερά σημεία. Στη συνέχεια θα γίνεται αναφορά μόνο σε σταθερά σημεία διότι αν το σημείο z_0 είναι περιοδικό με περίοδο m για το δυναμικό σύστημα $(\tilde{C}, f, \delta)$, τότε το z_0 είναι σταθερό σημείο για το ισοδύναμο² δυναμικό σύστημα $(\tilde{C}, f^{om}, \delta)$

Δ. Συζυγή και τοπικά συζυγή Δυναμικά Συστήματα

Η έννοια της συζυγίας εκφράζει την ισοδυναμία δύο δυναμικών συστημάτων είτε σε καθολικό επίπεδο είτε σε τοπικό. Ειδικότερα

Ορισμός: Δύο Δυναμικά Συστήματα (U, f, δ) και (V, g, δ) λέγονται *σύμμορφα συζυγή* αν υπάρχει *σύμμορφη απεικόνιση* $\varphi: U \rightarrow V$ τέτοια ώστε $\varphi(f(z)) = g(\varphi(z))$ ή ισοδύναμα $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Αν η ιδιότητα της συζυγίας δεν ισχύει σε ολόκληρους τους χώρους U, V αλλά ισχύει σε υποσύνολα τους $U_1 \subset U$ και $V_1 \subset V$, τότε τα δυναμικά συστήματα χαρακτηρίζονται ως *τοπικά συζυγή*. Η απεικόνιση $\varphi: U \rightarrow V$ ονομάζεται *απεικόνιση συζυγίας* ▲

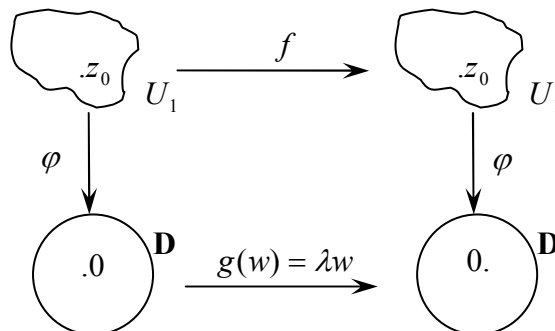
Η $\varphi: U \rightarrow V$ καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα αντιμεταθετικό



Η απεικόνιση συζυγίας $\varphi: U \rightarrow V$ απεικονίζει τα σταθερά σημεία της f στα σταθερά σημεία της g , ενώ οι ιδιοτιμές στα αντίστοιχα σταθερά σημεία είναι ίσες. Επίσης αποδεικνύεται ότι $g^{on} = \varphi \circ f^{on} \circ \varphi^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ δηλαδή και οι τροχιές $(f^{on}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ και $(g^{on}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ στα δύο δυναμικά συστήματα είναι συζυγείς.

Ε. Γραμμικοποίηση Δυναμικού Συστήματος σε περιοχή σταθερού σημείου

Σημαντική έννοια στην τοπική μελέτη δυναμικού συστήματος σε περιοχή σταθερού σημείου, εί-



² Αποδεικνύεται ότι τα σύνολα αστάθειας των δύο δυναμικών συστημάτων ταυτίζονται

ναι αυτή της γραμμικοποίησης του. Έστω z_0 σταθερό σημείο μιας αναλυτικής συνάρτησης f και $f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \alpha(z - z_0)^p + \dots$, η ανάπτυξη σε σειρά Taylor της f με κέντρο το z_0 και $p \geq 2$. Από το ανάπτυγμα προκύπτει ότι, για τιμές του z πολύ κοντά στο z_0 οι τιμές της f προσεγγίζουν τις τιμές της γραμμικής συνάρτησης $g(w) = \lambda w$ αν $\lambda \neq 0$ ή της $g(w) = \alpha w^p$, αν $\lambda = 0$ και $\alpha \neq 0$, όπου $w = z - z_0$. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν υπάρχει σύμμορφη αλλαγή μεταβλητής η οποία καθιστά την f τοπικά συζυγή με την γραμμική συνάρτηση $g(w) = \lambda w$.

Ορισμός: Μία αναλυτική συνάρτηση f ορίζεται ως τοπικά γραμμικοποιήσιμη στο z_0 , αν υπάρχει απεικόνιση συζυγίας $\varphi: U_1 \rightarrow \mathbf{D}$ (αλλαγή συντεταγμένων) η οποία καθιστά τον περιορισμό της f σε μια περιοχή U_1 του z_0 , τοπικά συζυγή με την γραμμική συνάρτηση $g(w) = \lambda w$ στον μοναδιαίο δίσκο, δηλαδή $\varphi(f(z)) = \lambda \cdot \varphi(z)$. ▲

Αν η f είναι γραμμικοποιήσιμη, τότε η φ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\varphi(z_0) = 0$

1.2.3. Ταξινόμηση σταθερών σημείων

Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνονται τα είδη των σταθερών σημείων στα μιγαδικά δυναμικά συστήματα.



Εικόνα 1 Ταξινόμηση σταθερών σημείων

Έστω σταθερό σημείο $z_0 \in X_f$ δηλαδή $f(z_0) = z_0$ με ιδιοτιμή $\lambda = f'(z_0)$

Το z_0 θα χαρακτηρίζεται:

- Ελκυστής, αν $0 < |f'(z_0)| < 1$
- Υπέρ-ελκυστής, αν $|f'(z_0)| = 0$
- Απωθητικό σταθερό σημείο, αν $|f'(z_0)| > 1$
- Ουδέτερο σταθερό σημείο, αν $|f'(z_0)| = 1$ ή ισοδύναμα $f'(z_0) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1)$

Κάθε ουδέτερο σταθερό σημείο με ιδιοτιμή $f'(z_0) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1)$ χαρακτηρίζεται ως:

- Ρητό ή παραβολικό, ή παραβολικός ελκυστής αν η $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ δηλαδή η ιδιοτιμή $f'(z_0)$ είναι ρίζα της μονάδας.
- Άρρητο τύπου Siegel, αν ο $t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})/\mathbb{Z}$ είναι άρρητος και η f γραμμικοποιείται σε κάποια περιοχή του σταθερού σημείου.

- Άρρητο τύπου Cremer, αν ο $t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) / \mathbb{Z}$ είναι άρρητος και η f δεν γραμμικοποιείται σε καμιά περιοχή του σταθερού σημείου.

Το ερώτημα στην περίπτωση άρρητου σταθερού σημείου είναι: Για ποιες τιμές του $t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) / \mathbb{Z}$, το σημείο είναι τύπου Siegel (δηλαδή έχουμε γραμμικοποίηση) και για ποιες, είναι τύπου Cremer. Ικανές συνθήκες έχουν δοθεί πρώτα από τον Siegel και αργότερα από τον Brjuno. Πριν γίνει αναφορά σε αυτά τα θεωρήματα είναι αναγκαίοι κάποιοι ορισμοί.

Ορισμός. Το σύνολο Δ_k των Διοφαντικών αριθμών k -τάξης, $k > 0$ ορίζεται ως :

$$\Delta_k = \left\{ t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) / \mathbb{Z} : \exists \varepsilon = \varepsilon(t) > 0, \left| t - \frac{p}{q} \right| > \frac{\varepsilon}{q^k}, \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} / \mathbb{Z} \right\}.$$

Το σύνολο των Διοφαντικών αριθμών Δ ορίζεται η ένωση $\Delta = \bigcup_{k \geq 0} \Delta_k$ ▲

Έστω $t = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}$ το ανάπτυγμα του άρρητου t σε συνεχές κλάσμα, όπου οι

$a_i \geq 1, i = 1, 2, \dots$ είναι μονοσήμαντα ορισμένοι θετικοί ακέραιοι και

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} \quad \text{η ακολουθία των ρητών προσεγγίσεων του } t$$

Ορισμός. Το σύνολο των (άρρητων) αριθμών Brjuno ορίζεται ως

$$Br = \left\{ t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) / \mathbb{Z} : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty \right\} \quad \text{όπου } (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ η ακολουθία των παρονομαστών των ρητών}$$

προσεγγίσεων $\frac{p_n}{q_n}$ του άρρητου t . ▲

Αποδεικνύεται κάθε διοφαντικός αριθμός ότι είναι αριθμός Brjuno, δεν ισχύει όμως το αντίστροφο δηλ $\Delta \subset Br$. Το 1942 ο Siegel έδωσε την ακόλουθη ικανή συνθήκη για την τοπική γραμμικοποίηση μιας αναλυτικής συνάρτησης γύρω από άρρητο σταθερό σημείο.

Θεώρημα Siegel: Έστω z_0 σταθερό σημείο της αναλυτικής συνάρτησης

$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \alpha_2(z - z_0)^2 + \dots$ με ιδιοτιμή $\lambda = f'(z_0) = e^{2\pi i t}$ όπου t άρρητος. Αν ο t είναι διοφαντικός, $t \in \Delta$ τότε η f γραμμικοποιείται στο z_0 . ■

Μία πιο βελτιωμένη ικανή συνθήκη αποδείχθηκε από τον Brjuno το 1965, διευρύνοντας το σύνολο των άρρητων για τους οποίους η f γραμμικοποιείται.

Θεώρημα Brjuno: Έστω z_0 σταθερό σημείο της αναλυτικής συνάρτησης

$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \alpha_2(z - z_0)^2 + \dots$ με ιδιοτιμή $\lambda = f'(z_0) = e^{2\pi i t}$ όπου t άρρητος. Αν ο

$t \in Br$ δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$ τότε το z_0 είναι σταθερό σημείο τύπου Siegel. ■

Το επόμενο θεώρημα δίνει μία ικανή συνθήκη ώστε ένα άρρητο σταθερό σημείο ενός πολωνύμου να είναι τύπου Cremer.

Θεώρημα Έστω z_0 σταθερό σημείο του πολωνύμου $f(z)$ βαθμού $d \geq 2$ με ιδιοτιμή

$\lambda = f'(z_0) = e^{2\pi i t}$ όπου t άρρητος. Αν $|\lambda^n - 1| < \left(\frac{1}{n}\right)^{d^{n-1}}$ για άπειρα n τότε το z_0 είναι τύπου

Cremer. ■ (Για απόδειξη βλ [4] σελ 143)

Αποδεικνύεται ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση γραμμικοποιείται σε περιοχές σταθερών σημείων z_0 τύπου ελκυστή, απωθητικού και Siegel, δηλαδή είναι τοπικά συζυγής με την $z \rightarrow f'(z_0)z$. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις δεν γραμμικοποιείται.

1.2.4. Το σύνολο Αστάθειας και σύνολο Ευστάθειας Δυναμικού Συστήματος

Κάθε μιγαδικό δυναμικό σύστημα $(\tilde{\mathcal{C}}, f, \delta)$ διαχωρίζεται σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα: το σύνολο Αστάθειας ή σύνολο Julia J_f και το σύνολο Ευστάθειας ή σύνολο Fatou³ F_f , τέτοια ώστε $J_f \cup F_f = \tilde{\mathcal{C}}$ και $J_f \cap F_f = \emptyset$.

Ορισμός: Έστω το μιγαδικό δυναμικό σύστημα $(\tilde{\mathcal{C}}, f, \delta)$ με f μη σταθερή αναλυτική απεικόνιση $f: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ και το σημείο $z_0 \in \tilde{\mathcal{C}}$. Αν υπάρχει περιοχή U του z_0 στην οποία ο περιορισμός της ακολουθίας $\{f^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι κανονική οικογένεια, τότε λέμε ότι το $z_0 \in F_f$ δηλαδή ανήκει στο σύνολο Ευστάθειας της f . Διαφορετικά, αν δεν υπάρχει τέτοια περιοχή U του z_0 , τότε λέμε ότι το $z_0 \in J_f$ δηλαδή ανήκει στο σύνολο Αστάθειας της f . ▲

Το σύνολο J_f είναι εξ ορισμού κλειστό σύνολο, ενώ το συμπλήρωμά του $F_f = \tilde{\mathcal{C}} \setminus J_f$ ανοικτό. Από γεωμετρική άποψη το J_f είναι γενικά ένα σύνολο μορφοκλασματικής δομής (fractal) αν και υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις όπου το J_f είναι λείο, όπως πχ της $f(z) = z^2$ (το J_f είναι ο μοναδιαίος κύκλος). Στο σύνολο Ευστάθειας ανήκουν τα σταθερά σημεία τύπου ελκυστή, υπέρ-ελκυστή και Siegel, ενώ στο σύνολο Αστάθειας τα απωθητικά, τα παραβολικά και τα τύπου Cremer. Ένα σημαντικό θεώρημα που καθορίζει το σύνολο αστάθειας και το οποίο χρησιμοποιείται στην διατριβή είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα Το σύνολο αστάθειας για κάθε ρητή συνάρτηση βαθμού ≥ 2 είναι ίσο με την κλειστή θήκη του συνόλου όλων των απωθητικών περιοδικών κύκλων της. ■

Με άλλα λόγια το σύνολο των απωθητικών περιοδικών κύκλων είναι πυκνό υποσύνολο του συνόλου αστάθειας J_f (Για απόδειξη βλ. [3] σελ 11-1).

³ Προς τιμήν των Γάλλων μαθηματικών Pierre Fatou (1878-1929) και Gaston Julia (1893-1978) για την συνεισφορά τους στην θεμελίωση της Μιγαδικής Δυναμικής

Τα είδη των Ευσταθών Περιοχών, Δυναμικών Συστημάτων Μιγαδικών Πολυωνύμων

Στα δυναμικά συστήματα μιγαδικών πολυωνύμων διακρίνονται τέσσερα είδη Ευσταθών περιοχών:

- i) Οι περιοχές έλξης ελκυστών
- ii) Οι περιοχές έλξης υπέρ-ελκυστών
- iii) Οι (περιστροφικές) περιοχές ευστάθειας των σημείων Siegel (Siegel disk) και
- iv) Οι περιοχές ευστάθειας ή έλξης των παραβολικών σταθερών σημείων.

Σε κάθε ελκυστή ή υπέρ-ελκυστή z_k αντιστοιχεί η *έλκτική περιοχή* του,

$W_{z_k} = \{z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k\}$ (basin of attraction) καθώς και η *άμεση έλκτική περιοχή* του $\hat{W}_{z_k}$ η οποία ορίζεται ως η συνεκτική συνιστώσα της W_{z_k} η οποία περιέχει το z_k . Ισχύει ότι

$W_{z_k} = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(\hat{W}_{z_k})$. Σε κάθε παραβολικό σταθερό σημείο z_k αντιστοιχεί η *παραβολική έλκτική*

περιοχή του $P_{z_k} = \{z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k\}$ (parabolic basin of attraction) καθώς και η *άμεση παραβολική έλκτική περιοχή* του, $\hat{P}_{z_k}$ η οποία ορίζεται ως η συνεκτική συνιστώσα της P_{z_k} η οποία

περιέχει το z_k στην κλειστή της θήκη. Ισχύει ότι $P_{z_k} = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(\hat{P}_{z_k})$. Σε κάθε Siegel σταθερό ση-

μείο αντιστοιχεί μία μέγιστη περιοχή του, Sd_{z_k} (Siegel disk) στην οποία το δυναμικό σύστημα

είναι συζυγές με την άρρητη γραμμική περιστροφή $r_t(z) = e^{2\pi i t} z$, $t \in Br$. Η συνιστώσα ευστά-

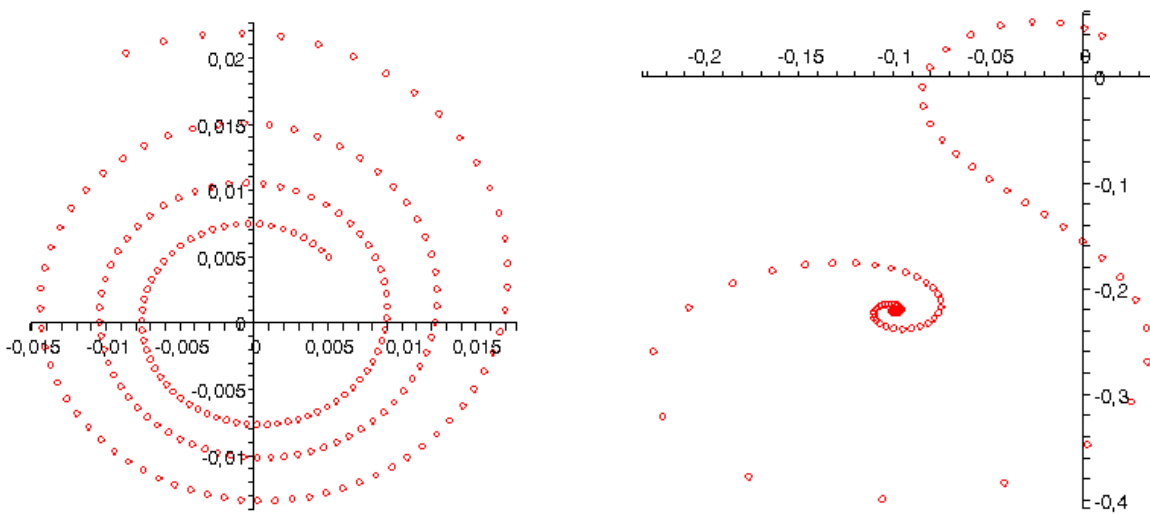
θειας του είναι $\bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(Sd_{z_k})$.

1.2.5. Παραδείγματα τροχιών κοντά σε σταθερά σημεία

Στην ενότητα αυτή παρατίθενται χαρακτηριστικά παραδείγματα τροχιών σημείων τα οποία βρίσκονται κοντά σε σταθερά σημεία. Οι τροχιές έχουν παραχθεί με το MAPLE. Για μία πλήρη θεωρητική προσέγγιση και τεκμηρίωση, ο αναγνώστης παραπέμπεται ενδεικτικά στα [3], [4], [5]

A. Τροχιά σημείου κοντά σε Απωθητικό σταθερό σημείο

Στην εικόνα 2 αριστερά, φαίνεται η τροχιά του σημείου $z = 0.005 + 0.005i$ με το πολυώνυμο $f(z) = (1.0 + 0.1i)z + z^2$. Το σημείο υφίσταται απώθηση από το (απωθητικού τύπου) σταθερό σημείο $z_k = 0$ του πολυωνύμου ενώ ταυτόχρονα έλκεται από το ∞ το οποίο είναι ελκυστής του πολυωνύμου. Δεξιά φαίνεται η τροχιά του $z = 0.01 + 0.04i$, μέσω του πολυωνύμου $f(z) = (1.1 + 0.2)z + z^2$, το οποίο επίσης απωθείται από το $z_k = 0$ ενώ ταυτόχρονα έλκεται από τον ελκυστή $-0.1 - 0.2i$ του πολυωνύμου.

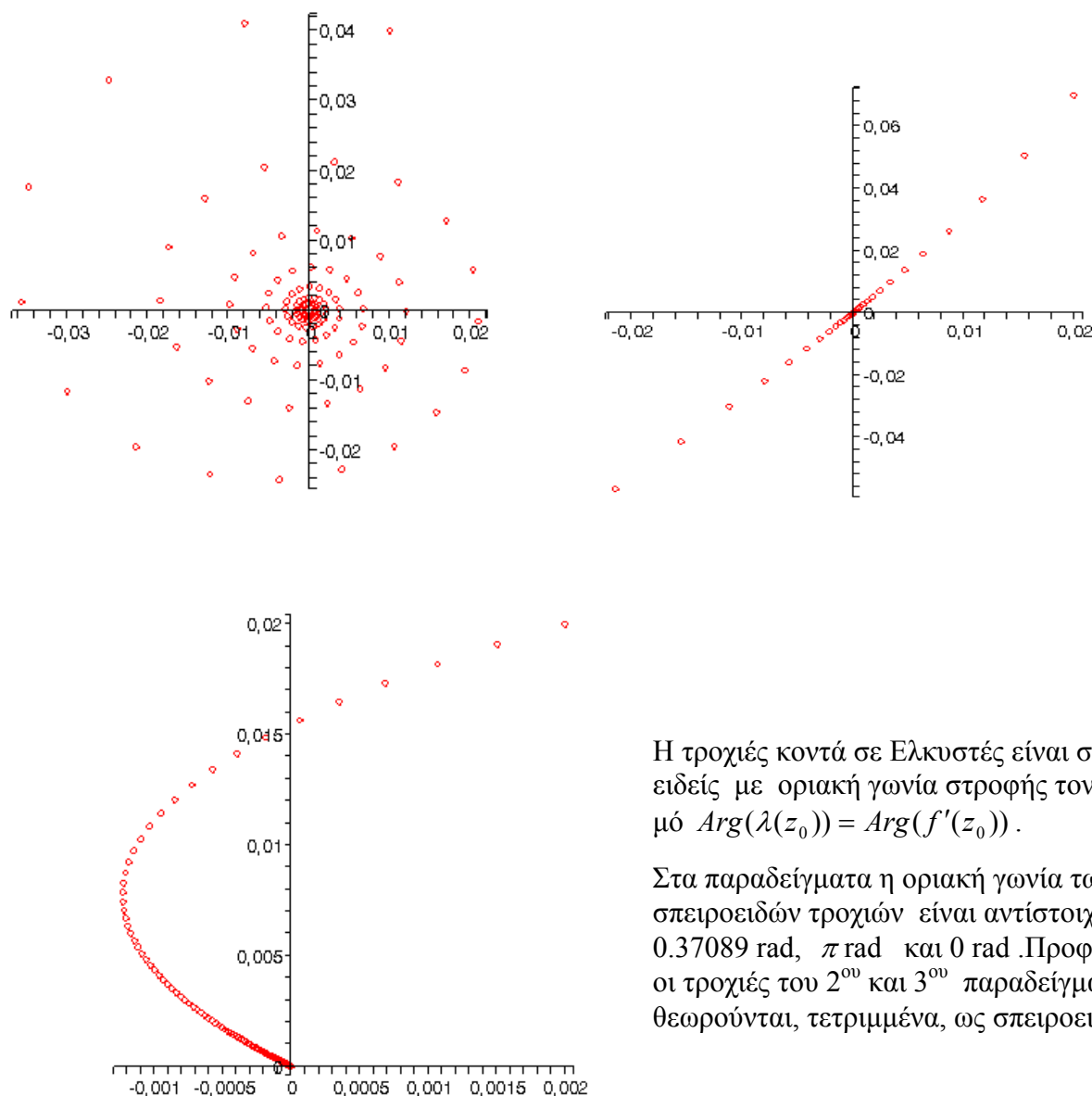


Εικόνα 2 Τροχιές κοντά στο απωθητικό σταθερό σημείο 0.

Από τα παραδείγματα αυτά προκύπτει ότι, όταν σε ένα σημείο ασκείται έλξη από κάποιο σταθερό σημείο, ταυτόχρονα ασκείται και απώθηση από κάποιο άλλο σταθερό σημείο, δηλαδή οι αλληλεπιδράσεις στα Μιγαδικά Δυναμικά Συστήματα βρίσκονται πάντοτε σε κατάσταση ισορροπίας.

Β. Τροχιά σημείου κοντά σε Ελκυστή

Στην εικόνα 3 απεικονίζονται τρεις τροχιές, κοντά στον ελκυστή $z_k = 0$. Αριστερά απεικονίζεται ή ελκτική τροχιά του σημείου $z = 0.01 + 0.04i$ μέσω του πολυωνύμου $f(z) = (0.9 + 0.35i)z + z^2$, δεξιά η ελκτική τροχιά του $z = 0.02 + 0.07i$ με το πολυώνυμο $f(z) = -0.85z + z^2$ και κάτω η ελκτική τροχιά του $z = 0.002 + 0.02i$ με το πολυώνυμο $f(z) = 0.95z + z^2$.



Η τροχιές κοντά σε Ελκυστές είναι σπειροειδείς με οριακή γωνία στροφής τον αριθμό $Arg(\lambda(z_0)) = Arg(f'(z_0))$.

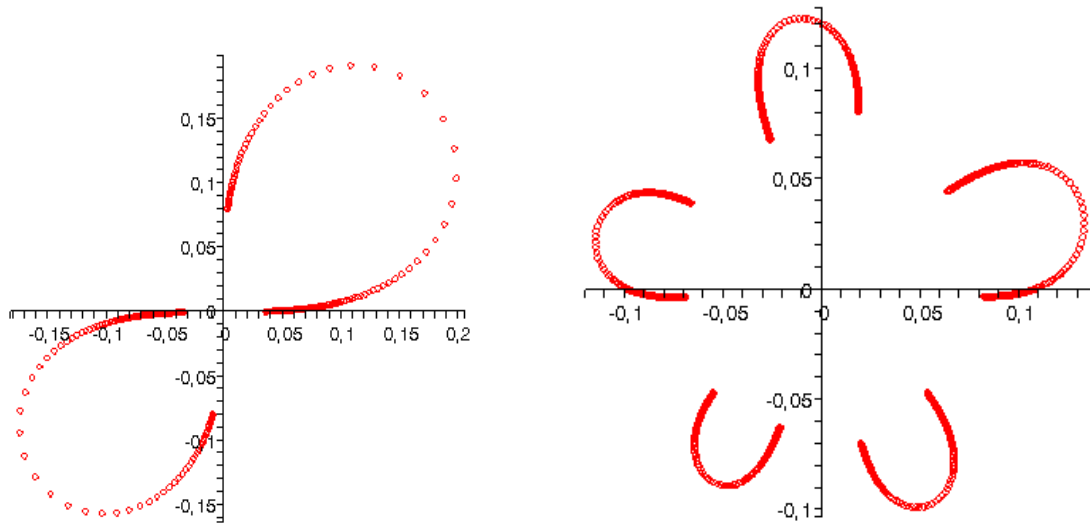
Στα παραδείγματα η οριακή γωνία των σπειροειδών τροχιών είναι αντίστοιχα 0.37089 rad , $\pi \text{ rad}$ και 0 rad . Προφανώς οι τροχιές του 2^{ου} και 3^{ου} παραδείγματος θεωρούνται, τετριμμένα, ως σπειροειδείς.

Εικόνα 3 Τροχιές κοντά στον ελκυστή 0

Γ. Τροχιά σημείου κοντά σε Παραβολικό σταθερό σημείο

Στην εικόνα 4 απεικονίζονται δυο τροχιές, κοντά στο παραβολικό σταθερό σημείο $z_k = 0$. Αριστερά απεικονίζεται η παραβολική τροχιά του σημείου $z = 0.003 + 0.08i$ (τα 500 πρώτα σημεία της) μέσω του πολυωνύμου $f(z) = e^{\pi i} z + z^2$ και δεξιά, η παραβολική τροχιά του σημείου

$z = 0.02 - 0.07i$ με το πολυώνυμο $f(z) = e^{\frac{2\pi i}{5}} z + 2z^2$ (τα 1000 πρώτα σημεία της).



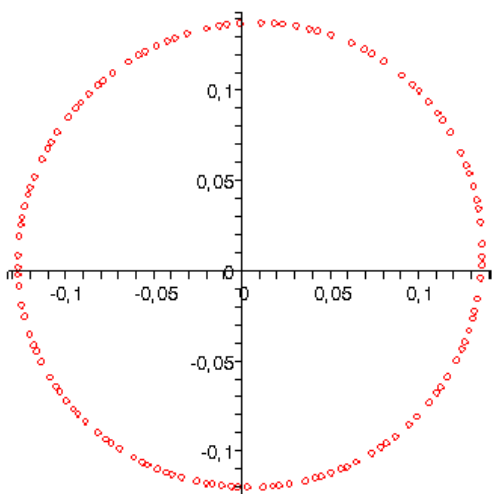
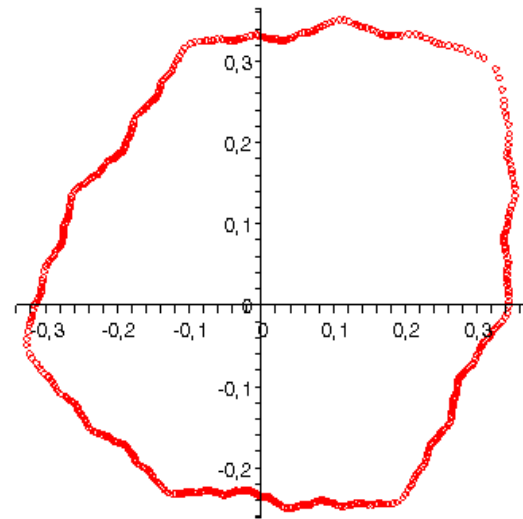
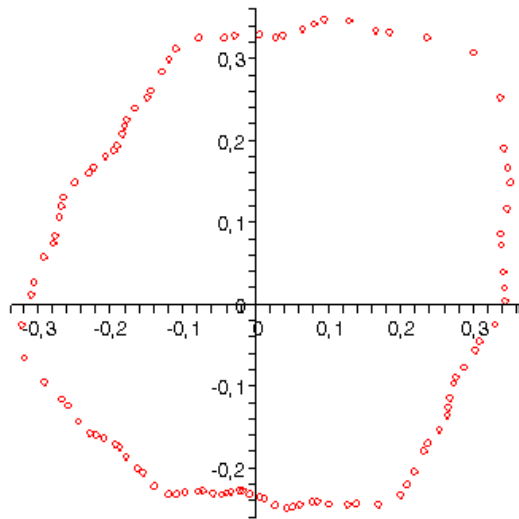
Εικόνα 4 Παραβολικές τροχιές

Χαρακτηριστικό των παραβολικών τροχιών είναι ότι το αρχικό σημείο υφίσταται αρχικά ένα πεπερασμένο αριθμό απωθήσεων από το παραβολικό σταθερό σημείο $z_k = 0$ και στη συνέχεια έλκεται από αυτό. Επίσης η τροχιά αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό κλάδων που έχουν τη διάταξη πετάλων λουλουδιού.

Δ. Τροχιά σημείου κοντά σε Siegel σταθερό σημείο

Στα εικόνα 5 απεικονίζεται η τροχιά του σημείου $z = 0.35 + 0.15i$, σε περιοχή Siegel, κάτω από την $f(z) = e^{\pi i(\sqrt{5}-1)}z + 1.1z^2$ (το 0 είναι σταθερό σημείο τύπου Siegel).

Αριστερά, έχουν αποτυπωθεί τα 100 πρώτα σημεία της τροχιάς, ενώ δεξιά τα 600 πρώτα σημεία της τροχιάς του ίδιου σημείου. Τα δύο σχήματα επιβεβαιώνουν εποπτικά το γεγονός που αποδεικνύεται στην θεωρία, ότι οι τροχιές σε περιοχές Siegel είναι *πυκνά σύνολα*.

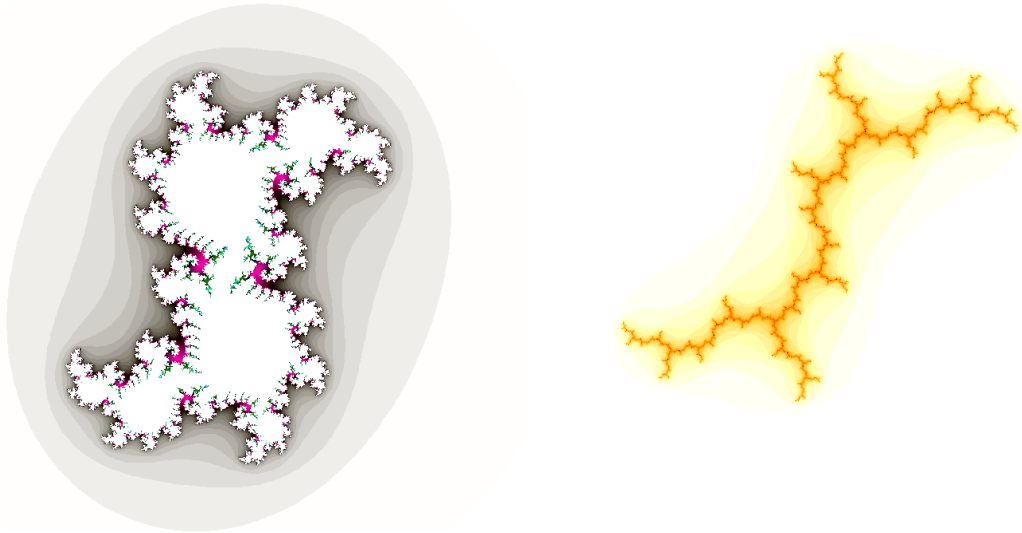


Στο σχήμα αριστερά απεικονίζονται τα 120 πρώτα σημεία της τροχιάς του σημείου $z = 0.1 + 0.1i$ κάτω από την ίδια συνάρτηση. Σημεία πολύ κοντά στο σημείο Siegel (το $z_k = 0$) έχουν σχεδόν κυκλικές τροχιές.

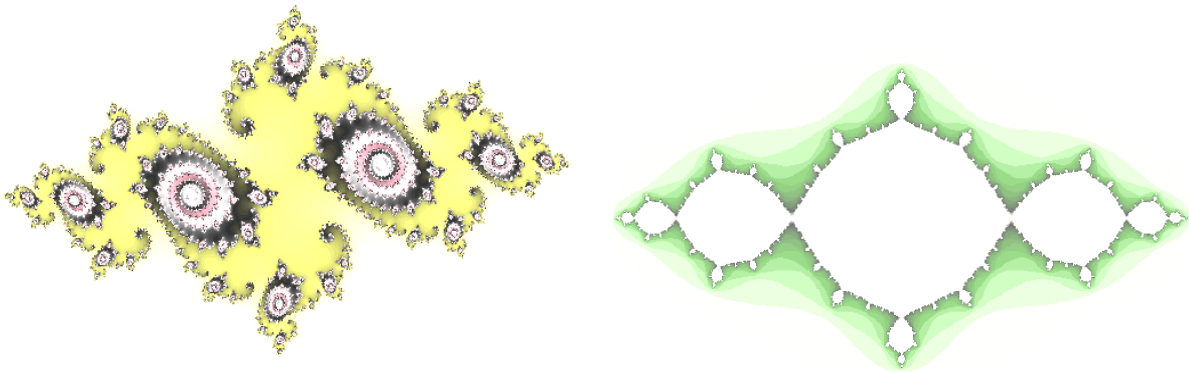
Εικόνα 5 Τροχιές Siegel

1.2.6 Παραδείγματα Συνόλων Αστάθειας

Στα σχήματα που ακολουθούν, απεικονίζονται ενδεικτικά σύνολα Julia πολωνύμων $2^{\text{ου}}$ βαθμού. Η σχεδίασή τους έγινε με το λογισμικό XaoS v. 3.1. Είναι εμφανής η μορφοκλασματική δομή των συνόλων αυτών.



Εικόνα 6 Τα σύνολα αστάθειας των πολωνύμων $z^2 + 0.35 + 0.35i$ (αριστερά) και $z^2 + i$ (δεξιά)



Εικόνα 7 Τα σύνολα αστάθειας των πολωνύμων $z^2 - 0.75 + 0.15i$ και $z^2 - 1$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΩΝ ΤΟΜΩΝ

2.1 ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ - ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

2.1.1 Εισαγωγικά

Στην ενότητα αυτή εισάγονται οι έννοιες της *σχετικής τροχιάς* και της *δυναμικής αλληλεπίδρασης* στο μιγαδικό επίπεδο οι οποίες εκφράζουν μια διαφορετική προσέγγιση-αντίληψη στην τοπική μελέτη ενός Μιγαδικού Δυναμικού Συστήματος.

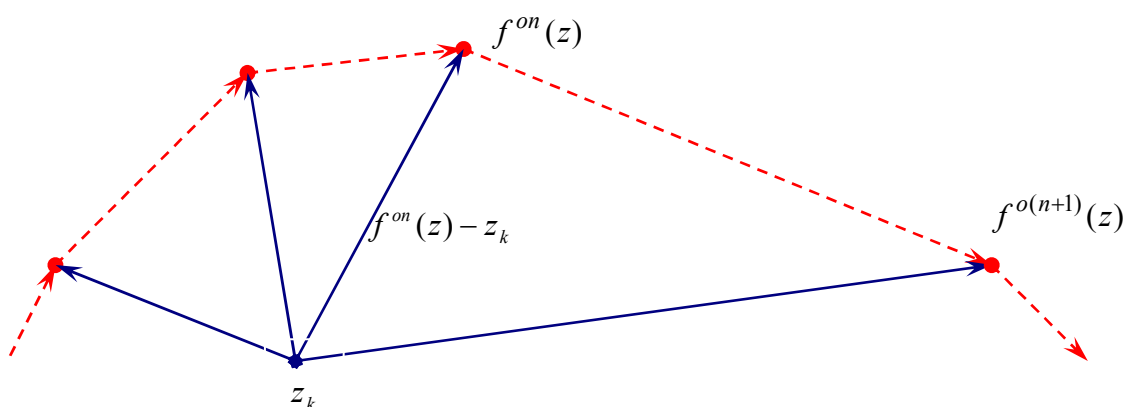
Η έννοια της *σχετικής τροχιάς* η οποία προκύπτει από την ‘παρατήρηση’ των τροχιών του δυναμικού συστήματος από κάποιο σταθερό σημείο, παρέχει σημαντική πληροφορία για την κατάσταση του δυναμικού συστήματος κοντά σε αυτό και οδηγεί φυσιολογικά στην έννοια της *δυναμικής αλληλεπίδρασης*. Αυτή αποτελεί την κεντρική έννοια πάνω στην οποία δομείται και αναπτύσσεται η *Θεωρία των Μοναδιαίων Τομών*.

Η έννοια της δυναμικής αλληλεπίδρασης αποτυπώνει το γεγονός ή την αντίληψη, ότι η συνάρτηση f του δυναμικού συστήματος δημιουργεί *συνθήκες πεδίου* στο μιγαδικό επίπεδο ή στη σφαίρα του Riemann με αποτέλεσμα δύο σημεία του μιγαδικού επιπέδου υπό την επίδραση της f , σε κάθε επανάληψη να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους *ελκτικά, απωθητικά ή ουδέτερα*.

Οι νέες έννοιες οι οποίες εισάγονται και αναλύονται στο κεφάλαιο αυτό είναι: *σχετική τροχιά*, *δυναμική αλληλεπίδραση*, *δυναμικές συναρτήσεις σταθερού σημείου* και *μοναδιαίες τομές μιγαδικού δυναμικού συστήματος*.

2.1.2 Οι έννοιες της Σχετικής Τροχιάς και της Δυναμικής αλληλεπίδρασης

Θεωρούμε το μιγαδικό δυναμικό σύστημα $(\tilde{\mathcal{C}}, f, \delta)$ και $z_k \in X_f$ ένα σταθερό σημείο του. Το ερώτημα που τίθεται αφορά την *οπτική* των τροχιών από το z_k , συγκεκριμένα: Πως αντιλαμβάνεται τις τροχιές $(f^{on}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ $z \in \mathcal{C}$, ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο σταθερό σημείο z_k ;



Εικόνα 8 Σχετική τροχιά ως προς σταθερό σημείο.

Είναι προφανές ότι ο παρατηρητής από το z_k (ιδιαίτερα αν $z_k \neq 0$), αντιλαμβάνεται την *σχετική τροχιά* $(f^{on}(z) - z_k)_{n \in \mathbb{N}}$ και όχι την (απόλυτη) $(f^{on}(z))_{n \in \mathbb{N}}$. Δίνεται ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 1: Έστω f αναλυτική μιγαδική συνάρτηση, $(f^{(n)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$, η τροχιά ενός $z \in \mathbb{C}$ και $z_k \in X_f$ ένα σταθερό σημείο του. Ως **σχετική τροχιά** του $z \in \mathbb{C}$ ως προς το z_k ορίζεται η ακολουθία $(f^{(n)}(z) - z_k)_{n \in \mathbb{N}}$ των διανυσμάτων θέσης της τροχιάς από το z_k $z_0 \in \mathbb{C}$ ▲

Από τον ορισμό είναι φανερό, ότι σε κάθε απόλυτη τροχιά αντιστοιχεί ένα πλήθος $\text{card}(X_f)$ σχετικών τροχιών, δηλαδή όσα και τα σταθερά του σημεία. Η έννοια της **σχετικής τροχιάς**, όπως θα φανεί στη συνέχεια, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια της **δυναμικής αλληλεπίδρασης** ενός σταθερού σημείου $z_k \in X_f$ με τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου. Η δυναμική αλληλεπίδραση στη Μιγαδική Δυναμική μπορεί να λάβει τρεις διαφορετικές μορφές: **έλξη**, **απόθηση**, και **ουδέτερη δράση ή περιστροφή**. Ο επόμενος ορισμός αποσαφηνίζει την έννοια αυτή.

Ορισμός 2: Έστω f αναλυτική μιγαδική συνάρτηση, $z_k \in X_f$ ένα σταθερό σημείο του και $z \in \mathbb{C}$. Θα λέμε ότι το $z_k \in X_f$ **ασκεί στο σημείο z , στην n -επανάληψη $n = 1, 2, \dots$**

- **έλξη** αν $|f^{(n)}(z) - z_k| < |z - z_k|$,
- **απόθηση** αν $|f^{(n)}(z) - z_k| > |z - z_k|$ και
- **ουδέτερη δράση ή περιστροφή** αν $|f^{(n)}(z) - z_k| = |z - z_k|$ ▲

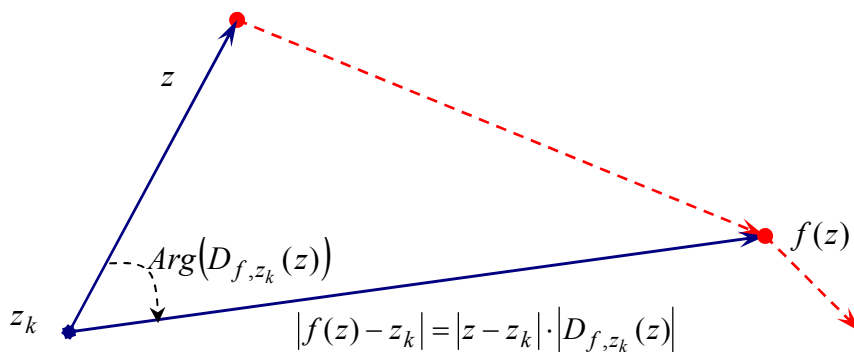
Παρατηρούμε τώρα ότι το διάνυσμα θέσης $f(z) - z_k$, μέσω του θεωρήματος του Taylor εκφράζεται ως

$$f(z) - z_k = (z - z_k) \underbrace{\left(f'(z_k) + \frac{1}{2!} f''(z_k)(z - z_k) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_k)(z - z_k)^{n-1} + \dots \right)}_{D_{f,z_k}(z)} = (z - z_k) \cdot D_{f,z_k}(z)$$

όπου συμβολίσαμε με $D_{f,z_k}(z)$ τη μιγαδική συνάρτηση

$$D_{f,z_k}(z) = f'(z_k) + \frac{1}{2!} f''(z_k)(z - z_k) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_k)(z - z_k)^{n-1} + \dots = \begin{cases} \frac{f(z) - z_k}{z - z_k}, & \text{αν } z \neq z_k \\ f'(z_k), & \text{αν } z = z_k \end{cases}$$

και την οποία θα ονομάσουμε **δυναμική συνάρτηση I^n τάξης** του σταθερού σημείου z_k . Επομένως

$$f(z) - z_k = (z - z_k) D_{f,z_k}(z) \quad (1)$$


Εικόνα 9 Η D_{f,z_k} σε κάθε επανάληψη συμβάλλει πολλαπλασιαστικά στη διαμόρφωση της σχετικής τροχιάς

Γενικεύοντας, οι συναρτήσεις $D_{f^{on}, z_k}(z) = \begin{cases} \frac{f^{on}(z) - z_k}{z - z_k}, & z \neq z_k \\ (f'(z_k))^n, & z = z_k \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$ είναι οι **δυναμικές**

συναρτήσεις n -τάξης, του $z_k \in X_f$ επομένως η (1) γίνεται

$$f^{on}(z) - z_k = (z - z_k)D_{f^{on}, z_k}(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Από τον ορισμό της ακολουθίας των δυναμικών συναρτήσεων $(D_{f^{on}, z_k})_{n \in \mathbb{N}}$ του σταθερού σημείου z_k και σε συνδυασμό με τον Ορισμό 2, προκύπτει ότι η δυναμική αλληλεπίδραση σε ένα μιγαδικό δυναμικό σύστημα, αναφορικά με ένα σταθερό σημείο $z_k \in X_f$ εκφράζεται μέσω της ακολουθίας $(D_{f^{on}, z_k})_{n \in \mathbb{N}}$ των δυναμικών συναρτήσεων του. Σε κάθε σημείο z του μιγαδικού επιπέδου, η τιμή της $D_{f^{on}, z_k}(z)$ μας παρέχει πληροφορία για το είδος και το μέτρο της δυναμικής αλληλεπίδρασης, του σταθερού σημείου z_k με το σημείο z , στην n -επανάληψη. Ειδικότερα, το σταθερό σημείο z_k ασκεί στο σημείο z , **έλξη** στην n -επανάληψη $n = 1, 2, \dots$, αν

$$|D_{f^{on}, z_k}(z)| < 1, \text{ **απόθηση** αν } |D_{f^{on}, z_k}(z)| > 1 \text{ και } \text{**ουδέτερη δράση ή περιστροφή**, αν } |D_{f^{on}, z_k}(z)| = 1.$$

Επομένως η μελέτη της σχετικής τροχιάς $(f^{on}(z) - z_k)_{n \geq 0}$ ως προς ένα σταθερό σημείο z_k της συνάρτησης f ανάγεται ουσιαστικά στην μελέτη της ακολουθίας των δυναμικών συναρτήσεων $(D_{f^{on}, z_k})_{n \in \mathbb{N}}$ του z_k .

Παράδειγμα

Έστω το Μιγαδικό Δυναμικό σύστημα του πολυνύμου $f(z) = -0.5z^3 + 2.7z^2 - 3.6z + 2.4$. Το πολυνύμο αυτό έχει δύο ελκυστές, τους $z_1 = 1$, $z_2 = 2.4$ και ένα απωθητικό σταθερό σημείο το $z_3 = 2$. Οι αντίστοιχες δυναμικές συναρτήσεις 1^{ης} τάξης $D_{f, z_1}, D_{f, z_2}, D_{f, z_3}$ των σταθερών του σημείων καθώς και το είδος των δυναμικών αλληλεπιδράσεων των σημείων $w_1 = 1.2 + 0.3i$ και $w_2 = 1.2 + 0.66867i$ με τα σταθερά σημεία z_1, z_2 και z_3 είναι:

$$\text{Δυναμικές συναρτήσεις: } D_{f, z_1}(z) = \frac{f(z) - z_1}{z - z_1} = -0.5z^2 + 2.2z - 1.4$$

$$D_{f, z_2}(z) = \frac{f(z) - z_2}{z - z_2} = -0.5z^2 + 1.5z \quad D_{f, z_3}(z) = \frac{f(z) - z_3}{z - z_3} = -0.5z^2 + 1.7z - 0.2$$

Αλληλεπιδράσεις του σημείου $w_1 = 1.2 + 0.3i$ με τα σταθερά σημεία. Επειδή

$$|D_{f, z_1}(w_1)| = |0.565 + 0.3i| = 0.6397 < 1 \text{ ασκείται } \text{**έλξη** στο } w_1 \text{ από τον ελκυστή } z_1$$

$$|D_{f, z_2}(w_1)| = |1.125 + 0.09i| = 1.1285 > 1 \text{ ασκείται } \text{**απόθηση** στο } w_1 \text{ από τον ελκυστή } z_2$$

$$|D_{f, z_3}(w_1)| = |1.165 + 0.15i| = 1.1746 > 1 \text{ ασκείται } \text{**απόθηση** στο } w_1 \text{ από το απωθητικό } z_3$$

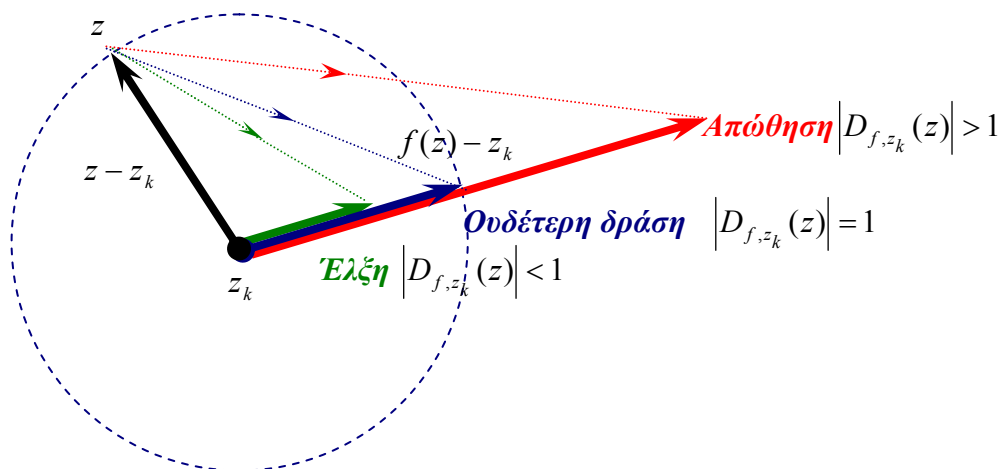
Αλληλεπιδράσεις του σημείου $w_2 = 1.2 + 0.66867i$ με τα σταθερά σημεία. Επειδή

$$|D_{f,z_1}(w_2)| = |0.74356 + 0.668673i| = 1.0000, \text{ ασκείται } \textbf{ουδέτερη δράση} \text{ από τον ελκυστή } z_1$$

$$|D_{f,z_2}(w_2)| = |1.30356 + 0.2006i| = 1.3189 > 1 \text{ ασκείται } \textbf{απόθηση} \text{ από τον ελκυστή } z_2$$

$$|D_{f,z_3}(w_2)| = |1.34356 + 0.3343i| = 1.3845 > 1 \text{ ασκείται } \textbf{απόθηση} \text{ από το απωθητικό } z_3.$$

Στην *Εικόνα 10* φαίνονται οι τρεις δυνατές καταστάσεις του διανύσματος $f(z) - z_k$ σε κάθε είδος δυναμικής αλληλεπίδρασης (απόθηση, έλξη και ουδέτερη δράση) του σημείου z με το σταθερό σημείο z_k .



Εικόνα 10 Τα τρία είδη δυναμικής αλληλεπίδρασης του σταθερού σημείου z_k με σημείο z (Το z απωθείται, έλκεται ή περιστρέφεται από το z_k)

Το ακόλουθο θεώρημα αναφέρει ότι στα Μιγαδικά Δυναμικά Συστήματα η δυναμική αλληλεπίδραση **διατηρεί την μνήμη της** υπό την έννοια ότι η δυναμική αλληλεπίδραση στο παρόν διαμορφώνεται από όλες τις παρελθούσες τιμές της και μάλιστα πολλαπλασιαστικά.

Θεώρημα 1

Έστω f η αναλυτική συνάρτηση ενός Μιγαδικού Δυναμικού Συστήματος, $z \in \mathbb{C}$ και $z_k \in X_f$ ένα σταθερό του σημείο και $(f^{on}(z) - z_k)_{n \in \mathbb{N}}$ η σχετική τροχιά του, τότε

$$1. \quad f^{on}(z) - z_k = (z - z_k) \prod_{m=0}^{n-1} D_{f,z_k}(f^{om}(z))$$

$$2. \quad D_{f^{on},z_k}(z) = \prod_{m=0}^{n-1} D_{f,z_k}(f^{om}(z))$$

Απόδειξη

1. Στη σχέση $f(z) - z_k = D_{f,z_k}(z)(z - z_k)$ θέτουμε όπου z το $f^{o(n-1)}(z)$ οπότε

$$f^{on}(z) - z_k = (f^{o(n-1)}(z) - z_k) \cdot D_{f,z_k}(f^{o(n-1)}(z)) \quad (1)$$

Από την (1) έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
f^{on}(z) - z_k &= (f^{o(n-1)}(z) - z_k) \cdot D_{f,z_k}(f^{o(n-1)}(z)) = \\
&= (f^{o(n-2)}(z) - z_k) \cdot D_{f,z_k}(f^{o(n-2)}(z)) \cdot D_{f,z_k}(f^{o(n-1)}(z)) = \dots = \\
&= (z - z_k) \cdot D_{f,z_k}(z) \cdots D_{f,z_k}(f^{o(n-2)}(z)) \cdot D_{f,z_k}(f^{o(n-1)}(z)) = (z - z_k) \prod_{m=0}^{n-1} D_{f,z_k}(f^{om}(z))
\end{aligned}$$

δηλαδή αποδείχτηκε ότι

$$f^{on}(z) - z_k = (z - z_k) \prod_{m=0}^{n-1} D_{f,z_k}(f^{om}(z)) \quad (2)$$

2. Αν στη σχέση $f(z) - z_k = D_{f,z_k}(z)(z - z_k)$ θέσουμε αντί για f η f^{on} προκύπτει

$$f^{on}(z) - z_k = (z - z_k) \cdot D_{f^{on},z_k}(z) \quad (3)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (2) και (3) προκύπτει

$$D_{f^{on},z_k}(z) = \prod_{m=0}^{n-1} D_{f,z_k}(f^{om}(z)) \quad \blacksquare$$

Θεώρημα 2

Έστω η αναλυτική συνάρτηση f και D_{f,z_k} η δυναμική συνάρτηση του $z_k \in X_f, k = 1, 2, \dots, n$ Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Το σύνολο των ριζών $R_{D_{f,z_k}}$ της D_{f,z_k} είναι οι προεικόνες του z_k

$$R_{D_{f,z_k}} = \begin{cases} f^{-1}(z_k) \setminus \{z_k\} & \text{αν } z_k \in X_f \setminus \Omega_f \\ f^{-1}(z_k) & \text{αν } z_k \in X_f \cap \Omega_f \neq \emptyset \end{cases}$$

2. Το σύνολο $\Omega_{D_{f,z_k}}$ των κρίσιμων σημείων του $D_{f,z_k}(z)$ είναι

$$\Omega_{D_{f,z_k}} = \{z \in \mathbb{C} / f'(z) = D_{f,z_k}(z), z \neq z_k\}$$

Επίσης ισχύει ότι $z_k \in X_f \cap \Omega_{D_{f,z_k}} \Leftrightarrow f''(z_k) = 0$

3. Είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{f^{on},z_k}(z_k) = \begin{cases} 0 & \text{αν } z_k \text{ ελκυστής} \\ \infty & \text{αν } z_k \text{ απωθητικό σταθ. σημείο} \end{cases}$

4. Αν $z_m, z_k \in X_f$ με $z_m \neq z_k$ σταθερά σημεία της f τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$D_{f^{on},z_k}(z_m) = D_{f^{on},z_m}(z_k) = 1$$

Απόδειξη

1. Αν $z_k \in X_f \setminus \Omega_f$ τότε

$$D_{f,z_k}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(z) - z_k}{z - z_k} = 0 \Leftrightarrow f(z) = z_k, z \neq z_k \Leftrightarrow z \in f^{-1}(z_k) \setminus \{z_k\}$$

Αν $z_k \in X_f \cap \Omega_f$ τότε $f'(z_k) = 0$ κατά συνέπεια

$$D_{f,z_k}(z) = 0 \Leftrightarrow \{z = z_k, \text{ ή } (f(z) = z_k, z \neq z_k)\} \text{ δηλαδή } z \in f^{-1}(z_k)$$

$$2. \text{ Επειδή } \frac{d}{dz} D_{f,z_k}(z) = \begin{cases} \frac{f'(z)(z-z_k) - (f(z)-z_k)}{(z-z_k)^2} & \text{αν } z \neq z_k \\ \frac{f''(z_k)}{2} & \text{αν } z = z_k \end{cases}$$

τα κρίσιμα σημεία της $D_{f,z_k}(z)$ είναι $\Omega_{D_{f,z_k}} = \left\{ z \in \mathbb{C} / \frac{d}{dz} D_{f,z_k}(z) = 0 \right\} =$
 $= \{ z \in \mathbb{C} / f'(z)(z-z_k) - (f(z)-z_k) = 0, z \neq z_k \} = \{ z \in \mathbb{C} / f'(z) = D_{f,z_k}(z), z \neq z_k \}$
 Επίσης είναι φανερό ότι $z_k \in \Omega_{D_{f,z_k}} \Leftrightarrow f''(z_k) = 0$

$$3. \text{ Από τον κανόνα της αλυσίδας είναι } (f^{on}(z))' = f'(f^{o(n-1)}(z)) \cdots f'(f(z))f'(z).$$

Για $z = z_k \in X_f$ προκύπτει $(f^{on}(z_k))' = (f'(z_k))^n$ επομένως

$$D_{f^{on},z_k}(z) = \begin{cases} \frac{f^{on}(z)-z_k}{(z-z_k)}, & \text{αν } z \neq z_k \\ [f^{on}(z)]', & \text{αν } z = z_k \end{cases} = \begin{cases} \frac{f^{on}(z)-z_k}{(z-z_k)}, & \text{αν } z \neq z_k \\ [f'(z_k)]^n, & \text{αν } z = z_k \end{cases} \text{ κατά συνέπεια είναι}$$

$$D_{f^{on},z_k}(z_k) = [f'(z_k)]^n \text{ επομένως } \lim_{n \rightarrow \infty} D_{f^{on},z_k}(z_k) = \begin{cases} 0 & \text{αν } z_k \text{ ελκυστής} \\ \infty & \text{αν } z_k \text{ απωθητικό σταθ. σημείο} \end{cases}$$

$$4. \text{ Πράγματι, για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ είναι } D_{f^{on},z_k}(z_m) = \frac{f^{on}(z_m) - z_k}{z_m - z_k} = \frac{z_m - z_k}{z_m - z_k} = 1 \quad \blacksquare$$

2.2 ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.2.1 Ορισμός και αναγκαιότητα της έννοιας αυτής

Στην ενότητα αυτή γίνεται εισαγωγή και μελέτη της επιφάνειας μέτρου μιγαδικής συνάρτησης. Υπάρχουν δύο λόγοι για την μελέτη της έννοιας αυτής:

1. Από την έκφραση της σχετικής τροχιάς στο Θεώρημα 1,

$$f^{on}(z) - z_k = (z - z_k) \prod_{j=0}^{n-1} D_{f,z_k}(f^{oj}(z)) \text{ προκύπτει ότι το μέτρο } |D|_{f,z_k} \text{ της μιγαδικής συνάρ-}$$

τησης D_{f,z_k} επηρεάζει πολλαπλασιαστικά σε κάθε επανάληψη την απόσταση $|f^{on}(z) - z_k|$ και κατά συνέπεια διαμορφώνει την πορεία της σχετικής τροχιάς, όπως παρατηρείται από το $z_k \in X_f$.

2. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι, το γράφημα της $|D|_{f,z_k}$, ως πραγματική συνάρτηση 2 μεταβλητών, είναι μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$, της οποίας η μελέτη παρουσιάζει δυνητικά ενδιαφέρον αφού αποτελεί μία προβολή του γραφήματος της μιγαδικής D_{f,z_k} από τον χώρο $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^4$ στο χώρο $\mathbb{R}^3$

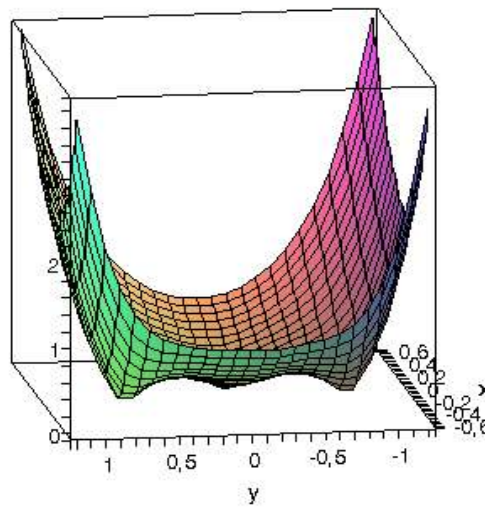
Ο ορισμός που ακολουθεί, αποσαφηνίζει την έννοια αυτή.

Ορισμός 3. Έστω μιγαδική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Ως **επιφάνεια μέτρου** της f ορίζεται η απεικόνιση $|f| : \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με $|f|(x, y) \stackrel{\text{ορ}}{=} |f(z)| = |f(x + yi)| = \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}$, όπου $z = x + iy$, $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + yi))$, $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + yi))$. ▲.

Είναι προφανές ότι το γράφημα των επιφανειών μέτρου ορίζει επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

Στην εικόνα 11 απεικονίζεται η επιφάνεια μέτρου του πολυωνύμου $f(z) = z^4 - z^3 - 0.9z$ η οποία σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχει τύπο:

$$|f|(x, y) = \sqrt{(x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x^3 + 3xy^2 - 0.9x)^2 + (4x^3y - 4xy^3 - 3x^2y + y^3 - 0.9y)^2}$$



Εικόνα 11 Επιφάνεια μέτρου μιγαδικού πολυωνύμου

2.2.2 Γενικές ιδιότητες επιφανειών μέτρου

Στην ενότητα αυτή, γίνεται μια αναφορά στις ιδιότητες και τα γενικά χαρακτηριστικά των επιφανειών μέτρου των μιγαδικών συναρτήσεων και στην επόμενη θα γίνει εξειδίκευση στην επιφάνεια μέτρου της Δυναμικής συνάρτησης $|D|_{f, z_k}$ η οποία και ενδιαφέρει. Οι επιφάνειες αυτές είναι προφανώς μη αρνητικές και συνεχείς.

Τα επόμενα δύο θεωρήματα αναφέρονται στον προσδιορισμό των ριζών, των ακρότατων και των σαγματικών σημείων της επιφάνειας μέτρου $|f|$.

Θεώρημα 3

Έστω αναλυτική μιγαδική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z = x + iy$ και $|f|(x, y) = |f(z)| = \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}$ η επιφάνεια μέτρου αυτής, τότε:

1. Το (x_0, y_0) είναι ρίζα της επιφάνειας μέτρου $|f|(x, y)$ αν και μόνον αν το $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι ρίζα του $f(z)$. Δηλαδή ισχύει $(x_0, y_0) \in R_{|f|} \Leftrightarrow x_0 + iy_0 \in R_f$.

2. Το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο⁴ σημείο της επιφάνειας μέτρου $|f|(x, y)$ αν και μόνον αν για το $z_0 = x_0 + iy_0$ ισχύει $f(z_0) = 0$ είτε $f'(z_0) = 0$ ή ισοδύναμα $z_0 \in R_f \cup \Omega_f$

Ειδικότερα:

Αν $z_0 \in R_f \setminus \Omega_f$ δηλ $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) \neq 0$ τότε δεν ορίζονται οι μερικές παράγωγοι, της $|f|(x, y)$ και αντίστροφα.

Αν $z_0 \in \Omega_f$ τότε οι μερικές της παράγωγοι της $|f|(x, y)$ μηδενίζονται και αντίστροφα.

Απόδειξη

1. Ισχύει

$$(x_0, y_0) \in R_{|f|} \Leftrightarrow$$

$$|f|(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{u(x_0, y_0)^2 + v(x_0, y_0)^2} = 0 \Leftrightarrow u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0 + iy_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0, y_0) \in R_f$$

2. Από τις αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακρότατου προκύπτει

$$\frac{\partial |f|(x, y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{u(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}}{\sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial |f|(x, y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{u(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + v(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}}{\sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$u(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (1a)$$

$$u(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + v(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (1b) \quad (1)$$

$$u(x, y) \neq 0 \quad \text{και} \quad v(x, y) \neq 0 \quad (1c)$$

Από την άλλη πλευρά είναι γνωστό από την Μιγαδική Ανάλυση ότι

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 : Το $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(z)$:

Από την (2) προκύπτει ότι

$$f'(z_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = 0 \text{ δηλαδή στα κρίσιμα}$$

σημεία $z_0 = x_0 + iy_0$ της $f(z)$ μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι, άρα ικανοποιούνται και οι αναγκαίες συνθήκες (1) για την ύπαρξη των ακρότατων στην επιφάνεια $|f|(x, y)$.

Περίπτωση 2 : Αναζήτηση κρίσιμων σημείων $z_0 = x_0 + iy_0$ που δεν είναι κρίσιμα σημεία της $f(z)$:

⁴ Κρίσιμα σημεία είναι οι ρίζες των μερικών παραγώγων είτε σημεία στα οποία δεν ορίζονται. Τα σημεία αυτά αποτελούν θέσεις πιθανών τοπικών-ολικών ακρότατων & σαγματικών σημείων της

Αν υπάρχει η $f'(z_0)$ και είναι $f'(z_0) \neq 0$ τότε από την (2) προκύπτει ότι μια τουλάχιστον εκ των μερικών παραγώγων είναι διάφορη του μηδενός. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{(x_0, y_0)} \neq 0$ (3)

Οι συνθήκες (1α), (1b) λόγω των σχέσεων (3) οδηγούν στο μηδενισμό των $u(x, y), v(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0) δηλαδή $u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow f(z_0) = 0 \Rightarrow z_0$ ρίζα του $f(z)$.

Από τους περιορισμούς (1c) προκύπτει ότι στις ρίζες του $f(z)$ δεν ορίζονται οι μερικές παράγωγοι της $|f|(x, y)$, κατά συνέπεια οι ρίζες του $f(z)$ αποτελούν κρίσιμα σημεία της $|f|(x, y)$ (δηλαδή είναι πιθανές θέσεις μη λείων ακρότατων της επιφάνειας) ■

Θεώρημα 4

Έστω αναλυτική μιγαδική συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z = x + iy$ και $|f|(x, y) = |f(z)| = \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}$ η επιφάνεια μέτρου αυτής. Αν (x_0, y_0) είναι ένα κρίσιμο σημείο της $|f|(x, y)$, με $z_0 = x_0 + iy_0$ τότε:

1. Αν $z_0 \in R_f$ δηλ αν $f(z_0) = 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι θέση του ολικού ελάχιστου μηδέν της $|f|(x, y)$.

Ειδικότερα αν: $z_0 \in R_f \setminus \Omega_f$ δηλαδή $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) \neq 0$, η $|f|(x, y)$ είναι μη λεία στο ολικό της ελάχιστο, ενώ αν $z_0 \in R_f \cap \Omega_f$ δηλαδή $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) = 0$ η $|f|(x, y)$ είναι λεία στο ολικό της ελάχιστο 0.

2. Αν $z_0 \in \Omega_f \setminus R_f$ δηλαδή $f'(z_0) = 0$ και $f(z_0) \neq 0$ δηλαδή είναι κρίσιμο σημείο αλλά όχι ρίζα της $f(z)$, τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της $|f|(x, y)$.

Απόδειξη

Έστω $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ αναλυτική συνάρτηση, $z_0 = x_0 + iy_0$ κρίσιμο σημείο αυτής και $|f|(x, y)$ η επιφάνεια μέτρου της, τότε $|f|^2(x, y) = u(x, y)^2 + v(x, y)^2$ (1)

1. Είναι προφανές ότι οι ρίζες είναι θέσεις ελάχιστου, δεδομένου ότι η επιφάνεια μέτρου εκ κατασκευής είναι μη αρνητική $|f|(x, y) \geq 0$ και μηδενίζεται στις ρίζες της $f(z)$.

Το γεγονός ότι στις ρίζες δεν ορίζονται οι μερικές παράγωγοι (βλ. προηγούμενο θεώρημα) καθιστά πιθανή την εμφάνιση μη λείου ολικού ελάχιστου σε αυτές.

2. Έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ με $g'(z_0) = 0$ και $f(z_0) \neq 0$

Από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ με παραγωγίσεις λαμβάνονται οι σχέσεις:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \text{ και } \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Έστω A και B οι τιμές αυτών υπολογιζόμενες στο σημείο (x_0, y_0) δηλαδή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{(x_0, y_0)} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\bigg|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\bigg|_{(x_0, y_0)} = A \text{ και}$$

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} = -\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = B \quad (2)$$

Από την (1) υπολογίζουμε τις 2^{ες} μερικές παραγώγους της $|f|(x, y)$ στο κρίσιμο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\text{Λαμβάνοντας υπόψη ότι } \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial \nu}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial \nu}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = 0$$

καταλήγουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 |f|}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{1}{|f|(x_0, y_0)} \left(u(x_0, y_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} + \nu(x_0, y_0) \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \right) \\ \frac{\partial^2 |f|}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{1}{|f|(x_0, y_0)} \left(u(x_0, y_0) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} + \nu(x_0, y_0) \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \right) \\ \frac{\partial^2 |f|}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{1}{|f|(x_0, y_0)} \left(u(x_0, y_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \nu(x_0, y_0) \frac{\partial^2 \nu}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \right) \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τις (2) τελικά γίνονται

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 |f|}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{1}{|f|(x_0, y_0)} (Au(x_0, y_0) - B\nu(x_0, y_0)) = \frac{1}{|f|_0} (Au_0 - B\nu_0) \\ \frac{\partial^2 |f|}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{1}{|f|(x_0, y_0)} (-Au(x_0, y_0) + B\nu(x_0, y_0)) = \frac{1}{|f|_0} (-Au_0 + B\nu_0) \\ \frac{\partial^2 |f|}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} &= \frac{1}{|f|(x_0, y_0)} (Bu(x_0, y_0) + A\nu(x_0, y_0)) = \frac{1}{|f|_0} (Au_0 + B\nu_0) \end{aligned}$$

Επειδή η διακρίνουσα ποσότητα

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{\partial^2 |f|}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \right) \left(\frac{\partial^2 |f|}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \right) - \left(\frac{\partial^2 |f|}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{|f|_0} \right)^2 \left[(Au_0 - B\nu_0)(-Au_0 + B\nu_0) - (Au_0 + B\nu_0)^2 \right] = -\left(\frac{1}{|f|_0} \right)^2 \left[(Au_0)^2 + (B\nu_0)^2 \right] < 0 \end{aligned}$$

είναι αρνητική από το γνωστό κριτήριο της 2^{ης} παραγώγου του Διαφορικού Λογισμού συνάγεται ότι στο κρίσιμο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$ η επιφάνεια έχει σαγματικό σημείο ■

2.2.3 Η επιφάνεια μέτρου Δυναμικής συνάρτησης σταθερού σημείου πολωνύμου

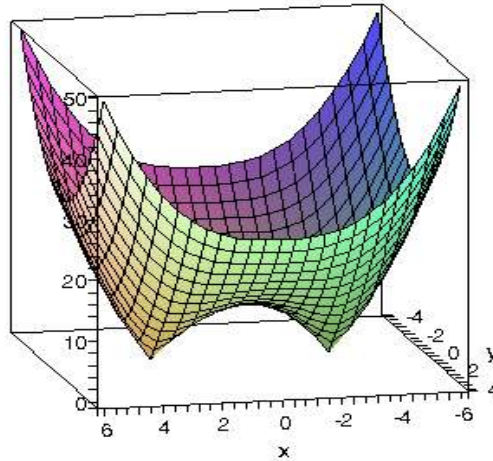
Στην ενότητα αυτή γίνεται εφαρμογή των προηγούμενων γενικών αποτελεσμάτων των επιφανειών μέτρου στην επιφάνεια μέτρου $|D|_{f, z_k}$ της δυναμικής συνάρτησης πολωνύμου, της οποίας

η γραφική παράσταση, όπως προαναφέρθηκε, είναι μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} |D|_{f, z_k} : \mathcal{C} \approx \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad |D|_{f, z_k}(z) \stackrel{\text{ορ}}{=} |D_{f, z_k}(z)| \text{ με } z = x + yi \text{ ή ισοδύναμα} \\ |D|_{f, z_k}(x, y) &= |D_{f, z_k}(x + yi)| \end{aligned}$$

Στην εικόνα 12 απεικονίζεται η επιφάνεια μέτρου της Δυναμικής συνάρτησης $D_{f,z_k}(z)$ του πολωνύμου $f(z) = z^3 - 9z$ στο $z_k = 0$ η οποία σε καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζεται

$$|D|_{f,z_k}(x,y) = \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 18x^2 + 18y^2 + 81}$$



Εικόνα 12 Επιφάνεια μέτρου της δυναμικής συνάρτησης πολυωνυμικού δυναμικού συστήματος.

Σύμβαση: Στη συνέχεια για λόγους απλότητας δεν θα γίνεται διάκριση μεταξύ του μιγαδικού $z = x + yi$ και του ζεύγους (x, y) πχ οι συμβολισμοί $|D|_{f,z_k}(z) \equiv |D|_{f,z_k}(x, y)$ θα θεωρούνται ταυτόσημοι.

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στις ιδιότητες της επιφάνειας μέτρου $|D|_{f,z_k}(z)$ πολωνύμου

Θεώρημα 5

Έστω πολυώνυμο $f, z_k \in X_f$ και $|D|_{f,z_k} : \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad |D|_{f,z_k}(z) \stackrel{op}{=} |D_{f,z_k}(z)|$ η επιφάνεια μέτρου της δυναμικής του συνάρτησης

$$D_{f,z_k}(z) = \frac{f(z) - z_k}{z - z_k} = f'(z_k) + \frac{1}{2!} f''(z_k)(z - z_k) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_k)(z - z_k)^{n-1}.$$

Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. **H** $|D|_{f,z_k}(z) \geq 0$ και συνεχής.

2. **Ρίζες:** Το σύνολο των ριζών $R_{|D|_{f,z_k}}$ της $|D|_{f,z_k}$ είναι οι προεικόνες του σταθερού σημείου

$$z_k R_{|D|_{f,z_k}} = R_{D_{f,z_k}} = \begin{cases} f^{-1}(z_k) \setminus \{z_k\} & \alpha \nu z_k \in X_f \setminus \Omega_f \\ f^{-1}(z_k) & \alpha \nu z_k \in X_f \cap \Omega_f \end{cases}$$

3. **Κρίσιμα σημεία:** Το σύνολο $\Omega_{|D|_{f,z_k}}$ των κρίσιμων σημείων του $|D|_{f,z_k}(z)$ είναι $\Omega_{|D|_{f,z_k}} = \Omega_{D_{f,z_k}} = \{z \in \mathbb{C} / f'(z) = D_{f,z_k}(z), z \neq z_k\}$
Επίσης το $z_k \in \Omega_{|D|_{f,z_k}}$ αν και μόνον αν $f''(z_k) = 0$
4. **Ακρότατα:** Αν το $z_0 \in R_{D_{f,z_k}} = \begin{cases} f^{-1}(z_k) \setminus \{z_k\} & \text{αν } z_k \in X_f \setminus \Omega_f \\ f^{-1}(z_k) & \text{αν } z_k \in X_f \cap \Omega_f \end{cases}$, τότε το z_0 είναι θέση του ολικού ελάχιστου μηδέν, της $|D|_{f,z_k}(z)$
Ειδικότερα αν $z_0 \in R_{D_{f,z_k}} \setminus \Omega_{D_{f,z_k}}$ τότε το z_0 είναι θέση του (μη λείου) ολικού ελάχιστου μηδέν, της $|D|_{f,z_k}(z)$
Αν $z_0 \in \Omega_{D_{f,z_k}} \setminus R_{D_{f,z_k}}$ τότε το z_0 είναι θέση σαγματικού σημείου.
5. Το $z_k \in X_f$ είναι θέση:
α) ολικού ελάχιστου, αν $z_k \in X_f \cap \Omega_f$ δηλαδή είναι υπέρ-ελκυστής
β) σαγματικού σημείου⁵ αν $z_k \in X_f \cap \Omega_{D_{f,z_k}} \setminus R_{D_{f,z_k}} \Leftrightarrow f''(z_k) = 0 \wedge f'(z_k) \neq 0$
6. Το όριο $\lim_{z \rightarrow \infty} |D|_{f,z_k}(z) = \infty$
7. Το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} |D|_{f^{on},z_k}(z_k) = \begin{cases} 0 & \text{αν } z_k \text{ ελκυστής} \\ \infty & \text{αν } z_k \text{ απωθητικό σταθερό σημείο.} \end{cases}$

Απόδειξη

1. Προφανής από τον ορισμό
2. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2/πρόταση 1 και του Θεωρήματος 3/πρόταση 1
3. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2/πρόταση 2
4. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.
5. Αν $z_k \in X_f \cap \Omega_f$ τότε $f'(z_k) = 0 \Rightarrow D_{f,z_k}(z_k) = 0$ δηλαδή είναι ρίζα της $|D|_{f,z_k}(z)$ επομένως από το Θεώρημα 4/πρόταση 1 προκύπτει ότι είναι θέση ολικού ελάχιστου.
Αν $z_k \in X_f \cap \Omega_{D_{f,z_k}} \setminus R_{D_{f,z_k}} \Leftrightarrow f''(z_k) = 0 \wedge f'(z_k) \neq 0$ τότε όπως προκύπτει από το Θεώρημα 4/πρόταση 2 είναι θέση σαγματικού σημείου.
6. Έχουμε ότι $\lim_{z \rightarrow \infty} |D|_{f,z_k}(z) =$
$$= \lim_{z \rightarrow \infty} |D_{f,z_k}(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| f'(z_k) + \frac{1}{2!} f''(z_k)(z - z_k) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_k)(z - z_k)^{n-1} \right| = \infty$$
7. Άμεση συνέπεια από το Θεώρημα 2/πρόταση 3. ■

⁵ Είναι φανερό ότι κάθε τύπος σταθερού σημείου πλην υπέρ-ελκυστή (δηλ ουδέτερα σταθερά σημεία, απλοί ελκυστές, απωθητικά σταθερά σημεία) είναι θέση σαγματικού σημείου αν και μόνον αν $f''(z_k) = 0$.

2.3.1 Μοναδιαίες Τομές Μιγαδικού Δυναμικού Συστήματος

Τα υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου τα οποία προκύπτουν ως τομές των επιφανειών μέτρου $|D|_{f,z_k}$, $z_k \in X_f$ των Δυναμικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής συνάρτησης f με το επίπεδο $z = 1$, παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την Μιγαδική Δυναμική.

Ο γενικός ορισμός της τομής είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 4 Έστω $|f|$ η επιφάνεια μέτρου της μιγαδικής αναλυτικής συνάρτησης f , και ο σταθερός θετικός αριθμός $r > 0$. Ως **τομή της επιφάνειας μέτρου $|f|$ με το επίπεδο $z = r$** ορίζεται το ανοικτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $B_r = \{z \in \mathbb{C} / |f(z)| < r\}$. Αν η f είναι πολυώνυμο, θα χρησιμοποιείται ο όρος **πολυωνυμική τομή** ενώ αν $r = 1$ **μοναδιαία τομή**. ▲

Από την γεωμετρία των επιφανειών μέτρου προκύπτει ότι το σύνορο της τομής $B_r = \{z \in \mathbb{C} / |f(z)| = r\} \equiv \{z \in \mathbb{C} / f(z) = re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)\}$ είναι, είτε μία κλειστή καμπύλη είτε πεπερασμένο πλήθος κλειστών καμπύλων, ξένων μεταξύ τους.

Παρατήρηση Όπως θα φανεί στη συνέχεια, σημαντική πληροφορία για ένα Μιγαδικό Δυναμικό Σύστημα $(\mathbb{C}, f, \delta)$, παρέχουν οι μοναδιαίες τομές των επιφανειών μέτρου $|D|_{f,z_k}$ των Δυναμικών της συναρτήσεων $D_{f,z_k}(z)$, $\forall z_k \in X_f$. Στις μοναδιαίες τομές αυτές θα γίνεται αναφορά στη συνέχεια με τον όρο **Μοναδιαίες Τομές** του Μιγαδικού Δυναμικού Συστήματος στα σταθερά του σημεία. Ακολουθεί ο ακριβής ορισμός της έννοιας αυτής:

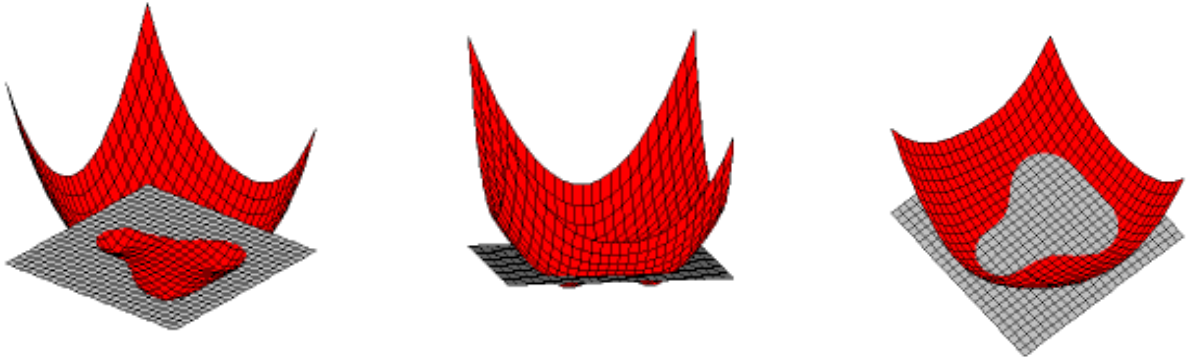
Ορισμός 5 Έστω Μιγαδικό Δυναμικό Σύστημα $(\tilde{\mathbb{C}}, f, \delta)$ και $z_k \in X_f$ ένα σταθερό σημείο του. Ως **μοναδιαία τομή n -τάξης**, $n = 1, 2, \dots$ του μιγαδικού δυναμικού συστήματος στο z_k , ορίζεται το ανοικτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $B_{f^{on}, z_k} \subset \mathbb{C}$ που προκύπτει από την (γεωμετρική) τομή της επιφάνειας μέτρου $|D|_{f^{on}, z_k}$, $n = 1, 2, \dots$ της δυναμικής συνάρτησης D_{f^{on}, z_k} με το επίπεδο $z = 1$ στον $\mathbb{R}^3$, δηλαδή είναι το σύνολο:

$$B_{f^{on}, z_k} = \left\{ z \in \mathbb{C} / |D_{f^{on}, z_k}(z)| < 1 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} / |f^{on}(z) - z_k| < |z - z_k| \right\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \blacktriangle.$$

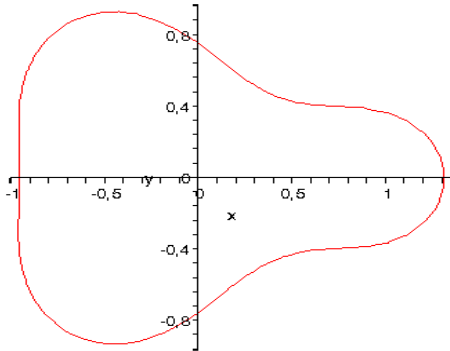
Το σύνορο της μοναδιαίας τομής n -τάξης είναι προφανώς το σύνολο:

$$\partial B_{f^{on}, z_k} = \left\{ z \in \mathbb{C} / |D_{f^{on}, z_k}(z)| = 1 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} / |f^{on}(z) - z_k| = |z - z_k| \right\}.$$

Στην Εικόνα 13, παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές όψεις της μοναδιαίας τομής 1^{ης} τάξης του δυναμικού συστήματος της $f(z) = z^4 - 0.5z^2 - 0.6z$ στον ελκυστή του $z_k = 0$.



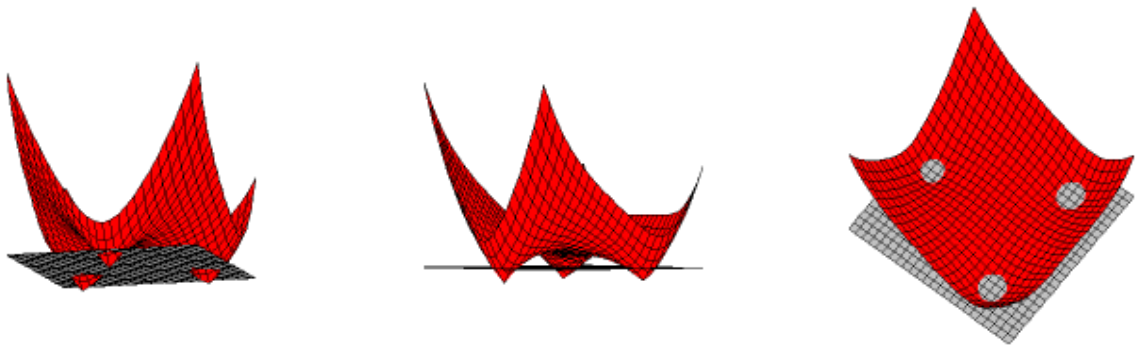
Εικόνα 13 : Μοναδιαία τομή του δυναμικού συστήματος της $f(z) = z^4 - 0.5z^2 - 0.6z$ στο $z_k = 0$



Στην Εικόνα 14 έχει σχεδιαστεί η προβολή της μοναδιαίας τομής η οποία απεικονίζεται στην Εικόνα 13 στο xy -επίπεδο. Η εξίσωση της είναι $(x^3 - 3xy^2 - 0.5x - 0.6)^2 + (3x^2y - y^3 - 0.5y)^2 = 1$

Εικόνα 14 Προβολή Μοναδιαίας τομής στο μιγαδικό επίπεδο

Ομοίως στην Εικόνα 15 απεικονίζονται όψεις της μη συνεκτικής μοναδιαίας τομής της δυναμικής συνάρτησης $|D|_{f,z_k}(x,y)$ του πολυνύμου $f(z) = z^4 - 0.5z^2 - 2z$ στο απωθητικό σταθερό του σημείο $z_k = 0$. Η εξίσωση της τομής είναι $(x^3 - 3xy^2 - 0.5x - 2)^2 + (3x^2y - y^3 - 0.5y)^2 = 1$



Εικόνα 15 Μοναδιαία τομή του δυναμικού συστήματος της $f(z) = z^4 - 0.5z^2 - 2z$ στο $z_k = 0$

Είναι φανερό ότι οι τομές δεν είναι στην γενικότητά τους συνεκτικά σύνολα. Το επόμενο θεώρημα, μεταξύ άλλων, αναφέρεται στις σχετικές θέσεις των σταθερών σημείων ως προς τις μοναδιαίες τομές του δυναμικού συστήματος.

Θεώρημα 6

Αν $z_k \in X_f$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα

1. Αν το z_k είναι ελκυστής, τότε βρίσκεται στο εσωτερικό της μοναδιαίας τομής του, αν είναι ουδέτερο σταθερό σημείο, βρίσκεται επί του συνόρου της μοναδιαίας τομής του και αν είναι απωθητικό σταθερό σημείο, βρίσκεται στο εξωτερικό της μοναδιαίας τομής τους. Γενικότερα ισχύει ότι:

$$\text{Για κάθε } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} z_k \in B_{f^{on}, z_k} & \text{αν } z_k \text{ ελκυστής} \\ z_k \in \partial B_{f^{on}, z_k} & \text{αν } z_k \text{ ουδέτερο σταθερό σημείο} \\ z_k \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{f^{on}, z_k}} & \text{αν } z_k \text{ απωθητικό σταθερό σημείο} \end{cases}$$

2. Κάθε σταθερό σημείο $z_m \neq z_k$ δηλαδή $z_m \in X_f \setminus \{z_k\}$ βρίσκεται επί του συνόρου της μοναδιαίας τομής B_{f, z_k} . Ειδικότερα ισχύει ότι

$$\begin{cases} X_f \setminus \{z_k\} \subset \partial B_{f, z_k}, & \text{αν το } z_k \text{ είναι ελκυστής ή απωθητικό σταθερό σημείο} \\ X_f \subset \partial B_{f, z_k}, & \text{αν το } z_k \text{ είναι ουδέτερο σταθερό σημείο} \end{cases}$$

3. Αν δεν υπάρχουν «μη τετριμμένες κυκλικές τροχιές⁶» με κέντρο το z_k τότε ισχύει ότι

$$\begin{cases} X_f \setminus \{z_k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \partial B_{f^{on}, z_k}, & \text{αν το } z_k \text{ είναι ελκυστής ή απωθητικό σταθερό σημείο} \\ X_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} \partial B_{f^{on}, z_k}, & \text{αν το } z_k \text{ είναι ουδέτερο σταθερό σημείο} \end{cases}$$

4. Οι γνήσιες προεικόνες του z_k περιέχονται στην μοναδιαία τομή του, δηλαδή

$$f^{-1}(z_k) \setminus \{z_k\} \subset B_{f, z_k}$$

Απόδειξη

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν:

Αν το z_k είναι ελκυστής τότε $|f'(z_k)|^n < 1 \Leftrightarrow |D|_{f^{on}, z_k}(z_k) < 1 \Leftrightarrow z_k \in B_{f^{on}, z_k}$

Αν το z_k ουδέτερο σταθερό σημείο τότε

$$|f'(z_k)|^n = 1 \Leftrightarrow |D|_{f^{on}, z_k}(z_k) = 1 \Leftrightarrow z_k \in \partial B_{f^{on}, z_k}$$

Αν το z_k απωθητικό σταθερό σημείο τότε

$$|f'(z_k)|^n > 1 \Leftrightarrow |D|_{f^{on}, z_k}(z_k) > 1 \Leftrightarrow z_k \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{f^{on}, z_k}}$$

2. Έστω $z_m \in X_f \setminus \{z_k\}$ τότε από το Θεώρημα 2/προταση 4 προκύπτει ότι $D_{f, z_k}(z_m) = 1$, οπότε $|D|_{f, z_k}(z_m) = 1 \Rightarrow z_m \in \partial B_{f, z_k}$ επομένως $X_f \setminus \{z_k\} \subset \partial B_{f, z_k}$. Αν το z_k είναι ου-

⁶ Μία σχετική τροχιά είναι μη τετριμμένη κυκλική τροχιά με κέντρο το z_k , εάν $\exists z \in \mathbb{C} \setminus X_f$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$|f^{on}(z) - z_k| = |z - z_k|, \forall n \in \mathbb{N}$. Αν $z \in X_f \setminus \{z_k\}$ τότε η κυκλική τροχιά είναι τετριμμένη

δέτερο σταθερό σημείο τότε από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι $z_k \in \partial B_{f^{on}, z_k}$
επομένως ισχύει $X_f \subset \partial B_{f, z_k}$

3. **Περίπτωση 1.** Το $z_k \in X_f$ είναι ελκυστής είτε απωθητικό σταθερό σημείο.

$$\text{Έστω } z_t \in X_f \setminus \{z_k\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |D|_{f^{on}, z_k}(z_t) = \left| \frac{f^{on}(z_t) - z_k}{z_t - z_k} \right| = 1 \Rightarrow$$

$$z_t \in \partial B_{f^{on}, z_k}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow z_t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \partial B_{f^{on}, z_k}$$

$$\text{επομένως } X_f \setminus \{z_k\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \partial B_{f^{on}, z_k} \quad (1)$$

Από την άλλη πλευρά αν όλες οι κυκλικές τροχιές είναι τετριμμένες (αντιστοιχούν σε σταθερά σημεία) τότε:

$$z_t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \partial B_{f^{on}, z_k} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |D|_{f^{on}, z_k}(z_t) = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{f^{on}(z_t) - z_k}{z_t - z_k} \right| = 1 \Rightarrow$$

$$z_t \in X_f \setminus \{z_k\} \text{ άρα } \bigcap_{n=1}^{\infty} \partial B_{f^{on}, z_k} \subset X_f \setminus \{z_k\} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έπεται ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \partial B_{f^{on}, z_k} = X_f \setminus \{z_k\}, \quad \forall z_k \in X_f.$$

Περίπτωση 2 Το $z_k \in X_f$ είναι ουδέτερο σταθερό σημείο. Όμοια αποδεικτική διαδικασία

4. Έστω $z \in f^{-1}(z_k) \setminus \{z_k\}$ τότε $f(z) = z_k$ και $z \neq z_k$ επομένως

$$|D|_{f, z_k}(z) = \frac{f(z) - z_k}{z - z_k} = \frac{z_k - z_k}{z - z_k} = 0 < 1 \Rightarrow z \in B_{f, z_k} \text{ άρα } f^{-1}(z_k) \setminus \{z_k\} \subset B_{f, z_k} \quad \blacksquare$$

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στη Δυναμική της μοναδιαίας τομής B_{f^{on}, z_k}

Θεώρημα 7

Αν $z_k \in X_f$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η άπειρη τομή των μοναδιαίων τομών του z_k περιέχεται στην πλήρωση K_f του συνό-

λου αστάθειας J_f του δυναμικού συστήματος, δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{f^{on}, z_k} \subset K_f$

2. Αν $z_m \in X_f$ με $z_m \neq z_k$ και $z \in \mathbb{C}$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_m$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} |D|_{f, z_k}(f^{on}(z)) = 1$

3. Αν υπάρχει $z \in \mathbb{C}$ του οποίου η τροχιά τελικά βρίσκεται στη μοναδιαία τομή του z_k δηλαδή $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, f^{on}(z) \in B_{f, z_k}$, τότε:

I. Είτε το z_k είναι ελκυστής (ή υπέρ ελκυστής) και $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k$

**II. Είτε στο σύνορο $\partial B_{f,z_k}$ της μοναδιαίας τομής του z_k , υπάρχουν ελκυστές ή πα-
ραβολικοί ελκυστές $z_m \in X_f$ δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_m$,**

4. Αν $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, f^{on}(z) \in \mathbb{C} \setminus B_{f,z_k}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} |D|_{f,z_k}(f^{on}(z)) \neq 1$ τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = \infty$$

Απόδειξη

1. Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{f^{on},z_k} = \emptyset$ τότε προφανώς ισχύει η πρόταση. Έστω ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{f^{on},z_k} \neq \emptyset$ και

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{f^{on},z_k} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z \in B_{f^{on},z_k} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |D|_{f,z_k}(f^{on}(z)) < 1 \Rightarrow$$

$\forall n \in \mathbb{N}, |f^{on}(z) - z_k| < |z - z_k|$ δηλαδή η τροχιά $(f^{on}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη επομένως

$$z \in K\{f\}. \text{ Άρα } \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{f^{on},z_k} \subset K\{f\}$$

2. Πράγματι επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_m \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{on}(z) - z_k) = z_m - z_k$ οπότε από το Θεώρημα

1 είναι $f^{on}(z) - z_k = (z - z_k) \prod_{j=0}^{n-1} D_{f,z_k}(f^{oj}(z))$. Στα όρια προκύπτει ότι

$$z_m - z_k = (z - z_k) \prod_{j=0}^{\infty} D_{f,z_k}(f^{oj}(z)) \text{ δηλαδή το απειρογινόμενο}$$

$$\prod_{j=0}^{\infty} D_{f,z_k}(f^{oj}(z)) = \frac{z_m - z_k}{z - z_k} \text{ συγκλίνει και κατά συνέπεια (από γνωστή πρόταση στη σύ-}$$

γκλιση των απειρογινόμενων) προκύπτει ότι $\lim_{j \rightarrow \infty} D_{f,z_k}(f^{oj}(z)) = 1$ ή ισοδύναμα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |D|_{f,z_k}(f^{on}(z)) = 1$$

3. Από την υπόθεση ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, f^{on}(z) \in B_{f,z_k} \Rightarrow |D|_{f,z_k}(f^{on}(z)) < 1, \forall n \geq n_0$
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. Υπάρχει $t < 1: |D|_{f,z_k}(f^{on}(z)) < t < 1, \forall n \geq n_0$, τότε $\prod_{j=n_0}^{\infty} |D|_{f,z_k}(f^{oj}(z)) = 0$ οπό-

τε από το Θεώρημα 1 προκύπτει $|f^{on}(z) - z_k| = |z - z_k| \prod_{j=0}^{n-1} |D|_{f,z_k}(f^{oj}(z)) \rightarrow 0$ δηλ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k$$

II. Το $\lim_{n \rightarrow \infty} |D|_{f,z_k}(f^{on}(z)) = 1$ και επειδή τελικά η τροχιά βρίσκεται εντός του

B_{f,z_k} τότε υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της τροχιάς, επομένως και ολόκληρη η τροχιά συγκλίνει προς κάποιο σταθερό σημείο $z_m \in X_f \cap \partial B_{f,z_k}$

4. Από την υπόθεση ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, f^{on}(z) \in \mathbb{C} \setminus B_{f,z_k} \Rightarrow$
 $|D|_{f,z_k}(f^{on}(z)) > 1, \forall n \geq n_0$ και επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} |D|_{f,z_k}(f^{on}(z)) \neq 1$ από το Θεώρημα 1 προ-
 κύπτει $|f^{on}(z) - z_k| = |(z - z_k)| \prod_{j=0}^{n-1} |D|_{f,z_k}(f^{oj}(z)) \rightarrow \infty$ δηλ $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = \infty$ ■

2.3.2 Η Κύρια Μοναδιαία Τομή

Όπως προαναφέρθηκε, οι μοναδιαίες τομές δεν είναι στην γενικότητά τους συνεκτικά σύνολα, αλλά αποτελούνται από μία πεπερασμένη ένωση, ξένων μεταξύ τους, συνεκτικών συνιστωσών.

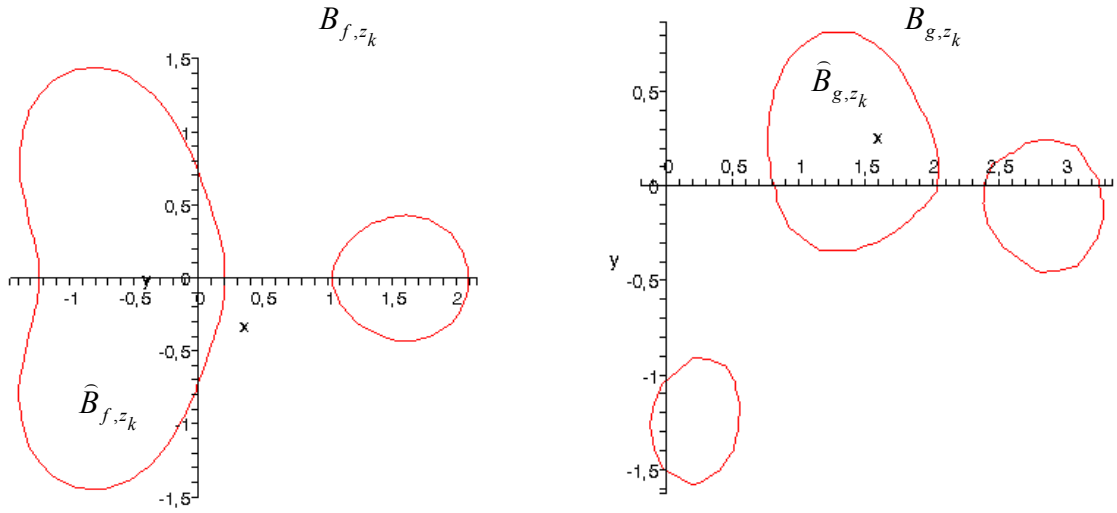
Ο ακόλουθος ορισμός εστιάζεται, σε μία συγκεκριμένη συνεκτική συνιστώσα της μοναδιαίας τομής, την *Κύρια Μοναδιαία Τομή* ...

Ορισμός 6 Ως *Κύρια Μοναδιαία Τομή* $\widehat{B}_{f^{on},z_k}$ n -τάξης, της μοναδιαίας τομής B_{f^{on},z_k} , $n=1,2,\dots$ ενός $z_k \in X_f$, ορίζεται η συνεκτική συνιστώσα $\widehat{B}_{f^{on},z_k} \subseteq B_{f^{on},z_k}$ στην οποία το z_k είναι σημείο επαφής, δηλαδή ανήκει στην κλειστή της θήκη $z_k \in \overline{\widehat{B}_{f^{on},z_k}} = \widehat{B}_{f^{on},z_k} \cup \partial \widehat{B}_{f^{on},z_k}$. ▲

Η κύρια μοναδιαία τομή όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια αποτελεί το ουσιώδες τμήμα της μοναδιαίας τομής, από πλευράς μαθηματικής πληροφορίας.

Στην *Εικόνα 16* (επόμενη σελίδα) :

1. Αριστερά απεικονίζεται η μοναδιαία τομή B_{f,z_k} του ελκυστή $z_k = 0$, του δυναμικού συστήματος του πολωνύμου $f(z) = -0.3z^4 + 0.4z^2 + 0.92z$ της οποίας το σύνορο είναι $\partial B_{f,z_k} = \{z \in \mathbb{C} / |D|_{f,z_k}(z) = 1\} = \{z \in \mathbb{C} / |-0.3z^3 + 0.4z + 0.92| = 1\}$. Η μοναδιαία τομή B_{f,z_k} είναι ένωση δυο ξένων κλειστών και φραγμένων περιοχών του επιπέδου ενώ η *κύρια μοναδιαία τομή* είναι η (μεγάλη) συνεκτική συνιστώσα στην οποία ανήκει ο ελκυστής $z_k = 0$.
2. Δεξιά απεικονίζεται η μοναδιαία τομή B_{g,z_k} του ελκυστή $z_k = 1$, του δυναμικού συστήματος του πολωνύμου $g(z) = -0.5z^4 + (2.7 - 0.5i.)z^3 + (-4.6 + 2.7i.)z^2 + (3.4 - 4.6i)z + 2.4i$ της οποίας το σύνορο είναι:
 $\partial B_{g,z_k} = \{z \in \mathbb{C} / |D|_{g,z_k}(z) = 1\} = \{z \in \mathbb{C} / |-0.5z^3 + (2.2 - 0.5i.)z^2 + (-2.4 + 2.2i.)z + (1.0 - 2.4i)| = 1\}$
 Η μοναδιαία τομή B_{g,z_k} είναι ένωση τριών ξένων κλειστών και φραγμένων περιοχών του επιπέδου. Η *κύρια μοναδιαία τομή* είναι η (μεγάλη) συνεκτική συνιστώσα στην οποία ανήκει ο ελκυστής $z_k = 1$.



Εικόνα 16 Αριστερά, η μοναδιαία τομή B_{f,z_k} στο $z_k = 0$ και η Κύρια Μοναδιαία Τομή της $\widehat{B}_{f,z_k}$. Δεξιά, η μοναδιαία τομή $\widehat{B}_{g,z_k}$ στο $z_k = 1$ και η Κύρια Μοναδιαία Τομή της $\widehat{B}_{g,z_k}$.

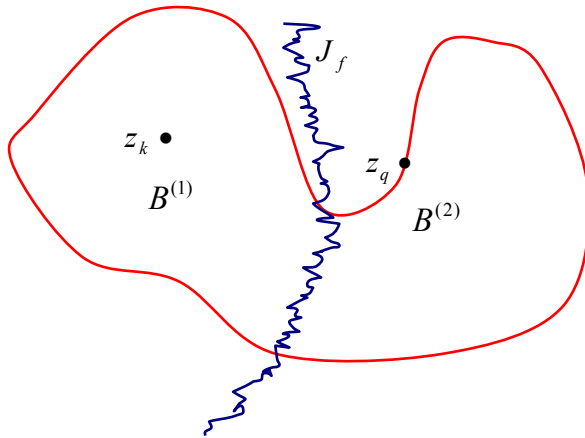
Παρατήρηση. Από το Θεώρημα 6 πρόταση 1 προκύπτει ότι αν το $z_k \in X_f$ είναι ελκυστής ή ουδέτερο σταθερό σημείο (Siegel, Cremer ή παραβολικό) τότε $\widehat{B}_{f,z_k} \neq \emptyset$, ενώ $\widehat{B}_{f,z_k} = \emptyset$ αν το $z_k \in X_f$ είναι απωθητικό σταθερό σημείο.

Θεώρημα 8

Έστω πολωνομικό δυναμικό σύστημα $(\widetilde{\mathcal{C}}, f, \delta)$ και $z_k \in X_f$ ένας ελκυστής του, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε, στο σύνολο της κύριας μοναδιαίας τομής $\widehat{B}_{f^{om}, z_k}$ του ελκυστή, να μην ανήκει άλλος ελκυστής, ούτε σταθερό σημείο Siegel.

Απόδειξη

Έστω $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{B}_{f^{on}, z_k}$, προφανώς το $B \neq \emptyset$ αφού ο ελκυστής $z_k \in B$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει



ελκυστής ή σταθερό σημείο Siegel $z_q \in X_f \setminus \{z_k\}$ τέτοιο ώστε $z_q \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \partial \widehat{B}_{f^{on}, z_k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ τότε το

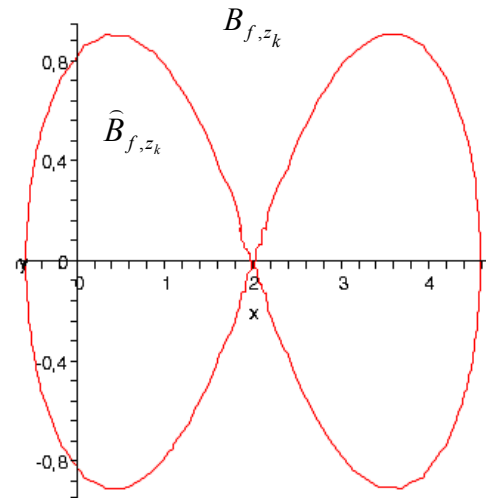
$z_q \in \partial\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{B}_{f^{on}, z_k}\right) = \partial B$. Επίσης από το θεώρημα 6 έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{f^{on}, z_k} \subset K_f$ και επειδή το z_k είναι ελκυστής θα είναι $z_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{B}_{f^{on}, z_k} = B$. Επιπρόσθετα, επειδή το σύνολο της Ελκτικής περιοχής κάθε ελκυστή ανήκει στο σύνολο αστάθειας J_f του δυναμικού συστήματος, τα σταθερά σημεία z_k και z_m θα πρέπει να βρίσκονται εκατέρωθεν κάποιου συνεκτικού υποσυνόλου του J_f (αφού ανήκουν σε διαφορετικές περιοχές Ευστάθειας). Άρα το J_f διαμερίζει το συνεκτικό σύνολο B σε δύο υποσύνολα $B^{(1)}$ και $B^{(2)}$. Από τον ορισμό του συνόλου $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{B}_{f^{on}, z_k}$ προκύπτει ότι

$$|f^{on}(z) - z_k| < |z - z_k|, \forall z \in B \text{ και } \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Από τις ιδιότητες του συνόλου J_f και των συνθηκών αστάθειας που δημιουργεί, ως απωθητικό σύνολο, είναι προφανές ότι υπάρχουν σημεία $z \in (J_f \cap B) \cup B^{(2)} \subset B$ για τα οποία η $|f^{on}(z) - z_k| > |z - z_k|$ επομένως η (1) είναι άτοπος και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Σύμβαση Στα επόμενα, για λόγους απλότητας και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρήσουμε ότι το m του θεωρήματος 8 έχει την τιμή $m = 1$. Αν δεν συμβαίνει αυτό θα θεωρείται ως f η f^{om} .

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα ένας ελκυστής ή ένα σταθερό σημείο Siegel δεν μπορεί να ανήκει στο σύνολο της κύριας μοναδιαίας τομής άλλου ελκυστή. Αντίθετα ένας παραβολικός ελκυστής (ή παραβολικό σταθερό σημείο) είναι δυνατόν (χωρίς αυτό να αποτελεί κανόνα) να ανήκει στο σύνολο της κύριας μοναδιαίας τομής άλλου ελκυστή. Για παράδειγμα, δεξιά απεικονίζεται η μοναδιαία τομή B_{f, z_k} του $f(z) = -0.3z^3 + 1.5z^2 - 1.4z + 1.2$ στον ελκυστή του $z_k = 1$



Η κύρια μοναδιαία τομή $\widehat{B}_{f, z_k}$, είναι η αριστερή συνεκτική συνιστώσα του σχήματος, στην οποία ανήκει ο ελκυστής $z_k = 1$. Το σταθερό σημείο $z_m = 2$ είναι παραβολικός ελκυστής και

παρατηρούμε ότι ανήκει στο σύνολο της $\widehat{B}_{f, z_k}$. Το θεώρημα που ακολουθεί αναφέρει, ότι όταν υπάρχει παραβολικός ελκυστής στο σύνολο της $\widehat{B}_{f, z_k}$ ενός ελκυστή, αυτός δεν «ανταγωνίζεται» τον ελκυστή ή ισοδύναμα δεν ασκεί ελκτική δραστηριότητα στα σημεία της $\widehat{B}_{f, z_k}$.

Θεώρημα 9

Έστω $z_k \in X_f$ ελκυστής και $\widehat{B}_{f, z_k}$ η κύρια μοναδιαία τομή του. Αν στο σύνολο της $\widehat{B}_{f, z_k}$ του ελκυστή, υπάρχει παραβολικός ελκυστής $z_p \in \partial \widehat{B}_{f, z_k}$, τότε δεν υπάρχει τροχιά ση-

μείου της $\widehat{B}_{f,z_k}$ η οποία να συγκλίνει στο z_p . Δηλαδή

Για κάθε $z \in \widehat{B}_{f,z_k}$ με $\{f^{on}(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{B}_{f,z_k}$ είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) \neq z_p$

Απόδειξη

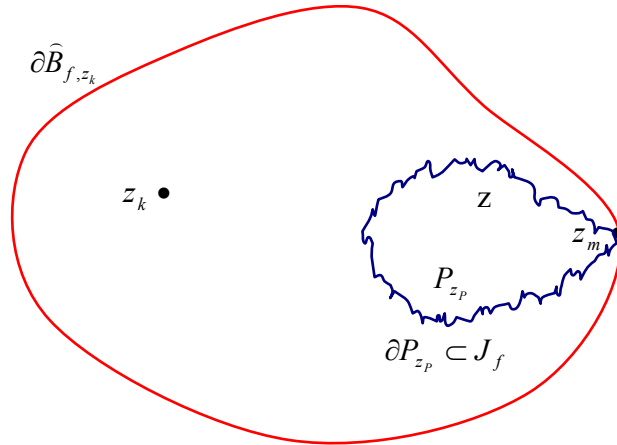
Έστω ότι υπάρχει $z \in \widehat{B}_{f,z_k}$ με $\{f^{on}(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{B}_{f,z_k}$ και τέτοιο ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_p$. Τότε προφανώς το $z \in P_{z_p} \cap \widehat{B}_{f,z_k}$ όπου P_{z_p} η (ευσταθής και προς τα εμπρός αναλλοίωτη) ελκτική περιοχή του παραβολικού ελκυστή z_p άρα $\{f^{on}(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset P_{z_p}$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\partial P_{z_p} \subset J_f$

θα διαμερίζει το $\widehat{B}_{f,z_k}$. Επει-

δή το J_f είναι απωθητικό σύνολο (είναι η κλειστή θήκη όλων των απωθητικών περιοδικών κύκλων του δυναμικού συστήματος), τα σημεία $z \in P_{z_p} \cap \widehat{B}_{f,z_k}$ που είναι σε μία περιοχή του

$J_f \cap \widehat{B}_{f,z_k} \cap P_{z_p}$ θα ωθούνται προς τον παραβολικό ελκυστή $z_p \in \partial \widehat{B}_{f,z_k}$. Το συ-

μέρασμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό του συνόλου $\widehat{B}_{f,z_k}$ το οποίο ως υποσύνολο της B_{f,z_k} , περιλαμβάνει τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου τα οποία $|f(z) - z_k| < |z - z_k|$.



Θεώρημα 10

Έστω σταθερό σημείο $z_k \in X_f$. Αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η τροχιά $\{f^{on}(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ενός σημείου z να περιέχεται εξ ολοκλήρου στην κύρια τομή $\widehat{B}_{f^{om}, z_k}$, δηλαδή $\{f^{on}(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{B}_{f^{om}, z_k}$ τότε το $z_k \in X_f$ είναι ελκυστής και $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k$.

Απόδειξη

Για λόγους απλότητας η απόδειξη θα γίνει θεωρώντας ότι $m = 1$ (αν το $m > 1$ θεωρούμε ως f την f^{om}). Έστω ότι η τροχιά $\{f^{on}(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ενός σημείου $z \in \widehat{B}_{f,z_k}$ περιέχεται εξ ολοκλήρου στο $\widehat{B}_{f,z_k}$ δηλαδή $\{f^{on}(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{B}_{f,z_k}$. Επομένως θα υφίσταται διαδοχικές έλξεις, οπότε θα ισχύουν $|f(z) - z_k| < |z - z_k|$, $|f^{o2}(z) - z_k| < |f(z) - z_k|$, $|f^{on}(z) - z_k| < |f^{o(n-1)}(z) - z_k|$.

Όμως οι ανισοτικές αυτές σχέσεις συσχετίζονται διαδοχικά ως:

$$0 < \dots < |f^{on}(z) - z_k| < |f^{o(n-1)}(z) - z_k| < \dots < |f^{o2}(z) - z_k| < |f(z) - z_k| < |z - z_k|$$

από τις οποίες προκύπτει ότι η ακολουθία των θετικών πραγματικών αριθμών $(|f^{on}(z) - z_k|)_{n \geq 0}$ είναι γνησίως φθίνουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει προς κάποιο σταθερό σημείο. Επειδή από τα προηγούμενα θεωρήματα 8 και 9 δεν υπάρχει στο σύνολο της $\widehat{B}_{f,z_k}$ σταθερό σημείο, με ελκτική ικανότητα, αναγκαστικά το $z_k \in X_f$ είναι ελκυστής οπότε $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k$ ■

Το επόμενο θεώρημα αναφέρει ότι δεν υπάρχει τροχιά η οποία να «μοιράζεται» σε δύο ή περισσότερες, διακεκριμένες κύριες τομές.

Θεώρημα 11

Για κάθε $z \in F_f$ υπάρχει το πολύ μια κύρια μοναδιαία τομή, στην οποία ανήκουν άπειρα σημεία της τροχιάς του.

Απόδειξη

Έστω ότι η τροχιά $(f^{o(n)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ έχει μια υπακολουθία $(f^{o(p_n)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$, όπου $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια αύξουσα ακολουθία δεικτών, η οποία ανήκει στην κύρια μοναδιαία τομή $\widehat{B}_{f,z_p}$ του σταθερού σημείου $z_p \in X_f$ δηλαδή

$$(f^{o(p_n)}(z))_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{B}_{f,z_p} \quad (1)$$

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι υπάρχει και άλλη υπακολουθία της $(f^{o(q_n)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ όπου $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια αύξουσα ακολουθία δεικτών με $q_n \neq p_n, n \in \mathbb{N}$ καθώς και μια κύρια μοναδιαία τομή $\widehat{B}_{f,z_q}$ τέτοια ώστε

$$(f^{o(p_n)}(z))_{n \in \mathbb{N}} \subset \widehat{B}_{f,z_q} \quad (2)$$

όπου $z_p \neq z_q \in X_f$. Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η συνολική τροχιά $(f^{o(n)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ έχει σημεία συσσώρευσης σε αμφότερες τις κλειστές θήκες $\overline{\widehat{B}_{f,z_p}}$ και $\overline{\widehat{B}_{f,z_q}}$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Η τροχιά $(f^{o(n)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ελκτική ή παραβολική.

Τέτοιες τροχιές έχουν προφανώς ένα μόνο σημείο συσσώρευσης, το σταθερό σημείο προορισμού τους έστω $z_k \in X_f$. Σύμφωνα με τα παραπάνω το $z_k \in \overline{\widehat{B}_{f,z_p}} \cap \overline{\widehat{B}_{f,z_q}}$.

Η τελευταία όμως σχέση βάσει των Θεωρημάτων 8 και 9 είναι άτοπος, αφού στις κλειστές θήκες κυρίων μοναδιαίων τομών δεν υπάρχουν ελκυστές και αν υπάρχουν παραβολικοί ελκυστές, δεν εμφανίζουν ελκτική συμπεριφορά προς τα σημεία των κυρίων τομών.

2. Η τροχιά $(f^{o(n)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Siegel.

Στο σχήμα απεικονίζεται ένας δίσκος Siegel Sd_{z_p} κέντρου $z_p \in X_f$, οι κύριες μοναδιαίες τομές

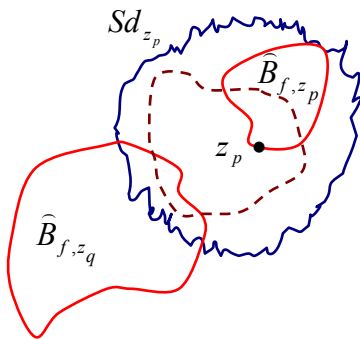
$\widehat{B}_{f,z_p}$, $\widehat{B}_{f,z_q}$ και η πυκνή Siegel τροχιά

$(f^{o(n)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ (η διάστικτη γραμμή).

Από την (2) συνεπάγεται ότι η τομή $Sd_{z_p} \cap \widehat{B}_{f,z_q} \neq \emptyset$, δηλαδή το σύνορο του δίσκου

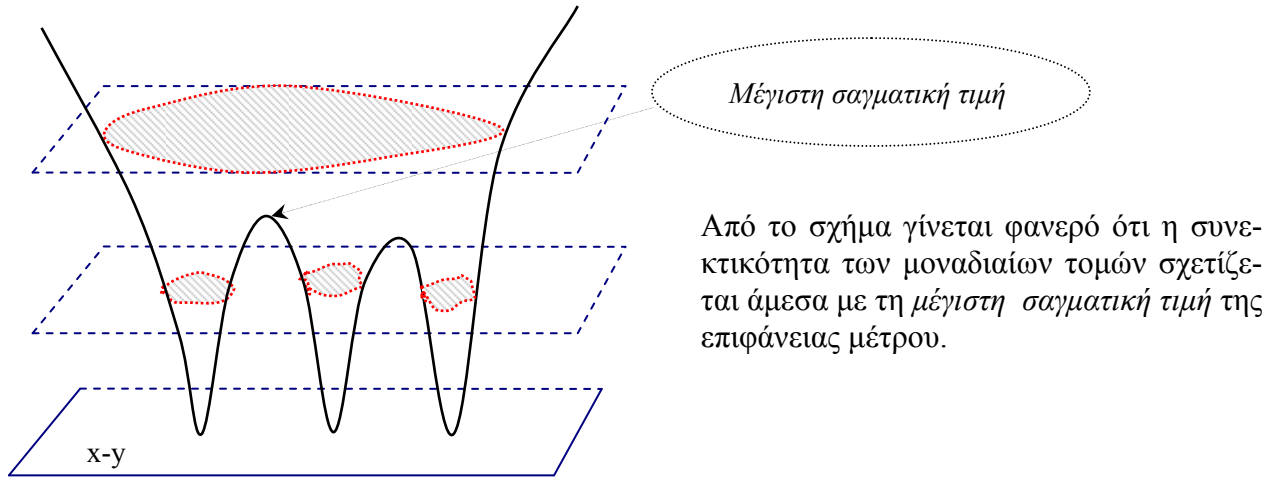
$\partial Sd_{z_p} \subset J_f$ διαχωρίζει την κύρια μοναδιαία τομή

$\widehat{B}_{f,z_q}$ το οποίο είναι άτοπο, δεδομένου ότι το J_f είναι απωθητικό σύνολο ■



2.3.3 Συνεκτικότητα των Μοναδιαίων Τομών

Το ερώτημα το οποίο προκύπτει είναι: Πότε η μοναδιαία τομή B_{f,z_k} είναι συνεκτική, δηλαδή πότε ισχύει $\widehat{B}_{f,z_k} = B_{f,z_k}$. Το επόμενο θεώρημα δίνει την ζητούμενη πληροφορία



Εικόνα 17 Συνεκτικότητα τομών και σαγματικές τιμές της επιφανείας μέτρου.

Θεώρημα 12

Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η μοναδιαία τομή B_{f,z_k} είναι απλά συνεκτική αν και μόνον αν το σύνολο των σαγματικών⁷ της σημείων $\Omega_{|D|_{f,z_k}} \setminus R_{|D|_{f,z_k}}$ περιέχεται στην κλειστή της θήκη, δηλαδή $\Omega_{|D|_{f,z_k}} \setminus R_{|D|_{f,z_k}} \subset \overline{B_{f,z_k}}$ ⁸
2. Η μοναδιαία πολυωνυμική τομή B_{f,z_k} είναι απλά συνεκτική αν και μόνον αν η μέγιστη σαγματική τιμή της $|D|_{f,z_k}$ είναι μικρότερη ή ίση της μονάδας, δηλαδή

$$\max \left\{ |D|_{f,z_k}(w) : w \in \Omega_{|D|_{f,z_k}} \setminus R_{|D|_{f,z_k}} \right\} \leq 1$$

Απόδειξη

1. Επειδή η τομή B_{f,z_k} δημιουργείται με το επίπεδο εξίσωσης $z = 1$ είναι φανερό ότι η B_{f,z_k} είναι απλά συνεκτική, αν και μόνον αν, οι τιμές της $|D|_{f,z_k}$ στα σαγματικά της σημεία είναι μικρότερες ή ίσες της μονάδας δηλ $|D|_{f,z_k}(z_j) \leq 1$ όπου $z_j \in \Omega_{|D|_{f,z_k}} \setminus R_{|D|_{f,z_k}}$ ή ισοδύναμα όταν $\Omega_{|D|_{f,z_k}} \setminus R_{|D|_{f,z_k}} \subset \overline{B_{f,z_k}}$
2. Άμεση συνέπεια του προηγούμενου ■

⁷ Βλέπε Θεώρημα4/προταση2

⁸ Η συνθήκη ισχύει και στην τετριμμένη περίπτωση $\Omega_{D_{f,z_k}} \setminus R_{D_{f,z_k}} = \emptyset$ όπου δηλ δεν υπάρχουν σαγματικά σημεία

Εφαρμογή

A) Να διερευνηθεί τότε η μοναδιαία τομή B_{f,z_k} του $f(z) = az^3 + bz^2 + cz$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ στο $z_k = 0 \in X_f$ είναι απλά συνεκτική;

B) Το ίδιο ερώτημα για το πολυώνυμο $f(z) = z^4 + bz^2 + cz$, $b, c \in \mathbb{C}$

Λύση

A) Είναι $D_{f,z_k}(z) = az^2 + bz + c \Rightarrow \frac{d}{dz} D_{f,z_k}(z) = 2az + b$ επομένως το σύνολο των σαγματικών σημείων της $|D|_{f,z_k}(z)$ είναι $\Omega_{D_{f,z_k}} \setminus R_{D_{f,z_k}} = \Omega_{D_{f,z_k}} = \{-b/(2a)\}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12 ικανή και αναγκαία συνθήκη για την συνεκτικότητα της B_{f,z_k} είναι

$$\max \left\{ |D|_{f,z_k}(w), \quad w \in \Omega_{|D|_{f,z_k}} \setminus R_{|D|_{f,z_k}} \right\} \leq 1 \Leftrightarrow |D|_{f,z_k} \left(-\frac{b}{2a} \right) \leq 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{b^2}{4a} + c \right| \leq 1 \quad (1)$$

Αν το πολυώνυμο είναι κανονικοποιημένο (*monic and centered*) δηλαδή $a=1, b=0$ τότε η (1) απλοποιείται σε $|c| \leq 1$ ✓

B) Ομοίως για το $f(z) = z^4 + cz^2 + dz$, $b, c \in \mathbb{C}$ το σύνολο των σαγματικών σημείων της

$|D|_{f,z_k}(z)$ είναι $\Omega_{D_{f,z_k}} \setminus R_{D_{f,z_k}} = \Omega_{D_{f,z_k}} = \left\{ \pm \frac{1}{3} \sqrt{-3c} \right\}$ Από το Θ8 προκύπτει ότι η ικανή και

αναγκαία συνθήκη για την συνεκτικότητα της B_{f,z_k} είναι

$$\max \left\{ \left| d + \frac{2c^2}{3\sqrt{-3c}} \right|, \left| d - \frac{2c^2}{3\sqrt{-3c}} \right| \right\} \leq 1 \quad \checkmark$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ ΕΛΞΗΣ

3.1 ΟΙ ΠΥΡΗΝΕΣ ΕΛΞΗΣ & ΟΙ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΕΛΚΥΣΤΗ

3.1.1 Εισαγωγικά

Μία από τις σημαντικές εφαρμογές της Θεωρίας των Μοναδιαίων Τομών στη Μιγαδική Δυναμική είναι ότι παρέχει μετρήσιμη γεωμετρική πληροφορία για την κατάσταση του δυναμικού συστήματος κοντά σε ελκυστές. Με βάση αυτή αναδεικνύονται νέα γεωμετρικά χαρακτηριστικά μεγέθη και έννοιες, όπως οι *πυρήνες έλξης ελκυστή*, οι *περιοχές διασποράς ελκυστή*, καθώς και η έννοια της *ευτακτικής έλξης*. Αυτές αποτυπώνουν με ακρίβεια την Γεωμετρία και την Δυναμική στην ελκτική περιοχή ενός ελκυστή.

3.1.2 Η Ελκτική Περιοχή Ελκυστή

Έστω $W_{f,z_k} = \{z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k\}$ η ελκτική περιοχή του ελκυστή z_k . Το επόμενο θεώρημα, αναφέρει ότι, αν τα δυναμικά συστήματα $(\tilde{\mathcal{C}}, f, \delta)$ και $(\tilde{\mathcal{C}}, f^{on}, \delta)$ έχουν ελκυστές αυτοί θα συμπίπτουν, όπως επίσης και οι αντίστοιχες ελκτικές περιοχές αυτών. Γενικότερα ισχύει ότι τα δυναμικά συστήματα $(\tilde{\mathcal{C}}, f, \delta)$ και $(\tilde{\mathcal{C}}, f^{on}, \delta)$ ταυτίζονται, δηλαδή έχουν το ίδιο σύνολο αστάθειας, καθώς και τις ίδιες συνιστώσες ευστάθειας.

Θεώρημα 13

Αν W_{f,z_k} και W_{f^{on},z_k} είναι οι ελκτικές περιοχές του ελκυστή z_k ως προς την f και την f^{on} αντίστοιχα, τότε $W_{f,z_k} \equiv W_{f^{on},z_k} = W_{z_k}, \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ελκτική περιοχή ελκυστή είναι ανεξάρτητη από την τάξη $n = 1, 2, \dots$ της f^{on}

Απόδειξη

Επειδή $X_f \subset X_{f^{on}}$, το z_k θα είναι ελκυστής του f^{on} με ιδιοτιμή $|f'(z_k)|^n < 1$. Έστω

$$z \in W_{f,z_k} \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f^{oj}(z) = z_k \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f^{onj}(z) = z_k \Rightarrow z \in W_{f^{on},z_k}, \text{ επομένως}$$

$$W_{f,z_k} \subseteq W_{f^{on},z_k}. \text{ Αντιστρόφως, θα δείξουμε ότι } W_{f^{on},z_k} \subseteq W_{f,z_k}.$$

Έστω $z \in W_{f^{on},z_k} \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f^{onj}(z) = z_k$, για $m = 1, 2, \dots, n-1$, από την τελευταία προκύπτει

$$f^{om} \left(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{onj}(z) \right) = f^{om}(z_k) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f^{o(nj+m)}(z) = z_k \quad (1)$$

Δηλαδή οι n υπακολουθίες $\{f^{o(nj+m)}(z)\}_{j \in \mathbb{N}}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ της $\{f^{oj}(z)\}_{j \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουν

στο z_k καθώς $j \rightarrow \infty$. Έστω τώρα μια τυχαία υπακολουθία $f^{oa_i}(z)$ της $\{f^{oj}(z)\}_{j \in \mathbb{N}}$ όπου

$(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μια τυχαία αύξουσα ακολουθία δεικτών. Από την Ευκλείδεια διαιρετότητα προκύπτει ότι οι δείκτες a_i γράφονται $a_i = nj_i + m_i$ με $m_i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ και $j_i \in \mathbb{N}$ οι οποίοι αντιστοιχούν σε όρους των υπακολουθιών (1) που συγκλίνουν στο z_k . Ειδικότερα από τις (1) προκύ-

ππει ότι για $\forall \varepsilon > 0, \exists j_m \in \mathbb{N}, j > j_m \Rightarrow |f^{o(nj+m)}(z) - z_k| < \varepsilon$ (2). Λαμβάνοντας $j_0 = \max\{j_m\}$ ισχύουν ταυτόχρονα οι (2), δηλαδή $\forall \varepsilon > 0, \exists j_m \in \mathbb{N}, j > j_0 \Rightarrow |f^{o(nj+m)}(z) - z_k| < \varepsilon$ (3)

Επομένως για $a_i > j_0 \Rightarrow |f^{oa_i}(z) - z_k| = |f^{o(nj_i+k_i)}(z) - z_k| < \varepsilon$ λόγω των (3), κατά συνέπεια η τυχαία υπακολουθία $f^{oa_i}(z) \rightarrow z_k$ δηλαδή $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{oj}(z) = z_k \Rightarrow W_{f^{on}, z_k} \subseteq W_{f, z_k}$ ■

Πόρισμα 13

Μία υπακολουθία τροχιάς είναι συγκλίνουσα αν και μόνον αν είναι συγκλίνουσα ολόκληρη η τροχιά. Δηλαδή αν z_k ελκυστής και $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μία αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε για κάθε $z \in W_{z_k}$ ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{oa_i}(z) = z_k \Leftrightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f^{oj}(z) = z_k$.

Απόδειξη

Είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος, δηλαδή ότι $W_{f, z_k} = W_{f^{on}, z_k}, \forall n \in \mathbb{N}$ ■

3.1.3 Τα βασικά υποσύνολα της Ελκτικής Περιοχής Ελκυστή

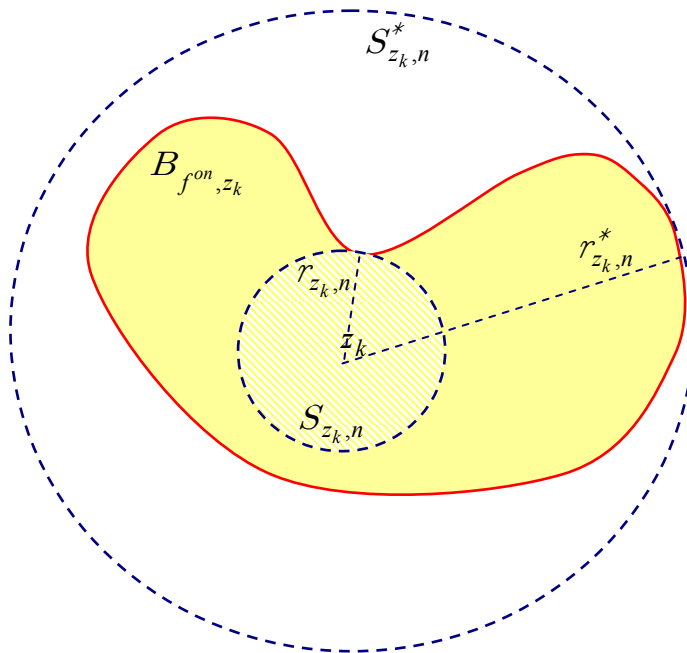
Στο Θεώρημα 6/πρόταση 2 αποδείχθηκε ότι ο ελκυστής z_k βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό της μοναδιαίας τομής του, δηλαδή $z_k \in B_{f^{on}, z_k}, \forall n \in \mathbb{N}$. Υπενθυμίζεται ότι η μοναδιαία τομή n- τά-

ξεως είναι το σύνολο $B_{f^{on}, z_k} = \{z \in \mathbb{C} / |D|_{f^{on}, z_k}(z) < 1\} = \{z \in \mathbb{C} / |f^{on}(z) - z_k| < |z - z_k|\}$

$\forall n = 1, 2, \dots$ Θεωρούμε ελκυστή $z_k \in X_f \setminus \{\infty\}$, και την αντίστοιχη μοναδιαία τομή του B_{f^{on}, z_k} .

Είναι φανερό ότι για κάθε φυσικό $n \in \mathbb{N}^*$, υπάρχουν δύο μοναδικοί θετικοί πραγματικοί αριθμοί $r_{z_k, n}, r_{z_k, n}^* > 0$ που ορίζονται ως: $r_{z_k, n} = \min\{|z - z_k| \in \mathbb{R}_+^* / z \in \partial B_{f^{on}, z_k}\} > 0$ και

$$r_{z_k, n}^* = \max\{|z - z_k| \in \mathbb{R}_+^* / z \in \partial B_{f^{on}, z_k}\} > 0.$$



Εικόνα 18. Η μοναδιαία τομή, ο πυρήνας, και η περιοχή διασποράς ελκυστή

Επομένως ορίζονται τα ακόλουθα γεωμετρικά στοιχεία και βασικές περιοχές ελκυστή.

Ορισμός 7. Έστω ελκυστής $z_k \in X_f \setminus \{\infty\}$, B_{f^{on}, z_k} , $n \in \mathbb{N}^*$ οι μοναδιαίες τομές του και οι θετικοί πραγματικοί $r_{z_k, n}, r_{z_k, n}^*$ που ορίζονται ως εξής:

$$r_{z_k, n} = \min \left\{ |z - z_k| \in \mathbb{R}_+^* / z \in \partial B_{f^{on}, z_k} \right\} > 0 \text{ και } r_{z_k, n}^* = \max \left\{ |z - z_k| \in \mathbb{R}_+^* / z \in \partial B_{f^{on}, z_k} \right\} > 0$$

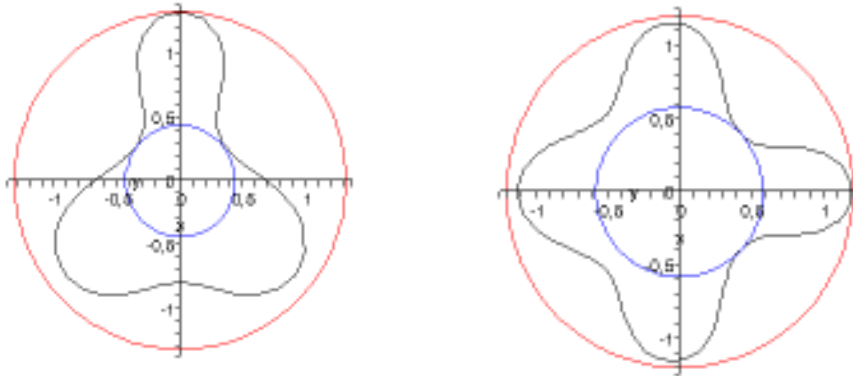
1. Οι ακολουθίες $\left(r_{z_k, n} \right)_{n \geq 1}$ και $\left(r_{z_k, n}^* \right)_{n \geq 1}$ ορίζουν τις ακολουθίες των **ακτίνων έλξης & διασποράς** του ελκυστή αντίστοιχα.

2. Οι όροι της ακολουθίας των ανοικτών κυκλικών περιοχών $(S_{z_k, n})_{n \geq 1}$ με

$S_{z_k, n}^{\text{op}} = D(z_k, r_{z_k, n}) \subseteq B_{f^{on}, z_k}$ κέντρου z_k και ακτίνας $r_{z_k, n}$ ορίζουν τους **πυρήνες έλξης n -τάξης** του ελκυστή.

3. Οι όροι της ακολουθίας των ανοικτών κυκλικών περιοχών $(S_{z_k, n}^*)_{n \geq 1}$ με $S_{z_k, n}^{*\text{op}} = D(z_k, r_{z_k, n}^*)$ κέντρου z_k και ακτίνας $r_{z_k, n}^*$, ορίζουν τις **περιοχές διασποράς n -τάξης** του ελκυστή. ▲

Σύμβαση: Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης για τον ελκυστή στον οποίο αναφέρονται οι παραπάνω συμβολισμοί, αυτοί θα απλοποιούνται ως S_n, S_n^*, r_n, r_n^* .



Εικόνα 19 Μοναδιαίες τομές -πυρήνες έλξης -περιοχές διασποράς

Στην εικόνα 19, απεικονίζονται οι μοναδιαίες τομές B_{f, z_k} , οι πυρήνες έλξης S_1 (εσωτερικό μικρών κύκλων) και οι περιοχές διασποράς τους S_1^* (εσωτερικό των μεγάλων κύκλων), των πολυωνύμων $f_1(z) = z^4 + 0.4z^2 + 0.8iz$ (σχήμα. αριστερά) και $f_2(z) = z^5 - 0.2z^2 + 0.8z$ (δεξιά) στον ελκυστή $z_k = 0$

Παρατήρηση Είναι φανερό από τον ορισμό ότι $S_n \subseteq B_{f^{on}, z_k} \subseteq S_n^*$ και $r_n \leq r_n^*$ $n = 1, 2, \dots$

Θεώρημα 14

Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $f^{on}(S_n) \subset S_n$ και $f^{on}(\mathbb{C} \setminus S_n^*) \subset \mathbb{C} \setminus S_n^*$ δηλαδή τα σύνολα S_n και $\mathbb{C} \setminus S_n^*$ είναι προς τα εμπρός αναλλοίωτα (forward invariant) κάτω από την f^{on}
2. Τα σύνολα $\limsup_n S_n$ και $\liminf_n S_n^*$ φράσσουν την ελκτική περιοχή του ελκυστή, δηλαδή $\limsup_n S_n \subseteq W_{z_k} \subseteq \liminf_n S_n^*$.

Αποδείξεις

1. α) Έστω $z \in S_n \subset B_{f^{on}, z_k}$, $n=1,2,\dots \Rightarrow |z - z_k| < r_n$ και $|D|_{f^{on}, z_k}(z) < 1$, επομένως $|f^{on}(z) - z_k| = |z - z_k| |D|_{f^{on}, z_k}(z) < |z - z_k| < r_n$ δηλαδή $f^{on}(z) \in S_n$ οπότε αποδείχτηκε ότι $f^{on}(S_n) \subset S_n$
 β) Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus S_n^* \Rightarrow |z - z_k| > r_n^*$ και $|D|_{f^{on}, z_k}(z) > 1$, επομένως $|f^{on}(z) - z_k| = |z - z_k| |D|_{f^{on}, z_k}(z) > |z - z_k| > r_n^*$ δηλαδή $f^{on}(z) \in \mathbb{C} \setminus S_n^*$ οπότε αποδείχτηκε $f^{on}(\mathbb{C} \setminus S_n^*) \subset \mathbb{C} \setminus S_n^*$

2. **Απόδειξη του $\limsup_n S_n \subseteq W_{z_k}$.** Έστω $z \in S_n \subset B_{f^{on}, z_k}$, τότε ισχύουν: $|z - z_k| < r_n$,

$$|D|_{f^{on}, z_k}(z) < 1 \text{ καθώς επίσης και } |D|_{f^{on}, z_k}(f^{onj}(z)) < 1, \forall j, \text{ επειδή } f^{on}(S_n) \subset S_n.$$

Από το Θεώρημα 1 προκύπτει,

$$|f^{onj}(z) - z_k| = |(z - z_k)| \prod_{i=0}^{j-1} |D|_{f^{on}, z_k}(f^{oni}(z)) < r_n \cdot \prod_{i=0}^{j-1} |D|_{f^{on}, z_k}(f^{oni}(z)) \rightarrow 0 \text{ δηλαδή}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{onj}(z) = z_k \Rightarrow z \in W_{f^{on}, z_k} \equiv W_{f, z_k} \equiv W_{z_k} \text{ δυνάμει του Θεωρήματος 9. Κατά συ-}$$

$$\text{νέπεια } S_n \subseteq W_{z_k}, n \in \mathbb{N}, \text{ επομένως } \limsup_n S_n \subseteq W_{z_k} \\ n \rightarrow \infty$$

Απόδειξη του $W_{z_k} \subseteq \liminf_n S_n^*$ ή ισοδύναμα ότι $W_{z_k} \subseteq S_n^*, n \in \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα αρκεί να

$$\text{δειχτεί ότι } W_{z_k} \cap (\mathbb{C} \setminus S_n^*) = \emptyset, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Υποθέτοντας ότι } z \in W_{z_k} \cap (\mathbb{C} \setminus S_n^*) \neq \emptyset \Leftrightarrow z \in W_{z_k} \text{ και } z \in \mathbb{C} \setminus S_n^* \Leftrightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f^{onj}(z) = z_k$$

$$\text{και } \{f^{onj}(z)\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} \setminus S_n^* \text{ διότι το } \mathbb{C} \setminus S_n^* \text{ είναι προς τα εμπρός αναλλοίωτο.}$$

$$\text{Επομένως θα είναι και } \lim_{j \rightarrow \infty} f^{onj}(z) = z_k \in \mathbb{C} \setminus S_n^* \text{ το οποίο είναι άτοπο διότι } z_k \notin \mathbb{C} \setminus S_n^*,$$

$$\text{κατά συνέπεια } W_{z_k} \cap (\mathbb{C} \setminus S_n^*) = \emptyset \Leftrightarrow W_{z_k} \subseteq S_n^*.$$

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι $S_n \subseteq W_{z_k} \subseteq S_n^*, n \in \mathbb{N}$ κατά συνέπεια

$$\limsup_n S_n \subseteq W_{z_k} \subseteq \liminf_n S_n^*. \blacksquare$$

Θεώρημα 15

Έστω z_k ελκυστής τότε,

1. Για κάθε $z \in S_n$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία των αποστάσεων της τροχιάς από τον ελκυστή z_k , $\left(f^{oni}(z) - z_k \right)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
2. Για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus S_n^*$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία των αποστάσεων της τροχιάς από τον ελκυστή z_k , $\left(f^{oni}(z) - z_k \right)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα.
3. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύουν $S_1 \subseteq S_n \subseteq S_{nm}$ ή ισοδύναμα $r_1 \leq r_n \leq r_{nm}$ και τέλος
4. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύουν $S_{nm}^* \subseteq S_n^* \subseteq S_1^*$ ή ισοδύναμα $r_{mn}^* \leq r_n^* \leq r_1^*$.

Αποδείξεις

1. Έστω $z \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε επειδή το S_n είναι προς τα εμπρός αναλλοίωτο (βλ. προηγούμενο θεώρημα 14), τα $f^{on(i+1)}(z)$ και $f^{oni}(z)$ θα ανήκουν στο $S_n \subseteq B_{f^{on}, z_k}$, $\forall i$, επομένως από τον ορισμό της τομής B_{f^{on}, z_k} προκύπτει $|f^{on(i+1)}(z) - z_k| < |f^{oni}(z) - z_k|$, δηλαδή αποδείχτηκε ότι η ακολουθία των αποστάσεων είναι γνησίως φθίνουσα.
2. Έστω $z \in S_n^*$, $n \in \mathbb{N}$, τότε επειδή (βλ. προηγούμενο θεώρημα 14) το $\mathbb{C} \setminus S_n^* \subseteq \mathbb{C} \setminus B_{f^{on}, z_k}$ είναι προς τα εμπρός αναλλοίωτο, τα $f^{on(i+1)}(z)$ και $f^{oni}(z)$ θα ανήκουν στο $\mathbb{C} \setminus S_n^* \subseteq \mathbb{C} \setminus B_{f^{on}, z_k}$, $\forall i$, επομένως $|f^{on(i+1)}(z) - z_k| > |f^{oni}(z) - z_k|$, δηλαδή αποδείχτηκε ότι η ακολουθία των αποστάσεων είναι γνησίως αύξουσα.
3. Θα αποδειχθεί πρώτα ότι $S_1 \subseteq S_n$, $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $S_n \subseteq W_{z_k}$ έχουμε

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{onj}(z) = z_k \Leftrightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f^{oj}(z) = z_k \text{ (βλ. Πρόρισμα 13)}.$$

Έστω $z \in S_1$, τότε ισχύουν $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{oj}(z) = z_k$ και επίσης

$$|z - z_k| > |f(z) - z_k| > |f^{o2}(z) - z_k| > \dots > |f^{on}(z) - z_k| > \dots > |f^{onj}(z) - z_k| > \dots \Rightarrow$$

$$|z - z_k| > |f^{on}(z) - z_k| > |f^{o2n}(z) - z_k| > \dots > |f^{onj}(z) - z_k| > \dots \Rightarrow z \in S_n$$

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι $S_n \subseteq S_{nm}$

Έστω $z \in S_n$, τότε ισχύουν $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{oj}(z) = z_k$ και

$$|z - z_k| > |f^{on}(z) - z_k| > |f^{o2n}(z) - z_k| > \dots > |f^{omn}(z) - z_k| > \dots > |f^{o2mn}(z) - z_k| > \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z - z_k| > |f^{omn}(z) - z_k| > |f^{o2mn}(z) - z_k| > \dots \Rightarrow z \in S_{mn} \text{ επομένως } S_n \subseteq S_{mn}$$

Επειδή οι πυρήνες είναι ομόκεντρες κυκλικές περιοχές, από την αποδειχθείσα σχέση διάταξης των πυρήνων έλξης $S_1 \subseteq S_n \subseteq S_{mn}$ προκύπτει άμεσα $r_1 \leq r_n \leq r_{mn}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ✓

4. Αρκεί να δειχθεί ισοδύναμα ότι $\mathcal{C} \setminus \mathbf{S}_n^* \subseteq \mathcal{C} \setminus \mathbf{S}_{nm}^*$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$

Έστω $z \in \mathcal{C} \setminus \mathbf{S}_n^*$ τότε ισχύουν:

$$|z - z_k| < |f^{on}(z) - z_k| < |f^{o2n}(z) - z_k| < \dots < |f^{omn}(z) - z_k| < \dots < |f^{o2mn}(z) - z_k| < \dots$$

$$\Rightarrow |z - z_k| < |f^{omn}(z) - z_k| < |f^{o2mn}(z) - z_k| < \dots \Rightarrow z \in \mathcal{C} \setminus \mathbf{S}_{nm}^*, \text{ επομένως } \mathbf{S}_{nm}^* \subseteq \mathbf{S}_n^*$$

Από την τελευταία σχέση για $m = n, n = 1$ προκύπτει $\mathbf{S}_n^* \subseteq \mathbf{S}_1^*$ οπότε

$$\mathbf{S}_{nm}^* \subseteq \mathbf{S}_n^* \subseteq \mathbf{S}_1^*, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ και κατ' επέκταση } r_{mn}^* \leq r_n^* \leq r_1^* \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \blacksquare$$

3.1.4 Ελκτική Περιοχή και Μοναδιαίες Τομές

Μέσω των μοναδιαίων τομών και των στοιχείων αυτής (πυρήνων, ακτίνων έλξης κλπ) μπορούμε να πάρουμε πληροφορία για την ελκτική περιοχή του ελκυστή, καθώς και για την απόσταση του ελκυστή από το σύνολο αστάθειας.

Θεώρημα 16

Αν z_k ελκυστής, τότε ισχύει ότι $W_{z_k} = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(\mathbf{S}_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη

Θα δειχθεί πρώτα ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-oj}(\mathbf{S}_n) \subset W_{z_k}$ (i)

Έστω $z \in \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-oj}(\mathbf{S}_n)$, τότε υπάρχει

$$m \in \mathbb{N} : f^{om}(z) \in \mathbf{S}_n \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f^{onj}(f^{om}(z)) = f^{o(nj+m)}(z) = z_k \Rightarrow z \in W_{z_k} \text{ επομένως}$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-oj}(\mathbf{S}_n) \subset W_{z_k}.$$

Αντίστροφα θα δειχθεί ότι $W_{z_k} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-on}(\mathbf{S}_n)$ (ii)

Έστω $z \in W_{z_k} \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f^{onj}(z) = z_k$ οπότε,

$$\text{για } \varepsilon = r_n^* > 0, \text{ υπάρχει } j_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε, } \forall j > j_0 \Rightarrow |f^{onj}(z) - z_k| < r_n^*.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $(f^{onj}(z))_{j > j_0} \subset \mathbf{S}_n$, επομένως το z ανήκει στην j_0 -

$$\text{τάξεως προεικόνα του } \mathbf{S}_n, \text{ δηλαδή } z \in f^{-oj_0}(\mathbf{S}_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-on}(\mathbf{S}_n) \blacksquare$$

Ο ακόλουθος ορισμός εισάγει την έννοια της *οριακής μοναδιαίας τομής ελκυστή*, κατ' επέκταση των αντίστοιχων εννοιών που ορίστηκαν προηγουμένως.

Ορισμός 8. Σε κάθε ελκυστή $z_k \in X_f \setminus \{\infty\}$ ορίζουμε το σύνολο B_{∞, z_k} της **οριακής μοναδιαίας τομής** του ελκυστή ως $B_{\infty, z_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{f^{on}, z_k} \stackrel{op}{=} \{z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} |D|_{f^{on}, z_k}(z) < 1\}$

Παρατήρηση Το σύνολο $B_{\infty, z_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{f^{on}, z_k}$ είναι μη κενό αφού περιέχει τον ελκυστή. Η σύγκλιση εννοείται με την Hausdorff μετρική.

Θεώρημα 17

Έστω z_k ελκυστής, B_{∞, z_k} η οριακή μοναδιαία τομή του και F_f το σύνολο ευστάθειας του δυναμικού συστήματος, τότε $W_{z_k} \subseteq B_{\infty, z_k} \subseteq F_f$ και $\partial W_{z_k} \subseteq \partial B_{\infty, z_k} \subseteq J_f$.

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι, αν υπάρχει το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z)$, τότε η τιμή του είναι κάποιο σταθερό σημείο z_m , τύπου ελκυστή είτε παραβολικού τύπου, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_m$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } B_{\infty, z_k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} B_{f^{on}, z_k} = \{z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} |D|_{f^{on}, z_k}(z) < 1\} = \{z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{on}(z) - z_k}{z - z_k} \right| < 1\} = \\ &= \{z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_m \text{ και } \left| \frac{z_m - z_k}{z - z_k} \right| < 1\} = \\ &= \{z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k\} \cup \{z \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_m \neq z_k, |z - z_k| > |z_m - z_k|\} = \\ &= W_{z_k} \cup \bigcup_{z_m \neq z_k} (E_{z_m} \cap \{z \in \mathbb{C} / |z - z_k| > |z_m - z_k|\}) \text{ όπου} \\ E_{z_m} &= W_{z_m} \text{ αν } z_m \text{ ελκυστής ή } P_{z_m} \text{ αν } z_m \text{ παραβολικού τύπου, δηλαδή} \\ B_{\infty, z_k} &= W_{z_k} \cup \bigcup_{z_m \neq z_k} (E_{z_m} \cap \{z \in \mathbb{C} / |z - z_k| > |z_m - z_k|\}) \quad (1) \end{aligned}$$

Από την (1) προκύπτει ότι το σύνολο B_{∞, z_k} είναι ένωση ξένων συνόλων, υποσυνόλων του συνόλου ευστάθειας (ως τμήματα ελκτικών περιοχών ελκυστών και παραβολικών ελκυστών τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους). Άρα $W_{z_k} \subseteq B_{\infty, z_k} \subseteq F_f$ και $\partial W_{z_k} \subseteq \partial B_{\infty, z_k} \subseteq J_f$ ■

Το επόμενο θεώρημα μας παρέχει την δυνατότητα για τον υπολογισμό της απόστασης $\text{dist}(z_k, J_f)$ ενός ελκυστή από το σύνολο αστάθειάς J_f . Στο επόμενο κεφάλαιο αναπτύσσεται μια αναλυτική-υπολογιστική μέθοδος για τον υπολογισμό του $\text{dist}(z_k, J_f)$ η οποία βασίζεται στο αποτέλεσμα αυτό.

Θεώρημα 18

Αν z_k ελκυστής, τότε η απόσταση του $\text{dist}(z_k, J_f)$ από το σύνολο Julia J_f είναι το όριο της ακολουθίας $(r_n)_{n \geq 1}$ των ακτίνων έλξης του, δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \text{dist}(z_k, J_f)$$

Απόδειξη

Στο *Θεώρημα 14* αποδείχτηκε ότι $\limsup_n S_n \subseteq W_{z_k}$. Δηλαδή η ακολουθία των πυρήνων

$(S_n)_{n \geq 1}$ είναι φραγμένη, οπότε και η αντίστοιχη ακολουθία των ακτίνων $(r_n)_{n \geq 1}$ θα είναι φραγμένη από τον αριθμό $\text{dist}(z_k, \partial W_{z_k})$, δηλαδή $r_n < \text{dist}(z_k, \partial W_{z_k})$, $\forall n = 1, 2, \dots$. Επίσης, επειδή από το προηγούμενο θεώρημα 17 είναι $\partial W_{z_k} \subseteq \partial B_{\infty, z_k} \subseteq J_f$, έχουμε

$$\text{dist}(z_k, \partial W_{z_k}) = \text{dist}(z_k, \partial B_{\infty, z_k}) = \text{dist}(z_k, J_f) \quad (1)$$

Από τον ορισμό της οριακής μοναδιαίας τομής του z_k είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{f^{on}, z_k} = B_{\infty, z_k}$. Επομένως θα είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(z_k, \partial B_{f^{on}, z_k}) = \text{dist}(z_k, \partial B_{\infty, z_k}) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \text{dist}(z_k, \partial B_{\infty, z_k})$ η οποία λόγω της (1) γίνεται $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \text{dist}(z_k, J_f)$. ■

Τετριμμένο Παράδειγμα Εφαρμογής.

Υπολογισμός της απόστασης του υπέρ-ελκυστή $z_0 = 0$ του δυναμικού συστήματος

$(\mathbb{C}, f, \delta)$ με $f(z) = z^2$ από το σύνολο αστάθειάς του, με βάση το προηγούμενο Θεώρημα 18

Λύση

Η ακολουθία των μοναδιαίων τομών του δυναμικού συστήματος $(B_{f^{on}, 0})_{n \in \mathbb{N}}$ στο σημείο $z_0 = 0$

είναι: $B_{f^{on}, 0} = \{z \in \mathbb{C} / |f^{on}(z)| < |z|\} = \{z \in \mathbb{C} / |z|^{2^n-1} < 1\} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} = \mathbf{D}(0,1)$, $n = 1, 2, \dots$

Δηλαδή είναι σταθερή και ίση με τον μοναδιαίο δίσκο $\mathbf{D}(0,1)$. Κατά συνέπεια και η ακολουθία των ακτίνων έλξης $(r_n)_{n \geq 1}$ θα είναι σταθερή και ίση με την μονάδα $r_n = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Επομένως βάσει του Θεωρήματος 18 προκύπτει $\text{dist}(z_k, J_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$.

Το αποτέλεσμα είναι έγκυρο αφού είναι γνωστό, ότι το σύνολο αστάθειας J_f του δυναμικού συστήματος $f(z) = z^2$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος, κατά συνέπεια η απόσταση $\text{dist}(0, J_f) = 1$.

Παρατήρηση. Στο επόμενο κεφάλαιο αναπτύσσεται αναλυτική-υπολογιστική μέθοδος για τον υπολογισμό των r_n , $n = 1, 2, \dots$, και κατά συνέπεια του $\text{dist}(z_k, J_f)$

3.2 ΕΥΤΑΚΤΙΚΗ ΕΛΞΗ

Έστω z_k ελκυστής και σημείο $z \in W_{z_k}$ «πολύ κοντά» στον ελκυστή. Τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k$ και

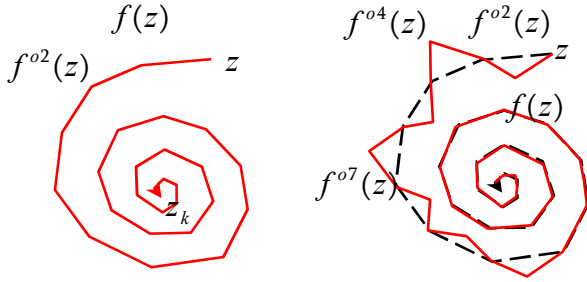
επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|f^{o(n+1)}(z) - z_k| < |f^{on}(z) - z_k|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Είναι φανερό ότι την τελευταία συνθήκη μπορεί να μην την ικανοποιούν όλα τα $z \in W_{z_k}$. Δίνεται ο ακόλουθος ορισμός

Ορισμός 9: Έστω z_k ελκυστής, $z \in W_{z_k}$ και $(f^{on}(z))_{n \in \mathbb{N}}$, η συγκλίνουσα προς το z_k τροχιά του.

Θα λέμε ότι η τροχιά του z παρουσιάζει σπειροειδή **ευταξία τάξεως** $m \geq 1$, αν m είναι ο ελάχιστος φυσικός για τον οποίο ισχύει $|f^{om(j+1)}(z) - z_k| < |f^{omj}(z) - z_k|$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός αυτός θα

συμβολίζεται με $\varepsilon_f(z)$, δηλαδή $\varepsilon_f(z) = \min_m \{m \in \mathbb{N}^* / |f^{om(j+1)}(z) - z_k| < |f^{omj}(z) - z_k|, \forall j \in \mathbb{N}\}$ ▲

Επομένως η ευταξία είναι μια απεικόνιση $\varepsilon_f : W_{z_k} \rightarrow \mathbb{N}$. Είναι προφανές ότι σημεία $z \in W_{z_k}$ ‘πολύ κοντά’ στον ελκυστή θα έχουν $\varepsilon_f(z) = 1$ ενώ σημεία $z \in W_{z_k}$ απείρως κοντά στο σύνολο Julia του μιγαδικού δυναμικού συστήματος, ενδέχεται να έχουν $\varepsilon_f(z) \rightarrow \infty$. Αυτό δεν ισχύει πάντα καθώς στο δυναμικό σύστημα της $f(z) = z^2$, όλα τα σημεία $z \in W_{z_k=0} = \mathbf{D}(0,1)$ στην ελκτική περιοχή του ελκυστή $z_k = 0$ έχουν $\varepsilon_f(z) = 1$.



Εικόνα 20 Ευτακτικές έλξεις με $\varepsilon_f(z) = 1$ (αριστερά) και με $\varepsilon_f(z) = 2$ (δεξιά)

Θεώρημα 19

Ισχύουν τα ακόλουθα:

1) Αν $z \in W_{z_k}$ με $\varepsilon_f(z) = n$, τότε $\varepsilon_{f^{on}}(z) = 1$

2) Αν $z \in \mathbf{S}_n$, τότε $\varepsilon_f(z) \leq n$

Απόδειξη

1. Επειδή, $\varepsilon_f(z) = n \Rightarrow$

$$\min_m \left\{ m \in \mathbb{N}^* / |f^{om(j+1)}(z) - z_k| < |f^{omj}(z) - z_k|, \forall j \in \mathbb{N} \right\} = n \Rightarrow$$

$$|f^{on(j+1)}(z) - z_k| < |f^{onj}(z) - z_k|, \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| (f^{on}(z))^{o(j+1)} - z_k \right| < \left| (f^{on}(z))^{oj} - z_k \right|, \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \varepsilon_{f^{on}}(z) = 1.$$

2. Έστω $z \in \mathbf{S}_n \subset B_{f^{on}, z_k}$. Επειδή $\mathbf{S}_n \subseteq W_{z_k}$ θα είναι $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{onj}(z) = z_k$

$$\Leftrightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f^{oj}(z) = z_k \quad (\text{βλ. Πρόρισμα 13}).$$

Έχουμε $|f^{on(j+1)}(z) - z_k| = |f^{onj}(z) - z_k| \cdot |D|_{f, z_k}(f^{onj}(z)) < |f^{onj}(z) - z_k|$, διότι ο πυρήνας $\mathbf{S}_n$ είναι προς τα εμπρός αναλλοίωτος (forward invariant) και επειδή $|D|_{f, z_k}(f^{onj}(z)) < 1$.

Αποδείχτηκε λοιπόν ότι $|f^{on(j+1)}(z) - z_k| < |f^{onj}(z) - z_k|, j = 0, 1, 2, \dots \Leftrightarrow \varepsilon_f(z) \leq n$ ■

Από το προηγούμενο θεώρημα καθώς και από τον ορισμό του πυρήνα έλξης προκύπτει ότι ο πυρήνας έχει δύο βασικές ιδιότητες:

Ιδιότητες του πυρήνα έλξης S_n ελκυστή

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $z \in S_n$ είναι $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{oj}(z) = z_k$ και
2. Για κάθε $z \in S_n$ $\varepsilon_f(z) \leq n$

Είναι φανερό ότι, τα σημεία του συνόλου $B_{f^{on}, z_k} \setminus S_n$, $n \in \mathbb{N}$ δεν ικανοποιούν γενικά και τις δύο ιδιότητες του n -πυρήνα, ενώ τα σημεία της $W_{z_k} \setminus S_n$, $n \in \mathbb{N}$ δεν ικανοποιούν την 2^{η} συνθήκη γενικά.

3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει μια αναλυτική μέθοδο περιορισμένης εφαρμογής για τον υπολογισμό της πρώτης ακτίνας έλξης $r_1 = \min \{ |z - z_k| \in R_+^* / z \in \partial B_{f, z_k} \} > 0$ και της ακτίνας διασποράς $r_1^* = \max \{ |z - z_k| \in R_+^* / z \in \partial B_{f, z_k} \} > 0$ του ελκυστή.

Μία ολοκληρωμένη αναλυτική-υπολογιστική λύση του ζητήματος παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 20

Έστω $z_k \in X_f$ ελκυστής ενός πολωνύμου f . Τότε η πρώτη ακτίνα έλξης r_1 και η πρώτη ακτίνα διασποράς r_1^* υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$r_1 = \min_r \left\{ r \in R_+^* / |D|_{f, z_k}(z_k + re^{2\pi it}) = 1, t \in [0, 1) \right\}$$

και

$$r_1^* = \max_r \left\{ r \in R_+^* / |D|_{f, z_k}(z_k + re^{2\pi it}) = 1, t \in [0, 1) \right\}$$

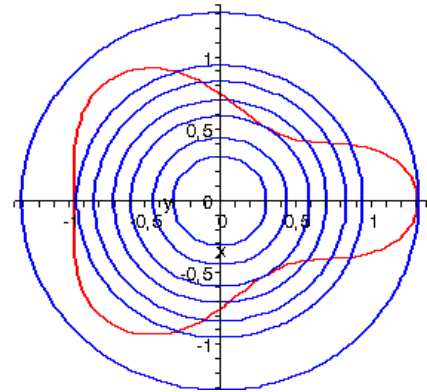
Απόδειξη

Θεωρούμε την μοναδιαία τομή B_{f, z_k} και ομόκεντρους κύκλους κέντρου z_k (στο σχήμα το $z_k = 0$) και μεταβλητής ακτίνας r . Τα σημεία τομής ενός κύκλου ακτίνας $r > 0$ και του $\partial B_{f, z_k}$ (αν υπάρχουν) προκύπτουν από την λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$\begin{cases} |z - z_k| = r \\ |D|_{f, z_k}(z) = 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} z = z_k + re^{2\pi it}, t \in [0, 1) \\ |D|_{f, z_k}(z_k + re^{2\pi it}) = 1 \end{cases}. \text{ Κατά συνέπεια}$$

για δεδομένη ακτίνα $r > 0$ τα σημεία τομής προσδιορίζονται από τις πραγματικές λύσεις $t \in [0, 1)$ της εξίσωσης $|D|_{f, z_k}(z_k + re^{2\pi it}) = 1$ (1)

Από το σχήμα προκύπτει ότι, αν η ακτίνα r επιλεγεί $r < r_1$ είτε $r > r_1^*$ τότε η εξίσωση (1) είναι αδύνατη. Επειδή οι δύο ακτίνες του ελκυστή αντιστοιχούν στις ακραίες τιμές του r για τις οποίες



η (1) έχει πραγματικές λύσεις θα είναι : $r_1 = \min_r \left\{ r \in \mathbb{R}_+^* / |D|_{f, z_k} (z_k + re^{2\pi i t}) = 1, t \in [0,1) \right\}$ και $r_1^* = \max_r \left\{ r \in \mathbb{R}_+^* / |D|_{f, z_k} (z_k + re^{2\pi i t}) = 1, t \in [0,1) \right\}$ ■

Εφαρμογή 1: Υπολογισμός ακτίνων ελκυστή πολυνόμου 2ου βαθμού

Δίνεται το δευτεροβάθμιο πολυνόμο $f(z) = az^2 + bz + c$ με $a, b, c \in \mathbb{C}$ και

$\left| 1 - \sqrt{(b-1)^2 - 4ac} \right| < 1$. Να υπολογισθούν οι ακτίνες r_1, r_1^* του ελκυστή z_1 του πολυνόμου.

Λύση

Τα σταθερά σημεία του πολυνόμου είναι $z_{1,2} = \frac{-b+1 \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}}{2a}$ και οι ιδιοτιμές τους είναι αντίστοιχα

$$\lambda_1 = f'(z_1) = 2az_1 + b = 1 - \sqrt{(b-1)^2 - 4ac} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = f'(z_2) = 2az_2 + b = 1 + \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}$$

Εξ ορισμού το z_1 είναι ελκυστής αν και μόνον αν

$$|\lambda_1| = |f'(z_1)| = \left| 1 - \sqrt{(b-1)^2 - 4ac} \right| < 1 \quad (1)$$

το οποίο ισχύει ως δεδομένο.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 20, οι ακτίνες του ελκυστή προκύπτουν ως η ελάχιστη και μέγιστη τιμή του $r > 0$ για το οποίο η εξίσωση

$$\left| f'(z_1) + \frac{f''(z_1)}{2!} (re^{2\pi i t}) \right| = 1 \Leftrightarrow |\lambda_1 + are^{2\pi i t}| = 1 \quad (2)$$

έχει λύση στο $[0,1)$.

Θέτοντας $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{2\pi i \varphi_\lambda}$, $\varphi_\lambda \in [0,1)$ και $a = |a| e^{2\pi i \varphi_a}$, $\varphi_a \in [0,1)$ η (2) γίνεται

$$\left| |\lambda_1| e^{2\pi i \varphi_\lambda} + r|a| e^{2\pi i \varphi_\lambda} e^{2\pi i t} \right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((|\lambda_1| \cos(2\pi \varphi_\lambda) + r|a| \cos 2\pi(\varphi_\lambda + t)) + i(|\lambda_1| \sin(2\pi \varphi_\lambda) + r|a| \sin 2\pi(\varphi_\lambda + t)) \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|\lambda_1| \cos(2\pi \varphi_\lambda) + r|a| \cos 2\pi(\varphi_\lambda + t))^2 + (|\lambda_1| \sin(2\pi \varphi_\lambda) + r|a| \sin 2\pi(\varphi_\lambda + t))^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$r^2|a|^2 + 2r|\lambda_1||a| \cos 2\pi(t + \varphi_a - \varphi_\lambda) + |\lambda_1|^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2\pi(t + \varphi_a - \varphi_\lambda) = \frac{1 - |a|^2 r^2 - |\lambda_1|^2}{2r|\lambda_1||a|} \quad (3)$$

Από την (3) προκύπτει ότι η (2) έχει πραγματικές λύσεις $t \in [0,1)$ αν και μόνον αν

$$\left| \frac{1 - |a|^2 r^2 - |\lambda_1|^2}{2r|\lambda_1||a|} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - |a|^2 r^2 - |\lambda_1|^2 - 2r|\lambda_1||a| \leq 0 \\ 1 - |a|^2 r^2 - |\lambda_1|^2 + 2r|\lambda_1||a| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1 - |\lambda_1|}{|a|} \leq r \leq \frac{1 + |\lambda_1|}{|a|} \quad \text{δηλαδή}$$

$$\frac{1 - |f'(z_1)|}{|a|} \leq r \leq \frac{1 + |f'(z_1)|}{|a|} \quad \text{επομένως}$$

$$r_1 = \frac{1 - |f'(z_1)|}{|a|} \quad \text{και} \quad r_1^* = \frac{1 + |f'(z_1)|}{|a|} \quad \text{με} \quad |f'(z_1)| < 1 \quad (4)$$

Τέλος κάνοντας χρήση της (1), οι (4) γράφονται και ως

$$r_1 = \frac{1 - \left| 1 - \sqrt{(b-1)^2 - 4ac} \right|}{|a|}, \quad r_1^* = \frac{1 + \left| 1 - \sqrt{(b-1)^2 - 4ac} \right|}{|a|} \quad \text{με} \quad \left| 1 - \sqrt{(b-1)^2 - 4ac} \right| < 1$$

Εφαρμογή 2: Υπολογισμός ακτίνων ελκυστή, ειδικών πολωνύμων βαθμού >2

Δίνεται το πολυνόμο $f(z) = az^n + \lambda z$, $a, \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = |f'(0)| < 1$, $n \geq 2$.

Να υπολογισθούν οι ακτίνες r_1, r_1^* του ελκυστή $z_k = 0$ του πολωνύμου

Λύση

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\left| f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} (re^{2\pi i t}) + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (re^{2\pi i t})^{n-1} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \lambda + ar^{n-1} e^{2\pi(n-1)it} \right| = 1 \quad (1)$$

Θέτοντας $\lambda = |\lambda| e^{2\pi i \varphi_\lambda}$, $\varphi_\lambda \in [0, 1)$ και $a = |a| e^{2\pi i \varphi_a}$, $\varphi_a \in [0, 1)$ η (1) γίνεται

$$\left| |\lambda| e^{2\pi i \varphi_\lambda} + r^{n-1} |a| e^{2\pi i ((n-1)t + \varphi_a)} \right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(|\lambda| \cos(2\pi \varphi_\lambda) + r^{n-1} |a| \cos 2\pi((n-1)t + \varphi_a) \right) + i \left(|\lambda| \sin(2\pi \varphi_\lambda) + r^{n-1} |a| \sin 2\pi((n-1)t + \varphi_a) \right) \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(|\lambda| \cos(2\pi \varphi_\lambda) + r^{n-1} |a| \cos 2\pi((n-1)t + \varphi_a) \right)^2 + \left(|\lambda| \sin(2\pi \varphi_\lambda) + r^{n-1} |a| \sin 2\pi((n-1)t + \varphi_a) \right)^2 \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$r^{2n-2} |a|^2 + 2r^{n-1} |\lambda| |a| \cos 2\pi((n-1)t + \varphi_a - \varphi_\lambda) + |\lambda|^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\pi((n-1)t + \varphi_a - \varphi_\lambda) = \frac{1 - r^{2n-2} |a|^2 - |\lambda|^2}{2r^{n-1} |\lambda| |a|} \quad (2)$$

Από την (2) προκύπτει ότι η (1) έχει πραγματικές λύσεις $t \in [0, 1)$ αν και μόνον αν

$$\left| \frac{1 - r^{2n-2} |a|^2 - |\lambda|^2}{2r^{n-1} |\lambda| |a|} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 r^{2n-2} + 2|\lambda| |a| r^{n-1} + |\lambda|^2 - 1 \geq 0 \\ |a|^2 r^{2n-2} - 2|\lambda| |a| r^{n-1} + 1 - |\lambda|^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1 - |\lambda|}{|a|} \leq r^{n-1} \leq \frac{1 + |\lambda|}{|a|} \text{ δηλαδή}$$

$$\left(\frac{1 - |\lambda|}{|a|} \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq r \leq \left(\frac{1 + |\lambda|}{|a|} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{Επειδή} \quad |\lambda| = |f'(z_k)| = |f'(0)| < 1 \text{ οι ακτίνες είναι}$$

$$r_1 = \left(\frac{1 - |f'(z_k)|}{|a|} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{και} \quad r_1^* = \left(\frac{1 + |f'(z_k)|}{|a|} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (5)$$

Παρατηρήσεις

1. Είναι φανερό, ότι για πολυνόμο βαθμού >2 η ανωτέρω αναλυτική μέθοδος υπολογισμού των ακτίνων ενός ελκυστή παρουσιάζει δυσχέρειες. Πρακτικά ο υπολογισμός τους μπορεί να γίνει μόνο με υπολογιστικές μεθόδους.
2. Από τους τύπους (5) προκύπτει ότι $r_1 \leq r_1^*$ και ότι $r_1 = r_1^* \Leftrightarrow f'(z_k) = 0$
3. Επίσης από τις κλειστές εκφράσεις των ακτίνων στις (4) και (5), προκύπτει ότι η ιδιοτιμή του ελκυστή z_k , $|f'(z_k)| < 1$ καθορίζει και το μέγεθος των r_1, r_1^* . Όσο μειώνεται η ιδιοτιμή του ελκυστή, αυξάνεται η r_1 και μειώνεται η r_1^* .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΠΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

4.1 ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΤΟΜΗ

4.1.1 Εισαγωγικά

Στο Θεώρημα 18, του προηγούμενου κεφαλαίου αποδείχτηκε ότι η απόσταση ενός ελκυστή z_k από το σύνολο αστάθειας του δυναμικού συστήματος, $\text{dist}(z_k, J_f)$ μπορεί να υπολογιστεί ως το όριο της ακολουθίας των ακτίνων έλξης καθώς το $n \rightarrow \infty$, δηλαδή ότι

$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \text{dist}(z_k, J_f)$. Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι:

Πως μπορούν να υπολογιστούν οι ακτίνες $r_n = \min \{ |z - z_k| \mid z \in R_+^* / z \in \partial B_{f^{on}, z_k} \}$ και $r_n^* = \max \{ |z - z_k| \mid z \in R_+^* / z \in \partial B_{f^{on}, z_k} \}$, $n = 1, 2, \dots$ ενός ελκυστή z_k ;

Υπενθυμίζεται ότι:

Γεωμετρικά το σύνολο $\partial B_{f^{on}, z_k}$, $n = 1, 2, \dots$ είναι είτε μία απλή κλειστή καμπύλη είτε πεπερασμένη ένωση απλών κλειστών καμπύλων με παραμετρική εξίσωση

$\partial B_{f^{on}, z_k} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |D|_{f^{on}, z_k}(z) = 1 \} \equiv \{ z \in \mathbb{C} \mid D_{f^{on}, z_k}(z) = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi] \}$ και επίσης ότι ο ελκυστής z_k ανήκει στο B_{f^{on}, z_k} , δηλαδή είναι στο εσωτερικό της καμπύλης $\partial B_{f^{on}, z_k}$

Το πρόβλημα όπως τέθηκε παραπάνω, είναι ουσιαστικά η εύρεση της «μέγιστης και ελάχιστης απόστασης ενός σημείου από μία καμπύλη», δηλαδή είναι ένα τυπικό πρόβλημα Βελτιστοποίησης. Επειδή δεν υπάρχει κάποια μέθοδος στην βιβλιογραφία η οποία να επιλύει ή να συμβάλει στην επίλυσή του και επειδή το πρόβλημα αυτό παρουσιάζει αυτοτελώς ενδιαφέρον, θα αντιμετωπιστεί σε ένα γενικότερο πλαίσιο και όχι μόνον για ελκυστές.

Το πρόβλημα γενικά τίθεται ως εξής:

Διατύπωση του προβλήματος:

Δίνεται το μιγαδικό πολυώνυμο $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ με $a_n \neq 0$, ο πραγματικός αριθμός $r > 0$, ο μιγαδικός αριθμός $z_0 \in \mathbb{C}$ και το σύνολο πολυωνυμικής τομής

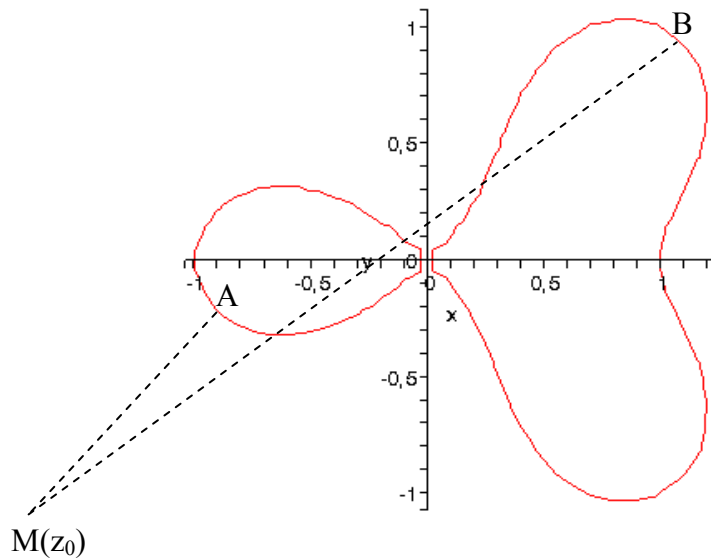
$$\partial B_{f,r} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| = r \} \equiv \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) = r e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi] \}.$$

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της απόστασης $|z - z_0|$ με $z \in \partial B_{f,r}$, δηλαδή ζητείται ο προσδιορισμός των αριθμών $\min_{z \in \partial B} |z - z_0| \equiv \text{dist}(z_0, \partial B_{f,r})$ και $\max_{z \in \partial B} |z - z_0|$ □

Παράδειγμα προβλήματος: Για το τριτοβάθμιο μιγαδικό πολυώνυμο $f(z) = z^3 - z^2 + 1$ η αντίστοιχη πολυωνυμική τομή με $r = 1$ είναι $|f(x + iy)| = 1$ ή ισοδύναμα:

$$\partial B_{f,r} : x^6 - 2x^5 + 3x^4 y^2 + x^4 - 4x^3 y^2 + 2x^3 + 3x^2 y^4 + 2x^2 y^2 - 2x^2 - 6xy^2 - 2xy^4 + 2y^2 + y^4 + y^6 = 0$$

Το γράφημα της τομής εικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Εικόνα 21 Η μέγιστη (MB) και η ελάχιστη (MA) απόσταση σημείου από πολωνυμική τομή

Έστω M η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z_0 στο επίπεδο. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί με διαστικτη γραμμή η ζητούμενη μέγιστη $MB = \max_{z \in \partial B} |z - z_0|$ και ελάχιστη $MA = \min_{z \in \partial B} |z - z_0|$ απόστασή του από το σύνολο της πολωνυμικής τομής.

Είναι προφανές, ότι η υπάρχουσα μεθοδολογία του Διαφορικού Λογισμού, δεν μπορεί να βοηθήσει για την εύρεση των MB και MA λόγω της πολύπλοκης έκφρασης του συνόρου της πολωνυμικής τομής σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

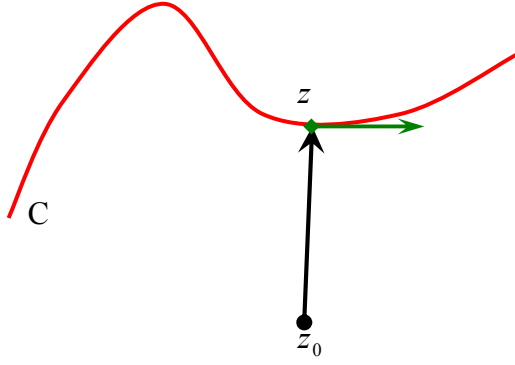
Για το λόγο αυτό, στη συνέχεια επιχειρείται μια διαφορετική προσέγγιση η οποία επιλύει το πρόβλημα αποφεύγοντας τις καρτεσιανές εκφράσεις των πολωνυμικών τομών και αξιοποιώντας την μιγαδική έκφραση των πολωνυμικών τομών $\partial B_{f,r} = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Η ιδέα της λύσης βασίζεται στον εντοπισμό των ακρότατων της απόστασης $|z - z_0|$, $z \in B$ με χρήση ομόκεντρων κύκλων κέντρου $z_0 \in \mathbb{C}$, εφαπτόμενων στην καμπύλη ή ισοδύναμα με την εύρεση του συνόλου των προβολών ενός σημείου πάνω στην καμπύλη. Η έννοια αυτή αποσαφηνίζεται στη συνέχεια.

4.1.2 Προβολές σημείου σε καμπύλη.

Δίνεται ο ακόλουθος ορισμός σχετικά με τις προβολές ενός σημείου πάνω σε καμπύλη.

Ορισμός 10: Έστω λεία καμπύλη $\mathbf{C}$ (ανοικτή ή κλειστή) επί του μιγαδικού επιπέδου και σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$. Το σύνολο των μιγαδικών διανυσμάτων $z - z_0$ με $z \in \mathbf{C}$ τα οποία είναι κάθετα στην καμπύλη $\mathbf{C}$, δηλαδή $(z - z_0) \perp \mathbf{C}$ (κάθετα στο εφαπτόμενο διάνυσμα της $\mathbf{C}$ στο $z \in \mathbf{C}$), θα αποκαλείται **προβολικό σύνολο του $z_0 \in \mathbb{C}$ επί της καμπύλης $\mathbf{C}$** και θα δηλώνεται συμβολικά ως **Προβ($z_0, \mathbf{C}$)**. Επομένως **Προβ($z_0, \mathbf{C}$)** = $\{z - z_0 \in \mathbb{C} / (z - z_0) \perp \mathbf{C}, z \in \mathbf{C}\}$ ▲

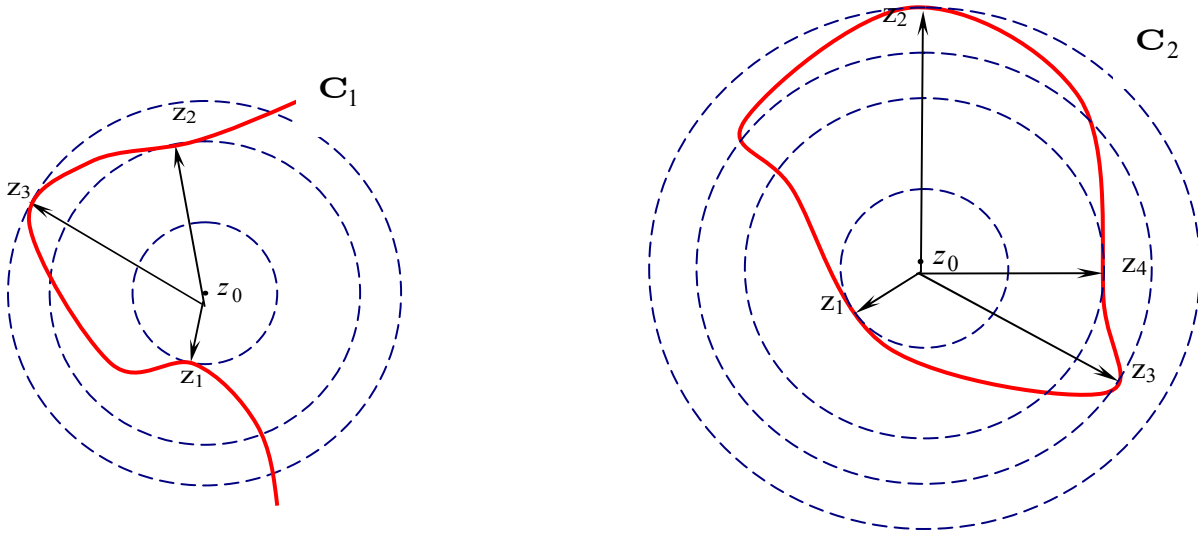


Εικόνα 22 Η έννοια της προβολής σημείου σε καμπύλη.

Στα σχήματα της εικόνας 23 τα σύνολα $\Pi\rho\omicron\beta(z_0, \mathbf{C})$ είναι αντίστοιχα

$$\Pi\rho\omicron\beta(z_0, \mathbf{C}_1) = \{z_1 - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0\} \text{ και}$$

$$\Pi\rho\omicron\beta(z_0, \mathbf{C}_2) = \{z_1 - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0, z_4 - z_0\}$$



Εικόνα 23 Προβολικά σύνολα σημείου σε ανοικτή και κλειστή καμπύλη.

Είναι προφανές ότι η ελάχιστη και μέγιστη απόσταση σημείου από καμπύλη δίνεται

$$\text{από τις σχέσεις } \min_{z \in B} |z - z_0| \equiv \min |\Pi\rho\omicron\beta(z_0, \mathbf{C})| \quad \text{και} \quad \max_{z \in B} |z - z_0| \equiv \max |\Pi\rho\omicron\beta(z_0, \mathbf{C})|$$

όπου με τον συμβολισμό $|\Pi\rho\omicron\beta(z_0, \mathbf{C})|$ δηλώνεται το σύνολο των μέτρων των στοιχείων του προβολικού συνόλου. Δηλαδή $|\Pi\rho\omicron\beta(z_0, \mathbf{C})| = \{|z| \in \mathbb{R}_+ / z \in \Pi\rho\omicron\beta(z_0, \mathbf{C})\}$.

Επειδή το ενδιαφέρον εστιάζεται σε καμπύλες οι οποίες είναι σύνορα πολωνυμικών τομών δηλαδή $\mathbf{C} = \partial B_{f,r}$, για τον λόγο αυτό είναι αναγκαίος ο αναλυτικός προσδιορισμός του συνόλου

$\Pi\rho\omicron\beta(z_0, \partial B_{f,r})$. Στη διαδικασία προσδιορισμού θα γίνει χρήση του γνωστού Θεωρήματος του Sylvester.

Θεώρημα (Sylvester)

Έστω τα πολυώνυμα βαθμού n , $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$ και $Q(z) = b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0$ με $b_n \neq 0$ και ο $(2n) \times (2n)$ πίνακας

$$S_z(P, Q) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

Τα πολυώνυμα $P(z)$ και $Q(z)$ έχουν κοινή ρίζα εάν και μόνον εάν ο τετραγωνικός πίνακας $S_z(P, Q)$ είναι μη ομαλός, δηλαδή $\det(S_z(P, Q)) = 0$. ■
(Για απόδειξη βλ. [8] ενότητα Πολυώνυμα σελ 25)

Συμβολισμός (Μετασχηματισμός Taylor πολυωνύμου στο $z_0 \in \mathbb{C}$)

Αν $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ πολυώνυμο και $z_0 \in \mathbb{C}$, τότε με f_{z_0} συμβολίζουμε το πολυώνυμο

$$f_{z_0}(w) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} w^m$$

Με τον μετασχηματισμό αυτό του πολυωνύμου η αρχή των αξόνων μεταφέρεται στο $z_0 \in \mathbb{C}$

Το επόμενο Θεώρημα προσδιορίζει αναλυτικά το προβολικό σύνολο $\text{Προβ}(z_0, \partial B_{f,r})$ πολυωνυμικής τομής.

Θεώρημα 21

Έστω πολυώνυμο $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, ο μιγαδικός $z_0 \in \mathbb{C}$, ο $r > 0$ και η πολυωνυμική τομή $\partial B_{f,r} = \{z \in \mathbb{C} / |f(z)| = r\} \equiv \{z \in \mathbb{C} / f(z) = r e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$

Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Το $w(\theta) = z(\theta) - z_0 \in \text{Προβ}(z_0, \partial B_{f,r})$ με $\theta \in [0, 2\pi]$ εάν και μόνον

Το n -βαθμού παραμετρικό⁹ πολυώνυμο μεταβλητής k :

$$P_{z_0, \theta}(k) = \det S_w \left(f_{z_0}(w) - r e^{i\theta}, w \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) - k e^{i\theta} \right) \text{ έχει πραγματική ρίζα στο } \mathbb{R}^*$$

⁹ Οι μιγαδικοί συντελεστές του πολυωνύμου είναι της μορφής $a_i = a_i(\theta), i = 0, 1, \dots, n$, με $\theta \in [0, 2\pi]$.

Το πολυώνυμο $P_{z_0, \theta}(k)$ θα αποκαλείται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* της πολυωνυμικής τομής στο σημείο z_0 ενώ η εξίσωση $\det S_k(\text{Re}(P_{z_0, \theta}(k)), \text{Im}(P_{z_0, \theta}(k))) = 0$ *χαρακτηριστική εξίσωση*

2. Το $w(\theta) = z(\theta) - z_0 \in \text{Προβ}(z_0, B)$ με $\theta \in [0, 2\pi]$ εάν και μόνον το θ ανήκει στο σύνολο ριζών $\Theta \subset [0, 2\pi)$ της πραγματικής εξίσωσης

$$\det \mathbf{S}_k(\text{Re}(P_{z_0, \theta}(k)), \text{Im}(P_{z_0, \theta}(k))) = 0$$

3. Το προβολικό σύνολο προσδιορίζεται αναλυτικά ως:

$$\text{Προβ}(z_0, \partial B_{f,r}) = \left\{ w \in \mathbb{C} / f_{z_0}(w) = re^{i\theta}, \forall \theta \in \Theta \text{ και } \text{Im} \left(\frac{w \cdot f'_{z_0}(w)}{f_{z_0}(w)} \right) = 0 \right\}$$

Αποδείξεις

Απόδειξη του 1

Η ανάπτυξη του πολωνύμου σε Taylor με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ δίνει

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Το σύνολο $\partial B_{f,r} = \{z \in \mathbb{C} / |f(z)| = r\}$ περιγράφεται ισοδύναμα από την πολωνυμική παραμε-

$$\text{τρική εξίσωση } f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = re^{i\theta}.$$

Έστω $z = z(\theta), \theta \in [0, 2\pi]$ η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης, τότε προφανώς είναι

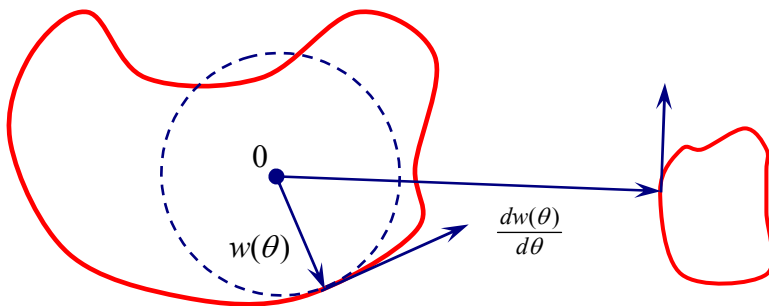
$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z(\theta) - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z(\theta) - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z(\theta) - z_0)^n = re^{i\theta}.$$

Με το μετασχηματισμό $z(\theta) - z_0 = w(\theta)$ (μεταφορά του z_0 στο 0), η τελευταία γίνεται

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}w(\theta) + \frac{f''(z_0)}{2!}w(\theta)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}w(\theta)^n = re^{i\theta} \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$f_{z_0}(w(\theta)) = re^{i\theta} \quad (1)$$

$$\text{όπου } f_{z_0}(w) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} w^m.$$



Εικόνα 24 Η καθετότητα των διανυσμάτων $w(\theta)$ και $w'(\theta)$

Το εφαπτόμενο μιγαδικό διάνυσμα $w'(\theta) = \frac{dw(\theta)}{d\theta}$ της καμπύλης προσδιορίζεται, παραγωγίζοντας την (1) η οποία δίνει

$$\frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta)) w'(\theta) = r e^{i\theta} \Leftrightarrow w'(\theta) = \frac{r e^{i\theta}}{\frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta))} \quad (2)$$

Προφανώς οι τιμές της παραμέτρου $\theta \in [0, 2\pi]$ αντιστοιχούν στα σημεία της καμπύλης στα οποία ομόκεντροι κύκλοι κέντρου 0 και κατάλληλης ακτίνας, εφάπτονται στην καμπύλη. Επομένως αναγκαία και ικανή συνθήκη, για τον προσδιορισμό του ελάχιστου, είναι προφανώς η καθετότητα των μιγαδικών διανυσμάτων¹⁰ $\overrightarrow{w(\theta)}, \overrightarrow{w'(\theta)}$ (βλ. εικόνα 24)

$$\overrightarrow{w(\theta)} \perp \overrightarrow{w'(\theta)} \Leftrightarrow \overline{w(\theta)} w'(\theta) + w(\theta) \overline{w'(\theta)} = 0 \Leftrightarrow \overline{w(\theta)} \frac{r e^{i\theta}}{\frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta))} - w(\theta) \frac{r e^{-i\theta}}{\frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta))} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta))}{e^{i\theta}} \right)} = \frac{w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta))}{e^{i\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} \left(\frac{w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta))}{e^{i\theta}} \right) = 0 \Leftrightarrow \text{ο μιγαδικός } \frac{w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta))}{e^{i\theta}} \text{ είναι πραγματικός αριθμός}$$

κατά συνέπεια υπάρχει πραγματικός $k \in \mathbb{R}$ (εξαρτώμενος από το θ) έτσι ώστε να ισχύει

$$\frac{w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta))}{e^{i\theta}} = k \Leftrightarrow w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta)) - k e^{i\theta} = 0 \quad (3)$$

Συνοψίζοντας ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (3) δηλαδή

$$\begin{cases} f_{z_0}(w(\theta)) - r e^{i\theta} = 0 \\ w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta)) - k e^{i\theta} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Επειδή οι πολωνυμικές εξισώσεις (5) έχουν κοινή ρίζα το $w(\theta)$ σύμφωνα με το Θεώρημα του Sylvester προκύπτει ότι ο $(2n \times 2n)$ πίνακας των πολυνόμων (5) είναι μη ομαλός κατά συνέπεια

$$\det \mathbf{S}_w \left(f_{z_0}(w) - r e^{i\theta}, w \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) - k e^{i\theta} \right) = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], k \in \mathbb{R}^*$$

ή ισοδύναμα το πολυώνυμο μεταβλητής k :

$$P_{z_0, \theta}(k) = \det \mathbf{S}_w \left(f_{z_0}(w) - r e^{i\theta}, w \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) - k e^{i\theta} \right) \text{ έχει πραγματική ρίζα στο } \mathbb{R}^*. \blacksquare$$

Απόδειξη του 2

Επειδή το πολυώνυμο

$$P_{z_0, \theta}(k) = \det \mathbf{S}_w \left(f_{z_0}(w) - r e^{i\theta}, w \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) - k e^{i\theta} \right)$$

¹⁰ Η καθετότητα δύο μιγαδικών εκφράζεται από την $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{z} \Leftrightarrow \overline{w} z + w \overline{z} = 0$

έχει ρίζα $k \in \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι

$$P_{z_0, \theta}(k) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(P_{z_0, \theta}(k)) + i \operatorname{Im}(P_{z_0, \theta}(k)) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(P_{z_0, \theta}(k)) = 0 \text{ και } \operatorname{Im}(P_{z_0, \theta}(k)) = 0.$$

Δηλαδή τα πολυώνυμα $\operatorname{Re}(P_{\theta}(k))$ και $\operatorname{Im}(P_{\theta}(k))$ έχουν κοινή (πραγματική) ρίζα επομένως

$\det \mathbf{S}_k(\operatorname{Re}(P_{z_0, \theta}(k)), \operatorname{Im}(P_{z_0, \theta}(k))) = 0$. Από την τελευταία, η οποία είναι μη γραμμική εξίσωση ημιτόνων και συνημιτόνων του θ , υπολογίζεται το σύνολο λύσεων Θ αυτής ■

Απόδειξη του 3

Το σύνολο προβολών του $\Pi\text{ροβ}(z_0, \partial B_{f,r})$ προσδιορίζεται από την λύση του συστήματος των (5) δηλαδή

$$\begin{cases} f_{z_0}(w(\theta)) - re^{i\theta} = 0, & \theta \in \Theta \\ w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta)) - ke^{i\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_{z_0}(w(\theta)) - re^{i\theta} = 0, & \theta \in \Theta \\ w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta)) - \frac{k}{r} f_{z_0}(w(\theta)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f_{z_0}(w(\theta)) - re^{i\theta} = 0, & \theta \in \Theta \\ \frac{w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta))}{f_{z_0}(w(\theta))} = \frac{k}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_{z_0}(w(\theta)) - re^{i\theta} = 0, & \theta \in \Theta \\ \operatorname{Im} \left(\frac{w(\theta) \frac{d}{dw} f_{z_0}(w(\theta))}{f_{z_0}(w(\theta))} \right) = 0 \end{cases}$$

επομένως

$$\Pi\text{ροβ}(z_0, \partial B_{f,r}) = \left\{ w \in \mathbb{C} / f_{z_0}(w) = re^{i\theta}, \forall \theta \in \Theta \text{ και } \operatorname{Im} \left(\frac{w \cdot \frac{d}{dw} f_{z_0}(w)}{f_{z_0}(w)} \right) = 0 \right\} \quad \blacksquare$$

Από το θεώρημα 21 προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος.

Αλγόριθμος

Βήμα 1 : Μεταφορά της αρχής του συστήματος συντεταγμένων στο z_0

Από το πολυώνυμο $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ σχηματίζουμε το πολυώνυμο κέντρου z_0 :

$$f_{z_0}(w) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} w^m$$

Βήμα 2 : Εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$P_{z_0, \theta}(k) = \det \mathbf{S}_w \left(f_{z_0}(w) - re^{i\theta}, w \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) - ke^{i\theta} \right), \quad \theta \in [0, 2\pi], k \in \mathbb{R}$$

Βήμα 3 : Επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης-εύρεση του συνόλου Θ

Θεωρούμε την τριγωνομετρική εξίσωση ως προς θ

$$\det \mathbf{S}_k(\operatorname{Re}(P_{z_0, \theta}(k)), \operatorname{Im}(P_{z_0, \theta}(k))) = 0$$

από την οποία προσδιορίζεται το σύνολο ριζών της $\Theta = \{\theta_j, j = 1, 2, \dots, m\}$

Βήμα 4 : Εύρεση του συνόλου $\Pi\text{ροβ}(z_0, \partial B_{f,r})$

Για κάθε ρίζα $\theta_j \in \Theta$ επιλύεται η $f_{z_0}(w) = re^{i\theta_j}$, δηλαδή η

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}w + \frac{f''(z_0)}{2!}w^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}w^n - re^{i\theta_j} = 0 \quad (1)$$

Η (1) επιλυόμενη δίνει n-ρίζες $w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{nj}$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, m$

και από αυτές επιλέγεται αυτή (ή αυτές) για την οποία το $\operatorname{Im} \left(\frac{w \cdot \frac{d}{dw} f_{z_0}(w)}{f_{z_0}(w)} \right) = 0$

Βήμα 5 :max-min

$$\min_{z \in B} |z - z_0| \equiv \min |\mathbf{Προβ}(z_0, \partial B_{f,r})| \quad \text{και} \quad \max_{z \in B} |z - z_0| \equiv \max |\mathbf{Προβ}(z_0, \partial B_{f,r})|$$

Τέλος αλγορίθμου

4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Εφαρμογή 1

Δίνεται το πολυώνυμο $f(z) = z^3 - 2z^2 - 4z + 1$ με $z_0 = 0$ και η μοναδιαία πολυωνυμική τομή καμπύλη $\partial B_f = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$. Να βρεθεί η χαρακτηριστική εξίσωση.

Λύση

Επειδή $z_0 = 0$ και $r = 1$ είναι

$$f_{z_0}(w) - ce^{i\theta} = w^3 - 2w^2 - 4w + 1 - e^{i\theta} \quad \text{και}$$

$$w \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) - ke^{i\theta} = 3w^3 - 4w^2 - 4w - kie^{i\theta} \quad \text{κατά συνέπεια}$$

$$P_{z_0, \theta}(k) = \det \mathbf{S} \left(f_{z_0}(w) - e^{i\theta}, \quad w \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) - ke^{i\theta}, \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - e^{i\theta} & -4 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{i\theta} & -4 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{i\theta} & | & -4 & -2 & 1 \\ -ke^{i\theta} & -4 & -4 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -ke^{i\theta} & -4 & | & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -ke^{i\theta} & | & -4 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3i\theta} k^3 + (-31e^{2i\theta} - 9e^{3i\theta}) k^2 + (122e^{2i\theta} - 469e^{i\theta} + 27e^{3i\theta}) k - 469 + 591e^{i\theta} - 27e^{3i\theta} - 95e^{2i\theta}$$

Από τον πίνακα Sylvester είναι φανερό, ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_{z_0, \theta}(k)$ για ένα πολυώνυμο n βαθμού, είναι επίσης πολυώνυμο n βαθμού με μιγαδικούς συντελεστές

$$P_{z_0, \theta}(k) = a_n(\theta)k^n + a_{n-1}(\theta)k^{n-1} + \dots + a_1(\theta)k + a_0(\theta)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\det \mathbf{S}_k(\operatorname{Re}(P_{z_0, \theta}(k)), \operatorname{Im}(P_{z_0, \theta}(k))) = 0$ είναι μια πολύπλοκη και εκτενής τριγωνομετρική εξίσωση ημιτόνων και συνημιτόνων.

Παράδειγμα: για το τριτοβάθμιο πολυώνυμο του παραδείγματος η χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει από την ανάπτυξη μιας ορίζουσας (6x6)

$$\det \mathbf{S}_k(\operatorname{Re}(P_{z_0, \theta}(k)), \operatorname{Im}(P_{z_0, \theta}(k))) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \operatorname{Re}(a_0(\theta)) & \operatorname{Re}(a_1(\theta)) & \operatorname{Re}(a_2(\theta)) & \operatorname{Re}(a_3(\theta)) & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}(a_0(\theta)) & \operatorname{Re}(a_1(\theta)) & \operatorname{Re}(a_2(\theta)) & \operatorname{Re}(a_3(\theta)) & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Re}(a_0(\theta)) & \operatorname{Re}(a_1(\theta)) & \operatorname{Re}(a_2(\theta)) & \operatorname{Re}(a_3(\theta)) \\ \operatorname{Im}(a_0(\theta)) & \operatorname{Im}(a_1(\theta)) & \operatorname{Im}(a_2(\theta)) & \operatorname{Im}(a_3(\theta)) & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Im}(a_0(\theta)) & \operatorname{Im}(a_1(\theta)) & \operatorname{Im}(a_2(\theta)) & \operatorname{Im}(a_3(\theta)) & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Im}(a_0(\theta)) & \operatorname{Im}(a_1(\theta)) & \operatorname{Im}(a_2(\theta)) & \operatorname{Im}(a_3(\theta)) \end{vmatrix} = 0$$

όπου

$$a_3(\theta) = e^{3i\theta}, \quad a_2(\theta) = -31e^{2i\theta} - 9e^{3i\theta}, \quad a_1(\theta) = 122e^{2i\theta} - 469e^{i\theta} + 27e^{3i\theta}$$

$$a_0(\theta) = -469 + 591e^{i\theta} - 27e^{3i\theta} - 95e^{2i\theta}.$$

Με αντικατάσταση στην ορίζουσα και την ανάπτυξη της, γίνεται φανερό η πολυπλοκότητα και η έκταση της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Εφαρμογή 2. Βελτιστοποίηση σε τομές πρωτοβαθμίου πολυώνυμου

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι τετριμμένο και ήδη λυμένο με κλασικές μεθόδους. Όμως η αναφορά σε αυτό γίνεται για να καταδειχθούν τα βήματα της μεθόδου αλλά και διότι είναι η μόνη περίπτωση που δεν απαιτείται η χρήση H/Y.

Δίνεται το πρωτοβάθμιο μιγαδικό πολυώνυμο $f(z) = a_1 z + a_0$, $a_1 \neq 0$.

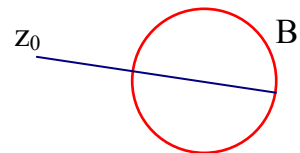
Να υπολογιστεί η μέγιστη και ελάχιστη απόσταση του σημείου z_0 από την πολυωνυμική τομή

$$\partial B_{f,r} = \{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| = r\} \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Λύση

Η πολυωνυμική τομή στην περίπτωση πρωτοβαθμίου πολυω-

νύμου είναι προφανώς κύκλος εξίσωσης $\left| z + \frac{a_0}{a_1} \right| = \frac{r}{|a_1|}$



Βήμα 1 (Μεταφορά της αρχής του συστήματος συντεταγμένων στο z_0)

Μεταφέροντας το σύστημα συντεταγμένων στο z_0 είναι $f_{z_0}(w) = f(z_0) + f'(z_0)w$

$$\text{με } \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) = f'(z_0)$$

Βήμα 2 (Εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$P_{z_0, \theta}(k) = \det \mathbf{S} \left(f_{z_0}(w) - re^{i\theta}, \quad w \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) - ke^{i\theta} \right) =$$

$$\begin{vmatrix} f(z_0) - re^{i\theta} & f'(z_0) \\ -ke^{i\theta} & f'(z_0) \end{vmatrix} = f'(z_0)[f(z_0) - re^{i\theta}] + f'(z_0)e^{i\theta}k$$

Βήμα 3 Επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης-εύρεση του συνόλου Θ

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\det \mathbf{S}_k(\operatorname{Re}(P_{z_0, \theta}(k)), \operatorname{Im}(P_{z_0, \theta}(k))) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Re}[f'(z_0)(f(z_0) - re^{i\theta})] & \operatorname{Re}[f'(z_0)e^{i\theta}] \\ \operatorname{Im}[f'(z_0)(f(z_0) - re^{i\theta})] & \operatorname{Im}[f'(z_0)e^{i\theta}] \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow |f'(z_0)|^2 \cdot \begin{vmatrix} \operatorname{Re}[f(z_0) - re^{i\theta}] & \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \\ \operatorname{Im}[f(z_0) - re^{i\theta}] & \operatorname{Im}(e^{i\theta}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Re}(f(z_0)) - r \cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \operatorname{Im}(f(z_0)) - r \sin(\theta) & \sin(\theta) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \operatorname{Re}(f(z_0)) & \cos(\theta) \\ \operatorname{Im}(f(z_0)) & \sin(\theta) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \tan(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(f(z_0))}{\operatorname{Re}(f(z_0))} \quad (1)$$

Η (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει σύνολο λύσεων

$$\Theta = \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}(f(z_0))}{\operatorname{Re}(f(z_0))} \right), \pi + \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}(f(z_0))}{\operatorname{Re}(f(z_0))} \right) \right\} = \{ \operatorname{Arg}(f(z_0)), \pi + \operatorname{Arg}(f(z_0)) \}$$

Βήμα 4 Εύρεση του συνόλου $\Pi_{\operatorname{ροβ}}(z_0, B)$

Αντικαθιστώντας $\theta = \operatorname{Arg}(f(z_0))$ στην $f_{z_0}(w) = re^{i\theta} \Leftrightarrow$

$$f(z_0) + f'(z_0)w = re^{i\operatorname{Arg}(f(z_0))} \Leftrightarrow |f(z_0)|e^{i\operatorname{Arg}(f(z_0))} + f'(z_0)w = re^{i\operatorname{Arg}(f(z_0))} \Leftrightarrow$$

$$w_1 = \frac{r - |f(z_0)|}{f'(z_0)} e^{i\operatorname{Arg}(f(z_0))}$$

Ομοίως αντικαθιστώντας $\theta = \pi + \operatorname{Arg}(f(z_0))$ στην $f_{z_0}(w) = re^{i\theta}$ λαμβάνεται

$$w_2 = -\frac{r + |f(z_0)|}{f'(z_0)} e^{i\operatorname{Arg}(f(z_0))}$$

και για τις δυο ρίζες w_1 και w_2 ισχύει ο περιορισμός $\operatorname{Im} \left(\frac{w_j \cdot \frac{d}{dw} f_{z_0}(w_j)}{f_{z_0}(w_j)} \right) = 0, \quad j = 1, 2$

Πράγματι για την w_1 είναι

$$\operatorname{Im} \left(\frac{w_1 \cdot \frac{d}{dw} f_{z_0}(w_1)}{f_{z_0}(w_1)} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{w_1 \cdot f'(z_0)}{f(z_0) + f'(z_0)w_1} \right) = \operatorname{Im} \frac{r - |f(z_0)|}{r} = 0,$$

ομοίως και για την w_2 κατά συνέπεια

$$\Pi_{\operatorname{ροβ}}(z_0, B) = \left\{ \frac{r - |f(z_0)|}{f'(z_0)} e^{i\operatorname{Arg}(f(z_0))}, \quad -\frac{r + |f(z_0)|}{f'(z_0)} e^{i\operatorname{Arg}(f(z_0))} \right\}$$

Βήμα 5 (max-min)

$$|w|_{\min} = \min |\Pi\rho\beta(z_0, B)| = \frac{|r - |f(z_0)||}{|f'(z_0)|} \quad |w|_{\max} = \max |\Pi\rho\beta(z_0, B)| = \frac{|r + |f(z_0)||}{|f'(z_0)|}$$

Εφαρμογή 3 (Πλήρης εφαρμογή της μεθόδου)

Δίνεται το πολυώνυμο $f(z) = z^3 - (1.3 + 0.6i)z^2 - (0.3 + i)z + 1$.

Να υπολογιστούν τα ακρότατα της απόστασης του σημείου $z_0 = 0.5 - 0.5i$ από την τομή¹¹

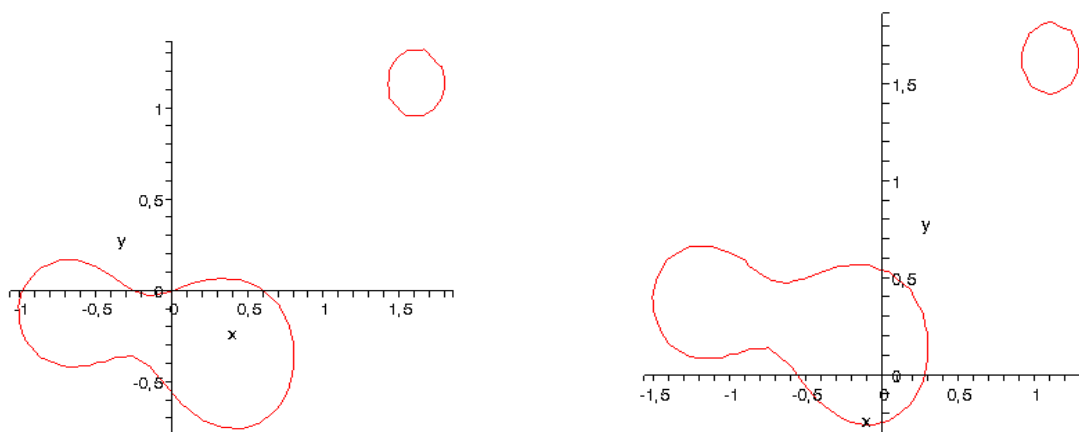
$$B_f = \{z \in \mathbb{C} / |f(z)| = 1\} \equiv \{z \in \mathbb{C} / f(z) = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Λύση

Ακολουθώντας τα βήματα του αλγορίθμου είναι

Βήμα 1 (Μεταφορά της αρχής του συστήματος συντεταγμένων στο z_0)

Η πολυωνυμική τομή απεικονίζεται στο εικόνα 25 αριστερά. Μεταφέροντας το σύστημα συντεταγμένων στο $z_0 = 0.5 - 0.5i$, έχουμε την εικόνα δεξιά.



Εικόνα 25 Μεταφορά του συστήματος αξόνων

$$\text{Επίσης έχουμε } f_{z_0}(w) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} w^m = (-0.2 + 0.05i) + (-2.2 - 1.8i)w + (0.2 - 2.1i)w^2 + w^3$$

$$\text{με παράγωγο } \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) = (-2.2 - 1.8i) + (0.4 - 4.2i)w + 3w^2$$

¹¹ Ας σημειωθεί ότι η εξίσωση της τομής(καμπύλης) B σε καρτεσιανές συντεταγμένες ς είναι $(x^3 - 3xy^2 - 1.3x^2 + 1.3y^2 + 1.2xy - .3x + 1.y + 1)^2 + (3x^2y - y^3 - .6x^2 + .6y^2 - 2.6xy - 1.x - .3y)^2 = 1$

Βήμα 2 (Εύρεση του χαρακτηριστικού πολωνύμου)

Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολωνύμο (το $r = 1$)

$$P_{z_0, \theta}(k) = \det \mathbf{S} \left(f_{z_0}(w) - e^{i\theta}, \quad w \frac{d}{dw} f_{z_0}(w) - k i e^{i\theta} \right) =$$

$$= \det \mathbf{S} \left((-0.2 + 0.05i) + (-2.2 - 1.8i)w + (0.2 - 2.1i)w^2 + w^3 - e^{i\theta}, \quad (-2.2 - 1.8i)w + (0.4 - 4.2i)w^2 + 3w^3 - k e^{i\theta} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} -0.2 + 0.05i - e^{i\theta} & -2.2 - 1.8i & 0.2 - 2.1i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 + 0.05i - e^{i\theta} & -2.2 - 1.8i & 0.2 - 2.1i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 + 0.05i - e^{i\theta} & -2.2 - 1.8i & 0.2 - 2.1i & 1 \\ -k e^{i\theta} & -2.2 - 1.8i & 0.4 - 4.2i & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -k e^{i\theta} & -2.2 - 1.8i & 0.4 - 4.2i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -k e^{i\theta} & -2.2 - 1.8i & 0.4 - 4.2i & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3i\theta} \mathbf{k}^3 +$$

$$[(12.442 - 7.581i)e^{2i\theta} - 9e^{3i\theta}] \mathbf{k}^2 +$$

$$[(33.2463 - 34.4024i)e^{i\theta} + (-54.608 + 37.944i)e^{2i\theta} + 27e^{3i\theta}] \mathbf{k} +$$

$$-4.92914 + 8.542795i + (-24.2219 + 24.0832i)e^{i\theta} + (49.208 - 36.594i)e^{2i\theta} - 27e^{3i\theta} \quad (1)$$

Βήμα 3 (Επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης-εύρεση του συνόλου Θ)

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\det \mathbf{S}_k(\text{Re}(P_{z_0, \theta}(k)), \text{Im}(P_{z_0, \theta}(k))) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \text{Re}(a_0(\theta)) & \text{Re}(a_1(\theta)) & \text{Re}(a_2(\theta)) & \text{Re}(a_3(\theta)) & 0 & 0 \\ 0 & \text{Re}(a_0(\theta)) & \text{Re}(a_1(\theta)) & \text{Re}(a_2(\theta)) & \text{Re}(a_3(\theta)) & 0 \\ 0 & 0 & \text{Re}(a_0(\theta)) & \text{Re}(a_1(\theta)) & \text{Re}(a_2(\theta)) & \text{Re}(a_3(\theta)) \\ \text{Im}(a_0(\theta)) & \text{Im}(a_1(\theta)) & \text{Im}(a_2(\theta)) & \text{Im}(a_3(\theta)) & 0 & 0 \\ 0 & \text{Im}(a_0(\theta)) & \text{Im}(a_1(\theta)) & \text{Im}(a_2(\theta)) & \text{Im}(a_3(\theta)) & 0 \\ 0 & 0 & \text{Im}(a_0(\theta)) & \text{Im}(a_1(\theta)) & \text{Im}(a_2(\theta)) & \text{Im}(a_3(\theta)) \end{vmatrix} = 0$$

όπου

$$a_3(\theta) = e^{3i\theta},$$

$$a_2(\theta) = (12.442 - 7.581i)e^{2i\theta} - 9e^{3i\theta},$$

$$a_1(\theta) = (33.2463 - 34.4024i)e^{i\theta} + (-54.608 + 37.944i)e^{2i\theta} + 27e^{3i\theta}$$

$$a_0(\theta) = -4.92914 + 8.542795i + (-24.2219 + 24.0832i)e^{i\theta} + (49.208 - 36.594i)e^{2i\theta} - 27e^{3i\theta}$$

Το σύνολο λύσεων της χαρακτηριστικής εξίσωσης στο $[0, 2\pi]$ είναι

$$\Theta = \{ 2.457743348, 2.855375935, 2.944237433, 5.454781945 \}$$

Βήμα 4 Εύρεση του συνόλου $\text{Προβ}(z_0, B)$

Η διαδικασία προσδιορισμού του $\mathbf{Προβ}(z_0, B)$ φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

Το σύνολο λύσεων Θ	Οι ρίζες w_{j1}, w_{j2}, w_{j3} της $f_{z_0}(w) = ce^{i\theta_j}$		$\frac{w \cdot \frac{d}{dw} f_{z_0}(w)}{f_{z_0}(w)}$	$\mathbf{Προβ}(z_0, B)$	$ \mathbf{Προβ}(z_0, B) $
$\theta_1=2.457743348$	w_{11}	-1.456397430+ 0.5452400859i	7.450035248+ 2.138686647i		
	w_{12}	0.03940148506- 0.2394285630i	0.9506983837- 0.154476002i		
	w_{13}	1.216995945+ 1.794188477i	15.03317508+ 1.02*10 ⁻⁸ i	w_{13}	2.160992486
$\theta_2=2.855375935$	w_{21}	-1.493532970+ 0.4772589799i	8.189645648+ 0.4178056198i		
	w_{22}	0.1289001311- 0.1959043484i	0.9330879598- 6.0*10 ⁻⁹ i	w_{22}	0.2345074786
	w_{23}	1.164632830+ 1.818645368i	13.95341649- 4.177715677i		
$\theta_3= 2.944237433$	w_{31}	-1.499008324+ 0.4612431970i	8.261183757+ 2.0*10 ⁻⁶ i	w_{31}	1.568365787
	w_{32}	0.1472202741- -0.1830706640i	0.9306724807+ 0.03452703075i		
	w_{33}	1.151788050+ 1.821827467i	13.49508350- 5.028786816i		
$\theta_4= 5.454781945$	w_{41}	-1230850377+ 0.08822184764i	0.3594172336- 4.334024988i		
	w_{42}	0.03622027176+ 0.5346222495i	0.0227752401+ 0.2912598662i		
	w_{43}	0.9946301053+ 1.477155903i	-6.279727079 -2.0*10 ⁻⁸ i	w_{43}	1.780808414

Στην πρώτη στήλη καταχωρούνται οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Στην δεύτερη καταχωρούνται οι ρίζες w_{j1}, w_{j2}, w_{j3} της $f_{z_0}(w) = ce^{i\theta_j}$ για κάθε $j = 1, 2, 3, 4$.

Στην τρίτη στήλη εντοπίζονται οι ρίζες για τις οποίες $\text{Im} \left(\frac{w \cdot \frac{d}{dw} f_{z_0}(w)}{f_{z_0}(w)} \right) = 0$.

Στην τέταρτη στήλη καταχωρούνται οι ρίζες οι οποίες αποτελούν το σύνολο $\mathbf{Προβ}(z_0, B)$.

Στην πέμπτη στήλη, υπολογίζονται τα μέτρα των στοιχείων του προβολικού συνόλου, δηλαδή το $|\mathbf{Προβ}(z_0, B)|$ και προσδιορίζεται η μικρότερη καθώς και η μεγαλύτερη απόσταση.

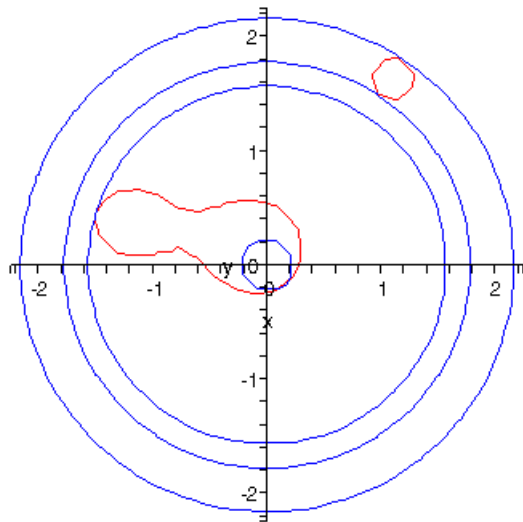
Βήμα 5 Εύρεση max-min

Από την τελευταία στήλη του πίνακα προκύπτει ότι

$$|w|_{\min} = 0.2345074786$$

$$|w|_{\max} = 2.160992486$$

και οι οποίες αντιστοιχούν στις ακτίνες του ενδότερου εσωτερικού και του εξωτερικού κύκλου



Εικόνα 26 Η πολωνυμική τομή και οι εφαπτόμενοι ομόκεντροι κύκλοι

Τέλος διαδικασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΟΝΑΔΙΑΙΕΣ ΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

5.1 ΟΙ ΠΡΟΕΙΚΟΝΕΣ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΩΝ ΤΟΜΩΝ

5.1.1 Εισαγωγικά

Είναι γνωστό από την Θεωρία της Μιγαδικής Δυναμικής ότι σε σταθερά σημεία τύπου *ελκυστή*, *Siegel* ή *παραβολικού*, αντιστοιχούν συνιστώσες ευστάθειας του δυναμικού συστήματος, ενώ δεν ισχύει αυτό για σταθερά σημεία *απωθητικού* τύπου ή *Cremér*.

Στο Κεφάλαιο 2 αποδείχτηκε επίσης ότι σε κάθε τύπο σταθερού σημείου (*ελκυστή*, *Siegel*, *παραβολικού* *απωθητικού* και *Cremér*) αντιστοιχεί μια μοναδιαία τομή $B_{f,z_k} = \{z \in \mathbb{C} / |D|_{f,z_k}(z) < 1\}$ και ειδικότερα η *κύρια μοναδιαία τομή* $\widehat{B}_{f,z_k}$. Υπενθυμίζεται ότι η *κύρια μοναδιαία τομή* $\widehat{B}_{f,z_k}$ ορίζεται ως η συνεκτική συνιστώσα ή η ένωση των συνεκτικών συνιστωσών της μοναδιαίας τομής $B_{f,z_k} = \{z \in \mathbb{C} / |D|_{f,z_k}(z) < 1\}$, στην οποία το z_k είναι σημείο επαφής, δηλαδή ανήκει στην κλειστή της θήκη $z_k \in \overline{\widehat{B}_{f,z_k}}$.

Αντικείμενο του κεφαλαίου είναι, η εύρεση συνολοθεωρητικών εκφράσεων των συνιστωσών Ευστάθειας ενός δυναμικού συστήματος, συναρτήσει των *κύριων μοναδιαίων τομών* $\widehat{B}_{f,z_k}$ που αντιστοιχούν στα σταθερά σημεία τους. Παρακάμπτοντας την αυστηρότητα στη διατύπωση, τα κύρια συμπεράσματα της ενότητας αυτής, είναι:

1. Οι *κύριες μοναδιαίες τομές* αποτελούν την δομικά στοιχεία για τον σχηματισμό και την οργάνωση των συνιστωσών Ευστάθειας του δυναμικού συστήματος.
2. Το πολώνυμο, «ακολουθεί» την ίδια διαδικασία δόμησης - σχηματισμού των συνιστωσών Ευστάθειας του δυναμικού συστήματος, ανεξάρτητα από το από το είδος της, δηλαδή αν πρόκειται για *ελκτική περιοχή* ή *δίσκο Siegel* ή *παραβολική περιοχή*.

Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ο συνολοθεωρητικός τελεστής $\limsup_n f^{-on} \equiv \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}$

όταν δρα επί των κυρίων τομών $\widehat{B}_{f,z_k}$, $z_k \in X_f$, παράγει την αντίστοιχη στο z_k συνιστώσα Ευστάθειας του δυναμικού συστήματος.

5.1.2 Ακολουθίες Συνόλων

Στην παράγραφο αυτή υπενθυμίζονται οι γνωστές έννοιες, του *ανώτερου οριακού συνόλου* $\limsup_n A_n$ και του *κατώτερου οριακού συνόλου* $\liminf_n A_n$ μιας ακολουθίας συνόλων.

Έστω ακολουθία υποσυνόλων $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ενός συνόλου X .

Η ακολουθία χαρακτηρίζεται ως *αύξουσα* αν $A_n \subset A_{n+1}$ και *φθίνουσα* αν $A_{n+1} \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Σε κάθε ακολουθία συνόλων ορίζονται δύο οριακά σύνολα, τα εξής:

$\limsup_n A_n \equiv \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n, \text{ για απειρα } n\}$ και

$\liminf_n A_n \equiv \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n, \text{ τελικά για κάθε } n\}$ για τα οποία ισχύει ότι

$\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$ ή ισοδύναμα $\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$. Επίσης είναι γνωστό, ότι, αν η α-

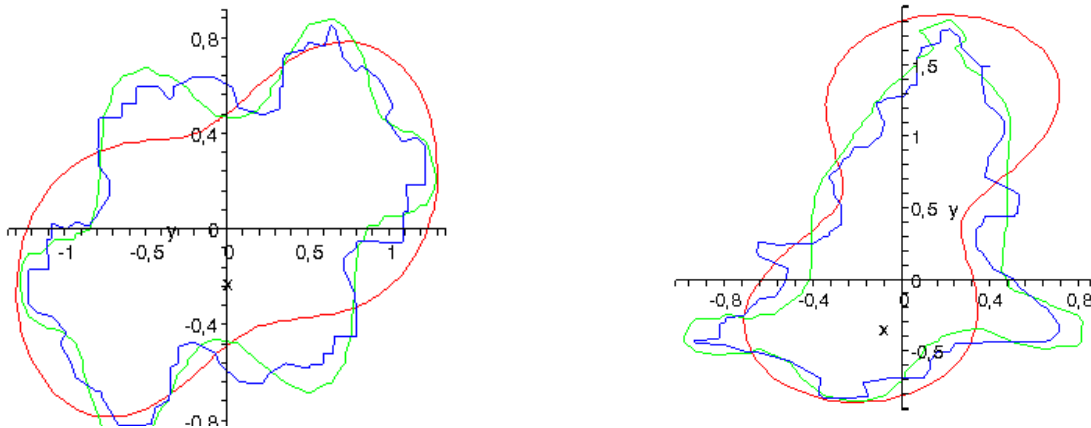
κολουθία $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, τότε ισχύει $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, ενώ, αν είναι

φθίνουσα, ισχύει $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Όμως δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή

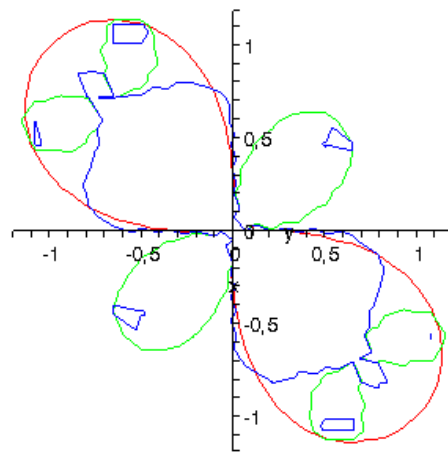
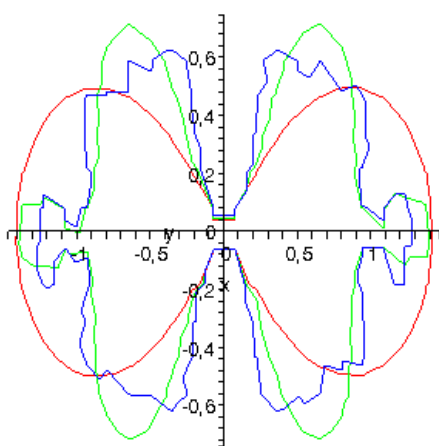
μπορεί να συμπίπτουν τα δύο οριακά αυτά σύνολα χωρίς να είναι μονότονη η ακολουθία.

5.1.3 Η Ακολουθία των προεικόνων της Κύριας Μοναδιαίας Τομής σταθερού σημείου

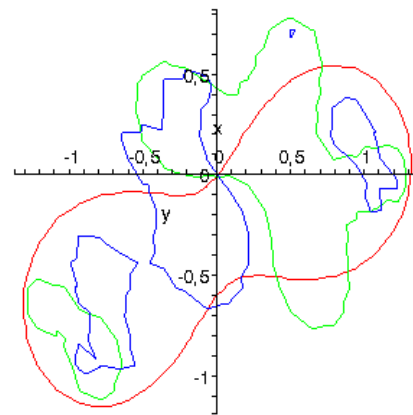
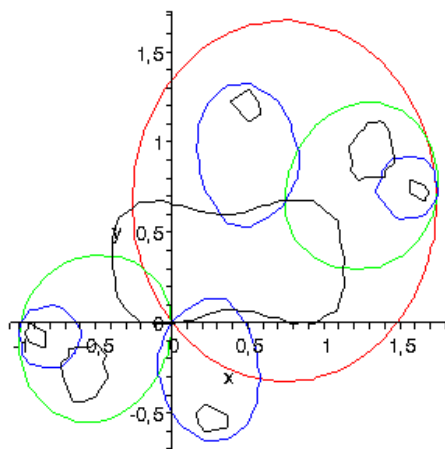
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την Μιγαδική Δυναμική παρουσιάζει η ακολουθία των προεικόνων $(f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k}))_{n \in \mathbb{N}}$ της κύριας μοναδιαίας τομής $\hat{B}_{f,z_k}$ ενός σταθερού σημείου $z_k \in X_f$. Στις εικόνες 27, 28 και 29 απεικονίζονται στο ίδιο σύστημα αξόνων η μοναδιαία τομή B_{f,z_k} (κόκκινο), η 1^η προεικόνα της, $f^{-o1}(B_{f,z_k})$ (πράσινο) και η 2^η προεικόνα της, $f^{-o2}(B_{f,z_k})$ (μπλε), στο σταθερό σημείο $z_k = 0$ για διάφορες πολυωνυμικές συναρτήσεις.



Εικόνα 27 Η B_{f,z_k} και οι προεικόνες της, $f^{-o1}(B_{f,z_k})$, $f^{-o2}(B_{f,z_k})$, στον ελκυστή $z_k = 0$ για τις, $f_1(z) = \lambda z + z^3$, $\lambda = 0.8 \exp(2\pi i \frac{3}{5})$ (αριστερά) και $f_2(z) = \lambda z + iz^2 - z^3$, $\lambda = 0.7 \exp(2\pi i \frac{2}{5})$ (δεξιά)



Εικόνα 28 Η B_{f,z_k} και οι $f^{-o1}(B_{f,z_k})$, $f^{-o2}(B_{f,z_k})$ στο παραβολικό σταθερό σημείο $z_k = 0$ για τις $f_3(z) = \lambda z + z^3, \lambda = \exp(2\pi i \frac{1}{2})$ (αριστερά) και $f_4(z) = \lambda z + z^3, \lambda = \exp(2\pi i \frac{1}{4})$ (δεξιά)



Εικόνα 29 Η B_{f,z_k} και οι $f^{-o1}(B_{f,z_k})$, $f^{-o2}(B_{f,z_k})$ στο σταθερό σημείο Siegel $z_k = 0$ για τις $f_5(z) = \lambda z + z^2, \lambda = \exp(\pi i(\sqrt{5} - 1))$ (αριστερά) και $f_6(z) = \lambda z + 0.6iz^2 + z^3, \lambda = \exp(\pi i(\sqrt{5} - 1))$ (δεξιά)

Για ένα δεδομένο σταθερό σημείο $z_k \in X_f$, το βασικό ερώτημα είναι: Ποιες είναι οι τιμές των

$\limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k})$ και $\liminf_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k})$ και πότε αυτές συμπίπτουν;

Τα θεωρήματα που ακολουθούν απαντούν στο ερώτημα.

Θεώρημα 22

Έστω πολυώνυμο $f, z_k \in X_f$ σταθερό σημείο και $\hat{B}_{f,z_k}$ η κύρια μοναδιαία τομή του. Τότε

το ανώτερο οριακό σύνολο της ακολουθίας των προεικόνων $\limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k})$ είναι ίσο με:

$$\limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k}) = \begin{cases} \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(\hat{W}_{z_k}) \equiv W_{z_k}, & \text{αν } z_k \text{ είναι ελκυστής} \\ \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(\hat{P}_{z_k}) \equiv P_{z_k}, & \text{αν } z_k \text{ είναι παραβολικό σταθερό σημείο} \\ \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(Sd_{z_k}), & \text{αν το } z_k \text{ είναι σταθερό σημείο τύπου Siegel} \\ \emptyset, & \text{αν το } z_k \text{ είναι απωθητικό σταθερό σημείο} \\ \emptyset, & \text{αν το } z_k \text{ είναι σταθερό σημείο τύπου Cremer} \end{cases}$$

όπου $W_{z_k}, \hat{W}_{z_k}$, είναι η ελκτική περιοχή του ελκυστή και η άμεση συνεκτική του συνιστώσα αντίστοιχα $P_{z_k}, \hat{P}_{z_k}$ η περιοχή ευστάθειας του παραβολικού σταθερού σημείου και άμεση συνεκτική του συνιστώσα αντίστοιχα και Sd_{z_k} το Siegel disk χωρίς το κέντρο του.

Αποδείξεις

Περίπτωση 1: Αν το $z_k \in X_f$ είναι ελκυστής, θα αποδειχθεί ότι

$$\limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k}) \equiv \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k}) = W_{z_k}.$$

$$\text{Αρχικά θα δειχθεί ότι } \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k}) \subset W_{z_k}.$$

$$\text{Έστω } z \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k}) \Rightarrow \forall m \geq 0, \exists n \geq m, z \in f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k}) \Rightarrow$$

$$\forall m \geq 0, \exists n \geq m, f^{on}(z) \in \hat{B}_{f,z_k} \quad (1)$$

Από την (1) συνάγεται ότι υπάρχει αύξουσα υπακολουθία φυσικών αριθμών-δεικτών $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ για τους οποίους ισχύει: $f^{oi_n}(z) \in \hat{B}_{f,z_k}, \forall n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή ένα άπειρο πλήθος σημείων της προς τα εμπρός τροχιάς (forward orbit), $Orbit_f^+(z)$ ανήκει στην φραγμένη περιοχή $\hat{B}_{f,z_k}$ του ελκυστή.

Επομένως ισχύει $f^{oi_n}(z) \rightarrow z_k$, οπότε και το σύνολο της τροχιάς του z θα συγκλίνει στον ελκυστή, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k \Rightarrow z \in W_{z_k}$ (βλ. Πρόρισμα 13 Κεφ.3).

Αντιστρόφως θα δειχθεί ότι $W_{z_k} \subset \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k})$

Έστω $z \in W_{z_k} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k$

επομένως για κάθε $0 < \varepsilon < 1, \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow |f^{on}(z) - z_k| < \varepsilon$ (3)

Αν $p = \deg(f)$ ο βαθμός του πολωνύμου, τότε

$$\begin{aligned} |D|_{f, z_k}(f^{on}(z)) &= \left| f'(z_k) + \frac{1}{2!} f''(z_k)(f^{on}(z) - z_k) + \dots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(z_k)(f^{on}(z) - z_k)^{p-1} \right| \leq \\ &\leq |f'(z_k)| + \frac{1}{2!} |f''(z_k)| |f^{on}(z) - z_k| + \dots + \frac{1}{n!} |f^{(p)}(z_k)| |f^{on}(z) - z_k|^{p-1} \leq \quad (\text{λόγω των (3)}) \\ &\leq |f'(z_k)| + \frac{1}{2!} |f''(z_k)| \varepsilon + \dots + \frac{1}{n!} |f^{(p)}(z_k)| \varepsilon^{p-1} \leq |f'(z_k)| + \varepsilon \left(\frac{1}{2!} |f''(z_k)| + \dots + \frac{1}{n!} |f^{(p)}(z_k)| \right). \end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει ότι $|D|_{f, z_k}(f^{on}(z)) \leq |f'(z_k)| + \varepsilon \left(\frac{1}{2!} |f''(z_k)| + \dots + \frac{1}{n!} |f^{(p)}(z_k)| \right), \quad n \geq n_0$ (4)

Επιλέγοντας στην (4) $\varepsilon < \min \left\{ \frac{1 - |f'(z_k)|}{\frac{1}{2!} |f''(z_k)| + \dots + \frac{1}{n!} |f^{(p)}(z_k)|}, 1 \right\}$ προκύπτει ότι

$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, |D|_{f, z_k}(f^{on}(z)) < 1 \Rightarrow$

$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, f^{on}(z) \in \hat{B}_{f, z_k} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, z \in f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k}) \Rightarrow$

$\exists m \in \mathbb{N}, z \in \bigcap_{m=n}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k}) \Rightarrow z \in \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k}) \subset \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k})$ (βλ. ενोट. 5.1.2)

δηλαδή αποδείχτηκε ότι $W_{z_k} \subset \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k})$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Περίπτωση 2: Αν το $z_k \in X_f$ είναι παραβολικό σταθερό σημείο, θα αποδειχθεί ότι

$$\limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k}) \equiv \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k}) = P_{z_k}.$$

Αρχικά θα δειχθεί ότι $\bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k}) \subset P_{z_k}.$

Έστω $z \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k}) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, z \in \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \geq m : z \in f^{-on}(\hat{B}_{f, z_k}) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \geq m : f^{on}(z) \in \hat{B}_{f, z_k}.$

Επομένως υπάρχει αύξουσα υπακολουθία δεικτών $(n_i)_{i \geq 0} : f^{on_i}(z) \in \hat{B}_{f, z_k}.$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

a. Αν το παραβολικό σταθερό σημείο $z_k \in X_f$ έχει αριθμό περιστροφής (rotation number)

$\rho(z_k) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} / \mathbb{R}$ ή ισοδύναμα ιδιοτιμή $\lambda = f'(z_k) = \exp(2\pi i \frac{p}{q})$, τότε η υπακολουθία

$(n_i)_{i \geq 0}$ είναι αριθμητική πρόοδος με βήμα q , δηλαδή $n_i = qi, i = s, s+1, \dots, s \in \mathbb{N}$. Κατά συνέπεια

$f^{on_i}(z) \in \widehat{B}_{f,z_k} \forall i \geq s \Rightarrow z \in f^{oi}(z) \in \widehat{B}_{f,z_k}, \forall i \geq s \Rightarrow z \in (f^{oq})^{oi}(z) \in \widehat{B}_{f,z_k}, \forall i \geq s$
επομένως $\lim_{i \rightarrow \infty} (f^{oq})^{oi}(z) = \lim_{i \rightarrow \infty} f^{oi}(z) = z_k$, δηλαδή μια υπακολουθία της τροχιάς του z ,
συγκλίνει στο παραβολικό σταθερό σημείο, οπότε και το σύνολο της τροχιάς του z θα συ-
γκλίνει στο $z_k \in X_f$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k \Rightarrow z \in P_{z_k}$.

- b.** Αν το παραβολικό σταθερό σημείο έχει αριθμό περιστροφής $\rho(z_k) = 0$ ή ισοδύναμα ι-
διοτιμή $\lambda = f'(z_k) = 1$, τότε η υπακολουθία δεικτών $(m_i)_{i \geq 0}$ ταυτίζεται με την φυσική
ακολουθία δεικτών, δηλαδή $n_i = i, i = s, s+1, \dots$ για κάποιο $s \in \mathbb{N}$.

$$\text{Έστω } z \in f^{on_i}(z) \in \widehat{B}_{f,z_k}, \forall i \Rightarrow z \in f^{oi}(z) \in \widehat{B}_{f,z_k}, \forall i \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} f^{oi}(z) = z_k \\ \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} f^{oi}(z) = z_k \Rightarrow z \in P_{z_k}$$

Αντιστρόφως θα δειχτεί ότι $P_{z_k} \subseteq \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k})$.

$$\text{Έστω } z \in P_{z_k} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k \quad (1)$$

Αν $p = \deg(f)$ ο βαθμός του πολωνύμου τότε από την (1) έχουμε

$$|D|_{f,z_k}(f^{on}(z)) = \left| f'(z_k) + \frac{1}{2!} f''(z_k)(f^{on}(z) - z_k) + \dots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(z_k)(f^{on}(z) - z_k)^{p-1} \right| \rightarrow |f'(z_k)| = 1$$

δηλαδή $\lim_{n \rightarrow \infty} |D|_{f,z_k}(f^{on}(z)) = 1$. Επομένως υπάρχει υπακολουθία δεικτών $(n_i)_{i \geq 0}$ για τους οποί-
ους η ακολουθία $|D|_{f,z_k}(f^{on_i}(z)), i = 1, 2, \dots$ λαμβάνει τιμές μικρότερες της μονάδας,¹²
δηλαδή

$$(n_i)_{i \geq 0} : |D|_{f,z_k}(f^{on_i}(z)) < 1 \Rightarrow f^{on_i}(z) \in \widehat{B}_{f,z_k}, \forall i \Rightarrow z \in f^{-on_i}(\widehat{B}_{f,z_k}), \forall i \quad (1)$$

Επομένως το z ανήκει σε ένα άπειρο πλήθος προεικόνων $f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k})$ οπότε ανήκει στο

$$\limsup_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) \equiv \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}).$$

Περίπτωση 3: Αν το $z_k \in X_f$ είναι σταθερό σημείο τύπου Siegel, θα αποδειχθεί ότι

$$\limsup_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) \equiv \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(Sd_{z_k})$$

¹² Η περίπτωση να ισχυε τελικά $|D|_{f,z_k}(f^{ok}(z)) > 1$ για $k > k_0$ αποκλείεται διότι τότε, είτε

το $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = \infty$, είτε το $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_r \neq z_k$, γεγονός που συγκρούεται με την υπόθεση ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_k$$

Αρχικά θα δειχθεί ότι $\bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(Sd_{z_k})$.

Έστω $z \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) \Rightarrow \forall m \geq 0, \exists n \geq m : z \in f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) \Rightarrow$

$$\forall m \geq 0, \exists n \geq m : f^{-on}(z) \in \widehat{B}_{f,z_k} \quad (6)$$

Από την (6) συνάγεται ότι, υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία δεικτών $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ για την οποία $\forall i \in \mathbb{N}, f^{on_i}(z) \in \widehat{B}_{f,z_k}$, δηλαδή ένα άπειρο υποσύνολο, της προς τα εμπρός τροχιάς(forward orbit) του σημείου z , $Orbit_f^+(z)$ βρίσκεται στην $\widehat{B}_{f,z_k}$. Κατά συνέπεια, επειδή το $z_k \in X_f$ δεν είναι ελκυστής ούτε παραβολικό σταθερό σημείο αλλά Siegel, το άπειρο σύνολο πρέπει να είναι πυκνό, άρα $Sd_{z_k} \cap \widehat{B}_{f,z_k} \neq \emptyset$. Επομένως το z , είτε ανήκει στο Siegel disk, είτε ανήκει σε κά-

ποια προεικόνα του Siegel disk, δηλαδή $z \in \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(Sd_{z_k})$ οπότε αποδείχθηκε ότι

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(Sd_{z_k}).$$

Αντιστρόφως. Θα δειχτεί ότι $\bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(Sd_{z_k}) \subseteq \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k})$. Έστω

$$z \in \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(Sd_{z_k}) \Rightarrow \exists j \in \mathbb{N} : z \in f^{-oj}(Sd_{z_k}) \Rightarrow f^{oj}(z) \in Sd_{z_k}. \text{Επομένως χωρίς βλάβη της γενι-}$$

κότητας μπορεί να υποθεθεί ότι $z \in Sd_{z_k}$. Επειδή ο περιορισμός της $f|_{Sd_{z_k}}$ γραμμικοποιείται σε μια άρρητη περιστροφή, δηλαδή είναι συζυγής με την $r_{\theta}(z) = e^{2\pi i \theta} z$, όπου θ είναι άρρητος διοφαντικού τύπου ή ακριβέστερα αριθμός Brjuno, η τροχιά του z , $Orbit_f^+(z)$ είναι πυκνό σύνολο. Κατά συνέπεια, επειδή $Sd_{z_k} \cap \widehat{B}_{f,z_k} \neq \emptyset$ (το σύνορο του $\partial B_{f,z_k}$ διέρχεται από κέντρο του Siegel disk, $z_k \in \partial B_{f,z_k}$), υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων της $Orbit_f^+(z)$ στο $Sd_{z_k} \cap \widehat{B}_{f,z_k}$ και επίσης ένα άπειρο πλήθος στο $Sd_{z_k} \setminus \widehat{B}_{f,z_k}$. Επομένως, υπάρχει μια αύξουσα υπακολουθία φυσικών αριθμών-δεικτών $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ για τους οποίους ισχύουν:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{oi_n}(z) \in \widehat{B}_{f,z_k} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z \in f^{-oi_n}(\widehat{B}_{f,z_k}), \text{ δηλαδή το } z \text{ ανήκει σε ένα άπειρο πλή-}$$

θος προεικόνων $f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k})$, επομένως ανήκει στο $\limsup_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k})$

ή ισοδύναμα $\bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(Sd_{z_k}) \subseteq \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k})$ γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Περίπτωση 4: Το $z_k \in X_f$ είναι απωθητικό σταθερό σημείο.

Ισχύει προφανώς, αφού στην περίπτωση του απωθητικού σταθερού σημείου η κύρια μοναδιαία

τομή είναι $\widehat{B}_{f,z_k} = \emptyset$ κατά συνέπεια $\limsup_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) \equiv \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) = \emptyset$

Περίπτωση 5: Το $z_k \in X_f$ είναι σταθερό σημείο τύπου Cremer .

Η περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ξεχωριστά στο Θεώρημα 30 ■

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει άμεσα το ακόλουθο σημαντικό πόρισμα

Πόρισμα 23

Το ανώτερο όριο, $\limsup_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k})$ της ακολουθίας των προεικόνων της κύριας τομής $\widehat{B}_{f,z_k}$ σταθερού σημείου, τύπου ελκυστή, παραβολικού ή Siegel, είναι η συνιστώσα του συνόλου Ευστάθειας F_f που αντιστοιχεί στο z_k , $\limsup_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) \subset F$.

Με άλλα λόγια ενώ η τομή $\widehat{B}_{f,z_k} \cap J(f)$ μπορεί να είναι μη κενή το ανώτερο όριο της ακολουθίας των προεικόνων της κύριας τομής ανήκει πάντοτε στο σύνολο Fatou .

Θεώρημα 24

Έστω πολυώνυμο f , $z_k \in X_f$ σταθερό του σημείο και $\widehat{B}_{f,z_k}$ η κύρια μοναδιαία τομή του.

Τότε το κατώτερο οριακό σύνολο της ακολουθίας των προεικόνων

$\liminf_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) \equiv \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k})$ είναι ίσο με:

$$\liminf_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) = \begin{cases} \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(\widehat{W}_{z_k}) \equiv W_{z_k}, & \text{αν } z_k \text{ είναι ελκυστής} \\ \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(\widehat{P}_{z_k}) \equiv P_{z_k}, & \text{αν } z_k \text{ είναι παραβολικό σταθ. σημείο} \\ \emptyset & \text{αν το } z_k \text{ είναι σταθερό σημείο τύπου Siegel} \\ \emptyset, & \text{αν το } z_k \text{ είναι απωθητικό σταθερό σημείο} \\ \emptyset, & \text{αν το } z_k \text{ είναι σταθερό σημείο τύπου Cremer} \end{cases}$$

Απόδειξη

Ανάλογη με του θεωρήματος 22 ■

Θεώρημα 25 (Το αντίστροφο)

Έστω πολυώνυμο f και $z_k \in X_f$ σταθερό σημείο του, τότε:

1. Αν το σύνολο $\liminf_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} f^{-om}(\widehat{B}_{f,z_k}) \neq \emptyset$, τότε το z_k είτε είναι ελκυστής είτε είναι παραβολικού τύπου.

2. Αν $\limsup_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_k}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} f^{-om}(B_{f,z_k}) \neq \emptyset$ τότε το z_k είτε είναι ελκυστής είτε είναι παραβολικού τύπου, είτε είναι τύπου Siegel.

Αποδείξεις

1. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} f^{-om}(\widehat{B}_{f,z_k}) \neq \emptyset$.

Αν $z \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} f^{-om}(\widehat{B}_{f,z_k}) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, z \in \bigcap_{m=n}^{\infty} f^{-om}(\widehat{B}_{f,z_k}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, z \in f^{-om}(\widehat{B}_{f,z_k}) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, f^{om}(z) \in \widehat{B}_{f,z_k} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, |f^{o(m+1)}(z) - z_k| < |f^{om}(z) - z_k|$
 επομένως η αριθμητική ακολουθία $\left(|f^{om}(z) - z_k| \right)_{m \geq n}$ ως φθίνουσα και φραγμένη συγκλίνει, οπότε η $f^{om}(z) \rightarrow z_k$. Το $z_k \in \overline{\widehat{B}_{f,z_k}}$, επομένως το z_k είτε είναι ελκυστής είτε είναι παραβολικού τύπου.

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} f^{-om}(\widehat{B}_{f,z_k}) \neq \emptyset$.

Έστω $z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} f^{-om}(\widehat{B}_{f,z_k}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z \in \bigcup_{m=n}^{\infty} f^{-om}(\widehat{B}_{f,z_k}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n : z \in f^{-om}(\widehat{B}_{f,z_k})$

δηλαδή υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία δεικτών $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ για την οποία

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{om_n}(z) \in B_{f,z_k} \quad (6)$$

Από την (6) συνάγεται ότι, ένα άπειρο υποσύνολο της forward orbit του σημείου z , $Orbit_f^+(z)$ βρίσκεται στην B_{f,z_k} . Επομένως το z_k είναι ελκυστής ή παραβολικού τύπου ή τύπου Siegel. ■

5.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Από τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, γίνεται φανερό ότι ο συνολοθεωρητικός τε-

λεστής $\limsup_n f^{-on} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} f^{-om}$ καθορίζει πλήρως τα υποσύνολα ευστάθειας του δυναμικού

συστήματος όταν δρα επί των κύριων τομών στα σταθερά του σημεία.

Ο τελεστής αυτός, θα ονομαστεί ως *τελεστής ευστάθειας*. Δίνεται ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 11 Έστω $(\tilde{\mathcal{C}}, f, \delta)$ δυναμικό σύστημα μιγαδικού πολυνόμου f , βαθμού $\deg(f) \geq 2$.

Ορίζεται ο τελεστής ευστάθειας $L : \wp(\tilde{\mathcal{C}}) \rightarrow \wp(\tilde{\mathcal{C}})$ ως $L = \limsup_n f^{-on} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} f^{-om}$

όπου $\wp(\tilde{\mathcal{C}})$ το δυναμοσύνολο του $\tilde{\mathcal{C}}$. Δηλαδή στο $A \subset \tilde{\mathcal{C}}$ αντιστοιχίζεται το

$$L(A) = \limsup_n f^{-on}(A) \equiv \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(A) \quad \blacktriangle$$

Όταν ο τελεστής L δρα σε μία κύρια μοναδιαία τομή, δίνει το υποσύνολο του συνόλου Ευστάθειας F_f που της αντιστοιχεί. Ειδικότερα βάσει του *Θεωρήματος 22* είναι

$$L(\hat{B}_{f,z_k}) = \begin{cases} \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(\hat{W}_{z_k}) \equiv W_{z_k}, & \text{αν } z_k \text{ είναι ελκυστής} \\ \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(\hat{P}_{z_k}) \equiv P_{z_k}, & \text{αν } z_k \text{ είναι παραβολικό σταθ. σημείο} \\ \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-oj}(Sd_{z_k}), & \text{αν το } z_k \text{ είναι σταθερό σημείο τύπου Siegel} \\ \emptyset, & \text{αν το } z_k \text{ είναι απωθητικό σταθερό σημείο} \\ \emptyset, & \text{αν το } z_k \text{ είναι σταθερό σημείο τύπου Cremer} \end{cases}$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει μια ισοδύναμη έκφραση για το $L(\hat{B}_{f,z_k}) = \limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k})$ χρήσιμη για τα επόμενα.

Θεώρημα 26

Έστω αναλυτική συνάρτηση $f: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ και $A \subset \tilde{\mathcal{C}}$ τότε

$$L(A) = \limsup_n f^{-on}(A) \equiv \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(A) = \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on}(A) \right)$$

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι ισχύουν σχέσεις:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ και } f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

επομένως θα ισχύουν και οι

$$f^{-ok}(A \cup B) = f^{-ok}(A) \cup f^{-ok}(B) \text{ και } f^{-ok}(A \cap B) = f^{-ok}(A) \cap f^{-ok}(B), \quad k \in \mathbb{N}$$

Κατά συνέπεια είναι:

$$\begin{aligned} \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(A) &= \bigcap_{m=0}^{\infty} (f^{-om}(A) \cup f^{-o(m+1)}(A) \cup \dots) = \\ &= \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} (A \cup f^{-o1}(A) \cup f^{-o2}(A) \dots) = \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on}(A) \right) \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. ■

Οι κύριες μοναδιαίες τομές $\widehat{B}_{f,z_p}$, $\widehat{B}_{f^{on},z_q}$ δύο διακεκριμένων σταθερών σημείων μπορεί να έχουν κενή τομή $\widehat{B}_{f,z_p} \cap \widehat{B}_{f^{on},z_q} = \emptyset$, είτε διάφορη του κενού $\widehat{B}_{f,z_p} \cap \widehat{B}_{f^{on},z_q} \neq \emptyset$, όμως σε κάθε περίπτωση ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 27

Για κάθε ζεύγος κύριων τομών $\widehat{B}_{f,z_p}$, $\widehat{B}_{f,z_q}$ που αντιστοιχούν σε διακεκριμένα σταθερά σημεία $z_p \neq z_q$ (ελκυστών, παραβολικών, Siegel) ισχύει

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_p} \cap \widehat{B}_{f,z_q}) = \emptyset,$$

Απόδειξη

Έστω ότι η τομή είναι μη κενή $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_p} \cap \widehat{B}_{f,z_q}) \neq \emptyset$,

$$\text{αν } z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_p} \cap \widehat{B}_{f,z_q}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z \in f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_p} \cap \widehat{B}_{f,z_q}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z \in f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_p}) \cap f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_q}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z \in f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_p}) \wedge z \in f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_q}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{on}(z) \in \widehat{B}_{f,z_p} \wedge f^{on}(z) \in \widehat{B}_{f,z_q}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\text{βάσει του Θεωρήματος 10})$$

$$\Rightarrow \lim_n f^{on}(z) = z_p \wedge \lim_n f^{on}(z) = z_q \Rightarrow z_p = z_q \text{ Άτοπο, αφού από την υπόθεση } z_p \neq z_q.$$

$$\text{Άρα } \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_p} \cap \widehat{B}_{f^{on},z_q}) = \emptyset \quad \blacksquare$$

Θεώρημα 28 (Η γραμμικότητα του τελεστή L ως προς τη ένωση και την τομή)

Έστω σταθερά σημεία $z_p, z_q \in X_f$ με $z_p \neq z_q$ και $\widehat{B}_{f,z_p}, \widehat{B}_{f,z_q}$ οι κύριες μοναδιαίες τομές τους, τότε για τον τελεστή L ισχύει:

$$I. \quad L(\widehat{B}_{f,z_p} \cup \widehat{B}_{f,z_q}) = L(\widehat{B}_{f,z_p}) \cup L(\widehat{B}_{f,z_q})$$

$$II. \quad L(\widehat{B}_{f,z_p} \cap \widehat{B}_{f,z_q}) = L(\widehat{B}_{f,z_p}) \cap L(\widehat{B}_{f,z_q}) = \emptyset$$

Απόδειξη

I. Γραμμικότητα ως προς την ένωση

Έστω

$$z \in L(\widehat{B}_{f,z_p} \cup \widehat{B}_{f,z_q}) \Leftrightarrow$$

$$z \in \limsup_n f^{-on}(\widehat{B}_{f,z_p} \cup \widehat{B}_{f,z_q}) \Leftrightarrow$$

$$z \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-om}(\widehat{B}_{f,z_p} \cup \widehat{B}_{f,z_q}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
z &\in \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p} \cup (\widehat{B}_{f,z_q})) \right] \Leftrightarrow \\
z &\in \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} (f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p}) \cup f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_q})) \right] = \\
z &\in \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left[\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_q}) \right) \right] \Leftrightarrow \\
z &\in \bigcap_{m=0}^{\infty} \left[f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right) \cup f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_q}) \right) \right] \Leftrightarrow \\
\forall m \in \mathbb{N}, z &\in \left\{ f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right) \cup f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_q}) \right) \right\} \Leftrightarrow \\
\forall m \in \mathbb{N}, \left\{ z \in f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right) \right\} &\text{ είτε } z \in f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_q}) \right) \Big\} \Leftrightarrow \\
\forall m \in \mathbb{N}, \left\{ f^{om}(z) \in \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right) \right\} &\text{ είτε } f^{om}(z) \in \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_q}) \right) \Big\} \Leftrightarrow \\
\forall m \in \mathbb{N}, \left\{ \exists k \in \mathbb{N}, f^{om}(z) \in f^{-ok} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right\} &\text{ είτε } \exists \lambda \in \mathbb{N}, f^{om}(z) \in f^{-o\lambda} (\widehat{B}_{f,z_q}) \Big\} \Leftrightarrow \\
\forall m \in \mathbb{N}, \left\{ \exists k \in \mathbb{N}, f^{ok}(f^{om}(z)) \in \widehat{B}_{f,z_p} \right\} &\text{ είτε } \exists \lambda \in \mathbb{N}, f^{o\lambda}(f^{om}(z)) \in \widehat{B}_{f,z_q} \Big\} \Leftrightarrow \\
\forall m \in \mathbb{N}, \left\{ \exists k \in \mathbb{N}, f^{o(m+k)}(z) \in \widehat{B}_{f,z_p} \right\} &\text{ είτε } \exists \lambda \in \mathbb{N}, f^{o(m+\lambda)}(z) \in \widehat{B}_{f,z_q} \Big\} \quad (1)
\end{aligned}$$

Από την (1) προκύπτει ότι, οι δυνατές περιπτώσεις για την τροχιά $(f^{o(m)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι δύο:

Περίπτωση 1: Είτε, υπακολουθίες της τροχιάς $(f^{o(n)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ ανήκουν στις διαφορετικές κύριες τομές $\widehat{B}_{f,z_p}, \widehat{B}_{f,z_q}$.

Περίπτωση 2: Είτε ολόκληρη η τροχιά $(f^{o(n)}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ (με εξαίρεση ίσως ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων) ανήκει σε μία από τις δύο κύριες μοναδιαίες τομές $\widehat{B}_{f,z_p}, \widehat{B}_{f,z_q}$.

Όπως αποδείχτηκε στο Θεώρημα 11 τελικά ισχύει μόνο η περίπτωση 2 επομένως η (1) είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned}
\left\{ \forall m \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, f^{o(m+k)}(z) \in \widehat{B}_{f,z_p} \right\} &\text{ είτε } \left\{ \forall m \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{N}, f^{o(m+\lambda)}(z) \in \widehat{B}_{f,z_q} \right\} \Leftrightarrow \\
\left\{ \forall m \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, f^{ok}(f^{om}(z)) \in \widehat{B}_{f,z_p} \right\} &\text{ είτε } \left\{ \forall m \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{N}, f^{o\lambda}(f^{om}(z)) \in \widehat{B}_{f,z_q} \right\} \Leftrightarrow \\
\left\{ \forall m \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, f^{om}(z) \in f^{-ok} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right\} &\text{ είτε } \left\{ \forall m \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{N}, f^{om}(z) \in f^{-o\lambda} (\widehat{B}_{f,z_q}) \right\} \Leftrightarrow \\
\left\{ \forall m \in \mathbb{N}, f^{om}(z) \in \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right) \right\} &\text{ είτε } \left\{ \forall m \in \mathbb{N}, f^{om}(z) \in \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_q}) \right) \right\} \Leftrightarrow \\
\left\{ \forall m \in \mathbb{N}, z \in f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right) \right\} &\text{ είτε } \left\{ \forall m \in \mathbb{N}, z \in f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_q}) \right) \right\} \Leftrightarrow \\
\left\{ z \in \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right) \right\} &\text{ είτε } \left\{ z \in \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_q}) \right) \right\} \Leftrightarrow \\
z \in \left(\bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_p}) \right) \right) &\cup \left(\bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on} (\widehat{B}_{f,z_q}) \right) \right) \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &\in \left(\bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_p}) \right) \cup \left(\bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_q}) \right) \Leftrightarrow \\
z &\in \limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_p}) \cup \limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_q}) \Leftrightarrow \\
z &\in L(\hat{B}_{f,z_p}) \cup L(\hat{B}_{f,z_q}) \blacksquare
\end{aligned}$$

II. Γραμμικότητα ως προς την τομή

$$\begin{aligned}
L(\hat{B}_{f,z_p} \cap \hat{B}_{f,z_q}) &= \limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_p} \cap \hat{B}_{f,z_q}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_p} \cap \hat{B}_{f,z_q}) \right) = \\
&= \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_p}) \right) \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_q}) \right) \right) = \\
&= \bigcap_{m=0}^{\infty} \left(f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_p}) \right) \cap f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_q}) \right) \right) = \\
&= \bigcap_{m=0}^{\infty} \left(f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_p}) \right) \right) \cap \left(\bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_q}) \right) \right) = \\
&= \limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_p}) \cap \limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_q}) = L(\hat{B}_{f,z_p}) \cap L(\hat{B}_{f,z_q})
\end{aligned}$$

Επειδή τα $L(\hat{B}_{f,z_p})$, $L(\hat{B}_{f,z_q})$ είναι συνιστώσες ευστάθειας, ισχύει επιπλέον ότι

$$L(\hat{B}_{f,z_p}) \cap L(\hat{B}_{f,z_q}) = \emptyset \text{ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε } \blacksquare$$

Θεώρημα 29

Έστω η κύρια μοναδιαία τομή $\hat{B}_{f,z_k}$ σταθερού σημείου με $L(\hat{B}_{f,z_p}) \neq \emptyset$, τότε η οικογένεια $\{f^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι κανονική (normal family) επί του $L(\hat{B}_{f,z_p})$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Montel για τις κανονικές οικογένειες, η οικογένεια $\{f^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι κανονική επί του ανοικτού συνόλου $\Delta(\hat{B}_{f,z_p}) \subset \mathbb{C}$ αν το σύνολο των αναλυτικών συναρτήσεων $\{f^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο¹³ επί των κλειστών δίσκων D

$$D \subset L(\hat{B}_{f,z_p}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} f^{-om} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-on}(\hat{B}_{f,z_q}) \right).$$

¹³ Μία οικογένεια συναρτήσεων $\mathfrak{F}$ που ορίζεται σε ένα σύνολο G , ονομάζεται *ομοιόμορφα φραγμένη επί των κλειστών δίσκων του G* , εάν για κάθε κλειστό δίσκο $D \subset G$ υπάρχει ένας αριθμός $M(D) > 0$ τέτοιος ώστε $|f(z)| \leq M(D)$ για κάθε $z \in G$ και για κάθε $f \in \mathfrak{F}$.

Έστω $z \in D \subset L(\hat{B}_{f,z_p}) \Rightarrow \forall m \geq 0, \exists n_z \geq 0 : f^{om}(f^{on_z}(z)) \in \hat{B}_{f,z_p} \Rightarrow$

$$\forall n \geq n_z \geq 0 : f^{on}(z) \in \hat{B}_{f,z_p} \quad (1)$$

Επειδή το D είναι κλειστός δίσκος υπάρχει ο φυσικός $N_D = \max_{z \in D}(n_z) \in \mathbb{N}$ οπότε η (1) θα ισχύει

$\forall n \geq N_D : f^{on}(z) \in \hat{B}_{f,z_p}$. Επομένως η οικογένεια $\{f^{on}\}_{n \geq N_D}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη επί του $L(\hat{B}_{f,z_p}) \subset \mathcal{C}$ και κατά συνέπεια ολόκληρη η οικογένεια $\{f^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ■

Θεώρημα 30

Αν το $z_k \in X_f$ είναι σταθερό σημείο τύπου Cremer, τότε το

$$L(\hat{B}_{f,z_k}) = \limsup_n f^{-on}(\hat{B}_{f,z_k}) = \emptyset$$

Απόδειξη

Έστω ότι $L(\hat{B}_{f,z_k}) \neq \emptyset$ τότε από το προηγούμενο θεώρημα 29 προκύπτει ότι η οικογένεια $\{f^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι κανονική επί του $L(\hat{B}_{f,z_k})$. Άρα είναι υποσύνολο του συνόλου Ευστάθειας.

Διακρίνονται οι περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Το $z_k \in X_f$ ανήκει στην $L(\hat{B}_{f,z_k})$.

Αν ισχυε η περίπτωση αυτή, τότε το z_k θα ήταν ελκυστής ή τύπου Siegel, άτοπο.

Περίπτωση 2: Το $z_k \in X_f$ ανήκει στο σύνορο $\partial L(\hat{B}_{f,z_k})$ και στο οποίο συμβάλλει πεπερασμένος αριθμός περιοχών ευστάθειας.

Αν ισχυε η περίπτωση αυτή τότε το z_k θα ήταν παραβολικού τύπου, άτοπο.

Περίπτωση 3: Το $z_k \in X_f$ ανήκει στο σύνορο $\partial L(\hat{B}_{f,z_k})$ και στο οποίο συμβάλλει άπειρος αριθμός περιοχών ευστάθειας (σε ακτινική μορφή με το z_k στο 'κέντρο').

Στη περίπτωση αυτή, θα υπάρχουν άπειρες «πολύ λεπτές» περιοχές ευστάθειας ακτινικά του σταθερού σημείου το οποίο βρίσκεται επί του συνόλου Julia. Εφόσον αυτές οι περιοχές ευστάθειας είναι μη κενές, θα είναι μη μηδενικού μέτρου (δηλαδή θα έχουν εμβαδόν), άρα δεν μπορεί να είναι άπειρες, αλλά πεπερασμένες. Επομένως το σταθερό σημείο είναι παραβολικού τύπου το οποίο είναι άτοπο, αφού από την υπόθεση είναι τύπου Cremer. Επομένως $L(\hat{B}_{f,z_k}) = \emptyset$, όταν το

$z_k \in X_f$ είναι τύπου Cremer ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΥΠΟΒΙΒΑΣΙΜΟΤΗΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

6.1 ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Είναι γνωστό από την Μιγαδική Δυναμική ότι, τα σύνολα αστάθειας των (διαφορετικών) πολυωνύμων f και f^{on} ταυτίζονται για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $J(f) = J(f^{on})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (βλ [4] σελ 83 και [10]). Είναι δυνατόν δηλαδή, διαφορετικού βαθμού πολυώνυμο να δίνουν ταυτόσημα δυναμικά αποτελέσματα. Επομένως για ένα πολυώνυμο, που παράγει ένα Μιγαδικό Δυναμικό Σύστημα, προκύπτει το *πρόβλημα της υποβιβασιμότητας* του, δηλαδή το ζήτημα της υποκατάστασής του, από κάποιο άλλο πολυώνυμο μικρότερου βαθμού, το οποίο παράγει τα ίδια δυναμικά αποτελέσματα.

Το πρόβλημα του υποβιβασμού: Δοθέντος ενός πολυωνύμου g , να βρεθεί (αν υπάρχει) πολυώνυμο f μικρότερου βαθμού, $\deg(f) < \deg(g)$ τέτοιο ώστε, τα αντίστοιχα σύνολα αστάθειας τους $J(f) = J(g)$ να συμπίπτουν.

Είναι προφανές ότι το πρόβλημα του υποβιβασμού έχει λύση, εφόσον το g μπορεί να τεθεί στη μορφή $g = f^{om}$ για κάποιο πολυώνυμο f και κάποιο φυσικό αριθμό m . Το πρόβλημα του υποβιβασμού εισάγει τις ακόλουθες έννοιες:

Ορισμός 12 Δύο πολυώνυμα f, g με $\deg(f) < \deg(g)$ θα λέγονται δυναμικώς **ισοδύναμα**, εάν υπάρχει φυσικός $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$ έτσι ώστε να ισχύει $f^{om} = g$. Στην περίπτωση αυτή, το πολυώνυμο g είναι **υποβιβάσιμο**, ο φυσικός $m \in \mathbb{N}$ δηλώνει την **τάξη** του υποβιβασμού και το πολυώνυμο f είναι η **ρίζα** του υποβιβασμού. Αν $m \in \mathbb{N}$ είναι η μέγιστη τάξη υποβιβασμού, τότε ως **βαθμός υποβιβασμού** $Deg(g)$ του πολυωνύμου g , ορίζεται ο βαθμός του πολυωνύμου f , δηλαδή $Deg(g) \stackrel{op}{=} \deg(f)$ όπου $\deg(g)$ ο συνήθης βαθμός του πολυωνύμου. Αν $m = 1$ τότε το πολυώνυμο g ονομάζεται **μη υποβιβάσιμο ή πρωτογενές**. ▲

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, το πρόβλημα του υποβιβασμού μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως ακολούθως:

Το πρόβλημα του υποβιβασμού (ισοδύναμη διατύπωση): Να διερευνηθεί και να επιλυθεί η συναρτησιακή εξίσωση αναδρομής $f^{om} = g$ για δεδομένο πολυώνυμο g και με άγνωστο το ζεύγος $(m, f) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{S}$, όπου $\mathfrak{S}$ ο χώρος των πολυωνύμων.

Παρατηρήσεις

1. Ο βαθμός υποβιβασμού δίνεται από την σχέση $Deg(g) = \exp\left(\frac{1}{m} \ln \deg(g)\right) \in \mathbb{N}$. (1)

Πράγματι, αν το g είναι υποβιβάσιμο, τότε $f^{om} = g$ ή $\deg(g) = (\deg(f))^m$.

Από το 2^ο μέλος της (1) έχουμε

$$\exp\left(\frac{1}{m} \ln \deg(g)\right) = \exp\left(\frac{1}{m} \ln (\deg(f))^m\right) = \deg(f) \stackrel{op}{=} Deg(g)$$

Είναι φανερό ότι $Deg(g) \leq \deg(f)$. Το '=' ισχύει για πρωτογενή πολυώνυμο.

- Είναι προφανές ότι ο Ορισμός 12, εισάγει μια σχέση ισοδυναμίας στο χώρο των πολυωνύμων $\mathfrak{S}$. όπου το ζητούμενο είναι να προσδιοριστεί το πολυώνυμο αντιπρόσωπος κάθε κλάσης ισοδυναμίας, με το μικρότερο βαθμό.
- Τα οφέλη που προκύπτουν από την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι ότι, αφενός η μελέτη περιορίζεται πλέον σε κλάσεις ισοδυναμίας πολυωνύμων όπου μελετάται ο αντιπρόσωπος με τον μικρότερο βαθμό και αφετέρου ο υποβιβασμός συνεπάγεται μείωση του υπολογιστικού φόρτου.

Το *Θεώρημα 31* που ακολουθεί λύνει το πρόβλημα του υποβιβασμού. Δίνεται ο ορισμός του γραμμικού διαφορικού τελεστή $T_h(\cdot)$, ο οποίος χρησιμοποιείται στην διαδικασία.

Ορισμός 13. Για δεδομένη αναλυτική συνάρτηση h , ορίζεται ο γραμμικός διαφορικός τελεστής $T_h(\cdot)$, με δράση $f \rightarrow T_h f = \frac{1}{h} \frac{df}{dz} = \frac{f'}{h}$, όπου f αναλυτική συνάρτηση

Επίσης ορίζεται $T_h^m f = T_h(T_h^{(m-1)} f)$, $m \in \mathbb{N}$ και $T_h^0 f = f$ ▲

Πχ $T_h^5 f = T_h(T_h(T_h(T_h(T_h f)))) = (((f'/h)' / h)' / h') / h$.

Θεώρημα 31

Έστω πολυώνυμο g βαθμού $\deg(g) > 2$ και η εξίσωση αναδρομής

$$f^{om} = g \quad (1)$$

με άγνωστο το ζεύγος $(m, f) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{S}$, όπου $\mathfrak{S}$ ο χώρος των πολυωνύμων, τότε:

A. Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την επιλυσιμότητα της (1) ή ισοδύναμα για την υποβιβασιμότητα του g είναι οι ακόλουθες:

- Το σύνολο $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / n^m = \deg(g), m \neq 1\}$ είναι μη κενό $A \neq \emptyset$
- Υπάρχει ζεύγος $(n, m) \in A$ για το οποίο η αλγεβρική παραγοντοποίηση¹⁴ του $g'(z)$, $g'(z) = g_1(z)g_2(z) \cdots g_m(z)$, με $\deg(g_1) < \deg(g_2) < \cdots < \deg(g_m)$ έχει m πολυωνυμικούς παράγοντες $g_1, g_2, \cdots, g_m$ ¹⁵, με βαθμούς $\deg(g_1) = n-1, \deg(g_2) = (n-1)n, \cdots, \deg(g_m) = (n-1)n^{m-1}$
- Οι παράγοντες $g_1, g_2, \cdots, g_m$ του g' ικανοποιούν το σύστημα των $m-1$ διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} T_{g_1}^{n-1}(g_2) = g_1^{(n-1)} \\ T_{g_1 g_2}^{n-1}(g_3) = g_1^{(n-1)} \\ \vdots \\ T_{g_1 g_2 \cdots g_r}^{n-1}(g_{r+1}) = g_1^{(n-1)}, \quad 1 \leq r \leq m-1 \\ \vdots \\ T_{g_1 g_2 \cdots g_{m-1}}^{n-1}(g_m) = g_1^{(n-1)} \end{cases}$$

¹⁴ Παραγοντοποίηση στο πεδίο ακεραιότητας των συντελεστών του πολυωνύμου.

¹⁵ Τα πολυώνυμα $g_1, g_2, \cdots, g_m$ δεν είναι κατ' ανάγκην ανάγωγα.

με αρχικές συνθήκες:

$$T_{g_1 g_2 \dots g_r}^k (g_{r+1}(z))|_{z=0} = g_1^{(k)}(f^{or}(0)), k = 0, \dots, n-2 \quad r = 1, \dots, m-1 \quad \text{και } g(0) = f^{om}(0)$$

όπου f το πολυώνυμο

$$f(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)}$$

$$\text{με επαναλήψεις} \quad f^{or}(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2}(g_{r+1}(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)}, \quad r = 1, 2, \dots, m-1$$

B. Το πολυώνυμο $f(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)}$ είναι η ρίζα της εξίσωσης

$$\text{αναδρομής } f^{om}(z) = g(z) \text{ εάν και μόνον εάν πληρούνται οι προηγούμενες συνθήκες}$$

Απόδειξη

A. **Το Αναγκαίο.** Έστω ότι το g είναι υποβιβάσιμο με ρίζα υποβιβασμού το f , δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο f με $\deg(f) = n < \deg(g)$ τέτοιο ώστε

$$f^{om}(z) = g(z) \quad (1)$$

1) Από την (1) είναι φανερό ότι ικανοποιείται η σχέση $\deg(f)^m = \deg(g)$ δηλαδή $n^m = \deg(g)$, κατά συνέπεια το σύνολο $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / n^m = \deg(g), m \neq 1\}$ είναι μη κενό.

2) Επίσης από την (1) προκύπτει ότι το πολυώνυμο $g'(z)$ αναλύεται σε γινόμενο m-πολυωνυμικών παραγόντων, με βαθμούς αντίστοιχα $n-1, (n-1)n, \dots, (n-1)n^{m-1}$.

Πράγματι, παραγωγίζοντας την (1) προκύπτει $g'(z) = f'(z)f'(f(z)) \dots f'(f^{o(m-1)}(z))$, στην οποία αν τεθεί:

$$\begin{cases} f'(z) = g_1(z) & (2.1) \\ f'(f(z)) = g_2(z) & (2.2) \\ \vdots \\ f'(f^{or}(z)) = g_{r+1}(z) & (2.r+1) \\ \vdots \\ f'(f^{o(m-1)}(z)) = g_m(z) & (2.m) \end{cases}$$

το $g'(z)$ γράφεται $g'(z) = g_1(z)g_2(z) \dots g_m(z)$

3) Ικανοποιούνται οι διαφορικές εξισώσεις $T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-1}(g_{r+1}) = g_1^{(n-1)}, r = 1, 2, \dots, m-1$

Πράγματι, με διαδοχική εφαρμογή, (n-1)-φορές των διαφορικών τελεστών

$T_{g_1}, T_{g_1 g_2}, \dots, T_{g_1 g_2 \dots g_r}, \dots, T_{g_1 g_2 \dots g_{m-1}}$ αντίστοιχα στις σχέσεις (2.2) έως (2.m) προκύπτει

$$T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-1}(g_{r+1}) = T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-1}(f'(f^{or})), \quad r = 1, 2, \dots, m-1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-1}(g_{r+1}) &= T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2} \left(T(f'(f^{or})) \right) = T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2} \left(\frac{f''(f^{or})(f^{or})'}{g_1 g_2 \dots g_r} \right) = T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2} (f''(f^{or})) = \dots = \\ &= \dots = T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-n} (f^{(n)}(f^{or})) = f^{(n)}(f^{or}), \quad r = 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-1}(g_{r+1}) = f^{(n)}(f^{or}) = g_1^{(n-1)} = \text{const}, \quad r = 1, 2, \dots, m-1$$

(το $g_1^{(n-1)}(z) = \text{const}$ διότι $\deg(g_1) = n-1$)

Αποδείχθηκε επομένως ότι $T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-1}(g_{r+1}) = g_1^{(n-1)}, \forall r \in \{1, 2, \dots, m-1\}$

Όσον αφορά τις αρχικές συνθήκες: Με διαδοχική εφαρμογή, k -φορές $k=0, 1, \dots, n-1$ των διαφορικών τελεστών $T_{g_1}, T_{g_1 g_2}, \dots, T_{g_1 g_2 \dots g_r}, \dots, T_{g_1 g_2 \dots g_{m-1}}$ αντίστοιχα στις σχέσεις (2.2) έως

(2.m) προκύπτει

$$f^{(k+1)}(f^{or}(z)) = T_{g_1 g_2 \dots g_r}^k(g_{r+1}(z)), r = 1, 2, \dots, m-1 \quad \text{ή}$$

$$g_1^{(k)}(f^{or}(z)) = T_{g_1 g_2 \dots g_r}^k(g_{r+1}(z)), r = 1, 2, \dots, m-1.$$

Θέτοντας $z = 0$ και στα 2 μέλη λαμβάνεται

$$g_1^{(k)}(f^{or}(0)) = T_{g_1 g_2 \dots g_r}^k(g_{r+1}(z))|_{z=0}, \quad r = 1, 2, \dots, m-1$$

Επίσης είναι $g(0) = f^{om}(0)$, δηλαδή ικανοποιείται το σύνολο των αρχικών συνθηκών.

Μένει να αποδειχτεί ότι $f(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)}$ και γενικότερα

$$f^{or}(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2}(g_{r+1}(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)}, \quad r = 1, 2, \dots, m-1$$

Όντως, από την (2.2) εφαρμόζοντας διαδοχικά τον τελεστή T_{g_1} είναι:

$$g_2(z) = f'(f(z)) \Rightarrow \begin{cases} T_{g_1} g_2(z) = \frac{f''(f(z))f'(z)}{g_1(z)} = f''(f(z)) \\ T_{g_1}^2 g_2(z) = T_{g_1}(T_{g_1} g_2(z)) = \frac{f'''(f(z))f'(z)}{g_1(z)} = f'''(f(z)) \\ \vdots \\ T_{g_1}^{n-2} g_2(z) = T_{g_1}(T_{g_1}^{n-3} g_2(z)) = \frac{f^{(n-1)}(f(z))f'(z)}{g_1(z)} = f^{(n-1)}(f(z)) \end{cases}$$

Άρα

$$T_{g_1}^{n-2} g_2(z) = f^{(n-1)}(f(z)) \quad (3)$$

Επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου f είναι $\deg(f) = n$, το πολυώνυμο f γράφεται ως

$$f(z) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} z^{n-1} + \dots + f(0). \text{Οπότε το πολυώνυμο } f^{(n-1)}(z) \text{ είναι πρω-}$$

τοβάθμιο και ίσο με $f^{(n-1)}(z) = f^{(n)}(0)z + f^{(n-1)}(0)$

Επομένως η (3) γίνεται

$$T_{g_1}^{n-2} g_2(z) = f^{(n-1)}(f(z)) = f^{(n)}(0)f(z) + f^{(n-1)}(0) \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$T_{g_1}^{n-2} g_2(z) = g_1^{(n-1)}(0)f(z) + g^{(n-2)}(0)$$

και επιλύοντας την τελευταία ως προς $f(z)$ αποδεικνύεται το ζητούμενο

$$f(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)}$$

Για την απόδειξη της $f^{or}(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2}(g_{r+1}(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)}, r = 1, 2, \dots, m-1$ ακο-

λουθείται η ίδια διαδικασία, εφαρμόζοντας τον τελεστή $T_{g_1 g_2 \dots g_r}$ στις σχέσεις (2.r+1)

$r = 1, 2, \dots, m-1$.

Το Ικανό. Έστω ότι για το πολυώνυμο g ισχύουν οι προϋποθέσεις 1. 2. και 3. του

Θεωρήματος, θα δειχθεί ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)} \quad \text{είναι η ρίζα της } f^{om}(z) = g(z)$$

Θα αποδειχθεί αρχικά ότι $g_r(z) = g_1(f^{o(r-1)}(z)) = f'(f^{o(r-1)}(z))$ για $r = 1, 2, \dots, m$.

Απόδειξη για $r=1$ δηλ ότι $g_1(z) = f'(z)$.

Πράγματι, από την $f(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)}$ παραγωγίζοντας προκύπτει

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} \frac{d}{dz} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} \left(\frac{\frac{d}{dz} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z))}{g_1(z)} \right) g_1(z) = \\ &= \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-1}(g_2(z)) g_1(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} g_1^{(n-1)}(0) g_1(z) = g_1(z) \end{aligned}$$

(διότι από την υπόθεση είναι $T_{g_1}^{n-1}(g_2) = g_1^{(n-1)}$)

Αποδείχθηκε επομένως ότι

$$g_1(z) = f'(z) \quad (4)$$

Απόδειξη για $r=2$ δηλαδή ότι $g_2(z) = g_1(f(z)) = f'(f(z))$

Από την υπόθεση ισχύει ότι:

$$T_{g_1}^{n-1}(g_2(z)) = g_1^{(n-1)}(0) \Rightarrow$$

$$T\left(T_{g_1}^{n-2}(g_2(z))\right) = g_1^{(n-1)}(0) \Rightarrow \frac{(T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)))'}{g_1(z)} = g_1^{(n-1)}(0) \Rightarrow (\text{λόγω της (4)})$$

$$\begin{aligned} (T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)))' &= g_1^{(n-1)}(0) f'(z) \Rightarrow \\ T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) &= g_1^{(n-1)}(0) f(z) + c_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Από την (5) για $z=0$ και λόγω των αρχικών συνθηκών (για $k=n-2$ και $r=1$), προκύπτει

$$(T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)))_{z=0} = g_1^{(n-1)}(0) f(0) + c_1 \Leftrightarrow g_1^{(n-2)}(f(0)) = g_1^{(n-1)}(0) f(0) + c_1 \quad (6)$$

και επειδή η $g_1^{(n-2)}(z)$ είναι το πρωτοβάθμιο πολυώνυμο βάσει του αναπτύγματος Taylor

γράφεται $g_1^{(n-2)}(z) = g_1^{(n-1)}(0)z + g_1^{(n-2)}(0)$, οπότε από την (6) προκύπτει

$$g_1^{(n-1)}(0) f(0) + g_1^{(n-2)}(0) = g_1^{(n-1)}(0) f(0) + c_1 \Rightarrow c_1 = g_1^{(n-2)}(0)$$

και αντικαθιστώντας στην (5) γίνεται

$$(T_{g_1}^{n-2}(g_2(z))) = g_1^{(n-1)}(0) f(z) + g_1^{(n-2)}(0) \quad (7)$$

Ολοκληρώνοντας εκ νέου την (7), όπως και προηγουμένως, είναι:

$$(T_{g_1}^{n-3}(g_2(z))) = \frac{g_1^{(n-1)}(0)}{2} [f(z)]^2 + g_1^{(n-2)}(0) [f(z)] + g_1^{(n-3)}(0)$$

συνεχίζοντας ομοίως, μετά από $n-1$ ολοκληρώσεις τελικά λαμβάνεται

$$g_2(z) = \frac{g_1^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} [f(z)]^{n-1} + \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} [f(z)]^{n-2} + \dots + \frac{g_1'(0)}{1!} f(z) + g_1'(0) \equiv g_1(f(z))$$

Άρα αποδείχτηκε ότι $g_2 = g_1(f) = f'(f)$ (8)

Απόδειξη για $r = 3$ και $r > 3$. Εργαζόμενοι ομοίως και λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα αποτελέσματα καταλήγουμε

$$g_3(z) = \frac{g_1^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} [f^{o2}(z)]^{n-1} + \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} [f^{o2}(z)]^{n-2} + \dots + \frac{g_1'(0)}{1!} f^{o2}(z) + g_1'(0) \equiv g_1(f^{o2}(z))$$

Και γενικά για $r = 1, 2, \dots, m$ με όμοια διαδικασία αποδεικνύεται

$$g_{r+1}(z) = \frac{g_1^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} [f^{or}(z)]^{n-1} + \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} [f^{or}(z)]^{n-2} + \dots + \frac{g_1'(0)}{1!} f^{or}(z) + g_1'(0) \equiv g_1(f^{or}(z))$$

B. Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα έχουμε ότι

$$g' = g_1 g_2 \dots g_{r+1} \dots g_m = g_1(z) g_1(f) \dots g_1(f^{or}) \dots g_m(f^{o(m-1)}) = f'(z) f'(f) \dots f'(f^{or}) \dots f'(f^{o(m-1)}) = (f^{om})' \Rightarrow g(z) = f^{om}(z) + c \quad (9)$$

Από την (9) για $z = 0$: $g(0) = f^{om}(0) + c$ οπότε σε συνδυασμό με την αρχική συνθήκη

$g(0) = f^{om}(0)$ προκύπτει $c = 0$ δηλαδή αποδείχτηκε ότι το πολυώνυμο f ικανοποιεί την εξίσωση αναδρομής $g(z) = f^{om}(z)$

Υπολογισμός της f^{or} , $r = 1, 2, \dots, m-1$: Από την $T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-1}(g_{r+1}) = g_1^{(n-1)}$, $r = 1, 2, \dots, m-1$ με μια ολοκλήρωση λαμβάνεται

$$\left(T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2}(g_{r+1}) \right)' = g_1^{(n-1)}(0) g_1(z) \dots g_r(z) \Leftrightarrow T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2}(g_{r+1}) = g_1^{(n-1)}(0) f^{or}(z) + c \quad (10)$$

Για $z = 0$ από την (10) είναι $T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2}(g_{r+1})|_{z=0} = g_1^{(n-1)}(0) f^{or}(0) + c$ και λόγω της αρχικής συνθήκης $T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2}(g_{r+1}(z))|_{z=0} = g_1^{(n-2)}(f^{or}(0))$ προκύπτει

$$g_1^{(n-2)}(f^{or}(0)) = g_1^{(n-1)}(0) f^{or}(0) + c \Leftrightarrow$$

$$g_1^{(n-1)}(0) f^{or}(0) + g_1^{(n-2)}(0) = g_1^{(n-1)}(0) f^{or}(0) + c \Leftrightarrow c = g_1^{(n-2)}(0) \text{ οπότε η (10) δίνει}$$

$$T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2}(g_{r+1}) = g_1^{(n-1)}(0) f^{or}(z) + g_1^{(n-2)}(0) \Rightarrow$$

$$f^{or}(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2}(g_{r+1}(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)}, \quad r = 1, 2, \dots, m-1 \quad \blacksquare$$

Παρατηρήσεις

1. Αν η ρίζα υποβιβασμού είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο $n = 2$ τότε οι τύποι:

$$f^{or}(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1 g_2 \dots g_r}^{n-2}(g_{r+1}(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)}, \quad r = 1, 2, \dots, m-1 \quad \text{απλοποιούνται σε}$$

$$f^{or}(z) = \frac{1}{g_1'(0)} g_{r+1}(z) - \frac{g_1(0)}{g_1'(0)}, \quad r = 1, 2, \dots, m-1$$

2. Από το Θεώρημα 31, είναι φανερό ότι ένα πολυώνυμο g **δεν είναι υποβιβάσιμο** εφόσον ο βαθμός του δεν μπορεί να τεθεί στην μορφή δύναμης δηλαδή $\deg(g) = n^m$, $m \neq 1$, $n \geq 2$

6.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1: Δίνεται το πολυώνυμο $g(z)$, με $\deg(g) = 27$

$$g(z) = z^{27} - 18z^{25} + 9z^{24} + 144z^{23} - 144z^{22} - 642z^{21} + 1008z^{20} + 1596z^{19} - 3987z^{18} - 1512z^{17} + \\ + 9540z^{16} - 2994z^{15} - 13428z^{14} + 11892z^{13} + 8937z^{12} - 16656z^{11} + 1512z^{10} + \\ + 10527z^9 - 6120z^8 - 1434z^7 + 2586z^6 - 972z^5 + 168z^4 + 6z^3 - 24z^2 + 4z + 1$$

Να εξεταστεί αν είναι υποβιβάσιμο και στην καταφατική περίπτωση να βρεθεί η ρίζα υποβιβασμού ή ισοδύναμα να λυθεί η εξίσωση $f^{om} = g$ με άγνωστους τα m, f

Λύση

Το σύνολο $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / n^m = 27, m \neq 1\} = \{(3, 3)\}$, δηλαδή $n = 3, m = 3$.

Η ανάλυση του $g'(z)$ σε γινόμενο παραγόντων δίνει $m = 3$ παράγοντες

$$g'(z) = (3z^2 - 2) \cdot \\ (3z^6 - 12z^4 + 6z^3 + 12z^2 - 12z + 1) \cdot \\ (3z^{18} - 36z^{16} + 18z^{15} + 180z^{14} - 180z^{13} - 447z^{12} + \\ + 720z^{11} + 456z^{10} - 1422z^9 + 216z^8 + 1332z^7 - 861z^6 - 360z^5 + 516z^4 - 144z^3 + 12z^2 - 2)$$

Όπου $g_1(z) = 3z^2 - 2$ με βαθμό $\deg(g_1) = n - 1 = 2$

$$g_2(z) = 3z^6 - 12z^4 + 6z^3 + 12z^2 - 12z + 1 \quad \text{με βαθμό } \deg(g_2) = (n - 1)n = 6$$

και

$$g_3(z) = 3z^{18} - 36z^{16} + 18z^{15} + 180z^{14} - 180z^{13} - 447z^{12} + 720z^{11} + 456z^{10} - 1422z^9 + 216z^8 \\ + 1332z^7 - 861z^6 - 360z^5 + 516z^4 - 144z^3 + 12z^2 - 2 \\ \text{με βαθμό } \deg(g_2) = (n - 1)n^2 = 18$$

Ο έλεγχος για την ισχύ των $m - 1 = 2$ διαφορικών εξισώσεων δίνει:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{g_1}^{n-1}(g_2(z)) = g_1^{(n-1)}(z) \\ T_{g_1 g_2}^{n-1}(g_3(z)) = g_1^{(n-1)}(z) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_{g_1}^2(g_2(z)) = g_1^{(2)}(z) \\ T_{g_1 g_2}^2(g_3(z)) = g_1^{(2)}(z) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_{g_1} \left(T_{g_1} (g_2(z)) \right) = 6 \\ T_{g_1 g_2} \left(T_{g_1 g_2} (g_3(z)) \right) = 6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} T_{g_1} \left(\frac{g_2'(z)}{g_1(z)} \right) = 6 \\ T_{g_1 g_2} \left(\frac{g_3'(z)}{g_1(z) g_2(z)} \right) = 6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_{g_1} (6z^3 - 12z + 6) = 6 \\ T_{g_1 g_2} (6z^9 - 36z^7 + 18z^6 + 72z^5 - 72z^4 - 42z^3 + 72z^2 - 12z) = 6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{d}{dz}(6z^3 - 12z + 6)}{3z^2 - 2} = 6 \\ \frac{\frac{d}{dz}(6z^9 - 36z^7 + 18z^6 + 72z^5 - 72z^4 - 42z^3 + 72z^2 - 12z)}{(3z^2 - 2)(3z^6 - 12z^4 + 6z^3 + 12z^2 - 12z + 1)} = 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 = 6 \\ 6 = 6 \end{array} \right. \text{το οποίο ισχύει}$$

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)} = \frac{1}{g_1^{(2)}(0)} T_{g_1}(g_2(z)) - \frac{g_1'(0)}{g_1^{(2)}(0)} = \frac{1}{6} T_{g_1}(g_2(z)) = \\ &= \frac{1}{6} \frac{g_2'(z)}{g_1(z)} = \frac{1}{6} (6z^3 - 12z + 6) = z^3 - 2z + 1 \end{aligned}$$

Άρα $f(z) = z^3 - 2z + 1$ οπότε $f^{o2}(z) = z^9 - 6z^7 + 3z^6 + 12z^5 - 12z^4 - 7z^3 + 12z^2 - 2z$

Ελέγχουμε τις αρχικές συνθήκες των διαφορικών εξισώσεων:

$$T_{g_1}^0(g_2(z))|_{z=0} = g_1^{(0)}(f^{o1}(0)), \quad (k=0, r=1) \Leftrightarrow g_2(z)|_{z=0} = g_1(f^{o1}(0)), \Leftrightarrow 1=1 \quad \text{ισχύει}$$

$$T_{g_1 g_2}^0(g_3(z))|_{z=0} = g_1^{(0)}(f^{o2}(0)), \quad (k=0, r=2) \Leftrightarrow g_3(z)|_{z=0} = g_1(f^{o2}(0)), \Leftrightarrow -2 = -2 \quad \text{ισχύει}$$

$$T_{g_1}^1(g_2(z))|_{z=0} = g_1'(f^{o1}(0)), \quad (k=1, r=1) \Leftrightarrow \frac{g_2'(z)}{g_1(z)}|_{z=0} = g_1'(f^{o1}(0)), \Leftrightarrow 6=6 \quad \text{ισχύει}$$

$$T_{g_1 g_2}^1(g_3(z))|_{z=0} = g_1'(f^{o2}(0)), \quad (k=1, r=2) \Leftrightarrow \frac{g_3'(z)}{g_1(z)g_2(z)}|_{z=0} = g_1'(f^{o2}(0)), \Leftrightarrow 0=0 \quad \text{ισχύει}$$

Τέλος $g(0) = f^{om}(0) \Leftrightarrow g(0) = f(f(f(0))) \Leftrightarrow 1=1$ ισχύει.

Επομένως το πολυώνυμο g , υποβιβάζεται με ρίζα υποβιβασμού το πολυώνυμο

$$f(z) = z^3 - 2z + 1 \quad \text{και τάξη υποβιβασμού } m=3.$$

Είναι απλό να διαπιστωθεί ότι η $f(z)$ είναι ρίζα της $f^{o3} = g$

Παρατήρηση

Στην πράξη ο έλεγχος της υποβιβασιμότητας μπορεί να γίνει άμεσα υπολογίζοντας για κάθε

$$(n, m) \in A \quad \text{την συνάρτηση } f(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)} \quad (\text{και αποφεύγοντας τον έ-}$$

λεγχο των διαφορικών εξισώσεων και των αρχικών συνθηκών τους). Εφόσον η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)} \quad \text{είναι πολυώνυμο (και όχι ρητή) ελέγχεται απλά, αν ικα-}$$

νοποιεί την εξίσωση $f^{om} = g$.

Η απλοποιημένη αυτή μέθοδος ακολουθείται στην επόμενη εφαρμογή

Εφαρμογή 2: Δίνεται το πολώνυμο $g(z)$, με $\deg(g) = 8$

$$g(z) = z^8 - 12z^7 + 52z^6 - 90z^5 + 25z^4 + 66z^3 - 15z^2 - 9z + 3$$

Να ελεγχθεί η υποβιβασιμότητά του.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / n^m = 8, m \neq 1\} = \{(2, 3)\}$ είναι μη κενό με $n = 2, m = 3$.

Η ανάλυση του $g'(z)$ σε γινόμενο παραγόντων δίνει $m = 3$ παράγοντες

$$g'(z) = (2z - 3) \cdot (2z^2 - 6z - 1) \cdot (2z^4 - 12z^3 + 16z^2 + 6z - 3)$$

Όπου $g_1(z) = 2z - 3$ με βαθμό $\deg(g_1) = n - 1 = 1$

$$g_2(z) = 2z^2 - 6z - 1 \quad \text{με βαθμό} \quad \deg(g_2) = (n - 1)n = 2 \quad \text{και}$$

$$g_3(z) = 2z^4 - 12z^3 + 16z^2 + 6z - 3 \quad \text{με βαθμό} \quad \deg(g_3) = (n - 1)n^2 = 4$$

Αν το αρχικό πολώνυμο υποβιβάζεται, τότε η ρίζα υποβιβασμού θα είναι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{g_1^{(n-1)}(0)} T_{g_1}^{n-2}(g_2(z)) - \frac{g_1^{(n-2)}(0)}{g_1^{(n-1)}(0)} = \frac{1}{g_1^{(1)}(0)} T_{g_1}^0(g_2(z)) - \frac{g_1^{(0)}(0)}{g_1^{(1)}(0)} = \\ &= \frac{1}{g_1^{(1)}(0)} (g_2(z)) - \frac{g_1(0)}{g_1^{(1)}(0)} = \frac{1}{2} (2z^2 - 6z - 1) + \frac{3}{2} = z^2 - 3z + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f(z) = z^2 - 3z + 1$$

Αλλά το $f(z) = z^2 - 3z + 1$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση $f^{o3} = g$

$$\text{Πράγματι, } f^{o3}(z) = z^8 - 12z^7 + 52z^6 - 90z^5 + 23z^4 + 78z^3 - 31z^2 - 15z + 5 \neq g(z)$$

Επομένως το πολώνυμο g είναι πρωτογενές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΑ ΝΕΦΗ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

7.1 ΟΙ ΣΧΕΣΕΙΣ VIETTA-NEWTON ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Στην ενότητα αυτή, γίνεται αναφορά στις γνωστές σχέσεις μεταξύ συμμετρικών μορφών των ριζών ενός πολυωνύμου και των συντελεστών του, δηλαδή στους *τύπους του Vieta* καθώς και στους *αναδρομικούς τύπους του Newton*. Βάσει αυτών:

- Γίνεται εφικτός ο υπολογισμός του ελάχιστου και μέγιστου μέτρου των ριζών πολυωνύμου, συναρτήσει των συντελεστών του, χωρίς να γίνει υπολογισμός του συνόλου των ριζών του.
- Σε συνδυασμό με την έννοια του πολυωνυμικού νέφους, η οποία εισάγεται στην επόμενη ενότητα, γίνεται εφικτός ο υπολογισμός του κέντρου βάρους του συνόλου αστάθειας ενός πολυωνύμου και τέλος
- Οριοθετείται η μέγιστη δυνατή απόσταση που μπορεί να έχει ένας ελκυστής, είτε ένα σταθερό σημείο τύπου Siegel, από το σύνολο αστάθειας του δυναμικού συστήματος.

Οι τύποι του Vieta

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n = \sum_i \rho_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \sigma_2 &= \rho_1\rho_2 + \dots + \rho_{n-1}\rho_n = \sum_{i < j} \rho_i\rho_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_k &= \rho_1\rho_2 \dots \rho_k + \dots = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \rho_{i_1}\rho_{i_2} \dots \rho_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_n &= \rho_1\rho_2 \dots \rho_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}\end{aligned}$$

Αν τεθεί $S_m = \rho_1^m + \rho_2^m + \dots + \rho_n^m$, $m = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots$ τότε ισχύουν οι αναδρομικοί τύποι: (βλ. [8] ενότητα Πολυώνυμα σελ 16)

Αναδρομικοί τύποι του Newton

$$\begin{aligned}a_n S_m + a_{n-1} S_{m-1} + \dots + a_{n-k} S_{m-k} + \dots + a_{n-m+1} S_1 + m a_{n-m} &= 0, \quad \text{για } m = 1, 2, \dots, n \\ a_n S_m + a_{n-1} S_{m-1} + \dots + a_{n-k} S_{m-k} + \dots + a_1 S_{m-n+1} + a_0 S_{m-n} &= 0, \quad \text{για } m = n+1, n+2, \dots\end{aligned}$$

οι οποίοι για $m = 1, 2, 3, \dots, n, n+1, n+2, \dots$ δίνουν αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}m = 1: \quad & a_n S_1 + a_{n-1} = 0 \\ m = 2: \quad & a_n S_2 + a_{n-1} S_1 + 2a_{n-2} = 0 \\ m = 3: \quad & a_n S_3 + a_{n-1} S_2 + a_{n-2} S_1 + 3a_{n-3} = 0 \\ & \dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = n : & \quad a_n S_n + a_{n-1} S_{n-1} + \cdots + a_{n-k} S_{n-k} + \cdots + a_1 S_1 + n a_0 = 0 \\
m = n+1 : & \quad a_n S_{n+1} + a_{n-1} S_n + \cdots + a_{n-k} S_{n+1-k} + \cdots + a_1 S_2 + a_0 S_1 = 0, \\
m = n+2 : & \quad a_n S_{n+2} + a_{n-1} S_{n+1} + \cdots + a_{n-k} S_{n+2-k} + \cdots + a_1 S_3 + a_0 S_2 = 0
\end{aligned}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις είναι εύκολο να βρεθούν οι εκφράσεις των

$S_m = \rho_1^m + \rho_2^m + \cdots + \rho_n^m$, συναρτήσεων των συντελεστών του πολυωνύμου. Είναι π.χ.

$$S_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2}}{a_n^2}$$

$$S_3 = \frac{-a_{n-1}^3 + 3a_n a_{n-1} a_{n-2} - 3a_n^2 a_{n-3}}{a_n^3}$$

Αναγκαίο για τα επόμενα, είναι να βρεθούν εκφράσεις για την ακολουθία

$$S_m^* = \frac{1}{\rho_1^m} + \frac{1}{\rho_2^m} + \cdots + \frac{1}{\rho_n^m}.$$

Το επόμενο θεώρημα μας παρέχει την δυνατότητα χρήσης των αναδρομικών τύπων του Newton για τον υπολογισμό των S_m^* .

Θεώρημα 32

Αν $\rho_1, \dots, \rho_n$ οι ρίζες του πολυωνύμου $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, με $a_0 a_n \neq 0$ τότε

1. Το πολυώνυμο, με ανάστροφη διάταξη συντελεστών

$$f^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \cdots a_{n-1} z + a_n \text{ έχει ρίζες } \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \dots, \frac{1}{\rho_n}$$

2. Η ακολουθία των $S_m^* = \frac{1}{\rho_1^m} + \frac{1}{\rho_2^m} + \cdots + \frac{1}{\rho_n^m}$ υπολογίζεται εφαρμόζοντας τους αναδρομικούς τύπους του Newton στο ανάστροφο πολυώνυμο $f^*(z)$.

Απόδειξη

1. Έστω ότι $f^*(z) = b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0$

Για $k = 1, 2, \dots, n$ τα σ_k^* υπολογίζονται από το $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ ως εξής:

$$\sigma_k^* = \frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} \cdots \frac{1}{\rho_k} + \cdots = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \frac{1}{\rho_{i_1}} \frac{1}{\rho_{i_2}} \cdots \frac{1}{\rho_{i_k}} = \frac{\sigma_{n-k}}{\sigma_n} = \frac{(-1)^{n-k} \frac{a_{n-(n-k)}}{a_n}}{(-1)^n \frac{a_0}{a_n}} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0} \quad (1)$$

από την άλλη πλευρά, από το $f^*(z) = b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0$ είναι

$$\sigma^*_k = \frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} \cdots \frac{1}{\rho_k} + \cdots = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \frac{1}{\rho_{i_1}} \frac{1}{\rho_{i_2}} \cdots \frac{1}{\rho_{i_k}} = (-1)^k \frac{b_{n-k}}{b_n} \quad (2)$$

$$\text{Εξισώνοντας τις (1) και (2) προκύπτει } \frac{b_{n-k}}{b_n} = \frac{a_k}{a_0} \Leftrightarrow b_{n-k} = \frac{a_k}{a_0} b_n \quad (3)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, αν στην (3) επιλέξουμε το $b_n = a_0$, τότε

$$b_{n-k} = a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \text{ Κατά συνέπεια αποδείχθηκε ότι } f^*(z) = b_n z^n + \cdots b_1 z + b_0 \\ = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \cdots a_{n-1} z + a_n$$

2. Άμεση συνέπεια του 1. ■

Στο θεώρημα που ακολουθεί κατασκευάζονται ακολουθίες πραγματικών αριθμών οι οποίες συγκλίνουν στο ελάχιστο και μέγιστο μέτρο των ριζών ενός πολυωνύμου.

Θεώρημα 33

Έστω μιγαδικό πολυώνυμο $f(z) = a_n z^n + \cdots a_1 z + a_0$, με $a_0 a_n \neq 0$ **με σύνολο ριζών**

$R_f = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$. **Αν** $\max_{\rho \in R_f} \{|\rho|\}$ **και** $\min_{\rho \in R_f} \{|\rho|\}$ **το μεγαλύτερο και το μικρότερο μέτρο στο σύνολο** R_f **τότε**

$$\max_{\rho \in R_f} \{|\rho|\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|S_m|} \quad \text{και} \quad \min_{\rho \in R_f} \{|\rho|\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[m]{|S_m^*|}}$$

όπου οι ακολουθίες S_m και S_m^* , υπολογίζονται από τους αναδρομικούς τύπους του Newton.

Απόδειξη

1. Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτουν

$$|S_m| = |\rho_1^m + \rho_2^m + \cdots + \rho_n^m| \leq |\rho_1^m| + |\rho_2^m| + \cdots + |\rho_n^m| \leq n \cdot \max_i \{|\rho_i|^m\} \quad (1)$$

Έστω ότι $\max_i |\rho_i| = |\rho_k|$ τότε,

$$|S_m| = |\rho_1^m + \rho_2^m + \cdots + \rho_n^m| = \\ = |\rho_k^m + (\rho_1^m + \rho_2^m + \cdots + \rho_{k-1}^m + \rho_{k+1}^m + \cdots + \rho_n^m)| \geq \left| |\rho_k^m| - |\rho_1^m + \rho_2^m + \cdots + \rho_{k-1}^m + \rho_{k+1}^m + \cdots + \rho_n^m| \right| = \\ = |\rho_k^m| \cdot \left| 1 - \frac{|\rho_1^m + \rho_2^m + \cdots + \rho_{k-1}^m + \rho_{k+1}^m + \cdots + \rho_n^m|}{|\rho_k^m|} \right| = \\ = \max_i |\rho_i|^m \left| 1 - \left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_k} \right)^m + \left(\frac{\rho_2}{\rho_k} \right)^m + \cdots + \left(\frac{\rho_{k-1}}{\rho_k} \right)^m + \left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} \right)^m + \cdots + \left(\frac{\rho_n}{\rho_k} \right)^m \right) \right| = \max_i |\rho_i|^m \varphi(m)$$

$$\text{όπου } \varphi(m) = \left| 1 - \left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_k} \right)^m + \left(\frac{\rho_2}{\rho_k} \right)^m + \cdots + \left(\frac{\rho_{k-1}}{\rho_k} \right)^m + \left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} \right)^m + \cdots + \left(\frac{\rho_n}{\rho_k} \right)^m \right) \right|$$

προφανώς $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(m) = 1$. (1)

Συνοψίζοντας, αποδείχθηκε ότι

$$\max_i |\rho_i|^m \varphi(m) \leq |S_m| \leq n \cdot \max_i \{|\rho_i|^m\} \Leftrightarrow$$

$$\max_i |\rho_i| \sqrt[m]{\varphi(m)} \leq \sqrt[m]{|S_m|} \leq \sqrt[m]{n} \cdot \max_i |\rho_i|$$

από την τελευταία σχέση με βάση το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών και την (1)

$$\text{προκύπτει ότι } \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|S_m|} = \max_{i=1,2,\dots,n} \{|\rho_i|\}$$

2. Αποδεικνύεται με όμοια διαδικασία. Οντως, από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει:

$$|S_m^*| = \left| \frac{1}{\rho_1^m} + \frac{1}{\rho_2^m} + \dots + \frac{1}{\rho_n^m} \right| \leq \left| \frac{1}{\rho_1^m} \right| + \left| \frac{1}{\rho_2^m} \right| + \dots + \left| \frac{1}{\rho_n^m} \right| \leq \frac{n}{\min_i |\rho_i|^m} \quad (1)$$

Έστω ότι $\min_i |\rho_i| = |\rho_s|$, τότε από την άλλη πλευρά είναι

$$\begin{aligned} |S_m^*| &= \left| \frac{1}{\rho_1^m} + \frac{1}{\rho_2^m} + \dots + \frac{1}{\rho_n^m} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\rho_s^m} + \left(\frac{1}{\rho_1^m} + \dots + \frac{1}{\rho_{s-1}^m} + \frac{1}{\rho_{s+1}^m} + \dots + \frac{1}{\rho_n^m} \right) \right| \geq \left\| \frac{1}{\rho_s^m} \right\| - \left\| \frac{1}{\rho_1^m} + \dots + \frac{1}{\rho_{s-1}^m} + \frac{1}{\rho_{s+1}^m} + \dots + \frac{1}{\rho_n^m} \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\rho_s^m} \right\| \cdot \left\| 1 - \left(\frac{\rho_s}{\rho_1} + \dots + \frac{\rho_s}{\rho_{s-1}} + \frac{\rho_s}{\rho_{s+1}} + \dots + \frac{\rho_s}{\rho_n} \right) \right\| = \\ &= \frac{1}{\min_i |\rho_i|^m} \left\| 1 - \left(\left(\frac{\rho_s}{\rho_1} \right)^m + \dots + \left(\frac{\rho_s}{\rho_{s-1}} \right)^m + \left(\frac{\rho_s}{\rho_{s+1}} \right)^m + \dots + \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^m \right) \right\| = \frac{1}{\min_i |\rho_i|^m} \theta(m) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{που } \theta(m) = \left\| 1 - \left(\left(\frac{\rho_s}{\rho_1} \right)^m + \dots + \left(\frac{\rho_s}{\rho_{s-1}} \right)^m + \left(\frac{\rho_s}{\rho_{s+1}} \right)^m + \dots + \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \right)^m \right) \right\|$$

$$\text{προφανώς } \lim_{m \rightarrow \infty} \theta(m) = 1 \quad (5)$$

Συνοψίζοντας, από (3) και (4) αποδείχθηκε ότι

$$\frac{1}{\min_i |\rho_i|^m} \theta(m) \leq |S_m^*| \leq \frac{n}{\min_i |\rho_i|^m} \Leftrightarrow \frac{1}{\min_i |\rho_i|} \sqrt[m]{\theta(m)} \leq \sqrt[m]{|S_m^*|} \leq \frac{\sqrt[m]{n}}{\min_i |\rho_i|}.$$

Από την τελευταία σχέση και την (5), με βάση το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολου-

$$\text{θιών, προκύπτει ότι } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[m]{|S_m^*|}} = \min_i |\rho_i| \blacksquare$$

7.2 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΑ ΝΕΦΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

7.2.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

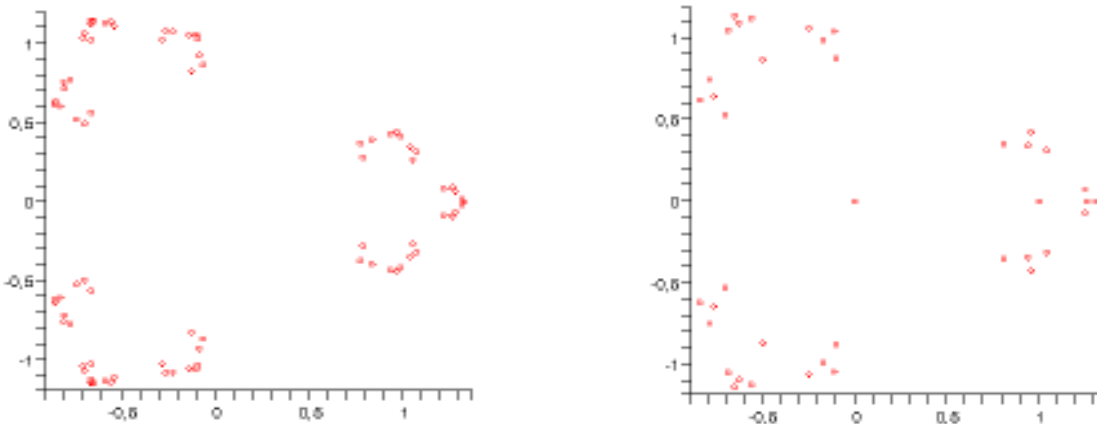
Στην ενότητα αυτή εισάγεται η έννοια του πολωνυμικού νέφους. Τα πολωνυμικά νέφη είναι ακολουθίες υποσυνόλων του $\mathbb{C}$, με πεπερασμένο πληθάριθμο, τα οποία παράγονται μέσω του πολωνύμου. Το ενδιαφέρον για την μελέτη αυτών των ακολουθιών πηγάζει από το γεγονός ότι, ορισμένα εξ αυτών προσεγγίζουν ή σχετίζονται με το σύνολο *Julia* του δυναμικού συστήματος. Κατά συνέπεια αναμένεται ότι η μελέτη αυτών, μπορεί να δώσει πρόσθετη πληροφορία. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι ότι γίνεται εφικτός ο υπολογισμός των κέντρων βάρους των συνόλων αστάθειας, τα οποία γενικώς είναι σύνολα μορφοκλασματικού τύπου (fractals).

Ορισμός 14. Με τον όρο **νέφος σημείων**, εννοείται κάθε ακολουθία $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ υποσυνόλων του μιγαδικού επιπέδου της οποίας οι όροι $\Phi_n \subset \mathbb{C}$ έχουν πεπερασμένο πληθάριθμο δηλαδή $\text{card}(\Phi_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$. Κάθε όρος Φ_n του νέφους, αποτελεί ένα **στιγμιότυπο** του νέφους. Με τον όρο **πολωνυμικά νέφη σημείων**, εννοούνται νέφη σημείων τα οποία παράγονται από τους όρους της ακολουθίας $\{f^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ενός πολωνύμου f (ως ρίζες, σταθερά σημεία, κριτικά σημεία και άλλα) ▲

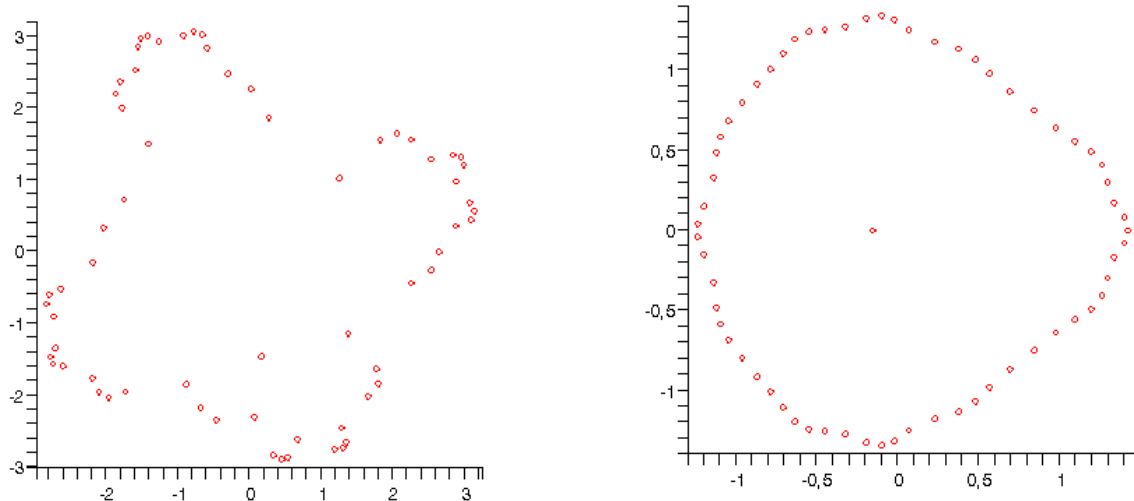
Για ένα πολωνυμικό νέφος, αναζητώνται στατιστικές-γεωμετρικές συμμετρίες και αναλλοίωτες ποσότητες, καθώς και η οριακή τους κατάληξη για μεγάλες τιμές του n .

Παραδείγματα πολωνυμικών νεφών, είναι οι ακολουθίες των :

1. Περιοδικών κύκλων $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $X_n \equiv X_{f^{on}} = \{z \in \mathbb{C} / f^{on}(z) = z, n \in \mathbb{N}\}$
2. Κριτικών σημείων $\Omega = (\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\Omega_n = \Omega_{f^{on}} = \{z \in \mathbb{C} / \frac{d}{dz} f^{on}(z) = 0, n \in \mathbb{N}\}$
3. Ριζών $R = (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $R_n = R_{f^{on}} = \{z \in \mathbb{C} / f^{on}(z) = 0, n \in \mathbb{N}\}$
4. Προεικόνων σταθερού σημείου $f^{-on}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} / f^{on}(z) = z_0, z_0 \in X_f, n \in \mathbb{N}\}$



Εικόνα 30 Τα στιγμιότυπα, X_4 του περιοδικού νέφους και Ω_4 του κριτικού νέφους του $z^3 - 1$



Εικόνα 31 Το στιγμιότυπα X_3 , των πολωνύμων $0.05z^4 - 0.3z - 2i$ και $0.5z^4 - 0.3z - 0.2$

A. Βασικές συνολοσυναρτήσεις, ορισμένες σε νέφη.

Έστω ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ με πεπερασμένο πληθάρημο, $\text{card}(A) < \infty$. Εκτός από τον **πληθάρημο** $\text{card}(A)$, σημαντικές συνολοσυναρτήσεις ορισμένες στο σύνολο A είναι:

1. Το **άθροισμα** των στοιχείων του A , $\text{sum}(A) = \sum_{a \in A} a$
2. Το **κέντρο βάρους** $M(A) \in \mathbb{C}$, που ορίζεται ως $M(A) = \frac{1}{\text{card}(A)} \sum_{a \in A} a = \frac{\text{sum}(A)}{\text{card}(A)}$ (βλέπε και Ορισμό 16 σελ 101)
3. Ο **γεωμετρικός μέσος** των μέτρων των στοιχείων του A , $G(A) \geq 0$ που ορίζεται ως

$$G(A) = \left(\prod_{a \in A} |a| \right)^{\frac{1}{\text{card}(A)}}$$

Σε κάθε πολωνυμικό νέφος $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, μπορούν να οριστούν ακολουθίες πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών οι οποίες παρέχουν πληροφορία για την συμπεριφορά του όπως:

1. Η ακολουθία των κέντρων βάρους $(M(\Phi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ των στιγμιότυπων του νέφους.
2. Η ακολουθία γεωμετρικών μέσων $(G(\Phi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ του νέφους.
3. Οι ακολουθίες $(\text{card}(\Phi_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(\text{sum}(\Phi_n))_{n \in \mathbb{N}}$

B. Επαγόμενα νέφη-Αθροιστικό νέφος-Οριακά σύνολα νέφους.

Από ένα νέφος $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μπορούν να οριστούν και άλλα νέφη, όπως το **αθροιστικό νέφος**

$\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\tilde{\Phi}_n = \bigcup_{k=1}^n \Phi_k$, καθώς και το νέφος $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\Psi_n = \bigcap_{k=1}^n \Phi_k$. Κατά συνέπεια

ορίζονται τα σύνολα $\tilde{\Phi}_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k$ και $\Phi_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_k$. Επίσης είναι προφανές ότι, αν $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $B = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι νέφη σημείων, τότε ορίζονται τα νέφη, ένωση $A \cup B = (A_n \cup B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τομή $A \cap B = (A_n \cap B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, διαφορά $A \setminus B = (A_n \setminus B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ κλπ. Επίσης, κάθε σύνολο G με $\text{card}(G) < +\infty$ μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερό νέφος $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπου $G_n \equiv G$ για κάθε n .

Ορισμός 15 (Ορισμός κέντρου βάρους νέφους) Έστω $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ νέφος στο μιγαδικό επίπεδο. Το όριο της ακολουθίας $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\Phi_n)$ (αν υπάρχει) ορίζεται ως το **κέντρο βάρους** του νέφους $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, δηλαδή $M(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\Phi_n)$ ▲

Ορισμός 16. (Ορισμός κέντρου βάρους φραγμένων υποσυνόλων του μιγαδικού επιπέδου)

Έστω $A, B \subset \mathbb{C}$ μη κενά φραγμένα υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου τότε:

1. Αν $\text{card}(A) < +\infty$, το κέντρο βάρους του ορίζεται ως $M(A) = \frac{\text{sum}(A)}{\text{card}(A)}$
2. Αν $\text{card}(A) = +\infty$, δηλαδή το A είναι αριθμήσιμα άπειρο, τότε $M(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\Phi_n)$,
όπου $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αυθαίρετο νέφος με $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = A$ (η σύγκλιση ορίζεται με την Hausdorff μετρική)
3. Αν η Hausdorff απόσταση των A, B είναι μηδέν, τότε τα κέντρα βάρους τους ταυτίζονται δηλαδή, αν $d_H(A, B) = 0$ τότε $M(A) = M(B)$. ▲

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύεται ότι, το κέντρο βάρους στην περίπτωση 2 του ορισμού 16 είναι καλά ορισμένο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του νέφους $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Επίσης αποδεικνύονται κάποιες βασικές ιδιότητες του κέντρου βάρους οι οποίες απορρέουν από τον ορισμό 16.

Πρόταση 34

Έστω $A, B \subset \mathbb{C}$, φραγμένα και μη κενά υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου, τότε:

1. Αν $\text{card}(A) = +\infty$, τότε το κέντρο βάρους στον ορισμό 16 είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του νέφους.
2. $M(A) = M(\bar{A})$
3. Αν το A είναι πυκνό σύνολο στο B , δηλαδή $\bar{A} = B$ τότε $M(A) = M(B)$.
4. Αν $\text{card}(A) = +\infty$ και $\text{card}(B) < +\infty$ τότε α) $M(A \cup B) = M(A)$ β) $M(A \setminus B) = M(A)$

Απόδειξη

1. Έστω δύο νέφη $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $\Theta = (\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n = A$.

Από την τριγωνική ιδιότητα της Hausdorff απόστασης, έχουμε ότι

$$d_H(\Phi_n, \Theta_n) \leq d_H(\Phi_n, A) + d_H(\Theta_n, A) \rightarrow 0 \text{ για } n \rightarrow \infty. \text{ Επομένως } \lim_{n \rightarrow \infty} d_H(\Phi_n, \Theta_n) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |M(\Phi_n) - M(\Theta_n)| = 0 \Rightarrow M(\Phi) = M(\Theta) = M(A), \text{ δηλαδή το } M(A) \text{ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του νέφους.}$$

2. Προκύπτει άμεσα, από την προφανή ισότητα $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, την $2^{\text{η}}$ ιδιότητα του ορισμού 16 και την ιδιότητα της μετρικής Hausdorff, δηλαδή ότι $d_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$

3. Πράγματι $\overline{A} = B \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{B} \Rightarrow \overline{A} = \overline{B} \Rightarrow d_H(A, B) = 0 \Rightarrow M(A) = M(B)$

4. α) Έστω αυθαίρετο νέφος $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = A$, τότε θα είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{card}(\Phi_n) = \infty$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi_n \cup B) = A \cup B$. Από τον Ορισμό 16 προκύπτει:

$$M(A) = M(\Phi) \quad \text{και} \quad M(A \cup B) = M(\Phi \cup B) \quad (1)$$

Επειδή, τα $\text{sum}(B), \text{sum}(B \cap \Phi_n) \in \mathbb{C}$ είναι πεπερασμένοι μιγαδικοί, τα $\text{card}(B), \text{card}(B \cap \Phi_n)$ είναι πεπερασμένοι φυσικοί αριθμοί και το $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{card}(\Phi_n) = \infty$, από τις σχέσεις (1) προκύπτει:

$$\begin{aligned} M(A \cup B) &= M(\Phi \cup B) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\Phi_n \cup B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sum}(\Phi_n \cup B)}{\text{card}(\Phi_n \cup B)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sum}(\Phi_n) + \text{sum}(B) - \text{sum}(B \cap \Phi_n)}{\text{card}(\Phi_n) + \text{card}(B) - \text{card}(B \cap \Phi_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sum}(\Phi_n)}{\text{card}(\Phi_n)} = M(\Phi) = M(A). \end{aligned}$$

β) ομοίως

$$\begin{aligned} M(A \setminus B) &= M(\Phi \setminus B) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\Phi_n \setminus B) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sum}(\Phi_n) - \text{sum}(B \cap \Phi_n)}{\text{card}(\Phi_n) - \text{card}(B \cap \Phi_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sum}(\Phi_n)}{\text{card}(\Phi_n)} = M(\Phi) = M(A) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Θεώρημα 35

Για κάθε $n \geq 2$, ισχύουν οι σχέσεις

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} (-1)^{m+1} \text{card}(X_{k_1} \cap X_{k_2} \cap \dots \cap X_{k_m})$$

και

$$\text{sum}\left(\bigcup_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} (-1)^{m+1} \text{sum}(X_{k_1} \cap X_{k_2} \cap \dots \cap X_{k_m})$$

Απόδειξη

Επειδή ο πληθάριθμος και το άθροισμα των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων αποτελούν προφανώς μέτρα αυτών, από την ιδιότητα της προσθετικότητας του μέτρου ισχύουν,

$$\text{card}(X \cup Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y) - \text{card}(X \cap Y)$$

$$\text{sum}(X \cup Y) = \text{sum}(X) + \text{sum}(Y) - \text{sum}(X \cap Y) \quad \text{για κάθε } X, Y \subset \mathcal{C} \text{ με } \text{card}(X) < \infty \text{ και } \text{card}(Y) < \infty.$$

Οι προς απόδειξη σχέσεις του θεωρήματος, οι οποίες σε εκτενέστερη μορφή είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n X_k\right) &= \sum_{1 \leq k_1 \leq n} \text{card}(X_{k_1}) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \text{card}(X_{k_1} \cap X_{k_2}) + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \text{card}(X_{k_1} \cap X_{k_2} \cap X_{k_3}) - \dots \\ &\dots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} \text{card}(X_{k_1} \cap X_{k_2} \cap \dots \cap X_{k_m}) + \dots + (-1)^{n+1} \text{card}(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n) \end{aligned}$$

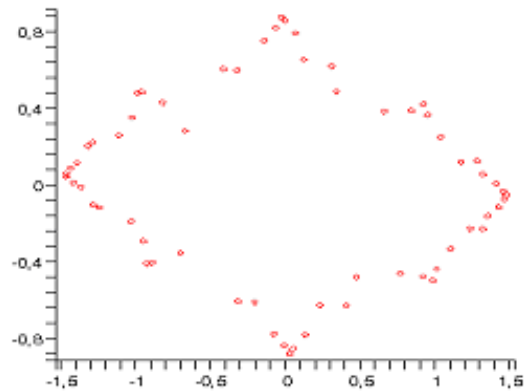
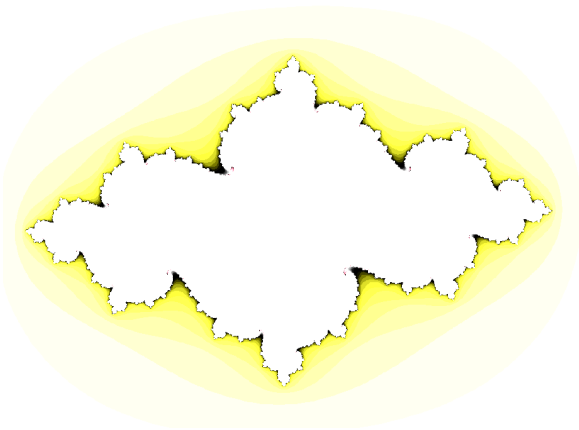
και

$$\begin{aligned} \text{sum}\left(\bigcup_{k=1}^n X_k\right) &= \sum_{1 \leq k_1 \leq n} \text{sum}(X_{k_1}) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \text{sum}(X_{k_1} \cap X_{k_2}) + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \text{sum}(X_{k_1} \cap X_{k_2} \cap X_{k_3}) - \dots \\ &\dots + (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} \text{sum}(X_{k_1} \cap X_{k_2} \cap X_{k_3} \cap \dots \cap X_{k_m}) + \dots + (-1)^{n+1} \text{sum}(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n) \end{aligned}$$

αποτελούν γενίκευση των σχέσεων αυτών για ένωση n συνόλων και αποδεικνύονται απλά με μαθηματική επαγωγή ■

7.2.2 Το Νέφος των Περιοδικών Κύκλων

Το νέφος των περιοδικών κύκλων $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ενός πολωνύμου f , ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα, ως η ακολουθία των συνόλων $X_n \equiv X_{f^{on}} = \{z \in \mathbb{C} / f^{on}(z) = z, n \in \mathbb{N}\}$. Είναι γνωστό από την θεωρία της Μιγαδικής Δυναμικής, ότι το άπειρο πλήθος των περιοδικών κύκλων ενός δυναμικού συστήματος, περιέχεται σχεδόν όλο στο σύνολο Julia J_f , εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό ελκτικών και τύπου Siegel κύκλων. Ειδικότερα, αν το J_f είναι σύνολο Cantor, τότε $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset J_f$ ενώ αν το J_f συνεκτικό, τότε $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_f$. Από τα προηγούμενα, δημιουργείται σημαντικό κίνητρο για την μελέτη του νέφους των περιοδικών κύκλων, αφού προσεγγίζουν «αρκετά καλά» το σύνολο αστάθειας J_f . Είναι φανερό επίσης ότι το πλήθος των σημείων του n -στιγμιότυπου X_n του νέφους, είναι $\text{card}(X_n) = (\deg(f))^n$.



Εικόνα 32 Το σύνολο αστάθειας του $z^2 - 0.7 + 0.1i$ (αριστερά) και το στιγμιότυπο X_6 (με 64 σημεία) του νέφους των περιοδικών κύκλων.

Συμβολισμός Έστω $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^m a_k z^k$ πολυώνυμο βαθμού $m > 1$

με συντελεστές $a_k, k = 1, 2, \dots, m$. Συμβολίζουμε με $a_{n,k}, k = 1, 2, \dots, m^n$ και $n = 1, 2, \dots$ τους συντε-

λεστές του πολυωνύμου $f^{on}(z)$, δηλαδή $f^{on}(z) = \sum_{k=0}^{m^n} a_{n,k} z^k$.

Στο επόμενο θεώρημα διατυπώνονται χρήσιμοι για τα επόμενα τύποι, οι οποίοι υπολογίζουν τους συντελεστές του πολυωνύμου $f^{on}(z)$ συναρτήσει των συντελεστών του $f(z)$

Θεώρημα 36

Έστω πολυώνυμο $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} \cdots + a_1 z + a_0$ βαθμού $\deg(f) = m$, τότε οι συντελε-
στές $a_{n,k}, k = 1, 2, \dots, m^n$ του πολυωνύμου

$$f^{on}(z) = a_{n,m^n} z^{m^n} + a_{n,m^n-1} z^{m^n-1} \cdots + a_{n,1} z + a_{n,0} = \sum_{k=0}^{m^n} a_{n,k} z^k$$

υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$1. \quad a_{n,k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k (f^{on}(z))}{dz^k} \Big|_{z=0} = \frac{1}{k!} \sum_{p=1}^{m^{n-1}} a_{n-1,p} \frac{d^k (f(z))^p}{dz^k} \Big|_{z=0}, k = 0, 1, \dots, m^n$$

$$2. \quad a_{n-1,k} = \frac{1}{k!} T_{f'}^k (f^{on}(z)) \Big|_{z=p}, \quad p \in R_f, k = 0, 1, \dots, m^n$$

3. **Ειδικότερα, ο σταθερός όρος $a_{n,0}$, ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής a_{n,m^n} και ο a_{n,m^n-1} του $f^{on}(z)$ είναι αντίστοιχα:**

$$a_{n,0} = f^{on}(0), \quad a_{n,m^n} = a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}} \quad \text{και} \quad a_{n,m^n-1} = m^{n-1} \cdot a_{m-1} \cdot a_m^{\frac{m^n-m}{m-1}}.$$

Απόδειξη

1. Αναπτύσσοντας το πολυώνυμο $f^{on}(z)$ σε σειρά Taylor γύρω από το μηδέν, έχουμε

$$f^{on}(z) = \sum_{k=0}^{m^n} a_{n,k} z^k = \sum_{k=0}^{m^n} \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k (f^{on}(z))}{dz^k} \Big|_{z=0} \right) z^k$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων αποδεικνύεται η

$$a_{n,k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k (f^{on}(z))}{dz^k} \Big|_{z=0}.$$

Η δεύτερη σχέση για τους συντελεστές $a_{n,k}$ προκύπτει από την σχέση

$$f^{on}(z) = \sum_{k=0}^{m^n} a_{n,k} z^k = f^{o(n-1)}(f(z)) = \sum_{p=0}^{m^{n-1}} a_{n-1,p} f(z)^p$$

παραγωγίζοντας διαδοχικά και θέτοντας $z=0$.

2. Η σχέση $a_{n-1,k} = \frac{1}{k!} T_{f'}^k (f^{on}(z)) \Big|_{z=p}$, $p \in R_f$ προκύπτει από την $f^{on}(z) = \sum_{q=0}^{m^n-1} a_{n-1,q} f(z)^q$ δρώντας διαδοχικά με τον διαφορικό τελεστή $T_{f'}$ και θέτοντας όπου $z = p$, $p \in R_f$

3. Προκύπτουν με εφαρμογή των προηγούμενων τύπων. ■

Θεώρημα 37

Έστω πολυώνυμο $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} \dots + a_1 z + a_0$, βαθμού $\deg(f) = m \geq 2$ και το νέφος των περιδικών του κύκλων, $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τότε ισχύουν:

1. Η ακολουθία των κέντρων βάρους $(M(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ του νέφους X είναι σταθερή. Ειδικότερα

$$M(X) = M(X_n) = -\frac{1}{m} \frac{a_{m-1}}{a_m}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ όπου } M(X) \text{ κέντρο βάρους του νέφους.}$$

2. Αν $f^{on}(M(X)) \rightarrow \infty$ για $n \rightarrow \infty$ τότε το J_f είναι σύνολο Cantor.

Απόδειξη

1. Από τον ορισμό, οι περιδικοί κύκλοι n -τάξης είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$f^{on}(z) = z \Leftrightarrow a_{n,m^n} z^{m^n} + a_{n,m^n-1} z^{m^n-1} \dots + (a_{n,1} - 1)z + a_{n,0} = 0$$

Επομένως το κέντρο βάρους είναι:

$$M(X_n) = \frac{\sum(X_n)}{\text{card}(X_n)} = \frac{\sum_{z_k \in X_n} z_k}{m^n} = -\frac{a_{n,m^n-1}}{a_{n,m^n}} = -\frac{a_{n,m^n-1}}{m^n a_{n,m^n}} = -\frac{m^{n-1} \cdot a_m^{\frac{m^n-m}{m-1}} \cdot a_{m-1}}{m^n a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}}} = -\frac{a_{m-1}}{m \cdot a_m} = \text{const}$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητο του n . Άρα $M(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(X_n) = -\frac{1}{m} \frac{a_{m-1}}{a_m}$

2. Έστω ότι το $J(f)$ είναι συνεκτικό, τότε υπάρχει η πλήρωσή του, δηλαδή το σύνολο $K(f)$.

Επειδή προφανώς ισχύουν $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K(f) \Rightarrow M_X \in K(f)$, θα είναι $f^{on}(M_X) \rightarrow \infty$, το οποίο είναι άτοπο. ■

Θεώρημα 38

Έστω πολυώνυμο f και $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ το νέφος των περιδικών κύκλων του δυναμικού συστήματος, τότε ισχύουν:

1. Το νέφος είναι κλειστό ως προς την τομή, δηλαδή

$$X_m \cap X_n = X_{MK\Delta(m,m)} \in X, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

2. Αν $m|n$ τότε $X_m \subset X_n$.

$$3. \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = X_1.$$

4. $M(X_m \cap X_n) = M(X)$, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.

5. $M(X_m \cup X_n) = M(X)$, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

1. Έστω

$$\begin{aligned} z \in X_m \cap X_n &\Leftrightarrow z \in \{z \in \mathbb{C} / f^{om}(z) = z \text{ και } f^{on}(z) = z\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z \in \{z \in \mathbb{C} / f^{ok \cdot MK\Delta(m,n)}(z) = z \text{ και } f^{ol \cdot MK\Delta(m,n)}(z) = z\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z \in \{z \in \mathbb{C} / (f^{oMK\Delta(m,n)})^{ok}(z) = z \text{ και } (f^{oMK\Delta(m,n)})^{ol}(z) = z\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z \in \{z \in \mathbb{C} / f^{oMK\Delta(m,n)}(z) = z\} \Leftrightarrow z \in X_{MK\Delta(m,m)} \end{aligned}$$

2. Αφού $m|n$ τότε $MK\Delta(m,n) = m$, οπότε από την προηγούμενη πρόταση 1. είναι

$$X_m \cap X_n = X_{MK\Delta(m,m)} = X_m \Rightarrow X_m \subset X_n$$

3. Επειδή $MK\Delta(1,n) = 1$, είναι $X_1 \cap X_n = X_{MK\Delta(1,n)} = X_1, \Rightarrow X_1 \subset X_n, \forall n \in \mathbb{N}$, επομένως

$$\underline{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = X_1$$

4. Από την πρόταση 1. και την πρόταση 1. του Θεωρήματος 37 προκύπτει άμεσα ότι $M(X_m \cap X_n) = M(X_{MK\Delta(m,m)}) = M(X)$

5. Επειδή, όπως αποδείχτηκε, τα σύνολα X_m, X_n και $X_m \cap X_n$ έχουν κοινό κέντρο βάρους, το $M(X)$ θα είναι

$$\begin{aligned} M(X_n \cup X_m) &= \frac{\text{sum}(X_n \cup X_m)}{\text{card}(X_n \cup X_m)} = \frac{\text{sum}(X_n) + \text{sum}(X_m) - \text{sum}(X_n \cap X_m)}{\text{card}(X_n \cup X_m)} = \\ &= \frac{M(X)\text{card}(X_n) + M(X)\text{card}(X_m) - M(X)\text{card}(X_n \cap X_m)}{\text{card}(X_n \cup X_m)} = \\ &= \frac{M(X)(\text{card}(X_n) + \text{card}(X_m) - \text{card}(X_n \cap X_m))}{\text{card}(X_n \cup X_m)} = \frac{M(X)\text{card}(X_n \cup X_m)}{\text{card}(X_n \cup X_m)} = M(X) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Με βάση το τελευταίο θεώρημα, οι γενικοί τύποι του Θεωρήματος 35 για το νέφος των περιοδικών κύκλων, μπορούν να γραφούν:

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} (-1)^{m+1} \text{card}(X_{MK\Delta(k_1, k_2, \dots, k_m)}) \quad (1)$$

και

$$\text{sum}\left(\bigcup_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} (-1)^{m+1} \text{sum}(X_{MK\Delta(k_1, k_2, \dots, k_m)}) \quad (2)$$

Θεώρημα 39

Έστω πολυώνυμο $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$ βαθμού $\deg(f) = m$, τότε το κέντρο βάρους $M(J_f)$, του συνόλου Julia, είναι

$$M(J_f) = -\frac{1}{m} \frac{a_{m-1}}{a_m}$$

Απόδειξη

Έστω $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ το νέφος των περιοδικών κύκλων του πολυωνύμου f και $(\bar{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ το αθροιστικό νέφος των περιοδικών κύκλων του, δηλαδή $\bar{X}_n = \bigcup_{k=1}^n X_k$.

Η απόδειξη θα γίνει σε δύο στάδια.

Αρχικά θα αποδειχτεί ότι το αθροιστικό νέφος έχει το ίδιο κέντρο βάρους με το νέφος των περιοδικών κύκλων, δηλαδή:

$$M(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{X}_n) = M(X) = -\frac{1}{m} \frac{a_{m-1}}{a_m}, \forall n \in \mathbb{N}$$

και στη συνέχεια θα αποδειχτεί το ζητούμενο $M(J_f) = -\frac{1}{m} \frac{a_{m-1}}{a_m}$

Πράγματι, από τους τύπους (1) και (2) της προηγούμενης παρατήρησης και για κάθε $n = 1, 2, \dots$ έχουμε:

$$\begin{aligned} M(\bar{X}_n) &= \frac{\text{sum}(\bar{X}_n)}{\text{card}(\bar{X}_n)} = \frac{\text{sum}(\bigcup_{k=1}^n X_k)}{\text{card}(\bigcup_{k=1}^n X_k)} = \\ &= \frac{\sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} (-1)^{m+1} \text{sum}(X_{\text{MK}\Delta(k_1, k_2, \dots, k_m)})}{\text{card}(\bigcup_{k=1}^n X_k)} = \\ &= \frac{\sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} (-1)^{m+1} M(X) \text{card}(X_{\text{MK}\Delta(k_1, k_2, \dots, k_m)})}{\text{card}(\bigcup_{k=1}^n X_k)} = \\ &= M(X) \frac{\sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} (-1)^{m+1} \text{card}(X_{\text{MK}\Delta(k_1, k_2, \dots, k_m)})}{\text{card}(\bigcup_{k=1}^n X_k)} = M(X) \frac{\text{card}(\bigcup_{k=1}^n X_k)}{\text{card}(\bigcup_{k=1}^n X_k)} = M(X) \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{X}_n) = M(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = M(X) = -\frac{1}{m} \frac{a_{m-1}}{a_m} \quad (1)$$

$$\text{Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι } M(J_f) = M(\bar{X}) = -\frac{a_{m-1}}{m \cdot a_m}.$$

Έστω $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ το σύνολο όλων των περιοδικών κύκλων και $X_s \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ το σύνολο των ευσταθών περιοδικών κύκλων (ελκυστών και Siegel) του δυναμικού συστήματος. Επειδή ο πληθάριθμος $\text{card}(X_s) < +\infty$ και το σύνολο αστάθειας J_f του πολυωνυμικού δυναμικού συστήματος είναι η κλειστή θήκη των όλων των απωθητικών περιοδικών κύκλων, από το θεώρημα 34 προκύπτει:

$$J_f \cup X_s = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}, \text{οπότε } M(J_f) = M(J_f \cup X_s) = M\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}\right) = M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = -\frac{1}{m} \frac{a_{m-1}}{a_m}$$

$$\text{άρα } M(J_f) = -\frac{1}{m} \frac{a_{m-1}}{a_m} \blacksquare$$

7.2.3 Η Μέση Ακτίνα Αστάθειας και η Απαγορευτική Αρχή της

Το επόμενο θεώρημα εισάγει μία νέα γεωμετρική έννοια στην Μιγαδική Δυναμική, η οποία θα οριστεί παρακάτω ως μέση ακτίνα αστάθειας.

Θεώρημα 40

Έστω πολυώνυμο $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} \cdots + a_1 z + a_0$ βαθμού $\deg(f) = m \geq 2$, με συνεκτικό σύνολο αστάθειας J_f και K_f η πλήρωση του J_f .

1. Για κάθε $z \in K_f \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, ο γεωμετρικός μέσος των αποστάσεων $|z - z_k|$, $z_k \in X_n$ είναι

ανεξάρτητος του z και τείνει στην ποσότητα $\frac{1}{m\sqrt[m]{|a_m|}}$ καθώς το $n \rightarrow \infty$ δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{z_k \in X_n} |z - z_k| \right)^{\frac{1}{\text{card}(X_n)}} = \frac{1}{m\sqrt[m]{|a_m|}}, \quad \forall z \in K_f \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

2. Ο γεωμετρικός μέσος $G(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{z_k \in X_n} |z_k| \right)^{\frac{1}{\text{card}(X_n)}}$ του νέφους $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι

$$G(X) = \frac{1}{m\sqrt[m]{|a_m|}} \lim_{n \rightarrow \infty} m^n \sqrt[n]{|f^{on}(0)|}$$

$$\text{Ειδικότερα, αν το } 0 \in K_f \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ τότε } G(X) = \frac{1}{m\sqrt[m]{|a_m|}}$$

Απόδειξη

1. Τα $z_k \in X_n, k = 1, 2, \dots, m^n$ εξ ορισμού είναι ρίζες του πολυωνύμου $f^{on}(z) - z$ επομένως από το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας θα είναι

$$f^{on}(z) - z = a_m^{\frac{m^n - 1}{m - 1}} \prod_{z_k \in X_n} (z - z_k) \quad (1)$$

Επειδή από την υπόθεση $z \in K_f \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, η τροχιά του z $(f^{on}(z))_{n \in \mathbb{N}}$ θα είναι φραγμένη

επομένως το $\lim_{n \rightarrow \infty} m^n \sqrt{|f^{on}(z) - z|} = 1$ οπότε από την (1) λαμβάνοντας τα όρια προκύπτει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{z_k \in X_n} |z - z_k| \right)^{\frac{1}{\text{card}(X_n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{on}(z) - z}{a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}}} \right|^{\frac{1}{m^n}} = \frac{1}{m \sqrt[m]{|a_m|}}$$

2. Θέτοντας $z = 0$ στην ταυτότητα (1) προκύπτει ότι $\prod_{z_k \in X_n} z_k = (-1)^{m^n} \frac{f^{on}(0)}{a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}}}$

Επομένως ο γεωμετρικός μέσος είναι,

$$G(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{z_k \in X_n} z_k \right|^{\frac{1}{\text{card}(X_n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^{m^n} \frac{f^{on}(0)}{a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}}} \right|^{\frac{1}{m^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} |f^{on}(0)|^{\frac{1}{m^n}}}{m \sqrt[m]{|a_m|}},$$

δηλαδή αποδείχτηκε ότι $G(X) = \frac{1}{m \sqrt[m]{|a_m|}} \lim_{n \rightarrow \infty} m^n \sqrt{|f^{on}(0)|}$.

Αν το $0 \in K_f \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ τότε η τροχιά του 0 θα είναι φραγμένη. Επομένως $\lim_{n \rightarrow \infty} m^n \sqrt{|f^{on}(0)|} = 1$

και κατά συνέπεια $G(X) = \frac{1}{m \sqrt[m]{|a_m|}}$ ■

Ορισμός 17 Η ποσότητα $\frac{1}{m \sqrt[m]{|a_m|}}$ προς την οποία συγκλίνει η ακολουθία $\left(\prod_{z_k \in X_n} |z - z_k| \right)^{\frac{1}{\text{card}(X_n)}}$ για

$\forall z \in K_f \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ και η οποία είναι ανεξάρτητη του z , αποτελεί μια χαρακτηριστική γεωμετρική

ιδιοτιμή του συνόλου Julia του μιγαδικού δυναμικού συστήματος την οποία θα ονομάσουμε **μέση ακτίνα αστάθειας** ▲

Η μέση ακτίνα αστάθειας θέτει περιορισμό στις αποστάσεις των ελκυστών και των σημείων Siegel, από το σύνολο Julia. Το γεγονός αυτό αποτυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα το οποίο εκφράζει την απαγορευτική αρχή της μέσης ακτίνας αστάθειας.

Θεώρημα 41

Έστω πολυώνυμο $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} \dots + a_1 z + a_0$ βαθμού $\deg(f) = m \geq 2$ και $z_0 \in X_1$ ένα σταθερό σημείο του, τύπου ελκυστή, είτε τύπου Siegel. Τότε η απόσταση $\text{dist}(z_0, J_f)$ του $z_0 \in X_1$ από το σύνολο Julia J_f του δυναμικού συστήματος $(\mathbb{C}, f)$ δεν μπορεί να υπερβεί την μέση ακτίνα αστάθειας $\frac{1}{m \sqrt[m]{|a_m|}}$ δηλαδή

$$\text{dist}(z_0, J_f) \leq \frac{1}{m \sqrt[m]{|a_m|}}$$

Απόδειξη

Έστω $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ το πολυωνυμικό νέφος των περιοδικών κύκλων του πολωνύμου.

Θεωρούμε την ακολουθία $\varpi_{z_0, n} = \prod_{z_k \in X_n \setminus \{z_0\}} (z_0 - z_k)$, $n \in \mathbb{N}$.

Θα αποδειχθεί αρχικά ότι

$$\varpi_{z_0, n} = (-1)^m \left(\frac{1 - (f'(z_0))^n}{a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}}} \right)$$

Πράγματι, από την $f^{on}(z) - z_0 = (z - z_0) \cdot D_{f^{on}, z_0}(z)$ για $z = z_k \in X_n$ προκύπτει

$$f^{on}(z_k) - z_0 = (z_k - z_0) \cdot D_{f^{on}, z_0}(z_k) \Leftrightarrow D_{f^{on}, z_0}(z_k) = 1$$

δηλαδή το $z_k \in X_n \setminus \{z_0\}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $D_{f^{on}, z_0}(z) = 1$ ή ισοδύναμα της

$$(f^{on}(z_0))' + \frac{1}{2!} (f^{on}(z_0))'' (z - z_0) + \dots - \frac{1}{(m^n)!} (f^{on}(z_0))^{(m^n)} (z - z_0)^{m^n-1} = 1$$

Επομένως, οι μιγαδικές αποστάσεις $(z_k - z_0)$, $k = 1, 2, \dots, m^n - 1$ είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\frac{1}{(m^n)!} (f^{on}(z_0))^{(m^n)} w^{m^n-1} + \dots + \frac{1}{3!} (f^{on}(z_0))^{(3)} w^2 + \frac{1}{2!} (f^{on}(z_0))'' w + (f'(z_0))' - 1 = 0$$

οπότε από τις σχέσεις του Vietta προκύπτει:

$$\prod_{k=1}^{m^n-1} (z_k - z_0) = (-1)^{m^n-1} \frac{[f'(z_0)]^n - 1}{\frac{1}{(m^n)!} [f^{on}(z_0)]^{(m^n)}} = (-1)^{m^n-1} \frac{[f'(z_0)]^n - 1}{a_{n,m}} =$$

$$= (-1)^{m^n-1} \frac{[f'(z_0)]^n - 1}{a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}}} = (-1)^m \left(\frac{1 - (f'(z_0))^n}{a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}}} \right)$$

$$\text{άρα } \varpi_{z_0, n} = \prod_{z_k \in X_n \setminus \{z_0\}} (z_0 - z_k) = (-1)^m \left(\frac{1 - (f'(z_0))^n}{a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}}} \right) \quad (1)$$

Έστω ότι η απόσταση $\text{dist}(z_0, J_f) = d$, τότε για κάθε $z \in J_f$ θα είναι $|z_0 - z| \geq d$. Επομένως για κάθε περιοδικό σημείο $z_k \in J_f \cap X_n$ θα είναι $|z_0 - z_k| \geq d$ και κατά μείζονα λόγο για κάθε $z_k \in X_n \setminus \{z_0\}$ θα ισχύει $|z_0 - z_k| \geq d$, αφού δεν υπάρχουν άλλα σταθερά σημεία σε απόσταση μικρότερη του d . Επειδή $\text{card}(X_n \setminus \{z_0\}) = m^n - 1$ από την σχέση $|z_0 - z_k| \geq d$, την σχέση (1) και το γεγονός ότι για ελκυστές & σταθερά σημεία τύπου Siegel ισχύει $|f'(z_0)| \leq 1$ προκύπτει διαδοχικά

$$\prod_{z_k \in X_n \setminus \{z_0\}} |z_0 - z_k| \geq d^{m^n-1} \Leftrightarrow |\varpi_{z_0,n}| \geq d^{m^n-1} \Leftrightarrow \left| (-1)^m \left(\frac{1 - (f'(z_0))^n}{a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}}} \right) \right| \geq d^{m^n-1} \text{ επομένως}$$

$$d \leq \left| \frac{1 - (f'(z_0))^n}{a_m^{\frac{m^n-1}{m-1}}} \right|^{\frac{1}{m^n-1}} = \frac{1}{m^{-1}\sqrt[m]{|a_m|}} \left| 1 - (f'(z_0))^n \right|^{\frac{1}{m^n-1}} \leq \frac{1}{m^{-1}\sqrt[m]{|a_m|}} \left(1 + |f'(z_0)|^n \right)^{\frac{1}{m^n-1}} \leq \frac{2^{\frac{1}{m^n-1}}}{m^{-1}\sqrt[m]{|a_m|}}$$

$$\text{δηλαδή } d \leq \frac{2^{\frac{1}{m^n-1}}}{m^{-1}\sqrt[m]{|a_m|}}, \text{ οπότε λαμβάνοντας όρια } d \leq \frac{1}{m^{-1}\sqrt[m]{|a_m|}} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{m^n-1}} = \frac{1}{m^{-1}\sqrt[m]{|a_m|}}$$

Δηλαδή αποδείχτηκε ότι $d = \text{dist}(z_0, J_f) \leq \frac{1}{m^{-1}\sqrt[m]{|a_m|}}$ αν το z_0 είναι τύπου Siegel ή ελκυστής. ■

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill 1966
- [2] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed., Addison-Wesley, 1989
- [3] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, Introductory Lectures, Preprint. Institute for Mathematical Science, SUNY at Stony Brook 1990
- [4] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag 1991
- [5] L. Carleson and Theodore Gamelin *Complex Dynamics* Springer-Verlag 1993
- [6] J. Grispolakis and J. Mayer and L. Oversteegen *Building Blocks for Quadratic Julia sets* Transactions of the American Mathematical Society (vol. 351, pages 1171-1201), 1999
- [7] D. Sorensen, *Local connectivity of quadratic Julia sets*, Master's thesis, The Technical University of Denmark 1992, Mathematical Institute
- [8] Γ. Καζαντζίδης, *Θεωρία Δομών I*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων 1977
- [9] Complex Dynamical Systems-Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, American Mathematical Society (Volume 49) 1994
- [10] P. Atela and J. Hu, *Commuting polynomials and polynomials with same Julia set*, arXiv:math/9504210v1 [math.DS] 1995

