ΜΕΛΕΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΧΩΡΩΝ BANACH

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΕΡΙΚΛΗΣ Δ. ΠΑΥΛΑΚΟΣ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΙΝΩΣ ΠΕΤΡΑΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΧΑΝΙΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2013

Αφιερώνεται στον Μίνωα, την Αρετή και την Κλέα

Πρόλογος

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή αποτελεί την καταγραφή των αποτελεσμάτων της ερευνητικής μου μελέτης, γεωμετρικών ιδιοτήτων χώρων Banach, υπό την καθοδήγηση και επίβλεψη του Δασκάλου μου, Επίκουρου Καθηγητή στο Πολυτεχνείο Κρήτης, κ. Μίνωα Πετράκη. Η προσπάθεια των έξη αυτών χρόνων καθώς και η ολοκλήρωσή της, αφενός με γέμισαν χαρά και ικανοποίηση, αφετέρου με άλλαξαν ριζικά σαν άνθρωπο και σαν επιστήμονα. Ελπίζω η υλική της πραγμάτωση, με την μορφή αυτού του κειμένου, να αποβεί χρήσιμη στον ενδιαφερόμενο Μαθηματικό που θα το μελετήσει.

Ξεκίνησα/συνέχισα την αναζωογονητική περιπέτεια/αναζήτηση στον χώρο των Μαθηματικών, το φθινόπωρο του 2007, με παρότρυνση του κ. Πετράκη, ενώ εργαζόμουν ήδη στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, δεκαπέντε χρόνια μετά την ολοκλήρωση των Μεταπτυχιακών μου σπουδών στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης. Το γεγονός από μόνο του, υπήρξε ιδιαίτερα σημαντικό για μένα και θεωρώ τον εαυτό μου ιδιαίτερα τυχερό που μου δόθηκε (ξανά) η ευκαιρία να περπατήσω έναν δρόμο που αγάπησα από τα μαθητικά μου χρόνια.

Η μαθητεία μου υπό τον κ. Πετράκη νοηματοδότησε μέσα μου τις έννοιες του μαθηματικού, του επιστήμονα και του ανθρώπου με ένα βαθύ και ουσιαστικό τρόπο. Μου μετέδωσε την αγάπη του για τον κλάδο και μου προσέφερε απλόχερα τις γνώσεις του, με έμαθε να σκέφτομαι με αποτελεσματικότερο τρόπο και να αξιολογώ καλύτερα, αφύπνισε την αγάπη μου για την μαθηματική έρευνα και κατά την διάρκειά της υπήρξε ο ακούραστος συνομιλητής προσφέροντας λύσεις, τεχνικές ή γενικότερες στρατηγικές. Η πίστη του στις ικανότητές μου και η ενθάρρυνσή του, μου έδωσε την δύναμη να ξεπεράσω όλες τις επιστημονικές και προσωπικές τροχοπέδες που συνάντησα και ελπίζω στο μέλλον να ανταποκριθώ στις προσδοκίες του. Στον Δάσκαλό μου, Μίνω, οφείλω τα μέγιστα.

Αποφασιστικής σημασίας για την εξέλιξη της ερευνητικής μου προσπάθειας υπήρξαν οι συναντήσεις μου με τον Καθηγητή του Ε.Μ.Π. και μέλους της τριμελούς μου επιτροπής κ. Σπυρίδωνα Αργυρό. Ο κ. Αργυρός βαθύς γνώστης του κλάδου, ειδήμων και στην Radon-Nikodym Property (κεντρικό θέμα της έρευνάς μου), συζητώντας πολλάκις μαζί μου, με βοήθησε να κατανοήσω δικές του τεχνικές και ιδέες οι οποίες χρησιμοποιούνται εκτενώς στην διατριβή αυτή, έδωσε λύσεις και διεξόδους σε ερωτήματά μου, έθεσε ερωτήματα και ερευνητικούς στόχους και διεύρυνε τους μαθηματικούς μου ορίζοντες. Συνέβαλλε με καίριο τρόπο στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής. Του είμαι ευγνώμων.

Ο Αναπληρωτής Καθηγητής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. κ. Γάσπαρης Ιωάννης, ειδικός στους χώρους, που κατά κύριο λόγο μελετούνται στην διατριβή αυτή, και μέλος της τριμελούς μου επιτροπής, μου παρείχε σημαντικές πληροφορίες, παρακολούθησε ομιλίες και παρουσιάσεις μου και μοιράστηκε μαζί μου γνώσεις και σκέψεις του. Τον ευχαριστώ πολύ.

Θέλω να ευχαριστήσω τους Καθηγητές του Π.Κ., κ. Γρυσπολάκη Ιωακείμ και κ. Σαριδάκη Ιωάννη, τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Π.Κ., κ. Κανδυλάκη Δημήτριο και τον Επίκουρο Καθηγητή του Π.Κ. κ. Μανουσάκη Αντώνη για την συμμετοχή τους στην επταμελή μου επιτροπή και το ενδιαφέρον τους για την εργασία αυτή. Τον κ. Μανουσάκη επίσης για τις εβδομαδιαίες του διαλέξεις την άνοιξη του 2011, τις συζητήσεις μας, την ανταλλαγή απόψεων, τις κοινές μας εμπειρίες αλλά και την βοήθεια που μου παρείχε στην εκμάθηση και χρήση της latex. Στην γραφή της εργασίας μέσω latex με βοήθησαν επίσης η φίλη Ιωάννα Κυρέζη και ο φίλος Παναγιώτης Χατζηπαντελίδης και τους ευχαριστώ.

Κατά την διάρκεια αυτής της ενδιαφέρουσας και απολαυστικά κοπιαστικής πορείας, υπήρξαν και άλλοι άνθρωποι (όχι όμως άμεσα σχετιζόμενοι με το ερευνητικό της μέρος) που με στήριξαν και με βοήθησαν και εν μέρει η ύπαρξη αυτής της μελέτης οφείλεται σε αυτούς.

Σε ώριμη πλέον ηλικία και σε εποχή τουλάχιστον ηθικά ταραγμένη, με το τραίνο των υποχρεώσεων να επιβάλλει τους καθημερινούς σταθμούς του, θα ήταν αδύνατον να βρω την απαραίτητη συγκέντρωση και να αποστασιοποιηθώ από ότι έκρινα περιττό, αν δεν είχα στο πλάι μου την σύζυγό μου Αρετή και την κόρη μου Κλέα. Η αγάπη τους, η αμέριστη συμπαράστασή τους, η εμπιστοσύνη και η υπομονή τους, υπήρξαν οι δυνάμεις που υλοποιούσαν μια ζωντανή γάτα σε κάθε παρατήρηση στο εσωτερικό του σκοτεινού κουτιού. Είμαι ευτυχής που μοιράζομαι την ζωή μου μαζί τους.

Φυσικά με πολλή διάθεση και περισσή ενέργεια δεν πας πουθενά αν δεν αφιερώσεις τον απαραίτητο χρόνο. Η πρακτική αυτή απαίτηση βρήκε την ικανοποίησή της μέσω της απαλλαγής μου από τις εργασιακές μου υποχρεώσεις, με την χορήγηση εκπαιδευτικής άδειας, από 1-9-2008 έως 31-8-2012, από την Διεύθυνση Ιδιωτικής Εκπαίδευσης του ΥΠ.Ε.Π.Θ. Ευχαριστώ όλους όσους αποφάνθηκαν θετικά στην αίτησή μου, ιδιαίτερα τον πρόεδρο της Ομοσπονδίας Ιδιωτικών Εκπαιδευτικών Λειτουργών Ελλάδας κ. Μιχάλη Κουρουτό. Μακάρι και άλλοι εκπαιδευτικοί να τύχουν της ίδιας στήριξης από τον συντεχνιακό και εργασιακό τους χώρο.

Οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους καθηγητές των φοιτητικών μου χρόνων στο Μαθηματικό Ηρακλείου για το σύνολο γνώσεων που μου μετέδωσαν, ιδιαιτέρως δε, στην κ. Σουζάννα Παπαδοπούλου για την μακροχρόνια εμπιστοσύνη και εκτίμησή της και στον κ. Ιωάννη Παπαδάκη για το ενδιαφέρον του. Ευχαριστώ επίσης το διδακτικό και διοικητικό προσωπικό του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης για την άψογη συνεργασία μας και την παροχή κάθε γραφειοκρατικής, τεχνικής ή άλλης πρακτικής βοήθειας χρειάστηκα κατά την διάρκεια των σπουδών μου εκεί ως Υ.Δ., ειδικότερα δε την Πρόεδρο του τμήματος κ. Έλενα Παπαδοπούλου.

Μία νοερή τέλος ευχαριστία προς τον (πρόσφατα εκλιπόντα) κ. Edward Odell, ο οποίος μας επέτρεψε την μελέτη χειρόγραφων σημειώσεών του. Η κατανόηση τους υπήρξε σημαντικός παράγοντας για την παραγωγή των αποτελεσμάτων στο πέμπτο κεφάλαιο.

Αυτόνομα μέρη της εργασίας αυτής παρουσιάστηκαν στο Τριήμερο Μαθηματικής Ανάλυσης για Νέους Ερευνητές (Αθήνα, Νοέμβριος 2010), στο Σεμινάριο Ανάλυσης του Μαθηματικού Τμήματος Ηρακλείου (Οκτώβριος 2011) και στο 14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης (Πάτρα, Μάιος 2012).

Τα κύρια αποτελέσματα του τρίτου κεφαλαίου (που αποτελεί και το μεγαλύτερο μέρος αυτής της μελέτης) δημοσιεύθηκαν στο Studia Mathematica (No 203, 2011) στην κοινή, με τον κ. Πετράκη εργασία μας, με τίτλο : On the structure of non-dentable subsets of $C(\omega^{\omega^k})$.

Περικλής Δ. Παυλάκος
Ηράκλειο
Ιούνιος 2013

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε την γεωμετρία των κλειστών, κυρτών, φραγμένων υποσυνόλων χώρων Banach.

Η μελέτη της δομής των non-RNP υποσυνόλων χώρων Banach είναι ένα από τα κεντρικά προβλήματα ([**50**]) της γεωμετρίας των χώρων Banach από τις δεκαετίες του 1970 και του 1980.

Ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο σύνολο K σε έναν χώρο Banach X, έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym (RNP) αν : για κάθε χώρο μέτρου (Ω,Σ), με μ ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα Σ και $m : \Sigma \to X$ ένα διανυσματικό μέτρο με $\frac{m(A)}{\mu(A)} \in K$, όταν $A \in \Sigma$ και $\mu(A) \neq 0$, υπάρχει μοναδική Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ($f \in L^1_X(\mu)$), τέτοια ώστε: $m(A) = \int\limits_A f(\omega)d\mu(\omega)$. Ο χώρος Banach X έχει την RNP όταν η μοναδιαία μπάλλα του έχει την RNP.

Παραδείγματα χώρων με την RNP είναι οι αυτοπαθείς χώροι, οι διαχωρίσιμοι δυικοί (π.χ. οι χώροι L^p για $p > 1$ και ο l^1). Οι χώροι $L^1(0,1)$, c_0, l^∞ δεν έχουν την RNP.

Πολλοί μαθηματικοί μελέτησαν την RNP, ανάμεσα στους οποίους οι R. Phelps, R. C. James, J. Diestel, J. J. Uhl, Jr., M. Talagrand, C. Stegall, J. Bourgain, H. Rosenthal, W. Schachermayer, N. Ghoussoub, B. Maurey, G. Godefroy, S. Argyros. Σημαντικά άρθρα είναι τα: [**14**], [**12**], [**16**], [**55**], [**29**], [**54**], [**50**].

Το σύνολο K έχει την ιδιότητα Krein-Milman (KMP), αν κάθε κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο L του K είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων του σημείων.

Η ιδιότητα Radon-Nikodym ορίζεται με αναλυτικό τρόπο, αποδεικνύεται όμως ότι έχει μία γεωμετρική μορφή (κάθε υποσύνολο ενός RNP συνόλου είναι dentable [**26**], [**20**]), ενώ η φύση του ορισμού της ιδιότητας Krein-Milman είναι αλγεβρική .

Αν ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, σύνολο K έχει την RNP συνεπάγεται ότι έχει την KMP ([**38**], ενότητα 2.3).

Το 1973 ο J. Diestel θέτει το εξής ερώτημα: αν ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, σύνολο K έχει την KMP, έχει την RNP;

Το ερώτημα παραμένει ανοιχτό μέχρι σήμερα και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού αφορά την σύνδεση ιδιοτήτων διαφορετικής φύσης.

Είναι γνωστό ότι για ορισμένες κλάσεις χώρων (ή συνόλων) η RNP είναι ισοδύναμη με την KMP: στους δυικούς χώρους ([**33**]), στα υποσύνολα χώρων που εμφυτεύονται σε χώρο με unconditional FDD ([**34**], [**54**]), στους χώρους που είναι ισόμορφοι με το τετράγωνό τους ([**53**]), στα Banach lattices ([**19**]), στα υποσύνολα του θετικού κώνου του L^1 ([**3**]).

Τα άρθρα: [**3**], [**6**], [**42**], [**43**] και [**4**] υπήρξαν επίσης σημαντικά για την εργασία μας.

Τα κύρια αποτελέσματά μας (Θεωρήματα 3.41, 4.4 και 5.14) είναι τα εξής:

Θεωρημα 0.1. *Έστω K ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-RNP υποσύνολο του $C(\omega^{\omega^k})$. Τότε υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό υποσύνολο L του K, τέτοιο ώστε το L έχει την PCP και δεν έχει την RNP. Επίσης η KMP και η RNP είναι ισοδύναμες ιδιότητες στα υποσύνολα του $C(\omega^{\omega^k})$.*

Ο χώρος $C(\omega^{\omega^k})$ είναι ο χώρος Banach των συνεχών συναρτήσεων, ορισμένες στο διάστημα των διατακτικών $\langle 1, \omega^{\omega^k} \rangle$, με την supremum νόρμα. Το σύνολο K έχει την point of continuity ιδιότητα (PCP), αν για κάθε μη κενό, ασθενώς κλειστό υποσύνολο L του K, η ταυτοτική απεικόνιση $i : (L, w) \to (L, \| \cdot \|)$, έχει ένα τουλάχιστον σημείο συνέχειας.

Θεωρημα 0.2. *Έστω X ένας χώρος Banach με shrinking unconditional finite dimensional decomposition και Y ένας χώρος πηλίκο του X. Τότε στα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα του Y η RNP και η KMP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.*

Ο E.Odell στο [**42**] κατασκεύασε ένα non-RNP υποσύνολο K του χώρου $C(\omega^{\omega^\omega})$ τέτοιο ώστε στα υποσύνολα του K η RNP και η PCP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.

Στην διατριβή μας κατασκευάζουμε έναν χώρο Banach $\mathfrak{X}_0$, ο οποίος είναι το ευθύ άθροισμα των χώρων Banach $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}_n}$, όπου n φυσικός, με την supremum νόρμα. Οι χώροι Banach $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}_n}$ κατασκευάζονται ως η κλειστότητα του $c_{00}(\mathcal{D})$, με $\mathcal{D}$ το δυαδικό δέντρο, μέσω κατάλληλης νόρμας, στον ορισμό της οποίας χρησιμοποιούνται οι κανονικές οικογένειες $\mathcal{F}_n$ (σελ. 90). Χρησιμοποιώντας τον χώρο $\mathfrak{X}_0$, αποδεικνύουμε την παρακάτω γενίκευση του [**42**]:

Θεωρημα 0.3. *Υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-RNP υποσύνολο K του $\mathfrak{X}_0$, τέτοιο ώστε στα υποσύνολα του K η RNP και η PCP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.*

Αν στην θέση των κανονικών οικογενειών $\mathcal{F}_n$ χρησιμοποιηθούν οι οικογένειες Schreier S_n, επειδή τότε ο $\mathfrak{X}_0$ εμφυτεύεται στον χώρο $C(\omega^{\omega^\omega})$, λόγω των θεωρημάτων 0.1 και 0.3, διαπιστώνουμε μία θεμελιώδη διαφορά στην δομή των κλειστών, κυρτών, φραγμένων, non-RNP υποσυνόλων των χώρων $C(a)$ με $a < \omega^{\omega^\omega}$ και αυτών με $a \geq \omega^{\omega^\omega}$.

Ενώ στους χώρους $C(a)$ με $a < \omega^{\omega^\omega}$ κάθε κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-RNP υποσύνολο K περιέχει ένα κλειστό, κυρτό, non-RNP υποσύνολο L που έχει την PCP, στους χώρους $C(a)$ με $a \geq \omega^{\omega^\omega}$ υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-RNP υποσύνολο K, τέτοιο ώστε στα υποσύνολα του K η RNP και η PCP είναι ισοδύναμες.

Τα παραπάνω θεωρήματα είναι τα κυριότερα από το σύνολο των αποτελεσμάτων μας. Όλα τα αποτελέσματα που δεν έχουν παραπομπή είναι δικά μας και περιέχονται στα πέντε κεφάλαια της διατριβής αυτής.

Η παρούσα μελέτη περιέχει τα ακόλουθα:

Στο πρώτο κεφάλαιο υπάρχουν οι βασικές έννοιες, οι συμβολισμοί καθώς και βασικές τεχνικές από την θεωρία των χώρων Banach που μας είναι απαραίτητες. Κατασκευάζουμε επίσης στο κεφάλαιο αυτό ένα αρχέτυπο παράδειγμα ενός δ-bush στον c_0. Το παράδειγμα αυτό είναι θεμελιώδες για την κατανόηση της φύσης της δομής των κλειστών, κυρτών, φραγμένων, non-RNP υποσυνόλων των υπό μελέτη χώρων Banach (Πρόταση 1.11) και είναι μία ανάλογη μορφή παραδείγματος στο [**6**].

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά οι ορισμοί, παραδείγματα και γνωστά αποτελέσματα που αφορούν την RNP, συναφείς ιδιότητες (αναπαραστάσιμοι τελεστές, dentability, PCP, strong regularity) καθώς και τα σημαντικότερα γνωστά αποτελέσματα που αφορούν την ισοδυναμία της RNP και της KMP σε ορισμένες περιπτώσεις. Ξεχωριστή θέση ανάμεσά τους έχουν τα επόμενα δύο θεωρήματα.

Θεωρημα 0.4. *(Schachermayer, 1987, [**54**]) Αν ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο K του χώρου Banach X είναι strongly regular και δεν έχει την RNP, τότε υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό υποσύνολο L του K που δεν έχει ακραία σημεία.*

Θεωρημα 0.5. *(H. Rosenthal, 1989, [**50**]) Έστω K κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-RNP υποσύνολο ενός χώρου Banach X, το οποίο έχει την* *small combination of slices ιδιότητα. Τότε υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό, μη κενό υποσύνολο W του K τέτοιο ώστε :*

$(*)$ το W είναι non-dentable και η norm με την ασθενή τοπολογία συμπίπτουν στο W.
Επιπλέον υπάρχει ένας υπόχωρος Y του X, έτσι ώστε ο Y έχει FDD και περιέχει ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, μη κενό υποσύνολο W που ικανοποιεί την $(*)$.

Αν $M = \sup\{x^*(x) : x \in K\}$ και $a > 0$, slice του K ως προς x^* και α ονομάζεται το σύνολο $\{y \in K : x^*(y) \geq M - \alpha\}$, και συμβολίζεται με $S(K, x^*, \alpha)$. Το σύνολο K λέγεται strongly regular, αν για κάθε μη κενό υποσύνολο L του K και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κυρτός συνδυασμός από slices του L διαμέτρου μικρότερης του ε και έχει την small combination of slices ιδιότητα (SCSP), αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε slice S του K, το S περιέχει κυρτό συνδυασμό από slices του K διαμέτρου μικρότερης του ε. Το σύνολο K έχει την SCSP, αν και μόνο αν, το K είναι strongly regular.

Επειδή η PCP συνεπάγεται την strong regularity ([**12**]), από το θεώρημα 2.23 συμπεραίνουμε ότι, όταν το κλειστό, κυρτό, φραγμένο, σύνολο $K \subset X$ είναι non-RNP και έχει την PCP υπάρχει κλειστό, κυρτό, υποσύνολο L του K χωρίς ακραία σημεία. Συνεπώς η μελέτη της ισοδυναμίας της RNP και της KMP ανάγεται στην μελέτη των non-RNP συνόλων, στα υποσύνολα των οποίων η RNP είναι ισοδύναμη με την PCP.

Στην ενότητα 2.6 αποδεικνύουμε ότι η κλειστή κυρτή θήκη του average back bush, του αρχέτυπου δ-bush της ενότητας 1.5, δεν έχει ακραία σημεία (Πόρισμα 2.36) και στην ενότητα 2.7 αποδεικνύουμε ότι αυτό το σύνολο έχει $\mathcal{P}al$-representation (Θεώρημα 2.43). Η έννοια της $\mathcal{P}al$-representation εισάγεται στο [**3**], όπου αποδεικνύεται ότι σε αρκετές από τις γνωστές περιπτώσεις όπου η RNP είναι ισοδύναμη με την KMP, κάθε κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-RNP σύνολο περιέχει υποσύνολο με $\mathcal{P}al$-representation.

Το τρίτο κεφάλαιο αποτελεί το μεγαλύτερο μέρος αυτής της διατριβής και σε αυτό βρίσκονται τα περισσότερα και σημαντικότερα αποτελέσματά μας.

Στις δύο πρώτες ενότητες υπάρχουν οι ορισμοί και οι βασικές έννοιες που αφορούν τους χώρους των συνεχών συναρτήσεων $C(a)$, όπου a διατακτικός αριθμός, καθώς και τον Cantor-Bendixson δείκτη ενός αριθμήσιμου συμπαγούς μετρικοποιήσιμου συνόλου και στην ενότητα 3.3 δίνουμε μία δική μας απόδειξη του θεωρήματος του Pelczynski (1958) ότι ο χώρος $C(\omega^\omega)$ δεν εμφυτεύεται σε χώρο με unconditional βάση (Πρόταση 3.12).

Στην τέταρτη ενότητα, παρουσιάζουμε την σύνδεση των αναπαραστάσιμων τελεστών με τους Dunford-Pettis και τους strongly regular τελεστές και όταν ο X είναι το ευθύ άθροισμα των X_n, υπό ορισμένες συνθήκες, αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός μή αναπαραστάσιμου τελεστή από τον $L^1(0,1)$ στον X, έτσι ώστε η σύνθεσή του με την προβολή στον X_n να δίνει αναπαραστάσιμο τελεστή, για κάθε φυσικό n (Προτάσεις 3.13 και 3.18).

Στην ενότητα 3.5 μελετάμε τις συνέπειες της πρότασης 3.18, όταν ο χώρος X είναι το unconditional ευθύ άθροισμα των X_n και αποδεικνύουμε ότι αν στα υποσύνολα κατάλληλου συνόλου K η PCP και η RNP είναι ισοδύναμες ιδιότητες, τότε αφενός μεν υπάρχει δ-bush υποσύνολο του K με ιδιαίτερα καλές ιδιότητες (σελ.90), αφετέρου δε ότι το σύνολο K περιέχει ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο L χωρίς ακραία σημεία (Πρόταση 3.20 και Πόρισμα 3.21).

Στην ενότητα 3.6 περιλαμβάνονται επιπλέον αποτελέσματά μας για το κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-PCP, υποσύνολο K ενός χώρου Banach X που δεν περιέχει τον l^1 (Λήμμα 3.22, Πρόταση 3.23, Λήμμα 3.24).

Στις ενότητες 3.7 και 3.8 δίνουμε δύο αποδείξεις του αποτελέσματός μας ότι στα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα του $C(\omega^\omega)$, η RNP και η KMP είναι ισοδύναμες ιδιότητες (Θεωρήματα 3.27 και 3.31). Στην ενότητα 3.7 αποδεικνύουμε επίσης (στο πνεύμα του [4]) την ισομορφία κατάλληλων χώρων μέτρων (Λήμμα 3.25) και την ύπαρξη μίας συνεχούς, affine και 1-1 απεικόνισης από ένα σύνολο L σε χώρο μέτρων, με την ιδιότητα η εικόνα κάθε στοιχείου του L να είναι diffuse μέτρο (Λήμμα 3.26) ενώ στην ενότητα 3.8 (που αποτελεί οργανική συνέχεια της 3.6) εξασφαλίζουμε, υπό προυποθέσεις, την ύπαρξη ενός κλειστού, κυρτού, φραγμένου, non-RNP συνόλου στο οποίο η norm και η ασθενής τοπολογία ταυτίζονται (Πρόταση 3.28, Λήμμα 3.29 και Πόρισμα 3.30).

Στην ενότητα 3.9 εισάγεται η έννοια της non-atomic martingale coordinatization ιδιότητας και μέσω αυτής (Λήμματα 3.33, 3.34, 3.35 και 3.37) μελετάμε τις συνθήκες ώστε σε ένα υποσύνολο L, ενός χώρου Banach X, η norm και η ασθενής τοπολογία να ταυτίζονται.

Στην ενότητα 3.10, κάτω από επιπλέον δομικές προυποθέσεις, αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός κλειστού, κυρτού, φραγμένου, non-RNP συνόλου L του X, έτσι ώστε στο $Q_n(L)$ η ασθενής και η norm τοπολογία να ταυτίζονται για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όταν $Q_n : X \to Z_n$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές (Πρόταση 3.38). Στην περίπτωση που αντικαταστήσουμε τους χώρους Z_k με τους χώρους $C(\omega^{\omega^k})$, αποδεικνύουμε επίσης αποτέλεσμα (Θεώρημα 3.40) και τέλος αποδεικνύουμε το Θεώρημα 0.1 (Θεώρημα 3.41).

Στο τέταρτο κεφάλαιο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 0.2 (Θεώρημα 4.4). Η απόδειξη γίνεται συνδυάζοντας (Πρόταση 4.3) μιά επαγωγική κατασκευή ενός δ-bush και την πρόταση 1.9 του [**43**].

Στο πέμπτο κεφάλαιο για την απόδειξη του Θεωρήματος 0.3 (Θεώρημα 5.14), συνδυάζουμε ιδέες από τα [**4**] και [**43**] και κατασκευάζουμε μία κλάση χώρων Banach και για κάθε χώρο $\mathfrak{X}_0$ αυτής της κλάσης, κατασκευάζουμε ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-dentable υποσύνολο K του $\mathfrak{X}_0$ στα υποσύνολα του οποίου η RNP και η PCP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.

Στις ενότητες 5.1 και 5.2 χρησιμοποιούμε τις κανονικές οικογένειες υποσυνόλων του $[\mathbb{N}]^{<\infty}$ ([**5**]) και μέσω αυτών κατασκευάζουμε χώρο Banach και ένα w^*-συμπαγές υποσύνολο K του δυικού του (Λήμματα 5.1 και 5.2), έτσι ώστε ο χώρος μας να εμφυτεύεται στον χώρο $C(K)$ (Πρόταση 5.3).

Στην ενότητα 5.3 αποδεικνύουμε (Λήμμα 5.9) μία παρατήρηση που υπάρχει (χωρίς απόδειξη) στο [**50**] και μία συνέπειά της (Πρόταση 5.10). Τέλος στην ενότητα 5.4 βρίσκουμε στοιχεία του $\mathfrak{X}_0^{**}$ των οποίων το άθροισμα (Λήμμα 5.11) ή ο κυρτός συνδυασμός (Πρόταση 5.12) απέχουν 'αρκετά' από τον $\mathfrak{X}_0$ και ολοκληρώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 0.3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΧΩΡΩΝ BANACH

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες, οι συμβολισμοί, καθώς επίσης χρήσιμες προτάσεις και τεχνικές από την Θεωρία χώρων Banach που είναι απαραίτητες για την εργασία αυτή. Στα βιβλία [**39**], [**1**], [**31**], ο αναγνώστης μπορεί να βρεί αναλυτικές παρουσιάσεις των θεμάτων που αναφέρουμε. Όπου χρειάζεται, υπάρχουν ειδικότερες αναφορές.

1.1. Βασικοί ορισμοί, ευθύ γινόμενο, προβολές, $\|\cdot\|$-τοπολογία και w-τοπολογία, Θεώρημα Mazur

Αν X χώρος Banach εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|$ τότε με $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ συμβολίζουμε την κλειστή μοναδιαία μπάλλα του X και με $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ την μοναδιαία σφαίρα του.

Αν $K \subset X$ τότε με $< K >$ συμβολίζουμε την γραμμική θήκη του K και με $\overline{< K >}$ την κλειστότητά της. Αντίστοιχα με $co(K)$ συμβολίζουμε την κυρτή θήκη του K και με $\overline{co}(K)$ την κλειστή κυρτή θήκη του K.

Αν Y κλειστός υπόχωρος του X, ο χώρος πηλίκο X/Y, εφοδιασμένος με την νόρμα : $\|\hat{x}\| = inf\{\|x\| : x \in \hat{x}\}$ είναι χώρος Banach, όπου $\hat{x} = \{z \in X : (x - z) \in Y\}$, όταν $x \in X$.

Αν X, Y είναι χώροι Banach, με $L(X, Y)$ συμβολίζουμε τον χώρο των (φραγμένων, γραμμικών) τελεστών T από τον X στον Y (δηλαδή $T : X \to Y$). Ο χώρος Banach $L(X, Y)$ εφοδιασμένος με την νόρμα: $\|T\| = sup\{\|Tx\|_Y : x \in B_X\}$ είναι επίσης χώρος Banach. Θέτουμε επίσης $L(X) = L(X, X)$.

Οι χώροι X και Y είναι *ισομορφικοί* ($X \approx Y$), αν υπάρχει αντιστρέψιμος τελεστής από τον X επί του Y.

Το ευθύ άθροισμα των χώρων X και Y, δηλαδή το σύνολο :

$$X \oplus Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

καθίσταται χώρος Banach (εφοδιασμένος για παράδειγμα με την νόρμα : $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$).

Η έννοια αυτή γενικεύεται στην περίπτωση που $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία χώρων Banach.

Ευθύ άθροισμα των X_n ονομάζουμε τον χώρο Banach $X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$ εφοδιασμένο με κατάλληλη νόρμα. Κυρίως θα χρησιμοποιήσουμε την $\|\cdot\|_0$ στον X, με $\|x\|_0 = \max\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$, όταν $x = (x_1, x_2, ...) \in X$ με $x_i \in X_i$, για $i \in \mathbb{N}$, και $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$.

Αν Y κλειστός υπόχωρος του X, και υπάρχει τελεστής $P \in L(X)$, τέτοιος ώστε $P(y) = y$ ($P^i = P$), για κάθε $y \in Y$, και $P(X) = Y$, τότε ο τελεστής T ονομάζεται προβολή του X στον Y, και ο Y ονομάζεται *complemented* υπόχωρος του X. Αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν, υπάρχει κλειστός υπόχωρος Z του X τέτοιος ώστε $X = Y \oplus Z$. Τότε ισχύει επίσης $X/Y \approx Z$.

Αν $X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$, με $P_n : X \to X_n$, για $n \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε την προβολή από τον X στον X_n. Γράφουμε επίσης :

$$P_{[1,...,k)} = \sum_{n=1}^{k-1} P_i, \quad P_{[1,...,k]} = P_{[1,...,k+1)}, \quad P_{(k,...,\infty)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} P_i.$$

Αντίστοιχα ορίζονται οι τελεστές $P_{[k,...,\infty)}$, $P_{[k,...,n)}$ και $P_{[k,...,n]}$.

Στην περίπτωση που κάθε X_n είναι πεπερασμένης διάστασης, λέμε ότι η οικογένεια (P_n, X_n), όπου $n \in \mathbb{N}$, είναι μία *finite dimensional decomposition (FDD)* του X.

Τότε αν $x \in X$ έχουμε ότι: $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ (μοναδική γραφή).

Ένας τελεστής $T \in L(X,Y)$ καλείται *εμφύτευση* του X στον Y αν $T(X) \approx X$. Λέμε τότε ότι ο X *εμφυτεύεται* στον Y (ή ότι ο X *περιέχεται* στον Y) και γράφουμε $X \hookrightarrow Y$.

Όταν $Y = \mathbb{R}$ τότε ο χώρος $X^* = L(X,\mathbb{R})$ είναι ο δυικός χώρος του X. Αντίστοιχα $X^{**} = L(X^*,\mathbb{R})$ είναι ο δυικός του X^* (δεύτερος δυικός του X).

Ο X^* εφοδιασμένος με την supremum νόρμα, δηλαδή με την $\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\}$, όταν $x^* \in X^*$, είναι χώρος Banach. Το ίδιο συμβαίνει με τον X^{**}, όπου έχουμε $\|f\| = \sup\{|f(x^*)| : x^* \in B_{X^*}\}$ όταν $f \in X^{**}$.

Η *ασθενής τοπολογία* του X ($w-$*τοπολογία*), είναι η ασθενέστερη τοπολογία του X που καθιστά κάθε γραμμικό συναρτησοειδές του X^* συνεχές. Μία βάση περιοχών της $w-$τοπολογίας του X στο 0 είναι τα σύνολα της μορφής : $V_\varepsilon(0; x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, ..., n\}$ όταν $\{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\} \subset X^*$ και $\varepsilon > 0$.

Λέμε ότι το δίκτυο $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ (αντίστοιχα η ακολουθία όταν $a \in \mathbb{N}$) *συγκλίνει ασθενώς* ($w-$*σύγκλιση*) στο $x_0 \in X$, αν $\lim_{a\in\mathcal{A}} x^*(x_a) = x^*(x_0)$ για κάθε $x^* \in X^*$ και γράφουμε $x_a \xrightarrow{w} x_0$.

Με την απεικόνιση $j : X \to X^{**}$ ο X εμφυτεύεται στον X^{**}. Στην περίπτωση που $j(X) = X^{**}$, ο χώρος X ονομάζεται *αυτοπαθής* (*reflexive*).

Λέμε ότι το δίκτυο $(x_a^*)_{a\in\mathcal{A}}$ (αντίστοιχα η ακολουθία όταν $a \in \mathbb{N}$) *συγκλίνει ασθενώσ-άστρο* (w^*-*σύγκλιση*) στο $x_0^* \in X^*$, αν $\lim_{a\in\mathcal{A}} x_a^*(x) = x_0^*(x)$ για κάθε $x \in X$ και γράφουμε $x_a^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$.

Η διαφορετικότητα της $\|\cdot\|-$τοπολογίας και της $w-$τοπολογίας σε έναν χώρο Banach γίνεται εμφανής όταν αυτός είναι απειροδιάστατος (μάλιστα ένα από τα κλειδιά της εργασίας αυτής είναι η σχέση της $\|\cdot\|-$τοπολογίας και της $w-$τοπολογίας). Για παράδειγμα, αν η ασθενής τοπολογία του X είναι μετρικοποιήσιμη, τότε ο X είναι πεπερασμένης διάστασης και αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης τότε η $\|\cdot\|-$τοπολογία και η $w-$τοπολογία συμπίπτουν, ενώ αν ο X είναι απειροδιάστατος κάθε $w-$ανοιχτό σύνολο του X είναι μη φραγμένο και ο X δεν είναι πλήρης με την $w-$τοπολογία.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα (στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται καίρια), είναι το ακόλουθο :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1. *(Mazur) Αν S είναι ένα κυρτό σύνολο σε έναν χώρο Banach, τότε η ασθενής κλειστότητα του S ταυτίζεται με την norm κλειστότητα του S ($\overline{S}^w = \overline{S}$).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η $\|\cdot\|-$τοπολογία είναι ισχυρότερη της ασθενούς, για το S έχουμε $\overline{S} \subset \overline{S}^w$. Όμως το σύνολο $\overline{S}$ είναι κλειστό κυρτό σύνολο, συνεπώς αν $x_0 \notin \overline{S}$ από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $f \in X^*$, τέτοιο ώστε: $f(x_0) > \sup\{f(x) : x \in \overline{S}\}$. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε : $f(x_0) > \alpha > \sup\{f(x) : x \in \overline{S}\}$. Τότε το σύνολο $V_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ είναι ασθενώς ανοιχτό στον X. Επίσης $x_0 \in V_\alpha$ και $V_\alpha \cap \overline{S} = \emptyset$. Άρα το σύνολο $X \setminus \overline{S}$ είναι $w-$ανοιχτό και συνεπώς το $\overline{S}$ είναι $w-$κλειστό. Αφού $\overline{S} \subset \overline{S}^w$ και $\overline{S}$ είναι $w-$κλειστό έχουμε $\overline{S} = \overline{S}^w$. □

Μια σημαντική συνέπεια (Mazur) του προηγούμενου θεωρήματος είναι ότι για $\varepsilon > 0$, αν $x \in \overline{S}^w$ τότε υπάρχει κυρτός συνδυασμός στοιχείων του S που απέχει (norm) από το x λιγότερο από ε.

1.2. Βάσεις και βασικές ακολουθίες, προβολές μερικών αθροισμάτων, ισοδυναμία βάσεων, block βασικές ακολουθίες, Principle of small pertrubations, αρχή της επιλογής των Bessaga-Pelzynski, βάσεις σε κλασικούς χώρους, σύστημα Haar

Η ακολουθία $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα λέμε ότι είναι *(Schauder) βάση* για τον χώρο Banach X, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε : $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n$, όπου $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ οι απεικονίσεις που ορίζονται μέσω των e_n με τις σχέσεις: $e_k^*(e_j) = \delta_{kj}$, με $\delta_{kj} = 0$ αν $k \neq j$ και $\delta_{kj} = 1$ αν $k = j$ (οι οποίες αποδεικνύεται ότι είναι συνεχείς και συνεπώς είναι διορθογώνια συναρτησοειδή στον X^*). Θυμίζουμε ότι τούτο σημαίνει πως τα μερικά αθροίσματα της σειράς συγκλίνουν στο x ως προς την νόρμα του χώρου ([**23**]).

Ένας χώρος Banach με βάση είναι διαχωρίσιμος (δηλ. περιέχει πυκνό αριθμήσιμο υποσύνολο) και είναι δυνατόν να τον φανταζόμαστε ως έναν χώρο ακολουθιών της μορφής $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$. Υπό αυτή την έννοια τα μερικά αθροίσματα της παραπάνω σειράς μπορούμε να τα δούμε ως τις προβολές μερικών αθροισμάτων στον X (αν $X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$, όπου $X_n = \mathbb{R}$). Έτσι γράφουμε : $P_{[1,...,k]} = \sum\limits_{n=1}^{k} e_n^*(x) e_n$.
Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος (ή το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης) έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι απεικονίσεις $P_{[1,...,k]}$ είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και ότι $\sup\{\|P_{[1,...,k]}\| : k \in \mathbb{N}\} < \infty$. Ο αριθμός $K = \sup\{\|P_{[1,...,k]}\| : k \in \mathbb{N}\}$ ονομάζεται *σταθερά της βάσης* και αν $K = 1$ η βάση λέγεται *μονότονη*. Αν $\|e_n\| = 1$ για κάθε n, η βάση καλείται *νορμαρισμένη*.

Η ακολουθία $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του X ονομάζεται *βασική* αν είναι βάση για τον χώρο $\overline{< e_n >} \subset X$. Γνωρίζουμε *(Mazur)* ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει βασική ακολουθία.

Δύο βάσεις (ή βασικές ακολουθίες) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, στους χώρους X και Y αντίστοιχα, θα λέγονται *ισοδύναμες* όταν για κάθε ακολουθία πραγματικών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, για τις σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ έχουμε ότι όταν συγκλίνει η μία τότε συγκλίνει και η άλλη.

Οι βασικές ακολουθίες είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε : $C^{-1}\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n \| \leq \| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \| \leq C \| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n \|$ για κάθε ακολουθία πραγματικών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Αν $C = 1$ τότε οι βασικές ακολουθίες ονομάζονται *ισομετρικά ισοδύναμες*.

Σταθεροποιώντας μία αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και μια ακολουθία πραγματικών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε τα στοιχεία του X : $u_n = \sum\limits_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} \alpha_j e_j$. Η ακολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται *block βασική ακολουθία* και είναι βασική.

Αν δύο ακολουθίες είναι 'αρκετά κοντά', τότε όταν η μία είναι βασική το ίδιο συμβαίνει και με την άλλη. Αυτό μας το εξασφαλίζει το παρακάτω αποτέλεσμα :

Θεωρημα 1.2. *(Principle of small pertrubations) Έστω $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σε έναν χώρο Banach X, με K την σταθερά της βάσης. Αν $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια άλλη ακολουθία στον X τέτοια ώστε:*

$$2K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} = \theta < 1, \text{ τότε :}$$

i. η $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική
ii. αν $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση του X, το ίδιο συμβαίνει για την $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Και στις δύο περιπτώσεις, η σταθερά της βάσης για την $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι το πολύ $K\frac{1+\theta}{1-\theta}$. Έχουμε επίσης ότι αν ο $\overline{<x_n>}$ είναι complemented τότε το ίδιο συμβαίνει για τον $\overline{<y_n>}$.

Το θεώρημα 1.2 όχι μόνο χρησιμοποείται αργότερα ισχυρά, αλλά έχει και σαν εφαρμογή το παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα, στου οποίου την απόδειξη περιέχεται η τεχνική του *gliding* ή *sliding hump argument*, που εφαρμόζεται σε κατασκευές επόμενου κεφαλαίου.

Θεωρημα 1.3. *(Αρχή της επιλογής τωνBessaga-Pelzynski)*
Έστω $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια βάση για τον χώρο Banach X, με K την σταθερά της βάσης, $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ τα δυικά συναρτησοειδή της βάσης και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον X. Αν :
i. $\inf\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} > 0$
ii. $\lim_{n\to\infty} e_k^*(x_n) = 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$, *τότε :*

η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια υπακολουθία $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ισοδύναμη με κάποια block βασική ακολουθία $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Το θεώρημα 1.3 εφαρμόζεται και στην περίπτωση που μια ακολουθία είναι ασθενώς μηδενική αλλά δεν συγκλίνει στο 0 ως προς την νόρμα. Αυτή είναι μια κατάσταση που μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα αφού εμφανίζεται με ουσιαστικό τρόπο σε κεντρικά αποτελέσματα αυτής της εργασίας. Η τεχνική επίσης της απόδειξης μας δίνει την δυνατότητα, δοσμένου $\epsilon >$

0, να επιλέξουμε τα $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ με τέτοιο τρόπο ώστε η $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ να έχει σταθερά της βάσης το πολύ $K+\epsilon$.

Απόδειξη. (του 1.3, [**1**]) Έστω $\alpha = \inf\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} > 0$, K η σταθερά της βάσης των $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $0 < \nu < \frac{1}{4}$. Θέτουμε $n_1 = 1$ και $r_0 = 0$.

Τότε υπάρχει $r_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε : $\|x_{n_1} - P_{[1,\dots,r_1]}x_{n_1}\| < \frac{\nu\alpha}{2K}$.

Ξέρουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\|P_{[1,\dots,r_1]}x_n\| = 0$, άρα υπάρχει $n_2 > n_1$ τέτοιο ώστε $\|P_{[1,\dots,r_1]}x_{n_2}\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K}$.

Διαλέγουμε $r_2 > r_1$ τέτοιο ώστε : $\|x_{n_2} - P_{[1,\dots,r_2]}x_{n_2}\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K}$.

Πάλι, αφού $\lim_{n\to\infty}\|P_{[1,\dots,r_2]}x_n\| = 0$ υπάρχει $n_3 > n_2$ τέτοιο ώστε $\|P_{[1,\dots,r_2]}x_{n_3}\| < \frac{\nu^3\alpha}{2K}$.

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, παίρνουμε μια ακολουθία φυσικών $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και μια ακολουθία $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε :

$$\|P_{[1,\dots,r_{k-1}]}x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{2K} \text{ και } \|x_{n_k} - P_{[1,\dots,r_k]}x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{2K}.$$

Θέτουμε : $y_k = P_{[1,\dots,r_k]}x_{n_k} - P_{[1,\dots,r_k]}x_{n_{k-1}}$.

Η ακολουθία $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία block βασική ακολουθία της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με σταθερά της βάσης μικρότερη του K .

Ισχύει επίσης : $\|y_k - x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{2K}$ και άρα

$$(1-\nu)\alpha \le \alpha - \frac{\nu\alpha}{K} < \|y_k\| \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς : $2K\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\|y_k - x_{n_k}\|}{\|y_k\|} < (1-\nu)^{-1}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu^k = 2\nu(1-\nu)^{-2} < \frac{8}{9}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.2, η $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία, ισοδύναμη με την $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ και διαλέγοντας το ν αρκετά μικρό μπορούμε να έχουμε την σταθερά βάσης της $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ όσο κοντά θέλουμε στο K . □

Ο c_0, χώρος των μηδενικών ακολουθιών

$\big(x \in c_0$ αν και μόνο αν $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots)$ και $\lim_{j\to\infty}\alpha_j = 0\big)$, με την supremum νόρμα: $\|x\|_0 = \sup\{|\alpha_j| : j \in \mathbb{N}\}$, είναι ως γνωστόν χώρος Banach και η ακολουθία διανυσμάτων:

$$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ με } e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

δηλαδή με την μονάδα στην $n-$θέση, είναι βάση του χώρου.

Ομοίως οι χώροι Banach l^p, για $1 \le p < \infty$, οι χώροι των $p-$απολύτως αθροίσιμων ακολουθιών

$$(x \in l^p \text{ αν και μόνο αν } x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots) \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_j|^p < \infty),$$

με την p-νόρμα $\|x\|_p = (\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_j|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty)$, έχουν βάση την ακολουθία $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Στις παραπάνω περιπτώσεις, οι προαναφερόμενες βάσεις είναι μονότονες και νορμαρισμένες.

Παίρνοντας ένα πυκνό αριθμήσιμο υποσύνολο $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του $[0,1]$ και θέτοντας $e_1(t)=1$ για $t\in[0,1]$, $e_n(q_k)=q_k$ για $1\le k\le n$, και την $e_n(t)$ γραμμική σε κάθε διάστημα του συνόλου $[0,1]\backslash q_1,q_2,...,q_n$, έχουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη βάση στον $C[0,1]$, τον χώρο Banach των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με την supremum νόρμα : $\|f\|_\infty=\max\{|f(t)|:t\in[0,1]\}$.

Αν για $1\le p<\infty$, εφοδιάσουμε το σύνολο των Borel μετρήσιμων συναρτήσεων f ορισμένες στο $[0,1]$ (ταυτίζοντας αυτές που συμπίπτουν σχεδόν παντού, δηλαδή εκτός ίσως από ένα σύνολο μηδενικού μέτρου) για τις οποίες $\int\limits_0^1|f(t)|^p dt<\infty$, με την νόρμα $\|f\|_p=(\int\limits_0^1|f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$, έχουμε τους χώρους Banach L^p, τους χώρους των $p-$απολύτως ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (στο $[0,1]$) .

Έστω χ_A η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A (δηλ. $\chi_A(t)=1$ αν $t\in A$ και $\chi_A(t)=0$ αν $t\notin A$). Τότε στους χώρους L^p το *σύστημα συναρτήσεων Haar* με : $h_1(t)=1$ για κάθε $t\in[0,1]$, $h_n(t)=\chi_{[\frac{2s-2}{2^{k+1}},\frac{2s-1}{2^{k+1}})}(t)-\chi_{[\frac{2s-1}{2^{k+1}},\frac{2s}{2^{k+1}})}(t)$ όταν $n=2^k+s,\ k=1,2,...$ και $s=1,2,...,2^k$, είναι μονότονη βάση αλλά όχι νορμαρισμένη.

Οι χώροι l^∞ και $L^\infty[0,1]$ δεν είναι διαχωρίσιμοι και άρα δεν έχουν βάση.

Φυσικά ο χώρος Banach $l^\infty=l^\infty(\mathbb{N})$ είναι ο χώρος των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών με την supremum νόρμα $\|x\|_\infty=\|(\alpha_1,\alpha_2,...)\|=\sup\{|\alpha_i|:i\in\mathbb{N}\}<\infty$, ενώ ο χώρος Banach $L^\infty[0,1]$, είναι ο χώρος των ουσιαστικά φραγμένων συναρτήσεων στο $[0,1]$ (εκτός ίσως από ένα σύνολο μέτρου 0) με την supremum νόρμα, $\|f\|_\infty=esssup(f)=\inf\{\sup\{f(t):t\in A\}:\mu(A)=1\}$

1.3. Unconditional, shrinking και boundedly complete βάσεις, ένας χαρακτηρισμός για τους αυτοπαθείς χώρους

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι βάσεις που ονομάζονται unconditional. Μια βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο Banach X καλείται *unconditional* όταν για κάθε $x\in X$, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e_n^*(x)e_n$ συγκλίνει unconditionally. Αντίστοιχα η ακολουθία $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται *unconditional βασική* όταν είναι unconditional βάση για τον χώρο $\overline{<e_n>}_{n\in\mathbb{N}}$.

Θυμίζουμε ότι η unconditional σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ μιάς ακολουθίας $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, σε έναν χώρο Banach, σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ συγκλίνει για κάθε επιλογή προσήμων θ_n . Τούτο είναι ισοδύναμο ([**39**]) με τα παρακάτω :

i. η σειρά $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)}$ συγκλίνει για κάθε μετάθεση π των φυσικών,
ii. η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ συγκλίνει για κάθε επιλογή $n_1 < n_2 < n_3 < ...$,
iii. για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός N τέτοιος ώστε $\|\sum_{i\in\sigma} x_i\| < \varepsilon$ για κάθε σύνολο σ για το οποίο ισχύει $\min\{i \in \sigma\} > N$.

Πρόταση 1.4. *([**1**], Πρ. 3.1.3) Η βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο Banach είναι unconditional αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά K, με $1 \leq K$, τέτοια ώστε : για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και πραγματικούς $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_N$ με $|\alpha_i| \leq |\beta_i|$ για $i = 1, ..., N$, ισχύει : $\|\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i\| \leq K\|\sum_{i=1}^{N} \beta_i e_i\|$.*

Όταν η βάση είναι unconditional, τότε ο ελάχιστος θετικός αριθμός K για τον οποίο ισχύει η παραπάνω σχέση, ονομάζεται σταθερά της unconditional βάσης και συμβολίζεται με K_u. Λέμε ότι η βάση είναι $K-$unconditional όταν $K > K_u$.

Η standard βάση του c_0 και των l^p, για $1 \leq p < \infty$, είναι unconditional. Επίσης το σύστημα Haar είναι unconditional βάση για τους L^p για $1 < p < \infty$. Δεν συμβαίνει το ίδιο όμως για τον L^1, μάλιστα ισχύει :

Θεώρημα 1.5. *(Pelczynski, 1961,* [**45**]*)*
Ο L^1 δεν εμφυτεύεται σε χώρο με unconditional βάση.

Γνωρίζουμε επίσης ότι αν ο K είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε ο χώρος Banach $C(K)$ περιέχεται σε χώρο με unconditional βάση αν και μόνο αν $C(K) \approx c_0$ ([**1**], 4.5.2).

Έστω $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια βάση σε έναν χώρο Banach X.
Αν έχουμε $\overline{< e_n^* >}_{n\in\mathbb{N}} = X^*$, τότε η βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του X καλείται *shrinking*. Στην περίπτωση αυτή ο X^* είναι φανερά διαχωρίσιμος. Γνωρίζουμε επίσης (*Mazur*), ότι αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος τότε ο X περιέχει shrinking βάσικη ακολουθία.

Πρόταση 1.6. *([**1**], Πρ. 3.2.6) Μια βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο Banach X είναι shrinking αν και μόνο αν : $\lim_{N\to\infty} \|x^*|_{\overline{<e_n>}_{n>N}}\| = 0$, όπου $\|x^*|_{\overline{<e_n>}_{n>N}}\| = \sup\{|x^*(y)| : y \in \overline{< e_n >}_{n>N}\}$.*

Η προηγούμενη πρόταση (που αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας προβολές) δίνει την χρήσιμη :

Πρόταση 1.7. *([**1**], Πρ. 3.2.7) Η βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενός χώρου Banach X είναι shrinking, αν και μόνο αν, κάθε φραγμένη block βασική ακολουθία της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς μηδενική.*

Απόδειξη. Αν η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι shrinking, τότε υπάρχει $x^* \in X^* \setminus \overline{< e_n^* >}_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^*(e_n)e_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ και η $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^*(e_n)e_n^*$ δεν συγκλίνει norm στον X^* και συνεπώς δεν είναι norm-Cauchy.

Άρα υπάρχουν, $\delta > 0$ και ακολουθίες φυσικών $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < p_3 \leq q_3 < ...$, τέτοιες ώστε:$\| \sum\limits_{n=p_k}^{q_k} x^*(e_n)e_n^* \| > \delta$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Υπάρχει λοιπόν για κάθε k ένα $x_k \in X$, με $\|x_k\| = 1$, τέτοιο ώστε : $\sum\limits_{n=p_k}^{q_k} x^*(e_n)e_n^*(x_k) > \delta$.

Θέτουμε $y_k = \sum\limits_{n=p_k}^{q_k} e_n^*(x_k)e_n$, για $k = 1, 2, ...$, η οποία είναι block βασική ακολουθία της $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, που όμως δεν είναι ασθενώς μηδενική αφού $x^*(y_k) > \delta$ για κάθε k.

Αν η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι shrinking, εφαρμόζοντας την Πρόταση Ιγ3 κάθε φραγμένη block βασική ακολουθία της είναι ασθενώς μηδενική. ☐

Μια βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται *boundedly complete*, αν για κάθε ακολουθία πραγματικών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $\sup\{\| \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n e_n\| : N \in \mathbb{N}\} < \infty$, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ να συγκλίνει (norm) στον X.

Αν $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια βάση σε έναν χώρο Banach X και $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, τα αντίστοιχα διορθογώνια συναρτησοειδή τότε ισχύουν :

Θεώρημα 1.8. *([**1**], Θ. 3.2.12)*
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :

i. Η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι shrinking βάση του* X,
ii. Η $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι boundedly complete βάση του χώρου* $\overline{< e_n^* >}_{n\in\mathbb{N}}$,
iii. $X^* = \overline{< e_n^* >}_{n\in\mathbb{N}}$.

Θεώρημα 1.9. *([**1**], Θ. 3.2.10) Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :*

i. Η $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι boundedly complete βάση του* X,
ii. Η $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι shrinking βάση του χώρου* $\overline{< e_n^* >}_{n\in\mathbb{N}}$,

iii. Η κανονική απεικόνιση $j : X \to \overline{< e_n^* >}^*_{n\in\mathbb{N}}$ *με* $j(x)(h) = h(x)$, *για κάθε* $x \in X$ *και* $h \in \overline{< e_n^* >}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ισομορφισμός.*

Τα παραπάνω θεωρήματα, είναι στην πραγματικότητα προοίμιο του:

Θεωρημα 1.10. *(James, 1951,* [**35**]*) Ο χώρος Banach* X *με βάση* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν η* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ταυτόχρονα shrinking και boundedly complete.*

Οι standard βάσεις στους χώρους l^p για $1 < p < \infty$ είναι ταυτόχρονα shrinking και boundedly complete. Στον l^1, η κανονική βάση είναι φανερά boundedly complete αλλά όχι shrinking, αφού ο δυικός του $l^\infty = (l^1)^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος. Η συνήθης βάση του c_0 είναι shrinking αλλά όχι boundedly complete.

1.4. Δείκτες, δένδρα, δ-bushes, δ-approximate bushes, averaging back bushes

Με $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών της μορφής : $\alpha = (0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Αν $\alpha = (0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, *μήκος* του α ορίζουμε τον αριθμό n, και γράφουμε $|\alpha| = n$ ($|0| = 0$). Όταν $k \leq |\alpha|$, όπου k φυσικός, *περιορισμό* του α στο k λέμε το στοιχείο $\alpha = (0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ και γράφουμε $\alpha|_k$.

Ορίζουμε μια μερική διάταξη στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ως εξής :

$$\alpha < \beta \text{ αν και μόνο αν } |\alpha| < |\beta| \text{ και } \alpha = \beta|_{|\alpha|}.$$

Μπορούμε να ορίσουμε και την λεξικογραφική ολική διάταξη με:

$$\alpha <_{lex} \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{αν } |\alpha| < |\beta| \\ \text{ή} \\ \text{αν } |\alpha| = |\beta| \text{ και υπάρχει } j \text{ με } 1 \leq j \leq n \\ \text{τέτοιο ώστε } : \ \alpha_j < \beta_j \\ \text{και } \alpha_i = \beta_i \text{για } i = 0, 1, ..., j-1 \end{cases}$$

Αν $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, τέτοιο ώστε : $\#\{\alpha : |\alpha| = n\} < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ λέμε ότι έχουμε ένα *finitely branching tree*. Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα finitely branching tree και $\alpha \in \mathcal{A}$, με

$$S_\alpha = \{\beta : \alpha < \beta \text{ και } |\beta| = |\alpha| + 1\}$$

συμβολίζουμε το σύνολο των επομένων του α. Αν $\#S_\alpha = 2$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$, λέμε ότι έχουμε ένα *δυαδικό δέντρο.*

Έστω ένα finitely branching tree $\mathcal{A}$, $\delta > 0$ και $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ένα φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X, τέτοιο ώστε :

i. $\|x_\beta - x_\alpha\| > \delta$ όταν $\beta \in S_\alpha$ και

ii. $x_\alpha = \sum\limits_{\beta \in S_\alpha} \lambda_\beta x_\beta$, με $0 \leq \lambda_\beta$ και $\sum\limits_{\beta \in S_\alpha} \lambda_\beta = 1$.

Λέμε τότε ότι το σύνολο $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ είναι ένα $\delta-$*bush*.
Τα στοιχεία του X, $y_\beta = x_\beta - x_\alpha$ ονομάζονται *nodes* του $\delta-$bush.

Αν αντί για την σχέση ii. είχαμε την σχέση :
ii$'$. $\|x_\alpha - \sum\limits_{\beta \in S_\alpha} \lambda_\beta x_\beta\| < \varepsilon_{|\alpha|}$, με $0 \leq \lambda_\beta$, $\sum\limits_{\beta \in S_\alpha} \lambda_\beta = 1$ και $\varepsilon_n > 0$ για $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$,
λέμε ότι το σύνολο $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ είναι ένα $\delta-$*approximate bush* και τα στοιχεία $y_\beta = x_\beta - x_\alpha$ ονομάζονται *nodes* του $\delta-$approximate bush.

Επειδή : $\sum\limits_{|\beta|=m} \lambda_\beta x_\beta = \sum\limits_{|\alpha|=m-1} \left(\sum\limits_{\beta \in S_\alpha} \lambda_\beta x_\beta \right) =$

$$= \sum_{|\alpha|=m-1} \left(\sum_{\beta \in S_\alpha} (\lambda_\beta x_\beta - \lambda_\beta x_\alpha) + \sum_{\beta \in S_\alpha} \lambda_\beta x_\alpha \right) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=m-1} \left(\sum_{\beta \in S_\alpha} \lambda_\beta y_\beta \right) + \sum_{|\alpha|=m-1} \left(\sum_{\beta \in S_\alpha} \lambda_\beta x_\alpha \right) =$$

$$= \sum_{|\beta|=m} \lambda_\beta y_\beta + \sum_{|\alpha|=m-1} \left(\sum_{\beta \in S_\alpha} \lambda_\beta \right) x_\alpha,$$

θέτοντας $\mu_\alpha = \lambda_\alpha$ όταν $|\alpha| = m$, και $\mu_\alpha = \sum\limits_{\beta \in S_\alpha} \mu_\beta$, αν $m > |\alpha|$, παρατηρούμε ότι : $\sum\limits_{|\beta|=m} \lambda_\beta x_\beta = \sum\limits_{n=0}^{m} \left(\sum\limits_{|\alpha|=n} \mu_\alpha y_\alpha \right)$.

Δοσμένου ενός $\delta-$approximate bush μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $\frac{\delta}{2}-$bush, $(\tilde{x_\alpha})_{\alpha \in \mathcal{A}}$, ως εξής:
θέτουμε : $x_\alpha^m = \sum\limits_{|\beta|=m,\, \alpha<\beta} \lambda_\beta^{(\alpha)} x_\beta$, όπου $\lambda_\beta^{(\alpha)}$ ορίζονται επαγωγικά με:

$\lambda_\beta^{(\alpha)} = \lambda_\beta$ όταν $m = |\alpha| + 1$, όπου λ_β οι αντίστοιχοι συντελεστές στο $\delta-$approximate bush,

ενώ αν οι συντελεστές $\lambda_\beta^{(\alpha)}$ έχουν οριστεί για κάποιο $|\beta| = m > |\alpha|$, τότε ορίζουμε $\lambda_\gamma^{(\alpha)} = \lambda_\beta^{(\alpha)} \lambda_\gamma$, όταν $|\gamma| = m + 1$, και λ_γ οι αντίστοιχοι συντελεστές στο $\delta-$approximate bush.

Αν $m > |\alpha| + 1$ έχουμε :
$$x_\alpha^{m+1} - x_\alpha^m = \sum_{\substack{|\gamma|=m+1 \\ \alpha<\gamma}} \lambda_\gamma^{(\alpha)} x_\gamma - \sum_{\substack{|\beta|=m \\ \alpha<\beta}} \lambda_\beta^{(\alpha)} x_\beta =$$

$$= \sum_{\substack{|\beta|=m\\ \alpha<\beta}} \left(\sum_{\gamma\in S_\beta} \lambda_\gamma^{(\alpha)} x_\gamma \right) - \sum_{\substack{|\beta|=m\\ \alpha<\beta}} \lambda_\beta^{(\alpha)} x_\beta = \sum_{\substack{|\beta|=m\\ \alpha<\beta}} \left(\sum_{\gamma\in S_\beta} \lambda_\beta^{(\alpha)} \lambda_\gamma x_\gamma - \lambda_\beta^{(\alpha)} x_\beta \right) =$$

$$= \sum_{\substack{|\beta|=m\\ \alpha<\beta}} \lambda_\beta^{(\alpha)} \left(\sum_{\gamma\in S_\beta} \lambda_\gamma x_\gamma - x_\beta \right).$$

Άρα έχουμε ότι: $\|x_\alpha^{m+1} - x_\alpha^m\| \leq$

$$\leq \sum_{\substack{|\beta|=m\\ \alpha<\beta}} \left(\lambda_\beta^{(\alpha)} \| \sum_{\gamma\in S_\beta} \lambda_\gamma x_\gamma - x_\beta \| \right) \leq \left(\sum_{\substack{|\beta|=m\\ \alpha<\beta}} \lambda_\beta^{(\alpha)} \right) \varepsilon_{|\gamma|} \leq \varepsilon_{|\gamma|}.$$

Επειδή $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, δοσμένου $\varepsilon > 0$, υπάρχει m_0 φυσικός, τέτοιος ώστε $\|x_\alpha^m - x_\alpha^k\| < \varepsilon$, για κάθε $m, k \geq m_0$. Συνεπώς η ακολουθία $\{x_\alpha^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ είναι norm Cauchy.

Θέτουμε $\tilde{x}_\alpha = \lim_{m\to\infty} x_\alpha^m$.
Αφού $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < \infty$ υπάρχει N φυσικός, τέτοιος ώστε $\sum\limits_{N\leq n} \varepsilon_n < \frac{\delta}{8}$.
Αν $m = |\alpha| + 2$ και $\beta_0 \in S_\alpha$, παρατηρούμε ότι :

$$x_\alpha^m - x_{\beta_0}^m = \sum_{\beta\in S_\alpha} \left(\sum_{\gamma\in S_\beta} \lambda_\gamma^{(\alpha)} x_\gamma \right) - \sum_{\gamma\in S_{\beta_0}} \lambda_\gamma x_\gamma =$$

$$= \sum_{\beta\in S_\alpha} \lambda_\beta^{(\alpha)} \left(\sum_{\gamma\in S_\beta} \lambda_\gamma x_\gamma \right) - \sum_{\gamma\in S_{\beta_0}} \lambda_\gamma x_\gamma =$$

$$= \sum_{\beta\in S_\alpha} \lambda_\beta \left(\sum_{\gamma\in S_\beta} \lambda_\gamma x_\gamma - x_\beta + x_\beta \right) - \sum_{\gamma\in S_{\beta_0}} \lambda_\gamma x_\gamma + x_{\beta_0} - x_{\beta_0} =$$

$$= \sum_{\beta\in S_\alpha} \lambda_\beta x_\beta - x_\alpha + \sum_{\beta\in S_\alpha} \lambda_\beta \left(\sum_{\gamma\in S_\beta} \lambda_\gamma x_\gamma - x_\beta \right) -$$

$$- \left(\sum_{\gamma\in S_{\beta_0}} \lambda_\gamma x_\gamma + x_{\beta_0} \right) + x_\alpha - x_{\beta_0},$$

οπότε έχουμε : $\|x_\alpha^m - x_{\beta_0}^m\| > \delta - \varepsilon_{|\alpha|} - 2\varepsilon_{|\alpha|+1}$ (χρησιμοποιώντας τριγωνική ανισότητα).

Ομοίως, αν $m = |\alpha| + 3$, παρόμοιοι υπολογισμοί δίνουν:

$$\|x_\alpha^m - x_{\beta_0}^m\| > \delta - \varepsilon_{|\alpha|} - 2\varepsilon_{|\alpha|+1} - 2\varepsilon_{|\alpha|+2}.$$

Γενικότερα έχουμε :

$$\|x_\alpha^{|\alpha|+k+1} - x_{\beta_0}^{|\alpha|+k+1}\| > \delta - \varepsilon_{|\alpha|} - 2\varepsilon_{|\alpha|+1} - ... - 2\varepsilon_{|\alpha|+k}.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι για μεγάλα n έχουμε :

$$\|x_\alpha^n - \widetilde{x}_\alpha\| < \tfrac{\delta}{8} \text{ και } \|x_{\beta_0}^n - \widetilde{x}_{\beta_0}\| < \tfrac{\delta}{8},$$

συμπεραίνουμε ότι για $|\alpha| > N$ ισχύει: $\|\tilde{x}_\alpha - \tilde{x}_{\beta_0}\| > \frac{\delta}{2}$.

Επίσης για $m > |\alpha| + 2$, εύκολα έχουμε ότι : $x_\alpha^m - \sum\limits_{\beta\in S_\alpha} \lambda_\beta x_\beta^m = 0$, οπότε ισχύει $\tilde{x}_\alpha = \sum\limits_{\beta\in S_\alpha} \lambda_\beta \widetilde{x}_\beta$.

Το σύνολο $(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ είναι ένα $\frac{\delta}{2}-$bush και ονομάζεται *average back bush* του $\delta-$approximate bush $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

1.5. Το αρχέτυπο (fundamental) bush στον c_0

Στο [**6**] κατασκευάζεται ένα υποσύνολο K του c_0, ως αντιπαράδειγμα σχετικά με την ισοδυναμία ιδιοτητών που σχετίζονται με την μελέτη των κλειστών, κυρτών, φραγμένων, non-dentable υποσυνόλων χώρων Banach (περισσότερα στην ενότητα 2.5).Παρουσιάζουμε τώρα μία ανάλογη μορφή του παραδείγματος αυτού, που περιέχει όμως, εν σπέρματι, πολλές κεντρικές ιδέες της εργασίας μας (κεφάλαιο 3).

Έστω $\mathcal{A}$ ένα finitely branching tree τέτοιο ώστε $\#S_\alpha = 2^{|\alpha|}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{A}$, και τα στοιχεία του c_0, $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ με $x_\alpha = \sum\limits_{\gamma\leq\alpha} e_\gamma$, όπου $(e_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{A}}$ υποσύνολο της βάσης του c_0.

Παρατηρούμε ότι αν $|\alpha| = n$ και $\beta \in S_\alpha$ τότε :

$$\|x_\alpha - x_\beta\| = \|\sum_{\gamma\leq\alpha} e_\gamma - \sum_{\gamma\leq\beta} e_\gamma\| = \|e_\beta\| = 1.$$

Επίσης αν για κάθε $\beta \in S_\alpha$, θέσουμε $\lambda_\beta = \frac{1}{2^n}$ (οπότε $\sum\limits_{\beta\in S_\alpha} \lambda_\beta = 1$), έχουμε : $\|x_\alpha - \sum\limits_{\beta\in S_\alpha} \lambda_\beta x_\beta\| = \|x_\alpha - \frac{1}{2^n} \sum\limits_{\beta\in S_\alpha} x_\beta\| = \frac{1}{2^n}\|2^n x_\alpha - \sum\limits_{\beta\in S_\alpha} x_\beta\| =$
$= \frac{1}{2^n}\|2^n x_\alpha - \sum\limits_{\beta\in S_\alpha}\{\sum\limits_{\gamma\leq\alpha} e_\gamma + e_\beta\}\| = \frac{1}{2^n}\|2^n x_\alpha - 2^n x_\alpha - \sum\limits_{\beta\in S_\alpha} e_\beta\| = \frac{1}{2^n}$.

Αφού $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$, το σύνολο $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ είναι ένα $\delta-$approximate bush.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε :

$$x_\alpha^{n+1} = \sum_{\beta\in S_\alpha} \frac{1}{2^n} x_\beta = ... = x_\alpha + \sum_{\beta\in S_\alpha} \frac{1}{2^n} e_\beta = x_\alpha + \sum_{|\beta|=n+1} \frac{1}{2^n} e_\beta, ...$$

$$x_\alpha^{n+k} = x_\alpha + \sum_{s=1}^{k} \sum_{\substack{|\beta|=n+s \\ \alpha<\beta}} \left(\prod_{\mu=0}^{\mu=s-1} \frac{1}{2^n+\mu} \right) e_\beta \ , ...$$

και παίρνοντας όριο

$$\tilde{x}_\alpha = x_\alpha + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\substack{|\beta|=n+s \\ \alpha<\beta}} \left(\prod_{\mu=0}^{\mu=s-1} \frac{1}{2^n+\mu} \right) e_\beta .$$

Αν $(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, το $\frac{\delta}{2}-$average back bush του $\delta-$approximate bush $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, θεωρούμε $K = \overline{co}\,(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, την κλειστή κυρτή θήκη του $\frac{\delta}{2}-$average back bush.

Όταν $x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \lambda_\alpha^{(x)} e_\alpha \in K \subset c_0$, τότε $\lim_{|\alpha|\to\infty} \lambda_\alpha^{(x)} = 0$, οπότε δεδομένου $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε n, με $n_0 \leq n$, έχουμε

$$(1) \qquad \max\{\lambda_\alpha^{(x)} : |\alpha| = n\} < \varepsilon \, .$$

Επίσης, $\lambda_\alpha^{(x)} = e_\alpha^*(x)$, όπου e_α^* τα διορθογώνια συναρτησοειδή των e_α, στον l^1.

Έστω τώρα ακολουθία $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ που συγκλίνει ασθενώς στο x. Τότε υπάρχει k_0, τέτοιο ώστε $|e_\alpha^*(y_{k_0}) - e_\alpha^*(x)| < \varepsilon$, για κάθε α με $|\alpha| \leq n_0$.

Θέτουμε $y_{k_0} = y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \lambda_\alpha^{(y)} e_\alpha$.

Τότε από προηγουμένως έχουμε

$$(2) \qquad |\lambda_\alpha^{(x)} - \lambda_\alpha^{(y)}| < \varepsilon, \text{ για } |\alpha| \leq n_0.$$

Όταν $|\alpha| > n_0$, λόγω των σχέσεων :

$$0 \leq \lambda_\alpha^{(x)} \leq 1, \quad \lambda_\emptyset^{(x)} = 1, \quad \lambda_\alpha^{(x)} = \sum_{\beta\in S_\alpha} \lambda_\beta^{(x)}$$

και της σχέσης (1) παίρνουμε :

$$\max\{\lambda_\alpha^{(x)} : |\alpha| > n_0\} \leq \max\{\lambda_\alpha^{(x)} : |\alpha| = n_0\} < \varepsilon.$$

Η σχέση (2) δίνει : $\lambda_\alpha^{(y)} < \varepsilon + \lambda_\alpha^{(x)} < 2\varepsilon$, για α με $|\alpha| = n_0$, και συνεπώς $\max\{\lambda_\alpha^{(y)} : |\alpha| > n_0\} \leq \max\{\lambda_\alpha^{(y)} : |\alpha| = n_0\} < 2\varepsilon$.

Έτσι, για α με $|\alpha| > n_0$, έχουμε : $|\lambda_\alpha^{(x)} - \lambda_\alpha^{(y)}| < |\lambda_\alpha^{(x)}| + |\lambda_\alpha^{(y)}| < 3\varepsilon$.

Άρα : $\|y - x\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} (\lambda_\alpha^{(y)} - \lambda_\alpha^{(x)}) e_\alpha\| < 3\varepsilon$.

Τούτο σημαίνει ότι η ακολουθία $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ συγκλίνει norm στο x, και επειδή η *norm* σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή σύγκλιση, αποδείξαμε ότι :

Πρόταση 1.11. *Στο $K = \overline{co}\,(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset c_0$, η norm και η ασθενής τοπολογία ταυτίζονται.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

RADON-NIKODYM, KREIN-MILMAN ΚΑΙ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί, οι βασικές έννοιες και οι συμβολισμοί, σχετικά με τα διανυσματικά μέτρα, την Bochner ολοκλήρωση, την Radon-Nikodym ιδιότητα για διανυσματικά μέτρα (γεωμετρική και αναλυτική μορφή), την ιδιότητα Krein-Milman, καθώς επίσης και άλλες σχετικές ιδιότητες. Παρουσιάζονται κεντρικά αποτελέσματα για την Radon-Nikodym ιδιότητα, καθώς και αποτελέσματα που αφορούν την μελέτη της ισοδυναμίας των ιδιοτήτων Radon-Nikodym και Krein-Milman (ως τα μέσα της δεκαετίας του '90). Υπάρχουν τέλος παραδείγματα καθώς και εφαρμογές ορισμένων αποτελεσμάτων. Βιβλία αναφοράς είναι τα [**26**], [**20**], [**25**](κεφ.6), [**8**] (κεφ.5). Οι εργασίες και τα άρθρα αναφέρονται ξεχωριστά.

2.1. Διανυσματικά μέτρα, μετρήσιμες συναρτήσεις, ολοκλήρωμα Bochner και αναπαραστάσιμοι τελεστές (RNP μέρος 1ο)

Έστω σύνολο Ω, Σ μία σ-άλγεβρα ((Ω,Σ) χώρος μέτρου), και ένας χώρος Banach X. Ένα *διανυσματικό μέτρο* m με τιμές στον X, είναι μία απεικόνιση $m : \Sigma \to X$, με $m(\emptyset) = 0$ και αριθμήσιμα προσθετική (ή αλλοιώς σ-προσθετική, που σημαίνει ότι αν $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ανά δύο ξένα υποσύνολα της Σ, τότε $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$, με το άθροισμα να συγκλίνει unconditionally).

Η *κύμανση* του m είναι το σ-προσθετικό μέτρο $|m|$ στην (Ω,Σ) με: $|m|(A) = \sup\{\sum\limits_{\pi} \|m(A_j)\|\}$, όπου το supremum λαμβάνεται πάνω σε όλες τις διαμερίσεις $\pi=\{A_i\}_{i\in\pi} \subset \Sigma$ του A. Το μέτρο m είναι *φραγμένης κύμανσης* αν και μόνο αν $|m|(\Omega) < \infty$.

Έστω μ το Lebesgue μέτρο στο $\Omega = [0, 1]$, $X = L^1[0, 1]$. Τότε $m : \Sigma \to X$, με $m(A) = \chi_A$ είναι ένα διανυσματικό μέτρο και μάλιστα φραγμένης κύμανσης (φυσικά χ_A είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $A \subset [0,1]$).

Αν στην θέση του $L^1[0,1]$ είχαμε τον $L^\infty[0,1]$, τότε η απεικόνιση δεν είναι αριθμήσιμα προσθετική, ενώ όταν η απεικόνιση m παίρνει τιμές στον $L^p[0,1]$, με $1 < p < \infty$, έχουμε διανυσματικό μέτρο όχι όμως φραγμένης κύμανσης.

Ένα διανυσματικό μέτρο φραγμένης κύμανσης m, λέγεται *απολύτως συνεχές* ως προς ένα σ-πεπερασμένο πραγματικό θετικό μέτρο μ (συμβολίζουμε με $m << \mu$), αν και μόνο αν, όταν για κάθε A με μ(A)=0, έχουμε $m(A) = 0$. Ειναι σαφές ότι : $m << |m|$.

Ισχύει η ισοδυναμία :
$(m << \mu) \Leftrightarrow (|m| << \mu) \Leftrightarrow$(για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, όταν $\mu(A) < \delta \Rightarrow |m|(A) < \epsilon$).

Έστω (Ω,Σ,μ) ένας πλήρης χώρος μέτρου και X ένας χώρος Banach. Μια συνάρτηση $f : \Omega \to X$ λέγεται *μετρήσιμη* αν είναι όριο ακολουθίας $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, απλών συναρτήσεων της μορφής $f_n = \sum_{i=1}^{k} x_{n,i}\chi_{A_{n,i}}$ με $x_{n,i} \in X$ και $A_{n,i} \in \Sigma$ για κάθε i ($\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, $\mu-$σχεδόν παντού).

Θεωρημα 2.1. *(Pettis, 1938, [**46**]) Μία συνάρτηση $f : \Omega \to X$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω:*

i. η συνάρτηση x^*f είναι μετρήσιμη, για κάθε $x^* \in X^*$, και
ii. η f είναι σχεδόν separably valued
(δηλ. υπάρχει $A_0 \in \Sigma$ με $\mu(A_0) = 0$ έτσι ώστε το σύνολο $\{f(t) : t \notin A_0\}$ να είναι διαχωρίσιμο).

Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \to X$, ονομάζεται *Bochner ολοκληρώσιμη*, αν υπάρχει ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \to X$ τέτοια ώστε : $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0$.

Τότε αν $A \in \Sigma$, το ολοκλήρωμα της f στο A ορίζεται ως :
$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu,$$
$$\text{με} \quad \int_A f_n d\mu = \int_A \left(\sum_{i\in I} x_i\chi_{A_i}\right) d\mu = \sum_{i\in I} x_i \mu(A_i \cap A),$$
όταν $f_n = \sum_{i\in I} x_i\chi_{A_i}, \;\; x_i \in X, \;\; I \subset \mathbb{N}, \;\; \#I < \infty$.

Προταση 2.2. *([**26**], ΙΙ.2. Θ.2) Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \to X$, είναι Bochner ολοκληρώσιμη, αν και μόνο αν, $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$.*

Αν $1 \le p < \infty$, το σύνολο όλων των (κλάσεων ισοδυναμίας των) Bochner ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \to X$ τέτοιες ώστε :

$$\left(\int_\Omega \|f\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ ,$$

εφοδιασμένο με την νόρμα : $\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, είναι χώρος Banach και τον συμβολίζουμε με $L^p_X(\mu)$.

Αντίστοιχα έχουμε τον χώρο Banach $L^\infty_X(\mu)$, όλων των (κλάσεων ισοδυναμίας των) ουσιαστικά φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \to X$ με νόρμα : $\|f\|_\infty = esssup\|f\|$.

Επίσης αν $T : X \to Y$, φραγμένος τελεστής και $f : \Omega \to X$ Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε : $T\left(\int_\Omega f d\mu\right) = \int_\Omega T f d\mu$.

Οι ιδιότητες του Bochner ολοκληρώματος είναι ανάλογες με τις ιδιότητες του ολοκληρώματος στο $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα ισχύει το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue και τα συνήθη αποτελέσματα παραγώγισης του ολοκληρώματος. Δεν είναι όμως ακριβώς ίδιες.

Αν (Ω,Σ,μ) πλήρης χώρος μέτρου, με μ πεπερασμένο πραγματικό θετικό μέτρο, τότε το Θεώρημα Radon-Nikodym μας εξασφαλίζει ότι, αν το πραγματικό μέτρο λ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο μ, τότε υπάρχει $f \in L^1(\mu)$, τέτοια ώστε : $\lambda(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \Sigma$. Το Θεώρημα Radon-Nikodym δεν ισχύει για διανυσματικά μέτρα, όπως γίνεται φανερό μέσω των παραδειγμάτων που ακολουθούν τον παρακάτω ορισμό.

(Σημειώνουμε ότι το ίδιο συμβαίνει με το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, που σχετίζεται άμεσα με το Θεώρημα Radon-Nikodym και στην πραγματική περίπτωση δίνει ότι $(L^1(\mu))^* = L^\infty(\mu)$ ([**26**], κεφ. 3).

Ορισμος 2.3. *([**8**], ορισμός 5.4) Ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο σύνολο K σε έναν χώρο Banach X, έχει την* ιδιότητα Radon-Nikodym (RNP) *αν : για κάθε μετρικοποιήσιμο χώρο (Ω,Σ), μ ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα Σ και m ένα διανυσματικό μέτρο με $\frac{m(A)}{\mu(A)} \in K$, όταν $A \in \Sigma$ και $\mu(A) \neq 0$, υπάρχει μοναδική $f \in L^1_X(\mu)$ τέτοια ώστε : $m(A) = \int_A f(\omega) d\mu(\omega)$.*

Ο χώρος Banach X έχει την RNP όταν η μοναδιαία μπάλλα του έχει την RNP.

Αφού το σύνολο K είναι φραγμένο, το ότι $\frac{m(A)}{\mu(A)} \in K$, σημαίνει ότι το m είναι φραγμένης κύμανσης και ότι $m < < \mu$. Η συνάρτηση f ονομάζεται η *Radon-Nikodym παράγωγος* του m ως προς το μ.

Παραδειγμα 2.4. *([**26**], σελ. 60) Αν Ω=[0,1], Σ η άλγεβρα των Borel συνόλων, μ το Lebesgue μέτρο και $X = c_0$, ορίζουμε το διανυσματικό μέτρο $m : \Sigma \to c_0$ με*

$$m(A) = \left(\int_A 1dt, \int_A \sin(2t\pi)dt, ..., \int_A \sin(2^n t\pi)dt, ... \right)$$

Το λήμμα των Riemann-Lebesgue μας εξασφαλίζει ότι $m(A) \in c_0$ για κάθε $A \in \Sigma$.

Επειδή $\|\sin x\| \leq 1$, έχουμε ότι $\|m(A)\|_0 \leq \mu(A)$ και συνεπώς το m είναι αριθμήσιμα προσθετικό, απολύτως συνεχές ως προς το μ και φραγμένης κύμανσης. Όμως το m δεν έχει Radon-Nikodym παράγωγο ως προς το μ, αφού η μόνη δυνατή επιλογή θα ήταν η $f : [0,1] \to c_0$, με $f(t) = (1, \sin(2t\pi), ..., \sin(2^n t\pi), ...)$, ενώ το σύνολο τιμών της δεν περιέχεται στον c_0.

Παραδειγμα 2.5. *([**8**], σελ. 102) Αν Ω,Σ και μ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα και $X = L^1(\mu)$, ορίζουμε το διανυσματικό μέτρο $m : \Sigma \to L^1(\mu)$ με $m(A) = \chi_A$, το οποίο είναι φραγμένης κύμανσης και μάλιστα $|m| = \mu$.*

Έστω ότι υπήρχε $f \in L^1_X(\mu) = L^1_{L^1(\mu)}(\mu)$ τέτοια ώστε :

$$m(A) = \int_A f d\mu = \int_A f(\omega)d\mu(\omega).$$

Τότε επειδή $f : \Omega \to L^1(\mu)$, έχουμε ότι $f(\omega) = f(\omega, t)$ με $t \in [0,1]$ και μπορούμε να θεωρήσουμε την f ως μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο [0,1]×[0,1]. Παρατηρούμε ότι για κάθε A, B στην Σ, έχουμε :

$$\mu(A \cap B) = \int_B \chi_A(t)dt = \int_B m(A)(t)dt = \int_B \int_A f(\omega, t)d\omega dt.$$

Οπότε, αν $A \cap B = \emptyset$, έχουμε : $\int_B \int_A f(\omega, t)d\omega dt = 0$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(\omega, t)$ μηδενίζεται εκτός της διαγωνίου του μοναδιαίου τετραγώνου στο $\mathbb{R}^2$. Τότε όμως $\int_{[0,1]^2} f ds^2 = 0$, ενώ $\int_{[0,1]} \int_{]0,1]} f(\omega, t)d\omega dt = 1$ και καταλήγουμε σε αντίφαση.

Τα δύο προηγούμενα παραδείγματα αποδεικνύουν ότι οι χώροι c_0 και $L^1(\mu)$ δεν έχουν την RNP.

Με $\mathcal{P}(\mu)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας στον $L^1(\mu)$, δηλαδή :

$$\mathcal{P}(\mu) = \{\phi \in L^1(\mu) : 0 \leq \phi, \ \int \phi d\mu = 1\}$$

και αν A μετρήσιμο, με $\mu(A) > 0$, το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\phi \in \mathcal{P}(\mu)$, με φορέα το σύνολο A, το συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(\mu, A)$.

Ένας τελεστής $T : L^1(\mu) \to X$ λέγεται *αναπαραστάσιμος* αν υπάρχει συνάρτηση $g \in L^\infty(\mu)$, τέτοια ώστε : $Tf = \int fgd\mu$, για κάθε $f \in L^1(\mu)$.

Η RNP μπορεί να εκφραστεί με την αναπαραστασιμότητα των τελεστών, μέσω της :

Πρόταση 2.6. *([**8**], σελ. 103) Ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο σύνολο K σε έναν χώρο Banach X, έχει την RNP, αν και μόνο αν, κάθε φραγμένος τελεστής $T : L^1(\mu) \to X$ τέτοιος ώστε $T\phi \in K$, όταν $\phi \in \mathcal{P}(\mu)$, είναι αναπαραστάσιμος.*

2.2. Διανυσματικά martingales και dentability (RNP μέρος 2ο)

Έστω (Ω,Σ,μ) πλήρης χώρος μέτρου, Σ' μία σ-υποάλγεβρα της σ-άλγεβρας Σ και $f \in L^1_X(\mu)$.

Δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς την Σ', ονομάζεται μία Σ'-μετρήσιμη συνάρτηση g (δηλ. $g \in L^1_X(\mu|_{\Sigma'})$), τέτοια ώστε :

$$\int_E g d\mu = \int_E f d\mu, \text{ για κάθε } E \in \Sigma'.$$

Την συμβολίζουμε με $\mathbb{E}(f|\Sigma')$.

Η συνάρτηση $\mathbb{E}(f|\Sigma')$, υπάρχει για κάθε $f \in L^1_X(\mu)$ και αν $1 \le p < \infty$, τότε : $\|\mathbb{E}(f|\Sigma')\|_p \le \|f\|_p$, συνεπώς ο τελεστής $\mathbb{E}(\cdot|\Sigma')$ είναι προβολή συστολής στον $L^1_X(\mu)$.

Έστω $\mathcal{T}$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο δεικτών και $(\Sigma_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ ένα δίκτυο σ-υποαλγεβρών της Σ, τέτοιο ώστε : $\Sigma_\tau \subset \Sigma_{\tau'}$ όταν $\tau \le \tau'$. Για $1 \le p < \infty$, το δίκτυο $(f_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}} \subset L^1_X(\mu)$ ονομάζεται *διανυσματικό martingale* αν : $\mathbb{E}(f_{\tau'}|\Sigma_\tau) = f_\tau$ για κάθε $\tau \le \tau'$.

Σημειώνουμε πως στην εργασία αυτή, τα διανυσματικά martingales που χρησιμοποιούμε έχουν σύνολο δεικτών ένα υποσύνολο των φυσικών. Έτσι για τις σ-άλγεβρες έχουμε $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset ...$ και η προηγούμενη σχέση για την δεσμευμένη μέση τιμή, γίνεται: $\mathbb{E}(f_{n+1}|\Sigma_n) = f_n$

Παράδειγμα 2.7. *([**26**], σελ. 124) Έστω Ω=[0,1), μ το Lebesgue μέτρο στο [0,1) και ακολουθία συναρτήσεων $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mu) = X$, με :*

$$x_1 = \chi_{[0,1)}, \qquad x_2 = 2\chi_{[0,\frac{1}{2})},\ x_3 = 2\chi_{[\frac{1}{2},1)},$$
$$\text{και } x_i = 2^{k-1}\chi_{I_{k,i}} \text{ με } i = 2^{k-1}, ...2^k - 1,\ 1 \le k,$$

όπου $I_{k,i}$ είναι τα δυαδικά διαστήματα του [0,1), τάξης k.
Τότε ισχύει : $x_n = \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2n+1})$, για κάθε n φυσικό.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_X(\mu)$ με :

$$f_1 = x_1\chi_{[0,1)}, \qquad f_2 = x_2\chi_{[0,\frac{1}{2})} + x_3\chi_{[\frac{1}{2},1)}, \text{ και } f_k = \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} x_i\chi_{I_{k,i}}$$

για k φυσικό.

Θέτοντας Σ_k την σ-άλγεβρα που παράγεται από τα διαστήματα $I_{k,i}$, για $i = 2^{k-1}, ...2^k - 1$, έχουμε ότι το σύνολο (f_k, Σ_k) είναι ένα martingale στον $L^1_X(\mu) = L^1_{L^1(\mu)}(\mu) = L^1_{L^1}(\mu)$.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα 1-bush στον $L^1_X(\mu)$, αφού $\|x_n\| = 1$, $\|x_n - x_{2n}\| = \|x_n - x_{2n+1}\| = 1$ και $x_n = \frac{1}{2}(x_{2n}+x_{2n+1})$, για κάθε n.

Επίσης, επειδή για κάθε n έχουμε $\|f_n\|_{L^1} = 1$ και $\|f_n - f_{n+1}\|_{L^1} = 1$, το martingale $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελείται από ομοιόμορφα φραγμένες συναρτήσεις στον $L^1_{L^1}(\mu)$ και δεν συγκλίνει ως προς την νόρμα του $L^1_{L^1}(\mu)$.

Έστω K κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X, $x^* \in X^*$, $\alpha > 0$ και $M = \sup\{x^*(x) : x \in K\}$. Το σύνολο $\{y \in K : x^*(y) \geq M - \alpha\}$ ονομάζεται *slice του K ως προς x^* και α*, και συμβολίζεται με $S(K, x^*, \alpha)$. Χρησιμοποιώντας τριγωνική ανισότητα και τον ορισμό του slice, εύκολα έχουμε το χρήσιμο :

Λημμα 2.8. *([**8**], Λ. 5.14) Έστω σύνολο K και f, g άνω φραγμένες πραγματικές συναρτήσεις στο K, τέτοιες ώστε*
$$\delta = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in K\} < \tfrac{\alpha}{2} \text{ για } \alpha > 0.$$
Τότε $S(K, g, \alpha - 2\delta) \subset S(K, f, \alpha)$.

Μάλιστα το λήμμα ισχύει και στην γενικότερη περίπτωση, όταν δηλαδή το γραμμικό συναρτησοειδές αντικατασταθεί με πραγματική συνάρτηση.

Ορισμος 2.9. *Το κλειστό, κυρτό, φραγμένο σύνολο K ονομάζεται* dentable *αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει slice του K με διάμετρο μικρότερη του ε.*

Αν το σύνολο K είναι dentable και το slice $S(K, x^*, \alpha)$ έχει διαμέτρο μικρότερη του ε, τότε για κάθε $x \in S(K, x^*, \alpha)$ έχουμε:
$$\overline{co}(K \setminus B(x, \varepsilon)) \subset \overline{co}(K \setminus S(K, x^*, \alpha)) \subset (x^*)^{-1}(-\infty, M - \alpha).$$
Αφού $M - \alpha \leq x^*(x)$ συμπεραίνουμε ότι : $x \notin \overline{co}(K \setminus B(x, \varepsilon))$.

Αν $\varepsilon > 0$ και $x \in K$ τέτοιο ώστε $x \notin \overline{co}(K \setminus B(x, \varepsilon))$, το Θεώρημα Hahn-Banach μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει $x^* \in X^*$, τέτοιο ώστε $\|x^*\| = 1$ και $M < r < x^*(x)$ για κάποιο $r \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $\alpha = M - r$, έχουμε ότι $S(K, x^*, \alpha) \subset B(x, \varepsilon) \cap K$ και συνεπώς το slice $S(K, x^*, \alpha)$ έχει διαμέτρο μικρότερη του ε.

Έτσι ο προηγούμενος ορισμός είναι ισοδύναμος με τον :

Ορισμος 2.10. *Το κλειστό, κυρτό, φραγμένο σύνολο K ονομάζεται* dentable *αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in K$, τέτοιο ώστε :*

$$x \notin \overline{co}(K \setminus B(x,\varepsilon)).$$

Χρήσιμη συνέπεια του προηγούμενου ορισμού είναι το ότι, αν το κλειστό, κυρτό, φραγμένο σύνολο K είναι *non-dentable*, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε για κάθε $x \in K$, να έχουμε $x \in \overline{co}(K \setminus B(x,\varepsilon))$.

Σημειώνουμε ότι το σημείο $y \in K$ ονομάζεται *denting* αν περιέχεται σε slices αυθαίρετα μικρής διαμέτρου. Ένα σημείο του K καλείται *σημείο συνέχειας* όταν η ταυτοτική απεικόνιση $i : (X,w) \to (X, \|\cdot\|)$ είναι συνεχής στο y. Επειδή στην περίπτωση που το σημείο είναι denting, η ταυτοτική απεικόνιση $i : (X,w) \to (X,\|\cdot\|)$ είναι συνεχής στο y, το y είναι σημείο συνέχειας.

Παρατηρώντας ότι στον c_0 ισχύει : $e_i = \frac{1}{2}(e_i + e_j) + \frac{1}{2}(e_i - e_j)$, ενώ $\|e_i - \frac{1}{2}(e_i + e_j)\| = \|e_i - \frac{1}{2}(e_i - e_j)\| = \frac{1}{2}$, για $i \neq j$, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η μοναδιαία μπάλλα του c_0 είναι non-dentable. Ένα άλλο παράδειγμα ενός non-dentable συνόλου είναι το ακόλουθο:

Παραδειγμα 2.11. *([**26**], σελ. 135) Έστω $K = B_{L^\infty[0,1]}$, $f \in K$ και $\epsilon > 0$.*

Αν $\|f\|_\infty > \varepsilon$, τότε για κάθε ακέραιο m, υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα $E_1, E_2, ..., E_m$, ξένα ανά δύο, τέτοια ώστε : $\|f\chi_{E_i}\| > \epsilon$, για $i = 1,2,...,m$, και αν $f_i = f - f\chi_{E_i}$, τότε $\|f - f_i\| > \varepsilon$ για $i = 1,2,...,m$. Επίσης $\|f - \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{m} f_i\|_\infty \leq \frac{1}{m}\|f\|_\infty$, συνεπώς (διαλέγοντας κατάλληλο m) $f \in \overline{co}(K \setminus B(f,\varepsilon))$.

Αν $\|f\|_\infty \leq \varepsilon < \frac{1}{3}$, θέτοντας $f_1 = f + 2\varepsilon\chi_{[0,1]}$ και $f_2 = f - 2\varepsilon\chi_{[0,1]}$, έχουμε ότι $\|f_i\|_\infty < 3\varepsilon < 1$, $\|f - f_i\| = 2\varepsilon > \varepsilon$ γιά $i = 1,2$ και $f = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2 \in \overline{co}(K \setminus B(f,\varepsilon))$.

Άρα το σύνολο K είναι non-dentable.

Η σύγκλιση των διανυσματικών martingales και η έννοια της dentability είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με την RNP, όπως διαπιστώνεται από το παρακάτω :

Θεωρημα 2.12. *([**8**], Θεωρ. 5.8) Έστω K κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

i. κάθε κλειστό, κυρτό υποσύνολο του K είναι dentable
ii. το K έχει την RNP

iii. *κάθε martingale* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *(σε χώρο πιθανότητας* (Ω,Σ,μ) *) τέτοιο ώστε* $f_n(\omega) \in K$ *για κάθε* n *και κάθε* ω, *συγκλίνει σχεδόν παντού.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.12 οφείλεται στις εργασίες των : Rieffel ($i \Rightarrow ii$, [**48**]), Maynard ($ii \Rightarrow i$, [**40**]), Davis-Phelps ($ii \Rightarrow i$, [**24**]), Huff ($ii \Rightarrow i$, [**32**]), Chatterji ($ii \Leftrightarrow i$, [**21**]).

Τα παραδείγματα αυτού του κεφαλαίου, για τους χώρους $L^1[0,1]$ και c_0, είναι χαρακτηριστικά για το θεώρημα 2.12. Ειδικά το παράδειγμα 2.5, σχετίζεται άμεσα με το :

Θεωρημα 2.13. *([**26**], V.2.Πορ.5) Δεν υπάρχει χώρος Banach X με την RNP, ο οποίος περιέχει ένα φραγμένο δ-bush.*

Ισοδύναμα : όταν ο X περιέχει ένα φραγμένο δ-bush τότε δεν έχει την RNP (γιατί είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε martingale που δεν συγκλίνει στην L^1-*νόρμα και συνεπώς δεν συγκλίνει σχεδόν παντού).*

Σημαντικό επίσης είναι το παρακάτω

Θεωρημα 2.14. *(Bourgain, 1980, [**13**]) Υπάρχει χώρος Banach X χωρίς την RNP, του οποίου η μοναδιαία μπάλλα δεν περιέχει γενικευμένο ε-δυαδικό δέντρο γιά κάθε* $\epsilon > 0$.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα χώρων Banach χωρίς την RNP είναι οι $L^1(0,1)$, c_0 και l^∞.

Οι αυτοπαθείς χώροι (Philips, 1940,1943), οι διαχωρίσιμοι δυικοί (Dunford-Pettis, 1940), οι $l^1(\Gamma)$ για κάθε σύνολο Γ (Uhl, 1977) και οι χώροι με bounded complete Schauder βάση (Dunford, 1936), έχουν την RNP.

2.3. Ιδιότητα Krein-Milman, η RNP συνεπάγεται την KMP

Έστω L κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X. Το στοιχείο $x \in L$ ονομάζεται *ακραίο σημείο* του συνόλου L, όταν το x δεν γράφεται ως κυρτός συνδυασμός (διαφορετικών) στοιχείων του L (δηλαδή όταν $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ με $x_1, x_2 \in L$ και $0 < \lambda < 1$, τότε $x_1 = x_2 = x$). Το σύνολο των ακραίων σημείων ενός κυρτού συνόλου L το συμβολίζουμε με $extL$ και το επόμενο (κλασικό) θεώρημα φανερώνει τον κεντρικό ρόλο των ακραίων σημείων ενός συνόλου για την δομή του:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.15. *(Krein-Milman) Έστω X ένας τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Αν L είναι συμπαγές κυρτό σύνολο του X, τότε το L είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων του σημείων. Ειδικότερα κάθε κυρτό συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού τοπολογικού διανυσματικού χώρου έχει ένα ακραίο σημείο.*

(Ένας γραμμικός τοπολογικός χώρος X, λέγεται *τοπικά κυρτός*, αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε περιοχή $U(x)$ του x, υπάρχει κυρτή περιοχή $V(x)$ του x, τέτοια ώστε $V(x) \subset U(x)$. Φυσικά κάθε χώρος Banach είναι τοπικά κυρτός στην ασθενή τοπολογία.)

Στους χώρους Banach πεπερασμένης διάστασης, κάθε κλειστό, κυρτό, φραγμένο σύνολο L είναι συμπαγές, συνεπώς έχει ακραία σημεία και ισχύει : $L = \overline{co}(extL)$.

Στους απειροδιάστατους χώρους Banach, ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο σύνολο L, δεν είναι απαραίτητα συμπαγές και το Θεώρημα Krein-Milman δεν ισχύει για L κλειστό, κυρτό, φραγμένο σύνολο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η μοναδιαία μπάλλα του c_0, όντας κυρτό, κλειστό, φραγμένο όχι όμως συμπαγές σύνολο (θυμίζουμε ότι $e_i = \frac{1}{2}(e_i+e_j)+\frac{1}{2}(e_i-e_j)$, όπου $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, η συνήθης βάση του c_0).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.16. *Το σύνολο K έχει την* ιδιότητα Krein-Milman (KMP), *αν κάθε κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο L του K είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων του σημείων. Ισοδύναμα : κάθε κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο L του K έχει ακραία σημεία.*

Η RNP και η KMP είναι ιδιότητες που έχουν τα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα αυτοπαθών (reflexive) χώρων ή κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα διαχωρίσιμων δυικών, ενώ ταυτόχρονα η B_{c_0} και η $B_{L^1[0,1]}$ δεν έχουν καμία από αυτές τις ιδιότητες.

Το 1973 ο J. Diestel θέτει το εξής ερώτημα :

Είναι η RNP ισοδύναμη με την KMP, στα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα ενός χώρου Banach X;

Στο τέλος της ίδιας χρονιάς ο J. Lindenstrausss χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Bishop-Phelps, αποδεικνύει ότι η RNP συνεπάγεται την KMP.

Σημειώνουμε ότι η απόδειξη του J. Lindenstrausss έγινε αρχικά για τα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα του l^1 ([**38**], 1961), ενώ οι Bessaga-Pelzynski έδωσαν μία γενίκευση για τα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα διαχωρίσιμων δυικών ([**10**], 1961). Η απόδειξη για την γενική περίπτωση δημοσιεύθηκε από τον Phelps ([**47**], 1974).

Στην συνέχεια παραθέτουμε τα Θεωρήματα Bishop-Phelps (χωρίς απόδειξη) και J. Lindenstrausss (με την απόδειξη από το [**8**]).

Θεωρημα 2.17. *(Bishop-Phelps, 1961,* [**11**]*) Έστω K κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X. Το σύνολο των συναρτησοειδών που πιάνουν την μέγιστη τιμή τους στο K, είναι norm-πυκνό στον X^*.*

Face ενός συνόλου K, είναι ένα υποσύνολο F του K, τέτοιο ώστε όταν ο κυρτός συνδυασμός των στοιχείων x, y του K ανήκει στο F, τότε $x, y \in F$. Η face μιάς face είναι face του αρχικού συνόλου, και τομές (μη κενών) faces είναι face. Τα ακραία σημεία ενός συνόλου είναι faces με ένα μόνο στοιχείο. Αν το γραμμικό συναρτησοειδές $x^* \in X^*$, πιάνει το μέγιστό του στο σύνολο K, τότε το υποσύνολο του K, στα στοιχεία του οποίου το x^* πιάνει το μέγιστό του, είναι κλειστή face του K.

Θεωρημα 2.18. *(Lindenstrauss, 1973,* [**38**]*) Κάθε κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X με την RNP είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων του σημείων.*

Αποδειξη. Έστω K το κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο του χώρου Banach X. Κατασκευάζουμε faces $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του K, έτσι ώστε F_1 είναι κλειστή face του K, κάθε F_{n+1} είναι face της F_n και η norm-διάμετρος των F_n τείνει στο 0. Τότε θα έχουμε ότι η $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μονοσύνολο και ακραίο σημείο του K.

Η κατασκευή γίνεται επαγωγικά ως εξής. Αφού το K έχει την RNP η κλειστή face F_n είναι dentable. Έστω το slice S_n της F_n, που καθορίζεται από το συναρτησοειδές x^* και το οποίο έχει διάμετρο μικρότερη του $\frac{1}{n}$. Από το Θεώρημα Bishop-Phelps το x^* μπορεί να προσεγγιστεί από ένα συναρτησοειδές z^* το οποίο πιάνει την μέγιστη τιμή του στην F_n. Έτσι το z^* ορίζει την face F_{n+1} του F_n και από το λήμμα 3.6 έχουμε $F_{n+1} \subset S_n \subset F_n$.

Αν $K \neq \overline{co}(extK) = K'$ τότε υπάρχει $x \in K$ που διαχωρίζεται από το K' μέσω ενός γραμμικού συναρτησοειδούς. Χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα Bishop-Phelps και το λήμμα 3.6, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κλειστή face F του K, ξένη με το K'. Από την προηγούμενη κατασκευή έχουμε ότι υπάρχει ακραίο σημείο της F, που είναι φυσικά ακραίο σημείο του K. Αυτό αντιβαίνει στον ορισμό του K', συνεπώς $K = \overline{co}(extK)$. □

2.4. Η RNP είναι ισοδύναμη με την KMP στους διαχωρίσιμους δυικούς (1975), στα Banach lattices (1981), όταν ο χώρος είναι ισόμορφος με το τετράγωνό του (1985)

Το αν η ύπαρξη της KMP συνεπάγεται την ύπαρξη της RNP στα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα ενός χώρου Banach X παραμένει ανοιχτό ερώτημα έως σήμερα.

Υπήρξαν όμως σημαντικά επι μέρους (καταφατικά) αποτελέσματα στο προηγούμενο ερώτημα στην εικοσαετία ανάμεσα στις αρχές της δεκαετίας του 1970 και τις αρχές της δεκαετίας του 1990.

Χρησιμοποιώντας το :

Θεωρημα 2.19. *(Stegall, 1975,* [**55**]*) Αν X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, τέτοιος ώστε ο X^* να μην είναι διαχωρίσιμος τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα υποσύνολο D της μοναδιαίας σφαίρας του X^*, το οποίο είναι w^*-ομοιομορφικό με το σύνολο Cantor Δ, ένα σύστημα Haar $\{h_{n,i}\}$ για το Δ και μία ακολουθία $\{x_{n,i}\} \subset X$ με $\|x_{n,i}\| < 1 + \varepsilon$ τέτοιο ώστε αν $T : X \to C(\Delta)$ είναι γραμμικός τελεστής με $T(x)x^* = x^*(x)$ τότε : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{i=0}^{2^n-1} \|Tx_{n,i} - h_{n,i}\| \right) < \varepsilon$.*

οι Huff και Morris, την ίδια χρονιά, αποδεικνύουν :

Θεωρημα 2.20. *(Huff-Morris, 1975,* [**33**]*) Κάθε δυικός χώρος Banach με την KMP έχει τη RNP.*

και το 1981 οι Bourgain, Talagrand το :

Θεωρημα 2.21. *(Bourgain-Talagrand, 1981,* [**19**]*) Αν ο χώρος E είναι ένα Banach lattice και έχει την KMP, τότε έχει και την RNP.*

Σημειώνουμε ότι w^*-ομοιομορφικό σημαίνει ότι ο ομοιομορφισμός αναφέρεται στην w^*-τοπολογία του X^*. Ως σύνολο Cantor Δ, εννοείται ο τοπολογικός χώρος $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, το αριθμήσιμο γινόμενο του δισυνόλου $\{0,1\}$, εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο.

Πιο γνωστό ως σύνολο Cantor, είναι το $C = \{x \in [0,1] : x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}\}$ με $\alpha_i = 0$ ή 2. Τα δύο σύνολα είναι ομοιομορφικά μέσω της:

$$\phi : C \to \Delta, \text{ με } \phi(x) = \left(\tfrac{\alpha_1}{2}, \tfrac{\alpha_2}{2}, ...\right), \text{ όταν } x = \sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{\alpha_i}{3^i}.$$

Ένα σύστημα Haar για το Δ είναι μία ακολουθία συναρτήσεων $\{h_{n,i}\} \subset C(\Delta)$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, ..., 2^n - 1$, με $h_{n,i} = \chi_{A_{n,i}}$ (η χαρακτηριστική συνάρτηση του $A_{n,i}$, τέτοια ώστε :

$A_{0,0} = \Delta$, κάθε $A_{n,i}$ είναι μη κενό ανοιχτό και κλειστό, για κάθε n έχουμε $\bigcup\limits_{i=0}^{2^n-1} A_{n,i} = \Delta$, $A_{n,i} = A_{n+1,2i} \cap A_{n+1,2i+1}$, τα $A_{n,i}$ είναι ανά δύο ξένα και για κάθε επιλογή δεικτών i_n με $0 \leq i_n \leq 2^{n-1}$ έχουμε ότι η τομή $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_{n,i_n}$ είναι είτε κενή είτε μονοσύνολο.

Banach lattice καλείται ένας μερικά διατεταγμένος (πραγματικός) χώρος Banach, με μία μερική διάταξη ($\leq$), ώστε :

i. όταν $x \leq y$ τότε $x + z \leq y + z$, για κάθε $x, y, z \in X$
ii. $0 \leq ax$, για κάθε $x \in X$ με $0 \leq x$, και κάθε $a \in \mathbb{R}^+$
iii. για κάθε $x, y \in X$, υπάρχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα τους $(x \vee y)$ και ένα μέγιστο κάτω φράγμα τους $(x \wedge y)$
iv. $\|x\| \leq \|y\|$, όταν $|x| \leq |y|$ (όπου $|x| = x \vee (-x)$)

Κάθε χώρος Banach με unconditional βάση $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και σταθερά της unconditionality K=1, είναι ένα Banach lattice, με μερική διάταξη επαγόμενη από την βάση ως εξής : $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n \geq 0$, αν και μόνο αν $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επίσης κάθε χώρος $L^p(\mu)$ για $1 \leq p \leq \infty$ και κάθε χώρος $C(K)$ είναι Banach lattice, με την σημειακά επαγόμενη μερική διάταξη, η οποία σημειωτέον είναι διαφορετική από αυτήν που επάγεται από την unconditional βάση (όταν αυτή υπάρχει, π.χ. στους χώρους $L^p(\mu)$ με $1 < p < \infty$ και μ όχι γνήσια ατομικό μέτρο).

Λέμε ότι ο χώρος Banach Y *εμφυτεύεται-$\frac{3}{4}$* στον χώρο Banach X, αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντος γραμμικός τελεστής από τον Y στον X, που απεικονίζει κλειστά, κυρτά, φραγμένα σύνολα του Y σε κλειστά, κυρτά, φραγμένα σύνολα του X.

Στο [**53**] το 1985, ο W. Schachermayer αποδεικνύει ότι :

1. Αν ο χώρος Banach X δεν έχει την RNP τότε ο χώρος Banach $l^2(X)$ δεν έχει την KMP, και
2. Αν ο $X \times X$ εμφυτεύεται-$\frac{3}{4}$ στον X, τότε ο $l^2(X)$ εμφυτεύεται-$\frac{3}{4}$ στον X

και συνδυάζοντας τα δύο αυτά αποτελέσματα αποδεικνύει το :

Θεώρημα 2.22. *(Schachermayer, 1985,* [**53**]*) Σε έναν χώρο Banach X, ο οποίος είναι ισόμορφος με το τετράγωνό του, η RNP και η KMP είναι ισοδύναμες.*

2.5. Η RNP είναι ισοδύναμη με την KMP στα strongly regular σύνολα (1985), στα υποσύνολα χώρων με unconditional βάση (1985), point of continuity property

Ένα από τα ισχυρότερα αποτελέσματα που αφορούν κυρτά σύνολα για τα οποία η KMP συνεπάγεται την RNP, οφείλεται στον W. Schachermayer ο οποίος το 1987 στο [**54**], αποδεικνύει ότι:

Θεωρημα 2.23. *(Schachermayer, 1987,* [**54**]*) Αν ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο K του χώρου Banach X είναι strongly regular και δεν έχει την RNP, τότε υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό υποσύνολο L του K που δεν έχει ακραία σημεία.*

Ορισμος 2.24. *(*[**28**]*) Το σύνολο K λέγεται* strongly regular*, αν για κάθε μη κενό υποσύνολο L του K και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κυρτός συνδυασμός από slices του L διαμέτρου μικρότερης του ε (δηλαδή υπάρχουν θετικοί αριθμοί $a_1, a_2, ..., a_n$ με $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ και slices $S_1, S_2, ..., S_n$ του L, τέτοια ώστε $diam\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i S_i\right) < \varepsilon$).*

Το σύνολο K είναι strongly regular, αν και μόνο αν, κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : L^1(\mu) \to X$ με $T(\mathcal{P}(\mu) \subset K$, είναι strongly regular.

Ορισμος 2.25. *(*[**28**]*) Ο φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : L^1(\mu) \to X$ λέγεται* strongly regular*, όταν απεικονίζει ασθενώς συγκλίνοντα δίκτυα του $\mathcal{P}(\mu)$ σε norm συγκλίνοντα δίκτυα στον X (δηλαδή αν $(f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(\mu)$ και $f_i \xrightarrow{w} f$, τότε $Tf_i \xrightarrow{\|\cdot\|} Tf$).*

Στο ίδιο άρθρο [**54**] αποδεικνύεται επισης :

Πορισμα 2.26. *(Schachermayer, 1987,* [**54**]*) Αν K είναι κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-RNP σύνολο ενός χώρου Banach X με unconditional βάση, τότε υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό υποσύνολο L του K χωρίς ακραία σημεία.*

Ορισμος 2.27. *(*[**28**]*) Το σύνολο K έχει την* point of continuity ιδιότητα (PCP)*, αν για κάθε υποσύνολο L του K και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα (σχετικά) ασθενώς ανοιχτό υποσύνολο W του L με διάμετρο μικρότερη του ε.*

Τούτο είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε μη κενό, ασθενώς κλειστό υποσύνολο L του K, η ταυτοτική απεικόνιση $i : (L, w) \to (L, \|\cdot\|)$, έχει ένα τουλάχιστον σημείο συνέχειας.

Το σύνολο K έχει την *convex point of continuity ιδιότητα (CPCP)*, αν για κάθε *κυρτό* υποσύνολο L του K και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα (σχετικά) ασθενώς ανοιχτό υποσύνολο W του L με διάμετρο μικρότερη του ε, ή ισοδύναμα, όταν η ταυτοτική απεικόνιση $i : (L, w) \to (L, \|\cdot\|)$ έχει ένα σημείο συνέχειας, όπου L μη κενό κυρτό, ασθενώς κλειστό υποσύνολο του K.

Η απόδειξη του Πορίσματος 2.26 στην περίπτωση που το K έχει την (CPCP), βασίζεται στο Θεώρημα 2.23 και στην :

Πρόταση 2.28. *([**28**], Λ.ΙΙ.1, Παρ. ΙΙΙ.1) Αν το σύνολο K έχει την CPCP τότε είναι strongly regular.*

Η απόδειξη στην περίπτωση που το K δεν έχει την (CPCP), γίνεται μέσω της κατασκευής ενός δ-approximate bush στον X, το οποίο δίνει την δυνατότητα να ορισθεί ένας γραμμικός τελεστής $T : L^1(\mu) \to X$ (όπου μ ένα μέτρο πιθανότητας σε ένα σύνολο Ω), έτσι ώστε το σύνολο $\overline{T(\mathcal{P}(\mu)}$ να είναι κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο του X χωρίς ακραία σημεία.

Φανερά, αν το σύνολο K είναι dentable, τότε έχει την PCP, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει ([**18**]).

Αν το σύνολο K έχει την PCP τότε έχει την CPCP. Όμως υπάρχει σύνολο K με την CPCP χωρίς να έχει την PCP ([**6**] και [**29**]).

Επίσης ένα σύνολο K μπορεί να είναι strongly regular χωρίς να έχει την PCP ([**6**] και [**30**]), ενώ λόγω της Πρότασης 2.28 αν το σύνολο K δεν είναι strongly regular τότε δεν έχει την PCP.

Αφού, όταν το κλειστό, κυρτό, φραγμένο, σύνολο $K \subset X$ είναι non-RNP και έχει την PCP (συνεπώς είναι strongly regular) τότε υπάρχει κλειστό, κυρτό, υποσύνολο L του K χωρίς ακραία σημεία (δηλαδή PCP+nonRNP⇒nonKMP), η μελέτη της ισοδυναμίας της RNP και της KMP ανάγεται στην μελέτη των non-RNP συνόλων, στα υποσύνολα των οποίων η RNP είναι ισοδύναμη με την PCP.

Αργότερα θα είναι χρήσιμος ο παρακάτω :

Ορισμος 2.29. *Το σύνολο L λέγεται* δ-non-PCP, *όταν υπάρχει $\delta > 0$, ώστε κάθε ασθενώς ανοιχτό υποσύνολο W του L να έχει diam(W)$> \delta$.*

Επειδή όταν το σύνολο K είναι non-PCP, υπάρχει υποσύνολό του L και $\delta > 0$, τέτοια ώστε κάθε ασθενώς ανοιχτό υποσύνολο W του L να έχει diam(W)$> \delta$ και επειδή (φυσικά) ένα δ-non-PCP σύνολο είναι non-PCP, έχουμε :

Παρατηρηση 2.30. *Ένα σύνολο K είναι non-PCP αν και μόνο αν υπάρχουν $L \subset K$ και $\delta > 0$, τέτοια ώστε το L να είναι δ-non-PCP.*

Την ίδια χρονιά (1987) ο R. C. James στο [**34**] για τους χώρους Banach X και Y αποδεικνύει :

1. αν ο χώρος X είναι ισομορφικός με τον $Y \oplus X$ και ο Y δεν έχει την RNP, τότε ο X δεν έχει την KMP
2. αν F είναι ένα αριθμήσιμο norming σύνολο (δηλαδή όταν για κάθε $x \in X$, $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in F\}$) από συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή στον X και τ η ασθενέστερη τοπολογία που κάνει κάθε $f \in F$ συνεχές, τότε σε κάθε κλειστό, κυρτό, φραγμένο τ-συμπαγές υποσύνολο K του X η RNP και η KMP είναι ισοδύναμες. Αν το K δεν έχει την RNP τότε το K περιέχει ένα βασικό δυαδικό δέντρο.
3. αν ο X περιέχεται στον Y, ο οποίος έχει unconditional FDD, τότε στον X η RNP και η KMP είναι ισοδύναμες, και κάθε μία από αυτές συνεπάγεται την PCP.

Επίσης στο [**34**] αποδεικνύεται ότι αν ο Y δεν περιέχει υπόχωρο ισόμορφο με τον c_0 τότε οι ιδιότητες RNP, KMP, PCP και CPCP είναι ισοδύναμες. Ειδικότερα αν $X = Y$, το να έχει ο X κάποια από τις παραπάνω ιδιότητες είναι ισοδύναμο με το να μήν περιέχει ο X υπόχωρο ισόμορφο με τον c_0.

2.6. Η RNP είναι ισοδύναμη με την KMP όταν η ασθενής και η norm τοπολογία συμπίπτουν (1989), στα non-dentable non-PCP υποσύνολα χώρων με unconditional skipped block decomposition, denting points, αν ο χώρος δεν έχει την RNP τότε περιέχει υπόχωρο με FDD που δεν έχει την RNP

Το 1989 ο H. Rosenthal, σε ένα σημαντικό άρθρο ([**50**]), σχετικά με την δομή των non-dentable συνόλων αποδεικνύει ότι :

Θεωρημα 2.31. *(H. Rosenthal, 1989,* [**50**]*) Έστω K κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-RNP υποσύνολο ενός χώρου Banach X, το οποίο έχει την small combination of slices ιδιότητα. Τότε υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό, μη κενό υποσύνολο W του K τέτοιο ώστε :*
$(*)$ το W είναι non-dentable και η norm με την ασθενή τοπολογία συμπίπτουν στο W.
Επιπλέον υπαρχει ένας υπόχωρος Y του X, έτσι ώστε ο Y έχει FDD

και περιέχει ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, μη κενό υποσύνολο W που ικανοποιεί την $(*)$.

Ορισμος 2.32. *Το σύνολο K έχει την* small combination of slices ιδιότητα (SCSP), *αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε slice S του K, το S περιέχει κυρτό συνδυασμό από slices του K διαμέτρου μικρότερης του ε.*

Σημειώνουμε ότι το σύνολο K έχει την SCSP, αν και μόνο αν, το K είναι strongly regular ([**28**], σελ. 34-35).

Το κύριο αποτέλεσμα στο [**14**], το οποίο υπήρξε κομβικό στην μελέτη χώρων χωρίς την RNP, είναι το :

Θεωρημα 2.33. *(Bourgain, 1980,* [**14**]*) Αν ο χώρος Banach X δεν έχει την RNP, τότε για κάθε $\lambda > 0$, υπάρχει υπόχωρος X_λ του X, χωρίς την RNP, ο οποίος έχει FDD, με σταθερά Grynblum το πολύ λ.*

(σταθερά Grynblum=$G(X_{\lambda,n}, n) = \sup\{\|S_n\| : n \in \mathbb{N}\}$, όπου $S_n = \sum_{i=1}^{n} P_i$, με $P_i : X_\lambda \to X_{\lambda,i}$ τις αντίστοιχες προβολές και $(X_{\lambda,n})_{n\in\mathbb{N}}$ την FDD του X_λ)

Σημειώνουμε ότι στο [**14**] (σελ. 198), εισάγεται για πρώτη φορά η PCP (με την -τότε- ονομασία: ιδιότητα $(*)$).

Ένα σημείο $x \in K$, λέγεται *denting point*, αν $x \notin \overline{co}(K \setminus B(x, \varepsilon))$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Οι B.L. Lin, P.K. Lin και S.L. Troyanski δίνουν έναν χαρακτηρισμό για τα denting points :

Προταση 2.34. *(Lin-Lin-Troyanski, 1985,* [**37**]*) Έστω K κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X, x ένα ακραίο σημείο του K και x σημείο συνέχειας. Τότε το x είναι denting point του K.*

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω έννοια, στο [**50**] αποδεικνύεται το :

Πορισμα 2.35. *(Rosenthal, 1989,* [**50**]*) Έστω W ένα non-RNP, κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X στο οποίο η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται. Τότε το W δεν έχει ακραία σημεία.*

Συνδυάζοντας την Πρόταση 1.11 και το Πόρισμα 2.35, για το δ-approximate bush $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset c_0$, που κατασκευάσαμε στην ενότητα 1.5, έχουμε το:

Πορισμα 2.36. *Το σύνολο $K = \overline{co}\,(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset c_0$ δεν έχει ακραία σημεία.*

Την ίδια χρονιά (1989), οι H. Rosenthal και A. Wessel στο [**51**], ορίζοντας τις έννοιες (strong) martingale representation, (strong) martingale coordinatization και μελετώντας τα well separated bushes αποδεικνύουν :

Θεωρημα 2.37. *(Rosenthal-Wessel, 1989,* [**51**]*) Έστω χώρος Banach X με unconditional skipped-blocking decomposition και K ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-RNP υποσύνολο του X, χωρίς την PCP. Τότε υπάρχει ένα well separated bush στο K το οποίο είναι strong martingale representation για την κλειστή κυρτή θήκη του.*

Θεωρημα 2.38. *(Rosenthal-Wessel, 1989,* [**51**]*) Αν W είναι η κλειστή κυρτή θήκη του δ-bush του Θεωρήματος 2.37, τότε το W δεν έχει ακραία σημεία.*

2.7. CFDSD, Pal representations, μια εφαρμογή στον c_0, η RNP είναι ισοδύναμη με την KMP στα υποσύνολα του θετικού κώνου του $L^1(0,1)$ (1993)

Στις αρχές της δεκαετίας του 1990, οι Σ. Αργυρός και Ε. Δεληγιάννη στο [**3**], εισάγοντας την έννοια :

Ορισμος 2.39. *Ένα δ-approximate bush $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ορίζει μία* convex finite dimensional Schauder decomposition (CFDSD)*, αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες :*

i. οι nodes $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες,

ii. υπάρχει $k>0$, τέτοιο ώστε για $n<m$ και για $\sum\limits_{|a|=m}\lambda_a x_a$ έναν (απολύτως) κυρτό συνδυασμό να ισχύει :

$\|\sum\limits_{|\beta|=m}\mu_\beta x_\beta\| \le k\|\sum\limits_{|a|=m}\lambda_a x_a\|$, *όπου* $\mu_\beta=\sum\limits_{|a|=m,\beta<a}\lambda_a$,

αποδεικνύουν :

Θεωρημα 2.40. *(Αργυρός -Δεληγιάννη, 1992,* [**3**]*) Αν L είναι ένα κλειστό, κυρτό, non-RNP υποσύνολο ενός χώρου Banach X, τότε περιέχει ένα δ-approximate bush $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, το οποίο ορίζει μία CFDSD και αν $K=\overline{co}\,(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, τότε $K\subset L$ και κάθε $x\in K$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στην μορφή $x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{|a|=n}\lambda_a^{(x)}y_a\right)$, όπου $\lambda_a^{(x)}\ge 0$, $\lambda_\emptyset^{(x)}=1$, $\lambda_a^{(x)}=\sum\limits_{\beta\in S_a}\lambda_\beta^{(x)}$.*

Σημειώνουμε ότι η απόδειξη χωρίζεται και εδώ σε δύο περιπτώσεις, με το σύνολο L να έχει ή όχι την PCP. Ειδικότερα στην περίπτωση που το σύνολο L έχει την PCP, αποδεικνύεται επιπλέον ότι στο σύνολο $K = \overline{co}\,(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, η norm και η ασθενής τοπολογία ταυτίζονται.
Στο [**3**] επίσης, αποδεικνύεται το :

Θεωρημα 2.41. *(Αργυρός -Δεληγιάννη, 1992, [**3**]) Έστω L ένα κλειστό, κυρτό, non-RNP υποσύνολο ενός χώρου Banach X έτσι ώστε να αληθεύει μία από τις παρακάτω συνθήκες :*

i. η RNP δεν είναι ισοδύναμη με την PCP στα υποσύνολα του L
ii. ο χώρος X έχει unconditional βάση
iii. το L είναι υποσύνολο του θετικού κώνου του $L^1[0,1]$.

Τότε υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό υποσύνολο K του L με $\mathcal{P}al$-representation.

Ορισμος 2.42. *Ένα κλειστό, κυρτό σύνολο K σε έναν χώρο Banach X, έχει μία $\mathcal{P}al$-representation αν υπάρχει $T : \mathcal{P}al \to K$ affine, ένα προς ένα, επί και συνεχής.*

Το σύνολο $\mathcal{P}al$ (το σύνολο όλων των μη ατομικών μέτρων πιθανότητας στο [0,1]), είναι norm-κλειστό, κυρτό υποσύνολο του $M[0,1]$ (τα μέτρα στο [0,1]), χωρίς ακραία σημεία. Συνεπώς αν το K έχει $\mathcal{P}al$-representation, τότε το K δεν έχει ακραία σημεία.

Σαν εφαρμογή των δύο τελευταίων θεωρημάτων μπορούμε (και πάλι) να δούμε το παράδειγμα της ενότητας 1.5.

Θεωρημα 2.43. *Το κλειστό, κυρτό, φραγμένο σύνολο $K = \overline{co}\,(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset c_0$ της παραγράφου 1.5, έχει $\mathcal{P}al$-representation (και συνεπώς το σύνολο δεν έχει ακραία σημεία).*

Αποδειξη. Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα finitely branching tree, *κλαδί* του $\mathcal{A}$ ονομάζεται ένα στοιχείο της μορφής $s = (a_1, a_2, ..., a_n)$ τέτοιο ώστε $a_{i+1} \in S_{a_i}$, για $i = 1, ..., n$ και *άπειρο κλαδί* ονομάζεται ένα στοιχείο της μορφής $s = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ τέτοιο ώστε $a_{i+1} \in S_{a_i}$, για κάθε i. Το σύνολο των απείρων κλαδιών $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ του $\mathcal{A}$, είναι υπεραριθμήσιμο και σύμφωνα με την παρατήρηση 4.3 στο [**3**], έχουμε ότι το σύνολο $\mathcal{P}al(\mathcal{B}(\mathcal{A}))$ είναι ισομετρικό με το σύνολο $\mathcal{P}al$.

Στο σύνολο $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ ορίζουμε μία τοπολογία τ, με βασικά σύνολα τα $V_a = \{s \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) : s|_{|a|} = a\}$. Μέσω του Θεωρήματος Tychonoff, το σύνολο $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος.

Έστω τώρα $x \in \overline{co}\,(\tilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Τότε ισχύει $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{|a|=n}\lambda_a^{(x)} e_a\right)$, όπου $\lambda_a^{(x)} \geq 0,\ \lambda_\emptyset^{(x)} = 1,\ \lambda_a^{(x)} = \sum\limits_{\beta\in S_a}\lambda_\beta^{(x)}$.

Παρατηρούμε ότι $\max\{\lambda_a^{(x)} : |a| = n\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, αφού η ακολουθία στοιχείων $x_k = \sum\limits_{n=0}^{k}\left(\sum\limits_{|a|=n}\lambda_a^{(x)}e_a\right)$ είναι norm Cauchy, μιάς και $x_k \xrightarrow[\|\cdot\|]{k\to\infty} x$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : K \to M(\mathcal{B}(\mathcal{A}))$, ώστε $\phi(x) = \mu_x$ και $\mu_x(V_a) = \lambda_a^{(x)}$, για κάθε βασική περιοχή V_a, όταν $x_k = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{|a|=n}\lambda_a^{(x)}e_a\right) \in K$.

Αν $s \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$, τότε $s \in \bigcap_{a\in S} V_a$ και επειδή $\mu_x(V_a) = \lambda_a^{(x)} \xrightarrow{|a|\to\infty} 0$, έχουμε ότι $\mu_x(s)$ είναι μη ατομικό μέτρο.

Άρα $\phi(K) \subset \mathcal{P}al(\mathcal{B}(\mathcal{A}))$.

Επίσης αν $\mu \in \mathcal{P}al(\mathcal{B}(\mathcal{A}))$, από τις γνωστές ιδιότητες του μέτρου έχουμε $\mu(\emptyset) = 0,\ 0 \le \mu(V_a) \le 1,\ \mu(V_a) = \sum\limits_{\beta\in S_a}\mu(V_\beta)$ και αν $s \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ με $s \in \bigcap_{a\in S} V_a$ τότε $\mu(S) = 0$, άρα $\mu(V_a) \xrightarrow{|a|\to\infty} 0$, και έτσι ορίζουμε $x_\mu = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{|a|=n}\mu(V_a)e_a\right) \in K$. Άρα η ϕ είναι επί.

Φανερά η ϕ είναι συνεχής και ένα προς ένα.

Τέλος η ϕ είναι affine, αφού για κάθε V_a και $0 \le t \le 1$, έχουμε $\mu_{tx+(1-t)y}(V_a) = \lambda_a^{(tx+(1-t)y)} = t\lambda_a^{(x)} + (1-t)\lambda_a^{(y)} = t\mu_x(V_a) + (1-t)\mu_y(V_a)$.
$\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΑΘΕ NON-DENTABLE ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΤΟΥ $C(\omega^{\omega^k})$ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΕΝΑ ΚΛΕΙΣΤΟ ΚΥΡΤΟ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ L ΤΕΤΟΙΟ ΩΣΤΕ ΤΟ L ΕΧΕΙ ΤΗΝ PCP ΚΑΙ ΟΧΙ ΤΗΝ RNP. ΣΥΝΕΠΩΣ Η RNP ΚΑΙ Η KMP ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑ ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ ΤΩΝ ΧΩΡΩΝ BANACH $C(\omega^{\omega^k})$

Στο κεφάλαιο αυτό (το οποίο αποτελεί και το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας αυτής) αποδεικνύουμε ότι στα κυρτά, κλειστά, φραγμένα, non-RNP υποσύνολα των χώρων $C(\omega^{\omega^k})$, για $k \in \mathbb{N}$, η RNP και η KMP είναι ισοδύναμες ιδιότητες. Υπάρχουν επίσης αποτελέσματα που αφορούν την γεωμετρική δομή κυρτών, κλειστών, φραγμένων, non-RNP συνόλων σε χώρους Banach, όταν δεν περιέχουν τον l^1 ή όταν έχουν Schauder decomposition.

3.1. Οι χώροι Banach $C(\alpha)$ όπου α αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, η κατηγοριοποίηση των C(K) με K συμπαγή μετρικό χώρο (1960 και 1966), μια συνέπεια όταν ο χώρος Banach X δεν περιέχει τον ℓ^1 (1978)

Με ω συμβολίζουμε τον πρώτο αριθμήσιμο διατακτικό και με ω_1 τον πρώτο μη αριθμήσιμο διατακτικό. Αν $a < \beta$, με $\langle a, \beta\rangle$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{t$ διατακτικός με $a \leq t \leq \beta\}$, ενώ με $\langle a, \beta)$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{t$ διατακτικός με $a \leq t < \beta\}$. Αντίστοιχα ορίζονται τα διαστήματα $(a, \beta\rangle$ και (a, β) των διατακτικών αριθμών. Κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών μπορεί να γίνει αντιληπτό και ως ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος, με τοπολογία αυτήν που επάγεται από την διάταξη. Ειδικότερα ένα σύνολο της μορφής $\langle a, \beta\rangle$, είναι συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Στην περίπτωση δε που $\beta < \omega_1$, είναι επίσης μετρικοποιήσιμος.

Αν το σύνολο K είναι συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος, με $C(K)$ συμβολίζουμε τον χώρο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο K. Ο χώρος $C(K)$, εφοδιασμένος με την νόρμα $\|f\|_\infty = \max\{f(s) : s \in K\}$ είναι χώρος Banach και μάλιστα είναι ένα Banach lattice, με την κατά σημείο διάταξη. Με $C(a)$, όπου a διατακτικός αριθμός, συμβολίζουμε τον χώρο $C(\langle 1, a\rangle)$.

Το πιό απλό παράδειγμα ενός χώρου $C(a)$, με a αριθμήσιμο διατακτικό, είναι ο $C(\omega)$, που μπορεί να ταυτιστεί με τον χώρο c των πραγματικών συγκλινουσών ακολουθιών (με το όριό τους), αφού το διάστημα $\langle 1, \omega\rangle$, δεν είναι άλλο, παρά η με ένα σημείο συμπαγοποίηση των φυσικών και λόγω συνέχειας, για κάθε στοιχείο $f \in C(\omega)$, έχουμε :

$$a = f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Θέτοντας $c = \{(a_n, a)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a,\ a_n, a \in \mathbb{R}\}$, η απεικόνιση $T : c \to c_0$, με $T((a_n, a)) = (a, a_n - a)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δίνει ότι ο c είναι ισόμορφος με τον c_0 και συνεπώς το ίδιο συμβαίνει με τον $C(\omega)$. Άρα έχουμε :

Παρατηρηση 3.1. *Ο χώρος $C(\omega)$ είναι ισόμορφος με τον c_0.*

Αν δύο συμπαγείς Hausdorff τοπολογικοί χώροι K, L είναι ομοιομορφικοί τότε οι χώροι $C(K)$ και $C(L)$ είναι ισόμορφοι. Εύκολα όμως μπορούμε να δούμε ότι παρόλο που τα διαστήματα $\langle 1, \omega\rangle$ και $\langle 1, \omega+1\rangle$ δεν είναι ομοιομορφικά οι χώροι $C(\omega)$ και $C(\omega+1)$ είναι ισομορφικοί, αφού : $C(\omega+1) = c_0 \oplus \mathbb{R} = c_0 = C(\omega)$.

Το ερώτημα για ποιούς διατακτικούς a οι χώροι $C(a)$ είναι μεταξύ τους ισόμορφοι, απαντήθηκε τις δεκαετίες 1950 και 1960, μέσω των εργασιών των Bessaga-Pelczynski και Miljutin, με τις οποίες έγινε εφικτή η κατηγοριοποίηση των κλάσεων ισομορφίας των χώρων $C(K)$, όπου K μετρικοποιήσιμος συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος.

Θεωρημα 3.2. *(Bessaga-Pelczynski, 1960, [**9**]) Αν $a < \beta$ είναι αριθμήσιμοι διατακτικοί, τότε οι χώροι Banach $C(a)$ και $C(\beta)$ είναι ισομορφικοί, αν και μόνο αν, $\beta < a^\omega$.*

Θεωρημα 3.3. *(Miljutin, 1966, [**41**]) Αν ο K είναι υπεραριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος τότε ο χώρος Banach $C(K)$ είναι ισόμορφος με τον $C[0,1]$.*

Φυσικά, λόγω του θεωρήματος 3.2, ισχύει ότι : $C(\omega^{\omega^k}) \approx C(\omega^{\omega^k n})$ για $k, n \in \mathbb{N}$, και επειδή $\omega^\omega = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \omega^n$, $\omega^{\omega^k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \omega^{\omega^{k-1} n}$, έχουμε τους ισομορφισμούς :

$$C(\omega^\omega) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \oplus C(\omega^n)\right)_0 \text{ και } C(\omega^{\omega^k}) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \oplus C(\omega^{\omega^{k-1}n})\right)_0.$$

Όταν το σύνολο K είναι αριθμήσιμο, τότε το σύνολο των πεπερασμένων μέτρων στο $K, M(K)$, είναι χώρος Banach (με την νόρμα $\|\mu\| = |\mu|(K)$), ισόμορφος με τον l^1, και συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, έχουμε ότι $(C(a))^* = l^1$, για a αριθμήσιμο διατακτικό. Αυτό σημαίνει ότι ο l^1 δεν εμφυτεύεται στον $C(a)$, για a αριθμήσιμο διατακτικό (αλλοιώς ο l^∞, δυικός του l^1, θα εμφυτευόταν στον $(C(a))^* = l^1$).

Το γεγονός ότι ένας χώρος Banach X δεν περιέχει τον l^1, σύμφωνα με το [**49**] (Πόρισμα 6, σελ.371) και το [**17**], συνεπάγεται το πολύ χρήσιμο:

Γεγονος 3.4. *Αν ο χώρος Banach X δεν περιέχει τον l^1, K φραγμένο σύνολο του X και $x \in \overline{K}^w$, τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο K που συγκλίνει ασθενώς στο x.*

3.2. Ο Cantor-Bendixson δείκτης, παρατηρήσεις, γνωστά αποτελέσματα για K αριθμήσιμο συμπαγές

Για την κατηγοριοποίηση των $C(a)$, με a αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό, στο [**9**], χρησιμοποιήθηκε η έννοια του Cantor-Bendixson δείκτη ενός αριθμήσιμου συμπαγούς μετρικοποιήσιμου χώρου K.

Αν K αριθμήσιμος συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος, με *Cantor-Bendixson παράγωγο* του συνόλου K, ονομάζουμε το σύνολο :

$K' = K^{(1)} = \{x \in K : x \text{ είναι σημείο συσσώρευσης του } K\} \subset K$.

Αφού όταν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K'$ με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του K, έχουμε ότι $x_0 \in K'$ και συνεπώς το σύνολο K' είναι κλειστό (άρα στην περίπτωση αυτή συμπαγές).

Έτσι έχουμε : $K^{(2)} = K'' = (K^{(1)})', ..., K^{(n+1)} = (K^{(n)})', ...$ και $K^{(\omega)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K^{(n)}$, με $n \in \mathbb{N}$.

Αντίστοιχα αν a διατακτικός αριθμός ορίζουμε :
$K^{(a)} = (K^{(a-1)})'$, αν ο a είναι επόμενος διατακτικός και
$K^{(a)} = \bigcap_{\gamma<a} K^{(\gamma)}$, αν ο a είναι οριακός διατακτικός.

Ο *Cantor-Bendixson δείκτης* του συνόλου K είναι ο διατακτικός αριθμός : $i_{CB}(K) = \min\{a : K^{(a+1)} = K^{(a)},\ a \text{ διατακτικός αριθμός}\}$.

Φυσικά το σύνολο K είναι αριθμήσιμο, αν και μόνο αν, $i_{CB}(K) < \omega_1$. Επίσης $K^{i_{CB}(K)} = \emptyset$, ή το σύνολο $K^{i_{CB}(K)}$ είναι τέλειο.

Απλά παραδείγματα είναι : $i_{CB}(\omega) = i_{CB}(\langle 1, \omega \rangle) = 2$,
$i_{CB}(\omega^n) = i_{CB}(\langle 1, \omega^n \rangle) = n+2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$i_{CB}(\omega^\omega) = i_{CB}(\langle 1, \omega^\omega \rangle) = \omega + 1$.

Επίσης ισχύει ότι:
$i_{CB}(\omega^{\omega^n}) = i_{CB}(\langle 1, \omega^{\omega^n} \rangle) = \omega^n + 1$.

Αν το σύνολο K είναι αριθμήσιμο συμπαγές, τότε ισχύουν :

Παρατηρηση 3.5. *Υπάρχει αριθμήσιμος διατακτικός a, τέτοιος ώστε $K^{(a)} = \emptyset$.*
(Αφού αν $K^{(a)} \neq \emptyset$, για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό a, τότε το σύνολο $K^{(a+1)}$ δεν περιέχεται στο $K^{(a)}$ και άρα, στη περίπτωση αυτή έχουμε $i_{CB}(K) \geq \omega_1$)

Παρατηρηση 3.6. *Δεν υπάρχει αριθμήσιμο συμπαγές K με $i_{CB}(K)$ οριακό διατακτικό αριθμό.*
(Πραγματικά, αν a οριακός διατακτικός αριθμός και $i_{CB}(K) = a$ τότε $K^{(\gamma)} \neq \emptyset$ για κάθε $\gamma < a$ και επειδή, $K^{(a)} = \bigcap\limits_{\gamma < a} K^{(\gamma)}$, το $K^{(\beta)}$ δεν περιέχεται στο $K^{(\gamma)}$ όταν $\gamma < \beta < a$ και $K^{(\gamma)}$ κλειστά σύνολα, έχουμε $K^{(a)} \neq \emptyset$)

Παρατηρηση 3.7. *Υπάρχει αριθμήσιμος διατακτικός β, ώστε το σύνολο K να είναι ομοιομορφικό με το διάστημα $\langle 1, \beta \rangle$ (με την τοπολογία της διάταξης). Ο διατακτικός αριθμός β ορίζεται μονοσήμαντα από τον $i_{CB}(K)$.*

Ειδικότερα έχουμε την

Παρατηρηση 3.8. *Οποιοσδήποτε K αριθμήσιμος συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος, με $i_{CB}(K) = \omega^n + 1$ είναι ομοιομορφικός με το διάστημα των διατακτικών $\langle 1, \omega^{\omega^n} \rangle$ για n φυσικό.*

Σημαντικό επίσης είναι το ακόλουθο :

Θεωρημα 3.9. *([**1**], Θ. 4.5.2) Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :*

i. το K είναι αριθμήσιμο και έχει πεπερασμένο Cantor-Bendixson δείκτη
ii. ο $C(K)$ είναι ισόμορφος με τον c_0
iii. ο $C(K)$ εμφυτεύεται σε χώρο με unconditional βάση
iv. ο $C(K)$ έχει την ιδιότητα (u).

Ορισμος 3.10. *Ο χώρος Banach X, έχει την ιδιότητα (u), αν για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ασθενώς Cauchy ακολουθία στον X, υπάρχει μία ασθενώς unconditional Cauchy (WUC) σειρά, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ στον X (δηλ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^*(u_k)| <$*

∞, *για κάθε* $x^* \in X^*$*), τέτοια ώστε η ακολουθία* $\left(x_n - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *να είναι ασθενώς μηδενική.*

Ειδικότερα ο χώρος $C(\omega^\omega)$ (και φυσικά ο $C(a)$ με $\omega^\omega < a$) δεν εμβαπτίζεται σε χώρο με unconditional FDD (κάτι που αποδεικνύει ο Pelczynski στην διδακτορική του διατριβή το 1958) και στην επόμενη ενότητα δίνουμε μία επιπλέον απόδειξη αυτής της πρότασης.

3.3. Μια αναπαράσταση του συνόλου $\langle 1,\omega^\omega\rangle$, ο χώρος $C(\omega^\omega)$ δεν εμφυτεύεται σε χώρο με unconditional βάση

Για τον φυσικό αριθμό n, θεωρούμε $\mathcal{T}_n$ το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών της μορφής :
$\mathcal{T}_n = \{a : a = (0,1,n,k_1,k_2,...,k_l)$ με $1 \leq l \leq n$ και $i, k_i \in \mathbb{N}$ για $i = 1,2,...,l\} \cup \{(0),(0,1),(0,1,n)\}$
και θέτουμε : $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$.

Αν $a \in \mathcal{T}$ και $a = (0,1,n,k_1,k_2,...,k_l)$, τον φυσικό αριθμό $l+2$ τον ονομάζουμε *μήκος* του a και τον συμβολίζουμε με $|a|$ (φυσικά θέτουμε $|(0)| = 0,\ |(0,1)| = 1,\ |(0,1,n)| = 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Αν $|a| = l+2$ και $m \in \mathbb{N}$ με $m \leq l+2$, *περιορισμό* του a έως το m ονομάζουμε το στοιχείο $a|_m = (0,1,n,k_1,k_2,...,k_{m-2})$, εφόσον $a = (0,1,n,k_1,k_2,...,k_l)$ (βέβαια $a|_0 = (0),\ a|_1 = (0,1),\ a|_2 = (0,1,n)$).

Στο σύνολο $\mathcal{T}$, ορίζουμε μία ολική διάταξη λεξικογραφικά.
Θέτουμε $(0) < (0,1) < \gamma$, για κάθε στοιχείο $\gamma \in \mathcal{T} \setminus \{(0),(0,1)\}$ και αν $a, \beta \in \mathcal{T} \setminus \{(0),(0,1)\}$ τότε :

$$a < \beta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} |a| < |\beta| \\ \text{ή} \\ |a| = |\beta| \text{ και υπάρχει } s \text{ με } 0 \leq s \leq |a|-1 \\ \text{τέτοιο ώστε } \beta|_s = a|_s \text{ και } k_{s+1}(a) < k_{s+1}(\beta) \end{array} \right\}.$$

Αν $a \in \mathcal{T}_n$ ως *σύνολο επομένων* του a, ορίζουμε το σύνολο :
$S_a = \{\beta \in \mathcal{T}_n$ με $|\beta| = |a|+1$ και $\beta|_{|a|} = a\}$, όταν $|a| < n+2$. Τότε $\#S_a = \infty$.
Αν $|a| = n+2$ τότε $\#S_a = 0$ και ο a δεν έχει επομένους.

Για κάθε $a \in \mathcal{T}$, υπάρχει μοναδική πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{T}$ της μορφής : $(a_0, a_1, a_2, a_3..., a_m) = ((0),(0,1),(0,1,n), a_3..., a_m)$, τέτοια ώστε $a_{i+1} \in S_{a_i}$ για $0 \leq i \leq m-1$ και $a_m = a$. Μία τέτοια ακολουθία θα την ονομάζουμε *αρχικό διάστημα ή κλαδί* του $\mathcal{T}$ και θα το συμβολίζουμε με L_a. *Μήκος του κλαδιού* L_a, ονομάζουμε το μήκος του a

και γράφουμε $|L_a| = |a|$ (δεν υπάρχει κλαδί μήκους 0). Το κλαδί L_a, θα το ονομάζουμε *maximal*, αν $S_a = \emptyset$. Με $\mathcal{B}_0\mathcal{T}$ συμβολίζουμε το σύνολο των κλαδιών του $\mathcal{T}$ και με $\mathcal{B}_0\mathcal{T}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο των κλαδιών του $\mathcal{T}_n$.

Ορίζουμε τον χώρο συναρτήσεων $\mathcal{K}_\mathcal{T}$, από το σύνολο $\mathcal{T}$ στο δισύνολο $\{0,1\}$, ως εξής :

$\mathcal{K}_\mathcal{T} = \{x_{L_a} : L_a \in \mathcal{B}_0\mathcal{T}$ και $x_{L_a} : \mathcal{T} \to \{0,1\}$ με $x_{L_a}(\beta) = \left\{\begin{array}{l} 0,\ \beta \notin L_a \\ 1,\ \beta \in L_a \end{array}\right\}\}$,

με την ακολουθία συναρτήσεων $(x_{L_n})_{n\in\mathbb{N}}$, να συγκλίνει κατά σημείο στην συνάρτηση x_{L_a} ($x_{L_{a,n}} \xrightarrow{\kappa.\varsigma.} x_{L_a}$), αν και μόνο αν, $x_{L_n}(\beta) = x_{L_a}(\beta)$ για κάθε $\beta \in L_a$. Φυσικά ο $\mathcal{K}_\mathcal{T}$ (γνήσιο υποσύνολο του $\{0,1\}^\mathcal{T}$) είναι συμπαγής αριθμήσιμος χώρος.

Παρατηρούμε ότι, αν το κλαδί L_a είναι maximal, τότε η συνάρτηση x_{L_a} είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{K}_\mathcal{T}$, ενώ αν L_a δεν είναι maximal, τότε η συνάρτηση x_{L_a} είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{K}_\mathcal{T}$, αφού αν $L_{a,n} = L_a \cup \{a_n\}$, με $a_n \in S_a$, όταν $\beta_n \to \infty$, έχουμε ότι $x_{L_{a,n}} \xrightarrow{\kappa.\varsigma.} x_{L_a}$.

Αν με $\mathcal{K}_\mathcal{T}^{ip}$ συμβολίσουμε το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του $\mathcal{K}_\mathcal{T}$, εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο $\mathcal{K}'_\mathcal{T} = \mathcal{K}_\mathcal{T} \setminus \mathcal{K}_\mathcal{T}^{ip}$ (η *παράγωγος* του $\mathcal{K}_\mathcal{T}$) είναι ομοιομορφικό με το σύνολο $\mathcal{K}_\mathcal{T} \cup \{x_{L_{(0,1,1)}}\}$. Συνεχίζοντας έχουμε :

$\mathcal{K}''_\mathcal{T} = \mathcal{K}_\mathcal{T}^{(2)} = (\mathcal{K}'_\mathcal{T})'$ (ομοιομορφικό με το $\mathcal{K}_\mathcal{T} \cup \{x_{L_{(0,1,2)}}\}$),...,

$\mathcal{K}_\mathcal{T}^{(m+1)} = (\mathcal{K}_\mathcal{T}^m)'$ (ομοιομορφικό με το $\mathcal{K}_\mathcal{T} \cup \{x_{L_{(0,1,m+1)}}\}$).

Για $L_a \in \mathcal{B}_0\mathcal{T}$ παρατηρούμε ότι $x_{L_{(0,1)}} \in \mathcal{K}_\mathcal{T}^{(m)}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και ότι για κάθε $a \in \mathcal{T}$ με $a \neq (0,1)$ υπάρχει φυσικός n, τέτοιος ώστε $x_{L_a} \in (\mathcal{K}_\mathcal{T}^{(n)})^{ip}$ και συνεπώς $x_{L_a} \notin \mathcal{K}_\mathcal{T}^{(n+1)}$ (αφού $a \in \mathcal{T}_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και μετά από το πολύ $n+1$ παραγωγίσεις κάθε στοιχείο του $\mathcal{T}_n$, εκτός του (0) και του (0,1), απομακρύνεται).

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\mathcal{K}_\mathcal{T}^{(m)} \neq \emptyset$ (αφού για $m > n$ υπάρχει $a \in \mathcal{T}_m$ τέτοιο ώστε $x_{L_a} \in \mathcal{K}_\mathcal{T}^{(n)}$).

Έχουμε λοιπόν ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_\mathcal{T}^{(n)} = \mathcal{K}_\mathcal{T}^{(\omega)} = \{x_{L_{(0,1)}}\}$, άρα $\mathcal{K}_\mathcal{T}^{(\omega+1)} = \emptyset$ και συνεπώς : $i_{CB}(\mathcal{K}_\mathcal{T}) = \omega + 1$.

Τώρα η Παρατήρηση 3.8 μας δίνει

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.11. *Ο χώρος $\mathcal{K}_\mathcal{T}$ είναι ομοιομορφικός με το διάστημα $\langle 1, \omega^\omega\rangle$ των διατακτικών.*

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μια δική μας απόδειξη της πρότασης που αποδεικνύει ο Pelczynski στην διδακτορική του διατριβή :

Πρόταση 3.12. *Ο χώρος $C(\omega^\omega)$ δεν εμφυτεύεται σε χώρο με unconditional βάση.*

Απόδειξη. Αφού ο χώρος $\mathcal{K}_\mathcal{T}$ είναι ομοιομορφικός με το διάστημα $\langle 1, \omega^\omega\rangle$ αρκεί να δείξουμε ότι ο χώρος Banach $C(\mathcal{K}_\mathcal{T})$ (ισόμορφος με τον $C(\omega^\omega)$) δεν εμφυτεύεται σε χώρο με unconditional βάση.

Έστω ότι υπάρχει ισομορφισμός $T : C(\mathcal{K}_\mathcal{T}) \to X$, όπου X χώρος με unconditional βάση την $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$\pi_a : \mathcal{K}_\mathcal{T} \to \{0,1\},\ a \in ,\ \text{ώστε } \pi_a(x_L) = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ a \notin L \\ 1,\ a \in L \end{array} \right\}$$

$$\text{και τις } h_L = \sum_{a\in L} \pi_a,\ \phi_L = \sum_{a\in L} (-1)^{|a|}\pi_a,\ \text{με } L \in \mathcal{B}_0\mathcal{T}.$$

Για κάθε $L' \in \mathcal{B}_0\mathcal{T}$ έχουμε: $\quad h_L(x_{L'}) = \sum\limits_{a\in L} \pi_a(x_{L'}) =$

$$= \#\{a : a \in L \cap L'\} \leq |L| = h_L(x_L)$$

$$\text{και } \phi_L(x_{L'}) = \sum_{a\in L} (-1)^{|a|}\pi_a(x_{L'}) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} 0,\ \text{αν } \#\{a : a \in L \cap L'\} = \text{άρτιος} \\ 1,\ \text{αν } \#\{a : a \in L \cap L'\} = \text{περιττός} \end{array} \right\}.$$

Άρα $\|h_L\| = |L|$ και $\|\phi_L\| = 1$.

Χρησιμοποιώντας ένα sliding hump επιχείρημα, κατασκευάζουμε μια unconditional block βασική ακολουθία του X. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$.

Αφού $T\pi_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*(T\pi_0)x_n = \lim\limits_{k\to\infty} S_k(T\pi_0)$, θα υπάρχει m_0 τέτοιο ώστε:

$\| \sum\limits_{n=m_0+1}^{\infty} x_n^*(T\pi_0)x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε $y_1 = S_{m_0}(T\pi_0) = \sum\limits_{n=1}^{m_0} x_n^*(T\pi_0)x_n$.

Επειδή $T\pi_{0,m} \xrightarrow[m\to\infty]{w} 0$ στον $\langle x_1, x_2, ..., x_{m_0}\rangle$, θα υπάρχει n τέτοιο ώστε για κάθε $m \geq n$ να ισχύει: $\|P_{[x_1,...x_{m_0}]}(T\pi_{0,m})\| < \frac{\varepsilon}{2^2}$.

Θεωρούμε το κλαδί $L_1 = ((0), (0, n))$, με $|L_1| = 2$.

Όπως πριν θα υπάρχει $m_1 \geq m_0 + 1$ ώστε $\| \sum\limits_{n=m_1+1}^{\infty} x_n^*(T\pi_{0,n})x_n\| < \frac{\varepsilon}{2^3}$ και θέτουμε $y_2 = \sum\limits_{n=m_0+1}^{m_1} x_n^*(T\pi_{0,n})x_n$. Ομοίως $T\pi_{0,n,m} \xrightarrow[m\to\infty]{w} 0$ και συνεπώς υπάρχει k_1 τέτοιο ώστε για κάθε $m \geq k_1$ να ισχύει:

$\|P_{[x_1,...x_{m_1}]}(T\pi_{0,n,m})\| < \frac{\varepsilon}{2^4}$.

Θεωρούμε το κλαδί $L_2 = ((0), (0, n), (0, n, k_1))$, με $|L_2| = 3$.

Συνεχίζοντας έτσι στο r-βήμα έχουμε κατασκευάσει το

$$y_r = \sum_{n=m_{r-2}+1}^{m_{r-1}} x_n^*(T\pi_{0,n,k_1,k_2,...,k_{r-2}})x_n \text{ με}$$

$$\|\sum_{n=m_{r-1}+1}^{\infty} x_n^*(T\pi_{0,n,k_1,k_2,\dots,k_{r-2}})x_n\| < \tfrac{\varepsilon}{2^{2r-1}}.$$

Πάλι υπάρχει k_{r-1} τέτοιο ώστε για κάθε $m \geq k_{r-1}$ να έχουμε: $\|P_{[x_1,\dots x_{m_{r-1}}]}(T\pi_{0,n,k_1,k_2,\dots,k_{r-2},m})\| < \frac{\varepsilon}{2^{2r}}$.
Θεωρούμε το κλαδί $L_r = ((0),(0,n),(0,n,k_1),\dots,(0,n,\dots,k_{r-1}))$, με $|L_r| = r+1$.

Η ακολουθία $\{y_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία που θέλαμε.

Λόγω της unconditionality, υπάρχει σταθερά $K \geq 1$ τέτοια ώστε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ να ισχύει:

$$(1) \qquad \|\sum_{i=1}^{N} y_i\| \leq K \sum_{i=1}^{N}(-1)^{i+1}y_i\| .$$

Επίσης αφού T ισομορφισμός έχουμε ότι υπάρχουν σταθερές c, C τέτοιες ώστε: (2) $\quad c\|f\|_{C(\mathcal{K}_\mathcal{T})} \leq \|Tf\|_X \leq C\|f\|_{C(\mathcal{K}_\mathcal{T})}$.

Έστω $N \in \mathbb{N}$ με $N > [\frac{KC+1+K}{c} - 1] + 1$. Θεωρούμε το κλαδί $L_N = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ και τα $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ που κατασκευάζονται από το sliding hump.

Έχουμε: $Th_{L_N}(L_N) = T\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_{a_i}(x_{L_N})\right) = \sum_{i=1}^{N}(T\pi_{a_i}(x_{L_N})) =$

$$= y_1 + y_2 + \dots y_N + \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{n=m_i+1}^{\infty} x_n^*(T\pi_{a_i})x_n\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{m_i-1} x_n^*(T\pi_{a_i})x_n\right),$$

οπότε:

$$(3) \qquad \|y_1 + y_2 + \dots + y_N\| - \varepsilon \leq \|Th_{L_N}\| \leq \|y_1 + y_2 + \dots + y_N\| + \varepsilon.$$

Επίσης: $T\phi_{L_N}(L_N) = T\left(\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\pi_{a_i}(x_{L_N})\right) = \sum_{i=1}^{N}((-1)^iT\pi_{a_i}(x_{L_N})) =$

$$= y_1 - y_2 + \dots + (-1)^{N+1}y_N +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}(-1)^i\left(\sum_{n=m_i+1}^{\infty} x_n^*(T\pi_{a_i})x_n\right) + \sum_{i=1}^{N}(-1)^i\left(\sum_{n=1}^{m_i-1} x_n^*(T\pi_{a_i})x_n\right),$$ οπότε:

$$(4) \quad \|y_1y_2 + \dots + (-1)^{N+1}y_N\| - \varepsilon \leq \|T\phi_{L_N}\| \leq \|y_1 - y_2 + \dots + (-1)^{N+1}y_N\| + \varepsilon.$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) έως (4) έχουμε:

$$c(N+1) \leq c\|h_{L_N}\| \leq \|Th_{L_N}\| \leq \|y_1 + y_2 + \dots + y_N\| - \varepsilon \leq$$
$$\leq K\|y_1 + y_2 + \dots + (-1)^{N+1}y_N\| + \varepsilon \leq K(\|T\phi_{L_N}\| + \varepsilon) + \varepsilon =$$
$$= K\|T\phi_{L_N}\| + \varepsilon(1+K) \leq KC\|\phi_{L_N}\| + \varepsilon(1+K) = KC + 1 + K.$$

Συνεπώς για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει $c(N+1) \leq KC + 1 + K$ και λόγω της επιλογής του N καταλήγουμε σε αντίφαση. Άρα ο χώρος $C(\omega^\omega)$ δεν εμφυτεύεται σε χώρο με unconditional βάση. □

3.4. 'Μεγάλοι' τελεστές στον $L^1(0,1)$ με 'μικρές ' προβολές, τελεστές Dunford-Pettis

Οι σχέσεις:

$$C(\omega^\omega) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \oplus C(\omega^n)\right)_0 \text{ και } C(\omega^{\omega^k}) \approx \left(\sum_{n=0}^{\infty} \oplus C(\omega^{\omega^{k-1}n})\right)_0$$

που συναντήσαμε στην ενότητα 3.1 είναι σημαντικές για την κατανόηση της δομής των χώρων $C(\omega^{\omega^k})$. Αυτό γίνεται φανερό και με την παρακάτω (πολύ σημαντική για την συνέχεια)

Πρόταση 3.13. *Έστω οι χώροι Banach X, X_n με $n \in \mathbb{N}$.*

Υποθέτουμε ότι $X = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$ και ότι υπάρχει ένας non-strongly regular τελεστής $T : L^1(0,1) \to X$, τέτοιος ώστε οι τελεστές $P_nT : L^1(0,1) \to X_n$ να είναι strongly regular για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (όπου P_n οι προβολές $P_n : X \to X_n$).

Τότε υπάρχει τελεστής $D : L^1(0,1) \to L^1(0,1)$ τέτοιος ώστε: ο τελεστής $TD : L^1(0,1) \to X$ να είναι μή αναπαραστάσιμος και οι τελεστές $P_nTD : L^1(0,1) \to X_n$ να είναι αναπαραστάσιμοι για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Αφού ο τελεστής T είναι non strongly regular υπάρχουν, ένα Borel σύνολο $U \subset (0,1)$ και $\delta > 0$, τέτοια ώστε για κάθε ασθενώς ανοιχτό υποσύνολο W του $\mathcal{P}_U$ να έχουμε :

(1) $diam(T(W)) > 2\delta$ (Θεώρημα IV.10, [**28**])

(όπου $\mathcal{P}_U = \{f \in L^1(0,1) : f \geq 0, \int f = 1, suppf \subset U$, οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας με support στο U).

Αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι τελεστές P_nT είναι strongly regular, παίρνουμε ότι:

(2) οι απεικονίσεις $P_nT : \mathcal{P}_U \to X_n$ είναι weak to norm συνεχείς.

Επαγωγικά κατασκευάζουμε ένα δ-approximate bush $(f_a)_{a\in\mathcal{A}}$ στο $\mathcal{P}_U$ το οποίο ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και $\beta \in S_a$ έχουμε $\|Tf_a - Tf_\beta\| > \delta$.

(ii) Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ υπάρχουν $(\lambda_\beta)_{\beta\in S_a}, \lambda_\beta \geq 0, \sum_{\beta\in S_a} \lambda_\beta = 1$ με $\|f_a - \sum_{\beta\in S_a} \lambda_\beta f_\beta\| < \frac{1}{2^n}$

(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και για κάθε $a \in \mathcal{A}$ με $|a| \geq n$ και $\beta \in S_a$, έχουμε $\|P_nTf_a - P_nTf_\beta\| < \frac{1}{2^n}$

Συνοπτικά η κατασκευή (οι λεπτομέρειες της οποίας παρατίθενται μετά την απόδειξη) είναι η εξής. Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία $(f_a)_{|a|\leq n}$ έχουν κατασκευαστεί και ικανοποιούν τις υποθέσεις μας.

Θέτοντας $\mathcal{A}_n = \{a : |a| = n\}$, για κάθε $a \in \mathcal{A}_n$ διαλέγουμε δίκτυο $(f_{a,i})_{i\in I_a} \subset \mathcal{P}_U$ τέτοιο ώστε $f_{a,i} \xrightarrow{\omega} f_a$ και $\|Tf_{a,i} - Tf_a\| > \delta$.

Αφού για $k = 1, \dots, n+1$ έχουμε $P_kTf_{a,i} \xrightarrow{\|\cdot\|} P_kTf_a$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι το δίκτυο $(f_{a,i})_{i\in I_a}$ ικανοποιεί την

$$\|P_kTf_{a,i} - P_kTf_a\| < \tfrac{1}{2^{n+1}}.$$

Από το θεώρημα Mazur υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο F_a του I_a και $(\lambda_i)_{i\in F_a}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i\in F_a} \lambda_i = 1$ έτσι ώστε $\|f_a - \sum_{i\in F_a} \lambda_i f_{a,i}\| < \frac{1}{2^{n+1}}$.

Ονομάζουμε $S_a = \{\beta : \beta = (a,i), i \in F_a\}$ το (πεπερασμένο) σύνολο των επομένων του a και έτσι το σύνολο $(f_\beta)_{\beta\in S_a}, |a| = n$ είναι αυτό που θέλαμε και ολοκληρώσαμε το επαγωγικό βήμα. Σημειώνουμε ότι αν δεν απαιτήσουμε τα f_β, $\beta \in S_a$ να είναι διαφορετικά μεταξύ τους, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \max\{\lambda_a : |a| = n\} = 0$.

Έστω $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ το quasi-martingale που ορίζεται από αυτό το bush. Τότε $\sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}}\sigma(\xi_n)) = \mathcal{B}(0,1)$ (τα Borel μετρήσιμα σύνολα).

Για μια $\cup_{n\in\mathbb{N}}\sigma(\xi_n)-$απλή συνάρτηση φ υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} \int \xi_n(t)\varphi(t)dt$. Θέτοντας $D\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \int \xi_n(t)\varphi(t)dt$, μέσω της density μπορούμε να επεκτείνουμε τον τελεστή D στον $L^1(0,1)$.

Τότε ο τελεστής $TD : L^1(0,1) \to X$ είναι μη αναπαραστάσιμος, αφού $\forall a$, $\forall \beta \in S_a$ έχουμε $\|Tf_\beta - Tf_a\| > \delta$, ενώ οι τελεστές $P_nTD : L^1(0,1) \to X_n$ είναι αναπαραστάσιμοι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μιας και για $n \in \mathbb{N}$ και $|\gamma| = m + k > m = |a|$, $\gamma > a$ έχουμε

$$\|P_nTf_\gamma - P_nTf_a\| \leq \tfrac{1}{2^m} + \tfrac{1}{2^{m+1}} + \dots + \tfrac{1}{2^{m+k-1}} < \tfrac{1}{2^{m-1}}$$

και συνεπώς $\int \|P_nTf_\gamma - P_nTf_a\|\, dt < \frac{1}{2^{m-1}}$.

Διαλέγοντας το m αρκετά μεγάλο συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το bush $(P_nTf_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι Cauchy (στην Bochner νόρμα) στον X_n και συνεπώς οι τελεστές P_nTD είναι αναπαραστάσιμοι ([**26**]).

Η κατασκευή του bush. Έστω $f_\emptyset \in \mathcal{P}_U$. Θεωρούμε μια directed οικογένεια ασθενώς ανοιχτών υποσυνόλων $\{W_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}_U$ ώστε:

(i) $f_\emptyset \in W_i$ για κάθε $i \in I$
(ii) $W_i < W_j \Leftrightarrow W_i \subseteq W_j$
(iii) για κάθε περιοχή του W του $f_\emptyset$ υπάρχει W_i τέτοιο ώστε $W_i \subseteq W$.

Λόγω της *(1)* σε κάθε W_i υπάρχει $f_{(\emptyset,i)}$ τέτοιο ώστε $\|Tf_{(\emptyset,i)} - Tf_\emptyset\| > \delta$. Έτσι βρίσκουμε ένα δίκτυο $\{f_{(\emptyset,i)}\}_{i\in I_\emptyset}$ ώστε:

$$f_{(\emptyset,i)} \xrightarrow{w} f_\emptyset \text{ ενώ } \|Tf_{(\emptyset,i)} - Tf_\emptyset\| > \delta \text{ για κάθε } i \in I_\emptyset.$$

Λόγω της *(2)* θα έχουμε επίσης:

$$P_nTf_{(\emptyset,i)} \xrightarrow{\|\cdot\|} P_nTf_\emptyset, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή $P_1Tf_{(\emptyset,i)} \xrightarrow{\|\cdot\|} P_1Tf_\emptyset$, μπορούμε να περιοριστούμε σε ένα υποδίκτυο (το οποίο χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι το αρχικό) ώστε: $\|P_1Tf_{(\emptyset,i)} - P_1Tf_\emptyset\| < \frac{1}{2}$.

Αφού $f_{(\emptyset,i)} \xrightarrow{w} f_\emptyset$, από το θεώρημα του Mazur υπάρχει ακολουθία κυρτών συνδυασμών των $f_{(\emptyset,i)}$ που συγκλίνει norm στο $f_\emptyset$. Άρα υπάρχει κυρτός συνδυασμός των $f_{(\emptyset,i)}$ που απέχει (norm) από το $f_\emptyset$ λιγότερο από $\frac{1}{2}$. Δηλαδή υπάρχουν $\lambda_{(\emptyset,k)} \geq 0$ και $f_{(\emptyset,k)} \in \mathcal{P}_U$, $k = 1,2,...,k_\emptyset$ με $\sum\limits_{k=1}^{k_\emptyset} \lambda_{(\emptyset,k)} = 1$ και $\| \sum\limits_{k=1}^{k_\emptyset} \lambda_{(\emptyset,k)} f_{(\emptyset,k)} - f_\emptyset \| < \frac{1}{2}$.

Για $l \in \{1,2,...,k_\emptyset\}$ θεωρούμε την $f_{(\emptyset,l)} \in \mathcal{P}_U$. Θα υπάρχει όπως πριν ένα δίκτυο $\{f_{(\emptyset,l,i)}\}_{i \in I_{(\emptyset,l)}}$ ώστε:

$$f_{(\emptyset,l,i)} \xrightarrow{w} f_{(\emptyset,l)} \text{ ενώ } \|Tf_{(\emptyset,l,i)} - Tf_{(\emptyset,l)}\| > \delta \text{ για κάθε } i \in I_{(\emptyset,l)}.$$

Πάλι λόγω της *(2)* μπορούμε να επιλέξουμε υποδίκτυο (που θα θεωρήσουμε ότι είναι το αρχικό) ώστε:

$$\|P_1Tf_{(\emptyset,l,i)} - P_1Tf_{(\emptyset,l)}\| < \tfrac{1}{4} \text{ και } \|P_2Tf_{(\emptyset,l,i)} - P_2Tf_{(\emptyset,l)}\| < \tfrac{1}{4}$$

και επίσης βρίσκουμε $\lambda_{(\emptyset,l,k)} \geq 0$ και $f_{(\emptyset,l,k)} \in \mathcal{P}_U$, $k = 1,2,...,k_{(\emptyset,l)}$ με $\sum\limits_{k=1}^{k_{(\emptyset,l)}} \lambda_{(\emptyset,l,k)} = 1$ και $\| \sum\limits_{k=1}^{k_{(\emptyset,l)}} \lambda_{(\emptyset,l,k)} f_{(\emptyset,l,k)} - f_{(\emptyset,l)} \| < \frac{1}{4}$.

Εφαρμόζουμε την διαδικασία αυτή για όλα τα $l \in \{1,2,...,k_\emptyset\}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Στο n-οστό βήμα έχουμε κατασκευάσει πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων $\{f_{(a,j)}\}_{a \in A_{n-1}, j \in \{1,...,k_a\}} \subseteq \mathcal{P}_U$, για κάθε $f_{(a,j)}$ συναρτήσεις $\{f_{(a,j,k)}\}_{k \in \{1,...,k_{(a,j)}\}} \subseteq \mathcal{P}_U$ και μη αρνητικούς αριθμούς $\{\lambda_{(a,j,k)}\}_{k \in \{1,...,k_{(a,j)}\}}$ με $\sum\limits_{k=1}^{k_{(a,j)}} \lambda_{(a,j,k)} = 1$ ώστε $\| \sum\limits_{k=1}^{k_{(a,j)}} \lambda_{(a,j,k)} f_{(a,j,k)} - f_{(a,j)} \| < \frac{1}{2^n}$ και $\|P_mTf_{(a,j,k)} - P_mTf_{(a,j)}\| < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $m = 1,2,...n$.

Συμβολίζουμε τις συναρτήσεις $\{f_{(a,j,k)}\}_{k \in \{1,...,k_{(a,j)}\}}$ για $a \in A_{n-1}$ και $j \in \{1,...,k_a\}$ με $\{f_{(b,j)}\}$ όπου $b \in A_n$ και $j \in \{1,...,k_b\}$.

Για κάθε μια από αυτές, έστω την $f_{(b,j)}$, υπάρχει δίκτυο $\{f_{(b,j,i)}\}_{i \in I_{(b,j)}}$ ώστε $f_{(b,j,i)} \xrightarrow{w} f_{(b,j)}$ ενώ $\|Tf_{(b,j,i)} - Tf_{(b,j)}\| > \delta$ για κάθε $i \in I_{(b,j)}$.

Διαλέγοντας το δίκτυο έτσι ώστε $\|P_mTf_{(b,j,i)} - P_mTf_{(b,j)}\| < \frac{1}{2^{n+1}}$ για κάθε $m = 1,2,...n+1$ και βρίσκοντας μέσω θεωρήματος Mazur $\{\lambda_{(b,j,k)}\}_{k \in \{1,...,k_{(b,j)}\}}$ με $\sum\limits_{k=1}^{k_{(b,j)}} \lambda_{(b,j,k)} = 1$ ώστε $\| \sum\limits_{k=1}^{k_{(b,j)}} \lambda_{(b,j,k)} f_{(b,j,k)} - f_{(a,j)} \| < \frac{1}{2^{n+1}}$ ολοκληρώνουμε το επαγωγικό βήμα.

Παρατήρηση. Το σύνολο δεικτών της παραπάνω κατασκευής είναι ένα *finitely branching tree*, έστω $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{N}}$.

Θέτοντας $f_{(a,j)} = f_b$ με $b \in S_a = \{(a,j) : j \in \{1,2,...,k_a\}\}$ έχουμε κατασκευάσει $\{f_a\}_{a \in \mathcal{A}} \subseteq \mathcal{P}_U$ τέτοιο ώστε να έχουμε:

1. $\forall a$ και $\forall b \in S_a$, $\|Tf_b - Tf_a\| > \delta$
2. $\| \sum\limits_{b \in S_a} \lambda_b f_b - f_a \| < \frac{1}{2^{|a|}}$, $\left(\lambda_b \geq 0,\ \sum\limits_{b \in S_a} \lambda_b = 1 \right)$

3. $\forall n$, $\forall a$ με $\|a\| \geq n$ και $\forall b \in S_a$, $\|P_nTf_b - P_nTf_a\| < \frac{1}{2^{\|a\|}}$.

Η οικογένεια $\{f_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ είναι ένα $\frac{\delta}{\|T\|}$ -approximate bush στον $L_1(0,1)$ (αφού αν $\|f_b - f_a\| < \frac{\delta}{\|T\|}$ τότε $\|Tf_b - Tf_a\| < \delta$, άτοπο). □

Ένας φραγμένος τελεστής T από τον $L^1(0,1)$ σε έναν χώρο Banach X, λέγεται *Dunford-Pettis*, αν απεικονίζει κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του $L^1(0,1)$ σε norm συμπαγές υποσύνολο του X ([**26**]).

Οι Dunford-Pettis τελεστές συνδέονται άμεσα με τους αναπαραστάσιμους τελεστές καθώς και με τους strongly regular τελεστές. Το 1980 ο J. Bourgain στο άρθρο του *Dunford-Pettis operators on L^1 and the RNP* ([**16**]) αποδεικνύει (Θ. 5) ότι:

Θεωρημα 3.14. *(Bourgain, 1980,* [**16**]*) Έστω X χώρος Banach και $T : L^1(0,1) \to X$ ένας non-Dunford-Pettis τελεστής. Τότε υπάρχει Dunford-Pettis τελεστής $D : L^1(0,1) \to L^1(0,1)$ τέτοιος ώστε ο τελεστής $TD : L^1(0,1) \to X$ να είναι μη αναπαραστάσιμος.*

Επειδή ένας χώρος X έχει την RNP αν και μόνο αν κάθε τελεστής στον $L(L^1, X)$ είναι αναπαραστάσιμος, το παραπάνω θεώρημα δείχνει ότι αν κάθε Dunford-Pettis τελεστής είναι αναπαραστάσιμος, τότε ο X έχει την RNP.

Φυσικά επειδή ο τελεστής TD του θεωρήματος 3.14 είναι Dunford-Pettis έχουμε το:

Θεωρημα 3.15. *(Bourgain, 1980, Cor. 8,* [**15**]*) Αν ένας χώρος Banach X δεν έχει την RNP, τότε υπάρχει Dunford-Pettis τελεστής $T : L^1(0,1) \to X$ που είναι μη αναπαραστάσιμος.*

Το 1990 οι Σ. Αργυρός και Μ. Πετράκης στο άρθρο τους *A property of non-strongly regular operators* ([**7**]) αποδεικνύουν αποτέλεσμα αντίστοιχο του θεωρήματος 3.14, για non-strongly regular τελεστές. Ειδικότερα:

Θεωρημα 3.16. *(Αργυρός -Πετράκης, 1990,* [**7**]*) Έστω χώρος Banach X και $T : L^1(0,1) \to X$ ένας non-strongly regular τελεστής. Τότε υπάρχει Dunford-Pettis τελεστής $D : L^1(0,1) \to L^1(0,1)$ τέτοιος ώστε ο τελεστής $TD : L^1(0,1) \to X$ να είναι μη αναπαραστάσιμος.*

Μέσω αυτού του θεωρήματος και του αποτελέσματος του Schachermayer προκύπτει:

Πορισμα 3.17. *(Αργυρός -Πετράκης, 1990, Cor.1,* [**7**]*) Έστω K κλειστό, κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X. Υποθέτουμε ότι για τον τελεστή $T : L^1(0,1) \to X$ με $T(\mathcal{P}) \subset K$ (όπου $\mathcal{P}$ το σύνολο των densities στον L^1) ισχύει ότι ο τελεστής TD είναι αναπαραστάσιμος για κάθε* *τελεστή* $D : L^1(0,1) \to L^1(0,1)$. *Τότε η RNP και KMP είναι ισοδύναμες ιδιότητες στα υποσύνολα του* K.

Τέλος έχουμε ακόμα μία ανάλογη πρόταση της 3.13.

Πρόταση 3.18. *Έστω* X, X_n, $n \in \mathbb{N}$ *χώροι Banach. Υποθέτουμε ότι* $X = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$ *και έστω* $T : L^1(0,1) \to X$ *ένας non Dunford-Pettis τελεστής, τέτοιος ώστε οι τελεστές* $P_nT : L^1(0,1) \to X_n$ *να είναι Dunford-Pettis.*

Τότε υπάρχει τελεστής $D : L^1(0,1) \to L^1(0,1)$ *τέτοιος ώστε: ο τελεστής* $TD : L^1(0,1) \to X$ *να είναι μή αναπαραστάσιμος και οι τελεστές* $P_nTD : L^1(0,1) \to X_n$ *να είναι αναπαραστάσιμοι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Στο [**15**] αποδεικνύεται ότι αν ο τελεστής $T : L^1(0,1) \to X$ είναι non Dunford-Pettis υπάρχει δυαδικό δενδρο $\{\psi_{n,k} : n = 0,1,\ldots,1 \leq k \leq 2^n\}$ στον $L^1(0,1)$ έτσι ώστε $(T\psi_{n,k})$ είναι ένα $\delta-$δενδρο στον X. Μπορούμε να έχουμε τις nodes $d_{n,k} = \psi_{n+1,2k-1} - \psi_{n+1,2k}$ του δένδρου $(\psi_{n,k})$ να είναι της μορφής $2\psi_{n,k}r_{n,k}$, όπου τα $r_{n,k}$ είναι στοιχεία μιάς ασθενώς μηδενικής ακολουθίας $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^1(0,1)$ έτσι ώστε $\inf_n \|Tr_n\| > \delta'$ για κάποιο $\delta' > 0$. Αφού P_iT είναι Dunford-Pettis για κάθε $i \in \mathbb{N}$ μπορούμε να διαλέξουμε τα $\{r_{n,k} : n = 0,1,\ldots,1 \leq k \leq 2^n\}$ έτσι ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sum_{k=1}^{2^n} \|P_iTd_{n,k}\| < \frac{1}{2^n}$ όταν $n > n_i$.
Έστω $D : L^1(0,1) \to L^1(0,1)$ ο τελεστής που ορίζεται μέσω του δένδρου $(\psi_{n,k})$. Άμεσα προκύπτει ότι οι τελεστές $P_iTD : L^1(0,1) \to X$ είναι αναπαραστάσιμοι για κάθε $i \in \mathbb{N}$ (μάλιστα είναι δυνατόν να κατασκευαστούν έτσι ώστε να είναι συμπαγείς). $\square$

3.5. Block δ-approximate bushes, συνέπειες της unconditionality (αθροισμάτων) σε χώρους με Schauder dimensional decomposition

Αν ένας χώρος Banach X έχει Schauder decomposition (δηλαδή έχουμε $X = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$) και $x \in X$, λέμε ότι το σύνολο I είναι *φορέας* του x και γράφουμε $I = suppx$, αν I είναι το ελάχιστο υποσύνολο των φυσικών ώστε $x \in \sum_{n\in I} \oplus X_n$.

Ορισμός 3.19. *Έστω* x, X_n $n \in \mathbb{N}$, *χώροι Banach ώστε* $X = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$. *Ενα δ-approximate bush* $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ *θα λέγεται* block δ-approximate bush, *αν υπάρχει οικογένεια $(I_a)_{a\in\mathcal{A}}$ ξένων ανά δύο διαστημάτων του $\mathbb{N}$ έτσι ώστε αν $a <_{lex} b$, τότε $I_a < I_b$ και για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε $suppy_a \subset I_a$ (όπου y_a οι nodes του bush).*

Πρόταση 3.20. *Έστω X, X_n, χώροι Banach με $X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$, όπου το άθροισμα είναι unconditional, και ο μη αναπαραστάσιμος τελεστής $T : L^1(0,1) \to X$ τέτοιος ώστε οι τελεστές $P_n \circ T : L^1(0,1) \to X_n$ να είναι αναπαραστάσιμοι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (όπου P_n οι προβολές $P_n : X \to X_n$). Έστω $K = \overline{T(\mathcal{P})}$ και ότι στα υποσύνολα του K, η PCP και η RNP είναι ισοδύναμες ιδιότητες. Τότε υπάρχουν:*

1. ένα δ-approximate bush $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset K$

2. $\varepsilon_\alpha \searrow 0$, $\varepsilon_\alpha > 0$, $\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \varepsilon_\alpha < \infty$

3. ένα bush $(x'_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset X$, τέτοιο ώστε:

a. $\|x_\alpha - x'_\alpha\| < \varepsilon_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$

β. αν $Y_\alpha =< \{y'_\beta\}_{\beta\in S_\alpha} >$ τότε Y_a έχουν ξένους φορείς (ως προς X_n)

γ. αν $Y_\alpha =< \{y'_\beta\}_{\beta\in S_\alpha} >$ τότε Y_a έχουν ξένους φορείς (ως προς μία βάση του $C[0,1]$, θεωρώντας τον X υπόχωρο του $C[0,1]$).

Απόδειξη. Αφού ο T είναι μη αναπαραστάσιμος, είναι non strongly regular, συνεπώς το K είναι non strongly regular (Θεώρημα 2.5, [**3**]).

Άρα υπάρχουν $U \subset (0,1)$ και $\delta > 0$, έτσι ώστε για κάθε ασθενώς ανοιχτό σύνολο W στο $\mathcal{P}_U$, να έχουμε: $diam(T(W)) > 2\delta$ (όπου $\mathcal{P}_U$ όπως πριν).

Θεωρούμε $f_\emptyset \in \mathcal{P}_U$ και το δίκτυο $\{f_{(\emptyset,i)}\}_{i\in I_\emptyset}$ με:

$$f_{(\emptyset,i)} \xrightarrow{w} f_\emptyset \text{ και } \left\|Tf_{(\emptyset,i)} - Tf_\emptyset\right\| > \delta \ , \ \forall i \in I_\emptyset \ .$$

Αφού οι τελεστές P_nT είναι αναπαραστάσιμοι παίρνουμε:

(1) $$P_nTf_{(\emptyset,i)} \xrightarrow{\|\cdot\|} P_nTf_\emptyset \ ,\forall n \in \mathbb{N}$$

Επίσης αφού $Tf_\emptyset \in X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$, θα έχουμε $Tf_\emptyset = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_nTf_\emptyset$ και για $\varepsilon_\emptyset > 0$, λόγω της σύγκλισης της σειράς, υπάρχει $n_\emptyset \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

(2) $$\left\|P_{(n_\emptyset,\infty)}Tf_\emptyset\right\| < \varepsilon_\emptyset$$

Λόγω της *(1)* , $\forall n \le n_\emptyset$, μπορούμε να διαλέξουμε υποδίκτυο $\{f_{(\emptyset,i)}\}_{i\in I_\emptyset}$ (που συμβολίζουμε όπως πριν) τέτοιο ώστε:

(3) $$\left\|P_nTf_{(\emptyset,i)} - P_nTf_\emptyset\right\| < \frac{\varepsilon_\emptyset}{n_\emptyset} \ , \ \forall n \le n_\emptyset$$

Πάλι λόγω του Θεωρήματος Mazur, θα υπάρχει υποσύνολο $F_\emptyset$ (πεπερασμένου πλήθους) του $I_\emptyset$ και αριθμοί $\left\{\lambda_{(\emptyset,i)}\right\}_{i\in F_\emptyset}$, $\lambda_{(\emptyset,i)} \ge 0$, $\sum\limits_{i\in F_\emptyset} \lambda_{(\emptyset,i)} = 1$ τέτοιοι ώστε:

(4) $$\left\|\sum_{i\in F_\emptyset}\lambda_{(\emptyset,i)}f_{(\emptyset,i)}-f_\emptyset\right\|<\varepsilon_\emptyset$$

Αν $a=(\emptyset,i)$ με $i\in F_\emptyset$ θεωρούμε το σύνολο:
$S_\emptyset=\{a:a=(\emptyset,i),i\in F_\emptyset\}=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ (αριθμώντας τα στοιχεία του), με $m=\#F_\emptyset$.
Για $a\in S_\emptyset$, παίρνοντας τα στοιχεία του X : $d_a=Tf_\emptyset-Tf_a=\sum_{n=1}^{\infty}P_nTf_\emptyset-\sum_{n=1}^{\infty}P_nTf_a$, λόγω της unconditionality του αθροίσματος, θα έχουμε: $d_a=\sum_{n=1}^{\infty}(P_nTf_\emptyset-P_nTf_a)=\sum_{n=1}^{\infty}d_a^{(n)}$,
όπου $d_a^{(n)}=P_nTf_\emptyset-P_nTf_a\in X_n$.

Λόγω της *(3)* για τα στοιχεία αυτά θα έχουμε:

(5) $$\left\|d_a^{(n)}\right\|\leq\frac{\varepsilon_\emptyset}{n_\emptyset}\ ,\ n\leq n_\emptyset.$$

Έστω $d_\emptyset=Tf_\emptyset=\sum_{n=1}^{\infty}P_nTf_\emptyset=\sum_{n=1}^{\infty}d_\emptyset^{(n)}$. Χρησιμοποιώντας την *(2)* θα έχουμε επίσης:

(6) $$\left\|\sum_{n>n_\emptyset}d_\emptyset^{(n)}\right\|<\varepsilon_\emptyset$$

Τώρα αν $\varepsilon_1<\varepsilon_\emptyset$, για τα στοιχεία $\{f_a\}_{a\in S_\emptyset}\subseteq\mathcal{P}_U\subseteq L^1(0,1)$, μιας και $Tf_a=\sum_{n=1}^{\infty}P_nTf_a\in X$, λόγω της σύγκλισης της σειράς, για κάθε $a\in S_\emptyset$, θα υπάρχει $n_1>n_\emptyset$, $n_1\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε:

(7) $$\left\|P_{(n_1,\infty)}Tf_a\right\|<\varepsilon_1\ ,\ \text{για } a\in S_\emptyset\ .$$

Θέτοντας: $J=[1,2,...,n_\emptyset]$, $J_\emptyset=(n_\emptyset,...,n_1]=[n_\emptyset+1,...,n_1]$, παρατηρούμε ότι $d_\emptyset$ ουσιαστικά φέρεται στον $<X_n:n\in J>$ (λόγω των *(2)* και *(6)*) και $\forall a\in S_\emptyset$ οι d_a ουσιαστικά φέρονται στον $<X_n:n\in J_\emptyset>$ (λόγω των *(5)* και *(7)*).

$$\left(\text{Αφού }\left\|\sum_{n>n_1}d_a^{(n)}\right\|\leq\left\|\sum_{n>n_1}P_nTf_\emptyset\right\|+\left\|\sum_{n>n_1}P_nTf_a\right\|<\varepsilon_\emptyset+\varepsilon_1\right)$$

Έτσι $d_\emptyset$ και d_a και $a\in S_\emptyset$ έχουν σχεδόν ξένους φορείς στον X.

Όπως πριν για την $f_{a_1}\in\mathcal{P}_U\subseteq L^1(0,1)$ μπορούμε να βρούμε δίκτυο $\left\{f_{(a_1,i)}\right\}_{i\in I_{a_1}}\subseteq\mathcal{P}_U\subseteq L^1(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f_{(a_1,i)}\xrightarrow{w}f_{a_1}\text{ και }\left\|Tf_{(a_1,i)}-Tf_{a_1}\right\|>\delta,\ \forall i\in I_{a_1}$$

και επίσης μπορούμε να βρούμε υποδίκτυο τέτοιο ώστε:

(8) $\left\|P_nTf_{(a_1,i)}-P_nTf_{a_1}\right\|<\frac{\varepsilon_1}{n_1}\ ,\ \forall n\leq n_1$ (λόγω της αναπαραστασιμότητας των P_nT).

Πάλι λόγω του θεωρήματος Mazur μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο σύνολο F_{a_1} του I_{a_1} και μη αρνητικούς αριθμούς $\left\{\lambda_{(a_1,i)}\right\}_{i\in F_{a_1}}$, με $\sum\limits_{i\in F_{a_1}} \lambda_{(a_1,i)} = 1$, τέτοιους ώστε: $\left\|\sum\limits_{i\in F_{a_1}} \lambda_{(a_1,i)} f_{(a_1,i)} - f_{a_1}\right\| < \varepsilon_1$.

Αν $\beta \in S_{a_1} = \{\beta : \beta = (a_1, i)$ με $i \in F_{a_1}\} = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l\}$, όπου $l = \#F_{a_1}$ και επειδή $Tf_\beta \in X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$, για $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

(9) $\left\|P_{(n_2,\infty)} T f_\beta\right\| < \varepsilon_2$, για $\beta \in S_{a_1}$.

Αν $J_{a_1} = (n_1, ..., n_2] = [n_1 + 1, ..., n_2]$ και $\beta \in S_{a_1}$ παρατηρούμε ότι για:
$$d_\beta = Tf_{a_1} - Tf_\beta = \sum_{n=1}^{\infty} P_n T f_{a_1} - \sum_{n=1}^{\infty} P_n T f_\beta \overset{uncond.}{=}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (P_n T f_{a_1} - P_n T f_\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_\beta^{(n)}$$
θα έχουμε $\left\|d_\beta^{(n)}\right\| < \frac{\varepsilon_1}{n_1}$ για κάθε $n \in J \cup J_\emptyset$ (λόγω της *(8)*)

και $\left\|\sum\limits_{n>n_2} d_\beta^{(n)}\right\| \le \left\|\sum\limits_{n>n_2} P_n T f_{a_1}\right\| + \left\|\sum\limits_{n>n_2} P_n T f_\beta\right\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

(λόγω των *(7)* και *(9)*).

Έτσι όταν $\beta \in S_{a_1}$, το d_β φέρεται ουσιαστικά στον $< X_n : n \in J_{a_1} >$ για κάθε $\beta \in S_{a_1}$ και έχει σχεδόν ξένο φορέα στον X με το $d_\emptyset$ και το d_a, όταν $a \in S_\emptyset$.

Ομοίως για $f_{a_2} \in \mathcal{P}_U \subseteq L^1(0,1)$ θα έχουμε:
$f_{(a_2,i)} \overset{w}{\to} f_{a_2}$, $\forall i \in I_{a_1}$, $\left\|Tf_{(a_2,i)} - Tf_{a_2}\right\| > \delta$, και θεωρώντας υποδίκτυο παίρνουμε:

(10) $\left\|P_n T f_{(a_2,i)} - P_n T f_{a_2}\right\| < \frac{\varepsilon_2}{n_2}$, $\forall n \le n_2$.

Επίσης υπάρχει $F_{a_2} \subseteq I_{a_1}$ με $\#F_{a_2} < \infty$ και μη αρνητικοί αριθμοί $\left\{\lambda_{(a_2,i)}\right\}_{i\in F_{a_2}}$ με $\sum\limits_{i\in F_{a_2}} \lambda_{(a_2,i)} = 1$ τέτοιοι ώστε:
$$\left\|\sum_{i\in F_{a_2}} \lambda_{(a_2,i)} f_{(a_2,i)} - f_{a_2}\right\| < \varepsilon_2.$$
Θέτοντας $S_{a_2} = \{\gamma : \gamma = (a_2, i)$ με $i \in F_{a_2}\} = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s\}$ για $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$ υπάρχει $n_3 \in \mathbb{N}$ με $n_3 > n_2$ τέτοιο ώστε:

(11) $\left\|P_{(n_3,\infty)} T f_\gamma\right\| < \varepsilon_3$, για $\gamma \in S_{a_2}$.

Αν $J_{a_2} = (n_2, ..., n_3] = [n_2 + 1, ..., n_3]$ και $\gamma \in S_{a_2}$ παρατηρούμε ότι για $d_\gamma = Tf_{a_2} - Tf_\gamma = ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_\gamma^{(n)}$ έχουμε:

$\left\|d_\gamma^{(n)}\right\| < \frac{\varepsilon_2}{n_2}$ για κάθε $n \in J \cup J_\emptyset \cup J_{a_1}$ (λόγω της *(10)*) και

$$\left\| \sum_{n>n_2} d_\gamma^{(n)} \right\| \leq \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \text{ (λόγω των } (9) \text{ και } (11)\text{).}$$

Άρα d_γ φέρονται ουσιαστικά στον $< X_n : n \in J_{a_2} >$ για κάθε $\gamma \in S_{a_2}$.

Συνεχίζουμε ομοίως έως ότου εξαντλήσουμε τα $a \in S_\emptyset$, $\beta \in S_{a_1}$, $\gamma \in S_{a_2}$,..., κλπ.

Έτσι έχουμε επαγωγικά κατασκευάσει:

A. Ένα σύνολο δεικτών $\mathcal{A} \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες:

1.Αν $a \in \mathcal{A}$, τότε a είναι της μορφής $a = (\emptyset, a_1, a_2, ..., a_n)$ και

2.$\mathcal{A}$ είναι ολικά διατεταγμένο (λεξικογραφικά, χρησιμοποιώντας την έννοια του μήκους του a με: $|(\emptyset)| = 0$, $|(\emptyset, a_1, a_2, ..., a_n)| = n$) ως εξής:

$$a < b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} |a| < |b| \\ \text{ή} \\ |a| = |b| = n \text{ και υπάρχει } j \text{ με } a_j < b_j, \\ \text{ενώ } a_k = b_k \text{ για } k < j \leq n \end{array} \right\}.$$

Ορίζουμε επίσης $S_a = \{\beta = (a, a_{n+1}) : a_{n+1} \in F_a, \#F_a < \infty\}$. Προφανώς $\#S_a < \infty$.

B. Ένα δ-approximate bush $\{f_a\}_{a\in\mathcal{A}} \in \mathcal{P}_U \subseteq L^1(0,1)$

Γ. Μία οικογένεια ξένων διαστημάτων φυσικών αριθμών $\{J_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ με $J \cup \left(\bigcup_{a\in\mathcal{A}} J_a \right) = \mathbb{N}$ και $\max(J_a) + 1 = \min(J_{a^+})$ (a^+ ο λεξικογραφικά επόμενος του a), τέτοια ώστε:

αν $\beta \in S_a$ τότε d_β φέρεται ουσιαστικά στον $< X_n : n \in J_a >$ και αν $\beta \in S_{a_1}$, $\gamma \in S_{a_2}$ με $a_1 \neq a_2$ τότε d_β , d_γ φέρονται ουσιαστικά σε διαφορετικά J_a .

Η παραπάνω κατασκευή μπορει να γίνει έτσι ώστε να είναι αληθής η ιδιότητα γ.

Θέτουμε $R_n : X \to \mathbb{R}$ με $R_n(x) = \rho_n^{(x)}$, όταν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{(x)} e_n$, όπου $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία βάση του $C[0,1]$. Τότε οι τελεστές R_nT είναι αναπαραστάσιμοι.

Στο πρώτο βήμα παίρνουμε $n_\emptyset = \max\{n_{\emptyset,P}, n_{\emptyset,R}\}$, όπου $n_{\emptyset,P}$ είναι τέτοιο ώστε $\left\| P_{(n_{\emptyset,P},\infty)} T f_\emptyset \right\| < \varepsilon_\emptyset$ όπως στην *(2)* και $n_{\emptyset,R}$ είναι τέτοιο ώστε $\left\| \sum_{n=n_{\emptyset,R}}^{\infty} \rho_n^{(Tf_\emptyset)} e_n \right\| < \varepsilon_\emptyset$. Επιλέγουμε επίσης το υποδίκτυο $\{f_{(\emptyset,i)}\}_{i\in I_\emptyset}$ τέτοιο ώστε $\left| R_nTf_{(\emptyset,i)} - R_nTf_\emptyset \right| < \frac{\varepsilon_\emptyset}{n_\emptyset}$, $\forall n \leq n_\emptyset$. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο σε κάθε βήμα.

Θέτοντας $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} = (Tf_a)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ και $(x'_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} = (P_{J_\alpha}Tf_a)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, κατασκευάζουμε τα ζητούμενα bushes. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.21. *Έστω X, X_n, χώροι Banach με $X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$, όπου το άθροισμα είναι unconditional, και ο μη αναπαραστάσιμος τελεστής $T : L^1(0,1) \to X$ τέτοιος ώστε οι τελεστές $P_n \circ T : L^1(0,1) \to X_n$ να είναι αναπαραστάσιμοι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (όπου P_n οι προβολές $P_n : X \to X_n$). Έστω $K = \overline{T(\mathcal{P})}$ και ότι στα υποσύνολα του K, η PCP και η RNP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.*

Τότε το σύνολο K περιέχει ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο L χωρίς ακραία σημεία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό της πρότασης 3.20. Θέτουμε $d_{\emptyset} = x_{\emptyset} = Tf_{\emptyset}$ και $x_a = Tf_a$. Έστω $d_a = x_\beta - x_a$, με $\beta \in S_a$, οι nodes του bush και $\widetilde{d_\beta} = P_{J_a} d_\beta$, με J_a το διάστημα των ακεραίων όπου d_β είναι ουσιαστκά φερόμενο (που σημαίνει $\left\| \sum\limits_{n \notin J_a} d_\beta^{(n)} \right\| < \varepsilon_a$ για $\varepsilon_a > 0$) .

Για $a \in \mathcal{A}$ επιλέγουμε $\varepsilon_a > 0$ τέτοιο ώστε: $\varepsilon_a \overset{|a|\to\infty}{\to} 0$ και $\sum\limits_{a\in\mathcal{A}} \varepsilon_a < \infty$, (π.χ. $\varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{2^{|a|}|S_a|}$). Έστω $x \in \overline{co}\,(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$. Τότε υπάρχουν $\left(\lambda_a^{(x)}\right)_{a\in\mathcal{A}}$ με $0 \le \lambda_a^{(x)} \le 1$ και $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a^{(x)} = 1$ τέτοια ώστε $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a^{(x)} d_a$.

(*) Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση σειράς αυτής της μορφής είναι ισοδύναμη με την σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a^{(x)} \widetilde{d_a}$, αφού

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \left(\sum_{n\notin J_a} d_\beta^{(n)} \right) \right\| < \sum_{a\in\mathcal{A}} \varepsilon_a = M$$

και μπορούμε εξ αρχής να διαλέξουμε το M αρκετά μικρό.

Η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a^{(x)} \widetilde{d_a}$ συγκλίνει σε ένα $\widetilde{x} \in X$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $S_{\emptyset} = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ (στην γενική περίπτωση μπορεί να συμβεί $S_{\emptyset} = \{a_1\}$, $S_{a_1} = \{a_2\}$,..., όμως ξέρουμε ότι υπάρχει ένα a με ελάχιστο $|a|$, τέτοιο ώστε $|S_a| \ge 2$). Η unconditionality δίνει: $\widetilde{x} =$

$$\widetilde{d_\emptyset} + \lambda_{a_1}^{(x)} \widetilde{d_{a_1}} + \lambda_{a_2}^{(x)} \widetilde{d_{a_2}} + ... + \lambda_{a_m}^{(x)} \widetilde{d_{a_m}} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{|a|=n \\ a_1<a}} \lambda_a^{(x)} \widetilde{d_a} + \sum_{j=2,...,m} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{|a|=n \\ a_j<a}} \lambda_a^{(x)} \widetilde{d_a} \right) =$$

$$= \left\{ \lambda_{a_1}^{(x)} \widetilde{d_\emptyset} + \lambda_{a_1}^{(x)} \widetilde{d_{a_1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{|a|=n \\ a_1<a}} \lambda_a^{(x)} \widetilde{d_a} \right\} +$$

$$+\left\{(1-\lambda_{a_1}^{(x)})\widetilde{d_\emptyset}+\sum_{j=2,\dots,m}\lambda_{a_j}^{(x)}\widetilde{d_{a_j}}+\sum_{j=2,\dots,m}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\substack{|a|=n\\a_j<a}}\lambda_a^{(x)}\widetilde{d_a}\right)\right\}.$$

Τα αθροίσματα στις αγκύλες συγκλίνουν λόγω της unconditionality και του ότι : $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{\substack{|a|=n\\a_1<a}}\lambda_a^{(x)}\widetilde{d_a}=P_{\underset{a_1<a}{\cup J_a}}(x)$ και $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{\substack{|a|=n\\a_j<a}}\lambda_a^{(x)}\widetilde{d_a}=P_{\underset{a_j<a}{\cup J_a}}(x)$.

Θέτουμε: $\left\{\lambda_{a_1}^{(x)}\widetilde{d_\emptyset}+\lambda_{a_1}^{(x)}\widetilde{d_{a_1}}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{\substack{|a|=n\\a_1<a}}\lambda_a^{(x)}\widetilde{d_a}\right\}=\widetilde{x_1}\in X$ και

$$\left\{(1-\lambda_{a_1}^{(x)})\widetilde{d_\emptyset}+\sum_{j=2,\dots,m}\lambda_{a_j}^{(x)}\widetilde{d_{a_j}}+\sum_{j=2,\dots,m}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\substack{|a|=n\\a_j<a}}\lambda_a^{(x)}\widetilde{d_a}\right)\right\}=\widetilde{x_2}\in X.$$

Τώρα τα αθροίσματα:

$\lambda_{a_1}^{(x)}d_\emptyset+\lambda_{a_1}^{(x)}d_{a_1}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{\substack{|a|=n\\a_1<a}}\lambda_a^{(x)}d_a$ και

$(1-\lambda_{a_1}^{(x)})d_\emptyset+\sum\limits_{j=2,\dots,m}\lambda_{a_j}^{(x)}d_{a_j}+\sum\limits_{j=2,\dots,m}\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{\substack{|a|=n\\a_j<a}}\lambda_a^{(x)}d_a\right)$, συγκλίνουν (λόγω της *(*)*) στα στοιχεία x_1 , $x_2\in X$ και τα στοιχεία $y_1=\frac{1}{\lambda_{a_1}^{(x)}}x_1$ και $y_2=\frac{1}{1-\lambda_{a_1}^{(x)}}x_2$ ανήκουν στο L .

(**) Έχουμε επίσης $x=\lambda_{a_1}^{(x)}y_1+\left(1-\lambda_{a_1}^{(x)}\right)y_2$.

Διαλέγοντας $M=\sum\limits_{a\in\mathcal{A}}\varepsilon_a<\frac{\delta}{3}$, με δ αυτό του approximate bush παίρνουμε:

$\left\|\sum\limits_{k\in J_s}d_\beta^{(k)}-\sum\limits_{k\in J_s}d_\gamma^{(k)}\right\|>\left\|\sum\limits_{k\in J_s}d_\beta^{(k)}\right\|-\left\|\sum\limits_{k\in J_s}d_\gamma^{(k)}\right\|>\frac{2\delta}{3}-\frac{\delta}{3}=\frac{\delta}{3}$, αν $\beta>a_1$, $\gamma>a_j$ για $j=2,\dots,m$ και J_s το διάστημα των ακεραίων στο οποίο φέρεται ουσιαστικά η d_β.

Συνεπώς $P_{J_a}(y_1-y_2)\neq 0$ (για κάθε J_a) και λόγω της unconditionality: *(***)* $\quad y_1-y_2\neq 0$

(Προφανώς $x\neq y_1$ και $x\neq y_2$, αλλοιώς λόγω της *(**)* θα είχαμε $y_1=y_2$)

Έτσι από τις *(**)* και *(***)*, για κάθε $x\in L$, υπάρχουν $y_1,y_2\in L$ ώστε το x να μπορεί να γραφεί ως κυρτός γραμμικός συνδυασμός των y_1,y_2 με $x\neq y_1$ και $x\neq y_2$. Άρα το x δεν είναι ακραίο σημείο. $\square$

3.6. Συνέπειες όταν K κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-PCP, υποσύνολο του X και ο χώρος Banach X δεν περιέχει τον ℓ^1

Λημμα 3.22. *Έστω X χώρος Banach που δεν περιέχει τον l_1, K κυρτό, κλειστό, φραγμένο non-PCP υποσύνολο του X, F υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του X και φραγμένοι τελεστές: $Q_i : X \to c_0$, $1 \leq i \leq l$. Τότε για $x \in F \cap K$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν στοιχεία $\{x_s\}_{1\leq s\leq d=d(x,\varepsilon)}$ του K τέτοια ώστε:*

1. $\|x - x_s\| > \delta$

2. $\left\| x - \sum\limits_{s=1}^{d} \lambda_s x_s \right\| < \varepsilon$, *όπου* $\lambda_s \geq 0$ *και* $\sum\limits_{s=1}^{d} \lambda_s = 1$ *για* $s \in \{1, ..., d\}$.

3. $\forall y \in F$, $\mu_s \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{s=1}^{d} |\mu_s| \leq 1$, *και* $i = 1, ..., l$ *έχουμε:*

$$\left\| Q_i(y) + \sum_{s=1}^{d} \mu_s Q_i(x - x_s) \right\| \leq \max \left\{ \|Q_i(y)\|, \max_{s\in\{1,...,d\}} \{|\mu_s| \|Q_i(x - x_s)\|\} \right\} + 3\varepsilon.$$

Αποδειξη. Αφού το K δεν έχει την PCP, $x \in K$, και ο l_1 δεν περιέχεται στον X, σύμφωνα με το γεγονός 3.4, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ τέτοια ώστε:

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ και } \|x_n - x\| > \delta.$$

Θα έχουμε επίσης: $Q_i(x_n) \xrightarrow{w} Q_i(x)$ για $i = 1, ..., l$.

Αφού $\dim F < \infty$, για $i = 1, ..., l$, η εικόνα του F μέσω της Q_i είναι norm συμπαγές υποσύνολο του c_0, οπότε για $\varepsilon_1 > 0$ υπάρχει n_{ε_1} τέτοιο ώστε:

$$\forall x \in B_F\ ,\ \left\| P_{[n_{\varepsilon_1},\infty)} Q_i(x) \right\| < \varepsilon_1$$

(με $P_{[1,k]}(y) = (y_1, y_2, ..., y_k, 0, 0, ...)$ και $P_{[k+1,\infty)}(y) = (0, 0, ..., 0, y_{k+1}, y_{k+2}, ...)$ αν $y = (y_1, y_2, ..., y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, ...) \in c_0$).

Για $i = 1, ..., l$ θεωρούμε τις ακολουθίες στον c_0, $\{Q_i(x - x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, και περνώντας σε υπακολουθία όπου χρειάζεται, διαλέγουμε απειροσύνολο $L \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i = 1, ..., l$ να έχουμε:

είτε *(I)* $Q_i(x - x_n) \underset{n\in L}{\xrightarrow{\|\cdot\|}} 0$

είτε *(II)* $\|Q_i(x - x_n)\| > \delta_i$, για $\delta_i > 0$.

Τότε $\{1, ..., l\} = E_1 \cup E_2$, με

$E_1 = \{i \in \{1, ..., l\}$ και η *(I)* είναι αληθής$\}$ και

$E_2 = \{i \in \{1, ..., l\}$ και η *(II)* είναι αληθής$\}$.

Επιλέγουμε άπειρο υποσύνολο L_1 του L τέτοιο ώστε:

(*) $$\sum_{n\in L_1} \|Q_i(x - x_n)\| < \varepsilon\ ,\ \forall i \in E_1$$

Υπολήμμα: Μπορούμε να διαλέξουμε απειροσύνολο $L_2 \subseteq L_1$ τέτοιο ώστε, για $i \in E_2$ τα στοιχεία της ακολουθίας $Q_i(x-x_n)_{n\in L_2}$ να έχουν σχεδόν ξένους φορείς στο c_0.

Απόδειξη υπολήμματος: Έστω $i \in E_2$. Έχουμε $Q_i(x_n) \xrightarrow{w} Q_i(x)$ και υπάρχει $\delta_i > 0$ τέτοιο ώστε $\|Q_i(x-x_n)\| > \delta_i$ για κάθε $n \in L_1$ και αν $P_k(y) = y_k$, $(P_k : c_0 \to \mathbb{R}$), θα έχουμε επίσης

(1) $\qquad P_kQ_i(x-x_n) \underset{n\in L}{\to} 0$, για κάθε k

Κατασκευάζουμε απειροσύνολο $S_i \subseteq L_1$, τέτοιο ώστε τα στοιχεία $\{Q_i(x-x_n)\}_{n\in S_i}$ να έχουν σχεδόν ξένους φορείς.

Λόγω της *(1)* υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε: $\left\|P_{[1,n_{\varepsilon_1}]}Q_i(x-x_n)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_1$, $n \in L_1$.

Αφού $Q_i(x-x_{n_1}) \in c_0$ υπάρχει $n_{\varepsilon_2} > n_{\varepsilon_1}$ τέτοιο ώστε:

$\left\|P_{[n_{\varepsilon_2},\infty)}Q_i(x-x_{n_1})\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Πάλι λόγω της *(1)* υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε:

$\left\|P_{[1,n_{\varepsilon_2}]}Q_i(x-x_n)\right\| < \frac{\varepsilon}{2^2}$, $\forall n \geq n_2$, $n \in L_1$ και συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο.

Το σύνολο $\{n_1, n_2, ...\}$ δίνει το σύνολο δεικτών S_i. Αν $j \neq i$ με $j \in E_2$ βρίσκουμε $S_j \subseteq S_i$ ομοίως. Μετά από πεπερασμένα βήματα (το πολύ l), μπορούμε να κατασκευάσουμε $L_2 = \bigcap\limits_{i\in E_2} S_i$ με τις ζητούμενες ιδιότητες και το υπολήμμα έχει αποδειχθεί.

Γράφουμε J_{i,n_k} για το block των συντεταγμένων στο c_0 όπου ουσιαστικά φέρεται το $Q_i(x-x_{n_k})$. Η παραπάνω κατασκευή δημιουργεί: $J_{0,n_{\varepsilon_1}} = [1, n_{\varepsilon_1}]$, J_{1,n_1}, J_{1,n_2}, ... και κατόπιν J_{2,n'_1}, J_{2,n'_2}, ...$J_{l,n_1^{(l)}}$, $J_{l,n_2^{(l)}}$, ...(αν $\{1,...,l\} = E_2$) και δεν εξασφαλίζει την σχεδόν διαφορετικότητα των φορέων των $Q_i(x-x_m)$ και $Q_j(x-x_k)$ για $i \neq j$ και $m,k \in L_2$. Αφού $\#E_2 < \infty$, μπορούμε να βρούμε n_1 τέτοιο ώστε: $\left\|P_{[1,n_{\varepsilon_1}]}Q_i(x-x_n)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_1$, $n \in L_1$ για κάθε $i \in E_2$ και έτσι παίρνουμε: $J_{i,n_k} = J_{j,n_k}$, αν $i,j \in E_2$.

Φυσικά το σύνολο $J_{0,n_{\varepsilon_1}} \cup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} J_{i,n_k}\right) = J \subset \mathbb{N}$ είναι απειροσύνολο.

Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία ακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_\mu)_{\mu\in L_2 \cong \mathbb{N}}$ (με $L_2 \subseteq L_1 \subset L \subset \mathbb{N}$) τέτοια ώστε : $x_\mu \xrightarrow{w} x$ και $\|x_\mu - x\| > \delta$.

Από το θεώρημα Mazur, για $\varepsilon > 0$, υπάρχει κυρτός συνδυασμός στοιχείων της ακολουθίας $(x_\mu)_{\mu\in L_2}$ έτσι ώστε:

$$\left\|x - \sum_{s\in I} \lambda_s x_s\right\| < \varepsilon,\ I \subseteq L_2,\ |I| < \infty.$$

Έστω $I = \{1,2,...,d\}$. Έχουμε $\left\| x - \sum\limits_{s=1}^{d} \lambda_s x_s \right\| < \varepsilon$, με $\lambda_s \geq 0$ και $\sum\limits_{s=1}^{d} \lambda_s = 1$.

Για $i \in E_2$ και $\forall y \in F$ έχουμε επίσης:

$$\left\| Q_i(y) + \sum_{s=1}^{d} \mu_s Q_i(x - x_s) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \oplus P_n \left(Q_i(y) + \sum_{s=1}^{d} \mu_s Q_i(x - x_s) \right) \right\| =$$
$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \oplus P_n \left(Q_i(y)\right) + \sum_{s=1}^{d} \mu_s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus P_n Q_i(x - x_s) \right) \right\| =$$
$$\left\| P_{J_0}\left(Q_i(y)\right) \oplus P_{J_0^c}\left(Q_i(y)\right) \oplus \sum_{s=1}^{d} \mu_s P_{J_{i,s}} Q_i(x - x_s) \oplus \sum_{s=1}^{d} \mu_s P_{J_{i,s}^c} Q_i(x - x_s) \right\| \leq$$
$$\left\| P_{J_0}\left(Q_i(y)\right) \oplus \sum_{s=1}^{d} \mu_s P_{J_{i,s}} Q_i(x - x_s) \right\| + \left\| P_{J_0^c}\left(Q_i(y)\right) \right\| + \left\| \sum_{s=1}^{d} \mu_s P_{J_{i,s}^c} Q_i(x - x_s) \right\| \leq$$
$$\left\| P_{J_0}\left(Q_i(y)\right) \oplus \sum_{s=1}^{d} \mu_s P_{J_{i,s}} Q_i(x - x_s) \right\| + \varepsilon + \sum_{s=1}^{d} |\mu_s| \tfrac{\varepsilon}{2^s} \leq$$
$$\left\| P_{J_0}\left(Q_i(y)\right) \oplus \sum_{s=1}^{d} \mu_s P_{J_{i,s}} Q_i(x - x_s) \right\| + \varepsilon(1 + \sum_{s=1}^{d} |\mu_s|) \overset{disj.}{=}$$
$$\max\left\{ \left\| P_{J_0}\left(Q_i(y)\right) \right\|, \max\left\{ |\mu_s| \left\| P_{J_{i,s}} Q_i(x - x_s) \right\| \right\} \right\} + \varepsilon(1 + \sum_{s=1}^{d} |\mu_s|) \leq$$
$$\max\left\{ \left\| (Q_i(y)) \right\| + \varepsilon, \max\left\{ |\mu_s| \left\| Q_i(x - x_s) \right\| + \varepsilon |\mu_s| \right\} \right\} + \varepsilon(1 + \sum_{s=1}^{d} |\mu_s|) \leq$$
$$\max\left\{ \left\| (Q_i(y)) \right\|, \max\left\{ |\mu_s| \left\| Q_i(x - x_s) \right\| \right\} \right\} + 3\varepsilon \qquad \left(\sum_{s=1}^{d} |\mu_s| \leq 1\right)$$

Για $i \in E_1$ η σχέση *(*)* δίνει:

$$\left\| Q_i(y) + \sum_{s=1}^{d} \mu_s Q_i(x - x_s) \right\| \leq \left\| Q_i(y) \right\| + |\mu_s| \left\| \sum_{s=1}^{d} Q_i(x - x_s) \right\| \leq$$
$$\leq \left\| Q_i(y) \right\| + \varepsilon$$

και η ζητούμενη ανισότητα ισχύει για $i = 1, ..., l$. □

Πρόταση 3.23. *Έστω K κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-PCP υποσύνολο του χώρου Banach X, ο οποίος δεν περιέχει τον l_1, και οι φραγμένοι τελεστές: $Q_i : X \to c_0$, $i \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένα δ-approximate bush $(x_a)_{a \in \mathcal{A}} \subseteq K$ τέτοιο ώστε για κάθε ακολουθία $(\lambda_a)_{a \in \mathcal{A}}$ με $\lambda_\emptyset = 1$, $\lambda_a \geq 0$, $\lambda_a = \sum\limits_{\beta \in S_a} \lambda_\beta$ και $\lim\limits_{n \to \infty} \max\{\lambda_a : |a| = n\} = 0$, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a Q_i(y_a)$ συγκλίνει στον c_0.*

Απόδειξη. *1ο βήμα: Η επαγωγική κατασκευή του bush.*

Έστω $x = x_\emptyset \in K$ και $F_\emptyset = < x >$. Σύμφωνα με το λήμμα 3.22 και χρησιμοποιώντας μόνο την Q_1, υπάρχουν $\{x_s\}_{s \in S_\emptyset}$, $\#S_\emptyset < \infty$ τέτοια ώστε:

$$\|x_\emptyset - x_a\| > \delta \ ,a \in S_\emptyset \ , \ |a| = 1$$
$$\left\| x_\emptyset - \sum_{a\in S_\emptyset} \lambda_a x_a \right\| < \varepsilon \ ,\lambda_a \geq 0, \ 1 = \sum_{a\in S_\emptyset} \lambda_a$$
και $\forall y \in F_\emptyset$, έχουμε:
$$\left\| Q_1(y) + \sum_{a\in S_\emptyset} \mu_a Q_1(y_a) \right\| \leq \max\left\{ \|Q_1(y)\| \ , \max_{a\in S_\emptyset} \{|\mu_a| \ \|Q_1(y_a)\|\} \right\} + \varepsilon.$$

Θέτουμε $F_1 =< F_\emptyset, x_a >_{a\in S_\emptyset}$. Πάλι σύμφωνα με το λήμμα 3.25, αλλά χρησιμοποιώντας τώρα τις Q_1, Q_2, για κάθε στοιχείο x_a του K με $a \in S_\emptyset$, υπάρχουν $\{x_\beta\}_{\beta\in S_\alpha}$, $\#S_a < \infty$ τέτοια ώστε:

$$\|x_a - x_\beta\| > \delta \ ,\beta \in S_a \ , \ |\beta| = 1$$
$$\left\| x_a - \sum_{\beta\in S_a} \lambda_\beta x_\beta \right\| < \varepsilon \ ,\lambda_\beta \geq 0, \ 1 = \sum_{\beta\in S_a} \lambda_\beta$$

και $\forall y \in F_1$, $i = 1, 2$ έχουμε
$$\left\| Q_i(y) + \sum_{\beta\in S_a} \mu_\beta Q_i(y_\beta) \right\| \leq \max\left\{ \|Q_i(y)\| \ , \max_{\beta\in S_a} \{|\mu_\beta| \ \|Q_i(y_\beta)\|\} \right\} + \varepsilon.$$
Κατόπιν θέτουμε $F_2 =< F_1, x_\beta >_{|\beta|=2}$ και χρησιμοποιούμε τις Q_1, Q_2, Q_3.

Συνεχίζοντας έτσι, στο k-βήμα έχουμε κατασκευάσει τον υπόχωρο $F_k =< F_{k-1}, x_\gamma >_{|\gamma|=k+1}$, και χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.25 για τις Q_i με $i = 1, ..., k+1$, για κάθε στοιχείο x_γ του K, μπορούμε να βρούμε στοιχεία $\{x_\delta\}_{\delta\in S_\gamma}$, $\#S_\gamma < \infty$ που ικανοποιούν τις συνέπειες του λήμματος 3.25 για $i = 1, ..., k + 1$.

Τότε $F_{k+1} =< F_k, x_\delta >_{|\delta|=k+2}$.

Θυμίζουμε ότι γράφουμε $J_{i,a}$ για το block των συντεταγμένων στο c_0 όπου φέρεται ουσιαστικά η $Q_i(y_a)$, για $i \in \mathbb{N}$ και $a \in A$. Αυτό σημαίνει ότι $\left\|Q_i(y_a) - P_{J_{i,a}} Q_i(y_a)\right\| < \varepsilon_a$, για $\varepsilon_a > 0$. Η κατασκευή στο λήμμα 3.25 δίνει $J_{i,a} \cap J_{i,\beta} = \emptyset$ όταν $\beta \in S_a$, αφού αν $a \in S_t$ και $|\beta| = n + 1 = |a| + 1$ τότε $y_a = x_t - x_a \in F_n$ αλλά $y_\beta = x_a - x_\beta \notin F_n$ συνεπώς $Q_i(y_a)$ φέρεται ουσιαστικά στο $J_{i,a}$ ενώ $Q_i(y_\beta)$ φέρεται ουσιαστικά στο $J_{i,\beta}$. Επίσης: $\max J_{i,a} < \min J_{i,\beta}$.

(*) Άρα το σύνολο $\left\{ (J_{i,\beta})_{|\beta|\geq n} \right\}$ περιέχει ξένα διαστήματα του $\mathbb{N}$.

2ο βήμα: Η σύγκλιση της σειράς.

Σταθεροποιούμε το $i \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_n > 0$ με $\varepsilon_n \searrow$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon$.

Στο l-βήμα, της κατασκευής του bush στο λήμμα 3.25, χρησιμοποιούμε ε_l αντί των ε_1 και ε. Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{\lambda_a : |a| = n\} = 0$ υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n > k_0$ έχουμε:

(**) $\quad 0 \leq \lambda_a \leq \frac{\varepsilon}{\|Q_i\| M}$ (όπου $M \geq \max\limits_{y\in K}\{\|y\|\}$).

Θέτουμε $m = \max\{i, k_0\}$.

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a Q_i(y_a) = \sum\limits_{n=1}^{m} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a Q_i(y_a) + \sum\limits_{n>m} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a Q_i(y_a) =$
$\sum\limits_{n=1}^{m} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a Q_i(y_a) + \sum\limits_{n>m} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a \big(Q_i(y_a) - P_{J_{i,a}} Q_i(y_a)\big) + \sum\limits_{n>m} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a P_{J_{i,a}} Q_i(y_a)$
συγκλίνει, αφού:

α) η σειρά $\sum\limits_{n>m} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a P_{J_{i,a}} Q_i(y_a)$ συγκλίνει στο c_0 γιατί:

$$\left\| \sum_{n>m} \sum_{|a|=n} \lambda_a P_{J_{i,a}} Q_i(y_a) \right\| \underset{(\text{ξένα},(*),|a|=n>m\geq i)}{\leq} \max\left\{ \left\|\lambda_a P_{J_{i,a}} Q_i(y_a)\right\| : |a| > m \right\} \leq$$
$$\max\{\lambda_a \|Q_i\| \|y_a\| : |a| > m\} \underset{((**),m\geq k_0)}{\leq} \varepsilon$$

β) η σειρά $\sum\limits_{n>m} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a \big(Q_i(y_a) - P_{J_{i,a}} Q_i(y_a)\big)$ συγκλίνει απολύτως, γιατί:

$$\sum_{n>m} \sum_{|a|=n} \lambda_a \left\|Q_i(y_a) - P_{J_{i,a}} Q_i(y_a)\right\| \underset{(n>m>i)}{\leq}$$
$$\sum_{n>m} \sum_{|a|=n} \lambda_a \varepsilon_n \underset{\left(\sum_{a\in S_\beta} \lambda_a = \lambda_\beta\right)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon.$$

□

ΛΗΜΜΑ 3.24. *Έστω K κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-PCP υποσύνολο του χώρου Banach X, που δεν περιέχει τον l_1 και $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ όπως στην πρόταση 3.23. Τότε υπάρχει ένα δ'-approximate bush $(z_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}} \subseteq \overline{co}(x_a)_{a\in\mathcal{A}} = L$ τέτοιο ώστε $\forall z \in \overline{co}(z_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}} = M$, με $z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a^{(z)} y_a$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \max\left\{\lambda_a^{(z)} : |a| = n\right\} = 0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού το K είναι non-PCP, το ίδιο ισχύει και για το L. Συνεπώς υπάρχει $\delta' > 0$ τέτοιο ώστε κάθε ασθενής περιοχή του $W \subseteq L$ να έχει $diam > 2\delta'$.

Χρησιμοποιούμε τα $y_a^* \in X^*$, με $y_a^*(y_\beta) = \delta_{a,\beta}$ και $\|y_a^*\| = 1$ (όπου y_a είναι οι nodes του bush $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$), για να κατασκευάσουμε το δεύτερο αυτό bush ως εξής:

1^o βήμα

Έστω $z_\emptyset \in L$, $\varepsilon, \vartheta, \nu > 0$, W_1 η ασθενής περιοχή του L με $W_1 = \left\{z \in L : |y_a^*(z) - y_a^*(z_\emptyset)| < \frac{\nu}{2},\ \text{όταν}\ |a| = 1\right\}$ και η ακολουθία $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W_1$ τέτοια ώστε: $z_n \xrightarrow{w} z_\emptyset$ και $\|z_n - z_\emptyset\| > \delta'$ (αφού L είναι non-PCP).

Από το θεώρημα Mazur υπάρχει κυρτός συνδυασμός των z_n, αρκετά κοντά στο $z_\emptyset$ (norm).

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε $S_\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ με $\#S_\emptyset < \infty$ και μη αρνητικούς αριθμούς λ_β , $\beta \in S_\emptyset$ με $\sum\limits_{\beta\in S_\emptyset} \lambda_\beta = 1$ τέτοιους ώστε: $\left\| z_\emptyset - \sum\limits_{\beta\in S_\emptyset} \lambda_\beta z_\beta \right\| < \frac{\vartheta}{2}$.

Θέτουμε W_2 την ασθενή περιοχή του L με

$$W_2 = \left\{z \in L : |y_a^*(z) - y_a^{a*}(z_\beta)| < \tfrac{\nu}{2^2},\ \text{για}\ \beta \in S_\emptyset\ ,\ |a| \leq 2\right\}$$

και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για το z_β με $\beta \in S_\emptyset$.

Ομοίως στο n^o βήμα, θέτουμε W_n την ασθενή περιοχή του L με

$$W_n = \left\{z \in L : |y_a^*(z) - y_a^*(z_\beta)| < \tfrac{\nu}{2^n},\ \text{για}\ |\beta| = n-1\ \text{και}\ |a| \leq n\right\}.$$

Έτσι για κάθε β με $|\beta| = n-1$ βρίσκουμε: μια ακολουθία $\{z_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subseteq W_n \subset W$ τέτοια ώστε

$z_l \xrightarrow{w} z_\beta$ και $\|z_l - z_\beta\| > \delta'$, αριθμούς λ_γ, $0 \leq \lambda_\gamma \leq 1$, $\sum\limits_{\gamma\in S_\beta} \lambda_\gamma = 1$ και στοιχεία z_γ με $\gamma \in S_\beta$, $\|S_\beta\| < \infty$ τέτοια ώστε: $\left\| z_\beta - \sum\limits_{\gamma\in S_\beta} \lambda_\gamma z_\gamma \right\| < \frac{\vartheta}{2^n}$.

2^o βήμα

Αν $u_\gamma = z_\beta - z_\gamma$, $\gamma \in S_\beta$ είναι οι nodes του νέου αυτού bush και $z \in M$ ξέρουμε ότι: $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{|\gamma|=n} \mu_\gamma^{(z)} u_\gamma$ όπου $\mu_\gamma^{(z)} \geq 0$, $\sum\limits_{\delta\in S_\gamma} \mu_\delta^{(z)} = \mu_\gamma^{(z)}$, $\mu_\emptyset^{(z)} = 1$.

Ειδικά στην περίπτωση που $z = z_\gamma \in (z_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ έχουμε:

$$z_\gamma = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{\substack{|\delta|=n \\ \delta>\gamma}} \mu_\delta^{(z)} u_\delta,\ \text{αν}\ |\gamma| = N.$$

$$\text{Έτσι}\ |y_a^*(z_\gamma)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{\substack{|\delta|=n \\ \delta>\gamma \\ \delta\in S_\lambda}} \mu_\delta^{(z)}\, |y_a^*(z_\lambda) - y_a^*(z_\delta)|.$$

Συνεπώς αφού $|\delta| \geq N$, έχουμε:

$$\alpha\nu\ |a| \leq N\ \tau\acute{o}\tau\epsilon\ |y_a^*(z_\gamma)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{\substack{|\delta|=n \\ \delta>\gamma}} \mu_\delta^{(z)} \tfrac{\nu}{2^{N+1}} = \tfrac{\nu}{2^{N+1}}.$$

Αυτό σημαίνει ότι:

(*) για κάθε $a \in \mathcal{A}$ υπάρχει ένα επίπεδο του bush, του οποίου το βάθος είναι $N \geq |a|$, με στοιχεία z_γ τέτοια ώστε $|y_a^*(z_\gamma)| \leq \frac{\nu}{2^{N+1}} \leq \frac{\nu}{2^{|a|+1}}$.

3^o βήμα

Τώρα αν $z \in M = \overline{co}(z_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει πεπερασμένος κυρτός συνδυασμός στοιχείων του bush, αρκετά κοντά στο z.

Δηλαδή υπάρχουν $k_m \geq 0$, όπου $m = 1, ..., l$, τέτοια ώστε $\sum\limits_{m=1}^{l} k_m = 1$,

και $\{z_m\}_{m=1,...,l} \subseteq (z_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$ τέτοια ώστε $\left\| z - \sum\limits_{m=1}^{l} k_m z_m \right\| < \varepsilon$.

Αφού κάθε στοιχείο του bush z_β με $|\beta| = n$ είναι $\frac{\vartheta}{2^n}$ μακριά από έναν κυρτό συνδυασμό των επομένων του, θέτοντας $q = \max\{|i| : i = 1, ..., l\}$ θα έχουμε ότι για κάθε $n \leq l$ υπάρχει κυρτός συνδυασμός στοιχείων του bush, $\{z_\beta\}_{|\beta|=q}$ τέτοιο ώστε: $\left\| z - \sum\limits_{|\beta|=q} k_\beta z_\beta \right\| < \varepsilon + \vartheta = 2\varepsilon$, (παίρνοντας $\vartheta = \varepsilon$).

4^o βήμα

Τέλος αν $z \in \overline{co}(z_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}} = M \subseteq \overline{co}(x_a)_{a \in \mathcal{A}} = L$ με $z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{|a|=n} \lambda_a^{(z)} y_a$ θα έχουμε $y_a^*(z) = \lambda_a^{(z)} = y_a^*(z) - y_a^*(\sum\limits_{|\beta|=n} k_\beta z_\beta) + y_a^*(\sum\limits_{|\beta|=n} k_\beta z_\beta) =$

$y_a^*\left(z - \sum\limits_{|\beta|=n} k_\beta z_\beta\right) + \sum\limits_{|\beta|=n} k_\beta y_a^*(z_\beta)$.

Έτσι $0 \leq \lambda_a^{(z)} \leq \left|\lambda_a^{(z)}\right| \leq \|y_a^*\| \left\| z - \sum\limits_{|\beta|=n} k_\beta z_\beta \right\| + \sum\limits_{|\beta|=n} k_\beta \left|y_a^*(z_\beta)\right| \underset{(**),\|y_a^*\|=1}{\leq}$ $2\varepsilon + \sum\limits_{|\beta|=n} k_\beta \left|y_a^*(z_\beta)\right| \leq 2\varepsilon + \frac{\nu}{2^{N+1}} < 3\varepsilon$, (παίρνοντας $\nu = \varepsilon$ και $n \geq |a| \geq q$).

Συνεπώς $\lim\limits_{n \to \infty} \max\left\{\lambda_a^{(z)} : |a| = n\right\} = 0$.

Και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος. □

3.7. Η RNP είναι ισοδύναμη με την KMP στα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα του $C(\omega^\omega)$ (1η απόδειξη)

Αν $\mathcal{A}$ είναι το finitely branching tree ενός bush $(x_a)_{a \in \mathcal{A}}$, θυμίζουμε ότι με $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ συμβολίζουμε το σύνολο των κλαδιών του,

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s|_n \in \mathcal{A}\}.$$

Το σύνολο $[\mathcal{A}] = \{b \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) : b$ είναι maximal$\}$ είναι το *body* του $\mathcal{A}$.

Αν εφοδιάσουμε το $\mathcal{A}$ με την τοπολογία τ, με βασικές περιοχές τα σύνολα: $V_b^n = \{b' \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) : b'|_n = b|_n\}$, τότε έχουμε ότι ($[\mathcal{A}]$,τ) είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος.

Με $M^+[\mathcal{A}]$ και $M^+[0,1]$ συμβολίζουμε τα θετικά μέτρα στο $[\mathcal{A}]$ και στο $[0,1]$ αντίστοιχα. Τότε:

Λημμα 3.25. *$M^+[\mathcal{A}]$ και $M^+[0,1]$ είναι ισόμορφοι.*

Αποδειξη. Αν $a \in \mathcal{A}$ και $\beta \in S_a$ ορίζουμε τα διαστήματα: $I_\emptyset = [0,1]$,
$I_\beta = I^n_{\beta_j} = [A^n_{\beta_j}, B^n_{\beta_j}]$ όταν $\beta_j \in S_a$, $|\beta_j| = n$ και $j = 1, ..., |S_a|$ με:

$$A^n_{\beta_j} = \left\{ \begin{array}{r} B^n_{\beta_{j-1}}, \text{ όταν } j = 2, ..., |S_a| \\ A^{n-1}_\alpha, \text{ όταν } j = 1 \end{array} \right\}$$

και

$$B^n_{\beta_j} = \left\{ \begin{array}{r} A^n_{\beta_j} + \frac{1}{\prod\limits_{\alpha \leq \beta} |S_a|}, \text{ όταν } j = 2, ..., |S_a| - 1 \\ B^{n-1}_\alpha, \text{ όταν } j = |S_a| \end{array} \right\}.$$

Έστω Σ_n η άλγεβρα που παράγεται από τα διαστήματα του $[0,1]$ της μορφής I_β όταν $|\beta| = n$.

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\Sigma_k \subseteq \Sigma_n \text{ όταν } k \leq n, \ \bigcup_{|\beta|=n} I_\beta = [0,1], \ \bigcup_{\gamma \in S_\beta} I^{n+1}_\gamma = I^n_\beta,$$

$$\text{και } |I_\beta| = \frac{1}{\prod\limits_{a \leq \beta} |S_a|} \leq \frac{1}{2^{|\beta|}} = \frac{1}{2^n} \underset{|\beta| \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Αν $\Sigma = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ η άλγεβρα που παράγεται από όλες τις Σ_n, τότε η Σ ταυτίζεται με την άλγεβρα των δυαδικών διαστημάτων, αφού:
α) για κάθε $I_\beta = I^\mu_{\beta_j}$ υπάρχει δυαδικό διάστημα της μορφής:
$[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}] \subset I_\beta$
(δεδομένου του β επιλέγουμε n τέτοιο ώστε: $2^n > 4 \cdot \max\limits_{|\gamma|=|\beta|} \left\{ \prod\limits_{a \leq \gamma} |S_a| \right\}$)
β) κάθε δυαδικό διάστημα της μορφής $[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$ περιέχει ένα I_γ (δεδομένων των k, nεπιλέγουμε β και $\gamma \in S_\beta$ τέτοιο ώστε:
$\min\limits_{|\gamma|=|\beta|+1} \left\{ \prod\limits_{a \leq \gamma} |S_a| \right\} > 4 \cdot 2^n$).

Παίρνοντας $f : [\mathcal{A}] \to [0,1]$ με $f(V^n_\beta) = I^n_\beta$ έχουμε

$$([0,1], \Sigma) \approx ([\mathcal{A}], \mathcal{T})$$

και αφού η diffusity διατηρείται, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Λημμα 3.26. *Έστω X ένας χώρος Banach, $Q_i : X \to c_0$, $i \in \mathbb{N}$, $\overline{co}(z_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}} = M \subseteq \overline{co}(x_a)_{a \in \mathcal{A}} = L \subseteq K$ όπως στην πρόταση 3.23 και το λήμμα 3.24 αντίστοιχα. Υπάρχει απεικόνιση $\Phi : L \overset{1-1}{\to} M^+[\mathcal{A}]$, τέτοια* *ώστε: η Φ είναι συνεχής, affine και $\forall z \in M$ το μέτρο $\mu_z = \Phi(z)$ είναι diffuse.*

Αποδειξη. Αν $y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(y)} y_a \in L$, σταθεροποιούμε το $i \in \mathbb{N}$.

Τότε έχουμε: $Q_i(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(y)} Q_i(y_a)$, όπου η έκφραση αυτή είναι μοναδική (Παρατήρηση 2.11 [**3**]) ως προς τα $Q_i(y_a)$. Θέτουμε:
$\Phi(y) = \mu_y \in M^+[\mathcal{A}]$ με $\mu_y(V_b^n) = \lambda_{b|_n}^{(y)}$, όταν $y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(y)} y_a \in L$.

1-1

$$\Phi(y_1) = \Phi(y_2) \Leftrightarrow (\mu_{y_1}(V_b^n) = \mu_{y_2}(V_b^n), \forall n \in \mathbb{N}, b \in [\mathcal{A}]) \Leftrightarrow$$
$$\left(\lambda_{b|_n}^{(y_1)} = \lambda_{b|_n}^{(y_2)}, \forall n \in \mathbb{N}, b \in [\mathcal{A}]\right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(y_1)} y_a = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(y_2)} y_a \Leftrightarrow$$
$$y_1 = y_2.$$

affinity

Έστω $y_1, y_2 \in L$, $0 \le t \le 1$. Τότε $y = ty_1 + (1-t)y_2 \in L$.
Σταθεροποιώντας την Q_i έχουμε:

$$y = ty_1 + (1-t)y_2 \Rightarrow Q_i(y) = tQ_i(y_1) + (1-t)Q_i(y_2) =$$
$$t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(y_1)} Q_i(y_a) + (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(y_2)} Q_i(y_a) = \ldots =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n} \left(t\lambda_a^{(y_1)} + (1-t)\lambda_a^{(y_2)}\right) Q_i(y_a) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(y)} Q_i(y_a).$$

Όμως η $Q_i(y)$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως προς τις nodes $Q_i(y_a)$, έτσι η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\lambda_a^{(y)} = t\lambda_a^{(y_1)} + (1-t)\lambda_a^{(y_2)} \ , \forall a \in \mathcal{A}.$$

Έτσι $\mu_y(V_b^n) = t\mu_{y_1}(V_b^n) + (1-t)\mu_{y_2}(V_b^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}, b \in [\mathcal{A}]$, και τελικά $\mu_y = t\mu_{y_1} + (1-t)\mu_{y_2} \Leftrightarrow \Phi(y) = t\Phi(y_1) + (1-t)\Phi(y_2)$.

diffusity

Αν $z \in M$ και $\mu_z = \Phi(z)$, για $b \in [\mathcal{A}]$ έχουμε
$\mu_z(b) = \lim_{n\to\infty} \mu_z(V_b^n) = \lim_{n\to\infty} \lambda_{b|_n}^{(z)} \underset{\Lambda.\mathrm{III}\sigma\tau 3}{=} 0$. Συνεπώς το μ_z είναι atomless μέτρο.

συνέχεια

Έστω $\varepsilon > 0$ και $y, w \in L$ τέτοια ώστε $\|y - w\| < \varepsilon$.

Έχουμε ότι $y - w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n} \left(\lambda_a^{(y)} - \lambda_a^{(w)}\right) y_a$ και επειδή τα y_a έχουν σχεδόν ξένους φορείς παίρνουμε: $\left|\lambda_a^{(y)} - \lambda_a^{(w)}\right| < \varepsilon$, $\forall a \in \mathcal{A}$.
Άρα $(|\mu_y(V_b^n) - \mu_w(V_b^n)| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, b \in [\mathcal{A}]) \Rightarrow |\Phi(y) - \Phi(w)| < \varepsilon$. $\square$

Θεωρημα 3.27. *Στα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα του $C(\omega^\omega)$, η RNP και η KMP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.*

Αποδειξη. Αφού η RNP συνεπάγεται την KMP, αρκεί να δείξουμε ότι στον $C(\omega^\omega)$ η KMP συνεπάγεται την RNP, η ισοδύναμα ότι ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-RNP υποσύνολο του $C(\omega^\omega)$ περιέχει ένα κλειστό, κυρτό υποσύνολο χωρίς ακραία σημεία.

Ισχύει ότι $C(\omega^\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus C(\omega^n)$, όπου το άθροισμα είναι unconditional, ότι $C(\omega^n) \equiv c_0$ για $n \in \mathbb{N}$ και ότι ο l_1 δεν περιέχεται στον $C(\omega^\omega)$ (αφού $(C(\omega^\omega))^* = l_1$).

Υποθέτουμε ότι η RNP και η PCP είναι ισοδύναμες ιδιότητες στα υποσύνολα του $C(\omega^\omega)$ (Αλλοιώς το θεώρημα του Schachermayer δίνει το ζητούμενο).

Έστω $K \subset C(\omega^\omega)$ κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-RNP.

Αφού το K είναι non RNP θα είναι non PCP. Έστω $K_1 = \overline{co}(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$, όπου $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι το bush της πρότασης 3.23 και $K_2 = \overline{co}(z_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$, όπου $(z_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ είναι το bush του λήμματος 3.24.

Υπάρχει τελεστής $T : L^1(0,1) \to C(\omega^\omega)$ τέτοιος ώστε $\overline{T(\mathcal{P})} \subset K_2$ (ο T δίνεται μέσω του martingale που ορίζεται από το δ'-approximate bush το οποίο περιέχεται στο K_2). Ο T είναι non strongly regular τελεστής.

Έστω οι προβολές $P_n : C(\omega^\omega) \to C(\omega^n)$.

Σύμφωνα με την πρόταση 3.13 και το πόρισμα 3.20 αρκεί να δείξουμε ότι οι τελεστές $P_n \circ T : L^1(0,1) \to C(\omega^n)$ είναι strongly regular.

Σταθεροποιούμε το $N \in \mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $P_N(K_2) \subset c_0$ είναι strongly regular.

Παίρνουμε $\Phi(y) = \mu_y \in M^+[\mathcal{A}]$ με $\mu_y(V_b^n) = \lambda_{b/n}^{(y)}$ όπως στο λήμμα 3.26.

Έχουμε ότι $\forall z \in K$ το μέτρο $\mu_z = \Phi(z)$ είναι diffuse.

Ορίζουμε τον τελεστή $t : M^+[\mathcal{A}] \to c_0$ με $t(\mu) = (\mu(V_a))_{a\in\mathcal{A}}$.

Ξέρουμε ότι αν $y \in K_1$ τότε $y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(y)} y_a$ και αν $z \in K_2$ τότε

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(z)} y_a \text{ με } \lim_{n\to\infty} \max \left\{ \lambda_a^{(z)} : |a| = n \right\} = 0.$$

Έχουμε επίσης ότι $P_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(z)} P_N(y_a)$, με $P_N(y_a) = \overline{e_a}$ για $a \in \mathcal{A}$ μια block βάση του c_0 και αν $g : c_0 \to c_0$ με $g(\overline{e_a}) = e_a$, τότε g είναι ισομορφισμός.

Τέλος θέτουμε $u : M^+[\mathcal{A}] \to M^+[0,1]$ με $u(\mu(V_a)) = \mu(I_a)$ και $t : M^+[0,1] \to c_0$ με $t(\mu) = (\mu(I_a))_{a\in\mathcal{A}}$.

Παρατηρούμε ότι $P_N(K_2) = P(K_2) = g^{-1}(K')$, όπου $K' = t \circ u \circ \Phi(K_2) \subset c_0$.

Αλλά από το [**7**] ξέρουμε ότι το K' είναι strongly regular στον c_0 (αφού είναι εικόνα των diffuse μέτρων του $M^+[0,1]$ στον c_0) και επειδή ο g είναι ισομορφισμός το ίδιο θα ισχύει για το $P(K_2)$. □

3.8. Η RNP είναι ισοδύναμη με την KMP στα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα του $C(\omega^\omega)$ (2η απόδειξη)

Η πρόταση 3.20 δίνει μια άλλη οπτική (δες [**50**]) για την απόδειξη του θεωρήματος 3.27 αφού:

Πρόταση 3.28. *Έστω X, X_n, χώροι Banach με $X = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$, εφοδιασμένος με την $\|.\|_0$ norm,όπου το άθροισμα είναι unconditional, δεν περιέχει τον l_1, και ένα δ- approximate bush $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ τέτοιο ώστε:*

α. $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ έχουν πεπερασμένους φορείς

β. $\forall a \in \mathcal{A}$, $F_a =< \{y_\beta\}_{\beta\in S_a} >$ έχουν ξένους φορείς (ως προς X_n)

γ. $\forall a \in \mathcal{A}$, $F_a =< \{y_\beta\}_{\beta\in S_a} >$ έχουν ξένους φορείς (ως προς μια βάση του $C[0,1]$, αν θεωρήσουμε τον X ως υπόχωρο του $C[0,1]$)

Τότε υπάρχει ένα δ'-approximate bush $(z_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}} \subseteq \overline{co}(\widetilde{x_a})_{a\in\mathcal{A}}$ τέτοιο ώστε στο $M = \overline{co}(\widetilde{z_\beta})_{\beta\in\mathcal{B}}$ η norm και η ασθενής τοπολογία ταυτίζονται.

Απόδειξη. Θέτουμε $L = \overline{co}(\widetilde{x_a})_{a\in\mathcal{A}}$. Το λήμμα 3.24 μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δ'-approximate bush $(z_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}} \subseteq L$ με την ιδιότητα ότι αν $z \in M = \overline{co}(\widetilde{z_\beta})_{\beta\in\mathcal{B}}$ με $z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(z)} y_a$ τότε

$$\text{(1)} \qquad \lim_{n\to\infty} \max\left\{\lambda_a^{(z)} : |a| = n\right\} = 0.$$

Θα δείξουμε ότι η norm και η ασθενής τοπολογία ταυτίζονται στο M. Αφού η norm σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή σύγκλιση, αρκεί να δείξουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή.

Σταθεροποιούμε το $z \in M$ και το $\varepsilon > 0$ και υποθέτουμε ότι για την ακολουθία $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq M$ έχουμε $z_j \underset{j\to\infty}{\overset{(w)}{\to}} z$.

Τότε έχουμε:

$$\text{(2)} \qquad z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(z)} y_a \text{ και } \forall j \in \mathbb{N},\ z_j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(z_j)} y_a,$$

όπου $\lambda_a^{(z)}, \lambda_a^{(z_j)} \geq 0$, $\lambda_\emptyset^{(z)} = 1 = \lambda_\emptyset^{(z_j)}$, $\lambda_a^{(z)} = \sum_{\beta\in S_a} \lambda_\beta^{(z)}$ και

$\lambda_a^{(z_j)} = \sum_{\beta\in S_a} \lambda_\beta^{(z_j)}$ (με τις εκφράσεις αυτές μοναδικές, ως προς $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}$, λόγω των συνθηκών β και γ).

Θέτουμε $\Theta = \sup_{x \in L} \{\|x\|\}$. Τότε έχουμε $\|y_a\| \leq 2\Theta$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Η unconditionality και η συνθήκη β μας δίνουν την δυνατότητα να γράψουμε το z στην μορφή:

$$\textit{(3)} \qquad z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(z)} y_a = y_\emptyset + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n-1} \sum_{\beta \in S_a} \lambda_\beta^{(z)} y_\beta$$

(φυσικά κάθε $z \in M$ έχει μια *μοναδική* έκφραση αυτής της μορφής).

Από την *(1)* έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\textit{(4)} \qquad \forall n \geq n_0 \text{ έχουμε } \max\left\{\lambda_a^{(z)} : |a| = n\right\} < \tfrac{\varepsilon}{2\Theta}.$$

Για $a \in \mathcal{A}$ με $|a| \leq n_0$ παίρνουμε $y_a^* \in X^*$ τα διορθογώνια συναρτησοειδή, με $y_a^*(y_\gamma) = \delta_{a,\gamma}$. Έχουμε: $y_a^*(z) = \lambda_a^{(z)}$, $\forall a \in \mathcal{A}$ και $y_a^*(z_j) = \lambda_a^{(z_j)}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

Αφού $z_j \underset{j \to \infty}{\overset{(w)}{\to}} z$ για $|a| \leq n_0$ και $m = \# \{a : |a| \leq n_0\}$ υπάρχει ένα j_0 τέτοιο ώστε: $|y_a^*(z_j) - y_a^*(z)| < \frac{\varepsilon}{2\Theta m}$, $\forall j > j_o$, $\forall a$ με $|a| \leq n_0$, η αλλοιώς

$$\textit{(5)} \qquad \left|\lambda_a^{(z_j)} - \lambda_a^{(z)}\right| < \tfrac{\varepsilon}{2\Theta m},\ \forall j > j_o,\ \forall a \text{ με } |a| \leq n_0.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι: $\left\|\sum_{\beta \in S_a} \lambda_\beta^{(z)} y_\beta\right\| \leq \left(\sum_{\beta \in S_a} \lambda_\beta^{(z)}\right) 2\Theta \underset{(2)}{=} \lambda_a^{(z)} 2\Theta.$

Έτσι έχουμε:

$$\textit{(6)} \quad \left\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{|a|=n-1} \sum_{\beta \in S_a} \lambda_\beta^{(z)} y_\beta\right\|_0 = \sup_{n \geq n_0+1} \left\{\max_{|a|=n-1} \left\{\left\|\sum_{\beta \in S_a} \lambda_\beta^{(z)} y_\beta\right\|\right\}\right\} \leq$$

$$\leq \sup_{n \geq n_0+1} \left\{\max_{|a|=n-1} \left\{\lambda_a^{(z)} 2\Theta\right\}\right\} \leq \max_{|a|=n_0} \left\{\lambda_a^{(z)}\right\} 2\Theta, \text{ αφού αν } a < \gamma$$

(με την συνήθη μερική διάταξη) η σχέση *(2)* δίνει : $\lambda_a^{(z)} > \lambda_\gamma^{(z)}$.

Ομοίως έχουμε ότι:

$$\textit{(7)} \qquad \forall j > j_0\ ,\ \left\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{|a|=n-1} \sum_{\beta \in S_a} \lambda_\beta^{(z_j)} y_\beta\right\|_0 \leq \max_{|a|=n_0} \left\{\lambda_a^{(z_j)}\right\} 2\Theta.$$

Τέλος για $j > j_0$ έχουμε:

$$\|z - z_j\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(z)} y_a - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(z_j)} y_a\right\|_0 \underset{(3)}{=}$$

$$= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n-1} \sum_{\beta \in S_a} \lambda_\beta^{(z)} y_\beta - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|a|=n-1} \sum_{\beta \in S_a} \lambda_\beta^{(z_j)} y_\beta\right\| \underset{uncon.}{=}$$

$$= \left\|\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{|a|=n-1} \sum_{\beta \in S_a} \left(\lambda_\beta^{(z)} - \lambda_\beta^{(z_j)}\right) y_\beta\right\| +$$

$$+ \left\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{|a|=n-1} \sum_{\beta \in S_a} \lambda_\beta^{(z)} y_\beta\right\| + \left\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{|a|=n-1} \sum_{\beta \in S_a} \lambda_\beta^{(z_j)} y_\beta\right\| \underset{(5),(6),(7)}{<}$$

$$m\tfrac{\varepsilon}{2\Theta m}2\Theta + \max_{|a|=n_0}\left\{\lambda_a^{(z)}\right\}2\Theta + \max_{|a|=n_0}\left\{\lambda_a^{(z_j)}\right\}2\Theta \underset{(2),(4)}{<}$$
$$< \varepsilon + \tfrac{\varepsilon}{2\Theta}2\Theta + \max_{|a|=n_0}\left\{\lambda_a^{(z)} + \tfrac{\varepsilon}{2\Theta}\right\}2\Theta < 4\varepsilon\ .$$

Έτσι $z_j \underset{j\to\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\to}} z$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Το παρακάτω λήμμα δείχνει την ομοιότητα της δομής δύο bushes τα οποία είναι 'τελικά' αρκετά κοντά.

Λημμα 3.29. *Έστω X ένας χώρος Banach και $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$, $(z_a)_{a\in\mathcal{A}}$, δ και δ' approximate bushes, με $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}$, $(w_a)_{a\in\mathcal{A}}$ αντίστοιχα τις nodes των bushes, έτσι ώστε:*

$\forall a \in \mathcal{A}$, $\|y_a - w_a\| < \varepsilon_a$, όπου $\varepsilon_a > 0$, $\varepsilon_a \underset{|a|\to\infty}{\to} 0$ και $\sum\limits_{a\in\mathcal{A}} \varepsilon_a < \infty$.

Υποθέτουμε ότι στο $\overline{co}(\widetilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$ η norm και η ασθενής τοπολογία ταυτίζονται.

Τότε η norm και η ασθενής τοπολογία ταυτίζονται και στο $\overline{co}(\widetilde{z}_a)_{a\in\mathcal{A}}$.

Αποδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $z_a = x_a + r_a$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Το σύνολο $(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι ένα bush στον X. Συμβολίζουμε με $d_\beta = r_\beta - r_a$, όταν $\beta \in S_\alpha$, τις nodes αυτού του νέου bush. Αφού $\sum\limits_{a\in\mathcal{A}} \varepsilon_a = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{|a|=n} \varepsilon_a < \infty$ υπάρχει ένα n_0 τέτοιο ώστε $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\sum\limits_{|a|=n} \varepsilon_a < \varepsilon$.

Παρατηρούμε τώρα ότι για $\gamma < a$ (η συνήθης μερική διάταξη) με $|\gamma| = n_0 < |a|$, έχουμε:

$\|r_\gamma - r_a\| \le \|r_\gamma - r_\delta + r_\delta - .... - r_\beta + r_\beta - r_a\| < \varepsilon_\gamma + \varepsilon_\delta + ... + \varepsilon_a \le$

$\le \sum\limits_{n=n_0}^{|a|}\sum\limits_{|\beta|=n} \varepsilon_\beta < \sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\sum\limits_{|a|=n} \varepsilon_a < \varepsilon$, χρησιμοποιώντας το ότι αν $k \in S_l$, τότε $\|r_k - r_l\| = \|(z_k - x_k) - (z_l - x_l)\| = \|(z_k - z_l) - (x_k - x_l)\| = \|w_k - y_k\| < \varepsilon_k$.

Απο αυτό προκύπτει ότι το σύνολο $(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι ολικά φραγμένο και το ίδιο θα ισχύει για το $\overline{co}(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$. Συνεπώς το σύνολο $\overline{co}(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι συμπαγές στον X, έτσι η norm και η ασθενής τοπολογία συμπίπτουν σε αυτό. Έχουμε επίσης ότι: $(\widetilde{z}_a)_{a\in\mathcal{A}} \subseteq (\widetilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}} + (r_a)_{a\in\mathcal{A}}$ και έτσι $\overline{co}(\widetilde{z}_a)_{a\in\mathcal{A}} \subseteq \overline{co}\left\{(\widetilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}} + (r_a)_{a\in\mathcal{A}}\right\} = \overline{co}(\widetilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}} + \overline{co}(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$.

Η norm και η ασθενής τοπολογία συμπίπτουν στο $\overline{co}(\widetilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$ και στο $\overline{co}(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$, άρα συμπίπτουν στο σύνολο $\overline{co}(\widetilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}} + \overline{co}(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$ και συνεπώς στο $\overline{co}(\widetilde{z}_a)_{a\in\mathcal{A}}$. □

Στην περίπτωση που στις προυποθέσεις του λήμματος 3.29 συμπεριλαμβάνεται το ότι ο χώρος Banach X είναι εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|_0$ norm τότε έχουμε

Πορισμα 3.30. *Έστω X, X_n, χώροι Banach με $X = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$, εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|_0$ norm, όπου το άθροισμα είναι unconditional, και ο μη αναπαραστάσιμος τελεστής $T : L^1(0,1) \to X$ τέτοιος ώστε οι τελεστές $P_n \circ T : L^1(0,1) \to X_n$ να είναι αναπαραστάσιμοι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (όπου P_n οι προβολές $P_n : X \to X_n$). Έστω $K = \overline{T(\mathcal{P})}$ και ότι στα υποσύνολα του K, η PCP και η RNP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.*

Τότε υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο L του K, τέτοιο ώστε στο L η norm και η ασθενής τοπολογία ταυτίζονται.

Αποδειξη. Ακολουθώντας την κατασκευή στην απόδειξη του πορίσματος 3.21 η απάντηση είναι άμεση αφού ικανοποιούνται οι προυποθέσεις της πρότασης 3.28 και του λήμματος 3.29. □

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος 3.27.

Θεωρημα 3.31. *Σε κάθε K κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-RNP υποσύνολο του $C(\omega^\omega)$ υπάρχει ένα σύνολο $L \subseteq K$, τέτοιο ώστε το L έχει την PCP και δεν έχει την RNP. Συνεπώς η RNP και η KMP είναι ισοδύναμες ιδιότητες στα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα του $C(\omega^\omega)$.*

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα non-RNP υποσύνολο K του $C(\omega^\omega)$, τέτοιο ώστε στα υποσύνολα του K, η PCP είναι ισοδύναμη με την RNP (έτσι το K είναι non-PCP). Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα non-RNP υποσύνολο L του K , τέτοιο ώστε η norm και η ασθενής τοπολογία συμπίπτουν στο L. Άρα υπάρχει ένα non-RNP υποσύνολο L του K τέτοιο ώστε το L έχει την PCP αλλά δεν έχει την RNP. Έτσι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Schachemayer, είναι αληθές το συμπέρασμα του θεωρήματος.

Υπενθυμίζουμε ότι: $C(\omega^\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus C(\omega^k)$, όπου το άθροισμα είναι unconditional και ότι $C(\omega^k) \cong c_0$ (συμβολίζουμε με h_k τον αντίστοιχο ισομορφισμό).

Αφού $(C(\omega^\omega))^* = l_1$ (ο οποίος είναι διαχωρίσιμος), ο χώρος $C(\omega^\omega)$ δεν περιέχει τον l_1.

Έστω $X = C(\omega^\omega)$, $X_k = C(\omega^k)$ και $Q_i = h_i \circ P_i$ για $i \in \mathbb{N}$, όπου $P_i : X \to X_i$ οι προβολές. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της ενότητας 3.6 κατασκευάζουμε ένα δ_1-approximate bush $(x_a)_{a\in\mathcal{A}} \subseteq K$ και ένα δ_2-approximate bush $(z_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}} \subseteq K_1 = \overline{co}(\widetilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}} \subseteq K$ τέτοιο ώστε:

$\forall z \in K_2 = \overline{co}(\widetilde{z}_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}} \subseteq K_1 \subseteq K$ με $z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(z)} y_a$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} \max\left\{\lambda_a^{(z)} : |a| = n\right\} = 0$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(z)} Q_i(y_a) = Q_i(z)$

συγκλίνει στον c_0 $\forall i \in \mathbb{N}$ (όπου y_a οι nodes του bush $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ και $\lambda_a^{(z)} \geq 0$, $\lambda_\emptyset^{(z)} = 1$, $\lambda_a^{(z)} = \sum\limits_{\beta\in S_a} \lambda_\beta^{(z)}$).

Θέτουμε $T : L_1[0,1] \to C(\omega^\omega)$ τον τελεστή που δίνεται μέσω του quasi-martingale που ορίζεται από το δ_2-approximate bush $(z_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$, τέτοιο ώστε $\overline{T(\mathcal{P})} \subseteq K_2$.

Θεωρούμε τις απεικονίσεις $P_iT : X \to X_i$ και $Q_iT : X \to c_0$.

Από τις παρατηρήσεις στο λήμμα 3.22 και στην πρόταση 3.23, ξέρουμε ότι για $i \in \mathbb{N}$, $\forall\ a \in \mathcal{A}$, τα στοιχεία $(Q_i(y_a))_{a\in\mathcal{A}}$ έχουν σχεδόν ξένους φορείς στον c_0.

Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς όπως στις παρατηρήσεις στο λήμμα 3.22 και στην πρόταση 3.23, και θέτουμε $y_a^i = P_{J_{i,a}}Q_i(y_a)$ και αφού $\|Q_i(y_a) - y_a^i\| < \varepsilon_a$, χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.29 μπορούμε να θεωρούμε ότι τα $(Q_i(y_a))_{a\in\mathcal{A}}$ έχουν ξένους φορείς στον c_0. Όπως στην απόδειξη της πρότασης 3.28 και χρησιμοποιώντας την κατασκευή του λήμματος 3.24, για $X = c_0$, $X_i = \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ παίρνουμε ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο $M_i = Q_i(K_2)$ όπου η norm και η ασθενής τοπολογία συμπίπτουν. Αφού η h_i είναι ισομορφισμός, η norm και η ασθενής τοπολογία θα συμπίπτουν στο $P_i(K_2)$. Συνεπώς ενώ ο T είναι non-strongly regular τελεστής (αφού K_2 non-PCP), οι τελεστές P_iT είναι strongly regular $\forall i \in \mathbb{N}$.

Τώρα οι υποθέσεις της πρότασης 3.13 ισχύουν και μέσω της πρότασης 3.20, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 3.28 άλλη μια φορά, ώστε να πάρουμε ένα νέο $\delta-$approximate bush $(w_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subseteq K_2$ τέτοιο ώστε στο $\overline{co}\,(\widetilde{w_\gamma})_{\gamma\in\Gamma} = L$, η norm και η ασθενής τοπολογία να συμπίπτουν. Έτσι το L έχει την PCP και είναι non-RNP όπως θέλαμε. $\square$

3.9. Κυρτά σύνολα στα οποία η norm και η ασθενής τοπολογία συμπίπτουν

Στην ενότητα αυτή δείχνουμε ότι υπό ορισμένες συνθήκες, υπάρχουν κλειστά, κυρτά, φραγμένα σύνολα στα οποία η norm τοπολογία και η ασθενής τοπολογία ταυτίζονται.

Θα χρειαστούμε τον παρακάτω

Ορισμος 3.32. *Έστω $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ ένα δ-approximate bush με $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}$ τις αντίστοιχες nodes. Έστω επίσης $(\tilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$ το averaging back bush που προκύπτει από το $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$. Λέμε ότι το κλειστό κυρτό σύνολο $K = \overline{co}(\tilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$ ικανοποιεί την* non-atomic martingale coordinatization ιδιότητα, *αν κάθε $x \in K$ μπορεί να γραφεί ως $x = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} y_a$, με $\lambda_\emptyset^{(x)} = 1, \lambda_a^{(x)} \geq 0,\ \lambda_a^{(x)} = \sum_{b\in S_a} \lambda_b^{(x)}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και αν θέσουμε $\lambda_k^{(x)} = \max\{\lambda_a^{(x)} : |a| = k\}$, τότε $\lim_{k\to\infty} \lambda_k^{(x)} = 0$.*

Θυμίζουμε ότι αν ένας χώρος Banach X έχει μία (όχι αναγκαστικά πεπερασμένης διάστασης) Schauder decomposition $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (δηλ. $X = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus X_n$) και το $x \in X$, τότε λέμε ότι το $I \subset \mathbb{N}$ είναι ο φορέας (support) του x, αν $x \in \sum_{n\in I} \oplus X_n$. Επίσης αν $X = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus X_n$, μία οικογένεια $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}$ λέγεται *block*, αν τα $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}$ έχουν ξένους φορείς ως προς $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και το δ-approximate bush $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ λέγεται block δ-approximate bush, αν υπάρχει οικογένεια ξένων διαστημάτων $(I_a)_{a\in\mathcal{A}}$ του $\mathbb{N}$, τέτοια ώστε αν $a <_{\text{lex}} b$, τότε $I_a < I_b$, και για κάθε $a \in \mathcal{A}$, $\text{supp}\{y_a\} \subset I_a$.

Λημμα 3.33. *Έστω X ένας χώρος Banach με Schauder decomposition $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ένα block δ-approximate bush $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ στον X. Τότε για $x \in \overline{co}(\tilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$ υπάρχει μοναδική non-atomic martingale coordinatization.*

Αποδειξη. Εξ ορισμού κάθε $\tilde{x}_a$ έχει μία martingale coordinatization για κάθε $a \in \mathcal{A}$, και συνεπώς το ίδιο ισχύει για κάθε $x \in co(\tilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$.

Έστω $x \in co(\tilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset co(\tilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$, τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Υποθέτουμε ότι $x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^n y_a$ και ότι $(y_a^*)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι τα διορθογώνια συναρτησοειδή των $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}$, ορισμένα στον $\overline{< (y_a)_{a\in\mathcal{A}} >}$. Τότε $y_a^*(x_n) \to y_a^*(x)$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Συνεπώς για κάθε $a \in \mathcal{A}$, υπάρχει $\lambda_a^{(x)}$ έτσι ώστε $\lambda_a^n \to \lambda_a^{(x)}$. Τότε $x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} y_a$ και αυτή η coordinatization είναι μοναδική.

Επίσης είναι non atomic, αφού αν $x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} y_a$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\|\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} y_a\| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$, έτσι αν $|a| = n \geq n_0$, τότε

$$\lambda_a^{(x)} \|y_a\| \leq C \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} y_a \Big\| \leq C\varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lambda_a^{(x)} \leq \frac{C\varepsilon}{\delta}$ και άρα $\lambda_k^{(x)} = \max\{\lambda_a^{(x)} : |a| = k\} \to 0$. □

Λημμα 3.34. *Έστω X ένας χώρος Banach με Schauder decomposition $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ένα δ-approximate bush $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ στον X. Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει ένα block δ'-approximate bush $(x'_a)_{a\in\mathcal{A}}$, τέτοιο ώστε θέτοντας $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}, (y'_a)_{a\in\mathcal{A}}$ τις αντίστοιχες nodes, έχουμε ότι $\|y_a - y'_a\| < \delta_a$ και $\sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_a < \infty$.*

Τότε το σύνολο $K = \overline{co}(\tilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$ ικανοποιεί την non-atomic martingale coordinatization ιδιότητα.

Αποδειξη. Έστω $x \in K, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset co(\tilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$ με $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Αν $x_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{|a|=k} \lambda_a^n y_a$, Τότε αφού το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι αριθμήσιμο και οι αριθμοί $(\lambda_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένοι για κάθε $a \in \mathcal{A}$, περνώντας σε μία υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_a^n \to \lambda_a^{(x)}$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Ορίζουμε τα $x'_n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|a|=k}\lambda_a^n y'_a$. Επειδή $\sum_{a\in\mathcal{A}}\|y_a - y'_a\| < \infty$, τα x'_n είναι καλά ορισμένα και $x'_n \in \overline{co}(\tilde{x}'_a)_{a\in\mathcal{A}}$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$, $\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Υπάρχει επίσης $\ell_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\sum_{|a|>\ell_0}\|y_a - y'_a\| < \frac{\varepsilon}{6}$. Επιπλέον υπάρχει $n_1 \geq n_0$, τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \geq n_1$ και για κάθε $a \in \mathcal{A}$ με $|a| \leq \ell_0$ να έχουμε

$|\lambda_a^n - \lambda_a^m| < \frac{\varepsilon}{3M}$, όπου $M = \sum_{a\in\mathcal{A}}\|y_a - y'_a\|$.

Τότε για $n, m \geq n_1$:

$$\begin{aligned}
\|x'_n - x'_m\| &= \Big\|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^m)y'_a\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^m)(y'_a - y_a) + x_n - x_m\Big\| \\
&\leq \Big\|\sum_{k=0}^{\ell_0}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^m)(y'_a - y_a)\Big\| \\
&\quad + \Big\|\sum_{k=\ell_0+1}^{\infty}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^m)(y'_a - y_a)\Big\| + \|x_n - x_m\| \\
&\leq \max\{|\lambda_a^n - \lambda_a^m| : |a| \leq \ell_0\}\sum_{k=0}^{\ell_0}\sum_{|a|=k}\|y'_a - y_a\| \\
&\quad + \sup\{|\lambda_a^n - \lambda_a^m| : |a| > \ell_0\}\sum_{k=\ell_0+1}^{\infty}\sum_{|a|=k}\|y'_a - y_a\| \\
&\quad + \|x_n - x_m\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3M}M + 2\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Συνεπώς η $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $x' \in \overline{co}(\tilde{x}'_a)_{a\in\mathcal{A}}$. Όπως στην προηγούμενη απόδειξη, αν θεωρήσουμε τα διορθογώνια συναρτησοειδή $(y'^*_a)_{a\in\mathcal{A}}$ των $(y'_a)_{a\in\mathcal{A}}$ στον $\overline{<(y'_a)_{a\in\mathcal{A}}>}$, τότε $y'^*_a(x'_n) \to y'^*_a(x')$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Έτσι $x' = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|a|=k}\lambda_a^{(x)}y'_a$ και μέσω του λήμματος 3.33, τα $(\lambda_a^{(x)})_{a\in\mathcal{A}}$ είναι μία non-atomic martingale coordinatization.

Όπως πριν, το στοιχείο $y = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|a|=k}\lambda_a^{(x)}y_a$ είναι καλά ορισμένο και $y \in K$. Απομένει να δείξουμε ότι $y = x$. Θα χρησιμοποιήσουμε εις άτοπο απαγωγή.

Έστω ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στο y. Περνώντας σε κατάλληλη υπακολουθία, υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε $\|x_n - y\| > \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχουν επίσης $\ell_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sum_{|a|\geq \ell_0} \|y_a - y'_a\| < \frac{\varepsilon}{10}$, και $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_1$, $\|\sum_{k\leq \ell_0}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^{(x)})y_a\| < \frac{\varepsilon}{10}$. Συνεπώς για $n \geq n_1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k>\ell_0}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^{(x)})y_a\Big\| &= \Big\|x_n - y - \sum_{k\leq\ell_0}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^{(x)})y_a\Big\| \\
&\geq \|x_n - y\| - \Big\|\sum_{k\leq\ell_0}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^{(x)})y_a\Big\| \\
&> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{10} = \frac{9\varepsilon}{10}.
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{k>\ell_0}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^{(x)})y_a\Big\| = \\
&\Big\|\sum_{k>\ell_0}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^{(x)})(y_a - y'_a) + \sum_{k>\ell_0}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^{(x)})y'_a\Big\| \\
&\leq \Big\|\sum_{k>\ell_0}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^{(x)})(y_a - y'_a)\Big\| + \Big\|P_{|a|>\ell_0}(x'_n - x')\Big\| \\
&\leq 2\frac{\varepsilon}{10} + 2C\|x'_n - x'\|.
\end{aligned}$$

Όπου $P_{|a|>\ell_0}(x) = x - \sum_{|a|\leq \ell_0}\tilde{P}_\alpha(x)$, $\tilde{P}_a(x) = \sum_{i\in I_a} P_i(x)$, με $P_i : X \to X_i$ τις κανονικές προβολές της decomposition και C η αντίστοιχη σταθερά.

Επιλέγοντας το n αρκούντως μεγάλο, έχουμε

$$\|\textstyle\sum_{k>\ell_0}\sum_{|a|=k}(\lambda_a^n - \lambda_a^{(x)})y_a\| < \frac{9\varepsilon}{10},$$

αντίφαση που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λημμα 3.35. *Έστω X ένας χώρος Banach, $\mathcal{A}$ ένα finitely branching tree, $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}$, $(y'_a)_{a\in\mathcal{A}}$ υποσύνολα του X, $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία πραγματικών θετικών με $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n < \infty$ και $\|y_a - y'_a\| < \varepsilon_{|a|}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε:*

$$K = \Big\{x \in X : x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|a|=k}\lambda_a^{(x)}y_a,\ \lambda_\emptyset^{(x)} = 1, \lambda_a^{(x)} \geq 0, \lambda_a^{(x)} = \sum_{b\in S_a}\lambda_b^{(x)},\ a \in \mathcal{A}\Big\}$$

Έστω ότι L είναι ένα υποσύνολο του K και ότι στο σύνολο

$$L' = \Big\{x \in X : x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} y'_a, \ \mu\epsilon \ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} y_a \in L\Big\}$$

η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται. Τότε η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται επίσης στο L.

Αποδειξη. Ορίζουμε $(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$ με $r_a = \sum_{\gamma\leq a}(y_\gamma - y'_\gamma)$. Θα δείξουμε ότι τι σύνολο $(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι ολικά φραγμένο.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\sum_{n\geq n_0} \varepsilon_n < \varepsilon$. Έστω $\gamma \in \mathcal{A}, |\gamma| \geq n_0$. Τότε υπάρχει $a \in \mathcal{A},\ |a| = n_0,\ a \leq \gamma$. Έχουμε

$$\|r_\gamma - r_a\| = \Big\| \sum_{a<\delta\leq\gamma} (r_\delta - r_{\delta^-})\Big\| = \Big\| \sum_{a<\delta\leq\gamma} (y_\delta - y'_\delta)\Big\| \leq \sum_{a<\delta\leq\gamma} \|y_\delta - y'_\delta\| < \varepsilon$$

Συνεπώς το σύνολο $(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι ολικά φραγμένο και αυτό σημαίνει ότι η $\overline{co}(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι norm συμπαγής.

Έστω $x \in L,\ x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} y_a$. Αφού $\|y_a - y'_a\| < \varepsilon_{|a|}$, συμπεραίνουμε ότι $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} y'_a \in L'$ και $x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} (y_a - y'_a) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} y'_a$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} (y_a - y'_a) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{|a|=k} \lambda_a^{(x)} (y_a - y'_a) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(x)} \left(\sum_{\gamma\leq a} (y_\gamma - y'_\gamma)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{|a|=n} \lambda_a^{(x)} r_a \ \in \overline{co}(r_a)_{a\in\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

Τούτο σημαίνει πως $L \subset \overline{co}(r_a)_{a\in\mathcal{A}} + L'$. Επειδή η $\overline{co}(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι norm συμπαγής και η ασθενής με την norm τοπολογία ταυτίζονται στο L' εύκολα συμπεραίνουμε ότι η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται στο $\overline{co}(r_a)_{a\in\mathcal{A}} + L'$, πράγμα που σημαίνει ότι το ίδιο συμβαίνει και στο L. □

Ορισμος 3.36. *Έστω X ένας χώρος Banach με Schauder decomposition $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathcal{A}$ ένα finitely branching tree και $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}$ ένα υποσύνολο του X. Τότε το σύνολο $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}$ θα λέγεται* eventually block, *αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, και μία οικογένεια ξένων διαστημάτων $(I_a)_{|a|\geq n_0}$ του $\mathbb{N}$, τέτοια ώστε αν $a <_{lex} b$, τότε $I_a < I_b$, και για κάθε $a \in \mathcal{A}$, $supp\{y_a\} \subset I_a$.*

Λημμα 3.37. *Έστω $X, X_k, k \in \mathbb{N}$ χώροι Banach, με*
$X = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \oplus X_k\right)_0 = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} : x_k \in X_k,\ \textit{και}\ \lim_{k\to\infty} \|x_k\| = 0\}$

και έστω $(y_a)_{a\in\mathcal{A}}$ *φραγμένα και eventually block. Θεωρούμε το σύνολο*

$$L = \Big\{x \in X : x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|a|=k}\lambda_a^{(x)} y_a \text{ με } \lambda_{\emptyset}^{(x)} = 1,\ \lambda_a^{(x)} \geq 0,$$

$$\lambda_a^{(x)} = \sum_{b\in S_a}\lambda_b^{(x)} \text{ για κάθε } a \in \mathcal{A} \text{ και } \lim_{k\to\infty}\max\{\lambda_a^{(x)} : |a| = k\} = 0\Big\}.$$

Τότε στο L *η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα το λήμμα με την επιπρόσθετη υπόθεση ότι κάθε $y_a \neq 0$. Έστω $x \in L,\ x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|a|=k}\lambda_a^{(x)} y_a,\ \varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μία σχετικά ασθενής περιοχή U του x στο L, τέτοια ώστε $\operatorname{diam}\{U\} < \varepsilon$, συνεπώς το x θα είναι σημείο συνέχειας.

Αφού ο χώρος $< \{y_a : |a| < n_0\} >$ είναι πεπερασμένης διάστασης, θα υπάρχει $n_1 \geq n_0$, τέτοιο ώστε $< \{y_a : |a| < n_0\} > \bigcap \overline{< \{y_a : |a| \geq n_1\} >} = \{0\}$.

Πραγματικά, αν $\{x_1, \ldots, x_j\}$ είναι μία Hamel βάση του

$$< \{y_a : |a| < n_0\} > \bigcap \overline{< \{y_a : |a| \geq n_0\} >}$$

τότε $x_i = \sum_{k=n_0}^{\infty}\sum_{|a|=k}\mu_a^i y_a$, για $i = 1, \ldots, j$. Επιλέγουμε $a_1, \ldots, a_j \in \mathcal{A}$ με $|a_i| \geq n_0$ και $\mu_{a_i}^i \neq 0$ για $i = 1, \ldots, j$. Θέτουμε $n_1 = \max\{|a_i| : i = 1, \ldots, j\} + 1$.

Αν $M = \sup\{\|y_a\| : a \in \mathcal{A}\}$, υπάρχει $n_2 \geq n_1$, τέτοιο ώστε $\max\{\lambda_a^{(x)} : |a| = k\} < \frac{\varepsilon}{16M}$, για κάθε $k \geq n_2$. Τότε $x = x_1 + x_2$, όπου $x_1 = \sum\limits_{k=0}^{n_2-1}\sum\limits_{|a|=k}\lambda_a^{(x)} y_a$, $x_2 = \sum_{k=n_2}^{\infty}\sum_{|a|=k}\lambda_a^{(x)} y_a$. Ορίζουμε $\ell = \#\{a \in \mathcal{A} : |a| \leq n_2\}$, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{8(\ell^2 M + 2M)}$.

Θεωρούμε τα διορθογώνια συναρτησοειδή $(y_a^*)_{|a|=n_2}$, ορισμένα στον χώρο $\overline{< \{y_a : a \in \mathcal{A}\} >}$ με

$$y_a^*(y_\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{αν } a = \gamma \\ \\ 0 & \text{αλλοιώς} \end{cases}$$

Αυτό είναι εφικτό λόγω του ότι $n_2 \geq n_1$ και της υπόθεσης πως $y_a \neq 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Ορίζουμε $U = \big\{y \in L : |y_a^*(y - x)| < \varepsilon',\ |a| = n_2\big\}$ και έστω $y \in U$, τέτοιο ώστε $y = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|a|=k}\lambda_a^{(y)} y_a$. Τότε $y = y_1 + y_2$ όπου $y_1 = \sum_{k=0}^{n_2-1}\sum_{|a|=k}\lambda_a^{(y)} y_a$ και $y_2 = \sum_{k=n_2}^{\infty}\sum_{|a|=k}\lambda_a^{(y)} y_a$.

Για $a \in \mathcal{A}$, με $|a| = n_2$ έχουμε $|\lambda_a^{(y)} - \lambda_a^{(x)}| = |y_a^*(y - x)| < \varepsilon'$ άρα $\lambda_a^{(y)} < \varepsilon' + \frac{\varepsilon}{16M}$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$ με $|a| \geq n_2$.

Για $a \in \mathcal{A}$ με $|a| < n_2$ έχουμε $|\lambda_a^{(y)} - \lambda_a^{(x)}| = \Big| \sum\limits_{\substack{|b|=n_2 \\ a<b}} (\lambda_b^{(y)} - \lambda_b^{(x)})\Big| < \varepsilon' \ell$ οπότε, $\|y_1 - x_1\| = \big\| \sum_{k=0}^{n_2-1} \sum_{|a|=k} (\lambda_a^{(y)} - \lambda_a^{(x)}) y_a \big\| \leq \varepsilon' \ell^2 M$.

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}\|y_2 - x_2\| = \Big\| \sum_{k=n_2}^{\infty} \sum_{|a|=k} (\lambda_a^{(y)} - \lambda_a^{(x)}) y_a \Big\| &= \sup\{\|(\lambda_a^{(y)} - \lambda_a^{(x)}) y_a\| : |a| \geq n_2\} \\ &\leq \sup\{(|\lambda_a^{(y)}| + |\lambda_a^{(x)}|) M : |a| \geq n_2\} \\ &\leq \Big(\frac{\varepsilon}{16M} + \varepsilon' + \frac{\varepsilon}{16M}\Big) M = \Big(\varepsilon' + \frac{\varepsilon}{8M}\Big) M.\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}\|y - x\| &\leq \|y_1 - x_1\| + \|y_2 - x_2\| \leq \varepsilon' \ell^2 M + \varepsilon' M + \frac{\varepsilon}{8} \\ &= \frac{\varepsilon}{8(\ell^2 M + 2M)} (\ell^2 M + 2M) + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Συνεπώς $\operatorname{diam}\{U\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη όταν κάθε $y_a \neq 0$. Η γενική περίπτωση ανάγεται στην προηγούμενη ως εξής. Επιλέγουμε $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία θετικών πραγματικών με $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ και ορίζουμε $(y'_a)_{a \in \mathcal{A}}$ με:

$$y'_a = \begin{cases} y_a & \text{αν} y_a \neq 0 \\ \\ y''_a & \text{αλλοιώς} \end{cases}$$

όπου $\operatorname{supp}\{y''_a\} \subset I_a$ και $0 < \|y''_a\| \leq \varepsilon_{|a|}$. Παρατηρούμε ότι $\|y_a - y'_a\| \leq \varepsilon_{|a|}$ και από την προηγούμενη περίπτωση και το λήμμα 3.35 προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

3.10. Η RNP είναι ισοδύναμη με την KMP στα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα του $C(\omega^{\omega^k})$ όπου κ φυσικός

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε ότι η KMP είναι ισοδύναμη με την RNP στα υποσύνολα του $C(\omega^{\omega^k})$. Στην πραγματικότητα αποδεικνύουμε κάτι ισχυρότερο: κάθε non-dentable υποσύνολο του $C(\omega^{\omega^k})$ περιέχει ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο L τέτοιο ώστε το L έχει την PCP και όχι την RNP.

Πρόταση 3.38. *Έστω $Y, Y_k, X, Z_n, Z_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$ χώροι Banach τέτοιοι ώστε $Y = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus Y_k$, $Z_n = \big(\sum_{k=1}^{\infty} \oplus Z_{n,k}\big)_0$, $X \hookrightarrow Y$ και* *ο X δεν περιέχει τον $\ell_1(\mathbb{N})$. Έστω $Q_n : X \to Z_n$, $n \in \mathbb{N}$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, K ένα κυρτό, κλειστό, φραγμένο, non-PCP υποσύνολο του X και υποθέτουμε ότι στα σύνολα $P_k(K), R_{n,k}Q_n(K)$ η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$ (όπου $P_k : Y \to Y_k$, $R_{n,k} : Z_n \to Z_{n,k}$ οι προβολές).*

Τότε υπάρχει L κλειστό, κυρτό, non-dentable υποσύνολο του K, τέτοιο ώστε στο $Q_n(L)$ η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Αφού το K είναι non-PCP υπάρχει W 2δ-non-PCP υποσύνολο του K, για κάποιο $\delta > 0$. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά:

(α) ένα δ-bush $(x_a)_{a\in\mathcal{A}} \subset W$

(β) μία οικογένεια $(I_a)_{a\in\mathcal{A}}$ ξένων διαστημάτων του $\mathbb{N}$, τέτοια ώστε αν $a <_{\text{lex}} b$, τότε $I_a < I_b$

έτσι ώστε:

(1) αν $x'_a = \sum_{\gamma\leq a} P_{I_\gamma}(y_\gamma)$, τότε $(x'_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι ένα block $\frac{\delta}{2}$-approximate bush στον Y και $\sum_{a\in\mathcal{A}} \|y_a - y'_a\| < \infty$.

(2) αν $R_{n,I_a}Q_n(y_a) = y^n_a$, τότε $(y^n_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι eventually block και
$$\sum_{a\in\mathcal{A}} \|Q_n(y_a) - y^n_a\| < \infty \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Θεωρώντας ότι η κατασκευή έχει επιτευχθεί, θα δείξουμε τώρα ότι θέτοντας $L = \overline{co}(\tilde{x}_a)_{a\in\mathcal{A}}$, έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Από την (1) και το λήμμα 3.34, το L έχει την ιδιότητα non-atomic martingale coordinatization. Θεωρούμε το σύνολο

$$L'_n = \Big\{x \in Z_n : x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda^{(x)}_a y^n_a,\ \lambda^{(x)}_\emptyset = 1,\ \lambda^{(x)}_a \geq 0,\ \lambda^{(x)}_a = \sum_{b\in S_a} \lambda^{(x)}_b,$$
$$\text{για κάθε } a \in \mathcal{A},\ \lim_{k\to\infty} \max\{\lambda^{(x)}_a : |a| = k\} = 0\Big\}.$$

Τότε από την (2) και το λήμμα 3.37, στο L'_n η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται. Τώρα ορίζουμε

$$L_n = \Big\{x \in Z_n : x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \lambda^{(x)}_a Q_n(y_a),\ \lambda^{(x)}_\emptyset = 1,\ \lambda^{(x)}_a \geq 0,\ \lambda^{(x)}_a = \sum_{b\in S_a} \lambda^{(x)}_b,$$
$$\text{για κάθε } a \in \mathcal{A},\ \lim_{k\to\infty} \max\{\lambda^{(x)}_a : |a| = k\} = 0\Big\}.$$

Από την (2) και το λήμμα 3.35, στο L_n η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται. Όμως το L έχει την ιδιότητα non-atomic martingale coordinatization, έτσι $Q_n(L) \subset L_n$, συνεπώς στο $Q_n(L)$ η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης κάνουμε τώρα την προαναφερθείσα κατασκευή. Σύμφωνα με το γεγονός 2.4, αφού ο X δεν περιέχει τον

ℓ_1, όταν το K είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του X και $x \in \overline{K}^w$, θα υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $w - \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Παίρνουμε $x_\emptyset = x \in W$. Αφού ο X δεν περιέχει τον $\ell_1(\mathbb{N})$ και W είναι 2δ-non-PCP, υπάρχει ακολουθία $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset W$, τέτοια ώστε $x_m \overset{w}{\to} x$ και $\|x_m - x\| > \delta$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Για $\varepsilon_0 > 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε: $\big\|P_{[1,k_0]}(x) - x\big\| < \varepsilon_0$.

Ορίζουμε $I_\emptyset = [1, k_0]$.

Για $\varepsilon_1 > 0$, μιας και $\big\|P_k(x_m - x)\big\|, \big\|R_{1,k}Q_1(x_m - x)\big\| \xrightarrow{m\to\infty} 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $m_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\big\|P_{[1,k_0]}(x_{m_1} - x)\big\|, \big\|R_{1,[1,k_0]}Q_1(x_{m_1} - x)\big\| < \tfrac{\varepsilon_1}{2\cdot 2}.$$

Υπάρχει $k_1 > k_0$ τέτοιο ώστε

$$\big\|P_{[1,k_1]}(x_{m_1}-x)-(x_{m_1}-x)\big\|, \big\|R_{1,[1,k_1]}Q_1(x_{m_1}-x)-Q_1(x_{m_1}-x)\big\| < \tfrac{\varepsilon_1}{2\cdot 2}.$$

Τότε

$$\big\|P_{(k_0,k_1]}(x_{m_1}-x)-(x_{m_1}-x)\big\|, \big\|R_{1,(k_0,k_1]}Q_1(x_{m_1}-x)-Q_1(x_{m_1}-x)\big\| < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Ορίζουμε $I_1^1 = (k_0, k_1]$.

Επαγωγικά επιλέγουμε $(x_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$, $(I_i^1)_{i\in\mathbb{N}}$ μια υπακολουθία της $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ και διαδοχικά διαστήματα του $\mathbb{N}$, τέτοια ώστε:

$$\big\|P_{I_i^1}(x_{m_i} - x) - (x_{m_i} - x)\big\|, \big\|R_{1,I_i^1}Q_1(x_{m_i} - x) - Q_1(x_{m_i} - x)\big\| < \frac{\varepsilon_1}{2^i}$$

Για $\delta_0 > 0$, από το θεώρημα του Mazur, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $(x_b)_{b\in S_\emptyset} \subset (x_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ και θετικοί πραγματικοί $(\lambda_b)_{b\in S_\emptyset}$ με $\sum_{b\in S_\emptyset} \lambda_b = 1$, τέτοιοι ώστε

$$\big\|x_\emptyset - \textstyle\sum_{b\in S_\emptyset} \lambda_b x_b\big\| < \delta_0.$$

Ονομάζουμε $(I_b)_{b\in S_a}$ τα αντίστοιχα διαστήματα. Τότε έχουμε

$$\sum_{b\in S_\emptyset} \big\|P_{I_b}(y_b) - y_b\big\|, \sum_{b\in S_\emptyset} \big\|R_{1,I_b}Q_1(y_b) - Q_1(y_b)\big\| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_1}{2^i} = \varepsilon_1$$

Έστω ότι τα $(x_a)_{|a|\le j}$, $(I_a)_{|a|\le j}$ έχουν επιλεγεί έτσι ώστε όταν $|a|, |b| \le j$, $a <_{\text{lex}} b$, τότε $I_a < I_b$, $\big\|x_a - \sum_{b\in S_a} \lambda_b x_b\big\| < \delta_{|a|}$, $\|x_a - x_b\| > \delta$, για $|a| < j$, $b \in S_a$, και επίσης

$$\sum_{|a|=i} \big\|P_{I_a}(y_a)-y_a\big\|, \sum_{|a|=i} \big\|R_{\ell,I_a}Q_\ell(y_a)-Q_\ell(y_a)\big\| < \varepsilon_i, \quad \text{για } 1 \le \ell \le i \le j.$$

Αριθμούμε το σύνολο $\{a : |a| = j\}$ ακολουθώντας την λεξικογραφική διάταξη και για a_1, αν $N = \#\{a : |a| = j\}$, για $\varepsilon_{j+1}, \delta_j$, όπως πριν βρίσκουμε $(x_b)_{b\in S_{a_1}}$, $(I_b)_{b\in S_{a_1}}$, τέτοια ώστε $(I_b)_{|b|\le j} < (I_b)_{b\in S_{a_1}}$, $\|x_{a_1} - x_b\| > \delta$, $\|x_{a_1} - \sum_{b\in S_{a_1}} \lambda_b x_b\| < \delta_j$ και

$$\sum_{b\in S_{a_1}} \big\|P_{I_b}(y_b)-y_b\big\|, \sum_{b\in S_{a_1}} \big\|R_{\ell,I_b}Q_\ell(y_b)-Q_\ell(y_b)\big\| < \frac{\varepsilon_{j+1}}{N}, \text{ για } 1\le \ell \le j+1.$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και για τα υπόλοιπα στοιχεία του συνόλου $\{a : |a| = j\}$. Τότε για $1 \le \ell \le j+1$ έχουμε

$$\sum_{|a|=j+1} \big\|P_{I_a}(y_a) - y_a\big\|, \sum_{|a|=j+1} \big\|R_{\ell,I_a}Q_\ell(y_a) - Q_\ell(y_a)\big\| < \varepsilon_{j+1}.$$

Έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγική κατασκευή.
Αν οι ακολουθίες $(\varepsilon_j)_{j=0}^{\infty}$, $(\delta_j)_{j=0}^{\infty}$ επιλεγούν ώστε $\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j < \frac{\delta}{16}$ και $\sum_{j=0}^{\infty}\delta_j < \frac{\delta}{16}$, τότε ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

(i) $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι ένα δ-approximate bush
(ii) $(x'_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι ένα block $\frac{\delta}{2}$-approximate bush και $\sum_{a\in\mathcal{A}}\|y_a - y'_a\| < \infty$.
(iii) $(y^n_a)_{|a|\ge n}$ είναι block και $\sum_{a\in\mathcal{A}}\big\|y^n_a - Q_n(y_a)\big\| < \infty$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

□

Παρατηρηση 3.39. *Η απόδειξη της πρότασης 3.38 δείχνει ότι αν ο X δεν περιέχει τον l_1 και δεν έχει την PCP τότε υπάρχει ένα $\delta-$approximate bush $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$, οι nodes του οποίου αποτελούν βασική ακολουθία. Συνεπώς ο X περιέχει υπόχωρο με βάση ο οποίος δεν έχει την RNP. Στο* [**4**] *κατασκευάζεται ένας χώρος Banach X έτσι ώστε ο X^* είναι διαχωρίσιμος και η PCP είναι ισοδύναμη με την RNP στα υποσύνολα του X. Έτσι έχουμε ότι αν ένας υπόχωρος Y του X δεν έχει την RNP τότε ο Y περιέχει υπόχωρο Z με βάση, ο οποίος δεν έχει την RNP.*

Θεωρημα 3.40. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach που δεν περιέχει τον $\ell_1(\mathbb{N})$ και $Q_n : X \to C(\omega^{\omega^k})$, $n\in\mathbb{N}$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Έστω επίσης K ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-PCP υποσύνολο του X, τέτοιο ώστε η PCP και η RNP να είναι ισοδύναμες ιδιότητες στα υποσύνολα του K. Τότε υπάρχει L κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-dentable υποσύνολο του K, τέτοιο ώστε στο $Q_n(L)$ η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

Αποδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή. Για $k=0$ έχουμε ότι $C(\omega^{\omega^0}) = C(\omega) \cong c_0(\mathbb{N})$.

Στην πρόταση 3.38, θεωρούμε $Y = C[0,1]$, $Y_k = <e_k>$, $Z_n = c_0(\mathbb{N})$, $Z_{n,k} = \mathbb{R}$, όπου $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία Schauder βάση του $C[0,1]$. Αφού οι

$Y_k, Z_{n,k}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, οι υποθέσεις της πρότασης 3.38 ικανοποιούνται, έτσι υπάρχει το ζητούμενο σύνολο L.

Υποθέτουμε ότι αυτό είναι αληθές για $k = m \geq 0$ και θα δείξουμε ότι είναι επίσης αληθές για $k = m + 1$.

Είναι γνωστό ότι $C(\omega^{\omega^{m+1}}) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \oplus \big(C(\omega^{\omega^m}), \|\cdot\|_k\big)\Big)_0$, όπου $\|\cdot\|_k$ είναι μία ισοδύναμη νόρμα στον $C(\omega^{\omega^m})$. Τότε η οικογένεια $R_{n,k}Q_n : X \to C(\omega^{\omega^m})$ είναι αριθμήσιμη και από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό, non-dentable υποσύνολο L' του K, τέτοιο ώστε στα $R_{n,k}Q_n(L')$ η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται. Αφού η PCP και η RNP είναι ισοδύναμες ιδιότητες στα υποσύνολα του K, το L' είναι non PCP. Εφαρμόζοντας ακόμα μία φορά την πρόταση 3.38 για το σύνολο L' και την οικογένεια των τελεστών $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-dentable υποσύνολο L του L', τέτοιο ώστε στα $Q_n(L)$ η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

Θεωρημα 3.41. *Έστω K ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-dentable υποσύνολο του $C(\omega^{\omega^k})$. Τότε υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό υποσύνολο L του K, τέτοιο ώστε το L έχει την PCP και δεν έχει την RNP. Συνεπώς η KMP και η RNP είναι ισοδύναμες ιδιότητες στα υποσύνολα του $C(\omega^{\omega^k})$.*

Αποδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι το K είναι κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-dentable υποσύνολο του $C(\omega^{\omega^k})$, τέτοιο ώστε η PCP και η RNP είναι ισοδύναμες ιδότητες στα υποσύνολα του K. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.40 για $Q = I : C(\omega^{\omega^k}) \to C(\omega^{\omega^k})$, την ταυτοτική απεικόνιση. Τότε υπάρχει L κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-dentable υποσύνολο του K, τέτοιο ώστε στο $I(L) = L$ η ασθενής και η norm τοπολογία ταυτίζονται. Αλλά αυτό σημαίνει ότι η PCP και η RNP δεν είναι ισοδύναμες ιδιότητες στα υποσύνολα του K, αντίφαση που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η RNP ΚΑΙ Η KMP ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑ ΠΗΛΙΚΑ ΧΩΡΩΝ BANACH ΜΕ UNCONDITIONAL SHRINKING F.D.D.

Ο E. Odell στο άρθρο του [**43**] αποδεικνύει ότι

Θεωρημα 4.1. *(Odell, 1992,* [**43**] *Θεωρ. A) Αν ένας χώρος Banach X έχει shrinking unconditional finite dimensional decomposition τότε κάθε χώρος πηλίκο Y του X έχει την ιδιότητα (WU) (που σημαίνει ότι κάθε νορμαρισμένη ασθενώς μηδενική ακολουθία στον Y έχει μία unconditional υπακολουθία).*

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε (θεώρημα 4.4) ότι στα πηλίκα χώρων Banach με shrinking unconditional finite dimensional decomposition η RNP και η KMP είναι ισοδύναμες ιδιότητες, συνδυάζοντας τεχνικές του τρίτου κεφαλαίου, το προαναφερόμενο θεώρημα και γνωστά αποτελέσματα ([**54**], [**50**]) που αφορούν την ισοδυναμία της RNP και της KMP.

Έστω X ένας χώρος Banach με shrinking unconditional finite dimensional decomposition $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και Y ένας χώρος πηλίκο του X.

Έστω επίσης $T : X \to Y$ ο αντίστοιχος φραγμένος γραμμικός τελεστής και $C > 0$ τέτοιο ώστε : $B_Y \subseteq T(CB_X)$.

Αφού ο Y^* είναι διαχωρίσιμος μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο χώρος Y εμφυτεύεται σε χώρο Banach Z που έχει διμονότονη shrinking βάση $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ότι αν K φραγμένο σύνολο του Y και $y \in \overline{K}^w$, τότε υπάρχει ακολουθία $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο K που συγκλίνει ασθενώς στο y (γεγονός 3.4).

Υποθέτουμε επίσης ότι η $(y_i')_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μία νορμαρισμένη (αρκεί ημινορμαρισμένη) ασθενώς μηδενική ακολουθία στον Y, $\varepsilon > 0$ και ότι η ακολουθία των θετικών αριθμών $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0 αρκετά γρήγορα (αρκεί $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i i^{-2}$), με $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \varepsilon$.

Υπό αυτές τις συνθήκες μία συνέπεια του θεωρήματος 4.1 είναι η ακόλουθη

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2. *(Odell, 1992, [**43**], Προτ. 1.9) Υπάρχει υπακολουθία $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ της $(y'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και ακέραιοι $0 = r_0 < p_1 < r_1 < p_2 < ...$ με την ακόλουθη ιδιότητα : Αν $\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\| \leq 2$, τότε υπάρχει $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \in 2CKB_X$, όπου $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μία block βάση της $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $\|Tx_i - a_i y_i\| < \varepsilon_i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $x_i \in [E_j]_{j\in(r_{i-1},r_i)}$.*

Θεωρούμε L ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο ($\|y\| \leq M$ για κάθε $y \in L$), non-RNP υποσύνολο του Y, τέτοιο ώστε στα υποσύνολα του L η RNP και PCP είναι ισοδύναμες ιδιότητες. Τότε έχουμε :

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.3. *Υπάρχει ένα αλφαβητικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών $\mathcal{A}$, ακέραιοι $(r_a)_{a\in\mathcal{A}}$, $(p_a)_{a\in\mathcal{A}}$, με $0 = p_0$, $1 = r_0$, $p_a < r_a < p_{a^+}$ και ένα δ-approximate bush $(w_a)_{a\in\mathcal{A}} \subseteq L$, τέτοιο ώστε :*

- *α. οι nodes $y_a = w_a - w_{a^-}$ έχουν ουσιαστικά ξένους φορείς ως προς μία block βάση των $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$*
- *β. αν $\|\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a y_a\| \leq 2M$, όταν $(\lambda_a)_{a\in\mathcal{A}}$ είναι θετικοί αριθμοί με $\|\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a\| = 1$, τότε υπάρχει $x = \sum_{a\in\mathcal{A}} x_a \in 2CKMB_X$, όπου $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ μία block βάση των $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\|Tx_a - \lambda_a y_a\| < \varepsilon_a$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$*
- *γ. $x_a^+ \in [E_j]_{j\in I_{a^+}}$, όπου $I_{a^+} = (r_a, r_{a^+})$*
- *δ. οι nodes $y_a = w_a - w_{a^-}$ είναι unconditional.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη γίνεται μέσω μιάς επαγωγικής κατασκευής.

Αφού το L είναι non-PCP, υπάρχει υποσύνολο L' του L και $\delta > 0$ έτσι ώστε το L' να είναι δ-non-PCP (Ορ. 2.27 και 2.29).

Η κατασκευή

Στο αρχικό βήμα θεωρούμε το $w_\emptyset \in L'$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(w_{\emptyset,i})_{i\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει ασθενώς στο $w_\emptyset$ ($w_{\emptyset,i} \xrightarrow{w} w_\emptyset$) και $\|w_{\emptyset,i} - w_\emptyset\| > \delta$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία $y_{\emptyset,i} = w_{\emptyset,i} - w_\emptyset$ είναι ημινορμαρισμένη και ασθενώς μηδενική και συνεπώς μπορούμε να βρούμε μία υπακολουθία $(y_{\emptyset,i_k})_{i_k\in\mathbb{N}}$ της $(y_{\emptyset,i})_{i\in\mathbb{N}}$ και ακέραιους $(r_{\emptyset,i_k})_{i_k\in\mathbb{N}}$, $(p_{\emptyset,i_k})_{i_k\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες του συμπεράσματος της πρότασης 4.2.

Στην παρούσα κατασκευή αφού ο χώρος Y εμφυτεύεται σε χώρο Banach Z που έχει διμονότονη shrinking βάση $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι δυνατόν (όπως στις κατασκευές των αποδείξεων στις προτάσεις 3.13 και 3.20) να εξασφαλίσουμε ότι τα στοιχεία της υπακολουθίας μας έχουν ουσιαστικά ξένους φορείς.

Από το θεώρημα του Mazur υπάρχει κυρτός συνδυασμός στοιχείων της $(y_{\emptyset,i_k})_{i_k\in\mathbb{N}}$ με νόρμα μικρότερη του $\frac{\varepsilon}{2}$, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχουν: πεπερασμένο σύνολο δεικτών $M_\emptyset = \{i_{k_m} : m = 1, 2, ..., m_\emptyset\}$

με $i_{k_{m-1}} < i_{k_m}$ γιά $m = 2, ..., m_\emptyset$ και θετικοί αριθμοί $(\lambda_{\emptyset,j})_{j\in M_\emptyset}$, με $\sum\limits_{j\in M_\emptyset} \lambda_{\emptyset,j} = 1$ έτσι ώστε $\| \sum\limits_{j\in M_\emptyset} \lambda_{\emptyset,j} y_{\emptyset,j}\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Θέτουμε $S_\emptyset = \{a = (\emptyset, j) : j \in M_\emptyset\}$ και $I_a = (r_{i_{k_{m-1}}}, r_{i_{k_m}})$ αν $a = (\emptyset, i_{k_m})$ και σταθεροποιούμε τον αριθμό $p_\emptyset = p_{\emptyset, i_{k_{m_\emptyset}}+1}$ (που είναι μεγαλύτερος απο $\max\{p_a : a \in S_\emptyset\}$).

Στο επαγωγικό βήμα για $k = 1, ..., n-1$ υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει:

Α. αλφαβητικά διατεταγμένα σύνολα $A_k = \{a : |a| = k\} = \{a_1, a_2, ..., a_{l_k}\}$, όπου $l_k = \#A_k$, $\quad a_i <_{\text{lex}} a_j$, για $1 \le i < j \le l_k$, $\quad a <_{\text{lex}} b$ αν $a \in A_i$ και $b \in A_j$ για $1 \le i < j \le n-1$ και κάθε $b \in A_k$ είναι στοιχείο του S_a για κάποιο $a \in A_{k-1}$ (φυσικά ο προηγούμενος των στοιχείων με μήκος ένα. είναι το $\emptyset$),

Β. αριθμούς $\quad 0 = p_0 < 1 = r_0 < ... < p_a < r_a < p_{a^+} < ... < p_{a_{l_{n-1}}}$ με τους οποίους παίρνουμε τα διαστήματα των φυσικών $I_{a^+} = (r_a, r_{a^+})$,

Γ. στοιχεία $(w_a)_{a\in A_k}$ του L' έτσι ώστε οι διαφορές $y_a = w_a - w_a^-$ να φέρονται ουσιαστικά στο I_a, $\|y_a\| > \delta$ και για κάθε $a \in A_k$ με $|a| < n-1$ να έχουμε ότι υπάρχουν θετικοί $(\lambda_b)_{b\in S_a}$, με άθροισμα

1 ώστε $\|w_a - \sum\limits_{b\in S_a} \lambda_b w_b\| = \| \sum\limits_{b\in S_a} \lambda_b y_b\| < \frac{\varepsilon}{2^{|b|}}$

και σταθεροποιούμε τον αριθμό $p_{a_{l_{n-1}+1}}$.

Έστω ότι $A_{n-1} = \{a_1, a_2, ..., a_{l_{n-1}}\}$.

Τότε για το στοιχείο w_{a_1} του L' υπάρχει ακολουθία $(w_{a_1,i})_{i\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει ασθενώς στο w_{a_1} ($w_{a_1,i} \xrightarrow{w} w_{a_1}$) και $\|w_{a_1,i} - w_{a_1}\| > \delta$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία $y_{a_1,i} = w_{a_1,i} - w_{a_1}$ είναι ημινορμαρισμένη και ασθενώς μηδενική και συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλοι οι όροι της φέρονται μετά την $p^{\text{στη}}_{a_{l_{n-1}}+1}$ συντεταγμένη του Y (ως προς την βάση $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Επίσης μπορούμε να βρούμε μία υπακολουθία $(y_{a_1,i_k})_{i_k\in\mathbb{N}}$ της $(y_{a_1,i})_{i\in\mathbb{N}}$ και ακέραιους $(r_{a_1,i_k})_{i_k\in\mathbb{N}}$, $(p_{a_1,i_k})_{i_k\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες του συμπεράσματος της πρότασης 4.2.

Πάλι από το θεώρημα του Mazur υπάρχει κυρτός συνδυασμός στοιχείων της $(y_{a_1,i_k})_{i_k\in\mathbb{N}}$ με νόρμα μικρότερη του $\frac{\varepsilon}{2^{|a_1|}}$, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχουν: πεπερασμένο σύνολο δεικτών $M_{a_1} = \{i_{k_m} : m = 1, 2, ..., m_{a_1}\}$ με $i_{k_{m-1}} < i_{k_m}$ γιά $m = 2, ..., m_{a_1}$ και θετικοί αριθμοί $(\lambda_{a_1,j})_{j\in M_{a_1}}$, με $\sum\limits_{j\in M_{a_1}} \lambda_{a_1,j} = 1$ έτσι ώστε $\| \sum\limits_{j\in M_{a_1}} \lambda_{a_1,j} y_{a_1,j}\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Θέτουμε $S_{a_1} = \{a = (a_1, j) : j \in M_{a_1}\}$ και $I_a = (r_{i_{k_{m-1}}}, r_{i_{k_m}})$ αν $a = (a_1, i_{k_m})$ και σταθεροποιούμε τον αριθμό $p_{a_1} = p_{a_1, i_{k_{m_{a_1}}}+1}$ (που είναι μεγαλύτερος απο $\max\{p_a : a \in S_{a_1}\}$).

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για το στοιχείο a_2 του A_{n-1} λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό p_{a_1}, κατόπιν για το a_3,... και συνεχίζουμε ώστε να εξαντλήσουμε τα στοιχεία του A_{n-1}. Τότε $A_n = \bigcup_{j=1}^{l_{n-1}} M_{a_j}$.

Οι ιδιότητες

Θέτουμε $K = \overline{co}(w_a)_{a\in\mathcal{A}} \subset L$. Τότε κάθε $w \in K$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στην μορφή $w = \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a^{(w)} y_a = \sum_{a\in\mathcal{A}} \sum_{b\in S_a} \lambda_b^{(w)} y_b$ με $(\lambda_a)_{a\in\mathcal{A}}$ μη αρνητικούς αριθμούς και $\sum_{b\in S_a} \lambda_b = \lambda_a$, $\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a = 1$ (έχουμε επίσης $K \subseteq < y_a >_{a\in\mathcal{A}}$ και $\|w\| \leq 2M$). Επιλέγουμε ένα στοιχείο w του K.

Τότε σύμφωνα με την πρόταση 4.2 υπάρχει $x^{(w)} \in 2CKMB_X$ με $x^{(w)} = \sum_{a\in\mathcal{A}} x_a$ έτσι ώστε $\|Tx_a - \lambda_a^{(w)} y_a\| < \varepsilon_a$ και $x_a \in [E_j]_{j\in I_a}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Ειναι φανερό ότι οι ιδιότητες α, β, και γ της πρότασης αληθεύουν.

Όπως στο [**43**] (σελ. 690) αν $\delta_a = +1$ ή -1 για την απόδειξη της ιδιότητας δ, έχουμε:

$\|\sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_a \lambda_a^{(w)} y_a\| \leq \|\sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_a(\lambda_a^{(w)} y_a - Tx_a)\| + \|\sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_a Tx_a\| \leq 1 + C\|T\|$ και συνεπώς οι nodes $y_a = w_a - w_{a^-}$ είναι unconditional. □

Θεωρημα 4.4. *Έστω X ένας χώρος Banach με shrinking unconditional finite dimensional decomposition και Y ένας χώρος πηλίκο του X. Τότε στα κλειστά, κυρτά, φραγμένα υποσύνολα του Y η RNP και η KMP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.*

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι η RNP και η PCP είναι ισοδύναμες ιδιότητες στα υποσύνολα του Y (Αλλοιώς το θεώρημα του Schachermayer - Θ. 2.23 - δίνει το ζητούμενο) και L ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-RNP υποσύνολο του Y.

Κατασκευάζοντας το σύνολο $K \subseteq L$ της πρότασης 4.3 και επαναλαμβάνοντας την χρήση της unconditionality όπως στην απόδειξη του πορίσματος 3.21, η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ NON-DENTABLE ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΥ ΣΤΑ ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ ΤΟΥ ΟΠΟΙΟΥ Η RNP ΚΑΙ Η PCP ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, χρησιμοποιώντας ιδέες από το [**4**], γενικεύουμε το παράδειγμα non-RNP υποσυνόλου του χώρου $C(\omega^{\omega^\omega})$ που κατασκευάζεται στο [**42**], στα υποσύνολα του οποίου η RNP και η PCP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.

5.1. Κανονικές (regular) οικογένειες υποσυνόλων των φυσικών, οικογένειες Schreier

Έστω $\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N}) = [\mathbb{N}]^{<\infty} = [\mathbb{N}]^{<\omega}$ το σύνολο όλων των, πεπερασμένου πλήθους, υποσυνόλων των φυσικών αριθμών. Η οικογένεια συνόλων $\mathcal{F}$ (υποσύνολο του $\mathcal{P}_{<\infty}(\mathbb{N})$) θα λέγεται *κανονική* (*regular*) αν :

i. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\{n\} \in \mathcal{F}$ και $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii. η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι *κληρονομική* (*hereditary*)
(αν $F \in \mathcal{F}$ και $G \subset F$ τότε $G \in \mathcal{F}$)

iii. αν $F = \{n_1, n_2, ..., n_k\} \in \mathcal{F}$, $G = \{m_1, m_2, ..., m_k\}$ και $m_i \leq n_i$ για $i = 1, 2, ..., k$ τότε $G \in \mathcal{F}$
(προυποθέτουμε ότι τα στοιχεία ενός υποσυνόλου των φυσικών είναι γραμμένα κατά αύξουσα σειρά)

iv. το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές
(ως υποσύνολο του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ με την κατά σημείο τοπολογία)

Η ιδιότητα (iv) είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι δεν υπάρχει άπειρη αύξουσα ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{F}$.

Παραδείγματα κανονικών οικογενειών είναι οι οικογένειες συνόλων $A_n = \{F \subset \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\#F \leq n\}$ και οι οικογένειες Schreier S_ξ με ξ αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ([**5**], [**2**], [**27**]).

5.2. Ο χώρος Banach $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$, ένα w^*-συμπαγές υποσύνολο του $\mathfrak{X}^*{}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$, ο $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$ εμφυτεύεται στον $C(K)$

Έστω $\mathcal{F}$ μια δοσμένη κανονική οικογένεια υποσυνόλων των φυσικών και $\mathcal{D}$ το δυαδικό δέντρο, δηλαδή το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών της μορφής $a = (\delta_i)_{i=0}^{l}$ με $\delta_i = 0$ ή 1 και $l \in \mathbb{N}$.

Θυμίζουμε ότι για $a = (\delta_i)_{i=0}^{l} \in \mathcal{D}$, το *μήκος* του a είναι $|a| = l$ και ότι κάθε $a \in \mathcal{D}$ έχει δύο επομένους (τα $(a,0)$ και $(a,1)$). Αν a είναι ένα αρχικό τμήμα του b γράφουμε $a < b$ και έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια μερική διάταξη στο $\mathcal{D}$.

Όταν τα a και b είναι δύο στοιχεία του $\mathcal{D}$ τέτοια ώστε κάθε ένα από αυτά δεν είναι αρχικό τμήμα του άλλου, τα a και b λέγονται *incomparable*.

Ένα υποσύνολο $F = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ του δέντρου $\mathcal{D}$ λέγεται *αποδεκτό* (*admissible*) αν τα στοιχεία του είναι incomparable και το σύνολο των φυσικών $|F| = \{|a_1|, |a_2|, ..., |a_k|\} \in \mathcal{F}$.

Έστω $c_{00}(\mathcal{D})$ ο χώρος των πεπερασμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών ορισμένων στο $\mathcal{D}$. Αν $x \in c_{00}(\mathcal{D})$, ορίζουμε την νόρμα του x με

$$\|x\|_{\mathcal{D},\mathcal{F}} = \sup\{\sum_{a\in F} |x(a)| : F \subset \mathcal{D} \text{ είναι admissible}\}.$$

Με $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$ συμβολίζουμε τον χώρο Banach ο οποίος είναι η κλειστότητα του $c_{00}(\mathcal{D})$ με την νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$ (δηλ. $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}} = \overline{(c_{00}(\mathcal{D}), \|\cdot\|_{\mathcal{D},\mathcal{F}})}$).

Σημειώνουμε ότι το σύνολο $(e_a)_{a\in\mathcal{D}}$, με $e_a = (\delta_{ab})_{b\in\mathcal{D}}$, όπου $\delta_{ab} = 0$ αν $b \neq a$ και $\delta_{aa} = 1$, είναι μία βάση του $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$. Στην πραγματικότητα, μια εύκολη συνέπεια του ορισμού της νόρμας είναι ότι η βάση $(e_a)_{a\in\mathcal{D}}$ είναι unconditional και shrinking.

Θεωρούμε το σύνολο:
$M = \{x^* \in \mathfrak{X}^*_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$ τέτοια ώστε $x^* = \sum_{a\in F} e_a^*$, όπου F είναι αποδεκτό$\}$ και θέτουμε $K = M \cup (-M)$. Φυσικά $(e_a^*)_{a\in\mathcal{D}}$ είναι τα διορθογώνια συναρτησοειδή των $(e_a)_{a\in\mathcal{D}}$ στον $\mathfrak{X}^*{}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$.

Λημμα 5.1. *Το σύνολο K, $\frac{1}{2}$-norms τον $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$.*

Αποδειξη. Έστω $x^* = \sum_{a\in F} e_a^* \in K$ και $x \in c_{00}(\mathcal{D})$. Τότε έχουμε :

$$(1) \qquad |x^*(x)| = |\sum_{a\in F} e_a^*(x)| = |\sum_{a\in F} x(a)| \leq \sum_{a\in F} |x(a)| \leq \|x\|_{\mathcal{D},\mathcal{F}}.$$

Επίσης για $x \in c_{00}(\mathcal{D})$, έχουμε ότι υπάρχει ένα αποδεκτό σύνολο G τέτοιο ώστε

$$(2) \ \|x\|_{\mathcal{D},\mathcal{F}} = \sum_{a\in G} |x(a)| = \sum_{a\in G^+} |x(a)| + \sum_{a\in G^-} |x(a)| \leq 2\sum_{a\in R} |x(a)| =$$
$$= 2|\sum_{a\in R} x(a)| = 2|\sum_{a\in R} e_a^*(x)| = 2|x^*(x)| = 2\epsilon x^*(x)$$

όπου $G^+ = \{a : a \in G$ και $x(a) \geq 0\}$, $G^- = G \setminus G^+$ και $R = G^+$

αν $\sum\limits_{a\in G^+}|x(a)| \geq \sum\limits_{a\in G^-}|x(a)|$, $R = G^-$ αλλοιώς, και $\epsilon = 1$ αν $G = G^+$, $\epsilon = -1$ αν $G = G^-$.

Σε κάθε περίπτωση $y^* = \epsilon x^* \in K$ και για $x \in c_{00}(\mathcal{D})$ από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $y^* \in K$, τέτοιο ώστε :

$$\tfrac{1}{2}|y^*(x)| \leq \tfrac{1}{2}\|x\|_{\mathcal{D},\mathcal{F}} \leq |y^*(x)|.$$

Συνεπώς το σύνολο K $\frac{1}{2}$-norms τον $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$. □

Λημμα 5.2. *Το σύνολο K είναι w^*-συμπαγές υποσύνολο της $B_{\mathfrak{X}^*_{\mathcal{D},\mathcal{F}}}$.*

Αποδειξη. Η ανισότητα (1) δίνει ότι αν $\|x\| = 1$ τότε $|x^*(x)| \leq 1$ για κάθε $x^* \in K$, άρα $K \subset B_{\mathfrak{X}^*_{\mathcal{D},\mathcal{F}}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το M είναι w^*-κλειστό υποσύνολο του $B_{\mathfrak{X}^*_{\mathcal{D},\mathcal{F}}}$.

Υποθέτουμε ότι $(x^*_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ και $x^*_n \xrightarrow{w^*} x^*$. Θα δείξουμε ότι $x^* \in M$.

Παρατηρούμε πως το ότι $x^*_n \xrightarrow{w^*} x^*$, ισοδυναμεί με το γεγονός ότι για κάθε $a \in \mathcal{D}$ έχουμε $x^*_n(e_a) \xrightarrow{n\to\infty} x^*(e_a)$ και αφού $x_n(e_a)$ είναι 0 ή 1, έχουμε ότι η ακολουθία $x^*(e_a)$ είναι τελικά σταθερή (0 ή 1).

Έστω $x^*_n = \sum\limits_{a\in F_n} e^*_a$, για ένα αποδεκτό F_n. Επειδή η $\mathcal{F}$ είναι συμπαγής, η ακολουθία $\{|F_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία $\{|F_{n_k}|\}_{k\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε ένα στοιχείο $|G|$ της $\mathcal{F}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $a \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $|a| \notin |G|$ έχουμε $x^*_{n_k}(e_a) \to 0$.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Υποθέτουμε ότι η $x^*_{n_k}(e_a)$ δεν συγκλίνει στο 0. Αφού η $x^*_{n_k}(e_a)$ είναι τελικά σταθερή (0 η 1), έχουμε ότι υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε $x^*_{n_k}(e_a) = 1$ για κάθε $k \geq k_0$. Έτσι $a \in \mathrm{supp}x^*_{n_k}$ για κάθε $k \geq k_0$ (δηλ. $a \in F_{n_k}$, όπου $\mathrm{supp}x^* = \{a \in \mathcal{D} : x^*(e_a) \neq 0\}$) και συνεπώς $|a| \in |F_{n_k}|$, για κάθε $k \geq k_0$. Όμως αυτό σημαίνει ότι $|a| \in |G|$ και έχουμε αντίφαση. Άρα $\mathrm{supp}x^* \subset \{a \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $|a| \in |G|\}$ και έτσι το x^* είναι της μορφής $x^* = \sum\limits_{a\in F} e^*_a$ για κάποιο F και ανήκει στο M. □

Προταση 5.3. *Το σύνολο K είναι αριθμήσιμο συμπαγές και ο χώρος Banach $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$ εμφυτεύεται στον χώρο Banach $C(K)$.*

Αποδειξη. Το σύνολο K είναι φανερά αριθμήσιμο και από το λήμμα Vβ2 w^*-συμπαγές.

Έστω $R : \mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}} \to C(K)$ η απεικόνιση με $R(x) = x|_K$ για $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$, και $x|_K(x^*) = x^*(x)$ για $x^* \in K$.

Επειδή $\|x|_K\|_{\sup} = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in K\} \leq \|x^*\|\|x\| \leq \|x\|$, η απεικόνιση είναι συνεχής και συνεπώς η R είναι εμφύτευση.

Σημειώνουμε επίσης ότι λόγω του λήμματος 5.1, έχουμε ότι αν $\|x\| = 1$ τότε $\|x|_K\|_{\sup} \geq \frac{1}{2}$ και άρα η R είναι $\frac{1}{2}$-εμφύτευση. □

Για τον Cantor-Bendixson δείκτη (ενότητα 3.2) του συνόλου K έχουμε το

Λημμα 5.4. *Έστω* $M = \{x^* \in \mathfrak{X}^*_{\mathcal{D},\mathcal{F}}$ *τέτοιο ώστε* $x^* = \sum_{a\in F} e^*_a,\ F$ *αποδεκτό*$\}$ *και* $K = M \cup (-M)$. *Τότε* $i_{CB}(K) = i_{CB}(M) = i_{CB}(\mathcal{F})$.

Αποδειξη. Είναι δυνατή μέσω των ιδεών στο [**2**], στις προτάσεις 4.10 και 4.11. □

Παρατηρηση 5.5. *Αν χρησιμοποιήσουμε την* $n^{\sigma\tau\eta}$ *Schreier οικογένεια* S_n *στην θέση της κανονικής οικογένειας* $\mathcal{F}$, *επειδή* $i_{CB}(S_n) = i_{CB}(\langle 1, \omega^{\omega^n}\rangle) = \omega^n + 1$, *χρησιμοποιώντας το λήμμα 5.4 και επειδή αριθμήσιμα σύνολα με τον ίδιο Cantor-Bendixson δείκτη είναι ομοιομορφικά, συμπεραίνουμε πως το σύνολο* K *είναι ομοιομορφικό με το* $\langle 1, \omega^{\omega^n}\rangle$ *και συνεπώς οι χώροι Banach* $C(K)$ *και* $C(\omega^{\omega^n})$ *είναι ισόμορφοι. Στην περίπτωση αυτή από την πρόταση 5.3 έχουμε ότι ο χώρος Banach* $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},S_n}$ *μπορεί να* ($\frac{1}{2}$-)*εμφυτευτεί στον χώρο Banach* $C(\omega^{\omega^n})$.

5.3. Το σύνολο S_E, γνωστά αποτελέσματα και μία γενίκευση

Αν X ένας χώρος Banach και K ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο υποσύνολο του X, θυμίζουμε ότι το slice του K που ορίζεται από τα $x^* \in X^*$ και $a > 0$, είναι το σύνολο:

$$S = S(x^*, a, K) = \{x \in k : x^*(x) \geq M - a\},$$

όπου $M = \sup\{x^*(x) : x \in K\}$, καθώς και ότι με $\widetilde{K}$ συμβολίζουμε την w^*-κλειστότητα του K στον X^{**}, ενώ με $\hat{x}$ συμβολίζουμε το στοιχείο του X^{**} τέτοιο ώστε $\hat{x}(x^*) = x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$.

Σημειώνουμε επίσης ότι το slice $S(\hat{x^*}, a, \tilde{K})$ του $\widetilde{K}$ στον X^{**}, είναι η w^*-κλειστότητα του $S(x^*, a, K)$ στον X^{**} (δηλ. $\widetilde{S} = S(\hat{x^*}, a, \tilde{K})$, [**50**]).

Θέτουμε $\overset{\circ}{\widetilde{S}} = \{x^{**} \in \tilde{K} : x^*(x^{**}) > M - a\}$, το εσωτερικό του $\widetilde{S}$ (ως προς την w^*-τοπολογία) και

$$S_E = \overset{\circ}{\widetilde{S}} \cap E, \text{ όπου } E = \mathrm{ext}(\widetilde{K}).$$

Το σύνολο S_E (ένα μή κενό, w^*-συμπαγές υποσύνολο του X^{**}, που για πρώτη φορά ορίζεται στο [**14**]) είναι θεμελιώδες στην μελέτη των κυρτών υποσυνόλων χώρων Banach και έχει σημαντικές ιδιότητες όπως τα παρακάτω τρία λήμματα.

ΛΗΜΜΑ 5.6. *(Bourgain, 1980, [**14**], Λ. 13) Έστω S ένα slice του K και $\eta > 0$. Τότε υπάρχει slice S' του K τέτοιο ώστε $S' \subset \overset{\circ}{S}$ και $\widetilde{S'} \subset \widetilde{co} S_E + \eta B_{X^{**}}$.*

ΛΗΜΜΑ 5.7. *(Rosenthal, 1989, [**50**], Πορ. 1.7) Έστω S ένα slice του K, $e \in S_E$ και U μια w^*-περιοχή του e (ως προς το $\tilde{K}$). Υπάρχει slice S' του K τέτοιο ώστε $S' \subset \overset{\circ}{S}$, $\widetilde{S'} \subset U$ και $e \in S'_E$.*

ΛΗΜΜΑ 5.8. *(Rosenthal, 1989, [**50**], Πορ. 2.7) Για κάθε slice S του K, $0 < k < \frac{\delta}{2}$ και πεπερασμένο υπόχωρο G του X^{**}, υπάρχει $e \in S_E$ με $d(e, G) = inf\{\|e - g\| : g \in G\} > k$.*

Ο Rosenthal στο [**50**] παρατηρεί (παρατήρηση μετά το λήμμα 2.7) ότι είναι δυνατόν να δείξουμε το παρακάτω

ΛΗΜΜΑ 5.9. *Έστω G ένας διαχωρίσιμος υπόχωρος του X^{**}, S ένα slice του K και $0 < k < \frac{\delta}{2}$. Τότε υπάρχει στοιχείο $e \in S_E$ με*

$$d(e, G) = inf\{\|e - g\| : g \in G\} > k.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού ο G είναι διαχωρίσιμος υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ υποχώρων, πεπερασμένης διάστασης, του G

$$(G_1 \hookrightarrow G_2 \hookrightarrow ... \hookrightarrow G_n \hookrightarrow ...), \text{ έτσι ώστε } G = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n}.$$

Παίρνουμε k' με $0 < k < k' < \frac{\delta}{2}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το υποσύνολο του S_E :

$$F_n = \{x^{**} \in S_E : d(x^{**}, G_n) \leq k'\}.$$

Ισχυρισμός. F_n είναι w^*-κλειστό υποσύνολο του S_E.

Υποθέτοντας την αλήθεια του ισχυρισμού, συνεχίζουμε με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι δεν υπάρχει x^{**} στο S_E τέτοιο ώστε $d(x^{**}, G) > k$. Τότε δεν υπάρχει x^{**} στο S_E τέτοιο ώστε $d(x^{**}, G) \geq k'$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε : $S_E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ (αλλοιώς αν $x^{**} \in S_E$ με $x^{**} \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, τότε $d(x^{**}, G_n) > k'$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έτσι $d(x^{**}, \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \geq k'$ και τελικά $d(x^{**}, G) \geq k' > k$).

Αφού το σύνολο $\widetilde{K}$ είναι w^*-συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X^{**}, το σύνολο $E = \text{ext}(\tilde{K})$ είναι G_δ σύνολο ([**31**], λήμμα 219), συνεπώς το ίδιο ισχύει και για το σύνολο S_E. Τότε από τον ισχυρισμό και την ισότητα $S_E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$ και άρα υπάρχει ένα w^*-ανοιχτό σύνολο U τέτοιο ώστε : $\overset{\circ}{F}_{n_0} = S_E \cap U$.

Διαλέγουμε $x_0^{**} \in \overset{\circ}{F}_{n_0}$. Τότε από το λήμμα 5.7 υπάρχει S' slice του K, τέτοιο ώστε $S'_E = S_E \cap F_{n_0}$. Όμως τότε, για κάθε $x^{**} \in S'_E$ έχουμε ότι $d(x^{**}, G_{n_0}) \leq k'$ και αυτό έρχεται σε αντίφαση με το λήμμα 5.7 (με k' στην θέση του k) και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Υποθέτουμε ότι το δίκτυο $(x_i^{**})_{i\in I} \subset F_n$ συγκλίνει w^* στο στοιχείο $x^{**} \in S_E$. Θα δείξουμε ότι $x^{**} \in F_n$.

Επειδή $x_i^{**} \in F_n$ για κάθε $i \in I$, έχουμε ότι:

$d(x_i^{**}, G_n) = \inf\{\|x_i^{**} - z^{**}\| : z^{**} \in G_n\} \leq k$, για κάθε $i \in I$.

Όμως ο χώρος G_n είναι πεπερασμένης διάστασης και συνεπώς για κάθε $i \in I$ υπάρχει $z_i^{**} \in G_n$ με $\|x_i^{**} - z_i^{**}\| = d(x_i^{**}, G_n) \leq k'$.

Η τελευταία ανισότητα και το γεγονός ότι το σύνολο $\widetilde{K}$ είναι (norm) φραγμένο στον X^{**}, μας δίνουν ότι το δίκτυο $(z_i^{**})_{i\in I}$ είναι φραγμένο στον G_n. Άρα υπάρχει ένα υποδίκτυο $(z_{i_j}^{**})_{j\in J}$, του $(z_i^{**})_{i\in I}$, το οποίο συγκλίνει, ως προς την νόρμα (συνεπώς συγκλίνει και w^*) σε ένα στοιχείο $z^{**} \in G_n$.

Όμως τότε $x_{i_j}^{**} - z_{i_j}^{**} \xrightarrow{w^*} x^{**} - z^{**}$ και $\|x_{i_j}^{**} - z_{i_j}^{**}\| \leq k'$ για κάθε $j \in J$. Έτσι $\|x^{**} - z^{**}\| \leq k'$, οπότε $x^{**} \in F_n$. $\square$

Μια συνέπεια του λήμματος 5.9 είναι η ακόλουθη

Πρόταση 5.10. *Έστω Z ένας διαχωρίσιμος υπόχωρος του X^{**}, S ένα slice του K και $0 < k < \frac{\delta}{2}$. Τότε υπάρχει $(x_a^{**})_{a<\omega_1} \subset S$, τέτοιο ώστε $d(x_a^{**} - x_b^{**}, Z) > k$, όταν $a < b < \omega_1$.*

Απόδειξη. Από το λήμμα 5.9, υπάρχει $x_1^{**} \in S_E$, τέτοιο ώστε $d(x_1^{**}, Z) > k'$ (όπου $0 < k < \frac{\delta}{2}$, όπως πριν). Παίρνουμε $Z_1 = \langle x_1^{**}, Z\rangle$. Υπάρχει $x_2^{**} \in S_E$ με $d(x_2^{**}, Z_1) > k'$.

Για $\xi < \omega_1$ παίρνουμε $Z_\xi = \overline{\langle x_1^{**}, x_2^{**}, ...x_\zeta^{**}..., Z\rangle}$, όπου $\zeta < \xi$.

Ο Z_ξ είναι διαχωρίσιμος, έτσι πάλι από το λήμμα 5.9, υπάρχει $x_{\xi+1}^{**} \in S_E$, τέτοιο ώστε $d(x_{\xi+1}^{**}, Z_\xi) > k'$.

Έτσι έχουμε ορίσει τα x_ξ και Z_ξ για $\xi < \omega_1$.

Επειδή $d(x_a^{**}, Z_\zeta) > k'$ για κάθε $\zeta < a$ και $Z \subset Z_\zeta$, έχουμε ότι για κάθε $a < \omega_1$, $d(x_a^{**}, Z) \geq k' > k$.

Επίσης για $a < b$, αν $\zeta' < \omega_1$ τέτοιο ώστε $x_a^{**} \in Z_{\zeta'}$ και $\zeta' < b < \omega_1$, έχουμε ότι $\|x_b^{**} - x_a^{**}\| \geq d(x_b^{**}, Z_{\zeta'}) > k$.

Τώρα ισχύει $d(x_b^{**} - x_a^{**}, Z_{\zeta'}) > |d(x_b^{**}, Z_{\zeta'}) - d(x_a^{**}, Z_{\zeta'})| = d(x_b^{**}, Z_{\zeta'}) > k$ και επειδή $Z \hookrightarrow Z_{\zeta'}$, έχουμε $d(x_b^{**} - x_a^{**}, Z) > k$. $\square$

5.4. Ο χώρος Banach $\mathfrak{X}_0$ και το υποσύνολό του K, στα υποσύνολα του οποίου η RNP και η PCP είναι ισοδύναμες ιδιότητες

Στην ένότητα αυτή κατασκευάζουμε ένα χώρο Banach $\mathfrak{X}_0$ και ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο, non-dentable υποσύνολο K του $\mathfrak{X}_0$, στα υποσύνολα του οποίου, η PCP και η RNP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.

Έστω $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από κανονικές οικογένειες έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $n < F_1 < F_2 < ... < F_n$ με $F_i \in \mathcal{F}_i$ για $i = 1, 2, ..n$, έχουμε ότι $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}_{n+1}$.

Ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας είναι η ακολουθία των οικογενειών Schreier $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}_n}$ ο χώρος που ορίστηκε στην δεύτερη ενότητα αυτού του κεφαλαίου (με $\mathcal{F}_n$ στην θέση του $\mathcal{F}$).

Ορίζουμε τον χώρο Banach $\mathfrak{X}_0 = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}_n}\right)_0$.

Αφού ο χώρος $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}_n}$ εμφυτεύεται στον $C(K)$, με K αριθμήσιμο συμπαγές μετρικοποιήσιμο σύνολο (ενότητα 5.2), έχουμε ότι $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}_n} \hookrightarrow C(a)$ για a αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό. Συνεπώς ο χώρος $\mathfrak{X}^*_{\mathcal{D},\mathcal{F}_n}$ είναι διαχωρίσιμος και άρα ο $\mathfrak{X}_0^* = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{X}^*_{\mathcal{D},\mathcal{F}_n}\right)_1$ είναι διαχωρίσιμος χώρος με unconditional βάση.

Έστω $(e_a^n)_{a\in\mathcal{D}}$ η κανονική βάση του $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}_n}$. Σημειώνουμε ότι το στοιχείο e_a^n είναι το στοιχείο e_a, που ορίστηκε στην ενότητα 5.2, όμως τώρα το αντιλαμβανόμαστε ως ένα στοιχείο του $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},\mathcal{F}_n}$.

Για $a \in \mathcal{D}$ ορίζουμε το στοιχείο στον $\mathfrak{X}_0$,

$$w_a = \left(e_a^1, \tfrac{1}{2}e_a^2, \tfrac{1}{2^2}e_a^3, ..., \tfrac{1}{2^{n-1}}e_a^n, ...\right).$$

Η ακολουθία $(w_a)_{a\in\mathcal{D}}$, είναι βασική ακολουθία στον$\mathfrak{X}_0$ και επειδή ο $\mathfrak{X}_0^*$ είναι διαχωρίσιμος χώρος, η βάση αυτή είναι shrinking.
Συνεπώς κάθε $x^{**} \in \overline{\langle w_a \rangle}^{**}_{a\in\mathcal{D}} = \mathfrak{X}^{**} \hookrightarrow \mathfrak{X}_0^{**}$ έχει μοναδική αναπαράσταση της μορφής:

$$x^{**} = w^* - \lim_{n\to\infty} \sum_{|a|\le n} \lambda_a w_a = w^* - \sum_{a\in\mathcal{D}} \lambda_a w_a$$

όπου $\lambda_a = x^{**}(w_a)$.

Όπως στο [**4**] (λήμμα 2) αλλά με διαφορετική νόρμα, έχουμε το:

ΛΗΜΜΑ 5.11. *Έστω $x_1^{**}, x_2^{**}, ..., x_d^{**}$ στοιχεία του $\mathfrak{X}_o{}^{**}$ τέτοια ώστε υπάρχουν incomparable στοιχεία $a_1, a_2, ..., a_d$ στο $\mathcal{D}$ έτσι ώστε supp$x_i^{**} \subset V_{a_i} = \{b \in \mathcal{D} : a_i \le b\}$, για $i = 1, 2, ..., d$ και $\varepsilon > 0$. Τότε*

$$d(x_1^{**} + x_2^{**} + ... + x_d^{**}, \mathfrak{X}_o) \ge \sum_{i=1}^{d} d(x_i^{**}, \mathfrak{X}_o) - \varepsilon.$$

Απόδειξη. Για $n < m$ θέτουμε

$$P_{[n,m]}(x^{**}) = \sum_{n\le|a|\le m} \lambda_a w_a \text{ και } P_{[n,\infty]}(x^{**}) = w^* - \sum_{n\le|a|} \lambda_a w_a,$$

όπου $\lambda_a = x^{**}(w_a)$. Τότε έχουμε:

$$d(x^{**},\mathfrak{X}) = \lim_{n\to\infty} \|P_{[n,\infty]}(x^{**})\| \text{ και } \|P_{[n,\infty]}(x^{**})\| = \lim_{m\to\infty} \|P_{[n,m]}(x^{**})\|.$$

Έστω $n_0 = \max\{d, |a_1|, |a_2|, ..., |a_d|\}$.
Για $n > n_0$ μπορούμε επαγωγικά να ορίσουμε $n_0 < q_1 < l_1 < q_2 < l_2 < ... < q_d < l_d$ τέτοια ώστε $\|P_{[q_i,l_i]}(x^{**})\| > d(x_i^{**},\mathfrak{X}) - \frac{\varepsilon}{d}$.

Επειδή για κάθε $1 \le i \le d$ υπάρχει ένα σύνολο $F_i = \{b_{i,j} : 1 \le j \le s(i)$ incomparable στοιχείων του $\mathcal{D}$ τέτοια ώστε $q_i \le |b_{i,j}| \le l_i$ και $\|P_{[q_i,l_i]}(x_i^{**})\| = \sum_{j\in F_i} |x_i^{**}(b_{i,j})|$ και επειδή το σύνολο $\bigcup_{i=1}^{d} F_i$ αποτελείται από ξένα ανά δύο incomparable στοιχεία, έχουμε:

$$\|P_{[n_0,\infty]}(\sum_{i=1}^{d} x_i^{**})\| \ge \|P_{[n_0,l_k]}(\sum_{i=1}^{d} x_i^{**})\| \ge \sum_{i=1}^{d}\sum_{j\in F_i} |x_i^{**}(b_{i,j})| \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{d} \|P_{[q_i,l_i]}(x_i^{**})\| \ge \sum_{i=1}^{d} d(x_i^{**},\mathfrak{X}) - \varepsilon.$$

Χρησιμοποιώντας τα διορθογώνια συναρτησοειδή $(w_a^*)_{a\in\mathcal{D}}$ των $(w_a)_{a\in\mathcal{D}}$, για κάθε $a \in \mathcal{D}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε το στοιχείο $d_a \in \mathfrak{X}_0$ μέσω των σχέσεων:

$$w_a^*(d_a) = 1, \quad w_{(b,0)}^*(d_a) = w_{(b,1)}^*(d_a) = \tfrac{1}{2} w_b^*(d_a).$$

Τότε εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $a \in \mathcal{D}$ έχουμε:

$$d_a = \tfrac{1}{2}\left(d_{(a,0)} + d_{(a,1)}\right), \quad \|d_a - d_{a,0}\| = \|d_a - d_{a,1}\| \ge \tfrac{1}{2}.$$

Άρα $(d_a)_{a\in\mathcal{D}}$ είναι $\frac{1}{2}$-δένδρο στον $\mathfrak{X}_0$.
Έστω $K_1 = \bar{co}(d_a)_{a\in\mathcal{D}}$. Τότε το K_1 είναι non-dentable.
Έχουμε επίσης ότι: $K_1 = \{x \in \mathfrak{X}_0 : x = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|a|=n} \lambda_a w_a\}$

$$\text{όπου } \lambda_0 = 1,\ \lambda_a \ge 0,\ \lambda_a = \lambda_{(a,0)} + \lambda_{(a,1)}.$$

Θέτουμε $K = \overline{co}\,(K_1 \cup (K_1))$.

Από την θεωρία μέτρου είναι γνωστό ότι:
τα μέτρα στο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (με την τοπολογία της διάταξης) είναι το σύνολο

$$M(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} \oplus L^1(\mu_\gamma)\right)_1,$$

όπου $\{\mu_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ είναι ανά δύο κάθετα μέτρα στο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, το σύνολο Γ έχει πληθικότητα c και ισχύει $L^1(\mu_\gamma) = L^1[0,1]$ ή $L^1(\mu_\gamma) = \mathbb{R}$ ([**36**]).

Έστω $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$ το σύνολο όλων των κλαδιών του $\mathcal{D}$, K_1, K τα σύνολα που ορίσαμε προηγομένως, $M_1 = M_1(\mathcal{B}_{\mathcal{D}})$ όλα τα μέτρα μ στο $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$ με

$\|\mu\| \leq 1$ και $M_1^+ = M_1^+(\mathcal{B}_{\mathcal{D}})$ όλα τα θετικά μέτρα μ στο $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$ με $\|\mu\| \leq 1$. Για $a \in \mathcal{D}$, θέτουμε $V_a = \{b \in \mathcal{D} : a \leq b\}$.

Ορίζουμε την απεικόνιση: $\Phi : M_1^+ \to \widetilde{K_1}$ με $\Phi(\mu) = w^* - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(V_a) w_a$ η οποία είναι θετική, affine, ένα προς ένα και επί (όπου w_a τα στοιχεία που ορίστηκαν στην αρχή της ενότητας).

Επειδή $\|\Phi(\mu)\| \leq \sup\{\sum\limits_{i=1}^{k} |\mu(V_{a_i}| : \{a_i\}_{i=1}^k \text{incomparable}\} = \|\mu\|$ έχουμε $\|\Phi(\mu_1) - \Phi(\mu_2)\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\|$ και μπορούμε να επεκτείνουμε την απεικόνιση αυτή από το M_1 στο $\widetilde{co}\,(K_1 \cup (-K_1)) = \widetilde{K}$.

Επίσης αν $\mu \in M_1^+$ και θέσουμε $f_\gamma^\mu = \frac{d\mu}{d\mu_\gamma}$ τότε έχουμε:

i. το σύνολο $\{\gamma < 2^\omega = \Gamma : f_\gamma^\mu \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο
ii. το μέτρο μ είναι το norm όριο $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma^\mu d\mu_\gamma$.

$\square$

Πρόταση 5.12. *Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $c_1(\delta) > 0$, τέτοιο ώστε αν W είναι ένα κλειστό κυρτό δ-non-dentable υποσύνολο του K, τότε για κάθε επιλογή από slices $S_1, S_2, ..., S_n$ του W, υπάρχουν $x_i^{**} \in \widetilde{S}_i$ για $i = 1, .., n$ τέτοια ώστε για $\lambda_i \geq 0$ με $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, έχουμε:*

$$d(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{**}, \mathfrak{X}_0) > c_1(\delta).$$

Απόδειξη. Έστω $S_1, S_2, ..., S_n$ slices του W και $\widetilde{S_1}, \widetilde{S_2}, ..., \widetilde{S_n}$ τα αντίστοιχα slices του $\widetilde{W}$. Επειδή ο $\mathfrak{X}_0$ είναι διαχωρίσιμος υπόχωρος του $\mathfrak{X}_0^{**}$ από την πρόταση 5.10 έχουμε ότι για $i = 1, 2, ..., n$ υπάρχουν $(x_{\xi,i}^{**})_{\xi \in \omega_1} \subset S_E$ τέτοια ώστε $d(x_{\xi,i}^{**} - x_{\zeta,i}^{**}, \mathfrak{X}_0) > k = \frac{3\delta}{8}$, για $\zeta < \xi$.

Έστω $\mu_{\xi,i} = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma^{\xi,i} d\mu_\gamma \in M_1$ τέτοια ώστε $\Phi(\mu_{\xi,i}) = x_{\xi,i}^{**}$. Παρατηρούμε ότι:

$$\|\mu_{\xi,i} - \mu_{\zeta,i}\| \geq \|\Phi(\mu_{\xi,i}) - \Phi(\mu_{\zeta,i})\| > \tfrac{3\delta}{8}, \text{ για } \zeta < \xi.$$

Τότε για δεδομένο $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε πεπερασμένο σύνολο $F_{\xi,i} \subset \Gamma$ τέτοιο ώστε:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus F_{\xi,i}} f_\gamma^{\xi,i} d\mu_\gamma < \varepsilon.$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα Erdos-Rado ([**22**]) στην οικογένεια συνόλων $\{F_\xi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_{\xi,i}\}_{\xi < \omega_1}$. Υπάρχει ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο $A \subset \omega_1$ και ένα πεπερασμένο σύνολο F, τέτοιο ώστε $F_\xi \cap F_\zeta = F$, για κάθε $\xi \neq \zeta$ με $\xi, \zeta \in A$.

Παρατηρούμε ότι το υπεραριθμήσιμο σύνολο $\{\sum_{\gamma\in F} f_\gamma^{\xi,i} d\mu_\gamma\}_{\xi<\omega_1}$ είναι υποσύνολο του διαχωρίσιμου χώρου $\left(\sum_{\gamma\in F}\oplus L^1(\mu_\gamma)\right)_1$ και συνεπώς για δεδομένο $\varepsilon>0$ υπάρχει υπεραριθμήσιμο σύνολο $I\subset\omega_1$, τέτοιο ώστε για κάθε $\zeta<\xi$, με $\zeta,\xi\in I$, έχουμε:

$$\|\sum_{\gamma\in F} f_\gamma^{\xi,i} d\mu_\gamma - \sum_{\gamma\in F} f_\gamma^{\zeta,i} d\mu_\gamma\| < \varepsilon.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας (μεσω αλλαγής δεικτών) υποθέτουμε ότι $I=\omega_1$.

Τώρα για $\xi\in\omega_1$ θέτουμε $G_{\xi,i}=F_{\xi,i}\setminus F$. Τότε τα $G_{\xi,i}$ είναι ανά δύο ξένα και αν $\mu^2_{\xi,i}=\sum_{\gamma\in G_{\xi,i}} f_\gamma^{\xi,i}d\mu_\gamma$, τότε η οικογένεια $\{\mu^2_{\xi,i}\}_{\xi\in I}$, περιέχει μέτρα ανά δύο singular (δηλ. κάθετα, $\mu^2_{\xi,i}\perp\mu^2_{\zeta,i}$, αν $\zeta<\xi$).

Τότε για κάθε $\xi<\omega_1$, έχουμε: $\mu_{\xi,i}=\mu^1_{\xi,i}+\mu^2_{\xi,i}+\mu^3_{\xi,i}$, όπου $\mu^1_{\xi,i}=\sum_{\gamma\in F} f_\gamma^{\xi,i}d\mu_\gamma$ και $\mu^3_{\xi,i}=\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus F_{\xi,i}} f_\gamma^{\xi,i}d\mu_\gamma$.

Επίσης για κάθε $\xi\in\omega_1$, $\|\mu^3_{\xi,i}\|<\varepsilon$ και για $\zeta<\xi$, έχουμε $\|\mu^1_{\xi,i}-\mu^1_{\zeta,i}\|<\varepsilon$.

Τώρα τα $x^{**}_{\xi,i}=\Phi(\mu^1_{\xi,i})+\Phi(\mu^2_{\xi,i})+\Phi(\mu^3_{\xi,i})$ και $x^{**}_{\zeta,i}=\Phi(\mu^1_{\zeta,i})+\Phi(\mu^2_{\zeta,i})+\Phi(\mu^3_{\zeta,i})$ ανήκουν στον $\langle\widetilde{K}\rangle$.

Επειδή $\|\Phi(\mu)\|\le\|\mu\|$, έχουμε:
$\|\Phi(\mu^3_{\xi,i})-\Phi(\mu^3_{\zeta,i})\|=\|\Phi(\mu^3_{\xi,i}-\mu^3_{\zeta,i})\|\le\|\mu^3_{\xi,i}-\mu^3_{\zeta,i}\|\le\|\mu^3_{\xi,i}\|+\|\mu^3_{\zeta,i}\|<2\varepsilon$ και
$\|\Phi(\mu^1_{\xi,i})-\Phi(\mu^1_{\zeta,i})\|=\|\Phi(\mu^1_{\xi,i}-\mu^1_{\zeta,i})\|\le\|\mu^1_{\xi,i}-\mu^1_{\zeta,i}\|<\varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας τριγωνική ανισότητα, το ότι $d(x^{**},\mathfrak{X}_0)\le\|x^{**}\|$ και ότι $d(x^{**}_{\xi,i}-x^{**}_{\zeta,i},\mathfrak{X}_0)>k=\frac{3\delta}{8}$, για $\zeta<\xi$, έχουμε:

$$d(\Phi(\mu^2_{\xi,i})-\Phi(\mu^2_{\zeta,i}),\mathfrak{X}_0)>\frac{3\delta}{8}-3\varepsilon=\delta'.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι ή $d(\Phi(\mu^2_{\xi,i}),\mathfrak{X}_0)>\frac{\delta'}{2}$ ή $d(\Phi(\mu^2_{\zeta,i}),\mathfrak{X}_0)>\frac{\delta'}{2}$, έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $\xi<\omega_1$, έχουμε $d(\Phi(\mu^2_{\xi,i}),\mathfrak{X}_0)>\frac{\delta'}{2}$.

Μπορούμε τώρα να επιλέξουμε $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n<\omega_1$ έτσι ώστε τα σύνολα $G_{\xi_1,1},G_{\xi_2,2},...,G_{\xi_n,n}$ να είναι ανά δύο ξένα.

Παρατηρούμε ότι τα μέτρα $\mu_{\xi_1,1},\mu_{\xi_2,2},...,\mu_{\xi_n,n}$ είναι ανά δύο ξένα. Δεδομένου $\varepsilon>0$ υπάρχουν $V_1,V_2,...,V_d$ ανοιχτά-κλειστά ανά δύο ξένα υποσύνολα του $\mathcal{B}_\mathcal{D}$, τέτοια ώστε $\mu^2_{\xi_i,i}(V_i^c)<\varepsilon$, για $i=1,...,n$ και $\|\mu^1_{\xi_i,i}(\bigcup_{i=1}^n V_i)\|<\varepsilon$.

Τότε έχουμε:

$$d\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Phi(\mu^1_{\xi_i,i}+\mu^2_{\xi_i,i}),\mathfrak{X}_0\right)\geq d\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Phi(\mu^1_{\xi_i,i}(\bigcup_{i=1}^{n}V_i)+\mu^2_{\xi_i,i}(\bigcup_{i=1}^{n}V_i)),\mathfrak{X}_0\right)\geq$$
$$\geq d\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Phi(\mu^2_{\xi_i,i}(V_i)),\mathfrak{X}_0\right)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\|\Phi(\mu^2_{\xi_i,i}(\bigcup_{i\neq 1}V_i))\|-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\|\Phi(\mu^1_{\xi_i,i}(\bigcup_{i=1}^{n}V_i))\|\geq$$
$$\geq d\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Phi(\mu^2_{\xi_i,i}(V_i)),\mathfrak{X}_0\right)-2\varepsilon.$$

Κάθε ανοιχτό-κλειστό σύνολο V_i στο $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $V_i=\bigcup_{l=1}^{n(i)}V_{a_l,i}$ όπου τα a_l για $l=1,...,n(i)$ είναι incomparable στοιχεία του $\mathcal{D}$ και $V_{a_l,i}=\{b\in\mathcal{D}:a_l\leq b\}$. Τότε από το λήμμα Vδ1 έχουμε ότι η τελευταία ποσότητα δεν είναι μικρότερη από:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i d(\Phi(\mu^2_{\xi_i,i}(V_i)),\mathfrak{X}_0)-3\varepsilon\geq$$
$$\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i d(\Phi(\mu^2_{\xi_i,i}),\mathfrak{X}_0)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i d(\Phi(\mu^2_{\xi_i,i}(V_i^c)),\mathfrak{X}_0)-3\varepsilon>\tfrac{\delta'}{2}-4\varepsilon.$$

Τέλος,

$$d(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^{**}_{\xi_i,i},\mathfrak{X}_0)\geq d\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Phi(\mu^1_{\xi_i,i}+\mu^2_{\xi_i,i}),\mathfrak{X}_0\right)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\|\Phi(\mu^3_{\xi_i,i})\|>$$
$$>\tfrac{\delta'}{2}-5\varepsilon=c_1(\delta)$$

□

Θεωρημα 5.13. *Για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $c(\delta)>0$, τέτοιο ώστε αν W είναι ένα κλειστό κυρτό δ-non-dentable υποσύνολο του K, τότε για κάθε επιλογή από slices $S_1,S_2,...,S_n$ του W και για κάθε $\lambda_i\geq 0$ για $i=1,..,n$, με $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, έχουμε diam $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i S_i\right)>c(\delta)$.*

Αποδειξη. Έστω $S_1,S_2,...,S_n$ τα slices του W και $\widetilde{S_1},\widetilde{S_2},...,\widetilde{S_n}$ τα αντίστοιχα slices του $\widetilde{W}$. Από την πρόταση 5.12 υπάρχουν $(x^{**}_{\xi,i})_{\xi\in\omega_1}\subset S_E$ τέτοια ώστε $d(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^{**}_i,\mathfrak{X}_0)>c_1(\delta)$ γιά $c_1(\delta)>0$. Τότε επειδή ισχύουν τα:

Γεγονός 1

αν $d(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^{**}_{\xi_i,i},\mathfrak{X}_0)>c_1(\delta)$ τότε diam $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\widetilde{S_i}\right)>c(\delta)$ για $c(\delta)>0$

(αφού για το στοιχείο $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in\mathfrak{X}_0$, με $x_i\in S_i\subset\widetilde{S_i}$, $i=1,...,n$ έχουμε : $\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^{**}_{\xi_i,i}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\|>c_1(\delta)$)

Γεγονός 2

$$\operatorname{diam}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{S}_i\right) = \operatorname{diam}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i\right) \qquad ([\mathbf{50}]), \text{Πορ. } 1.9)$$

ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

Το προηγούμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι το σύνολο K είναι non-strongly regular και επειδή η PCP συνεπάγεται την strong regularity έχουμε:

Θεωρημα 5.14. *Υπάρχει ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-dentable υποσύνολο K του $\mathfrak{X}_0$, τέτοιο ώστε στα υποσύνολα του K η RNP και η PCP είναι ισοδύναμες ιδιότητες.*

Παρατηρηση 5.15. *Επειδή ο χώρος Banach $\mathfrak{X}_{\mathcal{D},S_n}$ μπορεί να $\frac{1}{2}$- εμφυτευτεί στον χώρο Banach $C(\omega^{\omega^n})$ (παρατήρηση στην ενότητα 5.2) χρησιμοποιώντας τις οικογένειες Schreier S_n, αντί των κανονικών οικογενειών $\mathcal{F}_n$, έχουμε ότι ο χώρος Banach $\mathfrak{X}_0$ μπορεί να εμφυτευθεί στον $C(\omega^{\omega^\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus C(\omega^{\omega^n})$ και έτσι ο χώρος $C(\omega^{\omega^\omega})$ από το πόρισμα 5.14 περιέχει ένα κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-dentable υποσύνολο K τέτοιο ώστε στα υποσύνολα του K η RNP και η PCP είναι ισοδύναμες ιδιότητες. Το γεγονός αυτό μας ήταν γνωστό από το [**42**]. Η κατάσταση είναι τελείως διαφορετική για τους χώρους $C(\omega^{\omega^k})$ με $k \in \mathbb{N}$, όπου κάθε κλειστό, κυρτό, φραγμένο non-RNP υποσύνολο K του $C(\omega^{\omega^k})$ περιέχει ένα κλειστό, κυρτό, non-RNP υποσύνολο L που έχει την PCP ([**44**]).*

Βιβλιογραφία

[1] F. Albiac, N.J. Kalton:*Topics in banach Space Theory*, Grad. Texts in Math. 283, Springer, 2006.

[2] D. Alspach and S. Argyros *Complexity of weakly null sequences*, Dissertationes Math. 321, 1992, 1-44.

[3] S. Argyros, I. Deliyanni:*Representations of convex non-dentable sets*, Pacific J. Math. 155, 1992, 29-70.

[4] S. Argyros, I. Deliyanni:*Non-dentable sets in Banach spaces with separable dual*, Israel J. Math. 81, 1993, 53-64.

[5] S. Argyros, G. Godefroy and H. P. Rosenthal, *Descriptive Set Theory and Banach Spaces*, Handbook of the geometry of Banach Spaces, Vol. 2, W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, eds, Elsevier, Amsterdam, 2001, 1007-1069.

[6] S. Argyros, E. Odell, H. Rosenthal:*On certain convex subsets of* c_0, Lect. Notes in Math. 1332, Springer, 1987, 80-111.

[7] S. Argyros, M. Petrakis:*A property of non-strongly regular operators*, London Math. Soc., Lect. Note Ser. 158, Camb. Univ. Press, 1990, 5-24.

[8] Y. Benyamini, J. Linderstrauss:*Geometric Nonlinear Functional Analysis V1*, AMS, Coll. Publ., Vol. 48, 2000.

[9] C. Bessaga, A. Pelzynski:*Spaces of continuous functions IV*, Studia Math. 19, 1960, 53-62.

[10] C. Bessaga, A. Pelzynski:*On extreme points in separable conjugate spaces*, Israel J. Math. 4, 1966, 262-264.

[11] E. Bishop, R.R. Phelps:*A proof that every Banach space is surjective*, Amer. Math. Soc. Bull. 67, 1961, 97-98.

[12] J. Bourgain:*La propriete de Radon-Nikodym*, Pub. Math. de l' Univ. Pierre et Marie Curie, no 36, Paris, 1980.

[13] J. Bourgain, H. Rosenthal: *Martingales valued in certain subspaces of* L^1, Israel J. Math. 37, No 1-2, 1980, 54-75

[14] J. Bourgain:*Dentability and finite dimensional decompositions*, Studia Math. 67, 1980, 135-148.

[15] J. Bourgain:*Dunford-Pettis operator on* L^1 *and the Radon-Nikodym property*, Israel J. Math. 37, 1980, 34-47.

[16] J. Bourgain:*Sets with the Radon-Nikodym property in conjucate spaces*, Studia Math. 60, 1980, 291-297.

[17] J. Bourgain, D.H. Fremlin, M. Talagrand:*Pointwise compact sets of Baire measurable functions*, Amer. J. Math. 100, 1978, 845-886.

[18] J. Bourgain, H. Rosenthal:*Geometrical imlications of certain infinite dimensional decompositions*, Bull. Soc. Math. Belg. 32, 1989, 57-82.

[19] J. Bourgain, M. Talagrand:*Dans un espaces de Banach reticule solide, la propriete de Radon-Nikodym et cell de Krein-Milman sont equivalentes*, Proc. Amer. Math. Soc. 81, 1981, 93-96.

[20] R. Bourgin:*Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property*, Springer-Verlag, 1983.

[21] S.D. Chatterji:*Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces*, Math. Scand. 22, 1968, 21-41.

[22] W. Comfort and S. Negrepontis, *Theoty of Ultrafilters*, Springer-Verlag,1974.

[23] D. L. Cohn, *Measure theory*, Birkhauser, Boston 1997.

[24] W.J. Davis, R.R. Phelps:*The Radon-Nikodym property and dentable sets in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 45, 1974, 119-122.

[25] J. Diestel:*Geometry of Banach Spaces*, Selected Topics, Lect. Notes in Math., 485, Springer, 1975.

[26] J. Diestel, J.J. Uhl Jr.:*Vector measures*, AMS, Math Sur and Mon., Vol 15, 1977.

[27] I. Gasparis, *A dichotomy theorem for subsets of the power set of the natural numbers*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 129, No. 3, 2000, 759-764.

[28] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, W. Schachermayer:*Some topological and geometrical structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 70, 1987, no 378.

[29] N. Ghoussoub, B. Maurey, W. Schachermayer:*A counterexample to a problem aboyt points of continuity in Banach spaces*, Proc. of AMS 99, no 2, 1987, 278-282.

[30] N. Ghoussoub, B. Maurey, W. Schachermayer:*Geometrical imlications of certain infinite dimensional decompositions*, περιέχεται στο [29].

[31] P. Habala, P. Hajek, V. Zizler:*Introduction to Banach Spaces [I], [II]*, Matfyzpress, vydavatelstvi Matematicko-fyzikalni faculty, Univ. Karlovy, 1996.

[32] R.E. Huff:*Dentability and the Radon-Nikodym property*, Duke Math.J. 41, 1974, 111-114.

[33] R.E. Huff, P.D. Morris:*Dual spaces with the Krein-Milman property have the Radon-Nikodym property*, Proc. Amer. Math. Soc. 49, 1975, 104-108.

[34] R. C. James:*KMP, RNP and PCP for Banach spaces*, Contemp. Math. 85, Amer. Math. Soc., 1987, 281-317.

[35] R. C. James:*A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space*, Proc. Natl. Acad.Sci. U.S.A. 37, 1951, 174-177.

[36] H. E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[37] Bor-Liu Lin, Pei-Kee Lin, S.L. Troyanski:*A characterization of denting points of a closed bounden convex set*, Longhorn Notes, U.T. Functional Analysis Seminar, 1985-1986, Univ. of Texas.

[38] J. Linderstrauss:*On extreme points in* ℓ^1, Israel J. Math. 4, 59-61.

[39] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri:*Classical Banach Spaces I*, Springer, 1977.

[40] H.B. Maynard:*A geometrical characterization of Banach spaces with the Radon-Nikodym property*, Trans. Amer. Math. Soc. 185, 1973, 493-500.

[41] A.A. Miljutin:*Isomorphism of the spaces of continuous functions over compact sets of the cardinality of the continuum*, Teor. Funkcii Funkional Anal. Prilozen, Vyp. 2, 1966, 150-156.

[42] E. Odell:*manuscript*.

[43] E. Odell:*On quotients of Banach spaces having shrinking unvonditional bases*, Illinois J. of Math., Vol. 36, No 4, 1992, 681-695.

[44] P. D. Pavlakos and M. Petrakis, *On the structure of non-dentable subsets of* $C(\omega^{\omega^k})$, Studia Math., No 203, 2011, 205-222.

[45] A. Pelczynski, *On the impossibility of embedding of the space L in certain Banach spaces*, Colloq. Math. 8, 1961, 199-203.

[46] B.J. Pettis:*Linear functionals and completely additive functions*, Duke Math. J. 4, 1938, 552-565.

[47] R.R. Phelps:*Dentability and extreme points in Banach spaces*, J. Funct. Anal. 17, 1974, 78-80.

[48] M.A. Rieffel:*The Radon-Nikodym Theorem for the Bochner Integral*, Trans. Amer. Math. Soc. 131, 1968, 466-487.

[49] H. Rosenthal:*Pointwise compact subsets of the first Baire class*, Amer. J. Math. 99, 1977, 362-378.

[50] H. Rosenthal:*On the structure of non-dentable closed bounded convex sets*, Adv. Math. 70, 1989, 159-182.

[51] H. Rosenthal, A. Wessel:*The Krein-Milman property and a martingale coordinatization of certain non-dentable sets*, Pacific J. Math. 136, 1989, 159-182.

[52] W. Rudin:*Real and complex analysis*, McGraw Hill, 1986 (3d ed.).

[53] W. Schachermayer:*For a Banach space isomorphic to its square the Radon-Nikodym property and the Krein-Milman property are equivalent*, Studia Math. 81, 1985, no3, 329-339.

[54] W. Schachermayer:*The Radon-Nikodym property and the Krein-Milman property are equivalent for strongly regular sets*, Trans. Amer. Math. soc. 303, 1987, 673-687.

[55] C. Stegall:*The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces*, Trans. Amer. Math. soc. 206, 1975, 213-223.

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΟ

ΤΗΣ ΕΠΤΑΜΕΛΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ
ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ
του Παυλάκου Περικλή
Πτυχιούχου Μαθηματικού

Η επταμελής εξεταστική επιτροπή που διορίσθηκε σύμφωνα με το άρθρο 13 του Ν. 2083/92 και την απόφαση της Γενικής Συνέλευσης με Ειδική Σύνθεση του Γενικού Τμήματος της συνεδρίασης αριθμ. **34η/19.6.2008** για την κρίση της διδακτορικής διατριβής του κ. Παυλάκου Περικλή συνήλθε σε συνεδρίαση σήμερα 7 Ιουνίου 2013 στα Χανιά και παρακολούθησε την υποστήριξη της διατριβής με τίτλο:

«Μελέτη Γεωμετρικών Ιδιοτήτων Χώρων Banach»

Μετά την ανάπτυξη προς διατριβής, τα μέλη προς εξεταστικής επιτροπής, έκαναν ερωτήσεις στον υποψήφιο τόσο γενικού περιεχομένου, όσο και σχετικές με το θέμα της διατριβής.

Στην συνέχεια, αποχώρησε ο υποψήφιος και ακολούθησε συζήτηση της Επιτροπής.

Η Επιτροπή, μετά από ψηφοφορία, έκρινε ότι η διατριβή του κ. Περικλή Παυλάκου, είναι πρωτότυπη και αποτελεί ουσιαστική συμβολή στην επιστήμη, προτείνει δε προς τη Γενική Συνέλευση του Τμήματος, ομόφωνα, να του απονείμει τον τίτλο του ***Διδάκτορος.***

Η ΕΠΙΤΡΟΠΗ — ΥΠΟΓΡΑΦΗ

1. Πετράκης Μ., Επίκ. Καθηγητής του Π.Κ.
2. Αργυρός Σπυρίδων, Καθηγ. ΕΜΠ
3. Γάσπαρης Ιωάννης, Αναπλ. Καθηγ. ΣΕΜΦΕ
4. Μανουσάκης Αντ. Επικ. Καθηγητής του Π.Κ.
5. Κανδυλάκης Δ. Αναπλ. Καθηγητής του Π.Κ.
6. Γρυσπολάκης Ι., Καθηγητής. του Π.Κ.
7. Ι. Σαριδάκης. Καθηγητής του Π.Κ.