ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΥΝΕΡΓΑΖΟΜΕΝΕΣ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΩΝ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος

υπό

Ευστράτιου Θ. Ιωαννίδη

Χανιά, 2004

© Copyright υπό Ευστράτιου Ιωαννίδη, 2004

Η διατριβή του Ευστράτιου Ιωαννίδη, εγκρίνεται

Βασίλειος Κουϊκόγλου ____________________

Αναπληρωτής Καθηγητής, επιβλέπων

Ιωάννης Φίλης ____________________

Καθηγητής, μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής

Αθανάσιος Μυγδαλάς ____________________

Αναπληρωτής Καθηγητής, μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής

Μάρκος Παπαγεωργίου ____________________

Καθηγητής

Γεώργιος Σταυρακάκης ____________________

Καθηγητής

Ευάγγελος Γρηγορούδης ____________________

Λέκτορας

Ηλίας Κοσματόπουλος ____________________

Λέκτορας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής και ιδιαίτερα τον Καθηγητή Ιωάννη Φίλη για τις πολύτιμες υποδείξεις του για την ολοκλήρωση και τη συγγραφή της διατριβής. Ακόμη οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου και την αδελφή μου για την αμέριστη υποστήριξη τους καθ’ όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στον επιβλέποντα της διατριβής, Αναπληρωτή Καθηγητή Βασίλειο Κουϊκόγλου τόσο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση κατά τη διάρκεια της εκπόνησης του διδακτορικού μου, όσο και για την ηθική υποστήριξη που μου πρόσφερε ακόμη και στις πιο δύσκολες και σκοτεινές στιγμές της πορείας προς την ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

Η εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής χρηματοδοτήθηκε εν μέρει από το Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων της Ελλάδας και το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο στα πλάισια του προγράμματος «Ηράκλειτος: υποτροφίες έρευνας με προτεραιότητα στη βασική έρευνα».

Σύντομο βιογραφικό σημείωμα

Ο Ευστράτος Ιωαννίδης γεννήθηκε στο Ηράκλειο Κρήτης το Σεπτέμβριο του 1971. Αποφοίτησε από το τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης το 1995. Απέκτησε το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης του ιδίου τμήματος το 1997. Μέχρι σήμερα είναι υποψήφιος διδάκτορας του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης. Ερευνητικά ασχολείται με προβλήματα σχεδίασης και ελέγχου συστημάτων παραγωγής με ευφυείς και κλασσικές μεθόδους.

Περίληψη

Σε αυτή τη διατριβή μελετώνται προβλήματα συνδυασμένου ελέγχου παραγωγής και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής. Στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους, ήτοι των εσόδων από πωλήσεις πλην κόστους λειτουργίας, διατήρησης αποθεμάτων, απώλειας και καθυστερήσεων πελατών. Συνήθης πρακτική ελέγχου παραγωγής και πωλήσεων είναι η παύση της παραγωγής όταν το απόθεμα φθάσει ένα άνω όριο, γνωστό ως βασικό απόθεμα, ενώ όταν δεν υπάρχει απόθεμα οι αφικνούμενες παραγγελίες είτε γίνονται δεκτές είτε απορρίπτονται. Σε αυτή την εργασία προτείνεται μία πρωτότυπη πολιτική μερικής ικανοποίησης όπου οι αφικνούμενες παραγγελίες γίνονται δεκτές μέχρις ενός ορίου, το οποίο ονομάζουμε βασικό έλλειμμα. Εξετάζονται οι περιπτώσεις συστημάτων μίας μηχανής, δικτύων παραγωγής καθώς και δικτύων όπου γίνεται έλεγχος ποιότητας. Εφαρμόζοντας τη θεωρία ουρών αναμονής εκφράζεται το κέρδος του συστήματος συναρτήσει του βασικού αποθέματος και του βασικού ελλείμματος. Για κάθε περίπτωση, αποδεικνύονται συνθήκες υπό τις οποίες το κέρδος, μολονότι δεν είναι κοίλη συνάρτηση των παραμέτρων ελέγχου, έχει μοναδικό ακρότατο. Με την χρήση αυτής της ιδιότητας αναπτύσσονται αποτελεσματικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης. Τα αριθμητικά παραδείγματα επιβεβαιώνουν την υπεροχή της προτεινόμενης μεθόδου έναντι άλλων δημοφιλών πολιτικών ελέγχου σε όλες τις περιπτώσεις.

1 Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της διατριβής

Στο σύγχρονο επιχειρηματικό περιβάλλον ο αποτελεσματικός έλεγχος των συστημάτων παραγωγής αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για την ανταγωνιστικότητα και τη βιωσιμότητα κάθε βιομηχανίας. Ο έλεγχος συστημάτων παραγωγής περιλαμβάνει τον χρονικό προγραμματισμό της λειτουργίας κάθε μηχανής του συστήματος (πότε ξεκινά η παραγωγή, με τι ρυθμό και πότε διακόπτεται) και τον έλεγχο των πωλήσεων (πότε γίνεται δεκτή μία αφικνούμενη παραγγελία και πότε απορρίπτεται ή ανατίθεται σε υπεργολάβους). Ο έλεγχος παραγωγής είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης κάποιου μέτρου απόδοσης όπως το καθαρό κέρδος, το κόστος λειτουργίας, το μέσο απόθεμα, το επίπεδο εξυπηρέτησης πελατών κ.α. Τέτοια προβλήματα έχουν μελετηθεί εκτενώς στο παρελθόν πλην όμως αποσπασματικά.

Στην παρούσα διατριβή εξετάζουμε το πρόβλημα του δυναμικού ελέγχου των ρυθμών παραγωγής και της αποδοχής των παραγγελιών συναρτήσει των αποθεμάτων σε κάθε στάδιο παραγωγής και του πλήθους των εκκρεμών παραγγελιών κάθε χρονική στιγμή. Για τον έλεγχο του ρυθμού παραγωγής χρησιμοποιείται η πολιτική αποθέματος βάσης. Σύμφωνα με αυτήν την πολιτική, το σύστημα παραγωγής παράγει στο μέγιστο ρυθμό όταν το απόθεμα ετοίμων προϊόντων είναι μικρότερο από ένα κατώφλι, που ονομάζεται *απόθεμα βάσης*, και διακόπτει την παραγωγή όταν το απόθεμα γίνει ίσο με το απόθεμα βάσης. Για τον έλεγχο αποδοχής παραγγελιών προτείνουμε την πολιτική μερικής αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης. Η πολιτική αυτή απορρίπτει όλες τις παραγγελίες, όταν η μη ικανοποιημένη ζήτηση γίνει ίση με ένα κατώφλι που ονομάζεται *έλλειμμα βάσης*. Στόχος του ελέγχου είναι ο από κοινού καθορισμός του αποθέματος βάσης και ελλείμματος βάσης που βελτιστοποιούν ένα μέτρο απόδοσης του συστήματος. Ως μέτρο απόδοσης του συστήματος χρησιμοποιούμε το κέρδος ανά μονάδα χρόνου, το οποίο προκύπτει από τα έσοδα των πωλήσεων μείον το κόστος αποθεμάτων και το κόστος εκκρεμών παραγγελιών. Η προτεινόμενη πολιτική *μερικής αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης* περιλαμβάνει τις δημοφιλείς πολιτικές *πλήρους αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης* (όπου το έλλειμμα βάσης είναι ∞) και *πλήρους απόρριψης της μη ικανοποιημένης ζήτησης* (όπου το έλλειμμα βάσης είναι 0), όταν δεν υπάρχει ετοιμοπαράδοτο προϊόν, ως ειδικές περιπτώσεις. Κατά συνέπεια σε όλες τις περιπτώσεις η προτεινόμενη πολιτική εγγυάται μεγαλύτερα κέρδη από τις δύο τελευταίες.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής ελέγχου των ρυθμών παραγωγής εφαρμόζονται συνήθως ο δυναμικός προγραμματισμός και ο βέλτιστος έλεγχος. Για συστήματα παραγωγής που αποτελούνται από μία μηχανή και παράγουν ένα τύπο προϊόντος, οι Akella and Kumar [1] αποδεικνύουν ότι οι βέλτιστες πολιτικές ελέγχου του ρυθμού παραγωγής είναι τύπου *κατωφλίου* (threshold-type): όταν το απόθεμα ετοίμων προϊόντων υπερβεί κάποιο κατώφλι, ο βέλτιστος ρυθμός παραγωγής είναι ίσος με το μηδέν, όταν το απόθεμα είναι μικρότερο του κατωφλίου η μηχανή παράγει με τον μέγιστο ρυθμό ενώ όταν η στάθμη αποθέματος αγγίξει το κατώφλι αυτό τότε η μηχανή παράγει συγχρονισμένα με τη ζήτηση ώστε το απόθεμα να διατηρείται σε εκείνη τη στάθμη.

Οι Veatch and Wein [41] εξετάζουν γραμμές παραγωγής με δύο μηχανές και οδηγούνται σε μία αρκετά σύνθετη πολιτική. Σε συστήματα παραγωγής με περισσότερες από δύο μηχανές η βέλτιστη πολιτική ελέγχου γίνεται εξαιρετικά πολύπλοκη. Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για τους οποίους οι βέλτιστες, πλην όμως πολύπλοκες πολιτικές ελέγχου δεν είναι πρακτικά εφαρμόσιμες. Καταρχήν απαιτείται δαπανηρός εξοπλισμός και λογισμικό για τη συγκέντρωση και επεξεργασία των αναγκαίων για τη λειτουργία του συστήματος πληροφοριών. Ένα ακόμη μειονέκτημα που μπορεί να προκύψει από την εφαρμογή μίας τέτοιας πολιτικής ελέγχου είναι η σύγχυση και η δυσπιστία των χειριστών και εργατών προς την προτεινόμενη πολιτική, αφού αδυνατούν να κατανοήσουν τη λογική της. Τα παραπάνω μειονεκτήματα στις περισσότερες περιπτώσεις είναι σημαντικότερα από το όφελος που θα προέκυπτε αν εφαρμοζόταν η βέλτιστη πολιτική, αντί μιας απλής υποβέλτιστης πολιτικής ελέγχου. Για τους παραπάνω λόγους, ο δυναμικός προγραμματισμός και ο βέλτιστος έλεγχος χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά για την αναγνώριση των δομικών ιδιοτήτων της βέλτιστης πολιτικής ελέγχου. Για παράδειγμα είδαμε ότι σε συστήματα με μία μηχανή ο βέλτιστος ρυθμός παραγωγής είναι μία συνάρτηση του αποθέματος που έχει τη μορφή κατωφλίου, ενώ σε άλλες περιπτώσεις αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη πολιτική είναι εν γένει μονότονη συνάρτηση του αποθέματος. Τέτοιες ιδιότητες σε συστήματα παραγωγής με πολλές μηχανές εξετάζονται στις εργασίες Lou and Van Ryzin [25], Van Ryzin et al. [39], Veatch and Wein [40] και Weber and Stidham [42].

Ένας άλλος πρακτικός τρόπος για την αντιμετώπιση του προβλήματος του ελέγχου παραγωγής είναι η αναζήτηση της βέλτιστης πολιτικής μέσα σε μία οικογένεια απλών πολιτικών, που υλοποιούνται εύκολα και εξαρτώνται από ένα μικρό αριθμό παραμέτρων. Εδώ, η γνώση των δομικών ιδιοτήτων της βέλτιστης πολιτικής μπορεί να βοηθήσει στην εύρεση τέτοιων απλών πολιτικών.

Υπάρχουν αρκετές κατηγορίες απλών πολιτικών ελέγχου για συστήματα παραγωγής: οι πολιτικές *αποθέματος βάσης* (base stock), οι πολιτικές KANBAN, CONWIP καθώς και συνδυασμοί των (γενικευμένες πολιτικές KANBAN, οι εκτεταμένες πολιτικές KANBAN, κ.α.). Λεπτομέρειες σχετικά με τις παραπάνω οικογένειες πολιτικών παρουσιάζονται στις εργασίες Liberopoulos and Dallery [24] καθώς και Buzacott and Shanthikumar [7]. Μία εξαιρετική βιβλιογραφική επισκόπηση των διαφόρων οικογενειών πολιτικών ελέγχου συστημάτων παραγωγής παρουσιάζεται στην εργασία Buzacott and Shanthikumar [6].

Στις εργασίες Veatch and Wein [41] και Karaesmen and Dallery [21] εξετάζονται γραμμές παραγωγής με δύο μηχανές και συγκρίνονται μερικές απλές αλλά διαδεδομένες πολιτικές ελέγχου με τη βέλτιστη πολιτική που προκύπτει εφαρμόζοντας δυναμικό προγραμματισμό. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι σχεδόν πάντα υπάρχει μία απλή πολιτική ελέγχου που είναι σχεδόν βέλτιστη, δηλαδή η απόδοση της προσεγγίζει εκείνη της βέλτιστης πολιτικής. Δεν υπάρχει όμως κάποια οικογένεια πολιτικών που να υπερέχει έναντι των άλλων σε όλες τις περιπτώσεις. Για κάποιες τιμές των παραμέτρων του συστήματος κάποια οικογένεια πολιτικών μπορεί να δίνει υψηλότερο κέρδος ενώ για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων κάποια άλλη κατηγορία πολιτικών είναι καλύτερη.

Σε αυτή την εργασία εξετάζουμε τα λεγόμενα συστήματα *παραγωγής προς αποθήκευση* (make-to-stock) που παράγουν ένα προϊόν του οποίου η ζήτηση είναι στοχαστική. Τα συστήματα αυτά αποτελούνται από μία μονάδα παραγωγής με μηχανές και ενδιάμεσες αποθήκες και μία αποθήκη ετοίμων προϊόντων. Μια συνηθισμένη πρακτική ελέγχου αποθεμάτων σε συστήματα παραγωγής προς αποθήκευση συνίσταται στον καθορισμό ενός κατωφλίου για το πλήθος των ετοίμων προϊόντων. Το κατώφλι αυτό ονομάζεται *απόθεμα βάσης* (base stock). Όταν το απόθεμα ετοίμων προϊόντων γίνει ίσο με το απόθεμα βάσης τότε η παραγωγή σταματά και επανεκκινεί όταν το απόθεμα πέσει κάτω από το απόθεμα βάσης. Η πολιτική αυτή εγγυάται ότι το κόστος αποθέματος είναι φραγμένο. Οι πολιτικές αποθέματος βάσης, καθώς και κάποιες επεκτάσεις τους, αναπτύχθηκαν αρχικά για αποθεματικά συστήματα στα τέλη της δεκαετίας του 1950 (π.χ. βλ. Clark and Scarf [10]). Αν το απόθεμα βάσης επιλεγεί μηδέν τότε έχουμε τη λεγόμενη πολιτική μηδενικού αποθέματος βάσης, ή πολιτική *παραγωγής κατά παραγγελία* (make-to-order). Τα αποθεματικά συστήματα μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική περίπτωση συστημάτων παραγωγής, στα οποία η μονάδα παραγωγής είτε έχει άπειρη παραγωγικότητα είτε η διάρκεια παραγωγής μίας παρτίδας προϊόντων δεν εξαρτάται από το μέγεθος της παρτίδας. Συνεπώς τα προβλήματα αποθεματικών συστημάτων είναι απλούστερα από εκείνα των συστημάτων παραγωγής.

Στη βιβλιογραφία του στοχαστικού ελέγχου, υπάρχουν αρκετές εργασίες που εξετάζουν τη δομή της βέλτιστης πολιτικής ελέγχου αποδοχής πελατών σε αναμονητικά συστήματα. Τα αναμονητικά συστήματα χρησιμοποιούνται συχνά για τη μαθηματική περιγραφή συστημάτων παραγωγής. Βιβλιογραφική επισκόπηση του ελέγχου αποδοχής παραγγελιών γίνεται στις εργασίες Stidham [33] και Stidham and Weber [35]. Παρόλο που η βιβλιογραφία είναι αρκετά εκτενής, δεν υπάρχουν αποτελέσματα σχετικά με τον συνδυασμένο έλεγχο αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση συστήματος με έναν εξυπηρετούντα, για το οποίο αποδεικνύεται ότι η βέλτιστες πολιτικές παραγωγής και αποδοχής παραγγελιών είναι τύπου κατωφλίου (Altman and Stidham [3] και Stidham and Weber [34]). Ωστόσο, ο ακριβής προσδιορισμός των βέλτιστων κατωφλίων ελέγχου αποτελεί ανοικτό πρόβλημα.

Σε προβλήματα συστημάτων παραγωγής και αποθεματικών συστημάτων, υιοθετούνται συνήθως απλές πολιτικές αποδοχής σύμφωνα με τις οποίες, όταν δεν υπάρχει έτοιμο προϊόν, οι παραγγελίες είτε απορρίπτονται όλες είτε γίνονται όλες αποδεκτές (βλ., π.χ., Hadley and Whitin [14], Smith [32], Zipkin [45]). Η αποδοχή όλων των παραγγελιών σε περιόδους που δεν υπάρχει απόθεμα καλείται πολιτική *πλήρους αποδοχής* (CB, complete backordering), ενώ η απόρριψη όλων των παραγγελιών όταν δεν είναι δυνατόν να ικανοποιηθούν άμεσα ονομάζεται πολιτική *πλήρους απόρριψης* (LS, lost sales). Όταν ο ρυθμός παραγωγής της μονάδας παραγωγής είναι μικρότερος της ζήτησης η πολιτική πλήρους αποδοχής καθίσταται ζημιογόνος για μία επιχείρηση αφού το πλήθος των παραγγελιών σε αναμονή θα τείνει να μεγαλώνει χωρίς φραγμό. Μία εναλλακτική πολιτική ελέγχου όταν δεν υπάρχει απόθεμα είναι η αποδοχή ή απόρριψη παραγγελιών με τυχαίο τρόπο (π.χ. πραγματοποιώντας ένα πείραμα Bernoulli) ανεξαρτήτως από το πλήθος των παραγγελιών που ήδη εκκρεμούν (Moinzadeh [26]). Αυτή η πολιτική ονομάζεται πολιτική *τυχαίας αποδοχής* (RAC, randomized admission control) και μέχρι τώρα χρησιμοποιείται μόνο σε συστήματα μίας μηχανής.

Οι πολιτικές CB και LS είναι εκ διαμέτρου αντίθετες. Με την πλήρη αποδοχή της μη άμεσα ικανοποιημένης ζήτησης δεν τίθεται φραγμός στο πλήθος των καθυστερημένων παραγγελιών ενώ αντίθετα με την πολιτική πλήρους απόρριψης το πλήθος των εκκρεμών παραγγελιών είναι μηδέν. Μια ενδιάμεση πολιτική ελέγχου των παραγγελιών είναι η *πολιτική μερικής αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης* (PLS, partly lost sales). Η πολιτική αυτή είναι τύπου κατωφλίου και απορρίπτει όλες τις παραγγελίες όταν η μη ικανοποιημένη ζήτηση γίνει ίση με ένα κατώφλι που ονομάζεται *έλλειμμα βάσης*. Η συνολική πολιτική του συστήματος καθορίζεται πλήρως από δύο μη αρνητικούς αριθμούς, το απόθεμα βάσης και το έλλειμμα βάσης. Η πολιτική μερικής αποδοχής παραγγελιών είναι γενικότερη των CB και LS αφού για τις ακραίες τιμές ∞ και 0 του ελλείμματος βάσης εκφυλίζεται σε μία από αυτές. Η πολιτική αυτή εξετάζεται για πρώτη φορά στις εργασίες Caldentey [9] και Kouikoglou and Phillis [22]. Οι Kouikoglou και Phillis εξετάζουν το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων, παραγγελιών και χαρακτηριστικών ποιότητας σε συστήματα παραγωγής με μία μηχανή και εκθετικούς χρόνους παραγωγής και αφίξεων πελατών. Το πρόβλημα περιγράφεται μαθηματικά με τη χρήση της θεωρία αναμονητικών συστημάτων. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζουν δείχνουν ότι η πολιτική μερικής αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης είναι αποδοτικότερη από τις διαδεδομένες πολιτικές CB και LS. Ο Caldentey χρησιμοποιεί ροϊκές προσεγγίσεις αναμονητικών συστημάτων και τη θεωρία βέλτιστου ελέγχου για να επιλύσει το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και παραγγελιών σε παρόμοια συστήματα με αυτά που εξετάζουν οι Kouikoglou και Phillis.

1.3 Δομή της διατριβής, μεθοδολογία, αποτελέσματα

Στην παρούσα εργασία επεκτείνουμε και γενικεύουμε τα αποτελέσματα των εργασιών Caldentey [9] και Kouikoglou and Phillis [22] για συστήματα παραγωγής με χρόνους παραγωγής και αφίξεων πελατών που έχουν γενικές κατανομές και για δίκτυα παραγωγής με πολλές μηχανές. Στόχος της εργασίας είναι η ανάλυση των πολιτικών τυχαίας (RAC) και μερικής (PLS) αποδοχής πελατών, η εύρεση για τη συνάρτηση κέρδους ιδιοτήτων δεύτερης τάξεως οι οποίες διευκολύνουν τη βελτιστοποίηση και, τέλος, η σύγκριση της απόδοσης των πολιτικών αυτών σε σχέση με τις ευρέως εφαρμοζόμενες πολιτικές CB και LS.

Για τη μαθηματική περιγραφή των εξεταζόμενων προβλημάτων χρησιμοποιήθηκε η θεωρία ουρών ή αναμονής. Πρώτος χρησιμοποίησε τη θεωρία ουρών σε προβλήματα συστημάτων παραγωγής και αποθεματικών συστημάτων ο Morse [27]. Έκτοτε έχει χρησιμοποιηθεί κατά κόρον σε προβλήματα παραγωγής με σημαντική επιτυχία. Μια εκτενής βιβλιογραφική επισκόπηση των εφαρμογών της θεωρίας ουρών στα συστήματα παραγωγής παρουσιάζεται από τους Govil and Fu [11]. Ένας λόγος που προτιμήθηκε το συγκεκριμένο πλαίσιο μαθηματικής μοντελοποίησης είναι ότι περιγράφει με ξεκάθαρο και ακριβή τρόπο τη λειτουργία συστημάτων όπως αυτά που εξετάζονται εδώ.

Η παρούσα διατριβή αποτελείται από τρία επιπλέον κεφάλαια:

Στο Κεφάλαιο 2 εξετάζονται συστήματα παραγωγής με μία μηχανή και γενικά κατανεμημένους χρόνους παραγωγής και αφίξεων παραγγελιών. Το σύστημα μοντελοποιείται ως ένα αναμονητικό σύστημα G/G/1/*m*. Το κέρδος του συστήματος προκύπτει από το κέρδος πωλήσεων προϊόντων μείον το κόστος αποθέματος ετοίμων προϊόντων και το κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης. Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση κέρδους της πολιτικής PLS είναι *σχεδόν κοίλη* (ή οιονεί κοίλη, quasiconcave). Με βάση αυτή την ιδιότητα αναπτύσσεται ένας απλός αλγόριθμος για τον προσδιορισμό του βέλτιστου αποθέματος βάσης και του βέλτιστου ελλείμματος βάσης από κοινού. Τα αριθμητικά παραδείγματα δείχνουν ότι η προτεινόμενη πολιτική υπερτερεί άλλων διαδεδομένων πολιτικών ελέγχου.

Στο Κεφάλαιο 3 εξετάζουμε δίκτυα παραγωγής αυθαίρετης γεωμετρίας και εκθετικούς χρόνους παραγωγής και αφίξεων πελατών. Για κάθε μία από τις πολιτικές PLS και RAC περιγράφουμε το σύστημα ως ένα κλειστό δίκτυο αναμονής και καταλήγουμε σε τύπους κλειστής μορφής για το υπολογισμό του μέσου ρυθμού κέρδους. Επί πλέον, αποδεικνύουμε μερικές ιδιότητες δεύτερης τάξης της συνάρτησης κέρδους για την πολιτική PLS και αναπτύσσουμε αλγορίθμους βελτιστοποίησης των παραμέτρων και των δύο πολιτικών. Και σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται σύγκριση της απόδοσης των προτεινόμενων πολιτικών με άλλες πολιτικές που εφαρμόζονται συνήθως στην πράξη.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε μία εφαρμογή και μία επέκταση της πολιτικής μερικής αποδοχής (PLS). Εξετάζουμε πρώτα τα οφέλη από το συνδυασμένο έλεγχο ποιότητας, αποθεμάτων και πωλήσεων σε δίκτυα παραγωγής. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου μελετάμε ως προς την κυρτότητα τη συνάρτηση κέρδους σε δίκτυα παραγωγής με γενικά κατανεμημένους χρόνους παραγωγής και αφίξεων πελατών και δυνατότητα παραγωγής κατά παρτίδες.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται συμπεράσματα και κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

2 Συνεργαζόμενες Πολιτικές Ελέγχου Αποθεμάτων και Αποδοχής Παραγγελιών σε Συστήματα Παραγωγής Μίας Μηχανής

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα μίας μηχανής. Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί από τους Caldentey [9] και Kouikoglou and Phillis [22] για συστήματα με εκθετικούς χρόνους αφίξεων πελατών και παραγωγής. Εδώ εξετάζουμε συστήματα με γενικά κατανεμημένους χρόνους παραγωγής και αφίξεων παραγγελιών. Οι Kouikoglou and Phillis [22] εξετάζουν επίσης συστήματα μίας μηχανής, στα οποία οι χρόνοι των γεγονότων ακολουθούν κατανομές *τύπου φάσεων** (phase-type distributions).

Είναι γνωστό ότι οι κατανομές αυτού του τύπου μπορούν να προσεγγίσουν με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια οποιαδήποτε κατανομή (Altiok [2]). Για την εκτίμηση των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης χρησιμοποιούνται διάφορες αριθμητικές τεχνικές (Neuts [28], Yeralan and Muth [44]), οι οποίες όμως εφαρμόζονται μόνο σε συστήματα σχετικά μικρών διαστάσεων. Οι Kouikoglou and Phillis [22] απέδειξαν ότι η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη ως προς τη μία από τις δύο παραμέτρους ελέγχου, αν η άλλη παραμένει σταθερή. Είναι πολύ δύσκολο όμως να μελετηθούν οι ιδιότητες δεύτερης τάξης της συνάρτησης κέρδους και ως προς τις δύο μεταβλητές ελέγχου, λόγω της αλγεβρικής πολυπλοκότητας του μοντέλου. Για να αντιμετωπίσουμε αυτά τα προβλήματα, προτείνουμε ένα σχετικά απλό προσεγγιστικό σχήμα για τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης. Στο σχήμα αυτό οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης είναι όροι γεωμετρικής προόδου εκτός από έναν αριθμό πιθανοτήτων συνοριακών καταστάσεων. Αποδεικνύεται ότι το σχήμα αυτό περιλαμβάνει ως υποπεριπτώσεις έναν αριθμό γνωστών συστημάτων.

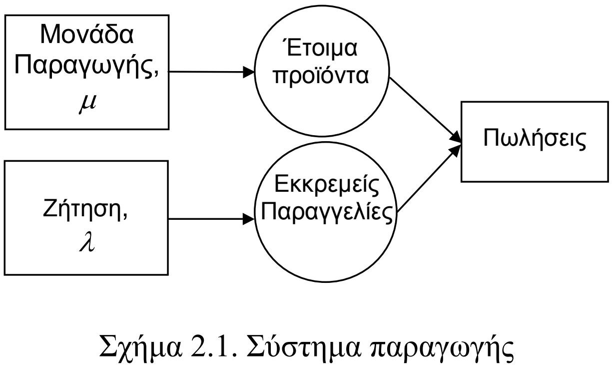
---

* Στις κατανομές τύπου φάσεων ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ή η διάρκεια μίας κατεργασίας αντιστοιχεί στο χρόνο μέχρι την μετάβαση σε απορροφητική κατάσταση μίας αλυσίδας Markov με πεπερασμένο πλήθος μεταβατικών καταστάσεων και μία μοναδική απορροφητική κατάσταση που περιγράφει την άφιξη πελάτη ή το τέλος της κατεργασίας, αντίστοιχα.

Το κεφάλαιο είναι διαρθρωμένο ως εξής. Στην Παράγραφο 2.2 το σύστημα παραγωγής μοντελοποιείται ως μία ουρά τύπου G/G/1/m, ήτοι με γενικές και ανεξάρτητες κατανομές χρόνων αφίξεων και παραγωγής και πεπερασμένη χωρητικότητα m, η οποία ισούται με το άθροισμα του αποθέματος βάσης και του ελλείμματος βάσης. Παρουσιάζονται οι υποθέσεις που έχουν γίνει σχετικά με τη μορφή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης του συστήματος, οι οποίες ισχύουν τόσο για το σύστημα M/M/1/m, το οποίο έχει εκθετικούς χρόνους αφίξεων και παραγωγής, όσο και για συστήματα με γενικότερες κατανομές. Στην Παράγραφο 2.3 προσδιορίζεται το απόθεμα βάσης που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος για οποιαδήποτε τιμή του m. Τέλος αποδεικνύεται ότι το συνολικό κέρδος είναι μια κατά τμήματα σχεδόν κοίλη συνάρτηση ως προς m και παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των βέλτιστων τιμών για το απόθεμα και το έλλειμμα βάσης. Στην Παράγραφο 2.4 γίνεται σύγκριση της προτεινόμενης πολιτικής με άλλες πολιτικές και στην Παράγραφο 2.5 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

2.2 Περιγραφή του συστήματος

Εξετάζουμε το σύστημα παραγωγής του Σχ. 2.1, το οποίο παράγει ένα προϊόν, οι πελάτες έρχονται σε τυχαίους χρόνους και ο καθένας ζητάει μία μονάδα προϊόντος. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων των πελατών είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέσο $1/\lambda$. Οι χρόνοι παραγωγής είναι επίσης ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέσο $1/\mu$. Τα παραγόμενα κομμάτια αποθηκεύονται σε μία αποθήκη ετοίμων προϊόντων. Μία αφικνούμενη παραγγελία που βρίσκει άδεια την αποθήκη ετοίμων είτε απορρίπτεται είτε τοποθετείται στην αναμονή. Αν αντίθετα υπάρχει απόθεμα στην αποθήκη ετοίμων τότε εξυπηρετείται αμέσως.



Σχήμα 2.1. Σύστημα παραγωγής

Η λειτουργία του συστήματος σχετίζεται με τρία οικονομικά μεγέθη:

p το κέρδος από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος (τιμή πώλησης μείον κόστος πρώτων υλών και επεξεργασίας),

h το μοναδιαίο κόστος αποθέματος, που είναι το κόστος διατήρησης αποθέματος μίας μονάδας τελικού προϊόντος για μία χρονική μονάδα,

b το μοναδιαίο κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης, που είναι το κόστος καθυστέρησης της ικανοποίησης μίας εκκρεμούσας παραγγελίας στη μονάδα του χρόνου.

Το κόστος αποθέματος h περιλαμβάνει δύο συνιστώσες κόστους. Η πρώτη είναι το χρηματοοικονομικό κόστος, που προκύπτει από τη δέσμευση κεφαλαίου για την αγορά πρώτων υλών. Η δεύτερη περιλαμβάνει όλα τα είδη κόστους που σχετίζονται με τη φυσική διαδικασία συντήρησης αποθεμάτων, όπως το κόστος των αποθηκευτικών χώρων, το κόστος λειτουργίας ενός συστήματος διαχείρισης υλικών, το κόστος κατάψυξης για κάποια είδη προϊόντων κλπ. Το κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης b μπορεί να περιλαμβάνει επίσης δύο είδη κόστους. Το ένα κόστος είναι χρηματοοικονομικό και συνίσταται στην απώλεια της ευκαιρίας επένδυσης του κέρδους από την πώληση ενός προϊόντος για το χρονικό διάστημα που μια παραγγελία μένει ανικανοποίητη. Η δεύτερη συνιστώσα του b απαρτίζεται από το τυχόν κόστος δυσφήμισης και τις ρήτρες καθυστέρησης, για την περίπτωση που ο πελάτης δεν ικανοποιηθεί αμέσως αλλά υποχρεωθεί να περιμένει.

Για τον έλεγχο του αποθέματος ετοίμων προϊόντων και των εκκρεμών παραγγελιών χρησιμοποιείται μία απλή πολιτική. Η παραγωγή διακόπτεται όταν η αποθήκη ετοίμων περιέχει s τεμάχια και μία νέα παραγγελία απορρίπτεται όταν εκκρεμούν ήδη c παραγγελίες. Το κατώφλι s του αποθέματος είναι το απόθεμα βάσης, ενώ c είναι το έλλειμμα βάσης. Το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί είναι ο προσδιορισμός των s και c που μεγιστοποιούν το μέσο ρυθμό κέρδους του συστήματος σε μία άπειρη περίοδο λειτουργίας, ήτοι στη μόνιμη κατάσταση. Το κέρδος του συστήματος ισούται με το αναμενόμενο κέρδος από τις πωλήσεις προϊόντων μείον το αναμενόμενο κόστος αποθέματος και το αναμενόμενο κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης. Για τον υπολογισμό των ποσοτήτων αυτών αναλύεται ένα ισοδύναμο αναμονητικό σύστημα.

Η κατάσταση του αναμονητικού συστήματος περιγράφεται από έναν ακέραιο αριθμό n, τέτοιον ώστε $0 \le n \le m$, όπου έχουμε ορίσει

$$m \stackrel{\Delta}{=} s + c$$

Όταν $n \le s$ στο αναμονητικό σύστημα, τότε στο σύστημα παραγωγής δεν εκκρεμούν παραγγελίες και υπάρχουν $s - n$ μονάδες προϊόντος στην αποθήκη ετοίμων προϊόντων. Όταν $n \ge s$ στο αναμονητικό σύστημα, τότε στο σύστημα παραγωγής δεν υπάρχουν προϊόντα στην αποθήκη ετοίμων και εκκρεμούν $n - s$ παραγγελίες. Οι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρετήσεων στο αναμονητικό σύστημα ταυτίζονται με τους χρόνους αφίξεων παραγγελιών και παραγωγής αντίστοιχα στο σύστημα παραγωγής. Όταν $n = 0$ το αναμονητικό σύστημα είναι άδειο και ο εξυπηρετών αδρανής. Αντίστοιχα στο αρχικό σύστημα παραγωγής, η αποθήκη ετοίμων είναι πλήρης και η παραγωγική μονάδα αδρανής. Όταν $n = m$ το αναμονητικό σύστημα είναι γεμάτο και όλες οι νέες αφίξεις απορρίπτονται. Κατ' αντιστοιχία στο σύστημα παραγωγής η αποθήκη ετοίμων είναι άδεια, εκκρεμούν $c = m - s$ παραγγελίες και όλες οι νέες παραγγελίες απορρίπτονται. Το ισοδύναμο αναμονητικό σύστημα είναι τύπου G/G/1/m με χωρητικότητα $m = s + c$. Στη συνέχεια αναλύουμε το σύστημα G/G/1/m στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας.

Έστω $P(n)$ η πιθανότητα ώστε στη μόνιμη κατάσταση το αναμονητικό σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση n, $n = 0, 1, \ldots, m$. Για τα συστήματα G/G/1/m δεν υπάρχουν γενικοί τύποι κλειστής μορφής για τον υπολογισμό των $P(n)$. Για συστήματα M/M/1/m, στα οποία οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί και οι αφίξεις γίνονται κατά Poisson, είναι γνωστό (βλ., π.χ., Buzacott and Shanthikumar [7]) ότι οι καταστάσεις ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με $P(n) = G_m\rho^n$, $n = 0, 1, \ldots, m$, όπου $G_m = (1 + \rho + \ldots + \rho^m)^{-1}$ και το ρ είναι το πηλίκο του μέσου ρυθμού αφίξεων προς τον μέσο ρυθμό παραγωγής. Η γεωμετρική κατανομή διευκολύνει τους υπολογισμούς αλλά δεν είναι πάντα ρεαλιστική. Για γενικότερες κατανομές, ωστόσο, υπάρχει ένα πλήθος συστημάτων αναμονής στα οποία οι πιθανότητες ακολουθούν γεωμετρική πρόοδο με εξαίρεση τις πιθανότητες των συνοριακών καταστάσεων $n = 0$ και $n = m$, ή ακόμη και των γειτονικών τους $n = 1$ και $n = m-1$. Λύσεις γεωμετρικής μορφής έχουν ευρεθεί για πολλά συστήματα παραγωγής με χρόνους παραγωγής που περιγράφονται από αλυσίδες Markov (βλ. Yeralan and Muth [44], Buzacott and Shanthikumar [7] και τις βιβλιογραφικές αναφορές τους). Επί πλέον, προσεγγίσεις που βασίζονται στη γεωμετρική κατανομή προσφέρουν πολύ ακριβείς εκτιμήσεις για τον μέσο ρυθμό παραγωγής (Buzacott and Shanthikumar [7]). Από αυτήν την παρατήρηση προχωρούμε υποθέτοντας ότι οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης έχουν τη μορφή

$$P(n)=\begin{cases} G_m\alpha,\ n=0 \\ G_m\sigma\beta,\ n=1 \\ G_m\sigma^n,\ 2\le n\le m-2 \\ G_m\sigma^{m-1}\gamma,\ n=m-1 \\ G_m\sigma^m\delta,\ n=m \end{cases} \tag{2.1}$$

για $m \geq 4$, όπου τα G_m, α, β, γ, δ και σ είναι κατάλληλες παράμετροι που συνδέονται με τη λειτουργία του αρχικού συστήματος παραγωγής. Στις παραπάνω εκφράσεις, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης των εσωτερικών καταστάσεων n, $2 \leq n \leq m - 2$, σχηματίζουν μία γεωμετρική πρόοδο με παράμετρο σ. Οι παράμετροι α, β, γ και δ εξαρτώνται από τη στατιστική των ενδοαφιξιακών χρόνων και των χρόνων εξυπηρέτησης, αλλά είναι ανεξάρτητες από τα s, c και m. Τέλος, το G_m είναι μία σταθερά η οποία προκύπτει από την εξίσωση κανονικοποίησης $P(0) + P(1) + \ldots + P(m) = 1$. Στο εξής υποθέτουμε ότι $\sigma \neq 1$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} G_m &= \frac{1}{\alpha+\sigma\beta+\sigma^2+\ldots+\sigma^{m-2}+\sigma^{m-1}\gamma+\sigma^m\delta} \\ &= \frac{1}{\alpha+\sigma\beta+\sigma^2(1+\sigma+\ldots+\sigma^{m-4})+\sigma^{m-1}\gamma+\sigma^m\delta} \\ &= \frac{1}{\alpha+\sigma\beta+\sigma^2\dfrac{1-\sigma^{m-3}}{1-\sigma}+\sigma^{m-1}\gamma+\sigma^m\delta} \\ &= \frac{1}{\alpha+\sigma\beta+\dfrac{\sigma^2}{1-\sigma}+\dfrac{\sigma^{m-1}}{\sigma-1}+\sigma^{m-1}\gamma+\sigma^m\delta} \\ &= \frac{1}{A+D\sigma^m} \end{aligned}$$

όπου έχουμε ορίσει

$$A=\alpha+\sigma\beta+\frac{\sigma^2}{1-\sigma}\ \text{και}\ D=\delta+\frac{\gamma}{\sigma}+\frac{1}{\sigma(\sigma-1)} \tag{2.2}$$

Η Εξ. (2.1) μπορεί να μην ισχύει για τιμές του m μικρότερες από 4, αφού τότε δεν υπάρχουν εσωτερικές καταστάσεις. Αυτές οι περιπτώσεις μπορούν να αναλυθούν χωριστά με τη χρήση αλυσίδων Markov. Τέλος, για $\sigma = 1$ ευρίσκουμε $G_m = [\alpha + \beta + (m-3) + \gamma + \delta]^{-1}$.

Υπάρχει ένας αριθμός συστημάτων των οποίων οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης έχουν τη μορφή της Εξ. (2.1). Θέτοντας $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ και $\rho = \lambda/\mu$ στην Εξ. (2.1) προκύπτουν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του αναμονητικού συστήματος M/M/1/m με μέσο ρυθμό αφίξεων λ και μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Μία άλλη ειδική περίπτωση του μοντέλου πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης, που παρουσιάζεται εδώ, είναι το προσεγγιστικό μοντέλο ενός συστήματος G/G/1/m που προτείνουν οι Buzacott and Shanthikumar [7], για το οποίο ισχύει ότι

$$P(n) = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho\sigma^m}, n = 0 \\ \dfrac{\rho(1-\sigma)\sigma^{n-1}}{1-\rho\sigma^m}, n = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{2.3}$$

όπου $\rho = \lambda/\mu$ και

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{N-\rho}{N}, \rho < 1 \\ \dfrac{N'}{N'-\rho}, \rho > 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Το N είναι μία προσέγγιση του αναμενόμενου πλήθους πελατών σε ένα σύστημα $G/G/1$ για $\rho < 1$ και το N' είναι το αναμενόμενο πλήθος πελατών σε ένα ανεστραμμένο σύστημα $G/G/1$ με ρυθμό αφίξεων μ και ρυθμό εξυπηρετήσεων λ, όταν $\rho > 1$. Για $\lambda = \mu$ οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης προκύπτουν από το όριο της Εξ. (2.3) όταν το $\sigma \to 1$. Θέτοντας $\alpha = \dfrac{\sigma(1-\rho)}{\rho(1-\sigma)}$ και $\beta = \gamma = \delta = 1$ στην Εξ. (2.1) προκύπτει η Εξ. (2.3).

Μία ακόμη ειδική περίπτωση του μοντέλου που προτείνουμε αποτελεί μία γραμμή παραγωγής με δύο μηχανές που έχουν ίσους χρόνους παραγωγής και γεωμετρικά κατανεμημένους χρόνους βλαβών και επισκευών. Το μοντέλο αυτό παρουσιάζεται στο βιβλίο Buzacott and Shanthikumar [7]. Σε αυτό το σύστημα, τα γεγονότα (παραγωγή, βλάβες, επισκευές) εκτελούνται σε διακριτές χρονικές στιγμές 1, 2, … Για το σύστημα παραγωγής που εξετάζουμε, η δεύτερη μηχανή αντιστοιχεί στην μονάδα παραγωγής και η πρώτη μηχανή στη ζήτηση. Η λειτουργία της πρώτης μηχανής περιγράφεται από μία εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία, δηλαδή, μία ακολουθία από εναλλασσόμενες περιόδους θετικής ζήτησης και μηδενικής ζήτησης. Η εναλλαγή των περιόδων περιγράφεται από μία αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου. Κατά τη διάρκεια μίας περιόδου θετικής ζήτησης το σύστημα δέχεται μία παραγελία ανά μονάδα χρόνου ενώ στις περιόδους μηδενικής ζήτησης δεν γίνονται παραγγελίες. Οι περίοδοι θετικής ζήτησης αντιστοιχούν στις περιόδους βλάβης της πρώτης μηχανής, σύμφωνα με το μοντέλο των Buzacott and Shanthikumar [7], ενώ οι περίοδοι θετικής ζήτησης αντιστοιχούν σε περιόδους όπου η πρώτη μηχανη είναι λειτουργική. Όταν το $n = m$ στις περιόδους θετικής ζήτησης, τότε όλες οι εισερχόμενες παραγγελίες απορρίπτονται αλλά η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει τη ζήτηση δεν επηρεάζεται. Αυτό σημαίνει ότι οι αλλαγές καταστάσεων για την πρώτη μηχανή είναι ανεξάρτητες από την στάθμη n. Αντιθέτως, όταν $n = 0$ τότε η δεύτερη μηχανή διακόπτει τη λειτουργία της λόγω αποστέρησης και δεν είναι δυνατόν να υποστεί βλάβη. Συνεπώς οι βλάβες της δεύτερης μηχανής εξαρτώνται από τη στάθμη n ενώ οι βλάβες της πρώτης δεν εξαρτώνται. Οι πιθανότητες μόνιμης αυτού του μοντέλου κατάστασης παρουσιάζονται στην Παράγραφο 6.6.1 του βιβλίου Buzacott and Shanthikumar [7] και έχουν τη μορφή της Εξ. (2.1).

2.3 Μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους

Σε αυτή την παράγραφο με τη χρήση των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης της Εξ. (2.1) εκφράζεται μαθηματικά το αναμενόμενο κέρδος ως συνάρτηση του αποθέματος βάσης s και της χωρητικότητας του συστήματος m, όπου $m = s + c$. Επίσης προκύπτουν μαθηματικές εκφράσεις για το βέλτιστο απόθεμα βάσης για οποιαδήποτε τιμή του m. Ακόμη αποδεικνύουμε ότι κάτω από μία σχετικά χαλαρή συνθήκη η συνάρτηση κέρδους είναι σχεδόν κοίλη ως προς m. Αυτή η ιδιότητα εγγυάται ότι το ολικό βέλτιστο είναι δυνατό να εκτιμηθεί με τη χρήση ενός απλού αλγόριθμου βελτιστοποίησης. Τέλος αναπτύσσουμε έναν απλό αλγόριθμο για τον υπολογισμό των βέλτιστων τιμών των s και m.

Αφού στην κατάσταση $n = 0$ η μονάδα παραγωγής διακόπτει τη λειτουργία της, το ποσοστό του χρόνου που η μονάδα παραγωγής λειτουργεί είναι $1 - P(0)$. Μία λειτουργική περίοδος ορίζεται ως το χρονικό διάστημα μεταξύ μίας εκκίνησης και της επόμενης διακοπής λειτουργίας της μονάδας. Όταν το επίπεδο του αποθέματος ετοίμων προϊόντων πέσει από s σε $s - 1$ η μονάδα τίθεται σε λειτουργία και ξεκινά την παραγωγή νέου προϊόντος. Στην περίπτωση που ολοκληρώνεται ένα νέο προϊόν και το απόθεμα ετοίμων προϊόντων γίνεται ίσο με τα απόθεμα βάσης η παραγωγή διακόπτεται. Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι κάθε λειτουργική περίοδος περιλαμβάνει έναν ακέραιο αριθμό ολοκληρωμένων κύκλων παραγωγής. Κάθε κύκλος παραγωγής είναι μία ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $1/\mu$. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος είναι $[1 - P(0)]\mu$. Στην μόνιμη κατάσταση, αυτός ο ρυθμός πρέπει να είναι ίσος με το μέσο ρυθμό άφιξης των αποδεκτών παραγγελιών και συνεπώς και με το μέσο ρυθμό πωλήσεων. Άρα το αναμενόμενο κέρδος από τις πωλήσεις πρέπει να είναι $p[1 - P(0)]\mu$. Το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος είναι $p\mu - pP(0)\mu - hH - bB$, όπου H είναι το μέσο απόθεμα ετοίμων προϊόντων και B είναι το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών.

Αφού οι παράμετροι p, λ και μ είναι σταθερές, η μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης

$$C(s, m) = pP(0)\mu + hH + bB$$

για $m = 0, 1, \ldots$ και $s = 0, 1, \ldots, m$. Από την Εξ. (2.1) προκύπτει ότι

$$H = \sum_{n=0}^{s-1}(s-n)P(n) = G_m[s\alpha + (s-1)\sigma\beta + (s-2)\sigma^2 + \ldots + 1\sigma^{s-1}] \tag{2.5}$$

$$B = \sum_{n=s+1}^{m}(n-s)P(n) =$$

$$= G_m[1\sigma^{s+1} + \ldots + (m-s-2)\sigma^{m-2} + (m-s-1)\sigma^{m-1}\gamma + (m-s)\sigma^m\delta] \tag{2.6}$$

και η αντικειμενική γράφεται

$$C(s, m) = G_m\,[p\mu\alpha + h[1\sigma^{s-1} + \ldots + (s-2)\sigma^2 + (s-1)\sigma\beta + s\alpha\,]$$

$$+ b[1\sigma^{s+1} + \ldots + (m-s-2)\sigma^{m-2} + (m-s-1)\sigma^{m-1}\gamma + (m-s)\sigma^m\delta]] \tag{2.7}$$

Επειδή το πρόβλημα είναι δισδιάστατο το επιλύουμε σειριακά. Πρώτα ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση $C(s, m)$ ως προς το s για σταθερό m και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη βέλτιστη τιμή του m.

Για κάθε σταθερή τιμή του m αναζητούμε την τιμή s_m του s για την οποία ικανοποιούνται συγχρόνως οι ακόλουθες ανισότητες

$$C(s_m, m) \le C(s', m), \text{ για κάθε } s' \text{ τέτοιο ώστε } 0 \le s' < s_m \tag{2.8}$$

$$C(s_m, m) < C(s', m), \text{ για κάθε } s' \text{ τέτοιο ώστε } s' > s_m \tag{2.9}$$

Λόγω της ειδικής μορφής των πιθανοτήτων των συνοριακών καταστάσεων, οι οποίες περιέχουν τις παραμέτρους α, β, γ και δ, οι εκφράσεις της συνάρτησης $C(s_m, m)$ για $s_m = 0, 1, m-1$, και m διαφέρουν από αυτές για $2 \le s_m \le m-2$. Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει εκφράσεις κλειστής μορφής για το s_m.

Θεώρημα 2.1. Για σταθερό m, $m \ge 4$, η συνάρτηση $C(s, m)$ ελαχιστοποιείται στο σημείο s_m

$$
s_m = \begin{cases} 0, & \dfrac{b}{h+b} < G_m \alpha \\ 1, & G_m \alpha \le \dfrac{b}{h+b} < G_m(\alpha + \sigma\beta) \\ \left\lfloor \dfrac{\ln \dfrac{(bD\sigma^m - hA)(\sigma - 1)}{h+b}}{\ln \sigma} \right\rfloor, & G_m(\alpha + \sigma\beta) \le \dfrac{b}{h+b} < G_m\left(A - \dfrac{\sigma^{m-1}}{1-\sigma}\right) \\ m-1, & G_m\left(A - \dfrac{\sigma^{m-1}}{1-\sigma}\right) \le \dfrac{b}{h+b} < G_m\left[A + \sigma^{m-1}\left(\gamma - \dfrac{1}{1-\sigma}\right)\right] \\ m, & G_m\left[A + \sigma^{m-1}\left(\gamma - \dfrac{1}{1-\sigma}\right)\right] \le \dfrac{b}{h+b} \end{cases} \quad (2.10)
$$

όπου $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του αριθμού x. Όταν $\sigma \to 1$, το s_m προκύπτει από το όριο της Εξ. (2.10).

Απόδειξη

Έστω m σταθερό. Θέτοντας $s_m = s$ και $s' = s - 1$ στην ανισότητα (2.8) προκύπτει ότι $C(s, m) \le C(s-1, m)$. Από την ανισότητα αυτή χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.7) καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$
h[1\sigma^{s-1} + \ldots + (s-1)\sigma\beta + s\alpha] + b[1\sigma^{s+1} + \ldots + (m-s-1)\sigma^{m-1}\gamma + (m-s)\sigma^m\delta]
$$

$$
\le h[1\sigma^{s-2} + \ldots + (s-2)\sigma\beta + (s-1)\alpha] + b[1\sigma^{s} + \ldots + (m-s)\sigma^{m-1}\gamma + (m-s+1)\sigma^m\delta]
$$

Διαγράφοντας τους κοινούς όρους η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$$
h(\sigma^{s-1} + \ldots + \sigma\beta + \alpha) \le b(\sigma^{s} + \ldots + \sigma^{m-1}\gamma + \sigma^m\delta)
$$

Προσθέτοντας $h(\sigma^{s} + \ldots + \sigma^{m-1}\gamma + \sigma^m\delta)$ και στις δύο πλευρές και αντικαθιστώντας με $1/G_m$ την παράσταση $\alpha + \sigma\beta + \ldots + \sigma^{m-1}\gamma + \sigma^m\delta$ προκύπτει ότι

$$
G_m(\sigma^{s-1} + \ldots + \sigma\beta + \alpha) \le \frac{b}{h+b} \quad (2.11)
$$

Θέτοντας $s_m = s$ και $s' = s + 1$ στην ανισότητα (2.9) και ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία προκύπτει ότι

$$
G_m(\sigma^{s} + \sigma^{s-1} + \ldots + \sigma\beta + \alpha) > \frac{b}{h+b} \quad (2.12)
$$

Όλοι οι όροι των παραπάνω ανισοτήτων είναι μη αρνητικοί. Αυτό σημαίνει ότι οι αριστερές παραστάσεις των ανισοτήτων αυτών είναι αύξουσες συναρτήσεις ως προς s και υπάρχει το πολύ μία μη αρνητική τιμή του s έστω η s_m, που ικανοποιεί και τις δύο ανισότητες ταυτόχρονα. Συγκεκριμένα, αν $G_m\alpha > b/(h + b)$ τότε η μοναδική μη αρνητική λύση της (2.12) είναι η $s_m = 0$ και όταν $G_m\alpha \le b/(h + b) < G_m(\alpha + \sigma\beta)$ τότε $s_m = 1$. Έτσι αποδεικνύονται οι δύο πρώτοι κλάδοι της Εξ. (2.10). Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται οι δύο τελευταίοι κλάδοι της Εξ. (2.10), για τους οποίους ισχύει ότι $s_m = m - 1$ και $s_m = m$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τον τρίτο κλάδο της Εξ. (2.10). Έστω ότι οι ανισότητες (2.11) και (2.12) ισχύουν για κάποιο s τέτοιο ώστε $2 \le s \le m - 2$. Αθροίζοντας όλους τους γεωμετρικούς όρους σ^k στην αριστερή πλευρά της (2.11) καταλήγουμε στη σχέση (να σημειωθεί ότι $\sigma \neq 1$)

$$G_m\left(\sigma^2 \frac{1-\sigma^{s-2}}{1-\sigma} + \sigma\beta + \alpha\right) = \frac{A - \dfrac{\sigma^s}{1-\sigma}}{A + D\sigma^m} \le \frac{b}{h+b}$$

που είναι ισοδύναμη με

$$\frac{\sigma^s}{\sigma - 1} \le \frac{bD\sigma^m - hA}{h+b}$$

Εργαζόμενοι όμοια με την ανισότητα (2.12) σε συνδυασμό με το παραπάνω αποτέλεσμα καταλήγουμε στις ανισότητες

$$\frac{1}{\sigma}\frac{bD\sigma^m - hA}{h+b} < \frac{\sigma^s}{\sigma - 1} \le \frac{bD\sigma^m - hA}{h+b}$$

Οι ανισότητες αυτές έχουν μία μοναδική ακέραιη λύση s_m για την οποία ισχύει

$$\frac{\ln\dfrac{(bD\sigma^m - hA)(\sigma-1)}{h+b}}{\ln\sigma} - 1 < s_m \le \frac{\ln\dfrac{(bD\sigma^m - hA)(\sigma-1)}{h+b}}{\ln\sigma} \qquad (2.13)$$

Με αυτή την εξίσωση ολοκληρώνεται η απόδειξη της Εξ. (2.10). ΟΕΔ

Μετά τον προσδιορισμό της βέλτιστης τιμής s_m για οποιαδήποτε τιμή του m ακολουθεί η βελτιστοποίηση της $C(s_m, m)$ ως προς το m, όπου $m \in \{0, 1, \ldots\}$. Είναι προφανές ότι στην περίπτωση που το $m = 0$ το σύστημα δεν λειτουργεί και συνεπώς $s_0 = 0$ και $P(0) = 1$. Σε αυτή την περίπτωση η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται $C(0, 0) = p\mu$ και το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος είναι ίσο με $p\mu - C(0, 0) = 0$. Για $m = 1$, 2, ή 3 η βέλτιστη τιμή του s_m και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μπορουν να εκτιμηθούν με εξαντλητική αναζήτηση επειδή το πλήθος των υποψήφιων λύσεων (s, m) είναι μικρό ($s \leq m$). Απομένει να ε-λαχιστοποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση $C(s_m, m)$ στο σύνολο $M = \{4, 5, ...\}$. Εφόσον η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μικρότερη από $p\mu$, το σύστημα παραγωγής είναι επικερδές, αλλιώς είναι ασύμφορη η λειτουργία του.

Αρχικά το σύνολο M χωρίζεται σε πέντε, ενδεχομένως κενά, υποσύνολα τα οποία ορίζονται ως εξής

$$M_0 = \{m \in M: s_m = 0\}$$

$$M_1 = \{m \in M: s_m = 1\}$$

$$M_2 = \{m \in M: 2 \leq s_m \leq m - 2\}$$

$$M_3 = \{m \in M: s_m = m - 1\}$$

$$M_4 = \{m \in M: s_m = m\}$$

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης διαμορφώνεται ως εξής

$$\min_{m \in M,\, s \leq m} C(s, m) = \min_{i=0,\ldots,4} \left[\min_{m \in M_i} C(s_m, m) \right] \tag{2.14}$$

Στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι η $C(s_m, m)$ είναι σχεδόν κυρτή σε κάθε σύνολο M_i. Για να δειχθεί αυτή η ιδιότητα γίνεται η υπόθεση ότι ισχύει η συνθήκη

$$A(1-\sigma) \geq 0 \text{ and } D(\sigma-1) \geq 0 \tag{2.15}$$

όπου τα A και D δίδονται από την Εξ. (2.2).

Προφανώς, όταν $\sigma \to 1$ η ανωτέρω συνθήκη ικανοποιείται οριακά. Επαληθεύεται επίσης και για τα τρία συστήματα που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 2.2. Για το M/M/1/m και το προσεγγιστικό μοντέλο ενός αναμονητικού συστήματος G/G/1/m των Buzacott and Shanthikumar [7], που περιγράφεται από την Εξ. (2.3), η επαλήθευση είναι εύκολη. Για τη γραμμή παραγωγής με τις δύο μηχανές των Buzacott and Shanthikumar [7], αποδείχθηκε α-ναλυτικά η πρώτη ανισότητα της συνθήκης (2.15), ενώ η δεύτερη ανισότητα επαληθεύτηκε με εξαντλητικά αριθμητικά πειράματα για διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων του συστήματος.

Το παρακάτω λήμμα αναφέρεται σε δύο σημαντικές ιδιότητες των συνόλων M_i και του βέλτιστου αποθέματος βάσης s_m.

Λήμμα 2.1. Εάν ισχύει η συνθήκη (2.15) τότε

(α) τα σύνολα M_i είναι ξένα μεταξύ τους και κυρτά και συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$M_i = \{m_{i-1}, m_{i-1} + 1, \ldots m_i - 1\}$$

όπου m_i είναι οι ακρότατες λύσεις των ανισοτήτων της Εξ. (2.10)

(β) αν οι τιμές m και $m + 1$ ανήκουν στο σύνολο M_2, τότε ισχύει ότι $s_m \leq s_{m+1} \leq s_m + 1$.

Απόδειξη

(α) Από τον πρώτο κλάδο της Εξ. (2.10), φαίνεται ότι το σύνολο M_0 περιέχει τα στοιχεία του συνόλου $M = \{4, 5, \ldots\}$, για τα οποία ισχύει

$$G_m \alpha > \frac{b}{h+b}$$

Θέτοντας $G_m = (A + D\sigma^m)^{-1}$ η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$$D\sigma^m < \frac{h+b}{b}\alpha - A$$

Όταν $\sigma > 1$ η συνθήκη $D(\sigma - 1) \geq 0$ εξασφαλίζει ότι το D είναι μη αρνητικό και συνεπώς

$$m < \frac{\ln A_0}{\ln \sigma}$$

όπου

$$A_0 = \frac{(h+b)\alpha - bA}{bD}$$

Εάν $\sigma < 1$ το D και το $\ln\sigma$ είναι μη θετικοί και προκύπτει το ίδιο φράγμα για το m. Αν όμως $A_0 \leq 0$ (αυτό είναι εφικτό μόνο όταν το $\sigma < 1$) αποδεικνύεται εύκολα ότι $M_0 = M$ και συνεπώς σε αυτή την περίπτωση η πολιτική μηδενικού αποθέματος είναι βέλτιστη, δηλαδή $s_m = 0$ για κάθε m. Συνοψίζοντας

$$M_0 = \begin{cases} \{4, 5, \ldots, m_0 - 1\}, \text{αν } A_0 > 0 \\ \{4, 5, \ldots\}, \text{αν } A_0 \leq 0 \end{cases}$$

όπου

$$m_0 = \min\left\{\left\lfloor \frac{\ln A_0}{\ln \sigma} \right\rfloor, 4\right\}$$

Αν $m_0 \leq 4$ τότε $M_0 = \varnothing$.

Στη συνέχεια εξετάζουμε το σύνολο M_1, που ορίζεται από το δεύτερο κλάδο της Εξ. (2.10). Η πρώτη ανισότητα του κλάδου αυτού είναι η αντίστροφη από τη δεύτερη ανισότητα του προηγούμενου κλάδου. Οπότε πρέπει να ισχύει ότι $m \geq m_0$. Με τη χρήση παρόμοιων επιχειρημάτων όπως προηγουμένως μπορεί να δειχθεί ότι η δεύτερη ανισότητα

$$\frac{b}{h+b} < G_m(\alpha + \sigma\beta)$$

ικανοποιείται για κάθε στοιχείο του συνόλου

$$M_1 = \begin{cases} \{m_0, m_0+1, \ldots, m_1-1\}, \text{if } A_1 > 0 \\ \{m_0, m_0+1, \ldots\}, \text{if } A_1 \leq 0 \end{cases}$$

όπου

$$A_1 = \frac{(h+b)(\alpha+\sigma\beta) - bA}{bD}, \quad m_1 = \min\left\{\left\lfloor \frac{\ln A_1}{\ln\sigma} \right\rfloor, m_0\right\}$$

Αν $m_1 \leq m_0$ τότε $M_1 = \varnothing$.

Τα υπόλοιπα σύνολα M_i καθορίζονται με παρόμοιο τρόπο και έχουν τη μορφή

$$M_i = \begin{cases} \{m_{i-1}, m_{i-1}+1, \ldots, m_i-1\}, \text{if } A_i > 0 \\ \{m_{i-1}, m_{i-1}+1, \ldots\}, \text{if } i = 4 \text{ or } A_i \leq 0 \end{cases}$$

όπου $m_4 = \infty$,

$$A_2 = \frac{hA}{bD - \dfrac{h+b}{\sigma(\sigma-1)}} \quad A_3 = \frac{hA}{bD - \dfrac{h+b}{\sigma(\sigma-1)} - \dfrac{h+b}{\sigma}\gamma}$$

και

$$m_i = \min\left\{\left\lfloor \frac{\ln A_i}{\ln\sigma} \right\rfloor, m_{i-1}\right\}, \; i = 2, 3$$

Αν $m_i \leq m_{i-1}$, τότε $M_i = \varnothing$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης (α) του Λήμματος 2.1.

(β) Τώρα αποδεικνύουμε ότι, αν τα m και $m+1$ ανήκουν στο M_2, τότε $s_m \leq s_{m+1} \leq s_m + 1$. Για χωρητικότητες m και $m+1$ οι ανισότητες (2.13) γίνονται

$$\frac{\ln\frac{(bD\sigma^m - hA)(\sigma-1)}{h+b}}{\ln\sigma} - 1 < s_m \le \frac{\ln\frac{(bD\sigma^m - hA)(\sigma-1)}{h+b}}{\ln\sigma} \tag{2.16}$$

$$\frac{\ln\frac{(bD\sigma^{m+1} - hA)(\sigma-1)}{h+b}}{\ln\sigma} - 1 < s_{m+1} \le \frac{\ln\frac{(bD\sigma^{m+1} - hA)(\sigma-1)}{h+b}}{\ln\sigma} \tag{2.17}$$

Για να είναι το s_{m+1} μικρότερο ή ίσο με $s_m + 1$ θα πρέπει το δεξί μέλος της ανισότητας (2.17) να είναι μικρότερο ή ίσο με το δεξί μέλος της (2.16). Συνεπώς πρέπει

$$\frac{\ln\frac{(bD\sigma^{m+1} - hA)(\sigma-1)}{h+b}}{\ln\sigma} \le \frac{\ln\frac{(bD\sigma^m - hA)(\sigma-1)}{h+b}}{\ln\sigma} + 1$$

Μετά από λίγη άλγεβρα αποδεικνύεται ότι η παραπάνω παράσταση απλοποιείται στη συνθήκη $A(\sigma - 1) \ge 0$, που είναι το πρώτο μέρος της συνθήκης (2.15). Οπότε ισχύει ότι $s_{m+1} \le s_m + 1$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η συνθήκη $D(1 - \sigma) \ge 0$ συνεπάγεται $s_{m+1} \ge s_m$. ΟΕΔ

Το δεύτερο μέρος του λήμματος συνιστά έναν εναλλακτικό τρόπο για τον υπολογισμό του βέλτιστου αποθέματος βάσης για κάθε m. Από τον ορισμό των συνόλων M_i είναι γνωστό ότι, για $m \in M_i$, $i = 0, 1, 3$, ή 4, το βέλτιστο απόθεμα βάσης είναι $s_m = 0, 1, m - 1$, ή m, αντίστοιχα. Για το σύνολο M_2, εάν s_{m-1} είναι το βέλτιστο απόθεμα βάσης όταν η χωρητικότητα του συστήματος είναι $m - 1$, τότε το s_m εκτιμάται συγκρίνοντας τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για $s = s_{m-1}$ και $s = s_{m-1} + 1$. Αυτή η ιδιότητα μειώνει τον υπολογιστικό φόρτο για τον προσδιορισμό του s_m. Το Λήμμα 2.1 χρησιμοποιείται για να δειχθεί το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο διασφαλίζει ότι κάθε τοπικό βέλτιστο m ενός υποπροβλήματος είναι και ολικό βέλτιστο στο αντίστοιχο υποσύνολο M_i.

Θεώρημα 2.2. Αν η συνθήκη (2.12) ικανοποιείται, τότε η αντικειμενική συνάρτηση $C(s_m, m)$ είναι σχεδόν κυρτή σε κάθε υποσύνολο M_i, $i = 0, \ldots, 4$. Πιο συγκεκριμένα ας υποτεθεί ότι υπάρχει ένα σημείο $m \in M_i$ τέτοιο ώστε

$$C(s_m, m) \le C(s_k, k)$$

για κάθε $k < m$, $k \in M_i$, και

$$C(s_m, m) \le C(s_{m+1}, m + 1)$$

τότε

$$C(s_{m+1}, m + 1) \le C(s_k, k)$$

για κάθε $k > m + 1$, $k \in M_i$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι αν το m είναι τοπικό βέλτιστο της αντικειμενικής συνάρτησης στο υποσύνολο M_i, $i = 0, \ldots, 4$, τότε το m είναι και ολικό βέλτιστο γι' αυτό το υποσύνολο. Για να εντοπίσουμε ένα τοπικό βέλτιστο ξεκινάμε από τη μικρότερη τιμή ενός υποσυνόλου, υπολογίζουμε το βέλτιστο απόθεμα βάσης και το αντίστοιχο κόστος και συνεχίζουμε αυξάνοντας κατά μία μονάδα κάθε φορά τη χωρητικότητα του συστήματος μέχρις ότου η αντικειμενική συνάρτηση παραμείνει σταθερή ή αρχίσει να αυξάνει. Πιο συγκεκριμένα για κάθε M_i αναζητούμε τη μικρότερη τιμή της χωρητικότητας του συστήματος, m, για την οποία

$$C(s_m, m) \le C(s_{m+1}, m + 1) \tag{2.18}$$

Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια η παραπάνω ανισότητα εγγυάται ότι $C(s_k, k) \le C(s_{k+1}, k + 1)$ για κάθε $k \in M_i$, τέτοιο ώστε $k > m$, και συνεπώς το m είναι και ολικό βέλτιστο στο M_i.

Αρχικά μελετάμε τη σχέση μεταξύ των G_{m+1} και G_m. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.2) η σταθερά G_{m+1} γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G_{m+1}} &= \alpha + \beta\sigma + \ldots + \sigma^{m-1} + \gamma\sigma^m + \delta\sigma^{m+1} \\
&= \frac{1}{G_m} - \gamma\sigma^{m-1} - \delta\sigma^m + \sigma^{m-1} + \gamma\sigma^m + \delta\sigma^{m+1} \\
&= \frac{1}{G_m} + \sigma^{m-1}[1 + \gamma(\sigma - 1) + \delta\sigma(\sigma - 1)] \\
&= \frac{1}{G_m} + D(\sigma - 1)\sigma^m
\end{aligned}$$

Εφόσον $D(\sigma - 1) \ge 0$, η G_m είναι φθίνουσα ως προς m. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\frac{G_m}{G_{m+1}} = 1 + G_m D(\sigma - 1)\sigma^m \tag{2.19}$$

Από το Λήμμα 2.1 είναι γνωστό ότι τα υποσύνολα M_i είναι κυρτά ενώ τα ακραία σημεία τους μπορούν να υπολογιστούν με τους τύπους που δίνονται στην απόδειξη του Λήμματος 2.1. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση έχει ένα μοναδικό ελάχιστο σε κάθε υποσύνολο M_i. Ξεκινάμε από το M_2.

Υποσύνολο M_2: Εξετάζουμε τις ιδιότητες δεύτερης τάξης της συνάρτησης $C(s_m, m)$ στο σύνολο M_2. Υποθέτουμε ότι $s_m = s$ και ότι $C(s_{m+1}, m + 1) \geq C(s, m)$. Θα δείξουμε ότι $C(s_{m+2}, m + 2) \geq C(s_{m+1}, m + 1)$. Από το Λήμμα 2.1(β) προκύπτει ότι αρκεί να εξεταστούν τέσσερις περιπτώσεις για τα s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, όπου $s_m = s$, $s_{m+1} = s + d$, και $s_{m+2} = s + d + g$, όπου $d, g \in \{0, 1\}$.

Θέτοντας $s_m = s$ και $s_{m+1} = s + d$ στην την Εξ. (2.7) ευρίσκουμε

$$C(s, m) = G_m\big[p\mu\alpha + h[1\sigma^{s-1} + \ldots + (s - 2)\sigma^2 + (s - 1)\sigma\beta + s\alpha\,]$$

$$+ b[1\sigma^{s+1} + \ldots + (m - s - 2)\sigma^{m-2} + (m - s - 1)\sigma^{m-1}\gamma + (m - s)\sigma^m\delta]\big]$$

$$C(s + d, m + 1) = G_{m+1}\big[p\mu\alpha + h[1\sigma^{s+d-1} + \ldots + (s + d - 2)\sigma^2 + (s + d - 1)\sigma\beta + (s + d)\alpha]$$

$$+ b[1\sigma^{s+d+1} + \ldots + (m - s - d - 1)\sigma^{m-1} + (m - s - d)\sigma^m\gamma$$

$$+ (m - s - d + 1)\sigma^{m+1}\delta]\big]$$

Με τη χρήση των παραπάνω εξισώσεων μετά από λίγη άλγεβρα προκύπτει ότι

$$\frac{C(s,m)}{G_m} - \frac{C(s+d, m+1)}{G_{m+1}} = -\,h\,d(\sigma^s + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha\,)$$

$$+ b\,d(\sigma^{s+1} + \ldots + \sigma^{m-1} + \sigma^m\gamma + \sigma^{m+1}\delta)$$

$$+ b[(m - s - 1)\sigma^{m-1}\gamma + (m - s)\sigma^m\delta - (m - s - 1)\sigma^{m-1}$$

$$- (m - s)\sigma^m\gamma - (m - s + 1)\sigma^{m+1}\delta]$$

Από την παραπάνω σχέση με τη βοήθεια της Εξ. (2.19) η $C(s, m)$ εκφράζεται συναρτήσει της $C(s + d, m + 1)$ ως εξής

$$C(s, m) = C(s + d, m + 1) + G_m\big[D\sigma^m(\sigma - 1)[C(s + d, m + 1) - b(m - s - 1)]$$

$$+ d[b(\sigma^{s+1} + \ldots + \sigma^{m-1} + \sigma^m\gamma + \sigma^{m+1}\delta) - h(\sigma^s + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha\,)]$$

$$+ b\sigma^m(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)\big]$$

$$= C(s + d, m + 1) + G_m(E_{m+1} + F_{m+1} + dL_{m+1}) \qquad (2.20)$$

όπου έχουμε ορίσει

$$E_{m+1} = D\sigma^{m}(\sigma - 1)[C(s + d, m + 1) - b(m - s - 1)]$$

$$F_{m+1} = b\sigma^{m}(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

$$L_{m+1} = b(\sigma^{s+1} + ... + \sigma^{m-1} + \sigma^{m}\gamma + \sigma^{m+1}\delta) - h(\sigma^{s} + \ldots + \sigma^{2} + \sigma\beta + \alpha)$$

Αφού $C(s, m) \le C(s + d, m + 1)$ και G_m θετικό θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} &D\sigma^{m}(\sigma - 1)[C(s + d, m + 1) - b(m - s - 1)] + d[b(\sigma^{s+1} + ... + \sigma^{m-1} + \sigma^{m}\gamma + \sigma^{m+1}\delta) \\ &\quad - h(\sigma^{s} + \ldots + \sigma^{2} + \sigma\beta + \alpha)] + b\sigma^{m}(\delta - \gamma - 2\sigma\delta) \\ &= E_{m+1} + F_{m+1} + dL_{m+1} \le 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Τώρα συγκρίνουμε το κόστος για $m + 1$ και $m + 2$. Για $s_{m+2} = s + d + g$ πάλι από την Εξ. (2.7) προκύπτει

$$\begin{aligned} C(s + d + g, m + 2) = G_{m+2}[&p\mu\alpha + h[1\sigma^{s+d+g-1} + \ldots \\ &+ (s + d + g - 2)\sigma^{2} + (s + d + g - 1)\sigma\beta + (s + d + g)\alpha] \\ &+ b[1\sigma^{s+d+g+1} + ... + (m - s - d - g + 1)\sigma^{m+1}\gamma + (m - s - d - g + 2)\sigma^{m+2}\delta]] \end{aligned}$$

Μετά από λίγη άλγεβρα καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \frac{C(s+d, m+1)}{G_{m+1}} - \frac{C(s+d+g, m+2)}{G_{m+2}} = &- h\, g(\sigma^{s+d} + \ldots + \sigma\beta + \alpha) \\ &+ b\, g(\sigma^{s+d+1} + ... + \sigma^{m} + \sigma^{m+1}\gamma + \sigma^{m+2}\delta) \\ &+ b[(m - s - d)\sigma^{m}\gamma + (m - s - d + 1)\sigma^{m+1}\delta \\ &\quad - (m - s - d)\sigma^{m} - (m - s - d + 1)\sigma^{m+1}\gamma \\ &\quad - (m - s - d + 2)\sigma^{m+2}\delta] \end{aligned}$$

Όμοια με πριν εκφράζουμε την $C(s + d + g, m + 2)$ συναρτήσει της $C(s + d, m + 1)$

$$\begin{aligned} C(s + d + g, m + 2) = C(s + d, m + 1) - G_{m+2}[&D\sigma^{m+1}(\sigma - 1)[C(s + d, m + 1) \\ &- b(m - s - d)] + b\sigma^{m+1}(\delta - \gamma - 2\sigma\delta) \\ &+ g[b(\sigma^{s+d+1} + ... + \sigma^{m} + \sigma^{m+1}\gamma + \sigma^{m+2}\delta) \\ &- h(\sigma^{s+d} + \ldots + \sigma^{2} + \sigma\beta + \alpha)]] \end{aligned}$$

$$= C(s + d, m + 1) - G_{m+2}\sigma(E_{m+2} + F_{m+2} + gL_{m+2}/\sigma) \qquad (2.22)$$

όπου

$$E_{m+2} = D\sigma^{m}(\sigma - 1)[C(s + d, m + 1) - b(m - s - d)]$$

$$F_{m+2} = F_{m+1} = b\sigma^{m}(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

$$L_{m+2} = b(\sigma^{s+d+1} + ... + \sigma^{m-1} + \sigma^{m}\gamma + \sigma^{m+2}\delta) - h(\sigma^{s+d} + \ldots + \sigma^{2} + \sigma\beta + \alpha)$$

Τώρα θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος δια της εις άτοπον απαγωγής. Εάν ίσχυε ότι $C(s + d + g, m + 2) < C(s + d, m + 1)$, τότε, με αντικατάσταση της Εξ. (2.22), θα έπρεπε να ισχύει και

$$D\sigma^{m+1}(\sigma - 1)[C(s + d, m + 1) - b(m - s - d)] + b\sigma^{m+1}(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

$$+ g[b(\sigma^{s+d+1} + ... + \sigma^{m} + \sigma^{m+1}\gamma + \sigma^{m+2}\delta) - h(\sigma^{s+d} + \ldots + \sigma^{2} + \sigma\beta + \alpha)]$$

$$= \sigma[E_{m+2} + F_{m+2} + gL_{m+2}/\sigma] > 0 \qquad (2.23)$$

Θα αποδείξουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Προς τούτο, εν όψει της ανισότητας (2.21), $E_{m+1} + F_{m+1} + dL_{m+1} \leq 0$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$E_{m+1} + F_{m+1} + dL_{m+1} \geq E_{m+2} + F_{m+2} + gL_{m+2}/\sigma$$

ή, επειδή $F_{m+1} = F_{m+2}$,

$$E_{m+1} - E_{m+2} + dL_{m+1} - gL_{m+2}/\sigma \geq 0 \qquad (2.24)$$

Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις.

<u>Περίπτωση 1:</u> $s_{m+1} = s_{m+2} = s$, δηλαδή $d = g = 0$. Τότε επειδή

$$E_{m+1} = D\sigma^{m}(\sigma - 1)[C(s + d, m + 1) - b(m - s - 1)]$$

$$\geq D\sigma^{m}(\sigma - 1)[C(s + d, m + 1) - b(m - s)] = E_{m+2}$$

η (2.24) ισχύει, άρα υπάρχει άτοπο.

<u>Περίπτωση 2:</u> $s_{m+1} = s$, $s_{m+2} = s + 1$, δηλαδή $d = 0$ και $g = 1$. Τώρα επειδή $E_{m+1} = E_{m+2} + bD\sigma^{m}(\sigma - 1)$ έχουμε

$$E_{m+1} - E_{m+2} + dL_{m+1} - gL_{m+2}/\sigma = bD\sigma^{m}(\sigma - 1)$$

$$- [b(\sigma^{s+1} + ... + \sigma^{m} + \sigma^{m+1}\gamma + \sigma^{m+2}\delta) - h(\sigma^{s} + \ldots + \sigma^{2} + \sigma\beta + \alpha)]/\sigma$$

$$= [h(\sigma^{s} + \ldots + \sigma^{2} + \sigma\beta + \alpha) - b(\sigma^{s+1} + ... + \sigma^{m-1} + \sigma^{m}\gamma + \sigma^{m+1}\delta)]/\sigma$$

Επειδή $s_{m+1} = s$, ισχύει $C(s, m + 1) < C(s + 1, m + 1)$, που μετά από λίγη άλγεβρα μας οδηγεί στο $h(\sigma^s + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha) > b(\sigma^{s+1} + \ldots + \sigma^{m-1} + \sigma^m\gamma + \sigma^{m+1}\delta)$ και συνεπώς ικανοποιείται η (2.24).

Περίπτωση 3: $s_{m+1} = s_{m+2} = s + 1$, δηλαδή $d = 1$ και $g = 0$. Σε αυτή την περίπτωση $E_{m+1} = E_{m+2}$. Επίσης αφού $s_{m+1} = s + 1$ πρέπει $C(s, m + 1) < C(s - 1, m + 1)$ που οδηγεί στο $h(\sigma^s + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha) \le b(\sigma^{s+1} + \ldots + \sigma^{m-1} + \sigma^m\gamma + \sigma^{m+1}\delta)$. Από τα παραπάνω προκύπτει

$$
\begin{aligned}
&E_{m+1} - E_{m+2} + dL_{m+1} - gL_{m+2}/\sigma = L_{m+1} \\
&= b(\sigma^{s+1} + \ldots + \sigma^{m-1} + \sigma^m\gamma + \sigma^{m+1}\delta) - h(\sigma^s + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha) \ge 0
\end{aligned}
$$

Περίπτωση 4: $s_{m+1} = s + 1$, $s_{m+2} = s + 2$, δηλαδή $d = 1$ και $g = 1$. Επειδή $E_{m+1} = E_{m+2}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $L_{m+1} - L_{m+2}/\sigma \ge 0$. Η διαφορά $L_{m+1} - L_{m+2}/\sigma$ γίνεται

$$
\begin{aligned}
L_{m+1} - L_{m+2}/\sigma &= b(\sigma^{s+1} + \ldots + \sigma^{m-1} + \sigma^m\gamma + \sigma^{m+1}\delta) - h(\sigma^s + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha) \\
&\quad - [b(\sigma^{s+2} + \ldots + \sigma^{m-1} + \sigma^m\gamma + \sigma^{m+2}\delta) - h(\sigma^{s+1} + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)]/\sigma \\
&= (h/\sigma)(\sigma^2 + \sigma\beta + \alpha - \sigma^2\beta - \sigma\alpha) = (h/\sigma)A(1 - \sigma) \ge 0
\end{aligned}
$$

λόγω του πρώτου μέρους της συνθήκης (2.15).

Συνοψίζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις, έχουμε αποδείξει ότι αν m, $m + 1$ και $m + 2$ ανήκουν στο σύνολο M_2 και $C(s_{m+1}, m + 1) \ge C(s, m)$ τότε $C(s_{m+2}, m + 2) \ge C(s_{m+1}, m + 1)$. Με ανάλογα επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται $C(s_{m+3}, m + 3) \ge C(s_{m+2}, m + 2)$ και με επαγωγή $C(s_{k+1}, k + 1) \ge C(s_k, k)$ για κάθε $k > m$. Συνεπώς το m είναι το ολικό βέλτιστο της αντικειμενικής συνάρτησης στο σύνολο M_2. Στη συνέχεια εξετάζουμε τα υπόλοιπα υποσύνολα του χώρου καταστάσεων m.

Υποσύνολο M_0: Για το υποσύνολο $M_0 = \{4, 5, \ldots, m_0 - 1\}$, ένα τοπικό βέλτιστο είναι το μικρότερο m για το οποίο $C(0, m + 1) \ge C(0, m)$. Θα αποδειχθεί ότι $C(0, k + 1) \ge C(0, k)$ για κάθε k στο M_0 τέτοιο ώστε $k > m$. Ισχύει ότι

$$C(0, m) = G_m\, [p\mu\alpha + b[\sigma\beta + \sigma^2 + \ldots + (m - 1)\sigma^{m-1}\gamma + m\sigma^m\delta]]$$

και

$$C(0, m + 1) = G_{m+1}[p\mu\alpha + b[\sigma\beta + \sigma^2 + \ldots + (m - 1)\sigma^{m-1} + m\sigma^m\gamma + (m + 1)\sigma^{m+1}\delta]]$$

Η $C(0, m)$ γράφεται συναρτήσει της $C(0, m + 1)$ ως εξής

$$C(0,\, m) = G_m \frac{C(0,m+1)}{G_{m+1}} + G_m b\sigma^{m-1}\left[\sigma\delta - \sigma\gamma - 2\sigma^2\delta - (m-1)\sigma(\sigma-1)D\right]$$

$$= C(0,\, m+1) + G_m\sigma^m(\sigma-1)D[C(0,\, m+1) - b(m-1)]$$

$$+ G_m\sigma^m b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την Εξ. (2.19). Η διαφορά $C(0, m) - C(0, m + 1)$ είναι ίση με

$$C(0,\, m) - C(0,\, m+1) = G_m\sigma^m(\sigma-1)D[C(0,\, m+1) - b(m-1)]$$

$$+ G_m\sigma^m b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

Συνεπώς αφού $C(0, m) \leq C(0, m + 1)$ θα πρέπει

$$D(\sigma-1)[C(0,\, m+1) - b(m-1)] + b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta) \leq 0$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι η διαφορά $C(0, m + 1) - C(0, m + 2)$ είναι ίση με

$$C(0,\, m+1) - C(0,\, m+2) = G_{m+2}\sigma^{m+1}(\sigma-1)D[C(0,\, m+1) - bm]$$

$$+ G_{m+2}\sigma^{m+1}b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

Ας υποτεθεί ότι $C(0, m + 2) < C(0, m + 1)$ ή, ισοδύναμα,

$$D(\sigma-1)[C(0,\, m+1) - bm] + b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta) \geq 0$$

Όμως ισχύει ότι

$$0 \geq D(\sigma-1)[C(0,\, m+1) - b(m-1)] + b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

$$\geq D(\sigma-1)[C(0,\, m+1) - bm] + b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

που οδηγεί σε άτοπο, συνεπώς η υπόθεση ότι $C(0, m + 2) < C(0, m + 1)$ είναι εσφαλμένη. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $C(0, k + 1) \geq C(0, k)$, για κάθε $k > m$.

Υποσύνολο M_1: Εδώ $M_1 = \{m_0 , m_0 + 1, \ldots, m_1 - 1\}$. Έστω ότι καθώς εξετάζονται ένα προς ένα όλα τα στοιχεία του M_1, εντοπίζεται τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης κόστους στο σημείο m, δηλαδή $C(1, m) \leq C(1, m + 1)$. Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση αποδεικνύεται ότι

$$C(1,\, m) - C(1,\, m+1) = G_m\sigma^m(\sigma-1)D[C(1,\, m+1) - b(m-2)] + G_m\sigma^m b(\delta - \gamma - \sigma\delta)$$

Άρα $D(\sigma-1)[C(1, m+1) - b(m-2)] + b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta) \leq 0$. Η διαφορά $C(1, m+1) - C(1, m+2)$ γράφεται

$$C(1, m+1) - C(1, m+2) = G_{m+2}\sigma^{m+1}(\sigma - 1)D[C(1, m+1) - b(m-1)]$$

$$+ G_{m+2}\sigma^{m+1} b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

Αν τώρα ίσχυε ότι $C(1, m + 1) > C(1, m + 2)$, τότε θα έπρεπε το δεύτερο μέλος της προηγούμενης εξίσωσης να ήταν αρνητικό, ήτοι

$$D(\sigma - 1)[C(1, m+1) - b(m-1)] + b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta) > 0$$

Όμως υπάρχει άτοπο αφού

$$0 \geq D(\sigma - 1)[C(1, m+1) - b(m-2)] + b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

$$\geq D(\sigma - 1)[C(1, m+1) - b(m-1)] + b(\delta - \gamma - 2\sigma\delta)$$

Συνεπώς $C(1, m) \leq C(1, m + 1)$. Εύκολα αποδεικνύεται επαγωγικά ότι $C(1, k + 1) \geq C(1, k)$, για κάθε $k > m$.

Υποσύνολο M_3: Στο υποσύνολο M_3 ένα τοπικό βέλτιστο είναι το μικρότερο m για το οποίο $C(m, m + 1) \geq C(m - 1, m)$. Η $C(m - 1, m)$ γράφεται συναρτήσει της $C(m, m + 1)$ ως εξής

$$C(m-1, m) = G_m \frac{C(m, m+1)}{G_{m+1}} - G_m b\sigma^{m+1}\delta$$

$$+ G_m[b\sigma^m\delta - h(\sigma^{m-1} + ... + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)]$$

$$= C(m, m+1) + G_m\sigma^m[(\sigma - 1)D\, C(m, m+1) - b\sigma\delta]$$

$$+ G_m[b\sigma^m\delta - h(\sigma^{m-1} + ... + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)]$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την Εξ. (2.19). Η διαφορά $C(m - 1, m) - C(m, m + 1)$ είναι ίση με

$$C(m-1, m) - C(m, m+1) = G_m\sigma^m[(\sigma - 1)D\, C(m, m+1) - b\sigma\delta]$$

$$+ G_m[b\sigma^m\delta - h(\sigma^{m-1} + ... + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)]$$

Συνεπώς, αφού $C(m - 1, m) \leq C(m, m + 1)$,

$$\sigma^m[(\sigma - 1)D\, C(m, m+1) - b\sigma\delta] + b\sigma^m\delta - h(\sigma^{m-1} + ... + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha) \leq 0$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζεται η διαφορά $C(m, m + 1) - C(m + 1, m + 2)$:

$$C(m, m+1) - C(m+1, m+2) = G_{m+2}\sigma^{m+1}[(\sigma - 1)D\, C(m, m+1) - b\sigma\delta]$$

$$+ G_{m+2}[b\sigma^{m+1}\delta - h(\sigma^m + ... + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)]$$

Αν τώρα ίσχυε ότι $C(m, m + 1) > C(m + 1, m + 2)$, τότε επίσης θα έπρεπε

$$\sigma^m[(\sigma - 1)D\,C(m, m + 1) - b\sigma\delta] + [b\sigma^{m+1}\delta - h(\sigma^m + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)]/\sigma \geq 0$$

Όμως

$$[b\sigma^m\delta - h(\sigma^{m-1} + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)] - [b\sigma^{m+1}\delta - h(\sigma^m + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)]/\sigma$$

$$= h(\sigma^2 + \sigma\beta + \alpha - \sigma^2\beta - \sigma\alpha)/\sigma = (h/\sigma)A(1 - \sigma)$$

Λόγω της συνθήκης (2.12), έχουμε $(h/\sigma)A(1 - \sigma) \geq 0$, οπότε

$$\sigma^m[(\sigma - 1)DC(m, m + 1) - b\sigma\delta] + b\sigma^m\delta - h(\sigma^{m-1} + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)$$

$$\geq \sigma^m[(\sigma - 1)DC(m, m + 1) - b\sigma\delta] + [b\sigma^{m+1}\delta - h(\sigma^m + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)]/\sigma$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το πρώτο μέλος είναι ≤ 0. Συνεπώς και το δεύτερο μέλος θα έπρεπε να είναι επίσης ≤ 0, πράγμα άτοπο. Συνεπώς $C(m, m + 1) \leq C(m + 1, m + 2)$. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $C(k, k + 1) \geq C(k - 1, k)$, για κάθε $k > m$. Κατά συνέπεια το m είναι και ολικό βέλτιστο στο M_3.

Υποσύνολο M_4: Έστω το μικρότερο m για το οποίο $C(m + 1, m + 1) \geq C(m, m)$. Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση αποδεικνύεται ότι

$$C(m, m) - C(m + 1, m + 1) = G_m\sigma^{m-1}[\sigma(\sigma - 1)D\,C(m + 1, m + 1) - h(1 - \gamma)]$$

$$- G_m h(\sigma^m\gamma + \sigma^{m-1} + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)$$

Οπότε ισχύει ότι

$$\sigma^{m-1}[\sigma(\sigma - 1)D\,C(m + 1, m + 1) - h(1 - \gamma)] - h(\sigma^m\gamma + \sigma^{m-1} + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha) \leq 0$$

Αντίστοιχα υπολογίζεται ότι

$$C(m + 1, m + 1) - C(m + 2, m + 2) = G_{m+2}\sigma^m[\sigma(\sigma - 1)DC(m + 1, m + 1) - h(1 - \gamma)]$$

$$- G_{m+2}\, h(\sigma^{m+1}\gamma + \sigma^m + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)$$

Αν υποτεθεί ότι $C(m + 1, m + 1) \geq C(m + 2, m + 2)$, τότε θα έπρεπε να ισχύει

$$\sigma^{m-1}[\sigma(\sigma - 1)D\,C(m + 1, m + 1) - h(1 - \gamma)]$$

$$- h(\sigma^{m+1}\gamma + \sigma^m + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)/\sigma \geq 0$$

Όμως όμοια με την προηγούμενη περίπτωση αποδεικνύεται ότι

$$h(\sigma^{m+1}\gamma + \sigma^m + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)/\sigma - h(\sigma^m\gamma + \sigma^{m-1} + \ldots + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)$$

$$= (h/\sigma)A(1-\sigma) \geq 0$$

Δηλαδή

$$\sigma^{m-1}[\sigma(\sigma-1)D\,C(m+1, m+1) - h(1-\gamma)] - h(\sigma^m\gamma + \sigma^{m-1} + ... + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)$$

$$\geq \sigma^{m-1}[\sigma(\sigma-1)D\,C(m+1, m+1) - h(1-\gamma)] - h(\sigma^{m+1}\gamma + \sigma^m + ... + \sigma^2 + \sigma\beta + \alpha)/\sigma$$

Αυτό είναι άτοπο και σημαίνει ότι $C(m, m+1) \leq C(m+1, m+2)$. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $C(k+1, k+1) \geq C(k, k)$, για κάθε $k > m$. Δηλαδή το m είναι ολικό βέλτιστο. ΟΕΔ

Το προηγούμενο θεώρημα έχει σημαντικές αλγοριθμικές συνέπειες. Η βέλτιστη λύση (s^*, m^*) του αρχικού προβλήματος μπορεί να ανιχνευθεί με τη χρήση του παρακάτω αλγόριθμου.

Βήμα 1. Υπολόγισε τα ακρότατα σημεία των συνόλων $M_i = \{m_{i-1}, \ldots, m_i - 1\}$ (από τους τύπους που παρουσιάζονται στην απόδειξη του Λήμματος (2.1) και θέσε $m_{-1} = 4$. Θέσε $i = 0$, $C^* = \infty$ και προχώρησε στο Βήμα 4.

Βήμα 2. Εάν $C_i^* < C^*$, τότε ενημέρωσε τις τιμές των ολικών βελτίστων: $C^* = C_i^*$, $s^* = s_i^*$, and $m^* = m_i^*$.

Βήμα 3. Θέσε $i = i + 1$.

Βήμα 4. Αν $M_i = \varnothing$ πήγαινε στο Βήμα 3, αλλιώς θέσε $m = m_{i-1}$.

Βήμα 5. Υπολόγισε το s_m από την Εξ. (2.10) και στη συνέχεια υπολόγισε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $C(s_m, m)$. Αν το $m > m_{i-1}$ και $C(s_m, m) \geq C_i^*$, τότε εγκατάλειψε το σύνολο M_i και πήγαινε στο βήμα 2 αφού το $m-1$ είναι το βέλτιστο απόθεμα βάσης για το M_i. Αν $m = m_{i-1}$ ή $C(s_m, m) < C_i^*$, ενημέρωσε τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων του συνόλου M_i: $C_i^* = C(s_m, m)$, $m_i^* = m$, και $s_i^* = s_m$.

Βήμα 6. Θέσε $m = m + 1$. Αν $m \leq m_i - 1$ πήγαινε στο Βήμα (5), διαφορετικά πήγαινε στο Βήμα 2.

Στην επόμενη παράγραφο, επιβεβαιώνεται με τη βοήθεια αριθμητικών παραδειγμάτων ότι η προτεινόμενη πολιτική επιτυγχάνει υψηλότερο κέρδος από τις πολιτικές που εφαρμόζονται συνήθως σε συστήματα παραγωγής.

2.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Η προτεινόμενη πολιτική μερικής αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης (PLS) συγκρίνεται με την πολιτική πλήρους αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης (CB), την πολιτική πλήρους απόρριψης της μη ικανοποιημένης ζήτησης (LS) και την πολιτική τυχαίας αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης (RAC).

Έστω $(s, c)_{\mathrm{PLC}}$ μία πολιτική μερικής αποδοχής παραγγελιών με απόθεμα βάσης s και έλλειμμα βάσης c. Αποδεικνύεται ότι η πολιτική CB είναι ισοδύναμη με την πολιτική $(s, \infty)_{\mathrm{PLC}}$ και η LS ισοδυναμεί με την $(s, 0)_{\mathrm{PLC}}$. Μία ακόμη διαδεδομένη πολιτική είναι εκείνη του μηδενικού αποθέματος βάσης, η οποία συμβολίζεται ως $(0, c)_{\mathrm{PLC}}$. Το αναμενόμενο κόστος μίας τέτοιας πολιτικής είναι ίσο με το κόστος του ανεστραμμένου συστήματος που λειτουργεί με βάση την πολιτική πλήρους απόρριψης παραγγελιών $(c, 0)_{\mathrm{PLC}}$ και συνεπώς αρκεί να μελετήσει κανείς την απόδοση της LS.

Εξετάζονται δύο συστήματα παραγωγής. Το πρώτο μοντελοποιείται ως ένα σύστημα M/M/1/m και το δεύτερο ως ένα σύστημα G/G/1/m. Οι τιμές των παραμέτρων και των δύο συστημάτων είναι $\lambda = 8$, $\mu = 10$, $h = b = 5$ και $p = 10$.

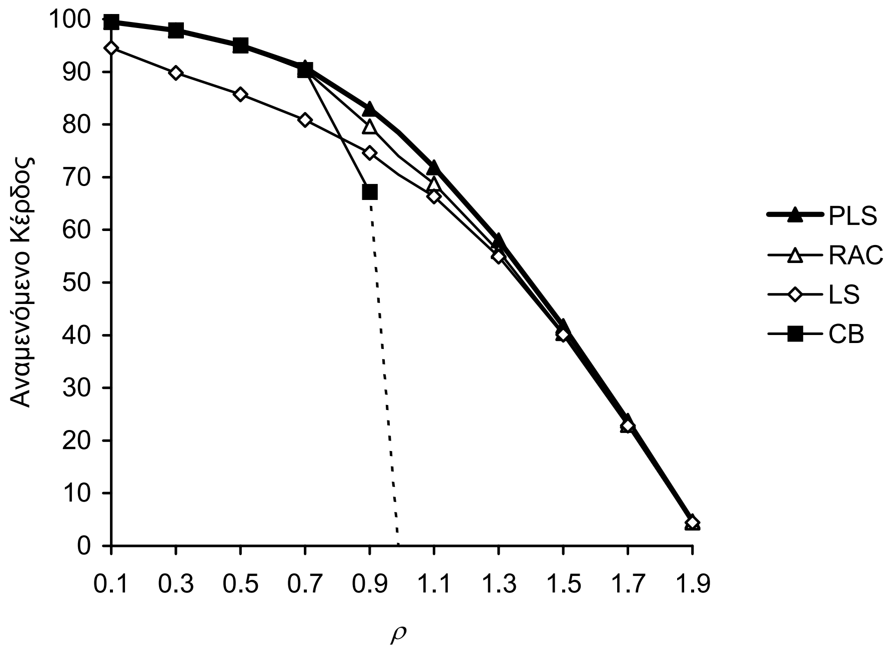
Στο δεύτερο σύστημα, οι συντελεστές μεταβλητότητας* των ενδοαφιξιακών χρόνων και των χρόνων εξυπηρέτησης είναι ίσοι με 0.5. Χρησιμοποιώντας τις τιμές των παραπάνω παραμέτρων και την προσεγγιστική μέθοδο, που προτείνεται από τους Buzacott and Shanthikumar [7], είναι δυνατό να εκτιμηθεί η παράμετρος σ και από την Εξ. (2.4) οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος.

Η προηγούμενη μεθοδολογία δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα με γενικά κατα-

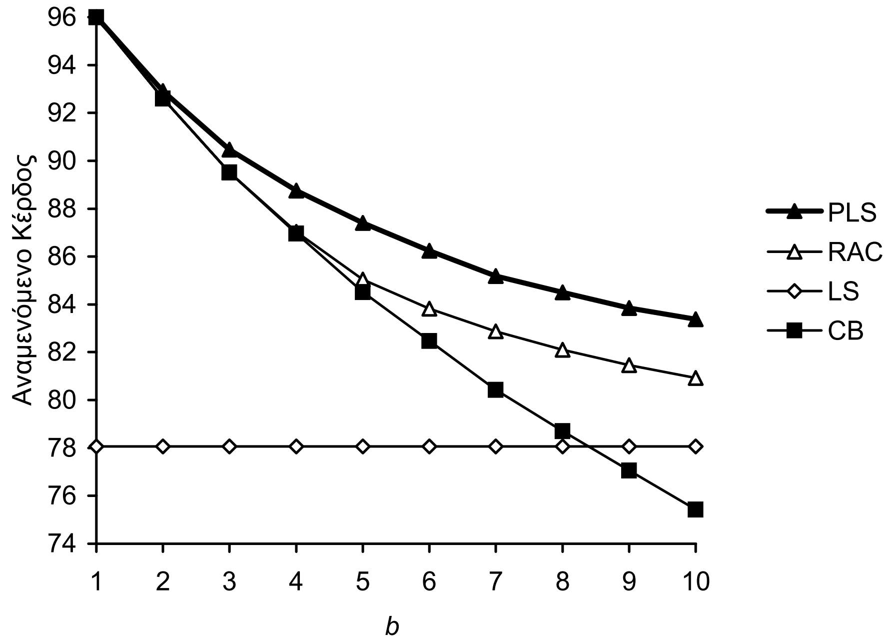
* Για μία τυχαία μεταβλητή X με πεπερασμένη μέση τιμή $E(X)$ και πεπερασμένη διασπορά $Var(X)$, ο συντελεστής μεταβλητότητας ορίζεται $Var(X)/[E(X)]^2$. Στα συστήματα M/M/1/m, οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων και οι διάρκειες κατεργασίας είναι εκθετικοί και έχουν συντελεστή μεταβλητότητας 1. Συχνά, η αδυναμία τέτοιων συστημάτων να περιγράψουν με ικανοποιητική ακρίβεια ένα σύστημα παραγωγής οφείλεται στο ότι, στα συστήματα παραγωγής, οι αντίστοιχοι χρόνοι έχουν συντελεστές μεταβλητότητας μικρότερους από 1. Για το λόγο αυτό, στο αριθμητικό πείραμα θεωρήσαμε ένα γενικό σύστημα αναμονής G/G/1/m με συντελεστές < 1.

νεμημένους χρόνους αφίξεων και παραγωγής, στα οποία εφαρμόζεται η RAC. Γι' αυτό το λόγο η RAC εξετάζεται μόνο στην περίπτωση του συστήματος M/M/1/*m*, που το αναμενόμενο κόστος μπορεί να εκφρασθεί σε κλειστή μορφή με την επίλυση ένα απλού μοντέλου Markov. Το μοντέλο αυτό εξαρτάται από το απόθεμα βάσης και την πιθανότητα απόρριψης σε περιόδους έλλειψης ετοίμων προϊόντων. Οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων αυτών υπολογίζονται με εξαντλητική αναζήτηση.

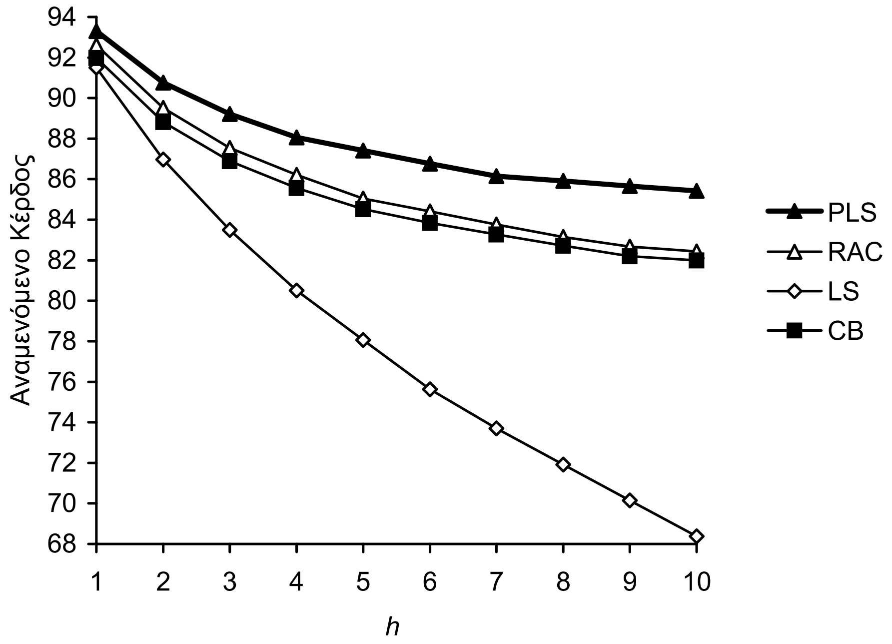
Εξετάζεται η επίδραση της μεταβολής των παραμέτρων λ, b και h στο αναμενόμενο κόστος. Στα Σχ. 2.2 έως 2.4 φαίνονται τα αποτελέσματα για το σύστημα M/M/1/*m* και στα Σχ. 2.5 έως 2.7 φαίνονται τα αποτελέσματα για το σύστημα G/G/1/*m*. Στα Σχ. 2.2 και 2.5 φαίνεται το αναμενόμενο κέρδος κάθε πολιτικής συναρτήσει της ποσότητας $\rho = \lambda/\mu$, η οποία είναι γραμμική συνάρτηση του ρυθμού αφίξεων λ. Παρόμοια αποτελέσματα με αυτά των Σχ. 2.2 και 2.5 προκύπτουν αν αντί του λ μεταβληθεί το μ.



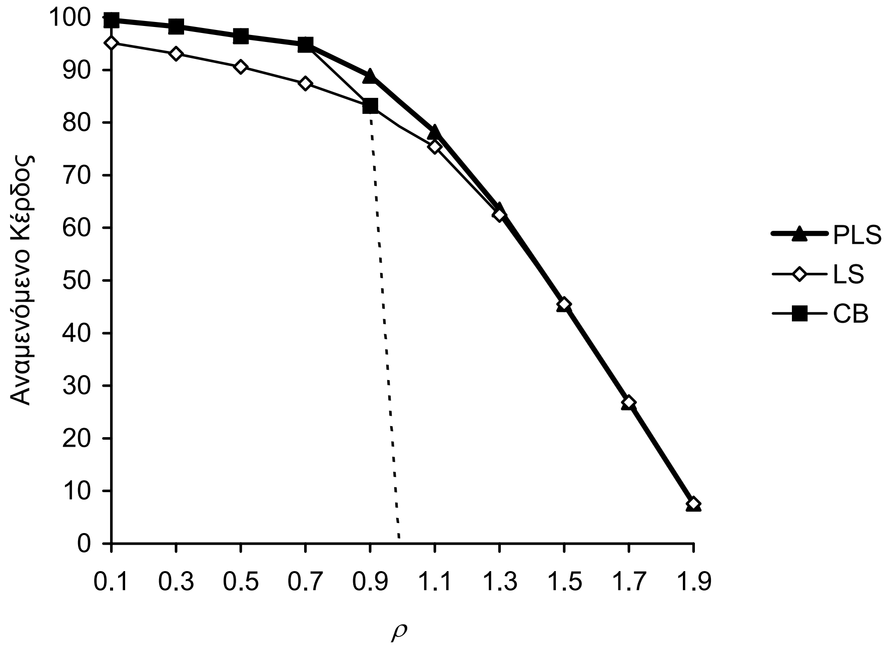
Σχήμα 2.2. Αναμενόμενο κέρδος συστήματος M/M/1/*m* ως προς το ρ



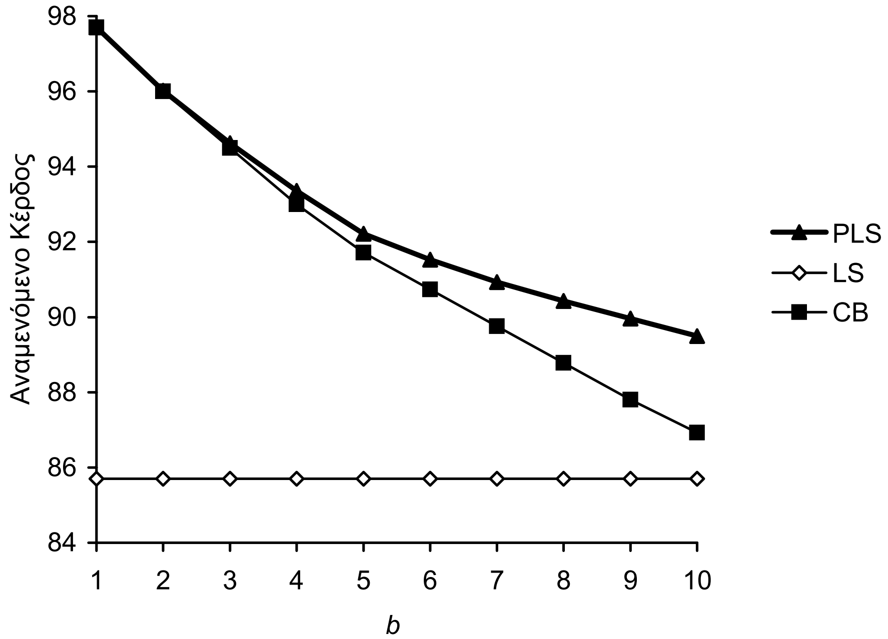
Σχήμα 2.3. Αναμενόμενο κέρδος συστήματος M/M/1/*m* ως προς το *b*



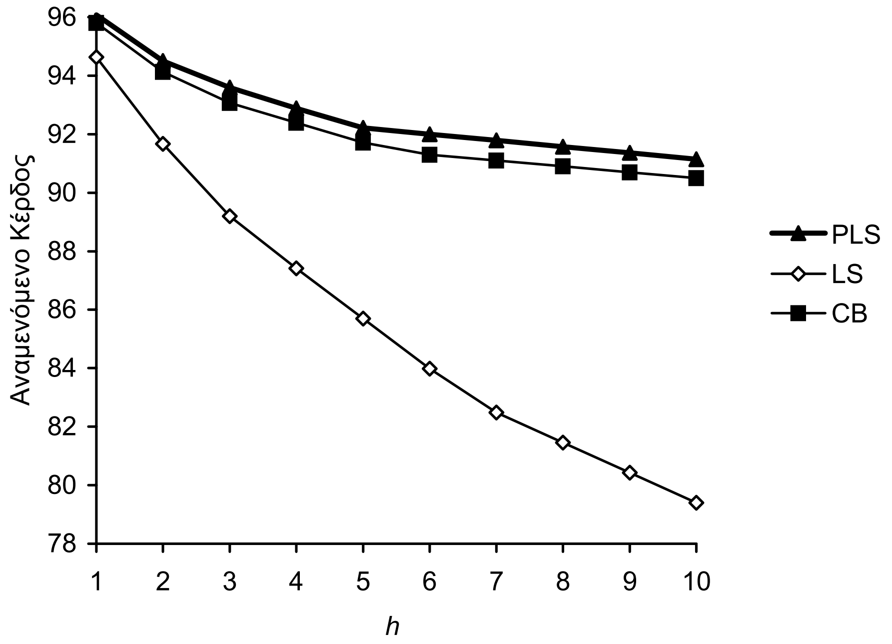
Σχήμα 2.4. Αναμενόμενο κέρδος συστήματος M/M/1/*m* ως προς το *h*



Σχήμα 2.5. Αναμενόμενο κέρδος συστήματος G/G/1/*m* ως προς το *ρ*



Σχήμα 2.6. Αναμενόμενο κέρδος συστήματος G/G/1/*m* ως προς το *b*



Σχήμα 2.7. Αναμενόμενο κέρδος συστήματος G/G/1/*m* ως προς το *h*

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι η πολιτική PLS επιτυγχάνει το υψηλότερο αναμενόμενο κέρδος. Για τις πολιτικές LS και CB, αυτό το αποτέλεσμα είναι διαισθητικά αναμενόμενο αφού οι πολιτικές αυτές είναι ειδικές περιπτώσεις της PLS. Όταν το ρ είναι κοντά στο 1, τα κέρδη των LS and CB είναι χαμηλότερα από το κέρδος της PLS κατά 50%. Όταν το ρ είναι μικρότερο από 1 η απόδοση της LS χειροτερεύει σημαντικά όσο αυξάνει το h και η απόδοση της CB χειροτερεύει όσο αυξάνει το b. Στην περίπτωση που το $\rho \rightarrow 0$ η πολιτική PLS αποδίδει το ίδιο αναμενόμενο κέρδος με την CB. Αυτό συμβαίνει γιατί τότε το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών είναι πολύ μικρό και οποιαδήποτε προσπάθεια να περιοριστεί δεν συμβάλλει σημαντικά στην αύξηση του κέρδους.

Για τιμές του ρ πολύ μεγαλύτερες της μονάδας το κέρδος που επιτυγχάνει η PLS είναι περίπου ίδιο με το κέρδος της LS. Σε αυτή την περίπτωση οι αφίξεις των πελατών είναι πολύ συχνές με αποτέλεσμα η απώλεια κέρδους λόγω απόρριψης πελατών να είναι αμελητέα σε σχέση με το κόστος εκκρεμών παραγγελιών και συνεπώς το βέλτιστο έλλειμμα βάσης για την PLS να τείνει στο 0. Γενικά όσο αυξάνει το μέσο κόστος εκκρεμών παραγγελιών σε σχέση με το συνολικό αναμενόμενο κέρδος, το αναμενόμενο κέρδος της LS συγκλίνει με το αναμενόμενο κέρδος της PLS και όσο αυτό μειώνεται σε σχέση με το συνολικό κέρδος, οι αποδόσεις των PLS και CB συγκλίνουν.

Τέλος από τα Σχ. 2.2–2.4 φαίνεται ότι οι PLS και RAC επιτυγχάνουν τα ίδια αναμενόμενα κέρδη όταν $b\to 0$, $\rho\to 0$ ή $\rho >> 1$. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις η PLS υπερέχει της RAC κατά 5–15%.

2.5 Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάσαμε το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής μίας μηχανής, που παράγουν ένα τύπο προϊόντος. Όταν δεν υπάρχουν παραγγελίες το σύστημα παράγει μέχρι το απόθεμα να φτάσει ένα συγκεκριμένο κατώφλι, το απόθεμα βάσης. Κατ' ένα δυαδικό τρόπο, όταν δεν υπάρχει απόθεμα ετοίμων προϊόντων, οι νέες παραγγελίες γίνονται δεκτές εφ' όσον το πλήθος των εκκρεμών παραγγελιών είναι μικρότερο από ένα συγκεκριμένο κατώφλι, το έλλειμμα βάσης, διαφορετικά απορρίπτονται ή ικανοποιούνται από υπεργολάβους. Το ζητούμενο σε αυτού του είδους τις πολιτικές είναι να εκτιμηθούν οι τιμές των δύο αυτών παραμέτρων που μεγιστοποιούν το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος, το οποίο προκύπτει από τα κέρδη των πωλήσεων μείον το κόστος αποθέματος και το κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης.

Μοντελοποιήσαμε το σύστημα ως ένα αναμονητικό σύστημα G/G/1 με πεπερασμένη χωρητικότητα. Μελετήσαμε τη περίπτωση που οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης έχουν βαθμωτή γεωμετρική μορφή. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα συστήματα M/M/1/m και άλλα αναμονητικά συστήματα, που έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν για τη μοντελοποίηση διαφόρων συστημάτων παραγωγής. Το πρόβλημα της από κοινού εκτίμησης των βέλτιστων τιμών, για το απόθεμα βάσης και το έλλειμμα βάσης, αποσυντίθεται σε απλούστερα υποπροβλήματα, των οποίων η αντικειμενική συνάρτηση είναι σχεδόν κοίλη. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι ο συνδυασμένος έλεγχος αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών επιτυγχάνει υψηλότερα κέρδη από τρεις διαδεδομένες πολιτικές ελέγχου συστημάτων παραγωγής, με τις οποίες συγκρίθηκε.

Η ιδέα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε συστήματα παραγωγής με χρόνους προετοιμασίας και πολλές κατηγορίες πελατών. Σε συστήματα, που υπάρχει κόστος προετοιμασίας ή χρόνος προετοιμασίας της μονάδας παραγωγής, μία ενδιαφέρουσα πολιτική ελέγχου θα ήταν ο συνδυασμός της πολιτικής ελέγχου αποθεμάτων (s, S) (βλ. π.χ. Iglehart [17] και Sethi and Cheng [30]) και της προτεινόμενης πολιτικής μερικής αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης. Σε μία πολιτική (s,

S) η μονάδα παραγωγής ξεκινάει να παράγει όταν το απόθεμα ετοίμων προϊόντων πέσει κάτω από s και διακόπτει την λειτουργία της όταν το απόθεμα γίνει ίσο με S (η πολιτική αποθέματος βάσης μπορεί να θεωρηθεί ως μια πολιτική $(S-1, S)$). Ο συνδυασμός της πολιτικής (s, S) με την PLS, οδηγεί σε μία πολιτική τριών παραμέτρων s, S, και c. Η αύξηση του αριθμού των παραμέτρων ελέγχου αυξάνει την πολυπλοκότητα του προβλήματος και καθιστά την προσπάθεια διερεύνησης των ιδιοτήτων δευτέρου βαθμού της αντικειμενικής συνάρτησης ιδιαίτερα δύσκολη υπόθεση.

Ο Ha στις εργασίες [12] και [13] μελέτησε συστήματα με πολλούς τύπους πελατών, στα οποία χρησιμοποιούνται οι πολιτικές CB ή LS για τον έλεγχο της μη ικανοποιημένης ζήτησης. Κάθε τύπος προϊόντος έχει διαφορετικό μοναδιαίο κέρδος πωλήσεων και μοναδιαίο κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης. Στις εργασίες του πρότεινε πολιτικές τέτοιες ώστε σε κάθε τύπο προϊόντος αντιστοιχεί ένα κατώφλι αποθέματος πάνω από το οποίο είτε γίνεται αποδεκτή μία νέα παραγγελία του προϊόντος, αν εφαρμόζεται η πολιτική LS, είτε ικανοποιείται μία εκκρεμής παραγγελία αν εφαρμόζεται η CB. Τέτοιου είδους πολιτικές θα μπορούσαν να επεκταθούν σε μία παραλλαγή της πολιτικής PLS.

Μία άλλη επέκταση των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο, όπου εξετάζουμε δίκτυα παραγωγής με ελεύθερη γεωμετρία.

3 Συνεργαζόμενες Πολιτικές Ελέγχου Αποθεμάτων και Αποδοχής Παραγγελιών σε Δίκτυα Παραγωγής Ελεύθερης Γεωμετρίας

3.1 Εισαγωγή

Εξετάζουμε το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε δίκτυα παραγωγής τυχαίας γεωμετρίας που παράγουν ένα προϊόν. Ακολουθούμε μία απλή πολιτική ελέγχου αποθεμάτων ενός σταδίου. Δηλαδή όταν το απόθεμα ετοίμων φτάσει ένα όριο, που καλείται απόθεμα βάσης, τότε η παραγωγή διακόπτεται. Στις πολιτικές πολλών σταδίων (multi-stage inventory control policies), κάθε μηχανή έχει το δικό της απόθεμα βάσης. Οι Karaesmen and Dallery [21] αποδεικνύουν ότι σε συστήματα δύο μηχανών σε σειρά, όταν το μοναδιαίο κόστος αποθέματος είναι το ίδιο για τα δύο στάδια παραγωγής, οι πολιτικές ελέγχου ενός σταδίου έχουν την ίδια απόδοση με τις πολιτικές ελέγχου των αποθεμάτων και στα δύο στάδια. Γενικά φαίνεται ότι, όταν το κόστος αποθέματος είναι ανεξάρτητο των σταδίων παραγωγής, οι πολιτικές ελέγχου ενός σταδίου, που είναι απλούστερες, είναι εξίσου καλές με τις πολιτικές ελέγχου πολλών σταδίων. Για τον έλεγχο των παραγγελιών χρησιμοποιείται η πολιτική μερικής αποδοχής των εκκρεμών παραγγελιών. Η μαθηματική περιγραφή του συστήματος πραγματοποιήθηκε με τη χρήση της θεωρίας αναμονητικών συστημάτων. Όπως είδαμε στην εισαγωγή, η θεωρία αναμονητικών συστημάτων έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα για τη μοντελοποίηση συστημάτων παραγωγής. Οι πρώτοι ερευνητές που χρησιμοποίησαν τη θεωρία ουρών αναμονής για τη μαθηματική περιγραφή συστημάτων παραγωγής προς αποθήκευση με πολλές μηχανές ήταν οι Lee and Zipkin [23]. Παρόμοια μοντελοποίηση με αυτή που χρησιμοποιούμε εδώ παρουσιάζεται από τους Rubio and Wein [29]. Τα θεωρητικά αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού απαντούν και σε ένα ανοικτό πρόβλημα που ετέθη από τους δύο τελευταίους ερευνητές.

Στην Παράγραφο 3.2 περιγράφεται μαθηματικά ένα δίκτυο παραγωγής με μερική αποδοχή παραγγελιών. Το σύστημα μοντελοποιείται με τη χρήση ενός ισοδύναμου κλειστού δικτύου αναμονής (ΚΔ). Εκτιμάται το βέλτιστο απόθεμα βάσης όταν η χωρητικότητα του συστήματος είναι σταθερή. Επίσης μελετώνται οι ιδιότητες δεύτερης τάξης της συνάρτησης αναμενόμενου κέρδους και αναπτύσσεται αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των βέλτιστων παραμέτρων της πολιτικής μερικής αποδοχής παραγγελιών. Στην Παράγραφο 3.3 το εξεταζόμενο σύστημα περιγράφεται μαθηματικά, όταν εφαρμόζεται η πολιτική τυχαίας αποδοχής παραγγελιών, με τη βοήθεια ενός ΚΔ. Αναπτύσσεται ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των βέλτιστων παραμέτρων της προτεινόμενης πολιτικής. Στην Παράγραφο 3.4 συγκρίνονται οι αποδόσεις των προτεινόμενων πολιτικών PLS και RAC με αυτές των συνήθως χρησιμοποιούμενων πολιτικών CB και LS για μία γραμμή παραγωγής. Τέλος στην Παράγραφο 3.5 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

3.2 Μαθηματική περιγραφή δικτύου παραγωγής με μερική αποδοχή της μη ικανοποιημένης ζήτησης

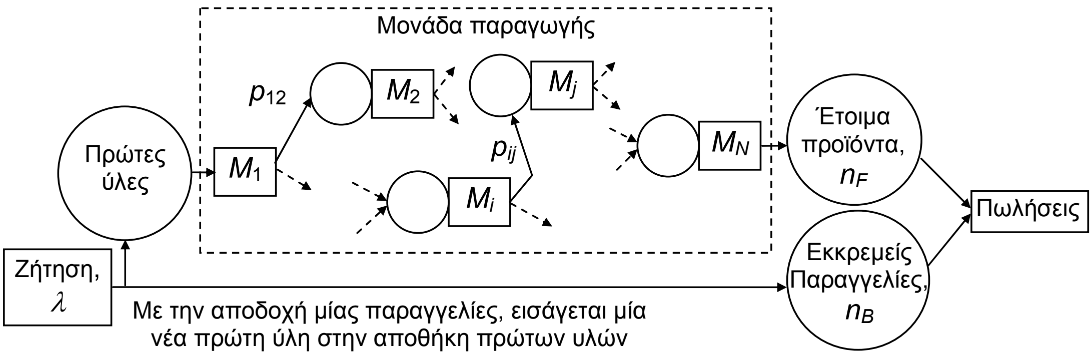
Εξετάζουμε δίκτυα παραγωγής που παράγουν ένα προϊόν. Το μέτρο απόδοσης του συστήματος είναι και πάλι το μέσο κέρδος ανά μονάδα χρόνου για άπειρο χρονικό ορίζοντα λειτουργίας του συστήματος. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο Κεφάλαιο 2, το κέρδος είναι το κέρδος πωλήσεων των προϊόντων μείον το κόστος αποθέματος και το κόστος εκκρεμών παραγγελιών, ήτοι

$$J = p\mathrm{TH} - hH - bB$$

όπου TH είναι ο μέσος ρυθμός παραγωγής του δικτύου, H είναι το μέσο συνολικό απόθεμα και B είναι το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών, ενώ p, h και b είναι τα αντίστοιχα μοναδιαία κέρδη ή κόστη όπως έχουν οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε, ότι το μοναδιαίο κόστος αποθέματος είναι το ίδιο σε όλους τα στάδια της παραγωγής. Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις που αυτή η υπόθεση δεν ισχύει. Μια τέτοια περίπτωση αποτελούν για παράδειγμα οι βιομηχανίες παγωτού. Η πρώτη ύλη συνήθως είναι γάλα σκόνη, που δεν έχει ιδιαίτερες απαιτήσεις για τη συντήρηση της, ενώ το τελικό προϊόν πρέπει να διατηρηθεί σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες και συνεπώς απαιτείται επιπλέον κόστος για την ψύξη του αποθέματος ετοίμων προϊόντων. Αντιθέτως, στη βιομηχανία κονσερβοποίησης αγροτικών προϊόντων, οι πρώτες ύλες (φρούτα, λαχανικά) είναι πιο ευπαθείς από τα τελικά προϊόντα (κονσέρβες) τα οποία έχουν μακρά διάρκεια ζωής και συνεπώς μικρότερο κόστος συντήρησης.

Για το σύστημα που εξετάζουμε υποθέτουμε ότι το κόστος συντήρησης, αν υπάρχει, είναι ίσο για όλα τα στάδια παραγωγής ή είναι αμελητέο σε σχέση με το χρηματοοικονομικό κόστος αποθέματος (κόστος αγοράς πρώτων υλών) που είναι ανεξάρτητο του σταδίου. Συνεπώς ο ρυθμός κόστους αποθέματος ανά κομμάτι είναι σταθερός σε κάθε στάδιο της κατεργασίας και το συνολικό κόστος αποθέματος εξαρτάται μόνο από το μέσο απόθεμα H σε όλο το σύστημα. Μία ακόμη παραδοχή που κάνουμε είναι ότι μία μονάδα προϊόντος προκύπτει από μία μονάδα πρώτης ύλης. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι το τελικό προϊόν δεν προκύπτει από τη συναρμολόγηση πρώτων υλών ή ημιτελών κομματιών. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε συστήματα παραγωγής με ομαδική ζήτηση και μηχανές που παράγουν κατά παρτίδες. Αυτή η επέκταση επιτρέπει την ανάλυση αρκετών συστημάτων συναρμολόγησης (assembly systems). Για παράδειγμα, αν το τελικό προϊόν προκύπτει από την συναρμολόγηση δύο κομματιών, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σε κάθε κύκλο παραγωγής η μηχανή που συναρμολογεί παράγει μία παρτίδα δύο κομματιών και σε κάθε παραγγελία που γίνεται δεκτή αντιστοιχούν δύο εικονικά προϊόντα που αντιστοιχούν σε μία μονάδα τελικού προϊόντος.

Σε αυτή την παράγραφο παρέχονται μαθηματικές εκφράσεις για τα TH, H και B. Ο τύπος των συστημάτων παραγωγής που εξετάζονται εδώ παρουσιάζεται στο Σχ. 3.1. Το εν λόγω σύστημα αποτελείται από μία μονάδα παραγωγής με πολλές μηχανές και ενδιάμεσες αποθήκες, μια τυχαία διαδικασία ζήτησης και τρεις εξωτερικές αποθήκες (συμβολίζονται στο Σχ. 3.1 με μεγάλους κύκλους): μία αποθήκη πρώτων υλών, μία αποθήκη ετοίμων προϊόντων και μία εικονική αποθήκη εκκρεμών παραγγελιών, η οποία καταγράφει όλες τις παραγγελίες, που βρίσκονται σε αναμονή.



Σχήμα 3.1. Σύστημα παραγωγής

Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων πελατών είναι ανεξάρτητες, εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με αναμενόμενη τιμή $1/\lambda$ και κάθε πελάτης ζητάει μία μονάδα προϊόντος. Σχετικά με τη μονάδα παραγωγής έχει γίνει η παραδοχή ότι μοντελοποιείται ως ένα αναμονητικό δίκτυο τύπου Jackson, με N κόμβους $i = 1, 2,\ldots, N$. Κάθε κόμβος i αποτελείται από μία αποθήκη και μία μηχανή M_i, που τροφοδοτείται από την αποθήκη. Τα προϊόντα που αναχωρούν από τη μηχανή M_i, αποστέλλονται στην αποθήκη της μηχανής M_j, για την επόμενη κατεργασία, με πιθανότητα p_{ij}. Οι χρόνοι κατεργασίας κάθε μηχανής M_i είναι ανεξάρτητες, εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με αναμενόμενη τιμή $1/\mu_i$. Η μηχανή M_1 εκτελεί την πρώτη κατεργασία και η μηχανή M_N παράγει τα έτοιμα προϊόντα. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε συστήματα με γενικότερες κατανομές χρόνων αφίξεων και κατεργασιών.

Ό έλεγχος των αποθεμάτων και των παραγγελιών πραγματοποιείται με βάση τους παρακάτω κανόνες:

(α) Όταν αρχίζει η λειτουργία του συστήματος υπάρχουν στην αποθήκη πρώτων υλών s κομμάτια από τα οποία θα προκύψουν s τελικά προϊόντα. Η ποσότητα αυτή αναφέρεται ως απόθεμα βάσης. Οι πρώτες ύλες ξεκινούν την επεξεργασία τους από τη μηχανή M_1 και στη συνέχεια μεταφέρονται σε άλλες μηχανές της μονάδας παραγωγής σύμφωνα με τις πιθανότητες μετάβασης p_{ij}.

(β) Όταν αφιχθεί ένας πελάτης η παραγγελία του γίνεται αποδεκτή ή απορρίπτεται ανάλογα με τον αριθμό των εκκρεμών παραγγελιών. Αν εκκρεμούν c παραγγελίες η νέα παραγγελία είτε απορρίπτεται είτε ικανοποιείται από υπεργολάβους. Το c είναι το έλλειμμα βάσης. Μία αφικνούμενη παραγγελία που βρίσκει στην εικονική αποθήκη λιγότερες από c εκκρεμείς παραγγελίες γίνεται αμέσως δεκτή και αυτομάτως μία μονάδα πρώτης ύλης εισέρχεται στην αποθήκη πρώτων υλών, από την οποία θα προκύψει μια μονάδα προϊόντος για να ικανοποιηθεί η παραγγελία που έφθασε.

(γ) Όταν στο σύστημα υπάρχουν τουλάχιστον ένα έτοιμο προϊόν και τουλάχιστον μία παραγγελία που εκκρεμεί, τότε το προϊόν πωλείται χωρίς καθυστέρηση στον πελάτη που περιμένει. Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν συγχρόνως αποθέματα και στην αποθήκη ετοίμων προϊόντων και στην αποθήκη εκκρεμών παραγγελιών.

Ας υποτεθεί ότι σε κάποια χρονική στιγμή το πλήθος των προϊόντων στον κόμβο i (αποθήκη και μηχανή M_i) είναι n_i, $i = 1, 2,\dots, N$, το πλήθος των ετοίμων προϊόντων είναι n_F και εκκρεμούν n_B παραγγελίες. Αφού οι χρόνοι αφίξεων πελατών και οι χρόνοι κατεργασιών είναι ανεξάρτητες, εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, η εξέλιξη του συστήματος είναι ανεξάρτητη των παλαιοτέρων καταστάσεων και εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος (n_F, n_B; n_i, $i = 1,\dots,N$). Συνεπώς το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από μία αλυσίδα Markov. Στη συνέχεια θα δειχθεί ότι το σύστημα παραγωγής είναι ισοδύναμο με ένα κλειστό δίκτυο αναμονής με $N + 1$ κόμβους.

Ο συνολικός αριθμός κομματιών (έτοιμα προϊόντα + πρώτες ύλες + ημιτελή κομμάτια) στο σύστημα δίνεται από τη σχέση

$$n_H = n_F + \sum_{i=1}^{N} n_i$$

Μία εναλλακτική σχέση για το n_H μπορεί να προκύψει από την εξίσωση διατήρησης της ροής του συστήματος:

n_H = (αρχικό απόθεμα, s) + (πλήθος εισερχόμενων πρώτων υλών) – (αθροιστικές πωλήσεις)

Από τους κανόνες λειτουργίας του συστήματος είναι γνωστό ότι, όταν γίνει αποδεκτή μία παραγγελία εισάγεται μία νέα πρώτη ύλη στην αποθήκη πρώτων υλών (κανόνας (β)) και όταν ολοκληρώνεται μία πώληση αναχωρούν από το σύστημα μία παραγγελία και ένα έτοιμο προϊόν (κανόνας (γ)). Δηλαδή

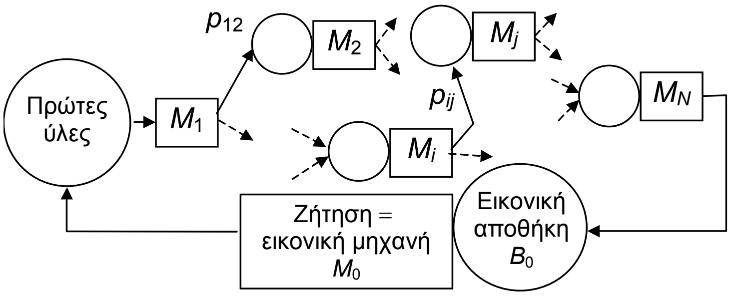
(πλήθος εισερχόμενων πρώτων υλών) – (αθροιστικές πωλήσεις) = n_B

και συνεπώς ισχύει ότι

$$n_H = s + n_B$$

Για να διευκολυνθεί η ανάλυση του συστήματος παραγωγής, χρησιμοποιείται το ισοδύναμο κλειστό δίκτυο αναμονής (ΚΔ) του Σχ. 3.2. Το παραπάνω ΚΔ έχει ένα σταθερό συνολικό πλήθος προϊόντων $m = s + c$ και η λειτουργία του είναι παρόμοια με αυτή του αρχικού συστήματος παραγωγής. Το δίκτυο αυτό αποτελείται από τους $i = 1, 2,\ldots, N$ κόμβους της αρχικής μονάδας παραγωγής και έναν επιπλέον κόμβο 0, που αποτελείται από μία εικονική μηχανή M_0 και μία εικονική αποθήκη B_0. Οι κόμβοι $i = 1, 2,\ldots, N$ έχουν το ίδιο πλήθος προϊόντων n_i, και τους ίδιους ρυθμούς κατεργασιών μ_i που έχουν οι κόμβοι της μονάδας παραγωγής. Η μηχανή M_0 αντιστοιχεί στην ζήτηση του αρχικού συστήματος και συνεπώς οι χρόνοι κατεργασιών είναι ίδιοι με τους ενδοαφιξιακούς χρόνους του συστήματος παραγωγής. Δηλαδή ο μέσος ρυθμός κατεργασιών της M_0 είναι $\mu_0 = \lambda$.

Απομένει να εξεταστεί με ποιο τρόπο οι μεταβλητές n_F, n_B και n_H, του αρχικού συστήματος αντιστοιχούν στη μεταβλητή κατάστασης n_0, της εικονικής αποθήκης B_0. Οι αντιστοιχίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1.



Σχήμα 3.2. Ισοδύναμο κλειστό δίκτυο αναμονής

Πίνακας 3.1. Αντιστοιχία μεταξύ του αρχικού συστήματος και του ισοδύναμου ΚΔ

Αν n_F είναι	**και n_B είναι**	**τότε**	**το συνολικό πλήθος n_H των προϊόντων στο αρχικό σύστημα είναι**	**και το n_0 στο ισοδύναμο ΚΔ είναι**
0	0		s	c
1	0		s	c+1
…	…		…	…
s	0		s	$s+c = m$
0	1		s+1	c–1
…	…		…	…
0	c		$s+c = m$	0

Στη συνέχεια παρέχονται μαθηματικές εκφράσεις για τα TH, H, και B χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες μετάβασης p_{ij} και τους ρυθμούς κατεργασιών μ_i των μηχανών. Με Π συμβολίζεται ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης, $\Pi = [p_{ij}]$ και $U = [U_0\ U_1\ \ldots\ U_N]$ οποιαδήποτε μη αρνητική λύση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων $U = \Pi$. Για παράδειγμα μπορεί κανείς να θέσει $U_0 = 1$ και να λύσει το σύστημα εξισώσεων για τα υπόλοιπα στοιχεία του διανύσματος U. Τότε στη μόνιμη κατάσταση η πιθανότητα το ισοδύναμο σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $(n_0, \ldots, n_N)$ δίδεται από (βλ. Buzen [8])

$$P(n_0, \ldots, n_N) = \frac{1}{G(m)} \prod_{i=0}^{N} \left[\frac{U_i^{n_i}}{\mu_i(1) \ldots \mu_i(n_i)} \right] \tag{3.1}$$

όπου

$$G(m) = \sum_{n_0 + \ldots + n_N = m} \left[\prod_{i=0}^{N} \left(\frac{U_i^{n_i}}{\mu_i(1) \ldots \mu_i(n_i)} \right) \right]$$

είναι μία σταθερά κανονικοποίησης, η οποία επιλέγεται έτσι ώστε το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων να είναι ίσο με τη μονάδα και $\mu_i(n)$ είναι ο μέσος ρυθμός παραγωγής του κόμβου i όταν υπάρχουν $n > 0$ προϊόντα στον κόμβο. Για το σύστημα υπό εξέταση $\mu_i(n) = \mu_i$, οπότε η (3.1) γίνεται

$$P(n_0, \ldots, n_N) = \frac{1}{G(m)} \prod_{i=0}^{N} \left(\frac{U_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \tag{3.2}$$

Ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος είναι ίσος με το μέσο ρυθμό αποδοχής παραγγελιών, και δίδεται από τη σχέση (Yao and Buzacott [43])

$$\mathrm{TH} = \mu_0 P(n_0 > 0) = U_0 \frac{G(m-1)}{G(m)}$$

Με τη βοήθεια του Πίνακα 3.1 εκφράζονται μαθηματικά το μέσο συνολικό απόθεμα H και το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών B ως εξής

$$H \triangleq E[n_H] = sP(n_0 \geq c) + (s+1)P(n_0 = c-1) + \ldots + mP(n_0 = 0) \tag{3.3}$$

$$B \triangleq E[n_B] = 1P(n_0 = c-1) + 2P(n_0 = c-2) + \ldots + cP(n_0 = 0) \tag{3.4}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις χρησιμοποιούν πιθανότητες της μεταβλητής κατάστασης του συστήματος n_0, που υπολογίζονται από τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος $P(n_0, \ldots, n_N)$. Από την Εξ. (3.2) προκύπτει

$$P(n_0) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_N} P(n_0, \ldots, n_N) = \frac{G_0(m-n_0)}{G(m)} \rho_0^{n_0} \tag{3.5}$$

όπου $\rho_0 = U_0/\mu_0 = U_0/\lambda$. Το $G_0(m)$ είναι η σταθερά κανονικοποίησης ενός *νέου* ΚΔ που προκύπτει αφαιρώντας από το ΚΔ του Σχ. 3.2 τον κόμβο 0 και στέλνοντας όλα τα κομμάτια που εξέρχονται από την M_N πίσω στην αποθήκη πρώτων υλών, ήτοι για $p_{N1} = 1$.

Έχοντας αναλυτικές εκφράσεις για τα διάφορα μέτρα απόδοσης και κόστη του συστήματος είναι δυνατό να εξεταστεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης του αναμενόμενου κέρδους του συστήματος $J(s, m) = p\mathrm{TH} - hH - bB$. Τώρα θέτουμε $c = m-s$ στις Εξ. (3.3) και (3.4) και επιλέγουμε, αφού υπάρχει ένας βαθμός ελευθερίας, $U_0 = \lambda$ και $\rho_0 = 1$. Με λίγη άλγεβρα προκύπτει

$$J(s, m) = p\lambda \frac{G(m-1)}{G(m)} - hs - (h+b)(m-s) + (h+b)\frac{G(s) + \ldots + G(m-1)}{G(m)} \tag{3.6}$$

Εφόσον το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι δισδιάστατο το επιλύουμε σταδιακά. Πρώτα μεγιστοποιείται η $J(s, m)$ ως προς το s για κάθε σταθερή τιμή του m και στη συνέχεια αναζητείται η βέλτιστη τιμή του m. Για σταθερό m αναζητείται η τιμή s_m του s, που ικανοποιεί συγχρόνως τις ακόλουθες ανισότητες

$$J(s_m, m) \geq J(s', m), \text{ για κάθε } s' \text{ τέτοιο ώστε } 0 \leq s' < s_m$$

$$J(s_m, m) > J(s', m), \text{ για κάθε } s' \text{ τέτοιο ώστε } s' > s_m$$

Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει δύο εναλλακτικούς τρόπους για τον προσδιορισμό του s_m.

Θεώρημα 3.1. (α) Η συνάρτηση $J(s, m)$ είναι κοίλη ως προς το s αν το m είναι σταθερό και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο σημείο s_m, που ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη

$$\frac{G(s_m - 1)}{G(m)} \leq \frac{b}{h+b} < \frac{G(s_m)}{G(m)} \tag{3.7}$$

(β) Επιπλέον ισχύει ότι $s_m \leq s_{m+1} \leq s_m + 1$.

Απόδειξη

Έστω ότι m είναι σταθερό. Αφού το TH εξαρτάται μόνο από το m, αρκεί να δειχθεί ότι η συνάρτηση κόστους

$$C_s \triangleq hH_s + bB_s$$

είναι κυρτή, όπου H_s και B_s είναι το μέσο απόθεμα και το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών συναρτήσει του s. Θέτοντας $c = m - s$ στις Εξ. (3.3) και (3.4), μετά από λίγη άλγεβρα προκύπτει ότι

$$C_s = hs + (h+b)[1P(n_0 = m-s-1) + 2P(n_0 = m-s-2) + \ldots + (m-s)P(n_0 = 0)]$$

Όμοια προκύπτει ότι

$$C_{s+1} = h(s+1) + (h+b)[1P(n_0 = m-s-2) + 2P(n_0 = m-s-3) + \ldots + (m-s-1)P(n_0 = 0)]$$

$$= C_s + h - (h+b)P(n_0 \leq m-s-1) \tag{3.8}$$

$$C_{s-1} = h(s-1) + (h+b)[1P(n_0 = m-s) + 2P(n_0 = m-s-1) + \ldots + (m-s+1)P(n_0 = 0)]$$

$$= C_s - h + (h+b)P(n_0 \leq m-s) \tag{3.9}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στη σχέση

$$C_{s+1} + C_{s-1} = 2J_s + (h+b)P(n_0 = m-s) \geq 2C_s$$

Η αντικατάσταση του s με $s \pm 1$, $s \pm 2$, ..., στην παραπάνω ανισότητα οδηγεί στη σχέση

$$C_{s+i} + C_{s-i} \geq 2C_s$$

για κάθε s και $i \leq s$, που λόγω του Λήμματος 1 των Anantharam and Tsoucas [4] συνεπάγεται ότι η C_s είναι κυρτή.

Για να είναι το s βέλτιστο όταν το m είναι σταθερό πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ανισότητες συγχρόνως

$$C_s \geq C_{s+1} \tag{3.10}$$

$$C_s > C_{s-1} \tag{3.11}$$

Η ανισότητα (3.10), χρησιμοποιώντας την Εξ. (3.8), γίνεται

$$C_s - C_{s+1} = (h+b)P(n_0 \leq m-s-1) - h > 0$$

που τελικά οδηγεί

$$\frac{b}{h+b} > P(n_0 > m-s-1)$$

Με τη βοήθεια της Εξ. (3.5) και την ιδιότητα

$$G(m) = G(m-1)\rho_0 + G_0(m) = G(m-1) + G_0(m) \tag{3.12}$$

αφού $\rho_0 = 1$, η προηγούμενη ανισότητα μετά από λίγη άλγεβρα γίνεται

$$\frac{b}{h+b} \geq \frac{G(s-1)}{G(m)}$$

Με παρόμοιο τρόπο η ανισότητα (3.11) δίδει

$$\frac{b}{h+b} < \frac{G(s)}{G(m)}$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη των ανισοτήτων (3.7).

Στο δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 3.1 ισχυριζόμαστε ότι $s_m \leq s_{m+1} \leq s_m + 1$. Αρκεί, προς τούτο, να αποδείξουμε ότι $G(s_m-1)/G(m+1) \leq b/(h+b) < G(s_m+1)/G(m+1)$. Από το αριστερό σκέλος της ανισότητας (3.7) προκύπτει ότι

$$\frac{b}{h+b} \geq \frac{G(s_m-1)}{G(m)} > \frac{G(s_m-1)}{G(m)+G_0(m+1)} = \frac{G(s_m-1)}{G(m+1)}$$

Επειδή ο μέσος ρυθμός παραγωγής TH του ΚΔ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς m (Shanthikumar and Yao [31]) και $s_m \leq m$, συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{TH}(s_m{+}1) = \mu_0 \frac{G(s_m)}{G(s_m+1)} \le \mu_0 \frac{G(m)}{G(m+1)} = \mathrm{TH}(m{+}1)$$

που οδηγεί στο

$$\frac{G(s_m)}{G(m)} \le \frac{G(s_m+1)}{G(m+1)}$$

Από την παραπάνω ανισότητα και το αριστερό σκέλος της (3.7) προκύπτει ότι

$$\frac{b}{h+b} < \frac{G(s_m)}{G(m)} \le \frac{G(s_m+1)}{G(m+1)} \tag{3.13}$$

και η απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 ολοκληρώνεται. ΟΕΔ

Το Θεώρημα 3.1(β) προσφέρει έναν εναλλακτικό τρόπο προσδιορισμού του βέλτιστου αποθέματος βάσης για κάθε τιμή του m. Αν s_m είναι το βέλτιστο απόθεμα βάσης όταν η χωρητικότητα του συστήματος είναι m, τότε το s_{m+1} είναι μία από τις δύο τιμές $s = s_m$ ή $s_m + 1$ που δίνει το μεγαλύτερο μέσο κέρδος .

Έχοντας υπολογίσει τη βέλτιστη τιμή του αποθέματος βάσης s_m για κάθε τιμή της χωρητικότητας του συστήματος m, η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους $J(s_m, m)$ μπορεί να μεγιστοποιηθεί ως προς m, όπου $m = \{0, 1, \ldots\}$. Προφανώς όταν το $m = 0$ το σύστημα δε λειτουργεί και συνεπώς $s_0 = 0$ και $J(0, 0) = 0$. Αν η τιμή $\max_{m>0} J(s_m, m)$ είναι μεγαλύτερη από την $J(0, 0)$ το σύστημα είναι κερδοφόρο, διαφορετικά είναι ασύμφορη η λειτουργία του. Σε προβλήματα βελτιστοποίησης είναι πολύ σημαντικό να υπάρχει ένα ολικό βέλτιστο και όχι πολλά τοπικά ακρότατα. Στη δεύτερη περίπτωση οι υπάρχοντες αλγόριθμοι βελτιστοποίησης δεν παρέχουν καμία εγγύηση ότι η λύση, στην οποία καταλήγουν, είναι το ολικό βέλτιστο. Μία συνάρτηση που είναι σχεδόν κοίλη (ή κυρτή) αποδεικνύεται ότι έχει ένα ολικό ακρότατο. Το θεώρημα που παρουσιάζεται στη συνέχεια εξετάζει τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους είναι σχεδόν κοίλη και προσφέρει τα θεωρητικά εργαλεία για την ανάπτυξη ενός αλγόριθμου ολικής βελτιστοποίησης.

Θεώρημα 3.2. Έστω ένα σημείο m τέτοιο ώστε

$$J(s_m, m) \ge J(s_{m+1}, m + 1)$$

και

$$h \geq p\lambda \left[\frac{G_0(m+1)}{G_0(m+2)} - \frac{G_0(m)}{G_0(m+1)} \right] \tag{3.14}$$

τότε $J(s_{k+1}, k+1) \geq J(s_{k+2}, k+2)$ για κάθε $k \geq m$.

Απόδειξη

Έστω ότι $s_m = s$ και $J(s_m, m) \geq J(s_{m+1}, m+1)$. Θα δείξουμε ότι αν ικανοποιείται η συνθήκη (3.14) τότε $J(s_{m+1}, m+1) \geq J(s_{m+2}, m+2)$. Από το Θεώρημα 3.1(β) συνεπάγεται ότι αρκεί να εξεταστούν τέσσερις συνδυασμοί των s_{m+1} και s_{m+2}, όπου $s_{m+1} = s_m, s_m+1$ και $s_{m+2} = s_{m+1}, s_{m+1}+1$. Για απλούστευση στο συμβολισμό ορίζουμε $s \triangleq s_m$.

Περίπτωση Α: $s_{m+1} = s_{m+2} = s$. Από την Εξ. (3.6) προκύπτει ότι

$$J(s, m) = P\lambda \frac{G(m-1)}{G(m)} - hs - (h+b)(m-s) + (h+b)\frac{G(s)+\ldots+G(m-1)}{G(m)}$$

$$J(s, m+1) = P\lambda \frac{G(m)}{G(m+1)} - hs - (h+b)(m-s+1) + (h+b)\frac{G(s)+\ldots+G(m)}{G(m+1)}$$

Στη συνέχεια η $J(s, m)$ εκφράζεται ως συνάρτηση της $J(s, m+1)$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (3.12) καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση

$$\begin{aligned} J(s, m) = {} & J(s,m+1)\frac{G(m+1)}{G(m)} - p\lambda\frac{G_0(m)}{G(m)} + hs\frac{G_0(m+1)}{G(m)} + (h+b)(m-s)\frac{G_0(m+1)}{G(m)} \\ & + (h+b)\frac{G(m+1)}{G(m)} - (h+b) \\ = {} & J(s,m+1) + \frac{G_0(m+1)}{G(m)}\left[J(s,m+1) - p\lambda\frac{G_0(m)}{G_0(m+1)} + hs + (h+b)(m-s+1) \right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} J(s, m) - J(s, m+1) &= \frac{G_0(m+1)}{G(m)}\left[J(s,m+1) - p\lambda\frac{G_0(m)}{G_0(m+1)} + hs + (h+b)(m-s+1) \right] \\ &= \frac{G_0(m+1)}{G(m)} F(s,m) \end{aligned} \tag{3.16}$$

όπου

$$F(s,\, m) = J(s, m+1) - p\lambda \frac{G_0(m)}{G_0(m+1)} + hs + (h+b)(m-s+1)$$

Με παρόμοιο τρόπο είναι δυνατό να εκφραστεί η $J(s,\, m{+}1)$ σαν συνάρτηση της $J(s,\, m{+}2)$ και μετά από λίγη άλγεβρα οδηγούμαστε στο

$$J(s,\, m{+}1) - J(s,\, m{+}2) = \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)} \left[J(s, m+2) - p\lambda \frac{G_0(m+1)}{G_0(m+2)} + hs + (h+b)(m-s+2) \right]$$

$$= \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)} F(s, m+1)$$

Αφού $J(s,\, m) \geq J(s,\, m{+}1)$, η $F(s,\, m)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός. Εάν η $J(s,\, m{+}2)$ ήταν μεγαλύτερη από την $J(s,\, m{+}1)$ θα έπρεπε να είναι

$$J(s,\, m{+}2) + hs + (h + b)(m - s + 1) + b > J(s,\, m{+}1) + hs + (h + b)(m - s + 1)$$

Τότε από τη συνθήκη (3.14) προκύπτει ότι $F(s,\, m{+}1) > F(s,\, m) \geq 0$ και συνεπώς

$$J(s,\, m{+}1) - J(s,\, m{+}2) = \frac{G_0(m+1)}{G(m)} F(s, m+1) > 0$$

που είναι άτοπο. Συνεπώς $J(s,\, m{+}1) \geq J(s,\, m{+}2)$.

Περίπτωση Β: $s_{m+1} = s$ και $s_{m+2} = s{+}1$. Θα δείξουμε ότι αν $J(s,\, m) \geq J(s,\, m{+}1)$ και η συνθήκη (3.14) ικανοποιείται τότε $J(s,\, m{+}1) \geq J(s{+}1,\, m{+}2)$. Ισχύει ότι

$$J(s{+}1,\, m{+}2) = P\lambda \frac{G(m+1)}{G(m+2)} - h(s+1) - (h+b)(m-s+1)$$

$$+ (h+b) \frac{G(s+1) + \ldots + G(m+1)}{G(m+2)}$$

και

$$J(s,\, m{+}1) = P\lambda \frac{G(m)}{G(m+1)} - h(s) - (h+b)(m-s+1) + (h+b) \frac{G(s) + \ldots + G(m)}{G(m+1)}$$

$$= J(s+1, m+2) \frac{G(m+2)}{G(m+1)} - p\lambda \frac{G_0(m+1)}{G(m+1)} + hs \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)} + h \frac{G(m+2)}{G(m+1)}$$

$$+ (h+b)(m-s+1) \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)} - (h+b) + (h+b) \frac{G_0(s)}{G(m+1)}$$

$$= J(s+1,m+2) - b + (h+b)\frac{G(s)}{G(m+1)}$$

$$+\frac{G_0(m+2)}{G(m+1)}\left[J(s+1,m+2) - p\lambda\frac{G_0(m+1)}{G_0(m+2)} + h(s+1) + (h+b)(m-s+1)\right]$$

Τότε

$$J(s, m+1) - J(s+1, m+2) = (h+b)\frac{G(s)}{G(m+1)} - b + \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)}\left[J(s+1,m+2)\right.$$

$$\left. - p\lambda\frac{G_0(m+1)}{G_0(m+2)} + h(s+1) + (h+b)(m-s+1)\right]$$

$$= (h+b)\frac{G(s)}{G(m+1)} - b + \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)}F(s+1,m+1)$$

Ας υποτεθεί ότι $J(s, m+1) - J(s+1, m+2) < 0$, ήτοι

$$(h+b)\frac{G(s)}{G(m+1)} - b + \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)}F(s+1,m+1) < 0$$

Θα αποδείξουμε ότι αυτή η ανισότητα δεν είναι αληθής. Εφόσον $s_{m+1} = s$ η ανισότητα (3.7) συνεπάγεται ότι $(h + b)G(s)/G(m + 1) - b > 0$. Συνεπώς, αν ήταν αληθής η υπόθεση $J(s, m+1) - J(s+1, m+2) < 0$ θα έπρεπε η παράσταση $F(s+1, m+1)G_0(m+2)/G(m+1)$ να είναι αρνητική και επίσης κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από $(h + b)G(s)/G(m + 1) - b$. Εξ υποθέσεως ισχύει ότι $J(s, m) - J(s, m+1) \geq 0$ που οδηγεί

$$F(s, m) = J(s,m+1) - p\lambda\frac{G_0(m)}{G_0(m+1)} + hs + (h+b)(m-s+1) \geq 0$$

Τότε όμως αν $J(s, m+1) < J(s+1, m+2)$, και αφού η συνθήκη (3.14) ικανοποιείται, θα έπρεπε

$$F(s+1,m+1) = J(s+1,m+2) - p\lambda\frac{G_0(m+1)}{G_0(m+2)} + h(s+1) + (h+b)(m-s+1)$$

$$> J(s,m+1) - p\lambda\frac{G_0(m)}{G_0(m+1)} + hs + (h+b)(m-s+1)$$

$$= F(s, m) \geq 0$$

που είναι άτοπο και συνεπώς ισχύει ότι $J(s, m+1) \geq J(s+1, m+2)$.

Περίπτωση Γ: $s_{m+1} = s+1$ and $s_{m+2} = s+1$. Τότε έχουμε ότι

$$J(s, m) - J(s+1, m+1) = J(s, m) - J(s, m+1) + J(s, m+1) - J(s+1, m+1) \geq 0$$

Από την Εξ. (3.8) αντικαθιστώντας το s με $s + 1$ και επειδή $s_{m+1} = s+1$, μετά από λίγη άλγεβρα προκύπτει

$$J(s, m+1) - J(s+1, m+1) = (h+b)G(s)/G(m+1) - b \leq 0$$

Συνδυάζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα και την Εξ. (3.16) η διαφορά $J(s, m) - J(s+1, m+1)$ γίνεται

$$J(s, m) - J(s+1, m+1) = (h+b)\frac{G(s)}{G(m+1)} - b + \frac{G_0(m+1)}{G(m)} F(s,m)$$

Αντικαθιστώντας το s με $s + 1$ και το m με $m + 1$ στην Εξ. (3.16) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση της διαφοράς $J(s+1, m+1) - J(s+1, m+2)$

$$J(s+1, m+1) - J(s+1, m+2) = \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)} F(s+1, m+1)$$

Αφού ισχύει ότι $J(s, m+1) - J(s+1, m+1) \leq 0$ και η διαφορά $J(s, m) - J(s+1, m+1)$ είναι μη αρνητική, πρέπει η διαφορά $J(s, m+1) - J(s, m+1)$ να είναι μη αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι $F(s, m) \geq 0$. Ας υποτεθεί ότι $J(s+1, m+1) < J(s+1, m+2)$. Δεδομένου ότι $J(s, m+1) \leq J(s+1, m+1)$ θα πρέπει να ισχύει, λόγω της προηγούμενης υπόθεσης, ότι $J(s, m+1) < J(s+1, m+2)$. Αυτή η ανισότητα σε συνδυασμό με την συνθήκη (3.14) μας οδηγεί στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$F(s+1, m+1) = J(s+1, m+2) - p\lambda \frac{G_0(m+1)}{G_0(m+2)} + h(s+1) + (h+b)(m-s+1)$$

$$> J(s, m+1) - p\lambda \frac{G_0(m)}{G_0(m+1)} + hs + (h+b)(m-s+1)$$

$$= F(s, m) \geq 0$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $J(s+1, m+1) - J(s+1, m+2) > 0$, που είναι βέβαια άτοπο και σημαίνει ότι η υπόθεση $J(s+1, m+1) - J(s+1, m+2) < 0$ είναι εσφαλμένη.

Περίπτωση Δ: $s_{m+1} = s+1$ and $s_{m+2} = s+2$. Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις η διαφορά $J(s, m) - J(s+1, m+1)$ γίνεται

$$J(s, m) - J(s+1, m+1) = (h+b)\frac{G(s)}{G(m)} - b + \frac{G_0(m+1)}{G(m)} \Big[J(s+1, m+1)$$

$$- p\lambda \frac{G_0(m)}{G_0(m+1)} + h(s+1) + (h+b)(m-s)\Bigg]$$

$$= (h+b)\frac{G(s)}{G(m)} - b + \frac{G_0(m+1)}{G(m)} F(s+1, m) \qquad (3.17)$$

$$\geq 0$$

Ας υποτεθεί ότι $J(s+1, m+1) - J(s+2, m+2) < 0$. Αντικαθιστώντας το s με $s + 1$ και το m με $m + 1$ στην Εξ. (3.17) προκύπτει ότι

$$J(s+1, m+1) - J(s+2, m+2) = (h+b)\frac{G(s+1)}{G(m+1)} - b + \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)} F(s+2, m+1) \qquad (3.18)$$

$$< 0$$

Από την ανισότητα (3.7) μιας και $s_{m+1} = s+1$ ισχύει ότι $(h + b)G(s+1)/G(m+1) - b > 0$ και συνεπώς πρέπει να είναι $F(s+2, m+1) < 0$. Η συνθήκη (3.14) σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι $J(s+1, m+1) < J(s+2, m+2)$ οδηγεί στο

$$F(s+2, m+1) = J(s+2, m+2) - p\lambda \frac{G_0(m+1)}{G_0(m+2)} + h(s+2) + (h+b)(m-s)$$

$$> J(s+1, m+1) - p\lambda \frac{G_0(m)}{G_0(m+1)} + h(s+1) + (h+b)(m-s) = F(s+1, m) \qquad (3.19)$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί ο μέσος ρυθμός παραγωγής ενός ΚΔ είναι αύξουσα συνάρτηση του m. Η ιδιότητα αυτή σε συνδυασμό με την Εξ. (3.12) οδηγεί στο

$$\frac{G_0(m+1)}{G(m)} \geq \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)} \qquad (3.20)$$

Από τις ανισότητες (3.19) και (3.20) προκύπτει ότι

$$\frac{G_0(m+2)}{G(m+1)} F(s+2, m+1) \geq \frac{G_0(m+1)}{G(m)} F(s+1, m) \qquad (3.21)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $G(s)/G(m) \leq G(s+1)/G(m+1)$ (ανισότητα (3.13)), η ανισότητα (3.21) γράφεται

$$J(s+1, m+1) - J(s+2, m+2) = (h+b)\frac{G(s+1)}{G(m+1)} - b + \frac{G_0(m+2)}{G(m+1)} F(s+2, m+1)$$

$$\geq (h+b)\frac{G(s)}{G(m)} - b + \frac{G_0(m+1)}{G(m)}F(s+1,m)$$

$$= J(s, m) - J(s+1, m+1) \geq 0$$

Για μία ακόμη φορά οδηγούμαστε σε άτοπο, γεγονός που αποδεικνύει ότι $J(s+1, m+1) \geq J(s+2, m+2)$.

Έτσι αποδείξαμε ότι αν $J(s_m, m) \geq J(s_{m+1}, m+1)$ και η συνθήκη (3.14) ικανοποιείται τότε $J(s_{m+1}, m+1) \geq J(s_{m+2}, m+2)$. Έστω το ΚΔ που προκύπτει μετά την αφαίρεση του κόμβου 0. Έχουμε δει ότι ο ρυθμός παραγωγής ενός ΚΔ είναι αύξουσα και κοίλη συνάρτηση ως προς *m*. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $G_0(m-1)/G_0(m)$ είναι επίσης αύξουσα και κοίλη ως προς *m*. Από αυτό συνεπάγεται ότι, αν η συνθήκη (3.14) ικανοποιείται για κάποια τιμή της χωρητικότητας του συστήματος *m*, τότε ικανοποιείται και για κάθε $k \geq m$. Αφού η συνθήκη (3.14) ικανοποιείται για κάθε $k \geq m$ μπορούμε, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που αποδείξαμε ότι $J(s_{m+1}, m+1) \geq J(s_{m+2}, m+2)$, να αποδείξουμε ότι $J(s_{m+2}, m+2) \geq J(s_{m+3}, m+3)$ και, επαγωγικά, $J(s_{k+1}, k+1) \geq J(s_{k+2}, k+2)$ για κάθε $k \geq m$.

ΟΕΔ

Το προηγούμενο θεώρημα δεν εγγυάται πάντα ότι η $J(s_m, m)$ είναι σχεδόν κοίλη. Για να ισχύει αυτή η ιδιότητα πρέπει η συνθήκη (3.14) να ικανοποιείται από το πρώτο σημείο *m*, που η $J(s_m, m)$ γίνεται φθίνουσα, γεγονός που δεν συμβαίνει πάντα. Ακόμη κι έτσι όμως το Θεώρημα 3.2 προσφέρει μία ικανοποιητική συνθήκη τερματισμού της αναζήτησης του βέλτιστου *m*. Η χωρητικότητα του συστήματος που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από το *m* για το οποίο ικανοποιούνται πρώτη φορά οι συνθήκες του Θεωρήματος 3.2. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι, σε όλα τα αριθμητικά παραδείγματα που εξετάστηκαν, η $J(s_m, m)$ ήταν σχεδόν κοίλη ως προς *m* ανεξαρτήτως της συνθήκης (3.14).

Με βάση το Θεώρημα 3.2 αναπτύσσουμε τον αλγόριθμο αναζήτησης των βέλτιστων παραμέτρων (s^*, m^*) της πολιτικής PLS που περιγράφεται στη συνέχεια.

Βήμα 1. Θέσε $m^* = m = 0$, $s^* = s_m = 0$ and $J^* = J(s_m, m) = 0$.

Βήμα 2. Θέσε $m = m + 1$.

Βήμα 3. Υπολόγισε τις τιμές των $J(s_{m-1}, m)$ και $J(s_{m-1} + 1, m)$. Αν $J(s_{m-1}, m) \geq$

$J(s_{m-1} + 1, m)$, τότε θέσε $s_m = s_{m-1}$, αλλιώς θέσε $s_m = s_{m-1} + 1$.

Βήμα 4. Αν $J(s_m, m) > J^*$, ενημέρωσε το μέχρι στιγμής βέλτιστο σχέδιο. Δηλαδή θέσε $J^* = J(s_m, m)$, $m^* = m$, $s^* = s$, $c^* = m - s^*$, διαφορετικά αν ισχύει η συνθήκη (3.14) σταμάτα ενώ αν δεν ικανοποιείται πήγαινε στο Βήμα 2.

Όταν $c = 0$ η PLS εκφυλίζεται στην πολιτική LS. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους απλοποιείται ως ακολούθως

$$J_{\mathrm{LS}}(m) = p\lambda \frac{G(m-1)}{G(m)} - hm$$

που είναι κοίλη αφού ο μέσος ρυθμός παραγωγής του ΚΔ του Σχ. 3.2 είναι κοίλη συνάρτηση του m (βλ. Shanthikumar and Yao [31]).

3.3 Μαθηματική περιγραφή δικτύου παραγωγής με τυχαία αποδοχή της μη ικανοποιημένης ζήτησης

Εδώ αναπτύσσουμε ένα μοντέλο του εξεταζόμενου συστήματος όταν εφαρμόζεται τυχαία αποδοχή παραγγελιών σε περιόδους μηδενικού αποθέματος (πολιτική RAC). Το σύστημα σε αυτή την περίπτωση είναι παρόμοιο με το ΚΔ του Σχ. 3.2. Υπάρχουν όμως δύο καίριες διαφορές μεταξύ των δύο συστημάτων.

Πρώτον, η RAC σε περιόδους έλλειψης ετοίμων προϊόντων κάθε νέα παραγγελία γίνεται δεκτή με πιθανότητα q ή απορρίπτεται με πιθανότητα $1 - q$. Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός κατεργασίας της M_0 είναι συνάρτηση του n_0 και είναι ίσος με

$$\mu_0(n_0) = \begin{cases} \lambda, n_0 > c \\ \lambda q, n_0 \le c \end{cases}$$

Η σταθερά κανονικοποίησης $G(m)$ δίδεται από (Buzen [8])

$$G(m) = G_0(m) + \rho_0(1)G_0(m-1) + \ldots + \rho_0(m)G_0(0)$$

όπου $\rho_0(n_0) = U_0/\mu_0(n_0)$ και $G_0(m)$ είναι η σταθερά κανονικοποίησης του ΚΔ που προκύπτει αν αφαιρεθεί ο κόμβος 0. Θέτοντας $U_0 = \lambda q$ η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$G(m) = G_0(m)+\ldots+G_0(m-c)+qG_0(m-c-1)+\ldots+q^{m-c}G_0(0) \qquad (3.22)$$

Το ΚΔ που προκύπτει μετά την αφαίρεση του κόμβου 0 αποτελείται από κόμβους των οποίων οι ρυθμοί κατεργασιών είναι ανεξάρτητοι από την κατάσταση του συστήματος. Συνεπώς το $G_0(m)$ μπορεί να γραφεί ως εξής (Harel et al. [15])

$$G_0(m) = \sum_{i=1}^{N} A_i \rho_i^m \tag{3.23}$$

όπου $\rho_i = U_i/\mu_i$, U_i, $i > 0$ είναι οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων $U = U\Pi$ με $U_0 = \lambda q$ και

$$A_i = \frac{\rho_i^{N-1}}{\prod_{j\neq i}(\rho_i - \rho_j)}$$

Έχει γίνει η υπόθεση ότι $\rho_i \neq \rho_j$. Όταν η προηγούμενη υπόθεση δεν ισχύει τότε το ανάπτυγμα της σταθεράς κανονικοποίησης $G_0(m)$ και τα A_i δίδονται από τύπους που έχουν ευρεθεί στο άρθρο Harel et al. [15]. Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις, με λίγη άλγεβρα, η Εξ. (3.22) γίνεται τελικά

$$G(m) = \sum_{i=1}^{N} A_i \left[\rho_i^{s+1} \frac{1-\rho_i^{m-s}}{1-\rho_i} + \frac{q^{s+1} - \rho_i^{s+1}}{q - \rho_i} \right] \tag{3.24}$$

Η δεύτερη διαφορά της RAC από την PLS είναι ότι δεν έχει κατώφλι απόρριψης για τις εισερχόμενες παραγγελίες. Συνεπώς η παράμετρος c καθώς και το m της Εξ. (3.24) τείνουν στο άπειρο. Κάθε κερδοφόρος πολιτική ελέγχου αποδοχής παραγγελιών πρέπει να εξασφαλίζει ότι το πλήθος των προϊόντων σε κάθε κόμβο i είναι πεπερασμένο με πιθανότητα 1, αλλιώς το αναμενόμενο κέρδος θα τείνει στο $-\infty$. Η συνθήκη γι' αυτό είναι $G(\infty) < \infty$, που ισχύει εάν και μόνο εάν η πιθανότητα αποδοχής q επιλεγεί έτσι ώστε $\max_{i>0}\rho_i < 1$, όπου $\rho_i = U_i/\mu_i$. Τότε $\rho_i^c \to 0$ και $q^c \to 0$, οπότε η Εξ. (3.24) γίνεται

$$G(\infty) = \sum_{i=1}^{N} A_i \left[\frac{\rho_i^{s+1}}{1-\rho_i} + \frac{q^{s+1} - \rho_i^{s+1}}{q - \rho_i} \right] \tag{3.25}$$

Από τους ορισμούς των TH, H, και B και λίγη άλγεβρα με τις Εξ. (3.1), (3.23) και (3.25) προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις

$$\begin{aligned} \mathrm{TH} &= \lambda q P(n_0 \le c) + \lambda P(n_0 > c) \\ &= \lambda - \lambda(1-q) \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \frac{\rho_i^s}{1-\rho_i}}{\sum_{i=1}^{N} A_i \left[\frac{\rho_i^{s+1}}{1-\rho_i} + \frac{q^{s+1} - \rho_i^{s+1}}{q - \rho_i} \right]} \right] \end{aligned}$$

$$hH + bB = hs + (h+b)\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \frac{\rho_i^{s+1}}{(1-\rho_i)^2}}{\sum_{i=1}^{N} A_i \left(\frac{\rho_i^{s+1}}{1-\rho_i} + \frac{q^{s+1}-\rho_i^{s+1}}{q-\rho_i}\right)}\right]$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω εξισώσεων υπολογίζουμε το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος $J_{\mathrm{RAC}}(s, q)$.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι όταν $q = 1$ η εφαρμοζόμενη πολιτική ελέγχου παραγγελιών είναι η CB και όταν $q = 0$ εφαρμόζεται ουσιαστικά η πολιτική LS.

Οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων της RAC υπολογίζονται με εξαντλητική έρευνα όπως παρουσιάζεται στον παρακάτω αλγόριθμο:

Βήμα 1. Καθόρισε το άνω όριο έρευνας $\bar{s}$ για το s, το άνω όριο έρευνας $\bar{q}$ για το q (που μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή για την οποία $\max_{i>0}\rho_i < 1$) και το βήμα μεταβολής του q, δq. Θέσε $J^* = -\infty$ και $q = 0$.

Βήμα 2. Εκτίμησε την $J_{\mathrm{RAC}}(s, q)$ για $s = 0, 1, \ldots, \bar{s}$: Αν $J_{\mathrm{RAC}}(s, q) > J^*$, ενημέρωσε τις τιμές των παραμέτρων της καλύτερης μέχρι τώρα πολιτικής, δηλαδή $J^* = J_{\mathrm{RAC}}(s, q)$, $q^* = q$, $s^* = s$.

Βήμα 3. Θέσε $q = q + \delta q$. Εάν $q \le \bar{q}$ πήγαινε στο Βήμα 2, διαφορετικά σταμάτα.

Από τη στιγμή που δεν είναι γνωστό αν η συνάρτηση $J_{\mathrm{RAC}}(s, q)$ είναι σχεδόν κοίλη ως προς s και q, υποχρεωτικά πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένας αλγόριθμος εξαντλητικής έρευνας, όπως ο προηγούμενος. Ωστόσο, σε όλα τα αριθμητικά παραδείγματα που πραγματοποιήσαμε, η $J_{\mathrm{RAC}}(s, q)$ ήταν σχεδόν κοίλη. Η απόδειξη μιας τέτοιας ιδιότητας θα συνέβαλε σημαντικά στην ανάπτυξη υπολογιστικά οικονομικών αλγορίθμων εκτίμησης των βέλτιστων παραμέτρων της πολιτικής RAC σε δίκτυα παραγωγής.

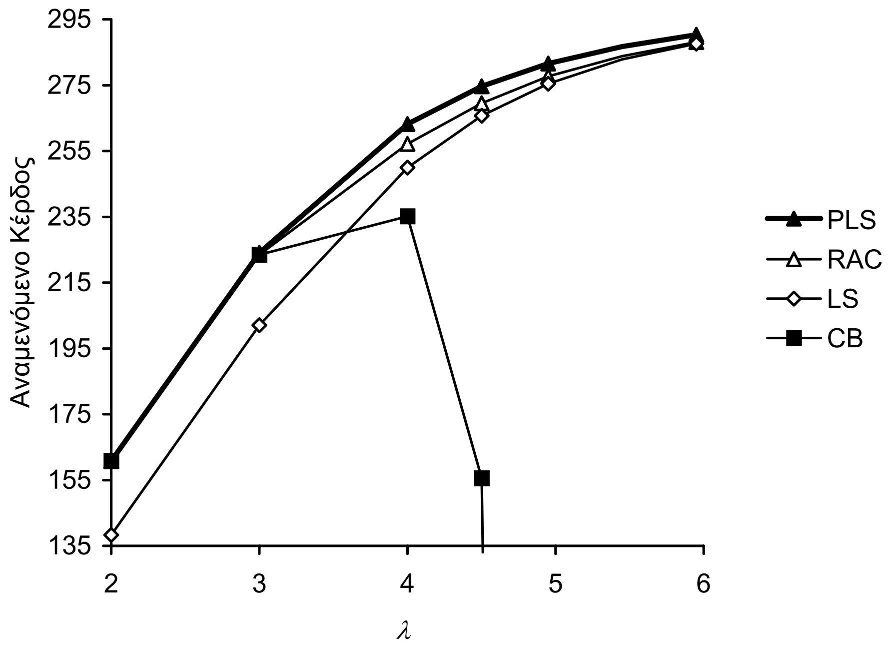
3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Θα παρουσιάσουμε ορισμένα πειραματικά αποτελέσματα για την σύγκριση των προτεινόμενων πολιτικών ελέγχου αποδοχής παραγγελιών, RAC και PLS, με τις πολιτικές CB και LS οι οποίες, εξ όσων γνωρίζουμε από την σχετική βιβλιογραφική έρευνα, εφαρμόζονται σε όλα τα συστήματα παραγωγής.

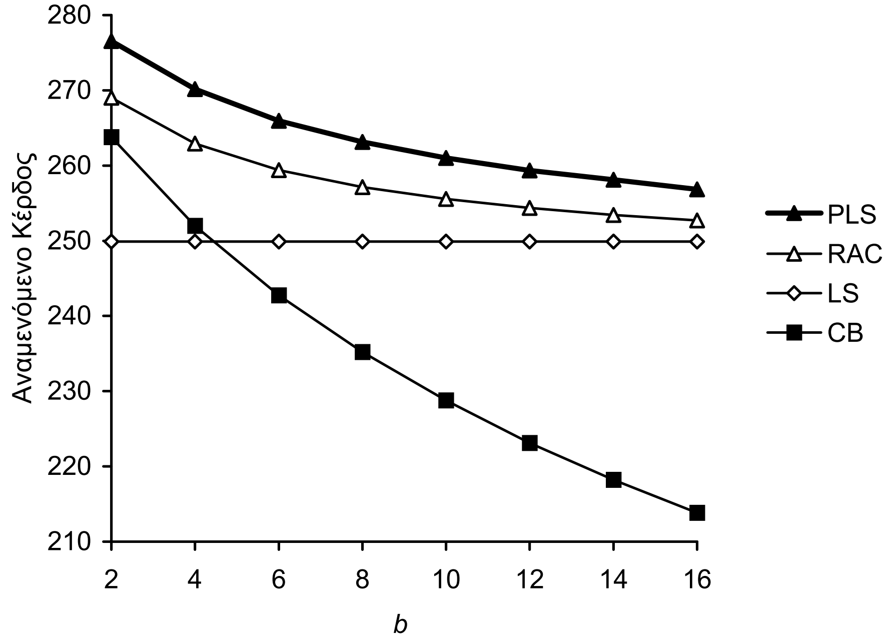
Εξετάζουμε ένα σύστημα του οποίου η μονάδα παραγωγής είναι μία γραμμή παραγωγής με έξι μηχανές M_i, $i = 1,\ldots, 6$. Οι παράμετροι του συστήματος έχουν τις εξής τιμές: $\lambda = 4.0$, $\mu_1 = 6.0$, $\mu_2 = 7.0$, $\mu_3 = 5.0$, $\mu_4 = 5.5$ $\mu_5 = 6.5$, $\mu_6 = 5.25$, $p = 100.0$, $h = 8.0$ και $b = 8.0$. Διερευνούμε την επίδραση της μεταβολής διαφόρων παραμέτρων του συστήματος, όπως η ζήτηση λ, το μοναδιαίο κόστος αποθέματος h και το μοναδιαίο κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης b, στο αναμενόμενο κέρδος. Στα Σχ. 3.3 έως 3.5 και στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα.

Πίνακας 3.2. Αναμενόμενο κέρδος και τιμές των παραμέτρων ελέγχου για διάφορες τιμές του ρυθμού ζήτησης

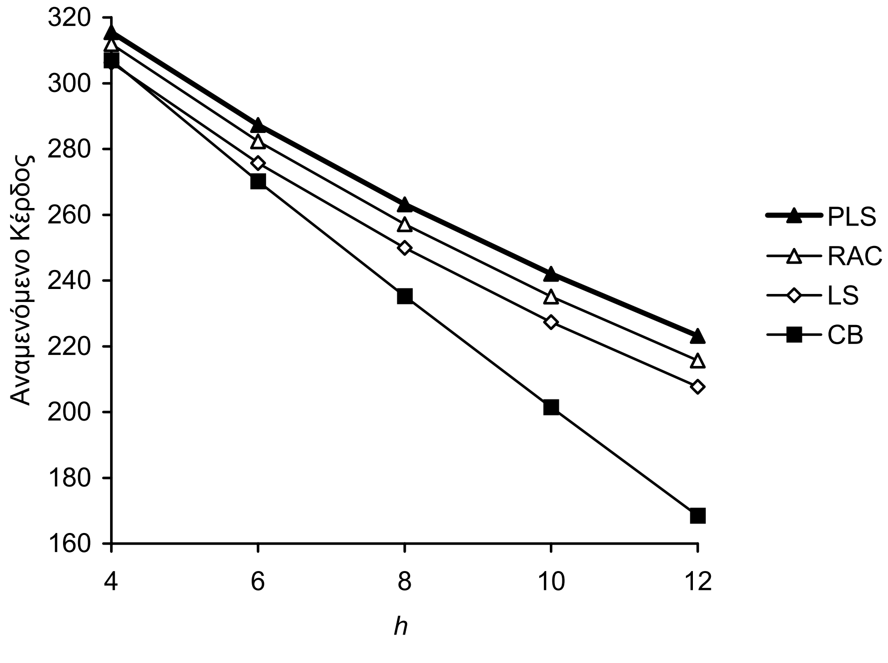
	Ζήτηση											
	$\lambda = 3$				$\lambda = 4.95$				$\lambda = 6.95$			
Πολιτική	*s*	*c*	*q*	*J*	*s*	*c*	*q*	*J*	*s*	*c*	*q*	*J*
PLS	6	9		224	12	2		282	13	1		295
RAC	6	∞	1.0	223	13	∞	0.44	278	14	∞	0.067	293
CB	6	∞	1.0	223	–	–	–	–∞	–	–	–	–∞
LS	9	0	0.0	202	14	0	0.0	275	14	0	0.0	293



Σχήμα 3.3. Αναμενόμενο κέρδος της γραμμής παραγωγής ως προς το λ



Σχήμα 3.4. Αναμενόμενο κέρδος της γραμμής παραγωγής ως προς το b



Σχήμα 3.5. Αναμενόμενο κέρδος της γραμμής παραγωγής ως προς το h

Από τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται ότι οι προτεινόμενες πολιτικές RAC και PLS επιτυγχάνουν τα υψηλότερα κέρδη. Όταν το $\lambda \rightarrow 0$ η πολιτική CB επιτυγχάνει το ίδιο αναμενόμενο κέρδος με τις RAC και PLS. Στην περίπτωση αυτή το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών είναι πολύ μικρό και ο περιορισμός του δεν οδηγεί σε σημαντική αύξηση του αναμενόμενου κέρδους. Όταν το λ είναι κοντά στο $\mu_{\min}$, το ρυθμό κατεργασίας της πιο αργής μηχανής, το αναμενόμενο κέρδος της πολιτική LS χειροτερεύει σημαντικά όσο αυξάνει το h και το αναμενόμενο κέρδος της CB χειροτερεύει όσο αυξάνει το b. Στην περίπτωση που το λ είναι πολύ μεγαλύτερο από το $\mu_{\min}$, η απόδοση των πολιτικών RAC και PLS είναι παρόμοια με την απόδοση της LS. Τότε οι αφίξεις των πελατών είναι πολύ συχνές με αποτέλεσμα το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών να είναι αυξημένο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η απώλεια κέρδους λόγω απόρριψης πελατών να είναι αμελητέα σε σχέση με το κόστος εκκρεμών παραγγελιών και συνεπώς το βέλτιστο έλλειμμα βάσης για την PLS να τείνει στο 0, όπως και η πιθανότητα αποδοχής παραγγελιών για την RAC. Αυτό φαίνεται καθαρότερα στον Πίνακα 3.2 όπου για $\lambda = 6.0 > 5.0 = \mu_{\min}$, οι PLS, LS και RAC επιτυγχάνουν σχεδόν το ίδιο αναμενόμενο κέρδος ενώ οι τιμές των c και q για τις PLS και RAC, αντίστοιχα είναι κοντά στο μηδέν. Σε γενικές γραμμές όσο αυξάνει η συνεισφορά του κόστους εκκρεμών παραγγελιών στο συνολικό κόστος, τόσο η απόδοση της LS συγκλίνει σε αυτή των PLS και RAC, ενώ όταν $b \to 0$ η πολιτική CB συμπεριφέρεται παρόμοια με τις PLS και RAC. Όσον αφορά τις προτεινόμενες πολιτικές ελέγχου, οι PLS και RAC έχουν παρόμοια απόδοση όταν $b \to 0$, $\lambda \to 0$ ή $\lambda >> \mu_{\min}$. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις η PLS υπερτερεί της RAC με κέρδος ως 5% υψηλότερο.

3.5 Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε δίκτυα παραγωγής ενός τύπου προϊόντος. Όταν δεν υπάρχουν παραγγελίες το σύστημα παράγει μέχρι το απόθεμα ετοίμων προϊόντων να γίνει ίσο με το απόθεμα βάσης. Όταν η αποθήκη ετοίμων προϊόντων είναι άδεια οι εισερχόμενες παραγγελίες είτε γίνονται δεκτές με μία συγκεκριμένη πιθανότητα (RAC) είτε γίνονται δεκτές μέχρις ότου το πλήθος των εκκρεμών παραγγελιών να φτάσει το έλλειμμα βάσης (PLS). Το ζητούμενο είναι να προσδιοριστούν οι τιμές των αντίστοιχων παραμέτρων ελέγχου που μεγιστοποιούν το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος για κάθε πολιτική.

Το σύστημα παραγωγής μοντελοποιήθηκε ως ένα κλειστό δίκτυο αναμονής. Το πρόβλημα της από κοινού εκτίμησης του αποθέματος βάσης και του ελλείμματος βάσης διαιρέθηκε σε δύο υποπροβλήματα τα οποία επιλύθηκαν με την βοήθεια ενός απλού αλγορίθμου. Παρουσιάσαμε επίσης αναλυτικές εκφράσεις για την εκτίμηση της απόδοσης της πολιτικής

RAC. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι οι προτεινόμενες πολιτικές RAC και PLS επιτυγχάνουν υψηλότερα κέρδη απ’ ότι οι διαδεδομένες πολιτικές CB και LS.

Ο συνδυασμένος έλεγχος αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών είναι δυνατό να επεκταθεί σε δίκτυα παραγωγής πολλών προϊόντων. Δίκτυα παραγωγής πολλών προϊόντων, παρόμοια με αυτά που εξετάζονται σε αυτό το κεφάλαιο, μελετούν οι Rubio and Wein [29] χρησιμοποιώντας για τον έλεγχο αποδοχής πελατών τις παραδοσιακές πολιτικές CB και LS. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε δίκτυα παραγωγής με γενικά κατανεμημένους χρόνους κατεργασιών και αφίξεων παραγγελιών καθώς και δυνατότητα κατεργασίας κατά παρτίδες.

4 Επεκτάσεις και Εφαρμογές

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές της προτεινόμενης πολιτικής ελέγχου αποδοχής παραγγελιών σε βιομηχανίες που ασκούν έλεγχο ποιότητας ή παράγουν κατά παρτίδες και έχουν ομαδική ζήτηση.

Αρχικά εξετάζουμε τα οφέλη που προκύπτουν από το συνδυασμό ελέγχου παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου. Όπως έχουμε ιδεί, ο έλεγχος παραγωγής απαντά στα ερωτήματα «πότε πρέπει να παράγεται ένα προϊόν» και «πότε πρέπει να γίνεται δεκτή μία αφικνούμενη παραγγελία». Ο ποιοτικός έλεγχος ασχολείται με την επιλογή της καταλληλότερης διαδικασίας επιθεώρησης των προϊόντων. Μια αρκετά συνηθισμένη πρακτική ποιοτικού ελέγχου είναι η πολιτική ολικής επιθεώρησης. Σε αυτή την πολιτική κάθε παραγόμενο προϊόν επιθεωρείται για κάποιο ποιοτικό χαρακτηριστικό. Το προϊόν θεωρείται μη αποδεκτό αν η τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας είναι εκτός των ορίων μιας περιοχής αποδοχής. Η περιοχή αποδοχής είναι ένα κλειστό διάστημα γύρω από την ιδανική τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας. Αν αντίθετα η τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας ενός προϊόντος είναι εντός των ορίων της περιοχής αποδοχής, αυτό κατατάσσεται ως αποδεκτό. Μια λεπτομερή βιβλιογραφική επισκόπηση των σχεδίων ολικής επιθεώρησης παρουσιάζεται από τους Tang and Tang [38]. Οι Kouikoglou and Phillis [22] ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της συνεργασίας των τμημάτων ελέγχου παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου σε συστήματα παραγωγής με μία μηχανή που παράγουν ένα προϊόν. Εδώ εξετάζεται το ίδιο πρόβλημα για τα δίκτυα παραγωγής που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Στη συνέχεια προσπαθούμε να διερευνήσουμε τις ιδιότητες δεύτερης τάξης σε δίκτυα παραγωγής με χρόνους κατεργασιών και αφίξεων πελατών που ακολουθούν κατανομές τύπου φάσεων. Επίσης είναι δυνατό οι αφίξεις παραγγελιών και η παραγωγή να υλοποιούνται κατά παρτίδες. Ένα από τα πλεονεκτήματα των κατανομών τύπου φάσεων είναι ότι μπορούν να προσεγγίσουν με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια οποιαδήποτε κατανομή (Altiok [2]). Τα συστήματα αυτού του τύπου μπορούν να περιγραφούν από μία αλυσίδα Markov και ως εκ τούτου οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης μπορούν να εκτιμηθούν με τη χρήση διαφόρων αριθμητικών τεχνικών.

Το Κεφάλαιο 4 είναι οργανωμένο ως εξής. Στην Παράγραφο 4.2 εξετάζεται το πρόβλημα της συνεργασίας των τμημάτων παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου σε δίκτυα παραγωγής. Πρώτα περιγράφεται μαθηματικά το πρόβλημα με τη βοήθεια του ισοδύναμου κλειστού δικτύου αναμονής και αναπτύσσεται ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα από τη σύγκριση διαφόρων στρατηγικών συνεργασίας των τμημάτων παραγωγής, πωλήσεων και ποιοτικού ελέγχου. Στην Παράγραφο 4.3 περιγράφεται μαθηματικά άλλο πρόβλημα συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και παραγγελιών για δίκτυα παραγωγής με χρόνους αφίξεων πελατών και κατεργασιών που ακολουθούν κατανομές τύπου φάσεων και δυνατότητα παραγωγής κατά παρτίδες. Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους είναι κοίλη ως προς το απόθεμα βάσης αν η χωρητικότητα του συστήματος είναι σταθερή. Τέλος στην Παράγραφο 4.4 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και ανοικτά προβλήματα που χρήζουν περαιτέρω έρευνας.

4.2 Συνεργαζόμενες στρατηγικές παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου σε δίκτυα παραγωγής

4.2.1 Περιγραφή του συστήματος

Εξετάζεται ένα δίκτυο παραγωγής, που παράγει ένα τύπο προϊόντος με ποιοτικές προδιαγραφές. Κάθε έτοιμο προϊόν επιθεωρείται και ταξινομείται ως ποιοτικά αποδεκτό ή μη αποδεκτό ανάλογα με την τιμή Y ενός χαρακτηριστικού ποιότητας. Αν η τιμή του Y βρίσκεται εντός των ορίων μιας περιοχής αποδοχής $[t-\delta, t+\delta]$ γύρω από μία ιδανική τιμή t του χαρακτηριστικού ποιότητας, τότε η μονάδα προϊόντος γίνεται αποδεκτή διαφορετικά απορρίπτεται ή προωθείται προς επανακατεργασία.

Το μέτρο απόδοσης είναι και πάλι το αναμενόμενο κέρδος. Το μέγεθος αυτό εξαρτάται από τα κέρδη των πωλήσεων και από τα κόστη αποθεμάτων, μη ικανοποιημένης ζήτησης (εκκρεμείς παραγγελίες) και ποιότητας. Διακρίνονται έξι διαφορετικές οικονομικές παράμετροι:

- p το κέρδος από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος (τιμή πώλησης μείον κόστος πρώτων υλών και επεξεργασίας),
- h το μοναδιαίο κόστος αποθέματος, που είναι το κόστος διατήρησης αποθέματος μίας

μονάδας τελικού ή ενδιαμέσου προϊόντος για μία χρονική μονάδα,

b το μοναδιαίο κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης, που είναι το κόστος καθυστέρησης της ικανοποίησης μίας εκκρεμούσας παραγγελίας στη μονάδα του χρόνου,

i_C κόστος επιθεώρησης ανά μονάδα προϊόντος

r_C κόστος απόρριψης/επανακατεργασίας ανά μονάδα μη αποδεκτού προϊόντος,

k παράμετρος απόκλισης ποιότητας.

Η παράμετρος απόκλισης ποιότητας σχετίζεται με το κόστος λόγω της απόκλισης της τιμής Y του χαρακτηριστικού ποιότητας, από την ιδανική του τιμή t. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση αυτή για κάποιο προϊόν που έχει πωληθεί, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα αστοχίας του, οπότε η επιχείρηση επιβαρύνεται άμεσα με το κόστος επιστροφής και αντικατάστασής του και έμμεσα με την δυσφήμιση και την πιθανή απώλεια καταναλωτικής πίστης. Μια συνάρτηση που συνήθως χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του κόστους απόκλισης ποιότητας είναι η τετραγωνική συνάρτηση $k(Y-t)^2$, που έχει προταθεί από τον Taguchi (βλ., π.χ., Taguchi et al. [36]).

Έστω q η πιθανότητα παραγωγής ενός αποδεκτού προϊόντος, δηλαδή $q = P(t-\delta \le Y \le t+\delta)$. Τότε το μέσο κόστος ποιότητας ανά εξερχόμενη μονάδα προϊόντος δίδεται από

$$Q = i_C + r_C\,(1-q) + k\,E\{(Y-t)^2\,|Y\in[t-\delta, t+\delta]\}$$

όπου $E[.|\,.]$ είναι ο τελεστής μέσης τιμής υπό συνθήκη.

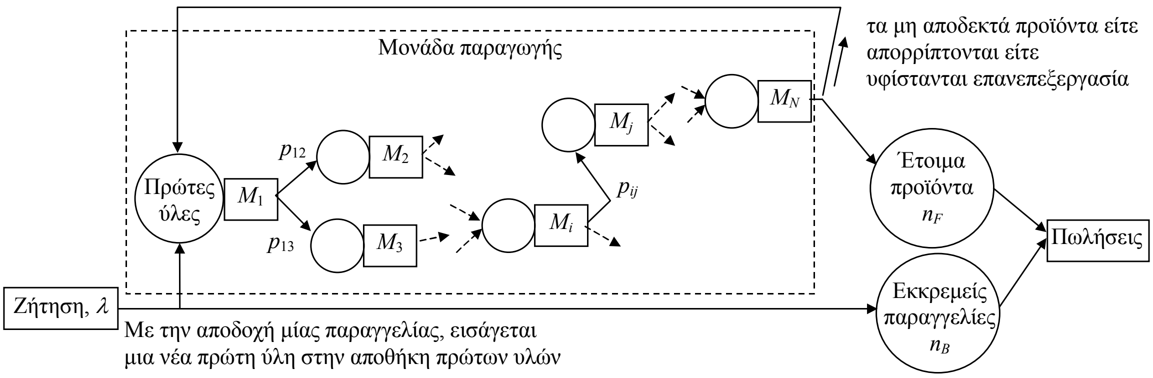
Η απόδοση του συστήματος εξαρτάται από τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH, το μέσο συνολικό απόθεμα H, το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών B, και το Q. Αν TH είναι ο μέσος ρυθμός παραγωγής ποιοτικά αποδεκτών προϊόντων, ο συνολικός ρυθμός εξερχόμενων προϊόντων (αποδεκτών και μη) είναι TH/q και το μέσο κόστος ποιότητας είναι Q TH/q. Τελικά, το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος δίδεται από

$$J = p\mathrm{TH} - hH - bB - Q\,\mathrm{TH}/q$$

Το πρόβλημα εδώ είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους με ταυτόχρονο έλεγχο ποιότητας, αποθεμάτων και πωλήσεων.

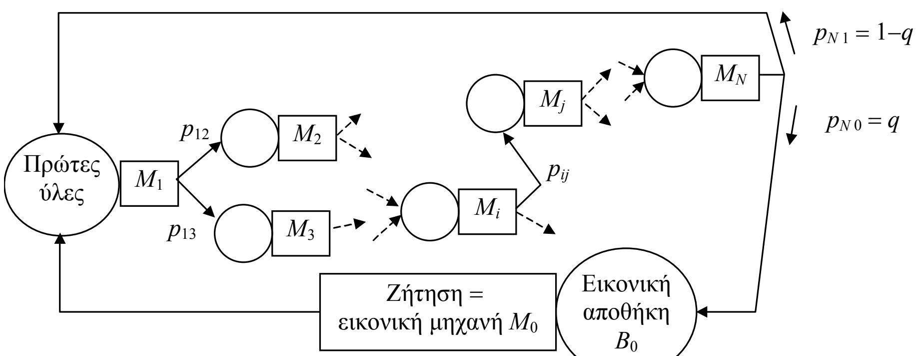
Αν εξαιρέσει κανείς τον ποιοτικό έλεγχο, το σύστημα είναι ίδιο με εκείνο του προηγούμενου κεφαλαίου και παρουσιάζεται στο Σχ. 4.1. Έχουμε μία μονάδα παραγωγής, μία αποθήκη ετοίμων προϊόντων και μία εικονική αποθήκη, όπου καταχωρούνται οι εκκρεμείς παραγγελίες. Όπως πριν, υποθέτουμε ότι η μονάδα παραγωγής είναι ένα αναμονητικό δίκτυο τύπου

Jackson με N κόμβους $i = 1, \ldots, N$. Επίσης οι ενδοαφιξιακοί χρόνοι και οι χρόνοι κατεργασίας κάθε μηχανής M_i είναι εκθετικά κατανεμημένοι και κάθε πελάτης παραγγέλλει μία μονάδα προϊόντος. Η μηχανή M_1 εκτελεί την πρώτη κατεργασία και η μηχανή M_N παράγει τα έτοιμα προϊόντα. Η διαφορά με τα συστήματα του Κεφαλαίου 3 είναι ότι κάθε έτοιμο προϊόν μπορεί να είναι ποιοτικά αποδεκτό (με πιθανότητα q) ή μη αποδεκτό. Τα αποδεκτά προϊόντα αποστέλλονται στην αποθήκη ετοίμων. Τα μη αποδεκτά προϊόντα είτε απορρίπτονται είτε επανακατεργάζονται. Κάθε μία από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις είναι ισοδύναμη με τη μεταφορά ενός προϊόντος από την M_N στην αποθήκη πρώτων υλών M_1, γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα $p_{N1} = 1-q$.



Σχήμα 4.1 Σύστημα παραγωγής

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο έλεγχος των αποθεμάτων και των παραγγελιών διεξάγεται με τον ίδιο τρόπο που περιγράφεται στην Παράγραφο 3.2.



Σχήμα 4.2. Ισοδύναμο κλειστό δίκτυο αναμονής

Για την ανάλυση του συστήματος, χρησιμοποιείται το ισοδύναμο κλειστό δίκτυο αναμονής του Σχ. 4.2. Το δίκτυο αυτό έχει σταθερό συνολικό πλήθος προϊόντων $m = s + c$ και δεν έχει καμία ουσιαστική διαφορά από το ΚΔ που περιγράφεται στην Παράγραφο 3.2. Δηλαδή τα δύο ΚΔ λειτουργούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και συνεπώς προκύπτουν οι ίδιες μαθηματικές εκφράσεις για τα διάφορα μέτρα απόδοσης του συστήματος, όπως ο μέσος ρυθμός παραγωγής TH, το μέσο συνολικό απόθεμα H και το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών B. Έχοντας αναλυτικές εκφράσεις για τις διάφορες παραμέτρους κέρδους ή κόστους μπορούμε να προχωρήσουμε στη μεγιστοποίηση της συνάρτησης αναμενόμενου κέρδους του συστήματος

$$J(\delta, m, s) = p\mathrm{TH} - hH - bB - Q\,\mathrm{TH}/q$$

Το πρόβλημα τώρα είναι τρισδιάστατο αφού εκτός από το απόθεμα βάσης s και το έλλειμμα βάσης c πρέπει να προσδιοριστεί και η μέγιστη επιτρεπόμενη απόκλιση δ της τιμής Y του χαρακτηριστικού ποιότητας, από την ιδανική του τιμή t. Για δ σταθερό έχουμε

$$J(\delta, m, s) = J_{\mathrm{PR}}(m, s) - Q\,\mathrm{TH}/q$$

όπου $J_{\mathrm{PR}}(m, s) = p\mathrm{TH} - hH - bB$, δηλαδή είναι το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος παραγωγής για συγκεκριμένες προδιαγραφές ποιότητας χωρίς όμως να περιλαμβάνεται το κόστος ποιότητας. Εφόσον το υπό μελέτη σύστημα περιγράφεται μαθηματικά όπως το σύστημα της Παραγράφου 3.2 ισχύουν και εδώ τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης παραγράφου. Αυτό σημαίνει ότι για m σταθερό η $J_{\mathrm{PR}}(m, s)$ είναι κοίλη ως προς s και επίσης ισχύει ότι $s_m \le s_{m+1} \le s_m+1$, όπου s_m είναι η βέλτιστη τιμή του αποθέματος βάσης αν m και δ σταθερά. Ακόμη αν m είναι το πρώτο σημείο για το οποίο ισχύει ότι $J_{\mathrm{PR}}(s_m, m) \ge J_{\mathrm{PR}}(s_{m+1}, m + 1)$ και ικανοποιείται η συνθήκη (3.14), τότε $J_{\mathrm{PR}}(s_{k+1}, k + 1) \ge J_{\mathrm{PR}}(s_{k+2}, k + 2)$ για κάθε $k \ge m$. Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν και για την συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους του συστήματος $J(\delta, m, s)$, όταν το δ είναι σταθερό. Αυτό συμβαίνει επειδή ο μέσος ρυθμός παραγωγής TH είναι ανεξάρτητος του s, ενώ είναι επίσης αύξουσα και κοίλη συνάρτηση ως προς m, κατά συνέπεια το μέσο κόστος ποιότητας $Q\,\mathrm{TH}/q$ είναι κι αυτό αύξουσα και κοίλη συνάρτηση ως προς m.

Οι παραπάνω ιδιότητες βοηθούν στην εξοικονόμηση υπολογιστικού φόρτου κατά την αναζήτηση του μεγίστου της $J(\delta, m, s)$. Οι τιμές των παραμέτρων της βέλτιστης πολιτικής μπορούν να προσεγγιστούν με τη χρήση του παρακάτω αλγορίθμου:

Βήμα 1. Καθόρισε το μέγεθος του βήματος δ_1 και ένα άνω όριο αναζήτησης $\bar{\delta}$ για το δ. Θέσε $m^* = m = 0$, $s^* = s_m = 0$, $\delta^* = \delta = 0$ και $J^* = J(\delta, s_m, m) = 0$.

Βήμα 2. Θέσε $\delta = \delta + \delta_1$ και υπολόγισε την πιθανότητα αποδοχής $q = P(t-\delta \leq Y \leq t+\delta)$.

Βήμα 3. Θέσε $m = m + 1$.

Βήμα 4. Υπολόγισε τις τιμές των $J(\delta, s_{m-1}, m)$ και $J(\delta, s_{m-1} + 1, m)$. Αν $J(\delta, s_{m-1}, m) \geq J(\delta, s_{m-1} + 1, m)$, τότε θέσε $s_m = s_{m-1}$, αλλιώς θέσε $s_m = s_{m-1} + 1$.

Βήμα 5. Αν $J(\delta, s_m, m) > J^*$, ενημέρωσε το μέχρι στιγμής βέλτιστο σχέδιο. Δηλαδή θέσε $J^* = J(\delta, s_m, m)$, $m^* = m$, $s^* = s_m$, $c^* = m - s^*$, $\delta^* = \delta$. Διαφορετικά αν ισχύει η συνθήκη (3.14) και $\delta = \bar{\delta}$ σταμάτησε, αλλιώς αν $\delta < \bar{\delta}$ και ισχύει η συνθήκη (3.14) πήγαινε στο Βήμα 2, ενώ αν δεν ικανοποιείται η συνθήκη (3.14) πήγαινε στο Βήμα 3.

Από τη στιγμή που δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση $J(\delta, s_m, m)$ είναι σχεδόν κοίλη, δεν υπάρχει εγγύηση ότι ο παραπάνω αλγόριθμος υπολογίζει τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων. Στα αριθμητικά πειράματα που πραγματοποιήθηκαν παρατηρήσαμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους ήταν σχεδόν κοίλη. Η θεωρητική απόδειξη αυτής της ιδιότητας θα επιτρέψει την ανάπτυξη ακόμη οικονομικότερων υπολογιστικά αλγορίθμων για τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης.

4.2.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτή την παράγραφο συγκρίνουμε τις αποδόσεις που επιτυγχάνονται από την πλήρη συνεργασία μεταξύ των τμημάτων παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου, με τις αποδόσεις δύο άλλων στρατηγικών, στις οποίες έχουμε μερική ή καθόλου συνεργασία μεταξύ των δύο τμημάτων. Οι τρεις στρατηγικές που εξετάζονται είναι οι ακόλουθες:

- FC (Full coordination - πλήρης συνεργασία): Σε αυτή τη στρατηγική αναζητούνται οι τιμές των δ, m, και s που μεγιστοποιούν το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος.
- PC (Partial coordination - μερική συνεργασία): Εδώ το τμήμα ποιοτικού ελέγχου αποφασίζει την τιμή του δ που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος ποιότητας ανά εξερχόμενη μονάδα προϊόντος Q. Η τιμή αυτή υπολογίζεται από τον τύπο (Tang and Tang [37])

$$\delta = \sqrt{\frac{r_C}{k}} \tag{4.1}$$

Ακολούθως, το τμήμα παραγωγής χρησιμοποιεί αυτή την τιμή του δ, υπολογίζει την πιθανότητα αποδοχής q και το επαγόμενο ρυθμό παραγωγής αποδεκτών προϊόντων της τελευταίας του μηχανής, $q\mu_N$. Στη συνέχεια επιλέγει τα m και s έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η συνάρτηση $J_{\mathrm{PR}}(m, s)$, που είναι το αναμενόμενο κέρδος *χωρίς το κόστος ποιότητας*.

- NC (No coordination - καθόλου συνεργασία): Το τμήμα ελέγχου ποιότητας εκτιμά την τιμή του δ με βάση την Εξ. (4.1) αλλά το τμήμα παραγωγής αγνοεί αυτή την πληροφορία και, υποθέτοντας ότι $\delta = \infty$ ή ισοδύναμα ότι $q = 1$, υπολογίζει τις τιμές των m και s, που μεγιστοποιούν το αναμενόμενο κέρδος $J_{\mathrm{PR}}(m, s)$ χωρίς το κόστος ποιότητας.

Για κάθε μία από τις παραπάνω στρατηγικές εφαρμόσαμε τις πολιτικές PLS, CB και LS, οι οποίες παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

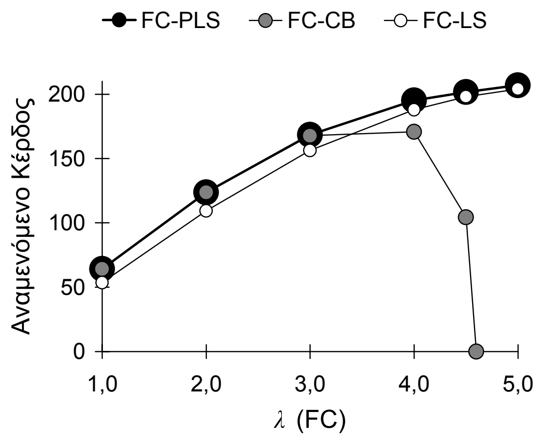
Η σύγκριση έγινε για μία γραμμή παραγωγής με έξι μηχανές M_i, $i = 1,\ldots, 6$. Οι τιμές των παραμέτρων του συστήματος επιλέγονται ως εξής: $\lambda = 4.0$, $\mu_1 = 6.0$, $\mu_2 = 7.0$, $\mu_3 = 5.0$, $\mu_4 = 5.5$ $\mu_5 = 6.5$, $\mu_6 = 5.0$, $t = 9.2$, $p = 100.0$, $h = 5.0$, $b = 6.0$, $k = 25.0$, $r_C = 20.0$, $i_C = 1.0$, και η τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας Y είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή $\bar{y} = 10.0$ και διασπορά $\sigma^2 = 0.5$.

Για κανονικά κατανεμημένο Y και περιοχή αποδοχής $[t-\delta, t+\delta]$, το μέσο κόστος απόκλισης ποιότητας ανά μονάδα αποδεκτού προϊόντος δίδεται από την εξίσωση (Kouikoglou and Phillis [22])

$$k\,E\,\{(Y-t)^2\,|\,Y\in[t-\delta, t+\delta]\} = kq[(\bar{y}-t)^2 + \sigma^2]$$
$$-\frac{k\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[(\bar{y}-t+\delta)\,e^{-\frac{(\bar{y}-t-\delta)^2}{2\sigma^2}} - (\bar{y}-t-\delta)\,e^{-\frac{(\bar{y}-t+\delta)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

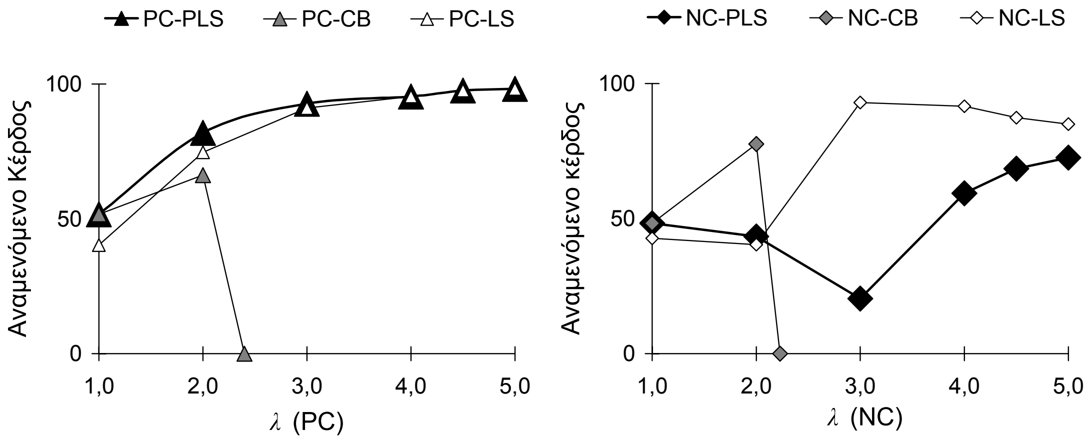
Μελετάμε τρεις περιπτώσεις όπου εξετάζουμε την επίδραση της μεταβολής μίας εκ των παραμέτρων λ, h και σ^2 κάθε φορά. Σε κάθε περίπτωση εξετάζονται όλοι οι συνδυασμοί των πολιτικών αποδοχής εκκρεμών παραγγελιών (PLS, CB και LS) με τις στρατηγικές συνεργασίας των τμημάτων παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου (FC, PC και NC).

Το Σχ. 4.3 παρουσιάζει την απόδοση των πολιτικών αποδοχής εκκρεμών παραγγελιών PLS, CB και LS για διάφορες τιμές της ζήτησης, όταν χρησιμοποιείται η στρατηγική πλήρους συνεργασίας (FC) για τον προσδιορισμό του αποθέματος βάσης, του ελλείμματος βάσης και της μέγιστης επιτρεπόμενης απόκλισης του χαρακτηριστικού ποιότητας. Όταν η ζήτηση είναι χαμηλή οι PLS και CB έχουν παρόμοια απόδοση και το κέρδος που επιτυγχάνουν είναι κατά 20% πάνω από το κέρδος της LS. Όσο η ζήτηση αυξάνει η μονάδα παραγωγής τείνει να προσεγγίσει τη μέγιστη παραγωγικότητά της (οι μηχανές 3 και 6, που είναι οι πιο αργές μηχανές του συστήματος έχοντας ρυθμό κατεργασίας 5 προϊόντα στη μονάδα του χρόνου, καθορίζουν την παραγωγικότητα του συστήματος). Στην περίπτωση αυτή η απόδοση της πολιτικής CB χειροτερεύει σημαντικά επειδή το πλήθος των εκκρεμών παραγγελιών αυξάνει ανεξέλεγκτα. Τέλος όταν η ζήτηση υπερβαίνει τη δυναμικότητα της μονάδας παραγωγής οι PLS και LS έχουν παρόμοια απόδοση. Σε όλες τις περιπτώσεις η προτεινόμενη πολιτική PLS υπερέχει έναντι των άλλων πολιτικών.



Σχήμα 4.3. Αναμενόμενο κέρδος της FC ως προς το λ.

Στο Σχ. 4.4 παρουσιάζεται η απόδοση των δύο άλλων στρατηγικών συνεργασίας PC και NC. Όταν η ζήτηση είναι μικρή οι δύο αυτές στρατηγικές επιτυγχάνουν το ίδιο αναμενόμενο κέρδος με την FC. Όσο όμως αυξάνει η ζήτηση η απόδοση τους χειροτερεύει και φθάνει μέχρι και στο 50% του κέρδους της FC.

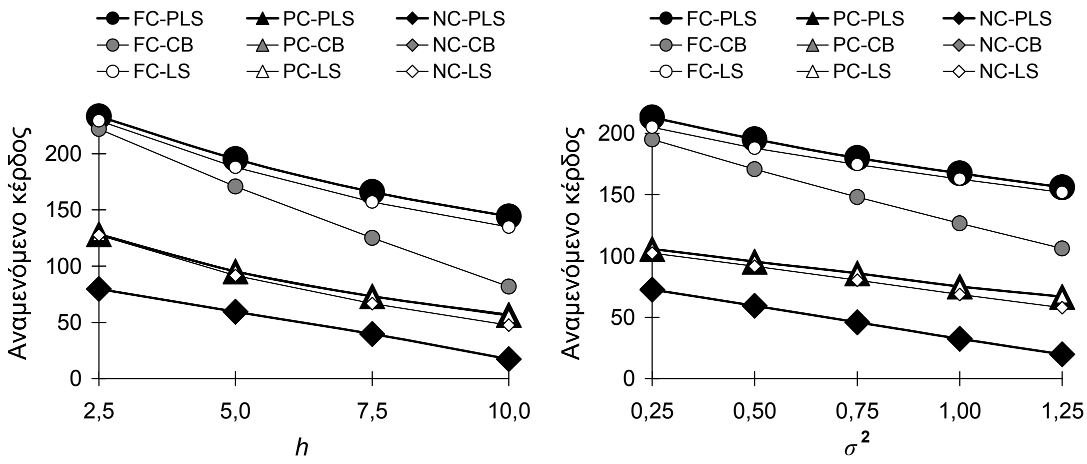


(α) (β)

Σχήμα 4.4. Αναμενόμενο κέρδος των στρατηγικών PC και NC ως προς το λ.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι χωρίς συνεργασία μεταξύ των τμημάτων παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου (Σχ. 4.4β), η CB αποδίδει καλύτερα από την PLS, για μικρές τιμές του λ, και η πολιτική LS υπερέχει της PLS, όταν το λ είναι μεγάλο. Στην περίπτωση αυτή το τμήμα ποιοτικού ελέγχου επιλέγει την καλύτερη περιοχή αποδοχής $[t-\delta, t+\delta]$ και το τμήμα παραγωγής ακολουθεί την PLS, που είναι η καλύτερη πολιτική ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών. Η εφαρμογή αυτών των πολιτικών ανεξάρτητα και χωρίς συντονισμό αποδίδει χειρότερα από την εφαρμογή της LS ή CB, παρά το ότι γενικά αυτές οι πολιτικές έχουν αποδειχθεί κατώτερες από την PLS. Από τα αποτελέσματα του Σχ. 4.4β καταλήγουμε στην ακόλουθη διαπίστωση:

Εάν δεν υπάρχει συντονισμός μεταξύ των τμημάτων ελέγχου ποιότητας, παραγωγής και πωλήσεων, τότε είναι επιζήμιο να εφαρμόζονται τοπικά ή μυωπικά βέλτιστες πολιτικές επειδή δρουν ανταγωνιστικά.



Σχήμα 4.5. Αναμενόμενο κέρδος του συστήματος ως προς τα h και σ^2.

Στο Σχ. 4.5 φαίνεται ότι ο συνδυασμός της προτεινόμενης στρατηγικής συνεργασίας FC με την προτεινόμενη πολιτική ελέγχου αποδοχής παραγγελιών PLS επιτυγχάνει υψηλότερα κέρδη από τους συνδυασμούς άλλων πολιτικών, για διάφορες τιμές του μοναδιαίου κόστους αποθέματος h και της διασποράς σ^2 της Y.

Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου για τις τρεις στρατηγικές συνεργασίας όταν εφαρμόζεται η πολιτική PLS, για διάφορες τιμές της παραμέτρου απόκλισης ποιότητας k. Όταν η τιμή της k είναι μικρή, η απόδοση και οι τιμές των παραμέτρων ελέγχου της στρατηγικής FC είναι πολύ κοντά σε αυτές των άλλων στρατηγικών. Όσο όμως αυξάνει η k, οι αποδόσεις των στρατηγικών PC και NC αποκλίνουν από αυτή της FC και τείνουν να μετατρέψουν το σύστημα σε μη κερδοφόρο.

Πίνακας 4.1. Τιμές παραμέτρων ελέγχου και αναμενόμενο κέρδος των τριών στρατηγικών συνεργασίας για διάφορες τιμές του k

	παράμετρος απόκλισης ποιότητας											
	$k = 5$				$k = 25$				$k = 50$			
	δ	s	c	J	δ	s	c	J	δ	s	c	J
FC	4.00	13	6	275	2.00	13	5	195	1.50	14	3	127
PC	2.00	13	5	265	0.89	13	13	95	0.63	10	0	33
NC	2.00	13	6	264	0.89	13	6	59	0.63	13	6	–22

Από τα παραπάνω αποτελέσματα βλέπουμε ότι η συνεργασία των τμημάτων παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου συμβάλλει στη βελτίωση της κερδοφορίας ειδικά όταν η ζήτηση λ

είναι υψηλή ή όταν οι τιμές των παραμέτρων h, b, σ^2 και k είναι μεγάλες. Ακόμη είναι φανερό ότι η προτεινόμενη πολιτική PLS υπερέχει των CB και LS στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων.

4.3 Δίκτυα παραγωγής με γενικές κατανομές χρόνων αφίξεων και κατεργασιών και παραγωγή κατά παρτίδες

4.3.1 Θεωρητική ανάλυση του συστήματος

Εξετάζουμε τώρα ένα σύστημα παρόμοιο με εκείνο του Κεφαλαίου 3. Αποτελείται από μία μονάδα παραγωγής, μία αποθήκη ετοίμων προϊόντων και μία εικονική αποθήκη, όπου καταχωρούνται οι εκκρεμείς παραγγελίες. Όπως και στο σύστημα παραγωγής του προηγούμενου κεφαλαίου, υποθέτουμε ότι η μονάδα παραγωγής είναι ένα αναμονητικό δίκτυο με N κόμβους $i = 1, \ldots, N$, αλλά με τις ακόλουθες τρεις γενικεύσεις:

(α) Οι ενδοαφιξιακοί χρόνοι και οι χρόνοι κατεργασιών των μηχανών ακολουθούν *γενικές κατανομές που περιγράφονται από αλυσίδες Markov* (όπως οι κατανομές τύπου φάσεων που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 2.1). Οι κατανομές αυτές επιτρέπουν την περιγραφή μηχανών που υπόκεινται σε βλάβες.

(β) Είναι δυνατόν να έχουμε *παραγωγή κατά παρτίδες* σε κάθε μηχανή. Δηλαδή, με την ολοκλήρωση ενός κύκλου παραγωγής μπορεί να παράγονται περισσότερα από ένα κομμάτια ή τελικά προϊόντα.

(γ) Κάθε πελάτης μπορεί να παραγγείλει *περισσότερες από μία μονάδες προϊόντος* ή να έχουμε *ομαδικές αφίξεις πελατών*.

Τα προϊόντα με την ολοκλήρωση της κατεργασίας τους σε μία μηχανή i μεταφέρονται σε μία μηχανή j με πιθανότητα p_{ij}. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για τον έλεγχο των αποθεμάτων και των παραγγελιών εφαρμόζονται οι πολιτικές βασικού αποθέματος και βασικού ελλείμματος που έχουμε περιγράψει στην Παράγραφο 3.2.

Θα αποδείξουμε ότι, για καθορισμένο επίπεδο πωλήσεων TH, το πρόβλημα του ελέγχου παραγωγής ισοδυναμεί με ένα πρόβλημα κυρτού μαθηματικού προγραμματισμού.

Το σύστημα παραγωγής μετασχηματίζεται κατά τα γνωστά σε ένα ισοδύναμο κλειστό δίκτυο αναμονής. Το δίκτυο αυτό έχει σταθερό συνολικό πληθυσμό (προϊόντα + κομμάτια προς κατεργασία) ίσο με $m = s + c$ και η λειτουργία του είναι παρόμοια με εκείνη του αρχικού συστήματος παραγωγής. Το ισοδύναμο κλειστό δίκτυο αποτελείται από τους κόμβους $i = 1, \ldots, N$ που αντιστοιχούν στις μηχανές της μονάδας παραγωγής και τον κόμβο 0 που αντιστοιχεί στη ζήτηση. Το συνολικό απόθεμα n_H, το απόθεμα ετοίμων προϊόντων n_F και το πλήθος εκκρεμών παραγγελιών n_B του αρχικού συστήματος παραγωγής προκύπτουν από τη μεταβλητή κατάστασης n_0 του εικονικού κόμβου 0 στο ισοδύναμο κλειστό δίκτυο αναμονής σύμφωνα με τις αντιστοιχίες που περιγράφονται στον Πίνακα 3.1 του Κεφαλαίου 3.

Στο ισοδύναμο δίκτυο, η κατάσταση κάθε κόμβου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή περιγράφεται από το πλήθος n_i των κομματιών που υπάρχουν στον κόμβο και από την κατάσταση a_i της αλυσίδας Markov, που περιγράφει το τρέχον στάδιο ή φάση κατεργασίας στον κόμβο i. Για παράδειγμα, αν στον κόμβο i υπάρχουν πέντε μηχανές από τις οποίες κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή λειτουργούν οι a_i, τότε $a_i = 0, 1, \ldots, 5$. Επίσης, έστω ότι στον κόμβο i υπάρχει μία μηχανή και η κατεργασία ολοκληρώνεται σε 7 στάδια τότε $a_i = 1, 2, \ldots, 7$. Οι μεταβάσεις από μία κατάσταση a_i του κόμβου i σε μία κατάσταση a_i' ακολουθούν την ιδιότητα Markov:

$$P(\text{κατάσταση τη στιγμή } t + \delta = a_i' \mid \text{κατάσταση τη στιγμή } t = a_i) = \lambda_i(a_i, a_i')\delta + o(\delta)$$

για γνωστούς ρυθμούς μετάβασης $\lambda_i(a_i, a_i')$, οι οποίοι μπορεί να εξαρτώνται και από το τρέχον απόθεμα n_i του κόμβου i. Με αυτήν την γενίκευση, συμβολίζουμε $\lambda_i(n_i, a_i, n_i', a_i')$ το ρυθμό μετάβασης από την κατάσταση (n_i, a_i) στην κατάσταση (n_i', a_i') για κάποιον κόμβο i. Για παράδειγμα, αν $n_i = 5$ και $n_i' = 2$, τότε η μετάβαση συμβολίζει την παραγωγή μίας παρτίδας τριών κομματιών που φεύγουν από τον κόμβο i και ταυτόχρονη μεταβολή, εφ' όσον αυτό επιβάλλεται, της λειτουργικής κατάστασης του κόμβου i από a_i σε a_i'. Ο συνολικός ρυθμός εξόδου από την κατάσταση (n_i, a_i) δίδεται από τη σχέση

$$\lambda_i(n_i, a_i) = \sum_{(n_i', a_i') \neq (n_i, a_i)} \lambda_i(n_i, a_i, n_i', a_i')$$

Λόγω της ιδιότητας Markov, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος ικανοποιούν ένα σύστημα εξισώσεων ροής πιθανότητας Chapman-Kolmogorov (βλ., πχ., Buzacott and Shanthikumar [7]) που έχουν τη μορφή ισοζυγίου μάζας πιθανοτήτων:

$$[\text{ρυθμός μεταβολής της πιθανότητας } P(A)]$$

$$= - [\text{ρυθμός μείωσης της } P(A)] + [\text{ρυθμός αύξησης της } P(A)]$$

για κάθε επιτρεπτή κατάσταση $A = (n_0, a_0, \ldots, n_N, a_N)$ του συστήματος, ήτοι $n_i \geq 0$ και $n_0 + \ldots + n_N = m$. Για το συγκεκριμένο δίκτυο, το πλήθος των καταστάσεων είναι πεπερασμένο αφού $m < \infty$, οπότε υπάρχει μόνιμη κατάσταση. Στη μόνιμη κατάσταση ο ρυθμός μεταβολής της πιθανότητας $P(A)$ είναι 0 για κάθε επιτρεπτή κατάσταση A. Τότε οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov γίνονται αλγεβρικές και διαμορφώνονται ως εξής

$$P(n_0, a_0, \ldots, n_i, a_i, \ldots, n_N, a_N) \sum_{i=0}^{N} \left[\sum_{\forall (n_i, a_i)} \lambda_i(n_i, a_i) \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \left[\sum_{\forall a_i' \neq a_i} P(n_0, a_0, \ldots, n_i, a_i', \ldots, n_N, a_N) \lambda_i(n_i, a_i', n_i, a_i) \right]$$

$$+ \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \left[\sum_{\forall (n_i' > n_i, a_i')} P(n_0, a_0, \ldots, n_i', a_i', \ldots, n_j + n_i - n_i', a_j, \ldots, n_N, a_N) \lambda_i(n_i', a_i', n_i, a_i) p_{ij} \right]$$

για κάθε επιτρεπτή κατάσταση $(n_0, a_0, \ldots, n_N, a_N)$. Το αριστερό μέλος της ισότητας είναι ο ρυθμός μείωσης της πιθανότητας ώστε το σύστημα να ευρίσκεται στην κατάσταση $(n_0, a_0, \ldots, n_N, a_N)$. Στο δεξί μέλος, το πρώτο άθροισμα είναι ο ρυθμός μετάβασης στην κατάσταση $(n_0, a_0, \ldots, n_N, a_N)$ από άλλες καταστάσεις ως αποτέλεσμα γεγονότων που δεν συνδέονται με άφιξη πελάτη ή παραγωγή παρτίδας από κάποια μηχανή αλλά σχετίζονται με μεταβολές των a_i (πχ. βλάβη, επισκευή μηχανής i), για κάθε κόμβο i. Το δεύτερο άθροισμα είναι ο ρυθμός μετάβασης στην κατάσταση $(n_0, a_0, \ldots, n_N, a_N)$ από άλλες καταστάσεις. Τέτοιες μεταβάσεις συμβαίνουν είτε με την άφιξη πελάτη (για $i = 0$) είτε με την ολοκλήρωση ενός κύκλου παραγωγής από κάποια μηχανή (για $i > 0$). Στις περιπτώσεις αυτές η στάθμη του κόμβου i μειώνεται από n_i' σε n_i και τα $n_i' - n_i$ κομμάτια μεταφέρονται από τον κόμβο i στον j με πιθανότητα p_{ij}.

Τώρα συμβολίζουμε $\boldsymbol{P}_{n_0}$ το διάνυσμα στήλης που περιέχει τις πιθανότητες όλων των καταστάσεων στις οποίες ο κόμβος 0 έχει στάθμη n_0. Τότε οι εξισώσεις ροής πιθανότητας μπορούν να συμπτυχθούν ως εξής:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{n_0} \boldsymbol{P}_{n_0} = \sum_{n_0' \neq n_0} \boldsymbol{\Lambda}_{n_0', n_0} \boldsymbol{P}_{n_0'} \text{ , για } n_0 = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{4.2}$$

όπου $\boldsymbol{\Lambda}_{n_0}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας με τους ρυθμούς μεταβάσεων έξω από κάθε κατάσταση για την οποία η στάθμη του κόμβου 0 είναι n_0 και $\boldsymbol{\Lambda}_{n_0', n_0}$ είναι οι πίνακες μεταβάσεων από όλες τις καταστάσεις με στάθμη n_0' προς καταστάσεις για τις οποίες η στάθμη του κόμβου 0 είναι n_0. Από την επίλυση των Εξ. (4.2) προκύπτουν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος και από αυτές μπορούμε να εκτιμήσουμε τα διάφορα μέτρα απόδοσης του συστήματος όπως το TH, H και B. Για την επίλυση του συστήματος Εξ. (4.2) χρησιμοποιούνται διάφορες αριθμητικές τεχνικές (π.χ. βλ. Neuts [28], Yeralan and Muth [44]).

Το μέτρο απόδοσης του συστήματος είναι το αναμενόμενο κέρδος J ανά μονάδα χρόνου όπως το ορίσαμε στην Παράγραφο 3.2, ήτοι $J = p\mathrm{TH} - hH - bB$. Ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος TH ισούται με το μέσο αριθμό παραγγελιών που γίνονται δεκτές ανά μονάδα χρόνου. Η ποσότητα αυτή ισούται με τον μέσο ρυθμό παραγωγής του κόμβου 0, για το ισοδύναμο κλειστό δίκτυο αναμονής, και υπολογίζεται ως εξής

$$\mathrm{TH} = \sum_{n_0=1}^{m} \left\{ \sum_{\substack{\forall a_0 \\ \forall (n_i, a_i),\, i=1,\ldots,N,: \\ n_1+\ldots+n_N = m-n_0}} \left[P(n_0, a_0, \ldots, n_N, a_N) \left(\sum_{n_0'=0}^{n_0} (n_0 - n_0') \lambda_0 (n_0, a_0, n_0', a_0') \right) \right] \right\}$$

Το πρώτο άθροισμα λαμβάνεται για κάθε στάθμη n_0 τέτοια ώστε $m > n_0 > 0$, γιατί μόνο τότε ο κόμβος 0 μπορεί να παραγάγει. Πράγματι, ο κόμβος 0 είναι η ζήτηση και, από τον Πίνακα 3.1, οι καταστάσεις $n_0 > 0$ ισοδυναμούν με $n_B < c$ οπότε γίνονται δεκτές νέες παραγγελίες και, συνεπώς, έχουμε νέες πωλήσεις. Το δεύτερο άθροισμα λαμβάνεται για όλες τις επιτρεπτές στάθμες n_i όταν το n_0 είναι καθορισμένο, ήτοι $n_1 + \ldots + n_N = m - n_0$. Τέλος, το τρίτο άθροισμα περιλαμβάνει όλες τις επιτρεπτές ομαδικές αφίξεις που μειώνουν την στάθμη n_0 σε n_0' $< n_0$.

Όπως φαίνεται από τις Εξ. (4.2) και την εξίσωση του TH, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης και το TH εξαρτώνται από το m (αφού $n_0 = 0, 1, 2, \ldots, m$) αλλά *δεν εξαρτώνται από το απόθεμα βάσης* s. Συνεπώς, για σταθερό m, η συνάρτηση J μεγιστοποιείται στο σημείο s το οποίο ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους

$$C_s = hH_s + bB_s$$

όπου H_s και B_s είναι το μέσο απόθεμα και το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών συναρτήσει του s. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι ποσότητες αυτές δίδονται από τις Εξ. (3.3) και (3.4) που εδώ τις γράφουμε με τη μορφή

$$H = s\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=m-s-1} + (s+1)\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=m-s-2} + \ldots + m\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=0} \tag{4.3}$$

$$B = \mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=m-s-1} + 2\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=m-s-2} + \ldots + (m-s)\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=0} \tag{4.4}$$

όπου $\mathbf{1}$ είναι ένα διάνυσμα γραμμής που όλα του τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα και $\boldsymbol{P}_{n_0=i}$ είναι το διάνυσμα στήλης με τις πιθανότητες όλων των καταστάσεων ($n_0 = i, a_0, \ldots, n_N, a_N$).

Τώρα αποδεικνύουμε η C_s είναι κυρτή συνάρτηση. Από τις Εξ. (4.3) και (4.4) προκύπτουν

$$C_s = hs + (h+b)\left[\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=m-s-1} + 2\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=m-s-2} + \ldots + (m-s)\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=0}\right]$$

$$C_{s+1} = h(s+1) + (h+b)\left[\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=m-s-2} + 2\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=m-s-3} + \ldots + (m-s-1)\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=0}\right]$$

$$C_{s-1} = h(s-1) + (h+b)\left[\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=m-s} + 2\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=m-s-1} + \ldots + (m-s+11)\mathbf{1}\boldsymbol{P}_{n_0=0}\right]$$

και από αυτές

$$C_{s+1} + C_{s-1} = 2C_s + (h+b)\mathbf{1}\,\boldsymbol{P}_{n_0=m-s} > 2C_s$$

Θέτοντας $s \pm 1$, $s \pm 2$, … αντί για s στην ανισότητα αυτή προκύπτουν

$$C_{s+i} + C_{s-i} > 2C_s$$

για κάθε s και κάθε $i \le s$. Οι σχέσεις αυτές, λόγω του Λήμματος 1 των Anantharam and Tsoucas [4], συνεπάγονται ότι η C_s είναι κυρτή ή, ισοδύναμα, ότι το μέσο κέρδος J ανά μονάδα χρόνου είναι κοίλη συνάρτηση του s. Η χρήση αυτού του αποτελέσματος επιφέρει σημαντική μείωση του υπολογιστικών απαιτήσεων για τον προσδιορισμό του αποθέματος βάσης για συστήματα παραγωγής με ομαδικές παραγγελίες και γενικούς χρόνους κατεργασιών. Οι τιμές των βέλτιστων παραμέτρων της πολιτικής PLS προσδιορίζονται σύμφωνα με τον παρακάτω αλγόριθμο:

Βήμα 1. Καθόρισε ένα άνω όριο αναζήτησης $\overline{m}$ για το m. Θέσε $m^* = m = 0$, $s^* = s = 0$ και $J^* = J(s, m) = 0$.

Βήμα 2. Υπολόγισε τις τιμές των $J(s, m)$ για $s = 0, 1, \ldots, m$ μέχρις ότου είτε $J(s, m) \ge J(s+1, m)$ είτε $s = m$, ο,τιδήποτε συμβεί πρώτα. Θέσε $s_m = s$. Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι το s_m είναι η βέλτιστη τιμή του αποθέματος βάσης, για χωρητικότητα του συστήματος ίση με m.

Βήμα 3. Αν $J(s_m, m) > J^*$, ενημέρωσε το μέχρι στιγμής βέλτιστο σχέδιο. Δηλαδή θέσε $J^* = J(s_m, m)$, $m^* = m$, $s^* = s_m$, $c^* = m - s^*$. Αν $m = \overline{m}$ σταμάτησε.

Βήμα 4. Θέσε $m = m + 1$. Πήγαινε στο Βήμα 2.

Ο αλγόριθμος αυτός προσδιορίζει τις βέλτιστες παραμέτρους m και s_m για $m \le \overline{m}$. Επειδή δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση $J(s_m, m)$ είναι σχεδόν κοίλη, δεν υπάρχει εγγύηση ότι ο παραπάνω αλγόριθμος υπολογίζει το βέλτιστο m ακόμη και αν έχει εντοπίσει ένα τοπικό α-κρότατο. Ωστόσο, στα αριθμητικά πειράματα που πραγματοποιήθηκαν παρατηρήσαμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους ήταν σχεδόν κοίλη.

4.3.2 Αριθμητικό παράδειγμα

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για ένα σύστημα παραγωγής που εμπίπτει στην κατηγορία συστημάτων που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Το σύστημα αποτελείται από μία μηχανή η οποία υφίσταται βλάβες και επισκευ-άζεται σε τυχαίους χρόνους. Οι χρόνοι παραγωγής, οι χρόνοι μεταξύ βλαβών και οι διάρκειες επισκευών είναι εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές $1/\mu$, $1/f$ και $1/r$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι όταν ο έλεγχος παραγωγής επιβάλει τη διακοπή της λειτουργίας της μηχανής, τότε η μηχανή δεν φθείρεται και δεν υπόκειται σε βλάβες. Οι χρόνοι μεταξύ α-φίξεων διαδοχικών πελατών είναι εκθετικά κατανεμημένοι με μέσο ρυθμό λ. Ένας πελάτης μπορεί να ζητήσει μία μονάδα προϊόντος με πιθανότητα q ή δύο μονάδες προϊόντος με πιθα-νότητα $\bar{q} = 1 - q$. Για τον έλεγχο του συστήματος χρησιμοποιούμε την πολιτική PLS. Υπάρ-χει ένας υπεργολάβος ο οποίος μπορεί να ικανοποιήσει όλη τη ζήτηση που απορρίπτεται. Ό-ταν η ζήτηση ικανοποιείται από το σύστημα παραγωγής, τότε το κέρδος μας ανά μονάδα πω-λούμενου προϊόντος είναι $A + p$, ενώ όταν την αναθέτουμε σε υπεργολάβο τότε το κέρδος μας είναι μικρότερο και ισούται με A.

Το κέρδος του συστήματος ανά μονάδα χρόνου υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} J &= (\text{ρυθμός πωλήσεων προϊόντων από παραγωγή})(A + p) \\ &\quad + (\text{ρυθμός πωλήσεων προϊόντων από υπεργολάβο})A - hH - bB \\ &= (\text{συνολικός ρυθμός πωλήσεων προϊόντων})A + p\mathrm{TH} - hH - bB \\ &= A\lambda(1q + 2\,\bar{q}) + p\mathrm{TH} - hH - bB \end{aligned}$$

Αφού η ποσότητα $A\lambda(1q + 2\,\bar{q})$ είναι ανεξάρτητη των m και s, η μεγιστοποίηση του αναμενό-μενου κέρδους είναι ισοδύναμη με τη μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης

$$J_{\mathrm{OBJ}} = p\mathrm{TH} - hH - bB$$

Το σύστημα παραγωγής μετασχηματίζεται σε ένα ισοδύναμο κλειστό δίκτυο αναμονής με δύο κόμβους. Το δίκτυο αυτό έχει σταθερό συνολικό πληθυσμό ίσο με $m = s + c$ και η λειτουργία του είναι παρόμοια με τη λειτουργία του αρχικού συστήματος. Ο κόμβος 0 αντιστοιχεί στη ζήτηση και ο κόμβος 1 στη μηχανή. Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από το ζεύγος (n, a), όπου $n = 0, \ldots, m$ είναι το πλήθος προϊόντων που περιέχονται στην αποθήκη του κόμβου 0 και $a = 0, 1$ είναι η κατάσταση της μηχανής (0 αν έχει υποστεί βλάβη και 1 αν είναι λειτουργική). Εφόσον ο συνολικός πληθυσμός του συστήματος είναι σταθερός και ίσος με m το πλήθος των προϊόντων στον κόμβο 1 είναι $n_1 = m - n$. Κατά συνέπεια η γνώση του πλήθους προϊόντων στον κόμβο 0 και της κατάστασης της μηχανής αρκεί για να περιγράψει την κατάσταση του συστήματος. Οι εξισώσεις ροής πιθανότητας του συστήματος διαμορφώνονται ως εξής

$$P(m, 0) = 0$$

$$P(m, 1)\lambda = P(m-1, 1)\mu + P(m, 0)r$$

$$P(m-1, 0)(r+\lambda) = P(m-1, 1)f + P(m, 0)\lambda q$$

$$P(m-1, 1)(\mu + f + \lambda) = P(m-1, 0)\, r + P(m-2, 1)\mu + P(m, 1)\lambda q$$

$$P(m-2, 0)(r+\lambda) = P(m-2, 1)f + P(m-1, 0)\lambda q + P(m, 0)\lambda \bar{q}$$

$$P(m-2, 1)(\mu + f + \lambda) = P(m-2, 0)\, r + P(m-3, 1)\mu + P(m-1, 1)\lambda q + P(m, 1)\lambda \bar{q}$$

$$\ldots$$

$$P(n+1, 1)(\mu + f + \lambda) = P(n+1, 0)\, r + P(n, 1)\mu + P(n+2, 1)\lambda q + P(n+3, 1)\lambda \bar{q}$$

$$P(n, 0)(r+\lambda) = P(n, 1)f + P(n+1, 0)\lambda q + P(n+2, 0)\lambda \bar{q}$$

$$\ldots$$

$$P(0, 1)(\mu + f) = P(0, 0)\, r + P(1, 1)\lambda + P(2, 1)\lambda \bar{q}$$

$$P(0, 0)\, r = P(0, 1)f + P(1, 0)\lambda + P(2, 0)\lambda \bar{q}$$

Στις εξισώσεις ροής πιθανότητας το αριστερό μέλος της ισότητας είναι ο ρυθμός μείωσης της πιθανότητας ώστε το σύστημα να ευρίσκεται στην κατάσταση (n, a), ενώ στο δεξί μέλος περιγράφεται ο συνολικός ρυθμός μετάβασης στην κατάσταση (n, a) από τις άλλες καταστάσεις. Η πρώτη εξίσωση είναι ιδιόμορφη. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η μηχανή δεν υπόκειται σε βλάβες όταν διακόπτεται η λειτουργία της λόγω του ελέγχου παραγωγής, η κατάσταση $(m, 0)$ είναι ανέφικτη και συνεπώς η πιθανότητα $P(m, 0)$ είναι 0. Στη δεύτερη εξίσωση εξετάζεται η ροή από και προς την κατάσταση $(m, 1)$. Επειδή η λειτουργία της μηχανής διακόπτεται για $n = m$ η κατάσταση του συστήματος αλλάζει μόνο με την άφιξη νέων πελατών, οι οποίοι φθάνουν με ρυθμό λ. Στο δεξί μέλος περιγράφεται ο συνολικός ρυθμός μετάβασης στην κατάσταση (m, 1) από τις άλλες καταστάσεις. Εν προκειμένω μπορούμε να μεταβούμε στην κατάσταση (m, 1) από την κατάσταση (m – 1, 1), με ρυθμό μ και από την κατάσταση (m, 1) (που όμως είναι πρακτικά ανέφικτη) με ρυθμό r. Με όμοιο τρόπο προκύπτουν και οι υπόλοιπες εξισώσεις ροής πιθανότητας.

Για την επίλυση του συτήματος, εκφράζουμε όλες τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης συναρτήσει της $P(m, 1)$. Ξεκινάμε από την εξίσωση $P(m, 1)\lambda = P(m-1, 1)\mu$ και ευρίσκουμε μία έκφραση για το $P(m-1, 1)$. Ακολούθως επιλύουμε την επόμενη εξίσωση ως προς $P(m-1, 0)$. Εν γένει, επιλύουμε τις εξισώσεις

$$P(n+1, 1)(\mu + f + \lambda) = P(n+1, 0)\, r + P(n, 1)\mu + P(n+2, 1)\lambda q + P(n+3, 1)\lambda \bar{q}$$

ως προς $P(n, 1)$ και τις εξισώσεις

$$P(n, 0)(r + \lambda) = P(n, 1) f + P(n+1, 0)\lambda q + P(n+2, 0)\lambda \bar{q}$$

ως προς $P(n, 0)$ και προκύπτουν εκφράσεις που περιέχουν μόνον την πιθανότητα $P(m, 1)$. Η τελευταία υπολογίζεται από την επίλυση της εξίσωσης κανονικοποίησης

$$\sum_{\forall(n,a)} P(n,a) = 1$$

Έχοντας υπολογίσει τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος μπορούμε να εκτιμήσουμε τα διάφορα μέτρα απόδοσης του συστήματος όπως ο μέσος ρυθμός παραγωγής TH, το μέσο απόθεμα H και το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών B. Ο μέσος ρυθμός παραγωγής δίδεται από την εξίσωση

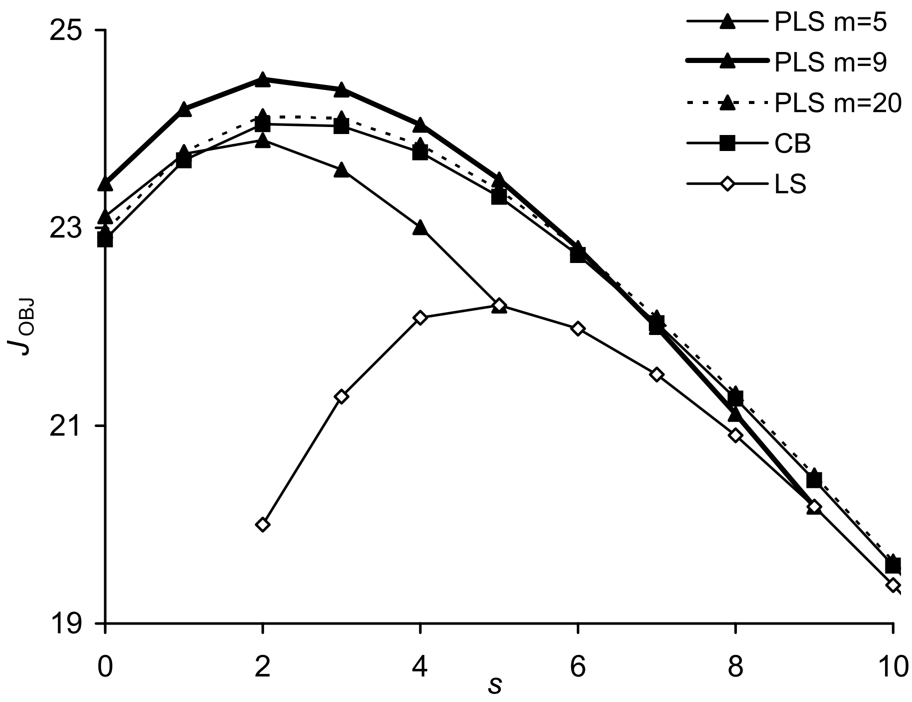
$$\mathrm{TH} = [P(1, 1) + P(1, 0)]\lambda + [1 - P(0, 1) - P(0, 0) - P(1, 1) - P(1, 0)]\lambda(q + 2\bar{q})$$

Το μέσο απόθεμα και το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών δίδονται από τις Εξ. (4.3) και (4.4) που εδώ τις γράφουμε με τη μορφή

$$H = s[P(m-s-1, 0) + P(m-s-1, 1)] + \ldots + m[P(0, 0) + P(0, 1)]$$

$$B = 1[P(m-s-1, 0) + P(m-s-1, 1)] + \ldots + (m-s)[P(0, 0) + P(0, 1)]$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα σύστημα με παραμέτρους $\lambda = 2.0$, $\mu = 6.67$, $f = 1.0$, $r = 3.0$, $q = 0.5$, $p = 10.0$, $h = 1.0$, $b = 2.0$. Εξετάζουμε τις τρεις πολιτικές, PLS, CB και LS. Για διάφορες τιμές του m, υπολογίζουμε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος και την αντικειμενική συνάρτηση J_{OBJ} συναρτήσει του s, χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους τύπους. Με $s = m$, η πολιτική PLS γίνεται LS ενώ για $m \rightarrow \infty$ και $c \rightarrow \infty$ έχουμε την πολιτική CB. Στο Σχήμα 4.6 φαίνεται η J_{OBJ} συναρτήσει του αποθέματος βάσης s για τιμές της χωρητικότητας m = 5, 9 και 20, ενδεικτικά. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι κοίλη, όπως ήδη έχουμε αποδείξει. Η αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποιείται για $m = 9$ και $s = 2$. Για τις τιμές αυτές, η πολιτική PLS έχει υψηλότερο κέρδος κατά 10% έναντι της LS και 2% έναντι της CB.



Σχήμα 4.6. Αντικειμενικές συναρτήσεις διάφορων πολιτικών ως προς s

Η βέλτιστη τιμή της χωρητικότητας για κάθε πολιτική προσδιορίσθηκε δοκιμάζοντας όλες τις τιμές του m έως το 200 με βάση τον αλγόριθμο της Παραγράφου 4.3.1. Ωστόσο, από αυτά και από άλλα αριθμητικά πειράματα φαίνεται ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι σχεδόν κοίλη ως προς s και m από κοινού. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής έρευνας αφού, εάν ισχύει, τότε μπορούμε να διακόπτουμε με ασφάλεια την εκτέλεση του αλγορίθμου στο σημείο που εντοπίζεται ένα τοπικό βέλτιστο κάθε φορά, πράγμα που μειώνει σημαντικά τους υπολογισμούς.

4.4 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκαν δύο εφαρμογές των θεωρητικών αποτελεσμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου.

Στο πρώτο μέρος εξετάσαμε το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων, παραγγελιών και χαρακτηριστικών ποιότητας σε δίκτυα παραγωγής ενός προϊόντος. Οι παραδοχές που αφορούν τη λειτουργία του συστήματος είναι ίδιες με εκείνες που έγιναν στο Κεφάλαιο 3 οπότε το σύστημα μοντελοποιείται ως ένα κλειστό δίκτυο αναμονής με έναν βρόγχο ανατροφοδότησης που περιγράφει την απόρριψη ή επανακατεργασία των ποιοτικά μη αποδεκτών προϊόντων. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου αναπτύχθηκε προσεγγιστικός αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των βέλτιστων παραμέτρων της στρατηγικής συνεργασίας. Τα αριθμητικά αποτελέσματα τεκμηριώνουν την υπεροχή των συνεργαζόμενων πολιτικών ελέγχου έναντι άλλων πρακτικών που εφαρμόζονται συνήθως.

Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να επεκταθούν σε συστήματα παραγωγής πολλών προϊόντων, σε προϊόντα που φέρουν περισσότερα του ενός χαρακτηριστικά ποιότητας ή σε συστήματα των οποίων τα προϊόντα απευθύνονται σε διαφορετικές αγορές με διαφορετικές απαιτήσεις ποιότητας και διαφορετικές τιμές πώλησης. Σε τέτοιου είδους συστήματα, τα προβλήματα του ελέγχου παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου έχουν μελετηθεί χωριστά στο παρελθόν (βλ. π.χ. Baskett et al. [5], Ha [12], Hong and Elsayed [16], Tang and Tang [37]). Αντικείμενο μελλοντικής έρευνας αποτελεί η μελέτη των ιδιοτήτων δεύτερης τάξης της συνάρτησης αναμενόμενου κέρδους ως προς τις πολιτικές ποιότητας και παραγωγής από κοινού, με στόχο την ανάπτυξη αποδοτικότερων αλγορίθμων για τον προσδιορισμό των παραμέτρων της βέλτιστης πολιτικής.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου εξετάσθηκε ένα πρόβλημα ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε δίκτυα παραγωγής με χρόνους κατεργασιών και αφίξεων πελατών που ακολουθούν γενικές κατανομές και δυνατότητα παραγωγής κατά παρτίδες. Το σύστημα περιγράφηκε μαθηματικά ως μία αλυσίδα Markov και αποδείχθηκε μία ιδιότητα δεύτερης τάξης της συνάρτησης αναμενόμενου κέρδους η οποία διευκολύνει τη βελτιστοποίηση. Τα αριθμητικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν και πάλι την υπεροχή των συνεργαζόμενων πολιτικών έναντι των πολιτικών πλήρους αποδοχής και πλήρους απόρριψης που εφαρμόζονται συνήθως.

Με παρόμοιο τρόπο είναι εφικτό να περιγραφούν μαθηματικά συστήματα που παράγουν πολλά προϊόντα, έχουν παράλληλες μηχανές στα διάφορα στάδια κατεργασίας και χρόνους προετοιμασίας. Εν τούτοις, η διερεύνηση των ιδιοτήτων δεύτερης τάξης για την συνάρτηση αναμενόμενου κέρδους ως προς όλες τις μεταβλητές ελέγχου από κοινού θα είναι πολύ πιο απαιτητική σε αυτή την περίπτωση.

5 Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή είχε ως στόχο την επίλυση προβλημάτων συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και πωλήσεων σε συστήματα παραγωγής προς αποθήκευση. Εξετάσαμε τέσσερα προβλήματα:

- έλεγχος **αποθεμάτων** και **πωλήσεων** (αποδοχής παραγγελιών) σε συστήματα μίας μηχανής με χρόνους κατεργασιών και χρόνους μεταξύ αφίξεων διαδοχικών παραγγελιών που ακολουθούν γενικές κατανομές,
- έλεγχος **αποθεμάτων** και **πωλήσεων** σε δίκτυα παραγωγής με εκθετικούς χρόνους κατεργασιών και αφίξεις κατά Poisson,
- έλεγχος **αποθεμάτων** σε δίκτυα παραγωγής με ομαδικές αφίξεις και κατεργασίες κατά παρτίδες, σε χρόνους που ακολουθούν γενικές κατανομές, και
- έλεγχος **ποιότητας**, **αποθεμάτων** και **πωλήσεων** σε δίκτυα παραγωγής με εκθετικούς χρόνους κατεργασιών και αφίξεις κατά Poisson.

Για τον έλεγχο αποθεμάτων και πωλήσεων, προτείναμε τον συνδυασμό της γνωστής πολιτικής αποθέματος βάσης με μία νέα πολιτική πωλήσεων, αυτή της μερικής αποδοχής παραγγελιών που εξαρτάται από μία παράμετρο, το έλλειμμα βάσης. Το πρόβλημα του ελέγχου διατυπώθηκε ως πρόβλημα μεγιστοποίησης του μέτρου απόδοσης του συστήματος συναρτήσει των παραμέτρων αποθέματος βάσης και ελλείμματος βάσης. Ένα θεμελιώδες ερώτημα για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι το εάν η αντικειμενική συνάρτηση έχει ένα μόνο σημείο για το οποίο να ικανοποιούνται οι συνθήκες τοπικού ακροτάτου. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει η συνάρτηση να είναι σχεδόν κοίλη (quasiconcave).

Το σύστημα μίας μηχανής μοντελοποιήθηκε ως ένα σύστημα G/G/1/*m*, ενώ το δίκτυο παραγωγής περιγράφηκε με τη βοήθεια ενός ισοδύναμου κλειστού δικτύου αναμονής. Για την μέτρηση της απόδοσης των συστημάτων αυτών χρησιμοποιήσαμε το αναμενόμενο κέρδος, που είναι το κέρδος πωλήσεων μείον το κόστος αποθέματος και το κόστος εκκρεμών παραγγελιών. Μελετώντας τις ιδιότητες δεύτερης τάξης του αναμενόμενου κέρδους ως προς τις παραμέτρους ελέγχου βρήκαμε ικανές συνθήκες υπό τις οποίες οι συναρτήσεις αναμενόμενου κέρδους είναι σχεδόν κοίλες και αναπτύξαμε υπολογιστικά αποδοτικούς αλγορίθμους εκτίμησης των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων της προτεινόμενης πολιτικής. Πραγματοποιήσαμε αριθμητικά πειράματα για να συγκρίνουμε την απόδοση της προτεινόμενης πολιτικής με άλλες πολιτικές ελέγχου που εφαρμόζονται σήμερα στα περισσότερα συστήματα παραγωγής. Τα αριθμητικά αποτελέσματα τεκμηρίωσαν την υπεροχή των συνεργαζόμενων πολιτικών ελέγχου αποθεμάτων και πωλήσεων.

Στη συνέχεια εφαρμόσαμε και επεκτείναμε την προτεινόμενη πολιτική σε δίκτυα παραγωγής. Εξετάσαμε πρώτα ένα πρόβλημα συνδυασμένου ελέγχου ποιότητας, αποθεμάτων και πωλήσεων. Προτείναμε μια απλή στρατηγική συνεργασίας μεταξύ των τμημάτων παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου, για την από κοινού εκτίμηση των παραμέτρων ελέγχου αποθεμάτων, παραγγελιών και χαρακτηριστικών ποιότητας. Από τα αριθμητικά πειράματα που παρουσιάζονται φάνηκε ότι η προτεινόμενη στρατηγική συνεργασίας επιτυγχάνει υψηλότερη κερδοφορία από τις στρατηγικές ελέγχου της παραγωγής και ποιοτικού ελέγχου που εφαρμόζονται στην πράξη. Τέλος εξετάσαμε δίκτυα παραγωγής με γενικά κατανεμημένους χρόνους αφίξεων πελατών και κατεργασιών, που έχουν τη δυνατότητα παραγωγής κατά παρτίδες. Για τα συστήματα αυτά διερευνήσαμε τις ιδιότητες δεύτερης τάξης της συνάρτησης αναμενόμενου κέρδους ως προς το απόθεμα βάσης μόνον.

Σε όλα τα αριθμητικά πειράματα η εφαρμογή της προτεινόμενης πολιτικής απέδωσε τα προσδοκώμενα. Στις χειρότερες των περιπτώσεων η κερδοφορία της προτεινόμενης πολιτικής ήταν παρόμοια με αυτές των ανταγωνιστικών πολιτικών, ενώ στις υπόλοιπες η απόδοση της ήταν σημαντικά καλύτερη. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι οι περισσότερες από τις δημοφιλείς ανταγωνιστικές πολιτικές, όπως φάνηκε από την ανάλυσή μας, αποτελούν υποπεριπτώσεις της προτεινόμενης πολιτικής. Η επιτυχία της πολιτικής μερικής αποδοχής παραγγελιών μας ενθαρρύνει να την επεκτείνουμε και να την εφαρμόσουμε σε άλλα συστήματα καθώς, μέχρι σήμερα, είναι ελάχιστες οι εφαρμογές της (Caldentey [9], Kouikoglou and Phillis [22]) και αυτές εξετάζουν πολύ ειδικές κατηγορίες συστημάτων (συστήματα μίας μηχανής που παράγουν ένα προϊόν). Οι επεκτάσεις που προτείναμε στις τελευταίες παραγράφους κάθε κεφαλαίου αυτής της διατριβής αναφέρονται μόνο σε συστήματα παραγωγής προς αποθήκευση στα οποία εφαρμόζεται η πολιτική αποθεμάτων βάσης. Η πολιτική μερικής αποδοχής παραγγελιών μπορεί να συνδυαστεί με άλλες πολιτικές αποθεμάτων, όπως οι πολιτικές τύπου KANBAN και η πολιτική (s, S) (Clark and Scarf [10], Inglehart [17], Sethi and Chen [30], Zipkin [45], Liberopoulos and Dallery [24]), ή ακόμη και σε συστήματα παραγωγής προς ικανοποίηση της ζήτησης (make-to-order, assemble-to-order) όπου δεν επιτρέπονται αποθέματα έτοιμων προϊόντων. Τέλος, τα θεωρητικά αποτελέσματα της διατριβής είναι εφαρμόσιμα και στις περιπτώσεις όπου η εκτίμηση του μέσου κέρδους γίνεται με προσομοίωση όταν η ανάλυση Markov είναι αδύνατη για τις δυνατότητες των σημερινών υπολογιστών.

Τα αποτελέσματα της διατριβής αυτής περιλαμβάνονται και στις εργασίες Ioannidis and Kouikoglou [18], [20] και Ioannidis et al. [19].

Βιβλιογραφία

[1] Akella, R. and Kumar, P.R. (1986) Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**, 116–126.

[2] Altiok, T. (1985) On the phase-type approximations of general distributions. *IIE Transactions*, **17**, 110–116.

[3] Altman, E. and Stidham, S. (1995) Optimality of monotonic policies for two-action Markovian decision processes, with applications to control of queues with delayed information. *Queueing Systems*, **21**, 267–291.

[4] Anantharam, V. and Tsoucas, P. (1990) Stochastic concavity of throughput in series of queues with finite buffers. *Advances in Applied Probability*, **22**, 761–763.

[5] Baskett, F., Chandy, K.M., Muntz, R.R., and Palacios, F.G. (1975) Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **22**, 248–260.

[6] Buzacott, J.A. and Shanthikumar, J.G. (1992) A general approach for coordinating production in multiple-cell manufacturing systems. *Production and Operations Managent*, **1**, 34–52.

[7] Buzacott, J.A. and Shanthikumar, J.G. (1993) *Stochastic Models of Manufacturing Systems* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[8] Buzen, J. P. (1973) Computational algorithms for closed queuing networks with exponential servers. *Communications of ACM*, **16**, 527–531.

[9] Caldentey, R.A. (2001) Analyzing the make-to stock queue in the supply chain and e-business settings. Ph.D. dissertation, Sloan School of Management, MIT, Massachusetts.

[10] Clark, A.J. and Scarf, H. (1960) Optimal policies for a multi-echelon inventory problem. *Management Science*, **6**, 475–490.

[11] Govil, M.K. and Fu, M.C. (1999) Queueing theory in manufacturing: a survey. *Journal of Manufacturing Systems*, **18**, 214–240.

[12] Ha, A.Y. (1997) Inventory rationing in a make-to-stock production system with several

demand classes and lost sales. *Management Science*, **43**, 1093–1103.

[13] Ha, A.Y. (1997) Stock-rationing policy for a make-to-stock production system with two priority classes and backordering. *Naval Research Logistics*, **44**, 457–472.

[14] Hadley, G. and Whitin, T.M. (1963) *Analysis of Inventory Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[15] Harel, A. Namn, S. and Sturm, J. (1999) Simple bounds for closed queueing networks. *Queueing Systems*, **31**, 125–135.

[16] Hong, S. H. and Elsayed, E. A. (1998) Economic complete inspection plans with multi-decision alternatives. *International Journal of Production Research*, **36**, 3367–3378.

[17] Iglehart, D.L. (1963) Optimality of (s, S) policies in the infinite horizon inventory problem. *Management Science*, **9**, 259–267.

[18] Ioannidis, S. and Kouikoglou, V.S. (2003) Coordinated admission and inventory controls in a make-to-stock production system. *Proceedings of the 11th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Rhodes Greece. Submitted to *IIE Transactions*.

[19] Ioannidis, S., Kouikoglou, V.S., and Phillis, Y.A. (2003) Coordinating quality, production, and sales in manufacturing systems. Submitted to *International Journal of Production Research*.

[20] Ioannidis, S. and Kouikoglou, V.S. (2003) Analysis of joint admission and inventory control policies for make-to-stock production networks. Working Paper.

[21] Karaesmen, F. and Y. Dallery (2000) A performance comparison of pull control mechanisms for multi-stage manufacturing systems. *International Journal of Production Economics*, **68**, 59–71.

[22] Kouikoglou, V.S. and Phillis, Y.A. (2002) Design of product specifications and control policies in a single-stage production system. *IIE Transactions*, **34**, 590–600.

[23] Lee, Y.J. and Zipkin, P. (1992) Tandem queues with planned inventories. *Operations Research*, **40**, 936–947.

[24] Liberopoulos, G. and Dallerry, Y. (2000) A unified framework for pull control mechanisms in multi-stage manufacturing systems. *Annals of Operations Research*, **93**, 325–355.

[25] Lou, S.X.C. and Van Ryzin G., (1989) Optimal control rules for scheduling job shops. *Annals of Operations Research*, **17**, 233–248.

[26] Moinzadeh, K. (1989) Operating characteristics of the $(S-1, S)$ inventory system with partial backorders and constant resupply times. *Management Science*, **35**, 472–477.

[27] Morse, P. (1958) *Queues, inventories and maintenance* Wiley, New York.

[28] Neuts, M.F. (1994) *Matrix-geometric solutions in stochastic models* Dover, New York.

[29] Rubio, R. and Wein, L.W. (1996) Setting base stock levels using product-form queueing networks. *Management Science*, **42**, 259–268.

[30] Sethi, S.P. and Cheng, F. (1997) Optimality of (s, S) policies in inventory models with markovian demand. *Operations Research*, **45**, 931–939.

[31] Shanthikumar, J.G. and Yao, D.D. (1988) Second-order properties of the throughput of a closed queueing network. *Mathematics of Operations Research*, **13**, 524–534.

[32] Smith, S.A. (1977) Optimal inventories for an $(S-1, S)$ system with no backorders. *Management Science*, **239**, 522–528.

[33] Stidham, S. Jr (1985) Optimal control of admission to a queueing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**, 705–713.

[34] Stidham, S. Jr and Weber, R.R. (1989) Monotonic and insensitive optimal policies for control of queues with undiscounted costs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **87**, 611–625.

[35] Stidham, S. Jr and Weber, R.R. (1993) A survey of Markov decision models for control of networks of queues. *Queueing Systems*, **13**, 291–314.

[36] Taguchi, G. Elsayed, E. and Hsiang, T. (1989) *Quality Engineering in Production Systems* McGraw-Hill, New York.

[37] Tang, K. and Tang, J. (1989) Design of product specifications for multi-characteristic inspection. *Management Science*, **35**, 743–756.

[38] Tang, K. and Tang, J. (1994) Design of screening procedures: a review. *Journal of Quality Technology*, **26**, 209–226.

[39] Van Ryzin, G. Lou, S.X.C. and Gershwin, S.B. (1993) Production control for a tandem two-machine system. *IIE Transactions*, **25**, 5–20.

[40] Veach, M.H. and Wein, L.M. (1992) Monotone control of queueing networks. *Queueing Systems*, **12**, 391–408.

[41] Veach, M.H. and Wein, L.M. (1994) Optimal control of a two-station tandem production-inventory system. *Operations Research*, **42**, 337–350.

[42] Weber, R.R. and Stidham, S. Jr (1987) Optimal control of service rates in networks of queues. *Advances in Applied Probability*, **19**, 202–218.

[43] Yao, D.D. and Buzacott, J.A. (1986) Models of flexible manufacturing systems with limited local buffers. *International Journal of Production Research*, **24**, 107–118.

[44] Yeralan, S. and Muth, E.J. (1987) A general model of a production line with intermediate buffer and station breakdown. *IIE Transactions*, **10**, 130–139.

[45] Zipkin, P.H. (2000) *Foundations of Inventory Management*, McGraw-Hill, New York, NY.