ΠΟΛΥΤΕΝΧΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης (ΜΠΔ)
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης
Κατεύθυνση: Οργάνωση και Διοίκηση

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Εφαρμογή Μεθευρετικών Αλγορίθμων για το Γενικευμένο Πρόβλημα Ανάθεσης (GAP)

Μασέλης Γεώργιος

Α.Μ.: 2010019029

Επιβλέπων Καθηγητής: Μαρινάκης Ιωάννης

Ηράκλειο, Δεκέμβριος 2014

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:

Εισαγωγή

1.1 Γενικευμένο Πρόβλημα Ανάθεσης (General Assignment Problem)

Στο πρώτο μέρος του πρώτου κεφαλαίου παρουσιάζεται η έννοια του Γενικευμένου Προβλήματος Ανάθεσης.

Στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, το γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης , αποτελεί πρόβλημα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Είναι μια γενίκευση του προβλήματος εκχώρησης στο οποίο, τα καθήκοντα και οι συντελεστές έχουν ένα μέγεθος. Επιπλέον το μέγεθος κάθε καθήκοντος- εργασίας μπορεί να διαφέρει από τον ένα συντελεστή στον άλλο. Στην πιο γενική του μορφή, το πρόβλημα έχει ως ακολούθως: Υπάρχουν ένας αριθμός καθηκόντων και ένας αριθμός συντελεστών. Σε κάθε συντελεστή μπορεί να ανατεθεί οποιαδήποτε εργασία την οποία θα υλοποιήσει, αναλαμβάνοντας κάποιο κόστος και κέρδος τα οποία εξαρτώνται από τον εκάστοτε συντελεστή και το καθήκον το οποίο του έχει ανατεθεί. Κάθε συντελεστής έχει δημιουργήσει έναν προϋπολογισμό και τα συνολικά κόστη των έργων που του έχουν ανατεθεί , δεν μπορεί να τον ξεπερνά. Είναι απαραίτητο να βρεθεί η ανάθεση αυτή στην οποία το κόστος των εργασιών –καθηκόντων να μην υπερβαίνει το ποσό του προϋπολογισμού όλων των συντελεστών και το κέρδος αυτής να μεγιστοποιείται. Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία, τα συνολικά κόστη των ανατεθέντων εργασιών και τα ποσά των προϋπολογισμών όλων των συντελεστών ισούνται με 1, το πρόβλημα αυτό μειώνεται στο μέγιστο πρόβλημα του καταμερισμού . Όταν οι δαπάνες και τα κέρδη όλων των παραγόντων από τις ανατεθέντες εργασίες είναι ίσα, τότε το πρόβλημα αυτό μειώνεται στο πρόβλημα του πολλαπλού σακιδίου, ενώ όταν ο συντελεστής είναι μοναδικός, το πρόβλημα μειώνεται στο πρόβλημα σακιδίου. Υπάρχουν πολλοί τομείς εφαρμογών του GAP όπως τα δίκτυα υπολογιστών και επικοινωνιών , τα προβλήματα εντοπισμού, η πλοήγηση οχημάτων, η τεχνολογία ομάδας, ο σχεδιασμός και άλλα.

Παρακάτω, έχουμε n είδη αντικειμένων, x_1 έως x_n και m είδη κάδων b_1 έως b_m. Κάθε b_i κάδος, συνδέεται με ένα w_i προϋπολογισμό. Για κάθε κάδο b_i, κάθε αντικείμενο x_j έχει ένα κέρδος p_{ij} και ένα βάρος w_{ij}. Μία λύση είναι ένα υποσύνολο των στοιχείων u και μια ανάθεση από u στους κάδους. Μία εφικτή λύση είναι η λύση στην οποία, για κάθε κάδο b_i, το συνολικό βάρος των ανατεθέντων αντικειμένων είναι το πολύ w_i. Τα κέρδη της λύσης είναι το σύνολο των κερδών για κάθε ανατεθέν αντικείμενο ενώ ο στόχος είναι, να βρεθεί η εφικτή λύση που θα αποφέρει το μέγιστο κέρδος. Μαθηματικά, το γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης, μπορεί να διατυπωθεί ως ένα ακέραιο πρόγραμμα.

$$maximize \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij}$$

$$subject\ to \sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{ij} \leq w_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Πρόσφατα αποδείχθηκε πως η επέκτασή της είναι $e/(e-1) - \varepsilon$ και είναι δύσκολο να προσεγγιστεί για κάθε e.

Παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι μια εταιρία ταξί έχει τρία ταξί (οι πράκτορες) διαθέσιμα, και τρεις πελάτες (οι στόχοι) που επιθυμούν να εξυπηρετηθούν το συντομότερο δυνατόν. Η εταιρία υπερηφανεύεται για τις ταχείες επαναλήψεις, έτσι για κάθε ταξί το "κόστος" να πάρει έναν ιδιαίτερο πελάτη θα εξαρτηθεί από το χρόνο που λαμβάνεται για το ταξί για να φθάσει στο σημείο επαναλήψεων. Η λύση στο πρόβλημα ανάθεσης θα είναι οποιοσδήποτε συνδυασμός ταξί και πελατών οδηγεί στο λιγότερο συνολικό κόστος.

Εντούτοις, το πρόβλημα ανάθεσης μπορεί να γίνει μάλλον πιο εύκαμπτο από ότι εμφανίζεται αρχικά. Στο ανωτέρω παράδειγμα, υποθέστε ότι υπάρχουν τέσσερα ταξί διαθέσιμα, αλλά ακόμα μόνο τρεις πελάτες. Κατόπιν ένας τέταρτος στόχος μπορεί να εφευρεθεί, ίσως αποκαλούμενη "συνεδρίαση που δεν κάνει ακόμα τίποτα", με ένα κόστος 0 για το ταξί που ορίζεται. Το πρόβλημα ανάθεσης μπορεί έπειτα να λυθεί ως συνήθως και να δώσει ακόμα την καλύτερη λύση στο πρόβλημα.

Τα παρόμοια τεχνάσματα μπορούν να παιχτούν προκειμένου να επιτραπούν περισσότεροι στόχοι από τους πράκτορες, στόχοι στους οποίους οι πολλαπλάσιοι πράκτορες πρέπει να διοριστούν (παραδείγματος χάριν, μια ομάδα περισσότερων πελατών από θα ταιριάξει σε ένα ταξί), ή μεγιστοποιώντας το κέρδος παρά την ελαχιστοποίηση του κόστους.

Στη γενικότερη κατηγορία ανάθεσης εργασιών ανήκει και το πρόβλημα προγραμματισμού χρονοδιαγράμματος. Ο προγραμματισμός χρονοδιαγράμματος αποτελείται βασικώς από την ανάθεση διαφόρων γεγονότων σε έναν πεπερασμένο αριθμό χρονικών περιόδων κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιείται ένα ορισμένο σύνολο περιορισμών. Στα προβλήματα χρονοδιαγράμματος συνήθως εξετάζονται δύο τύποι περιορισμών, οι αποκαλούμενοι σκληροί περιορισμοί (hard constraints), οι οποίοι πρέπει να εκπληρωθούν κάτω από όλες τις περιστάσεις και οι μαλακοί περιορισμοί (soft constraints) οι οποίοι πρέπει να εκπληρωθούν αν είναι δυνατόν. Σε μερικές περιπτώσεις, δεν είναι εφικτό να ικανοποιηθούν πλήρως όλοι οι περιορισμοί και στόχος της βελτιστοποίησης τελικά αποτελεί η εύρεση καλών λύσεων υπαγόμενων σε ορισμένα ποιοτικά κριτήρια (που ελαχιστοποιούν τον αριθμό παραβιασμένων περιορισμών, ή, εναλλακτικά που μεγιστοποιούν τον αριθμό ικανοποιημένων σκληρών περιορισμών, ενώ ο αριθμός των παραβιασμένων μαλακών περιορισμών ελαχιστοποιείται). Ο προγραμματισμός χρονοδιαγράμματος προκύπτει με πολλές διαφορετικές μορφές που διαφέρουν κυρίως στο είδος των γεγονότων. Μέχρι το μέσο της δεκαετίας του ’90, είχε ήδη προταθεί ότι η ενσωμάτωση ποσοστού τοπικής αναζήτησης στους εξελικτικούς αλγόριθμους, θα βελτίωνε την ποιότητα των τελικών λύσεων, με αποτέλεσμα να προκύψουν πειράματα με κατευθυνόμενη και στοχευόμενη μετάλλαξη.

1.2 Περιγραφή Μεθευρετικών Αλγορίθμων

Στο δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου, ακολουθεί η εισαγωγή της έννοιας των μεθευρετικών αλγορίθμων καθώς και οι κατηγορίες αυτών .

Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι είναι μέθοδοι επίλυσης, που συνδυάζουν διαδικασίες τοπικής αναζήτησης και υψηλότερου επιπέδου στρατηγικές για να δημιουργήσουν μια διαδικασία που είναι ικανή να ξεφύγει από κάποιο τοπικό ελάχιστο. Χρησιμοποιούνται για να επιλύσουμε προβλήματα για τα οποία γνωρίζουμε πολύ λίγα που μπορούν να μας βοηθήσουν, δε γνωρίζουμε πως θα μοιάζει η βέλτιστη λύση, δε γνωρίζουμε πως θα τη βρούμε με κάποια συγκεκριμένη, δημοφιλή, τακτική και η πλήρη απαρίθμηση των λύσεων είναι αδύνατη, λόγω του εύρους του πεδίου των λύσεων. Όταν όμως δοθεί μια οποιαδήποτε λύση μπορούμε να τη δοκιμάσουμε και να κρίνουμε πόσο ικανοποιητική είναι . Ένα βασικό χαρακτηριστικό σχεδόν όλων των μεθευρετικών αλγορίθμων, είναι η επεξεργασία τυχαίων αναζητήσεων και μεθόδων όπως το hill-climbing και γενικότερα παραδοσιακών αλγορίθμων σαν υπό διαδικασίες τους. Άλλα βασικά χαρακτηριστικά τους και συγκεκριμένα μιας ολόκληρης οικογένειας μεθευρετικών αλγορίθμων, των γενετικών, είναι ότι πίσω από τη σύλληψή τους κρύβεται ένα φαινόμενο που συναντάμε στη φύση. Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι μπορούν να χωριστούν σε διάφορες κατηγορίες και τους έχουν αποδοθεί πολλές και διάφορες κατηγορίες από διάφορους ερευνητές. Ο διαχωρισμός τους σε κατηγορίες γίνεται ανάλογα με τις λύσεις τις οποίες χρησιμοποιούν. Υπάρχουν αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν μία λύση και κάνουν αναζήτηση στη γειτονιά αυτής της λύσης, οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν μια λύση και οι αλγόριθμοι που έχουν έναν πληθυσμό από λύσεις οι οποίες προσπαθούν να κάνουν αναζήτηση σε όλο τον χώρο των λύσεων. Φυσικά υπάρχουν και υβριδικές μορφές αυτών των δύο κατηγοριών (hybrid algorithms). Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν μία λύση και κάνουν εξερεύνηση στην γειτονιά αναζήτησης γύρω από την λύση έχουν πάρα πολύ ισχυρές δυνατότητες εκμετάλλευσης ή εντατικοποίησης της περιοχής, γύρω από την λύση. Από την άλλη μεριά οι αλγόριθμοι που έχουν πληθυσμό λύσεων, έχουν πολύ ισχυρές δυνατότητες εξερεύνησης ή διάχυσης σε όλο τον χώρο λύσεων. Υπάρχουν όμως και στρατηγικές που συνδυάζουν τα παραπάνω. Οι ευρετικοί αλγόριθμοι επικεντρώνονται στην επίλυση προβλημάτων παραγωγής. Οι συνηθισμένοι αλγόριθμοι προχωρούν στη διαδικασία επίλυσης, χωρίς να γνωρίζουν εκ των προτέρων ποια από τα μονοπάτια που ακολουθούν, οδηγούν σε αδιέξοδο. Σε πραγματικά προβλήματα όμως, ο αριθμός των συνδυασμών που καταφθάνουν σε πραγματικές καταστάσεις είναι αρκετά μεγάλος, φαινόμενο που μεταμορφώνει την επίλυσή τους σε μια χρονοβόρα διαδικασία. Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο χρησιμοποιούνται αλγόριθμοι ευρετικής αναζήτησης, οι οποίοι στοχεύουν τόσο στη μείωση του χρόνου επίλυσης όσο και στη μείωση του αριθμού καταστάσεων που εξετάζει ένας αλγόριθμος. Ο ευρετικός μηχανισμός είναι μια τεχνική , που στηρίζεται στην πληροφορία εκείνη η οποία αξιολογεί ποιο μονοπάτι δεν οδηγεί σε θεμιτό αποτέλεσμα. Με τη χρησιμοποίηση του συγκεκριμένου μηχανισμού, ο χρόνος που ξοδεύεται μπορεί να μειωθεί σημαντικά, εφόσον δίνεται το πλεονέκτημα της δυνατότητας πρόβλεψης των καταστάσεων που δεν οδηγούν πουθενά και γι' αυτό τον λόγο μπορούν να κλαδευτούν. Λαμβάνοντας υπόψη την αποδοτικότητα των μηχανών, τα στοιχεία πρέπει να φορτωθούν πρώτα στη μηχανή που μπορεί να τελειώσει πιο γρήγορα. Είναι επιθυμητό να αυξηθεί η χρησιμότητα της μηχανής ή να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός χρόνος ροής.

Η διαδικασία Shifting Bottleneck Procedure (SBP) που δημιούργησε ο Adams το 1988 εμπνεύστηκε από τη θεωρία των περιορισμών, είναι η επικρατέστερη τεχνική, στην οποία βασίζονται οι ευρετικοί αλγόριθμοι. Η βασική ιδέα είναι η αναγωγή ενός προβλήματος m μηχανών σε επιμέρους m προβλήματα μιας μηχανής. Το κάθε επιμέρους πρόβλημα λύνεται μεμονωμένα και στη συνέχεια ανάλογα με τη λύση, οι αντίστοιχες μηχανές ιεραρχούνται σύμφωνα με την επίδοσή τους. Η μηχανή με την καλύτερη δυνατή λύση χαρακτηρίζεται ως "bottleneck" και έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα από τις άλλες. Στη συνέχεια η μηχανή αυτή θεωρείται σαν μηχανή αναφοράς και επομένως όλες οι προηγούμενες εργασίες επαναπροσδιορίζονται, με τα νέα όμως δεδομένα. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και για τις υπόλοιπες μηχανές. Αξίζει να αναφερθεί ότι η I/O "bottleneck" διαδικασία στα παράλληλα συστήματα υπολογιστών έχει πρόσφατα ξεκινήσει να δέχεται αυξανόμενο ενδιαφέρον και το μεγαλύτερο ποσοστό της προσοχής επικεντρώνεται στη βελτίωση της απόδοσης των I/O συσκευών, χρησιμοποιώντας χαμηλού επιπέδου παραλληλισμό. Μια άλλη κατηγορία αλγορίθμων είναι αυτή των γενετικών. Ο γενετικός αλγόριθμος είναι αλγόριθμος αναζήτησης λύσεων και επίλυσης προβλημάτων. Αρχικά εξελίσσει ένα σύνολο πιθανών λύσεων μέχρι να βρεθεί εκείνη που ικανοποιεί το ζητούμενο. Η βασική ιδέα είναι ότι μια συγκεκριμένη λύση θα μεταδώσει το περιεχόμενό της το οποίο είναι μια πληροφορία , στους απογόνους της με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι μια καλή λύση. Όσο πιο καλή είναι μία λύση, τόσο μεγαλώνει η πιθανότητα να μεταδώσει την πληροφορία της, δηλαδή με άλλα λόγια επικρατεί η ισχυρότερη. Η παρουσίαση των γενετικών αλγορίθμων έγινε από τον Friedberg 1958, ο οποίος χρησιμοποίησε και την Fortran στην προσπάθειά του να επιλύσει κάποια προβλήματα. Το 1975 ο Holland ενίσχυσε αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιώντας σειρές bits για να αναπαραστήσει λειτουργίες με τρόπο ώστε κάθε συνδυασμός bits να είναι μια έγκυρη λειτουργία. Στον προγραμματισμό παραγωγής η μέθοδος γενετικών αλγορίθμων εφαρμόστηκε από τον Davis μόλις το 1985, ο οποίος κατάφερε να κατασκευάσει μια προτιμημένη διαταγή των διαδικασιών για κάθε μηχανή. Νέα ώθηση στο χώρο έδωσαν οι Falkenauer και Bouffouix το 1991, οι οποίοι οδήγησαν στην εισαγωγή ενός μοντέλου κωδικοποίησης των διαδικασιών που πραγματοποιούνται σε μια μηχανή κατά την λειτουργία της. Ακόμα πιο πρόσφατα, μόλις το 1955, ο Koyabashi εισήγαγε μια νέα τεχνική, σύμφωνα με την οποία ένα χρωμόσωμα είναι μια σειρά από σύμβολα μήκους n και κάθε σύμβολο αναγνωρίζει μια διαδικασία που πρόκειται να ανατεθεί σε μια μηχανή. Τέλος, πιο πρόσφατα, ο Shi το 1997, εφαρμόζει μια τεχνική διασταυρώσεων, που διαιρεί τυχαία έναν αυθαίρετο επιλεγμένο σύντροφο σε δύο υποσύνολα, από τα οποία παράγεται ο απόγονος.

1.3 Κατηγορίες Αλγορίθμων

Παρακάτω ακολουθούν τέσσερις κατηγορίες αλγορίθμων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται για να αποφύγουν το τοπικό ελάχιστο: 1) Επαναληπτικές διαδικασίες που αρχίζουν από διαφορετικές αρχικές λύσεις. Χαρακτηριστικότεροι εκπρόσωποι αυτής της κατηγορίας είναι οι αλγόριθμοι πολυεναρκτήριας τοπικής αναζήτησης (multistart local search), οι αλγόριθμοι επαναληπτικής τοπικής αναζήτησης (iterated local search) και η μέθοδος της διαδικασίας άπληστης τυχαιοποιημένης προσαρμοστικής αναζήτησης (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure GRASP), 2) Αλγόριθμοι που δέχονται γειτονικές κινήσεις που δεν βελτιώνουν τη λύση. Σε αυτές τις μεθόδους μία κίνηση που δεν βελτιώνει τη λύση μπορεί να γίνει υπό κάποιες συνθήκες αποδεκτή. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί σε μία από τις επόμενες κινήσεις να ξεφύγουμε από το τοπικό ελάχιστο και να οδηγηθούμε σε κάποιο επόμενο τοπικό ελάχιστο, το οποίο να είναι καλύτερο από το τρέχον τοπικό ελάχιστο. Οι δύο πιο χαρακτηριστικοί αλγόριθμοι που εκφράζουν αυτήν την κατηγορία και στην ουσία δημιούργησαν το χώρο των μεθευρετικών αλγορίθμων, είναι η προσομοιωμένη ανόπτηση (simulated annealing) και η περιορισμένη αναζήτηση (tabu search), 3) Αλγόριθμοι που αλλάζουν την γειτονιά της αναζήτησης. Αυτή η κατηγορία των αλγορίθμων αποτελείται από αλγορίθμους , οι οποίοι όταν κολλήσουν σε κάποιο τοπικό ελάχιστο αλλάζουν τον αλγόριθμο που χρησιμοποιούν για την αναζήτηση σε γειτονικά σημεία του χώρου λύσεων. Οι χαρακτηριστικές μέθοδοι αυτής της κατηγορίας είναι ο αλγόριθμος μεταβλητής γειτονιάς αναζήτησης (Variable Neighborhood Search - VNS) και ο αλγόριθμος επέκτασης της γειτονιάς αναζήτησης (Expanding Neighborhood Search - ENS), 4) Αλγόριθμοι που αλλάζουν την αντικειμενική συνάρτηση ή κάποια από τα δεδομένα του προβλήματος. Έχουν προταθεί αρκετές ευρετικές για την επίλυση του GAP. 5) Αναλυτικοί αλγόριθμοι. Οι ακριβείς ή αναλυτικοί αλγόριθμοι όπως ονομάζονται εγγυώνται την εύρεση, για κάθε πεπερασμένη περίπτωση μεγέθους ενός συνδυαστικού προβλήματος βελτιστοποίησης, μιας βέλτιστης λύσης σε ορισμένο χρονικό ορίζοντα. Εντούτοις, για τα χαρακτηριστικά συνδυαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης, όπως το πρόβλημα ανάθεσης εργασιών που είναι συνήθως κλάσης NP-hard, δεν υπάρχουν αλγόριθμοι που να λύνουν τα προβλήματα αυτά σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως οι ακριβείς αλγόριθμοι χρειάζονται εκθετικό χρόνο υπολογισμού των λύσεων που στις περισσότερες περιπτώσεις, οδηγεί σε μη πρακτικό υπολογιστικό φορτίο για τις πραγματικές εφαρμογές μεγάλης κλίμακας. Η οικογένεια των ακριβών μεθόδων είναι αρκετά μεγάλη αλλά οι πιο κοινές μέθοδοι για τα προβλήματα προγραμματισμού και ανάθεσης εργασιών είναι η μέθοδος διακλάδωσης και οριοθέτησης, ο μικτός ακέραιος προγραμματισμός και οι μέθοδοι αποσύνθεσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:

Βιβλιογραφία-Background

2.1 Τεχνικές και Αλγόριθμοι επίλυσης του GAP προβλήματος

Στο πρώτο μέρος του δευτέρου κεφαλαίου , παρουσιάζονται διάφοροι εξελικτικοί και μεθευρετικοί αλγόριθμοι, που ασχολούνται με το Γενικευμένο Πρόβλημα Ανάθεσης (General Assignment Problem).

Έχουν προταθεί αρκετές ευρετικές τεχνικές για την επίλυση του GAP. Οι Martello και Toth (1981, 1990) [3,4] πρότειναν έναν συνδυασμό τοπικής έρευνας και άπληστης μεθόδου. Ο Osman (1995) [5] ανέπτυξε νέους αλγορίθμους, Προσομοιωμένης Ανόπτησης και Έρευνας Ταμπού για να διερευνήσει την απόδοσή τους στο GAP. Οι Chu και Beasley (1997) [6] παρουσίασαν έναν Γενετικό Αλγόριθμο ο οποίος προσπαθεί να βελτιώσει τη δυνατότητα υλοποίησης και βελτιστοποίησης ταυτόχρονα. Διάφοροι ερευνητικοί αλγόριθμοι ποικίλου βάθους. Αλγόριθμοι Tabu Search [7] βασισμένοι σε Αλυσίδα Απόρριψης, προσεγγίσεις Επανασύνδεσης Διαδρομής, Βελτιστοποίηση με Αποικία Μυρμηγκιών και άλλοι. Η αρχική αποικία των μελισσών κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας GRAH αλγόριθμους. Η άπληστη ευρετική δημιουργεί μία λύση ως εξής: Σε κάθε βήμα, επιλέγεται το επόμενο καθήκον προς ανάθεση, επιλέγεται ο πράκτορας στον οποίον πρόκειται να ανατεθεί το επιλεγμένο καθήκον καθώς επίσης επαναλαμβάνονται τα δύο αυτά βήματα μέχρι όλα τα καθήκοντα να έχουν ανατεθεί σε κάποιον πράκτορα. Στην διαδικασία GRAH η επιλογή είναι πιθανολογική, επηρεασμένη κατά μιας συνάρτησης πιθανότητας. Η συνάρτηση αυτή αναβαθμίζεται σε κάθε επανάληψη μέσω ανατροφοδότησης, χρησιμοποιώντας τα χαρακτηριστικά των καλών λύσεων.

Η Διανυσματοποίηση ενός Αλγορίθμου Δημοπρασίας για το γραμμικό πρόβλημα καταμερισμού του κόστους αποτελεί μια πρόταση του Mohammad M.Amini [8]. Είναι ένας από τους πιο πρόσφατους αλγοριθμικούς σχεδιασμούς για το γραμμικό πρόβλημα καταμερισμού του κόστους, όπου επωφελήθηκε σημαντικά από τις εξελίξεις στην τεχνολογίας των υλικών, είναι ο αλγόριθμος δημοπρασίας του Bertsekas. Θεωρητικές και υπολογιστικές μελέτες έχουν δείξει ότι, ο αλγόριθμος δημοπρασίας για το γραμμικό πρόβλημα καταμερισμού του κόστους, Bertsekas, είναι παγκοσμίως αποδεκτός και αποτελεσματικός σε παράλληλους ή μαζικά παράλληλους επεξεργαστές. Ως εκ τούτου, η διανυσματοποίηση του αλγορίθμου δημοπρασίας μπορεί περίπου να διπλασιάσει τη μέση λύση επιτάχυνσης της παράλληλης εφαρμογής. Η εφαρμογή του αλγορίθμου δημοπρασίας σε παράλληλους και μαζικά παράλληλους υπολογιστές, έχει δείξει σημαντική επιτάχυνση στην τάξη των τεσσάρων έως δέκα. Η έρευνα για την ανάπτυξη αποτελεσματικής μεθοδολογικής λύσης για το γραμμικό πρόβλημα εκχώρησης κόστους, αποτελεί σημαντικό κίνητρο για πολλούς λόγους: 1) Το γραμμικό πρόβλημα καταμερισμού του κόστους, είναι σημαντικό σε πολλά πρακτικά πλαίσια , 2) Υπάρχουν περιπτώσεις όπου το πρόβλημα ανάθεσης, εμφανίζεται ως ένα υπό-πρόβλημα σε διάφορες μεθόδους, για την επίλυση μεγάλης κλίμακας σύνθετων προβλημάτων και 3) Η ανάπτυξη αποτελεσματικών προσεγγιστικών λύσεων για άλλες κατηγορίες προβλημάτων των δικτύων, έχει σε μεγάλο βαθμό επωφεληθεί από τον σχεδιασμό αποτελεσματικών μεθοδολογιών για το πρόβλημα του καταμερισμού κόστους. Πραγματικά η διανυσματοποίηση του αλγόριθμου αυτού βελτιώνει την αποτελεσματικότητα κατά έναν παράγοντα από τους δύο. Ως εκ τούτου, το συμπέρασμα είναι πως οι παράλληλες εφαρμογές μπορούν να πολλαπλασιαστούν , αφού ψηφιοποιηθεί ο αλγόριθμος.

Στο άρθρο [9] προτείνεται χρήση του Γενικευμένου Προβλήματος Ανάθεσης για τον προγραμματισμό του χώρου Rosat Telescope. Το Rosat είναι ένα δορυφορικό παρατηρητήριο ακτίνων Χ. Ο προγραμματισμός της αποστολής, αποτελείται από μια προεπιλεγμένη και μεγάλη συλλογή στόχων. Έχει αποδειχθεί ότι η χαλάρωση του προβλήματος προγραμματισμού Rosat, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης και ότι οι λύσεις που περιλαμβάνονται σε αυτή την μέθοδο, οδηγούν σε καλές λύσεις των μη χαλαρών προβλημάτων.

Η ελαχιστοποίηση δύο χρονικών επιπέδων του προβλήματος ανάθεσης [10], αφορά την έννοια του χρόνου σε δύο στάδια για την ελαχιστοποίηση του προβλήματος ανάθεσης. Η μελέτη περιλαμβάνει επίπεδα της διαδικασίας λήψης αποφάσεων, που αφορούν το χαμηλότερο και το υψηλότερο επίπεδο λήψης αποφάσεων. Το πρόβλημα αυτό είναι ένα μη κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης και έχει μελετηθεί μέσω δύο πολύ standard προβλημάτων ανάθεσης: του συμβατικού τρόπου της ελαχιστοποίησης κόστους και της ελαχιστοποίησης του συνολικού χρόνου για τα προβλήματα ανάθεσης. Στο άρθρο [11] εισάγεται η μεθοδολογία μέσω των δύο μεθόδων, για την επίλυση του πραγματικού προβλήματος της διανομής των αναψυκτικών. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού αριθμού οχημάτων που έχουν χρησιμοποιηθεί. Οι προτεινόμενες μέθοδοι είναι σύνθετες διαδικασίες, που αφορούν τη λύση προβλημάτων συσκευασίας σε κάδους (bins) και την εφαρμογή μιας βασισμένης διαδικασίας ανάθεσης ή μιας γενικευμένης διαδικασίας διέλευσης αντίστοιχα, για βελτίωση. Τα υπολογιστικά αποτελέσματα δείχνουν ότι οι παραπάνω μέθοδοι, είναι σε θέση να επιτύχουν καλύτερες λύσεις από άλλες μεθόδους. Ενώ τα στοιχεία των μελετών για τις παραπάνω προτεινόμενες μεθόδους είναι ενθαρρυντικά, υπάρχει περεταίρω περιθώριο βελτίωσης τους. Μια περιοχή των μελλοντικών εργασιών, είναι η εξέταση άλλων ειδών τοπικής αναζήτησης, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πιο σύνθετες διαδικασίες και περιλαμβάνουν βελτιώσεις της ποιότητας των λύσεων.

Στο άρθρο [12] οι συγγραφείς αναφέρονται στις εργασίες συντήρησης του οδικού δικτύου το χειμώνα και περιλαμβάνει μια σειρά από προβλήματα λήψης αποφάσεων, σε στρατηγικό, τακτικό, επιχειρησιακό και πραγματικού χρόνου επίπεδα. Οι διαδικασίες αυτές περιλαμβάνουν τη διάδοση χημικών ουσιών και λειαντικών, όργωμα χιονιού, φόρτωση χιονιού σε φορτηγά και ανάσυρση χιονιού στους χώρους τελικής διάθεσης. Ο σχεδιασμός περιλαμβάνει ένα μοντέλο και δύο ευρετικές προσεγγίσεις λύσεων , τα οποία βασίζονται σε μαθηματική βελτιστοποίηση για το πρόβλημα διαχωρισμού ενός οδικού δικτύου σε τομείς και την κατανομή των τομέων αυτών στους τελικούς χώρους όπου θα πραγματοποιούνται οι διαδικασίες επιχείρησης διάθεσης χιονιού. Άλλα θέματα για μελλοντική έρευνα θα αφορούν την επιρροή του τομέα σχήματος και βασικής μονάδας (τμήμα οδού ή μικρή ζώνη), για τη δρομολόγηση εκχιονιστικών, τη μελέτη των επιπτώσεων των παραμέτρων (αύξηση ωριαίας δυναμικότητας, σε χώρους διάθεσης, το άνοιγμα νέων χώρων διάθεσης ή το κλείσιμο των ήδη υπαρχόντων).

Η προσέγγιση του προβλήματος ανάθεσης με ευέλικτες θέσεις εργασίας [13], αφορά το γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης, το οποίο ζητεί τη κατανομή των θέσεων εργασίας σε πόρους με το ελάχιστο κόστος ανάθεσης, υποθέτοντας ότι μια θέση εργασίας δεν μπορεί να καταμεριστεί σε πολλαπλές πηγές. Θεωρείται μια γενίκευση του προβλήματος αυτού, στην οποία κάθε μια θέση εργασίας δεν πρέπει να αποδίδεται σε έναν μόνο πόρο, αλλά η κατανάλωση των πόρων θα πρέπει να προσδιορίζεται εντός των ορίων συγκεκριμένης εργασίας. Σε αυτή την έκδοση μεγιστοποίησης του κέρδους του γενικού προβλήματος ανάθεσης, ένας υψηλότερος βαθμός κατανάλωσης των πόρων, αυξάνει τα έσοδα που συνδέονται με την κάθε εργασία. Το μοντέλο αυτό επιτρέπει τα έσοδα κάθε εργασίας ανά μονάδα πόρων να μειώνονται ως συνάρτηση της συνολικής κατανάλωσης των πόρων, η οποία επιτρέπει μοντελοποίηση της ποσότητας εκπτώσεων. Ο στόχος είναι να καθοριστούν οι αναθέσεις εργασίας και τα επίπεδα κατανάλωσης πόρων που μεγιστοποιούν το συνολικό κέρδος. Η μέθοδος του άρθρου [14] αποτελεί μία επέκταση του προϋπολογιζόμενου προβλήματος μέγιστης κάλυψης (Budgeted Maximum Coverage Problem) και έχει σημαντικές εφαρμογές στον ασύρματο προγραμματισμό. Χρησιμοποιείται μια παραλλαγή του άπληστου αλγόριθμου.

Στο [15] προτείνεται μία μέθοδος που ασχολείται με την ανάλυση τυχαίων περιπτώσεων προβλημάτων βελτιστοποίησης και παρέχει πολύτιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά και τις ιδιότητες των λύσεων των προβλημάτων, της εφικτής περιοχής καθώς και των βέλτιστων τιμών, ειδικά σε περιπτώσεις μεγάλης κλίμακας. Μία κατηγορία των προβλημάτων που έχουν μελετηθεί εντατικά, είναι τα προβλήματα εκχώρησης, τα οποία αντιπροσωπεύουν βασικά μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα και άλλες γειτονικές περιοχές της επιστήμης και της τεχνολογίας και συχνά συναντώνται σε διάφορες εφαρμογές. Παρακάτω γίνεται αναφορά στον αλγόριθμο Προσαρμοστικής Μνήμης (Adaptive Memory). Ο αλγόριθμος της προσαρμοστικής μνήμης παρουσιάστηκε αρχικά από τους Rochat και Taillard [16], για την επίλυση προβλημάτων δρομολόγησης οχημάτων και αποτελεί μέρος του αλγορίθμου της τοπικής αναζήτησης. Χρησιμοποιείται επίσης και σε άλλους μεθευρετικούς αλγόριθμους που έχουν από μία μέχρι και πολλές λύσεις. Τα βήματα της μεθόδου αυτής είναι τα παρακάτω: 1) Κράτηση προσαρμοστικής λύσης από καλές λύσεις, 2) Σχεδιασμός λύσεων για την μορφοποίηση νέας λύσης, 3)

Βελτιώσεις μη εφικτών λύσεων, 4) Εφαρμογή μεθευρετικού αλγορίθμου για την βελτίωση.

Το άρθρο [17] αφορά έναν αλγόριθμο ο οποίος εφαρμόζεται σε ένα πρόβλημα ανάθεσης το οποίο υπόκειται σε μια ειδική σειρά από περιορισμούς προερχόμενους από την πλευρά. Το πρόβλημα βρίσκει εφαρμογή στο σχεδιασμό των εργαλείων καρουζέλ, για ορισμένα συστήματα παραγωγής. Το μοντέλο που προκύπτει, αποτελεί μια ειδική περίπτωση των προβλημάτων διάταξης απαγορευμένων εγκαταστάσεων, στην οποία απαγορεύεται η οποιαδήποτε εγκατάσταση σε ορισμένες ζώνες. Τα όρια για τον αλγόριθμο δημιουργούνται με την χαλάρωση των περιορισμών από την πλευρά και την χρήση της ουγγρικής μεθόδου, για τη επίλυση του προβλήματος ανάθεσης που προκύπτει. Συμπερασματικά, ο αλγόριθμος αυτός είναι ικανός να επιλύσει προβλήματα μικρού και μεγάλου μεγέθους σε εύλογο χρόνο υπολογισμού. Είναι μια δυνητική χρήσιμη προσθήκη στην περιοχή του μηχανικού σχεδιασμού παραγωγής. Το πρόβλημα ανάθεσης στο [18] προσεγγίζεται εφαρμόζοντας έναν γενετικό αλγόριθμο, σε συνδυασμό με έναν ευρετικό αλγόριθμο συσκευασίας οι οποίοι παρουσιάζονται για το RS/WA πρόβλημα, το οποίο είναι ένα γενικευμένο πρόβλημα δύο διαστάσεων, πολλαπλών τύπων προβλημάτων συσκευασίας. Οι αλγόριθμοι αυτοί αποδείχθηκαν αποτελεσματικοί με αριθμητικά παραδείγματα.

Συνεχίζουμε με την παράθεση των αλγορίθμων «Greedy Randomized Adaptive Search Procedures» [19,20]. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για την επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης, στην οποία κάθε επανάληψη αποτελείται από δύο βασικές φάσεις: 1) την κατασκευή και 2) την τοπική αναζήτηση. Η φάση της κατασκευής οδηγεί στην δημιουργία μιας εφικτής λύσης της οποίας η περιοχή γειτονιάς έχει διερευνηθεί, μέχρι να βρεθεί ένα τοπικό ελάχιστο κατά την διάρκεια της φάσης της τοπικής αναζήτησης. Η καλύτερη συνολική λύση αποθηκεύεται ως το τελικό αποτέλεσμα. Ο αλγόριθμος του άρθρου [21] προσπαθεί να διαμορφώσει τη φυσική συμπεριφορά των μελισσών όσον αφορά τη συλλογή τροφίμων. Οι μέλισσες χρησιμοποιούν διάφορους μηχανισμούς για να εντοπίσουν τις πηγές τροφίμων και να δημιουργήσουν νέες. Αυτό τις καθιστά ως έναν καλό υποψήφιο για την ανάπτυξη νέων αλγορίθμων, για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Ο αλγόριθμος απαιτεί τον ορισμό ενός αριθμού παραμέτρων, όπως ο αριθμός των μελισσών στον πληθυσμό, ο αριθμός των σημείων που έχουν επιλεγεί από το συνολικό αριθμό των σημείων που επισκέφτηκαν, ο αριθμός των μελισσών που στρατολογήθηκαν για τα καλύτερα σημεία και το κριτήριο τερματισμού. Ο αλγόριθμος ξεκινάει με τις ανιχνεύτριες μέλισσες να τοποθετούνται τυχαία σε έναν χώρο έρευνας και στην συνέχεια αξιολογούνται οι τιμές fitness των σημείων που επισκέφτηκαν οι ανιχνεύτριες. Επιλέγεται ένας αριθμός μελισσών με τις υψηλότερες τιμές ως «επιλεγμένες μέλισσες» και κατόπιν επιλέγονται τα σημεία επίσκεψης για μια έρευνα στη γειτονιά. Οι υπόλοιπες μέλισσες του πληθυσμού, τοποθετούνται τυχαία γύρω από το χώρο έρευνας ψάχνοντας για νέες πιθανές λύσεις. Αυτά τα βήματα επαναλαμβάνονται μέχρι να ικανοποιηθεί ένα κριτήριο τερματισμού. Μέχρι τώρα ο συγκεκριμένος αλγόριθμος εφαρμόζεται σε προβλήματα συνεχούς βελτιστοποίησης και θεωρείται επίσης πολύ αποτελεσματικός για την επίλυση μεγαλύτερων σε μέγεθος γενικευμένων προβλημάτων ανάθεσης. Παρ' όλα αυτά πιστεύεται πως η μέθοδος αυτή μπορεί να βελτιωθεί περισσότερο για την επίλυση μεγαλύτερων προβλημάτων ανάθεσης, εάν πραγματοποιηθεί μια καλύτερη και πιο προσεκτική βελτιστοποίηση των παραμέτρων. Αυτό δρομολογείται να γίνει μελλοντικά.

Επίσης, έχουν αναπτυχθεί ορισμένες επεκτάσεις του χρωματικού προγραμματισμού [22]. Αυτές συνίστανται στην ανάθεση σε κάθε κόμβο μια σειρά διαδοχικών χρωμάτων. Επιπλέον, για κάθε προσανατολισμένο τόξο (ij), σε ένα γράφημα, ένα σύνολο διαδοχικών κεραιών $T(ij)$ είναι δεδομένο. Είναι απαραίτητο να βρεθεί μια εκχώρηση χρωμάτων σε κόμβους, έτσι ώστε για κάθε τόξο $(i, j\ )$, τα πρώτα χρώματα $f\ (i)\ ,f\ (j)$ δοθέντος στους κόμβους i και j, να ικανοποιούν τη σχέση $f(i) - f(1\ )\ \neq\ T_{ij}$. Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκχώρηση συχνοτήτων σε μια συλλογή σταθμών καθώς και για τα προβλήματα χρωματικού προγραμματισμού.

Η μέθοδος του άρθρου [23] αφορά την επίλυση γενικών ακέραιων και γραμμικών προβλημάτων. Η στρατηγική της μεθόδου βασίζεται στο διαχωρισμό του συνόλου των μεταβλητών μέσα στο ακέραιο υποσύνολο και στο συνεχές υποσύνολο. Οι ακέραιες μεταβλητές επιδιορθώνονται και αντικαθίστανται στο αρχικό πρόβλημα. Αν το αρχικό πρόβλημα περιείχε συνεχείς μεταβλητές, το πρόβλημα γίνεται καθαρά συνεχές, του οποίου η λύση μπορεί να επιτευχθεί μέσω ενός προγράμματος γραμμικής λύσης για τον προσδιορισμό της αντικειμενικής αξίας, που αντιστοιχεί στις επιδιορθωμένες μεταβλητές. Αν από την άλλη το αρχικό πρόβλημα ήταν καθαρά ακέραιο, απλοί αλγεβρικοί κανονισμοί θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της αντικειμενικής αξίας. Το άρθρο [24] εισήγαγε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο sub gradient ο οποίος χρησιμοποιείται για την επίλυση του γενικευμένου προβλήματος ανάθεσης. Ένας τροποποιημένος αλγόριθμος sub gradient εισάγεται για το γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης, στον οποίο, όπως στο κλασσικό πρόβλημα ανάθεσης, ασχολείται με το ελάχιστο κόστος εκχώρησης συντελεστών σε θέσεις εργασίας. Ωστόσο, το γενικευμένο πρόβλημα, επιτρέπει διαφορές στις επιδόσεις των εργασιών μεταξύ των παραγόντων και ως εκ τούτου επιτρέπει και την πιθανότητα σε κάθε παράγοντα να μπορεί να ανατεθεί παραπάνω από μια εργασία, εφ’ όσον κάθε εργασία είναι τελική και οι συνολικοί πόροι που είναι διαθέσιμοι σε κάθε παράγοντα να μην υπερβαίνονται. Πρόσφατες έρευνες περιλαμβάνουν μελλοντική μελέτη της συμπεριφοράς του αλγορίθμου καθώς και προεκτάσεις που μπορεί να έχει σε άλλες εφαρμογές.

Συνεχίζουμε με μια παραλλαγή του προβλήματος ελαχιστοποίησης του χρόνου [25]. Είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης χρόνου, το οποίο ασχολείται με την κατανομή των N θέσεων εργασίας σε άτομα. Μια θέση εργασίας πρόκειται να διατεθεί σε ακριβώς ένα άτομο και κάθε άτομο αναλαμβάνει τουλάχιστον μια θέση εργασίας. Αν ένα άτομο αναλάβει παραπάνω από μια θέση εργασίας, τις εκτελεί τη μία μετά την άλλη στη σειρά. Ο σκοπός είναι να βρεθεί μια εφικτή διαδικασία ανάθεσης, η οποία, θα ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος, για την ολοκλήρωση όλων των εργασιών. Προτείνεται, η βέλτιστη αυτή ανάθεση, να βρεθεί μέσω της lexi αναζήτησης. Το γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης έχει εφαρμοστεί σε πολλά προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Στην περίπτωση του άρθρου [26] εξετάζεται μια λύση για το πρόβλημα βιο-στόχων. Αναλύεται δηλαδή το γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης από μια πολυκριτηριακή άποψη, να φιλοξενήσει κάποιες καταστάσεις του πραγματικού κόσμου όπου περισσότεροι από ένας στόχος εμπλέκονται. Προτείνεται μια ευρετική λύση LP για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, καθώς επίσης πραγματοποιούνται και εκτεταμένα υπολογιστικά πειράματα για την αξιολόγηση της απόδοσης της μεθόδου. Τα αποτελέσματα έχουν δείξει πως η προτεινόμενη προσέγγιση είναι σε θέση να δημιουργήσει καλές προσεγγίσεις.

Στο [27] ερευνώνται αλγόριθμοι για το γνωστό πρόβλημα εύρεσης του ελάχιστου κόστους εργασιών, έτσι ώστε κάθε εργασία να ανατίθεται σε έναν μόνο παράγονται και έτσι όλοι οι παράγοντες δεν έχουν υπερβολικό φόρτο εργασίας. Από την έρευνα μπορεί κανείς να επιλέξει δομικά στοιχεία για τον σχεδιασμό των ιδίων εξατομικευμένων αλγορίθμων. Η έρευνα αυτή επίσης αποκαλύπτει ότι, αν και κάθε μαθηματική τεχνική προγραμματισμού δοκιμάστηκε στο πρόβλημα αυτό, υπάρχει ακόμη μία έλλειψη ενός αντιπροσωπευτικού συνόλου προβλημάτων, στο οποίο ανταγωνιστικοί αλγόριθμοι απαρίθμησης μπορούν να συγκριθούν καθώς επίσης και η έλλειψη αποτελεσματικών ευρετικών. Η εργασία [28] παρουσιάζει έναν γενετικό αλγόριθμο, σαν βοήθεια στο πρόβλημα ανάθεσης σχεδίων – εργασιών. Το πρόβλημα αφορά την κατανομή των έργων – σχεδίων για τους φοιτητές. Οι φοιτητές έχουν να επιλέξουν από μια λίστα πιθανών σχεδίων, υποδηλώνοντας τις προτιμήσεις τους εκ των προτέρων. Αναπόφευκτα, κάποια από τα πιο διάσημα έργα έχουν υπερκαλυφθεί και η ανάθεση μετατρέπεται αυτόματα, σε ένα πιο περίπλοκο πρόβλημα. Ένα σαφές πλεονέκτημα του γενετικού αλγορίθμου, είναι ότι, λόγω της φυσικότητάς του, είναι εφικτό να παράγει μια σειρά έργων – σχεδίων για ανάθεση, διευκολύνοντας έτσι την συζήτηση επί της ουσίας των πολλαπλών στόχων λήψης αποφάσεων των διάφορων κατανομών. Από την άλλη, για την επίλυση του προβλήματος ανάθεσης με ασαφές κόστος/ασαφή κόστη, αντί ενός ακριβούς ελιτίστικου γενετικού αλγορίθμου γίνεται χρήσης της μεθόδου του άρθρου [29].

Η μέθοδος του [30] είναι μία μελέτη η οποία έχει σαν αντικείμενο ένα στοχαστικό πρόβλημα ανάθεσης με προσφυγή. Μόνο ένα τυχαίο υποσύνολο του συνόλου δεδομένων απαιτεί επεξεργασία. Η ανάθεση κάθε έργου σε κάθε έναν παράγοντα, έχει αποφασιστεί εκ των προτέρων και όταν το υποσύνολο των έργων που απαιτείται να εκτελεστούν είναι γνωστό, αποσπάσεις μπορούν να γίνουν, αν υπάρχουν υπερφορτωμένοι παράγοντες. Στην περίπτωση του [31] δημιουργείται μια τεχνική προγραμματισμού στόχων, με σκοπό την επίλυση την ανάθεσης πολλαπλών στόχων. Το απαιτούμενο μοντέλο διαμορφώνεται και παρουσιάζεται μια κατάλληλη μέθοδος επίλυσης. Η προτεινόμενη μέθοδος είναι μια μέθοδος αποσύνθεσης, η οποία εκμεταλλεύεται το συνολικό χαρακτηριστικό του προβλήματος ανάθεσης και μειώνει αποτελεσματικά τις υπολογιστικές προσπάθειες. Κάποια θέματα τα οποία σχετίζονται με την αποτελεσματικότητα μιας λύσης στο πρόβλημα ανάθεσης, είναι δηλωμένα και κάποιες εξειδικευμένες τεχνικές για την ανίχνευση και αποκατάσταση της απόδοσης έχουν προταθεί. Η ρύθμιση άλλων εννοιών και τεχνικών για τη χρήση τους στη λύση του προβλήματος, αποτελεί ένα ενδιαφέρον θέμα για τις μελλοντικές εργασίες της έρευνας. Η πρόθεση της μελέτης είναι να παράσχει μια ισχυρότερη βάση για την τεχνική αυτή με τη θέσπιση, ότι πρόκειται για μια γενικευμένη μέθοδο αποσύνθεσης [32]. Ως παράδειγμα για το αποτέλεσμα, δίνεται ένας αλγόριθμος αποσύνθεσης ο οποίος βασίζεται στη γνωστή μέθοδο Frank – Wolfe. Η μεταφορά αποσύνθεσης μπορεί να είναι γενική και να ποικίλλει ανάλογα με το πλήθος των διαφορετικών αναγκών.

Στο [33] οι συγγραφείς προτείνουν μία νέα μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος ανάθεσης, χρησιμοποιώντας προσαρμοσμένες τεχνικές προερχόμενες από τη στατιστική φυσική. Ο αλγόριθμος αυτός έχει μια ελκυστική οικονομική ερμηνεία και συνδέεται άμεσα με τον διακριτό αλγόριθμο πλειστηριασμών (Bertsekas). Στη μελέτη [34], τα προβλήματα ανάθεσης μεγάλης κλίμακας θεωρούνται δεδομένα. Προτείνεται μια τεχνική προσέγγιση, όπου το αρχικό σε πλήρες μέγεθος πρόβλημα προγραμματισμού συγκεντρώνεται, μέσα σε ένα άλλο, το οποίο περιέχει και άλλα προβλήματα μετρίου μεγέθους. Οι εφικτές λύσεις δημιουργούνται μέσω μιας προσέγγισης επιμερισμού, σε συνδυασμό με ορισμένα άλλα συμπληρωματικά ευριστικά. Υπολογίζεται επίσης ένα ανώτερο όριο για την απώλεια ακρίβειας.

Η μέθοδος «Multiperiod assignment» εφαρμόζεται με διάφορες παραλλαγές, χρησιμοποιώντας διαφορετικά μοντέλα βελτιστοποίησης, ανάλογα με τα προβλήματα τα οποία καλείται να επιλύσει. Μία πρώτη παραλλαγή παρουσιάζεται στο [35]. Το πρόβλημα αυτό αποτελεί ένα μοντέλο βελτιστοποίησης, το οποίο περιγράφει την κατάσταση της τοποθέτησης ατόμων στην εκτέλεση δραστηριοτήτων ή εργασίες στην πάροδο του χρόνου. Περεταίρω εργασίες θα επικεντρωθούν στην ανάπτυξη μοντέλων δικτύου για την επίλυση άλλων συνδυαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης, με σκοπό την δημιουργία και την εφαρμογή αλγορίθμων που θα εκμεταλλεύονται ειδικές κατασκευές. Έπειτα, μια δεύτερη εφαρμογή της μεθόδου αφορά μια οικογένεια ανισοτήτων, τη γενικευμένη πολυτοπική εκχώρηση. Η μελέτη παρουσιάζει υπολογιστικά αποτελέσματα για την χρήση των ανισοτήτων σε συστήματα διακλάδωσης.

Η μέθοδος της «Πολυεναρκτήριας Τοπικής Αναζήτησης» (Multi-start Local Search Methods) είναι συγκεκριμένη μέθοδος, η οποία αποτελείται από διαδικασίες οι οποίες περιλαμβάνουν μια ομάδα διαφορετικών αλγορίθμων, οι οποίοι μοιράζονται κάποια κοινά χαρακτηριστικά. Όταν παγιδευτούν σε τοπικό ελάχιστο, αρχίζει μια επανέναρξη της διαδικασίας από ένα διαφορετικό σημείο. Οι μέθοδοι περιλαμβάνουν δύο φάσεις, την πρώτη όπου δημιουργείται μία λύση και η δεύτερη η οποία επιχειρεί την βελτίωση της λύσης μέσω μιας διαδικασίας τοπικής αναζήτησης. Η μελέτη [36] παρουσιάζει μια διαδικασία με βάση το δίκτυο, για την επίλυση μιας κατηγορίας μεγάλων προβλημάτων ανάθεσης. Η διαδικασία αναπτύσσεται από ορισμένα συγκεκριμένα αποτελέσματα με εμπορευματικές ροές δικτύου και της έννοιας του κόμβου–συσσωμάτωσης σε δίκτυα. Η υπολογιστική εμπειρία δείχνει ότι τα προβλήματα με πάνω από 15.000 ακέραιες μεταβλητές, μπορούν να λυθούν σε κάτω από δέκα δευτερόλεπτα, χρησιμοποιώντας τη βελτιστοποίηση του δικτυακού λογισμικού. Η ευρετική μέθοδος του [37] βασίζεται στο πρόβλημα του χώρου αναζήτησης, για την επίλυση του γενικευμένου προβλήματος ανάθεσης.

Η επίδραση της δομής λειτουργίας της ενέργειας στην επίλυση γενικευμένων προβλημάτων ανάθεσης με τη χρήση του νευραλγικού δικτύου Hopfield [38], αφορά την περίπτωση στην οποία η σταθερότητα, η σκοπιμότητα και η πληρότητα, αποτελούν σημαντικά κριτήρια στο σχεδιασμό μεθόδων συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Τα δύο πρώτα, έχουν κατά το πλείστον διερευνηθεί ενώ το τελευταίο κριτήριο απαιτεί πιο ενδελεχή διερεύνηση. Η εργασία αυτή μπορεί να επεκταθεί και να βελτιωθεί, με την χρήση διαφόρων στρατηγικών. Το πρόβλημα αυτό το οποίο αναλύεται στο [39] περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις, γνωστά προβλήματα όπως αυτό του περιοδεύοντος πωλητή καθώς και το πρόβλημα τετραγωνικής εκχώρησης. Αυτή η νέα ενεργειακή λειτουργία γενικεύει άλλες λειτουργίες, οι οποίες προτείνονται από άλλους συγγραφείς και μέσω αυτής κάθε πρόβλημα τετραγωνικού σακιδίου μπορεί να επιλυθεί με μια κατάλληλη διαδικασία ρύθμισης παραμέτρων.

Η μέθοδος του [40] περιγράφει μια διαδικασία μετασχηματισμού, που λύνει το πρόβλημα εκχώρησης ομάδων από κάθε γραμμικό πρότυπο αλγορίθμου ανάλυσης. Η προσέγγιση μέσω της διαδικασίας μετασχηματισμού, είναι κατάλληλη για την επίλυση προβλημάτων που θεωρούνται υπό δοκιμή σε μικρό υπολογιστικό χρόνο ενώ στη μέθοδο του [41], αναπτύσσεται μια βελτιωμένη εφαρμογή της τυποποιημένης διαδικασίας του γενικευμένου προβλήματος ανάθεσης (όπου κάθε εργασία - καθήκον ανατίθεται σε έναν μόνο παράγοντα), για την δημιουργία διαδικασίας κάλυψης ανισοτήτων. Η διαδικασία η οποία προτείνεται καθώς και οι παραγόμενες ευρετικές λύσεις, μπορεί να ενδιαφέρουν φορείς, ώστε να τις «εκτοξεύσουν» σε μια στήλη προσέγγισης, όπου το γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης παίρνει την μορφή υπό-προβλήματος.

Παρακάτω θα αναφερθούμε στην «εισαγωγή των περιορισμών πλευράς» [42]**.** Οι περιορισμοί πλευράς μπορούν να εισαχθούν για διάφορους και αρκετούς λόγους. Πρώτον μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τις επιδράσεις μιας πολιτικής ελέγχου, δεύτερον, για να βελτιώσουν ένα υπάρχον μοντέλο ισορροπίας για μια συγκεκριμένη εφαρμογή, με την εισαγωγή μέσω αυτών, περισσότερων πληροφοριών οι οποίες θα αφορούν την κατάσταση της ροής κυκλοφορίας στο χέρι και τρίτον μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν περιορισμούς ροής, που μια κεντρική αρχή επιθυμεί να επιβάλλει στους χρήστες του δικτύου. Η εισαγωγή των περιορισμών πλευράς καθιστά το πρόβλημα πιο απαιτητικό από την υπολογιστική σκοπιά, το μειονέκτημα όμως αυτό μπορεί σε κάποιο βαθμό να ξεπεραστεί μέσω της χρήσης των προσεγγίσεων dualization οι οποίες ακόμη συζητούνται.

Η ανάθεση εργασιών στο [43] είναι ένα από τα βασικά βήματα, για την αποτελεσματική αξιοποίηση των δυνατοτήτων των παράλληλων υπολογιστικών συστημάτων. Το πρόβλημα ανάθεσης έργου, είναι ένα NP πλήρες πρόβλημα. Η μελέτη αυτή παρουσιάζει έναν νέο αλγόριθμο ανάθεσης έργου, ο οποίος βασίζεται στις αρχές βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων ενώ το [44] περιλαμβάνει την εισαγωγή ενός μοντέλου που ασχολείται με την ανάθεση των παραγγελιών σε κατάλληλα sub plants. Η καταλληλότητα καθορίζεται από την καταλληλότητα του χρόνου που απαιτείται για την παραγωγή μιας παραγγελίας. Στο άρθρο [45] τίθεται ένα νέο συνεταιριστικό και πολλαπλό πρόβλημα ανάθεσης της εργασίας και αναλύεται η υπολογιστική του πολυπλοκότητα. Το σενάριο του ενδιαφέροντος επικεντρώνεται στον καθορισμό σε πολλαπλά, ακατοίκητα εναέρια οχήματα, πολλαπλές εργασίες με πολλαπλούς παράλληλα στόχους. Η μέθοδος αυτή παρέχει λύσεις καλύτερες από αυτές άλλων μεθόδων και εφαρμόζεται σε μεγάλου μεγέθους προβλήματα. Η κεντρική ιδέα του άρθρου [46], μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτελεσματική ανάπτυξη και άλλων heuristics, για την επίλυση ακόμη και των πιο σκληρών προβλημάτων συνδυαστική βελτιστοποίησης.

Η διαδικασία που περιγράφεται στο [47] δραστηριοποιείται στο πολύ - επίπεδο γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης, του οποίου οι παράγοντες μπορούν να εκτελέσουν εργασίες σε παραπάνω από ένα επίπεδα. Σημαντικά προβλήματα κατασκευής, όπως αυτό του μεγέθους της παρτίδας, μπορεί εύκολα να διαμορφωθεί. Ωστόσο ο μεγάλος αριθμός των μεταβλητών καθιστά το έργο αυτό δύσκολο. Το πολύπλευρο αυτό πρόβλημα περιλαμβάνει μια σειρά από περιορισμούς ανά παράγοντα οι οποίοι είναι χρήσιμοι για την εξαγωγή απλών και λογικών περιορισμών. Μια ακόμη μέθοδος [48] παρουσιάζει την υποκατάσταση χαλάρωσης στο πρόβλημα της μέγιστης εκχώρησης ν αριθμού εργασιών σε μ αριθμό παραγόντων (με $\mu < \nu$) έτσι ώστε, κάθε εργασία να ανατίθεται σε έναν και μόνο παράγοντα οι οποίοι παράγοντες υπόκεινται σε περιορισμούς δυναμικότητας.

Η μελέτη [49] παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο, δυο νέες μέθοδοι μπορούν να συνδυαστούν για την επίτευξη του καθαρού ακέραιου προγραμματισμού. Αποδεικνύεται ότι οι μέθοδοι αυτές έχουν την ευελιξία και ικανότητα να παράγουν καλύτερες λύσεις και αποτελέσματα. Η έρευνα [31]αναπτύσσει τεχνικές προγραμματισμού στόχων ώστε να επιλύσει το πρόβλημα πολλαπλών στόχων. Για τον λόγο αυτό, προτείνεται μία μέθοδος αποσύνθεσης. Ο αλγόριθμος αυτός είναι ακόμη χρήσιμος για την ανίχνευση απόδοσης των στόχων στο πρόβλημα εκχώρησης. Αν και γενικά η αναζήτηση των tabu έχει δώσει τα καλύτερα αποτελέσματα για την συγκριτική αξιολόγηση των προβλημάτων δρομολόγησης οχημάτων, έχει παρατηρηθεί ότι απαιτούνται ουσιαστικοί υπολογιστικοί χρόνοι και αρκετές ρυθμίσεις παραμέτρων. Η μέθοδος που προτείνεται στο [50] μπορεί να επεκταθεί, προσαρμόζοντας τις θέσεις των σπόρων για να μειώσει την βέλτιστη αντικειμενική αξία για το γενικευμένο πρόβλημα εκχώρησης. Είναι μια απλή σχετικά μέθοδος για την λήψη διαλυμάτων.

Η μέθοδος του [51] παρουσιάζει ένα νευραλγικό δίκτυο αρχιτεκτονικής για το πρόβλημα ανταγωνιστικής ανάθεσης με την ενσωμάτωση και τον σχεδιασμό, μεγάλης κλίμακας και κρίσιμων κυκλωμάτων. Το πρόβλημα προϋποθέτει ότι τα στοιχεία των δύο συνόλων θα λειτουργεί με τέτοιο τρόπο, ώστε θα ελαχιστοποιεί το κόστος των ενώσεων. Επίσης κάθε στοιχείο κάθε συνόλου μπορεί να προγραμματιστεί ξεχωριστά και να συνδεθεί με άλλα στοιχεία. Η μελέτη [52] , εισάγει μια νέα προσέγγιση των προβλημάτων προγραμματισμού πορείας. Η βασική ιδέα είναι η διάσπαση του βασικού προβλήματος σε υπό-προβλήματα, κομμάτια. Κάθε ένα από τα μικρότερα αυτά προβλήματα αποτελεί ένα ζήτημα ανάθεσης στο οποίο, τα στοιχεία πρέπει να ανατεθούν σε πόρους οι οποίοι πόροι υπόκεινται σε περιορισμούς. Έτσι «χτίζεται» μια νέα ενιαία λύση, η οποία θα λαμβάνει υπ’ όψιν τους περιορισμούς που επιβάλλουν μια συγκεκριμένη δομή βασισμένη σε ένα ορισμένο χρονοδιάγραμμα.

Ο «Αλγόριθμος Επέκτασης της Γειτονιάς Αναζήτησης» είναι ένας νέος αλγόριθμος ο οποίος παρουσιάστηκε από τους *Μυγδαλά, Μαρινάκη και Παρδαλό* και έχει εφαρμοστεί επιτυχώς σε πολλές και διάφορες εφαρμογές. Τα κύρια χαρακτηριστικά του είναι: 1) Η χρήσης της μεθόδου στρατηγικών Τοπικής Αναζήτησης σε περιορισμένο κύκλο, 2) Η ικανότητα του αλγορίθμου να αλλάζεις καθ’ όλη την διάρκεια της αναζήτησης και 3) Την χρήση της στρατηγικής επέκτασης της γειτονιάς αναζήτησης. Ο «Αλγόριθμος Καθοδηγούμενης Τοπικής Αναζήτησης» εφαρμόζεται κυρίως σε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Η ευκολία της δομής του όμως τον κάνει κατάλληλο και σε προβλήματα ολικής βελτιστοποίησης. Η μέθοδος επικεντρώνεται στην ικανότητα του αλγορίθμου και στην εμβάθυνσή του γύρω από κάποια σημεία καθώς και των πληροφοριών που λαμβάνει, κατά την διάρκεια της αναζήτησης, σε διαφορετικά σημεία του χώρου λύσεων. Οι Αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης (local search) χρησιμοποιούν την τεχνική της επαναληπτικής βελτίωσης και λειτουργούν ως εξής: α) Διαλέγουμε μία λύση από το χώρο αναζήτησης και την αποτιμούμε. Ονομάζουμε αυτή τη λύση τρέχουσα. β) Εφαρμόζουμε ένα μετασχηματισμό στην τρέχουσα λύση, για να παράγουμε μία νέα λύση και την αξιολογούμε. γ) Αν η νέα λύση είναι καλύτερη από την τρέχουσα, τότε ανταλλάσσουμε με την τρέχουσα λύση, διαφορετικά απορρίπτουμε την νέα λύση. δ) Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα μέχρι κανένας μετασχηματισμός να μην βελτιώνει άλλο την τρέχουσα λύση. Βασική ιδέα του αλγορίθμου τοπικής αναζήτησης είναι , ότι ξεκινάμε με μία λύση και κάνουμε μετασχηματισμούς μέχρι να βρούμε μία λύση.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται και ο αλγόριθμος οπισθοδρόμησης (backtracking search). Βασικό χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου είναι η αναίρεση των αποτελεσμάτων κάποιων υπολογιστικών βημάτων και η οπισθοδρόμηση σε κάποιο προηγούμενο βήμα, όπου λαμβάνονται κάποιες διαφορετικές επιλογές. Η οπισθοδρόμηση δεν πρέπει να εμποδίζει τον αλγόριθμο από το να τερματίζει και δεν πρέπει να ξοδεύει χρόνο σε περιττές επαναλήψεις. Διάφορα προβλήματα μπορούν να θεωρηθούν ως γράφοι των οποίων οι κόμβοι είναι καταστάσεις του προβλήματος και η ύπαρξη ακμής μεταξύ δύο κόμβων δηλώνει τη δυνατότητα κίνησης μεταξύ των καταστάσεων που απεικονίζουν. Η λύση του προβλήματος μπορεί να μεταφραστεί ως την εύρεση κάποιου κόμβου, ή μονοπατιού μέσα στο γράφο, άρα μπορεί να επιτευχθεί με μια κατά βάθος διερεύνηση του γράφουν. Αρχικά ξεκινάμε, χωρίς καμιά γνώση για τη λύση του προβλήματος, από τη «ρίζα» του γράφου. Κατά την αναζήτηση του γράφου χτίζουμε τη λύση ως εξής, επισκεπτόμενοι κάποιο κόμβο μελετούμε τις πληροφορίες που περιέχει σχετικά με τη λύση του προβλήματος. Αν αυτές είναι νόμιμες με τη λύση τότε τις συλλέγουμε και συνεχίζουμε τη διερεύνηση. Διαφορετικά, τις αγνοούμε και οπισθοδρομούμε στον προηγούμενο κόμβο από όπου συνεχίζουμε την κατά-βάθος διερεύνηση ακολουθώντας κάποια διαφορετική επιλογή. Κτίσιμο του γράφου μπορεί να γίνει δυναμικά, κατά την αναζήτηση της λύσης του προβλήματος.

Κάποιες φορές ο χώρος αναζήτησης μπορεί να μειωθεί δραστικά, εξετάζοντας τις συνέπειες που επιφέρει η μερική ανάθεση τιμών στις μεταβλητές όπου δεν τους έχει γίνει ανάθεση. Μπορούμε να μειώσουμε το πεδίο τιμών αυτών των μεταβλητών, μειώνοντας έτσι τον παράγοντα διακλάδωσης, διαγράφοντας τιμές, οι οποίες δεν είναι συνεπείς με τις τιμές των μεταβλητών που τους έχει γίνει ανάθεση. Ο γενικός όρος για αυτήν την διαδικασία ονομάζεται διάδοση περιορισμού (constraint propagation).

Για παράδειγμα, με έναν αλγόριθμο διάδοσης περιορισμών, είναι εφικτό να μοντελοποιηθεί και το Sudoku ως εξής. Όπως σε όλα τα προβλήματα περιορισμών, ορίζουμε πρώτα το σύνολο τιμών και τους περιορισμούς κάθε μεταβλητής. Σύνολο μεταβλητών: Το σύνολο των μεταβλητών αποτελείται από το σύνολο των κελιών του αρχικού Sudoku, που δεν έχουν πάρει τιμή ακόμη. Σύνολο τιμών: Κάθε μεταβλητή μπορεί να πάρει τιμές από 1 έως και $size * size$ (όπου $size$ το μέγεθος του Sudoku). Περιορισμός: Σε κάθε γραμμή, σε κάθε στήλη και σε κάθε υποτετράγωνο (όπως αυτό ορίζεται από τον ορισμό του προβλήματος του Sudoku), δεν επιτρέπεται δύο ή παραπάνω μεταβλητές να έχουν τις ίδιες τιμές.

Στην περίπτωση της μεθοδολογικής προσέγγισης των [53,54] αποδεικνύεται πώς ένας γραμμικός αλγόριθμος κατάταξης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ακριβή επίλυση προβλημάτων που αφορούν την κατάταξη τυχαίων στατιστικών δεδομένων σε τυχαίες κλάσεις δεδομένων. Τα στοιχεία δεδομένων είναι πάντοτε διατεταγμένα στην ίδια αλλά άγνωστη σειρά . Η προσέγγιση των [53,54] αποτελεί ένα πρόβλημα ανάθεσης εργασίας πελατών σε αποθήκες, έτσι ώστε κάθε πελάτης να εκχωρηθεί σε μία μόνο αποθήκη σε κάθε περίοδο, με τον περιορισμό των περιορισμών ικανότητας έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι συνολικές μεταφορές και το κόστος απογραφής. Η μελέτη δείχνει επίσης ότι η ικανοποιητική βέλτιστη τιμή του προβλήματος, συγκλίνει σχεδόν σίγουρα σε μια σταθερά, για την οποία παρέχονται σαφείς εξηγήσεις.

Στο άρθρο [55], επεκτείνεται η προσέγγιση του Cheng για την βέλτιστη ανάθεση καθηκόντων - ημερομηνιών και αλληλουχίας των καταστημάτων των μηχανημάτων, στην περίπτωση όπου επιτρέπεται η προαγορά και υπάρχουν περιορισμοί προτεραιότητας των θέσεων εργασίας. Αποδεικνύεται πως η μέθοδος του συγκεκριμένου αλγορίθμου, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες και όταν η προαγορά δεν επιτρέπεται, μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Επίσης στο [56] προτείνεται μια νέα μέθοδος προτείνεται για την επίλυση του προβλήματος της τοποθεσίας των εγκαταστάσεων. Το πρόβλημα απλοποιείται με τη χρήση πιθανών εργασιών με τις αποστάσεις των εγκαταστάσεων. Οι πιθανότητες που αποσυνθέτουν το πρόβλημα της τοποθεσίας των εγκαταστάσεων, ενημερώνονται σε κάθε επανάληψη μαζί με τις τοποθεσίες των εγκαταστάσεων. Η μέθοδος που προτείνει η συγκεκριμένη ομάδα, αποτελεί μια φυσική γενίκευση της μεθόδου Weiszfeld η οποία εφαρμόζεται σε διάφορες εγκαταστάσεις.

Το πρόβλημα της διάταξης εγκατάστασης [57] έχει γενικά διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα τετραγωνικής ανάθεσης όπου οι εγκαταστάσεις ανατίθενται στις διάφορες τοποθεσίες. Στην περίπτωση της παρούσας μελέτης εισάγεται μια διαφορετική προσέγγιση, με βάση τις αναθέσεις των αποστάσεων, μεταξύ των ζευγών των τοποθεσιών και των ζευγών των εγκαταστάσεων ενώ διάφοροι μέθοδοι λύσεων προτείνονται και αναπτύσσονται, μια τριφασική ευρετική διαδικασία και ένας γενετικός αλγόριθμος, για το μοντέλο που περιγράφεται στο [58].

2.2 Περιγραφή των κυριότερων μεθευρετικών αλγορίθμων

Στο δεύτερο και τελευταίο μέρος του δευτέρου κεφαλαίου εξετάζονται οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία, για την επίλυση του προβλήματος ανάθεσης.

2.2.1 Η μέθοδος « Simulated Annealing - Προσομοιωμένη Ανόπτηση»

Η χρησιμοποίηση της διαδικασίας της Προσομοιωμένης Ανόπτησης συνίσταται στην επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Η ονομασία του αλγορίθμου σχετίζεται με την αναλογία των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης και της προσομοίωσης ανόπτησης των υλικών. Ανόπτηση ονομάζεται στη μεταλλουργία η θερμική κατεργασία στην οποία υποβάλλεται ένα μέταλλο ή κράμα, που έχει υποστεί κάποια κατεργασία π.χ. σφυρηλάτηση ή ενδοτράχυνση, προκειμένου στη συνέχεια υποβαλλόμενο σε ψύξη βελτιωθεί η ευκαμψία του και γίνει λιγότερο εύθρυπτο. Είναι δηλαδή η διαδικασία κατά την οποία ένα στερεό υλικό θερμαίνεται μέχρι το σημείο τήξης του και στη συνέχεια ακολουθεί αργά η ψύξη. Το στάδιο αποκτά κατώτερο επίπεδο ενέργειας με την παύση της ψύξης. Η στρατηγική μείωσης της ψύξης μπορεί να επιφέρει ατέλειες στο σύστημα. Ο αλγόριθμος της προσομοιωμένης ανόπτησης αποτυπώνει στην ενέργεια ενός συστήματος το οποίο ψύχεται, μέχρι την ολοκλήρωση, τη σύγκλιση δηλαδή σε κάποιο σημείο ισορροπίας. Αυτό συμβαίνει όταν ο αλγόριθμος σταματήσει την κίνηση στον εφικτό χώρο αναζήτησης, τότε δηλαδή έχει εντοπιστεί το τελικό σημείο ισορροπίας.

Κριτήρια Σύγκλισης για την Προσομοιωμένη Ανόπτηση:

- Η θερμοκρασία φθάνει σε ένα καθορισμένο χαμηλό επίπεδο θερμοκρασίας

- Ένας αριθμό επαναλήψεων περνάει χωρίς την αποδοχή της λύσης
- Η αναλογία των κινήσεων πέφτει κάτω από μια δεδομένη τιμή

Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου αποθηκεύεται εκτός της τρέχουσα λύσης και η καλύτερη λύση η οποία έχει βρεθεί μέχρι εκείνη την στιγμή εκτός της τρέχουσας λύσης. Αυτό γίνεται για να περιοριστεί ο κίνδυνος απώλειας της βέλτιστης λύσης την στιγμή που πραγματοποιείται αποδοχή των χειρότερων λύσεων. Μια συνάρτηση μείωσης της θερμοκρασίας είναι αυτή που προσδιορίζει το πρόγραμμα ανόπτησης και είναι αυτή που καθορίζει την ποσότητα και τον χρόνο μείωσης της θερμοκρασίας. Οι τρόποι περιγραφής της συνάρτησης μείωσης της θερμοκρασίας είναι

- Η γραμμική μείωση
- Η εκθετική μείωση
- Η ύπαρξη μιας καθορισμένους μήκους συνάρτησης
- Η λογαριθμική προσέγγιση

Παρακάτω παρουσιάζεται ο βασικός αλγόριθμος της διαδικασίας ανόπτησης

Αλγόριθμος Προσομοιωμένη Ανόπτηση

```
Αρχικοποίηση
Επέλεξε μια αρχική λύση s0
Επέλεξε μια αρχική θερμοκρασία t0
Επέλεξε μια συνάρτηση μείωσης της θερμοκρασίας α (t)
Repeat
         Repeat
          Τυχαία επιλογή μιας γειτονιάς s £ N ( s0 )
           δ = f (s) - f (s0)
           If δ < 0 then
                      s0 = s
           else
                       δημιουργούμε   τυχαία   x,   ομοιόμορφα
κατανεμημένο στην ακτίνα ( 0,1 )
                       If x < e_t^(−δ)   then
                                 so = s
                       end if
```

```
              End if
        Until      ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων  ολοκληρωθεί
         t = a (t)
Until         κάποιο κριτήριο τερματισμού να ικανοποιηθεί
Επέστρεψε τη βέλτιστη λύση
```

2.2.2 Η μέθοδος «Variable neighborhood Search - Αλγόριθμος Μεταβλητής Γειτονιάς Αναζήτησης»

Βασικό σημείο της μεθόδου αυτής αποτελεί η επιτυχή αναζήτηση ενός συνόλου γειτονιών (διαφορετικοί αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης), για της εύρεσης μιας πιο βέλτιστης λύσης. Το γεγονός ότι διαφορετικές μέθοδοι τοπικών αναζητήσεων οδηγούν και σε διάφορα τοπικά ελάχιστα, βοηθά το έργο της μεθόδου. Τον αλγόριθμο αυτό εμπνεύστηκαν οι Hansen και Mladenovic. Ο αλγόριθμος της μεταβλητής γειτονιάς αναζήτησης είναι ένας στοχαστικός αλγόριθμος, ο οποίος επιλέγει ένα σύνολο γειτονιών και στη συνέχεια η κάθε επανάληψη αλγορίθμου ακολουθεί τα εξής βήματα, την ανακίνηση, την τοπική αναζήτηση και την κίνηση.

Ακολουθεί ο αλγόριθμος της μεθόδου μεταβλητής γειτονιάς αναζήτησης:

Αλγόριθμος Μεταβλητή Γειτονιάς Αναζήτησης

```
Αρχικοποίηση
Επέλεξε ένα σύνολο γειτονιών ( Nι. J = 1… J max)
Επέλεξε μια αρχική λύση So
J=1
Repeat
          Δημιούργησε μια λύση  s’  στη γειτονία Nj
S’’= LS (s), Εφάρμοσε μια διαδικασία τοπικής αναζήτησης στο s’
If f (s’’) < f ( s’ ) then
            S=s’’
            J=1
      Else
            J= j+1
      End if
Until J < J max
Επέστρεψε τη βέλτιστη λύση
```

2.2.3 Η μέθοδος «Iterated Local Search - Ο αλγόριθμος επαναληπτικής τοπικής αναζήτησης»

Η μέθοδος αυτή δραστηριοποιείται στη βελτίωση των υπαρχόντων μεθόδων πολυεναρκτήριας τοπικής αναζήτησης, εισάγοντας μια διαταραχή στη λύση που οδηγεί σε τοπικό ελάχιστο. Έτσι η νέα βέλτιστη λύση αποθηκεύεται σε περίπτωση που κινδυνεύσει να χαθεί. Ο αλγόριθμος της επαναληπτικής τοπικής αναζήτησης περιέχει τρία βασικά συστατικά. 1) Τον αλγόριθμο τοπικής αναζήτησης. Ο αλγόριθμος αυτός έχει την δυνατότητα να χρησιμοποιεί διαφορετικές μεθόδους σε κάθε επανάληψη, ώστε να μην χειροτερέψει ο φόρτος του υπολογισμού. 2) Την διαδικασία διαταραχής. Η διαδικασία της διαταραχής αναλαμβάνει την κράτηση κάποιων στοιχείων της αρχικής λύσης σε συνδυασμό με την μετάλλαξη των υπολοίπων σημείων. Πρέπει να είναι πιο αποτελεσματική από μια τυχαία μέθοδο επανεκκίνησης. Μερικές από τις προτεινόμενες διαδικασίες διαταραχής είναι : α) Καθορισμένες διαταραχές, β) Τυχαίες ή ημικαθορισμένες διαταραχές. 3) Το κριτήριο αποδοχής. Το κριτήριο αυτό περιγράφει τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες το νέο τοπικό ελάχιστο μπορεί να αντικαταστήσει το παλιό τοπικό ελάχιστο. Για να επιλεγεί μία λύση, πρέπει να υπάρχει η ικανότητα εντατικοποίησης του αλγορίθμου γύρω από κάποια σημεία και στη συνέχεια η ικανότητα της εξερεύνησης του αλγορίθμου περισσότερων μερών του χώρου λύσεων.

Παρακάτω παρουσιάζεται η μορφή που έχει ο γενικός αλγόριθμος της επαναληπτικής τοπικής αναζήτησης σε μορφή ψευδοκώδικα :

Αλγόριθμος Επαναληπτική Τοπική Αναζήτηση

```
Αρχικοποίηση
Επέλεξε μια μέθοδος τοπικής αναζήτησης LS
Επέλεξε μια αρχική λύση So
S1= LS (SO)
Repeat
          S’= Perturb (s1, search history) (Διαταραχή της λύσης)
          S’1= LS (S’)
          S1= Accept (s1, s’1, search memory) (Κριτήριο Αποδοχής)
Until Κριτήριο Τερματισμού
 Επέστρεψε τη βέλτιστη λύση
```

2.2.4 Η Μέθοδος « Threshold Accepted Method - Αποδοχής Κατωφλίου»

Αποτελεί μια μέθοδο η οποία αποτελεί μια διαφορετική έκδοση της μεθόδου ανόπτησης. Η μέθοδος ξεφεύγει από το τοπικό ελάχιστο μέσω ενός κατωφλίου αποδοχής Τ ως πάνω όριο στην αύξηση της τιμής της οποία επιτρέπεται της αντικειμενικής συνάρτησης, από την μία κίνηση στην επόμενη. Έτσι καθορίζονται νέες αποστάσεις. Η μέθοδος αποδοχής κατωφλίου είναι αποτελεσματικότερη της μεθόδου ανόπτησης καθώς σε εκείνη την περίπτωση παράγεται τυχαίος αριθμός και η κάθε επανάληψη πρέπει να συμβαδίζει με την εκθετική συνάρτηση.

Παρακάτω παρατίθεται σε μορφή ψευδοκώδικα ένας γενικός αλγόριθμος της μεθόδου της αποδοχής κατωφλίου :

Αλγόριθμος Αποδοχής Κατωφλίου

```
Αρχικοποίηση
Επέλεξε μια αρχική λύση So
Επέλεξε ένα αρχικό κατώφλι T =T max
Επέλεξε μια συνάρτηση μείωσης του κατωφλίου α (T)
Repeat
          Repeat
                    Τυχαία επιλογή μιας   γειτονιάς  s N (So)
                    Δ= f (s) – f(So)
                    If   δ < T   then
```

```
                              So = s
                    End if
Until ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων ολοκληρωθεί
 T= a (T)
Until κάποιο κριτήριο τερματισμού ικανοποιηθεί .Επέστρεψε τη
βέλτιστη λύση
```

2.2.5 Η μέθοδος « Greedy Randomized Adaptive Search Procedure – GRASP – Διαδικασία Άπληστης Τυχαιοποιημένης Τοπικής Αναζήτησης»

Η διαδικασία άπληστης τυχαιοποιημένης προσαρμοστικής αναζήτησης δραστηριοποιείται στην εύρεση προσεγγιστικών λύσεων σε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Η τεχνική αυτή παρέχει μια εφικτή λύση σε κάθε επανάληψη. Οι επαναλήψεις της διαδικασίας σταματούν όταν κάποιο κριτήριο τερματισμού ικανοποιείται. Το τελικό αποτέλεσμα είναι η πιο βέλτιστη λύση που βρέθηκε από όλες τις επαναλήψεις. Οι δύο φάσεις τη επανάληψης είναι οι εξής : μια φάση κατασκευής μιας αρχικής λύσης (construction phase) και μια διαδικασία τοπικής αναζήτησης (local search phase) για βελτιστοποίηση αυτής της λύσης. Στη φάση κατασκευής, μια τυχαιοποιημένη συνάρτηση απληστίας χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί μια λύση. Αυτή η αρχική λύση στη συνέχεια βελτιώνεται με τη χρήση της διαδικασίας τοπικής αναζήτησης. Η στρατηγική επιλογής του επόμενου στοιχείου βασίζεται στην τυχαία επιλογή από μια λίστα υποψηφίων, που ονομάζεται λίστα περιορισμού των υποψηφίων για εισαγωγή στη λύση την οποία κάθε στοιχείο κατατάσσεται βάσει μιας συνάρτησης απληστίας .

Μια γενικευμένη μορφή του αλγόριθμου , ακολουθεί στη συνέχεια:

Διαδικασία Άπληστης Τυχαιοποιημένης Προσαρμοστικής Αναζήτησης

```
Αρχικοποίηση
C (s*) = ∞
Repeat
           Κατασκευή μιας αρχικής λύσης  s
           Εφαρμογή τοπικής αναζήτησης στην s
           If c(s) < c (s*) then
                      S*= s
            End if
Until  για όσο το κριτήριο τερματισμού δεν ικανοποιείται
Επέστρεψε τη βέλτιστη λύση ( s* ).
```

2.2.6 Η μέθοδος « Tabu Search - Περιορισμένη Αναζήτηση»

Ο μεθευρετικός αυτός αλγόριθμος παρουσιάστηκε από τον Glover. Η μέθοδος αυτή, χρησιμοποιεί έναν ευρετικό αλγόριθμο, για να μετακινηθεί από τη μία λύση στην άλλη, η οποία λύση ενέχει τον κίνδυνο να παγιδευτεί σε τοπικό ελάχιστο. Για την αποφυγή του κινδύνου αυτού, γίνεται χρήση μιας στρατηγικής η οποία επιλέγει την επόμενη λύση και όχι μια τυχαία, η οποία στρατηγική χρησιμοποιεί μνήμη. Οι τελευταίες κινήσεις αναγράφονται σε μια λίστα, την λίστα της περιορισμένης αναζήτησης. Η περιορισμένη αναζήτηση δεν συγκλίνει με φυσικό τρόπο, έτσι είναι αναγκαίο να καθοριστούν κριτήρια τερματισμού.

Παρακάτω παρουσιάζεται ο ψευδοκώδικα του αλγορίθμου της περιορισμένης αναζήτησης:

Αλγόριθμος Περιορισμένη Αναζήτηση

```
Αρχικοποίηση
Κατασκευή μιας αρχικής λύσης So
Υπολογισμός της συνάρτησης κόστους της λύσης
S’ = So! αρχικοποίηση της βέλτιστης λύσης
F(s’) = f (So)
Κύρια Φάση
Do write κάποιο κριτήριο σταματήματος δεν έχει ικανοποιηθεί
         Υπολογισμός  μιας γειτονικής λύσης S’’
          If  f (s’) < f (s’’) then
               S*= S’
             F*= f (s’’)
          End if
          Αποθήκευσε   την   τελευταία   κίνηση   στη   λίστα
περιορισμένων
                  Υποψηφίων
          Κάλεσε   κάθε   k1   επαναλήψεις   τη   στρατηγική
εντατικοποίησης
          If f (S diversification) < f ( S* ) then
                 S*= S diversification
                 F*= f (diversification)
          End if
Endoo
Επέστρεψε τη βέλτιστη λύση S*
```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:

Παρουσίαση Αποτελεσμάτων Προσομοίωσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει η παρουσίαση των πειραματικών αποτελεσμάτων για το γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης χρησιμοποιώντας έξι (6) διαφορετικούς μεθευρετικούς αλγορίθμους καθώς και η σύγκριση των αλγορίθμων όσον αφορά το συνολικό κόστος και το χρόνο εκτέλεσης.

3.1 Περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας

Θα ξεκινήσουμε με τη περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας καθώς και την περιγραφή της βάσης δεδομένων που χρησιμοποιήθηκε.

Το πρόβλημα με το οποίο ασχολούμαστε αναφέρεται στη βιβλιογραφία σαν γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης (Generalized Assignment Problem). Το πρόβλημα αυτό όπως έχουμε ήδη αναφέρει αποτελεί ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού και μπορεί να είναι είτε πρόβλημα μεγιστοποίησης ενός κέρδους είτε ελαχιστοποίησης ενός κόστους. Στη συγκεκριμένη εργασία χωρίς απώλεια της γενικότητας θα ασχοληθούμε με προβλήματα ελαχιστοποίησης, μιας και μια αλλαγή προσήμου μπορούμε να μεταβούμε στο αντίστοιχο πρόβλημα μεγιστοποίησης και αντίστροφα.

Στο GAP πρόβλημα έχουμε n εργασίες που πρέπει να ανατεθούν σε m μηχανές. Η λύση του απαιτεί τον προσδιορισμό των τιμών της δυαδικής μεταβλητής $x_{i,j} \in \{0,1\}$ που δηλώνει ότι η i εργασία έχει ανατεθεί στη μηχανή j. Η ανάθεση αυτή συνεπάγεται ένα κόστος $c_{i,j}$ το οποίο προστίθεται στο τελικό κόστος του προβλήματος προς ελαχιστοποίηση:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό των προβλημάτων τύπου GAP είναι η περιορισμοί που εμπεριέχονται. Ο πρώτος αφορά το γεγονός πως κάθε εργασία μπορεί να ανατεθεί σε ακριβώς μία μηχανή. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί μια εργασία να παραβλεφθεί και να μην γίνει ούτε μπορεί να σπάσει σε περισσότερες από μία μηχανές:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad \forall i$$

Ο δεύτερος περιορισμός αφορά το γεγονός ότι υπάρχει μια μέγιστη δυναμικότητα για την κάθε μηχανή j την οποία δεν μπορούμε να υπερβούμε. Η ανάθεση μιας εργασίας i στην μηχανή j συνεπάγεται μια δέσμευση ενός πόρου a_{ij} από τη συνολική δυναμικότητα της κάθε μηχανής:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \le b_j, \quad \forall j$$

Επομένως, το γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Για την επίλυσή του θα χρησιμοποιήσουμε μια ευρεία γκάμα από μεθευρετικούς αλγορίθμων.

Συγκεκριμένα, υλοποιήθηκαν σε περιβάλλον MATLAB οι παρακάτω μεθευρετικοί αλγόριθμοι:

- Αλγόριθμος επαναληπτικής τοπικής αναζήτησης - Iterated Local Search (**ILS**)

- Περιορισμένη Αναζήτηση - Tabu Search (**TS**)
- Προσομοιωμένη Ανόπτηση - Simulated Annealing (**SA**)
- Μέθοδος Αποδοχής Κατωφλίου – Threshold Accepted Method (**TA**)
- Διαδικασία Άπληστης Τυχαιοποιημένης Τοπικής Αναζήτησης - Greedy Randomized Adaptive Search Procedure (**GRASP**)
- Αλγόριθμος Μεταβλητής Γειτονιάς Αναζήτησης - Variable neighborhood Search (**VNS**)

Η γενική περιγραφή των παραπάνω αλγορίθμων έγινε στο δεύτερος μέρος του Κεφαλαίου 2. Ωστόσο, όπως θα δούμε στο επόμενο μέρος του κεφαλαίου, ήταν απαραίτητη η τροποποίηση των περισσότερων από αυτών έτσι ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν στο πρόβλημα του GAP. Οι πιο σημαντικές προσαρμογές αφορούν την δυνατότητα να συμπεριληφθούν στον κάθε αλγόριθμο οι επιπλέον περιορισμοί του προβλήματος αλλά και το γεγονός πως η λύση που θέλουμε είναι διακριτή και ακέραια ($x_{ij} \in \{0,1\}$).

Για την εφαρμογή των παραπάνω αλγορίθμων στο πρόβλημα του GAP, χρησιμοποιήσαμε δεδομένα από τη βάση OR-library. Τα συγκεκριμένα δεδομένα έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως σε πολλές εργασίες [39,40].

Συγκεκριμένα θα δουλέψουμε με τα προβλήματα που εμπεριέχονται στα αρχεία *gap1-gap11*. Κάθε αρχείο περιέχει ένα σύνολο από 5 διαφορετικά προβλήματα. Εντός του ίδιου αρχείου ο αριθμός των μηχανών και των εργασιών παραμένει σταθερός. Επίσης, όσο αυξάνει ο αριθμός στο όνομα του αρχείου τόσο πιο σύνθετα γίνονται τα προβλήματα, αφού αυξάνει ο αριθμός των μηχανών και των εργασιών.

Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα από τον τρόπο που είναι δομημένα τα δεδομένα στα αρχεία gap.

5

5 15

17 21 22 18 24 15 20 18 19 18 16 22 24 24 16

23 16 21 16 17 16 19 25 18 21 17 15 25 17 24

16 20 16 25 24 16 17 19 19 18 20 16 17 21 24

19 19 22 22 20 16 19 17 21 19 25 23 25 25 25

18 19 15 15 21 25 16 16 23 15 22 17 19 22 24

8 15 14 23 8 16 8 25 9 17 25 15 10 8 24

15 7 23 22 11 11 12 10 17 16 7 16 10 18 22

21 20 6 22 24 10 24 9 21 14 11 14 11 19 16

20 11 8 14 9 5 6 19 19 7 6 6 13 9 18

8 13 13 13 10 20 25 16 16 17 10 10 5 12 23

36 34 38 27 33

…

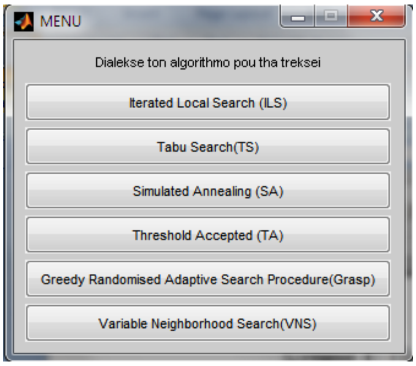
Διαδοχικά εμφανίζονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- Αριθμός Προβλημάτων
- Αριθμός Μηχανών n
- Αριθμός Εργασιών m
- Κόστη ανάθεσης c_{ij} για κάθε μηχανή
- Πόροι δέσμευσης a_{ij} για κάθε μηχανή
- Δυναμικότητα b_{ij} της κάθε μηχανής

Η υλοποίηση των παραπάνω αλγορίθμων καθώς και η εφαρμογή τους στο πρόβλημα GAP έγινε με τη χρήση του λογισμικού MATLAB. Για την καλύτερη αλληλεπίδραση μεταξύ λογισμικού και χρήστη υλοποιήθηκε και ένα εργαλείο GUI, με το οποίο ο χρήστης επιλέγει έναν από τους 6 διαθέσιμους αλγορίθμους καθώς και το αντίστοιχο αρχείο gap στο οποίο θα εφαρμοστεί ο αλγόριθμος.

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια στιγμιότυπα (screenshots) που δείχνουν του λειτουργία του GUI.

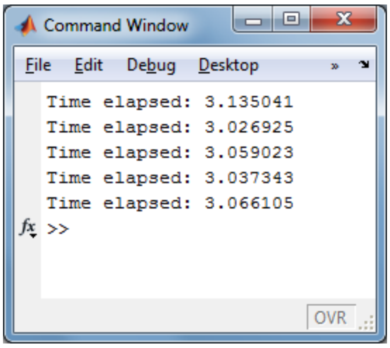
Σχήμα 1: Παράθυρο επιλογής του αρχείου gap μέσω του Matlab GUI.

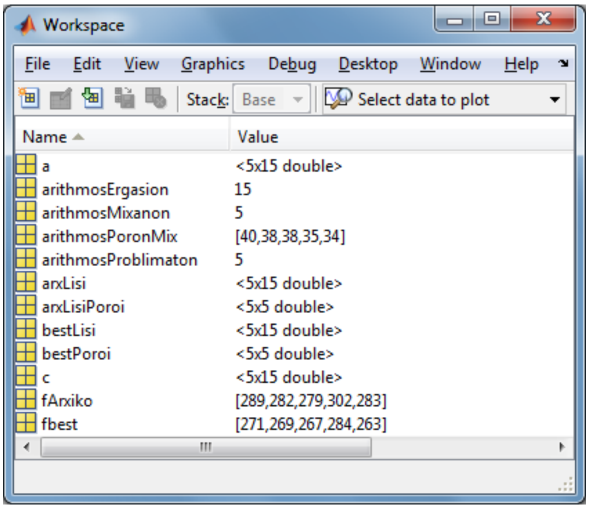


Σχήμα 2: Παράθυρο επιλογής του μεθευρετικού αλγορίθμου μέσω του Matlab GUI.

Μετά την ολοκλήρωση του εκάστοτε αλγορίθμου για κάθε ένα από τα 5 προβλήματα του αρχείου gap εμφανίζονται στο command window οι χρόνοι εκτέλεσης ενώ στο workspace μπορούμε να δούμε το συνολικό αρχικό και τελικό κόστος που προέκυψε.

Παρακάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα από τη εφαρμογή του αλγορίθμου ILS για το πρόβλημα gap1.txt.





Σχήμα 3: Παράδειγμα από την τη εφαρμογή του αλγορίθμου ILS για το πρόβλημα gap1.txt.

3.2 Υλοποίηση των αλγορίθμων

Στη ενότητα αυτή θα δώσουμε συνοπτικά κάποιες λεπτομέρειες σχετικά με την υλοποίηση των αλγορίθμων.

Η πρώτη σημαντική παράμετρος σχετίζεται με την αρχικοποίηση των μεθευρετικών αλγορίθμων. Η μέθοδος που ακολουθήθηκε είναι να κατασκευαστεί μια λύση με βάση τον περιορισμό των πόρων που είναι και ο πιο βασικός περιορισμός του προβλήματος. Έτσι, κατασκευάσαμε μια αρχική λύση του προβλήματος ξεκινώντας και προσθέτοντας κάθε φορά στη λύση το στοιχείο $x_{i,j}$ που είχε τη μικρότερη δέσμευση πόρων $a_{i,j}$ ελέγχοντας κάθε φορά να μην παραβιάζεται ο περιορισμός της δυναμικότητας της κάθε μηχανής. Η ίδια διαδικασία αρχικοποίησης χρησιμοποιήθηκε για όλους τους αλγορίθμους εκτός από τον GRASP, στον οποίο όπως θα δούμε ακολουθήθηκε μια κατασκευή της αρχικής λύσης μέσω απληστίας.

Η δεύτερη προσαρμογή που έγινε στους αλγορίθμους που περιγράφτηκαν στο Κεφάλαιο 3 έχει να κάνει με τον περιορισμό δυναμικότητας. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε σε αυτό σημείο είναι η προσθήκη μιας επιπλέον συνθήκης ελέγχου σε κάθε αλγόριθμο πριν το στάδιο της ανανέωσης των βέλτιστων παραμέτρων. Με τον τρόπο αυτό στην περίπτωση που ένα νέο στοιχείο $x_{i,j}$ οδηγεί σε βελτιστοποίηση του συνολικού κόστους, η αλλαγή αυτή δεν θα εφαρμοστεί προτού γίνει ο έλεγχος για την παραβίαση ή μη του περιορισμού δυναμικότητας των διαθέσιμων μηχανών.

Μια ακόμα παράμετρος που πρέπει να οριστεί πριν την εφαρμογή των μεθευρετικών αλγορίθμων στο πρόβλημα του GAP είναι η έννοια της *γειτονιάς μιας λύσης*. Στα προβλήματα που η λύση παίρνει συνεχείς τιμές η γειτονιά είναι σχετικά εύκολο να οριστεί εάν θεωρήσουμε την μπάλα που επάγεται από κάποια νόρμα (π.χ. την L2). Ωστόσο στην περίπτωση του GAP, όπου η λύση $x_{i,j} \in \{0,1\}$ παίρνει διακριτές δυαδικές τιμές, ο ορισμός μιας γειτονιάς γύρω από τη λύση γίνεται λίγο πιο πολύπλοκος. Η πιο απλή θεώρηση που μπορεί να γίνει (και είναι αυτή που ακολουθήσαμε σε όλη τη διπλωματική) είναι να θεωρήσουμε τη μικρότερη γειτονιά γύρω από μια αρχική λύση το σύνολο εκείνων των λύσεων που διαφέρουν από τη αρχική σε έναν μόνο στοιχείο. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε και μεγαλύτερες γειτονιές (όπως στη περίπτωση του VNS) επιλέγοντας λύσεις που διαφέρουν από την αρχική λύση σε περισσότερες από μία θέσεις.

Τέλος, κλείνοντας με τις λεπτομέρειες και τις προσαρμογές των μεθευρετικών αλγορίθμων, θα δώσουμε κάποιες επιπλέον λεπτομέρειες για τους αλγορίθμους GRASP και VNS, μιας και η περιγραφή που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο ήταν αρκετά γενική.

Ο αλγόριθμος GRASP μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο πολύ βασικά μέρη: την «άπληστη» κατασκευή της αρχικής λύσης και την εφαρμογή τοπικής αναζήτησης για την βελτίωση της αρχικής λύσης. Το σημείο που πρέπει να τονιστεί είναι ότι λόγω του επιπλέον περιορισμού για τη δυναμικότητα των μηχανών δεν είναι σίγουρο πως η κατασκευή της λύσης μέσω απληστίας θα οδηγήσει σε λύση που θα ικανοποιεί τον περιορισμό. Για το σκοπό αυτό στις περιπτώσεις, που η κατασκευή της αρχικής λύσης μέσω του GRASP δεν είναι αποδεκτή χρησιμοποιείται σαν εναλλακτική η αρχικοποίηση που περιγράψαμε προηγουμένως.

Ο αλγόριθμος VNS χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι αναζητά πιθανές βέλτιστες λύσεις σε όλο και μεγαλύτερες γειτονιές μιας τρέχουσας λύσης. Στην περίπτωση αυτή, σε συνέχεια του ορισμού της γειτονιάς που δώσαμε, προηγουμένως, θα αναζητήσουμε διαδοχικά λύσεις που διαφέρουν από την τη τρέχουσα λύση σε k=1,2,3,… θέσεις και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τοπική αναζήτηση γύρω από τη νέα υποψήφια λύση. Στην περίπτωση που προκύψει λύση που δίνει μικρότερο κόστος και ικανοποιεί και τον περιορισμό δυναμικότητας τότε η αναζήτηση ξεκινά ξανά με k=1 και έχοντας τη νέα λύση σαν αρχική.

3.3 Παρουσίαση και Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Στην ενότητα αυτή θα γίνει η παρουσίαση και η σύγκριση των αποτελεσμάτων για τους έξι μεθευρετικούς αλγορίθμους που υλοποιήσαμε. Η σύγκριση θα γίνει σε σχέση με το τελικό κόστος το οποίο θέλουμε να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο καθώς και το χρόνο εκτέλεσης (σε sec).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η εφαρμογή των αλγορίθμων θα γίνει σε 11 διαφορετικές κατηγορίες GAP προβλημάτων με διαφορετικό αριθμό μηχανών και εργασιών, που παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πρόβλημα GAP	Αριθμός Μηχανών	Αριθμός Εργασιών
1	5	15
2	5	20
3	5	25
4	5	30
5	8	24
6	8	32
7	8	48
8	10	30
9	10	40
10	10	50
11	10	60

Πίνακας 1: Αριθμός μηχανών και εργασιών για κάθε μια από τις 11 διαφορετικές κατηγορίες GAP προβλημάτων.

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται οι μέσοι όροι του τελικού κόστους και του χρόνου εκτέλεσης (σε sec) για τα πέντε προβλήματα από τις 11 διαφορετικές κατηγορίες GAP προβλημάτων.

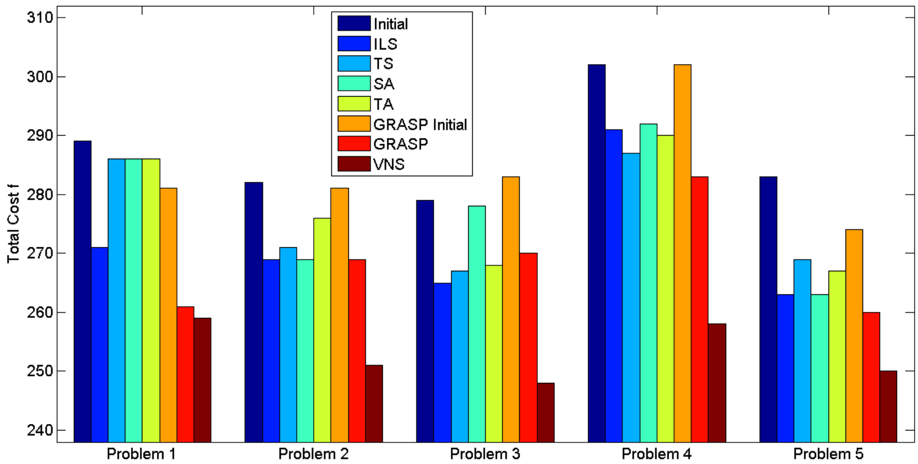
	Initial	ILS	TS	SA	TA	GRASP Initial	GRASP	VNS
GAP 1	287,0	271,8	276,0	277,6	277,4	284,2	268,6	253,2
GAP 2	355,8	288,4	307,2	298,4	316,8	327,2	286,0	264,6
GAP 3	497,2	445,0	466,4	458,0	468,6	472,8	442,4	426,0
GAP 4	544,4	439,2	485,8	469,4	492,6	507,4	444,6	423,0
GAP 5	465,0	411,8	438,4	428,4	444,2	443,2	415,0	403,2
GAP 6	624,8	546,2	586,6	563,8	600,2	594,8	548,6	543,2
GAP 7	971,6	837,0	916,4	883,0	930,4	923,4	845,6	834,0
GAP 8	598,2	533,0	565,6	546,4	575,8	568,2	522,8	506,2
GAP 9	817,2	691,0	757,0	732,8	772,6	767,2	693,0	679,0
GAP 10	890,2	645,4	803,6	722,0	821,8	817,2	685,4	637,8
GAP 11	1208,8	1025,4	1148,4	1090,8	1171,4	1146,8	1062,2	1036,2

Πίνακας 2: Μέσοι όροι του τελικού κόστους για τα πέντε προβλήματα από τις 11 διαφορετικές κατηγορίες GAP προβλημάτων.

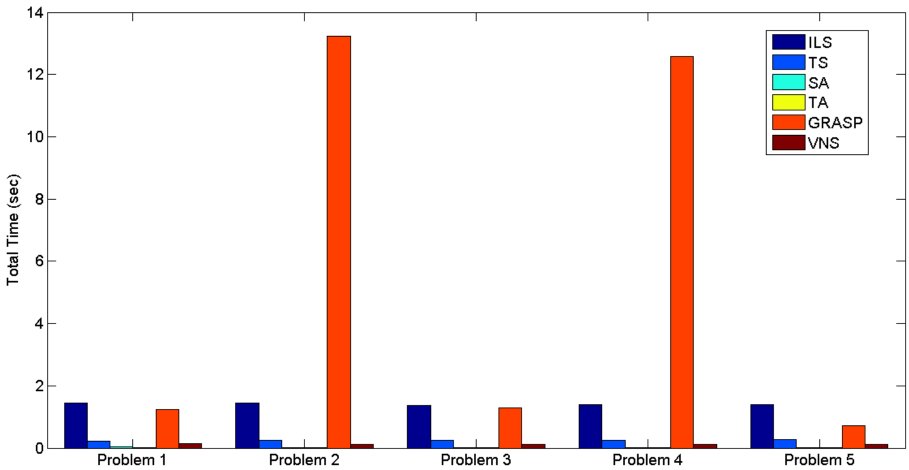
	ILS	TS	SA	TA	GRASP	VNS
GAP 1	1,4132	0,2502	0,0148	0,0145	5,8070	0,1200
GAP 2	1,8222	0,3583	0,0074	0,0210	1,6284	0,1238
GAP 3	1,6374	0,2615	0,0051	0,0125	2,6934	0,1637
GAP 4	2,2155	0,2748	0,0061	0,0154	15,0970	0,1637
GAP 5	1,8610	0,2484	0,0090	0,0154	2,8392	0,1704
GAP 6	1,9868	0,2780	0,0056	0,0145	6,6558	0,2062
GAP 7	3,0356	0,3442	0,0104	0,0224	14,2670	0,3390
GAP 8	3,3867	0,4125	0,0156	0,0275	8,4442	0,2432
GAP 9	2,4999	0,3487	0,0090	0,0266	11,3036	0,2505
GAP 10	3,3858	0,4019	0,0082	0,0229	20,2855	0,3321
GAP 11	4,4815	0,4371	0,0117	0,0307	34,6501	0,3883

Πίνακας 3: Μέσοι όροι του χρόνου εκτέλεσης (σε sec) για τα πέντε προβλήματα από τις 11 διαφορετικές κατηγορίες GAP προβλημάτων.

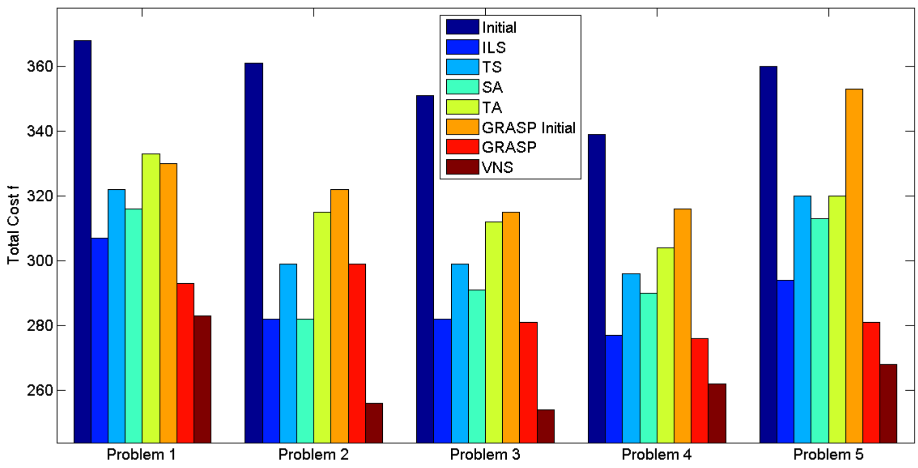
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα διαδοχικά για κάθε κατηγορία προβλημάτων.



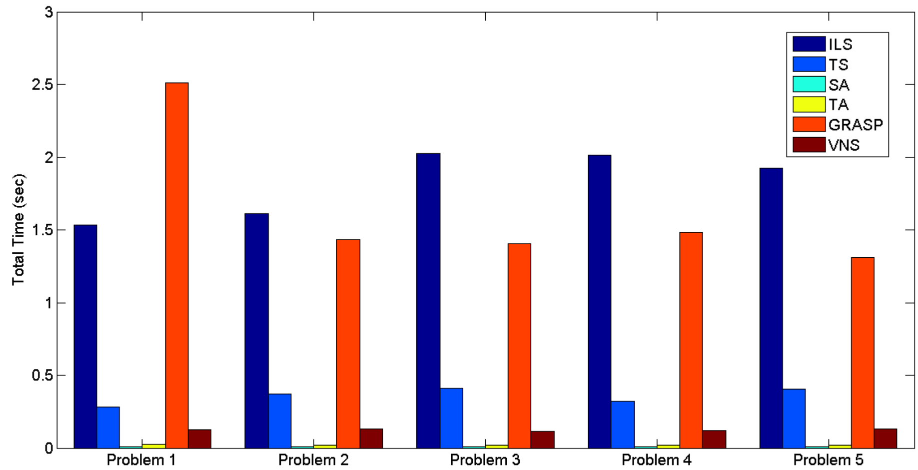
Σχήμα 4: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap1.txt.



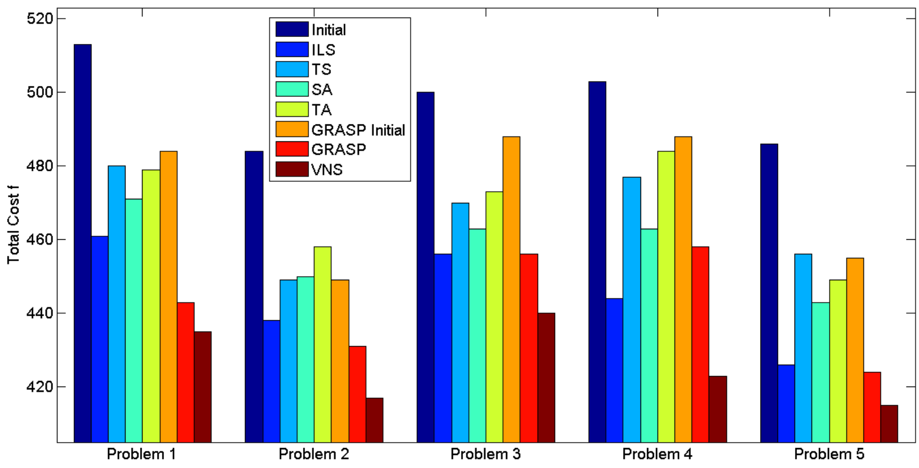
Σχήμα 5: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap1.txt.



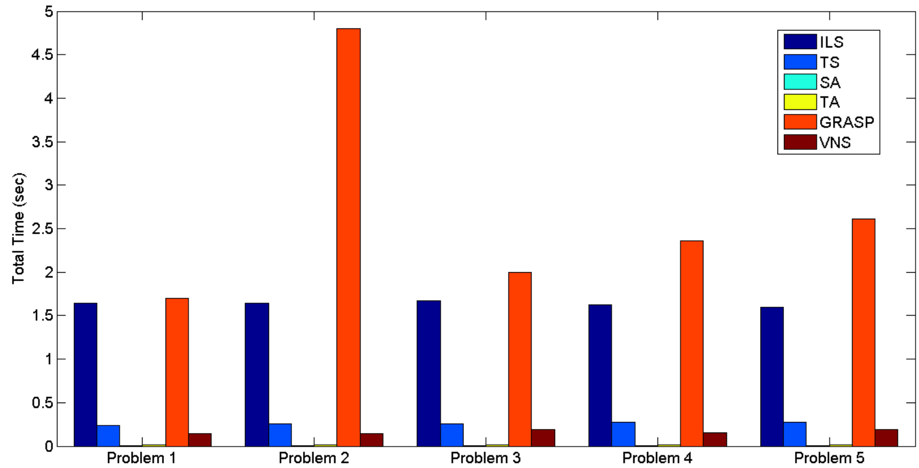
Σχήμα 6: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap2.txt.



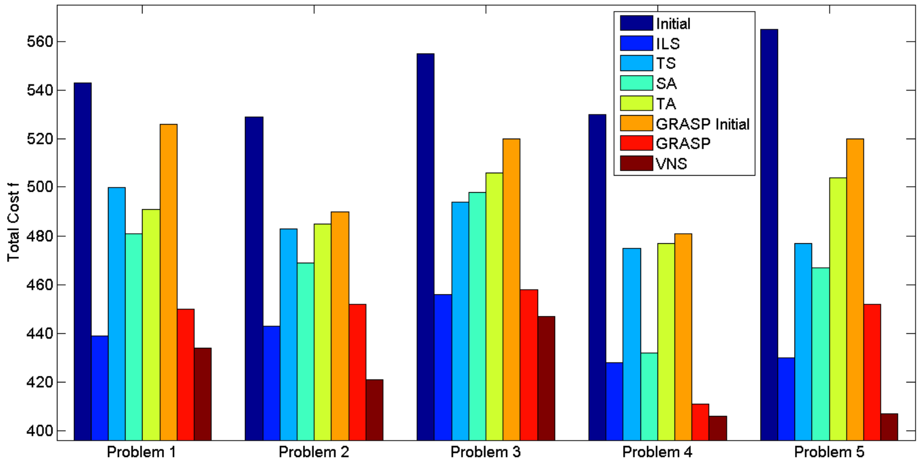
Σχήμα 7: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap2.txt.



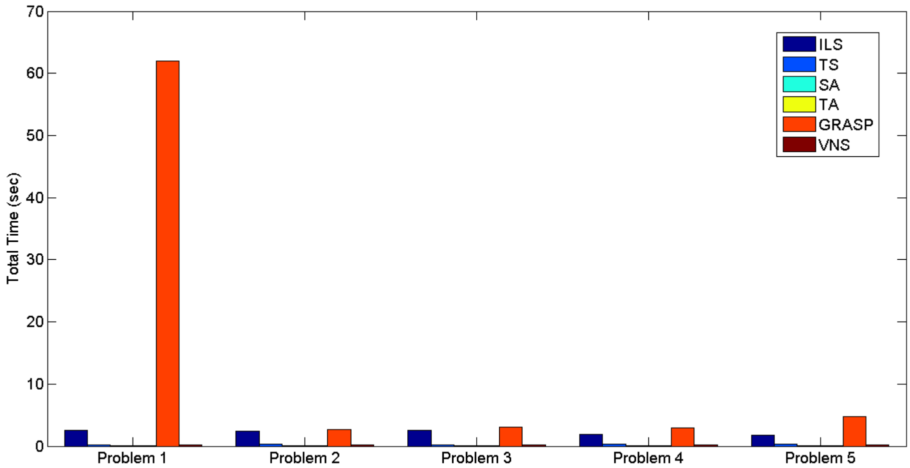
Σχήμα 8: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap3.txt.



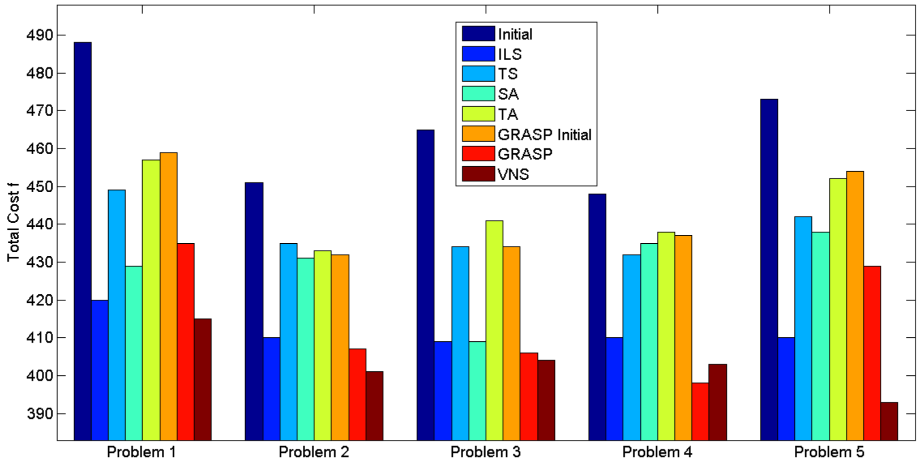
Σχήμα 9: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap3.txt



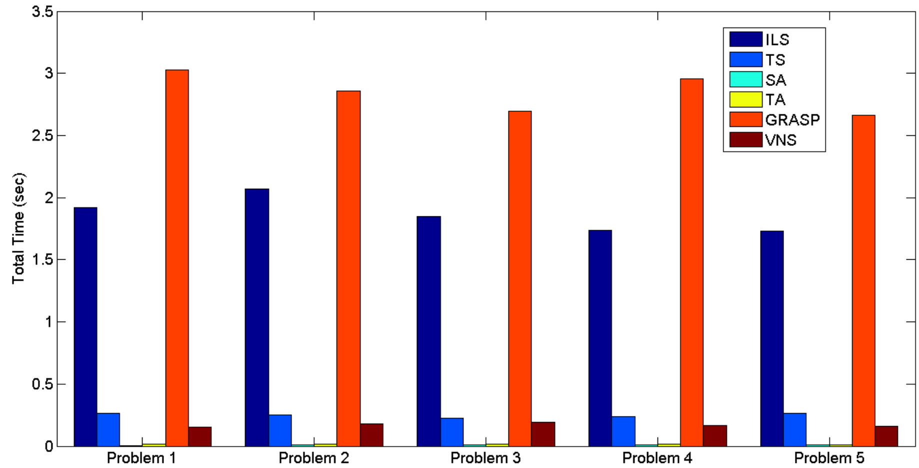
Σχήμα 10: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap4.txt.



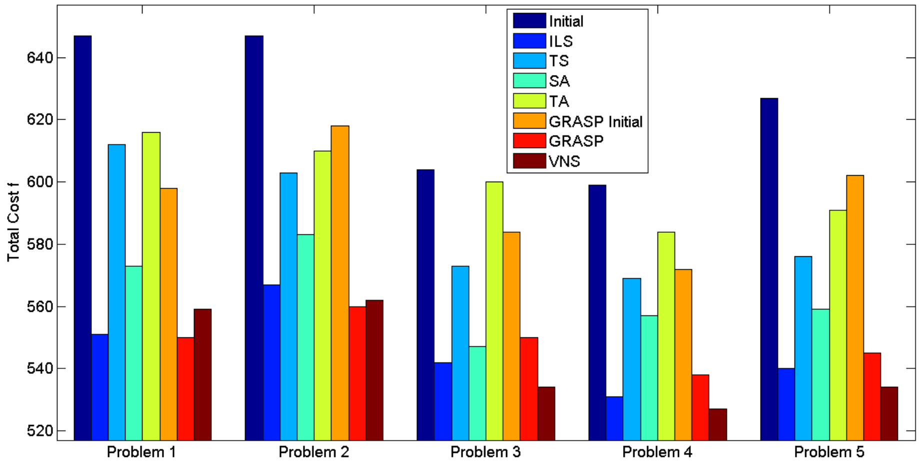
Σχήμα 11: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap4.txt.



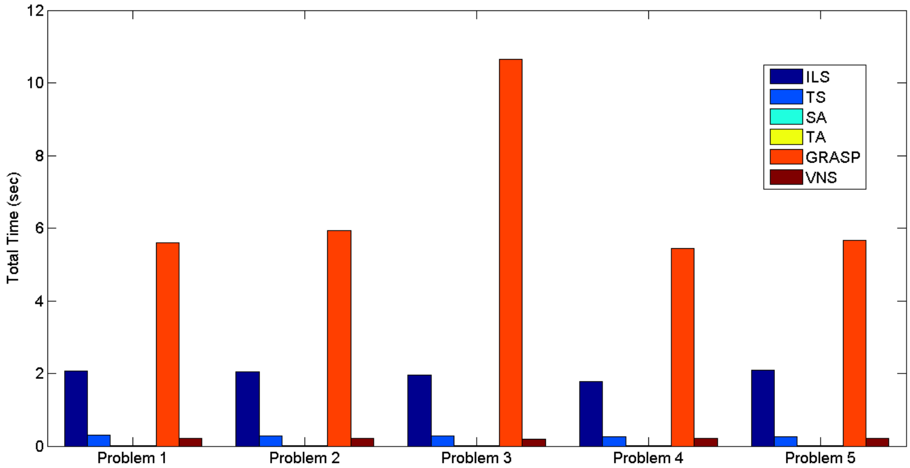
Σχήμα 12: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap5.txt.



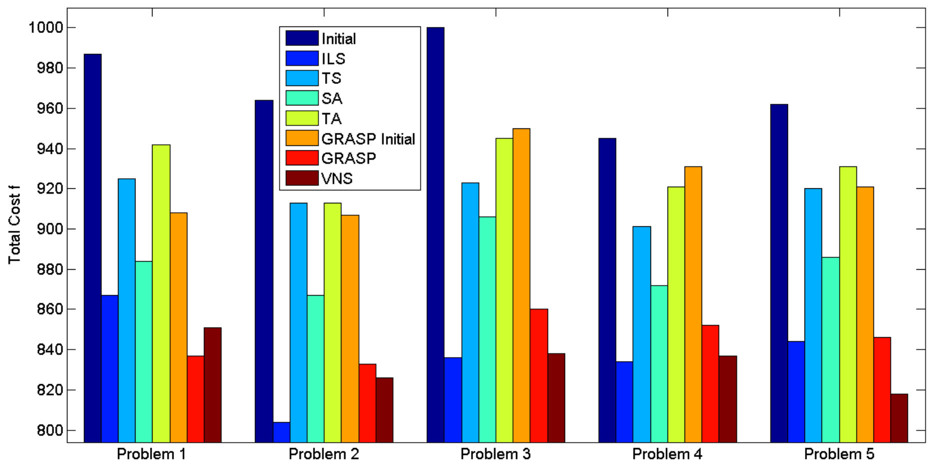
Σχήμα 13: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap5.txt.



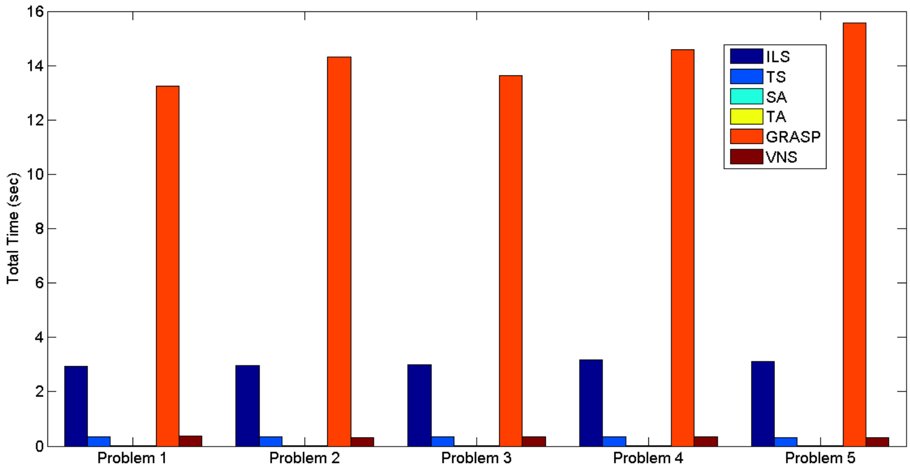
Σχήμα 14: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap6.txt.



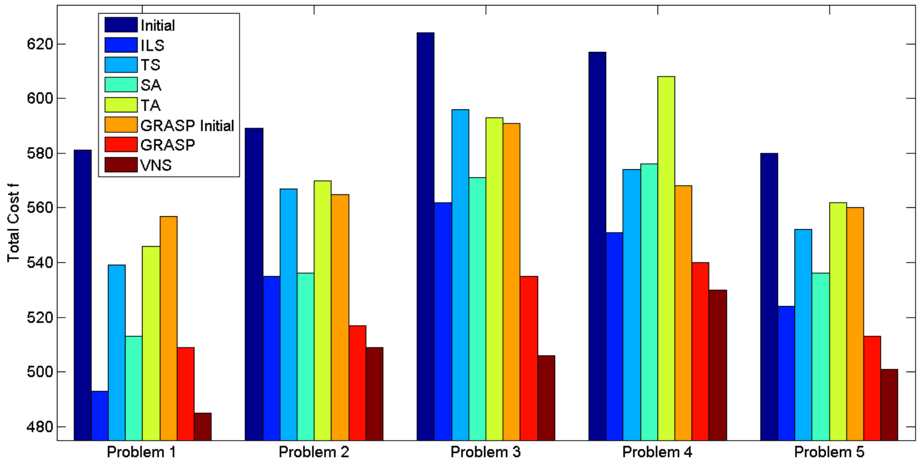
Σχήμα 15: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap6.txt.



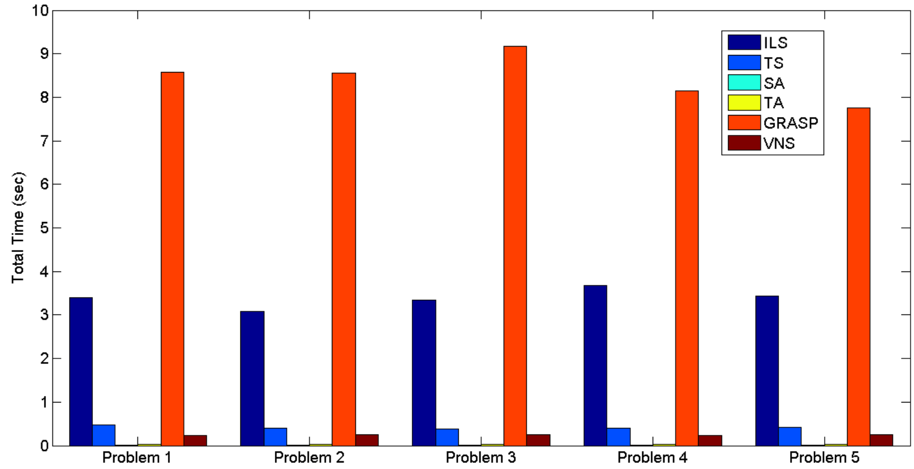
Σχήμα 16: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap7.txt.



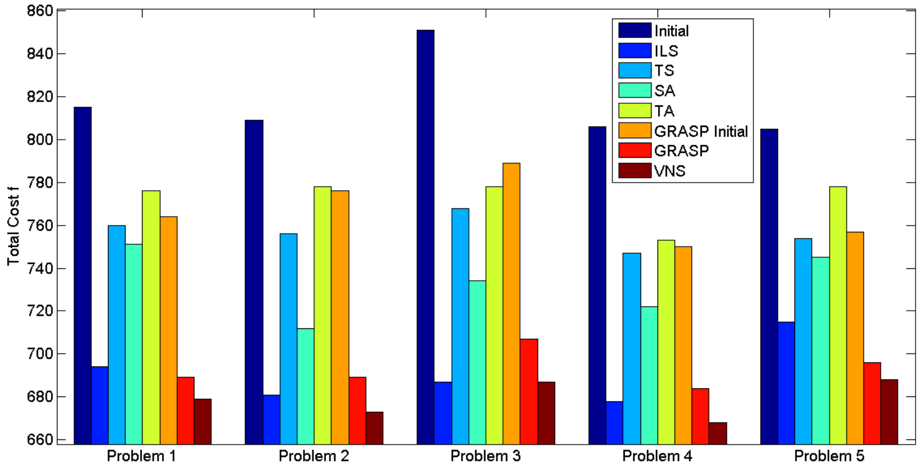
Σχήμα 17: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap7.txt.



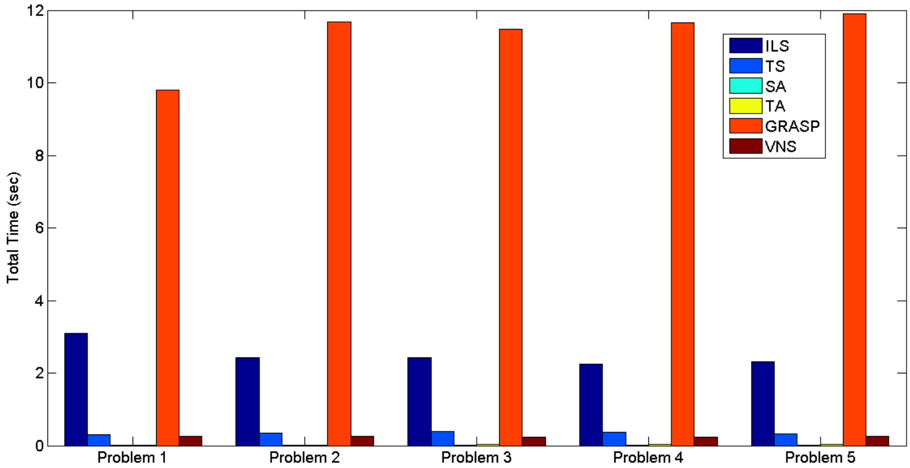
Σχήμα 18: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap8.txt.



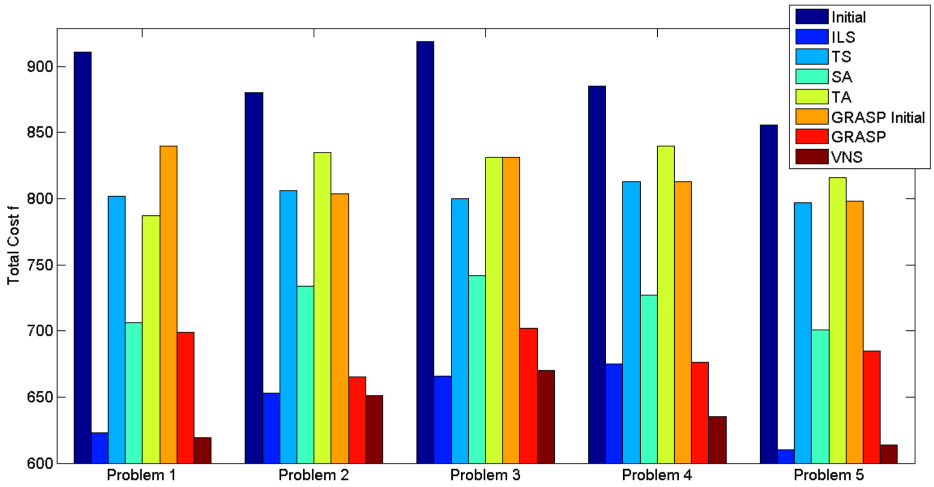
Σχήμα 19: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap8.txt.



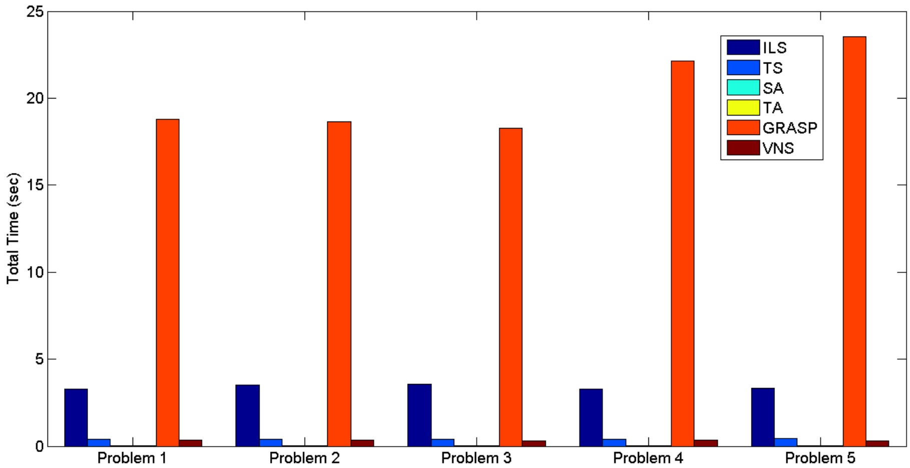
Σχήμα 20: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap9.txt.



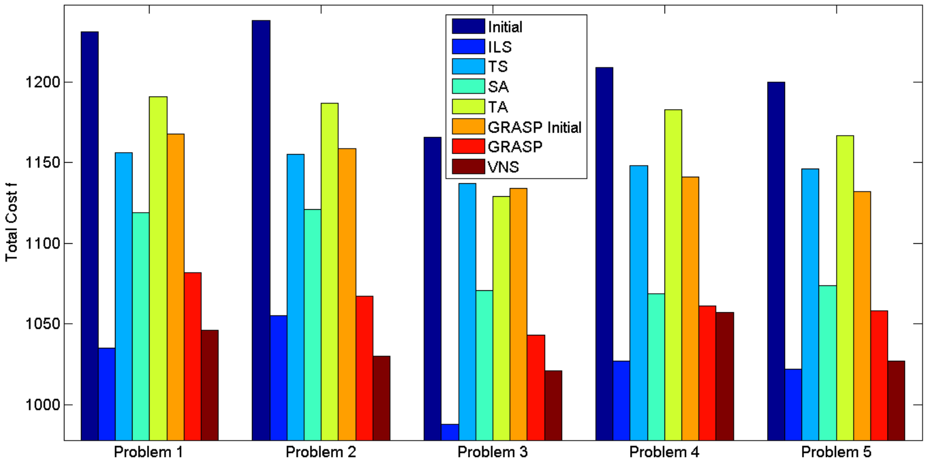
Σχήμα 21: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap9.txt.



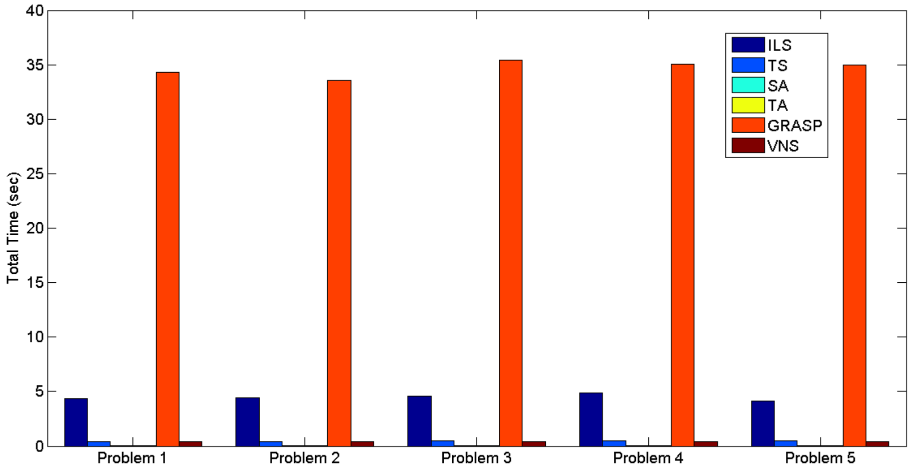
Σχήμα 22: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap10.txt.



Σχήμα 23: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap10.txt.



Σχήμα 24: Συνολικό κόστος της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap11.txt.



Σχήμα 25: Χρόνος εκτέλεσης (sec) της κάθε μεθόδου για την κατηγορία προβλημάτων gap11.txt.

Αρχικά παρατηρούμε ότι και οι 6 μεθευρετικοί αλγόριθμοι βελτιώνουν την αρχική λύση για όλες τις κατηγορίες προβλημάτων GAP. Επίσης, σχετικά με το χρόνο εκτέλεσης βλέπουμε πως, όπως ήταν αναμενόμενο, όσο αυξάνεται ο αριθμός των μηχανών και των εργασιών τόσο αυξάνεται και ο χρόνος εκτέλεσης του κάθε αλγορίθμου.

Την πιο μεγάλη βελτίωση για τις περισσότερα προβλήματα δίνει ο VNS αλγόριθμος λόγω του γεγονότος ότι αναζητά βελτιώσεις της αρχικής λύσης σε μεγαλύτερες γειτονιές. Αντίστοιχα καλές λύσεις σε σχέση με το συνολικό κόστος δίνουν επίσης οι αλγόριθμοι ILS και GRASP. Ωστόσο, και οι δύο αυτοί αλγόριθμοι έχουν αρκετά μεγαλύτερο χρόνο εκτέλεσης από τον VNS.

Τέλος, παρατηρούμε πως ο χρόνος εκτέλεσης του GRASP είναι πολύ μεγαλύτερος από τους χρόνους εκτέλεσης όλων των άλλων αλγορίθμων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως σε κάθε επανάληψη γίνεται η «άπληστη» και «τυχαία» κατασκευή της λύσης. Επιπρόσθετα, στην περίπτωση που η κατασκευασμένη λύση δεν ικανοποιεί τον περιορισμό δυναμικότητας η διαδικασία κατασκευής επαναλαμβάνεται. Τέλος, αν δεν βρεθεί αποδεκτή λύση εφαρμόζεται η ίδια αρχικοποίηση με τους άλλους αλγορίθμους. Παρόλο που όλες οι παραπάνω διαδικασίες αυξάνουν κατά πολύ το χρόνο εκτέλεσης είναι απαραίτητες προκειμένου ο GRASP αλγόριθμος να μας δίνει μια αποδεκτή λύση που να είναι βέλτιστη και να ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος GAP.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:

Συμπεράσματα-Μελλοντικές Επεκτάσεις

Στόχος της συγκεκριμένης εργασίας ήταν η μελέτη του Γενικευμένου Προβλήματος Ανάθεσης (GAP) καθώς και εφαρμογή μερικών από τους πιο σημαντικούς μεθευρετικούς αλγορίθμους για την επίλυσή του. Η αξιολόγηση των πειραματικών αποτελεσμάτων, με βάση τα κριτήρια του συνολικού κόστους και του χρόνου εκτέλεσης, αποδεικνύουν την καταλληλότητα των συγκεκριμένων αλγορίθμων για το GAP πρόβλημα.

Πιο συγκεκριμένα οι συνεισφορές της παρούσας εργασίας συνοψίζονται στα εξής:

- Μελέτη του Γενικευμένου Προβλήματος Ανάθεσης (GAP) και των Μεθευρετικών Αλγορίθμων.
- Έρευνα της βιβλιογραφίας σχετικά με τους αλγορίθμους και τις τεχνικές επίλυσης του GAP προβλήματος.
- Μελέτη και Υλοποίηση έξι σημαντικών μεθευρετικών αλγοριθμών.
- Προσαρμογή και Εφαρμογή των παραπάνω αλγορίθμων στο πρόβλημα του GAP, καθώς και παρουσίαση-ανάλυση των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Σαν πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις της παρούσας εργασίας, προτείνονται η εφαρμογή υβριδικών αλγορίθμων που προκύπτουν από τη σύμμειξη δύο η περισσότερων μεθευρετικών αλγορίθμων. Επίσης, μπορούν να διερευνηθούν διαφορετικές εναλλακτικές σχετικά με τον ορισμό της γειτονίας μιας λύσης για το GAP πρόβλημα αλλά και η εφαρμογή αλγορίθμων ακεραίου προγραμματισμού για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

[1] www.Wikipedia.gr

[2] www.science direct.com

[3] **Martello, S. and Toth, P. (1981)**, "An algorithm for the generalized assignment problem", in: J.P. Barns (ed.), Operational Research '81, North-Holland, Amsterdam, 589-603.

[4] **Martello, S., Toth, P., (1990)**, 0-1 knapsack problem. In: Martello, S., Toth, P. (Eds.), Knapsack Problems: Algo-rithms and Computer Implementations. Wiley, Chichester, UK, pp. 13-80.

[5] **Osman, I.H. (1995),** Heuristics for the generalized assignment problem: simulated annealing and tabu search approaches, OR Spektrum 17: 211-225

[6] **Chu, P.C. and Beasley, J.E. (1997),** A generic algorithm for the generalized assignment problem, Comp Opns Res 24: 17-23.

[7] **Laguna, M.,Kelly, J.P., Gonzalez-Velarde, J.L. and Glover, F. (1995),** Tabu search for the multilevel generalized assignment problem, Eur J Oper Res 82: 176-189.

[8] **Mohammad M. Amini (1994),** Vectorization of an auction algorithm for linear cost assignment problem, Computers & Industrial Engineering, Volume 26, Issue 1,Pages 141-149.

[9] **Jörg Nowakovski, Werner Schwärzler, Eberhard Triesch (1999),** Using the generalized assignment problem in scheduling the ROSAT space telescope, European Journal of Operational Research, Volume 112, Issue 3, Pages 531-541.

[10] **Sonia, M.C. Puri (2008),** Two-stage time minimizing assignment problem, Omega, Volume 36, Issue 5, Pages 730-740.

[11] **L. Zeng, H.L. Ong, K.M. Ng, S.B. Liu (2008),** Two composite methods for soft drink distribution problem, Advances in Engineering Software, Volume 39, Issue 5, Pages 438-443.

[12] **Nathalie Perrier, André Langevin, James F. Campbell (2008),** The sector design and assignment problem for snow disposal operations, European Journal of Operational Research, Volume 189, Issue 2, Pages 508-525.

[13] **Chase Rainwater, Joseph Geunes, H. Edwin Romeijn (2009),** The generalized assignment problem with flexible jobs, Discrete Applied Mathematics, Volume 157, Issue 1, Pages 49-67.

[14] **Reuven Cohen, Liran Katzir (2008),** The Generalized Maximum Coverage Problem, Information Processing Letters, Volume 108, Issue 1, Pages 15-22.

[15] **Pavlo A. Krokhmal, Panos M. Pardalos (2009),** Random assignment problems, European Journal of Operational Research, Volume 194, Issue 1, Pages 1-17.

[16] **Rochat, Yves and Taillard, ÉricD (1995),** Probabilistic diversification and intensification in local search for vehicle routing, Journal of Heuristics, volume 1, number 1 , pages 147-167.

[17] **L.R. Foulds, J.M. Wilson (1999),** On an assignment problem with side constraints, Computers & Industrial Engineering, Volume 37, Issue 4, Pages 847-858.

[18] **Linhu Zhao, Yashuhiro Tsujimura, Mitsuo Gen (1996),** Genetic algorithm for robot selection and work station assignment problem, Computers & Industrial Engineering, Volume 31, Issues 3–4, Pages 599-602.

[19] **Resende, MauricioG.C. (2009),** Greedy Randomized Adaptive Search Procedures, Encyclopedia of Optimization, pages 1460-1469.

[20] **Feo, ThomasA. and Resende, MauricioG.C. (1995),** Greedy Randomized Adaptive Search Procedures, Journal of Global Optimization},volume 6, number 2, pages 109-133.

[21] **Lale Özbakir, Adil Baykasoğlu, Pınar Tapkan (2010),** Bees algorithm for generalized assignment problem, Applied Mathematics and Computation, Volume 215, Issue 11, Pages 3782-3795.

[22] **D. de Werra, Y. Gay (1994),** Chromatic scheduling and frequency assignment, Discrete Applied Mathematics, Volume 49, Issues 1–3, Pages 165-174.

[23] **Neto, Teresa and Pedroso, JoãoPedro (2004),** GRASP for Linear Integer Programming, Metaheuristics: Computer Decision-Making, volume 86, pages 545-573.

[24] **T.D. Klastorin (1979),** An effective subgradient algorithm for the generalized assignment problem, Computers & Operations Research, Volume 6, Issue 3, Pages 155-164.

[25] **Shalini Arora, M.C. Puri (1998),** A variant of time minimizing assignment problem, European Journal of Operational Research, Volume 110, Issue 2, Pages 314-325.

[26] **Cai Wen Zhang, Hoon Liong Ong (2007),** An efficient solution to biobjective generalized assignment problem, Advances in Engineering Software, Volume 38, Issue 1, Pages 50-58.

[27] **Dirk G. Cattrysse, Luk N. Van Wassenhove (1992),** A survey of algorithms for the generalized assignment problem, European Journal of Operational Research, Volume 60, Issue 3, Pages 260-272.

[28] **Paul R. Harper, Valter de Senna, Israel T. Vieira, Arjan K. Shahani (2005),** A genetic algorithm for the project assignment problem, Computers & Operations Research, Volume 32, Issue 5, Pages 1255-1265.

[29] **J. Majumdar, A.K. Bhunia (2007),** Elitist genetic algorithm for assignment problem with imprecise goal, European Journal of Operational Research, Volume 177, Issue 2, Pages 684-692.

[30] **Maria Albareda-Sambola, Maarten H. van der Vlerk, Elena Fernández (2006),** Exact solutions to a class of stochastic generalized assignment problems, European Journal of Operational Research, Volume 173, Issue 2, Pages 465-487

[31] **G.R. Jahanshahloo, M. Afzalinejad (2008),** Goal programming in the context of the assignment problem and a computationally effective solution

method, Applied Mathematics and Computation, Volume 200, Issue 1, Pages 34-40.

[32] **Russell R. Barton, Donald W. Hearn, Siriphong Lawphongpanich (1989),** The equivalence of transfer and generalized benders decomposition methods for traffic assignment, Transportation Research Part B: Methodological, Volume 23, Issue 1, Pages 61-73.

[33] **J.J. Kosowsky, A.L. Yuille (1994),** The invisible hand algorithm: Solving the assignment problem with statistical physics, Neural Networks, Volume 7, Issue, Pages 477-490.

[34] **Åsa Hallefjord, Kurt O. Jörnsten, Peter Värbrand (1993),** Solving large scale generalized assignment problems — An aggregation / disaggregation approach, European Journal of Operational Research, Volume 64, Issue 1, Pages 103-114.

[35] **Jay E. Aronson (1986),** The multiperiod assignment problem: A multicommodity network flow model and specialized branch and bound algorithm, European Journal of Operational Research, Volume 23, Issue 3, Pages 367-381.

[36] **James R. Evans (1981),** The multicommodity assignment problem: a network aggregation heuristic, Computers & Mathematics with Applications, Volume 7, Issue 2, Pages 187-194.

[37] **V. Jeet, E. Kutanoglu (2007),** Lagrangian relaxation guided problem space search heuristics for generalized assignment problems, European Journal of Operational Research, Volume 182, Issue 3, Pages 1039-1056.

[38] **M.A.S. Monfared, M. Etemadi (2006),** The impact of energy function structure on solving generalized assignment problem using Hopfield neural network, European Journal of Operational Research, Volume 168, Issue 2, Pages 645-654.

[39] **Pedro M. Talaván, Javier Yáñez (2006),** The generalized quadratic knapsack problem. A neuronal network approach, Neural Networks, Volume 19, Issue 4, Pages 416-428.

[40] **A. Volgenant (2004),** Solving the k-cardinality assignment problem by transformation, European Journal of Operational Research, Volume 157, Issue 2, Pages 322-331.

[41] **Dirk Cattrysse, Zeger Degraeve, Jurgen Tistaert (1998),** Solving the generalised assignment problem using polyhedral results, European Journal of Operational Research, Volume 108, Issue 3, Pages 618-628.

[42] **Torbjörn Larsson, Michael Patriksson (1999),** Side constrained traffic equilibrium models— analysis, computation and applications, Transportation Research Part B: Methodological, Volume 33, Issue 4, Pages 233-264.

[43] **Ayed Salman, Imtiaz Ahmad, Sabah Al-Madani (2002),** Particle swarm optimization for task assignment problem, Microprocessors and Microsystems, Volume 26, Issue 8, Pages 363-371.

[44] **W. Jänicke (1989),** Optimal assignment of orders to parallel working subplants without splitting, Computer Integrated Manufacturing Systems, Volume 2, Issue 3, Pages 186-187.

[45] **Tal Shima, Steven J. Rasmussen, Andrew G. Sparks, Kevin M. Passino (2006),** Multiple task assignments for cooperating uninhabited aerial vehicles using genetic algorithms, Computers & Operations Research, Volume 33, Issue 11, Pages 3252-3269.

[46] **Snežana Mitrović-Minić, Abraham P. Punnen (2009),** Local search intensified: Very large-scale variable neighborhood search for the multi-resource generalized assignment problem, Discrete Optimization, Volume 6, Issue 4, Pages 370-377.

[47] **María A. Osorio, Manuel Laguna (2003),** Logic cuts for multilevel generalized assignment problems, European Journal of Operational Research, Volume 151, Issue 1, Pages 238-246.

[48] **Marcelo G. Narciso, Luiz Antonio N. Lorena (1999),** Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problems, European Journal of Operational Research, Volume 114, Issue 1, Pages 165-177.

[49] **Paulo Barcia, Kurt Jörnsten (1990),** Improved Lagrangean decomposition: An application to the generalized assignment problem, European Journal of Operational Research, Volume 46, Issue 1, Pages 84-92.

[50] **Barrie M. Baker, Janice Sheasby (1999),** Extensions to the generalised assignment heuristic for vehicle routing, European Journal of Operational Research, Volume 119, Issue 1, Pages 147-157.

[51] **S.P. Eberhardt, T. Daud, D.A. Kerns, T.X Brown, A.P. Thakoor (1991),** Competitive neural architecture for hardware solution to the assignment problem, Neural Networks, Volume 4, Pages 431-442.

[52] **Alain Hertz, Vincent Robert (1998),** Constructing a course schedule by solving a series of assignment type problems, European Journal of Operational Research, Volume 108, Issue 3, Pages 585-603.

[53] **Roy Danchick (2005),** A ranked linear assignment approach to Bayesian classification, Applied Mathematics and Computation, Volume 162, Issue 1, Pages 265-281.

[54] **H.Edwin Romeijn, Dolores Romero Morales (2001),** A probabilistic analysis of the multi-period single-sourcing problem, Discrete Applied Mathematics, Volume 112, Issues 1–3, Pages 301-328.

[55] **V.S. Gordon (1993),** A note on optimal assignment of slack due-dates in single-machine scheduling, European Journal of Operational Research, Volume 70, Issue 3, Pages 311-315.

[56] **Cem Iyigun, Adi Ben-Israel (2010),** A generalized Weiszfeld method for the multi-facility location problem, Operations Research Letters, Volume 38, Issue 3, Pages 207-214.

[57] **Meir J. Rosenblatt, Boaz Golany (1992),** A distance assignment approach to the facility layout problem, European Journal of Operational Research, Volume 57, Issue 2, Pages 253-270.

[58] Yonghui Oh, Hark Hwang, Chun Nam Cha, Suk Lee (2006), A dock-door assignment problem for the Korean mail distribution center, Computers & Industrial Engineering, Volume 51, Issue 2, Pages 288-296.