ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΥΠΟ ΚΑΘΕΣΤΩΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

«Εφαρμογή στην επιλογή χαρτοφυλακίου χρεογράφων»

ΘΩΜΑΪΔΗΣ ΝΙΚΟΣ

Επιβλέπων καθηγητής:
Μιχ. Μιχαλόπουλος

XANIA 2001

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να αναφερθώ στους ανθρώπους που συντέλεσαν στην πραγματοποίηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μιχάλη Μιχαλόπουλο, τους Πανάιγκα Θεοδόση και Marchelli Daniela και όλο το προσωπικό του τμήματος πληροφορικής της Τράπεζας της Ελλάδος για την παροχή δεδομένων και πολύτιμων συμβουλών για την υλοποίηση της εφαρμογής.

Επίσης, ευχαριστώ ιδιαιτέρως το προσωπικό της Βιβλιοθήκης του Πολυτεχνείου Κρήτης και ιδιαίτερα την Ειρήνη Τσουράκη για τη διευθέτηση των παραγγελιών των άρθρων που χρησίμευσαν στη συγγραφή αυτής της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να αναφερθώ και στους παρακάτω φίλους μου καθένας εκ των οποίων συνέβαλε με το δικό του τρόπο στην υλοποίηση της διπλωματικής εργασίας. Τους εύχομαι ολόψυχα ότι καλύτερο. (Τα ονόματα για λόγους ουδετερότητας παρατίθενται σε αλφαβητική σειρά):

Γιάννης Ράμμος
Διαμαντής Καράβολας
Ίλια Σδράλλη

Ν.Θ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία εξετάζει την εφαρμογή των ασαφών συνόλων στην ανάλυση αποφάσεων υπό καθεστώς αβεβαιότητας. Ως ανάλυση απόφασης θεωρούμε κάθε διαδικασία που αποβλέπει αφενός στο να περιγράψει και να αποδώσει το πρόβλημα απόφασης και αφετέρου στο να υποδείξει στον αποφασίζοντα μία πορεία η οποία θα τον οδηγήσει στην επιλογή «ορθολογικής» και συνάμα ικανοποιητικής λύσης. Η ανάλυση μίας απόφασης αποκτά ιδιαίτερη σημασία όταν η λήψη της απόφασης γίνεται υπό καθεστώς αβεβαιότητας. Η αβεβαιότητα στερεί γενικά από το αποφασίζοντα τη δυνατότητα να καθορίσει, να προβλέψει ή να ελέγξει τις παραμέτρους του προβλήματος που καλείται να αντιμετωπίσει.

Παραδοσιακά, για την ανάλυση αποφάσεων υπό καθεστώς αβεβαιότητας χρησιμοποιείται η θεωρία των πιθανοτήτων. Η συνεισφορά της τελευταίας στο θέμα αυτό είναι οπωσδήποτε αναμφισβήτητη. Εντούτοις, η μελέτη σύγχρονων πολύπλοκων συστημάτων, όπως π.χ. μίας χρηματαγοράς, αποδεικνύει ότι η θεωρία των πιθανοτήτων αδυνατεί να μοντελοποιήσει όλες τις μορφές αβεβαιότητας που πηγάζουν από τη λειτουργία αυτών, και ιδιαίτερα την *ασάφεια*. Η τελευταία έχει το νόημα της αδυναμία απόδοσης μίας ακριβούς περιγραφής σε μία κατάσταση ή ένα γεγονότος. Η ασάφεια, όπως γίνεται αντιληπτή, είναι έμφυτο χαρακτηριστικό της ανθρώπινης επικοινωνίας. Ασαφείς εκφράσεις του τύπου «*πολύ* πιθανό» ή «*αρκετά* ικανοποιητικό» χρησιμοποιούνται συχνά για τη μετάδοση πληροφορίας και δύνανται να αποτελέσουν βάση για την ανάληψη δράσης.

Η θεωρία των ασαφών συνόλων επινοήθηκε για να μοντελοποιήσει αυτού του είδους τις ασαφείς λεκτικές περιγραφές. Η ενσωμάτωση των ασαφών συνόλων στην κλασική επιχειρησιακή έρευνα δύναται να διευρύνει το πεδίο εφαρμογής της δεύτερης στην επίλυση προβλημάτων των οποίων οι παράμετροι περιγράφονται με ανακριβείς, ποιοτικούς όρους. Χαρακτηριστική είναι η φράση του L.A. Zadeh: «from computing with numbers to computing with words».

Το κείμενο της εργασίας που ακολουθεί είναι δομημένο κατά τον εξής τρόπο:

Στο κεφάλαιο 1 γίνεται μία ανασκόπηση στοιχείων της θεωρίας των ασαφών συνόλων καθώς και των τριών βασικών ερμηνειών που αποδίδονται σε αυτά στις εκάστοτε εφαρμογές. Στο κεφάλαιο 2 εξετάζονται εναλλακτικές μέθοδοι με τις οποίες μπορεί κανείς να μοντελοποιήσει προβλήματα αποφάσεων με τη χρήση ασαφών συνόλων. Στο κεφάλαιο 3 δίνεται έμφαση στην εφαρμογή της ασαφούς λογικής στην επίλυση πολυκριτήριων προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού. Τέλος, στο κεφάλαιο 4, ως μία επίδειξη του τρόπου εφαρμογής της ασαφούς μεθοδολογίας, θεωρούμε τη ρεαλιστική περίπτωση ενός επενδυτή που καλείται να επιλέξει ένα χαρτοφυλάκιο από ομόλογα ελληνικού δημοσίου. Οι στόχοι του επενδυτή για τα διάφορα σενάρια της αγοράς διατυπώνονται με τρόπο ασαφή, ενώ ένα μοντέλο ασαφούς βελτιστοποίησης καλείται να «μεταφράσει» τους στόχους αυτούς σε σύνθεση χαρτοφυλακίου. Η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων τη μεθόδου ελέγχεται με τη βοήθεια προσομοίωσης κατά την οποία δημιουργούνται πιθανά σενάρια της αγοράς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε βασικά στοιχεία της θεωρίας των ασαφών συνόλων και της ασαφούς λογικής, θεωρία της λογικής που βασίζεται σε ασαφή σύνολα. Τον όρο «ασαφή λογική» (fuzzy logic) εισήγαγε το 1962 με άρθρο του ο L.A. Zadeh, ο οποίος αναφέρθηκε στην αναγκαιότητα για τη δημιουργία μίας μαθηματικής θεωρίας που θα επεξεργάζεται ασαφείς-ανακριβείς έννοιες, οι οποίες δεν είναι δυνατό να μοντελοποιηθούν με τη θεωρία των πιθανοτήτων [Zadeh, (1962)]. Η μαθηματική θεμελίωση της ασαφούς λογικής δηλ. η θεωρία των ασαφών συνόλων (fuzzy sets) ακολούθησε κάποια χρόνια αργότερα σε ομώνυμο άρθρο του ιδίου συγγραφέα [Zadeh, (1965)].

1.1. Ορισμοί

1.1.1. Ασαφή σύνολα και συναρτήσεις συμμετοχής

Έστω X ένα μη κενό σύνολο πραγμάτων, με την κλασική έννοια του όρου, το οποίο αποτελεί το *σύνολο αναφοράς* (universe of discourse ή referential). Θεωρούμε ένα υποσύνολο A του X. Τότε υπάρχει μία συνάρτηση μ_A:$X\rightarrow\{0,1\}$, η οποία ονομάζεται *συνάρτηση συμμετοχής* κάθε στοιχείου x στο υποσύνολο A και ορίζεται ως:

$$\mu_{A}(x)=\begin{cases}1 & ,x\in A\\ 0 & ,x\notin A\end{cases} \tag{1.1}$$

Αν επεκτείνουμε το πεδίο τιμών της μ στο διάστημα [0 1] τότε ορίζουμε ένα *ασαφές υποσύνολο* A του συνόλου X. Συμβολικά γράφουμε $A\underset{\sim}{\subseteq}X$. Χαρακτηριστικό των ασαφών υποσυνόλων είναι ότι κάθε στοιχείο του υπό θεώρηση συνόλου X δύναται να ανήκει σε αυτά, αλλά με διαφορετικό βαθμό συμμετοχής. Συνεπώς, ένα ασαφές υποσύνολο ορίζεται ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x,\mu_{A}(x)), x\in X$. Ένας εναλλακτικός συμβολισμός προτείνεται στο [Zadeh, (1972)]:

Όταν το σύνολο X είναι πεπερασμένο δηλ. $X=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$ τότε ένα ασαφές υποσύνολο A μπορεί να γραφεί ως:

$$A=\mu_{A}(x_1)/x_1+\mu_{A}(x_2)/x_2+\ldots+\mu_{A}(x_n)/x_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_{A}(x_i)/x_i \tag{1.2}$$

Ο συμβολισμός αυτός επεκτείνεται στην περίπτωση μη πεπερασμένου συνόλου αναφοράς στον:

$$A=\int_{X}\mu_{A}(x)/x \tag{1.3}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικούς ορισμούς:

- **Ισότητα ασαφών συνόλων**

Δύο ασαφή σύνολα[1] A και B είναι ίσα όταν:

$$\mu_A(x)=\mu_B(x),\ \forall x\in X. \tag{1.4}$$

- **Υποστήριγμα (support) ενός ασαφούς συνόλου.**

Το «υποστήριγμα» ενός ασαφούς συνόλου είναι το *μη* ασαφές υποσύνολο του X το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$suppA = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \tag{1.5}$$

- ***α*-τομή ασαφούς συνόλου**

Ως a-τομή (a-cut) ενός ασαφούς συνόλου A ορίζουμε το *μη* ασαφές σύνολο:

$$A_\alpha=\{\ x\in X \mid \ \mu_A(x)\geq a\ \},\ 0 \leq a \leq 1 \tag{1.6}$$

Η έννοια της a-τομής απομονώνει από το σύνολο αναφοράς εκείνο το υποσύνολο του οποίου τα στοιχεία έχουν βαθμό συμμετοχής στο A μεγαλύτερο του a. Παρατηρούμε ότι A_0=supp$A$.

- **Ασαφές δυναμοσύνολο (power set)**

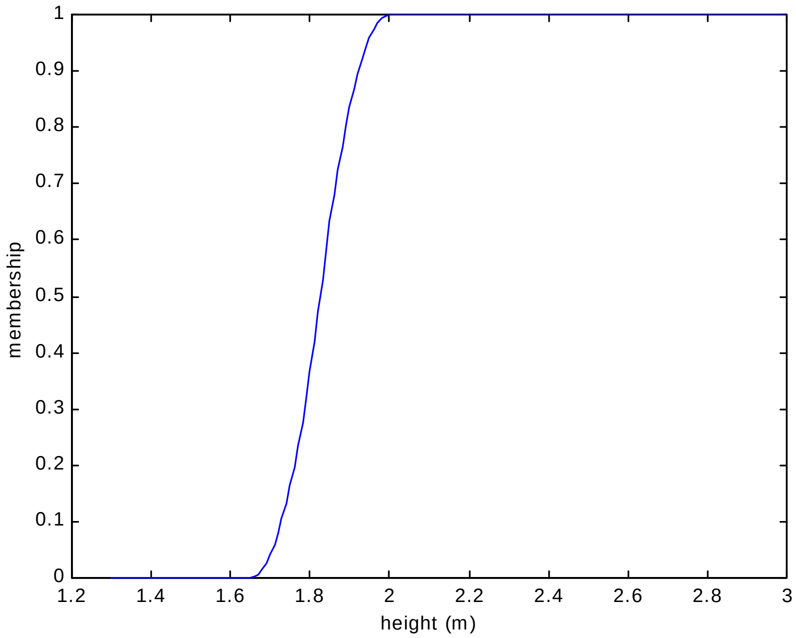
Στην κλασική θεωρία συνόλων, με τον όρο *δυναμοσύνολο* (power set) χαρακτηρίζουμε το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του X. Το δυναμοσύνολο συμβολίζεται συνήθως ως $P(X)$. Η έννοια του δυναμοσυνόλου μπορεί να επεκταθεί για να περιγράψει το σύνολο όλων των δυνατών ασαφών υποσυνόλων του X. Το μη ασαφές αυτό σύνολο αναφέρεται συχνά και ως *ασαφές δυναμοσύνολο* (fuzzy power set) του X και συμβολίζεται ως $\widetilde{P}(X)$.

□

Εξαιτίας των διαβαθμίσεων που υποθέτουν στη συμμετοχή, τα ασαφή σύνολα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν έννοιες των οποίων το «νοηματικό σύνορο» δεν είναι ιδιαίτερα σαφές. Παραδείγματα τέτοιων εννοιών είναι π.χ. ο *ψηλός* άνδρας, το *μεγάλο* αυτοκίνητο κ.α. Σε αυτές τις περιπτώσεις η έννοια από μόνη της δεν υπονοεί τα άτομα, τα πράγματα ή τις καταστάσεις στις οποίες αναφέρεται. Έτσι το αν ένα άτομο π.χ. θα χαρακτηριστεί ως ψηλός ή όχι εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως δημογραφικά χαρακτηριστικά του τόπου στον οποίο γεννήθηκε, υποκειμενική αντίληψη κ.α.

[1] Όπως αντιλαμβανόμαστε ένα ασαφές σύνολο δεν είναι αυθύπαρκτο με την έννοια ότι ορίζεται πάντα επί ενός συνόλου αναφοράς. Γι' αυτό το λόγο θα είχε πιο πολύ νόημα να μιλάμε για ασαφή υποσύνολα. Εντούτοις, στο υπόλοιπο αυτού του κειμένου χρησιμοποιείται ο χαρακτηρισμός ασαφές σύνολο αναφερόμενοι όμως πάντα στο σύνολο αναφοράς.

Παράδειγμα 1.1.
Θεωρούμε το ασαφές σύνολο των *ψηλών*[2] ανδρών. Το ασαφές αυτό σύνολο μπορεί να ορισθεί επί του υποσυνόλου [1.30 3.00] των πραγματικών αριθμών, το οποίο αντιπροσωπεύει όλα τα δυνατά ύψη που μπορεί να έχει ένας άνδρας. Συνεπώς, X=[1.30 3.00]. Η έννοια του *ψηλού* άνδρα αναπαρίσταται με τη συνάρτηση συμμετοχής του σχ.1.1.



Σχήμα 1.1 Συνάρτηση συμμετοχής για την έννοια «*ψηλός*» άνδρας.

Χαρακτηριστικές μορφές συναρτήσεων συμμετοχής στις διάφορες εφαρμογές ασαφών συνόλων είναι οι *s*,*z* και *π*, όπως χαρακτηριστικά ονομάζονται, και ορίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
s(x_l,x_r,x) &= \begin{cases} 0 & ,x < x_l \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\pi\dfrac{x-x_r}{x_r-x_l}\right) & ,x_l \le x \le x_r \\ 1 & ,x > x_r \end{cases} \\
z(x_l,x_r,x) &= \begin{cases} 1 & ,x < x_l \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\pi\dfrac{x-x_l}{x_r-x_l}\right) & ,x_l \le x \le x_r \\ 0 & ,x > x_r \end{cases} \\
\pi(x_1,x_2,x_3,x_4,x) &= \min\{s(x_1,x_2,x),z(x_3,x_4,x)\}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Η καμπύλη του σχ.1.1 π.χ. είναι *s* (1.65,2.00,*x*).

---

[2] Ο αναγνώστης θα έχει παρατηρήσει ότι στις λεκτικές περιγραφές που αντιστοιχούν σε ασαφή σύνολα, τυπώνουμε με πλάγια γράμματα το τμήμα εκείνο της περιγραφής που προσδίδει ασάφεια.

1.1.2. Τελεστές επί ασαφών συνόλων

Οι παρακάτω ορισμοί προϋποθέτουν ότι τα ασαφή σύνολα ορίζονται στο ίδιο σύνολο αναφοράς X.

- **Τομή και ένωση ασαφών συνόλων**

Η τομή $A \cap B$ και η ένωση $A \cup B$ δύο ασαφών συνόλων A, B αποτελεί ασαφές σύνολο με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \text{ και}$$
$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},\ \forall x \in X \tag{1.8}$$

αντιστοίχως. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ και $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.

- **Συμπλήρωμα (complement) ασαφούς συνόλου**

Το συμπλήρωμα $\bar{A}$ ενός ασαφούς συνόλου A είναι ένα νέο ασαφές σύνολο με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\forall x \in X,\ \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)\,. \tag{1.9}$$

- **Υποσύνολο ασαφές συνόλου**

Το ασαφές σύνολο A λέμε ότι είναι υποσύνολο του ασαφούς συνόλου B και γράφουμε $A \subseteq B$ όταν:

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) \le \mu_B(x). \tag{1.10}$$

□

Μία γενική παρατήρηση που αφορά τους παραπάνω ορισμούς είναι ότι αποτελούν ουσιαστικά επέκταση των αντίστοιχων τελεστών που ισχύουν στα κλασικά σύνολα.

1.1.3. Η «Αρχή της Επέκτασης»

Η Αρχή της Επέκτασης, που προτάθηκε από τον Zadeh [Zadeh, (1975)], αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο που επιτρέπει την ενσωμάτωση των ασαφών συνόλων στην κλασική μαθηματική ανάλυση. Με τη βοήθεια της Αρχής της Επέκτασης έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε αριθμητικούς τελεστές '+', '-', '*' και '\' επί ασαφών συνόλων όπως και συναρτήσεις που δέχονται ασαφή ορίσματα. Η Αρχή της Επέκτασης εφαρμόζεται ιδιαίτερα σε προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού των οποίων οι παράμετροι δίνονται ως ασαφή σύνολα. Η επέκταση αυτή του μαθηματικού προγραμματισμού ονομάζεται προγραμματισμός δυνατότητας (possibilistic programming) και θα αναλυθεί στην § 3.5.

Ορισμός 1.1.

Έστω X *ένα καρτεσιανό γινόμενο συνόλων αναφοράς,* $X=X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ *και* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ασαφή υποσύνολα των* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *αντίστοιχα. Το καρτεσιανό γινόμενο των* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *είναι ένα ασαφές σύνολο* A *το οποίο δίνεται από τη σχέση:*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \int_{X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\} / (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ή διαφορετικά (1.11)

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\}$$

Ας θεωρήσουμε μία απεικόνιση f από το $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ στο Y τ.ω. $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Η Αρχής της Επέκτασης μας δίνει τη δυνατότητα να απεικονίσουμε μέσω της f το ασαφές σύνολο A σε ένα ασαφές υποσύνολο B του Y.

Ορισμός 1.2. (Αρχή της Επέκτασης).

Έστω $A \tilde{\subseteq} X$ *και μία απεικόνιση* $f: X \to Y$. *Τότε υπάρχει* $B \tilde{\subseteq} Y$ *το οποίο αποτελεί την «εικόνα» του* A *στο* Y. *Συγκεκριμένα* $B=\{y, \mu_B(y)\}, y \in Y$ *και*

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in X: x=f^{-1}(y)} \mu_A(x) & ,\text{όταν } \exists\, x \text{ τ.ω. } x = f^{-1}(y) \\ 0 & ,\text{όταν } f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}, \qquad (1.12)$$

Συνήθως γράφουμε $B=f(A)$.

Προκειμένου να αντιληφθούμε τη σημασία της Αρχής της Επέκτασης, την εφαρμόζουμε στην περίπτωση της πρόσθεσης δύο *ασαφών* πραγματικών αριθμών.

Ως ασαφή πραγματικό αριθμό μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε ασαφές υποσύνολο του $\Re$. Τον τελεστή πρόσθεσης ασαφών συνόλων συμβολίζουμε με $\oplus$. Προφανώς, $\oplus : \widetilde{P}(\Re^2) \to \widetilde{P}(\Re)$. Έστω N_1 και N_2 δύο ασαφείς πραγματικοί αριθμοί με συναρτήσεις συμμετοχής $\mu_{N_1}(x)$, $x \in \Re$ και $\mu_{N_2}(y)$, $y \in \Re$. Αν $N = N_1 \oplus N_2$, τότε με βάση την Αρχή της Επέκτασης το N είναι ασαφές υποσύνολο του $\Re$ με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\mu_N(z) = \sup_{(x,y) \in \Re^2 : z = x+y} \min\{\mu_{N_1}(x), \mu_{N_2}(y)\}, \ z \in \Re \qquad (1.13)$$

Παράδειγμα 1.2

Έστω δύο ασαφείς πραγματικοί αριθμοί N_1:«*περίπου* ίσο με 3» και N_2:«*αρκετά* μεγαλύτερο του 1». Προς απλοποίηση των υπολογισμών θεωρούμε ένα διακριτό σύνολο αναφοράς X={0 1 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 6}. Οι N_1 και N_2 μπορούν να ορισθούν μέσω συναρτήσεων π και s μορφής αντίστοιχα όπως φαίνεται στον πίνακα 1.1.

X	0	1	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	6
μ_{N1}	0	0	0	0.7	1	0.7	0	0	0	0
μ_{N2}	0	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1	1	1

Πίνακας 1.1 Συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών αριθμών N_1 & N_2.

Με βάση την αρχή της επέκτασης η πρόσθεση των δύο αριθμών θα δώσει έναν νέο ασαφή αριθμό N. Η συνάρτηση συμμετοχής του τελευταίου υπολογίζεται βάσει της σχέσης 1.13 και παρουσιάζεται στον πίνακα 1.2.

X	0	1	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	6
μ_N	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.5

Πίνακας 1.2 Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των ασαφών αριθμών N_1 & N_2.

□

Καθ' όμοιο τρόπο μπορούμε να επεκτείνουμε τους τελεστές '-', '*' και '/' καθώς και συνήθεις συναρτήσεις όπως *e*, *sin*, *cos* κ.α. Πάντως, οι υπολογισμοί είναι κατά κανόνα δύσκολοι και για πολύπλοκα προβλήματα απαιτείται η χρήση ειδικών αλγορίθμων, όπως αυτός που περιγράφεται στο [Dubois & Prade, (1978)].

1.1.4. Ασαφείς σχέσεις

Σχέση (relation) στην κλασική θεωρία συνόλων θεωρείται κάθε απεικόνιση

$$R: X^2 \rightarrow \{0,1\},$$

όπου X οποιοδήποτε σύνολο. Όταν $R\{x,y\}=1$ για κάποια $x, y \in X$, τότε λέμε ότι «υπάρχει σχέση μεταξύ x και y». Το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση που $R\{x,y\}=0$. Οι σχέσεις χωρίζονται γενικώς σε δύο κατηγορίες: *σχέσεις διάταξης* '$\leq$' (*order relations*) και *σχέσεις ισοδυναμίας* '$\sim$' (*equivalence relation*). Θα αναφερθούμε μόνο σε σχέσεις διάταξης λόγω της ευρείας χρήσης τους στη θεωρία ανάλυσης αποφάσεων. Παραθέτουμε μερικούς χρήσιμους ορισμούς [Maddox, (1992)].

Σχέση μερικής διάταξης (partial-order relation).

Έστω ένα σύνολο X. Κάθε σχέση διάταξης '$\leq$' στο X με ιδιότητες:

1. $x \leq x$, $\forall x \in X$ *(ανακλαστική)*
2. $x \leq y$ *και* $y \leq x \Rightarrow x \sim y$, $\forall x, y \in X$ *(αντισυμμετρική)*
3. $x \leq y$ *και* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$, $\forall x, y,z \in X$ *(μεταβατική)*

ονομάζεται σχέση μερικής διάταξης.

Σχέση ολική ή γραμμικής διάταξης (total /linear- order relation).

Κάθε σχέση μερικής διάταξης με την επιπλέον ιδιότητα:

4. $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow$ *είτε* $x \leq y$ *είτε* $y \leq x$.

ονομάζεται σχέση ολικής ή γραμμικής διάταξης.

Βάσει των παραπάνω ορισμών μπορούμε να ορίσουμε τα ακόλουθα υποσύνολα (κλάσεις).

Κυριαρχούσα κλάση (dominating class)

Έστω $(X, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Κυριαρχούσα κλάση $P_{\geq}$ - επί ενός στοιχείου x του συνόλου X- ονομάζεται το υποσύνολο του X που ορίζεται από τη σχέση: $P_{\geq}(x)=\{y \mid y \in X \text{ και } x \leq y\}$.

Κυριαρχούμενη κλάση (dominated class)

Έστω $(X, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Κυριαρχούμενη κλάση $P_{\leq}$ -από ένα στοιχείο x του συνόλου X- ονομάζεται το υποσύνολο του X που ορίζεται από τη σχέση: $P_{\leq}(x)=\{y \mid y \in X \text{ και } y \leq x\}$.

Οι παραπάνω έννοιες χρησιμοποιούνται ευρέως από θεωρίες ανάλυσης αποφάσεων. Στις τελευταίες οι σχέσεις διάταξης εκφράζουν την προτίμηση που δείχνεται μεταξύ των εναλλακτικών λύσεων ενός προβλήματος. Έτσι, η πρόταση '$x \leq y$' μεταφράζεται ως «το y είναι λιγότερο προτιμητέο ή ισοδύναμο του x».

Ασαφής σχέση (fuzzy relation).

Έστω $X=X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ το καρτεσιανό γινόμενο που προκύπτει από τα σύνολα αναφοράς $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Κάθε ασαφές υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $X=X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ ονομάζεται ασαφής σχέση n-τάξεως.

Παρατηρούμε ότι η έννοια των σχέσης όπως γίνεται αντιληπτή από την κλασική λογική αποτελεί υποπερίπτωση του παραπάνω ορισμού για n=2 και $\mu_R(x, y) \in \{0,1\}$. Χάριν απλότητας θεωρούμε δυαδικές ασαφείς σχέσεις, δηλ. ασαφή υποσύνολα του X^2.

Με την χρήση της ασαφούς λογικής μπορούμε να επεκτείνουμε έννοιες όπως αντανακλαστικότητα, μεταβατικότητα κ.α. Εντούτοις, δεν υπάρχουν καθολικά αποδεκτοί ορισμοί και οι παραπάνω έννοιες μεταφράζονται διαφορετικά σε κάθε εφαρμογή. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

Ασαφή σχέση μερικής διάταξης (fuzzy partial-order relation).

Έστω ένα σύνολο X. Κάθε ασαφές υποσύνολο R του X^2 με ιδιότητες:

1. $\mu_R(x, x)=1, \forall x \in X$ *(ανακλαστική)*
2. $\forall x, y \in X$ αν $\mu_R(x, y)=\mu_R(y, x) \neq 0 \Rightarrow x \sim y$, *(αντισυμμετρική)*
3. $\min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)\} \leq \mu_R(x, z),\ \forall x, y, z \in X$ *(max-min μεταβατικότητα)*

ονομάζεται ασαφής σχέση μερικής διάταξης.

Ασαφής σχέση ολική ή γραμμικής διάταξης (fuzzy total /linear- order relation).

Κάθε ασαφής σχέση μερικής διάταξης R με την επιπλέον ιδιότητα:

4. $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow$ είτε $\mu_R(x, y)>0$ είτε $\mu_R(y, x)>0$.

ονομάζεται ασαφής σχέση ολικής ή γραμμικής διάταξης.

Οι ορισμοί των ιδιοτήτων 1 & 3 δίνονται στο [Zadeh, (1971)] και ο ορισμός της 2 στο [Kaufmann, (1975)].

Ασαφής κυριαρχούσα κλάση (fuzzy dominating class)

Ασαφής κυριαρχούσα κλάση $P_{\geq}$ - επί ενός στοιχείου x του συνόλου X και ως προς μία ασαφή σχέση μερικής διάταξης R- ονομάζεται το ασαφές υποσύνολο του X, $P_{\geq}(x)=\{y, \mu_R(y, x)>0\}$.

Ασαφής κυριαρχούμενη κλάση (fuzzy dominated class)

Ασαφής κυριαρχούμενη κλάση $P_{\leq}$ -από ένα στοιχείο x του συνόλου X και ως προς μία ασαφή σχέση μερική διάταξης R- ονομάζεται το ασαφές υποσύνολο του X, $P_{\leq}(x)=\{y, \mu_R(x, y)>0\}$.

Εύκολο είναι να αποδείξει κανείς ότι οι παραπάνω ορισμοί καλύπτουν και την περίπτωση εκείνων της κλασικής λογικής. Δύνανται όμως, επιπλέον, να ενσωματώσουν ασαφείς περιγραφές του είδους: «το *x* προτιμάται *κατά πολύ* του *y*». Περισσότερες λεπτομέρειες αναφέρονται στην § 2.2.2 του επόμενου κεφαλαίου.

1.2. Τρεις βασικές ερμηνείες των ασαφών συνόλων.

Συνεχίζουμε την παρουσίαση της θεωρίας των ασαφών συνόλων αναφέροντας τρεις βασικές σημασίες που αποδίδονται σε αυτά στις διάφορες εφαρμογές τους. Η πολλαπλότητα των εννοιολογικών ερμηνειών των ασαφών συνόλων επιτρέπει την εφαρμογή τους σε ποικιλία γνωστικών αντικειμένων όπως π.χ. η αναγνώριση προτύπου (pattern recognition), η ταξινόμηση (clustering), η θεωρία ελέγχου (control theory), η ανάλυση αποφάσεων (decision analysis) και η τεχνητή νοημοσύνη (artificial intelligence). Από την άλλη όμως, απαιτεί τη συμμετοχή του ανθρώπινου παράγοντα σε μεγάλο μέρος της διαδικασίας εφαρμογής οποιασδήποτε μεθόδου που βασίζεται σε ασαφή λογική. Πάντως, όπως θα διαπιστώσουμε και στη συνέχεια η μία εκ των τριών εννοιολογικών σημασιών δύναται να ενσωματώσει υπό κάποιες προϋποθέσεις τις άλλες δύο.

Στο παρακάτω κείμενο υποθέτουμε την ύπαρξη ενός ασαφούς συνόλου *F* με συνάρτηση συμμετοχής μ_F που παίρνει τιμές σε ένα σύνολο *U* (σύνολο αναφοράς). Μεγάλος μέρος της συζήτησής μας βασίζεται στο [Dubois & Prade, (1997)].

1.2.1. Τα ασαφή σύνολα ως μέτρα ομοιότητας

Αν υποθέσουμε ότι το *F* αντιπροσωπεύει μία ιδιότητα που δύνανται να λάβουν τα στοιχεία του *U* τότε η συνάρτηση συμμετοχής μ_F δηλώνει το βαθμό συμμετοχής κάθε στοιχείου του *U* στην ιδιότητα αυτή. Πώς όμως μπορούμε να εκτιμήσουμε το βαθμό συμμετοχής σε μία ιδιότητα; Μια συνήθης τακτική είναι να επιλέξουμε κάποιο (ή κάποια) στοιχεία του *U* χαρακτηριστικά αυτής της ιδιότητας ως *πρότυπο* και στη συνέχεια, υιοθετώντας κάποια μετρική[3] *d* στο σύνολο *U*, να συγκρίνουμε κάθε στοιχείο το *U* με τα πρότυπο αυτό. Από την παραπάνω διαδικασία και με κατάλληλους μετασχηματισμούς είναι δυνατό να συνάγουμε μία συνάρτηση συμμετοχής μ_F ως βαθμό ομοιότητας του εκάστοτε *u* με το πρότυπο *u**.

Έστω π.χ. ότι μας ζητείται να ταξινομήσουμε ένα αυτοκίνητο γνωστών διαστάσεων στη κλάση των «*μεγάλων* αυτοκινήτων». Στην περίπτωση αυτή, ως *U* θεωρούμε το σύνολο των αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στην αγορά, ενώ *F*≡«*μεγάλο* αυτοκίνητο» είναι το χαρακτηριστικό-ιδιότητα που πρέπει να πληρούν τα αυτοκίνητα αυτά. Για πρότυπο σύγκρισης μπορούμε να επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε αυτοκίνητο μεγάλων διαστάσεων, ενώ μία μετρική συνάρτηση θα εκτιμά την νοητή απόσταση του

[3] Ως μετρική εννοούμε κάθε συνάρτηση $d{:}U\times U\rightarrow R$, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες $\forall u, v, w \in U$: α) $d(u, v)\geq 0$, β) $d(u, v)=0$ όταν και μόνο όταν $u\sim v$ γ) $d(u, v)=d(v, u)$ και δ) $d(u,w)\leq d(u, v)+ d(v,w)$. [Maddox, (1992)]

προτύπου από το προς ταξινόμηση αυτοκίνητο συγκρίνοντας τις διαστάσεις τους. Γενικά, όσο μεγαλύτερη η νοητή απόσταση τόσο μικρότερη η συμμετοχή στην ιδιότητα *F*. Επομένως, η μ_F είναι μία φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης.

Παραδείγματα εφαρμογών στις οποίες η μ_F εκφράζει βαθμό ομοιότητας μπορεί να αναζητήσει κανείς σε προβλήματα ταξινόμησης, ελέγχου, αναγνώρισης προτύπου κ.α. [Dubois & Prade, (1980)].

1.2.2. Τα ασαφή σύνολα ως μέτρα ικανοποίησης.

Το *F* εδώ αναπαριστάνει μία επιθυμητή κατάσταση και το *U* εναλλακτικές λύσεις. Η $\mu_F(u)$ εκφράζει την ικανοποίηση που απορρέει από την υιοθέτηση της λύσης *u*.

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να αγοράσουμε ένα *μεγάλο* αυτοκίνητο. Με *U* συμβολίζουμε το σύνολο εναλλακτικών προς αγορά αυτοκινήτων ενώ *F* ≡«*μεγάλο* αυτοκίνητο» είναι ο στόχος μας. Εισάγοντας και αυτή τη φορά ένα πρότυπο μεγάλου αυτοκινήτου καθώς και μία μετρική που θα υπολογίζει τη νοητή απόσταση του προτύπου από το προς ταξινόμηση αυτοκίνητο είναι δυνατό να ορίσουμε τη συνάρτηση συμμετοχής μ_F ως φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης.

Η ικανοποίηση σε πολλές εφαρμογές εκτιμάται συνήθως στη βάση μίας κλίμακας χρηματικού κέρδους ή ζημίας. Παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών θα εξετάσουμε στα κεφάλαια 2 & 3.

1.2.3. Τα ασαφή σύνολα ως μέτρα αβεβαιότητας.

Τη δυνατότητα χρήσης των ασαφών συνόλων ως μέτρα αβεβαιότητας διέκρινε αρχικά ο Zadeh στο άρθρο του «Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility” [Zadeh, (1978)]. Το βασικό κίνητρο που οδήγησε στη δημιουργία μίας τέτοιας Θεωρίας της Δυνατότητας είναι, όπως αναφέρει και ο ίδιος, το ότι “...σε αντίθεση με ότι πιστεύεται, μεγάλο μέρος της πληροφορίας βάσει της οποίας ανθρώπινες αποφάσεις λαμβάνονται έχει περισσότερο τον χαρακτήρα της δυνατότητας (possibility) παρά της πιθανότητας (probability)...” [στο ίδιο, σελ. 10]. Το τελευταίο είναι άμεση συνέπεια της ασάφειας που εμπεριέχεται στην ανθρώπινη γλώσσα.

Υιοθετώντας μαθηματικό φορμαλισμό, έστω *X* μία μεταβλητή που λαμβάνει τιμές στο σύνολο *U*. Συμβολίζουμε με ‘ $X=u$ ’ την απόδοση της τιμής *u* στη μεταβλητή *X*. Υποθέτουμε ότι *F* είναι μία *ασαφής* πληροφορία που αφορά τη μεταβλητή *X* καθαυτή ή κάποιο χαρακτηριστικό της. Η πληροφορία αυτή περιορίζει εν μέρει το πεδίο τιμών που μπορεί να λάβει η *X*. Έχοντας, λοιπόν, την πληροφορία «η *X* είναι *F*» μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μέτρο *δυνατότητας* (*possibility*) σε κάθε πρόταση ‘$X=u$ ’ το οποίο θα φανερώνει τη βεβαιότητα με την οποία η *X* μπορεί να πάρει την τιμή *u*, δεδομένου ότι «η *X* είναι *F*».

Για παράδειγμα, έστω ότι διαθέτουμε μία ασαφή πληροφορία του τύπου: «εθεάθη ένα *μεγάλο* αυτοκίνητο». Με βάση αυτή θέλουμε να εκτιμήσουμε τη δυνατότητα το αυτοκίνητο που εθεάθη να ήταν μίας συγκεκριμένης μάρκας, έστω ΑΒΓ. Στην περίπτωσή μας η μεταβλητή *X* αντιπροσωπεύει το αυτοκίνητο και παίρνει τιμές στο σύνολο *U* όλων των αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στην αγορά. Το πρόβλημα μας, λοιπόν, ανάγεται στην εκτίμηση της δυνατότητας να συνέβη το γεγονός «το Χ ήταν ΑΒΓ», δεδομένης της ασαφούς πληροφορίας « το Χ είναι *F*≡*μεγάλο*».

Ο Zadeh πρότεινε ως μέτρο δυνατότητας τη συνάρτηση συμμετοχής μ_F του ασαφούς συνόλου *F*. Έτσι, όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός συμμετοχής του ΑΒΓ στην έννοια «*μεγάλο* αυτοκίνητο» τόσο περισσότερο δύναται να εμφανίστηκε ένα αυτοκίνητο μάρκας ΑΒΓ τη στιγμή που έγινε η παρατήρηση. Αντιθέτως, η δυνατότητα να εθεάθη ένα αυτοκίνητο με μικρότερο βαθμό συμμετοχής είναι μικρότερη. Καταλήγουμε συνεπώς στον ακόλουθο ορισμό:

$$\mathrm{Poss}\{`X=u'/F\} \equiv \pi_X(u/F) \equiv \mu_F(u) \tag{1.14}$$

όπου η $\pi_X(u/F)$ ονομάζεται συνάρτηση κατανομής δυνατότητας. Σημειωτέον ότι στην ίδια πρόταση '$X=u$' θα μπορούσαμε να αντιστοιχήσουμε και ένα μέτρο *πιθανότητας* (*probability*). Αντιλαμβανόμαστε όμως τη δυσκολία που θα συναντούσαμε στο να υπολογίσουμε την κατανομή πιθανότητας $p_X(u/F)$ εξαιτίας του ασαφούς χαρακτήρα της πληροφορίας *F*.

Η Θεωρία Δυνατοτήτων βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στην ανάλυση αποφάσεων σε περιβάλλον με ασαφή πληροφόρηση. Το θέμα εξετάζεται με περισσότερη λεπτομέρεια στην § 2.2.3.

□

Μελετώντας τις παραπάνω ερμηνείες που επιδέχονται τα ασαφή σύνολα, θα μπορούσε να καταλήξει κανείς στο συμπέρασμα ότι η έννοια της ομοιότητας δύναται να συμπεριλάβει τις υπόλοιπες δύο έννοιες: προτίμηση και δυνατότητα ([Dubois & Prade, (1997)] . Πράγματι, η προτίμηση σε μία κατάσταση δύναται να εκφραστεί ως βαθμός ομοιότητας της κατάστασης αυτής με μία ιδανική κατάσταση ή αλλιώς ένα πρότυπο κατάστασης. Επιπλέον, η δυνατότητα να παρατηρηθεί μία κατάσταση υπό συγκεκριμένες συνθήκες μπορεί να εκφραστεί ως βαθμός ομοιότητας της κατάστασης αυτής με μία χαρακτηριστική δεδομένων των συνθηκών κατάσταση. Στην πραγματικότητα όμως κοινός παρανομαστής των τριών προαναφερθέντων ερμηνειών των ασαφών συνόλων είναι η πρωταρχική τους σημασία της *σταδιακής* μετάπτωσης από την κατάσταση συμμετοχής στην κατάσταση μη συμμετοχής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο η ασαφής λογική εφαρμόζεται στην ανάλυση αποφάσεων. Η τελευταία εννοείται ως κάθε διαδικασία που προηγείται της ανάληψης οποιασδήποτε δράσεως και έχει σαν στόχο να κατευθύνει αυτή [French, (1984)]. Η ανάλυση αποφάσεων αποκτά ιδιαίτερη σημασία όταν η λήψη μίας απόφασης γίνεται υπό καθεστώς αβεβαιότητας. Για την επιτυχημένη εφαρμογή όμως οποιασδήποτε θεωρίας ανάλυσης αποφάσεων είναι απαραίτητη η αποσαφήνιση της έννοιας της αβεβαιότητας. Η επιστημονική μεθοδολογία, όπως παρατηρούν και οι Bellman και Zadeh, παραδοσιακά ταυτίζει την αβεβαιότητα με την *τυχαιότητα*, κάτι που φαίνεται εξάλλου και από την ευρεία χρήση της θεωρίας των πιθανοτήτων [Bellman & Zadeh (1970)]. Ταυτόχρονα, οι ποσοτικές μέθοδοι management δέχονται σοβαρή κριτική για το ότι αντιμετωπίζουν αποσπασματικές και απλοποιημένες περιπτώσεις προβλημάτων, δίνοντας μεγαλύτερη έμφαση στη μαθηματική τεκμηρίωση των μεθόδων από ότι στην κατανόηση της φύσης του επιχειρησιακού προβλήματος [Carlsson, (1984)], [Ackoff, (1974)]. Μεγάλη πρόκληση για την επιστήμη του management, όπως υποστηρίζει ο C. Carlsson, είναι «να μπορεί να αναπαριστά επαρκώς πολύπλοκα και υποκειμενικώς αντιληπτά προβλήματα management, διατηρώντας ταυτόχρονα τον επιστημονικό τρόπο επίλυσης προβλημάτων» [Carlsson, (1984)], σελ.12]. Με την εισαγωγή της θεωρίας των ασαφών συνόλων παρουσιάζεται μία νέα ευκαιρία συμβιβασμού των δύο παραπάνω επιδιώξεων. Προτού όμως προχωρήσουμε στην μελέτη της εφαρμογής των ασαφών συνόλων στην ανάλυση αποφάσεων, θα ήταν σκόπιμο να αναφερθούμε στις πιθανές μορφές αβεβαιότητας που ενυπάρχουν στη διαδικασία λήψης μιας απόφασης ούτως ώστε να μπορέσουμε να αντιληφθούμε με ποίον τρόπο η ασαφής λογική συνεισφέρει στη διαχείριση της αβεβαιότητας αυτής.

2.1. Αβεβαιότητα στην διαδικασία λήψης μίας απόφασης

2.1.1. Το «πρόβλημα» της αβεβαιότητας

Στην επιστημονική μεθοδολογία δεν φαίνεται να υπάρχει καθολικός ορισμός της έννοιας της αβεβαιότητας. Κάθε θεωρία αντιλαμβάνεται και επιχειρεί να μοντελοποιήσει συγκεκριμένες μορφές αβεβαιότητας που πηγάζει από διάφορες καταστάσεις. Έτσι, η θεωρία των πιθανοτήτων του Kolmogoroff ενδιαφέρεται κυρίως για την πτυχή της αβεβαιότητας που αφορά στην τυχαιότητα (randomness) των φαινομένων, ενώ η θεωρία πληροφοριών του Shannon για την πτυχή της αβεβαιότητας που αναφέρεται στην αμφιβολία (ambiguity) στην αποκωδικοποίηση μυνημάτων. Κοινή υπόθεση, πάντως, των «θεωριών της αβεβαιότητας» είναι ότι η τελευταία επιβάλλει κάποιου είδους περιορισμό: είτε στο να καθορίσουμε την έκβαση ενός φαινομένου (θεωρία των πιθανοτήτων), είτε στο να μεταδώσουμε ένα μήνυμα με μηδενικό σφάλμα (θεωρία πληροφοριών). Επιχειρώντας, λοιπόν, να ορίσουμε την αβεβαιότητα σε ένα λειτουργικό επίπεδο, κάνοντας αναφορά, ουσιαστικά, στις συνέπειές της, δανειζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό από το [Zimmermann, (2000)]:

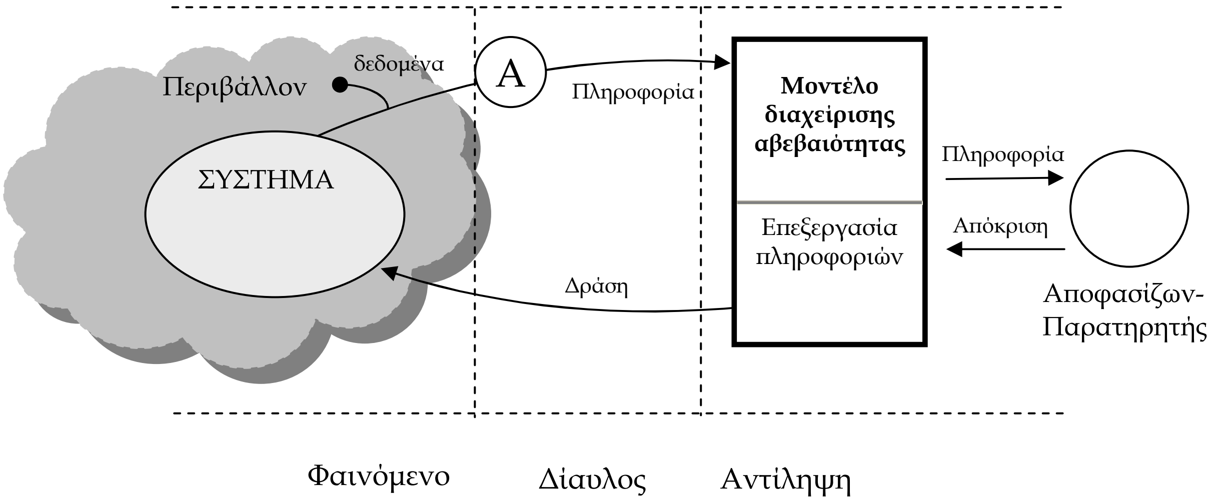
«Η αβεβαιότητα μίας κατάσταση εμποδίζει τους φορείς που εμπλέκονται σε αυτή από να έχουν στη διάθεσή τους ποιοτικές και ποσοτικές πληροφορίες ικανές να τους δώσουν τη δυνατότητα να περιγράψουν, να καθορίσουν ή ακόμα και να προβλέψουν ντετερμινιστικά και αριθμητικά τη συμπεριφορά ενός συστήματος ή χαρακτηριστικών που αναφέρονται σε αυτό.»

Συνοπτικά, λοιπόν, η αβεβαιότητα συνεπάγεται αδυναμία ελέγχου και η αύξηση (ή μείωση) της αβεβαιότητας, μείωση (ή αύξηση) της δυνατότητας ελέγχου. Με αυτή τη λογική, θα ήταν σκόπιμο να εξετάσουμε τη διαδικασία λήψης μιας απόφασης, προκειμένου να αντιληφθούμε τις μορφές της αβεβαιότητας που εμφανίζονται σε κάθε τμήμα αυτής της διαδικασίας και το πως αυτές στερούν από τον αποφασίζοντα τη δυνατότητα καθορισμού των πραγμάτων.

2.1.2. Η διαδικασία λήψης μίας απόφασης

Μία περιγραφή της διαδικασίας λήψης αποφάσεων, που εν μέρει οφείλεται και στο [Zimmermann, (2000)], φαίνεται στο σχ.2.1. Παρόλο που εναλλακτικές περιγραφές της διαδικασίας αυτής έχουν προταθεί κατά καιρούς, η συγκεκριμένη προσφέρει τη δυνατότητα συσχέτισης των τμημάτων της διαδικασίας με συγκεκριμένες πτυχές της αβεβαιότητας.

Όπως φαίνεται στο σχ.2.1, η διαδικασία λήψης μιας απόφασης περιλαμβάνει τις



Σχήμα 2.1 Τα τμήματα της διαδικασίας λήψης μίας αποφασης.

ακόλουθες συνιστώσες:

– *Σύστημα*. Αποτελεί ουσιαστικά το αντικείμενο μελέτης. Μπορεί να είναι τμήμα της φυσικής, οικονομικής ή κοινωνικής πραγματικότητας, ανθρώπινο κατασκεύασμα, ή άλλου είδους φαινόμενο.
– *Περιβάλλον*. «Περιβάλλει» το σύστημα, επηρεάζει και καθορίζει τη συμπεριφορά του.
– *Αποφασίζων-Παρατηρητής*. Ο ανθρώπινος παράγοντας που καλείται να δραστηριοποιηθεί δεδομένης της κατάστασης του συστήματος. Μπορεί να αποτελεί και ο ίδιος μέρος του συστήματος.
– *Μοντέλο διαχείρισης αβεβαιότητας*. Αποτελεί το εργαλείο που επιλέγει ο αποφασίζων προκειμένου να διαχειριστεί την αβεβαιότητα (θεωρία πιθανοτήτων, ασαφής λογική, rough sets κ.α.)
– *Αισθητήρες (Α)*. Συλλέγουν δεδομένα τόσο από το σύστημα όσο και από το περιβάλλον του, τροφοδοτώντας τα στο μοντέλο διαχείρισης αβεβαιότητας.

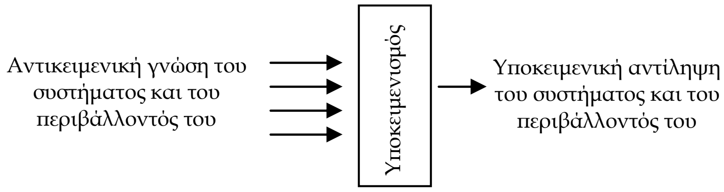
Ας προσπαθήσουμε να περιγράψουμε το πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου μετοχών υιοθετώντας την παραπάνω ταξινόμηση.

'Σύστημα' στην περίπτωση του προβλήματος επιλογής χαρτοφυλακίου είναι η υπό θεώρηση χρηματαγορά και 'περιβάλλον του συστήματος' το οικονομικό, κοινωνικό και πολιτικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται. Ο παρατηρητής του συστήματος αυτού καλείται να πάρει μία απόφαση για τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου του. Γι' αυτό το σκοπό συλλέγει δεδομένα από τη συγκεκριμένη χρηματαγορά (τιμές κλεισίματος, δείκτες τιμών κ.α.) καθώς και από το περιβάλλον αυτής (δείκτες οικονομικής ανάπτυξης, εκτιμήσεις της πολιτικής κατάστασης κ.α.). Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι ο παρατηρητής σπάνια έχει εποπτεία όλου του συστήματος. Στην περίπτωση μας ο επενδυτής συμβουλεύεται δεδομένα που προέρχονται από τους υπολογιστές της χρηματαγοράς (π.χ. τιμές μετοχών) ή πληροφορία που κοινοποιείται από τα μέσα ενημέρωσης (τύπος, ραδιόφωνο κ.α.). Είναι αδύνατο να γνωρίζει γενικά τις προθέσεις των συντελεστών της αγοράς ή του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο αυτή εντάσσεται. Γι' αυτό ακριβώς εστιάζει την προσοχή του ή αλλιώς «τοποθετεί αισθητήρες» σε συγκεκριμένα «κομβικά» σημεία του συστήματος ή του περιβάλλοντος. Η πληροφορία που λαμβάνεται από τους αισθητήρες συνήθως «φιλτράρεται» και επεξεργάζεται από μοντέλα διαχείρισης της που επιλέγει ο αποφασίζων. Τα μοντέλα αυτά καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό το είδος της πληροφορίας που συλλέγεται από τους αισθητήρες (ποιοτική/ποσοτική, τακτική/αριθμητική κ.α.). Στην περίπτωση της επιλογής χαρτοφυλακίου ο αποφασίζων θα μπορούσε να επιλέξει ως μοντέλο διαχείρισης πληροφοριών ένα εργαλείο τεχνικής-στατιστικής ανάλυσης, με τη βοήθεια του οποίου δύναται να υπολογίσει μέσους όρους, διακυμάνσεις τιμών κ.α.. Τα στοιχεία αυτά παρέχουν μία δευτερογενή πηγή πληροφόρησης πιο «εκλεπτυσμένης» μορφής, σε αντίθεση με εκείνη που πηγάζει από πρωτογενή δεδομένα οπως π.χ. οι τιμές των μετοχών. Στην συνέχεια ο επενδυτής «μεταφράζει» τις προτιμήσεις και πεποιθήσεις του σε επίπεδο εργαλείου, το οποίο αποφαίνεται τελικά για τη σωστή δράση (π.χ. λύνοντας ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού). Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου αποκατασταθεί, εαν είναι δυνατόν, μία ισορροπία μεταξύ επιθυμητής και πραγματικής κατάστασης ή αφού προκύψουν νέες ευκαιρίες ή απειλές .

Η διαδικασία λήψης μίας απόφασης όπως παρουσιάζεται στο σχ.2.1. περιλαμβάνει το *αντικειμενικό* και το *υποκειμενικό* τμήμα της. Το πρώτο αναφέρεται στο «φαινόμενο» καθαυτό δηλ. τις διαδικασίες που συντελούνται στο σύστημα και το περιβάλλον του, ενώ το δεύτερο στην «αντίληψη του φαινομένου» και συνεπώς περιλαμβάνει στοιχεία ανθρωπίνων θεωριών, «μοντέλα του κόσμου», υποκειμενικές πεποιθήσεις και προτιμήσεις. Μεταξύ αυτών μεσολαβεί ο «*δίαυλος επικοινωνίας*», που φέρνει σε επαφή το υποκειμενικό με το αντικειμενικό τμήμα. Η παρουσία του διάυλου είναι καταλυτική, με τη έννοια ότι μπορεί να δημιουργήσει παρεμβολές στην όλη διαδικασία μεταφοράς πληροφοριών (π.χ. παρεμβολές από το «θόρυβο» των αισθητήρων).

Ο ανθρώπινος παράγοντας που εμπλέκεται στη διαδικασία λήψης μίας απόφασης διαθέτει συνήθως κάποια πληροφορία τόσο για το σύστημα όσο και για το περιβάλλον του. Συνήθως είναι κάποιος ειδικός (expert) του γνωστικού πεδίου στο οποίο εντάσσεται το σύστημα π.χ. αναλυτής αγοράς ή ένας απλός χειριστής του συστήματος (περίπτωση ελέγχου μίας εγκατάστασης μηχανημάτων). Ο αποφασίζων έχει τη δυνατότητα να ανατρέξει σε γνώση που αφορά στη φύση και στη λειτουργία του συστήματος, γνώση η οποία έχει ήδη καταγραφεί και τεκμηριωθεί επιστημονικά. Αυτό το είδος γνώσης μπορεί να χαρακτηρισθεί ως *αντικειμενική*, προκειμένου να διαχωριστεί από τις διάφορες αντιλήψεις, δοξασίες και πεποιθήσεις που διαθέτει ο αποφασίζων τις οποίες μπορούμε αρχικά να συνοψίσουμε στον όρο *υποκειμενική* γνώση. Ο διαχωρισμός αυτός, βέβαια, δεν υπονοεί ότι η υποκειμενική γνώση είναι υποδεέστερη της αντικειμενικής και επομένως άνευ επιστημονικής σημασίας. Οι άνθρωποι υποβάλλουν συνεχώς την υποκειμενική τους γνώση σε εμπειρική επαλήθευση, προσπαθώντας να υιοθετήσουν όλο και πιο έγκυρα «μοντέλα του κόσμου», όπως αναφέρει η γνωστική ψυχολογία [Tamborini, (1997)]. Ο διαχωρισμός της υποκειμενικής από την αντικειμενική γνώση στην περίπτωσή μας συντελείται για να τονισθεί η σημασία του παράγοντα αποφασίζων στη λήψη μίας απόφασης. Η τελευταία εξαρτάται άμεσα από τις προτιμήσεις και τις πεποιθήσεις του πρώτου.

Ο τρόπος με τον οποίο ο υποκειμενισμός λειτουργεί ως «φίλτρο» στην πρόσληψη αντικειμενικής γνώσης αποδίδεται γραφικά στο σχ.2.2.



Σχήμα 2.2: Πρόσληψη αντικειμενικής γνώσης

2.1.3. Παράγοντες αβεβαιότητας στη διαδικασία λήψης αποφάσεων

Έπειτα από την περιγραφή της διαδικασίας λήψης μίας απόφασης, προχωρούμε αναφερόμενοι στις πιθανές μορφές αβεβαιότητας που προκύπτουν στα διάφορα τμήματα αυτής.

Εκκινώντας από το σύστημα, εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι ανασταλτικός παράγοντας για τον έλεγχο ή την πρόβλεψη της συμπεριφοράς του είναι η τυχαία φύση κάποιων διαδικασιών που συντελούνται μέσα σ' αυτό. Με τον όρο τυχαιότητα αναφερόμαστε στην απουσία κάποιου παράγοντα ή νόμου που καθορίσει την έκβαση ενός φαινομένου. Η έννοια του τυχαίου υπερβαίνει την υποκειμενική αντίληψη και κυβερνάται από δικούς της νόμους, όπως π.χ. αυτός των *μεγάλων αριθμών*. Σύμφωνα με το νόμο αυτό, κάθε δυνατό ενδεχόμενο έχει σχετική συχνότητα εμφάνισης που συγκλίνει *ασυμπτωτικά* σε *ένα και μοναδικό* όριο, την πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου αυτού. Η τυχαιότητα, λόγω της ύπαρξης ισχυρών νόμων, δεν συνεπάγεται αναρχία, και επομένως είναι μερικά ελέγξιμη. Αυτή είναι μία υπόθεση που κρύβεται πίσω από τις διάφορες στοχαστικές θεωρίες.

Ένας επιπλέον παράγοντας που καθιστά δύσκολο τον καθορισμό της έκβασης μίας διαδικασίας είναι η *πολύπλοκη δυναμική* της. Η δυναμική αυτή είναι το αποτέλεσμα της εμπλοκής πολλών φορέων στη διαδικασία, των οποίων όμως η συμπεριφορά *δεν* είναι τυχαία. Αντιθέτως, μπορεί να βασίζεται σε νόμους ή ακόμα και να είναι αποτέλεσμα συνειδητής επιλογής. Οι νόμοι αυτοί ή αλλιώς νόρμες συμπεριφοράς αφορούν το ίδιο το υποκείμενο και σε καμία περίπτωση δεν το υπερβαίνουν. Τυπικό παράδειγμα συστήματος πολύπλοκης δυναμικής αποτελεί μία χρηματαγορά. Εκεί, τα μέλη της πραγματοποιούν συνειδητές επιλογές που κατευθύνονται μάλιστα από την αρχή μεγιστοποίησης της ωφέλειας. Παρόλα αυτά, η αδυναμία να προβλέψει κανείς επακριβώς την πορεία των τιμών είναι έκδηλη. Ένα σύστημα πολύπλοκης δυναμικής παρόλη την αβεβαιότητα που το χαρακτηρίζει, διαθέτει νόμους αιτίου-αιτιατού, κάτι που αντίκειται φυσικά στην έννοια της τυχαιότητας.

Μέχρι στιγμής αναφερθήκαμε στην αβεβαιότητα που αφορά το σύστημα ή/και το περιβάλλον του. Η διαδικασία λήψης μίας απόφασης όμως σχετίζεται άμεσα όμως με το υποκείμενο που καλείται να λάβει την απόφαση, και συγκεκριμένα με τις πεποιθήσεις, και τις προτιμήσεις του. Πράγματι, κάθε αποφασίζων έχει μία εικόνα για τον τρόπο που λειτουργεί τόσο το υπό εξέταση σύστημα όσο και το περιβάλλον του, δηλ. για το φαινόμενο συνολικά. Η εικόνα αυτή εκφράζεται συνήθως με τη διατύπωση δοξασιών (beliefs) για αναμενόμενες εξελίξεις στο υπό θεώρηση σύστημα και περιβάλλον καθώς και για τις συνέπειες κάποιων αποφάσεων. Τα «μοντέλα του κόσμου», όπως χαρακτηριστικά ονομάζονται, στερούνται συχνά ακρίβειας και σαφήνειας αφού εξυπηρετούν περισσότερο την δράση παρά την παρατήρηση [Tamborini, (1997), σελ. 57]. Συνήθως δε αποτελούνται από λεκτικές περιγραφές του είδους: «*καλή* κατάσταση της υγείας», «*υγιείς* οικονομία» κ.τ.λ. Ανάλογα ισχύουν και για τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα σχετικά με τη συμπεριφορά ενός συστήματος. Οι προτιμήσεις αυτές εκφράζονται συνήθως υπό την έννοια της νοητής απόστασης της δεδομένης συμπεριφοράς από ένα πρότυπο συμπεριφοράς που έχει θέσει εκ των προτέρων ο αποφασίζων. Τόσο οι πεποιθήσεις όσο και οι προτιμήσεις του αποφασίζοντα χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα, με την έννοια όμως της *ανακρίβειας* (*imprecision*) ή της *ασάφειας* (*fuzziness*).

Στην όλη αβεβαιότητα που εμπεριέχει μία διαδικασία λήψης απόφασης προστίθεται και αυτή που οφείλεται στο δίαυλο. Η συγκεκριμένη έχει περισσότερο την έννοια της ανακρίβειας στη μετάδοση πληροφοριών από και προς το σύστημα και αποτελεί αντικείμενο μελέτης της θεωρίας πληροφοριών.

2.1.4. Τα ασαφή σύνολα ως μέσα διαχείρισης της αβεβαιότητας

Όπως παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 1, τα ασαφή σύνολα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν σύνολα από καταστάσεις, παρατηρήσεις ή δραστηριότητες των οποίων τα όρια δεν είναι απολύτως καθορισμένα. Η ασάφεια, όπως γίνεται αντιληπτή εδώ, διαχωρίζεται από [Carlsson, (1984)]:

a) τη *γενικότητα* (*generality*), υπό την έννοια της υιοθέτησης μίας περιγραφής για ένα *καλώς* ορισμένο σύνολο καταστάσεων ή δραστηριοτήτων.
b) την *αμφιβολία* (*ambiguity*), υπό την έννοια της ύπαρξης πολλών ανταγωνιστικών περιγραφών για το ίδιο σύνολο.
c) την *ανακρίβεια* (*imprecision*), υπό την έννοια της ύπαρξης πολλών ισοδύναμων ερμηνειών για την ίδια κατάσταση.

Ένα ασαφές σύνολο μπορεί όπως είδαμε να αποκτήσει και διαφορετικές σημασίες ανάλογα με το πλαίσιο εφαρμογής του και να εκφράσει αντίστοιχα ομοιότητα, προτίμηση ή και δυνατότητα.

Με βάση την ανάλυση που έγινε στην προηγούμενη παράγραφο γίνεται αντιληπτή η δυνατότητα εφαρμογής των ασαφών συνόλων, ως ένα μέσο μοντελοποίησης ασαφών λεκτικών προτιμήσεων και πεποιθήσεων. Παρέχουν κατά αυτόν τον τρόπο μία ευκαιρία επανεξέτασης και επέκτασης των είδη υπάρχουσων θεωριών ανάλυσης αποφάσεων (ανάλυση Bayes, θεωρίες βασισμένες στην ωφέλεια, δένδρα αποφάσεων κ.α.) με σκοπό την εφαρμογή τους σε ένα «ασαφές» περιβάλλον. Ευκαιρίες και περιορισμοί που προκύπτουν από την παραπάνω θεώρηση θα συζητηθούν στη συνέχεια.

2.2. Ανάλυση αποφάσεων σε ένα ασαφές περιβάλλον

Στις επόμενες παραγράφους εξετάζουμε διάφορες προσεγγίσεις ασαφούς λογικής στην ανάλυση αποφάσεων.

2.2.1. Η προσέγγιση των Bellman και Zadeh

Την πρώτη απόπειρα δημιουργίας ενός μεθοδολογικού πλαισίου λήψης αποφάσεων σε ένα ασαφές περιβάλλον παρουσίασαν οι Bellman και Zadeh σε άρθρο τους με τίτλο "Decision-Making in a Fuzzy Environment" [Bellman & Zadeh, (1970)]. Η περίπτωση που εξετάστηκε αφορούσε τη διατύπωση ασαφών στόχων από τον αποφασίζοντα και την ύπαρξη ασαφών περιορισμών του περιβάλλοντος.

Βασική ιδέα της προτεινόμενης μεθόδου είναι ότι το σύνολο των λύσεων που ικανοποιούν ένα στόχο ή έναν περιορισμό δεν μπορεί να καθοριστεί επακριβώς και να διαχωριστεί από το σύνολο των δυνατών λύσεων ενός προβλήματος. Κάθε δυνατή λύση θεωρείται άλλοτε περισσότερο και άλλοτε λιγότερο ικανοποιητική. Γι' αυτό θα είχε νόημα να θεωρούσαμε ότι κάθε δυνατή λύση ενός προβλήματος ικανοποιεί έναν δεδομένο περιορισμό του περιβάλλοντος ή έναν στόχο που θέτει ο αποφασίζων με διαφορετικό όμως βαθμό. Συνεκτιμώντας στόχους και περιορισμούς είναι δυνατό να καταλήξουμε τελικά στις πλέον ικανοποιητικές λύσεις. Υιοθετώντας μαθηματικό φορμαλισμό μπορούμε να εκφράσουμε τα παραπάνω ως εξής:

Έστω X ο μη ασαφής χώρος των δυνατών αποφάσεων που μπορούμε να λάβουμε σε ένα πρόβλημα. Κάθε στόχος G ή περιορισμός C του προβλήματος δύναται να ορισθεί μέσω ενός ασαφούς υποσυνόλου του χώρου X, δηλ. $G,D \subseteqq X$. Το σύνολο των ικανοποιητικών αποφάσεων S του προβλήματος αποτελεί ένα νέο ασαφές σύνολο που ορίζεται από την τομή των G και D. Για την γενική περίπτωση m στόχων και n περιορισμών γράφουμε:

$$S = (G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_i \cap \ldots \cap G_m) \cap (C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_j \cap \ldots \cap C_n), \quad i=1,2,\ldots m,\ j=1,2,\ldots,n \tag{2.1}$$

ή διαφορετικά

$$S = \{x, \mu_S(x)\}, \text{ όπου } x \in X \text{ και}$$

$$\mu_S(x) = \min\{\mu_{G_1}(x), \mu_{G_2}(x), \ldots, \mu_{G_i}(x), \ldots \mu_{G_m}(x), \mu_{C_1}(x), \mu_{C_2}(x), \ldots, \mu_{C_j}(x), \ldots \mu_{C_n}(x)\} \tag{2.2}$$

($\mu_{G_i}(x)$, $\mu_{C_j}(x)$ οι συναρτήσεις συμμετοχής που αντιστοιχούν στα ασαφή σύνολα G_i και C_j).

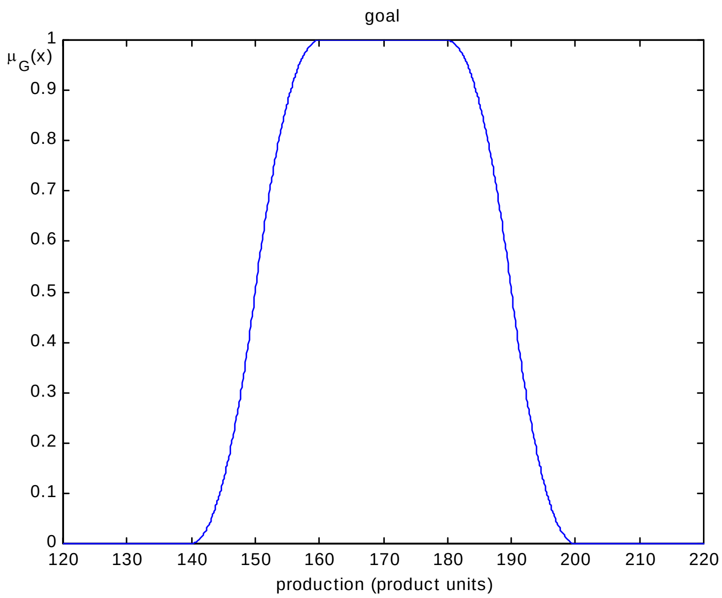
Στην περίπτωση που ένας στόχος G_i ορίζεται σε πεδίο αναφοράς (referencial) $Y \neq X$, για το οποίο όμως γνωρίζουμε ότι $Y=f(X)$, τότε μπορούμε να «μεταφράσουμε» τον στόχο G_i στο χώρο X, χρησιμοποιώντας την Αρχή της Επέκτασης του Zadeh (βλ. § 1.1.3). Έτσι αν συμβολίσουμε με $\overline{G_i}$ τη μεταφορά του στόχου G_i στο χώρο X, τότε το $\overline{G_i}$ ορίζει το ασαφές υποσύνολο του X του οποίου η συνάρτηση συμμετοχής δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_{\overline{G}_i}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in Y: y = f(x)} \mu_{G_i}(y) & ,\text{όταν } \exists\, y \text{ τ.ω } y = f(x) \\ 0 & ,\text{όταν } f(x) = \varnothing \end{cases}, \tag{2.3}$$

Ανάλογα ισχύουν και για περιορισμούς.

Συνυπολογίζοντας στόχους και περιορισμούς, προκύπτει ένα ασαφές σύνολο «ικανοποιητικών» λύσεων τις οποίες μπορεί να εφαρμόσει ο αποφασίζων. Συνήθως όμως σε ένα πρόβλημα απόφασης απαιτείται να υιοθετήσουμε μία συγκεκριμένη πολιτική. Έτσι προκύπτει το πρόβλημα του ποία θα είναι η τελική μας επιλογή από το ασαφές σύνολο λύσεων. Στο ερώτημα αυτό οι Bellman και Zadeh απάντησαν προτείνοντας ως πλέον ικανοποιητική λύση του προβλήματος κάθε $x^* \in X$ τ.ω. $\mu_S(x^*)=\max\{\mu_S(x)\}$, $\forall\ x \in X$. Το μη ασαφές σύνολο όλων των x^* που ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται *σύνολο αποφάσεων μέγιστης ικανοποίησης* (*maximizing decision set*) D^M. Προς επίδειξη της παραπάνω μεθοδολογίας παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.1.
Έστω μία εταιρεία που θέλει να προγραμματίσει τη συνολική της παραγωγή για μία δεδομένη χρονική περίοδο. Η εταιρεία αυτή θέτει ως στόχο «η παραγωγή της να κυμαίνεται *γύρω* στις 170 μονάδες προϊόντος». Συνεπώς, ο στόχος αυτός μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη βοήθεια μίας συνάρτησης συμμετοχής μορφής π ως εξής:



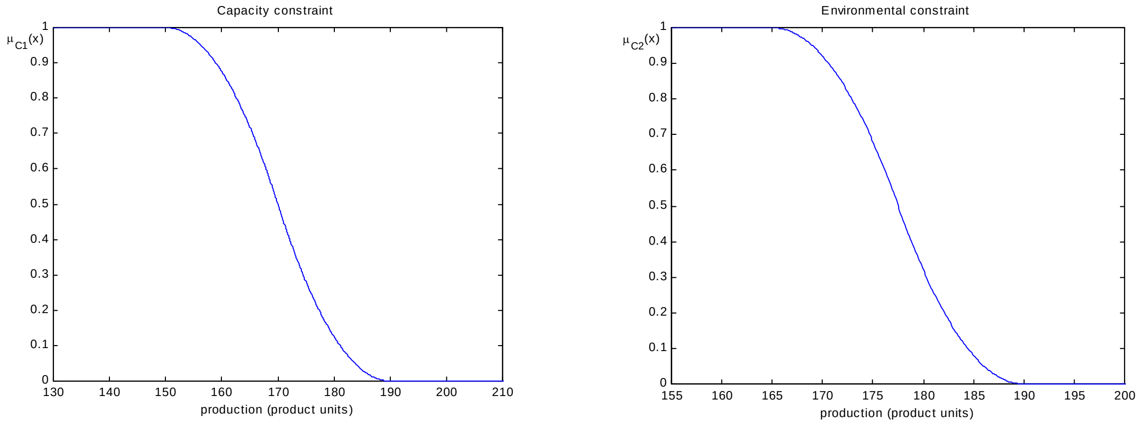
Σχήμα 2.3. Η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς στόχου του προβλήματος

Ωστόσο, η δυναμικότητα των εγκαταστάσεων της εταιρείας όπως και διάφορες περιβαλλοντικές διατάξεις θέτουν περιορισμούς στο ύψος της συνολικής παραγωγής. Υποθέτουμε ότι οι περιορισμοί αυτοί έχουν μεταφραστεί σε μονάδες προϊόντος και είναι οι εξής:

Περιορισμός δυναμικότητας C_1:
«η παραγωγή δεν μπορεί να ξεπερνά *κατά πολύ* τις 160 μονάδες προϊόντος»

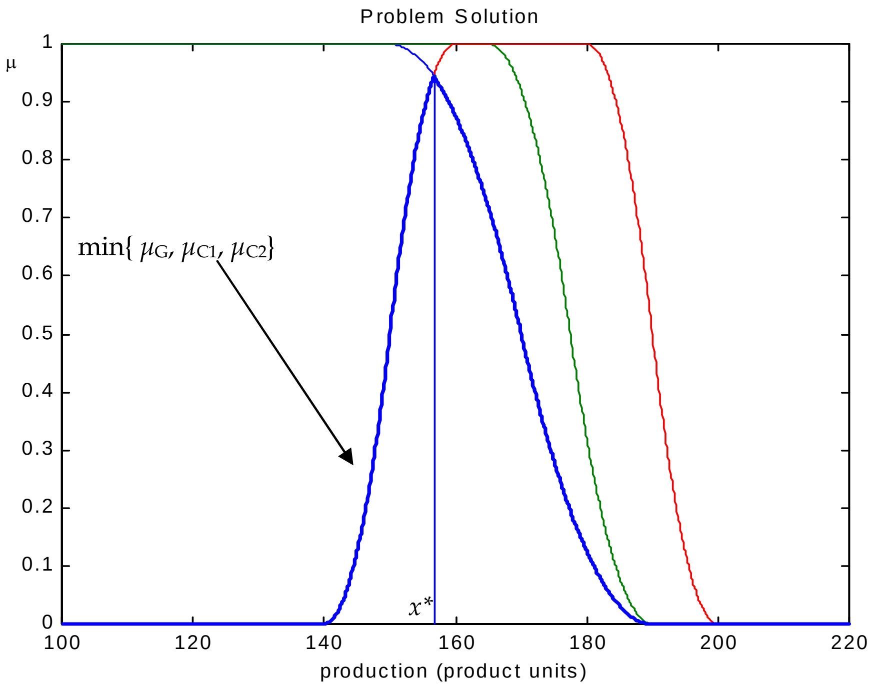
Περιβαλλοντικός περιορισμός C_2:
«η παραγωγή δεν πρέπει να υπερβαίνει *σημαντικά* τις 170 μονάδες προϊόντος»

Οι περιορισμοί αυτοί δύνανται να αναπαρασταθούν με συναρτήσεις συμμετοχής μορφής *z* ως εξής:



Σχήμα 2.4. Οι συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών περιορισμών του προβλήματος.

Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία που αναφέραμε προηγουμένως υπολογίζουμε το ασαφές σύνολο *S* των λύσεων του προβλήματος από τη σχέση $\mu_S(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_{C_1}(x), \mu_{C_2}(x)\}$, $x \in \Re^+$, και βρίσκουμε το x^* για το οποίο ισχύει $\mu_S(x^*) = \max_{x \in \Re^+} \mu_S(x)$. Η διαδικασία αυτή παριστάνεται γραφικά στο σχ.2.5.



Σχήμα 2.5	Γραφική επίλυση του προβλήματος του παραδείγματος

Η πλέον ικανοποιητική λύση του προβλήματος προκύπτει για παραγωγή ύψους 157 μονάδων προϊόντων περίπου. Η συνολική ικανοποίηση της εταιρείας από τη λύση αυτή είναι περίπου 0.944.

□

Μία πρώτη παρατήρηση που αφορά την παραπάνω μεθοδολογία είναι ότι η χρήση των τελεστών min για τον συνυπολογισμό στόχων και περιορισμών και max για την επιλογή της ικανοποιητικότερης λύσης καταλήγει εξ ορισμού στη λήψη μίας μάλλον «συντηρητικής» απόφασης (όπως άλλωστε και κάθε κριτήριο maxmin στην ανάλυση αποφάσεων). Εξάλλου, γίνεται «σιωπηλά» και η υπόθεση ότι όλοι οι στόχοι και οι περιορισμοί έχουν την ίδια βαρύτητα για το πρόβλημα. Τα συμπεράσματα αυτά έδωσαν το έναυσμα για τη μελέτη εναλλακτικών τρόπων συνυπολογισμού των συναρτήσεων συμμετοχής των ασαφών στόχων και περιορισμών. Λόγω της ιδιαίτερης του σημασίας το θέμα αυτό θα εξεταστεί στη § 2.2.4.

Ένα άλλο ζήτημα που προκύπτει κατά την εφαρμογή της προαναφερθείσας μεθοδολογίας είναι η εύρεση του συνόλου των λύσεων μέγιστης ικανοποίησης D^M.. Η διαδικασία αυτή στην περίπτωση που ο χώρος των δυνατών λύσεων X του προβλήματος είναι μονοδιάστατος ή δισδιάστατος (όπως συμβαίνει π.χ. στο παράδειγμα 2.1) είναι σχεδόν τετριμμένη, αφού η εύρεση των βέλτιστων λύσεων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια ενός γραφήματος. Όταν όμως ο X έχει άνω των δύο διαστάσεων τότε καλούμαστε να λύσουμε γενικά ένα πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού. Η περίπτωση αυτή εξετάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Αξιοσημείωτο είναι, μολαταύτα, το γεγονός ότι στόχοι και περιορισμοί αντιμετωπίζονται από τη παραπάνω μεθοδολογία ισοδύναμα, κάτι που διαπιστώνεται εύκολα από τον τρόπο με τον οποίο συνεκτιμώνται. Από ότι φαίνεται κατά τη λήψη μίας απόφασης σε ένα ασαφές περιβάλλον, όπως αυτό εννοείται παραπάνω, μεγαλύτερο ρόλο παίζει η μορφή παρά η σημασία (προέλευση) των ασαφών συνόλων. Η έννοια των ασαφών συνόλων δύναται να συμπεριλάβει πολλές διαφορετικές έννοιες.

2.2.2. Ασαφής διάταξη εναλλακτικών (Fuzzy Rank-Ordering)

Η προσέγγιση αυτή υιοθετήθηκε αρχικά από τους [Baas & Kwakernaak, (1977)], ενώ με το θέμα έχουν ασχοληθεί και οι [Shimura, (1973)] και [Orlovsky, (1978)]. Βασική υπόθεση των μεθόδων που εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία είναι ότι σε ένα πρόβλημα απόφασης είναι γενικά δύσκολο να προβεί κανείς σε μία «γραμμική» κατάταξη των εναλλακτικών λύσεων βάσει μίας συνάρτησης ικανοποίησης. Αντιθέτως, συγκρίσεις εναλλακτικών πραγματοποιούνται πιο εύκολα ανά δύο. Οι μέθοδοι ασαφούς κατάταξης εναλλακτικών βασίζονται σε ασαφείς δυαδικές σχέσεις, που περιγράφονται στην § 1.1.4. Αναφέρουμε ενδεικτικά τη μέθοδο των Dubois και Prade [Dubois & Prade, (1980)].

Έστω X ο χώρος των εναλλακτικών λύσεων ενός προβλήματος. Υποθέτουμε ότι επί του χώρου αυτού ορίζεται μία ασαφής δυαδική σχέση προτίμησης: R: $X\times X\rightarrow$ [0 1]. Η σχέση αυτή έχει την ακόλουθη ερμηνεία: $\forall\ x,y\in X$ αν $\mu_R(x,y)$>0.5, η x προτιμάται της y, ενώ αν $\mu_R(x,y)$=0.5, οι x και y είναι ισοδύναμες ή δεν επιδέχονται σύγκριση. Ορίζουμε το ασαφές σύνολο $P_{\leq}(x)$ των κυριαρχούμενων από το x εναλλακτικών ως εξής:

$$P_{\leq}(x)=\{y,\ \mu(x,y)\},\ y\in X \qquad (2.4)$$

Το $P_{\leq}(x)$ αποτελεί με άλλα λόγια το ασαφές σύνολο των εναλλακτικών που είναι *λιγότερο* προτιμητέες σε σχέση με το x. Εκφράζει δε ένα καθολικό μέτρο της προτίμησης υπέρ του x. Χρησιμοποιώντας την έννοια του υποσυνόλου ενός ασαφούς συνόλου (βλ. § 1.1.2) ορίζουμε τις ακόλουθες προτάσεις:

1. «Η συνολική προτίμηση για το x είναι μεγαλύτερη από εκείνη για το y» $\Leftrightarrow$ $P_{\leq}(y) \subseteq P_{\leq}(x)$ και $P_{\leq}(x) \not\subset P_{\leq}(y)$.
2. «Είναι αδύνατη η επιλογή μεταξύ των x και y» $\Leftrightarrow$ $P_{\leq}(x) \subseteq P_{\leq}(y)$ και $P_{\leq}(y) \subseteq P_{\leq}(x)$.

Με αυτούς τους ορισμούς, είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι ο τελεστής '$\subseteq$' πραγματοποιεί μία (μη ασαφή) μερική κατάταξη (partial ordering) των στοιχείων του συνόλου X. Ικανή και αναγκαία συνθήκη, βέβαια, για να ισχύει το παραπάνω είναι:

$$\forall\ x, y \in X \text{ είτε } P_{\leq}(x) \subseteq P_{\leq}(y) \text{ είτε } P_{\leq}(y) \subseteq P_{\leq}(x) \tag{2.5}$$

Η τελευταία ικανοποιείται εξ' ορισμού του τελεστή '$\subseteq$'.

□

Πλεονέκτημα των μεθόδων αυτής της κατηγορίας είναι ότι προσφέρουν μεγάλη ευελιξία αφού δεν απαιτούν από τον αποφασίζοντα να είναι σε θέση να διατυπώσει μία ακριβή σχέση προτίμησης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε εναλλακτικών x και y. Επίσης, πολλές από παραπάνω μέθοδοι μπορούν να επεκταθούν ενσωματώνοντας λεκτικές περιγραφές της μορφής: «το x προτιμάται *περισσότερο* σε σχέση με το y» ή «το x είναι *περίπου* ισοδύναμο του y» κ.τ.λ.

2.2.3. Λήψη αποφάσεων υπό συνθήκες αβεβαιότητας και τυχαιότητας

Αποτελεί την πλέον γενική περίπτωση λήψης μίας απόφασης. Θα λέγαμε ότι είναι μία επέκταση του γενικού μοντέλου ανάλυσης αποφάσεων (βλ. ενδεικτικά [Keeney & Raiffa, (1976) κεφ. 1]. Σύμφωνα με το τελευταίο, ο αποφασίζων επιλέγει από ένα σύνολο εναλλακτικών δράσεων A και η φύση από ένα σύνολο πιθανών καταστάσεων S. Κάθε ζεύγος $(a, s) \in A \times S$ επιφέρει με δεδομένη πιθανότητα $p(a,s)$ ένα αποτέλεσμα C που είναι συνάρτηση των a, s. Υποθέτουμε ότι ο αποφασίζων διαθέτει μία συνάρτηση u που απεικονίζει κάθε C σε ένα πραγματικό αριθμό, ο οποίος μετρά την *ωφέλεια* που αποκομίζει ο αποφασίζων από το αποτέλεσμα C. Η δράση που επιλέγει ο αποφασίζων είναι αυτή που επιφέρει τη μέγιστη αναμενόμενη ωφέλεια.

Στη γενική περίπτωση που εξετάζουμε εδώ, οι καταστάσεις της φύσης, η πιθανότητα εμφάνισης κάθε κατάστασης, το σύνολο των εφικτών και αποδεκτών ενεργειών, η απορρέουσα ωφέλεια και η διαθέσιμη πληροφορία δύνανται να καθοριστούν τόσο με ασαφή όσο και με ακριβή τρόπο. Το πρόβλημα απόφασης μπορεί να ιδωθεί ως ένα διάνυσμα τεσσάρων συνιστωσών $< \widetilde{S}, \widetilde{A}, p, u >$[1]. $\widetilde{S} = \{\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, ..., \widetilde{S}_r\}$ είναι το διάνυσμα των ασαφών καταστάσεων της φύσης. Κάθε ασαφής κατάσταση $\widetilde{S}_i$ αποτελεί ασαφές υποσύνολο του χώρου των καταστάσεων της φύσης $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_q\}$. Θεωρούμε ότι το σύνολο $\widetilde{S}$ είναι εφοδιασμένο με μία κατανομή πιθανότητας $P(\widetilde{S}_i)$, $i=1,2..,r$, έτσι ώστε

[1] Χρησιμοποιούμε το σύμβολο '~' για να χαρακτηρίσουμε ασαφή σύνολα.

σε κάθε ασαφή κατάσταση $\widetilde{S}_i$ να αντιστοιχεί και μία πιθανότητα εμφάνισης P_i. Επίσης, ορίζουμε $\widetilde{A} = \{\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n\}$ το σύνολο των ασαφών εναλλακτικών ενεργειών τις οποίες έχει στη διάθεσή του ο αποφασίζων και θεωρούμε ότι είναι δυνατή μία απεικόνιση u της μορφής $\widetilde{S} \times \widetilde{A} \to \Re$ (συνάρτηση ωφέλειας του αποφασίζοντα). Εφαρμόζοντας παρόμοια συλλογιστική με αυτή του γενικού μοντέλου ανάλυσης αποφάσεων, ορίζουμε την αναμενόμενη ωφέλεια από μία ασαφή ενέργεια $\widetilde{A}_j$ ως εξής:

$$E_{\widetilde{A}_j}\{u\} = \sum_{i=1}^{r} u(\widetilde{S}_i, \widetilde{A}_j) P(\widetilde{S}_i) \tag{2.6}$$

Ο υπολογισμός, βέβαια, των $P(\widetilde{S}_i)$ δεν είναι και τόσο προφανής αφού ουσιαστικά αναφερόμαστε σε πιθανότητα ασαφούς ενδεχομένου. Είναι όμως μία φυσική προέκταση της θεωρίας των πιθανοτήτων να υποθέσουμε ότι:

$$P(\widetilde{S}_i) = \sum_{k=1}^{q} \mu_{\widetilde{S}_i}(S_k) P(S_k) \tag{2.7}$$ [2]

Με βάση την προηγούμενη εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια $\widetilde{A}_j$ με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη ωφέλεια, η οποία είναι και η βέλτιστη για τον αποφασίζοντα.

Επεκτάσεις της προηγούμενης μεθοδολογίας μπορούν να πραγματοποιηθούν με την εισαγωγή ασαφών ωφελειών (fuzzy utilities), ασαφών πιθανοτήτων (fuzzy probabilities) και άλλων μέτρων αβεβαιότητας (possibility, δομή Dempster-Shafer κ.α.). Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες μπορούν να ανατρέξουν στα συγγράμματα: [Dubois & Prade, (1980)] για μία γενική επισκόπηση όλων των μεθόδων, [Freiling,(1980)] για ανάλυση αποφάσεων με ασαφείς πιθανότητες, [Yager, (1979)] για ανάλυση αποφάσεων χρησιμοποιώντας μέτρα δυνατότητας και [Yager, (1992)] για ανάλυση αποφάσεων χρησιμοποιώντας τη δομή Dempster - Shafer.

2.2.4. Το πρόβλημα της σύνθεσης ασαφών συνόλων

Επανερχόμαστε στη συζήτηση που είχαμε ξεκινήσει στην § 2.2.1, σχετικά με το πρόβλημα συνυπολογισμού ασαφών στόχων και περιορισμών. Είδαμε ότι η έννοια των ασαφών συνόλων επιτυγχάνει να ενσωματώσει διαφορετικές έννοιες όπως: προτίμηση, περιορισμός, δυνατότητα κ.α.. Συνεπώς, το πρόβλημα συνυπολογισμού ασαφών στόχων και περιορισμών εμπίπτει ουσιαστικά στο πρόβλημα εύρεσης ενός «κατάλληλου» τελεστή σύνθεσης ασαφών συνόλων. Γράφουμε «κατάλληλου» διότι εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι είναι πολύ δύσκολο, έως αδύνατο, να βρεθεί τελεστής που να αποδίδει το ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις εφαρμογών. Ωστόσο, ειδικά για την περιοχή της ανάλυσης αποφάσεων δύνανται να διατυπωθούν κάποια γενικά χαρακτηριστικά (αξιώματα) που πρέπει να ικανοποιεί ένας τελεστής συνένωσης

[2] Στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο μπορεί να ορισθεί με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων Lebesgue-Stieltjes [Dubois & Prade, (1980), σελ. 141]. Πρέπει όμως η επιλογή των $\mu_{\widetilde{S}_i}(S_k)$ να γίνει έτσι ώστε να διασφαλίσει κανείς ότι βασικά αξιώματα της θεωρίας των πιθανοτήτων (όπως π.χ. το ότι $\sum_{i=1}^{r} P(\widetilde{S}_i) = 1$) δεν παραβιάζονται.

ασαφών συνόλων προκειμένου να συμβαδίζει με το πνεύμα της λήψης μιας απόφασης.

Το πρόβλημα της συνένωσης ασαφών συνόλων έγκειται στην εύρεση μίας συνάρτησης R τ.ω.:

$$\mu = R\{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_i(x), \ldots, \mu_n(x)\},\ i=1,2,\ldots,n,\ x \in X \tag{2.8}$$

Η μ είναι η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου των λύσεων του προβλήματος και τα $\mu_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$, στόχοι ή περιορισμοί ανάλογα με τη φύση του προβλήματος.

Οι Dubois & Prade [Dubois & Prade, (1984)] αναγνώρισαν έξι ιδιότητες που πρέπει να πληροί η συνάρτηση R σε ένα πρόβλημα απόφασης. Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να τεθούν υπό την μορφή αξιωμάτων ως εξής:

Αξίωμα 1.

Η συνολική ικανοποίηση που αποφέρει η εναλλακτική x εξαρτάται μόνο από τη x και όχι από τις επιμέρους συναρτήσεις συμμετοχής μ_i. Δηλ. $\mu=\mu(x)$.

Κάτι τέτοιο είναι φυσιολογικό αν σκεφτεί κανείς ότι οι μ_i λειτουργούν μόνο βοηθητικά προκειμένου να γίνει η τελική επιλογή στο επίπεδο της μ.

Αξίωμα 2.

$R\{1,1,\ldots,1\}=1$.

Το αξίωμα 2 θεμελιώνει απλά το γεγονός ότι αν μία απόφαση ικανοποιεί πλήρως όλα τους στόχους και τους περιορισμούς πρέπει να ανήκει με βαθμό συμμετοχής 1 στο σύνολο των λύσεων ενός προβλήματος.

Αξίωμα 3.

$R\{0,0,\ldots,0\}=0$.

Το αξίωμα 3 αποκλείει από το σύνολο των ικανοποιητικών λύσεων κάθε εναλλακτική που δεν ικανοποιεί τους επιμέρους στοχους και περιορισμούς.

Αξίωμα 4.

Έστω $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ και $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n)$ τέτοια ώστε $a_i \geq \beta_i\ \forall\ i=1,2\ldots,n$. Τότε πρέπει $R\{\boldsymbol{a}\} \geq R\{\boldsymbol{\beta}\}$.

Το αξίωμα 4 θέτει μία άλλη ιδιότητα για την R. Σύμφωνα με αυτή, η R πρέπει να είναι τέτοια ώστε να διατηρεί τη διάταξη (order preserving). Πράγματι, εάν υπάρχουν δύο εναλλακτικές x και y του συνόλου X τέτοιες ώστε η x υπερέχει ξεκάθαρα ή είναι τουλάχιστον ισότιμη της y (δηλ. $\mu_i(x) \geq \mu_i(y)\ \forall\ i$) τότε θα πρέπει και $R\{x\} \geq R\{y\}$.

Αξίωμα 5.

Όταν όλοι οι στόχοι και οι περιορισμοί ενός προβλήματος έχουν ίδια σημασία για τον αποφασίζοντα τότε η R πρέπει να είναι συμμετρική ως προς αυτούς.

Η συμμετρικότητα επιβάλλει ότι π.χ. για την περίπτωση δύο ισοδύναμων στόχων ή περιορισμών a, β, $R\{a,\beta\}=R\{\beta,a\}$**.**

Αξίωμα 6.
Η R είναι συνεχής συνάρτηση των μ_i.

Πράγματι, σε πραγματικά προβλήματα σπάνια μία απειροελάχιστη μεταβολή στην ικανοποίηση ενός στόχου ή περιορισμού επιφέρει δραματική αλλαγή στην συνολική ικανοποίηση.

□

Μία επισκόπηση των σημαντικότερων τελεστών συνάθροισης ασαφών συνόλων που έχουν προταθεί κατά καιρούς και ικανοποιούν[3] τα αξιώματα 1-6 γίνεται στον πίνακα 2.1. Περισσότερους μπορεί να βρει κανείς στο [Lai & Hwang, (1992), σελ. 54]. Στη συνέχεια του κειμένου, χάριν απλότητας περιοριζόμαστε στην περίπτωση δύο ασαφών στόχων ή περιορισμών[4].

Τελεστές σύζευξης	
Τελεστής min	$\mu_S(x)=\min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$
Αλγεβρικό γινόμενο	$\mu_S(x)=\mu_1(x)\mu_2(x)$
Οροθετημένο γινόμενο	$\mu_S(x)=\max\{0,\mu_1(x)+\mu_2(x)-1\}$
Min τελεστής του Hamacher	$\mu_S(x)=\dfrac{\mu_1(x)\mu_2(x)}{\gamma+(1-\gamma)[\mu_1(x)+\mu_2(x)-\mu_1(x)\mu_2(x)]}, \gamma\in[0,1]$
Τελεστές διάζευξης	
Τελεστής max	$\mu_S(x)=\max\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$
Αλγεβρικό άθροισμα	$\mu_S(x)=\mu_1(x)+\mu_2(x)-\mu_1(x)\mu_2(x)$
Οροθετημένο άθροισμα	$\mu_S(x)=\min\{1,\mu_1(x)+\mu_2(x)\}$
Max τελεστής του Hamacher	$\mu_S(x)=\dfrac{(1-\gamma)\mu_1(x)\mu_2(x)+\gamma[\mu_1(x)+\mu_2(x)]}{\gamma+\mu_1(x)\mu_2(x)}, \gamma\in[0,1]$

Πίνακας 2.1.Τελεστές σύνθεσης ασαφών συνόλων

Οι τελεστές της πρώτης κατηγορίας (τελεστές σύζευξης) έχουν την ιδιότητα ότι $R\{a,\beta\}\leq \min\{a,\beta\}$, $a,\beta\in[0\ 1]$. Εμπεριέχουν λοιπόν την υπόθεση ότι ο συνολικός βαθμός αποδοχής μίας λύσης δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος των επιμέρους βαθμών αποδοχής. Δεν επιτρέπουν λοιπόν καμία αντιστάθμιση (trade-off) μεταξύ των επιμέρους στόχων ή περιορισμών. Αντιστρόφως, οι τελεστές της δεύτερης κατηγορίας (τελεστές διάζευξης) επιτρέπουν πλήρη συμβιβασμό μεταξύ των επιμέρους στόχων ή περιορισμών αφού $R\{a,\beta\}\geq \max\{a,\beta\}$, $a,\beta\in[0\ 1]$. Πάντως, κοινή υπόθεση και στις δύο

[3] Βλ. [Dubois & Prade, (1984)].

[4] Η γενική περίπτωση σύνθεσης *n* ασαφών συνόλων παρουσιάζει δυσκολίες. Συνήθως δε γίνεται χρήση επιπλέον αξιωμάτων. Μια ενδιαφέρουσα απόπειρα προσέγγισης του θέματος μπορεί να βρει κανείς στο [Dubois & Prade, (1984)].

περιπτώσεις είναι ότι η σύνθεση δύο συναρτήσεων συμμετοχής αντιστοιχεί σε μία τρίτη που παίρνει τιμές εκτός της περιοχής που καλύπτουν οι δυο πρώτες.

Οι Zimmermann & Zysno επιχείρησαν να ελέγξουν την βασιμότητα της υπόθεσης αυτής πραγματοποιώντας κάποιο πείραμα [Zimmermann& Zysno, (1980)]. Σύμφωνα με το πείραμα αυτό, υποκείμενα κλήθηκαν να αποφανθούν σχετικά με την ποιότητα συνδεσμολογιών από ειδικά πλακίδια (tiles) που χρησιμοποιούνται για την επένδυση αγωγών υψηλής θερμότητας. Η ολική ποιότητα της συνδεσμολογίας καθορίζεται αφενός μεν από το πόσο καλά συνεργάζονται τα πλακίδια μεταξύ τους (devotailing) και αφετέρου από τη στερεότητα (solidity) των πλακιδίων της συνδεσμολογίας. Με βάση τα παραπάνω κριτήρια, θεωρήθηκαν δύο ασαφή υποσύνολα στο σύνολο των πλακιδίων:

1. *D*≡«*άριστη* συνεργασία του πλακιδίου με τα γειτονικά του» και
2. *S*≡ «*άριστη* στερεότητα πλακιδίου».

Έτσι, η συνολική ποιότητα ενός πλακιδίων καθορίζεται από το βαθμό συμμετοχής του στο ασαφές σύνολο $S \cap D$, όπου ‘$\cap$’ ένας γενικός τελεστής σύνθεσης.

Κάθε υποκείμενο του πειράματος κλήθηκε να αξιολογήσει σε πρώτο στάδιο τη συνολική ποιότητα κάθε πλακιδίου και στη συνέχεια το βαθμό συμμετοχής του στα επιμέρους κριτήρια S και D. Αποτέλεσμα του πειράματος ήταν η απόκτηση τιμών για τις συναρτήσεις μ_S, μ_D και $\mu_{S\cap D}$. Έπειτα από επεξεργασία των τιμών αυτών τα ακόλουθα συμπεράσματα προέκυψαν:

a) Τόσο οι τελεστές σύζευξης όσο και οι τελεστές διάζευξης δεν είναι κατάλληλοι για τη σύνθεση ασαφών κριτηρίων στη λήψη μίας απόφασης.
b) Αντιθέτως, τελεστές που επιτρέπουν κάποια αντιστάθμιση (compensation) μεταξύ των ασαφών κριτηρίων (δηλ. που απεικονίζουν στο διάστημα μεταξύ ελάχιστου βαθμού συμμετοχής και μέγιστου βαθμού συμμετοχής) φαίνεται να αναπαριστούν καλύτερα τον ανθρώπινο μηχανισμό συνεκτίμησης πολλαπλών κριτηρίων κατά τη λήψη μίας απόφασης.

Τα συμπεράσματα αυτά οδήγησαν τους συγγραφείς στο να εισάγουν μία νέα συνάρτηση R , η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$R\{\mu_1, \mu_2\} = \mu_{1\cap 2}^{1-\gamma} . \mu_{1\cup 2}^{\gamma} , \ \gamma \in [0\ 1] \tag{2.9}$$

Στη θέση του ‘$\cap$’ μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιονδήποτε τελεστή σύζευξης και στη θέση του ‘$\cup$’ οποιονδήποτε τελεστή διάζευξης του πίνακα 2.1. Η παράμετρος γ καθορίζει τον βαθμό αντιστάθμισης μεταξύ των ασαφών κριτηρίων 1 και 2. Έτσι, για γ=0 παίρνουμε τελεστής σύζευξης ενώ γ=1 τελεστή διάζευξης. Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι η συνάρτηση R που ορίζεται από τη σχέση 2.9 ικανοποιεί τα αξιώματα 1-6 που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Παράδειγμα 2.2.

Θεωρούμε την περίπτωση δύο ασαφών στόχων 1 και 2. Ως τελεστές σύζευξης και διάζευξης χρησιμοποιούμε τους τελεστές ‘min’και ‘max’ αντίστοιχα. Θέτοντας μ_1=0.3, μ_2=0.8 και διαδοχικές τιμές για την παράμετρο γ παίρνουμε τις τιμές της μ που αναφέρονται στον πίνακα 3.2.

γ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
μ	0.300	0.365	0.444	0.540	0.658	0.800
$\max\{\mu_1, \mu_2\}$	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
$\min\{\mu_1, \mu_2\}$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

Πίνακας 2.2. Η επίδραση της αντισταθμιστικής παραμέτρου γ στη διαμόρφωση της συνολικής ικανοποίησης.

Η επίδραση του αντισταθμιστικού όρου είναι χαρακτηριστική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΣΑΦΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Στο Κεφάλαιο 2 αναφερθήκαμε στη μέθοδο Bellmann-Zadeh για την εύρεση ικανοποιητικών λύσεων ενός προβλήματος σε ένα ασαφές περιβάλλον. Το τελευταίο νοείται ως ένα περιβάλλον απόφασης στο οποίο τόσο οι στόχοι που θέτει ο αποφασίζων όσο και οι περιορισμοί που επιβάλλει το πρόβλημα διατυπώνονται ως ασαφή υποσύνολα του χώρου των εναλλακτικών λύσεων του προβλήματος. Η εύρεση του συνόλου των αποφάσεων μέγιστης ικανοποίησης D^M γίνεται με την επίλυση του παρακάτω γενικού προβλήματος:

$$\begin{array}{ll} \max & \mu_S(x) \\ \text{υπό} & x \in X \end{array}$$

και (3.1)

$$\mu_S(x) = R\{\mu_{G_1}(x), \mu_{G2}(x), ..., \mu_{Gm}(x), \mu_{C_1}(x), \mu_{C_2}(x), ..., \mu_{Cn}(x)\},$$

όπου μ_{G_i}, i=1,2,…,m οι ασαφείς στόχοι του αποφασίζοντα, μ_{C_j} j=1,2,…,n οι ασαφείς περιορισμοί του προβλήματος και R μία οποιαδήποτε συνάρτηση που ικανοποιεί τα αξιώματα 1-6 της § 2.2.4. Το πρόβλημα 3.1 αποτελεί εν γένει ένα πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού, το οποίο εξαιτίας του ασαφούς τρόπου με τον οποίο εκφράζονται οι στόχοι και οι περιορισμοί, ονομάζεται πρόβλημα *ασαφούς μαθηματικού προγραμματισμού* (*fuzzy mathematical programming*). Ο ασαφής μαθηματικός προγραμματισμός προτείνεται ως μία εναλλακτική προσέγγιση προβλημάτων με πολλαπλά κριτήρια αξιολόγησης των επιμέρους λύσεων (πολυκριτήρια προβλήματα). Η επίλυση των τελευταίων στη περίπτωση που τα επιμέρους κριτήρια είναι ανταγωνιστικά μεταξύ τους δεν είναι προφανής. Για αυτόν τον λόγο, ειδικές έννοιες λύσης ενός πολυκριτήριου προβλήματος εισάγονται. Προτού εξετάσουμε τη μορφοποίηση ενός πολυκριτήριου προβλήματος με όρους ασαφούς λογικής θεωρούμε σκόπιμο να αναφερθούμε σε στοιχεία της θεωρίας πολυκριτήριας βελτιστοποίησης. Κατά αυτόν τον τόπο ο αναγνώστης θα έχει την ευκαιρία να αξιολογήσει καλύτερα τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

3.1. Πολυκριτήριος μαθηματικός προγραμματισμός

Ο όρος πολυκριτήριος μαθηματικός προγραμματισμός αφορά τη βελτιστοποίηση πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων υπό περιορισμούς. Το γενικό μοντέλο βελτιστοποίησης έχει τη μορφή:

$$\begin{array}{ll} \max(\min) & \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_k(\mathbf{x})]^T \\ \text{υπό} & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in \Re^n \end{array} \qquad (3.2)$$

όπου **x** το $n\times1$ διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης, **f**(**x**) το $k\times1$ διάνυσμα των αντικειμενικών συναρτήσεων $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$,…, $f_k(\mathbf{x})$ και **g**(**x**) το $m\times1$ διάνυσμα των περιορισμών. Ειδική περίπτωση του παραπάνω αποτελεί το γραμμικό μοντέλο:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{z}(\mathbf{x}) = [z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}),..., z_k(\mathbf{x})]^T \\ \text{υπό} & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{array} \tag{3.3}$$

όπου $z_i(\mathbf{x})$, $i=1,\ldots,k$ γραμμικές συναρτήσεις του **x** ($z_i(\mathbf{x})=\mathbf{c}_i^T\mathbf{x}$), **A** ο $m\times n$ πίνακας των συντελεστών και **b** το $m\times1$ διάνυσμα των σταθερών όρων. Το σύνολο των $\overline{\mathbf{x}} \in \Re^n$ που ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος (3.2) αποτελεί το σύνολο $\Im$ των *εφικτών λύσεων* του προβλήματος.

Σε περιπτώσεις προβλημάτων πολυκριτήριου προγραμματισμού όπου ο αποφασίζων έχει αντικρουόμενες επιδιώξεις, όπως π.χ. τη μεγιστοποίηση κέρδους και την ελαχιστοποίηση των περιβαλλοντικών επιπτώσεων, δεν είναι δυνατή η ταυτόχρονη βελτιστοποίηση όλων των αντικειμενικών συναρτήσεων. Κάθε λύση συνεπώς του προβλήματος αποτελεί «συμβιβασμό» μεταξύ των διαφόρων αντικειμενικών.

Για τη επίλυση προβλημάτων πολυκριτήριου προγραμματισμού εισήχθη η έννοια της *βέλτιστης λύσης Pareto (Pareto optimal solution)* [Sakawa, (1993)].

Ορισμός 3.1

Ένα $\mathbf{x}^*\in\Im$ *ονομάζεται βέλτιστη λύση Pareto ενός προβλήματος πολυκριτήριου προγραμματισμού (3.3) όταν και μόνο όταν δεν υπάρχει άλλο* $\mathbf{x}\in\Im$ *τέτοιο ώστε* $z_i(\mathbf{x})\ge z_i(\mathbf{x}^*)$ *για όλα τα* $i=1,2,\ldots,k$ *και* $z_j(\mathbf{x})>z_j(\mathbf{x}^*)$ *για ένα τουλάχιστον* $j\in\{1,2,\ldots,k\}$.

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι η μετακίνηση από μία βέλτιστη λύση Pareto σε οποιαδήποτε άλλη εφικτή λύση συνεπάγεται ταυτόχρονα και τη μείωση της τιμής μίας τουλάχιστον αντικειμενικής συνάρτησης. Γι 'αυτό το λόγο μία βέλτιστη λύση Pareto θεωρείται ως γενικά αποδεκτή λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Το σύνολο των βέλτιστων λύσεων Pareto ονομάζεται *βέλτιστο σύνολο Pareto (Pareto optimal set-POS)* και συμβολίζεται με $\Im_P$. Επέκταση του προηγούμενου ορισμού αποτελεί η έννοια της *ασθενής βέλτιστης λύσης Pareto (weak Pareto optimal solution).*

Ορισμός 3.2

Ένα $\mathbf{x}^*\in\Im$ *ονομάζεται ασθενής βέλτιστη λύση Pareto ενός προβλήματος πολυκριτήριου προγραμματισμού (3.3) όταν και μόνο όταν δεν υπάρχει άλλο* $\mathbf{x}\in\Im$ *τέτοιο ώστε* $z_i(\mathbf{x})>z_i(\mathbf{x}^*), \forall\, i=1,2,\ldots,k$.

Το σύνολο των ασθενών βέλτιστων λύσεων Pareto ονομάζεται *ασθενές βέλτιστο σύνολο Pareto (weak Pareto optimal set)* και συμβολίζεται με $\Im_{WP}$. Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι $\Im_P\subseteq\Im_{WP}$.

<u>Παράδειγμα 3.1 [Sakawa, (1993)]</u>

Μία εταιρεία παράγει δύο προϊόντα Α και Β, για την κατασκευή των οποίων απαιτούνται τριών ειδών πρώτες ύλες M_1, M_2 και M_3. Η ποσότητα των πρώτων υλών που χρειάζεται για την παραγωγή ενός τεμαχίου του εκάστοτε προϊόντος παρουσιάζεται στον πίνακα

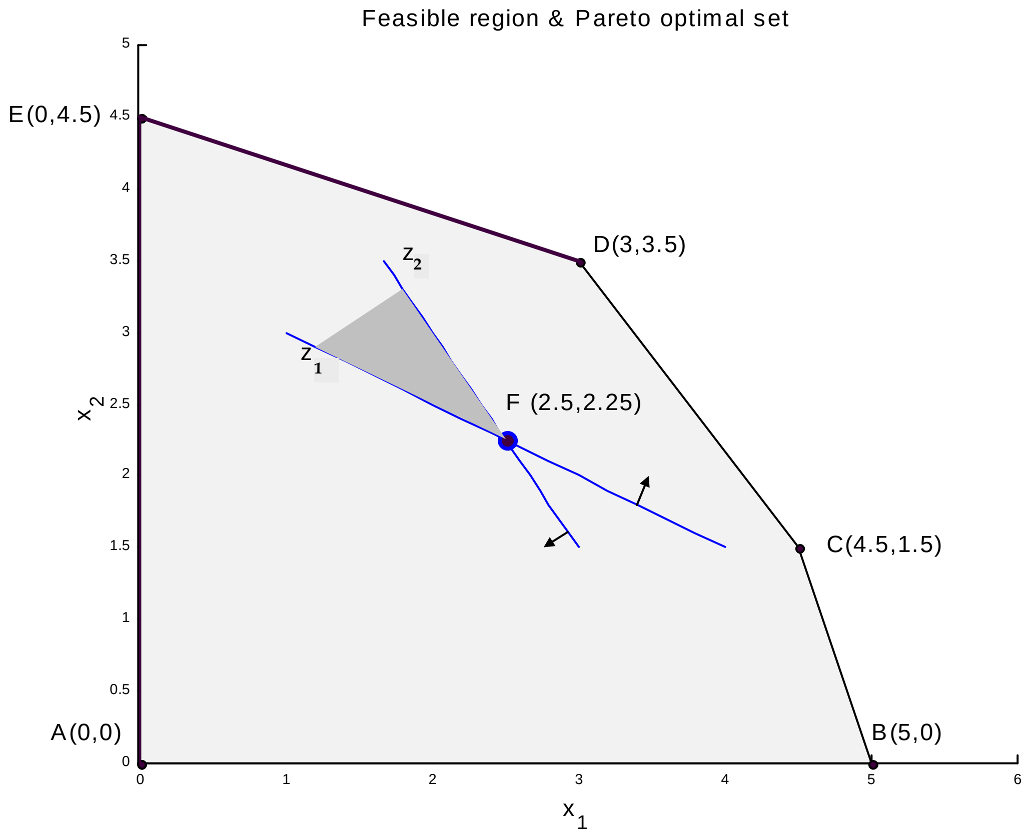
Α′ ύλες / Προϊόντα	**M_1**	**M_2**	**M_3**
Α	2	8	3
Β	6	6	1

Πίνακας 3.1 Η ποσότητα πρώτων υλών για την παραγωγή ενός τεμαχίου από το εκάστοτε προϊόντος.

Οι ποσότητες των πρώτων υλών είναι περιορισμένες και η συνολική διαθεσιμότητα για τα M_1, M_2 και M_3 είναι 27, 45 και 15 τεμάχια αντίστοιχα. Επιπλέον, το προϊόν Α επιφέρει κέρδος 2 χρηματικές μονάδες (χ.μ.) ανά τεμάχιο ενώ το προϊόν Β 1 χ.μ. ανά τεμάχιο. Η παραγωγή των προϊόντων, όμως, έχει δυσμενείς επιπτώσεις για το περιβάλλον. Συγκεκριμένα, η παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος Α αντιστοιχεί σε 3 μονάδες ρύπανσης και η παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος Β σε 2 μονάδες ρύπανσης. Αν συμβολίσουμε με x_1 και x_2 τον συνολικό αριθμό κομματιών προϊόντος Α και Β αντίστοιχα που παράγονται και υποθέτοντας ότι η συνολική ρύπανση του περιβάλλοντος είναι γραμμική συνάρτηση των x_1, x_2 τότε το πρόβλημα που αντιμετωπίζει η εταιρεία μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z_1 = x_1 + 2x_2 \\
&\max \quad z_2 = -3x_1 - 2x_2 \\
&\text{υπό} \quad 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
&\qquad\quad 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad\quad 3x_1 + x_2 \le 15 \\
&\qquad\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

ο χώρος των εφικτών λύσεων του προβλήματος (3.4) είναι το εσωτερικό του κυρτού πολυγώνου ABCDEA του σχ.3.1. Στα σημεία A και D μεγιστοποιείται η τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων z_2 και z_1 αντίστοιχα. Βάσει του ορισμού 3.1 τα σημεία A, D ανήκουν στο σύνολο των βέλτιστων λύσεων Pareto του προβλήματος, αφού οποιαδήποτε απομάκρυνση από αυτά θα σήμαινε και μείωση της τιμής των z_1 και z_2. Για τον ίδιο λόγο, κάθε σημείο των ακμών AE και ED ανήκει στο βέλτιστο σύνολο Pareto. Αντιθέτως, ένα εσωτερικό σημείο F του πολύγωνου ABCDEA δεν αποτελεί βέλτιστη λύση Pareto αφού η μετακίνηση σε οποιοδήποτε σημείο στην έντονα χρωματισμένη περιοχή μεταξύ των δύο ευθειών επιφέρει αύξηση της τιμής των z_1 και z_2.



Σχήμα 3.1 Το σύνολο των εφικτών λύσεων και το βέλτιστο σύνολο Pareto του προβλήματος 3.1

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για τον εντοπισμό του βέλτιστου συνόλου Pareto ενός προβλήματος πολυκριτήριου προγραμματισμού. Μεταξύ αυτών αναφέρεται ενδεικτικά η *μέθοδος στάθμισης (weighting method)* [Kuhl & Tucker, (1951)].

3.1.1. Η μέθοδος στάθμισης

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή για να βρεί κανείς μία βέλτιστη λύση Pareto αρκεί να σταθμίσει -να «αναμείξει»- τις διάφορες αντικειμενικές με κατάλληλη κατανομή βαρών $\boldsymbol{\omega}=[\omega_1\ \omega_2\ \ldots\ \omega_k]^T$ ($\omega_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{k}\omega_i = 1$) ή ισοδύναμα να επιλύσει το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μίας αντικειμενικής:

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \sum_{\iota=1}^{k} \omega_i z_i(\mathbf{x}) \\ \text{υπό} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{3.5}$$

Την αντιστοιχία μεταξύ κατανομής βαρών **ω** και βέλτιστης λύσης Pareto εξασφαλίζουν τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 3.1

Έστω $\boldsymbol{x}^*\in\Im$ η βέλτιστη λύση του προβλήματος (3.5) για μία κατανομή βαρών $\boldsymbol{\omega}$. Η $\boldsymbol{x}^*$ είναι επίσης μία βέλτιστη λύση Pareto του προβλήματος (3.3).

Θεώρημα 3.2

Έστω $\boldsymbol{x}^*\in\Im$ μία βέλτιστη λύση Pareto του προβλήματος (3.3). Τότε η $\boldsymbol{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος (3.5) με κατάλληλη επιλογή κατανομής $\boldsymbol{\omega}$.

Αποδείξεις των θεωρημάτων μπορεί να βρει κανείς στο [Sakawa, (1993)].

Θεωρώντας το παράδειγμα 3.1, παρατηρούμε ότι επιλέγοντας διαδοχικά $\boldsymbol{\omega}=[1\ 0]^T$ και $\boldsymbol{\omega}=[0\ 1]^T$ το πρόβλημα (3.4) δίνει ως λύση τα σημεία D και A αντίστοιχα. Αποδίδοντας τιμές στα ω_i μεταξύ 0 και 1 είναι δυνατό να κινηθούμε επί των ακμών AE και ED προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου στάθμισης είναι ότι τα βάρη ω_i παρέχουν πληροφορία για το πως αντισταθμίζονται οι διάφορες αντικειμενικές του προβλήματος. Συγκεκριμένα, φανερώνουν πόσες μονάδες αξίας μίας αντικειμενικής συνάρτησης πρέπει να παραχωρηθούν προκειμένου να αυξηθεί η τιμή μίας άλλης κατά μία μονάδα αξίας.

Πράγματι, έστω η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (3.5):

$$\upsilon = \omega_1 z_1(\mathbf{x}) + \omega_2 z_2(\mathbf{x}) + \ldots + \omega_k z_k(\mathbf{x}) = c \quad (c \text{ σταθερά}) \tag{3.6}$$

Για μία απειροστή μεταβολή $\Delta\upsilon$ έχουμε από την (3.6) ότι $\Delta\upsilon=0$ και επομένως

$$(3.6) \Rightarrow \omega_1 \Delta z_1(\mathbf{x}) + \omega_2 \Delta z_2(\mathbf{x}) + \ldots + \omega_k \Delta z_k(\mathbf{x}) = 0 \tag{3.7}$$

Επιλέγουμε τυχαία δύο αντικειμενικές συναρτήσεις $i, j\in\{1,2,\ldots,k\}$ και θεωρούμε ότι $\Delta z_m(\mathrm{x})=0$, $\forall m\in\{1,2,\ldots,k\}\setminus\{i, j\}$. Επομένως, η (3.7) γίνεται

$$\omega_i \Delta z_i(\mathbf{x}) + \omega_j \Delta z_j(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \Delta z_j(\mathbf{x}) = -\frac{\omega_i}{\omega_j}\Delta z_i(\mathbf{x}), \tag{3.8}$$

□

Ο λόγος $\dfrac{\omega_i}{\omega_j}$ ονομάζεται λόγος αντιστάθμισης (trade-off ratio) των αντικειμενικών συναρτήσεων i και j .

3.2. Εναλλακτικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα του πολυκριτήριου προγραμματισμού

Στη συνέχεια κάνουμε μία συνοπτική παρουσίαση των πλέον δημοφιλών μεθόδων επίλυσης πολυκριτήριων προβλημάτων:

- **Μέθοδοι βασιζόμενοι στην ωφέλεια (utility-based approaches) [Keeney & Raiffa, (1976)]**

Οι μέθοδοι αυτής της κατηγορίας βασίζονται στη Θεωρία Ωφέλειας (Utility Theory) των Von Neumann & Morgenstern [Von Neumann & Morgenstern, (1948)]. Βασική υπόθεση της θεωρίας αυτής είναι ότι κάθε άνθρωπος που έρχεται σε επαφή με ένα πρόβλημα δύναται να αντιστοιχίσει στο αποτέλεσμα κάθε δυνατού ενδεχομένου του προβλήματος έναν πραγματικό αριθμό που αντιπροσωπεύει την ωφέλεια που αποκομίζει από την πραγματοποίηση του ενδεχομένου αυτού. Η απόδοση τιμών ωφέλειας γίνεται με σύγκριση έκαστου δυνατού ενδεχομένου με μία «λοταρία» γεγονότων[1]. Οι Keeney & Raiffa προτείνουν μία μεθοδολογία απόδοσης κατάλληλων συναρτήσεων ωφέλειας για κάθε πρόβλημα βάσει της στάσης του αποφασίζοντα απέναντι στο πρόβλημα (φιλικός προς τον ρίσκο, εχθρικός προς το ρίσκο κ.α.). Με τη βοήθεια της μεθοδολογίας αυτής δύναται να μετατρέψουμε ένα πολυκριτήριο πρόβλημα προγραμματισμού σε πρόβλημα βελτιστοποίησης μιας αντικειμενικής της συνολικής ωφέλειας του αποφασίζοντα.

- **Προγραμματισμός στόχων (Goal programming) [Charnes & Cooper, (1961)]**

Αποτελεί μία μεθοδολογία επίλυσης πολυκριτήριων προβλημάτων μέσω καθορισμού στόχων για κάθε αντικειμενική του προβλήματος. Οι στόχοι αυτοί εκφράζονται θέτοντας μία τιμή για κάθε αντικειμενική συνάρτηση στην οποία αποβλέπει ο αποφασίζων. Το πρόβλημα πολυκριτήριας βελτιστοποίησης μετατρέπεται σε πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνολικής ικανοποίησης του αποφασίζοντα. Η τελευταία αποτιμάται βάσει τις απόκλισης της εκάστοτε τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης από την τιμή-στόχο. Εναλλακτικοί τρόποι φορμαλισμού ενός προβλήματος προγραμματισμού στόχων αναφέρονται στο [Sakawa, (1993)].

- **Αλληλεπιδραστικές μέθοδοι (Interactive approaches) [Benayoun et al. (1971)].**

Χαρακτηριστικό των μεθόδων αυτών είναι η αλληλεπίδραση αποφασίζοντα-υπολογιστή με στόχο την εύρεση λύσης που να ικανοποιεί κατά το μέγιστο δυνατό τις επιδιώξεις του πρώτου. Έτσι, κατά την εφαρμογή αυτών των μεθόδου παρατηρείται μία διαρκής διαδοχή φάσεων υπολογισμού (εύρεση εναλλακτικών λύσεων, εκτίμηση των λύσεων αυτών βάσει των κριτηρίων) και φάσεων διαλόγου υπολογιστή-χρήστη (αξιολόγηση λύσης, εκκίνηση διαδικασίας εύρεσης νέας ή τερματισμός). Η επικοινωνία αποφασίζοντα-μηχανής βοηθά τον πρώτο στην βαθύτερη κατανόηση της φύσης του προβλήματος. Εφαρμογές αλληλεπιδραστικών μεθόδων μπορεί να βρει κανείς στα [Wierzbicki, (1979)] και [Steuer & Choo, (1983)].

---

[1] Ως λοταρία γεγονότων χαρακτηρίζουμε κάθε τυχαία διαδικασία η οποία καταλήγει σε διαφορετικό γεγονός με δεδομένη πιθανότητα.

3.3. Μοντέλα ασαφούς πολυκριτήριου προγραμματισμού

Την πρώτη εφαρμογή ασαφούς λογικής σε μοντέλα βελτιστοποίησης παρουσίασε ο H.J.Zimmerman σε άρθρο του με τίτλο "Description and Optimization of Fuzzy Systems" [Zimmermann, (1976)]. Αποτελεί, ουσιαστικά, μία γενίκευση του κλασικού μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού και προγραμματισμού στόχων που επιτρέπει την ενσωμάτωση ασαφών στόχων και περιορισμών. Δύο χρόνια αργότερα σε άρθρο του ίδιου συγγραφέα η προτεινόμενη «ασαφής» μεθοδολογία επεκτείνεται και σε προβλήματα πολυκριτήριου προγραμματισμού.

Για να αντιληφθούμε τη φιλοσοφία αυτής της μεθόδου θεωρούμε το γενικό πρόβλημα πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού της μορφής (3.3):

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{z}(\mathbf{x}) = [z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}), \ldots, z_k(\mathbf{x})]^T \\ \text{υπό} \quad & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Θεωρούμε ότι ο αποφασίζων θέτει κατώτερο κατώφλι $\mathbf{z}_0$ για τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων με την έννοια ότι αποδέχεται εκείνες τις εφικτές λύσεις του προβλήματος (3.9) για τις οποίες ισχύει $z_i(\mathbf{x}) \ge z_{0i}(\mathbf{x})$, $\forall\ i=1,2,\ldots,k$. Το πρόβλημα λοιπόν θα μπορούσε να επαναδιατυπωθεί υπό τη μορφή περιορισμών ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} & z_i(\mathbf{x}) \ge z_{0i}(\mathbf{x}), i = 1,2,\ldots,k \\ & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} & (\mathbf{Cx})_i \ge z_{0i}(\mathbf{x}), i = 1,2,\ldots,k \\ & -\mathbf{Ax} \ge -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Θέτοντας $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ και $\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ το πρόβλημα (3.10) γίνεται:

$$\begin{aligned} & \mathbf{Bx} \ge \mathbf{b}' \\ & \mathbf{x} \in \Re^n \end{aligned} \tag{3.11}$$

Λύση του προβλήματος (3.11) θεωρείται κάθε $\mathbf{x}^* \in \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{Bx} \ge \mathbf{b}',\ \mathbf{x} \in \Re^n\}$. Υιοθετώντας ασαφείς στόχους και περιορισμούς το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να γραφεί στην ασαφή του μορφή:

$$\begin{aligned} & \mathbf{Bx} \mathrel{\tilde{\geq}} \mathbf{b}' \\ & \mathbf{x} \in \Re^n \end{aligned} \tag{3.12α}$$

όπου το σύμβολο '$\tilde{\geq}$' αποτελεί γενίκευση του '≥' και αντιστοιχεί στο ασαφές σύνολο «*αρκετά* μεγαλύτερο ή ίσο του $\mathbf{b}'$». Ως συνάρτηση συμμετοχής αυτού του ασαφούς συνόλου μπορεί να ορισθεί κάθε μη φθίνουσα απεικόνιση μ: $\Re^{k+m+n\times 1} \to [0\ 1]$ για την οποία ισχύει $\mu(\mathbf{y})=0$, $\forall\ \mathbf{y} \le \mathbf{b}'$. Κατά αναλογία με την §2.2.1, βέλτιστη λύση του προβλήματος (3.12α) θεωρείται κάθε **x*** για το οποίο ισχύει $\mu(\mathbf{Bx}^*) = \max_{\mathbf{x}\in\Re^n}\{\mu(\mathbf{Bx})\} > 0$. Το πρόβλημα (3.12α) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{array}{ll} \max & \mu(\mathbf{Bx}) \\ & \mathbf{x} \in \Re^n \end{array} \tag{3.12β}$$

Η $\mu(\mathbf{Bx})$ εκφράζεται ως συνάρτηση των συνιστωσών μ_i, $i=1,2,\ldots, k+m+n$ κάθε μία από τις οποίες αναφέρεται σε έναν περιορισμό ($i=1,2,\ldots,k$) ή σε ένα στόχο ($i= k+1, k+2,\ldots, k+m+n$). Γενικά ισχύει:

$$\mu(\mathbf{Bx}) = R(\mu_1((\mathbf{Bx})_1), \mu_2((\mathbf{Bx})_2), \ldots, \mu_{k+m+n}((\mathbf{Bx})_{k+m+n})) \tag{3.13}$$

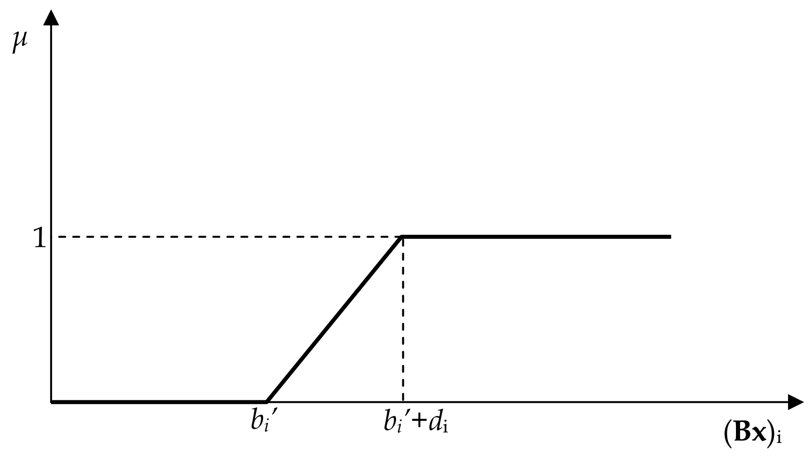
Όπου R η συνάρτηση συνεκτίμησης ασαφών στόχων και περιορισμών για την οποία έγινε λόγος στην § 2.2.4.

Χρησιμοποιώντας για R τη συνάρτηση min και υιοθετώντας γραμμικές συναρτήσεις συμμετοχής μ_i παίρνουμε την πιο απλή περίπτωση κατά την οποία:

$$\mu(\mathbf{Bx}) \equiv \min_{i=1,2,\ldots,k+m+n}\{\mu_i((\mathbf{Bx})_i)\} \text{ και}$$

$$\mu_i((\mathbf{Bx})_i) = \begin{cases} 0 & ,(\mathbf{Bx})_i < b_i' \\ \dfrac{(\mathbf{Bx})_i - b_i'}{d_i} & ,b_i' \le (\mathbf{Bx})_i < b_i' + d_i \\ 1 & ,(\mathbf{Bx})_i \ge b_i' + d_i \end{cases} \tag{3.14}$$

Η μορφή των μ_i απεικονίζεται στο σχ. 3.2.



Σχήμα 3.2. Η γραφική απεικόνιση του ασαφή γραμμικού στόχου της σχέσης (3.14)

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι ο αποφασίζων ουσιαστικά απορρίπτει λύσεις **x** για τις οποίες ισχύει $(\mathbf{Bx})_i \le b_i'$, ενώ η προτίμησή του αυξάνεται γραμμικά και κορυφώνεται για τιμές του **x** τ.ω. $(\mathbf{Bx})_i = b_i' + d_i$. Ο αποφασίζων παραμένει αδιάφορος για **x** τα οποία δίνουν $(\mathbf{Bx})_i > b_i' + d_i$. Τα γωνιακά σημεία b_i' και $b_i' + d_i$ της συνάρτησης μ_i αντιστοιχούν σε «κατώφλια προτίμησης» εκατέρωθεν των οποίων η προτίμηση του αποφασίζοντα αλλάζει ριζικά μορφή.

Εισάγοντας τη συνάρτηση (3.14) στο ασαφές πρόβλημα (3.12) παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{ll}\max & \min\limits_{i=1,2,\ldots,k+m+n} \{\mu_i((\mathbf{B}\mathbf{x})_i)\} \\ \mathbf{x} \in \Re^n & \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll}\max & \min\limits_{i=1,2,\ldots,k+m+n} \{\min\{1, \dfrac{(\mathbf{B}\mathbf{x})_i - b_i'}{d_i}\}\} \\ \mathbf{x} \in \Re^n & \end{array} \tag{3.15}$$

το τελευταίο πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{array}{ll}\max & \lambda \\ \text{υπό} & (\mathbf{B}\mathbf{x})_i - b_i' \geq d_i \lambda, \quad i = 1,2,\ldots,k+m+n \\ & 0 < \lambda \leq 1 \\ & \mathbf{x} \in \Re^n \end{array} \tag{3.16}$$

Ο περιορισμός $\lambda \leq 1$ αφορά την περίπτωση προβλημάτων με αρκετά χαμηλούς στόχους και εξαιρετικά χαλαρούς περιορισμούς. Σ′ αυτή την κλάση προβλημάτων είναι δυνατό να βρεθεί μία λύση $\mathbf{x}^*$ που υπέρ-ικανοποιεί τους στόχους και τους περιορισμούς και η οποία δίνει $((\mathbf{B}\mathbf{x}^*)_i - b_i')/d_i > 1$, $\forall i \in \{1,2,\ldots,k+m+n\}$. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε λύση λ^* του προβλήματος (3.16) μεγαλύτερη του 1, πράγμα παράλογο.
□

Μέσω της εισαγωγής ασαφών περιορισμών και στόχων επιτύχαμε, συνεπώς, τη μετατροπή ενός προβλήματος πολυκριτήριου προγραμματισμού σε πρόβλημα προγραμματισμού με μία αντικειμενική συνάρτηση το οποίο λύνεται εύκολα π.χ. με μία μέθοδο Simplex. Προτού επιχειρήσουμε τη διασύνδεση του ασαφούς προγραμματισμού με στοιχεία της θεωρίας του πολυκριτήριου προγραμματισμού θα ήταν σκόπιμο να αναφερθούμε σε ένα παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 3.2. [Sakawa, (1993)]</u>

Θεωρούμε το πρόβλημα προγραμματισμού παραγωγής του παραδείγματος 3.1 το οποίο μοντελοποιήθηκε ως πρόβλημα πολυκριτήριου προγραμματισμού ως εξής:

$$\begin{array}{lll}\max & z_1 = & x_1 + 2x_2 \\ \max & z_2 = & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{υπό} & & 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\ & & 8x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ & & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{3.17}$$

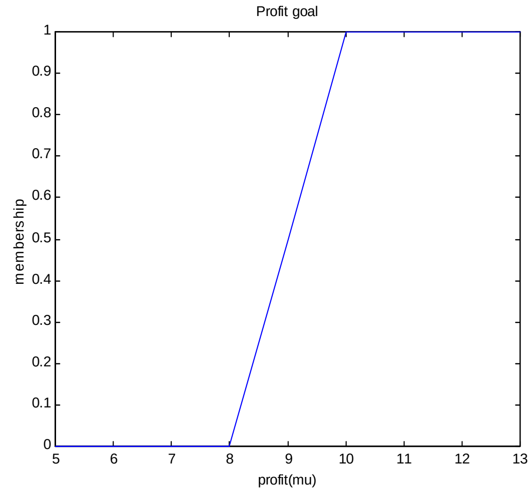
Για το πρόβλημα αυτό προφανώς ισχύουν k=2, m=3, n=2 και

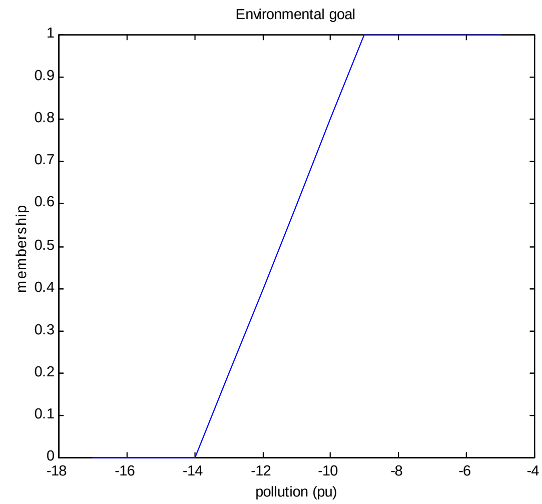
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \\ -2 & -6 \\ -8 & -6 \\ -3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Χάριν απλότητας θεωρούμε ότι η ασάφεια έγκειται μόνο στη διατύπωση στόχων ενώ οι περιορισμοί διαθεσιμότητας πρώτων υλών είναι ακριβείς. Από την ανάλυση του προβλήματος είναι εύκολο να καθοριστούν οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων. Λόγω των αντικρουόμενων επιδιώξεων η μεγιστοποίηση μίας αντικειμενικής συνεπάγεται την ελαχιστοποίηση της άλλης. Συνεπώς αναφερόμενοι και στο σχ. 3.1 μπορούμε να υπολογίσουμε ότι:

$$z_1^{\min} = 0, \quad z_1^{\max} = 10, \quad z_2^{\min} = -16, \quad z_2^{\max} = 0$$

Οι στόχοι που τίθενται για το παράδειγμα αυτό φαίνονται στο σχ.3.3 και αντιστοιχούν σε b_1'=8, d_1=2, b_2'=-14, d_1=5. Οι παράμετροι του προβλήματος παρουσιάζονται αναλυτικά στον πίνακα 3.2.





Σχήμα 3.3: Οι ασαφείς στόχοι του προβλήματος του παραδείγματος 3.2.

Στόχοι και περιορισμοί / Συναρτήσεις συμμετοχής	Αντικειμενικές συναρτήσεις		Περιορισμοί διαθεσιμότητας			Περιορισμοί μη αρνητικότητας	
	z_1	z_2	1	2	3	1	2
b_i'	8	-14	-27	-45	-15	0	0
d_i	2	5	0	0	0	0	0

Πίνακας 3.2 Οι παράμετροι της ασαφούς μοντελοποίησης του παραδείγματος 3.2

Καταλήγουμε συνεπώς στο ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \lambda \\
&\text{υπό} \quad x_1 + 2x_2 - 2\lambda \geq 8 \\
&\quad -3x_1 - 2x_2 - 5\lambda \geq -14 \\
&\quad 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\
&\quad 8x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
&\quad 3x_1 + x_2 \leq 15 \\
&\quad 1 \geq \lambda > 0,\ x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

του οποίου η βέλτιστη λύση είναι:

$$x_1^*=0.7895, \qquad x_2^*=4.2368, \qquad \lambda^*=0.6316$$

Το συνολικό κέρδος (z_1*) ανέρχεται στις 9.2632 χ.μ. ενώ η ρύπανση του περιβάλλοντος (-z_2*) αντιστοιχεί σε 10.8421 μονάδες ρύπανσης. Η λύση αυτή ικανοποιεί και τους δύο στόχους κατά 63.16% και βρίσκεται πάνω στην ακμή ED του πολυγώνου του σχ.3.1. Συνεπώς, ανήκει στο βέλτιστο σύνολο Pareto του προβλήματος του παραδείγματος 3.1.

3.4. Βέλτιστες λύσεις και ασαφής προγραμματισμός

Στο παράδειγμα 3.2. η εφαρμογή της μεθόδου που παρουσιάστηκε στη προηγούμενη παράγραφο οδήγησε σε βέλτιστη λύση Pareto. Δεδομένου ότι το βέλτιστο σύνολο Pareto θεωρείται γενικά ως το σύνολο των ικανοποιητικών (sufficient) λύσεων ενός προβλήματος πολυκριτήριου προγραμματισμού, θα είχε ενδιαφέρον να εξετάσει κανείς υπό ποίες προϋποθέσεις η εισαγωγή ασαφούς λογικής στον πολυκριτήριο προγραμματισμό οδηγεί σε βέλτιστη λύση Pareto.

Στο [Feng, (1987)] αποδεικνύεται ότι μία μοντελοποίηση ασαφούς λογικής με τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Οι ασαφείς στόχοι και περιορισμοί εκφράζονται με γραμμικές ή μη συναρτήσεις συμμετοχής.
2. Ειδικά, ο εκάστοτε ασαφής στόχος $f_i(\mathbf{x})$ μοντελοποιείται με μία αυστηρώς αύξουσα συνάρτηση συμμετοχής στο διάστημα [m_i, M_i], όπου $m_i = \inf_{\mathbf{x}\in\Im} f_i(\mathbf{x})$ και $M_i = \sup_{\mathbf{x}\in\Im} f_i(\mathbf{x})$ ($\Im$ το σύνολο των εφικτών λύσεων του προβλήματος). Για $f_i(\mathbf{x}) \leq m_i$ η συνάρτηση συμμετοχής παίρνει την τιμή 0.

3. Για το συνυπολογισμό ασαφών στόχων και περιορισμών χρησιμοποιείται ο τελεστής min.

οδηγεί σε ασθενή βέλτιστη λύση Pareto του πολυκριτήριου προβλήματος.

Ας εξετάσουμε όμως μερικές ειδικές περιπτώσεις:

3.4.1. Maxmin ασαφής προγραμματισμός

Η περίπτωση αυτή είναι όμοια με εκείνη του παραδείγματος 3.2. Θεωρούμε το γενικό πρόβλημα πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού (3.3) και υποθέτουμε ότι η ασάφεια έγκειται αποκλειστικά στη διατύπωση στόχων. Επιλύουμε k προβλήματα συνήθους γραμμικού προγραμματισμού επιλέγοντας κάθε φορά ως αντικειμενική συνάρτηση μία εκ των $z_i(\mathbf{x})$. Κατά αυτόν τον τρόπο μπορούμε να καθορίσουμε εκείνα τα σημεία $\mathbf{x}_i$* του βέλτιστου συνόλου Pareto τα οποία μεγιστοποιούν την εκάστοτε αντικειμενική συνάρτηση z_i, i=1,2,…,k. Ορίζουμε

$$z_i^{\max} \mathrel{\hat{=}} z_i(\mathbf{x}_i^*) = \max_{\mathbf{x}\in\Im} z_i(\mathbf{x}) \text{ και} \tag{3.19}$$

$$z_i^m \mathrel{\hat{=}} \min\{z_i(\mathbf{x}_1^*), z_i(\mathbf{x}_2^*), \dots, z_i(\mathbf{x}_{i-1}^*), z_i(\mathbf{x}_{i+1}^*), \dots, z_i(\mathbf{x}_k^*)\},\ i=1,2,\dots,k \tag{3.20}$$

Οι τιμές των z_i^m θεωρούνται οι λιγότερο αποδεκτές μεταξύ των υπολοίπων τιμών της z_i στο βέλτιστο σύνολο Pareto. Ο Zimmermann στο [Zimmermann, (1978)] υποστηρίζει ότι στο διάστημα [$z_i^m, z_i^{\max}$] μπορεί κανείς να αναζητήσει «λογικές» λύσεις ενός προβλήματος πολυκριτήριου προγραμματισμού. Προτείνει συνεπώς την ακόλουθη γραμμική συνάρτηση συμμετοχής για ασαφείς στόχους:

$$\mu_i(z_i(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & , z_i(\mathbf{x}) < z_i^m \\ \dfrac{z_i(\mathbf{x}) - z_i^m}{z_i^{\max} - z_i^m} & , z_i^m \le z_i(\mathbf{x}) < z_i^{\max} \\ 1 & , z_i(\mathbf{x}) \ge z_i^{\max} \end{cases} \tag{3.21}$$

Η μορφή της (3.21) είναι ίδια με εκείνη της (3.14) αν πραγματοποιήσουμε την αντιστοιχία:

$$(\mathbf{Bx})_i \leftrightarrow z_i(\mathbf{x})$$

$$b_i' \leftrightarrow z_i^m$$

$$d_i \leftrightarrow z_i^{\max} - z_i^m$$

Το πρόβλημα ασαφούς γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτει παίρνει τη μορφή:

$$\begin{array}{ll} \max & \min\limits_{i=1,2,\dots,k} \{\mu_i(z_i(\mathbf{x}))\} \\ & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0 \end{array} \tag{3.22}$$

και μετατρέπεται στο ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μίας αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ & \mu_i(z_i(\mathbf{x})) \geq \lambda, \quad i = 1,2,\ldots,k \\ & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα σημαντικό θεώρημα που ισχύει για προβλήματα της μορφής (3.23).

Θεώρημα 3.3

Αν η λύση του προβλήματος (3.23) είναι μοναδική και οι $\mu_i(z_i(\mathbf{x}))$, i=1,2,…,k είναι μη φθίνουσες γραμμικές συναρτήσεις των $z_i(\mathbf{x})$), i=1,2,…,k τότε η λύση αυτή ανήκει στο βέλτιστο σύνολο Pareto.

Απόδειξη

Έστω $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{I}$ η λύση του προβλήματος (3.23). Υποθέτουμε ότι η λύση αυτή δεν ανήκει στο βέλτιστο σύνολο Pareto. Τότε βάσει του ορισμού 3.1 $\exists\ \mathbf{x}' \in \mathfrak{I}$ διάφορο του $\mathbf{x}^*$ για το οποίο ισχύει $z_i(\mathbf{x}') \geq z_i(\mathbf{x}^*), \forall i=1,2,\ldots,k$. Επειδή η μ_i είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του z_i τότε:

$$z_i(\mathbf{x}') \geq z_i(\mathbf{x}) \Rightarrow \mu_i(z_i(\mathbf{x}')) \geq \mu_i(z_i(\mathbf{x}^*)), \forall i$$

και συνεπώς:

$$\min_{i=1,2,\ldots,k} \mu_i(z_i(\mathbf{x}')) \geq \min_{i=1,2,\ldots,k} \mu_i(z_i(\mathbf{x}^*))$$

Το τελευταίο συμπέρασμα είναι άτοπο για δύο λόγους. Πρώτον, αν η ανισότητα ίσχυε τότε η $\mathbf{x}^*$ θα έπαυε να είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος (3.23). Δεύτερον, αν η ισότητα ίσχυε τότε αυτό θα σήμαινε ότι υπάρχει και άλλο $\mathbf{x}' \in \mathfrak{I}$ τέτοιο ώστε $\min_{i=1,2,\ldots,k} \mu_i(z_i(\mathbf{x}')) = \max\{\min_{i=1,2,\ldots,k} \mu_i(z_i(\mathbf{x}))\}, \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{I} \setminus \{\mathbf{x}', \mathbf{x}^*\}$. Με άλλα λόγια το $\mathbf{x}'$ είναι μία επιπλέον λύση του προβλήματος (3.23), κάτι που δε συμφωνεί με την υπόθεση μας περί μοναδικότητας της λύσης. Αποδεικνύουμε λοιπόν ότι η $\mathbf{x}^*$ ανήκει στο βέλτιστο σύνολο Pareto.

□

<u>Παράδειγμα 3.3</u>

Θεωρούμε το παράδειγμα (3.2) και εισάγουμε ασαφείς στόχους με βάση τη μεθοδολογία που περιγράφηκε παραπάνω. Για το παράδειγμα προγραμματισμού παραγωγής ισχύει:

$$z_1^m = 0, \quad z_1^{\max} = 10, \quad z_2^m = -16, \quad z_2^{\max} = 0$$

Έχουμε συνεπώς τις ακόλουθες συναρτήσεις συμμετοχής:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & , x_1 + 2x_2 < 0 \\ \dfrac{x_1 + 2x_2}{10} & , 0 \le x_1 + 2x_2 < 10 \\ 1 & , x_1 + 2x_2 \ge 10 \end{cases}$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & , -3x_1 - 2x_2 < -16 \\ \dfrac{-3x_1 - 2x_2 + 16}{16} & , -16 \le -3x_1 - 2x_2 < 0 \\ 1 & , -3x_1 - 2x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Το γραμμικό πρόβλημα στο οποίο καταλήγουμε έχει ακριβώς την ίδια μορφή με εκείνο του παραδείγματος (3.2). Το μόνο που αλλάζει είναι οι συντελεστές των δύο πρώτων περιορισμών. Η επίλυση του προβλήματος δίνει ως βέλτιστη λύση τη x_1*=0 και x_2*=3.0769. Το συνολικό κέρδος (z_1*) ανέρχεται στις 6.1538 χ.μ. ενώ η ρύπανση του περιβάλλοντος (-z_2*) αντιστοιχεί σε 6.1539 μονάδες ρύπανσης Η λύση αυτή ανήκει στην ακμή ΑΕ του πολυγώνου του σχ. 3.1 και ικανοποιεί κατά 61.54% και τους δύο στόχους: κέρδους και περιορισμού της ρύπανσης του περιβάλλοντος.

3.4.2. Ασαφής γραμμικός προγραμματισμός κάνοντας χρήση του τελεστή γινομένου

Στο [Zimmermann, (1978)] εξετάζεται η ειδική περίπτωση του γενικού προβλήματος ασαφούς προγραμματισμού (3.12β):

$$\begin{array}{ll} \max & \mu(\mathbf{Bx}) \\ & \mathbf{x} \in \Re^n \end{array} \tag{3.24}$$

στην οποία αφενός μεν οι περιορισμοί του προβλήματος διατυπώνονται επακριβώς αφετέρου δε η $\mu(\mathbf{Bx}) = \mu(\mathrm{z}(\mathbf{x}))$ υπολογίζεται ως:

$$\mu(\mathbf{z}(\mathbf{x})) = \mu_1(z_1(\mathbf{x})) \times \mu_2(z_2(\mathbf{x})) \times \ldots \times \mu_k(z_k(\mathbf{x}))) \tag{3.25}$$

Οι μ_i είναι γραμμικές συναρτήσεις των z_i της μορφής:

$$\mu_i(z_i(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & , z_i(\mathbf{x}) < z_i^m \\ \dfrac{z_i(\mathbf{x}) - z_i^m}{d_i} & , z_i^m \le z_i(\mathbf{x}) < z_i^m + d_i \\ 1 & , z_i(\mathbf{x}) \ge z_i^m + d_i \end{cases} \tag{3.26}$$

όπου τα z_i^m δίνονται από τη σχέση (3.20) και d_i>0.

Με αυτές τις υποθέσεις το γενικό πρόβλημα ασαφούς προγραμματισμού (3.24) παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \prod_{i=1}^{k} \mu_i(z_i(\mathbf{x})) \\ & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0 \end{array}\right\} \tag{3.27}$$

το οποίο αποτελεί εν γένει πρόβλημα μη γραμμικού (τετραγωνικού) προγραμματισμού.

Παράδειγμα 3.4
Θεωρούμε ξανά το πρόβλημα προγραμματισμού παραγωγής του παραδείγματος (3.1) με ασαφείς στόχους:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & , x_1 + 2x_2 < 0 \\ \dfrac{x_1 + 2x_2}{10} & , 0 \le x_1 + 2x_2 < 10 \\ 1 & , x_1 + 2x_2 \ge 10 \end{cases}$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & , -3x_1 - 2x_2 < -16 \\ \dfrac{-3x_1 - 2x_2 + 16}{16} & , -16 \le -3x_1 - 2x_2 < 0 \\ 1 & , -3x_1 - 2x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού γράφεται αυτή τη φορά ως εξής:

$$\begin{aligned} \max \quad & -0.0118x_1^2 - 0.0250x_2^2 - 0.0500x_1x_2 + 0.1000x_1 + 0.2000x_2 \\ \text{υπό} \quad & 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\ & 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\ & 3x_1 + \ \ x_2 \le 15 \\ & \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Η επίλυσή του δίνει x_1*=0 και x_2*=4.5. Το συνολικό κέρδος (z_1*) ανέρχεται στις 9 χ.μ. ενώ η ρύπανση του περιβάλλοντος (-z_2*) αντιστοιχεί σε 9 μονάδες ρύπανσης Η λύση αυτή είναι το σημείο Ε του πολυγώνου του παραδείγματος 3.1 και ικανοποιεί κατά 90% το στόχο κέρδους και κατά 43.75% το στόχο περιορισμού της ρύπανσης του περιβάλλοντος. Η συνολική ικανοποίηση στόχων ανέρχεται σε 39.38%.

□

Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο θεωρήματα που ισχύουν για το πρόβλημα ασαφούς προγραμματισμού (3.27) [Zimmermann,(1978)].

Θεώρημα 3.4
Έστω $\mathfrak{I}_P$ το βέλτιστο σύνολο Pareto του προβλήματος (3.3). Τότε $\forall \mathbf{x}^* \in \mathfrak{I}_P$ υπάρχουν d_1^*, $d_2^*,\ldots, d_k^*$ τ.ω. η βέλτιστη λύση του μη γραμμικού προβλήματος (3.27) να είναι ίση με $\mathbf{x}$.

Απόδειξη
Πράγματι αν θέσουμε $d_i^* = z_i(\mathbf{x}^*) - z_i^m$, $i=1,2,\ldots,k$ στην εξίσωση (3.27) παίρνουμε ότι

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{c}_i^T \mathbf{x}^* - z_i^m}{d_i^*} = 1 \Rightarrow \mu_i(z_i(\mathbf{x}^*)) = 1.$$

Επιπλέον, $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{I}_P \setminus \{\mathbf{x}^*\}$,

$$\mu_i(z_i(\mathbf{x})) = \min\left\{\prod_{i=1}^{k}\frac{\mathbf{c}_i^T\mathbf{x}-z_i^m}{d_i*},1\right\}\leq 1.$$

Συνεπώς, $\mu_i(z_i(\mathbf{x}^*)) = \max_{\mathbf{x}\in\Im}\mu_i(z_i(\mathbf{x}))$ και η $\mathbf{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος (3.27).

□

Θεώρημα 3.5

Για τιμές $d_i^* \geq z_i^{\max} - z_i^m > 0$ η βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^*$ του προβλήματος (3.27) παραμένει η ίδια. Εκείνο που μεταβάλλεται μόνο είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι ιδιαίτερα απλή. Για τιμές $d_i^* \geq z_i^{\max} - z_i^m > 0$ έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{c}\max \quad \prod_{i=1}^{k}\mu_i(z_i(\mathbf{x}))\\ \mathbf{Ax}\leq\mathbf{b},\mathbf{x}\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\max \quad \prod_{i=1}^{k}\frac{\mathbf{c}_i^T\mathbf{x}-z_i^m}{d_i*}\\ \mathbf{Ax}\leq\mathbf{b},\mathbf{x}\geq 0\end{array}\right\}.$$

Όμως,

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{\mathbf{c}_i^T\mathbf{x}-z_i^m}{d_i*} = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{d_i*}\prod_{i=1}^{k}(\mathbf{c}_i^T\mathbf{x}-z_i^m)$$

και επομένως η βέλτιστη λύση του προβλήματος δεν επηρεάζεται από τον όρο $\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{d_i*}$.

□

Το θεώρημα 3.4 εξασφαλίζει την ισοδυναμία μεταξύ βέλτιστης λύσης Pareto ενός προβλήματος πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού και βέλτιστης λύσης του προβλήματος (3.27). Η ειδική περίπτωση ασαφούς μοντελοποίησης (3.4.2) αποτελεί μία επιπλέον μέθοδο εύρεσης βέλτιστων λύσεων Pareto. Το τελευταίο πραγματοποιείται με μεταβολή της τιμής των d_i. Βάσει όμως του θεωρήματος 3.5, τιμές των d_i^* μεγαλύτερες της διαφοράς $z_i^{\max} - z_i^m$ δεν δίνουν νέα λύση. Το συμπέρασμα αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία όταν ενδιαφέρεται κανείς για την ευστάθεια της λύσης του προβλήματος (3.27).

Επιχειρώντας μία σύγκριση των δύο εναλλακτικών υποπεριπτώσεων πολυκριτήριας μοντελοποίησης με τη χρήση ασαφούς λογικής, δύσκολα μπορούμε να αποφανθούμε για το ποία είναι η πιο αποτελεσματική. Εντούτοις μία πρώτη σύγκριση θα μπορούσε να γίνει στο επίπεδο της ευαισθησία που παρουσιάζει η λύση του εκάστοτε προβλήματος στις μεταβολές των παραμέτρων των ασαφών συνόλων («γωνιακά» σημεία, d_i).

Συγκεκριμένα, η περίπτωση του maxmin πολυκριτήριου προγραμματισμού φαίνεται να παρουσιάζει μεγαλύτερη ευαισθησία αφού η μετακίνηση των «γωνιακών» σημείων επιφέρει μεταβολές στις τιμές των παραμέτρων του γραμμικού προβλήματος

(3.23). Για μία ανάλυση ευαισθησίας του προβλήματος αυτού μπορούν να χρησιμοποιηθούν τεχνικές που βασίζονται τόσο στη θεωρία μη γραμμικού προγραμματισμού (π.χ. πολλαπλασιαστές Langange) όσο και στη μέθοδο Simplex. Εντούτοις, η γενίκευση των αποτελεσμάτων είναι αρκετά δύσκολη. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν ισχύει στην περίπτωση του ασαφούς γραμμικού προγραμματισμού με τη χρήση του τελεστή γινομένου, όπου η ύπαρξη του θεώρημα 3.5 βοηθά στην διατύπωση γενικών συμπερασμάτων, διευκολύνοντας έτσι μία μελέτη ευαισθησίας.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων μοντελοποίησης παρατηρούμε ότι οι λύσεις $\mathbf{x}^*$ που δίνονται αφενώς μεν ανήκουν στο βέλτιστο σύνολο Pareto του προβλήματος αφετέρου δε διαφέρουν ουσιαστικά μεταξύ τους. Βέβαια, η πολλαπλασιαστική αντικειμενική συνάρτηση επηρεάζεται ιδιαίτερα από χαμηλές τιμές ικανοποίησης ασαφών στόχων με αποτέλεσμα να εμφανίζει χαμηλότερο συνολικό βαθμό ικανοποίησης, 39.38% έναντι του 61.54% που δίνει η πρώτη περίπτωση.

Πάντως, πολλά πορίσματα της συζήτησης που έγινε στο 2^{ο} κεφάλαιο σχετικά με τους τελεστές σύνθεσης ασαφών συνόλων ισχύουν και στις δύο υποπεριπτώσεις ασαφούς προγραμματισμού. Η καταλληλότητα της εφαρμογής των τελεστών 'min' και '•' σε πρακτικά προβλήματα είναι αμφισβητήσιμη, αφού και οι δύο δεν επιτρέπουν κάποιου είδους συμβιβασμό μεταξύ των επιμέρους στόχων και περιορισμών.

3.5. Επεκτάσεις

Κλείνουμε το κεφάλαιο του ασαφή μαθηματικού προγραμματισμού αναφερόμενοι σε επεκτάσεις των παραπάνω μοντέλων οι οποίες έχουν δημοσιευθεί κατά καιρούς.

Μία πρώτη επέκταση που αφορά το ασαφές maxmin μοντέλο προγραμματισμού ήταν η εισαγωγή γενικής μορφής συναρτήσεων συμμετοχής για την αναπαράσταση ασαφών στόχων. Όπως αποδεικνύεται (βλ. ενδεικτικά [Sakawa, (1993)]), για τρεις τύπους συναρτήσεων συμμετοχής: εκθετική (exponential), υπερβολική (hyperbolic) και κατά τμήματα γραμμική (piecewise linear), το πρόβλημα προγραμματισμού (3.23) δύναται να μετατραπεί με κατάλληλους μετασχηματισμούς σε ισοδύναμο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο αφού μας δίνει τη δυνατότητα να θεωρήσουμε πολύπλοκες συναρτήσεις προτίμησης διατηρώντας όμως ταυτόχρονα πλεονεκτήματα του γραμμικού προγραμματισμού, όπως ύπαρξη βέλτιστης λύσης, δυνατότητα για ανάλυση ευαισθησίας, ανάλυση ευστάθειας κ.α.

Μία επόμενη εφαρμογή ήταν η θεώρηση ασαφών στόχων και περιορισμών για μη γραμμικά προβλήματα της μορφής (3.2). Η περίπτωση αυτή, που περιγράφεται αναλυτικά στο [Sakawa, (1993)], αντιμετωπίζεται παρόμοια με εκείνη του γραμμικού υποδείγματος. Πολλά πορίσματα του κεφαλαίου αυτού μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση του ασαφούς μη γραμμικού προγραμματισμού.

Τελευταία αναφέρουμε μία ενδιαφέρουσα περίπτωση ασαφούς προγραμματισμού κατά την οποία οι παράμετροι του προβλήματος διατυπώνονται με τρόπο ασαφή. Για παράδειγμα, η διαθέσιμη ποσότητα μίας πρώτης ύλης μπορεί να είναι «*περίπου* 100 μονάδες» ή το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος να είναι «*περίπου* 200 δρχ.». Η περίπτωση αυτή, αν και μοιάζει με ανάλυση ευαισθησίας, είναι ένα βήμα παραπάνω αφού δεν χρησιμοποιεί απλά και μόνο το εύρος των τιμών μίας παραμέτρου αλλά, επιπλέον, τη δυνατότητα (possibility) της παραμέτρου αυτής να πάρει μία δεδομένη τιμή. Η περίπτωση αυτή του ασαφούς προγραμματισμού ονομάζεται προγραμματισμός δυνατότητας (possibilistic programming). Ο προγραμματισμός δυνατότητας βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα αριστοποίησης σε δίκτυα στα οποία οι τιμές που αναγράφονται στα τόξα είναι ασαφείς αριθμοί. Για την επίλυση αυτών των προβλημάτων χρησιμοποιούνται κλασικοί αλγόριθμοι της θεωρίας δικτύων (Kruskal, Ford & Fergusson) οι οποίοι επεκτείνονται κάνοντας χρήση της Αρχής της Επέκτασης (§1.1.3).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΣΑΦΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΣΕ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

Στο Κεφάλαιο 2 της εργασίας μελετήσαμε της διάφορες μορφές αβεβαιότητας με τις οποίες ενδέχεται να έρθει κανείς αντιμέτωπος κατά τη λήψη μίας απόφασης. Η μελέτη αυτή βέβαια δεν είναι δυνατό να καλύψει όλους τους τύπους προβλημάτων απόφασης. Ωστόσο, το μοντέλο της § 2.1.2 βρίσκει εφαρμογή στις περιπτώσεις λήψης αποφάσεων σε οικονομικά και ιδιαίτερα χρηματοοικονομικά θέματα. Τα χρηματοοικονομικά συστήματα όπως π.χ. οι χρηματαγορές περιλαμβάνουν όλες τις μορφές αβεβαιότητας που αναφέρονται στην παράγραφο § 2.1.3, κάτι που φαίνεται εξάλλου και από το παράδειγμα του επενδυτή. Υπό το καθεστώς της αβεβαιότητας, οι δρώντες σε μία χρηματαγορά καλούνται να αξιολογήσουν πληροφορίες που προκύπτουν από τις διάφορες οικονομικές διαδικασίες προκειμένου να εξαγάγουν χρήσιμα συμπεράσματα για την πορεία της αγοράς.

Εντούτοις, η φύση των πληροφοριών που πηγάζουν από τις διάφορες οικονομικές διεργασίες δυσχεραίνει το έργο τους. Η ύπαρξη ακριβών, ποσοτικών και συνάμα σημαίνουσων περιγραφών σπανίζει, κάτι που στερεί σχεδόν τη δυνατότητα για εξαγωγή συγκεκριμένων-ποσοτικών συμπερασμάτων για την πορεία της αγοράς. Οι ειδικοί υιοθετούν επί το πλείστον λεκτικές και ασαφείς περιγραφές όπως π.χ. «ανοδική αγορά», «σταθερή οικονομία», «ώριμη αγορά» κ.α. Οι εκτιμήσεις και αναλύσεις αυτού του είδους δύσκολα ενσωματώνονται από ένα κλασικό επιχειρησιακό μοντέλο βελτιστοποίησης:

max (ή min) συνάρτησης κέρδους (ή κόστους)
υπό περιορισμούς
....

Γεννάται επομένως η ανάγκη για τη δημιουργία νέων ή την επέκταση παλιότερων μεθόδων με σκοπό την ενσωμάτωση του είδους πληροφόρησης που αναφέρθηκε. Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε ένα τυπικό πρόβλημα της χρηματοοικονομικής, το πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου.

4.1. Το πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου

Η επιλογή χαρτοφυλακίου αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα της χρηματοοικονομικής ανάλυσης. Με τη σύνθεση χαρτοφυλακίου ο επενδυτής προσπαθεί ουσιαστικά να μειώσει τον κίνδυνο ζημίας, κάτι που δε θα ήταν εφικτό αν επένδυε σε ένα αποκλειστικά περιουσιακό στοιχείο. Η σύνθεση ή η «ανάμειξη» περιουσιακών στοιχείων διαφόρων μορφών (μετοχές, ομόλογα, παράγωγα κ.α.) περιορίζει τον κίνδυνο ζημίας και δύναται να οδηγήσει υπό συνθήκες σε κερδοφορία. Προκειμένου όμως ο επενδυτής να πετύχει αποδόσεις άνω του επιτοκίου χωρίς ρίσκο (risk-free rate), πρέπει να αναλάβει τον κίνδυνο της αγοράς (market risk) δηλ. να κατέχει περιουσιακά στοιχεία υψηλού κινδύνου (risky assets). Το πρόβλημα συνεπώς έγκειται στην επιλογή της κατάλληλης επένδυσης, η οποία θα συμβιβάσει την επιδίωξη για κερδοφορία με την προστασία έναντι του κινδύνου.

Οι επενδυτές διαθέτουν συνήθως κάποια εμπειρία τόσο για το μέγεθος όσο και για την κατεύθυνση κάποιων αλλαγών στην αγορά. Με άλλα λόγια είναι σε θέση να καθορίσουν δυνητικά σενάρια της αγοράς και ένα εύρος αποδόσεων που αναμένονται για καθένα από αυτά τα σενάρια. Η γνώση όμως αυτή παραμένει στη βάση της ποιοτική και μάλλον ανακριβής. Η περιγραφή της πορείας της αγοράς γίνεται συνήθως με λεκτικούς όρους όπως «ανοδική», «σταθερή», «καθοδική», ενώ οι στόχοι που τίθενται είναι επί το πλείστον ασαφείς: «υψηλές απολαβές για το x σενάριο της αγοράς», «μέτριες απολαβές για το y σενάριο της αγοράς» κ.α..

Μεταξύ των μεθόδων που επινοήθηκαν προς επίλυση του προβλήματος επιλογής χαρτοφυλακίου ιδιαίτερα δημοφιλείς είναι εκείνες που βασίζονται στη θεωρία της στατιστικής και των πιθανοτήτων. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις μεθόδους βελτιστοποίησης μέσου όρου-διακύμανσης (mean-variance optimization), μέσης «ανεκπλήρωσης» στόχου (average shortfall approach) [Morgan, (1993)] και ασύμμετρων μέτρων ρίσκου (asymmetric risk measures) [King, (1993)]. Οι παραπάνω μέθοδοι υποθέτουν την ύπαρξη της κοινής κατανομής πιθανότητας απολαβών (joint probability distribution) για τα περιουσιακά στοιχεία που συνιστούν εναλλακτικές επενδυτικές επιλογές του αποφασίζοντα (investment universe). Βάσει όμως της συλλογιστικής που αναπτύχθηκε παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι δύσκολα μπορεί κάποιος επενδυτής να μεταφράσει τόσο τις ποιοτικές του εκτιμήσεις για την πορεία της αγοράς όσο και τις ασαφείς του επιδιώξεις σε όρους κατανομής πιθανοτήτων [Ramaswamy, (1998)]. Εξάλλου, όπως αναλύθηκε και στην § 2.1.3, τα εργαλεία της στατιστικής και των πιθανοτήτων αδυνατούν να ενσωματώσουν άλλες μορφές αβεβαιότητας πλην της τυχαιότητας. Η τυχαιότητα αν και σημαντική πτυχή μίας αγοράς δεν αποτελεί τη μόνη πηγή αβεβαιότητας.

4.1.1. Μοντελοποίηση του προβλήματος

Κάνοντας χρήση του μοτίβου «σενάρια της αγοράς-αποδόσεις» μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου ως ένα γραμμικό πρόβλημα πολυκριτήριας βελτιστοποίησης [Ramaswamy, (1998)]:

$$\begin{array}{ll} \max & R_k^P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} r_{ki} x_i, \quad k = 1,2,\ldots,M \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & x_i^{\min} \le x_i \le x_i^{\max}, \quad i = 1,2,\ldots,N \end{array} \tag{4.1}$$

όπου x_i το ποσοστό του χαρτοφυλακίου που επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο i, r_{ik} η απόδοση (ανά χρηματική μονάδα) του περιουσιακού στοιχείου i στο τέλος της επενδυτικής περιόδου για το σενάριο k της αγοράς, $R_k^P(\mathbf{x})$ η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου για το k σενάριο της αγοράς και $x_i^{\min}$ και $x_i^{\max}$ το ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα ποσοστό του χαρτοφυλακίου που επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο i.

Η λύση του παραπάνω προβλήματος σπάνια είναι τετριμμένη λόγω του ότι οι επιδιώξεις για μεγιστοποίηση των απολαβών σε κάθε σενάριο αντικρούονται μεταξύ τους. Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος μπορούμε να ανατρέξουμε σε μεθόδους που περιγράφονται στο κεφάλαιο 3. Έτσι κάνοντας χρήση π.χ. της μεθόδου στάθμισης (weighting method) και επιλέγοντας μία κατανομή βαρών , $\boldsymbol{\omega}=[\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_k \ldots \omega_M]^T$ το πρόβλημα (4.1) μετατρέπεται στο ακόλουθο γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης μίας αντικειμενικής:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^{M} \omega_k R_k^P(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{R}\mathbf{x} \\ \text{υπό} \quad & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & \sum_{k=1}^{M} \omega_k = 1 \\ & x_i^{\min} \le x_i \le x_i^{\max}, \quad i = 1,2,\ldots,N \\ & \omega_k \ge 0, \quad k = 1,2,\ldots,M \end{aligned} \tag{4.2}$$

όπου $\mathbf{x}=[x_1\ x_2 \ldots x_N]^T$ η κατανομή του χαρτοφυλακίου στα περιουσιακά στοιχεία 1,2,...,N

και

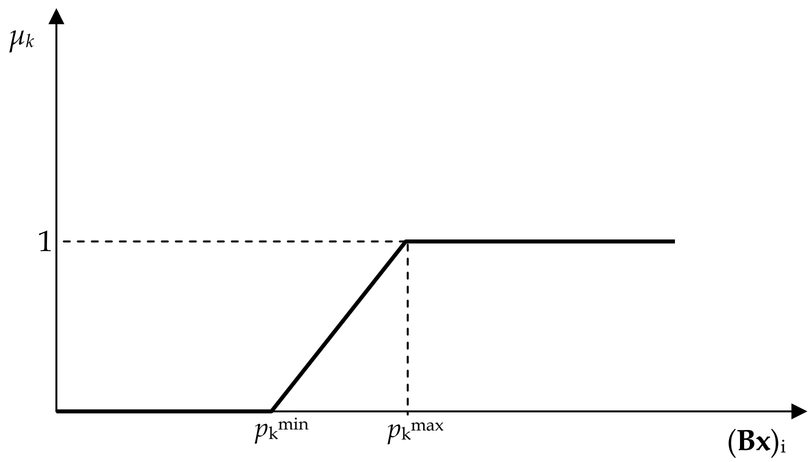
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{M1} & r_{M2} & \cdots & r_{MN} \end{bmatrix}$$

ο πίνακας των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων 1,2,...,N για τα διάφορα σενάρια της αγοράς 1,2,...,M.

Η κατανομή των βαρών ω_k γίνεται με βάση την εκτίμησή του αποφασίζοντος για το πλέον πιθανό σενάριο της αγοράς. Για το σενάριο που ο αποφασίζων θεωρεί πιο πιθανό επιδιώκονται τα μεγαλύτερα κέρδη. Η $\boldsymbol{\omega}$ αποτελεί ένα είδος υποκειμενικής κατανομής πιθανοτήτων στα διάφορα σενάρια της αγοράς, όπως αυτή περιγράφεται στο [Raiffa, 1968].

Με βάση την ανάλυση όμως που έγινε παραπάνω σχετικά με την φύση της πληροφόρησης που είναι διαθέσιμη σε μία χρηματαγορά, αντιλαμβανόμαστε τη δυσκολία που συναντά ο αποφασίζων στο να μεταφράσει τις πεποιθήσεις και τους στόχους του σε κατάλληλη κατανομή βαρών. Εξάλλου, μπορεί να επιθυμεί την μεγιστοποίηση των κερδών για δεδομένα σενάρια της αγοράς σε συνδυασμό όμως με προστασία του χαρτοφυλακίου του έναντι κάποιων άλλων δυσμενών σεναρίων. Το τελευταίο επιτυγχάνεται με την εξασφάλιση ενός minimum απολαβών για τα δυσμενή σενάρια της αγοράς.

Η θεωρία των ασαφών συνόλων δύναται να εκφράσει τις παραπάνω επιδιώξεις και κυρίως να ενσωματώσει τις ασαφείς προτιμήσεις και πεποιθήσεις του αποφασίζοντα. Συγκεκριμένα, καθορίζοντας ένα ελάχιστο και ένα μέγιστο επίπεδο επιθυμητών απολαβών $p_k^{\min}$ και $p_k^{\max}$ για κάθε σενάριο k της αγοράς της, μπορεί ο αποφασίζων να εκφράσει τους στόχους του υιοθετώντας μία γραμμική συνάρτηση συμμετοχής $\mu_k(R_k(\mathbf{x}))$ όπως φαίνεται και στο σχ.4.1.



Σχήμα 4.1 Η ικανοποίηση του αποφασίζοντα ανάλογα με την απόδοση του χαρτοφυλακίου για το σενάριο k της αγοράς

Η παραπάνω συνάρτηση εκφράζει την προτίμηση που δείχνει ο αποφασίζων σε κάθε απόδοση του χαρτοφυλακίου αν το σενάριο *k* της αγοράς παρουσιαστεί. Στην περίπτωση της ασαφούς μοντελοποίησης κάθε δυνατός σχηματισμός χαρτοφυλακίου συμμετέχει με διαφορετικό βαθμό στην έννοια των ικανοποιητικών λύσεων του προβλήματος. Υιοθετώντας τον παραπάνω φορμαλισμό το πρόβλημα (4.1) δύναται να εκφραστεί ως ένα πρόβλημα γραμμικού maxmin ασαφούς προγραμματισμού της μορφής (3.23):

$$\begin{array}{ll} \max & \lambda \\ \text{υπό} & \mu(R_k^P(\mathbf{x})) \geq \lambda, \quad k = 1,2,\ldots,M \\ & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, \quad i = 1,2,\ldots,N \\ & 0 < \lambda \leq 1 \end{array} \tag{4.3}$$

Για σενάρια της αγοράς τα οποία ο αποφασίζων θεωρεί ως τα πλέον πιθανά θέτει υψηλούς στόχους ενώ για τα υπόλοιπα προσπαθεί να εξασφαλίσει ένα minimum απολαβών. Η maxmin κατάστρωση του προβλήματος εγγυάται την εύρεση κατανομής χαρτοφυλακίου που καλύπτει τις παραπάνω απαιτήσεις.

4.2. Ομολογίες[1]

Στην προσπάθεια να επιδείξουμε την εφαρμογή της ασαφούς λογικής στο πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου επιλέξαμε την περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου που συντίθεται από ομόλογα του ελληνικού δημοσίου, τα οποία εκδίδει η Τράπεζα της Ελλάδος. Βασικό κίνητρο για την επιλογή αυτού του τύπου χρεογράφου προς υλοποίηση της ασαφούς μεθοδολογίας είναι ο μικρός αριθμός μελετών που έχουν δημοσιευθεί πάνω σε αυτά. Οι μετοχές και άλλα χρεόγραφα υψηλού κινδύνου φαίνεται να προσελκύουν το ενδιαφέρον της πλειοψηφίας των μελετητών στον ελλαδικό χώρο. Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένα στοιχεία θεωρίας των ομολόγων προκειμένου να βοηθήσουμε τον αναγνώστη να κατανοήσει και να αξιολογήσει καλύτερα την εφαρμογή που ακολουθεί.

4.2.1. Γενικά.

Ομολογία (*Bond*) είναι ένας γενικός όρος για ασφαλισμένο ή ανασφάλιστο εμπορεύσιμο πιστωτικό εργαλείο, το οποίο αποφέρει τόκους ή έκπτωση (δηλ. διατίθεται σε χαμηλότερη τιμή (discount)) και δηλώνει την υποχρέωση αυτού που το εκδίδει να πληρώσει στον κάτοχό του α) τόκο για τα δανεισμένα κεφάλαια, συνήθως περιοδικά, και β) την ονομαστική αξία του ή άρτιο (par value) στη λήξη. Στην περίπτωση των ελληνικών κρατικών ομολόγων εκδίδουσα αρχή είναι το ελληνικό δημόσιο. Κάθε ομολογία χαρακτηρίζεται από τα εξής:

- **Ονομαστική αξία ή άρτιο (par /redemption value).**

Η ονομαστική αξία της ομολογίας είναι το ποσό που πληρώνεται από τον εκδότη της στο κάτοχό της, κατά την εξόφληση (redemption) της ομολογίας στη λήξη αυτής.

- **Τοκομερίδιο (coupon)**

Το ποσό του τόκου που καταβάλλεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα στον κάτοχο μίας ομολογίας. Εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό της ονομαστικής αξίας της ομολογίας (coupon rate).

- **Περίοδοι πληρωμής τοκομεριδίου (coupon rate periods)**

Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών πληρωμών τοκομεριδίου. Το διάστημα αυτό είναι συνήθως έξι μήνες ή ένας χρόνος. Η πληρωμή τοκομεριδίου γίνεται στις περισσότερες περιπτώσεις στο τέλος του διαστήματος. Η τελευταία πληρωμή τοκομεριδίου συμπίπτει με τη λήξη της ομολογίας.

---

[1] Η συγγραφή αυτού του τμήματος του κειμένου έγινε βάσει σημειώσεων που εκδίδονται από το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών Α.Ε..

- **Διάρκεια ζωής ομολογίας (maturity period)**

Ο χρόνος που μεσολαβεί από την ημερομηνία έκδοσης (issue date) μέχρι και την ημερομηνία λήξης (maturity date) της ομολογίας.

- **Τιμή ομολογίας (market price)**

Η τιμή διαπραγμάτευσης μίας ομολογίας στην αγορά. Εκφράζεται ως ποσοστό (%) της ονομαστικής αξίας. Αναφέρεται συνήθως και ως *καθαρή τιμή* (*clean price*) της ομολογίας.

Η ομολογίες χωρίζονται σε ομολογίες *σταθερού* (*fixed*) και *κυμαινόμενου* (*floating*) επιτοκίου. Η πρώτη κατηγορία ομολογιών (fixed-rate bonds) πληρώνει σταθερό τόκο μέχρι τη λήξη της ομολογίας. Ο τόκος αυτός υπολογίζεται ως ποσοστό της ονομαστικής αξίας της ομολογίας και πληρώνεται είτε στο τέλος της καθορισμένης περιόδου (coupon rate period) είτε στη λήξη της ομολογίας (περίπτωση ομολογιών μηδενικού τοκομεριδίου). Στη περίπτωση ομολογιών κυμαινόμενου επιτοκίου (floating-rate bonds) το ποσό του τόκου μεταβάλλεται και επαναπροσδιορίζεται (refixed) περιοδικά σύμφωνα με ένα τύπο. Οι πληρωμές τοκομεριδίου μίας ομολογίας κυμαινόμενου επιτοκίου γίνονται στις ημερομηνίες επαναπροσδιορισμού (refix dates) κατά της οποίες η ομολογία δύναται να εξαγοραστεί.

Από εδώ και στο εξής αναφερόμαστε σε ομολογίες σταθερού επιτοκίου με ετήσια πληρωμή τοκομεριδίου (1 έτος ≡ 360 ημέρες)..

4.2.2. Αποτίμηση μίας ομολογίας

Στη συνέχεια περιγράφουμε στοιχεία που χρησιμοποιούνται για την αποτίμηση της απόδοσης μίας ομολογίας.

- **Ακαθάριστη τιμή ομολογίας (dirty price)**

Η ακαθάριστη τιμή μίας ομολογίας υπολογίζεται ως η καθαρή τιμή της ομολογίας συν τους δεδουλευμένους τόκους από τότε που έγινε η τελευταία πληρωμή τοκομεριδίου. Η ακαθάριστη τιμή είναι το ποσό που ο αγοραστής μίας ομολογίας πληρώνει και ο πωλητής μίας ομολογίας εισπράττει σε μία αγοραπωλησία. Εκφράζεται και αυτή ως ποσοστό (%) της ονομαστικής αξίας.

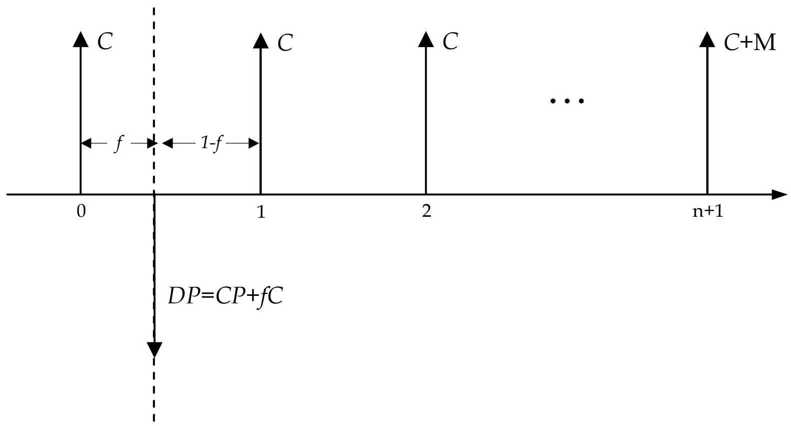
<u>Παράδειγμα 4.1.</u>
Υποθέτουμε ότι επιθυμούμε να αγοράσουμε σε κάποια χρονική στιγμή t μία ομολογία σταθερού επιτοκίου, της οποίας η τιμή στην αγορά (καθαρή τιμή) είναι 93.95% και το τοκομερίδιο 6%. Θεωρούμε ότι το τοκομερίδιο πληρώνεται ετησίως. Αν η τελευταία πληρωμή τοκομεριδίου έγινε 158 μέρες πριν τη χρονική στιγμή t τότε η τιμή αγοράς (ακαθάριστη τιμή) της ομολογίας θα είναι:

$$DP = 93.95 + 6\frac{158}{360} = 96.58\%$$

- **Απόδοση στη λήξη (yield to maturity)**

Απόδοση στη λήξη ονομάζουμε την απόδοση μίας ομολογίας αν αγοραστεί την παρούσα χρονική στιγμή και κρατηθεί μέχρι τη λήξη της. Η απόδοση στη λήξη αντιστοιχεί στην εσωτερική απόδοση (internal rate of return-IROR) της επένδυσης σε μία ομολογία, η οποία υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη την τρέχουσα τιμή της ομολογίας στην αγορά και τις μελλοντικές ταμειακές εισροές λόγω της καταβολής των τοκομεριδίων. Η απόδοση στη λήξη είναι, κατά κάποιο τρόπο, ένα δυνητικό μέτρο απόδοσης αφού προϋποθέτει ότι α) η ομολογία κρατείται μέχρι τη λήξη της και β) οι πληρωμές τοκομεριδίων δύναται να επανεπενδυθούν με επιτόκιο ίσο με την απόδοση στη λήξη.

Η απόδοση στη λήξη μίας ομολογίας μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο του εσωτερικού βαθμού απόδοσης για την περίπτωση μίας επένδυσης σε ομολογία. (σχ. 4.2, εξίσωση (4.4)).



Σχήμα 4.2 Ταμιακές ροές για μία επένδυση σε ομολογία σταθερού επιτοκίου

$$CP = -fC + \frac{C}{(1+r)^{1-f}} + \frac{C}{(1+r)^{2-f}} + \cdots + \frac{C+M}{(1+r)^{n+1-f}} \tag{4.4}$$

όπου f οι ημέρες που πέρασαν από την πληρωμή του τελευταίου τοκομεριδίου (διαιρεμένες δια 360), n τα έτη που υπολείπονται μέχρι τη λήξη της ομολογίας από την πληρωμή του επόμενου τοκομεριδίου, C το τοκομερίδιο, r η απόδοση στη λήξη , M η ονομαστική αξία της ομολογίας, CP και DP η καθαρή και η ακαθάριστη τιμή της.

<u>Παράδειγμα 4.2.</u>
Έστω η ομολογία του παραδείγματος 4.1. Υποθέτουμε ότι λήξη της είναι σε τρία έτη από την επόμενη πληρωμή τοκομεριδίου. Συνεπώς, f=158/360=0.44 και n=3. Με αντικατάσταση στην εξίσωση 4.4 προκύπτει με τη βοήθεια Η/Υ ότι η απόδοση στη λήξη της ομολογίας είναι r=8%.

□

Από τη μελέτη της εξίσωσης 4.4. μπορούν να εξαχθούν μερικά χρήσιμα πορίσματα που αφορούν τη σχέση τιμής (CP) και απόδοσης στη λήξη (r) μίας ομολογίας.

Πόρισμα 1.

Η τιμή και η απόδοση στη λήξη μίας συγκεκριμένης ομολογίας έχουν σχέση 1-1. Γνωρίζοντας τη μία μπορούμε κάλλιστα να υπολογίσουμε την άλλη.

Πόρισμα 2.

Αύξηση της τιμής μίας ομολογίας συνεπάγεται μείωση της απόδοσής της στη λήξη και αντίστροφα.

Πόρισμα 3

Μία μεταβολή της τιμής της ομολογίας επιφέρει μικρότερη κατά απόλυτη τιμή μεταβολή στην απόδοση στη λήξη.

Πόρισμα 4

Όσο αυξάνεται το τοκομερίδιο τόσο περισσότερο επηρεάζεται η απόδοση στη λήξη από μεταβολές στην τιμή μίας ομολογίας.

- **Τρέχουσα απόδοση (current yield)**

Η τρέχουσα απόδοση μίας ομολογίας ορίζεται ως το τοκομερίδιο προς την καθαρή τιμή της ομολογίας. Φανερώνει συνεπώς την ετήσια απόδοση από την κατοχή μίας ομολογίας που οφείλεται αποκλειστικά στο τοκομερίδιο.

- **Καμπύλη απόδοσης (yield curve)**

Παριστάνει την απόδοση στη λήξη μίας ομάδας ομολογιών συναρτήσει της διάρκειάς τους. Μία καμπύλη απόδοσης που στρέφει τα κοίλα προς τα άνω παρουσιάζει μεγαλύτερα βραχυπρόθεσμα από μακροπρόθεσμα επιτόκια και ονομάζεται αρνητική καμπύλη απόδοσης (negative yield curve). Αντίστροφα, μία καμπύλη απόδοσης που στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω παρουσιάζει μεγαλύτερα μακροπρόθεσμα από βραχυπρόθεσμα επιτόκια και ονομάζεται θετική καμπύλη απόδοσης (positive yield curve).

- **Συνολική απόδοση μίας ομολογίας.**

Η συνολική απόδοση μίας ομολογίας εξαρτάται από τρεις παράγοντες:

1. Περιοδικές πληρωμές τοκομεριδίου που ενδεχομένως καταβάλλονται κατά το διάστημα κατοχής της ομολογίας.
2. Επανεπένδυση των πληρωμών αυτών.
3. Μεταπωλήση της ομολογίας. Ανάλογα με το αν η τιμή της ομολογίας βρίσκεται πάνω ή κάτω από την τιμή αγοράς της η πώληση της επιφέρει αντίστοιχα κέρδη ή ζημίες.

<u>Παράδειγμα 4.3.</u>

Υποθέτουμε ότι κατέχουμε την ομολογία του παραδείγματος 4.1 για ένα έτος (360 ημέρες) και θέλουμε να αξιολογήσουμε την απόδοση αυτής της επένδυσης. Κέρδη από ενδεχόμενη επανεπένδυση του τόκου δεν λαμβάνονται υπόψη. Η τιμή αγοράς της ομολογίας τη χρονική στιγμή t′=t+360 είναι 95.64%. Εφόσον η πληρωμή τοκομεριδίου γίνεται ετησίως η ακαθάριστη τιμή της ομολογίας τη χρονική στιγμή t′ θα είναι:

$$DP(t') = 95.64 + 6\frac{158}{360} = 98.27\%$$

Μεταξύ όμως του χρονικών στιγμών t και t′ πραγματοποιείται πληρωμή τοκομεριδίου 6%. Συνεπώς, η απόδοση της επένδυσης θα είναι:

$$r = \frac{DP(t') + C - DP(t)}{DP(t)} = \frac{98.27 + 6 - 96.58}{96.58} = 0.08$$

4.3. Εφαρμογή[2]

Για τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου επιλέχθηκαν πέντε ομόλογα σταθερού τοκομεριδίου (από εδώ και στο εξής FXD) διάρκειας 3, 5, 7, 10 και 15 ετών αντίστοιχα και ένα έντοκο γραμμάτιο ελληνικού δημοσίου (από εδώ και στο εξής TRB) διάρκειας 12 μηνών.[3] Τα χαρακτηριστικά των τίτλων αυτών παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1.

Τύπος προϊόντος	TRB	FXB	FXB	FXB	FXB	FXB
Ημερομηνία έκδοσης	22/12/2000	22/01/1999	21/03/1997	21/03/1997	19/06/1997	20/05/1998
Ημερομηνία λήξης	22/12/2001	22/01/2002	21/03/2002	21/03/2004	19/06/2007	20/05/2013
Διάρκεια (έτη)	1	3	5	7	10	15
Τοκομερίδιο (%)	4.59	7.60	9.20	8.90	8.80	7.50

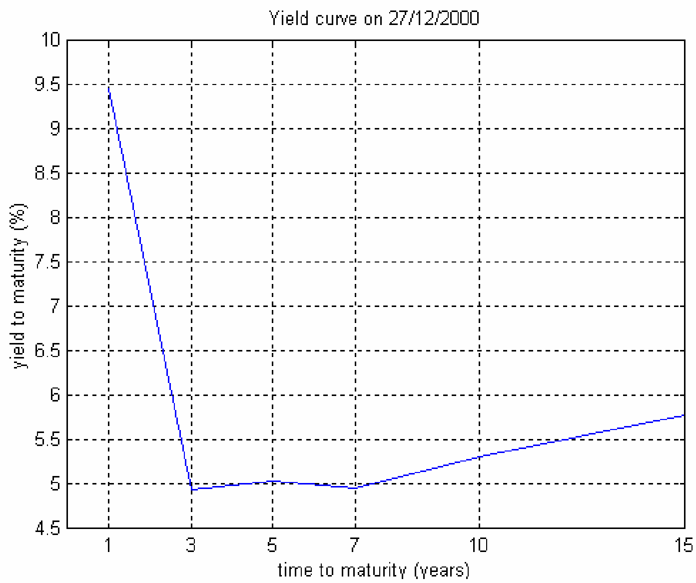
Πίνακας 4.1 Χαρακτηριστικά των τίτλων που χρησιμοποιούνται για τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου της εφαρμογής

Τιμές αποτίμησης αυτών των προϊόντων συλλέχθηκαν για το διάστημα από την ημερομηνία έκδοσής τους μέχρι και τις 10/04/2001. Βάσει αυτών υπολογίσαμε την απόδοση στη λήξη κάθε τίτλου (από εδώ και στο εξής ΑΣΛ) για κάθε ημερομηνία. Υποθέτουμε ότι ο επενδυτικός ορίζοντας είναι 3 μήνες. Ως ημερομηνία έναρξης και λήξης της επενδυτικής περιόδου θεωρήθηκε αντίστοιχα η 27/12/2000 και η 27/3/2001. Η καμπύλη απόδοσης για τις 27/12/2000 φαίνεται στο σχ.4.3.

---

[2] Για την κατάστρωση της εφαρμογής ακολουθήσαμε παρόμοια μεθοδολογία με εκείνη που παρουσιάζεται στο [Ramaswamy, (1998)].

[3] Στην πράξη η μόνη διαφορά του έντοκου γραμματίου από τα ομόλογα είναι ότι στη λήξη του ο κάτοχός του εισπράττει μόνο την ονομαστική αξία του γραμματίου και όχι το τοκομερίδιο.



Σχήμα 4.3 Η καμπύλη απόδοσης στις 27/12/2000.

Για την επιλογή του χαρτοφυλακίου θεωρούμε τρία δυνητικά σενάρια της αγοράς για τις 27/3/2001: «αισιόδοξο» (bullish), «ουδέτερο»(neutral) και «απαισιόδοξο» (bearish). Τα σενάρια αυτά δύναται να «μεταφραστούν» σε μετακινήσεις της καμπύλης απόδοσης, που αντιστοιχεί στις 27/12/2000, προς ανάλογη κατεύθυνση. Συγκεκριμένα, ένα αισιόδοξο για την πορεία της αγοράς σενάριο θα σήμαινε πτώση των επιτοκίων (άνοδο της καθαρής τιμής) και συνεπώς μετακίνηση της τρέχουσας καμπύλης απόδοσης προς τα κάτω. Αντιθέτως, ένα απαισιόδοξο για την πορεία της αγοράς σενάριο θα σήμαινε άνοδο των επιτοκίων (πτώση της καθαρής τιμής) και μετακίνηση της καμπύλης απόδοσης προς τα πάνω. Το ουδέτερο σενάριο μεταφράζεται σε «ελαφρά» παράλληλη μετατόπιση της καμπύλης απόδοσης. Στην εφαρμογή μας για κάθε σενάριο της αγοράς υποθέσαμε τρεις δυνητικές καμπύλες αποδόσεις για τις 27/3/2001. Οι καμπύλες αυτές υπολογίστηκαν ως ακολούθως:

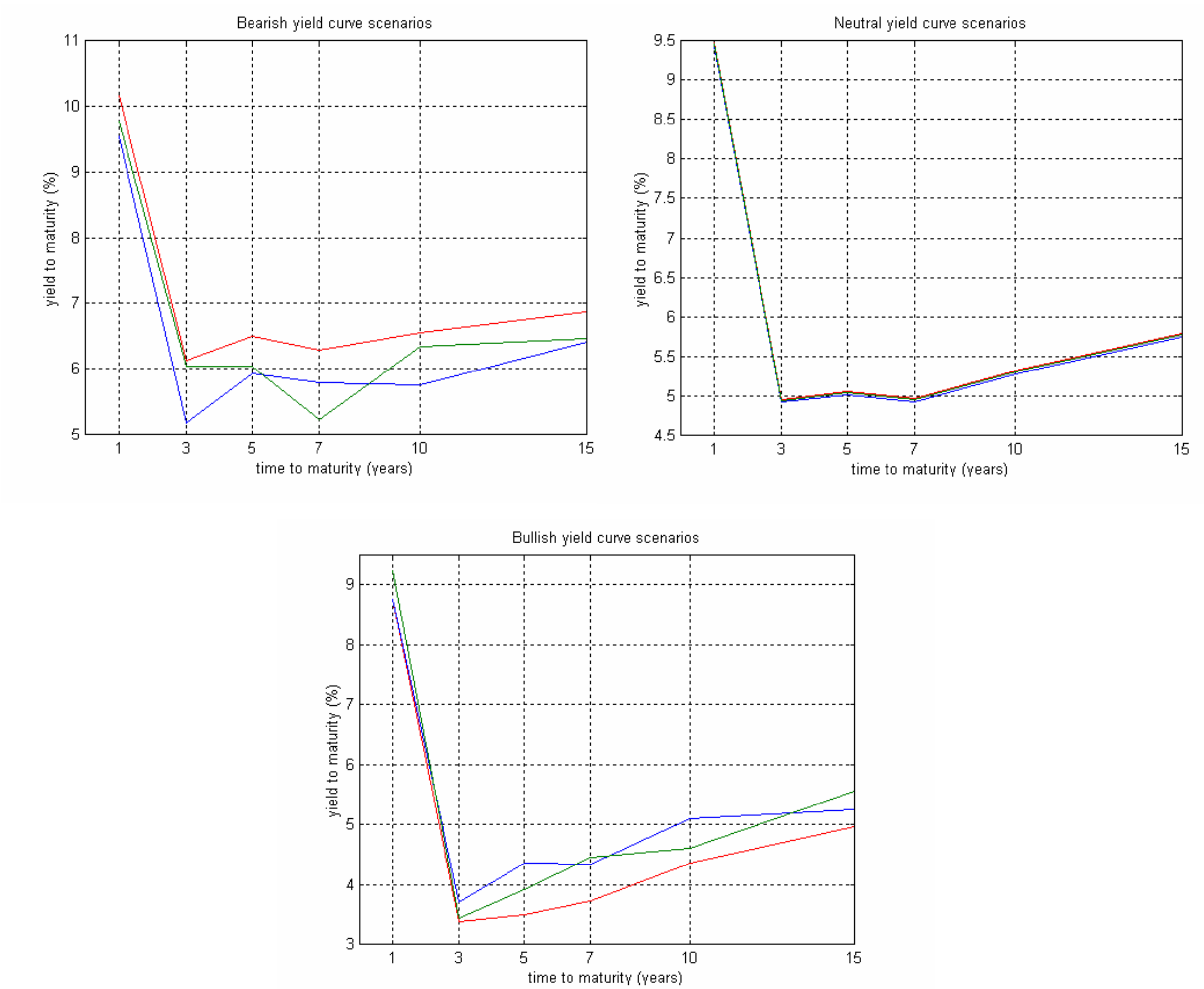
Με βάση τα δεδομένα για τις τιμές αποτίμησης και κάνοντας χρήση ενός «κυλιόμενου παραθύρου» (moving window) εύρους τριών μηνών βρήκαμε τη μέγιστη και τη ελάχιστη 3-μηνιαία μεταβολή της ΑΣΛ για κάθε προϊόν ξεχωριστά. Τα αποτελέσματα αυτής της διαδικασίας φαίνονται στον πίνακα 4.2.

Διάρκεια προϊόντος (έτη)	1	3	5	7	10	15
Δymax (%)	+0.700 [4]	1.180	1.460	1.340	1.240	1.100
Δymin(%)	-0.700	-1.560	-1.540	-1.230	-0.940	-0.810

Πίνακας 4.2

[4] Οι τιμές του έντοκου γραμματίου ακολουθούσαν συνεχώς ανοδική πορεία στο χρονικό διάστημα στο οποίο εξετάστηκε, με αποτέλεσμα Δy≤0. Απουσία λοιπόν άλλης τιμής κάναμε την παραδοχή ότι $\Delta y_{max} = -\Delta y_{min}$.

Οι καμπύλες απόδοσης υπολογίστηκαν στη συνέχεια ενεργοποιώντας γεννήτρια τυχαίων ομοιόμορφων αριθμών διαδοχικά στα διαστήματα: $[\mathbf{y}^*, \mathbf{y}^*+\Delta\mathbf{y}_{max}]$, $[\mathbf{y}^*-0.02\%, \mathbf{y}^*+0.02\%]$ και $[\mathbf{y}^*, \mathbf{y}^*+\Delta\mathbf{y}_{min}]$, ανάλογα με το αν πρόκειται για απαισιόδοξο, ουδέτερο ή αισιόδοξο σενάριο της αγοράς ($\mathbf{y}^*$ η καμπύλη απόδοσης στην αρχή της επενδυτικής περιόδου). Οι καμπύλες απόδοσης που προέκυψαν για κάθε σενάριο φαίνονται στα σχ.4.4.



Σχήμα 4.4: Οι καμπύλες απόδοσης για μία απαισιόδοξη, ουδέτερη και αισιόδοξη αντίστοιχα πρόβλεψη για την πορεία της αγοράς.

Το χαρτοφυλάκιο της εφαρμογής μας επιλέγεται με βάση τις τιμές των τίτλων στην αρχή της επενδυτικής περιόδου. Στη λήξη της επενδυτικής περιόδου η αξία του αποτιμάται εκ νέου για κάθε ενδεχόμενο σενάριο. Για τον υπολογισμό της απόδοσης της επένδυσης λαμβάνονται υπόψη μόνο οι πληρωμές τοκομεριδίων και τα κέρδη ή οι ζημίες λόγω ανόδου ή πτώσης των τιμών των τίτλων. Ενδεχόμενες ευκαιρίες επανεπένδυσης των ποσών από την πληρωμή τοκομεριδίων δεν εξετάζονται. Για μία καλύτερη εκτίμηση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αφαιρούμε από τη συνολική απόδοση το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk-free rate). Ως επιτόκιο χωρίς κίνδυνο λαμβάνεται η τιμή διαπραγμάτευσης του 3-μηνιαίου Athibid[5] στις 27/12/2000. Για εκείνη την ημερομηνία η τιμή του 3-μηνιαίου Athibid ήταν 4.79% ετησίως.

Έχοντας τα παραπάνω στοιχεία δύναται κανείς να υπολογίσει κανείς την απόδοση άνω του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο που επιφέρει η επένδυση μίας χρηματικής μονάδας σε καθένα από τους παραπάνω τίτλους για κάθε μία από τις παραπάνω καμπύλες απόδοσης. Τα αποτελέσματα φαίνεται στον πίνακα 4 .3. Οι αποδόσεις αναφέρονται σε ετήσια βάση και %.

Διάρκεια τίτλου (έτη) / Σενάρια	**1**	**3**	**5**	**7**	**10**	**15**
Bearish 1	2.09	-3.72	-4.90	-12.83	-21.99	-31.75
Bearish 2	3.18	-3.48	-3.33	-2.70	-18.50	-20.04
Bearish 3	3.79	-0.96	-2.95	-8.10	-8.11	-18.29
Neutral 1	3.99	-0.30	0.05	-0.15	0.03	0.23
Neutral 2	4.05	-0.25	0.12	0.05	0.41	0.86
Neutral 3	4.10	-0.19	0.19	0.24	0.78	1.49
Bullish 1	6.00	3.44	2.51	6.12	4.19	17.68
Bullish 2	4.67	4.26	4.07	5.12	13.86	7.86
Bullish 3	6.02	4.44	5.57	12.44	18.61	27.49

Πίνακας 4.3 Η (%) απόδοση του κάθε τίτλου για τα επιμέρους σενάρια της αγοράς.

Το σύμβολο (-) στην απόδοση αναφέρεται σε ζημία. Από τη μελέτη των τιμών του πίνακα 4.3 συμπεραίνουμε ότι το έντοκο γραμμάτιο είναι ο μοναδικός τίτλος που επιφέρει κέρδη για κάθε σενάριο της αγοράς. Οι υπόλοιποι τίτλοι δείχνουν μεγαλύτερη ευαισθησία στις διακυμάνσεις της ΑΣΛ. Έχοντας τα παραπάνω στοιχεία μπορούμε να προχωρήσουμε στην κατάστρωση του πολυκριτήριου προβλήματος βελτιστοποίησης.

Οι τιμές των r_{ki} δίνονται από τον πίνακα 4.3 (τα σενάρια αριθμούνται με τη σειρά που παρουσιάζονται). Επιπλέον, θέτουμε για i=1,2,…,N, $x_i^{\min}=0$ και $x_i^{\max}=0.5$, με σκοπό να περιορίσουμε τον κίνδυνο που συνεπάγεται η «μονοπώληση» του χαρτοφυλακίου από ένα χρεόγραφο. Έτσι, το πρόβλημα βελτιστοποίησης (4.3) παίρνει στην προκειμένη περίπτωση τη μορφή:

[5] Το Athibid είναι το επιτόκιο δανεισμού που εκδίδει η Τράπεζα της Ελλάδος, αντίστοιχο του Libor που εκδίδει η Τράπεζα της Αγγλίας. Η τιμή του Athibid διαπραγματεύεται ημερησίως και ποικίλει ανάλογα με το χρόνο δανεισμού. Ο τελευταίος κυμαίνεται από 1 εώς και 12 μήνες

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{υπό} \quad & \mu_k(R_k^P(\mathbf{x})) \geq \lambda, \quad k = 1,2,\ldots,M \\ & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq 0.5, \quad i = 1,2,\ldots,N \\ & 0 < \lambda \leq 1 \end{aligned} \tag{4.5α}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{υπό} \quad & \frac{(\mathbf{Rx})_k - p_k^{\min}}{p_k^{\max} - p_k^{\min}} \geq \lambda, \quad k = 1,2,\ldots,M \\ & \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq 0.5, \quad i = 1,2,\ldots,N \\ & 0 < \lambda \leq 1 \end{aligned} \tag{4.5β}$$

Απομένει ο καθορισμός των $p_k^{\min}$ και $p_k^{\max}$, δηλ. της ελάχιστης και της μέγιστης επιθυμητής απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Στην § 3.4.1 περιγράφεται ένας τρόπος απόδοσης «λογικών» τιμών στα $p_k^{\min}$ και $p_k^{\max}$ σύμφωνα με τον οποίο:

$$\begin{gathered} p_k^{\max} \triangleq R_k^P(\mathbf{x}_k^*) = \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{I}} R_k^P(\mathbf{x}) \\ \text{και} \\ p_k^{\min} \triangleq \min\{R_1^P(\mathbf{x}_1^*), R_2^P(\mathbf{x}_2^*), \ldots, R_{i-1}^P(\mathbf{x}_{i-1}^*), R_{i+1}^P(\mathbf{x}_{i+1}^*), \ldots, R_M^P(\mathbf{x}_M^*)\} \end{gathered} \tag{4.6}$$

όπου $\mathbf{x}_k^*$ η βέλτιστη λύση του γραμμικού προβλήματος που προκύπτει αν θεωρήσουμε μία μόνο αντικειμενική συνάρτηση, την $R_k^P(\mathbf{x}_k^*)$ και $\mathfrak{I}$ το σύνολο των εφικτών λύσεων του προβλήματος 4.5. Επιλύνοντας καθένα από αυτά τα προβλήματα για το μοντέλο 4.5 παίρνουμε τα αποτελέσματα του πίνακα 4.4.

Διάρκεια Τίτλου (έτη) / Σενάρια	Ελάχιστη αποδεκτή απόδοση (%)	Μέγιστη απόδοση (%)
Bearish 1	-26.87	-0.82
Bearish 2	-19.27	0.24
Bearish 3	-13.20	1.42
Neutral 1	0.04	2.11
Neutral 2	0.45	2.45
Neutral 3	0.87	2.80
Bullish 1	4.72	11.90
Bullish 2	4.46	10.86
Bullish 3	5.23	23.05

Πίνακας 4.4

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωσή μας η μέθοδος των «λογικών» τιμών δεν μπορεί να εφαρμοστεί εξαιτίας του ότι οι στόχοι που τίθενται πρέπει να είναι κοινοί για όλες τις επιμέρους περιπτώσεις των διαφόρων σεναρίων. Εξάλλου, ένας επενδυτής θα επιθυμούσε όχι μόνο υψηλές αποδόσεις αλλά και κάλυψη απέναντι στον κίνδυνο. Όσο περισσότερο αρνητική είναι η εικόνα του επενδυτή για την αγορά τόσο μεγαλύτερη κάλυψη ζητά. Στην εφαρμογή μας θεωρούμε δύο περιπτώσεις αποφασιζόντων, με «αισιόδοξη» και «απαισιόδοξη» εικόνα για την πορεία της αγοράς αντίστοιχα. Οι δύο διαφορετικές οπτικές μπορούν να μετατραπούν στους στόχους απόδοσης που παρουσιάζονται στους πίνακες 4.5 & 4.6.

Γωνιακά Σημεία ΑΣ / Σενάρια	$p_k^{\min}$ (%)	$p_k^{\max}$ (%)
Bearish	-1	2
Neutral	0	3
Bullish	0	3

Πίνακας 4.5 Τα «γωνιακά» σημεία των συναρτήσεων συμμετοχής για μία απαισιόδοξη πρόβλεψη.

Γωνιακά Σημεία ΑΣ / Σενάρια	$p_k^{\min}$ (%)	$p_k^{\max}$ (%)
Bearish	-5	0
Neutral	0	5
Bullish	0	10

Πίνακας 4.6 Τα «γωνιακά» σημεία των συναρτήσεων συμμετοχής για μία αισιόδοξη πρόβλεψη.

Η σύνθεση του χαρτοφυλακίου και τα αποτελέσματα της μεθόδου για τις δύο διαφορετικές οπτικές παρουσιάζονται στους ακόλουθους πίνακες 4.7 & 4.8.

Σενάρια	**Αποδόσεις (%)**	**Βαθμός ικανοποίησης**
Bearish 1	-0.82	0.061
Bearish 2	-0.15	0.282
Bearish 3	1.42	0.806
Neutral 1	1.84	0.614
Neutral 2	1.90	0.633
Neutral 3	1.96	0.653
Bullish 1	4.72	1.000
Bullish 2	4.46	1.000
Bullish 3	5.23	1.000
Σύνθεση χαρτοφυλακίου		
1 έτους TRB	0.5	
3 ετών FXB	0.5	
5 ετών FXB	0	
7 ετών FXB	0	
10 ετών FXB	0	
15 ετών FXB	0	

Πίνακας 4.7 Η σύνθεση του χαρτοφυλακίου και τα αποτελέσματα της μεθόδου για την απαισιόδοξη πρόβλεψη.

Σενάρια	**Αποδόσεις (%)**	**Βαθμός ικανοποίησης**
Bearish 1	-2.97	0.406
Bearish 2	-1.05	0.790
Bearish 3	-0.47	0.905
Neutral 1	2.03	0.406
Neutral 2	2.13	0.425
Neutral 3	2.22	0.445
Bullish 1	5.13	0.514
Bullish 2	4.59	0.459
Bullish 3	7.07	0.707
Σύνθεση χαρτοφυλακίου		
1 έτους TRB	0.500	
3 ετών FXB	0.000	
5 ετών FXB	0.442	
7 ετών FXB	0	
10 ετών FXB	0	
15 ετών FXB	0.058	

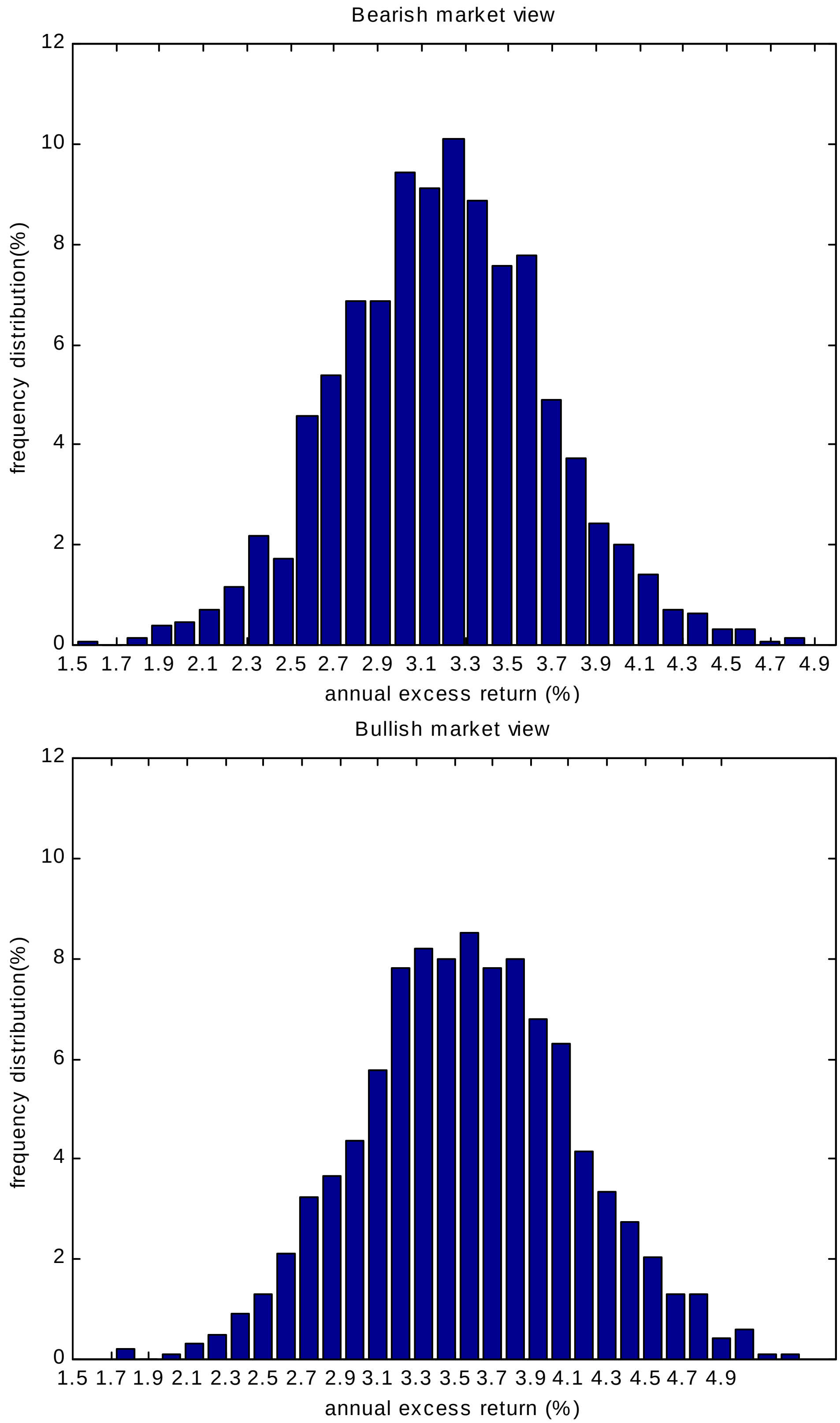
Πίνακας 4.8 Η σύνθεση του χαρτοφυλακίου και τα αποτελέσματα της μεθόδου για την αισιόδοξη πρόβλεψη.

Προκειμένου να ελέγξουμε την αξιοπιστία των παραπάνω αποτελεσμάτων πραγματοποιήσαμε προσομοίωση κατά την οποία δημιουργήθηκαν 1000 συνολικά σενάρια καμπυλών απόδοσης. Τα τελευταία υποθέσαμε ότι ακολουθούν κανονική κατανομή $N(\mathbf{y^*+\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$, όπου **μ** και **σ** η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των 3-μηνιαίων μεταβολών της ΑΣΛ των χρησιμοποιηθέντων τίτλων και **y*** το διάνυσμα των ΑΣΛ στις 27/12/2000 (ημερομηνία έναρξης της επενδυτικής περιόδου). Οι τιμές των **μ** και **σ** παρουσιάζονται στον πίνακα 4.9.

Διάρκεια τίτλου (έτη) / **Κατανομή**	**1**	**3**	**5**	**7**	**10**	**15**
Μέση τιμή	- 0.0057	- 0.0034	- 0.0033	- 0.0021	- 0.0014	- 0.0008
Τυπική απόκλιση	0.0010	0.0032	0.0030	0.0026	0.0023	0.0016

Πίνακας 4.9

Η κατανομές των αποδόσεων που προέκυψαν από την προσομοίωση για τις δύο παραπάνω συνθέσεις χαρτοφυλακίου φαίνονται στο σχ.4.5.



Σχήμα 4.5 Η κατανομή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου για μία απαισιόδοξη και μία αισιόδοξη εικόνα για την πορεία της αγοράς.

Από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης υπολογίσαμε ότι η σύνθεση του χαρτοφυλακίου εγγυάται, με βαθμό εμπιστοσύνης 95%, απόδοση άνω του Athibid ίση με:
α) 2.40% για την απαισιόδοξη και
β) 2.65% για την αισιόδοξη πρόβλεψη για την πορεία της αγοράς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο σημείο αυτό θα ήταν σκόπιμο να κάνουμε μία αξιολόγηση της εφαρμογής της θεωρίας του ασαφούς προγραμματισμού στο πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου.

Αρχικά, αντιλαμβανόμαστε πως βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι αξιοποιεί ποιοτικής μορφής πληροφορία. Πράγματι, το μόνο που ζητείται από τον αποφασίζοντα είναι να δηλώσει τα όρια ικανοποίησης για κάθε σενάριο της αγοράς. Ανάλογα με τους στόχους που θέτει δύναται να αντισταθμίσει την πραγματοποίηση κερδών με την προστασία έναντι του κινδύνου. Έτσι, υψηλοί στόχοι για κάποιο σενάριο δηλώνουν την πεποίθηση του αποφασίζοντα ότι το σενάριο αυτό είναι και το πλέον πιθανό και «ωθούν» τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου προς εκείνη της κατεύθυνση κατά την οποία επιτυγχάνονται μεγαλύτερες αποδόσεις για το δεδομένο σενάριο. Για παράδειγμα, η σύνθεση του χαρτοφυλακίου που παρουσιάζεται στον πίνακα 4.8 αποδίδει υψηλά σε αισιόδοξα σενάρια. Εντούτοις, δεν παρέχει ικανοποιητική προστασία για το ενδεχόμενο εμφάνισης ενός δυσμενούς σεναρίου. Εν αντιθέσει, το χαρτοφυλάκιο του πίνακα 4.7 παρουσιάζει μικρότερες διακυμάνσεις στην απόδοση. Τα αποτελέσματα των πινάκων 4.7 & 4.8 συμβαδίζουν σε κάθε περίπτωση με τις επιδιώξεις του αποφασίζοντα.

Ενδιαφέρον θα είχε να μελετήσει κανείς την ευαισθησία των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου ως προς τη μεταβολή των τιμών των κατωφλίων ικανοποίησης του αποφασίζοντα, $p_k^{\min}$ και $p_k^{\max}$. Είναι βέβαιο ότι η μεταβολή αυτή επιφέρει αλλαγές στις παραμέτρους του μοντέλου (4.5) και επομένως επηρεάζει τη διαμόρφωση του χαρτοφυλακίου. Πάντως, για μία ανάλυση ευαισθησίας θα πρέπει κανείς να διαχωρίσει τις περιπτώσεις στόχων που ικανοποιούνται πλήρως από εκείνες που ικανοποιούνται μερικώς και να εντοπίσει το στόχο που διαμορφώνει τη συνολική ικανοποίηση.

Εναλλακτικές της maxmin προσεγγίσεις ασαφούς προγραμματισμού που αναφέρονται στο κεφάλαιο 3, θα μπορούσαν επίσης να χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εφαρμογή. Τέτοιες είναι ο ασαφής προγραμματισμός με χρήση του τελεστή του γινομένου, η υιοθέτηση μη γραμμικών ασαφών στόχων και ο προγραμματισμός δυνατότητας. Επιπλέον, ενδιαφέρον θα είχε να εξετάσει κανείς την εφαρμογή ενός αντισταθμιστικού τελεστή, όπως εκείνου που παρουσιάζεται στην § 2.2.4, για τη συνεκτίμηση των επιμέρους στόχων. Πάντως, η χαρακτηριστική προσήλωση της maxmin μεθόδου στην απαισιόδοξη οπτική του προβλήματος, γεγονός που αποτελεί μειονέκτημα για άλλες εφαρμογές, εδώ φαίνεται να ταιριάζει με τη φιλοσοφία της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου που είναι η ταυτόχρονη επίτευξη κέρδους και προστασίας έναντι του κινδύνου.

Αναφορικά με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, μία γενική παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι και οι δύο συνθέσεις του χαρτοφυλακίου επιφέρουν μεγαλύτερη απόδοση από το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Επιπλέον, επιτυγχάνουν να εξασφαλίσουν ένα minimum απολαβών για τα διάφορα σενάρια της αγοράς Εντούτοις, η κατανομή των αποδόσεων για μία απαισιόδοξη πρόβλεψη έχει μικρότερη διασπορά από εκείνη που αντιστοιχεί σε μία αισιόδοξη πρόβλεψη για την πορεία της αγορά. Το τελευταίο ήταν αναμενόμενο αν αναλογιστούμε τις επιδιώξεις του αποφασίζοντα στην κάθε περίπτωση..

Ωστόσο, στη βάση και μόνο των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης λίγα μπορούν να ειπωθούν για την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου. Οι αποδόσεις που επιτυγχάνονται εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες όπως η φύση των τίτλων που επιλέχθηκαν για τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου, η μέθοδος επιλογής των καμπυλών απόδοσης που χρησιμοποιούνται για την σύνθεση του χαρτοφυλακίου, η κατανομή των καμπυλών απόδοσης στην προσομοίωση, η χρονική περίοδος στην οποία πραγματοποιείται η επένδυση κ.α. Όπως προκύπτει από τους πίνακες 4.7 & 4.8, οι παραπάνω τίτλοι δε δύνανται να εξασφαλίσουν βέλτιστη αντιστάθμιση κινδύνου (hedging) για όλα τα σενάρια της αγοράς. Για μία αποτελεσματική σύνθεση χαρτοφυλακίου, είναι απαραίτητη η υιοθέτηση στρατηγικών αντιστάθμισης κινδύνου. Ενδεικτικές στρατηγικές που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εφαρμογή είναι:

α) η ενσωμάτωση και άλλων τίτλων στο χαρτοφυλάκιο και η διαρκής αναπροσαρμογή τους - περίπτωση δυναμικής αντιστάθμισης κινδύνου (dynamic hedging) [Michalopoulos & Zopounidis, (1997)]

β) η χρήση παραγώγων επί των ομολογιών-συνδυασμός συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (future) και ομολογιών ή συνδυασμός δικαιωμάτων αγοράς, διακαιωμάτων πώλησης(call option και put option) και ομολογιών.

Στις περιπτώσεις (α) και (β) η προστασία έναντι του κινδύνου μπορεί να συνδυαστεί με την επίτευξη μεγαλύτερων αποδόσεων. Πάντως, η σύνθεση χαρτοφυλακίου με στόχο την κερδοφορία αποτελεί δύσκολο έργο αφού απαιτεί καλή γνώση των διαθέσιμων σε μία αγορά τίτλων και προσεκτική παρακολούθηση της πορείας των τιμών τους. Κάτι τέτοιο όμως θα ήταν πέρα από τη σκοπιμότητα της παρούσας εργασίας. Στόχος της εφαρμογής δεν ήταν να προτείνει την ασαφή λογική ως αποκλειστικό εργαλείο επιλογής χαρτοφυλακίου αλλά, κυρίως, να επιδείξει τη δυνατότητα της μεθόδου να «μεταφράζει» τις επιδιώξεις και τις πεποιθήσεις του αποφασίζοντα σε όρους κατανομής τίτλων στο χαρτοφυλάκιο.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΛΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

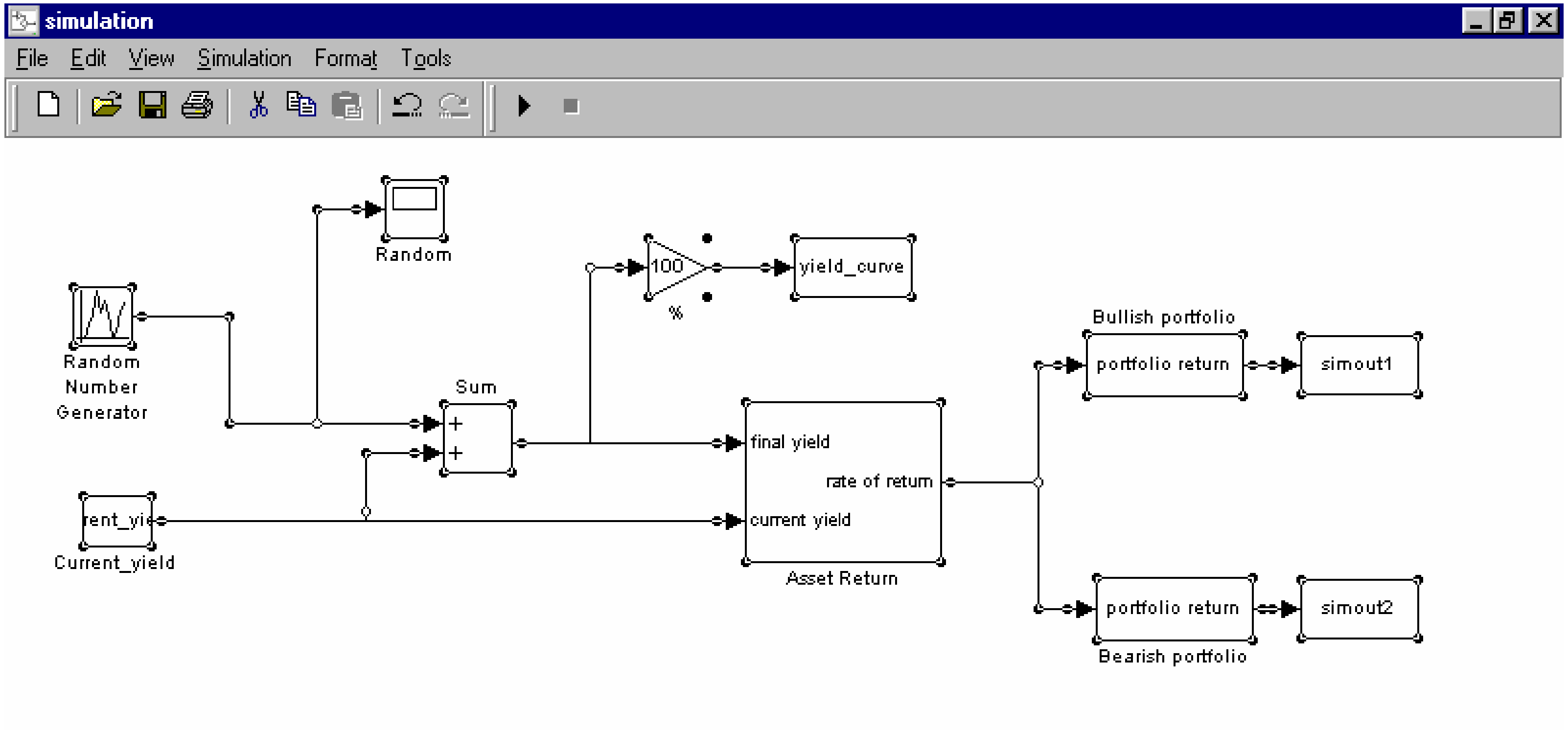
Το βασικό κομμάτι της εφαρμογής του κεφάλαιου 4 υλοποιήθκε στο περιβάλλον του Matlab©5.2.1 της Mathworks. Μία σειρά από υπορουτίνες (M-files) που προγραμματίστηκαν σε γλώσσα Matlab (M-files) ανέλαβαν την πραγματοποίηση των υπολογισμών που αναφέρονται. Στον πίνακα Π.1 παρατίθεται ο κατάλογος των υπορουτίνων που χρησιμοποιήθηκαν στην εφαρμογή, ενώ περιγράφονται συνοπτικά η λειτουργία της κάθε μίας καθώς και τα δεδομένα εισόδου και εξόδου.

Τα δεδομένα της εφαρμογής (χαρακτηριστικά τίτλων, τιμές αποτίμησης κ.α.) δόθηκαν σε μορφή Excel. Μία πρώτη επεξεργασία των δεδομένων αυτών (υπολογισμοί μέσων όρων, διακυμάνσεων τιμών, τυπικών αποκλίσεων κ.α) έγινε με το πρόγραμμα αυτό.

Η προσομοίωση πιθανών σεναρίων της αγοράς έγινε στο Simulink© 2.2.1 της Mathworks. Στο σχήμα Π-1 φαίνεται το λογικό διάγραμμα της προσομοίωσης. Simout 1 και Simout 2 είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου που δομείται με βάση μία αισιόδοξη και μία απαισιόδοξη αντίστοιχα πρόβλεψη για την πορεία της αγοράς.

<table>
<tr><th>Ρουτίνα</th><th>Λειτουργία</th><th colspan="2">Δεδομένα εισόδου</th><th colspan="2">Δεδομένα εξόδου</th></tr>
<tr><td rowspan="5">rscenarios.m</td><td rowspan="5">Γεννήτρια σεναρίων για την επιλογή του χαρτοφυλακίου</td><td>current_yield</td><td>Η απόδοση των τίτλων στην ημερομηνία έναρξης της επενδυτικής περιόδου</td><td rowspan="5">bearish_yield
neutral_yield
bullish_yield</td><td rowspan="5">Τα σενάρια καμπυλών απόδοσης</td></tr>
<tr><td>current_date</td><td>Ημερομηνία έναρξης της επενδυτικής περιόδου</td></tr>
<tr><td>end_date</td><td>Ημερομηνία λήξης της επενδυτικής περιόδου</td></tr>
<tr><td>dmax</td><td>Μέγιστη μεταβολή της απόδοσης των τίτλων</td></tr>
<tr><td>dmin</td><td>Ελάχιστη μεταβολή της απόδοσης των τίτλων</td></tr>
<tr><td>retcalc.m</td><td>Υπολογίζει την ετήσια αποδόση άνω του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο για την επένδυση μίας χρηματικής μονάδας σε κάθε τίτλο και για κάθε σενάριο</td><td colspan="2">Τα δεδομένα εξόδου της rscenarios και η τιμή του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο (athibid)</td><td colspan="2">Οι πίνακες C, A και b του πολυκριτήριου προβλήματος (4.5)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">fglp.m</td><td rowspan="2">Επιλύει το γραμμικό πρόβλημα maxmin ασαφούς προγραμματισμού (3.23)</td><td>C,A,b</td><td>Τα C, A και b όπως ορίζονται στο πρόβλημα 3.23</td><td rowspan="2">lambda</td><td rowspan="2">Η συνολική ικανοποίηση των στόχων</td></tr>
<tr><td>param</td><td>Τα γωνιακά σημεία των ασαφών στόχων</td></tr>
<tr><td rowspan="2">portselect.m</td><td rowspan="2">Υπολογίζει τη σύνθεση χαρτοφυλακίου κάνοντας χρήση επιπλέον της fglp</td><td rowspan="2">param</td><td rowspan="2">Τα γωνιακά σημεία των ασαφών στόχων</td><td>w</td><td>Το διάνυσμα κατανομής των τίτλων στο χαρτοφυλάκιο</td></tr>
<tr><td>lambda</td><td>Η συνολική ικανοποίηση</td></tr>
<tr><td rowspan="3">histogram.m</td><td rowspan="3">Υπολογίζει την κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου</td><td>simout</td><td>Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης</td><td rowspan="3">y</td><td rowspan="3">Η απόδοση του χαρτοφυλακίου που αντιστοιχεί σε a% βαθμό εμπιστοσύνης</td></tr>
<tr><td>a</td><td>βαθμός εμπιστοσύνης</td></tr>
<tr><td>nbins</td><td>Αριθμός υποδιαιρέσεων του διαστήματος των δυνατών αποδόσεων</td></tr>
</table>

Πίνακας Π.1 Περιγραφή των ρουτινών που χρησιμοποιήθηκαν για την υλοποίηση της εφαρμογής.



Σχήμα Π.2 Το λογικό διάγραμμα της προσομοίωσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ackoff R.L., (1974), "Beyond Problem Solving", *General systems*.

Baas S. M. & Kwakernaak H., (1977), "Rating and Ranking of Multiple-Aspect Alternatives Using Fuzzy Sets", *Automatica* **13**, σελ. 47-58.

Bellman R.E., Zadeh L.A., (1970), "Decision-Making in a Fuzzy Environment", *Management Sciences* **17**, No. 4, σελ. 141-164.

Benayoun R., De Montgofier J., Tergny J., Larichev O., (1971), "Linear Programming with Multiple Objective Functions, Step Method (STEM)", *Mathematical Programming* **1**, σελ. 366-475.

Carlsson C., (1984), "On the Relevance of Fuzzy Sets in Management Science Methodology", *Studies in Management Sciences* **20**, σελ. 29-44, Gaines B. R., Zadeh L.A., Zimmermann H. J. edits., Elsevier Science Publishers B.V. (North- Holland).

Charnes A., Cooper W. W., (1961), *Management Problems and Industrial Applications of Linear Programming*, Vol. **I** & **II**, John Wiley & Sons.

Dubois D., Prade H., (1978), "Operations on Fuzzy Numbers", *International Journal of Systems Science* **9**, No. 6, σελ. 613-626.

Dubois D., Prade H., (1980), *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press INC.

Dubois D., Prade H., (1984), "Criteria Aggregation and Ranking of Alternatives in the Framework of Fuzzy Set Theory", *Studies in Management Sciences* **20**, σελ. 209-240, Gaines B. R., Zadeh L.A., Zimmermann H. J. edits., Elsevier Science Publishers B.V. (North- Holland).

Dubois D., Prade H., (1997), "The Three Semantics of Fuzzy Sets", *Fuzzy Sets and Systems* **90**, σελ. 141-150.

Feng Y., (1987), "Fuzzy Programming: A New Model of Optimization", *Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, Kacprzyk J., Orlovski S.A., edits., Kluwer Academic Publisher.

Freeling A.N.S., (1980) "Fuzzy Sets and Decision Analysis", *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics* **10**, σελ. 341-354.

French. S, (1984), "Fuzzy Decision Analysis: Some Critisism", *Studies in Management Sciences* **20**, σελ. 29-44, Gaines B. R., Zadeh L.A., Zimmermann H. J. edits., Elsevier Science Publishers B.V. (North- Holland).

Kaufmann A., (1975), *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets. Vol. 1: Fundamental Theoretical Elements*, Academic Press, New York.

Keeney R., Raiffa H., (1976), *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs*, John Wiley & Sons.

King A.L., (1993), "Asymetric Risk Measures and Tracking Models for Portfolio Optimization under Uncertainty", *Anals of Operations Research* **45**, σελ. 165-177.

Kuhn H.W. , Tucker A.W., (1951), "Non-Linear Programming", *Proccedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* J. Neyman (edits.), University of California Press, σελ. 481-492.

Lai Y.-J., Hwang C.-L., (1992), *Fuzzy Mathematical Programming:Methods and Applications*, Springer-Verlag, Heiderberg .

Maddox I.J., (1992), *Elements of Functional Analysis*, Universal Book Stall, New Delhi.

Michalopoulos M., Zopounidis C., (1997), "Evaluation of the Possible Use of Option Trading in the Athens Stock Market", *Proccedings of the International Conference of the European Association of Management and Business Economics*, σελ. 155- 158.

Morgan J.P., (1993), "Average Shortfall: a New Approach to Asset Allocation", *J.P. Morgan Securities Euporean Fixed-Income Research.*

Orlovsky S.A., (1978), "Decision-Making with Fuzzy Preference Relation", International *Journal of Fuzzy Sets and Systems* **1**, No. 3, σελ. 155-168.

Raiffa H., (1968), *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*, Newbery Award Records Inc., New York.

Ramaswamy S., (1998), "Portfolio Selection Using Fuzzy Decision Theory", WP-59, Bank for International Settlements, Basle, Switzerland, http: www.bis.org.

Sakawa M., (1993), *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, New York.

Shimura. M, (1973), "Fuzzy Sets Concept in Ranking-Ordering Objects", *J. Math. Anal. Appl.* **43**, σελ. 717-733.

Steuer R.E., Choo E.U., (1983), *Multiple Criterion Optimization: Theory, Computation and Application*, John Wiley & Sons, New York.

Tamborini, R., (1997), "Knowledge and Economic Behaviour. A constructivist approach.", *Journal of Evolutionary Economics* **7**, σελ. 49-72

Von Neumann J., Morgenstern O., (1948), *Theory Of Games And Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton.

Wierzbicki A. P., (1979), "The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization-Theoretical Implications and Practical Experiences", WP-79-66, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxeburg, Austria.

Yager R., (1979), "Possibilistic Decision-Making", *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics* **9**, No. 7, σελ. 341-354.

Yager R., (1992), "Decision-Making Under Dempster-Shafer Uncertainties", *Int.J.General.Systems* **20**, σελ. 233-245.

Zadeh L.A., (1962), "From Circuit Theory to System Theory", *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* **50**, σελ. 856-865.

Zadeh L.A., (1965), "Fuzzy Sets", *Information and Vontrol* **8,** σελ. 338-353.

Zadeh L.A., (1971), "Similarity Relations and Fuzzy Orderings", *Information Sciences* **3**, σελ. 177-200.

Zadeh L.A., (1972), "A Fuzzy Set Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges", *Journal of Cybernetics* **2**, No. 3, σελ. 4-34.

Zadeh L.A., (1975), "The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. Parts 1, 2, 3", *Information Sciences* **8** σελ. 199-249, **8** σελ. 301-357, **9** σελ. 43-80.

Zadeh L.A., (1978), "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility", *Fuzzy Sets and Systems* **1**, σελ. 3-28.

Zimmermann H.– J., (2000), " An application-oriented view of modelling uncertainty", *European Journal of Operational Research* **122**, σελ. 190-198.

Zimmermann H.-J., (1976), "Description and Optimization of Fuzzy Systems", *International Journal of General Systems* **2**, σελ. 209-215.

Zimmermann H.-J., (1978), "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions", *Fuzzy Sets and Systems* **1**, σελ. 45-58, North-Holland Publishing Company.

Zimmermann H.-J., Zysno P. (1980), "Latent Connectives in Human Nature", *Fuzzy Sets and Systems* **4**, σελ. 37-51, North-Holland Publishing Company.

«Σημειώσεις Αυτοδιδασκαλίας», Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών Α.Ε.