ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Διπλωματική Εργασία:

ΟΛΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΕΩΝ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΔΥΟ ΤΥΠΟΥΣ ΠΕΛΑΤΩΝ

ΝΤΑΗΣ Δ. ΗΛΙΑΣ

ΧΑΝΙΑ, 2007

Μέλη της εξεταστικής επιτροπής,

Βασίλης Κουϊκόγλου, καθηγητής, επιβλέπων
Νίκος Βλάσσης, επίκουρος καθηγητής
Δημήτρης Ρόβας, διδάσκων, εκλεγμένος επίκουρος καθηγητής

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε ένα πρόβλημα συνδιασμένου ελέγχου αποθεμάτων και παραγωγής για ένα σύστημα παραγωγής M/M/1 το οποίο διαθέτει το προϊόν του σε 2 αγορές. Αναζητούμε την βέλτιστη πολιτική με στόχο το μέγιστο δυνατό μέσο κέρδος. Σε αυτή την εργασία προτείνεται μια πολιτική μερικής ικανοποίησης της ζήτησης όπου οι αφικνούμενες παραγγελίες γίνονται δεκτές μέχρις ενός ορίου, το οποίο ονομάζουμε βασικό έλλειμμα. Επιπλέον διατηρείται ένα απόθεμα ασφαλείας και η παραγωγή σταματά όταν το απόθεμα φτάσει σε ένα άνω όριο. Η πολιτική επιτρέπει την διάκριση των πελατών από διαφορέτικες αγορές και επιτρέπει διατήρηση αποθέματος αποκλειστικά για τους πελάτες ενός τύπου. Εφαρμόζοντας τη θεωρία ουρών αναμονής εκφράζεται το κέρδος του συστήματος συναρτήσει του βασικού αποθέματος, του σημείου εφαρμογής της πολιτικής διακρίσεων και του βασικού ελλείμματος. Η αναλυτική επίλυση δείχνει ότι η προτεινόμενη πολιτική είναι και η πιο συμφέρουσα από τις συνήθεις πολιτικές που ουσιαστικά αποτελούν υποπεριπτώσεις της.

1 Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της εργασίας

Στην σύγχρονη ανταγωνιστική αγορά, η βελτιστοποίηση της απόδοσης των συστημάτων παραγωγής είναι απαραίτητη για την επιβίωση των επιχειρήσεων. Αυτό προϋποθέτει τον αποτελεσματικό έλεγχο του εκάστοτε συστήματος παραγωγής ως προς τον χρονικό προγραμματισμό της λειτουργίας της κάθε μηχανής του συστήματος (πότε ξεκινά, με τι ρυθμό γίνεται και πότε διακόπτεται η παραγωγή) και τον έλεγχο των πωλήσεων (πότε γίνεται δεκτή και πότε απορρίπτεται μια αφικνούμενη παραγγελία). Ο έλεγχος παραγωγής είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης κάποιου μέτρου απόδοσης το οποίο μπορεί να είναι είτε το συνολικό κέρδος, είτε το κόστος λειτουργίας ή κάποια άλλη παράμετρος του συστήματος παραγωγής .

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε ένα σύστημα παραγωγής το οποίο παράγει ένα προϊόν και το διαθέτει σε δύο κατηγορίες πελατών ή σε δύο διαφορετικές αγορές 1 και 2, εκ των οποίων η αγορά 1 είναι περισσότερο απαιτητική υπό την έννοια ότι η εταιρεία έχει μεγαλύτερο κόστος όταν καθυστερεί να εξυπηρετήσει έναν πελάτη, αλλά και μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους από πελάτες της άλλης αγοράς.

Στόχος είναι η ολική βελτιστοποίηση των αποθεμάτων και των πωλήσεων. Για το σκοπό αυτό προτείνεται μία πολιτική *(i) μερικής αποδοχής της ζήτησης σε περιόδους έλλειψης αποθέματος, (ii) με ταυτόχρονη διάκριση ανάμεσα στους δύο τυπους πελατών* για τον έλεγχο αποδοχής παραγγελιών, η οποία επιτρέπει μια μέγιστη συνολική ανικανοποίητη ζήτηση c. Όταν η συνολική μη ικανοποιημένη ζήτηση πάρει την τιμή c που ονομάζεται *έλλειμμα βάσης* όλες οι παραγγελίες απορρίπτονται. Η πολιτική αρχίζει να δίνει προτεραιότητα στους πελάτες το τύπου 1 αφήνοντας πάντα ένα απόθεμα ίσο με σ (εφ' όσον υπάρχει) αποκλειστικά στη διάθεσή τους, ακόμη και αν έχει πελάτες τύπου 2 σε αναμονή και δεν έχει εκκρεμείς παραγγελίες για πελάτες τύπου 1. Το σ είναι το *σημείο εφαρμογής της πολιτικής διακρίσεων* ανάμεσα στους δύο τύπους πελατών. Για τον έλεγχο του ρυθμού παραγωγής χρησιμοποιείται η πολιτική αποθέματος βάσης. Η παραγωγή διακόπτεται όταν το απόθεμα γίνει ίσο με το *απόθεμα βάσης* s και συνεχίζεται όταν το απόθεμα πέσει κάτω από το s. Στόχος του ελέγχου είναι ο από κοινού καθορισμός του αποθέματος βάσης *s*, του ελλείμματος βάσης *c* και του σημείου εφαρμογής *σ* της πολιτικής που βελτιστοποιούν ένα μέτρο απόδοσης. Ως μέτρο απόδοσης του συστήματος επιλέγεται το κέρδος ανά μονάδα χρόνου, το οποίο προκύπτει από τα έσοδα των πωλήσεων μείον το κόστος των εκκρεμών παραγγελιών και το κόστος αποθέματος.

Για την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας της πολιτικής που προτάθηκε γίνεται σύγκριση ως προς το κέρδος ανα μονάδα χρόνο με τις πολιτικές *πλήρους αποδοχής της μη ικανοποιούμενης ζήτησης* (όπου το έλλειμμα βάσης είναι ∞, $c \to \infty$) και *πολιτικές πλήρους απόρριψης της μη ικανοποιούμενης ζήτησης* (όπου το έλλειμμα βάσης είναι 0) οι οποίες ουσιαστικά αποτελούν υποπεριπτώσεις της προτεινόμενης πολιτικής. Επιπλέον γίνεται σύγκριση με την πολιτική *παραγωγής κατά παραγγελία* (make to order, όπου $\sigma=s=0$) και με μία πολιτική *χωρίς διάκριση των πελατών* ($\sigma=0$).

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Η αναζήτηση του βέλτιστου ρυθμού παραγωγής αλλά και του βέλτιστου αποθέματος απασχολεί τους ερευνητές από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα. Ως απαρχή της θεωρίας αποθεμάτων μπορεί να θεωρηθεί η εργασία “How many parts to make at once” του Ford W. Harris [1] που δημοσιεύτηκε το 1913. Η εργασία αυτή ανέδειξε την ανάγκη για μελέτη όλων των παραμέτρων ενός συστήματος παραγωγής και πρότεινε την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων που θα επέτρεπαν την αναζήτηση βέλτιστων τιμών για τις παραμέτρους του προβλήματος.

Η ευρεία εφαρμογή της θεωρίας αποθεμάτων έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη μοντέλων και πολιτικών με στόχο την βελτιστοποίηση της απόδοσης των συστημάτων παραγωγής ως προς κάποιο μέτρο απόδοσης [2]. Μερικές από αυτές είναι πολιτικές που θα χρησιμοποιηθούν και για την αναλυτική αναζήτηση βέλτιστων τιμών σε αυτή την εργασία: make-to-order, lost sales, και complete backorder, [3], [4], [5]. Αναλυτικά περιγράφονται συνεργαζόμενες πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών στη διδακτορική διατριβή [6]. Επίσης η παρούσα εργασία είναι συναφής με την μεταπτυχιακή διατριβή [7].

Επιπλέον συνδυασμένες πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών για στοχαστικά συστήματα παραγωγής παρουσιάζονται στις [8] και [9].

Η παρούσα εργασία προτείνει μια πολιτική συνδυασμένου ελέγχου αποθέματος και αποδοχής παραγγελιών παρόμοια με εκείνες των [6] – [9] που επιτρέπει να διατηρείται απόθεμα ασφαλείας για το προϊόν που παράγεται λαμβάνοντας υπόψιν την επίδραση του κόστους αποθέματος, όπως επίσης και το κόστος ανικανοποίητης ζήτησης.

1.3 Δομή της εργασίας, μεθοδολογία, αποτελέσματα

Στο Κεφάλαιο 2 που ακολουθεί γίνεται μια αναλυτική περιγραφή του προβλήματος και των επιμέρους παραμέτρων που καθορίζουν την αποδοτικότητα του συστήματος. Παρουσιάζονται όλες οι υπό σύγκριση πολιτικές ελέγχου του συστήματος.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται παρουσίαση των αλγορίθμων με τους οποίους υπολογίζονται τα διάφορα μέτρα απόδοσης για τις πολιτικές που εξετάζονται, ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση του μέσου κέρδους των επιμέρους πολιτικών. Υποθέτουμε εκθετικούς χρόνους αφίξεων και εξυπηρετήσεων και η μεθοδολογία στηρίζεται στην θεωρία ουρών αναμονής. Τέλος αναλύονται οι μαθηματικές σχέσεις που οδηγούν στον καθορισμό του μέσου κέρδους αλλά και των υπολοίπων συνιστωσών των υπο εξέταση πολιτικών.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των πειραμάτων που έγιναν με την χρήση του κώδικα που αναπτύχθηκε για την μελέτη του συγκεκριμένου συστήματος παραγωγής. Γίνεται σύγκριση των πολιτικών ως προς το μέσο κέρδος, καθώς και ανάλυση ευαισθησίας του μέσου κέρδος ως προς τις παραμέτρους του προβλήματος. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις οι οποίες διαφοροποιούνται ως προς την αναλογία του ρυθμού παραγωγής και του ρυθμού των συνολικών αφίξεων στο σύστημα.

Ακολούθως στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση του προβλήματος. Τέλος στο Παράρτημα υπάρχει ο κώδικας που αναπτύχθηκε για την πειραματική ανάλυση του συστήματος .

2 Πολιτικές ελέγχου ουρών αναμονής με δύο τύπους πελατών

2.1 Περιγραφή του συστήματος παραγωγής

Εξετάζουμε ένα σύστημα παραγωγής που παράγει ένα προϊόν το οποίο διαθέτει σε δύο τύπους πελατών. Οι πελάτες και των δύο τύπων έρχονται σε τυχαίους χρόνους και κάθε παραγγελία αντιστοιχεί σε μία μονάδα προϊόντος. Οι χρόνοι παραγωγής είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέσο $\frac{1}{\mu}$ και τα παραγόμενα προϊόντα αποθηκέυονται σε αποθήκη. Οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων των πελατών τύπου 1 και 2 αντίστοιχα είναι $\frac{1}{\lambda_1}$ και $\frac{1}{\lambda_2}$. Το Σχ.2.1 δίνει μια αναπαράσταση του συστήματος. Τα μ, λ_1, λ_2 είναι οι ρυθμοί παραγωγής και ζήτησης αντιστοίχως.

Για να περιγράψουμε όλες τις καταστάσεις του συστήματος ορίζουμε την *αποθεματική θέση A* ως την διαφορά του τρέχοντος αποθέματος μείον την συνολική ανικανοποίητη ζήτηση.

A = (Τρεχον απόθεμα) - (Ανικανοποίητη ζητηση πελατών τυπου 1 και τύπου 2)

$$A = n_0 - (n_1 + n_2)$$

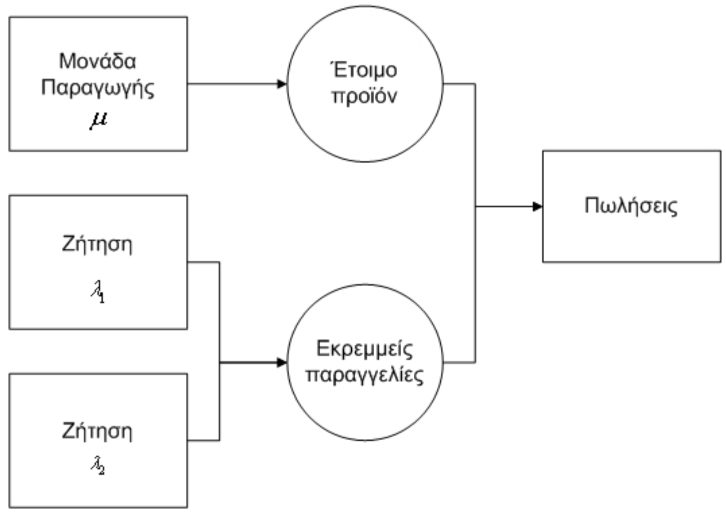
όπου n_0 το τρέχον απόθεμα και n_1, n_2 ο αριθμός πελατών τύπου 1 και 2 αντίστοιχα που περιμένουν να εξυπηρετηθούν.

Το σύστημα σταματά να παράγει όταν η αποθεματική θέση Α γίνει ίση με s, ήτοι το απόθεμα $n_0 = s$, σε όλες τις πολιτικές που θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Το s είναι το βασικό απόθεμα (παράμετρος ελέγχου).

Το σύστημα σταματά να δέχεται πελάτες οιουδήποτε τύπου όταν $A = -c$, όπου c είναι το βασικό έλλειμα (παράμετρος ελέγχου).Κατά συνέπεια το επιτρεπτό διάστημα τιμών για την αποθεματική θέση είναι $-c \le A \le s$.

Επί πλεον το σύστημα δεν εξυπηρετεί πελάτες τύπου 2, ακόμη και να έχει απόθεμα και δεν έχει εκρεμμείς παραγγελίες τύπου 1, όταν το απόθεμα έτοιμων προϊόντων του είναι ίσο ή μικρότερο από κάποιο όριο σ. Το σ είναι ένα απόθεμα ασφαλείας που προορίζεται για τους απαιτητικούς πελάτες τύπου 1. Όταν $\sigma = 0$ τότε δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ των πελατών τύπου 1 και 2 ως προς τις προτεραιότητες εξυπηρέτησης που θέτει το σύστημα ελέγχου.

Η συνολική πολιτική ελέγχου του συστήματος καθορίζεται από την τριάδα (c,s,σ) .



Σχήμα 2.1 Σύστημα παραγωγής

Η λειτουργία του συστήματος σχετίζεται με τα εξής οικονομικά μεγέθη:

p_1, p_2 τα κέρδη από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος (τιμή πώλησης μείον κόστος πρώτων υλών και επεξεργασίας) σε πελάτη τύπου 1 και 2 αντίστοιχα,

h το μοναδιαίο κόστος αποθέματος, που είναι το κόστος διατήρησης αποθέματος μίας μονάδας τελικού προϊόντος για μία χρονική μονάδα,

b_1, b_2 το μοναδιαίο κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης, που είναι το κόστος καθυστέρησης της ικανοποίησης μίας εκκρεμούσας παραγγελίας πελάτη τύπου 1 και 2 αντίστοιχα στη μονάδα του χρόνου.

Στο συγκεκριμένο σύστημα παραγωγής θεωρούμε ότι $p_2 \leq p_1$ και $b_2 \leq b_1$ ώστε προτεραιότητα να δίδεται στους πελάτες τύπου 1 που αποφέρουν μεγαλύτερο κέρδος σε περίπτωση πώλησης και έχουν μεγαλύτερο κόστος μη ικανοποίησης.

2.2 Πολιτικές ελέγχου του συστήματος

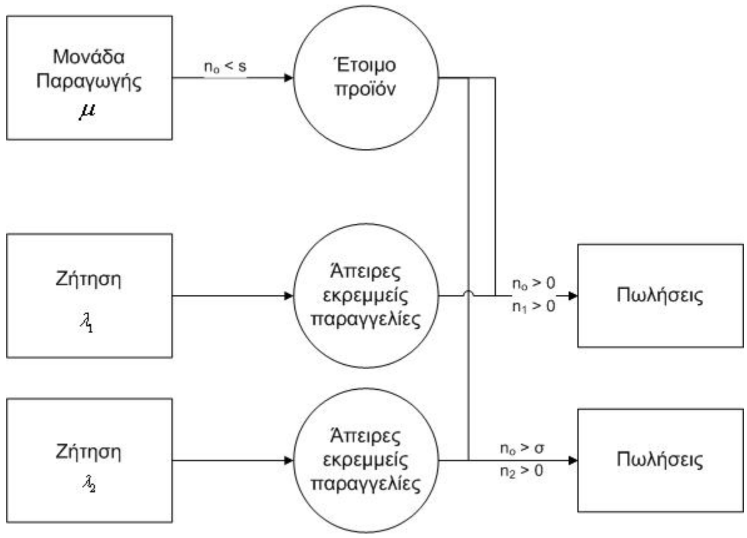
Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε όλες τις πολιτικές με τις οποίες θα μελετήσουμε στη συνέχεια το σύστημα που μόλις περιγράψαμε, ως προς το μέσο κέρδος. Στο παρακάτω σχήμα δίδονται οι επιτρεπτές τιμές των παραμέτρων (c, s, σ) για κάθε μία από τις υπό σύγκριση πολιτικές.

.

	c	**s**	**σ**
LS (lost sales)	0	s	σ
MTO (make-to-order)	c	0	0
CB (complete backorder)	∞	s	σ
NODP(καμμία διάκριση 1,2)	c	s	0
DP (διάκριση 1 από 2) προτεινόμενη πολιτική	c	s	σ

Σχήμα 2.2 Επιτρεπτές τιμές των παραμέτρων (c, s, σ) ανά πολιτική

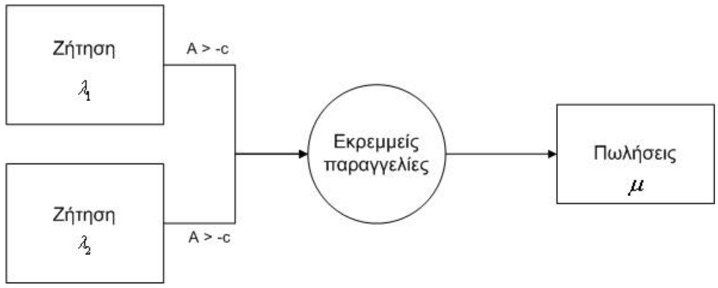
2.2.1 Αποδοχή όλων των παραγγελιών (Complete backorder)



Σχήμα 2.3 Πολιτική πλήρους αποδοχής παραγγελιών CB

Η πολιτική CB (complete backorder) κάνει δεκτές όλες τις παραγγελίες σε περίοδο έλλειψης προϊόντων. Συνεπώς το έλλειμμα βάσης c είναι άπειρο και πρακτικά οι παραγγελίες δεν απορρίπτονται ποτέ. (∞, s, σ).

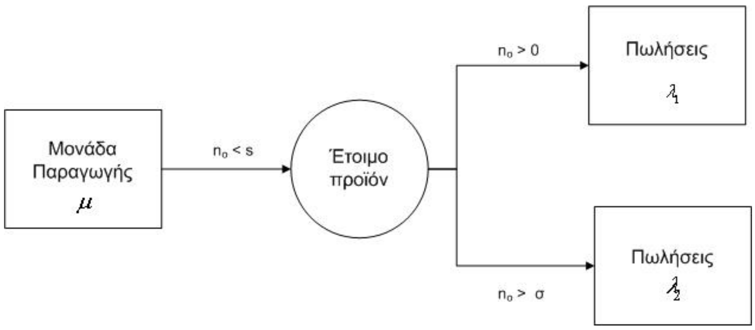
2.2.2 Παραγωγή κατά παραγγελία (Make-to-order)



Σχήμα 2.4 Πολιτική παραγωγής κατά παραγγελία MTO

Σύμφωνα με πολιτική MTO (Make-to-order) η παραγωγή γίνεται κατά παραγγελία και δεν διατηρείται απόθεμα ασφαλείας. Μία αφικνούμενη παραγγελία ενός πελάτη ανεξαρτήτως τύπου τοποθετείται στην αναμονή αν η αποθήκη είναι άδεια και απορρίπτεται στην περίπτωση που η αποθεματική θέση είναι ίση με $-c$.Άρα σε αυτή την περίπτωση το σύστημα θα περιγράφεται ως (c, 0, 0).

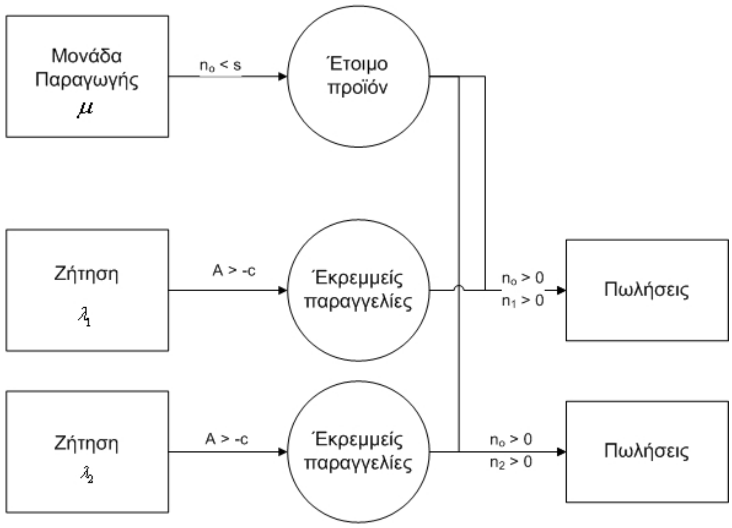
2.2.3 Χωρίς εκκρεμείς παραγγελίες (Lost sales)



Σχήμα 2.5 Πολιτική χωρίς εκκρεμείς παραγγελίες LS

Η πολιτική LS (lost sales) δεν επιτρέπει ανικανοποίητες παραγγελίες. Συνεπώς το έλλειμα βάσης c θα είναι ίσο με μηδέν . Μία παραγγελία πελάτη τύπου πελάτη 1 εξυπηρετείται μονο εφόσον υπάρχει απόθεμα ενώ οι πελάτες τύπου 2 εξυπηρετούνται μόνο εαν το απόθεμα είναι μεγαλύτερο του σ. (0, s, σ).

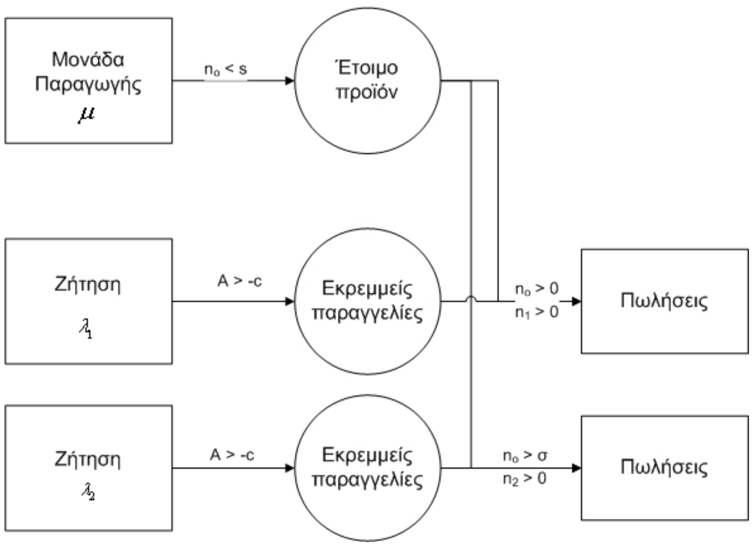
2.2.4 Χωρίς διάκριση ανάμεσα στους πελάτες τύπου 1 και 2 (NODP)



Σχήμα 2.6 Πολιτική χωρίς διάκριση ανάμεσα στους πελάτες τύπου 1 και 2 NODP

Μία αφικνούμενη παραγγελία ενός πελάτη ανεξαρτήτως τύπου εξυπηρετείται εφόσον η στάθμη του αποθέματος είναι μεγαλύτερη του μηδενός, τοποθετείται στην αναμονή αν η αποθήκη είναι άδεια και απορρίπτεται στην περίπτωση που η αποθεματική θέση είναι ίση με $-c$.

2.2.5 Πολιτική διάκρισης πελατών τύπου 1 και 2 (DP)



Σχήμα 2.7 Πολιτική διάκριση ανάμεσα στους πελάτες τύπου 1 και 2 (DP)

Μία αφικνούμενη παραγγελία ενός πελάτη τύπου 1 εξυπηρετείται εφόσον η στάθμη του αποθέματος είναι μεγαλύτερη του μηδενός, τοποθετείται στην αναμονή αν η αποθήκη είναι άδεια και απορρίπτεται στην περίπτωση που η αποθεματική θέση είναι ίση με $-c$.

Στην περίπτωση άφιξης παραγγελίας από πελάτη τύπου 2 αυτή εξυπηρετείται μόνον εφόσον η αποθεματική θέση είναι μεγαλύτερη του σ (σημείο εφαρμογής της πολιτικής διακρίσεων). Για αποθεματική θέση μικρότερη του σ η παραγγελία τοποθετείται στην αναμονή και στην ελάχιστη επιτρεπτή αποθεματική θέση $-c$ απορρίπτεται.

3 Μοντελοποίηση του προβλήματος – Αλγόριθμος επίλυσης

3.1 Το σύστημα παραγωγής

Έχουμε το σύστημα που περιγράφηκε εκτενώς στο προηγούμενο κεφάλαιο. Υποθέτουμε ότι η διάρκεια παραγωγής μιας μονάδας προϊόντος είναι εκθετικός με μέση τιμή μ (ρυθμός παραγωγής). Επίσης οι αφίξεις των πελατών τύπου 1 και 2 είναι Poisson και λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Το κέρδος από πώληση μιας μονάδας προϊόντος σε μια μονάδα χρόνου είναι για πώλησης σε πελάτη τύπο 1 και 2 είναι p_1 , p_2 αντίστοιχα. Το κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντος σε μια μονάδα χρόνου είναι h.Τέλος το κόστος ανικανοποίητης ζήτησης για κάθε τύπο πελάτη i ($i = 1, 2$) θα είναι b_i .

3.2 Υπολογισμός του μέσου κέρδους

Το μέσο κέρδος είναι συνάρτηση των παραμέτρων (c, s, σ) και ορίζεται ως:

J(c, s, σ) = κέρδη από πωλήσεις – (κόστος αποθέματος)
–(κόστος ανικανοποίητης ζήτησης)

Ορίζουμε:

J_1: μέσο κέρδος από πωλήσεις σε πελάτες τύπου 1
J_2: μέσο κέρδος από πωλήσεις σε πελάτες τύπου 2
J_H: μέσο κόστος αποθέματος
J_{b1}: μέσο κόστος ανικανοποίητης ζήτησης πελατών τύπου 1
J_{b2}: μέσο κόστος ανικανοποίητης ζήτησης πελατών τύπου 2

Συνεπώς το μέσο κέρδος θα δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$J(c,s,\sigma) = J_1 + J_2 - J_H - J_{b1} - J_{b2}$

3.2.1 Μέσο κέρδος από πωλήσεις

Το μέσο κέρδος J_i από πωλήσεις είναι ίσο με το γινόμενο του μέσου αριθμού πελατών τύπου i που εξυπηρετούνται (TH_i) επί την τιμή πώλησης p_i που αντιστοιχεί στην αγορά τυπου i.

$$J_i = TH_i \times p_i$$

3.2.2 Μέσο κόστος αποθέματος

Το μέσο κόστος αποθέματος είναι το γινόμενο του κόστους h της αποθήκευσης ενός κομματιού για μία μονάδα χρόνου επί το μέσο απόθεμα Η το οποίο θα υπολογισουμε στην Παράγραφο 3.3.

$$J_H = h \times H$$

3.2.3 Μέσο κόστος ανικανοποίητης ζήτησης

Το μέσο κόστος ανικανοποίητης ζήτησης για κάθε τύπο πελάτη i ισούται με το γινόμενο του κόστους με ικανοποίησης ενός πελάτη αυτού του τύπου επί το μέσο αριθμό πελατών τύπου i στην αναμονή.

$$J_{bi} = b_i \times B_i$$

3.3 Υπολογισμός πιθανοτήτων των καταστάσεων των αποθεμάτων

Η κατάσταση του συστήματος συμβολίζεται με την τριάδα (n_0, n_1, n_2) όπου
n_0 = συνολικό απόθεμα έτοιμων προϊόντων
n_i = πλήθος ανικανοποίητων παραγγελιών τύπου i.

Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι παραγωγής του συστήματος και οι χρόνοι ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις πελάτων ακολουθούν εκθετικές κατανομές.

Από την υπόθεση αυτή συνεπάγεται ότι το (n_0 , $n_{1,}$, n_2) είναι αλυσίδα Markov. Συγκεκριμένα αν το σύστημα είναι στην κατάσταση (n_0 , n_1, n_2) τη στιγμή t, τη στιγμή $t + \delta t$:

α) στην κατάσταση n_1 + 1 ή στην n_2 + 1 με πιθανότητες $\lambda_i \times \delta t+ o(\delta t)$ όταν $n_1 + n_2 < c$ (άφιξη πελάτη τύπου i)

β) στην n_0 + 1 με πιθανότητα $\mu \times \delta t+ o(\delta t)$ όταν $n_1 + n_2 = 0$ ή όταν $n_1 = 0$, $n_2 > 0$ και $n_0 \leq \sigma$ (παραγωγή και αποθήκευση κομματιού)

γ) στην n_1 - 1 με πιθανότητα $\mu \times \delta t+ o(\delta t)$ όταν $n_1 > 0$ (παραγωγή για ικανοποίηση παραγγελιών τύπου 1)

δ) στην n_2 – 1 με πιθανότητα $\mu \times \delta t+ o(\delta t)$ όταν $n_2 > 0$, $n_1 = 0$ και $n_0 = \sigma$ (ικανοποίηση παραγγελίας από πελάτη τύπου 2)

3.3.1 Αλυσίδα Markov για την πολιτική (c, s, σ)

Μας ενδιαφέρουν οι πιθανότητες μόνιμης κάταστασης του συστήματος. Οι εξισώσεις πιθανοτήτων στην μόνιμη κατάσταση δίδονται από τις εξισώσεις Chapman- Kolmogorov [10]. Σύμφωνα με αυτές η ισχύει η ακόλουθη σχέση:

P(το σύστημα να βρίσκεται στην αποθεματική θέση A) × (το μέσο ρυθμό εξόδου από αυτή) = Σ P(να βρίσκεται σε άλλη αποθεματική θέση) × (το μέσο ρυθμό μετάβασης στην A)

Για παράδειγμα την κατάσταση (σ+1, 0, 0) υπάρχει απόθεμα ικανό να εξυπηρετήσει και τους 2 τύπους πελατών και δεν υπάρχουν ανικανοποίητες παραγγελίες. Από αυτήν την κατάσταση φεύγουμε με παραγωγή κομματιού ή αφίξεις πελατών. Ο ρυθμός εξόδου από αυτή την κατάσταση είναι λοιπόν ($\lambda_1 + \lambda_2 +\mu$).

Στην κατάσταση (σ+1, 0, 0) πηγαίνουμε είτε από την (σ, 0, 0) με ρυθμό μ (δηλαδή με παραγωγή κομματιού) είτε από την (σ+2 0, 0) με ρυθμό $\lambda_1 + \lambda_2$ (δηλαδή με άφιξη παραγγελίας τύπου 1 ή τύπου 2). Συνεπώς η εξίσωση για την κατάσταση (σ+1, 0, 0) είναι η ακόλουθη:

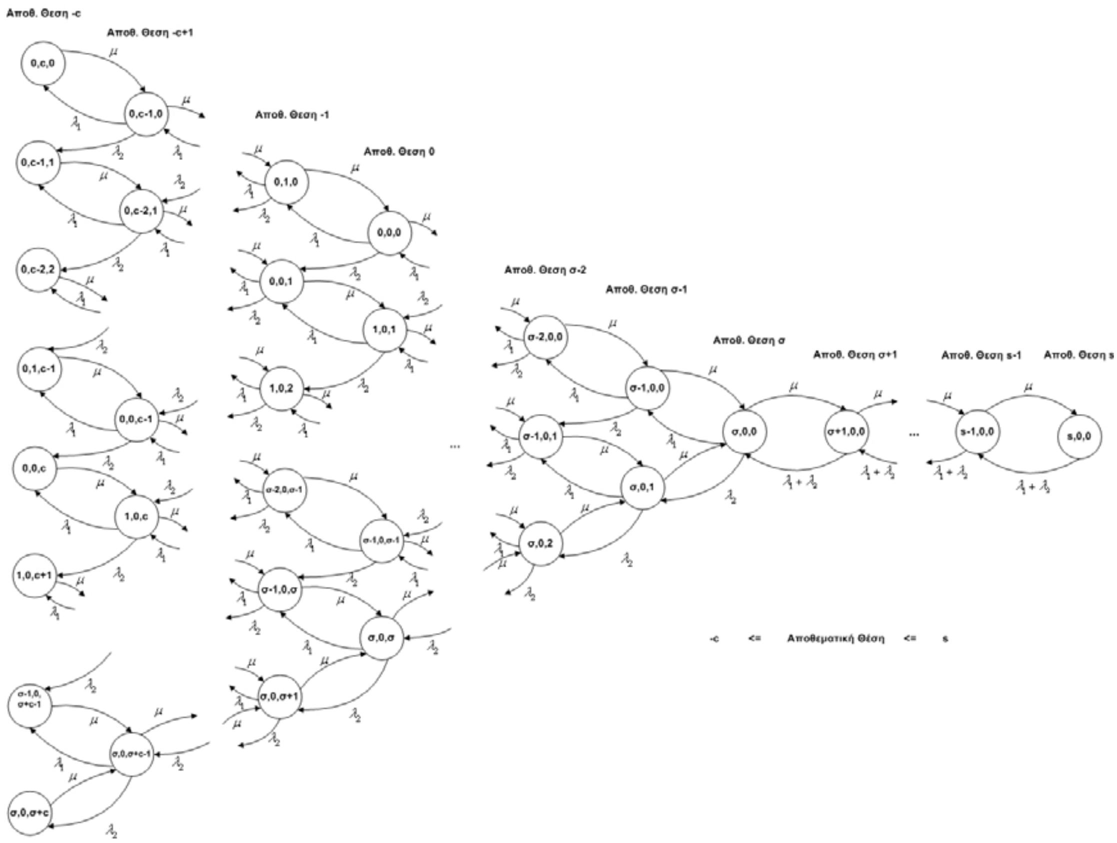
$$P(\sigma+1, 0, 0) \times (\lambda_1 + \lambda_2 +\mu) = P(\sigma, 0, 0) \times (\mu) + P(\sigma+2, 0, 0) \times (\lambda_1 + \lambda_2)$$

Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι η κατάσταση (σ-1, 0, 0). Υπάρχει απόθεμα αλλά μόνο προς εξυπηρέτηση πελατών τύπου 1 και δεν υπάρχουν ανικανοποίητες παραγγελίες. Από αυτήν την κατάσταση φεύγουμε με παραγωγή κομματιού ή αφίξεις πελατών. Ο ρυθμός εξόδου από αυτή την κατάσταση είναι λοιπόν (λ_1 + λ_2 +μ).

Στην κατάσταση (σ-1, 0, 0) πηγαίνουμε είτε από την (σ-2, 0, 0) με ρυθμό μ (δηλαδή με παραγωγή κομματιού) είτε από την (σ, 0, 0) με ρυθμό λ_1 (δηλαδή με άφιξη παραγγελίας τύπου 1). Επιπλέον με λ_2 πηγαίνουμε στην (σ-1, 0, 1) μιας και εαν έχουμε άφιξη πελάτη τύπου 2 αυτός μπαίνει στην αναμονή μιας και το υπάρχον απόθεμα διατηρείται για εξυπηρέτηση πελατών τύπου 1. Συνεπώς η εξίσωση για την κατάσταση (σ-1, 0, 0) είναι η ακόλουθη:

$$P(\sigma\text{-}1,\ 0, 0) \times (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) = P(\sigma,\ 0, 0) \times \lambda_1 + P(\sigma\text{-}1,\ 0, 1) \times \lambda_2 + P(\sigma\text{-}2,\ 0, 0) \times \mu$$

Το Σχήμα 3.2 δείχνει όλες τις καταστάσεις της αλυσίδας μαζί με τους ρυθμούς μετάβασης.



Σχήμα 3.2 Αλυσίδα Markov για την εφαρμοζόμενη πολιτική

Ορίζουμε για κάθε αποθεματική θέση n = -c, -c+1, …,σ τα διανύσματα καταστάσεων τέτοια ώστε:

$$P_{-c} = \begin{pmatrix} P(0,c,0) \\ P(0,c-1,1) \\ \\ \\ P(s,0,s+c) \end{pmatrix}, \qquad P_{-c+1} = \begin{pmatrix} P(0,c-1,0) \\ P(0,c-2,1) \\ \\ P(\sigma,0,\sigma+c-1) \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$P_{\sigma-1} = \begin{pmatrix} P(\sigma-1,0,0) \\ P(\sigma,0,1) \end{pmatrix}, \qquad P_{\sigma} = P(\sigma,0,0)$$

Παρατηρούμε ότι οι διαστάσεις των διανυσμάτων βαίνουν φθίνουσες από το P_{-c} έως το P_{-c} το οποίο έχει μόνο ένα στοιχείο.

Η σχέση που περιγράφει την ισορροπία για τις καταστάσεις P(n_o , $n_{1,}$, n_2) της αποθεματικής θέσης n είναι :

$$A_n P_n = B_n P_{n-1} + C_n P_{n+1}$$

Ο πίνακας A$_n$ πολλαπλασιάζει το διάνυσμα P_n που περιέχει όλες τις πιθανότητες της αποθεματικής θέσης $A = n$ για τις οποίες ισχύει $n_o -$ ($n_1 + n_2$) = n. Είναι διαγώνιος με γενική μορφή:

$$A_n = \begin{pmatrix} \mu+\lambda_1+\lambda_2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \mu+\lambda_1+\lambda_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \mu+\lambda_1+\lambda_2 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \mu+\lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας B$_n$ πολλαπλασιάζει το διάνυσμα P_{n-1} που περιέχει όλες τις πιθανότητες της αποθεματικής θέσης $A = n-1$ για τις οποίες ισχύει $n_o -$ ($n_1 + n_2$) = n-1 . Έχει διαστάσεις n × n+1 με γενική μορφή:

$$B_n = \begin{pmatrix} \mu & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \mu & & & & \\ \vdots & & \mu & & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \mu & \mu \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας C_n πολλαπλασιάζει το διάνυσμα P_{n+1} που περιέχει όλες τις πιθανότητες της αποθεματικής θέσης $A = n+1$ για τις οποίες ισχύει
$n_o - (n_1 + n_2) =$ n+1 . Έχει διαστάσεις n × n-1 με γενική μορφή:

$$C_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \ddots & & \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & 0 \\ & & \ddots & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Για n = -c έχουμε την εξίσωση C-K:

$$A_{-c}P_{-c} = C_{-c}P_{-c+1}$$

και λύνοντας ως προς P_{-c} βρίσκουμε

$$P_{-c} = A_{-c}^{-1}C_{-c}P_{-c+1} \text{ ή}$$
$$P_{-c} = G_{-c}P_{-c+1} \text{ όπου } G_{-c} = A_{-c}^{-1}C_{-c} \ (1)$$

που έιναι η αρχική συνθήκη. Επαγωγικά από την

$$A_nP_n = B_nP_{n-1} + C_nP_{n+1}$$

Προκύπτει με αντικατάσταση: $P_{n-1} = G_{n-1}P_n$,

$$A_nP_n = B_nG_{n-1}P_n + C_nP_{n+1}$$

και λύνοντας ως προς P_n:

$$P_n = (A_n - B_nG_{n-1})^{-1}C_nP_{n+1} \text{ ή}$$
$$P_n = G_nP_{n+1} \text{ όπου } G_{-c} = (A_n - B_nG_{n-1})^{-1} \ (2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) συνιστούν επαναληπτικό αλγόριθμο από τον οποίο όλες οι πιθανότητες P_n προκύπτουν συναρτήσει των P_{n+1}. Συνεπώς όλες οι πιθανότητες P_n μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του P_σ ως εξής:

$$P_n = G_nP_{n+1} = G_nG_{n+1}P_{n+2} = G_n...G_{\sigma-1}P_\sigma = F_nP_\sigma$$

όπου $F_n = G_n...G_{\sigma-1}$

Επίσης οι P_n για n > σ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P_n = (\frac{\mu}{\lambda_1 + \lambda_2})^{n-\sigma} P_\sigma$$

Τέλος το P_σ προκύπτει από την εξίσωση ολικής πιθανότητας:

$$\sum_{-c}^{s} P_n = 1$$

Ο αλγόριθμος υπολογισμού των πιθανοτήτων βρίσκεται στο Παράρτημα και περιγράφετε στην παράγραφο 3.4

3.3.2 Υπολογισμός H, TH, B

Το μέσο απόθεμα θα ισούται με :

$$H = \sum_{n_o}\sum_{n_1}\sum_{n_2} n_o \times P(n_o, n_1, n_2)$$

Ο μέσος αριθμός πελατών τύπου i στην αναμονή θα ισούται με :

$$B_i = \sum_{n_o}\sum_{n_1}\sum_{n_2} n_i \times P(n_o, n_1, n_2) \qquad \text{για} \qquad i = 1, 2$$

Το σύστημα που μελετάμε δέχεται πελάτες σε κάθε αποθεματική θέση A εκτός από την A = -c. Η πιθανότητα $P(A = -c)$ δίνεται από τον τύπο

$$P(A = -c) = \sum_{\forall (n_0, n_1, n_2): n_0 - (n_1 + n_2) = -c} P(n_0, n_1, n_2)$$

Δεδομένου ότι σε κάθε αποθεματική θέση Α πλην της –c επιτρέπονται οι αφίξεις πελατών τύπου 1 και 2 ισχύει:

$$TH_1 = (1 - P(A = -c)) \times \lambda_1$$

$$TH_2 = (1 - P(A = -c)) \times \lambda_2$$

3.4 Αλγόριθμος προσδιορισμού βέλτιστης πολιτικής

Σαν είσοδος στο πρόβλημα δίδονται τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα:

μ	Ρυθμός παραγωγής του συστήματος
λ_1	Ρυθμός αφίξεων πελατών τύπου 1
λ_2	Ρυθμός αφίξεων πελατών τύπου 2
b_1	Κόστος ανικανοποίητης ζήτησης ενός πελάτη τύπου 1
b_2	Κόστος ανικανοποίητης ζήτησης ενός πελάτη τύπου 2
h	Κόστος αποθέματος ενός κομματιού σε μία μονάδα χρόνου
p_1	Τιμή πώλησης σε πελάτη τύπου 1
p_2	Τιμή πώλησης σε πελάτη τύπου 2

Τα στοιχεία που υπολογίζονται από τον αλγόριθμο και αποτελούν έξοδο του συστήματος είναι το βέλτιστο μέσο κέρδος J και οι βέλτιστες τιμές των c, s, σ για κάθε μια από τις εξεταζόμενες πολιτικές .

Ο κώδικας υλοποίησης του αλγορίθμου παρατείθεται στο Παράρτημα και είναι γραμμένος σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab.

3.4.1 Προσδιορισμός βέλτιστης πολιτικής

Για τον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε ακολουθεί τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Ορίζουμε μέγιστες και ελάχιστες τιμές για τα c, s, σ: cmin, cmax, smin, smax, σmin, σmax.

Βήμα 2: Θέτουμε τις βέλτιστες τιμές των c,s,σ, J ίσες με μηδεν.

c*=0, s*=0, σ*=0, J*=0.

Βήμα 3: Για c = cmin , ... , cmax

Για s = smin , ... , smax

Για σ = σmin , ... , σmax

α. Ανέλυσε το σύστημα για την πολιτική (c,s,σ) και υπολόγισε το μέσο κέρδος J(c,s,σ).

β. Αν J(c,s,σ) > J* τότε ενημερώνουμε το βέλτιστο κέρδος J και τις βέλτιστες παραμέτρους (c,s,σ) θέτωντας

J* = J(c,s,σ) , c*=c, s*=s , σ*=σ

Επόμενο *σ*

Επόμενο *s*

Επόμενο *c*

Τέλος

3.4.2 Ανάλυση συστήματος με την πολιτική DP (c, s, σ)

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο ανάλυσης της πολιτικής DP (c, s, σ) . Τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα ακόλουθα:

Βήμα 1: Δημιούργησε τους πίνακες

A με διάσταση (n × n),

B με διάσταση (n × n+1),

C με διάσταση (n × n-1),

Οι ιδιότητες των οποίων περιγράφονται αναλυτικά στην παράγραφο 3.3.2

Βήμα 2: Για n = c + σ + 1 , ... , 2

Ειδικά για την αποθεματική θέση A=-c

$G_{c+\sigma+1}$ = INV (A)*C

Μειώνουμε την διάσταση του A σε διάσταση (n-1 ×n-1)

Μειώνουμε την διάσταση του B σε διάσταση (n-1 ×n)

Μειώνουμε την του C σε διάσταση (n-1 ×n-2)

Δίνουμε στο στοιχείο B(n-1,n) την τιμή μ

Μειώνουμε το n κατά 1 μονάδα.

G_n = INV (A- B G_{n-1})*C

Επόμενο n

Βήμα 3: Για n =2, …, c + σ + 1 ,

F_n = G_n ,… , G_2

Επόμενο n

Βήμα 4: Θέτουμε sum ίσο με το μηδέν.

Υπολογίζουμε το άθροισμα των F όλων των καταστάσεων.

Για n=2:c+sig+1

sum=sum + F_n

Επόμενο n

sum=sum+[1-rho^(s-sig+1)]/[1-rho];

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις πιθανότητες και κανονικοποιούμε διαιρώντας με το sum.

Για n= 2 : c+sig+1

P_n = F_n /sum;

Επόμενο n

Βήμα 5: Υπολογίζουμε το μέσο απόθεμα για τις αποθεματικές θέσεις σ έως s.

Για i = σ έως s

H = H + i × rho^(i-sig)/sum;

Επόμενο i

Υπολογίζουμε το μέσο απόθεμα για τις υπόλοιπες αποθεματικές θέσεις και το μέσο αριθμό πελατών σε αναμονή τύπου 1 και 2.

Για i = 2 έως (c+sig+1)

Για j=1εώς i

Υπολογίζουμε την τρέχουσα αποθεματικη θέση

invpos=sig+1-i;

Τον τρέχον αριθμό των πελατών τύπου 1 στην ουρά

iB1=max(-invpos+1-j,0);

Τον τρέχον αριθμό των πελατών τύπου 2 στην ουρά

iB2=j-1;

Το τρέχον απόθεμα

iH=max(sig+j-i,0);

B1=B1+iB1×P(i,j);

B2=B2+iB2×P(i,j);

H=H+iH×P(i,j);

Επόμενο j

Επόμενο i

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το thruput με βάση την αποθεματική θέση –c

Για j = 1 έως c + σ +1

TH = TH + P(c + σ +1, j)

Επόμενο j

Επιπλέον υπολογίζουμε τα

TH1=(1-TH) × λ_1;

TH2=(1-TH) × λ_2;

Βήμα 6: Για κάθε c, s, σ υπολογίζουμε το κέρδος

$J = TH_1 \times p_1 + TH_2 \times p_2 - H \times h - b_1 \times B_1 - b_2 \times B_2$;

Αν $J > J^*$

τότε $J^* = J$

$c^* = c$

$s^* = s$

$\sigma^* = \sigma$

Τελος

4 Πειραματική Σύγκριση του Κέρδους των Πολιτικών

Στην ενότητα αυτή συγκρίνουμε την προτεινόμενη πολιτική (c, s, σ) με διάφορες πολιτικές που εφαρμόζονται στην πράξη. Αυτές είναι ειδικές περιπτώσεις της προτεινόμενης πολιτικής και αναφέρονται για συντομία ως εξής:

LS (lost sales): Δεν επιτρέπονται ανικανοποίητες παραγγελίες, (0, s, σ).

CB (complete backorder): Όλες οι παραγγελίες σε περίοδο έλλειψης προϊόντων γίνονται δεκτές, (∞, s, σ).

MTO (make-to-order): Η παραγωγή γίνεται κατά παραγγελία και δεν διατηρείται απόθεμα ασφαλείας, (c, 0, 0).

NODP (no-discrimination policy): Εδώ δεν κάνουμε διακρίσεις μεταξύ των πελατών, οπότε δεν διατηρούμε απόθεμα σ αποκλειστικά για πελάτες τύπου 1, (c, s, 0).

DP (discrimination policy): η προτεινόμενη πολιτική, (c, s, σ).

Εκτελούμε δύο σειρές πειραμάτων στις οποίες η κύρια διαφορά είναι η σχέση μεταξύ του συνολικού ρυθμού $\lambda_1 + \lambda_2$ αφίξεων πελατών και της ικανότητας παραγωγής του συστήματος μ.

4.1 Σύστημα με μεγάλο ρυθμό παραγωγής

Θεωρούμε ένα σύστημα στο οποίο οι παράμετροι έχουν τις ακόλουθες *τιμές αναφοράς*: $\mu = 1$, $\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.1$, και $h = 0.2$. Μελετάμε την επίδραση που έχει στο κέρδος του συστήματος η μεταβολή κάθε μίας από τις παραμέτρους λ_1, λ_2, b_1, b_2, και h ξεχωριστά, κρατώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους ίσες με τις τιμές αναφοράς τους.

Στο Σχήμα 4.1 καταγράφονται τα αποτελέσματα της αναζήτησης της βέλτιστης πολιτικής. Παρουσιάζονται τα βέλτιστα c, s, σ για κάθε πολιτική και το αντίστοιχο μέσο κέρδος. Η προτεινόμενη πολιτική DP έχει το μεγαλύτερο μέσο κέρδος και ακολουθεί με μικρή διαφορά η NODP. Η πολιτική CB είναι η αμέσως αποδοτικότερη πολιτική με την LS να έπεται. Τέλος η MTO δείχνει να είναι η λιγότερο επικερδής πολιτική με μέσο κέρδος κατά 8% μικρότερο από την βέλτιστη πολιτική DP.

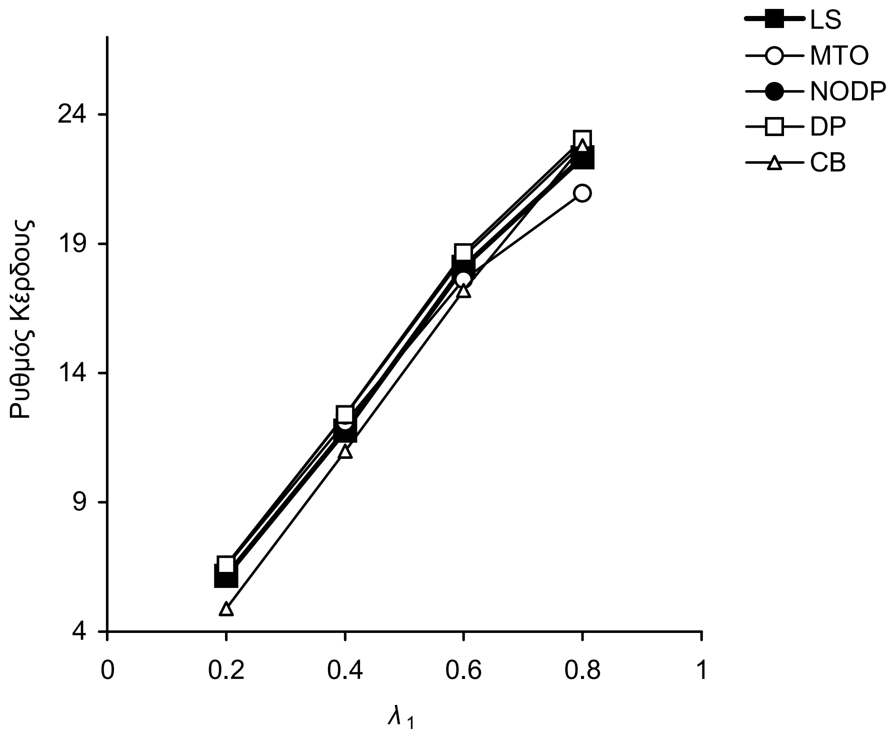
	c	s	σ	J
LS	0	10	0	22.334
MTO	12	0	0	20.965
CB	∞	10	6	22.794
NODP	7	9	0	22.859
DP	11	8	4	23.043

Σχήμα 4.1 Συγκριτικός πίνακας βέλτιστου μέσου κέρδους ανά πολιτική

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευαισθησίας των λ_1, λ_2, b_1, b_2, και h παρουσιάζονται στη συνέχεια.

4.1.1 Επίδραση της μεταβολής του λ_1.

Διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές και ίσες με τις τιμές αναφοράς μεταβάλλουμε το ρυθμό άφιξης λ_1 των πελατών τύπου 1.Τα αποτελέσματα των πειραμάτων παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.2.

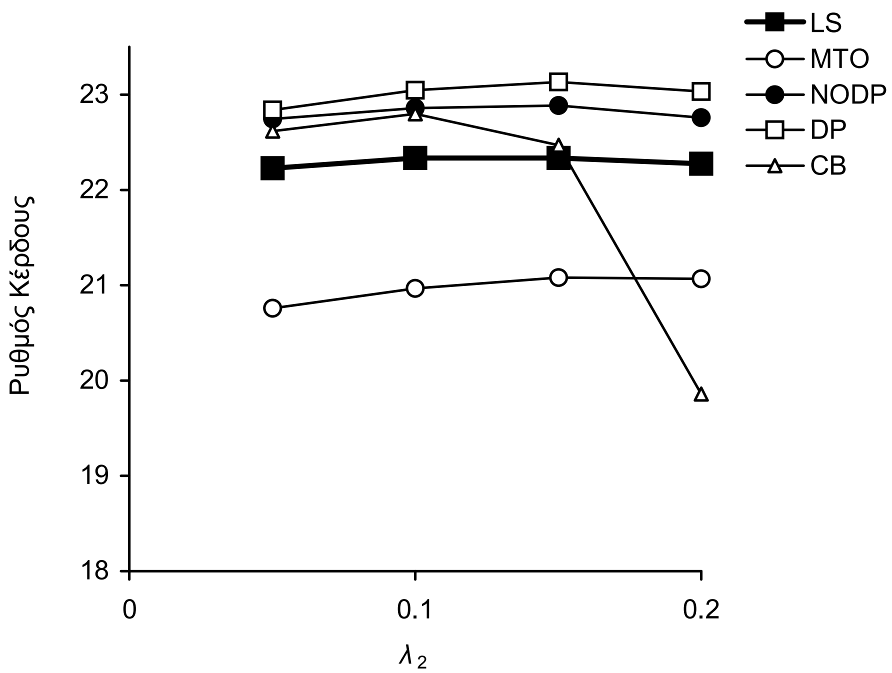


Σχήμα 4.2 Συγκριτικός πίνακας επίδρασης του λ_1 στο μέσο κέρδος όλων των υπό εξέταση πολιτικών

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα η διαφορά του μέσου κέρδους των DP, NODP, LS είναι μικρή για κάθε λ_1. Καθώς αυξάνεται το λ_1 το μέσο κέρδος της CB συγκλίνει στις τιμές των προαναφερθέντων πολιτικών. Αντίθετα η MTO παρουσιάζει μείωση του κέρδους σε σχέση με τις υπόλοιπες πολιτικές όσο το λ_1 αυξάνεται.

4.1.2 Επίδραση της μεταβολής του λ_2

Διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές και ίσες με τις τιμές αναφοράς μεταβάλλουμε το ρυθμό άφιξης λ_2 των πελατών τύπου 2. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.3.

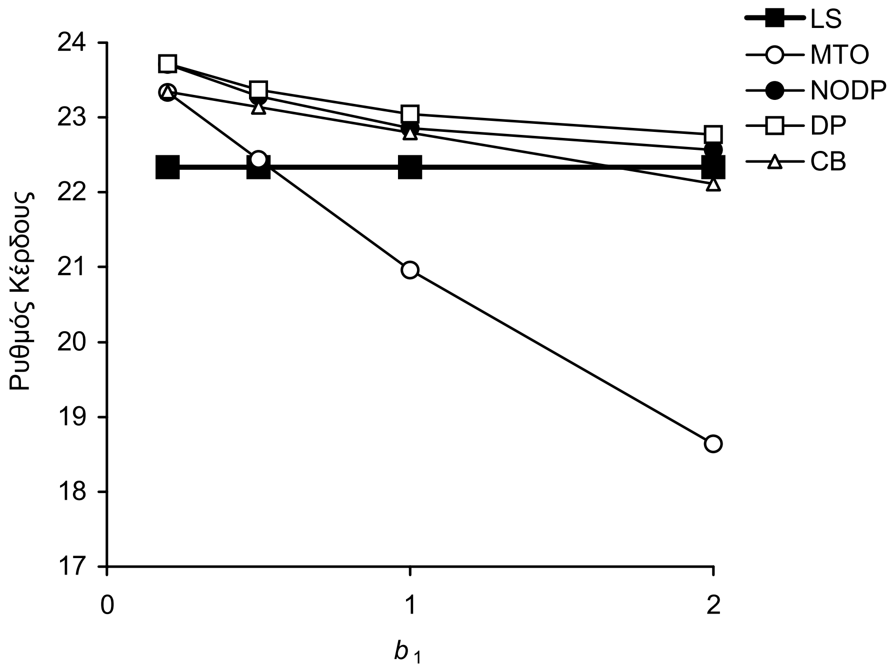


Σχήμα 4.3 Συγκριτικός πίνακας επίδρασης του λ_2 στο μέσο κέρδος όλων των υπό εξέταση πολιτικών

Παρατηρούμε ότι η αύξηση του λ_2 επιφέρει μικρές αλλαγές στο μέσο κέρδος όλων των πόλιτικών πλην της CB, στην οποία η αύξηση του λ_2 επιφέρει απότομη μείωση του κέρδους, όσο το λ_2 τείνει να πάρει την τιμή 0,2 ,για την οποία ο συνολικός αριθμός αφίξεων πελατων $\lambda_1 + \lambda_2$ είναι ίσος με το ρυθμός παραγωγής μ του συστήματος .

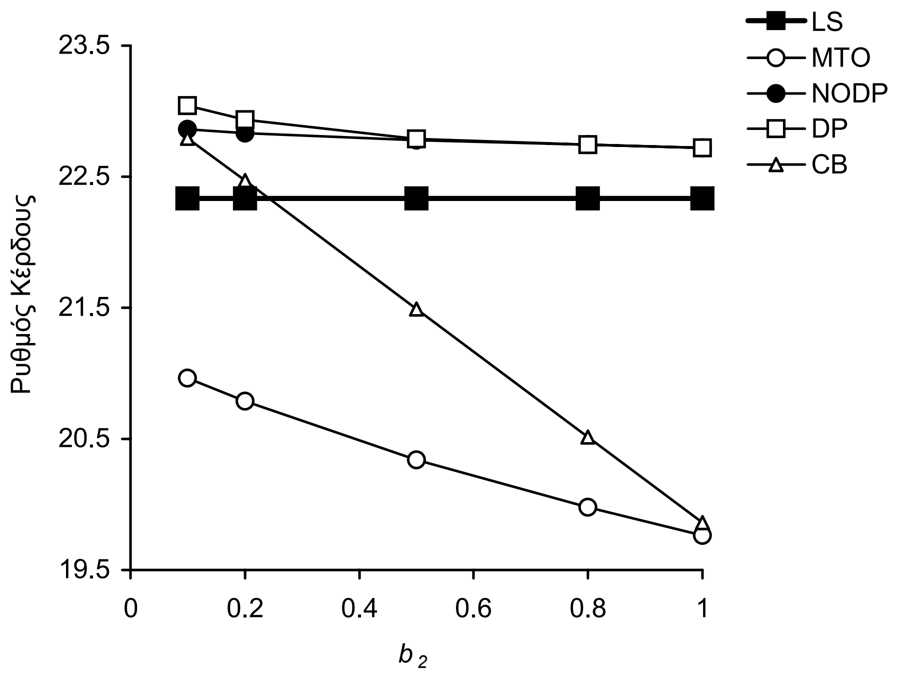
4.1.3 Επίδραση της μεταβολής του b_1 και του b_2

Διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές και ίσες με τις τιμές αναφοράς μεταβάλλουμε το κόστος ανικανοποίητης ζήτησης b_1 των πελατών τύπου 1. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4 Συγκριτικός πίνακας επίδρασης του b_1 στο μέσο κέρδος όλων των υπό εξέταση πολιτικών

Για μικρές τιμές του b_1 οι πολιτικές DP και NODP είναι σχεδόν ταυτόσιμες ως προς το μέσο κέρδος. Όσο όμως αυξάνεται το b_1 η διαφορά τους μεγαλώνει.Η CB παρουσιάζει μείωση όπως και η MTO για την οποία η μείωση είναι δραματική. Τέλος η LS δείχνει να μην επηρεάζεται από την μεταβολή του b_1.

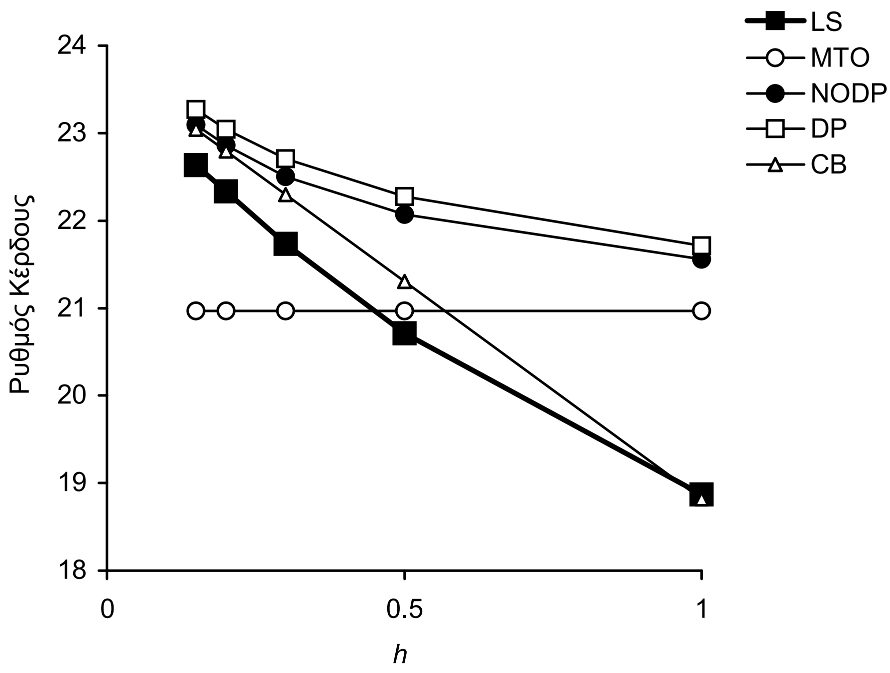


Σχήμα 4.5 Συγκριτικός πίνακας επίδρασης του b_2 στο μέσο κέρδος όλων των υπό εξέταση πολιτικών

Παρατηρούμε στο παραπάνω σχήμα ότι η NODP προσεγγίζει την DP, οι CB και η MTO μειώνονται δραστικά, ενώ η LS παραμένει αμετάβλητη όσο αυξάνεται το b_2.

4.1.4 Επίδραση της μεταβολής του h

Διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές και ίσες με τις τιμές αναφοράς μεταβάλλουμε το μοναδιαία κόστος αποθέματος h. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6 Συγκριτικός πίνακας επίδρασης του h στο μέσο κέρδος όλων των υπό εξέταση πολιτικών

Παρατηρούμε ότι το κέρδος της DP είναι περίπου το ίδιο με των CB και NODP για μικρές τιμές του h. Καθώς όμως το κόστος αποθέματος αυξάνεται η πολιτική CB παρουσιάζει δραστική μείωση του μέσου κέρδους. Επιπλέον η LS παρουσιάζει και αυτή μείωση του μέσου κέρδους καθώς το *h* αυξάνεται Η MTO δείχνει να μην επηρεάζεται από την μεταβολή του h.

4.2 Σύστημα με μικρό ρυθμό παραγωγής

Θεωρούμε ένα σύστημα στο οποίο οι παράμετροι έχουν τις ακόλουθες *τιμές αναφοράς*: $\mu = 1$, $\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.5$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.1$, και $h = 0.2$. Στην περίπτωση αυτή, ο συνολικός ρυθμός με τον οποίον φθάνουν οι παραγγελίες είναι μεγαλύτερος του ρυθμού με τον οποίο μπορεί να παράγει το σύστημα. Τυχόν εφαρμογή της πολιτικής CB θα οδηγούσε το σύστημα σε μία μόνιμη κατάσταση όπου το πλήθος εκκρεμών παραγγελιών θα είναι άπειρο. Συνεπώς ο μέσος ρυθμός κέρδους της πολιτικής CB είναι $-\infty$ για όλες τις περιπτώσεις και γι' αυτό παραλείπεται από τα σχήματα.

Ακολουθεί ο πίνακας βέλτιστου μέσου κέρδος για κάθε πολιτική με τα αντίστοιχα βέλτιστα *c ,s* , *σ*.

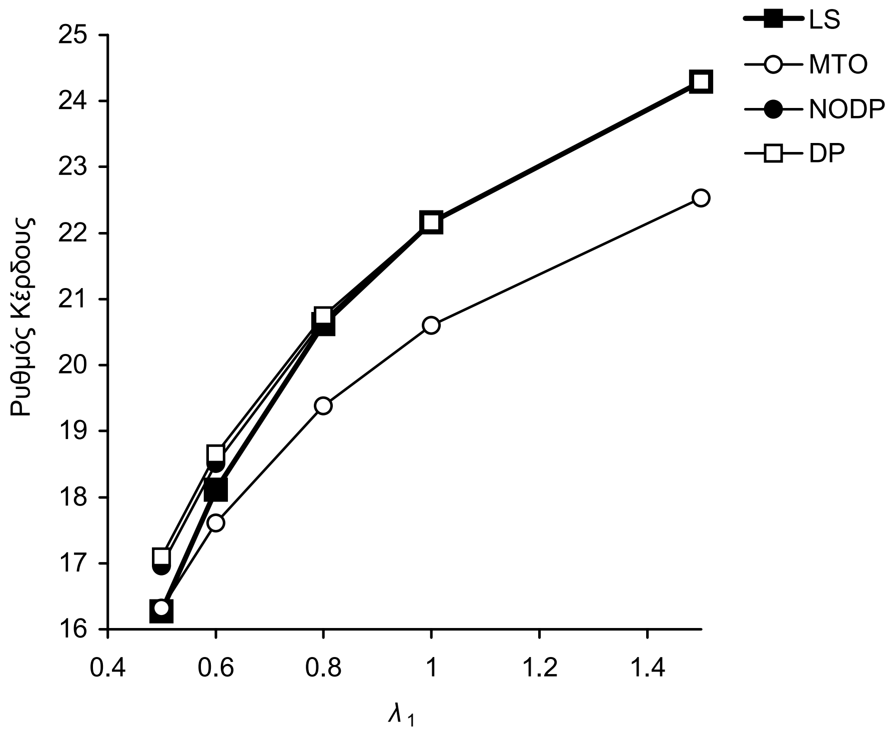
	c	s	σ	J
LS	0	10	0	20.62
MTO	10	0	0	19.381
NODP	1	10	0	20.684
DP	2	10	1	20.75

Σχήμα 4.7 Συγκριτικός πίνακας βέλτιστου μέσου κέρδους ανά πολιτική

Παρατηρούμε ότι οι πολιτικές NODP και LS προσεγγίζουν την πολιτική DP.

4.2.1 Επίδραση της μεταβολής του λ_1.

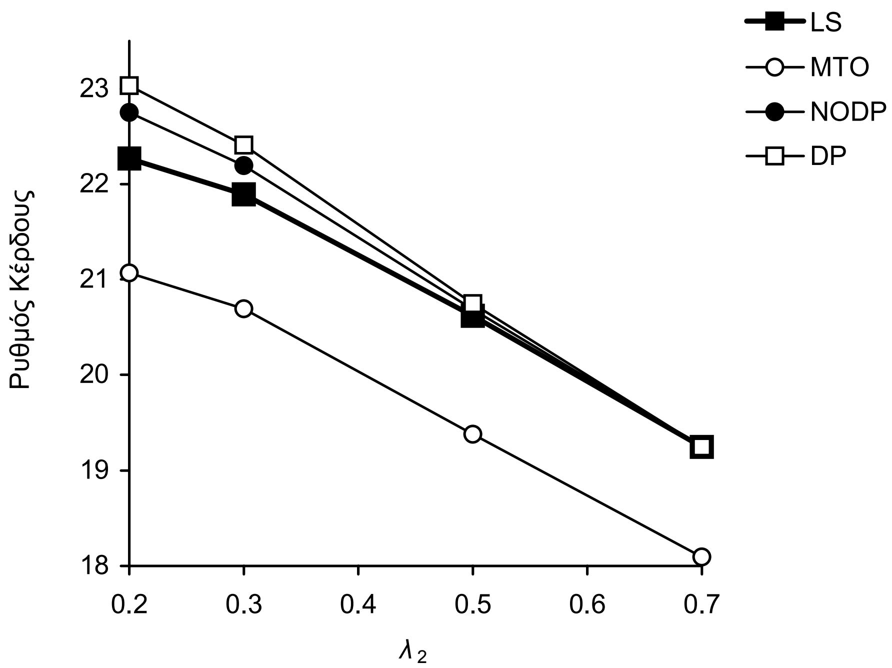
Διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές και ίσες με τις τιμές αναφοράς μεταβάλλουμε το ρυθμό άφιξης λ_1 των πελατών τύπου 1.Τα αποτελέσματα των πειραμάτων παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.8 Συγκριτικός πίνακας επίδρασης του λ_1 στο μέσο κέρδος όλων των υπό εξέταση πολιτικών

4.2.2 Επίδραση της μεταβολής του λ_2

Διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές και ίσες με τις τιμές αναφοράς μεταβάλλουμε το ρυθμό άφιξης λ_2 των πελατών τύπου 2.Τα αποτελέσματα των πειραμάτων παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.7.

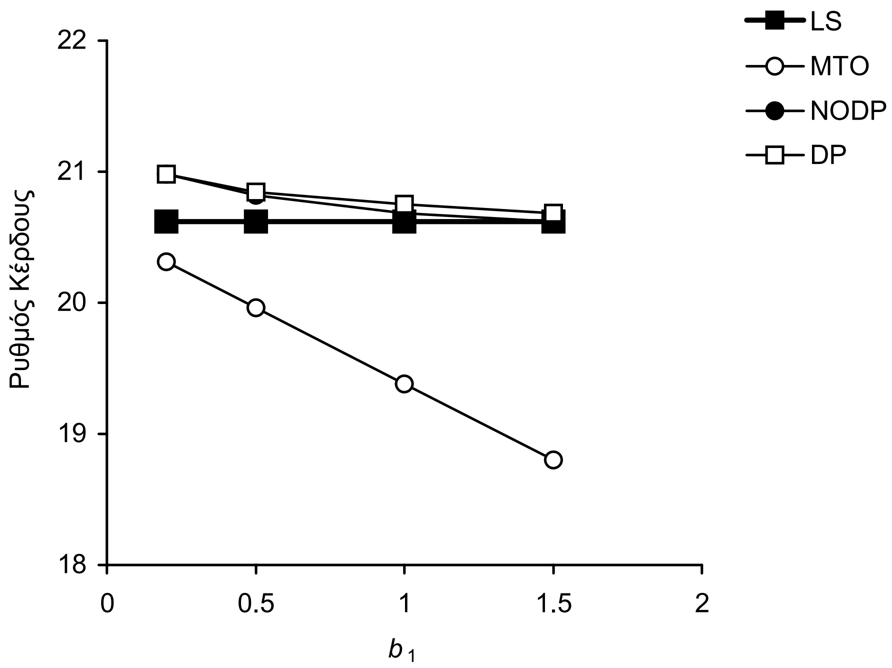


Σχήμα 4.9 Συγκριτικός πίνακας επίδρασης του λ_2 στο μέσο κέρδος όλων των υπό εξέταση πολιτικών

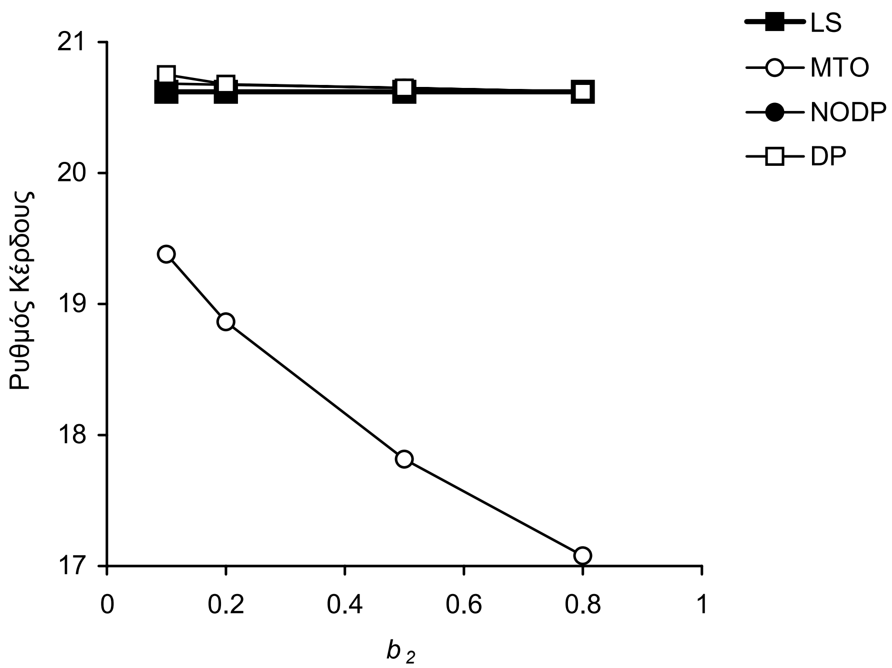
Παρατηρούμε ότι η υπεροχή της πολιτικής DP έναντι των άλλων είναι πιο διακριτή για μικρές τιμές του λ2.

4.2.3 Επίδραση της μεταβολής του b_1 και του b_2

Διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές και ίσες με τις τιμές αναφοράς μεταβάλλουμε το κόστος ανικανοποίητης ζήτησης b_1 των πελατών τύπου 1 (Σχήμα 4.10) και το κόστος b_2 (Σχήμα 4.11).



Σχήμα 4.10 Συγκριτικός πίνακας επίδρασης του b_1 στο μέσο κέρδος όλων των υπό εξέταση πολιτικών

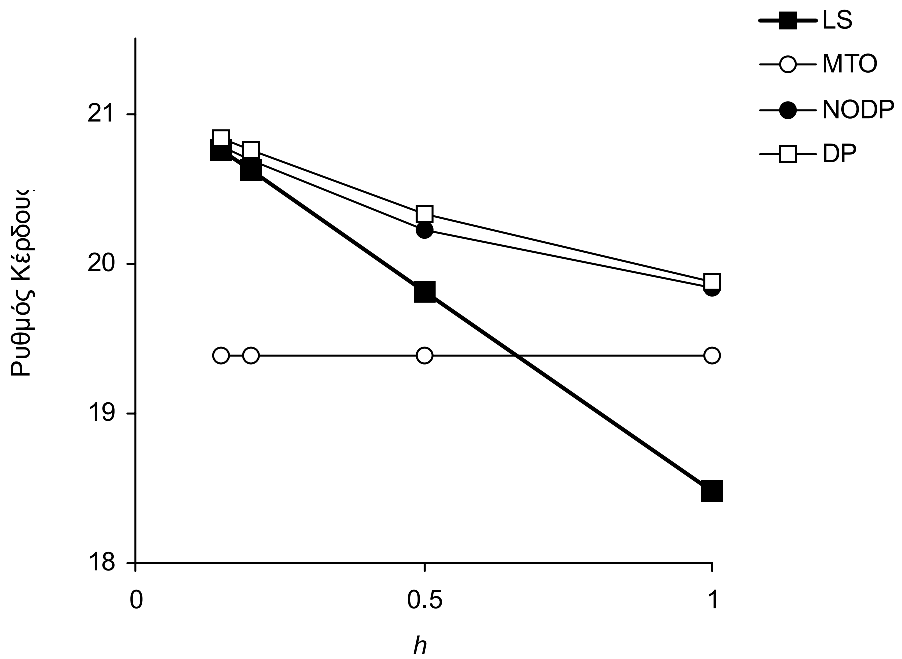


Σχήμα 4.11 Συγκριτικός πίνακας επίδρασης του b_2 στο μέσο κέρδος όλων των υπό εξέταση πολιτικών

Από τα σχήματα βλέπουμε ότι η πολιτική NODP προσεγγίζει την DP, όπως και η LS για μεγάλες τιμές του b_1 και του b_2. Αντίθετα η πολιτική MTO δεν είναι τόσο συμφέρουσα αφού το κέρδος γι'αυτήν είναι 2,5 – 10 % μικρότερο του κέρδους σε σχέση με την DP.

4.2.4 Επίδραση της μεταβολής του *h*

Διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές και ίσες με τις τιμές αναφοράς μεταβάλλουμε το μοναδιαία κόστος αποθέματος *h*. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.12 Συγκριτικός πίνακας επίδρασης του h στο μέσο κέρδος όλων των υπό εξέταση πολιτικών

Παρατηρούμε ότι το κέρδος της DP είναι περίπου το ίδιο με των LS και NODP για μικρές τιμές του h. Καθώς όμως το κόστος αποθέματος αυξάνεται η πολιτική LS παρουσιάζει δραστική μείωση του μέσου κέρδους. Η MTO δείχνει να μην επηρεάζεται από την μεταβολή του h.

5 Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή είχε ως στόχο την επίλυση συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και πωλήσεων σε ένα σύστημα που παράγει ένα προϊόν που διατίθεται σε δύο αγορές. Προτείναμε μια πολιτική μερικής ικανοποίησης της ζήτησης σύμφωνα με την οποία, δεν γίνονται δεκτές παραγγελίες πέραν ενός ορίου που ονομάζεται έλλειμμα βάσης, και, συγχρόνως, δίνεται προτεραιότητα στην πιο προσοδοφόρα αγορά. Συγκρίναμε αυτήν την πολιτική με (α) μία πολιτική που δεν κάνει διακρίσεις αλλά και με τις δημοφιλείς πολιτικές (β) απόρριψης, (γ) αποδοχής παραγγελιών όταν δεν υπάρχει απόθεμα, και (δ) παραγωγής; κατά παραγγελία χωρίς διατήρηση αποθέματος. Ως κριτήριο σύγκρισης χρησιμοποιήθηκε το μέσο κέρδος των πολιτικών ανά μονάδα χρόνου. Τα αποτελέσματα των πειράματων που έγιναν κατέδειξαν την υπεροχή της προτεινόμενης πολιτικής έναντι των άλλων πολιτικών σε κάθε περίπτωση.

Για περαιτέρω διερεύνηση του προβλήματος προτείνεται η μελέτη του συστήματος με διαφορετικά ελλείματα βάσης για κάθε τύπο πελάτη. Η επίλυση του προβλήματος στην περίπτωση αυτή απαιτεί λίγες τροποποιήσεις στον αλγόριθμο που παρουσιάζεται στην εργασία αυτή ενώ το κέρδος από την εφαρμογή τέτοιας πολιτική εκτιμάται ότι θα είναι μεγαλύτερο εκείνου που επιτυγχάνει η προτεινόμενη.

Βιβλιογραφία

[1] F. W. Harris, "How many parts to make at once," *Operations Research*, 947-950, 1990 (reprinted from *Factory, the Magazine of Management,* 10(2), 135-136, 1913.

[2] G. Hadley and T. M. Whitin, "Analysis of Inventory Systems," *Prentice Hall, Englewood-Cliffs, NJ*, 1963.

[3] A. Y. Ha, "Inventory rationing in make-to-stock production system with several classes and lost sales," *Management Science"*, 48 (8), 1093-1103, 1997.

[4] Y. Dallery and S.B Gerschwin, "Manufacturing flow line systems: a review of models and analytical results," *Queuing systems*, 12, 3-94, 1992.

[5] A. Y. Ha, "Stock- Rationing Policy for a Make-to-stock Production system with two priority classes and Backordering," *Naval Research Logistics*, 44, 457-472, 1997.

[6] Ε. Ιωαννίδης, "Συνεργαζόμενες πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής," Διδακτορική διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2004.

[7] Γ. Λοϊζος, "Συντονισμένες πολιτικές ελέγχου ποιότητας και παραγωγής σε εργοστάσια με ποικιλία αγοραστών," Μεταπτυχιακή διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2005.

[8] S. Ioannidis, V. S. Kouikoglou and Y. A. Phillis, "Coordinating quality, production, and sales in manufacturing systems," *Submitted to International Journal of Production Research,* 42(18), 3947 – 3956, 2004.

[9] V. S. Kouikoglou, S. Ioannidis and G. Saharidis, "Review of some queueing models for managing inventories, backorders, and quality jointly in stochastic manufacturing systems," 5^{th} International Conference on Analysis of Manufacturing System, Zakynthos Island, Greece, 20-25, May 2005.

[10] Ι. Φίλης, "Δίκτυα Παραγωγής (CAM)," Σημειώσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2000.

[11] U. Herzog, L. Woo and K. M. Chandy, "Solution OF Queuing Problem by a Recursive Technique," *IBM Journal of Research and Development*, May, 295-300, 1975.

[12] V. S. Kouikoglou, "Sensitivity analysis and decomposition of unreliable production lines with blocking," *Annals of Operations Research*, 93, 245-264, 2000.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Κώδικας για την εκτίμηση της απόδοσης του συστήματος

```
% Optimal inventory(s)/backordering (c)/stock rationing (sig)
policy
% for an M/M/1 type production system with two classes of
customers

clear all
close all


m=1;        % mesos rithmos paragogis
l1=0.8;     % mesos rithmos afixeon pelaton tupou 1
l2=0.5;     % mesos rithmos afixeon pelatom tupou 2

cmin=0;
cmax=15;
smin=0;
smax=10;
sigmin=0;
sigmax=10;

if (sigmax>smax)
    sigmax=smax;
end

b1=1;       % kostos anamonis ana pelati tupou 1
b2=0.1;     % kostos anamonis ana pelati tupou 2
p1=30;      % kerdos ana pelati tupou 1 ana monada proiontos
p2=8;       % kerdos ana pelati tupou 2 ana monada proiontos

h=0.2;        % kostos apothematos ana m.x ana m.p


z=0;        %metritis epanalipseon

rho=m/(l1+l2);      % upologismos tou rho

K=zeros(cmax*smax*smax,4);
Veltisto=zeros(1,4);
Maketorder=zeros(1,4);
Lostsales=zeros(1,4);
Fullbackorder=zeros(1,4);
Xorisdiakrisi=zeros(1,4);
```

```
for c=cmin:cmax
    for s=smin:smax
        if (c+s>0)
            for sig=max(0,sigmin):min(s,sigmax)

TH=0;       %sinoliko throughput sustimatos
TH1=0;      %throughput 1
TH2=0;      %throughput 2

iH=0;
iB1=0;
iB2=0;

z = z+1;        %metritis epanalipseon
n=c+sig+1;

P=zeros(c+sig+1,c+sig+1);
A=zeros(c+sig+1,c+sig+1);
B=zeros(c+sig+1,c+sig+2);
C=zeros(c+sig+1,c+sig);

for i=1:c+sig+1
    A(i,i)=m;
end

for i=1:c+sig
    C(i,i)=l1;
    C(i+1,i)=l2;
end

for i=1:c+sig+1
    B(i,i)=m;
end

B(c+sig+1,c+sig+2)=m;

F=zeros(c+sig+1,c+sig+1,c+sig+1);% i diastasi meatavaletai se
kathe epanlalipsi sinartisi ton c,sig,s
G=zeros(c+sig+1,c+sig+1,c+sig+1);% i diastasi meatavaletai se
kathe epanlalipsi sinartisi ton c,sig,s
Temp=zeros(c+sig+1,c+sig+1);
Temp1=zeros(c+sig+1,c+sig+1);
Temp2=zeros(c+sig+1,c+sig+1);

Temp=inv(A)*C;
```

```
for i=1:n
    for j=1:n-1;
         G(n,i,j)=Temp(i,j);
         F(n,i,j)=Temp(i,j);
    end
end

for i=1:n
    A(i,i)=l1+l2+m;
end

while (n>2)

    A(:,n)=[];
    A(n,:)=[];
    C(:,n-1)=[];
    C(n,:)=[];
    B(:,n+1)=[];
    B(n,:)=[];
    B(n-1,n)=m;

    n=n-1;

     Temp1=inv(A-B*Temp)*C;
     clear Temp;
     Temp=Temp1;

 for i=1:n
     for j=1:n-1;
         G(n,i,j)=Temp(i,j);
         F(n,i,j)=Temp(i,j);
     end
 end
 for k=n+1:c+sig+1
     clear Temp1;
     clear Temp2;
     for i=1:k
         for j=1:n
             Temp1(i,j)=F(k,i,j);
         end
     end

     Temp2=Temp1*Temp;

     for i=1:k
         for j=1:n-1
             F(k,i,j)=Temp2(i,j);
         end
     end
 end

end %telos while

sum =0;

% prosthesi pithanotiton apothematikon theseon sig->s
```

```
for n=2:c+sig+1
    for i=1:n
      sum=sum+F(n,i,1);
    end
end

% prosthesi pithanotiton apothematikon theseon sig->s

sum=sum+[1-rho^(s-sig+1)]/[1-rho];


% P=zeros(c+sig+1,c+sig+1);% i diastasi meatavaletai se kathe
epanlalipsi


% Ypologismos pithanotiton apothematikis thesis -c -> s kai
kanonikopoiisi

    for n=2:c+sig+1
        for i=1:n
            P(n,i)=F(n,i,1)/sum;
        end
    end


H=0;         % Meso apothema
B1=0;        % Mesos arithmos pelaton tupou 1 stin oura
B2=0;        % Mesos arithmos pelaton tupou 2 stin oura

% Ypologismos apothematos gia sig, sig+1, ..., s
    for i=sig:s
        H=H+i*rho^(i-sig)/sum;%    sunupologizoume    kai    to
apothema ton katastaseon sig->s
    end

% Ypologismos B1,B2 kai H dedomenou tou pinaka P me -c-> sig

    for i=2:(c+sig+1)
        for j=1:i
           invpos=sig+1-i;
           iB1=max(-invpos+1-j,0);
           iB2=j-1;
           iH=max(sig+j-i,0);
           B1=B1+iB1*P(i,j);
           B2=B2+iB2*P(i,j);
           H=H+iH*P(i,j);
        end
    end

% Ypologismos throughput (thruput) sustimatos
    P(1,1)=1/sum;
    for j=1:c+sig+1
         TH=TH+P(c+sig+1,j);        %upologismos me vasi tin
katastasi -c
```

```
    end

    TH1=(1-TH)*l1;
    TH2=(1-TH)*l2;

% upologismos kerdous gia kathe sindiasmo c,s,sig

    K(z,1)=c;
    K(z,2)=s;
    K(z,3)=sig;
    K(z,4)=TH1*p1+TH2*p2-H*h-b1*B1-b2*B2;

 %Ypologismos veltistou mesou kostous  poitikis diakriseon

    if K(z,4)>Veltisto(4);
       Veltisto(1)=K(z,1);
       Veltisto(2)=K(z,2);
       Veltisto(3)=K(z,3);
       Veltisto(4)=K(z,4);
    end

  %Ypologismos  veltistou  mesou  kostous    politikis  make  to
order

             if K(z,2)==0 && K(z,3)==0 && K(z,4)>Maketorder(4)
                 Maketorder(1)=K(z,1);
                 Maketorder(2)=K(z,2);
                 Maketorder(3)=K(z,3);
                 Maketorder(4)=K(z,4);
             end

 %Ypologismos veltistou mesou kostous   politikis lost sales

             if K(z,1)==0 && K(z,4)>Lostsales(4)
                 Lostsales(1)=K(z,1);
                 Lostsales(2)=K(z,2);
                 Lostsales(3)=K(z,3);
                 Lostsales(4)=K(z,4);
             end
```

```
%Ypologismos veltistou mesou kostous   politikis xoris
%diakrisis

             if K(z,3)==0 && K(z,4)>Xorisdiakrisi(4)
                 Xorisdiakrisi(1)=K(z,1);
                 Xorisdiakrisi(2)=K(z,2);
                 Xorisdiakrisi(3)=K(z,3);
                 Xorisdiakrisi(4)=K(z,4);
            end


            end
        end
    end
end
```