ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συνδυασμένος έλεγχος αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής ενός σταδίου που παράγουν δύο τύπους προϊόντων και δεν απαιτούνται χρόνοι προετοιμασίας

Σμπόνιας Παναγιώτης

Επιβλέπων καθηγητής:

Ιωαννίδης Ευστράτιος

Χανιά, 2015

Στη μνήμη του πατέρα μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον καθηγητή μου κ. Ευστράτιο Ιωαννίδη για την ανάθεση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και την άριστη καθοδήγησή του για την εκπόνησή της. Επίσης ευχαριστώ θερμά τη μητέρα μου και τον αδερφό μου για την παρουσία και συμπαράστασή τους όλο αυτό το χρονικό διάστημα καθώς και φίλους και συμφοιτητές κατά τη διάρκεια όλων των σπουδών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι να εξετάσουμε ένα σύστημα παραγωγής, που παράγει δύο προϊόντα και τα διαθέτει σε δύο κατηγορίες πελατών αντίστοιχα, με εκθετικούς χρόνους παραγωγής και τις αφίξεις πελατών να είναι τυχαίες ακολουθόντας τη διαδικασία Poisson. Σκοπός είναι με την σύγκριση τριών απλών πολιτικών ελέγχου, του αποθέματος και των εισερχόμενων παραγγελιών, να επιλεγούν αυτές που ελαχιστοποιούν το κόστος λειτουργίας του συστήματος. Τα αποτελέσματα, με τη βοήθεια αριθμητικών πειραμάτων, που δίδουν χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τις ιδιότητες δεύτερης τάξης της συνάρτησης κόστους, δείχνουν ότι επιτυγχάνεται σημαντική μείωση του κόστους λειτουργίας του συστήματος παραγωγής.

1. Εισαγωγή

Ο έλεγχος της παραγωγής διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη βελτιστοποίηση της παραγωγικής διαδικασίας μιας βιομηχανικής επιχείρησης με απώτερο σκοπό τη σημαντική μείωση του κόστους παραγωγής ούτως ώστε να εξασφαλίσει την επιβίωσή της στη σύγχρονη ανταγωνιστική αγορά. Οι σύγχρονες επιχειρήσεις ανάλογα με την πολυπλοκότητα των παραγωγικών τους συστημάτων και την παραγωγική τους δυναμικότητα προσπαθούν να οργανώσουν με τέτοιο τρόπο την παραγωγική τους διαδικασία ώστε να παράγουν ανταγωνιστικά προϊόντα ή υπηρεσίες για τον σύγχρονο καταναλωτή μειώνοντας ταυτόχρονα το κόστος παραγωγής.

Η λήψη σημαντικών αποφάσεων στα συστήματα παραγωγής είναι επίσης σημαντική ώστε να αποφεύγεται η διατήρηση υψηλών αποθεμάτων, η έλλειψη προϊόντων και η απόρριψη παραγγελιών με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους παραγωγής.

Στη συγκεκριμένη εργασία εξετάζουμε ένα σύστημα παραγωγής που παράγει δύο τύπους προϊόντων για να ικανοποιήσει τη ζήτηση δύο αντίστοιχων κατηγοριών πελατών. Στόχος μας είναι η εξέταση των συνεπειών από τον συνδυασμένο έλεγχο παραγωγής του συστήματος (πότε ξεκινά, με τι ρυθμό γίνεται και πότε διακόπτεται η παραγωγή) και τον έλεγχο των πωλήσεων (πότε γίνεται δεκτή και πότε απορρίπτεται μία αφικνούμενη παραγγελία).

2. Αντικείμενο εργασίας και βιβλιογραφική αναφορά

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε ένα στοχαστικό σύστημα παραγωγής το οποίο παράγει δύο προϊόντα και τα διαθέτει σε δύο κατηγορίες πελατών ή σε δύο διαφορετικές αγορές αντίστοιχα. Το ένα προϊον ή η πρώτη κατηγορία πελατών είναι πιο απαιτητική από τη δεύτερη κατηγορία πελατών, από την άποψη ότι η επιχείρηση έχει μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους πωλώντας το προϊόν της πρώτης κατηγορίας και αντίστοιχα μεγαλύτερο κόστος όταν καθυστερεί να εξυπηρετήσει έναν πελάτη αυτής της κατηγορίας.

Στόχος είναι να καθοριστεί πότε θα σταματάει η παραγωγή, πότε θα επαναλειτουργεί η μηχανή και πότε μια παραγγελία θα ικανοποιείται, θα μπαίνει στην αναμονή ή θα απορρίπτεται με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του κόστους λόγω αποθεματοποίησης , απόρριψης παραγγελιών και εκκρεμών παραγγελιών.

Το πρόβλημα ικανοποίησης παραγγελιών, πελατών οι οποίοι ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες, αλλά με έναν τύπο προϊόντος αποτελεί συχνό πρόβλημα στον τομέα των συστημάτων παραγωγής και έχει μελετηθεί αρκετά στη βιβλιογραφία. Ένα παράδειγμα στην πρακτική εφαρμογή αυτού του προβλήματος είναι όταν ο κατασκευαστής λειτουργεί και σαν έμπορος λιανικής και σαν χονδρέμπορος. Για παράδειγμα μια αυτοκινητοβιομηχανία όπου ο κατασκευαστής εξαρτημάτων μπορεί να πουλάει το προϊόν του σε εταιρίες που φτιάχνουν καινούρια οχήματα αλλά και σε επιχειρήσεις που κάνουν service στα αυτοκίνητα.

Οι περισσότερες εργασίες που έχουν μελετηθεί θεωρούν είτε ότι οι εκκρεμείς παραγγελίες γίνονται όλες αποδεκτές και περιμένουν στην ουρά να ικανοποιηθούν (βλέπε πχ [6]), είτε ότι χάνονται εφόσον δεν υπάρχει επαρκές απόθεμα (βλέπε πχ [5]). Αυτές οι δύο ακραίες περιπτώσεις στη συγκεκριμένη εργασία είναι οι δύο πολιτικές που συγκρίνονται με την προτεινόμενη πολιτική συνδυασμένου ελέγχου παραγωγής και αποδοχής παραγγελιών την πολιτική Βασικού αποθέματος Βασικών ελλειμμάτων (BABE), οι οποίες θα παρουσιαστούν αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια. Στην εργασία [8] μελετάται ένα τέτοιο πρόβλημα συνδυασμένου ελέγχου συστήματος παραγωγής. Στην διπλωματική εργασία [9] εξετάζεται ένα σύστημα παραγωγής ενός τύπου προϊόντος για δύο κατηγορίες πελατών με χρόνους επανεκκίνησης. Στο άρθρο [7] ο S. Ioannidis εξετάζει ένα σύστημα συνδυασμένου ελέγχου παραγωγής και αποδοχής παραγγελιών ενός προϊόντος για δύο κατηγορίες πελατών, με τα αριθμητικά αποτελέσματα να δείχνουν ότι η προτεινόμενη πολιτική είναι καλύτερη από άλλες ευρέως διαδεδομένες πολιτικές και ένα πολύ καλό υποκατάστατο της βέλτιστης πολιτικής. Το γενικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι με την ελεγχόμενη αποδοχή παραγγελιών η απόδοση του συστήματος βελτιώνεται αισθητά.

Το πρόβλημα του ελέγχου παραγωγής συστημάτων με πολλούς τύπους προϊόντων έχει μελετηθεί εκτενώς στο παρελθόν. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα βιβλία των Gershwin [2] και των Sethi and Zhang [3]στα οποία γίνεται εκτενής αναφορά σε αυτού του είδους τα προβλήματα όπως και την εργασία του Ha [4]. Σε όλες αύτες τις εργασίες όμως δεν μελετάται το πρόβλημα του ελέγχου αποδοχής πελατών. Είτε όλοι οι πελάτες γίνονται δεκτοί είτε σε περίπτωση έλλειψης αποθέματος οι παραγγελίες χάνονται.

Η προτεινόμενη πολιτική που μελετάται στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιεί τρία κατώφλια ελέγχου στη διαδικασία παραγωγής και αποδοχής παραγγελιών.

1. Κατώφλι βασικού αποθέματος,
2. Κατώφλι εκκρεμών παραγγελιών προϊόντος τύπου 1,
3. Κατώφλι εκκρεμών παραγγελιών προϊόντος τύπου 2

Στα επόμενα κεφάλαια περιγράφεται το σύστημα και πως μοντελοποιείται ως μία αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης με τη βοήθεια μιας επαναληπτικής διαδικασίας πινάκων. Γνωρίζοντας τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης υπολογίζουμε τη συνάρτηση κόστους που αποτελεί το μέτρο απόδοσης του συστήματος. Τέλος, όπως αναφέραμε παραπάνω, γίνεται σύγκριση της προτεινόμενης πολιτικής με τις πολιτικές πλήρους απόρριψης (Lost sales LS) όπου απορρίπτονται όλες οι νέες παραγγελίες εάν δεν υπάρχει επαρκές απόθεμα στο σύστημα και πλήρους αποδοχής (Complete backordering CB) όπου όλες οι αφιχθείσες παραγγελίες γίνονται αποδεκτές και περιμένουν στην ουρά να εξυπηρετηθούν.

Η περιγραφή του συστήματος παραγωγής που μελετάμε γίνεται στο κεφάλαιο 3. Η μοντελοποίηση του συστήματος παραγωγής και η διαδικασία εκτίμησης των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης του συστήματος παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 4. Ο υπολογισμός της συνάρτησης κόστους γίνεται στο κεφάλαιο 5. Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα και γίνεται σύγκριση μεταξύ των τριών πολιτικών για τις διάφορες παραμέτρους του συστήματος. Τέλος στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της συγκεκριμένης εργασίας.

3. Περιγραφή συστήματος παραγωγής

Στη παρούσα εργασία εξετάζουμε ένα σύστημα παραγωγής δύο προϊόντων, τα οποία διατίθενται σε δύο κατηγοριές πελατών αντίστοιχα. Η άφιξη παραγγελιών είναι τυχαία και κάθε πελάτης ζητάει μία μονάδα της αντίστοιχης κατηγορίας προϊόντος.

Οι αφίξεις παραγγελιών πελατών της κατηγορίας 1 και πελατών της κατηγορίας 2 ακολουθούν τη διαδικασία Poisson με ρυθμούς $\boldsymbol{\lambda_1}$ και $\boldsymbol{\lambda_2}$ αντίστοιχα.

Οι χρόνοι παραγωγής του κάθε προϊόντος είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, εκθετικά κατανεμημένες με μέσες τιμές $\boldsymbol{1/\mu_1}$ και $\boldsymbol{1/\mu_2}$ για το κάθε προϊόν αντίστοιχα.

Η διαδικασία παραγωγής χρησιμοποιεί ένα κατώφλι ασφαλείας s αποθέματος για να προστατεύει το σύστημα από ελλείψεις αποθέματος αλλά και από υπερβολική συσσώρευση αποθέματος για τον εκάστοτε τύπο προϊόντος. Το κατώφλι ονομάζεται ***s** βασικό απόθεμα*. Το σύστημα παράγει το προϊόν τύπου 1 όσο το συνολικό απόθεμα είναι μικρότερο του βασικού αποθέματος και το πλήθος των κομματιών στο απόθεμα του προϊόντος τύπου 1 είναι μικρότερος ή ίσος από το αντίστοιχο μέγεθος αποθέματος του προϊόντος τύπου 2 και σταματάει να παράγει όταν το συνολικό απόθεμα γίνει ίσο με $\boldsymbol{s}$. Αντίστοιχα το σύστημα παράγει το προϊόν τύπου 2 όσο το συνολικό απόθεμα είναι μικρότερο του βασικού αποθέματος και το απόθεμα του προϊόντος αυτού είναι μικρότερο από το απόθεμα προϊόντων τύπου 1. Όταν το συνολικό απόθεμα γίνει ίσο με το βασικό απόθεμα η διαδικασία παραγωγής σταματάει.

Κατά τη διάρκεια έλλειψης αποθέματος το σύστημα δέχεται μία παραγγελία πελάτη τύπου 1 ή πελάτη τύπου 2 εάν οι εκκρεμείς παραγγελίες του εκάστοτε πελάτη δεν ξεπερνούν το κατώφλι εκκρεμών παραγγελιών για το κάθε προϊόν c_1 και c_2 αντίστοιχα, διαφορετικά απορρίπτεται. Τα κατώφλια c_1 και c_2 ονομάζονται βασικό έλλειμμα τύπου 1 και τύπου 2 αντίστοιχα.

Οι παραγγελίες και των δύο κατηγοριών ικανοποιούνται άμεσα εάν υπάρχει απόθεμα. Σε περίπτωση εκρεμμών παραγγελιών και των δύο κατηγοριών πελατών, το σύστημα δίνει προτεραιότητα στη κατηγορία 1. Δηλαδή οι εκκρεμείς παραγγελίες της κατηγορίας 2 ικανοποιούνται αφού ικανοποιηθούν πρώτα οι εκκρεμείς παραγγελίες της πρώτης κατηγόριας, συνεπώς αν υπάρχουν εκκρεμείς παραγγελίες και των δύο τύπων προϊόντων το σύστημα παράγει ένα τεμάχιο τύπου 1.

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι όλες οι παραγγελίες του προϊόντος τύπου 1 να έχουν ικανοποιηθεί (τόσο αυτές που εκκρεμούν όσο και αυτές που αφίχθησαν στο ενδιάμεσο) και μόνο όταν το σύστημα έχει πλέον μονο εκκρεμείς παραγγελίες του προϊόντος τύπου 2 εξυπηρετεί τους πελάτες της συγκεκριμένης κατηγορίας προϊόντος. Η παραπάνω πολιτική ονομάζεται πολιτική βασικού αποθέματος και βασικού ελλείματος με απόδοση προτεραιότητας στο πρώτο προϊόν.

Η συνολική αξιολόγηση της απόδοσης του συστήματος εκφράζεται μέσω του αναμενόμενου κόστους λειτουργίας. Η ποσότητα αυτή εξαρτάται από το κόστος των παραγγελιών που απορρίπτονται, το κόστος αποθεματοποίησης και το κόστος εκκρεμών παραγγελιών.

Με r_i ορίζονται οι μοναδιαίες απώλειες κέρδους λόγω απόρριψης παραγγελίας τύπου i, με h_i δηλώνεται το μοναδιαίο κόστος αποθεματοποίησης έτοιμων κατεργασμένων προϊόντων τύπου i και το b_i εκφράζει το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών τύπου i.

Επειδή έχει γίνει παραδοχή οτι τα προϊόντα των πελατών τύπου 1 έχουν προτεραιότητα σε σχέση με τα προϊόντα των πελατων τύπου 2 υποθέτουμε ότι $r_1 \geq r_2$ όπως και $b_1 \geq b_2$.

4. Μοντελοποίηση συστήματος παραγωγής

Έχουμε ένα σύστημα παραγωγής του οποίου η λειτουργία περιγράφηκε εκτενώς στο προηγούμενο κεφάλαιο. Υποθέτουμε ότι η διάρκεια παραγωγής μίας μονάδας του κάθε προϊόντος όπως αναφέραμε είναι εκθετική με μέση τιμή $1/\mu_1$ και $1/\mu_2$ αντίστοιχα και οι αφίξεις πελατών του προϊόντος τύπου 1 και 2 ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

Το σύστημα παραγωγής το οποίο περιγράφηκε μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου.

Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από τις παρακάτω μεταβλητές:

1. Μεταβλητή m η οποία δείχνει το τρέχον απόθεμα του προϊόντος τύπου 1 στο σύστημα ή τις εκκρεμείς παραγγελίες του ιδίου προϊόντος.
2. Μεταβλητή k που δηλώνει το τρέχον απόθεμα του προϊόντος τύπου 2 στο σύστημα ή τις εκκρεμείς παραγγελίες του προϊόντος.

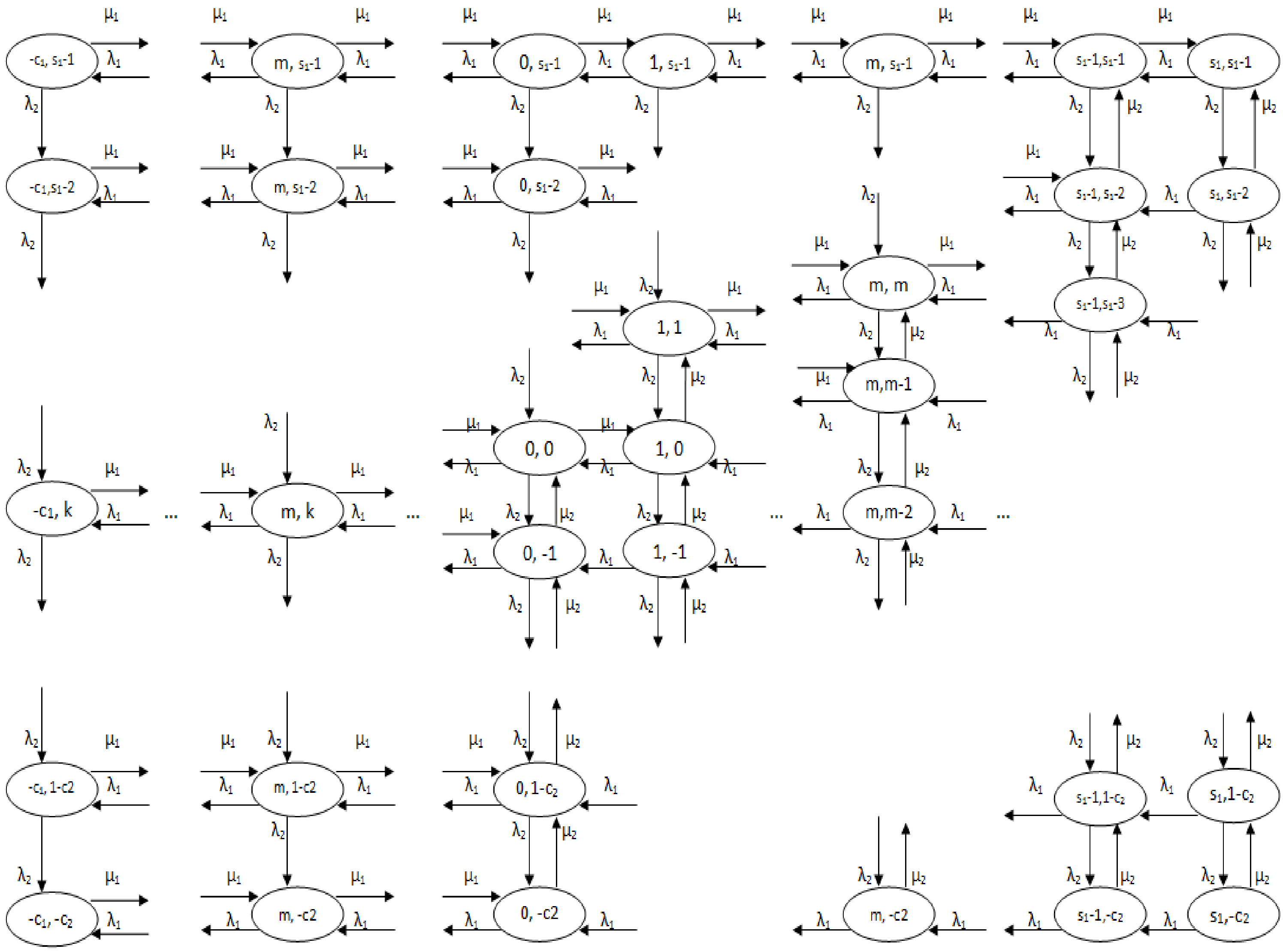
Όταν το m είναι θετικό τότε υπάρχει στο σύστημα απόθεμα του προϊόντος τύπου 1, ενώ όταν το m είναι αρνητικό τότε υπάρχει έλλειμμα στο σύστημα για το συγκεκριμένο προϊόν και δημιουργείται ουρά εκκρεμών παραγγελιών πελατών τύπου 1.

Κατ' αντιστοιχία όταν το k είναι θετικό τότε υπάρχει στο σύστημα απόθεμα του προϊόντος τύπου 2, ενώ όταν το k είναι αρνητικό υπάρχει έλλειμμα στο σύστημα για το συγκεκριμένο προϊόν και δημιουργείται ουρά εκκρεμών παραγγελιών πελατών τύπου 2.

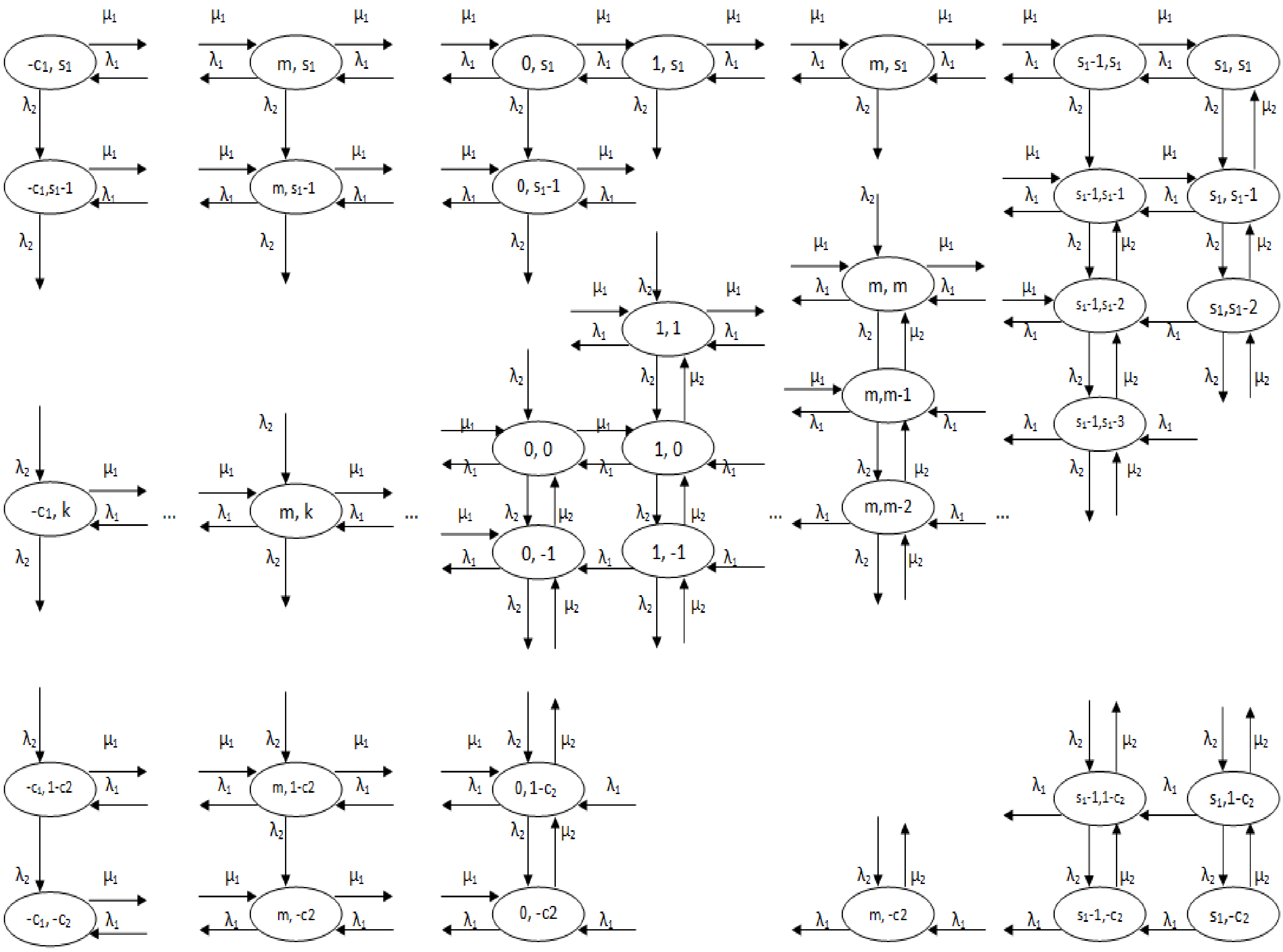
4.1 Αλυσίδα Markov

Η εξέλιξη του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από μια αλυσίδα Markov. Οι καταστάσεις της αλυσίδας και οι μεταβάσεις της παρουσιάζονται στα σχήματα 4.1 και 4.2.

Η μορφή της αλυσίδας για τις πολιτικές που εξετάζουμε, εξαρτάται από το βασικό απόθεμα s. Έστω s_1, s_2 το μέγιστο απόθεμα προϊόντων τύπου 1 και 2 αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι $s_1 + s_2 = s$. Όταν το s είναι ζυγός αριθμός το s_1 ισούται με το s_2 ενώ άν το s είναι περιττός αριθμός, το s_1 είναι κατα μία μονάδα μεγαλυτερο από το s_2, καθώς δίδουμε ένα ελαφρύ προβάδισμα στους πελάτες τύπου 1. Έτσι έχουμε αντίστοιχα τις αλυσίδες Markov παρακάτω για τις δύο περιπτώσεις:



Σχήμα 4.1 Αλυσίδα Markov για την εφαρμοζόμενη πολιτική για $s_1=s_2+1$



Σχήμα 4.2 Αλυσίδα Markov για την εφαρμοζόμενη πολιτική για s_1=s_2

4.2. Εξισώσεις Chapman - Kolmogorov

Αφού το σύστημα παραγωγής περιγράφεται ως μία αλυσίδα Markov οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman – Kolmogorov (C-K) οι οποίες φαίνονται παρακάτω για τη βασική μας πολιτική:

$P(m,k)$ × (*το μέσο ρυθμό εξόδου από αυτή*) =Σ P(*να βρίσκεται σε άλλη κατάσταση*) × (*το μέσο ρυθμό μετάβασης στη συγκεκριμένη κατάσταση*)

Πιο αναλυτικά έχουμε:

$P(m,k)(\mu_1+\lambda_1+\lambda_2) = P(m-1,k)\mu_1+ P(m+1,\mathrm{k})\lambda_1+ P(m,k+1)\lambda_2$, $m < 0$, ή $m < k$ και $0 \leq k$, (1)

$P(m,k)(\mu_2+\lambda_1+\lambda_2) = P(m,k-1)\mu_2+ P(m+1,k)\lambda_1+ P(m,k+1)\lambda_2$, $0 < m$ και $k < 0$, ή $k < m+1$ και $0 < k$, (2)

$P(-c_1,k)(\mu_1+\lambda_2) = P(1-c_1,k)\lambda_1+ P(-c_1,k+1)\lambda_2$, $-c_2 < k < s_2$, (3)

$P(-c_1,s_2)(\mu_1+\lambda_2) = P(1-c_1,s_2)\lambda_1$, (4)

$P(m,s_2)(\mu_1+\lambda_1+\lambda_2) = P(m-1,s_2)\mu_1+ P(m+1,s_2)\lambda_1$, $-c_1 < m < s_1$ αν $s_1 = s_2$, ή για $-c_1 < m < s_1-1$, όταν $s_1 = s_2 + 1$, (5)

$P(s_1,s_2)(\lambda_1+\lambda_2) = P(s_1-1,s_2)\mu_1,+ P(s_1,s_2-1)\mu_2$, $s_1 \geq s_2$, $s_1 + s_2 = s$, (6)

$P(s_1,k)(\mu_2+\lambda_1+\lambda_2) = P(s_1,k-1)\mu_2+ P(s_1,k+1)\lambda_2$, για $-c_2 < k < s_2$ αν $s_1 > s_2$, διαφορετικά για $-c_2 < k < s_2-1$, (7)

$P(s_1,-c_2)(\mu_2+\lambda_1) = P(s_1,1-c_2)\lambda_2$, (8)

$P(m,-c_2)(\mu_2+\lambda_1) = P(m,1-c_2)\lambda_2+ P(m+1, -c_2)\lambda_1$, $0 < m < s_1$, (9)

$P(0,-c_2)(\mu_2+\lambda_1) = P(-1,-c_2)\mu_1+P(1,-c_2)\lambda_1+P(0,1-c_2)\lambda_2$, (10)

$P(m,-c_2)(\mu_1+\lambda_1) = P(m-1,-c_2)\mu_1+P(m,1-c_2)\lambda_2+ P(m+1, -c_2)\lambda_1$, $-c_1 < m < 0$, (11)

$P(-c_1,-c_2)\mu_1 = P(1-c_1,-c_2)\lambda_1+ P(-c_1,1-c_2)\lambda_2$, (12)

$P(0,k)(\mu_2+\lambda_1+\lambda_2) = P(-1,k)\mu_1+P(0,k-1)\mu_2+ P(1,k)\lambda_1+ P(0,k+1)\lambda_2$, $-c_2 < k < 0$, (13)

$P(m,m)(\mu_1+\lambda_1+\lambda_2) = P(m-1,m)\mu_1+P(m,m-1)\mu_2+P(m+1,m)\lambda_1+P(m,m+1)\lambda_2$, $0 \leq m < s_1$, (14)

$P(m+1,m)(\mu_2+\lambda_1+\lambda_2) = P(m,m)\mu_1+P(m+1,m-1)\mu_2+ P(m+2,m)\lambda_1+ P(m+1,m+1)\lambda_2$, $0 \leq m < s_1$, (15)

$P(s_1,s_1-1)(\mu_2+\lambda_1+\lambda_2) = P(s_1,s_1)\lambda_2+P(s_1,s_1-2)\mu_2+ P(s_1-1,s_1-1)\mu_1$, αν $s_1 = s_2$, (16)

$P(s_1-1,s_1-1)(\mu_1+\lambda_1+\lambda_2) = P(s_1-2,s_1-1)\mu_1+P(s_1-1,s_1-2)\mu_2+P(s_1,s_1-1)\lambda_1$, αν $s_2 = s_1 - 1$, (17) Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος υπολογίζονται από την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων Chapman-Kolmogorov μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας με την βοήθεια πινάκων που η γενική τους μορφή παρουσιάζεται παρακάτω.

Έστω το διάνυσμα στήλη $P_m^T = [P(m, s_2), P(m, s_2-1), \ldots, P(m,-c_2+1), P(m,-c_2)]$ που είναι το διάνυσμα πιθανοτήτων των καταστάσεων, οι οποίες αντιστοιχούν σε απόθεμα μεγέθους m όταν το $m>0$ ή σε έλλειμμα $-m$ όταν το $m < 0$. Οι εξισώσεις Chapman–Kolmogorov (1) – (17) μπορούν με αυτό τον τρόπο να εκφρασθούν συνοπτικά ως εξής:

$$A_{-c_1}P_{-c_1} = C_{-c_1}P_{1-c_1}, \tag{18}$$

$$A_mP_m = B_mP_{m-1} + C_mP_{m+1}, \quad -c_1 < m < s_1, \tag{19}$$

$$A_{s_1}P_{s_1} = B_{s_1}P_{s_1-1}. \tag{20}$$

όπου A_m, B_m, C_m είναι πίνακες διαστάσεων $(c_2 + s_2 + 1)$ x $(c_2 + s_2 + 1)$ που περιέχουν τους ρυθμούς μετάβασης από και προς τις καταστάσεις που αντιστοιχούν στην μεταβλητή m. Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μπορεί να επιλυθεί με τον ακόλουθο τρόπο

Βήμα 1: Επιλύουμε την Εξ. (18) ως προς P_{-c1} και έχουμε $P_{-c1} = G_{-c1}P_{1-c1}$ όπου $G_{-c1} = A_{-c1}^{-1}C_{-c1}$ που είναι και η αρχική μας συνθήκη.

Βήμα 2: Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την έκφραση που βρήκαμε στο βήμα 1 για να επιλύσουμε την Εξ. (19) ως προς $P_{m-1} = G_{m-1}P_m$, όπου $G_{m-1} = [A_{m-1} - B_{m-1}G_m]^{-1}C_{m-1}$ και $m = 1, 2, \ldots, s_1 + c_1 + 1$

Βήμα 3: Αντικαθιστούμε την έκφραση του $P_{s1-1} = G_{s1-1}P_{s1}$ στην Εξ. (20) και έχουμε ότι $[A_{s1} - B_{s1}G_{s1-1}]P_{s1} = 0$, όπου 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα. Υπολογίζουμε το διάνυσμα P_{s1} επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, όπου μια από τις εξισώσεις αντικαθίσταται από την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{-c1}^{s1} \mathbf{1}^T \boldsymbol{P_m} = 1$$

όπου 1^T είναι ένα διάνυσμα γραμμή ($1 \times s_2 + c_2 + 1$), που όλα τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα. Στην εξίσωση κανονικοποίησης χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις του προηγούμενου βήματος έτσι ώστε όλα τα διανύσματα πιθανοτήτων να είναι εκφρασμένα συναρτήσει του P_{s1}.

Βήμα 4: Τέλος υπολογίζουμε επαναληπτικά τα υπόλοιπα διανύσματα πιθανοτήτων χρησιμοποιώντας τη σχέση $P_{m-1} = G_{m-1}P_m$, για $m = 1, 2, \ldots, s_1 + c_1$

Ο πίνακας A_m πολλαπλασιάζει το δίανυσμα P_m και περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβάσης από τις καταστάσεις του διανύσματος. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε τους ακόλουθους πίνακες όταν $0 < m < s_1$:

$$A_m = \begin{bmatrix} \mu_1+\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & \mu_1+\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \mu_1+\lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -\lambda_2 & \ddots & -\mu_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \mu_2+\lambda & -\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_2 & \mu_2+\lambda & -\mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_2 & \mu_2+\lambda_1 \end{bmatrix}$$

όπου $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

Ο πίνακας B_m πολλαπλασιάζει το διάνυσμα P_{m-1} και περιέχει τους ρυθμούς μετάβασης από τις καταστάσεις που αναφέρονται στο P_{m-1} στις καταστάσεις που περιέχονται στο P_m.

$$B_m = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας C_m πολλαπλασιάζει το διάνυσμα P_{m+1} και περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης από τις καταστάσεις P_{m+1} στις καταστάσεις P_m.

$$C_m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

5. Συνάρτηση κόστους

Το μέτρο αποδοτικότητας του συστήματος παραγωγής που εξετάζουμε είναι η συνάρτηση μέσου κόστους, η οποία μας δίνει το συνολικό αναμενόμενο κόστος λειτουργίας του συστήματος στη μονάδα του χρόνου.

Το συνολικό κόστος αποτελείται από τρία επιμέρους κόστη:

1. το κόστος αποθεματοποίησης για το κάθε προϊόν,
2. το κόστος απόρριψης πελατών για τον κάθε τύπο πελάτη και
3. το κόστος εκκρεμών παραγγελιών για κάθε τύπο πελάτη.

Κόστος αποθεματοποίησης:

Το κόστος αποθεματοποίησης είναι γραμμική συνάρτηση του μέσου αποθέματος. Πιο συγκεκριμένα είναι το γινόμενο του μέσου αποθέματος με το μοναδιαίο κόστος αποθεματοποίησης. Για τη βασική πολιτική που εξετάζουμε όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 4 υπάρχει απόθεμα για το πρώτο προϊόν όταν m>0 ενώ για το δεύτερο προϊόν υπάρχει απόθεμα όταν k>0. Συνεπώς το μέσο απόθεμα του κάθε προϊόντος δίδεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$H_1 = \sum_{m=1}^{s_1} m\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\, \boldsymbol{P_m}$

όπου 1^T είναι διάνυσμα γραμμή $(1 \times s_1)$ με όλα τα στοιχεία ίσα με την μονάδα

$$H_2 = \sum_{m=1}^{s_2} k\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{P_k}$$

όπου 1^T είναι διάνυσμα γραμμή $(1 \times s_2)$ με όλα τα στοιχεία ίσα με την μονάδα

Μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών:

Το κόστος εκκρεμών παραγγελιών είναι επίσης γραμμική συνάρτηση του μέσου πλήθους εκκρεμών παραγγελιών για κάθε κατηγορία πελατών. Εκκρεμείς παραγγελίες της 1ης κατηγορίας πελατών έχουμε όταν $m<0$ και το μέσο πλήθος της συγκεκριμένης κατηγορίας δίδεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$B_1 = \sum_{m=-c1}^{-1} (-m)\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P_m}$$

όπου 1^T είναι διάνυσμα γραμμή $(1 \times c_1)$ με όλα τα στοιχεία ίσα με την μονάδα

Αντίστοιχα εκκρεμείς παραγγελίες της 2ης κατηγορίας πελατών έχουμε όταν $k<0$ και το μέσο πλήθος της συγκεκριμένης κατηγορίας δίδεται απλο την παρακάτω εξίσωση:

$$B_2 = \sum_{k=-c2}^{-1} (-k)\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{P_k}$$

όπου 1^T είναι διάνυσμα γραμμή $(1 \times c_2)$ με όλα τα στοιχεία ίσα με την μονάδα

Ρυθμός απόρριψης πελατών:

Ο ρυθμός με τον οποίο αφιχθείσες παραγγελίες της πρώτης κατηγορίας πελάτων απορρίπτονται ισούται με τη συνολική πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση απόρριψης της συγκεκριμένης κατηγορίας πελατών επί το ρυθμό άφιξης παραγγελιών της. Οι νέες παραγγελίες πελατών της 1ης κατηγορίας απορρίπτονται όταν υπάρχουν ήδη c_1 εκκρεμείς παραγγελίες αυτής της κατηγορίας, δηλαδή όταν η μεταβλητή m = c_1 ή αλλιώς το σύστημά μας βρίσκεται σε αυτές τις καταστάσεις. Ο συγκεκριμένος ρυθμός δίδεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$LS_1 = \lambda_1 \sum_{k=-c_2}^{s_2} \boldsymbol{P(-c_1, k)}$$

Οι παραγγελίες της 2ης κατηγορίας πελατών αντίστοιχα απορρίπτονται όταν το σύστημα βρίσκεται στις καταστάσεις με k = c_2. Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός απόρριψης των παραγγελιών αυτής της κατηγορίας ισούται με τη συνολική πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στις καταστάσεις που δεν γίνονται αποδεκτές οι παραγγελίες επί το ρυθμό άφιξης παραγγελιών αυτού του τύπου πελατών δηλαδή ισχύει ότι:

$$LS_2 = \lambda_2 \sum_{m=-c_1}^{s_1} \boldsymbol{P(m, -c_2)}$$

Συνάρτηση κόστους:

Έχοντας εκτιμήσει τα διάφορα μέτρα απόδοσης που καθορίζουν το συνολικό μέσο κόστος λειτουργίας, μπορούμε να το υπολογίσουμε όπως φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$J = r_1LS_1 + r_2LS_2 + h_1H_1 + h_2H_2 + b_1B_1 + b_2B_2$$

Το μέσο κόστος λειτουργίας είναι συνάρτηση των κατωφλίων ελέγχου της βασικής και προτεινόμενης πολιτικής που καθορίζεται από τις τιμές των μεταβλητών ελέγχου s, c_1, c_2. Για να βρούμε την βέλτιστη πολιτική της μορφής αυτής πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση μέσου κόστους λειτουργίας ως προς τις παραμέτρους ελέγχου. Η βελτιστοποίηση γίνεται με εξαντλητική αναζήτηση στον χώρο των μεταβλητών ελέγχου αφού δεν υπάρχουν θεωρητικά αποτελέσματα που να μας δίδουν πληροφορίες για τη μορφή και τις ιδιότητες δεύτερης τάξης της συνάρτησης μέσου κόστους.

6. Αριθμητικά αποτελέσματα

Σύμφωνα με την μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια αναπτύχθηκε λογισμικό σε περιβάλλον Matlab για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης όπως και το μέσο συνολικό κόστος σε κάθε περίπτωση. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε διεξοδικά την επίδραση των διαφόρων παραμέτρων του συστήματος στο μέσο κόστος και στις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου. Ακόμη γίνεται σύγκριση της προτεινόμενης πολιτικής με κάποιες άλλες δημοφιλείς πολιτικές.

Εκτός από την βασική και προτεινόμενη πολιτική Βασικού Αποθέματος Βασικών Ελλειμμάτων(ΒΑΒΕ) εξετάζουμε άλλες δυο πολιτικές. Την πολιτική Βασικού αποθέματος(ΒΑ) ,στην οποία δεν έχουμε απόρριψη παραγγελιών επομένως όλες οι αφικνούμενες παραγγελίες γίνονται αυτόματα αποδεκτές, και την πολιτική Βασικού αποθέματος πλήρους απόρριψης(ΒΑΠΑ) στην οποία δεν επιτρέπονται οι εκκρεμείς παραγγελίες.

Τέλος εξετάζουμε τις ιδιότητες δεύτερης τάξης της συνάρτησης μέσου κόστους λειτουργίας. Αν η συνάρτηση κόστους χαρακτηρίζεται από κάποια μορφή κυρτότητας και είναι μονοκόρυφη μπορεί να μειωθεί σημαντικά ο απαιτούμενος υπολογιστικός για την εκτίμηση των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων ελέγχου.

6.1. Μελέτη της συνάρτησης κόστους για μεταβλητές τιμές των παραμέτρων

Σε αυτό το στάδιο μελετάμε πως μεταβάλλεται το βέλτιστο μέσο συνολικό κόστος καθώς αλλάζουμε τις τιμές των παραμέτρων. Για κάθε συνδυασμό τιμών των διαφόρων παραμέτρων εκτιμούμε τις βέλτιστες τιμές των κατωφλίων ελέγχου που ελαχιστοποιούν το μέσο συνολικό κόστος.

Η βέλτιστη τιμή του μέσου συνολικού κόστους και τα βέλτιστα κατώφλια που αντιστοιχούν στο συγκεκριμένο συνολικό κόστος παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες ανά πολιτική. Οι εξεταζόμενες πολιτικές είναι τρεις. Η πολιτική Βασικού αποθέματος Βασικών ελλειμμάτων (ΒΑΒΕ) είναι η βασική μας πολιτική η οποία χρησιμοποιεί τα τρία κατώφλια ελέγχου $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ (κατώφλια εκκρεμών παραγγελιών και ελέγχου αποθεμάτων) για τα δύο προϊόντα που μελετάμε και αναφέραμε στο κεφάλαιο 3. Στη πολιτική Βασικού αποθέματος Πλήρους απόρριψης (ΒΑΠΑ) δεν έχουμε εκκρεμείς παραγγελίες επομένως όταν φτάνει ένας πελάτης και δεν υπάρχει απόθεμα του αντίστοιχου προϊόντος δεν ικανοποιείται η παραγγελία δηλαδή έχουμε απόρριψη της. Τέλος η πολιτική Βασικού αποθέματος (ΒΑ) εκφράζει τη λογική ότι η επιχείρηση δέχεται όλους τους πελάτες με αντίστοιχη δημιουργία ουράς (όσο περισσότερες είναι οι εκκρεμείς παραγγελίες τόσο μεγαλύτερη η ουρά) όπως ακριβώς και με τη βασική μας πολιτική με τη διαφορά ότι εδώ δεν έχουμε απόρριψη καμίας παραγγελίας έχουμε δηλαδή πλήρης αποδοχή των παραγγελιών.

Οι τιμές των παραμέτρων, για το βασικό σενάριο που χρησιμοποίησαμε κατά την διεξαγωγή των αριθμητικών πειραμάτων είναι $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $r_1 = 30$, $r_2 = 25$, $\mu_1 = 7$, $\mu_2 = 8$, $h_1 = 1{,}5$, $h_2 = 1$, $b_1 = 6$, $b_2 = 5$.

6.1.1. Επίδραση στη συνάρτηση κόστους του ρυθμού μ_1

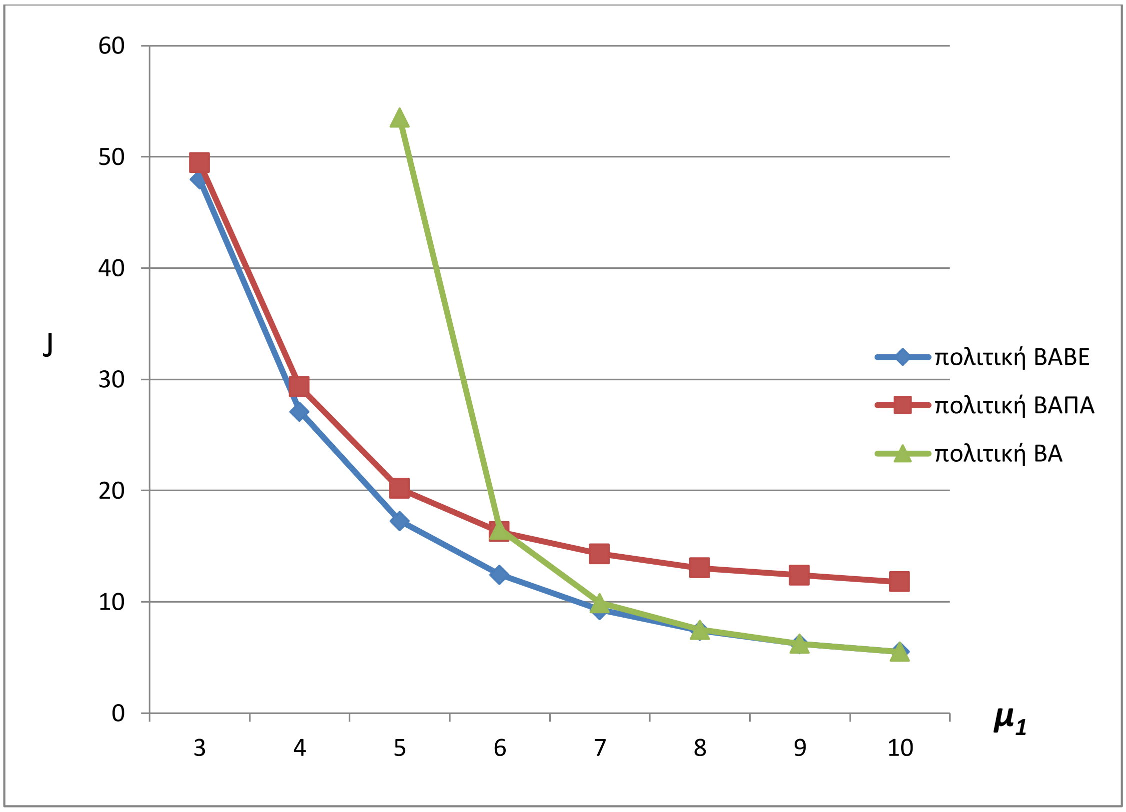
Ο ρυθμός παραγωγής $\boldsymbol{\mu_1}$ πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος ώστε να είναι μικρότερο το συνολικό κόστος. Για μεγάλες τιμές του ρυθμού παραγωγής είναι λιγότεροι οι πελάτες που απορρίπτονται με αποτέλεσμα να μειώνεται το κόστος απόρριψης άρα και το συνολικό κόστος. Στην περίπτωση που το μ_1 αυξάνεται η τιμή του $\boldsymbol{s}$ μειώνεται καθώς παράγονται προϊόντα με μεγαλύτερο ρυθμό άρα χρειάζεται μικρότερο απόθεμα. Αντίθετα παρατηρούμε ότι με την αύξηση του ρυθμού παραγωγής έχουμε και αύξηση των κατωφλίων εκκρεμών παραγγελιών για τις δυο κατηγορίες πελατών $\boldsymbol{c_1}$ και $\boldsymbol{c_2}$.

Πίνακας 1: Επίδραση του μ_1 στην απόδοση του συστήματος.

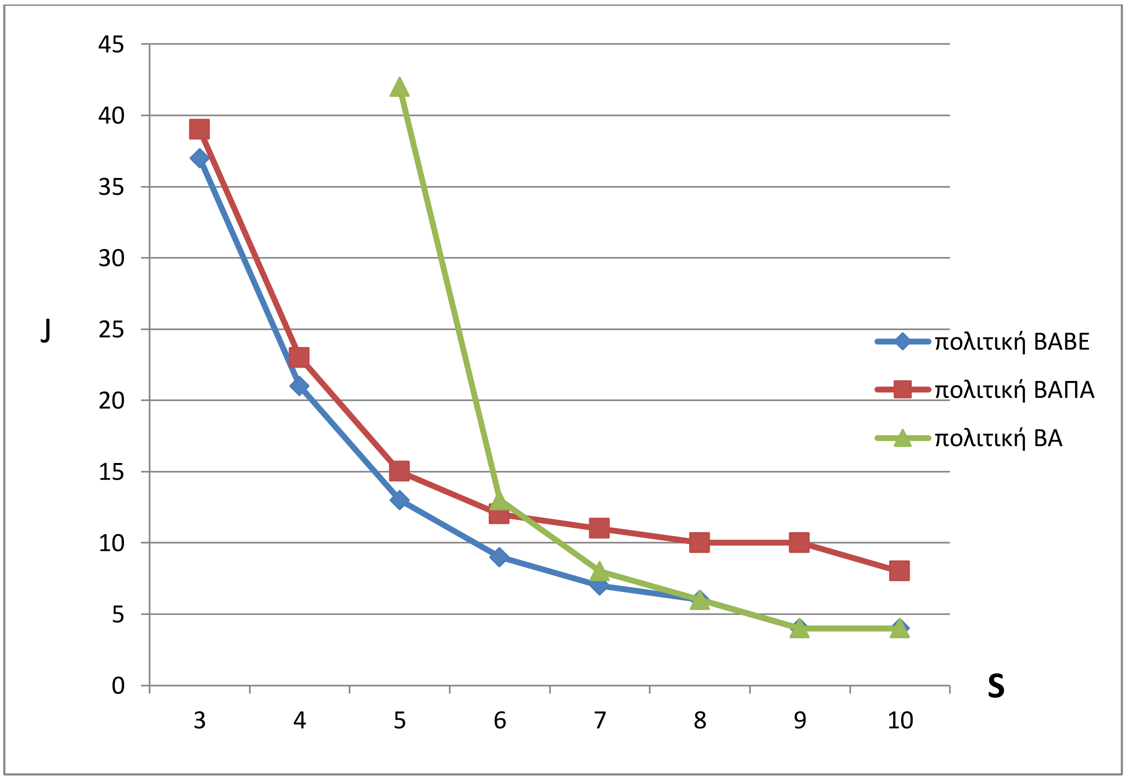
	πολιτική BABE				πολιτική ΒΑΠΑ		πολιτική BA	
μ_1	J	S	c_1	c_2	J	S	J	S
3	47,9835	37	1	4	49,461	39		
4	27,1154	21	1	4	29,3408	23		
5	17,2747	13	1	5	20,1724	15	53,5209	42
6	12,4326	9	3	5	16,2892	12	16,5073	13
7	9,2797	7	5	7	14,313	11	9,9003	8
8	7,4133	6	8	9	13,0396	10	7,5028	6
9	6,2169	4	11	11	12,3946	10	6,2409	4
10	5,5179	4	15	13	11,7994	8	5,522	4

Η πολιτική BA για τιμές με μικρό ρυθμό παραγωγής μ_1 είναι πρακτικά αδύνατη αφού το σύστημα αδυνατεί να εξυπηρετήσει το σύνολο των εισερχόμενων παραγγελιών με αποτέλεσμα την συνεχή συσσώρευση παραγγελιών στην ουρά που τείνει στο άπειρο με αποτέλεσμα να απειρίζεται και το κόστος εκκρεμών παραγγελιών και επομένως και το συνολικό κόστος. Συνεπώς τα κενά στον πίνακα δηλώνουν ακριβώς την αδυναμία εκλογής αποτελέσματος από τον κώδικα που χρησιμοποιούμε.

Για μικρές τιμές του μ_1 η πολιτική BA όπως αναφέραμε είναι πολύ χειρότερη από τις άλλες δυο πολιτικές που εξετάζουμε, οι οποίες αντιθέτως είναι πολύ κοντά. Για μεγάλες τιμές του μ_1 η πολιτική BA προσσεγγίζει την προτεινόμενη πολιτική BABE η οποία είναι σταθερά η πιό συμφέρουσα αφού για όλες τις τιμές του μ_1 έχει το μικρότερο συνολικό κόστος. Όταν η συντριπτική πλειοψηφία των παραγγελιών ικανοποιούνται όπως συμβαίνει για υψηλούς ρυθμούς παραγωγής τότε δεν υπάρχει λόγος απόρριψης παραγγελιών και όπως φαίνεται στο γράφημα όσο μεγαλώνει το μ_1 η πολιτική BA προσεγγίζει την πολιτική BABE.



Γράφημα 1: Απόδοση των εξεταζόμενων πολιτικών για διάφορες τιμές του μ_1.



Γράφημα 2: Κατώφλι αποθέματος S συναρτήσει του μ_1.

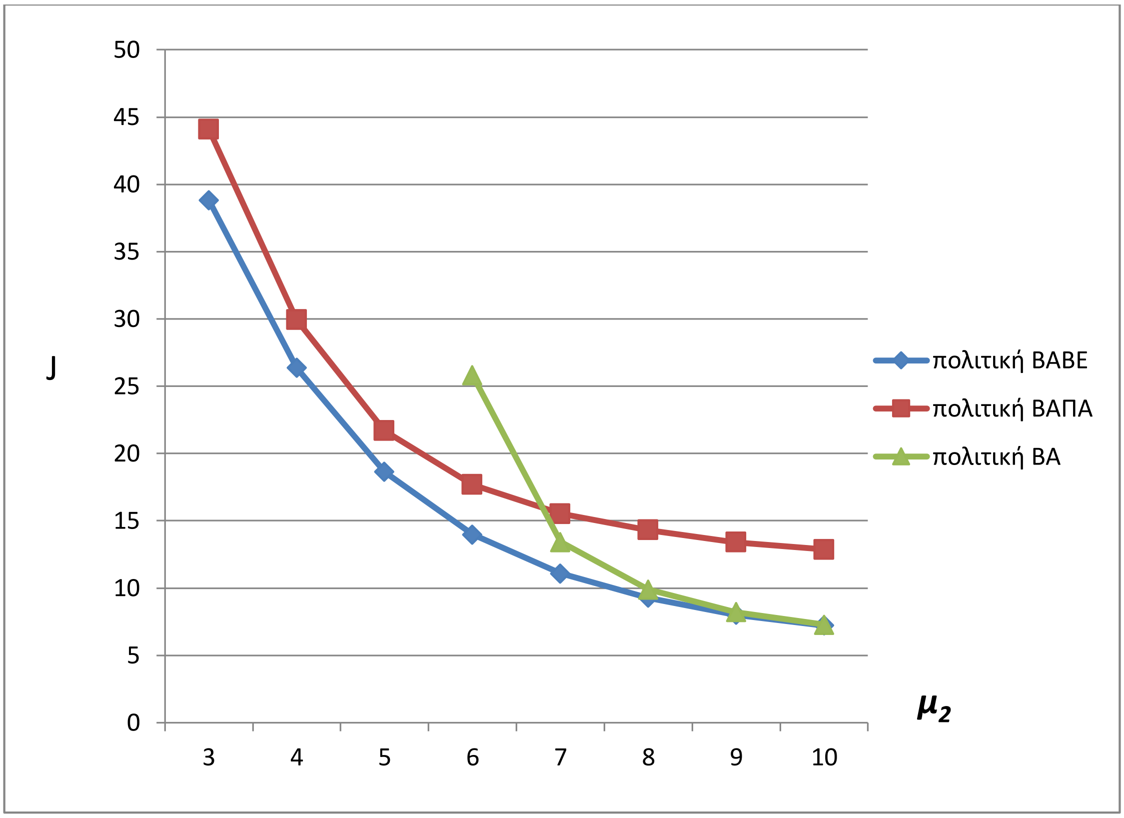
6.1.2. Επίδραση του ρυθμού παραγωγής μ_2 στη συνάρτηση κόστους

Όπως και ο $\boldsymbol{\mu_1}$ ο ρυθμός παραγωγής μ_2 πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος ώστε να είναι μικρότερο το συνολικό κόστος. Αντίστοιχα ισχύει οτι και με τον ρυθμό $\boldsymbol{\mu_1}$ αφού για μεγάλες τιμές του ρυθμού παραγωγής μειώνονται οι πελάτες που απορρίπτονται άρα και το κόστος απόρριψης πελατών επομένως και το συνολικό κόστος. Αντίστοιχα στην περίπτωση που το $\boldsymbol{\mu_2}$ αυξάνεται η τιμή του $\boldsymbol{S}$ μειώνεται καθώς παράγονται προϊόντα με μεγαλύτερο ρυθμό άρα χρειάζεται μικρότερο απόθεμα.

Πίνακας 2: Επίδραση του $\boldsymbol{\mu_2}$ στην απόδοση του συστήματος.

	πολιτική BABE				πολιτική ΒΑΠΑ		πολιτική ΒΑ	
$\boldsymbol{\mu_2}$	**J**	**S**	**c_1**	**c_2**	**J**	**S**	**J**	**S**
3	38,81792	30	13	1	44,09401	34		
4	26,35197	20	11	1	29,9243	22		
5	18,62581	14	8	2	21,68489	16		
6	13,96898	10	7	3	17,6879	14	25,81413	20
7	11,07645	8	5	5	15,52718	12	13,41346	10
8	9,279735	7	5	7	14,31296	11	9,900321	8
9	8,0186	6	5	10	13,40927	10	8,210031	6
10	7,210504	5	6	12	12,85527	10	7,283136	5

Εδώ ισχύει ότι ακριβώς και για το $\boldsymbol{\mu_1}$. Για μικρές τιμές του $\boldsymbol{\mu_2}$ η πολιτική ΒΑ όπως αναφέραμε είναι πολύ χειρότερη από τις άλλες δυο πολιτικές που εξετάζουμε οι οποίες είναι πολύ κοντά. Για μεγάλες τιμές του $\boldsymbol{\mu_1}$ η πολιτική BABE είναι σταθερά η πιό συμφέρουσα αφού για όλες τις τιμές του $\boldsymbol{\mu_1}$ έχει το μικρότερο συνολικό κόστος. Όπως και προηγουμένως όταν η συντριπτική πλειοψηφία των παραγγελιών ικανοποιούνται όπως συμβαίνει για υψηλούς ρυθμούς παραγωγής τότε δεν υπάρχει λόγος απόρριψης παραγγελιών.



Γράφημα 3: Απόδοση των εξεταζόμενων πολιτικών για διάφορες τιμές του μ_2

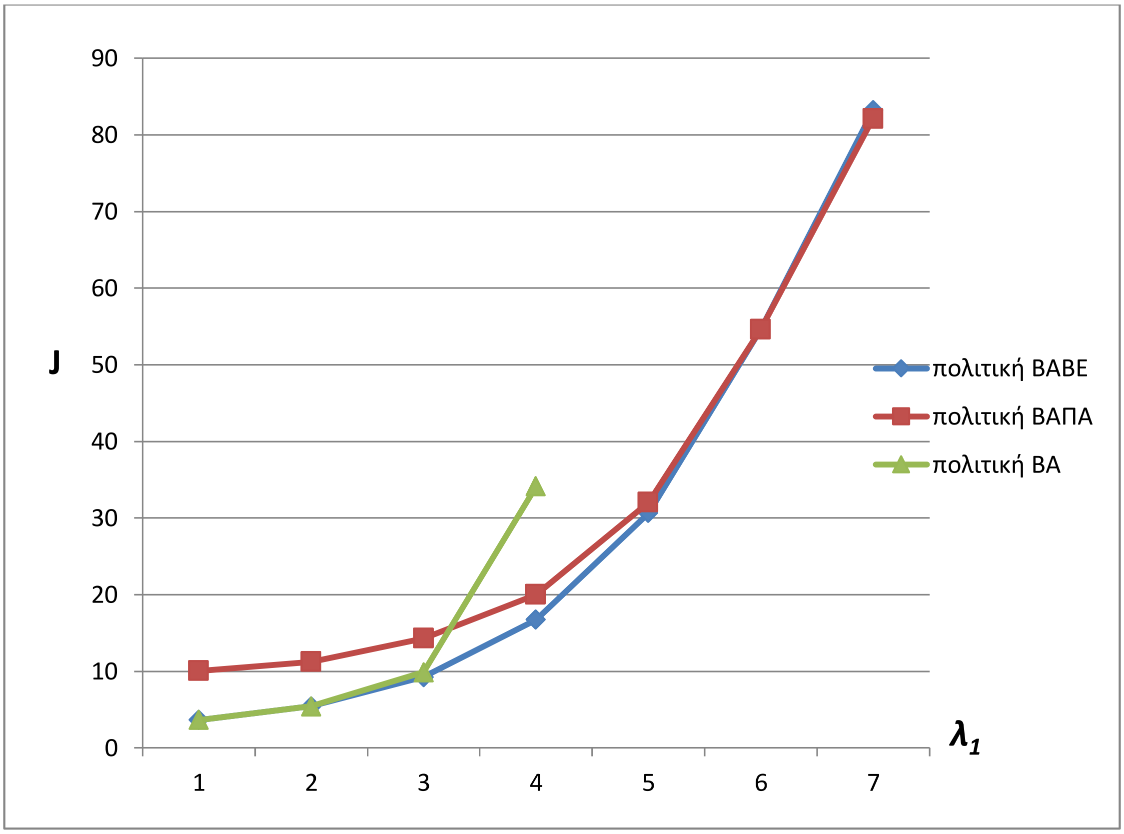
6.1.3. Επίδραση του ρυθμού άφιξης λ_1 στη συνάρτηση κόστους

Όσο το $\boldsymbol{\lambda_1}$ αυξάνεται όπως φαίνεται και στον πίνακα 3 αυξάνεται και το βασικό απόθεμα $\boldsymbol{s}$, καθώς όσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός άφιξης πελατών τόσο περισσότερο είναι το διαθέσιμο απόθεμα που χρειαζόμαστε για να μην απορρίπτεται μεγάλος αριθμός πελατών. Είναι γνωστό στην θεωρία συστημάτων παραγωγής ότι η αύξηση του αποθέματος που προκύπτει από την αύξηση του βασικού αποθέματος οδηγεί σε μεγαλύτερους ρυθμούς παραγωγής και μικρότερο πλήθος ανικανοποίητων παραγγελιών. Ακόμα όσο μικρότερο είναι το $\boldsymbol{\lambda_1}$ τόσο μικρότερο είναι το συνολικό κόστος. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν έρχονται με μικρό ρυθμό οι πελάτες το σύστημα προλαβαίνει να τους εξυπηρετήσει με αποτέλεσμα να μειώνεται το κόστος απόρριψης. Όσον αφορά τα κατώφλια εκκρεμών παραγγελιών βλέπουμε ότι όσο μεγαλώνει ο ρυθμός άφιξης πελατών τόσο μικραίνουν τα συγκεκριμένα κατώφλια. Αφού ο ρυθμός παραγωγής παραμένει σταθερός το σύστημα πρέπει να δέχεται λιγότερες παραγγελίες έτσι ώστε να μπορεί να τις εξυπηρετήσει και να μην υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να δημιουργείται ουρά εκκρεμών παραγγελιών αυξάνοντας το αντίστοιχο κόστος άρα και το συνολικό κόστος.

Πίνακας 3: Επίδραση του λ_1 στην απόδοση του συστήματος.

	πολιτική BABE				πολιτική BAΠA		πολιτική BA	
λ_1	J	S	c_1	c_2	J	S	J	S
1	3,674523	2	10	19	10,06405	6	3,674527	2
2	5,437021	4	8	13	11,25319	8	5,44246	4
3	9,279735	7	5	7	14,31296	11	9,900321	8
4	16,76595	13	3	3	20,0187	16	34,1595	27
5	30,68386	24	2	1	32,05971	25		
6	54,60023	44	1	1	54,5999	44		
7	83,234	66	1	1	82,15032	66		

Με τη βοήθεια του γραφήματος 4 μπορούμε να κάνουμε σύγκριση ανάμεσα στις τρεις πολιτικές. Παρατηρούμε ότι για χαμηλές τιμές του λ_1 οι πολιτικές BABE και πολιτική BA έχουν περίπου το ίδιο κόστος με καλύτερη την πολιτική BABE, ενώ όσο μεγαλώνει ο ρυθμός άφιξης πελατών τύπου 1 η πολιτική BA είναι πολύ χειρότερη από τις άλλες δύο οι οποίες είναι πολύ κοντά με την πολιτική BAΠA να είναι καλύτερη όσο μεγαλώνει το λ_1. Για μικρές τιμές του λ_1 σε σχέση με το ρυθμό παραγωγής το σύστημα μπορεί να ικανοποιήσει το σύνολο των παραγγελιών οπότε ουσιαστικά δεν υπάρχει λόγος απόρριψης πελατών γι΄αυτό και η πολιτική BA είναι κοντά στην πολιτική BABE. Αντίθετα όσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός άφιξης πελατών σε σχέση με τον ρυθμό παραγωγής τόσο δυσκολότερη γίνεται η ικανοποίηση του συνόλου των παραγγελιών οπότε, εάν δεν υπάρχει αρκετό απόθεμα στο σύστημά μας, είναι πιο δόκιμο να απορρίπτεται το σύνολο των παραγγελιών και των δύο τύπων πελατών αυτό δηλαδή που εκφράζει η πολιτική BABE.



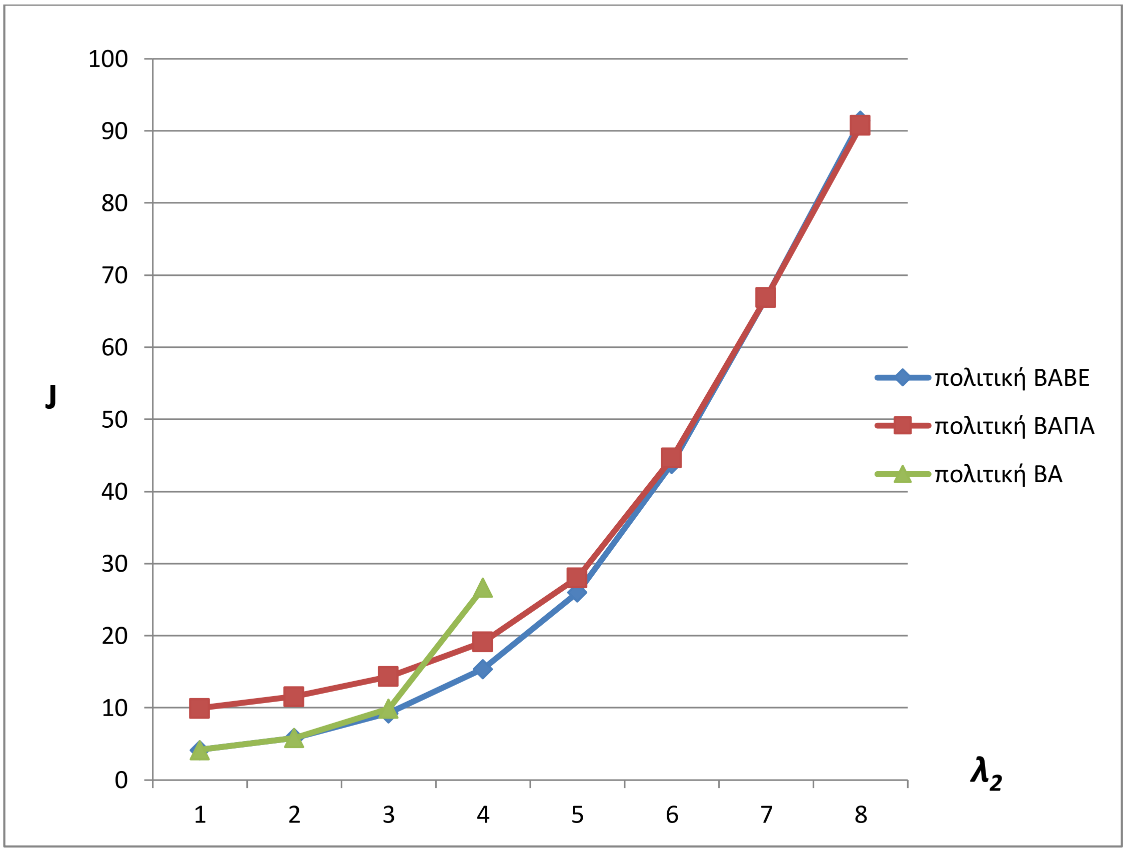
Γράφημα 4: Απόδοση των εξεταζόμενων πολιτικών για διάφορες τιμές του λ_1.

6.1.4. Επίδραση του ρυθμού αφίξεων λ_2 στη συνάρτηση κόστους

Στην περίπτωση του $\boldsymbol{\lambda_2}$ ισχύει ότι και στην περίπτωση του $\boldsymbol{\lambda_1}$, δηλαδή όσο μικρότερο το $\boldsymbol{\lambda_2}$ τόσο μικρότερο το συνολικό κόστος. Ακόμη το βέλτιστο βασικό απόθεμα $\boldsymbol{s}$ γίνεται μεγαλύτερο όσο αυξάνεται το $\boldsymbol{\lambda_2}$. Ακόμα όσον αφορά τα κατώφλια εκκρεμών παραγγελιών βλέπουμε ότι όσο μεγαλώνει ο ρυθμός άφιξης πελατών τόσο μικραίνουν τα συγκεκριμένα κατώφλια όπως ακριβώς και με το $\boldsymbol{\lambda_1}$.

Πίνακας 4: Επίδραση του λ_2 στην απόδοση του συστήματος.

	πολιτική ΒΑΒΕ				πολιτική ΒΑΠΑ		πολιτική ΒΑ	
λ_2	J	S	c_1	c_2	J	S	J	S
1	4,16696	3	13	15	9,938085	7	4,166975	3
2	5,82662	4	9	11	11,54092	9	5,838428	4
3	9,279735	7	5	7	14,31296	11	9,900321	8
4	15,38306	12	3	4	19,13247	14	26,65845	21
5	26,01147	20	2	2	28,04634	22		
6	43,85583	34	1	1	44,64871	35		
7	66,92784	52	1	1	66,91197	52		
8	91,42205	72	1	1	90,78153	72		



Γράφημα 5: Απόδοση των εξεταζόμενων πολιτικών για διάφορες τιμές του λ_2.

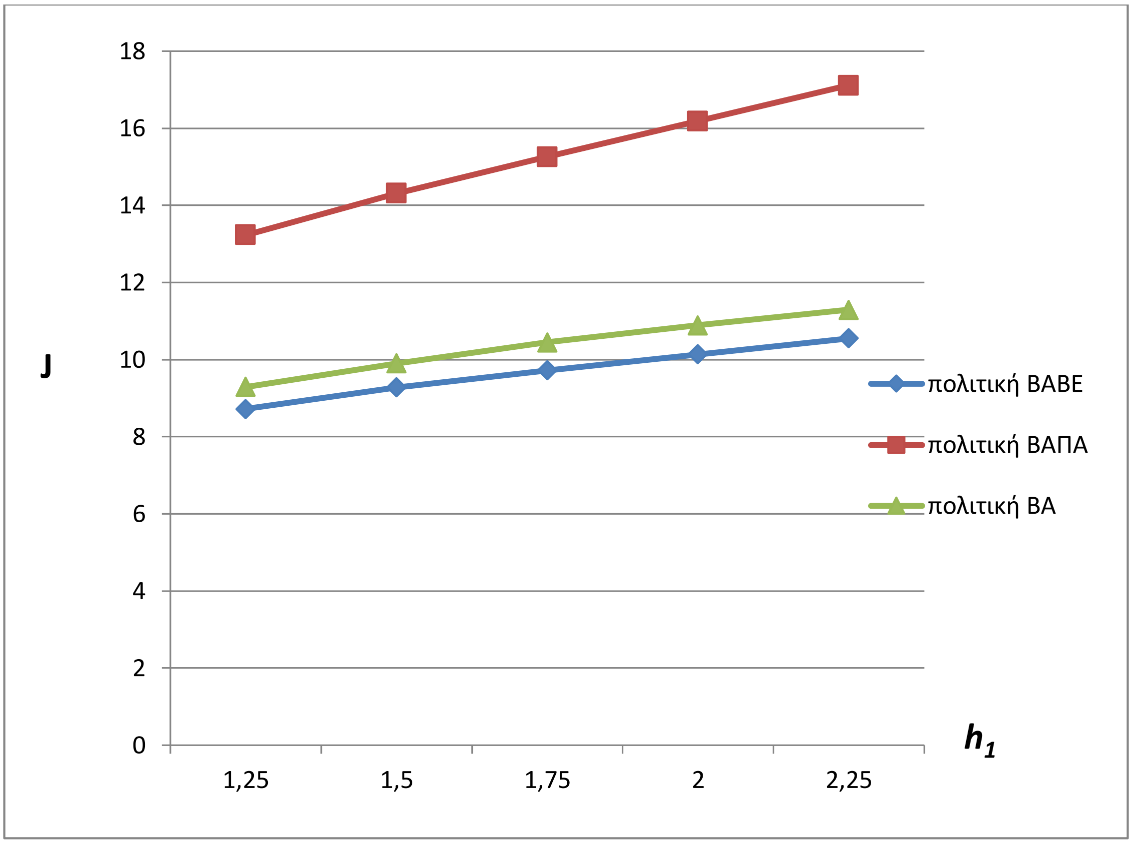
6.1.5. Επίδραση του μοναδιαίου κόστους h_1 στη συνάρτηση κόστους

Με τη βοήθεια του πίνακα 5 βλέπουμε ότι με την αύξηση του μοναδιαίου κόστους αποθέματος ανά μονάδα προϊόντος τύπου 1 και ανα μονάδα χρόνου h_1 αυξάνεται και το συνολικό κόστος. Όταν το h_1 αυξάνεται, η τιμή του αποθέματος S μειώνεται αφού όσο μεγαλύτερη είναι η μοναδιαία τιμή αποθήκευσης του προϊόντος τόσο μικρότερος πρέπει να είναι ο αριθμός προϊόντων που αποθηκεύονται.

Πίνακας 5: Επίδραση του h_1 στην απόδοση του συστήματος.

	πολιτική ΒΑΒΕ				πολιτική ΒΑΠΑ		πολιτική ΒΑ	
h_1	J	S	c1	c2	J	S	J	S
1,25	8,718484	7	5	7	13,23292	11	9,297635	8
1,5	9,279735	7	5	7	14,31296	11	9,900321	8
1,75	9,724568	6	5	7	15,2623	10	10,44706	7
2	10,13869	6	5	7	16,18612	10	10,89372	6
2,25	10,55195	6	5	8	17,10994	10	11,29363	6

Η πολιτική ΒΑΠΕ, σύμφωνα με τις τιμές παραμέτρων που έχουμε επιλέξει, είναι η χειρότερη πολιτική από τις τρεις με την πολιτική ΒΑΒΕ να είναι σταθερά η καλύτερη αφού έχει το χαμηλότερο κόστος για όλες τις τιμές του h_1. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το μοναδιαίο κόστος αποθεματοποίησης αυξάνεται το συνολικό κόστος για την πολιτική ΒΑΠΑ σε σχέση με τις άλλες δυο πολιτικές που έχουν παρόμοια αύξηση. Αυτό συμβαίνει επειδή χρειάζονται μεγάλες τιμές αποθέματος, ακόμα και για μεγάλες τιμές του μοναδιαίου κόστους αποθεματοποίησης, οι οποίες αυξάνουν το συνολικό κόστος.



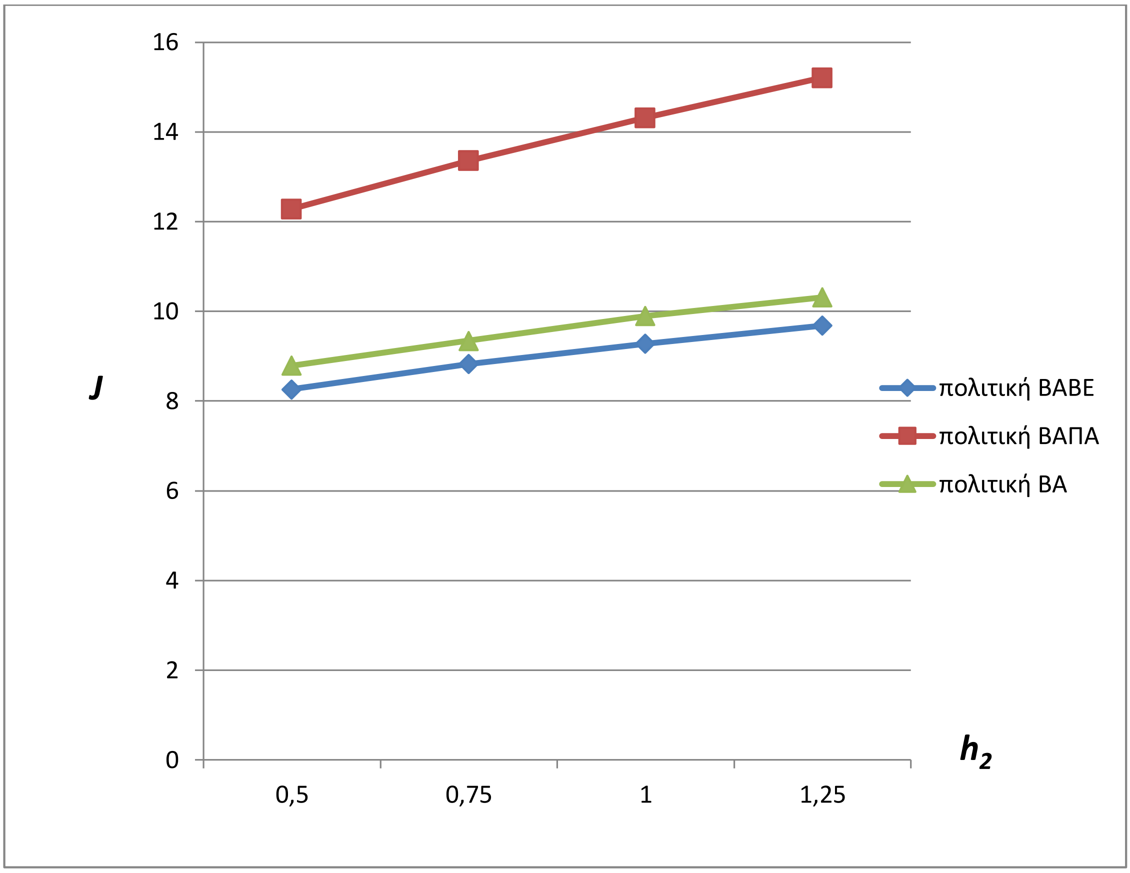
Γράφημα 6: Απόδοση των εξεταζόμενων πολιτικών για διάφορες τιμές του h_1.

6.1.6. Επίδραση του h_2 στη συνάρτηση κόστους

Εδώ ισχύει ότι ακριβώς και με το h_1 η πολιτική BABE είναι και πάλι η πιο συμφέρουσα ενώ η πολιτική ΒΑΠΑ είναι η χειρότερη. Παρατηρούμε και πάλι οτι όσο αυξάνεται το μοναδιαίο κόστος αποθεματοποίησης προϊόντων τύπου 2 αυξάνεται η διαφορά κόστους για την πολιτική ΒΑΠΑ σε σχέση με τις άλλες δυο πολιτικές.

Πίνακας 6: Επίδραση του h_2 στην απόδοση του συστήματος.

	πολιτική BABE				πολιτική ΒΑΠΑ		πολιτική BA	
h_2	J	S	c_1	c_2	J	S	J	S
0,5	8,260737	8	5	7	12,2792	12	8,790895	8
0,75	8,828067	8	5	7	13,35501	12	9,345608	8
1	9,279735	7	5	7	14,31296	11	9,900321	8
1,25	9,682496	6	5	7	15,20588	10	10,31529	7



Γράφημα 7: Απόδοση των εξεταζόμενων πολιτικών για διάφορες τιμές του h_2.

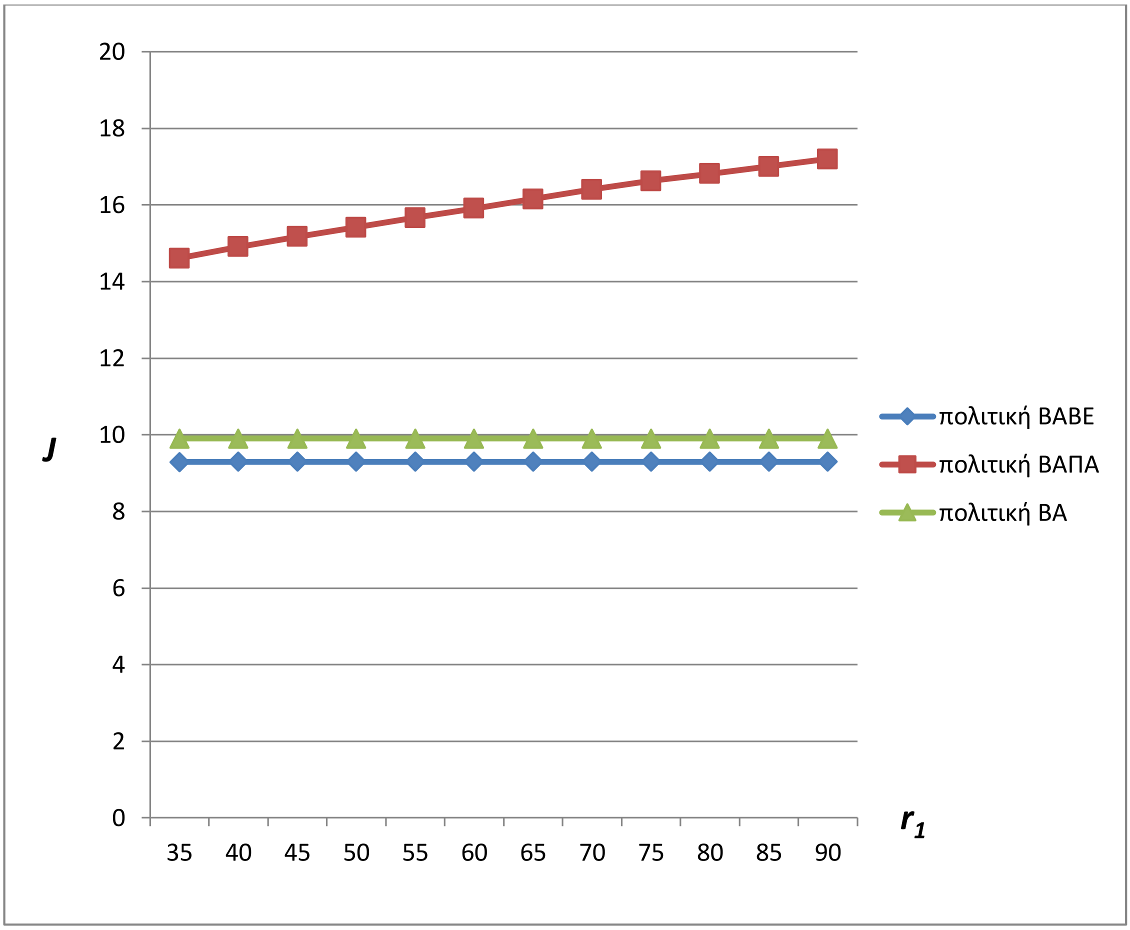
6.1.7. Επίδραση του r_1 στη συνάρτηση κόστους

Με την αύξηση του μοναδιαίου κόστους απόρριψης πελατών τύπου 1 έχουμε αύξηση του κόστους απόρριψης πελατών τύπου 1 επομένως και του συνολικού κόστους. Αυτό φαίνεται πιο καθαρά για την πολιτική ΒΑΠΑ αφού για τις άλλες δυο πολιτικές οι μεταβολές είναι μικρές. Ακόμα όσο αυξάνεται το r_1 αυξάνεται και το απόθεμα s, όπως φαίνεται πάλι πιο καθαρά για την πολιτική ΒΑΠΑ, επειδή χρειάζεται να υπάρχει διαθέσιμο απόθεμα για να μην αυξηθεί πολύ το κόστος απόρριψης των πελατών τύπου 1. Παρατηρούμε επίσης ότι με την αύξηση του μοναδιαίου κόστους απόρριψης πελατών τύπου 1 έχουμε άυξηση του κατωφλίου εκκρεμών παραγγελιών τύπου 1. Αυτό γίνεται γιατί όσο μεγαλύτερο είναι το r_1 τόσες περισσότερες παραγγελίες δέχεται το σύστημά μας έτσι ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν λιγότερους πελάτες χωρίς να εξυπηρετούνται με αποτέλεσμα να μην αυξάνεται το κόστος απόρριψης πελατών τύπου 1 άρα και το συνολικό κόστος.

Πίνακας 7: Επίδραση του r_1 στην απόδοση του συστήματος.

	πολιτική BABE				πολιτική ΒΑΠΑ		πολιτική ΒΑ	
r_1	J	S	c_1	c_2	J	S	J	S
35	9,292128	7	7	7	14,6119	11	9,900321	8
40	9,294098	7	10	7	14,91084	11	9,900321	8
45	9,294275	7	13	7	15,1713	12	9,900321	8
50	9,294287	7	16	7	15,41813	12	9,900321	8
55	9,294288	7	19	7	15,66495	12	9,900321	8
60	9,294288	7	23	7	15,91178	12	9,900321	8
65	9,294288	7	26	7	16,1586	12	9,900321	8
70	9,294288	7	29	7	16,40543	12	9,900321	8
75	9,294288	7	33	7	16,62812	13	9,900321	8
80	9,294288	7	36	7	16,8179	13	9,900321	8
85	9,294288	7	41	7	17,00767	13	9,900321	8
90	9,294288	7	41	7	17,19745	13	9,900321	8

Με τη βοήθεια του γραφήματος 8 παρατηρούμε ότι η πολιτική ΒΑΒΕ είναι η καλύτερη από τις άλλες δυο πολιτικές με την πολιτική ΒΑΠΑ να είναι η χειρότερη αφού η πολτιτική ΒΑ είναι πολύ κοντά με την πολιτική ΒΑΒΕ. Παρατηρούμε επίσης ότι με την άυξηση του μοναδιαίου κόστους απόρριψης πελατών η πολιτική ΒΑΠΑ χειροτερεύει ακόμα περισσότερο αφού αυξάνεται το συνολικό κόστος σε σχέση με τις άλλες δυο πολιτικές.



Γράφημα 8: Απόδοση των εξεταζόμενων πολιτικών για διάφορες τιμές του r_1.

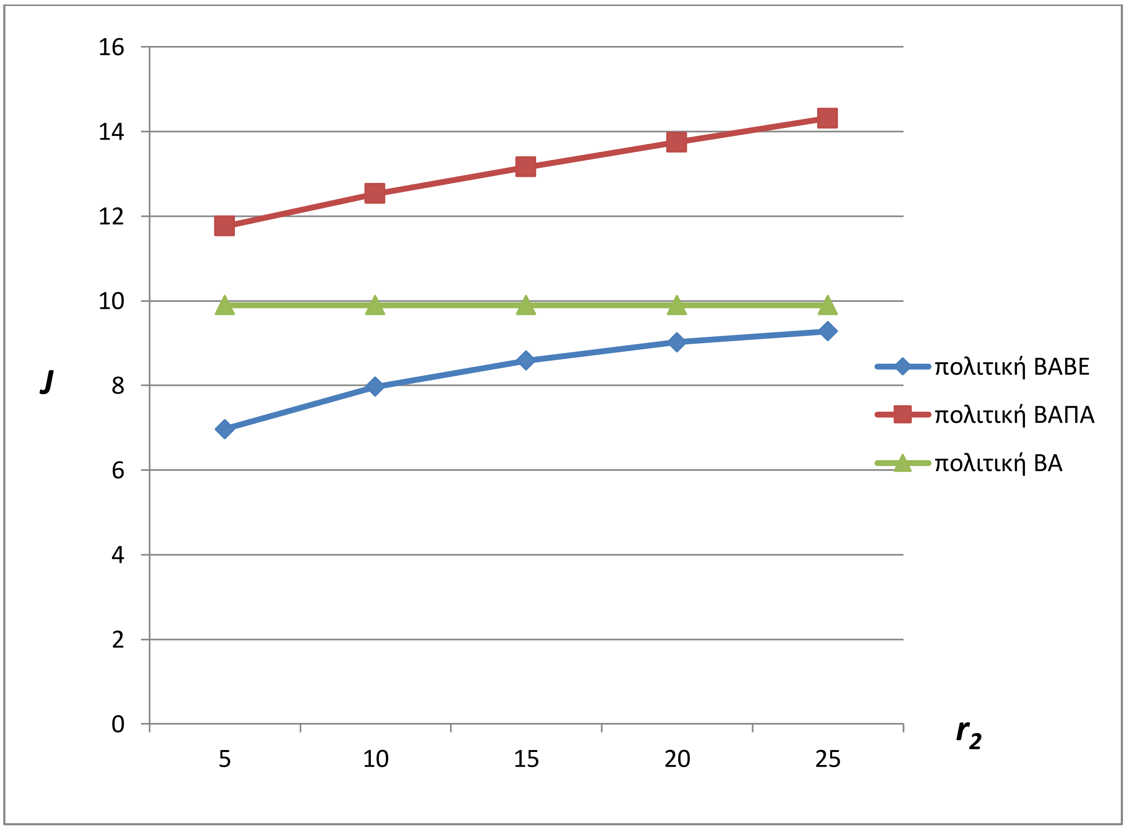
6.1.8. Επίδραση του r_2 στη συνάρτηση κόστους

Όσον αφορά το μοναδιαίο κόστος απόρριψης παραγγελιών του προϊόντος τύπου 2 παρατηρούμε ότι όπως και για το προϊόν 1 όσο αυξάνεται έχουμε αύξηση του συνολικού κόστους όπως επίσης και του συνολικού βέλτιστου αποθέματος s. Για τα κατώφλια εκκρεμών παραγγελιών βλέπουμε ότι για το προϊόν 1 όσο αυξάνεται το r_2 μειώνεται το c_1 ενώ για το προϊόν 2 όσο αυξάνεται το r_2 αυξάνεται και το c_2. Αυτό οφείλεται στο ότι όσο μικρότερο είναι το κόστος απόρριψης παραγγελιών του προϊόντος τύπου 2 πρέπει να χάνουμε όσο το δυνατόν λιγότερες παραγγελίες του προϊόντος τύπου 1 αφού το μοναδιαίο κόστος απόρριψης παραγγελιών του προϊόντος τύπου 1 παραμένει σταθερά μεγαλύτερο από το μοναδιαίο κόστος απόρριψης παραγγελιών του προϊόντος τύπου 2. Όσο αυξάνεται βέβαια το r_2 όπως αναφέραμε παραπάνω χρειάζεται να χάνουμε λιγότερες παραγγελίες προϊόντος τύπου 2 καθώς το r_2 πλησιάζει το r_1 και επηρεάζει εξίσου το συνολικό κόστος.

Πίνακας 8: Επίδραση του r_2 στην απόδοση του συστήματος.

	πολιτική ΒΑΒΕ				πολιτική ΒΑΠΑ		πολιτική ΒΑ	
r_2	J	S	c_1	c_2	J	S	J	S
5	6,969278	5	17	1	11,76062	9	9,900216	8
10	7,967798	6	13	3	12,52882	9	9,900243	8
15	8,58652	6	10	4	13,15839	10	9,900269	8
20	9,024601	6	7	6	13,74843	10	9,900295	8
25	9,279735	7	5	7	14,31296	11	9,900321	8

Με τη βοήθεια του γραφήματος 9 παρατηρούμε ότι η πολιτική ΒΑΒΕ είναι και πάλι η καλύτερη πολιτική με χειρότερη την πολιτική ΒΑΠΑ η οποία χειροτερεύει ακόμα περισσότερο με την αύξηση του r_2. Παρατηρούμε επίσης ότι η πολιτική ΒΑ έχει σχεδόν σταθερό συνολικό κόστος αφού στην ουσία δεν επηρεάζεται με την αύξηση του μοναδιαίου κόστους απόρριψης παραγγελιών μιας και όλες οι παραγγελίες γίνονται δεκτές.



Γράφημα 9: Απόδοση των εξεταζόμενων πολιτικών για διάφορες τιμές του r_2.

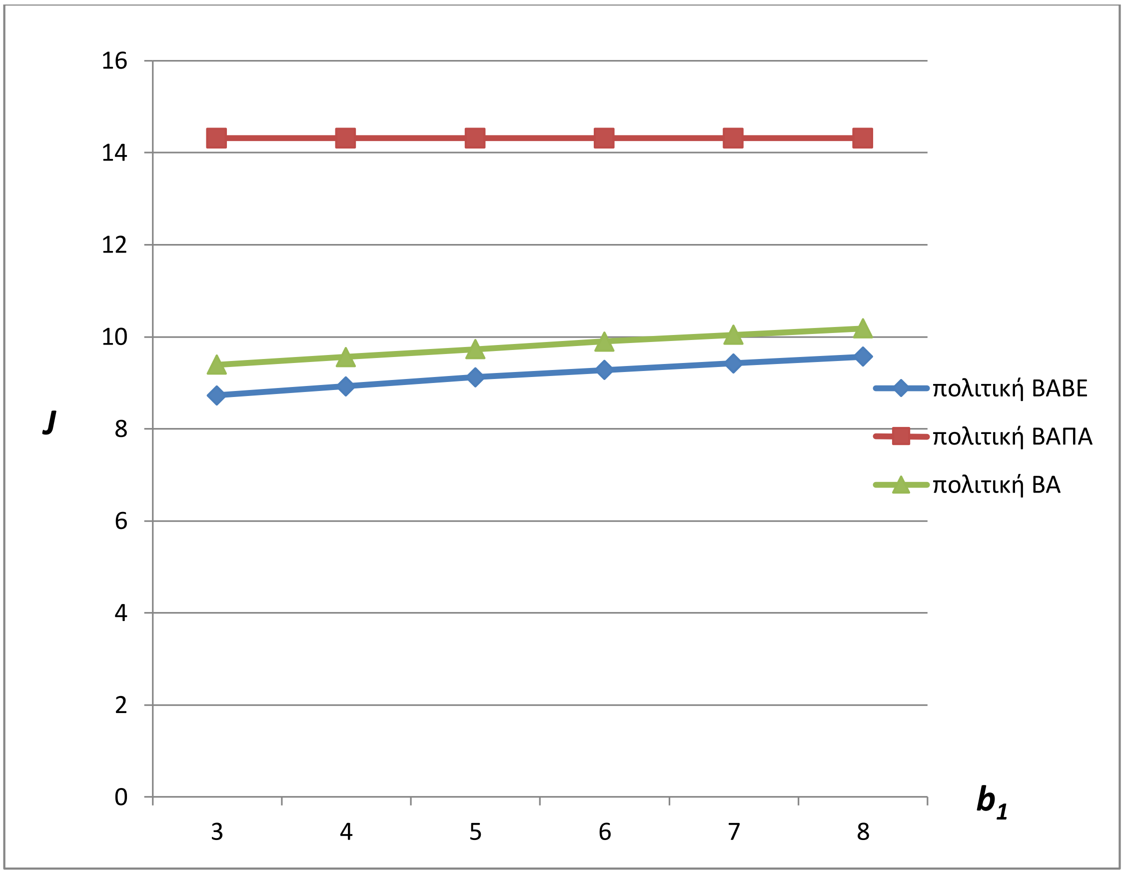
6.1.9. Επίδραση του b_1 στη συνάρτηση κόστους

Το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών προϊόντος τύπου 1, b_1 επηρεάζει αρνητικά το μέσο συνολικό κόστος. Παρατηρούμε ότι με την αύξησή του έχουμε αύξηση και του βέλτιστου κατωφλίου αποθέματος s με την ταυτόχρονη μείωση του κατωφλίου εκκρεμών παραγγελιών προϊόντος τύπου 1 c_1 ,καθώς χρειάζεται να έχουμε περισσότερο απόθεμα στο σύστημα, ετσι ώστε να μην έχουμε πολλές εκκρεμείς παραγγελίες με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους αποθεματοποίησης άρα και του συνολικού κόστους. Όσων αφορά την πολιτική ΒΑΠΑ όπως παρατηρούμε δεν έχουμε μεταβολή στο συνολικό κόστος και στο κατώφλι αποθέματος s αφού για τη συγκεκριμένη πολιτική δεν έχουμε εκκρεμείς παραγγελίες άρα και κόστος εκκρεμών παραγγελιών.

Πίνακας 9: Επίδραση του b_1 στην απόδοση του συστήματος.

	πολιτική ΒΑΒΕ				πολιτική ΒΑΠΑ		πολιτική ΒΑ	
b_1	J	S	c_1	c_2	J	S	J	S
3	8,7294	6	8	7	14,31296	11	9,3921776	7
4	8,9261	6	6	7	14,31296	11	9,561804	7
5	9,1201	6	6	7	14,31296	11	9,7314304	7
6	9,2797	7	5	7	14,31296	11	9,9003209	8
7	9,4255	7	5	7	14,31296	11	10,041992	8
8	9,5671	7	4	7	14,31296	11	10,183663	8

Με τη βοήθεια του γραφήματος 10 παρατηρούμε ότι η πολιτική ΒΑΒΕ είναι καλύτερη από την πολιτική ΒΑ για όλες τις τιμές του b_1, βλέπουμε όμως οτι όσο αυξάνεται το μοναδιαίο κόστος b_1 μειώνεται η διαφορά του κόστους ανάμεσα στις δυο πολιτικές. Παρατηρούμε επίσης ότι η πολιτική ΒΑΠΑ είναι η χειρότερη από τις τρεις πολιτικές και όπως φαίνεται και στο γράφημα δεν μεταβάλεται για όλες τις τιμές του b_1.



Γράφημα 10: Απόδοση των εξεταζόμενων πολιτικών για διάφορες τιμές του b_1.

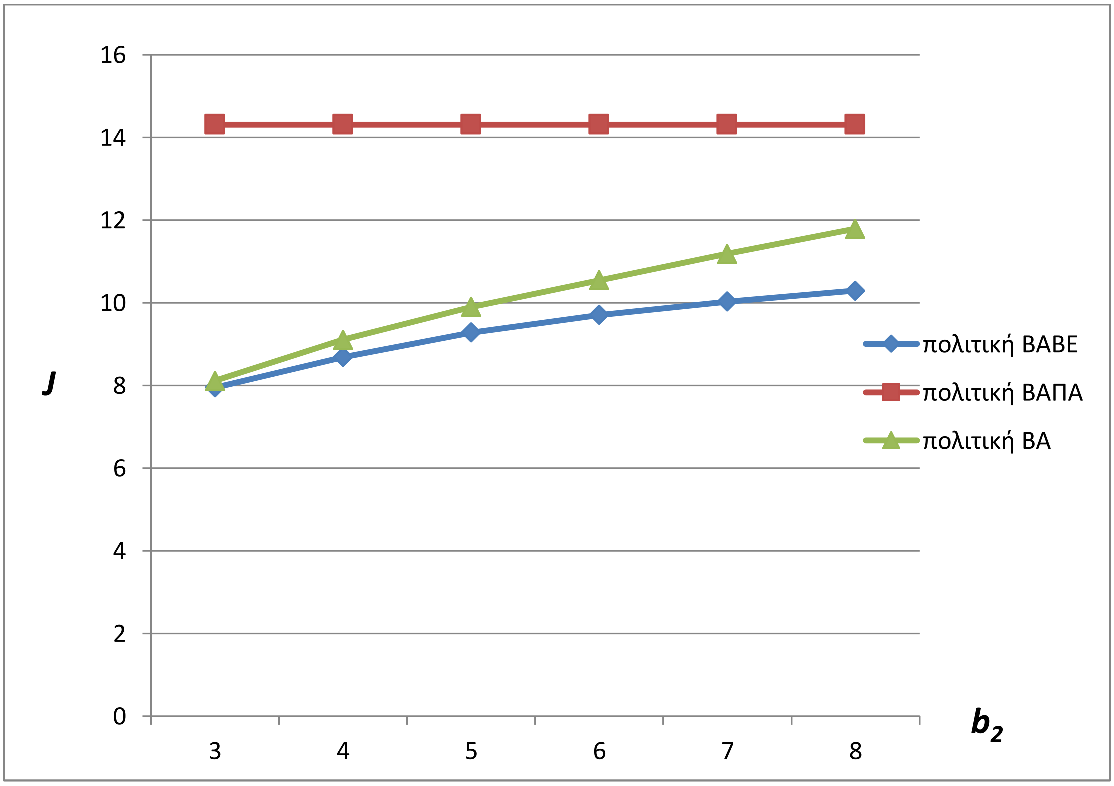
6.1.10. Επίδραση του b_2 στη συνάρτηση κόστους

Όπως και με το $\boldsymbol{b_1}$ η αύξηση του μοναδιαίου κόστους εκκρεμών παραγγελιών προϊόντος τύπου 2 $\boldsymbol{b_2}$ οδηγεί σε αύξηση του μέσου συνολικού κόστους. Παρατηρούμε ότι με την αύξησή του έχουμε αύξηση και του βέλτιστου κατωφλίου αποθέματος $\boldsymbol{s}$ με την ταυτόχρονη μείωση του κατωφλίου εκκρεμών παραγγελιών προϊόντος τύπου 2 $\boldsymbol{c_2}$(όπως επίσης και του c_1 αλλα σε μικρότερο βαθμό) ,καθώς χρειάζεται να έχουμε περισσότερο απόθεμα στο σύστημα, ετσι ώστε να μην έχουμε πολλές εκκρεμείς παραγγελίες με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους αποθεματοποίησης άρα και του συνολικού κόστους.

Πίνακας 10: Επίδραση του b_2 στην απόδοση του συστήματος.

	πολιτική BABE				πολιτική ΒΑΠΑ		πολιτική ΒΑ	
b_2	J	S	c_1	c_2	J	S	J	S
3	7,953098	6	6	13	14,31296	11	8,112237	6
4	8,687858	6	6	9	14,31296	11	9,10307	6
5	9,279735	7	5	7	14,31296	11	9,900321	8
6	9,703295	7	5	6	14,31296	11	10,54336	8
7	10,03184	8	5	5	14,31296	11	11,1864	8
8	10,29072	8	5	4	14,31296	11	11,79096	9

Εδώ αντίθετα με το b_1 παρατηρούμε με τη βοήθεια του γραφήματος 11 ότι με την αύξηση του μοναδιαίου κόστους εκκρεμών παραγγελιών προϊόντων τύπου 2 b_2 έχουμε αύξηση στη ψαλίδα κόστους ανάμεσα στις δυο πολιτικές με την πολιτική BABE να παραμένει σταθερά η καλύτερη πολιτική αφού έχει το χαμηλότερο κόστος για όλες τις τιμές του b_2. Όπως και με το b_1 η πολιτική ΒΑΠΑ είναι και εδώ η χειρότερη από τις τρεις πολιτικές και όπως παρατηρούμε παραμένει σταθερή αφού δεν επηρεάζεται από τη μεταβολή του b_2.



Γράφημα 11: Απόδοση των εξεταζόμενων πολιτικών για διάφορες τιμές του b_2.

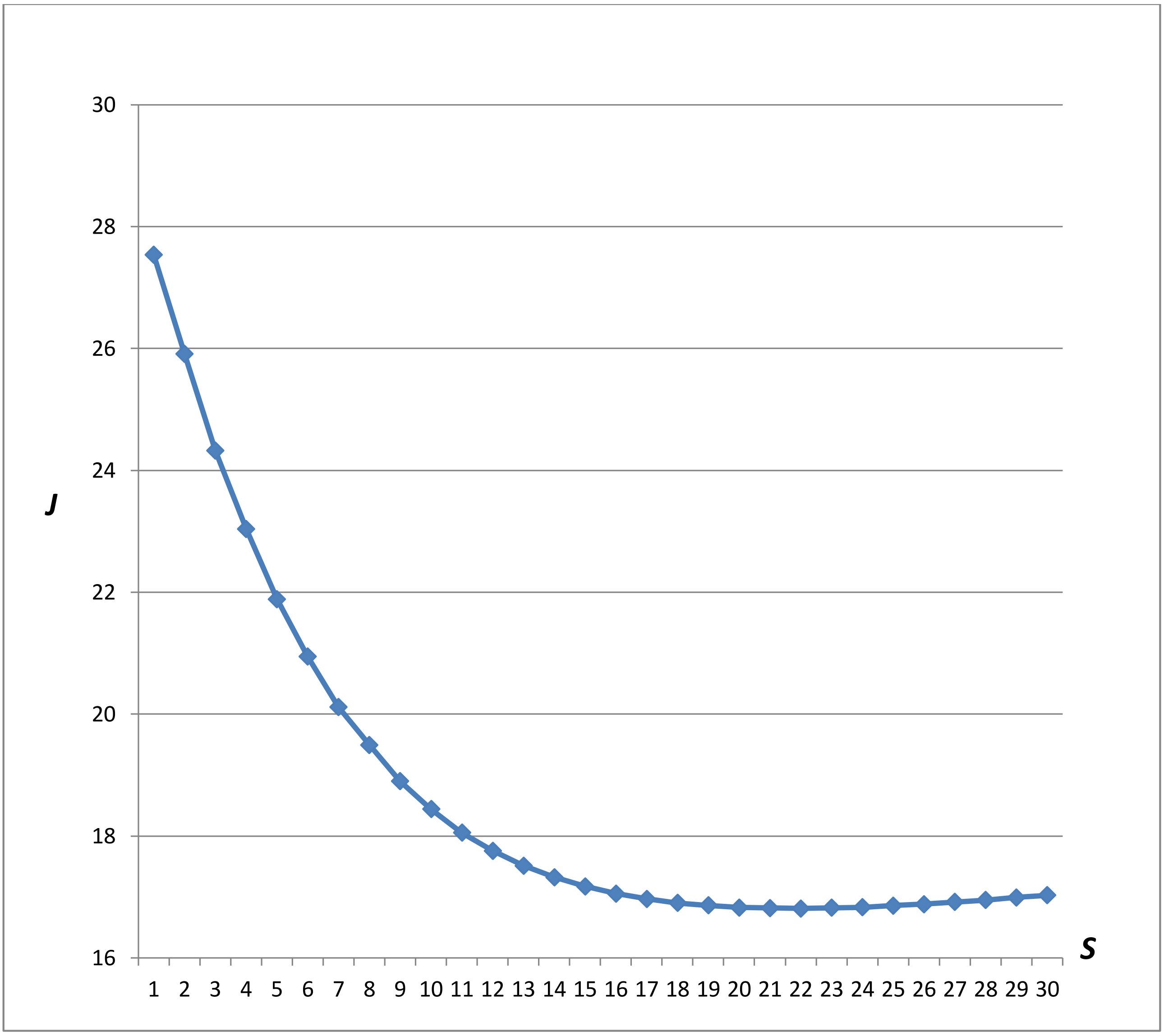
6.1.11. Επίδραση της μεταβολής του *s*

Εδώ εξετάζουμε για τις διάφορες τιμές του ***s*** πως μεταβάλλεται το συνολικό κόστος. Σαν τιμές αναφοράς έχουμε πάρει τις εξής: $\mu_1 = 7$, $\mu_2 = 8$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$, $h_1 = 1$, $h_2 = 0{,}5$, $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $r_1 = 20$, $r_2 = 15$. Οι τιμές που παίρνει η συνάρτηση κόστους για τις διάφορες τιμές του ***s*** καθώς και των δυο κατωφλίων εκκρεμών παραγγελιών $\boldsymbol{c_1}$ και $\boldsymbol{c_2}$ παρουσιάζονται στον πίνακα 11 και πίνακα 12 αντίστοιχα. Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι οι τιμές των κατωφλίων $\boldsymbol{c_1}$ και $\boldsymbol{c_2}$ είναι οι βέλτιστες δηλαδή είναι αυτές που ελαχιστοποιούν το μέσο συνολικό κόστος για κάθε τιμή του βασικού αποθέματος ***s***.

Πίνακας 11: Μέσο κόστος λειτουργίας συναρτήσει του βασικού αποθέματος *S*.

S	J	ΔJ	S	J	ΔJ	S	J	ΔJ
1	27,536557	-	11	18,05629	-0,38584	21	16,818287	-0,0094
2	25,909586	-1,62697	12	17,759662	-0,29663	22	16,810003	-0,0083
3	24,32487	-1,58472	13	17,515128	-0,24453	23	16,82255	0,01255
4	23,041149	-1,28372	14	17,324411	-0,19072	24	16,831887	0,00934
5	21,888151	-1,153	15	17,174284	-0,15013	25	16,859583	0,0277
6	20,943348	-0,9448	16	17,055658	-0,11863	26	16,881231	0,02165
7	20,116558	-0,8267	17	16,97011	-0,08555	27	16,91918	0,03795
8	19,495026	-0,6215	18	16,901595	-0,06852	28	16,949243	0,03006
9	18,898471	-0,5965	19	16,860886	-0,04071	29	16,993854	0,04461
10	18,442135	-0,4563	20	16,827643	-0,03324	30	17,029453	0,0356

Η γραφική παράσταση που προκύπτει από τις παραπάνω τιμές φαίνεται στο γράφημα 12. Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα μοναδικό ελάχιστο, είναι δηλαδή μονοκόρυφη. Από τις τιμές των διαφορών ΔJ βλέπουμε ότι επιπλέον η συνάρτηση κόστους είναι κυρτή ως προς ***s***, αφού τα ΔJ είναι αύξουσα συνάρτηση του ***s***. Σε όλα τα αριθμητικά πειράματα που εξετάσαμε και δεν παρουσιάζουμε λόγω έλλειψης χώρου, η συνάρτηση κόστους παρουσιάζει παρόμοια μορφή. Το αποτέλεσμα αυτό χρήζει περαιτέρω διερεύνησης καθώς μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική μείωση του απαιτούμενου υπολογιστικού φόρτου για την εκτίμηση της βέλτιστης πολιτικής.



Γράφημα 12: Μέσο κόστος λειτουργίας συναρτήσει του βασικού αποθέματος S

7. Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε ένα πρόβλημα ελέγχου σε ένα σύστημα παραγωγής που παράγει δύο προϊόντα για δύο κατηγορίες πελατών, μία κατηγορία για τον κάθε τύπο προϊόντος. Χρησιμοποιήσαμε ως βασική πολιτική, την πολιτική Βασικού αποθέματος Βασικών ελλειμμάτων (ΒΑΒΕ) και τη συγκρίναμε με άλλες δύο ευρύτατα χρησιμοποιούμενες πολιτικές την πολιτική Βασικού αποθέματος Πλήρους απόρριψης (ΒΑΠΑ) και την πολιτική Βασικού αποθέματος (ΒΑ).

Το σύστημα μοντελοποιήθηκε ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Εκτιμήθηκαν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης και τα μέτρα απόδοσης που καθορίζουν τη συνάρτηση κόστους. Αναπτύχθηκε ένας απλός κώδικας σε περιβάλλον Matlab για τον υπολογισμό των βελτίστων τιμών των παραμέτρων ελέγχου που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος.

Μετά από μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων παρατηρήσαμε ότι η προτεινόμενη πολιτική (ΒΑΒΕ) υπερτερεί έναντι των πολιτικών πλήρους απόρριψης και αποδοχής παραγγελιών καθώς επιτυγχάνει σημαντική μείωση του κόστους λειτουργίας του συστήματος για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Παρατηρήθηκε ακόμα ότι για υψηλούς ρυθμούς παραγωγής η πολιτική (ΒΑ) συγκλίνει στην πολιτική (ΒΑΒΕ), όσον αφορά το συνολικό κόστος, όπως και για χαμηλούς ρυθμούς άφιξης πελατών, ενώ η πολιτική (ΒΑΠΑ) φαίνεται να συγκλίνει στην προτεινόμενη πολιτική (ΒΑΒΕ) για χαμηλούς ρυθμούς παραγωγής του προϊόντος 1 και για υψηλούς ρυθμούς άφιξης πελατών.

Τα αποτελέσματα τέλος έδειξαν ότι η συνάρτηση κόστους είναι κυρτή ή «μονοκόρυφη» ως προς τις μεταβλητές ελέγχου με αποτέλεσμα να μοιάζει πιθανή η εμφάνιση μοναδικού τοπικού και ολικού βελτίστου κάτι που σημαίνει ότι η εύρεση βέλτιστης λύσης μπορεί να βρεθεί με μειωμένο υπολογιστικό φόρτο.

Βιβλιογραφικές αναφορές

[1] Adan I. and van der Wal. J., *Difference and differential equations in Stochastic Operations Research*, Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology, 1998.

[2] Gershwin, S.B. *Manufacturing systems engineering*. Prentice Hall, Engewood Cliffs, New Jersey, USA, 1994

[3] Sethi, S.P., and Zhang, Q., *Hierarchical Decision Making in StochasticManufacturing Systems*. Birkhauser, Boston, USA, 1994

[4] Ha A. Y., "Optimal dynamic scheduling policy for a make to stock production system", *Operations Research*, vol. 45, pp. 42-53 1997.

[5] Ha A. Y., "Inventory rationing in a make-to-stock production system with several demand classes and lost sales", *Management Science*, vol. 51, pp. 1093-1103, 1997.

[6] Ha A. Y., "Stock-rationing policy for a make-to-stock production system with two priority classes and backordering", *Naval Research Logistics*, vol. 44, pp. 457-472, 1997.

[7] Ioannidis S., "An inventory and order admission control policy for production systems with two customer classes", *International Journal* of *Production Economics*, vol. 131, pp. 663-673, 2011.

[8] Ioannidis S., Kouikoglou V.S., and Phillis Y.A., "Analysis of admission and inventory control policies for production networks", *IEEE Transactions on Automation Science & Engineering*, vol. 5, pp. 275-288, 2008.

[9] Σαραντής Ι., "Συνδυασμένος έλεγχος αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής που εξυπηρετούν δύο κατηγορίες πελατών και απαιτείται προετοιμασία για την έναρξη λειτουργίας της μονάδας παραγωγής", Πολυτεχνείο Κρήτης, Διπλωματική εργασία 2013.

Παράρτημα Α. Κώδικας σε περιβάλλον matlab

Α.1. Βελτιστοποίηση του συνολικού κόστους και υπολογισμός των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης συναρτήσει των παραμέτρων και κατωφλίων ελέγχου του συστήματος για την πολιτική Βασικού αποθέματος Βασικών ελλειμμάτων (BABE)

```
clear all
clear all
m1=7;
m2=8;
l1=3;
l2=3;
h1=1.5;
h2=1;
b1=6;
b2=5;
r1=90;
r2=25;
V_COST=1000;

max_s=10;
max_c1=45;
max_c2=10;

for s=1:max_s
  for c1=1:max_c1
    for c2=1:max_c2

      y=rem(s,2);
      if(y==0)
        s1=s/2;
        s2=s1;
      else
        z=s/2;
        s1=ceil(z);
        s2=s1-1;
      end

      A=zeros(c2+s2+1,c2+s2+1,c1+s1+1);
      B=zeros(c2+s2+1,c2+s2+1,c1+s1+1);
      C=zeros(c2+s2+1,c2+s2+1,c1+s1+1);
```

Υπολογισμός του πίνακα A_m

```
for i=1:c2+s2
   if(i~=c2+s2+1)
      A(i,i,1)=m1+l2;
   end
   A(i+1,i,1)=-l2;
end
A(c2+s2+1,c2+s2+1,1)=m1;

if(c1>1)
for n=2:c1
   for i=1:c2+s2
      if(i~=c2+s2+1)
         A(i,i,n)=m1+l1+l2;
      end
      A(i+1,i,n)=-l2;
   end
   A(c2+s2+1,c2+s2+1,n)=m1+l1;
end
end

for i=1:c2+s2
   if(i<=s2+1)
      A(i,i,c1+1)=m1+l1+l2;
   end
   if((i>s2+1)&&(i~=c2+s2+1))
      A(i,i,c1+1)=m2+l1+l2;
   end
   if(i>=s2+1)
      A(i,i+1,c1+1)=-m2;
   end
   A(i+1,i,c1+1)=-l2;
end
A(c2+s2+1,c2+s2+1,c1+1)=m2+l1;

for n=c1+2:c1+s1-1
   for i=1:c2+s2
      if(i<=s2+c1+2-n)
         A(i,i,n)=m1+l1+l2;
      end
      if((i>s2+c1+2-n)&&(i~=c2+s2+1))
         A(i,i,n)=m2+l1+l2;
      end
      if(i>=s2+c1+2-n)
         A(i,i+1,n)=-m2;
      end
```

```
      A(i+1,i,n)=-l2;
    end
    A(c2+s2+1,c2+s2+1,n)=m2+l1;
end

if(s1==s2)
    for i=1:c2+s2
      if(i<=2)
        A(i,i,c1+s1)=m1+l1+l2;
      end
      if((i>2)&&(i~=c2+s2+1))
        A(i,i,c1+s1)=m2+l1+l2;
      end
      if(i>1)
        A(i,i+1,c1+s1)=-m2;
      end
      A(i+1,i,c1+s1)=-l2;

       if(i==1)
        A(i,i,c1+s1+1)=l1+l2;
      end
      if((i>1)&&(i~=c2+s2+1))
        A(i,i,c1+s1+1)=m2+l1+l2;
      end
      A(i+1,i,c1+s1+1)=-l2;
      A(i,i+1,c1+s1+1)=-m2;
    end
    A(c2+s2+1,c2+s2+1,c1+s1)=m2+l1;
    A(c2+s2+1,c2+s2+1,c1+s1+1)=m2+l1;
end

if(s1==s2+1)
    for i=1:c2+s2
      if(i<=1)
        A(i,i,c1+s1)=m1+l1+l2;
      end
      if((i>1)&&(i~=c2+s2+1))
        A(i,i,c1+s1)=m2+l1+l2;
      end
      A(i,i+1,c1+s1)=-m2;
      A(i+1,i,c1+s1)=-l2;

      if(i==1)
        A(i,i,c1+s1+1)=l1+l2;
      end
      if((i>1)&&(i~=c2+s2+1))
        A(i,i,c1+s1+1)=m2+l1+l2;
      end
      A(i+1,i,c1+s1+1)=-l2;
```

```
      A(i,i+1,c1+s1+1)=-m2;
   end
   A(c2+s2+1,c2+s2+1,c1+s1)=m2+l1;
   A(c2+s2+1,c2+s2+1,c1+s1+1)=m2+l1;
End
```

Υπολογισμός των πινάκων B_m και C_m

```
for i=1:s2+c2+1
   C(i,i,1)=l1;
end

if(c1>1)
   for n=2:c1
      for i=1:s2+c2+1
         B(i,i,n)=m1;
         C(i,i,n)=l1;
      end
   end
end

for i=1:s2+c2+1
   B(i,i,c1+1)=m1;
   C(i,i,c1+1)=l1;
end

for n=c1+2:c1+s1-1
   for i=1:s2+c2+1
      C(i,i,n)=l1;
      if(i<=s2+c1+3-n)
         B(i,i,n)=m1;
      end
   end
end

if(s1==s2)
   for i=1:s2+c2+1
      if(i<=3)
         B(i,i,c1+s1)=m1;
      end
      C(i,i,c1+s1)=l1;
      if(i<=2)
         B(i,i,s1+c1+1)=m1;
      end
   end
end
```

```
if(s1==s2+1)
   for i=1:s2+c2+1
      if(i<=2)
         B(i,i,c1+s1)=m1;
      end
      C(i,i,c1+s1)=l1;
      if(i==1)
         B(i,i,c1+s1+1)=m1;
      end
   end
end

TG3=(inv(A(:,:,1)))*C(:,:,1);
G=zeros(c2+s2+1,c2+s2+1);
```

Υπολογισμός του πίνακα G_m

```
for i=1:c2+s2+1
   for j=1:c2+s2+1
      G(i,j)=TG3(i,j);
   end
end

FFP=zeros(c2+s2+1,c2+s2+1,s1+c1+1);

for i=1:c2+s2+1
   for j=1:c2+s2+1
      FFP(i,j,1)=G(i,j);
   end
end


for n=2:s1+c1

   TG0=B(:,:,n)*G;
   TG1=zeros(c2+s2+1,c2+s2+1);

   for i=1:c2+s2+1
      for j=1:c2+s2+1
         TG1(i,j)=A(i,j,n)-TG0(i,j);
      end
   end

   TG3=(inv(TG1))*C(:,:,n);

   for i=1:c2+s2+1
      for j=1:c2+s2+1
```

```
      G(i,j)=TG3(i,j);
    end
  end

  for i=1:c2+s2+1
    for j=1:c2+s2+1
      FFP(i,j,n)=0;
    end
    FFP(i,i,n)=1;
  end

  TF0=zeros(c2+s2+1,c2+s2+1);

  for k=1:n

    for i=1:c2+s2+1
      for j=1:c2+s2+1
        TF0(i,j)=FFP(i,j,k);
      end
    end

    TF1=TF0*G;

    for i=1:c2+s2+1
      for j=1:c2+s2+1
        FFP(i,j,k)=TF1(i,j);
      end
    end
  end
end

for i=1:c2+s2+1
  FFP(i,i,c1+s1+1)=1;
end

TG0=B(:,:,c1+s1+1)*G;
TG1=zeros(c2+s2+1,c2+s2+1);

for i=1:c2+s2+1
  for j=1:c2+s2+1
    TG1(i,j)=A(i,j,s1+c1+1)-TG0(i,j);
  end
end

TF0=zeros(c2+s2+1,c2+s2+1);

for k=1:c1+s1+1
  for i=1:c2+s2+1
    for j=1:c2+s2+1
```

```
      TF0(i,j)=TF0(i,j)+FFP(i,j,k);
    end
  end
end

for j=1:c2+s2+1
  TG1(c2+s2+1,j)=0;
  for i=1:c2+s2+1
    TG1(c2+s2+1,j)=TG1(c2+s2+1,j)+TF0(i,j);
  end
end

TG5=zeros(c2+s2+1,1);
TG5(c2+s2+1,1)=1;

TG2=(inv(TG1))*TG5;
```

Υπολογισμός των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

```
PROB=zeros(c2+s2+1,c1+s1+1);

for i=1:c2+s2+1
  PROB(i,c1+s1+1)=TG2(i,1);
end

for k=c1+s1:-1:1
  for i=1:c2+s2+1
    PROB(i,k)=0;
    for j=1:c2+s2+1
      PROB(i,k)=PROB(i,k)+FFP(i,j,k)*PROB(j,c1+s1+1);
    end
  end
end
```

Υπολογισμός του ρυθμού απόρριψης παραγγελιών για τις δύο κατηγορίες πελατών

```
sumls=0;
for i=1:c2+s2+1
  sumls=sumls+PROB(i,1);
end
LS1=sumls*l1;

sumls=0;
```

```
for i=1:c1+s1+1
   sumls=sumls+PROB(c2+s2+1,i);
end
LS2=sumls*l2;

sum1=zeros(c1+s1+1,1);

for i=1:c1+s1+1
   for j=1:c2+s2+1
      if(i<c1+1)
         sum1(i,1)=sum1(i,1)+PROB(j,i);
      end
      if(i>c1+1)
         sum1(i,1)=sum1(i,1)+PROB(j,i);
      end
   end
end
```

Υπολογισμός του μέσου αποθέματος και πλήθους εκκρεμών παραγγελιών για τις δύο κατηγορίες πελατών

```
order_reserve1=zeros(c1+s1+1,1);
B1=0;
H1=0;
B2=0;
H2=0;

for i=1:c1+s1+1
   if(i<c1+1)
      r=c1+1-i;
      order_reserve1(i,1)=sum1(i,1)*r;
      B1=B1+order_reserve1(i,1);
   end
   if(i>c1+1)
      r=i-c1-1;
      order_reserve1(i,1)=sum1(i,1)*r;
      H1=H1+order_reserve1(i,1);
   end
end

sum2=zeros(c2+s2+1,1);

for i=1:c2+s2+1
   for j=1:c1+s1+1
      if(i>s2+1)
         sum2(i,1)=sum2(i,1)+PROB(i,j);
      end
```

```
    if(i<s2+1)
      sum2(i,1)=sum2(i,1)+PROB(i,j);
    end
  end
end

order_reserve2=zeros(c2+s2+1,1);

for i=1:c2+s2+1
  if(i>s2+1)
    r=i-s2-1;
    order_reserve2(i,1)=sum2(i,1)*r;
    B2=B2+order_reserve2(i,1);
  end
  if(i<s2+1)
    r=s2+1-i;
    order_reserve2(i,1)=sum2(i,1)*r;
    H2=H2+order_reserve2(i,1);
  end
end
```

<u>Υπολογισμός του συνολικού κόστους</u>

```
COST=LS1*r1+LS2*r2+H1*h1+H2*h2+B1*b1+B2*b2;

      if((COST<V_COST)&&(COST>0))
        V_COST=COST;
        V_s=s;
        V_c1=c1;
        V_c2=c2;
      end

    end
  end
end
```

A.2. Βελτιστοποίηση του συνολικού κόστους και υπολογισμός των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης συναρτήσει των παραμέτρων και κατωφλίων ελέγχου του συστήματος για την πολιτική Βασικού αποθέματος Πλήρους απόρριψης (ΒΑΠΑ)

```
clear all
clear all
m1=7;
m2=8;
l1=3;
l2=3;
h1=1.5;
h2=1;
r1=90;
r2=25;
V_COST=1000;
max_s=15;

for s=1:max_s

  y=rem(s,2);
  if(y==0)
    s1=s/2;
    s2=s1;
  else
    z=s/2;
    s1=ceil(z);
    s2=s1-1;
  end

      A=zeros(s2+1,s2+1,s1+1);
      B=zeros(s2+1,s2+1,s1+1);
      C=zeros(s2+1,s2+1,s1+1);
```

<u>Υπολογισμός του πίνακα A_m</u>

```
for i=1:s2
    A(i,i,1)=m1+l2;
    A(i+1,i,1)=-l2;
end
A(s2+1,s2+1,1)=m1;
```

```
for n=2:s1-1
   for i=1:s2
      if(i<=s2+2-n)
         A(i,i,n)=m1+l1+l2;
      end
      if((i>s2+2-n)&&(i~=s2+1))
         A(i,i,n)=m2+l1+l2;
      end
      if(i>=s2+2-n)
         A(i,i+1,n)=-m2;
      end
      A(i+1,i,n)=-l2;
   end
   A(s2+1,s2+1,n)=m2+l1;
end

if(s1==s2)
   for i=1:s2
      if(i<=2)
         A(i,i,s1)=m1+l1+l2;
      end
      if((i>2)&&(i~=s2+1))
         A(i,i,s1)=m2+l1+l2;
      end
      if(i>1)
         A(i,i+1,s1)=-m2;
      end
      A(i+1,i,s1)=-l2;

      if(i==1)
         A(i,i,s1+1)=l1+l2;
      end
      if((i>1)&&(i~=s2+1))
         A(i,i,s1+1)=m2+l1+l2;
      end
      A(i+1,i,s1+1)=-l2;
      A(i,i+1,s1+1)=-m2;
   end
   if(s1>1)
   A(s2+1,s2+1,s1)=m2+l1;
   end
   A(s2+1,s2+1,s1+1)=m2+l1;
   if(s1==1)
      A(1,1,s1+1)=l1+l2;
   end
end

if(s1==s2+1)
```

```
  for i=1:s2
    if(i==1)
      A(i,i,s1)=m1+l1+l2;
    end
    if((i>1)&&(i~=s2+1))
      A(i,i,s1)=m2+l1+l2;
    end
    A(i+1,i,s1)=-l2;
    A(i,i+1,s1)=-m2;

    if(i==1)
      A(i,i,s1+1)=l1+l2;
    end
    if((i>1)&&(i~=s2+1))
      A(i,i,s1+1)=m2+l1+l2;
    end
    A(i+1,i,s1+1)=-l2;
    A(i,i+1,s1+1)=-m2;
  end
  if(s1>1)
  A(s2+1,s2+1,s1)=m2+l1;
  end
  A(s2+1,s2+1,s1+1)=m2+l1;
  if(s1==1)
    A(1,1,2)=l1;
  end
end
```

Υπολογισμός των πινάκων B_m και C_m

```
for i=1:s2+1
  C(i,i,1)=l1;
end

for n=2:s1-1
  for i=1:s2+1
    C(i,i,n)=l1;
    if(i<=s2+3-n)
      B(i,i,n)=m1;
    end
  end
end

if(s1==s2)
  for i=1:s2+1
    if(i<=3)&&(s1>1)
```

```
        B(i,i,s1)=m1;
      end
      C(i,i,s1)=l1;

      if(i<=2)
        B(i,i,s1+1)=m1;
      end
    end
end

if(s1==s2+1)
    for i=1:s2+1
      if(i<=2)
        B(i,i,s1)=m1;
      end
      if(s1>1)
      C(i,i,s1)=l1;
      end
    end
    B(1,1,s1+1)=m1;
end

TG3=(inv(A(:,:,1)))*C(:,:,1);
G=zeros(s2+1,s2+1);
```

Υπολογισμός του πίνακα G_m

```
for i=1:s2+1
    for j=1:s2+1
      G(i,j)=TG3(i,j);
    end
end

FFP=zeros(s2+1,s2+1,s1+1);

for i=1:s2+1
    for j=1:s2+1
      FFP(i,j,1)=G(i,j);
    end
end


for n=2:s1

    TG0=B(:,:,n)*G;
    TG1=zeros(s2+1,s2+1);
```

```
  for i=1:s2+1
    for j=1:s2+1
      TG1(i,j)=A(i,j,n)-TG0(i,j);
    end
  end

  TG3=(inv(TG1))*C(:,:,n);

  for i=1:s2+1
    for j=1:s2+1
      G(i,j)=TG3(i,j);
    end
  end

  for i=1:s2+1
    for j=1:s2+1
      FFP(i,j,n)=0;
    end
    FFP(i,i,n)=1;
  end

  TF0=zeros(s2+1,s2+1);

  for k=1:n

    for i=1:s2+1
      for j=1:s2+1
        TF0(i,j)=FFP(i,j,k);
      end
    end

    TF1=TF0*G;

    for i=1:s2+1
      for j=1:s2+1
        FFP(i,j,k)=TF1(i,j);
      end
    end
  end
end

for i=1:s2+1
  FFP(i,i,s1+1)=1;
end

TG0=B(:,:,s1+1)*G;
TG1=zeros(s2+1,s2+1);

for i=1:s2+1
```

```
  for j=1:s2+1
    TG1(i,j)=A(i,j,s1+1)-TG0(i,j);
  end
end

TF0=zeros(s2+1,s2+1);

for k=1:s1+1
  for i=1:s2+1
    for j=1:s2+1
      TF0(i,j)=TF0(i,j)+FFP(i,j,k);
    end
  end
end

for j=1:s2+1
  TG1(s2+1,j)=0;
  for i=1:s2+1
    TG1(s2+1,j)=TG1(s2+1,j)+TF0(i,j);
  end
end

TG5=zeros(s2+1,1);
TG5(s2+1,1)=1;

TG2=(inv(TG1))*TG5;
```

<u>Υπολογισμός των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης</u>

```
PROB=zeros(s2+1,s1+1);

for i=1:s2+1
  PROB(i,s1+1)=TG2(i,1);
end

for k=s1:-1:1
  for i=1:s2+1
    PROB(i,k)=0;
    for j=1:s2+1
      PROB(i,k)=PROB(i,k)+FFP(i,j,k)*PROB(j,s1+1);
    end
  end
end
```

Υπολογισμός του ρυθμού απόρριψης παραγγελιών για τις δύο κατηγορίες πελατών

```
sumls=0;
for i=1:s2+1
  sumls=sumls+PROB(i,1);
end
LS1=sumls*l1;

sumls=0;
for i=1:s1+1
  sumls=sumls+PROB(s2+1,i);
end
LS2=sumls*l2;

sum1=zeros(s1,1);

for i=1:s1
  for j=1:s2+1
    sum1(i,1)=sum1(i,1)+PROB(j,i+1);
  end
end

if(s2==0)
  sum1(1,1)=1;
end

reserve1=zeros(s1,1);
H1=0;
H2=0;
```

Υπολογισμός του μέσου αποθέματος για τις δύο κατηγορίες πελατών

```
for i=1:s1
  reserve1(i,1)=sum1(i,1)*i;
  H1=H1+reserve1(i,1);
end

sum2=zeros(s2,1);

for i=s2:-1:1
  for j=1:s1+1
    sum2(i,1)=sum2(i,1)+PROB(i,j);
  end
```

```
end

reserve2=zeros(s2,1);

for i=s2:-1:1
   r=s2+1-i;
   reserve2(i,1)=sum2(i,1)*r;
   H2=H2+reserve2(i,1);
end
```

Υπολογισμός του συνολικού κόστους

```
COST=LS1*r1+LS2*r2+H1*h1+H2*h2;

 if(COST<V_COST)
    V_COST=COST;
    V_s=s;
 end
end
```