ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ
Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών

Ε Λ Λ Η Ν Ι Κ Η Δ Η Μ Ο Κ Ρ Α Τ Ι Α
ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2016-17

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ & ΑΝΑΛΥΣΗ

(ΠΔ 97 /2015/ΦΕΚ 163Α'/20.08.2014)

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ (ΑΜΥΝΑΣ-ΕΠΙΘΕΣΗΣ) ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων
για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Ν. ΑΓΓΕΛΑΚΗΣ
Α.Μ.: 20140180020

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2017

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

Η Μεταπτυχιακή Διατριβή του Αγγελάκη Γεώργιου εγκρίνεται:

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Καθηγητής ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ (Επιβλέπων) , Γεώργιος Καϊμακάμης

Καθηγητής ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ , Νικόλαος Δάρας

Καθηγητής ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ , Νικόλαος Ματσατσίνης

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Διιδρυματικού Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών, «Εφαρμοσμένη Επιχειρησιακή Έρευνα και Ανάλυση», του Τμήματος Στρατιωτικών Επιστημών της Στρατιωτικής Σχολής Ευελπίδων και του τμήματος Παραγωγής και Διοίκησης της Σχολής Μηχανικών του Πολυτεχνείου Κρήτης.

Πριν την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ορισμένους από τους ανθρώπους που γνώρισα, συνεργάστηκα μαζί τους, και έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην εκπόνηση της.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω, καταρχάς, στον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Γεώργιο Καϊμακάμη, για την καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές και παρατηρήσεις επι της οργάνωσης, της δομής και του περιεχομένου, της παρούσας εργασίας, αλλά και τον επιδέξιο τρόπο που επεσήμανε λάθη και παραλείψεις κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κ. Νικόλαο Δάρα και κ. Νικόλαο Ματσατσίνη για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου, τις πολύτιμες υποδείξεις τους αλλά και τις γνώσεις που μου προσέφεραν καθ' όλη την διάρκεια του υπόψη Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστώ θερμά όλους τους φίλους μου για την ανοχή και την κατανόηση που επέδειξαν στο δύσκολο διάστημα της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας . Ιδιαιτέρως, ευχαριστώ την φίλη μου Δώρα, που με την έμπρακτη υποστήριξη της και τις παροτρύνσεις της, με ενθάρρυνε καθημερινά, συμβάλλοντας με τον δικό της ξεχωριστό τρόπο, στην ολοκλήρωση της συγγραφής. Κλείνοντας, ευχαριστώ ειλικρινά τους γονείς μου, Νικόλαο και Αναστασία, για την ηθική και υλική τους υποστήριξή όλα αυτά τα χρόνια και τους ευγνωμονώ που στέκονται πάντα δίπλα μου τόσο στις επιτυχίες όσο και στις αποτυχίες μου, δίνοντας μου την ελπίδα και την δύναμη να συνεχίσω να προσπαθώ για το καλύτερο.

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 12
ΕΙΣΑΓΩΓΗ 13
§1. Λήψη Αποφάσεων 13
§2. Θεωρία Παιγνίων: Ορισμός 14
§3. Χαρακτηριστικά Παιγνίων 15
§4. Ιστορική Αναδρομή 16
§5. Βασικές Έννοιες 17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 18
Κατηγορίες Παιγνίων
§1. Με Βάση τον Αριθμό των Παιχτών 18
1.1 Παίγνια 2 Παικτών 18
1.2 Παίγνια n Παικτών 18
§2. Με Βάση την Δυνατότητα Συνεργασίας 19
2.1 Συνεργατικά Παίγνια (cooperative games) 19
2.1.i Παράδειγμα Συνεργατικού Παιγνίου 19
2.2 Μη συνεργατικά Παίγνια (non-cooperative games) 20
§3. Με Βάση τα Χαρακτηριστικά των Αποδοχών 20
3.1 Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος (Zero-sum Games) 20
3.2 Παίγνια Μη-μηδενικού Αθροίσματος 21
§4. Με Βάση την Σειρά που Παίρνονται οι Αποφάσεις 21

	4.1 Παίγνια Κανονικής Μορφής	21
	4.1.i Παράδειγμα Παιγνίου Κανονικής Μορφής	21
	4.2 Παίγνια Εκτεταμένης Μορφής	22
	4.2.i Παράδειγμα Παιγνίου Εκτεταμένης Μορφής	23
§5.	Με Βάση Των Αριθμό Των Στρατηγικών	23
	5.1 Πεπερασμένα Παίγνια	23
	5.2 Μη Πεπερασμένα Παίγνια	24
§6.	Με Βάση την Πληροφόρηση που Παρέχουν	25
	6.1 Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης	25
	6.2 Παίγνια Ατελούς Πληροφόρησης	25
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Στρατιωτικές Αποφάσεις και Θεωρία Παιγνίων		26
§1.	Ο Πόλεμος από την Οπτική της Θεωρίας Παιγνίων	26
§2.	Ο Ρόλος της Θεωρίας Παιγνίων στην Ένοπλη Σύγκρουση	26
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Η Ισορροπία Nash		28
§1.	Προσέγγιση της ισορροπίας Nash	28
§2.	Παραδείγματα Κατανόησης Βασικών Εννοιών	29
	2.1 Το Παίγνιο του Δειλού (Chicken Game)	29
	2.2 Το Δίλημμα του Φυλακισμένου.	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα		32
§1.	Παίγνια Χωρίς Σημεία Ισορροπίας	32
§2.	Μικτές Στρατηγικές	33
	2.1. Παράδειγμα Μικτών Στρατηγικών	34
§3.	Μικτές Στρατηγικές στις Ένοπλες Δυνάμεις	35
§4.	Γραφική Αναπαράσταση Μικτών Στρατηγικών	38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Το Θεώρημα MINIMAX	39
§1. Εφαρμογή του Κριτηρίου minimax	39
§2. Θεωρητικό Παράδειγμα Σύγκρουσης Δύο Χωρών	41
§3. Βέλτιστες Μεικτές Στρατηγικές	42
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Ιδιότητες των Βέλτιστων Στρατηγικών	43
§1. Περισσότερες από μία Βέλτιστες Στρατηγικές	43
§2. Ιδιότητες μιας Βέλτιστης Στρατηγικής	44
§3. Κυρίαρχες Στρατηγικές	47
§4. Επιλογή Στόχου Για Άμυνα – Επίθεση	51
§5. Η Διεξαγωγή Αναγνώρισης ως Παίγνιο Στρατηγικής	55
§6. Επίθεση σε Κρυμμένο Στόχο.	61
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Επίλυση Μη Πεπερασμένων Παιγνίων	66
§1. Βέλτιστη Μικτή Στρατηγική	66
§2. Ύπαρξη Βέλτιστων Στρατηγικών	67
§3. Ιδιότητες των Βέλτιστων Στρατηγικών	70
§4. Καθυστερημένη Πυροδότηση	71
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 Παίγνια με Κυρτές Συναρτήσεις Αποδοχών	76
§1. Κυρτές Συναρτήσεις Αποδοχών	76
§2. Βέλτιστη Καθαρή Στρατηγική για τον Κόκκινο	78
§3. Η Τιμή του Παιγνίου είναι η $\min_{y} \max_{x} M(x,y)$.	79
§4. Η Βέλτιστη Καθαρή Στρατηγική του Κόκκινου	79
§5. Οι Βέλτιστες Στρατηγικές του Μπλε	80
§6. Κοίλη Συνάρτηση Αποδοχών	84
§7. Γενικά Κυρτή Συνάρτηση Αποδοχών	85

	7.1. Παράδειγμα	85
§8.	Υπεράσπιση δύο Στόχων από Επίθεση	86
§9.	Υπεράσπιση Πολλών Στόχων Διαφορετικής Αξίας	89
	9.1. Παράδειγμα	92
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 Παιχνίδια Χρόνου – Μονομαχίες		94
§1.	Η Μονομαχία ως Παίγνιο Χρόνου	94
§2.	Θορυβώδη Μονομαχία: Μία Σφαίρα κάθε Μονομάχος	95
	2.1. Παράδειγμα	99
§3.	Θορυβώδη Μονομαχία: Μία σφαίρα κάθε μονομάχος, χωρίς σημεία ισορροπίας.	99
§4.	Θορυβώδη Μονομαχία: Πολλές σφαίρες, ίση ακρίβεια	102
§5.	Θορυβώδη Μονομαχία: Μία σφαίρα, αυθαίρετη ακρίβεια	103
	5.1. Παράδειγμα	104
§6.	Αθόρυβη Μονομαχία: Μία Σφαίρα Κάθε Μονομάχος, Ίσες Ακρίβειες	105
§7.	Αθόρυβη-Θορυβώδη Μονομαχία: Μία σφαίρα κάθε μονομάχος	108
§8.	Αθόρυβη Μονομαχία: Μία Σφαίρα Εναντίον 2, Ίσες Ακρίβειες	109
§9.	Αθόρυβη Μονομαχία: Θετική Αρχική Ακρίβεια	111
§10.	Πρόβλεψη Στόχου	113
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		115

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι στρατιωτικές επιχειρήσεις είναι από μόνες τους ιδιαίτερα πολύπλοκες και απαιτούν ιδιαίτερες ικανότητες από τους εκάστοτε διοικητές, προκειμένου να πετύχουν τον αντικειμενικό τους σκοπό. Αυτό λοιπόν που χρειάζεται ένας στρατιωτικός, είναι ένα εργαλείο το οποίο θα τον βοηθά υπό συνθήκες πίεσης, να οργανώνει τη σκέψη του και να παίρνει τις καλύτερες το δυνατόν αποφάσεις, αφού συνεκτιμήσει όλα τα δεδομένα που έχει στη διάθεσή του.

Στην παρούσα εργασία θα γίνει μια καταγραφή των τρόπων μοντελοποίησης διαφόρων Στρατιωτικών Επιχειρήσεων, μέσω εννοιών της Θεωρίας Παιγνίων (για παράδειγμα θα χρησιμοποιηθούν οι έννοιες των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος και οι αντίστοιχοι πίνακες κέρδους) καθώς επίσης θα παρουσιαστούν βασικές έννοιες και κάποια παραδείγματα μοντελοποίησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§1. Λήψη Αποφάσεων

Η Στατιστική Θεωρία Λήψης Αποφάσεων αποτελεί ένα χρήσιμο επιστημονικό εργαλείο για το χειρισμό και την επίλυση προβλημάτων όπως η υποστήριξη της λήψης αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας ή κινδύνου. Ως καταστάσεις κινδύνου νοούνται εκείνες οι περιπτώσεις αβεβαιότητας κατά τις οποίες οι πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων ενδεχομένων του προβλήματος είναι γνωστές και διάφορες της μονάδας. Τέτοιες περιπτώσεις όμως δεν εμφανίζονται συχνά στην πράξη.

Η λήψη μιας απόφασης στα πλαίσια που τέθηκαν παραπάνω απαιτεί τις περισσότερες φορές μια αρχική εκτίμηση των άγνωστων πιθανοτήτων των αμοιβαία αποκλειόμενων ενδεχομένων. Η αρχική αυτή εκτίμηση είναι συνήθως υποκειμενική και οι εκτιμώμενες πιθανότητες ονομάζονται προγενέστερες ή εκ των προτέρων (a priori). Οι πιθανότητες αυτές αποτελούν την αφετηρία της λεγόμενης Προγενέστερης ή Αρχικής Ανάλυσης (Prior Analysis) η οποία θα μπορούσε να θεωρηθεί ως η πρώτη φάση προσέγγισης ενός προβλήματος λήψης απόφασης. Οι αρχικές υποκειμενικές εκτιμήσεις εμπεριέχουν, προφανώς, σημαντικό βαθμό αβεβαιότητας ο οποίος δεν επιτρέπει την επιλογή του βέλτιστου τρόπου δράσης. Είναι λοιπόν φυσικό ότι κάθε αποφασίζων, επιδιώκει να εξαλείψει, ή τουλάχιστον να περιορίσει, την αβεβαιότητα.

Πλήρης εξάλειψη της αβεβαιότητας προϋποθέτει ότι το άτομο που αποφασίζει γνωρίζει κάθε φορά το ενδεχόμενο που θα συμβεί. Τότε αρκεί να καταγράφει τα αποτελέσματα όλων των δυνατών τρόπων ενέργειας για το συγκεκριμένο ενδεχόμενο και να επιλέγει εκείνον που δίνει το βέλτιστο αποτέλεσμα (μέγιστη ωφέλεια ή ελαχιστοποίηση ζημιάς). Στην περίπτωση αυτή η απόφαση λαμβάνεται κάτω από συνθήκες πλήρους πληροφόρησης και αποφέρει, με απόλυτη βεβαιότητα, το βέλτιστο αποτέλεσμα. Στην πράξη όμως η περίπτωση που περιεγράφηκε παραπάνω πολύ σπάνια συμβαίνει και κατά συνέπεια η πλήρης εξάλειψη της αβεβαιότητας, δεν είναι πρακτικά δυνατή. Αυτό που μπορεί να συμβεί πάντως είναι να αποκτηθούν, με κόστος, ορισμένες πληροφορίες που περιορίζουν, σε κάποιο βαθμό, την αβεβαιότητα εμφάνισης των ενδεχομένων και βελτιώνουν το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Η ανάλυση μπορεί να συνεχιστεί με την απόκτηση των πρόσθετων αυτών πληροφοριών, που συνήθως απαιτούν τη διενέργεια δειγματοληπτικής έρευνας και την ενσωμάτωσή τους ως δεύτερη φάση στη διαδικασία λήψης απόφασης. Η φάση αυτή, σε αντιδιαστολή με την προηγούμενη, ονομάζεται Μεταγενέστερη Ανάλυση (Posterior Analysis).

Η διαδικασία λήψης αποφάσεων μπορεί να ολοκληρωθεί με μια τρίτη φάση η οποία αναφέρεται ως Προ-Μεταγενέστερη Ανάλυση (Prior-Posterior Analysis). Στη φάση αυτή πριν τον υπολογισμό των αναθεωρημένων πιθανοτήτων εμφάνισης των διαφόρων ενδεχομένων από τα δεδομένα της δειγματοληψίας προσδιορίζεται με κατάλληλο σχεδιασμό και το βέλτιστο μέγεθος του δείγματος, δηλαδή το μέγεθος του δείγματος που βελτιστοποιεί το συνολικό αποτέλεσμα (μεγιστοποίηση ωφελειών ή ελαχιστοποίηση απωλειών ευκαιρίας, ελαχιστοποίηση κόστους δειγματοληψίας).

Ολοκληρώνοντας τη σύντομή αυτή εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Στατιστικής Θεωρίας Λήψης Αποφάσεων, θα πρέπει να αναφερθούμε στη διάκριση μεταξύ συνθηκών αβεβαιότητας, όπως ορίστηκαν παραπάνω και των συνθηκών ανταγωνισμού. Στην πρώτη περίπτωση οι αβέβαιες καταστάσεις επηρεάζονται και διαμορφώνονται από δυνάμεις άγνωστες στον αποφασίζοντα οι οποίες δεν ελέγχονται από τον ίδιο ή κάποιον αντίπαλό του ενώ στη δεύτερη περίπτωση από αντιπάλους που έχουν τους ίδιους στόχους.

Προβλήματα που εντάσσονται στην πρώτη περίπτωση καλύπτονται από τον κλάδο της Στατιστικής Θεωρίας Λήψης Αποφάσεων (Decision Making) ενώ προβλήματα που εντάσσονται στη δεύτερη περίπτωση καλύπτονται από τον κλάδο της Θεωρίας Παιγνίων (Game Theory).

§2. Θεωρία Παιγνίων: Ορισμός

Η θεωρία παιγνίων ασχολείται με τη μελέτη στοιχείων που χαρακτηρίζουν καταστάσεις ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης με έμφαση στη διαδικασία λήψης αποφάσεων περισσοτέρων από ένα ληπτών απόφασης, δηλαδή είναι μία επιστημονική διαδικασία κατά την οποία, με χρήση απλών υπολογισμών και λογικής, μπορεί να μελετηθεί - και πιθανότατα προβλεφθεί - ο τρόπος με τον οποίο δύο ή περισσότερες οντότητες λαμβάνουν αποφάσεις, σ' ένα ανταγωνιστικό μεταξύ τους περιβάλλον. Η μεμονωμένη οντότητα στην συγκεκριμένη περίπτωση ονομάζεται παίκτης. Παίκτης μπορεί να είναι ένα πρόσωπο, μία οργάνωση, ένα κράτος ή ένας συνασπισμός. Η θεωρία επικεντρώνεται στην επιλογή μιας βέλτιστης πορείας δράσεων, λαμβάνοντας υπόψη τους πιθανούς τρόπους ενεργείας των συμμετεχόντων καθώς επίσης και τυχαία γεγονότα. Η υπόψη θεωρία επιτρέπει στους συμμετέχοντες να αξιοποιήσουν την ευφυία και την λογική τους ώστε να επηρεάσουν το αποτέλεσμα. Ένας παίκτης χαρακτηρίζεται ως "ευφυής", εννοώντας πως έχει τέλεια γνώση του πώς να παίξει το παίγνιο, και ως "λογικός", εννοώντας πως παίζει με αντικειμενικό στόχο τη μεγιστοποίηση του προσωπικού του οφέλους.

§3. Χαρακτηριστικά Παιγνίων

Πρώτα απ' όλα προκειμένου να γίνει κατανοητός ο όρος "Παίγνιο", παραθέτω τον ακόλουθο ορισμό, όπως αυτός συναντάτε στην Θεωρία Παιγνίων:

«Παίγνιο ονομάζεται η κατάσταση εκείνη κατά την οποία δυο ή περισσότεροι ορθολογικοί παίκτες με αντικρουόμενους στόχους επιλέγουν τρόπους ενέργειας, δημιουργώντας συνθήκες ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης.»

Κάθε παίγνιο λοιπόν έχει ορισμένα χαρακτηριστικά, τα οποία αναλύονται παρακάτω:

Παίκτης: Αυτόνομη μονάδα λήψης απόφασης. (άτομο, ομάδα, επιχείρηση, κράτος κλπ.). Προσπαθεί να βελτιστοποίηση τη δική του ευημερία έναντι των αντιπάλων βασιζόμενος στους κανόνες, στους πόρους και στις πληροφορίες που έχει στη διάθεση του, είναι ορθολογιστές και λογικοί.

Στρατηγική: Το σύνολο των κανόνων που ορίζουν τις εφικτές επιλογές τις οποίες δύναται να ακολουθεί σε κάθε κίνηση του ο παίκτης μέχρι το τέλος του παιγνίου. Αναζητούμε τις στρατηγικές που βελτιστοποιούν το στόχο του κάθε παίκτη. Για να λύσουμε ένα παίγνιο στην κανονική του μορφή πρέπει να βρούμε κατ' αρχήν εάν υπάρχουν κυρίαρχες στρατηγικές. Μια στρατηγική θεωρείται αυστηρά κυρίαρχη, όταν οι αποδόσεις της είναι μεγαλύτερες από τις αποδόσεις οποιασδήποτε άλλης στρατηγικής του ιδίου παίκτη. Όταν οι αποδόσεις μιας στρατηγικής είναι ίσες ή μεγαλύτερες από τις αποδόσεις των υπολοίπων στρατηγικών, τότε η στρατηγική αυτή καλείται ασθενώς κυρίαρχη. Οι υπόλοιπες στρατηγικές, ονομάζονται αυστηρώς ή ασθενώς κυριαρχούμενες.

Πίνακας αποτελεσμάτων (πληρωμών-αμοιβών): Είναι ένας πίνακας ο οποίος στα κελιά του περιλαμβάνει τα αποτελέσματα του παιγνίου για κάθε συνδυασμό στρατηγικών.

Λύση του παιγνίου: Η βέλτιστη στρατηγική όλων των παικτών.

§4. Ιστορική Αναδρομή

Στην αρχή οι οικονομολόγοι, προκειμένου να καταλάβουν και να εξηγήσουν τί συμβαίνει στην πραγματική οικονομία, προσπάθησαν να επεκτείνουν τα συμπεράσματά τους από τη μελέτη της οικονομίας του Ροβινσώνα Κρούσου.

Η οικονομία αυτή αποτελείται από ένα άτομο το οποίο προσπαθεί, με τα μέσα που διαθέτει, να ικανοποιήσει τις ανάγκες του, μεγιστοποιώντας έτσι τη χρησιμότητα του. Η προσπάθεια αυτή δεν απέφερε τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Σε μια οικονομία με περισσότερα του ενός άτομα είναι φυσικό να υπάρχει «σύγκρουση συμφερόντων». Συχνά οι άνθρωποι που ζουν στην πραγματική οικονομία, πρέπει να συμβιβάζονται με κάτι λιγότερο από αυτό που θα μεγιστοποιούσε την χρησιμότητα τους, αν ζούσαν σε μια οικονομία σαν αυτή του Ροβινσώνα Κρούσου. Το γεγονός αυτό, οδήγησε τους οικονομολόγους σε μια διαφορετική προσέγγιση των πραγμάτων (Beebe, 1957).

Το 1928 ο Von Neumann επιχείρησε, για πρώτη φορά, να αναλύσει τις διάφορες καταστάσεις σύγκρουσης στην καθημερινή ζωή. Θέλοντας να απλοποιήσει την πολυπλοκότητα της καθημερινότητας ώστε να μπορέσει να προχωρήσει στην ανάλυσή του, χρησιμοποίησε ένα παιχνίδι πόκερ. Αν και θεωρητικά απλό, το πόκερ διαθέτει πολλές ομοιότητες με τις πραγματικές καταστάσεις σύγκρουσης και μπορεί να θεωρηθεί ένα κατάλληλο μοντέλο (Baumgarten, 1961). Η μελέτη του γνωστού αυτού παιγνίου, οδήγησε στη δημιουργία της θεωρίας παιγνίων, η οποία πήρε το όνομα της ακριβώς γι΄αυτόν τον λόγο, το ότι δηλαδή γεννήθηκε μέσα από τη μελέτη ενός παιχνιδιού. Για τον ίδιο λόγο, συναντάμε στην ορολογία της όρους, που θυμίζουν παιχνίδι.

Το πρώτο σημαντικό κείμενο πάνω στη θεωρία παιγνίων και ίσως το πιο δημοφιλές, ανήκει στους Von Neumann και Oskar Morgenstern. Πρόκειται για το "Theory of Games and Economic Behavior" το οποίο εκδόθηκε το 1944. Η θεωρία παιγνίων έγινε προσβάσιμη στο ευρύ κοινό κατά το 1957, όταν οι Duncan Luce και Howard Raiffa εξέδωσαν το "Games and Decisions" (Duncan Luce and Howard Raiffa, 1957). Άλλος μεγάλος σταθμός για τη θεωρία παιγνίων είναι η απόδειξη από τον John Nash, ότι για κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών και στρατηγικών, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας σε καθαρές ή μικτές στρατηγικές.

Τι είναι όμως τελικά η θεωρία παιγνίων; Σύμφωνα με τον τιμημένο με Νόμπελ οικονομικών καθηγητή Robert J. Aumman: «Η θεωρία παιγνίων δεν αφορά μόνο στα οικονομικά. Είναι μία θεωρία για την αλληλεπίδραση μεταξύ διαφόρων οντοτήτων, όπου κάθε οντότητα θέλει να πετύχει το δικό της στόχο και αυτοί οι στόχοι μπορεί να είναι διαφορετικοί. Η θεωρία παιγνίων είναι χρήσιμη στο να καταλάβουμε τις συγκρούσεις. Και το να κατανοήσεις κάτι σε βοηθάει να το καταπολεμήσεις, να το επιλύσεις.» (Aumman, 1989). Αποτελεί δηλαδή μια θεωρία που αναφέρεται στη διαδικασία λήψης απόφασης. Οργανώνει τα διάφορα σενάρια σύγκρουσης και παρέχει έτσι μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της κατάστασης. Έτσι, ο εκάστοτε «παίκτης» του παιγνίου μπορεί να αποφασίσει τη δική του στρατηγική προκειμένου να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητα του ή τουλάχιστον να ελαχιστοποιήσει τις πιθανές απώλειές του.

Η θεωρία παιγνίων, ως θεωρία λήψης αποφάσεων, χρησιμοποιήθηκε από πολύ νωρίς για τη μελέτη στρατιωτικών επιχειρήσεων. Ήδη, από το Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, έγινε κατανοητή η ανάγκη επιστημονικής μελέτης των διακρατικών συγκρούσεων αλλά και της αντιμετώπισης τους. Το 1946 στην Αμερική ιδρύεται η Rand Corporation. Σκοπός της ήταν η ανάπτυξη στρατηγικών για τις διεθνείς συγκρούσεις και η παροχή ανάλογων συμβουλών στις ένοπλες δυνάμεις της χώρας. Το άρθρο του Haywood, σχετικά με τη θεωρία παιγνίων και τις στρατιωτικές αποφάσεις, υπήρξε το πρώτο εξειδικευμένο άρθρο. Ακολούθησε μεγάλη βιβλιογραφία, αλλά και συζήτηση, αν η θεωρία παιγνίων θα έπρεπε να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της στρατιωτικής εκπαίδευσης και αν μπορεί να βοηθήσει στη λήψη αποφάσεων υπό συνθήκες πίεσης.

§5. Βασικές Έννοιες

Θεμέλιο λίθο στην θεωρία παιγνίων αποτελούν τα βασικά χαρακτηριστικά του παιγνίου. Ως στοιχεία του παιγνίου θεωρούνται το σύνολο των παικτών, το σύνολο των πιθανών ενεργειών που θα πραγματοποιήσουν οι παίκτες (στρατηγικές), οι πληροφορίες που υπάρχουν κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, τα αποτελέσματα που μπορεί να αποκομίσει ο κάθε παίκτης για κάθε ενέργεια του, καθώς επίσης και οι προτιμήσεις των παικτών με βάση τα αποτελέσματα.

Το αποτέλεσμα (outcome) που μπορεί να αποκομίσει ο παίκτης, εξαρτάται από τις στρατηγικές που θα ακολουθήσει και από τις αποδόσεις που μπορεί να λάβει.

Η **απόδοση (payoff)**, είναι η αριθμητική αποτίμηση των στόχων του, η χρησιμότητα που θα αποκτήσει όταν το παιχνίδι θα τελειώσει.

Με τον όρο **στρατηγική** ορίζουμε το σύνολο των κανόνων σχετικά με το ποια επιλογή πρέπει να ακολουθήσει ο παίκτης, ποιες είναι οι επιλογές του στο κάθε παίγνιο ξεχωριστά, έχοντας όμως υπόψη του και όλες τις κινήσεις του αντιπάλου. Μια διάκριση που μπορεί να γίνει στις στρατηγικές είναι σε αμιγείς “pure” και σε μικτές “mixed” στρατηγικές. Μια αμιγή (καθαρή) στρατηγική είναι εκείνη στην οποία κάθε μία από τις δυνατές επιλογές που έχει ο παίκτης επιλέγεται στο ακέραιο. Αντίθετα μικτή, είναι η στρατηγική η οποία περιλαμβάνει συνδυασμό επιλογών, από τις οποίες τουλάχιστον μία επιλέγεται με μη ακέραιες τιμές. Οι μικτές στρατηγικές δηλαδή καθορίζουν ότι η στρατηγική που θα διαλέξει ο παίκτης θα επιλεγεί τυχαία από το σύνολο των καθαρών στρατηγικών που έχει, με κάποια πιθανότητα. Επομένως μια μικτή στρατηγική είναι μια κατανομή πιθανοτήτων πάνω στις καθαρές στρατηγικές που έχει ο παίκτης.

Ένα παίγνιο στο οποίο οι παίκτες παίζουν ταυτόχρονα, μπορεί να απεικονιστεί ως “**κανονική**” (**normal**) ή “**στρατηγική**” (**strategic**) μορφή χρησιμοποιώντας έναν πίνακα ο οποίος συσχετίζει τις στρατηγικές των παικτών με τις αποδόσεις που θα έχουν. Ένα στρατηγικό παιχνίδι είναι ένα μοντέλο όπου έχουμε N παίκτες, καθένας από τους οποίους διαλέγει μόνο μία στρατηγική, η οποία δεν αλλάζει. Σε ένα στρατηγικό παιχνίδι υπάρχουν διάφορες συμπεριφορές παικτών:

α. Το παιχνίδι παίζεται μόνο μία φορά.

β. Κάθε παίκτης "ξέρει" το παιχνίδι (κάθε παίκτης γνωρίζει όλες τις κινήσεις και τις αποδόσεις του παιχνιδιού).

γ. Οι παίκτες είναι ορθολογικοί. Ένας ορθολογικός παίκτης είναι ένας παίκτης που παίζει εγωιστικά, έχοντας ως στόχο να μεγιστοποιήσει το κέρδος του στο παιχνίδι, ενώ ταυτόχρονα γνωρίζει πως και οι αντίπαλοι του είναι ορθολογιστές.

δ. Όλοι οι παίκτες διαλέγουν τις κινήσεις τους ταυτόχρονα χωρίς όμως να γνωρίζουν τις επιλογές των άλλων παικτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Κατηγορίες Παιγνίων

Τα παίγνια μπορούν να ταξινομηθούν σε διάφορες κατηγορίες με βάση διάφορα είδη κριτηρίων. Δημιουργούνται λοιπόν οι εξής διαχωρισμοί:

§1. Με Βάση τον Αριθμό των Παικτών

1.1. Παίγνια 2 Παικτών

Όταν τα παίγνια είναι μεταξύ 2 παικτών ονομάζονται «Παίγνια 2 Παικτών». Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνεται και η περίπτωση που υπάρχει ένας μόνο παίκτης έχοντας ως αντίπαλο του «την φύση». Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα του τελευταίου είναι το παιχνίδι της πασιέντζας.

1.2. Παίγνια n Παικτών

Όταν οι παίκτες είναι περισσότεροι (έστω n), τότε έχουμε τα «παίγνια n παικτών», το οποία βέβαια δεν έχουν μελετηθεί όσο τα πρώτα.

§2. Με Βάση την Δυνατότητα Συνεργασίας

2.1. Συνεργατικά Παίγνια (cooperative games)

Οι παίκτες (δύο ή περισσότεροι) πριν παίξουν το παίγνιο έχουν τη δυνατότητα να συνεργαστούν και να κάνουν συμφωνίες μεταξύ τους για τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν. Αυτά ονομάζονται «συνεργατικά παίγνια» (cooperative games).

2.1.i. Παράδειγμα Συνεργατικού Παιγνίου

Υποθέτουμε ότι 2 εταιρίες Α, Β πωλούν το ίδιο αναψυκτικό. Οι εταιρίες έχουν τη δυνατότητα να πωλήσουν το προϊόν τους σε υψηλή ή χαμηλή τιμή. Όπως είναι φυσικό το κέρδος της κάθε εταιρείας εξαρτάται όχι μόνο από την δική της τιμή, αλλά και από εκείνη της ανταγωνίστριάς της. Η κάθε εταιρεία έχει το μέγιστο κέρδος όταν η ίδια πουλάει σε χαμηλή τιμή ενώ η ανταγωνίστριά της σε ψηλή τιμή. Επίσης σχετικά υψηλά κέρδη φέρουν και οι δύο εταιρίες όταν πωλούν σε υψηλή τιμή αντίστοιχα, σχετικά χαμηλά κέρδη όταν και οι δύο πωλούν σε χαμηλή τιμή. Όλα τα παραπάνω μπορούν να συνοψιστούν στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 1

A \ B	**Υψηλή Τιμή B_1**	**Χαμηλή Τιμή B_2**
Υψηλή Τιμή A_1	(10,10)	(1,15)
Χαμηλή ΤιμήA_2	(15,1)	(4,4)

Αν η εταιρεία Α πιστεύει ότι η Β πρόκειται να χρεώσει υψηλή τιμή, τότε έχει το υψηλότερο κέρδος χρεώνοντας στο προϊόν της χαμηλή τιμή. Ομοίως θα πράξει αν η Β χρεώσει στο προϊόν της χαμηλή τιμή. Ανεξαρτήτως λοιπόν της συμπεριφοράς της εταιρείας Β η εταιρεία Α θα χρεώσει χαμηλή τιμή στο προϊόν. Αυτό θα αποτελέσει την κυρίαρχη στρατηγική της.

Αντίστοιχα, η κυρίαρχη στρατηγική για την εταιρεία Β θα είναι η επιβολή χαμηλής τιμής. Παρόλα αυτά η συγκεκριμένη στρατηγική (η οποία ονομάζεται ισορροπία Nash όπως θα αναφερθεί παρακάτω) δεν είναι η μέγιστα αποδοτική. Οι δύο εταιρείες θα μπορούσαν να συνεργαστούν και να συμφωνήσουν σε μία υψηλή τιμή και να έχουν κέρδος 10εκ. € εκάστη.

Ένας τρόπος συνεργασίας είναι να υπογραφεί κάποιο συμβόλαιο μεταξύ των δύο εταιρειών. Ο συγκεκριμένος τρόπος όμως κρύβει εμπόδια. Πρώτον, το νομικό σύστημα πολλές φορές δεν επιτρέπει τέτοιου είδους συνεργασίες και κατ' επέκταση η σύνταξη ενός τέτοιου συμβολαίου δεν είναι δυνατή. Δεύτερον, ένα τέτοιο συμβόλαιο σπάνια μπορεί να είναι πλήρες, προβλέποντας όλες τις πιθανές περιπτώσεις με απώτερο σκοπό να προστατεύει τα συμφέροντα όλων των συμμετεχόντων σε αυτό. Ένας εναλλακτικός τρόπος για να αποφευχθεί η μη συνεργατική συμπεριφορά είναι η επανάληψη του παιγνίου πολλές φορές. Σε επαναλαμβανόμενα παίγνια η συμφωνία μπορεί να είναι η βέλτιστη λύση. Η διαφορά σε αυτόν τον τρόπο είναι ότι πλέον οι παίκτες διαμορφώνουν τη στρατηγική τους λαμβάνοντας υπόψη το παρελθόν και με αυτόν τον τρόπο μπορούν είτε να ανταμείψουν μία καλή συμπεριφορά (καθορισμός υψηλής τιμής), είτε να τιμωρήσουν μία μη συνεργατική συμπεριφορά (καθορισμός χαμηλής τιμής).

2.2. Μη συνεργατικά Παίγνια (non-cooperative games)

Στον αντίποδα της παραπάνω κατηγορίας βρίσκονται τα μη συνεργατικά παίγνια, στα οποία οποιουδήποτε είδους συμφωνίες δεν είναι δυνατές ή συμφέρουσες και οι παίκτες δρουν σύμφωνα με τα δικά τους οφέλη.

§3. Με Βάση τα Χαρακτηριστικά των Αποδοχών

3.1. Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος (Zero-sum Games)

Όταν το κέρδος ενός παίκτη είναι ίσο με την απώλεια του αντιπάλου του, τα παίγνια ονομάζονται «παίγνια μηδενικού αθροίσματος» (zero-sum games). Σε αυτά τα παίγνια το άθροισμα των αμοιβών είναι ίσο με μηδέν με αποτέλεσμα η συνεργασία για τους παίκτες να είναι ανέφικτη. Η Ένοπλη σύγκρουση (πόλεμος) ανήκει σε αυτήν την κατηγορία. Ανεξάρτητα από το πόσοι άνθρωποι συμμετέχουν, οι αντίπαλες πλευρές σε κάθε περίπτωση είναι δύο και φυσικά νίκη της μιας «χώρας» σημαίνει ήττα για την άλλη.

3.2. Παίγνια Μη-μηδενικού Αθροίσματος

Αντίστοιχα υπάρχουν "παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος" (non zero-sum games) στα οποία το άθροισμα των αμοιβών είναι διάφορο του μηδενός. Το κέρδος κάποιου δεν σημαίνει απαραίτητα τη ζημιά κάποιου ανταγωνιστή, και οι δύο μπορεί να κερδίσουν ή και να χάσουν αντίστοιχα. Όπως και τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, έτσι και τα παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος μπορεί να έχουν σημείο ισορροπίας, μπορεί και όχι. Στην περίπτωση που έχουν σημείο ισορροπίας δεν επιλύονται με την μέθοδο του J. V. Neumann αλλά με την μέθοδο ισορροπίας του J. Nash.

§4. Με Βάση την Σειρά που Παίρνονται οι Αποφάσεις

4.1. Παίγνια Κανονικής Μορφής

Αν οι αντίπαλοι κινηθούν ταυτόχρονα επιλέγοντας μια στρατηγική στην αρχή του παιχνιδιού, χωρίς ο ένας να γνωρίζει τι θα πράξει ο άλλος, τότε μιλάμε για «στατικό παίγνιο» ή «στρατηγικό παίγνιο» ή «παίγνιο σε κανονική μορφή».

4.1.i. Παράδειγμα Παιγνίου Κανονικής Μορφής

Ένα παίγνιο που είναι αρκετά δημοφιλές σχεδόν σε όλο τον κόσμο είναι το «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί». Έστω λοιπόν δύο παίκτες, ο παίκτης Α και ο παίκτης Β. Οι δύο παίκτες διαλέγουν ταυτόχρονα ένα από τα πέτρα, ψαλίδι, χαρτί. Ανάλογα με το τί θα διαλέξει ο κάθε παίκτης, είτε θα υπάρξει ένας νικητής είτε ισοπαλία, αν διαλέξουν και οι δύο το ίδιο. Η δύναμή της κάθε επιλογής είναι η εξής: η πέτρα κερδίζει το ψαλίδι, το ψαλίδι κερδίζει το χαρτί και το χαρτί κερδίζει την πέτρα.

Πίνακας 2

B / A	**Πέτρα**	**Χαρτί**	**Ψαλίδι**
Πέτρα	**(0,0)**	**(-1,1)**	**(1,-1)**
Χαρτί	**(1,-1)**	**(0,0)**	**(-1,1)**
Ψαλίδι	**(-1,1)**	**(1,-1)**	**(0,0)**

Στον παραπάνω πίνακα απεικονίζεται με 1 η νίκη του εκάστοτε παίκτη, με -1 η ήττα του και με 0 η ισοπαλία. Το συγκεκριμένο παίγνιο έχει κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά.

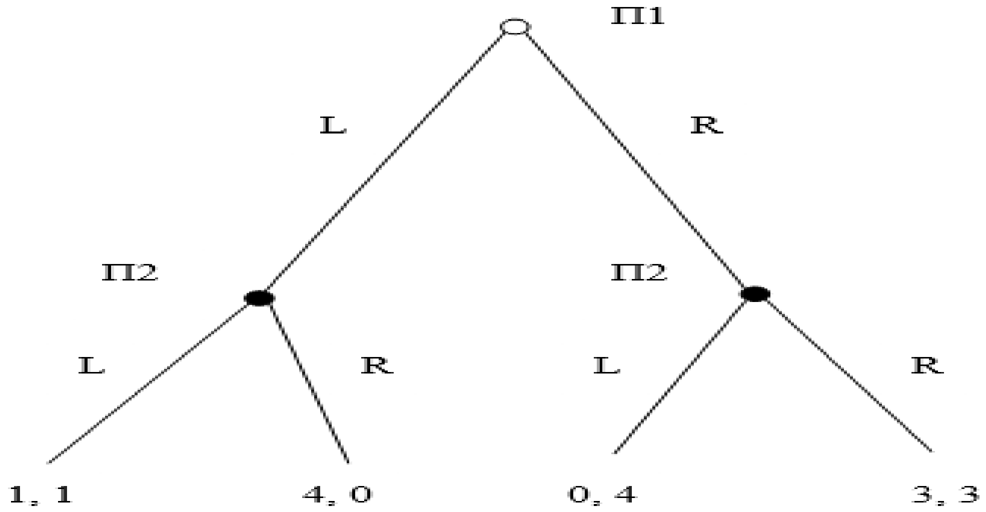
Πρώτον, δεδομένου ότι το παιχνίδι είναι δύο ατόμων μπορεί να απεικονιστεί σε μήτρα δύο διαστάσεων και δεύτερον, το άθροισμα των αποδόσεων σε κάθε κελί είναι ίσο με το μηδέν. Εξαιτίας του τελευταίου ανήκει και στα παίγνια του μηδενικού αθροίσματος.

4.2. Παίγνια Εκτεταμένης Μορφής

Στην αντίθεση περίπτωση έχουμε τα «δυναμικά παίγνια» ή «παίγνια σε εκτεταμένη μορφή» όπου οι παίκτες έχουν κάποια γνώση για τις προηγούμενες ενέργειες και έτσι η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις έχει σημασία. Αυτό στην ουσία σημαίνει ότι οι παίκτες που καλούνται να παίξουν πρώτοι θα πρέπει να λάβουν υπόψη το γεγονός ότι οι αντίπαλοι τους θα ξέρουν την επιλογή τους. Στα παίγνια αυτά η αναπαράσταση γίνεται με τη βοήθεια δέντρου. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα.

4.2.i.Παράδειγμα Παιγνίου Εκτεταμένης Μορφής

Διάγραμμα 1



Στο παραπάνω διάγραμμα, τα γράμματα Π1, Π2 συμβολίζουν δύο παίκτες. Τα σύνολα πληροφόρησης των παικτών αποτελούνται από τους κόμβους απόφασης στους οποίους καλούνται οι παίκτες να αποφασίσουν την επόμενη κίνησή τους (επιλογή στρατηγικής L ή στρατηγικής R). Τέλος, οι αριθμοί δηλώνουν τις αποδόσεις της κάθε μίας στρατηγικής.

Η αρχική θέση του παιγνίου συμβολίζεται με έναν κύκλο με λευκό φόντο. Ο παίκτης Π1 είναι εκείνος που θα κάνει την πρώτη κίνηση και έχει να επιλέξει μεταξύ των στρατηγικών L, R. Αν ο παίκτης Π1 επιλέξει τη στρατηγική L τότε, δίνεται η δυνατότητα στον παίκτη Π2 να διαλέξει μεταξύ των στρατηγικών L και R με τις αντίστοιχες αποδόσεις, οι οποίες παρουσιάζονται στο διάγραμμα. Αν ο παίκτης Π1 διαλέξει την στρατηγική R , δίνεται η δυνατότητα στον παίκτη Π2 να διαλέξει πάλι μεταξύ των στρατηγικών L και R, αυτή τη φορά όμως η απόφαση του θα οδηγήσει σε διαφορετικές αποδόσεις.

Σε αυτού του είδους τα μοντέλα υπάρχουν δύο κανόνες που δεν πρέπει να παραβιαστούν ποτέ. Πρώτον, κάθε κόμβος έχει τουλάχιστον ένα βέλος το οποίο ξεκινά από αυτόν και τις περισσότερες φορές ένα βέλος που καταλήγει σε αυτόν. Προφανώς στον πρώτο κόμβο δεν καταλήγει κανένα βέλος. Δεύτερον, αν ξεκινήσουμε από έναν κόμβο και ακολουθήσουμε την διαδικασία προς τα πίσω, δεν πρόκειται να επανέλθουμε στον κόμβο από τον οποίο ξεκινήσαμε αλλά θα καταλήξουμε στον αρχικό κόμβο.

Η τακτική που ακολουθείται για την εξεύρεση λύσης, στην εκτεταμένη μορφή, ονομάζεται προς τα πίσω επαγωγή. Η ανάλυση αρχίζει από τον τελευταίο κόμβο απόφασης και προχωρά προς τα πίσω, προκειμένου να καταλήξει στις λύσεις του εκάστοτε παιγνίου. Ξεκινώντας δηλαδή από τον τελευταίο παίκτη, επιλέγεται η αναμενόμενη κίνησή του. Στη συνέχεια ελέγχονται οι επιλογές στον αμέσως προηγούμενο κόμβο απόφασης και προσδιορίζεται η καλύτερη δυνατή επιλογή, του προτελευταίου παίκτη, με δεδομένη την κίνηση του τελευταίου. Η όλη διαδικασία παρομοιάζεται με την εξεύρεση λύσης δια της επαναληπτικής ασθενούς κυριαρχίας στην κανονική μορφή. Οι λύσεις που καταλήγει η προς τα πίσω επαγωγή αποτελούν ισορροπίες Nash και ταυτόχρονα ικανοποιούν το κριτήριο της διαδοχικής ορθολογικότητας.

§5. Με Βάση Των Αριθμό Των Στρατηγικών

5.1. Πεπερασμένα Παίγνια

Τα πεπερασμένα παίγνια τελειώνουν έπειτα από ένα μετρήσιμο αριθμό κινήσεων. Τα παιχνίδια αυτά έχουν μια σαφή αρχή και τέλος. Έχουν άμεση σχέση με τον στόχο της νίκης σε ένα παιχνίδι. Ένα πεπερασμένο παιχνίδι έχει επιλυθεί στο πλαίσιο των κανόνων του, με την δήλωση ενός νικητή του διαγωνισμού που λαμβάνει μια νίκη. Οι κανόνες υπάρχουν για να εξασφαλίσουν ότι το παιχνίδι είναι πεπερασμένο. Κλασσικά παραδείγματα είναι τα debates, οι αγώνες (ποδοσφαίρου κ.α) όπως επίσης η συμμετοχή σε πόλεμο. Η συμμετοχή σε ένα πεπερασμένο παιχνίδι απαιτεί συνειδητή σκέψη, εθελοντική και συνεχής συμμετοχή στους γύρους του παιχνιδιού. Ακόμα και η έξοδος από το παιχνίδι νωρίς, θα πρέπει να προβλέπεται από τους κανόνες.

Αυτή η κατηγορία μπορεί να συνδεθεί με τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος (αν και δεν είναι όλα τα πεπερασμένα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος, δεδομένου ότι το άθροισμα των θετικών αποτελεσμάτων μπορεί να διαφέρει).

5.2. Μη Πεπερασμένα Παίγνια

Τα μη πεπερασμένα ή άπειρα παίγνια δεν είναι γνωστό πότε αρχίζουν ή τελειώνουν. Παίζονται με σκοπό τη συνεχή εξέλιξη του παιγνίου και μερικές φορές με σκοπό να φέρουν περισσότερους παίκτες στο παιχνίδι. Ένα άπειρο παιχνίδι συνεχίζεται για το καλό του παιχνιδιού. Αν το παιχνίδι πλησιάζει προς το τέλος του εξαιτίας των κανόνων του παιχνιδιού, πρέπει να αλλάξουν οι κανόνες και να επιτρέπουν τη συνέχιση της παιχνιδιού.

§6 Με Βάση την Πληροφόρηση που Παρέχουν

6.1. Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης

Έχουμε «παίγνια πλήρους πληροφόρησης» ή «παίγνια τέλειας πληροφόρησης» όταν οι παίκτες είναι πλήρως ενημερωμένοι για τις κινήσεις των αντιπάλων. Έτσι μόνο τα δυναμικά παίγνια μπορεί να είναι παίγνια πλήρους πληροφόρησης, μιας και στα στατικά οι παίκτες δεν είναι ενημερωμένοι καθώς καλούνται να λάβουν μία απόφαση (επιλογή στρατηγικής) ταυτόχρονα. Από τα πιο διαδεδομένα παίγνια πλήρους πληροφόρησης είναι το Σκάκι.

6.2. Παίγνια Ατελούς Πληροφόρησης

Όταν οι παίκτες είναι μερικώς ενημερωμένοι λέμε ότι έχουμε «παίγνια ατελούς πληροφόρησης». Τα περισσότερα παιχνίδια με τράπουλα είναι παίγνια ατελούς πληροφόρησης όπως το poker, το black jack κ.α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Στρατιωτικές Αποφάσεις και Θεωρία Παιγνίων

§1. Ο Πόλεμος από την Οπτική της Θεωρίας Παιγνίων

Οι διακρατικές σχέσεις και κατ' επέκταση ο πόλεμος, κατατάσσονται στα παιγνίων δύο παικτών – μηδενικού αθροίσματος. Πρόκειται για καταστάσεις όπου υπάρχουν μόνο δύο αντίπαλοι και τα κέρδη για τον ένα αποτελούν ζημιές για τον άλλο.

§2. Ο Ρόλος της Θεωρίας Παιγνίων στην Ένοπλη Σύγκρουση

Οι στρατιωτικές επιχειρήσεις είναι από μόνες τους ιδιαίτερα πολύπλοκες και απαιτούν ιδιαίτερες ικανότητες από τους εκάστοτε διοικητές, προκειμένου να πετύχουν τον αντικειμενικό τους σκοπό. Αυτό λοιπόν που χρειάζεται ένας στρατιωτικός, είναι ένα εργαλείο το οποίο θα τον βοηθά υπό συνθήκες πίεσης, να οργανώνει τη σκέψη του και να παίρνει τις καλύτερες το δυνατόν αποφάσεις, αφού συνεκτιμήσει όλα τα δεδομένα που έχει στη διάθεσή του.

Μέχρι σήμερα στο χώρο των Ενόπλων Δυνάμεων χρησιμοποιείται μία ανάλυση πέντε σταδίων που ονομάζεται «Εκτίμηση της Κατάστασης». Ο εκάστοτε υπεύθυνος για τη λήψη απόφασης, αφού προσδιορίσει την αποστολή που πρέπει να φέρει εις πέρας (1ο Στάδιο), προχωρά στην εκτίμηση της κατάστασης και τον προσδιορισμό των δυνατών κινήσεών του (2ο Στάδιο). Σειρά έχει η ανάλυση των κινήσεων των αντιπάλων (3ο Στάδιο) και η σύγκριση με τις ίδιες επιλογές (4ο Στάδιο). Τέλος και αφού όλα τα προηγούμενα έχουν γίνει όσο το δυνατόν καλύτερα, έρχεται η ώρα της απόφασης (5ο Στάδιο). Η διαδικασία αυτή, που ο Haywood (1954) ονομάζει «δόγμα», βασίζεται στην εκτίμηση των ικανοτήτων του αντιπάλου και για αυτό θεωρείται ως ένας αρκετά συντηρητικός τρόπος λήψης αποφάσεων. Μία απόφαση που θα ήταν βασισμένη αντί στις δυνατότητες του αντιπάλου στην εκτίμηση για τις προθέσεις του, θα μπορούσε να φέρει καλύτερα αποτελέσματα, ενέχει όμως και περισσότερους κινδύνους.

Η θεωρία παιγνίων βοηθά στην εκτίμηση των προθέσεων του αντιπάλου. Ουσιαστικά διαφοροποιείται από το υπάρχον «δόγμα» μόνο κατά το τελευταίο στάδιο, δηλαδή αυτό της απόφασης. Εκεί υποθέτει ότι και οι δύο αντίπαλοι εκτιμούν, με βάση τα δεδομένα που έχουν, τι πρόκειται να κάνει ο άλλος και ανάλογα επιλέγουν την καλύτερη για αυτούς στρατηγική. Στις περιπτώσεις που ανεξάρτητα από τις επιλογές του αντιπάλου υπάρχει συγκεκριμένη «ιδανική» επιλογή, οι δυο τρόποι λήψης απόφασης οδηγούν στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα. Διαφέρουν στο αποτέλεσμα, όταν με βάση τη θεωρία παιγνίων δεν υπάρχει σαγματικό σημείο. Τότε η θεωρία παιγνίων προτείνει μια μικτή στρατηγική, η οποία προσφέρει καλύτερο αποτέλεσμα σε περίπτωση νίκης με μεγαλύτερη όμως πιθανότητα αποτυχίας.

Φυσικά η εμπειρία και οι ηγετικές ικανότητες των υπευθύνων, δεν μπορούν να αντικατασταθούν από καμία θεωρία. Σε ένα περιβάλλον όπου η πληροφόρηση είναι ατελής, η εκτίμηση τόσο των δυνατοτήτων όσο και των πιθανών επιλογών του αντιπάλου είναι ένα πολύ δύσκολο έργο, από το οποίο όμως εξαρτάται η έκβαση της σύγκρουσης. Συνήθως, όταν κανείς προσπαθεί να εκτιμήσει τις προθέσεις του άλλου, λειτουργεί με βάση τις δικές του πεποιθήσεις και τρόπο σκέψης. Αν όμως τα πιστεύω και οι αξίες του αντιπάλου διαφέρουν, τότε και η αξιολόγηση των διαφόρων καταστάσεων θα διαφέρει. Το αποτέλεσμα μπορεί να είναι λανθασμένη εκτίμηση της πραγματικότητας. Η ορθολογικότητα την οποία θεωρεί ως δεδομένη η θεωρία παιγνίων πρέπει να στηρίζεται στη βαθύτερη κατανόηση των πολιτιστικών και προσωπικών αξιών του αντιπάλου. Παραφράζοντας τα λόγια του Sun Tzu, «αν γνωρίζεις τον εχθρό και τον εαυτό σου, δεν υπάρχει λόγος να φοβάσαι για το αποτέλεσμα όχι μίας αλλά εκατό μαχών» (Tzu, 1994). Η ορθολογικότητα των αντιπάλων δεν είναι κάτι πρωτόγνωρο για τη θεωρία παιγνίων. Ήδη από τον Πελοποννησιακό Πόλεμο ο Σπαρτιάτης βασιλιάς Αρχίδαμος επιχειρηματολογεί στη συνέλευση των Λακεδαιμονίων και υποστηρίζει ότι πρέπει να θεωρούν τον τρόπο σκέψης των αντιπάλων παραπλήσιο με τον δικό τους. Εκτός αυτού τονίζει ότι όταν προετοιμάζονται, πρέπει πάντα να στηρίζονται στην υπόθεση ότι οι αντίπαλοι σκέφτονται ορθά και όχι στην υπόθεση ότι θα κάνουν λάθη (Θουκυδίδης).

Η θεωρία παιγνίων υποθέτει επίσης την πλήρη γνώση τόσο των προηγούμενων κινήσεων όσο και των αναμενόμενων αποτελεσμάτων όλων των πιθανών επόμενων κινήσεων. Συνήθως όμως η αξιολόγηση της κάθε κίνησης είναι από δύσκολη έως αδύνατη στο ευρύτερο πλαίσιο ενός πολέμου, ακόμη και αυτής καθαυτής της μάχης. Εξάλλου αυτός που καλείται να αποφασίσει μπορεί να μην έχει καν πλήρη γνώση του τι έχει προηγηθεί. Η απεικόνιση της κατάστασης με τη βοήθεια της εκτεταμένης μορφής των παιγνίων, μπορεί να βοηθήσει ακριβώς στην κατανόηση του παιγνίου, αλλά και να αναδείξει την δυναμική του. Αν είναι δύσκολο να απεικονίσεις με αυτό τον τρόπο την κατάσταση, τότε θα είναι πολύ πιο δύσκολο να την καταλάβεις, χωρίς τη βοήθεια του εργαλείου αυτού (Mansikka, 2007). Με άλλα λόγια, ακόμη και εάν δε χρησιμοποιηθεί ως πρώτο στάδιο για την εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων, η απεικόνιση των διαφόρων επιλογών καθώς και των εκτιμώμενων αποτελεσμάτων τους, έτσι όπως η εν λόγω θεωρία υποδεικνύει, μπορεί να οδηγήσει τον υπεύθυνο σε μία πιο καλή εικόνα του προβλήματος το οποίο έχει να αντιμετωπίσει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Η Ισορροπία Nash

§1. Προσέγγιση της ισορροπίας Nash

Όπως είναι φυσικό υπάρχουν περιπτώσεις παιγνίων, όπου δεν υφίσταται η έννοια της κυριαρχίας όπως αναλύθηκε παραπάνω και άρα πρέπει να βρεθεί ένας άλλο τρόπο επίλυσής τους. Σε αυτό το σημείο ήρθε να βοηθήσει η θεωρία του Nash και για αυτό, η ισορροπία στην οποία καταλήγει το παίγνιο, ονομάζεται ισορροπία Nash. Το θεώρημά που διατύπωσε ο Nash και έγινε γνωστό σε όλο τον κόσμο αναφέρει πως κάθε παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος παικτών και ενεργειών έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας, σύμφωνα με το οποίο όλοι οι παίκτες επιλέγουν τις πιο συμφέρουσες για αυτούς ενέργειες, γνωρίζοντας και τις επιλογές των αντιπάλων τους. Οι παίκτες σκέφτονται τι μπορεί να διαλέξει ο αντίπαλος τους, προσπαθούν να καταλάβουν τη συμπεριφορά των άλλων και επιλέγουν την στρατηγική τους σύμφωνα με αυτό. Δηλαδή η στρατηγική ενός παίκτη αποτελεί την καλύτερη αντίδραση (απόκριση) στην στρατηγική του άλλου παίκτη. Αυτός ο συνδυασμός στρατηγικών αποτελεί ισορροπία Nash.

Ο παίκτης επιλέγει εκείνη από τις δικές του στρατηγικές, η οποία είναι η καλύτερη απάντηση στην στρατηγική που νομίζει ότι θα επιλέξει ο άλλος παίκτης. Επομένως κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να φύγει μονομερώς από αυτήν την ισορροπία που έχει δημιουργηθεί. Οι παίκτες καταλαβαίνουν πως βρίσκονται σε ισορροπία αν μια αλλαγή στις στρατηγικές από οποιονδήποτε από αυτούς, οδηγήσει σε χαμηλότερο κέρδος από αυτό που θα είχαν αν παρέμεναν στη σωστή στρατηγική. Δεδομένου των επιλογών των αντιπάλων, ο παίκτης δεν έχει να κερδίσει κάποιο μεγαλύτερο όφελος και για αυτό δεν αλλάζει στρατηγική. Όπως είναι λογικό η θεωρία για την ισορροπία Nash, έχει δύο συνιστώσες. Πρώτον κάθε παίκτης κάνει την επιλογή του βασιζόμενος στην ορθολογική απόφαση που προέρχεται από τις πεποιθήσεις του για το τι θα πράξει ο αντίπαλος και δεύτερον κάθε πεποίθηση του παίκτη για την επιλογή του αντιπάλου του είναι σωστή.

§2. Παραδείγματα Κατανόησης Βασικών Εννοιών

Στο σημείο αυτό, προκειμένου να γίνουν απόλυτα κατανοητές οι παραπάνω έννοιες, θα αναφερθώ εν συντομία σε δύο παίγνια, τα οποία είναι γνωστά στην βιβλιογραφία ως "Το παίγνιο του δειλού " (Chicken Game) και "Το δίλημμα του φυλακισμένου" (Prisoner Dilemma).

2.1. Το Παίγνιο του Δειλού (Chicken Game)

Το παιχνίδι του δειλού διαμορφώθηκε τη δεκαετία του 60 στην Αμερική. Δύο οδηγοί αυτοκινήτων οδηγώντας με μεγάλη ταχύτητα ο ένας εναντίον του άλλου, προσπαθούσαν να κάνουν επίδειξη θάρρους και να αποδείξουν ποιος από τους δύο είναι ο «θαρραλέος» - νικητής και ποιος ο «δειλός» - ηττημένος. Ο δειλός ήταν αυτός που τελικά φοβούμενος τη σύγκρουση, οδηγούσε το αυτοκίνητο εκτός δρόμου και έχανε τον σεβασμό της παρέας του. Υπάρχουν λοιπόν οι εξής πιθανές περιπτώσεις:

α. Κανένας από τους δυο δε στρίβει και γίνεται η σύγκρουση. Αυτή είναι η χειρότερη περίπτωση, καθόσον και οι δύο οδηγοί πεθαίνουν. Αριθμητικά το αποτέλεσμα αυτό αποδίδεται με μία αρνητική τιμή πολύ μικρότερη από τα υπόλοιπα δυνατά αποτελέσματα. Έστω -6 και για τους δύο παίκτες.

β. Και οι δυο οδηγοί στρίβουν την τελευταία στιγμή αποφεύγοντας τη σύγκρουση. Οι παίκτες θεωρούνται δειλοί έχουν όμως αποφύγει τη σύγκρουση και το θάνατο. Αυτό είναι ένα καλό σχετικά αποτέλεσμα, ίδιο και για τους δυο παίκτες, και αποδίδεται αριθμητικά με μία ενδιάμεση θετική τιμή, έστω 3.

γ. Ο ένας από τους παίκτες στρίβει και ο άλλος όχι. Ο πρώτος χάνει το «γόητρο» του και θεωρείται δειλός. Παρ’ όλα αυτά έχει αποφευχθεί η σύγκρουση οπότε αριθμητικά παίρνει μία θετική τιμή έστω 1. Αντίθετα ο άλλος θεωρείται νικητής του παιχνιδιού και παίρνει τιμή πολύ μεγαλύτερη έστω 6.

Παρακάτω βλέπουμε την κανονική και την εκτεταμένη μορφή του παιγνίου.

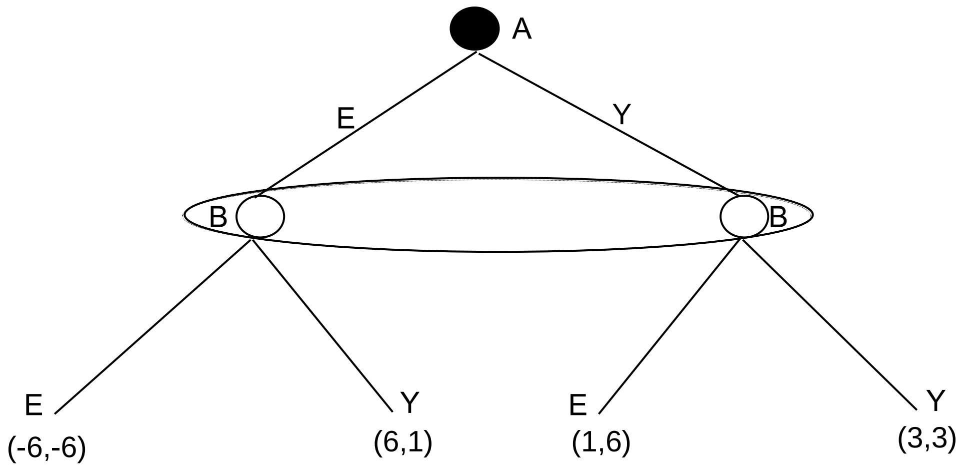
Κανονική Μορφή

Πίνακας 3

A \ B	**Επίθεση (Ε)**	**Υποχώρηση (Υ)**
Επίθεση (Ε)	-6, -6	6 , 1
Υποχώρηση (Υ)	1, 6	3 , 3

Εκτεταμένη Μορφή

Διάγραμμα 2



Για να αποφασίσει ο παίκτης Α τι τον συμφέρει να κάνει, εξετάζει τις πιθανές κινήσεις του παίκτη Β και συγκρίνει τις αναμενόμενες δικές του αποδόσεις, δεδομένων των κινήσεων του αντιπάλου. Στο συγκεκριμένο παίγνιο υπάρχουν δύο ισορροπίες. Στην πρώτη, ο παίκτης Α επιλέγει να μην στρίψει και ο παίκτης Β να στρίψει, η σύγκρουση αποφεύγεται και ο μεν Α παίρνει 6, ο δε Β παίρνει 1. Στη δεύτερη ισορροπία συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο με τις αντίθετες αποδόσεις.

2.2. Το Δίλημμα του Φυλακισμένου.

Δύο άτομα συλλαμβάνονται από την αστυνομία σαν ύποπτοι διάπραξης ορισμένων εγκλημάτων. Η αστυνομία δεν έχει όλα τα απαιτούμενα στοιχεία για να τους κατηγορήσει, οπότε τους βάζει σε διαφορετικά δωμάτια, εμποδίζοντάς την οποιαδήποτε μεταξύ τους επικοινωνία. Ο εισαγγελέας επισκέπτεται τον καθένα χωριστά και κάνει και στους δύο την εξής πρόταση:

α. αν καταθέσει εναντίον του άλλου (και ο άλλος δε μιλήσει), τότε η συνεργασία αμείβεται με άμεση απελευθέρωση (0 χρόνια φυλάκιση), ενώ ο άλλος θα τιμωρηθεί με 12 χρόνια φυλάκιση.

β. αν δε μιλήσει ούτε αυτός ούτε ο άλλος, θα τιμωρηθούν και οι δύο με 1 χρόνο φυλάκιση για μικρότερης σημασίας αδικήματα για τα οποία υπάρχουν αποδείξεις.

γ. αν ομολογήσουν και οι δύο τότε θα τιμωρηθούν και οι δύο με 4 χρόνια φυλάκιση.

Παρακάτω βλέπουμε την κανονική και την εκτεταμένη μορφή του παιγνίου.

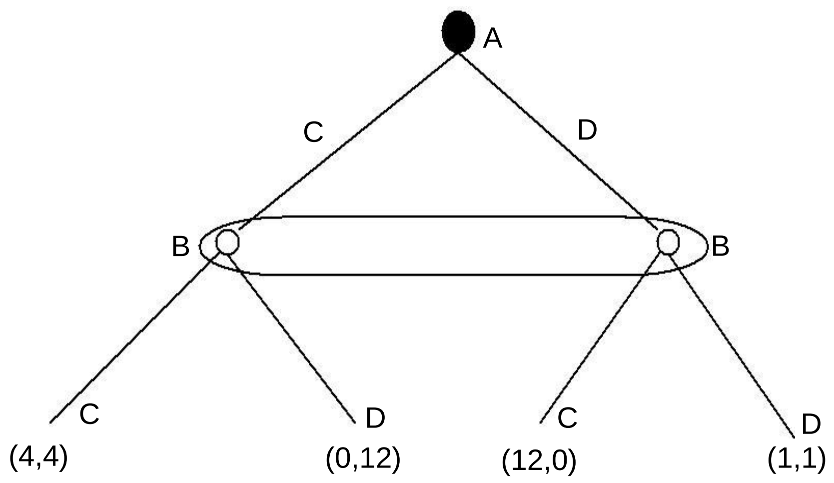
Κανονική Μορφή

Πίνακας 4

A \ **B**	**Confess (C)**	**Deny (D)**
Confess (C)	4 , 4	0 , 12
Deny (D)	12 , 0	1 , 1

Εκτεταμένη Μορφή

Διάγραμμα 3



Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των κυρίαρχων στρατηγικών, παρατηρούμε στην κανονική μορφή του παιγνίου, ότι η στρατηγική της ομολογίας αποτελεί αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική και για τους δύο παίκτες. Οι αποδόσεις 4 και 0 είναι πάντα καλύτερες από τις αποδόσεις 12 και 1 αντίστοιχα. Συνεπώς ένα τέτοιο παίγνιο θα κατέληγε πάντα σε ομολογία και από τις δύο πλευρές. Το σημείο αυτό αποτελεί και ισορροπία Nash. Για τον παίκτη Α, εφόσον ο παίκτης Β ομολογήσει (επιλέξει C), η καλύτερη απόκριση είναι να ομολογήσει (παίξει C) αφού έτσι θα τιμωρηθεί με 4 χρόνια αντί των 12 που θα τιμωρηθεί αν δεν ομολογήσει (αν παίξει D). Αν ο παίκτης Β δεν ομολογήσει (παίξει D) τότε η κάλλιστη απόκριση του παίκτη Α είναι να ομολογήσει (παίξει C) για να απελευθερωθεί αντί να πάει φυλακή ένα χρόνο. Το ίδιο ισχύει και για τον παίκτη Β και έτσι η ισορροπία Nash, για αυτό το παίγνιο, είναι η ομολογία και από τις δύο πλευρές. Επειδή η στρατηγική είναι κυρίαρχη στρατηγική, η λύση C,C αποτελεί και τη μοναδική λύση του παιγνίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Το Θεμελιώδες Θεώρημα

§1. Παίγνια Χωρίς Σημεία Ισορροπίας

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, όταν υπάρχει σημείο ισορροπίας στο παίγνιο, αυτό θα αποτελεί και την λύση του παιγνίου. Η λύση αυτή (σημείο ισορροπίας), εντοπίζεται, αν βρούμε το στοιχείο του πίνακα αποδοχών $A=(\alpha_{ij})$, το οποίο αποτελεί ταυτοχρόνως το ελάχιστο των γραμμών και το μέγιστο των στηλών του πίνακα. Από εκεί και έπειτα, ακόμα και αν ένας παίκτης ανακοινώσει πριν από την έναρξη του παιγνίου την βέλτιστη στρατηγική την οποία πρόκειται και να ακολουθήσει, ο αντίπαλος δεν μπορεί να επωφεληθεί από αυτήν την πληροφορία. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει σημείο ισορροπίας, δεν συμφέρει τους δύο αντιπάλους να απομακρυνθούν από αυτό. Επομένως δεν απαιτείται μυστικότητα αναφορικά με την επιλογή στρατηγικής από καμία από τις δύο πλευρές. Τι γίνεται όμως στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας;

Την λύση σε αυτήν την περίπτωση έρχονται να την δώσουν οι μικτές στρατηγικές. Η επιλογή μικτής στρατηγικής ισοδυναμεί με το να επιλέξει ο παίκτης τυχαία μεταξύ συγκεκριμένων καθαρών στρατηγικών. Για παράδειγμα μπορούμε να πούμε πως ο παίκτης Α με διαθέσιμες στρατηγικές τις α_1, α_2 θα επιλέξει την α_1 με πιθανότητα p ή την α_2 με πιθανότητα 1-p. Ο παίκτης δηλαδή που διαλέγει μικτή στρατηγική επιλέγει τις πιθανότητες καθεμιάς από τις καθαρές στρατηγικές που εμπεριέχονται στην συγκεκριμένη μικτή στρατηγική, αφήνοντας τα υπόλοιπα στην τύχη. Όσο και αν φαίνεται παράξενο υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή ζωή όπου οι παίκτες προτιμούν να χρησιμοποιήσουν μικτές στρατηγικές.

Ο Nash κατάφερε επίσης να αποδείξει πως όλα τα πεπερασμένα παίγνια εμπεριέχουν τουλάχιστον ένα σύνολο μικτών στρατηγικών (μία ανά παίκτη) που συνιστά ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές. Όταν υπάρχουν πολλές ισορροπίες Nash (σε καθαρές στρατηγικές), τη λύση δίνει η ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

Ακόμη και αν δεν υπάρχει ισορροπία σε καθαρές στρατηγικές, υπάρχει μία μοναδική ισορροπία σε μικτές στρατηγικές.

Η ισορροπία σε καθαρές στρατηγικές φαίνεται πιο ελκυστική πρόταση από την ισορροπία στις μικτές, αφού δεν χρειάζεται οι παίκτες να επιλέγουν στην τύχη. Όμως από τη στιγμή που δεν υπάρχει ισορροπία σε κάθε παιχνίδι, η ισορροπία σε μικτές στρατηγικές αποκτάει μεγαλύτερη αξία αφού πλέον για κάθε παιχνίδι υπάρχει σίγουρα μία ισορροπία.

§2. Μικτές Στρατηγικές

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα παίγνιο δύο παικτών (Μπλε, Κόκκινος) του οποίου ο πίνακας αποδοχών $A = (a_{ij})$ είναι τέτοιος ώστε

$$\max_{i\leq m} \min_{j\leq n} a_{ij} < \min_{j\leq n} \max_{i\leq m} a_{ij}, \tag{5.1}$$

τότε το αριστερό μέρος της ανισότητας αντιπροσωπεύει το ελάχιστο που μπορεί να διεκδικήσει ο Μπλε και το δεξί το μέγιστο. Με άλλα λόγια, ο Μπλε έχει μία στρατηγική η οποία του εξασφαλίζει ότι θα πάρει τουλάχιστον

$$\max_{i\leq m} \min_{j\leq n} a_{ij}$$

και ο Κόκκινος από την άλλη, έχει μια στρατηγική, η οποία του εξασφαλίζει ότι ο Μπλε δεν θα μπορέσει να πάρει περισσότερο από

$$\min_{j\leq n} \max_{i\leq m} a_{ij}$$

Εφόσον αυτές οι δύο ποσότητες είναι άνισες, δεν έχουμε καταλήξει σε μία λύση στο παίγνιο. Προκειμένου να γίνει κατανοητό το πρόβλημα που δημιουργείτε όταν δεν υφίσταται σημείο ισορροπίας, παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

2.1. Παράδειγμα Μικτών Στρατηγικών

Το παίγνιο το οποίο ορίζεται από τον ακόλουθο πίνακα αποδοχών

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

δεν έχει σημείο ισορροπίας. Βάση λοιπόν των προαναφερθέντων, έχουμε:

$$\min_{j\leq 2} \max_{i\leq 2} a_{ij} = 4$$

$$\max_{i\leq 2} \min_{j\leq 2} a_{ij} = 3$$

και

$$\max \min a_{ij} < \min \max a_{ij}.$$

Ο Μπλε μπορεί να εξασφαλίσει μία αποδοχή ίση με 3, ενώ ο Κόκκινος από την μεριά του μπορεί να εξασφαλίσει ότι δεν θα έχει ζημιά μεγαλύτερη από 4 μονάδες. Ως εκ τούτου, ο Μπλε θα προσπαθήσει να αποκομίσει κάτι περισσότερο από το 3 ενώ ο Κόκκινος θα προσπαθήσει να μειώσει την ζημιά του κάτω από 4 μονάδες. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι ο Μπλε θα μπορούσε να κερδίζει κάθε φορά είτε 3 είτε 4.

Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε τον συλλογισμό (λογική) του Μπλε, δεδομένου ότι βρίσκεται σε αυτήν την κατάσταση.

Ας υποθέσουμε ότι ο Κόκκινος δύναται μέσα από υπολογισμούς να ανακαλύψει την στρατηγική του Μπλε. Έτσι λοιπόν, αν η στρατηγική του Μπλε (βάση προβλέψεων του Κόκκινου) ήταν η 1η (5,1), ο Κόκκινος θα μπορούσε εύκολα να οδηγήσει το παίγνιο, έτσι ώστε τα κέρδη του Μπλε να περιοριστούν στην 1 μονάδα. Αν η στρατηγική του Μπλε ήταν η 2η (3,4), επίσης θα μπορούσε ο Κόκκινος να περιορίσει τα έσοδα του Μπλε στις 3 μονάδες .Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν ο Κόκκινος ανακάλυπτε την στρατηγική του Μπλε, τα κέρδη του δεύτερου θα μπορούσαν να είναι είτε 1 είτε 3 σε κάθε παίξιμο. Επειδή όμως ο Μπλε προσπαθεί να αποκομίσει κέρδη 3 ή 4 μονάδων, θα βρισκόταν σε μειονεκτική θέση αν ο Κόκκινος γνώριζε την στρατηγική του. Κάτι αντίστοιχο καταλαβαίνουμε ότι ισχύει και για τον Κόκκινο. Θα πρέπει λοιπόν ο κάθε παίκτης να επιλέξει την στρατηγική του με τέτοιο τρόπο ώστε να μην είναι εύκολα προβλέψιμη από τον αντίπαλο. Ένας τρόπος για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, θα ήταν η τυχαία επιλογή στρατηγικής τόσο από τον Μπλε όσο και από τον Κόκκινο. Με άλλα λόγια, οι δύο αντίπαλοι θα μπορούσαν να εφαρμόσουν μία κατανομή πιθανότητας στις διαθέσιμες στρατηγικές τους και εν συνεχεία μέσω μιας συσκευής τυχαίας εκλογής, να επιλέγουν την στρατηγική που θα ακολουθήσουν στο παίγνιο. Η χρήση μίας τέτοιας κατανομής πιθανότητας στο σύνολο των στρατηγικών ενός παίκτη είναι γνωστή με τον όρο των «Μικτών Στρατηγικών».

§3. Μικτές Στρατηγικές στις Ένοπλες Δυνάμεις

Σε περιόδους πολέμου και κυρίως όσον αφορά στις σημαντικές μάχες μια ένοπλης σύγκρουσης η δυνατότητα ανάλυσης της κατάστασης με πιθανότητες περιορίζεται σε μεγάλο βαθμό. Έτσι η χρησιμότητα της θεωρίας παιγνίων είναι και αυτή περιορισμένη. Εξάλλου, όταν διακυβεύεται η εθνική κυριαρχία, το ισχύον δόγμα της «Εκτίμησης Καταστάσεως» οδηγεί σε ασφαλέστερες στρατηγικές και ίσως να υπερτερεί. Η χρήση της θεωρίας παιγνίων και των μικτών στρατηγικών θα μπορούσε όμως να οδηγήσει σε ένα καλύτερο αποτέλεσμα σε μικρότερες μάχες ή ακόμη και σε αποστολές που επαναλαμβάνονται τακτικά κατά την διάρκεια του πολέμου. Η κοινή λογική απαιτεί από τον εκάστοτε διοικητή να παίρνει αποφάσεις ύστερα από σοβαρή σκέψη και έχοντας ένα συγκεκριμένο πλάνο στο μυαλό του. Από την άλλη πλευρά μικτή στρατηγική σημαίνει ότι η επιλογή του διοικητή κάθε φορά επιλέγεται εντελώς τυχαία. Ακούγεται παράξενο, αν όχι παράλογο, έχει όμως βάση και πολλές φορές παρέχει μεγαλύτερη ασφάλεια. Φυσικά πρόκειται για αποφάσεις που από μόνες τους δεν έχουν και τόσο μεγάλη σημασία. Το αν για παράδειγμα θα βομβαρδιστεί μία πόλη τη Δευτέρα ή την Τρίτη, από μόνο του δεν παίζει κανένα ρόλο. Όταν όμως είναι γνωστό στον αντίπαλο ότι ο συγκεκριμένος στρατηγός προτιμά να βομβαρδίζει Δευτέρες, τότε η προστασία της πόλης τη Δευτέρα θα είναι πολύ πιο οργανωμένη από τι θα είναι την Τρίτη. Η μικτή στρατηγική εδώ σημαίνει ότι η επιλογή της ημέρας γίνεται καθαρά με τυχαίο τρόπο και δεν ακολουθεί κανενός είδους μοτίβο (Thomas Hamilton & Richard Mesic, 2004).

Η τυχαία επιλογή κάποιων αποφάσεων βοηθά στην προστασία της οικείας παράταξης από τη διαρροή πληροφοριών στον εχθρό. Σε περιόδους πολέμου όλοι ανεξαιρέτως αναγνωρίζουν πόσο σημαντικό είναι να δρας με τρόπο μη αναμενόμενο από τον αντίπαλο. Έτσι μπορεί, όχι απλά να δικαιολογηθεί, αλλά και να καταστεί απαραίτητη η χρήση μικτών στρατηγικών για την λήψη ορισμένων αποφάσεων ακόμη και σε περίοδο πολέμου.

Επιπρόσθετα η χρήση μικτών στρατηγικών μπορεί να βοηθήσει την εκάστοτε πλευρά να εκμεταλλευτεί τα λάθη του αντιπάλου. Φυσικά αυτό δε σημαίνει ότι πρέπει να θεωρεί κανείς τον αντίπαλό του υποδεέστερο από τον ίδιο. Σύμφωνα όμως με τους Herman Kahn και Irwin Mann η προσπάθειά να προστατευτεί κανείς από την πιθανότητα ο αντίπαλος να φερθεί πιο έξυπνα από τον ίδιο, δε σημαίνει ότι θα χάσει εντελώς την δυνατότητά του να εκμεταλλευτεί τις αστοχίες του εχθρού (Herman Kahn and Irwin Mann, 1958). Στις καθαρές στρατηγικές όταν αυτές προσδιορίζονται από την θεωρία παιγνίων ως οι πλέον κατάλληλες ή όταν επιλέγονται με βάση το ισχύον «δόγμα» για τη λήψη αποφάσεων, δεν υπάρχει δυνατότητα κέρδους από το λάθος του αντιπάλου. Φυσικά δεν υπάρχει και ο κίνδυνος μη αναμενόμενων απωλειών.

Τέλος αξίζει να αναφερθεί το γεγονός ότι σύμφωνα με τη θεωρία παιγνίων για να καταφέρει κανείς να νικήσει έναν ισάξιο αντίπαλο, έστω και μακροχρόνια, πρέπει να χρησιμοποιήσει μικτές στρατηγικές. Από την άλλη απέναντι σε ένα δυνατότερο αντίπαλο ο μόνος τρόπος να προστατευτεί είναι να επιλέξει στρατηγική με βάση τις προθέσεις του αντιπάλου και όχι με βάση τις δυνατότητές του (Beebe, 1957).

Πως όμως εφαρμόζονται οι μικτές στρατηγικές σε μία ένοπλη σύγκρουση;

Θα μπορούσαμε να παρουσιάσουμε τις μικτές στρατηγικές με μονοδιάστατους πίνακες. Αν θεωρήσουμε ότι x_i είναι η πιθανότητα να επιλεγεί η στρατηγική i, τότε μία μικτή στρατηγική ή κατανομή πιθανότητας Χ, για τον Μπλε Διοικητή, θα μπορούσε να παρουσιαστεί ως ένας μονοδιάστατος πίνακας

$$X= \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{vmatrix}$$

Όπου $x_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots,m$ και $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Ομοίως, αν y_j είναι η πιθανότητα να επιλεγεί η στρατηγική j, τότε μία μικτή στρατηγική για τον Κόκκινο Διοικητή θα μπορούσε να αναπαρασταθεί με τον παρακάτω μονοδιάστατο πίνακα Υ,

$$Y= \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{vmatrix}$$

όπου $y_j \geq 0$, $j=1, 2, \ldots, n$ και $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Έχοντας ορίσει τις μικτές στρατηγικές ως κατανομή πιθανοτήτων, καλούμαστε στην συνέχεια να υπολογίσουμε τις προσδοκώμενες αποδοχές. Αν υποθέσουμε ότι ο Μπλε επιλέγει την i στρατηγική και ο Κόκκινος επιλέγει μικτές στρατηγικές Υ, οι προσδοκώμενες αποδοχές του Μπλε θα είναι

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j,$$

το οποίο δίδεται από τον i συντελεστή του μονοδιάστατου πίνακα

$$H = AY = \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ . \\ h_m \end{vmatrix}$$

Αν τώρα ο Κόκκινος επιλέγει την j στρατηγική και ο Μπλε είναι αυτός που χρησιμοποιεί μικτές στρατηγικές Χ, οι προσδοκώμενες αποδοχές του Μπλε, είναι

$$k_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i,$$

το οποίο είναι ο $j_{κοστός}$ παράγοντας του μονοδιάστατου πίνακα Κ', όπου $K' = X'A = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Στην περίπτωση τώρα που και ο Μπλε και ο Κόκκινος χρησιμοποιούν μικτές στρατηγικές, Χ,Υ, αντίστοιχα, οι προσδοκώμενες αποδοχές του Μπλε είναι

$$E = X'AY = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i-1}^{m} a_{ij}\, x_i y_j = K'Y = X'H.$$

§4. Γραφική Αναπαράσταση Μικτών Στρατηγικών

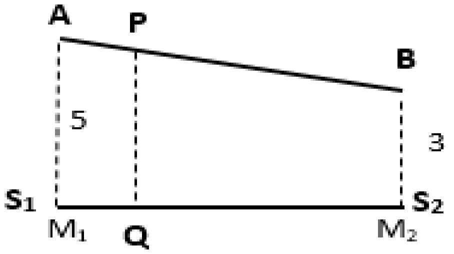
Είναι δυνατό να παρουσιάσουμε γραφικά την προσδοκώμενη αμοιβή- αποπληρωμή (pay-off) ενός παίκτη, ως συνάρτηση των μικτών στρατηγικών του. Πιο συγκεκριμένα, αν ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές, η αναπαράσταση είναι δισδιάστατη ενώ για 3 στρατηγικές, η αναπαράσταση απαιτεί 3 διαστάσεις. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον ακόλουθο πίνακα αμοιβών:

Πίνακας 5

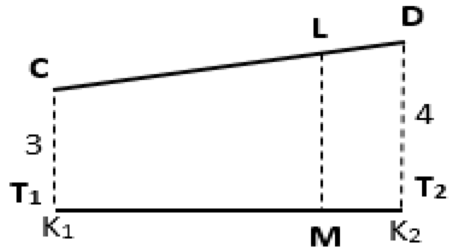
K / M	K_1	K_2
M_1	5	1
M_2	3	4

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους διάφορους συνδυασμούς των στρατηγικών του Μπλε 1 και 2 με σημεία που ανήκουν στην γραμμή S_1S_2 (Σχήμα 1). Ως εκ τούτου, το Q αντιπροσωπεύει μικτή στρατηγική με κατανομή πιθανότητας, ¾ την 1 στρατηγική και με ¼ την 2 στρατηγική.

Αν ο Κόκκινος χρησιμοποιεί την K_1 στρατηγική του, τότε οι προσδοκίες του Μπλε δίνονται από τις συντεταγμένες PQ των σημείων P του AB που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις μεικτές στρατηγικές του Μπλε. Ως εκ τούτου PQ= 4 ½ είναι η προσδοκία του Μπλε αν αυτός χρησιμοποιεί μία μικτή στρατηγική με κατανομή πιθανότητας ¾ την 1 στρατηγική του και ¼ την 2 στρατηγική του και ο Κόκκινος χρησιμοποιεί την K_1 στρατηγική του.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Αν ο Μπλε χρησιμοποιήσει την 2 στρατηγική του, τότε οι προσδοκίες του Μπλε για κάθε ένα συνδυασμό των στρατηγικών K_1, K_2 του Κόκκινου δίδεται από τις συντεταγμένες CD (Σχήμα 2). Ως εκ τούτου LM=3 4/5 είναι η προσδοκία του Μπλε αν αυτός χρησιμοποιήσει την 2 στρατηγική του και ο Κόκκινος χρησιμοποιήσει έναν συνδυασμό M αποτελούμενο από πιθανότητα 1/5 για την K_1 στρατηγική του και 4/5 για την K_2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Το Θεώρημα MINIMAX

§1. Εφαρμογή του Κριτηρίου minimax

Στα παίγνια δύο παικτών – μηδενικού αθροίσματος, τα οποία είναι και αυτά που θα μας απασχολήσουν, μπορεί να τροποποιηθεί λίγο ο πίνακας της κανονικής μορφής του παιγνίου και να τοποθετηθούν μόνο οι αποδόσεις του ενός παίκτη (έστω Α), αντικειμενικός σκοπός του οποίου είναι η μεγιστοποίηση των κερδών. Εννοείται ότι ο έτερος παίκτης (έστω Β) λαμβάνει τις αντίθετες ακριβώς αποδόσεις, έτσι ώστε το άθροισμα όλων των αποδόσεων να είναι μηδέν. Αντικειμενικός σκοπός του παίκτη Β είναι η ελαχιστοποίηση των ζημιών. Κατά τη διάρκεια του παιγνίου οι παίκτες γνωρίζουν τόσο τις δικές τους στρατηγικές, όσο και τις στρατηγικές του αντιπάλου τους. Επίσης κάθε παίκτης γνωρίζει ότι ο αντίπαλος γνωρίζει τον τρόπο συμπλήρωσης του πίνακα. Τέλος κάθε παίκτης γνωρίζει ότι ο αντίπαλος του ξέρει ότι αυτός γνωρίζει τον τρόπο συμπλήρωσης του πίνακα, κ.ο.κ. (Common Knowledge -κοινή γνώση).

Με βάση τα παραπάνω ο παίκτης Α θα ακολουθεί τη λεγόμενη στρατηγική maximin, δηλαδή επιλέγει από κάθε στρατηγική την μικρότερη τιμή και κατόπιν επιλέγει την μέγιστη τιμή από αυτές τις ελάχιστες τιμές. Αντίστοιχα ο Β ακολουθεί τη λεγόμενη στρατηγική minimax. Δηλαδή επιλέγει το ελάχιστο των μέγιστων που προκύπτουν από κάθε στρατηγική. Με άλλα λόγια κάθε παίκτης προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το χειρότερο που μπορεί να πάθει (την ζημιά του). Αυτό για τον παίκτη Α ερμηνεύεται ως εντοπισμός του μεγαλύτερου από τα ελάχιστα (από κάθε στρατηγική), δηλαδή maximin, ενώ για τον παίκτη Β ερμηνεύεται ως επιλογή του μικρότερου από τα μέγιστα (κάθε στήλης-στρατηγικής), δηλαδή minimax. Η maximin τιμή ονομάζεται κατώτερη τιμή και η minimax ανώτερη τιμή του παιγνίου. Όταν οι δύο τιμές ταυτίζονται, το παίγνιο έχει λύση με καθαρές στρατηγικές και η λύση είναι σταθερή. Υπάρχει δηλαδή ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας. Το κριτήριο –

διαδικασία εντοπισμού αυτών των στρατηγικών ονομάζεται εφαρμογή του κριτηρίου minimax.

Στο σημείο αυτό, αφού έχουμε προσεγγίσει θεωρητικά το κριτήριο Minimax θα προσπαθήσουμε να το προσεγγίσουμε αναλυτικότερα με την βοήθεια μαθηματικών συναρτήσεων.

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα παίγνιο όπου ο πίνακας αποδοχών $A=(\alpha_{ij})$ διαμορφώνεται από τις επιλογές δυο παικτών (του Μπλε και του Κόκκινου διοικητή) οι οποίοι επιλέγουν μικτή στρατηγική X και μικτή στρατηγική Y αντίστοιχα, τότε η προσδοκώμενη αποπληρωμή (payoff) του Μπλε, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$E = X'AY = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i y_j$$

Παρόλο που ο παίκτης επιλέγει την μικτή στρατηγική, η συγκεκριμένη στρατηγική που τελικά θα παιχτεί στο παίγνιο, επιλέγεται τυχαία, εξαρτώμενη από την δοθείσα κατανομή πιθανότητας.

Αν υποθέσουμε ότι ο Μπλε επιλέγει την στρατηγική του, επιλέγοντας μικτή στρατηγική X, τότε μπορεί να προσδοκά να λάβει τουλάχιστον

$$\min_{Y} X'AY$$

Εφόσον ο Μπλε έχει την δυνατότητα να επιλέξει X, θα το επιλέξει έτσι ώστε αυτό το ελάχιστο να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερο. Επομένως ο Μπλε μπορεί να επιλέξει μικτή στρατηγική, η λεγόμενη X^*, η οποία θα του εγγυηθεί μία προσδοκία τουλάχιστον

$$\max_{X}\ \min_{Y} X'AY,$$

ανεξάρτητα από τον τρόπο δράσης του Κόκκινου. Παρομοίως, για κάθε στρατηγική Y, επιλεγείσα από τον Κόκκινο, το περισσότερο που θα κληθεί να πληρώσει στον Μπλε θα είναι

$$\max_{X} X'AY.$$

Ο Κόκκινος μπορεί να επιλέξει την Y έτσι ώστε η παραπάνω ποσότητα να είναι η μικρότερη δυνατή. Από εκεί και έπειτα, ο Κόκκινος δύναται να επιλέξει μικτή στρατηγική, Y^*, η οποία θα περιορίσει την προσδοκώμενη αποπληρωμή του Μπλε έτσι ώστε να είναι το πολύ

$$\min_{Y}\ \max_{X} X'AY,$$

ανεξαρτήτως τι θα επιλέξει ο Μπλε. Όπως προκύπτει από τις ανωτέρω παρατηρήσεις, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι

(6.1)
$$\max_{X}\ \min_{Y} X'AY \leq \min_{Y}\ \max_{X} X'AY\,.$$

Το θεώρημα minimax αναφέρει ότι αυτές οι δύο ποσότητες έχουν πάντα μία κοινή τιμή, υ, ή ότι

(6.2)
$$\max_{X}\ \min_{Y} X'AY = \min_{Y}\ \max_{X} X'AY = \upsilon.$$

Αυτό το αξιοσημείωτο αποτέλεσμα είναι το θεμελιώδης θεώρημα της Θεωρίας Παιγνίων.

§2. Θεωρητικό Παράδειγμα Σύγκρουσης Δύο Χωρών

Για την καλύτερη κατανόηση του κριτηρίου minimax θα χρησιμοποιηθεί ένα θεωρητικό παράδειγμα σύγκρουσης δύο χωρών (Baumgarten, 1961).

Σε μία μάχη μεταξύ δύο χωρών για την κατάληψη εδάφους της μιας από την άλλη, η επιτιθέμενη χώρα έχει την δυνατότητα να χρησιμοποιήσει, προκειμένου να διεισδύσει στα εδάφη της αντίπαλης χώρας, αεροσκάφη πλήρως εξοπλισμένα με βαρύ οπλισμό, αεροσκάφη που διαθέτουν συστήματα ηλεκτρονικών παρεμβολών (ECM), ή απλά αεροσκάφη, με ελαφρύ εξοπλισμό. Από την άλλη πλευρά, η αμυνόμενη χώρα μπορεί να χρησιμοποιήσει απλά αεροπλάνα αναχαίτισης των εχθρικών αεροσκαφών, αεροπλάνα με αμυντικά συστήματα ηλεκτρονικών παρεμβολών, ή απλή αντιαεροπορική άμυνα. Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τις πιθανότητες σε ποσοστά που έχει η επιτιθέμενη χώρα (έστω Α) να πετύχει το στόχο της, ανάλογα με τις εκάστοτε στρατηγικές που θα ακολουθηθούν.

Πίνακας 6

Β / Α	ΑΝΑΧΑΙΤΙΣΤΙΚΑ Α/Φ	Α/Α ΑΜΥΝΑ	ΑΜΥΝΤΙΚΑ ECM	ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΣΕΙΡΑΣ
ΒΑΡΥΣ ΕΞΟΠΛΙΣΜΟΣ	40	50	60	**40**
ΑΠΛΑ ΑΕΡΟΣΚΑΦΗ	80	70	90	**70**
ECM	50	60	40	**40**
ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΤΗΛΗΣ	**80**	**70**	**90**	
(Τιμή maximin = 70 = Τιμή minimax)				

Αντικειμενικός σκοπός της χώρας Α είναι να μεγιστοποιήσει τις πιθανότητες επιτυχίας της. Από την άλλη πλευρά αντικειμενικός σκοπός της αμυνόμενης χώρας (έστω Β) είναι να ελαχιστοποιήσει τις πιθανότητες επιτυχίας της χώρας Α. Οι επιλογές της χώρας Α φαίνονται στις γραμμές του πίνακα και οι επιλογές της χώρας Β στις στήλες του πίνακα. Σε μία επιπλέον γραμμή σημειώνεται η μέγιστη απόδοση της κάθε στήλης και σε μία επιπλέον στήλη σημειώνεται η ελάχιστη απόδοση κάθε σειράς. Η χώρα Α, θέλοντας να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, θα επιλέξει τη στρατηγική που, στη χειρότερη περίπτωση, θα της αποδώσει περισσότερο από τη χειρότερη περίπτωση των υπολοίπων στρατηγικών. Θα επιλέξει δηλαδή το μέγιστο από τα ελάχιστα που φαίνονται στην επιπλέον στήλη. Εξασφαλίζει έτσι ότι οι πιθανότητες επιτυχίας της δε θα πέσουν κάτω από ένα υψηλό σχετικά ποσοστό. Με την ίδια λογική και για να περιορίσει όσο το δυνατόν περισσότερο τις πιθανότητες επιτυχίας της χώρας Α, η χώρα Β επιλέγει το ελάχιστο από τα μέγιστα που φαίνονται στην επιπλέον γραμμή. Επιλέγει δηλαδή απλή αντιαεροπορική άμυνα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι τιμές των δύο αυτών επιλογών συμπίπτουν και άρα υπάρχει σαγματικό σημείο. Αυτό αποτελεί και τη λύση του συγκεκριμένου παιγνίου.

§3. Βέλτιστες Μεικτές Στρατηγικές

Από την σχέση (6.2) προκύπτει ότι ο Μπλε έχει μία μικτή στρατηγική X^* και ο Κόκκινος μία μικτή στρατηγική Y^* τέτοια ώστε

$$X^{*\prime} A\Upsilon \geq \upsilon \qquad \text{για όλα τα } \Upsilon,$$
$$X' A\Upsilon^{*} \leq \upsilon \qquad \text{για όλα τα } X,$$
$$X^{*\prime} A\Upsilon^{*} = \upsilon.$$

Ο συνδυασμός X^*, Υ^* ονομάζεται λύση του παιγνίου και "υ", η τιμή του παιγνίου. Επίσης αναφερόμαστε στο X^*, Υ^* ως βέλτιστες στρατηγικές, καθώς:

α. Αν ο Μπλε χρησιμοποιεί X^*, η προσδοκία του είναι τουλάχιστον υ, ανεξάρτητα τι κάνει ο Κόκκινος.

β. Αν ο Κόκκινος χρησιμοποιεί Υ^*, μπορεί να οδηγήσει τον Μπλε, να προσδοκεί, το πολύ υ, ανεξάρτητα του τι επιλέγει ο Μπλε.

Καθώς $X^{*\prime}A\Upsilon^{*} \geq \upsilon$ για όλα τα Υ και $X'A\Upsilon^{*} \leq \upsilon$ για όλα τα X, η λύση επίσης έχει την ιδιότητα ότι ο Μπλε παίκτης θα μπορούσε να ανακοινώσει εκ των προτέρων (πριν την έναρξη του παιγνίου), την μικτή στρατηγική που πρόκειται να χρησιμοποιήσει στο παίγνιο χωρίς να διατρέχει τον κίνδυνο ότι ο αντίπαλος του θα μπορέσει να εκμεταλλευτεί την επιπλέον αυτή πληροφορία ώστε να του περιορίσει τα προσδοκόμενα κέρδη. Φυσικά αυτή η ανακοίνωση παρέχει πληροφορία μόνο για την μικτή στρατηγική που θα χρησιμοποιηθεί. Δεν παρέχει καμία πληροφορία για την καθαρή στρατηγική, που στην πραγματικότητα θα χρησιμοποιηθεί κατά την διεξαγωγή του παιγνίου. Ούτε και οι παίκτες γνωρίζουν την συγκεκριμένη καθαρή στρατηγική, καθώς αυτή αφήνεται σε μια συσκευή τύχης.

Ως εκ τούτου, αν ο Μπλε χρησιμοποιεί μια βέλτιστη στρατηγική X^* και ο Κόκκινος είναι ενήμερος γι' αυτό εκ των προτέρων, ο Κόκκινος δεν χρειάζεται να αποχωρήσει από την βέλτιστη στρατηγική Υ^* ως αποτέλεσμα της παραπάνω πληροφορίας. Ομοίως ισχύει και για τον Μπλε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Ιδιότητες των Βέλτιστων Στρατηγικών

§1. Περισσότερες από μία Βέλτιστες Στρατηγικές

Από τον θεώρημα Minimax προκύπτει ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει μία λύση σε μεικτές στρατηγικές.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, ανάλογα με τον πίνακα αποδοχών, το παίγνιο δύναται να έχει περισσότερες από μία λύσεις. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των λύσεων αυτών. Σε πρώτη φάση θα εξετάσουμε ορισμένες ιδιότητες της βέλτιστης στρατηγικής και έπειτα θα αναλύσουμε τις ιδιότητες που παρουσιάζει το σετ των βέλτιστων στρατηγικών.

§2. Ιδιότητες μιας Βέλτιστης Στρατηγικής

Υποθέτουμε ότι $X^*=(x_i^*)$ και $Y^*=(y_j^*)$ είναι βέλτιστες στρατηγικές του Μπλε και του Κόκκινου, αντίστοιχα. Αν $x_i^*>0$, τότε ίσως παιχτεί η i στρατηγική, ανάλογα με το αποτέλεσμα της τυχαιοποίησης. Αν $x_i^* = 0$, τότε η στρατηγική i δεν θα παιχτεί.

Έστω

$$U^*=AY^*=\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m^* \end{bmatrix} \quad , \quad L^* = A'X^* = \begin{bmatrix} l_1^* \\ l_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n^* \end{bmatrix}$$

Ως εκ τούτου,

$$U^* = (u_i^*) = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j^*),$$

είναι ένα διάνυσμα του οποίου οι συνιστώσες αντιπροσωπεύουν τις προσδοκίες του Μπλε, στην περίπτωση που αυτός χρησιμοποιεί μια καθαρή στρατηγική i και ο Κόκκινος χρησιμοποιεί μια βέλτιστη στρατηγική Y^*. Ομοίως, οι συνιστώσες του

$$L^* = \left(l_j^*\right) = (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i^*),$$

Αντιπροσωπεύουν την προσδοκία του Μπλε, στην περίπτωση που αυτός χρησιμοποιεί μια βέλτιστη μικτή στρατηγική X^* και ο Κόκκινος χρησιμοποιεί μια καθαρή στρατηγική j.

Από το θεώρημα Minimax έχουμε

(7.1) $$\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = \min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^* = u.$$

Ως εκ τούτου έχουμε:

α. $\max_i u_i^* = \min_j l_j^* = u$. Υπάρχει τουλάχιστον μια καθαρή στρατηγική για κάθε παίκτη , η οποία αν χρησιμοποιηθεί ενάντια στην βέλτιστη μικτή στρατηγική του αντιπάλου του, αποφέρει την τιμή του παιγνίου.

Από την (7.1) επίσης έχουμε ότι :

β. $u_i^* \leq u \leq l_j^*$ για όλα τα i και j. Ενάντια στην βέλτιστη μικτή στρατηγική του αντιπάλου, μια καθαρή στρατηγική δεν δύναται να αποδώσει μια υψηλότερη προσδοκώμενη αμοιβή-πληρωμή από αυτή που θα έδινε η βέλτιστη μικτή στρατηγική του.

Εφόσον $u_i^* \leq u$ για όλα τα i, θα ορίσουμε ως S_1 το σύνολο των στρατηγικών του Μπλε για τις οποίες $u_i < u$, και ως S_2 το σύνολο των στρατηγικών του Μπλε για τις οποίες $u_i = u$.

Έπειτα, με το θεώρημα Minimax έχουμε:

$$u = \sum_{i=1}^{m} u_i^* x_i^* = u \sum_{S_2} x_i^* + \sum_{S_1} u_i^* x_i^*$$

ή

$$u\left(1 - \sum_{S_2} x_I^*\right) = \sum u_i^* x_i^* .$$

Τώρα από τον ορισμό του S_1 και S_2, προκύπτει ότι

$$1 - \sum_{S_2} x_i^* = \sum_{S_1} x_i^*.$$

Ως εκ τούτου, έχουμε:

$$u \sum_{S_1} x_i^* = \sum_{S_1} u_i^* x_i^*$$

ή

(7.2) $$\sum_{S_1} (u - u_i^*)x_i^* = 0.$$

Εφόσον u-$u_i^* > 0$ για κάθε i στο S_1, προκύπτει από την (7.2) ότι x_i^*=0=0 για κάθε i στο S_1. Έχουμε δείξει ότι

γ. Αν u_i^*<u, τότε x_i^*=0. Η βέλτιστη μικτή στρατηγική ενός παίκτη δεν περιλαμβάνει καθαρή στρατηγική η οποία αποδίδει λιγότερο από την τιμή του παιγνίου, όταν αυτή η καθαρή στρατηγική χρησιμοποιείται ενάντια στην βέλτιστη μικτή στρατηγική του αντιπάλου.

Εφόσον $x_i^* \geq 0$ για όλα τα i, μπορούμε να εκφράσουμε την τιμή του παιγνίου u ως ακολούθως:

$$u = \sum_{i=1}^{m} u_i^* x_i^* = \sum_{x_i^*>0} u_i^* x_i^*$$

$$= \sum_{\substack{x_i^*>0 \\ u_i^*=u}} u_i^* x_i^* + \sum_{\substack{x_i^*>0 \\ u_i^*<u}} u_i^* x_i^*.$$

Ως εκ τούτου

$$u \ = \ u \sum_{R_2} x_i^* + \sum_{R_1} u_i^* x_i^*$$

όπου το R_1 αντιπροσωπεύει το σύνολο των στρατηγικών του Μπλε για τις οποίες $x_i^* > 0$ και u_i^*<u, και το R_2 είναι το σύνολο των στρατηγικών του Μπλε για τις οποίες $x_i^* > 0$ και u_i^*=u. Όμως εφόσον

$$\sum_{R_1} x_i^* + \sum_{R_2} x_i^* = 1,$$

θα έχουμε

$$u \sum_{R_1} x_i^* = \sum_{R_1} u_i^* x_i^*.$$

Επομένως,

$$\sum_{R_1} (u - u_i^*) x_i^* = 0.$$

Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι $x_i^* > 0$ και $u\text{-}u_i^*>0$ για κάθε i στο R_1, προκύπτει ότι το R_1 είναι κενό. Έχουμε

δ. Αν $x_i^* > 0$ τότε $u_i^*=u$. Αν μία καθαρή στρατηγική είναι μέλος μίας βέλτιστης μικτής στρατηγικής, αποδίδει την τιμή του παιγνίου όταν χρησιμοποιείται ενάντια στην βέλτιστη μικτή στρατηγική του αντιπάλου.

§3. Κυρίαρχες Στρατηγικές

Στην εισαγωγή της υπόψη διατριβής είχα αναφερθεί εν συντομία στην κυριαρχία που υφίσταται μεταξύ των στρατηγικών ενός παίκτη. Είχα αναφέρει λοιπόν ότι μια στρατηγική θεωρείται αυστηρά κυρίαρχη, όταν οι αποδόσεις της είναι μεγαλύτερες από τις αποδόσεις οποιασδήποτε άλλης στρατηγικής του ιδίου παίκτη. Όταν οι αποδόσεις μιας στρατηγικής είναι ίσες ή μεγαλύτερες από τις αποδόσεις των υπολοίπων στρατηγικών, τότε η στρατηγική αυτή καλείται ασθενώς κυρίαρχη ενώ οι υπόλοιπες στρατηγικές, ονομάζονται αυστηρώς ή ασθενώς κυριαρχούμενες.

Στο σημείο αυτό έκρινα σκόπιμο να αναφερθώ εκτενέστερα στον όρο κυριαρχία προκειμένου να γίνει κατανοητή η διαδικασία με την οποία εντοπίζουμε το είδος της κυριαρχίας που υφίσταται μεταξύ των διαθέσιμων στρατηγικών ενός παίκτη αλλά και η σημασία της ύπαρξης κάθε είδους κυριαρχίας στην έκβαση του παιγνίου.

Ως εκ τούτου, θα ορίσουμε την «ασθενή στρατηγική» ενός παίκτη ως κάποια καθαρή στρατηγική η οποία εμφανίζεται με μηδενική πιθανότητα σε κάθε βέλτιστη μικτή στρατηγική του παίκτη. Έτσι λοιπόν, θα λέγαμε ότι η $k_{\iota o\sigma\tau\acute{\eta}}$ καθαρή στρατηγική είναι ασθενή αν έχουμε $x_k^*=0$ σε κάθε βέλτιστη μικτή στρατηγική $X^*=(x_i^*)$, του Μπλε.

Αν T_1 είναι το σύνολο των βέλτιστων μικτών στρατηγικών του Μπλε, τότε η k είναι μια ασθενή στρατηγική αν για κάθε μέλος του T_1 συμβαίνει $x_k^* = 0$. Εφόσον μια ασθενή στρατηγική δεν εμφανίζεται ποτέ με θετική πιθανότητα σε καμία βέλτιστη μικτή στρατηγική, δεν θα εφαρμοστεί ποτέ. Γνωρίζοντας το πλήθος των ασθενών στρατηγικών, αν υφίστανται στο παίγνιο, μπορούμε να μειώσουμε το μέγεθος του παιγνίου κατά τον αριθμό αυτό.

Μία μέθοδο για να μελετήσουμε το παίγνιο ως προς την ύπαρξη ασθενών στρατηγικών είναι να ερευνήσουμε τον πίνακα αποδοχών για κυριαρχίες. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας αποδοχών $A=(a_{ij})$ είναι τέτοιος ώστε

(7.3) $$a_{ij}>a_{kj} \qquad \text{για } j=1,2,\ldots,n,$$

ή ότι η i γραμμή κυριαρχεί αυστηρά της γραμμής k. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν λέμε ότι η στρατηγική k του Μπλε κυριαρχείται από την στρατηγική i, ή ότι η k είναι κυριαρχούμενη στρατηγική. Ωστόσο για τον Κόκκινο, αν η στήλη r κυριαρχεί αυστηρά της στήλης s, δηλαδή, αν

(7.4) $$a_{ir}>a_{is} \qquad \text{για } i=1,2,\ldots,m,$$

τότε η στρατηγική r κυριαρχείται από την στρατηγική s.

Υποθέτουμε έπειτα ότι η στρατηγική k του Μπλε κυριαρχείται από την στρατηγική i, ή ότι

$$a_{kj}<a_{ij} \qquad \text{για } j=1,2,\ldots,n.$$

Τότε αν $Y^*=(y_j^*)$ είναι μία βέλτιστη στρατηγική για τον Κόκκινο, έχουμε

$$u_k^* = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}y_j^* < \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^* = u_i^* \le u,$$

ή

$$u_k^* < u.$$

Προκύπτει ότι για κάθε X^* στο T_1,

$$x_k^* = 0.$$

Ως εκ τούτου η στρατηγική k είναι μία ασθενή στρατηγική. Παρομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι αν η (7.4) ικανοποιείτε, τότε η στρατηγική r είναι μία ασθενή στρατηγική για τον Κόκκινο.

Κατ' αυτόν τον τρόπο λοιπόν, έχουμε δείξει ότι:

α. Αν μία στρατηγική κυριαρχείται από μία άλλη, η κυριαρχούμενη στρατηγική είναι μία απλή στρατηγική.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν καθαρές στρατηγικές k, i και r και ένας αριθμός λ (0<λ<1) έτσι ώστε

(7.5) $$a_{kj} < \lambda a_{lj} + (1-\lambda)a_{rj} \qquad \text{για } j = 1,2,\dots,n.$$

Δηλαδή, υποθέτουμε ότι η στρατηγική k κυριαρχείται από ένα κυρτό γραμμικό συνδυασμό των στρατηγικών "i" και "r". Τότε για κάθε Y^* παίρνουμε

$$u_k^* = \sum a_{kj}y_j^* < \lambda \sum a_{lj}y_j^* + (1-\lambda)\sum a_{rj}y_j^* = \lambda u_l^* + (1-\lambda)u_r^*.$$

Αλλά $u_l^* \leq \upsilon$ και $u_r^* \leq \upsilon$.

Ως εκ τούτου

$$u_k^* < \lambda\upsilon + (1-\lambda)\upsilon = \upsilon.$$

Ξανά, αυτό υποδηλώνει ότι για κάθε X^* στο T_1,

$$x_k{}^* = 0,$$

ή ότι η $k_{\text{ιοστή}}$ στρατηγική είναι μία ασθενή στρατηγική. Ως εκ τούτου έχουμε δείξει ότι

β. αν μία στρατηγική κυριαρχείται από ένα κυρτό γραμμικό συνδυασμό των άλλων στρατηγικών, η κυριαρχούμενη στρατηγική είναι ασθενή στρατηγική.

Τώρα υποθέτουμε ότι ένας κυρτός γραμμικός συνδυασμός των στρατηγικών k και l κυριαρχείται από ένα κυρτό γραμμικό συνδυασμό των στρατηγικών s και r. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχει λ και μ όπου $0\leq \lambda \leq 1$ και $0\leq \mu \leq 1$, έτσι ώστε

(7.6) $$\lambda a_{kj} + (1-\lambda)a_{lj} < \mu a_{rj} + (1-\mu)a_{sj} \qquad \text{για } j=1, 2, \dots, n.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (7.6) με y_j^* και προσθέτοντας σε όλα j, παίρνουμε

$$\lambda \sum a_{kj}y_j^* + (1-\lambda)\sum a_{lj}y_j^* < \mu \sum a_{rj}y_j^* + (1-\lambda)\sum a_{sj}y_j^*.$$

Ως εκ τούτου

(7.7) $$\lambda u_k^* + (1-\lambda)u_l^* < \mu u_r^* + (1-\mu)u_s^* \leq u.$$

Τώρα $u_k^* \leq u$ και $u_l^* \leq u$. Αν $u_k^* = u$ και $u_l^* = u$, τότε από την (7.7) παίρνουμε την αντίφαση $u < u$. Ως εκ τούτου είτε $u_k^* < u$ είτε $u_l^* < u$. Επομένως, είτε $x_k^* = 0$ είτε $x_l^* = 0$. Έχουμε δείξει ότι

α. αν ένας κυρτός γραμμικός συνδυασμός στρατηγικών κυριαρχείται από ένα κυρτό γραμμικό συνδυασμό άλλων στρατηγικών, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ασθενή στρατηγική ανάμεσα στον κυριαρχούμενο κυρτό γραμμικό συνδυασμό στρατηγικών.

Τέλος, υποθέτουμε ότι ο πίνακας αποδοχών A δύναται να αποσυντεθεί σε τέσσερεις υποπίνακες A_1, A_2, A_3, A_4 όπως παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

όπου οι υποπίνακες A2 και A3 έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$(7.8) \qquad \begin{cases} \text{Κάθε στήλη του } A_2 \text{ κυριαρχεί αυστηρά ορισμένων στηλών του } A_1. \\ \text{Κάθε γραμμή του } A_3 \text{ κυριαρχείται αυστηρά από ορισμένες γραμμές του } A_1. \end{cases}$$

Έστω ότι X_i^*, Y_i^* είναι μια λύση του παιγνίου που έχει ως πίνακα αποδοχών τον A_1. Τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι το ζεύγος των διανυσμάτων $X^* = (X_1^*, 0, \ldots, 0)$, $Y^* = (Y_1^*, 0, \ldots, 0)$ είναι μία λύση του αυθεντικού (αρχικού) παιγνίου A. Ως εκ τούτου ο Μπλε έχει βέλτιστες μικτές στρατηγικές, οι οποίες περιλαμβάνουν μόνο αυτές τις στρατηγικές οι οποίες σχετίζονται με τον A_1 και ο Κόκκινος έχει παρόμοιες βέλτιστες στρατηγικές. Αν ο Μπλε έχει μια βέλτιστη μικτή στρατηγική η οποία περιλαμβάνει μία καθαρή στρατηγική k, ορίζοντας τον A_3, τότε $x_k^* > 0$. Επομένως και κάθε βέλτιστη στρατηγική του Κόκκινου Y^*,

$$u_k^* = u.$$

Αλλά αν $Y^* = (Y_1^*, 0, \ldots, 0)$, προκύπτει από την παραδοχή κυριαρχίας ότι

$$u_k^* < u,$$

μία αντίφαση στην παραδοχή βελτιστοποίησης. Επομένως, σε κάθε βέλτιστη στρατηγική, $x_k^* = 0$ για όλα τα k που ορίζουν τον A_3. Ως εκ τούτου όλες οι στρατηγικές του Μπλε που ορίζουν τον A_3 είναι ασθενή στρατηγικές. Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να τονίσουμε ότι αυτά τα συμπεράσματα είναι ανεξάρτητα του πίνακα A_4. Έχουμε δείξει ότι β. αν ο πίνακας αποδοχών Α δύναται να αποσυντεθεί κατ' αυτόν τον τρόπο ώστε η (7.8) να ικανοποιείται, τότε όλες οι λύσεις του Α προκύπτουν λύνοντας το A_1. Οι υπολειπόμενες στρατηγικές είναι ασθενή στρατηγικές.

§4. Επιλογή Στόχου Για Άμυνα – Επίθεση

Το πρόβλημα της επιλογής στόχου εμφανίζεται συχνά στις στρατιωτικές επιχειρήσεις. Στην πιο γενική του μορφή, το πρόβλημα θα μπορούσε να περιεγραφεί όπως παρακάτω:

Υποθέτουμε ότι και ο επιτιθέμενος και ο αμυνόμενος, έχουν μια σταθερή ποσότητα πόρων να κατανείμουν ανάμεσα σε μια σειρά από στόχους διαφορετικών αξιών. Πως θα μπορούσε ο επιτιθέμενος και ο αμυνόμενος να επιλέξει τους στόχους για την κατανομή των πόρων;

Στο σημείο αυτό προκειμένου να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα, θα εξετάσουμε το απλούστερο πρόβλημα επιλογής στόχου. Τόσο ο επιτιθέμενος όσο και ο έχουν από μία μονάδα η οποία πρέπει να κατανεμηθεί σε κάποιον στόχο. Ποιος στόχος λοιπόν θα λάβει την κατανομή αυτή;

Το παίγνιο θα μπορούσε να περιεγραφεί όπως παρακάτω:

Στόχοι: Υπάρχουν n στόχοι οι οποίοι ονομάζονται $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$. Υποθέτουμε ότι αυτοί οι στόχοι έχουν τιμές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ αντίστοιχα, οι οποίες κατατάσσονται ως εξής:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_n > 0.$$

Επίθεση: Ο επιτιθέμενος, Μπλε, έχει μία επιτιθέμενη μονάδα να κατανείμει σε κάποιον από τους n στόχους.

Άμυνα: Ο αμυνόμενος, Κόκκινος, έχει μία μονάδα άμυνας να κατανείμει κάποιον από τους στόχους του. Υποθέτουμε ότι η μονάδα άμυνας έχει μία δυναμική υπεράσπισης p, δηλαδή, αν πραγματοποιηθεί μία επίθεση σε έναν υπερασπιζόμενο στόχο, τότε υπάρχει μία πιθανότητα p ο επιτιθέμενος να μην καταφέρει να καταστρέψει τον στόχο. Ως εκ τούτου 1 – p είναι η πιθανότητα ο Μπλε να καταφέρει να καταστρέψει τον στόχο στον οποίο επιτίθεται.

Στρατηγική: Μια στρατηγική για τον Μπλε είναι μια επιλογή στόχου για επίθεση ενώ για τον Κόκκινο είναι μια επιλογή στόχου για άμυνα-υπεράσπιση. Ως εκ τούτου κάθε παίκτης έχει n στρατηγικές.

Αμοιβή – Αποπληρωμή (payoff): Υποθέτουμε ότι αν πραγματοποιηθεί μία επίθεση σε ανυπεράσπιστο στόχο, T_k, τότε η αμοιβή για τον Μπλε είναι η αξία, α_k, του στόχου. Ωστόσο, αν πραγματοποιηθεί μια επίθεση σε έναν υπερασπιζόμενο στόχο, T_i, η αμοιβή θα είναι (1 - p) α_i, η προσδοκώμενη ζημιά στον στόχο. Επομένως, ο πίνακας αποδοχών είναι ο ακόλουθος:

Πίνακας 7

Υπερασπιζόμενος Στόχος

Στόχος που δέχεται επίθεση		**T_1**	**T_2**	**.**	**.**	**T_n**
	T_1	$(1-p)a_1$	a_1	.	.	a_1
	T_2	a_2	$(1-p)a_2$	.	.	a_2
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	T_n	a_n	a_n	.	.	$(1-p)a_n$

Εξαιτίας της ιδιαίτερης μορφής του πίνακα αποδοχών, θα μπορούσαμε να επιλύσουμε το παίγνιο μαντεύοντας μία λύση και στην συνέχεια επαληθεύοντας την. Ωστόσο, για να κάνουμε μια καλή εικασία, είναι απαραίτητο να προβούμε σε ορισμένες προκαταρκτικές έρευνες.

Είναι λογικό να περιμένουμε ότι η λύση θα έχει την ιδιότητα ότι κάθε παίκτης επιλέγει τυχαία μέσα από τους ίδιους στόχους υψηλής αξίας. Έτσι, υποθέτουμε ότι οι X^* , Y^* είναι της ακόλουθης μορφής:

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_t, 0, 0, 0)$$
$$Y^* = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_t, 0, 0, 0)$$

όπου

$$x_i > 0, i \leq t$$
$$x_i = 0, i > t$$
$$y_j > 0, j \leq t$$
$$y_j = 0, j > t$$

όπου η τιμή του t πρέπει να είναι καθορισμένη.

Εφόσον $y_1>0$, $y_2 > 0$, προκύπτει ότι

$$(1-p)a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_tx_t = u,$$
$$a_1x_1 + (1-p)\,a_2x_2 + \cdots + a_tx_t = u.$$

Αφαιρώντας την πρώτη ισότητα από την δεύτερη, προκύπτει

$$pa_1x_1 - pa_2x_2 = 0,$$

ή

$$x_2 = \frac{a_1x_1}{a_2}.$$

Γενικά, ισχύει ότι

$$x_\iota = \frac{a_1x_1}{a_\iota}, \qquad \text{για } i \leq t.$$

Ωστόσο,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{t} x_i = \sum_{i=1}^{t} \frac{a_1\, x_1}{a_i} = 1.$$

Ορίζουμε

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}.$$

Λαμβάνουμε την τιμή,

$$x_1 = \frac{1}{a_1A_i}.$$

Επομένως η X^* πρέπει να είναι τέτοια ώστε

$$x_i = \frac{1}{a_iA_i} \qquad \text{για } i \leq t,$$

$$= 0 \qquad \text{για } i > t.$$

Για να καταλήξουμε στην μορφή της Y^* παρατηρούμε ότι $x_1>0$ και $x_2>0$, επομένως

$$(1-p)a_1y_1 + a_1y_2 + \cdots + a_1y_t = u,$$
$$a_2y_1 + (1-p)\, a_2y_2 + \cdots + a_2y_t = u.$$

Από τις παραπάνω ισότητες και εφόσον Y^* είναι μία μικτή στρατηγική, έχουμε ότι

$$y_2 = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{a_1}{a_2}\,(1 - py_1)\right].$$

Βασιζόμενοι στο γεγονός ότι $x_1>0$ και $x_i>0$ για κάθε $i \leq t$ καταλήγουμε με παρόμοιο επιχείρημα στο ότι,

$$y_j = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{a_1}{a_2}\,(1 - py_1)\right] \quad \text{για } j \leq t.$$

Αλλά

$$\sum_{j=1}^{t} y_j = 1.$$

Αυτό αποδίδει μια Y^* της μορφής

$$\begin{aligned} y_j &= \frac{1}{p}\left[1 - \frac{i-p}{a_j A_i}\right] && \text{για } j \leq t, \\ &= 0 && \text{για } j > t. \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό είμαστε σε θέση να κάνουμε μία εικασία σχετικά με την τιμή του παιγνίου, η οποία θα πρέπει να είναι

$$\begin{aligned} u &= (1-p)a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_tx_t \\ &= \sum_{i=1}^{t} a_ix_i - pa_1x_1 \\ &= \frac{t-p}{A_t}. \end{aligned}$$

Υπολογίσαμε παραπάνω την βέλτιστη στρατηγική του επιτιθέμενου και του αμυνόμενου καθώς και την τιμή του παιγνίου.

§5. Η Διεξαγωγή Αναγνώρισης ως Παίγνιο Στρατηγικής

Η σκοπιμότητα των αναγνωρίσεων πριν την επίθεση μπορεί να ερευνηθεί θεωρώντας το πρόβλημα ως παίγνιο στρατηγικής. Ο σκοπός της αναγνώρισης είναι η απόκτηση πληροφοριών σχετικά με τις στρατηγικές προθέσεις του αντιπάλου.

Έχοντας πληροφορίες, ο επιτιθέμενος μπορεί πιο αποτελεσματικά να σχεδιάσει την επίθεση του. Ωστόσο, η προσπάθεια απόκτησης πληροφοριών αποτελεί μια ιδιαίτερα δαπανηρή διαδικασία και εκτός αυτού ελλοχεύει ο κίνδυνος αποτυχίας καθώς ο εχθρός δύναται να χρησιμοποιήσει αποτελεσματικά αντίμετρα. Αυτή η σύγκρουση συμφερόντων, για πραγματοποίηση ή όχι αναγνώρισης, δύναται να επιλυθεί στο πλαίσιο των στρατηγικών παιγνίων.

Για να απεικονίσουμε τις βασικές αρχές, θα επιλύσουμε ένα υποθετικό πρόβλημα αναγνώρισης, όπου κάθε παίκτης διαθέτει ένα μικρό αριθμό στρατηγικών. Οι βασικές αυτές αρχές παραμένουν οι ίδιες και για μεγαλύτερο αριθμό στρατηγικών.

Θα υποθέσουμε λοιπόν, για λόγους απλούστευσης, ότι τόσο ο επιτιθέμενος όσο και ο αμυνόμενος διαθέτουν 2 στρατηγικές.

Ο αντικειμενικός σκοπός του επιτιθέμενου (Μπλε Διοικητή) είναι η κατάληψη μίας θέσης την οποία υπερασπίζεται ο αντίπαλος του (Κόκκινος Διοικητής). Οι τρόποι δράσης του επιτιθέμενου είναι οι δύο στρατηγικές που έχει στην διάθεση του. Δηλαδή :

E_1 : Επίθεση με το σύνολο της δύναμης του,

E_2 : Επίθεση με μέρος της δυνάμεως του, αφήνοντας το υπόλοιπο ως εφεδρεία και οπισθοφυλακή σε περίπτωση που ο εχθρός επιχειρήσει υπερκέραση.

Ο αμυνόμενος, Κόκκινος, έχει και αυτός δύο τρόπους δράσεις, όσες και οι στρατηγικές του:

A_1 : Να αμυνθεί με το σύνολο της δυνάμεως του υπερ του στόχου που επιλέγει ο επιτιθέμενος.

A_2 : Να αμυνθεί με ένα μέρος της δύναμης του, και να στείλει το υπόλοιπο να υπερκεράσει τον εχθρό και να του επιτεθεί από τα νώτα.

Υπάρχουν τέσσερα πιθανά αποτελέσματα για τους παραπάνω τρόπους δράσης. Μπορούν να συνοψιστούν από τον ακόλουθο 2Χ2 πίνακα:

Πίνακας 8

Κόκκινος / **Μπλε**	**A_1**	**A_2**
E_1	α_{11}	α_{12}
E_2	α_{21}	α_{22}

όπου για παράδειγμα η α_{21} αντιπροσωπεύει την απολαβή του Μπλε αν αυτός επιτεθεί με μέρος της δυνάμεως του και ο Κόκκινος αποφασίσει να αμυνθεί με το σύνολο της δυνάμεως του.

Υποθέτουμε ότι τα αποτελέσματα είναι τέτοια ώστε αν ο Κόκκινος χρησιμοποιεί την 1η στρατηγική του, τότε ο Μπλε θα προτιμούσε να χρησιμοποιήσει την 1η στρατηγική του, δηλαδή, $\alpha_{11}>\alpha_{21}$ ενώ αν ο Κόκκινος χρησιμοποιήσει την 2η στρατηγική του, τότε ο Μπλε θα προτιμούσε και αυτός να χρησιμοποιήσει την 2η στρατηγική του.

Προφανώς ο επιτιθέμενος θα μπορούσε να επωφεληθεί γνωρίζοντας τις προθέσεις του αμυνόμενου. Ως εκ τούτου, ίσως ήταν επικερδές για τον επιτιθέμενο, να στείλει ένα απόσπασμα ανδρών να διεξάγουν αναγνωρίσεις προκειμένου να ανακαλύψουν τα σχέδια του αμυνόμενου. Προκειμένου να προστατευτεί από μία τέτοια ενέργεια του επιτιθέμενου, ο αμυνόμενος ίσως λάβει ορισμένα αντίμετρα.

Τώρα αν ο επιτιθέμενος αποφασίσει να διεξάγει αναγνώριση θα πρέπει να θυσιάσει μέρος της επιτιθέμενης δύναμης του. Αν ο αμυνόμενος αποφασίσει να λάβει αντίμετρα, πρέπει να θυσιάσει μέρος της αμυνόμενης δύναμης του. Θέτουμε ως c το κόστος που βαρύνει τον επιτιθέμενο όταν αποφασίζει να διεξάγει αναγνώριση και d το κόστος του αμυνόμενου όταν λαμβάνει αντίμετρα. Οι αποφάσεις του επιτιθέμενου για το αν θα διεξάγει αναγνώριση ή όχι και του αμυνόμενου για το αν θα λάβει αντίμετρα ή όχι, έχουν αυξήσει τον αριθμό των διαθέσιμων στρατηγικών για τις δύο πλευρές. Ενώ το αρχικό παίγνιο είχε μόνο δύο στρατηγικές για κάθε πλευρά, το τελικό παίγνιο αναγνώρισης θα έχει 16 στρατηγικές για τον επιτιθέμενο και 4 για τον αμυνόμενο. Προφανώς αρκετές από τις στρατηγικές θα είναι ασθενή στρατηγικές αλλά στην δημιουργία του παιγνίου θα πρέπει να τις απαριθμήσουμε όλες τις στρατηγικές.

Μια στρατηγική για τον επιτιθέμενο θα είναι ένα σύνολο οδηγιών οι οποίες του λένε πώς να δράσει λαμβάνοντας υπόψη την πληροφόρηση που τυχόν λαμβάνει. Ένας βολικός τρόπος για να παρουσιάσουμε συμβολικά μια στρατηγική για τον επιτιθέμενο είναι με μια διατεταγμένη ακολουθία αριθμών (u; x, y, z) στην οποία κάθε γράμμα παίρνει τη τιμή 1 ή 2, και έχει τις ακόλουθες έννοιες:

$u = 1$: Διεξήγαγε αναγνώριση.

$u = 2$: Μην διεξάγεις αναγνώριση.

$x = 1$: Παίξε την στρατηγική E_1 αν δεν λάβεις πληροφορία για τον αμυνόμενο.

$x = 2$: Παίξε την στρατηγική E_2 αν δεν λάβεις πληροφορία για τον αμυνόμενο.

$y = 1$: Παίξε την στρατηγική E_1 αν η διαθέσιμη πληροφόρηση υποδεικνύει ότι ο αμυνόμενος χρησιμοποιεί την στρατηγική A_1.

$y = 2$: Παίξε την στρατηγική E_2 αν η διαθέσιμη πληροφόρηση υποδεικνύει ότι ο αμυνόμενος χρησιμοποιεί την στρατηγική A_1.

$z = 1$: Παίξε την στρατηγική E_1 αν η διαθέσιμη πληροφόρηση υποδεικνύει ότι ο αμυνόμενος χρησιμοποιεί την στρατηγική A_2.

$z = 2$: Παίξε την στρατηγική E_2 αν η διαθέσιμη πληροφόρηση υποδεικνύει ότι ο αμυνόμενος χρησιμοποιεί την στρατηγική A_2.

Για παράδειγμα η στρατηγική $(1; 1, 2, 1)$ οδηγεί τον επιτιθέμενο να προβεί σε αναγνώριση και αν δεν αντλήσει πληροφορίες, να παίξει την στρατηγική E_1, επίθεση με το σύνολο της δυνάμεως του, ενώ αν η πληροφόρηση που θα λάβει δεικνύει ότι ο εχθρός χρησιμοποιεί την στρατηγική A_1, να παίξει την στρατηγική E_2. Αν η πληροφόρηση δεικνύει ότι ο εχθρός χρησιμοποιεί την στρατηγική A_2, να παίξει την στρατηγική E_1. Θα υπάρχουν 2^4=16 διαφορετικές στρατηγικές για τον επιτιθέμενο. Μερικές από αυτές είναι περιττές, και θα φανεί αυτό στον πίνακα αποδοχών.

Μία στρατηγική για τον Αμυνόμενο είναι μια διατεταγμένη ακολουθία (s;t) όπου κάθε γράμμα λαμβάνει μία τιμή 1 ή 2 με τις ακόλουθες έννοιες:

s=1 Λάβε αντίμετρα.

s=2 Μην λάβεις αντίμετρα.

t=1 Κάνε χρήση της στρατηγικής A_1.

t=2 Κάνε χρήση της στρατηγικής A_2.

Ως εκ τούτου (1;2) σημαίνει ότι ο Κόκκινος λαμβάνει αντίμετρα και χρησιμοποιεί την στρατηγική A_2, δηλαδή, άμυνα με ένα μέρος της δυνάμεως του.

Με αυτήν την λογική αναφορικά με τις στρατηγικές των δύο παικτών, τα 64 δυνατά αποτελέσματα του παιγνίου μπορούν να συνοψιστούν από τον πίνακα αποδοχών A_1 που παρουσιάζεται παρακάτω:

Πίνακας 9

Πίνακας Αποδοχών Παιγνίου Αναγνώρισης

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ (1;1,1,1) \\ (1;1,1,2) \\ (1;1,2,1) \\ (1;1,2,2) \\ (1;2,1,1) \\ (1;2,1,2) \\ (1;2,2,1) \\ (1;2,2,2) \\ (2;1,1,1) \\ (2;1,1,2) \\ (2;1,2,1) \\ (2;1,2,2) \\ (2;2,1,1) \\ (2;2,1,2) \\ (2;2,2,1) \\ (2;2,2,2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1;1) & (1;2) & (2;1) & (2;2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11}-c+d & a_{12}-c+d & a_{11}-c & a_{12}-c \\ a_{11}-c+d & a_{12}-c+d & a_{11}-c & a_{22}-c \\ a_{11}-c+d & a_{12}-c+d & a_{21}-c & a_{12}-c \\ a_{11}-c+d & a_{12}-c+d & a_{21}-c & a_{22}-c \\ a_{21}-c+d & a_{22}-c+d & a_{11}-c & a_{12}-c \\ a_{21}-c+d & a_{22}-c+d & a_{11}-c & a_{22}-c \\ a_{21}-c+d & a_{22}-c+d & a_{21}-c & a_{12}-c \\ a_{21}-c+d & a_{22}-c+d & a_{21}-c & a_{22}-c \\ a_{11}+d & a_{12}+d & a_{11} & a_{12} \\ a_{11}+d & a_{12}+d & a_{11} & a_{22} \\ a_{11}+d & a_{12}+d & a_{21} & a_{12} \\ a_{11}+d & a_{12}+d & a_{21} & a_{22} \\ a_{21}+d & a_{22}+d & a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+d & a_{22}+d & a_{11} & a_{22} \\ a_{21}+d & a_{22}+d & a_{21} & a_{21} \\ a_{21}+d & a_{22}+d & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Για παράδειγμα, αν ο Μπλε χρησιμοποιεί την στρατηγική (1;1,1,2) και ο Κόκκινος χρησιμοποιεί την στρατηγική (1;2), η αμοιβή a_{12}-c+d υπολογίζεται όπως παρακάτω: ο Μπλε εκτελεί αναγνώριση με ένα κόστος c αλλά δεν λαμβάνει πληροφορίες για τον Αμυνόμενο και έτσι επιλέγει να παίξει την στρατηγική E_1. Ο Κόκκινος λαμβάνει αντίμετρα με ένα κόστος d για τον ίδιο ή με ένα κέρδος d από τον Μπλε και χρησιμοποιεί την στρατηγική A_2. Επομένως η αμοιβή για τον Μπλε είναι a_{12}+d-c.

Αυτός ο πίνακας 16-γραμμών θα μπορούσε να μειωθεί σε ένα πίνακα 4-γραμμών ελέγχοντας για τυχόν κυριαρχίες. Κάθε περιττή γραμμή κυριαρχείται από την επόμενη άρτια γραμμή, γεγονός που περιορίζει τον πίνακα κατά 8 γραμμές. Ανάμεσα στις άρτιες γραμμές, κάθε $(2k+2)_{ιοστής}$ γραμμή κυριαρχείται από την $(2k)_{ιοστής}$ γραμμή, όπου k=1, 3, 5, 7. Αυτό περιορίζει 4 ακόμα γραμμές, αφήνοντας εν τέλει ένα πίνακα 4Χ4:

Πίνακας 10

$$B = \begin{array}{c} \\ (1;1,1,2) \\ (1;2,1,2) \\ (2;1,1,2) \\ (2;2,1,2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1;1) & (1;2) & (2;1) & (2;2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11}-c+d & a_{12}-c+d & a_{11}-c & a_{22}-c \\ a_{21}-c+d & a_{22}-c+d & a_{11}-c & a_{22}-c \\ a_{11}+d & a_{12}+d & a_{11} & a_{22} \\ a_{21}+d & a_{22}+d & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Είναι ξεκάθαρο από τον πίνακα Β, ότι η απόφαση του επιτιθέμενου για το αν θα προβεί σε αναγνώριση ή όχι και του αμυνόμενου για το αν θα λάβει αντίμετρα ή όχι, θα εξαρτηθεί από τα κόστη c και d. Μία λύση του παραπάνω παιγνίου, δηλαδή, ο υπολογισμός του ζεύγους των βέλτιστων στρατηγικών, θα δείξει την σκοπιμότητα της αναγνώρισης και της χρήσης αντιμέτρων.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο πίνακας αποδοχών Α, όπως των είχαμε παρουσιάσει παραπάνω, έχει ως εξής:

Πίνακας 11

Κόκκινος / Μπλε	Α1	Α2
Ε1	48	24
Ε2	12	36

Υποθέτουμε ότι το κόστος για τον επιτιθέμενο, προκειμένου να προβεί σε αναγνώριση είναι c=9 και το αντίστοιχο για τον αμυνόμενο προκειμένου να λάβει αντίμετρα είναι d=7.

Επομένως ο Πίνακας Β που είχαμε αναλύσει παραπάνω, θα έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας 12

B=

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1;1,1,2)	46	22	39	27
(1;2,1,2)	10	34	39	27
(2;1,1,2)	55	31	48	24
(2;2,1,2)	19	43	12	36

Αυτό το παίγνιο δεν έχει σημείο ισορροπίας. Εφόσον καμία γραμμή-στήλη δεν κυριαρχεί έναντι άλλης γραμμής-στήλης, θα πρέπει να λύσουμε ένα 4Χ4 παίγνιο. Αυτό θα μπορούσε να γίνει με διάφορους τρόπους. Ωστόσο, θα μπορούσε κανείς να επαληθεύσει ότι οι ακόλουθες τιμές αποτελούν λύσεις του παιγνίου:

α. Για τον Μπλε, τον επιτιθέμενο :

$$x_1' = \left(\frac{7}{12}, \frac{1}{12}, 0, \frac{4}{12}\right),$$

$$x_2' = \left(\frac{17}{36}, \frac{7}{36}, 0, \frac{12}{36}\right),$$

$$x_3' = \left(0, \frac{28}{144}, \frac{51}{144}, \frac{65}{144}\right),$$

$$x_4' = \left(\frac{28}{48}, 0, \frac{3}{48}, \frac{17}{48}\right).$$

β. Για τον Κόκκινο, τον αμυνόμενο :

$$Y' = \left(0,0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Η τιμή του παιγνίου είναι 30.

Ως εκ τούτου ο αμυνόμενος δεν παίρνει ποτέ αντίμετρα και αμύνεται κατά το $\frac{1}{4}$ του χρόνου με το σύνολο των δυνάμεων του και κατά τα $\frac{3}{4}$ του χρόνου με ένα μέρος της συνολικής του δύναμης. Ο επιτιθέμενος έχει αρκετά βέλτιστα ενδεχόμενα στην διάθεση του, λόγω του μεγάλου αριθμού βέλτιστων στρατηγικών που διαθέτει. Ανάμεσα στα ενδεχόμενα αυτά είναι τα ακόλουθα: να προβεί σε αναγνώριση με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και να μην προβεί σε αναγνώριση με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Αν προβεί σε αναγνώριση και δεν λάβει καμία πληροφορία, τότε χρησιμοποιεί την στρατηγική E_1 με πιθανότητα $\frac{7}{8}$ και την στρατηγική E_2 με πιθανότητα $\frac{1}{8}$. Αν η αναγνώριση καρποφορήσει και πληροφορηθεί ότι ο Κόκκινος χρησιμοποιεί την στρατηγική A_1, τότε ο Μπλε θα επιλέξει να παίξει την στρατηγική E_1 με πιθανότητα $\frac{7}{8}$ και την στρατηγική E_2 με πιθανότητα $\frac{1}{8}$. Κατά παρόμοιο τρόπο θα δράσει και στην περίπτωση που ο Κόκκινος επιλέγει την στρατηγική A_2. Αν ο Μπλε δεν προβεί σε αναγνώριση, χρησιμοποιεί πάντα την στρατηγική E_2, ή αφήνει οπισθοφυλακή.

§6. Επίθεση σε Κρυμμένο Στόχο.

Μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα εφαρμογή των παιγνίων στρατηγικής είναι στο γενικό πρόβλημα της καταστροφής ενός κρυμμένου αντικειμένου-στόχου. Ο αμυνόμενος έχει ένα αντικείμενο μεγάλης αξίας το οποίο θα κρύψει σε οποιοδήποτε από τα κοντέινερ που έχει στην διάθεση του. Ο επιτιθέμενος με την σειρά του, θα προβεί σε μία σειρά προσπαθειών με σκοπό την καταστροφή του αντικειμένου αυτού, καταστρέφοντας το κοντέινερ που το εμπεριέχει. Ποιο κοντέινερ λοιπόν θα επιλέξει ο αμυνόμενος για να κρύψει το αντικείμενο και ποια κοντέινερ θα προσπαθήσει να καταστρέψει ο επιτιθέμενος;

Ένα παράδειγμα του παραπάνω προβλήματος είναι η ακόλουθη τακτική κατάσταση: Μία βόμβα πρόκειται να μεταφερθεί σε από ένα εκ των δύο πανομοιότυπων βομβαρδιστικών, τα αποκαλούμενα P (protected) και F (Flank). Τα βομβαρδιστικά πετάνε σε σχηματισμό το ένα πίσω από το άλλο, έτσι ώστε ένα εχθρικό μαχητικό, το οποίο προσδοκά να επιτεθεί σε αυτό που ηγείται, να πρέπει να διέλθει μέσα από τα πυρά όσων ακολουθούν και να διατρέξει το ρίσκο, α, να καταρριφθεί πρώτού καταφέρει να κλειδώσει τον στόχο του. Άπαξ και κλειδώσει τον στόχο του, το μαχητικό, δύναται να τον καταστρέψει με πιθανότητα β. Εφόσον κάθε επιτιθέμενο μαχητικό έχει την ευκαιρία για ένα μόνο πέρασμα, η απόλυτη επιβίωση του δεν προκαλεί ανησυχία. Η μοίρα της βόμβας θεωρείται περισσότερο σημαντική, δυσανάλογα μάλιστα, σε σχέση με την μοίρα οποιουδήποτε αεροσκάφους. Οι στρατηγικές των δύο παικτών μπορούν να περιεγραφούν πολύ εύκολα. Ο αμυνόμενος, Κόκκινος, επιλέγει P ή F, δηλαδή ένα από τα δύο βομβαρδιστικά του, για να τοποθετήσει τη βόμβα. Ο Μπλε με την σειρά του επιλέγει ένα διατεταγμένο σύνολο n μελών, όπως

$$F, P, F, F, \ldots, P,$$

που αντιπροσωπεύει τις επιλογές στόχου σε κάθε πέρασμα του, υπό την προϋπόθεση ότι έχουν αποτύχει όλα τα προηγούμενα περάσματα του. Έχει συμφωνηθεί ότι αν μία επίθεση πετύχει, οι προσπάθειες που θα ακολουθήσουν πρόκειται να κατευθυνθούν ενάντια στο άλλο κοντέινερ είτε μέχρι να καταστραφεί και αυτό είτε μέχρις ότου, ο Μπλε, εξαντλήσει τον διαθέσιμο αριθμό προσπαθειών του.

Αν το αεροσκάφος F είναι άθικτο, τότε είναι δύσκολο να καταστραφεί το αεροσκάφος P. Πιο συγκεκριμένα η πιθανότητα να καταστραφεί το P είναι $(1\text{-}\alpha)\beta=\gamma$, δεδομένου ότι η πιθανότητα να καταστραφεί το P, όταν το αεροσκάφος F καταστραφεί, είναι ίση με β.

Αν θεωρήσουμε ότι η αμοιβή για τον επιτιθέμενο, είναι η προσδοκία του να καταστρέψει το σωστό κοντέινερ, τότε το παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος.

Ανάλογα τώρα με την διαθέσιμη δύναμη του επιτιθέμενου, παρατηρούνται οι ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 – Ένα Μαχητικό Α/Φ

Αν ο επιτιθέμενος έχει την δυνατότητα για μία μόνο επίθεση, τότε διαθέτει 2 στρατηγικές. Να επιτεθεί στο αεροσκάφος P ή να επιτεθεί στο αεροσκάφος F. Ο αμυνόμενος έχει και αυτός στην διάθεση του δύο στρατηγικές – να κρύψει την βόμβα στο αεροσκάφος P ή να κρύψει την βόμβα στο αεροσκάφος F. Η αμοιβή για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις δίνεται από έναν πίνακα 2Χ2, όπως παρακάτω:

Πίνακας 13
Πίνακας Αποδοχών για Κρυμμένο Στόχο

Αμυνόμενος / Επιτιθέμενος	**Απόκρυψη στο F**	**Απόκρυψη στο P**
Επίθεση στο P	γ	**0**
Επίθεση στο F	**0**	β

Επιλύοντας αυτό το παίγνιο, καταλήγουμε στο ότι η τιμή για τον επιτιθέμενο είναι

$$u = \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}.$$

Οι βέλτιστες στρατηγικές είναι πάντοτε μεικτές, και είναι οι ίδιες για τους δύο παίκτες:

$$\begin{cases} \text{Παίξε P με πιθανότητα } \dfrac{\beta}{\beta+\gamma} \\ \text{Παίξε F με πιθανότητα } \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}. \end{cases}$$

Περίπτωση 2 – Δύο Μαχητικά Α/Φ

Αν ο επιτιθέμενος έχει την δυνατότητα για δύο επιθέσεις, θα έχει 4 στρατηγικές στην διάθεση του, ενώ ο αμυνόμενος θα έχει πάλι 2 στρατηγικές. Ο πίνακας αποδοχών σ' αυτήν την περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

Πίνακας 14
Πίνακας Αποδοχών για Κρυμμένο Στόχο

Αμυνόμενος / Επιτιθέμενος	**Απόκρυψη στο F**	**Απόκρυψη στο P**
P, P	$2\gamma-\gamma^2$	$\beta\gamma$
P, F	γ	β
F, P	$\beta^2-\beta\gamma+\gamma$	β
F, F	β^2	$2\beta-\beta^2$

Για να επιλυθεί το παραπάνω 4Χ2 παίγνιο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι $0<\gamma<\beta<1$, $\gamma<\beta^2-\beta\gamma+\gamma$. Ως εκ τούτου, η δεύτερη γραμμή κυριαρχείται από την τρίτη και θα μπορούσε να διαγραφεί. Προχωρώντας σε μία περεταίρω διερεύνηση των ανισοτικών σχέσεων μεταξύ β και γ, καταλήγουμε στην εξάλειψη και της τέταρτης γραμμής του παραπάνω πίνακα αποδοχών, αφήνοντας προς επίλυση ένα 2Χ2 παίγνιο. Η λύση του παιγνίου θα έχει ως εξής:

α. Αν $\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2-\gamma\geq 0$, οι βέλτιστες στρατηγικές για τον επιτιθέμενο θα είναι:

$$\begin{cases} \text{Επίθεση στα Α/Φ P, P με πιθανότητα } \dfrac{\gamma(1-\beta)+\gamma(1-\gamma)}{\beta(1-\beta)+\gamma(1-\gamma)} \\ \text{Επίθεση στα Α/Φ F, P με πιθανότητα } \dfrac{\beta(1-\beta)-\gamma(1-\beta)}{\beta(1-\beta)+\gamma(1-\gamma)} \end{cases}$$

ενώ για τον αμυνόμενο, θα είναι:

$$\begin{cases} \text{Απόκρυψη στο Α/Φ P, με πιθανότητα } \dfrac{\beta(1-\gamma)}{\beta(1-\beta)+\gamma(1-\gamma)} \\ \text{Απόκρυψη στο Α/Φ F, με πιθανότητα } \dfrac{\beta(\gamma-\beta)+\gamma(1-\gamma)}{\beta(1-\beta)+\gamma(1-\gamma)} \end{cases}.$$

Η τιμή του παιγνίου για τον επιτιθέμενο θα είναι

$$u=\beta\gamma\frac{\beta\,(\gamma\text{-}\beta)+2(1\text{-}\gamma)}{\beta(1\text{-}\beta)+\gamma(1\text{-}\gamma)}.$$

β. Αν β^2-$\beta\gamma+\gamma^2$-$\gamma\leq 0$, οι βέλτιστες στρατηγικές για τον επιτιθέμενο θα είναι:

Επίθεση κατά των Α/Φ F, P και για τον αμυνόμενο, απόκρυψη στο Α/Φ P. Η τιμή του παιγνίου για τον επιτιθέμενο θα είναι

$$u=\beta^2\text{-}\beta\gamma+\gamma.$$

Περίπτωση 3 – n Μαχητικά Α/Φ

Σε αυτήν την περίπτωση, μία τυπική στρατηγική για τον επιτιθέμενο, είναι ένα διατεταγμένο σύνολο όπως το P, F, F, . . . , P, το οποίο αντιπροσωπεύει την επιλογή στόχου σε κάθε μία από τις n διελεύσεις του, με την προϋπόθεση βέβαια ότι οι προηγούμενες διελεύσεις έχουν αποτύχει. Κατ' αρχάς οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε στρατηγική στην οποία το F εμφανίζεται ακριβώς r φορές, όπου $0\leq r\leq n$, κυριαρχείται από την στρατηγική

$$F^r = F, F, \ldots, F, P, P, \ldots, P,$$

με συνολικά r στον αριθμό F, να ακολουθούνται από n-r στον αριθμό P. Αυτό σημαίνει ότι αν ο επιτιθέμενος σκοπεύει να προβεί σε r επιθέσεις κατά του Α/Φ F, είναι προτιμότερο να τις εκτελέσει στις r πρώτες διελεύσεις του. Αυτός είναι ο λόγος που εξαλείφεται η δεύτερη γραμμή στον 4Χ2 πίνακα, στην περίπτωση των δύο μαχητικών Α/Φ. Όπως μπορούμε να διακρίνουμε, το παραπάνω αντιστοιχεί στην στρατηγική P, F.

Έχουμε στην συνέχεια, για τον επιτιθέμενο, F^r στρατηγικές όπου r=0, 1, . . . , n και για τον αμυνόμενο, τις στρατηγικές P και F. Τα στοιχεία α (r, P) και α (r, F) του (n+1) X 2 πίνακα αποδοχών, μπορούν να βρεθούν υπολογίζοντας τους τρόπους με τους οποίους ο επιτιθέμενος, μπορεί να αποτύχει στο να καταστρέψει τον πολύτιμο στόχο. Ως εκ τούτου:

$$\alpha(r, P) = 1 - (1-\beta)^r(1-\gamma)^r - r\beta(1-\beta)^{n-1},$$
$$\alpha(r, F) = 1 - (1-\beta)^r(1-\gamma)^{n-r} - \gamma(\beta-\gamma)^{-1}(1-\beta)^r\{(1-\gamma)^{n-r} - (1-\beta)^{n-r}\}.$$

Το παίγνιο λύνεται κάνοντας το r συνεχή και αξιοποιώντας την κοιλότητα στο r (δηλαδή, τα δεύτερα παράγωγα είναι αρνητικά).

Αν θεωρήσουμε ότι το r_0 είναι η λύση του

$$\frac{da(r,P)}{dr} = 0,$$

και

$$R = \frac{1-\gamma}{1-\beta},$$

τότε

$$r_0 = n - \frac{\ln\frac{\beta}{(1-\beta)} - \ln\ln P}{\ln R}.$$

Η λύση εξαρτάται από την τιμή του r0. Αν $a(r_0,P) \le a(r_0,F)$, τότε ο επιτιθέμενος έχει μια καθαρή βέλτιστη στρατηγική r0 και ο αμυνόμενος έχει επίσης μια καθαρή βέλτιστη στρατηγική P. Αν $a(r_0,P) \ge a(r_0,F)$, τότε ο επιτιθέμενος έχει μια καθαρή βέλτιστη στρατηγική r, η οποία προκύπτει από την επίλυση της παρακάτω ισότητας

$$\frac{r\beta(\beta-\gamma)}{\gamma(1-\beta)} = \left(\frac{1-\gamma}{1-\beta}\right)^{n-r},$$

ή κατά προσέγγιση

$$r = \frac{n\gamma}{(\beta+\gamma)}.$$

Ο αμυνόμενος έχει μια βέλτιστη στρατηγική η οποία είναι μια μίξη των P και F.

Για το αρχικό διακριτό παίγνιο, ορίζεται ο ακέραιος $r_1 = [r_0]$ και επιλύεται ο 2X2 πίνακας αποδοχών

$$\begin{bmatrix} \alpha(r_1, P) & \alpha(r_1, F) \\ \alpha(r_1 + 1, P) & \alpha(r_1 + 1, F) \end{bmatrix}.$$

Αν $a(r_1,P) \le a(r_1,F)$, τότε έχουμε λύσεις σε καθαρές στρατηγικές. Αν όμως $a(r_1,P) \ge a(r_1,F)$, τότε θα έχουμε λύσεις σε μικτές στρατηγικές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
Επίλυση Μη Πεπερασμένων Παιγνίων

§1. Βέλτιστη Μικτή Στρατηγική

Για λόγους διευκόλυνσης, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση αποδοχών του παιγνίου είναι M(x,y), και ότι ο Μπλε επιλέγει την στρατηγική του x από το διάστημα [0,1] χρησιμοποιώντας την συνάρτηση F(x). Τότε για κάθε στρατηγική y επιλεχθείσα από τον Κόκκινο, η προσδοκία του Μπλε, εφόσον υφίσταται, δίδεται από την παρακάτω συνάρτηση:

$$E(F,y) = \int_0^1 M(x,y)dF(x).$$

Έπειτα υποθέτουμε ότι ο Κόκκινος επιλέγει y μέσω της συνάρτησης κατανομής G(y), άρα η προσδοκία του Μπλε, εφόσον υφίσταται, θα είναι:

$$E(F,G) = \int_0^1 \int_0^1 M(x,y)dF(x)\,dG(y).$$

Η E(F,G) είναι η προσδοκία του Μπλε, όταν ακολουθεί μια στρατηγική η οποία καθορίζεται από την συνάρτηση κατανομής F(x) και ο Κόκκινος επιλέγει μια στρατηγική η οποία καθορίζεται από την συνάρτηση κατανομής G(y).

Αν υποθέσουμε ότι υφίστανται οι ακόλουθες δύο εκφράσεις:

$$\max_F \min_G E(F,G) = u_1,$$

$$\max_G \min_F E(F,G) = u_2,$$

τότε υπάρχει μία συνάρτηση κατανομής F^* τέτοια ώστε ο Μπλε να μπορεί να λάβει τουλάχιστον u_1. Υφίσταται επίσης μία συνάρτηση κατανομής G^*, τέτοια ώστε ο Μπλε να λαμβάνει το πολύ u_2.

Γενικότερα, $u_1 \leq u_2$. Ωστόσο, αν $u_1 = u_2$, ή αν

(8.1) $$\max_F \min_G E(F, G) = \min_G \max_F E(F, G) = u,$$

τότε η u αποτελεί την τιμή του παιγνίου για τον Μπλε. Από εκεί και έπειτα, υπάρχει ένα F^* έτσι ώστε ο Μπλε να λαμβάνει τουλάχιστον u, ανεξάρτητα από την μικτή στρατηγική του Κόκκινου, δηλαδή,

$$\min_G E(F^*, G) = u.$$

Επομένως

(8.2) $$E(F^*, G) \geq u \qquad \text{για όλα τα } G.$$

Ομοίως, υπάρχει ένα G^* τέτοιο ώστε

(8.3) $$E(F, G^*) \leq u \qquad \text{για όλα τα } F.$$

Ως εκ τούτου οι F^*, G^* ονομάζονται βέλτιστες μικτές στρατηγικές για τον Μπλε και τον Κόκκινο, αντίστοιχα. Το ζεύγος F^*, G^*, καλείται επίσης " λύση του παιγνίου". Έχουμε επίσης

(8.4) $$E(F^*, G^*) = u.$$

§2. Ύπαρξη Βέλτιστων Στρατηγικών

Από το θεώρημα minimax στα πεπερασμένα παίγνια, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, προκύπτει ότι κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών έχει λύση. Ωστόσο, κάθε μη πεπερασμένο παίγνιο δεν έχει λύση. Υπάρχουν παραδείγματα μη πεπερασμένων παιγνίων τα οποία δεν έχουν λύση. Ωστόσο, αν η συνάρτηση αποδοχών M(x,y) είναι συνεχής σε κάθε μία από τις στρατηγικές μεταβλητές, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι το παίγνιο έχει πάντα λύση. Ως εκ τούτου, αν M(x,y) είναι συνεχή στο x και y, υπάρχει ένα ζεύγος συναρτήσεων κατανομής F^*, G^*, μία για κάθε παίκτη, έτσι ώστε

$$(8.5) \qquad \max_F \int_0^1 \int_0^1 M(x,y)\, dF(x) dG^*(y) = \min_G \int \int M(x,y)\, dF^*(x) dG\,(y).$$

Μπορούμε επίσης να αναφέρουμε ότι F^*, G^* είναι μία λύση και u είναι η τιμή του παιγνίου, αν και μόνο αν

$$\max_x \int_0^1 M(x,y) dG^*\,(y) = \min_y \int_0^1 M(x,y) dF^*(x) = u.$$

Για να αποδείξουμε την (8.5), θα δείξουμε πρώτα ότι αν P(x) είναι συνεχή, τότε

$$\max_F \int_0^1 P(x) dF(x) = \max_x P(x)$$

Εφόσον η P(x) είναι συνεχής στο διάστημα [0,1], έχει ένα μέγιστο. Θεωρούμε ότι το μέγιστο συμβαίνει στο α, ή

$$\max_x P(x) = P(a).$$

Ως εκ τούτου

$$P(a) \geq P(x) \qquad \text{για όλα τα x στο διάστημα [0,1].}$$

Για κάθε συνάρτηση κατανομής F, προκύπτει ότι

$$\int_0^1 P(\alpha) dF(x) \geq \int_0^1 P(x) dF(x).$$

Ως εκ τούτου, για κάθε F ισχύει ότι,

$$P(\alpha) \geq \int_0^1 P(x)dF(x).$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το ελάχιστο άνω όριο των αριθμών

$$\int P(x)dF(x).$$

Με άλλα λόγια αναζητούμε το

$$\sup_F \int P(x)dF(x).$$

Ισχύει ότι

$$\sup_F \int P(x)dF(x) \geq \int_0^1 P(x)dI_\alpha(x) = P_{(a)}\,.$$

Αλλά για κάθε F ισχύει ότι

$$P(\alpha) \geq \int_0^1 P(x)dF(x),$$

και ειδικότερα,

$$P(\alpha) \geq \sup_F \int_0^1 P(x)dF(x).$$

Ως εκ τούτου,

$$\sup_F \int_0^1 P(x)dF(x) = P(\alpha) = \int_0^1 P(x)dI_\alpha(x).$$

Έτσι λοιπόν, το ελάχιστο άνω όριο, σε σχέση με το F, των αριθμών $\int P(x)dF(x)$ είναι στην πραγματικότητα στο $F=I_a$. Επομένως

$$\max_{F} \int_{0}^{1} P(x)dF(x) = P(a) = \max_{x} P(x).$$

Κατά παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\min_{G} \int_{0}^{1} P(y)dG(y) = \min_{y} P(y).$$

Τώρα η (8.5) προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\begin{aligned}\max_{F} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} M(x,y)dF(x)dG^{*}(y) &= \int_{0}^{1} \left[\max_{F} \int_{0}^{1} M(x,y)dF(x)\right] dG^{*}(y)\,. \\ &= \int_{0}^{1} \max_{x} M(x,y)dG^{*}(y) \\ &= \max_{x} \int_{0}^{1} M(x,y)dG^{*}(y)\end{aligned}$$

και

$$\min_{G} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} M(x,y)dG(y)dF^{*}(x) = \min_{y} \int_{0}^{1} M(x,y)dF^{*}(x).$$

§3. Ιδιότητες των Βέλτιστων Στρατηγικών

Θεωρούμε ότι $H^{*}(x)$ είναι η προσδοκώμενη αμοιβή του Μπλε όταν ο ίδιος χρησιμοποιεί μια καθαρή στρατηγική x και ο Κόκκινος χρησιμοποιεί μια βέλτιστη στρατηγική $G^{*}(y)$, δηλαδή,

$$H^{*}(x) = \int_{0}^{1} M(x,y)dG^{*}(y).$$

Παρομοίως, αν θεωρήσουμε ότι $K^{*}(y)$ είναι η προσδοκώμενη αμοιβή του Μπλε όταν ο ίδιος χρησιμοποιεί μια βέλτιστη στρατηγική F^{*} και ο Κόκκινος χρησιμοποιεί μια καθαρή στρατηγική y, τότε

$$K^*(y) = \int_0^1 M(x,y)dF^*(x).$$

Αφού ορίσαμε λοιπόν την προσδοκώμενη αμοιβή του Μπλε για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις, οι ιδιότητες που ακολουθούν, μπορούν εύκολα να αποδειχτούν:

α. $H^*(x) \leq u \leq K^*(y)$ για όλα τα x και y στο διάστημα [0,1]. Κάθε καθαρή στρατηγική όταν χρησιμοποιείται ενάντια σε μία βέλτιστη μικτή στρατηγική του αντιπάλου, δεν δύναται να αποδώσει μια υψηλότερη προσδοκώμενη αμοιβή απ' ότι θα έδινε η βέλτιστη στρατηγική του.

β. $\max_x H^*(x) = \min_y K^*(y) = u$. Κάθε παίκτης έχει τουλάχιστον μία καθαρή στρατηγική, η οποία, αν χρησιμοποιηθεί ενάντια σε μία βέλτιστη στρατηγική του αντιπάλου, αποδίδει την τιμή του παιγνίου.

γ. Αν $H^*(x_0) < u$ τότε $pr\{\xi = x_0\} = 0$. Μία βέλτιστη μικτή στρατηγική του παίκτη, δεν περιλαμβάνει στρατηγική που να αποδίδει λιγότερο από την τιμή του παιγνίου όταν αυτή η στρατηγική χρησιμοποιείται ενάντια στην βέλτιστη στρατηγική του αντιπάλου. Αν $K^*(y_0) > u$ τότε $pr\{\xi = y_0\} = 0$.

δ. Αν $pr\{\xi = x_0\} > 0$ τότε $H^*(x_0) = u$. Κάθε καθαρή στρατηγική στην μικτή στρατηγική, πρέπει να αποδίδει την τιμή του παιγνίου όταν χρησιμοποιείται ενάντια στην βέλτιστη μικτή στρατηγική του αντιπάλου.

§4. Καθυστερημένη Πυροδότηση

Ένα παράδειγμα παιγνίου με μη συνεχή αμοιβή, το οποίο έχει λύση, είναι το λειτουργικό πρόβλημα του προγραμματισμού της εκτόξευση ενός πυραύλου, όπου απαιτείται και κάποιος χρόνος έκθεσης. Υποθέτουμε ότι ο Μπλε σχεδιάζει να πυροδοτήσει ένα πύραυλο πρωτού παρέλθει ένα χρονικό διάστημα T ωρών. Ωστόσο, προκειμένου να πυροδοτήσει τον πύραυλο, ο Μπλε θα πρέπει να τον εκθέσει για χρονικό διάστημα e ωρών, όπου $e<T$, για το οποίο διάστημα, ο πύραυλος θα είναι ευάλωτος σε μία επίθεση του Κόκκινου. Θεωρούμε ότι ο Κόκκινος δεν γνωρίζει την απόφαση του Μπλε και ότι έχει μόνο μία ευκαιρία να επιτεθεί. Πότε λοιπόν είναι η βέλτιστη χρονική στιγμή για να εκθέσει τον πύραυλο ο Μπλε; Πότε είναι η βέλτιστη χρονική στιγμή για να πραγματοποιήσει την επίθεση του ο Κόκκινος;

Μια στρατηγική για τον Μπλε είναι η επιλογή της χρονικής στιγμής X γι' αυτόν, που θα αρχίσει να εκθέτει τον πύραυλο για χρονικό διάστημα e, όπου 0≤X≤T-e. Εφόσον ο Κόκκινος δεν γνωρίζει την επιλογή του Μπλε, μία στρατηγική του είναι η επιλογή του χρόνου Y που θα εξαπολύσει την επίθεση του κατά του Μπλε, όπου 0≤Y≤T. Ο Μπλε θα πυροδοτήσει τον πύραυλο του σε χρόνο X+e, αν δεν έχει δεχτεί επίθεση από τον Κόκκινο κατά το διάστημα που εκθέτει τον πύραυλο.

Θεωρούμε ότι η αμοιβή του Μπλε είναι:

α. 1 – αν καταφέρει να πυροδοτήσει τον πύραυλο (δηλαδή, ο πύραυλος δεν δέχεται επίθεση από τον Κόκκινο, κατά το χρονικό διάστημα της έκθεσης του)

β. 0 – στην αντίθετη περίπτωση.

Τότε, σε όρους των στρατηγικών των παικτών, η αμοιβή περιγράφεται από την παρακάτω ασυνεχή συνάρτηση αποδοχών:

$$M(X,Y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } Y\le X\le T-e \text{ ή } X+e\le Y\le T \\ 0 & \text{σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Αν υποθέσουμε ότι $t=\frac{e}{T}$, $x=\frac{X}{T}$ και $y=\frac{Y}{T}$, τότε οι στρατηγικές του Μπλε θα έχουν ένα εύρος που αντιστοιχεί στο διάστημα [0, 1-t] και του Κόκκινου στο διάστημα [0, 1]. Η συνάρτηση αποδοχών διαμορφώνεται ως εξής:

$$M(X,Y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \quad y\le x\le 1-t \text{ ή } x+t\le y\le 1 \\ 0 & \text{σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.} \end{cases} \tag{8.6}$$

Αν υποθέσουμε ότι t≤1/2, τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$0 = \sup_x \ \inf_y M(x,y) < \inf_y \ \sup_x M(x,y) = 1.$$

Ως εκ τούτου, αν υπάρχει λύση, αυτή πρέπει να είναι σε όρους μικτών στρατηγικών. Θεωρούμε ότι F(x) και G(y) είναι οι μικτές στρατηγικές των Μπλε και Κόκκινου, αντίστοιχα. Η αναμενόμενη αμοιβή για τον Μπλε είναι

$$E(F,G) = \int_0^{1-t}\int_0^1 M(x,y)dG(y)dF(x)$$

$$= \int_0^{1-t}\int_0^{x} dG(y)dF(x) + \int_0^{1-t}\int_{x+t}^{1} dG(y)dF(x) \tag{8.7}$$

$$= \int_0^{1-t} [G(x) + 1 - G(x+t)]dF(x).$$

Χρησιμοποιώντας την (8.7), έχουμε

$$\begin{aligned}\inf_G \sup_F E(F,G) &= \inf_G \sup_{0\le x\le 1-t} [G(x) + 1 - G(x+t)] \\ &= 1 - \sup_G \inf_{0\le x\le 1-t} [G(x+t) - G(x)].\end{aligned}$$

Τώρα θεωρούμε ότι

$$\alpha(G) = \inf_{0\le x\le 1-t} [G(x+t) - G(x)].$$

Επομένως, για όλα τα x, έχουμε

$$a(G) \le G(x+t) - G(x)$$

ή

$$G(x+t) \ge G(x) + a(G) \text{ για όλα τα } 0 \le x \le 1-t.$$

Θέτοντας x=0, t, 2t, . . . , (n-1)t, παίρνουμε

$$\begin{gathered} G(t) \ge a(G) \\ G(2t) \ge G(t) + a(G) \ge 2a(G) \\ G(3t) \ge 3a(G) \\ . \\ . \\ G(nt) \ge na(G), \end{gathered}$$

όπου $nt \le 1 < (n+1)t$, δηλαδή, $n = \left[\frac{1}{t}\right]$ ή ο μεγαλύτερος ακέραιος που περιέχεται στο $1/t$.

Επομένως, έχουμε

$$na(G) \le G(nt) \le G(1) = 1$$

και

$$a(G) \leq \frac{1}{n}, \qquad \text{για όλα τα } G.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\sup_{G} \inf_{0 \leq x \leq 1-t} [G(x+t) - G(x)] \leq \frac{1}{n}. \tag{8.8}$$

Στο σημείο αυτό θα δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα στην (8.8). Για να το επιτύχουμε αυτό, παραθέτουμε μια συνάρτηση G η οποία αποδίδει το ελάχιστο άνω όριο (sup). Υποθέτουμε ότι $1/t$ είναι ένας ακέραιος, ή nt=1. Αν πάρουμε G(y)=y, έχουμε

$$\inf_{0 \leq x \leq 1-t} [G(x+t) - G(x)] = t = \frac{1}{n}.$$

Επομένως

$$\sup_{G} \inf_{x} [G(x+t) - G(x)] = \frac{1}{n}.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι ο $1/t$ δεν είναι ακέραιος. Έστω ότι $[1/t]=n$. Θεωρούμε την συνάρτηση κατανομής

$$G(y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I_{j/n+1}(y).$$

Τότε

$$G(x+t) - G(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} [I_{j/n+1}(x+t) - I_{j/n+1}(x)].$$

Για αυτήν την συνάρτηση G(y) έχουμε

$$\inf_{0 \leq x \leq 1-t} [G(x+t) - G(x)] = \frac{1}{n}.$$

Ως εκ τούτου, έχουμε

$$\sup_G \inf_{0\leq x\leq 1-t} [G(x+t) - G(x)] = \frac{1}{n} = \frac{1}{[1/t]}.$$

Επομένως

$$\inf_G \sup_F E(F,G) = 1 - \frac{1}{[1/t]} .$$

Με παρόμοιο επιχείρημα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\sup_F \inf_G E(F,G) = 1 - \frac{1}{[1/t]} .$$

Επομένως το παίγνιο έχει τιμή η οποία δίνεται από την συνάρτηση

$$u = 1 - \frac{1}{[1/t]} .$$

Μια βέλτιστη στρατηγική για τον Μπλε είναι

$$F^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} I_{jt}(x).$$

Για να βεβαιωθούμε ότι το F^* είναι βέλτιστο, θα θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις. Πρώτον ότι $t=1/n$ και δεύτερον ότι $1/t$ είναι ένας ακέραιος. Τότε λοιπόν

$$\begin{aligned} E(F^*,G) &= \int_0^{1-t} [G(x) + 1 - G(x+t)] dF^*(x) \\ &= 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}[G(jt+t) - G(jt)] \\ &= 1 - \frac{1}{n}[G(nt) - G(0)] \geq 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{[1/t]}. \end{aligned}$$

Σε όρους των αρχικών παραμέτρων, η λύση του παιγνίου έχει ως εξής:

α. Η τιμή του παιγνίου είναι ίση με $1-\frac{1}{[T/e]}$.

β. Η βέλτιστη στρατηγική του Μπλε δίνεται από την συνάρτηση

$$F^*(X) = \frac{1}{[T/e]} \sum_{j=0}^{[T/e]-1} I_{je/T}(X).$$

γ. Η βέλτιστη στρατηγική του Κόκκινου δίνεται από την συνάρτηση $G^*(Y) = Y$, αν T/e είναι ακέραιος αριθμός και

$$G^*(Y) = \frac{1}{[T/e]} \sum_{j=1}^{T/e} I_{j/([T/e]+1)}(Y), \text{ αν } T/e \text{ δεν είναι ακέραιος.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
Παίγνια με Κυρτές Συναρτήσεις Αποδοχών

§1. Κυρτές Συναρτήσεις Αποδοχών

Για πολλά στρατιωτικά και οικονομικά παίγνια η συνεχή συνάρτηση αποδοχών είναι επίσης κυρτή σε μία μεταβλητή. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα διαφόρων τύπων παιγνίων άμυνας-επίθεσης περιγράφεται με μία κυρτή συνάρτηση αποδοχών. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι δυνατό να περιγράψουμε τη μορφή των βέλτιστων στρατηγικών.

Μια συνάρτηση f καλείται "κυρτή" στο διάστημα [0,1] αν, για κάθε λ για το οποίο $0 \leq \lambda \leq 1$, και για κάθε ζεύγος των στρατηγικών y_1, y_2, έχουμε

$$f[\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2] \leq \lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2).$$

Αν η ισότητα δεν ισχύει ποτέ για $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, η συνάρτηση f καλείται "αυστηρώς κυρτή". Από γεωμετρικής απόψεως, αν μια συνάρτηση είναι κυρτή τότε μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων του γραφήματος, το γράφημα ποτέ δεν βρίσκετε πάνω από το τμήμα που ενώνει τα δύο αυτά σημεία. Η συνάρτηση είναι αυστηρά κυρτή αν το γράφημα της συνάρτησης βρίσκεται πάντοτε κάτω από το υπόψη ευθύγραμμο τμήμα. Αν μία κυρτή συνάρτηση δεν είναι αυστηρά κυρτή, το γράφημα της αποτελείται εν μέρει, από ευθύγραμμα τμήματα.

Υποθέτουμε ότι η f είναι μια συνάρτηση n μεταβλητών. Τότε η f είναι κυρτή αν για κάθε ζεύγος διακριτών σημείων $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ και $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ στο διάστημα, έχουμε

$$f[\lambda y_1 + (1-\lambda)\bar{y}_1, \ldots, \lambda y_n + (1-\lambda)\bar{y}_n] \leq \lambda f(y_1, \ldots, y_n) + (1-\lambda) f(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n).$$

Αποκαλούμε την συνάρτηση f αυστηρά κυρτή, αν δεν ισχύει ποτέ η ισότητα για $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$.

Υποθέτουμε ότι η f είναι διπλά διαφορίσιμη. Τότε η f είναι επίσης κυρτή στο y αν ισχύει

$$\frac{d^2 f}{dy^2} \geq 0 \qquad \text{για όλα τα y.}$$

Η συνάρτηση f είναι αυστηρά κυρτή αν

$$\frac{d^2 f}{dy^2} > 0 \qquad \text{για όλα τα y.}$$

Ας υποθέσουμε ότι M(x,y) είναι αυστηρά κυρτή στο y για κάθε x και ότι M(x,y) είναι διπλά διαφορίσιμη (αναφορικά με την y). Τότε για κάθε συνάρτηση κατανομής F(x), προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$K(y) = \int_0^1 M(x,y)\, dF(x)$$

είναι επίσης αυστηρά κυρτή. Γι' αυτό, αν $\frac{d^2 M}{dy^2} > 0$ για όλα τα y, τότε

$$\frac{d^2 K(y)}{dy^2} = \int \frac{d^2 M(x,y)}{dy^2} dF(x) > 0.$$

§2. Βέλτιστη Καθαρή Στρατηγική για τον Κόκκινο

Ας υποθέσουμε ότι M(x,y) είναι αυστηρά κυρτό στο y για κάθε x και είναι συνεχής και στις δύο μεταβλητές. Υποθέτουμε ακόμα ότι το παίγνιο έχει λύση, η οποία θα επαληθευτεί. Έστω ότι η $F^*(x)$ είναι μια βέλτιστη στρατηγική για τον Μπλε. Τότε ο Μπλε ενδέχεται να ανακοινώσει την επιλογή του $F^*(x)$ στον Κόκκινο, ο οποίος θα επιλέξει G^*, τέτοιο ώστε

$$\iint M(x,y)dF^*(x)dG^*(y) = \min_G \iint M(x,y)dF^*(x)d\,G(y)$$

$$= \min_y \int M(x,y)dF^*(x)$$

$$= \min_y K^*(y)$$

Τώρα το $K^*(y)$ είναι αυστηρά κυρτό στο y. Ως εκ τούτου για το $K^*(y)$ υποθέτουμε ότι είναι ελάχιστο σε ένα σημείο. Επομένως μια βέλτιστη στρατηγική για τον Κόκκινο είναι μια καθαρή στρατηγική, η y, η οποία ελαχιστοποιεί το $K^*(y)$.

§3. Η Τιμή του Παιγνίου είναι η $\min_y \max_x M(x,y)$

Συνεχίζοντας με την υπόθεση ότι το M(x,y) είναι συνεχές και αυστηρά κυρτό στο y, μπορούμε να καταλήξουμε στην τιμή του παιγνίου. Για κάθε παίγνιο, η τιμή του δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$u = \min_G \max_x \int M(x,y)dG(y).$$

Έχουμε δείξει ότι η βέλτιστη στρατηγική του Κόκκινου είναι καθαρή στρατηγική. Ως εκ τούτου χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας μόνο αυτά τα G τα οποία αποτελούν συναρτήσεις κατανομής ενός σταδίου.

Επομένως

$$u = \min_y \max_x \int_0^1 M(x,y)dI_y(y) = \min_y \max_x M(x,y).$$

§4. Η Βέλτιστη Καθαρή Στρατηγική του Κόκκινου

Μία βέλτιστη στρατηγική y^* για τον Κόκκινο πρέπει να είναι τέτοια ώστε

$$u = \min_y \max_x M(x,y) = \max_x M(x,y^*).$$

Ως εκ τούτου η y^* έχει την ιδιότητα ότι ελαχιστοποιεί το $\max_x M(x,y)$. Από την αυστηρή κυρτότητα του M(x,y) προκύπτει ότι το y^* είναι μοναδικό.

§5. Οι Βέλτιστες Στρατηγικές του Μπλε

Η βέλτιστη στρατηγική του Μπλε ενδέχεται να είναι καθαρή ή μικτή, ανάλογα με την θέση της βέλτιστης στρατηγικής του Κόκκινου. Αν η βέλτιστη στρατηγική του Κόκκινου είναι ίση με μία από τις ακραίες τιμές του διαστήματος [0,1], δηλαδή, αν $y^*=0$ ή $y^*=1$, τότε ο Μπλε έχει μια καθαρή στρατηγική. Αν η βέλτιστη στρατηγική του Κόκκινου $\mathbf{y}^*$ είναι τέτοια ώστε $0<y^*<1$, τότε μια βέλτιστη στρατηγική για τον Μπλε είναι η τυχαία επιλογή μεταξύ δύο τιμών του x.

Έστω ότι η βέλτιστη στρατηγική του Κόκκινου είναι μια από τις ακραίες τιμές του διαστήματος [0,1], όπως για παράδειγμα η $y^*=0$. Τότε

$$\max_{x} M(x,0) = u.$$

Ως εκ τούτου

$$M(x,0) \leq u \qquad \text{για όλα τα x.}$$

Έστω ότι το X_0 είναι το σύνολο των σημείων x_0 τέτοιο ώστε

$$M(x_0,0) = u \qquad \text{για όλα τα } x_0 \text{ στο } X_0.$$

Τότε το υπόλοιπο του συνόλου των σημείων X_1 του διαστήματος [0,1] έχει την ιδιότητα ότι

$$M(x_1,0) < u \qquad \text{για όλα τα } x_1 \text{ στο } X_1.$$

Τώρα μια βέλτιστη στρατηγική για τον Μπλε αποτελείται από τον συνδυασμό ορισμένων στρατηγικών x_0 που ικανοποιούν την συνθήκη $M(x_0,0)=u$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια βέλτιστη καθαρή στρατηγική για τον Μπλε, δηλαδή, ότι υπάρχουν μερικά x_0 τέτοια ώστε $M(x_0,y)\geq u$ για όλα τα y. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι υπάρχουν ορισμένα $x_0 \varepsilon X_0$ τέτοια ώστε

$$u = \min_{y} M(x_0,y) = M(x_0,0)$$

ή ότι $M(x_0,y)$ είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση στο y=0.

Υποθέτουμε ότι για κάθε $x_0 \varepsilon X_0$, η συνάρτηση $M(x_0,y)$ είναι φθίνουσα στο y=0, ή

$$\frac{\partial M(x_0,0)}{\partial y} = M'(x_0,0) < 0.$$

Τότε για επαρκώς μικρό $\epsilon > 0$, και κάθε x_0 στο X_0,

$$M(x_0,y) < u \qquad \text{για } 0<y<\epsilon .$$

Εφόσον $M(x_1,y)$ είναι συνεχής στο y, προκύπτει ότι για επαρκώς μικρά $\epsilon > 0$, και κάθε x_1 στο X_1,

$$M(x_1,y) < u \qquad \text{για } 0<y<\epsilon .$$

Επομένως, για κάθε x στο [0,1],

$$M(x,y_1) < u \qquad \text{για } 0<y_1<\epsilon .$$

Ως εκ τούτου

$$\max_x M(x,y_1) < u \qquad \text{για } 0<y_1<\epsilon .$$

Το παραπάνω αποδίδει την εξής αντίφαση:

$$u = \min_y \ \max_x M(x,y) \le \max_x M(x,y_1) < u.$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι υπάρχουν ορισμένα $x_0 \epsilon X_0$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $M(x_0,y)$ να μην είναι φθίνουσα στο y=0, ή

$$M'(x_0,0) \ge 0.$$

Εφόσον $M(x_0,0)=u$ και $M(x_0,y)$ είναι κυρτό στο y, προκύπτει ότι

$$u = \min_y M(x_0,y) \text{ ή } M(x_0,y) \ge u \qquad \text{για όλα τα y.}$$

Έχουμε δείξει ότι, αν $y^*=0$, τότε ο Μπλε έχει βέλτιστη καθαρή στρατηγική x^*, η οποία ικανοποιεί δύο συνθήκες:

$$M(x^*,0) = u, \;\; M'(x^*,0) \geq 0.$$

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι αν $y^*=1$, τότε ο Μπλε έχει βέλτιστη καθαρή στρατηγική x^*, η οποία ικανοποιεί τις εξής δύο συνθήκες:

$$M(x^*,1) = u, \;\; M'(x^*,1) \leq 0.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $0<y^*<1$. Τότε

$$M(x,y^*) \leq u \qquad \text{για όλα τα } x.$$

Έστω ότι X_0 είναι το σύνολο για το οποίο

$$M(x_0,y^*) = u \qquad \text{για όλα τα } x_0 \varepsilon\ X_0,$$

και έστω ότι X_1 είναι το σύνολο για το οποίο

$$M(x_1,y^*) < u \qquad \text{για όλα τα } x_1 \varepsilon\ X_1.$$

Αν υποθέσουμε ότι κάθε x_0 στο X_0 ήταν τέτοιο ώστε

$$M'(x_0,y^*) < 0$$

τότε θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε στην ίδια αντίφαση όπως και στην περίπτωση του $y^*=0$.

Ως εκ τούτου, υπάρχουν ορισμένα $x_0{}^*$ τέτοια ώστε

$$M(x_0{}^*,y^*) = u, \;\; M'(x_0{}^*,y^*) \geq 0.$$

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχουν ορισμένα $x_{00}{}^*$ τέτοια ώστε

$$M(x_{00}{}^*,y^*) = u, \;\; M'(x_{00}{}^*,y^*) \leq 0.$$

Τώρα εξετάζουμε την συνάρτηση

$$f(t) = tM'(x_0{}^*,y^*) + (1-t)M'(x_{00}{}^*,y^*).$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$f(0) = M'(x_{00}{}^*, y^*) \leq 0,$$
$$f(1) = M'(x_0{}^*, y^*) \leq 0.$$

Εφόσον η συνάρτηση f είναι μια συνεχή συνάρτηση του t, υπάρχει ένα a, όπου $0 \leq \alpha \leq 1$, τέτοιο ώστε

$$\alpha M'(x_0{}^*, y^*) + (1-\alpha) M'(x_{00}{}^*, y^*) = 0.$$

Έχοντας καθορίσει τα $x_0{}^*, x_{00}{}^*$ και το α θα δείξουμε τώρα ότι μια βέλτιστη στρατηγική για τον Μπλε είναι η

$$F^*(x) = \alpha I_{x_0{}^*}(x) + (1-\alpha) I_{x_{00}{}^*}(x).$$

Έχουμε ότι

$$K^*(y) = \int M(x,y) dF^*(x) = \alpha M(x_0{}^*, y) + (1-\alpha) M(x_{00}{}^*, y).$$

Εφόσον M(x,y) είναι κυρτό στο y, προκύπτει ότι $K^*(y)$ είναι κυρτό στο y. Ακόμα

$$\frac{dK^*(y)}{dy} = \alpha M'(x_0{}^*, y) + (1-\alpha) M'(x_{00}{}^*, y),$$

το οποίο εξαφανίζεται στο $y=y^*$. Ως εκ τούτου η $K^*(y)$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο y^*, ή

$$\min_y K^*(y) = \alpha M(x_0{}^*, y^*) + (1-\alpha) M(x_{00}{}^*, y^*) = u.$$

Επομένως $F^*(x)$ είναι μια βέλτιστη στρατηγική για τον Μπλε.

Έχουμε δείξει ότι αν $0<y^*<1$, τότε μια βέλτιστη στρατηγική για τον Μπλε είναι η κλιμακωτή συνάρτηση

$$F^*(x) = \alpha I_{x_1}(x) + (1-\alpha) I_{x_2}(x)$$

όπου

$$\mathrm{M}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}^*) = \mathrm{M}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}^*) = \mathrm{u},$$
$$\mathrm{M}'(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}^*) \geq 0 \geq \mathrm{M}'(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}^*),$$
$$\alpha \mathrm{M}'(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}^*) + (1-\alpha)\mathrm{M}'(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}^*) = 0.$$

§6. Κοίλη Συνάρτηση Αποδοχών

Το ακόλουθο διπλό αποτέλεσμα για την κοίλη συνάρτηση αποδοχών, δύναται να αποδειχτεί με τον ίδιο τρόπο που αποδείχθηκε για τις κυρτές συναρτήσεις.

Υποθέτουμε ότι M(x,y) είναι συνεχές και στις δύο μεταβλητές και ότι αποτελεί μία αυστηρά κοίλη συνάρτηση του x για κάθε y. Έστω ότι υπάρχει $\partial M(x,y)/\partial x$ για κάθε x και y στο μοναδιαίο διάστημα. Η λύση του παιγνίου είναι όπως παρακάτω:

$$\mathrm{u} = \max_{\mathrm{x}} \min_{\mathrm{y}} \mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y}).$$

Ο Μπλε έχει μοναδική βέλτιστη καθαρή στρατηγική x^*.

α. Αν $x^*=0$, τότε ο Κόκκινος έχει μία βέλτιστη καθαρή στρατηγική y^* τέτοια ώστε $M(0,y^*)=u$ και $\partial M(0,y^*)/\partial x \leq 0$.

β. Αν $x^*=1$, τότε ο Κόκκινος έχει μία βέλτιστη καθαρή στρατηγική y^* τέτοια ώστε $M(1,y^*)=u$ και $\partial M(1,y^*)/\partial x \geq 0$.

γ. Αν $0<x^*<1$, τότε ο Κόκκινος έχει μία βέλτιστη μεικτή στρατηγική η οποία είναι της μορφής

$$G^*(\mathrm{y}) = \alpha \mathrm{I}_{\mathrm{y}_1}(\mathrm{y}) + (1-\alpha)\mathrm{I}_{\mathrm{y}_2}(\mathrm{y})$$

όπου οι παράμετροι a, y_1, y_2 ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\mathrm{M}(x^*, y_1) = \mathrm{M}(x^*, y_2) = u,$$
$$\frac{\partial \mathrm{M}(x^*, y_1)}{\partial \mathrm{x}} \leq 0 \leq \frac{\partial \mathrm{M}(x^*, y_2)}{\partial \mathrm{x}},$$
$$a\frac{\partial \mathrm{M}(x^*, y_1)}{\partial \mathrm{x}} + (1-a)\frac{\partial \mathrm{M}(x^*, y_2)}{\partial \mathrm{x}} = 0.$$

§7. Γενικά Κυρτή Συνάρτηση Αποδοχών

Στις προηγούμενες παραγράφους υποθέσαμε ότι η συνάρτηση αποδοχών ήταν αυστηρά κυρτή ή αυστηρά κοίλη. Τα περισσότερα εκ των αποτελεσμάτων συνεχίζουν να ισχύουν και στην περίπτωση που η υπόθεση περί αυστηρότητας πάψει να ισχύει. Ωστόσο, δεν είναι πλέον αληθές ότι οι βέλτιστες στρατηγικές είναι μοναδικές.

Παρόλο που έχουμε υποθέσει ότι ο στρατηγικός χώρος κάθε παίκτη είναι μονοδιάστατος, παρόμοια επιχειρήματα θα αποδείξουν ανάλογα αποτελέσματα για ν-διάστατο στρατηγικό χώρο.

7.1. Παράδειγμα

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση αποδοχών είναι

$$M(x,y) = (x-y)^2.$$

Εφόσον

$$\frac{\partial^2 M(x\,,y\,)}{\partial^2 y^2} = 2,$$

προκύπτει ότι M(x ,y) είναι κυρτή στο y για κάθε x. Ως εκ τούτου η τιμή του παιγνίου είναι

$$u = \min_y \max_x (x-y)^2 = \min_y \max[y^2,(1-y)^2] = \frac{1}{4}.$$

Η βέλτιστη στρατηγική του Κόκκινου ορίζεται από την καθαρή στρατηγική η οποία ελαχιστοποιεί το $\max\left[y^2, (1\text{-}y)^2\right]$. Επομένως $y^*=\frac{1}{2}$. Η βέλτιστη στρατηγική του Μπλε είναι ένας συνδυασμός καθαρών στρατηγικών x_i, τέτοιων ώστε $M\left(x_i,\frac{1}{2}\right)$=u, ή $(x\text{-}\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$. Αυτό αποδίδει x=0 και 1. Για να αποκτήσουμε τα βάρη a και 1-a, επιλύουμε την ισότητα

$$\alpha M'\left(0,\frac{1}{2}\right) + (1-\alpha)M'\left(1,\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε $\alpha=\frac{1}{2}$. Επομένως η βέλτιστη στρατηγική του Μπλε είναι $F^*(x)=\frac{1}{2}I_0(x)+\frac{1}{2}I_1(x)$.

§8. Υπεράσπιση δύο Στόχων από Επίθεση

Υποθέτουμε ότι ο Κόκκινος, αμυνόμενος, έχει δύο στόχους T_1 και T_2 αξίας k_1 και k_2, αντίστοιχα, τους οποίους πρόκειται να υπερασπιστεί από μία επίθεση που θα εξαπολύσει ο Μπλε. Θα υποθέσουμε στο σημείο αυτό ότι ο Κόκκινος και ο Μπλε έχουν ίση δυναμικότητα, δηλαδή, έχουν τον ίδιο αριθμό δυνάμεων, S.

Για τον Μπλε, στρατηγική, αποτελεί η τοποθέτηση x μονάδων από τις διαθέσιμες επιτιθέμενες δυνάμεις στον στόχο T_1, όπου $0\leq x\leq S$, και οι υπολειπόμενες, $S-x$, στον στόχο T_2. Για τον Κόκκινο, στρατηγική, αποτελεί η τοποθέτηση y μονάδων από τις διαθέσιμες αμυνόμενες δυνάμεις στον στόχο T_1, όπου $0\leq y\leq S$, και οι υπολειπόμενες, $S-y$, στον στόχο T_2.

Πίνακας 15

	Στόχος T_1	Στόχος T_2
Αξία	k_1	k_2
Τοποθέτηση επιτιθέμενου	x	$S-x$
Τοποθέτηση αμυνόμενου	y	$S-y$

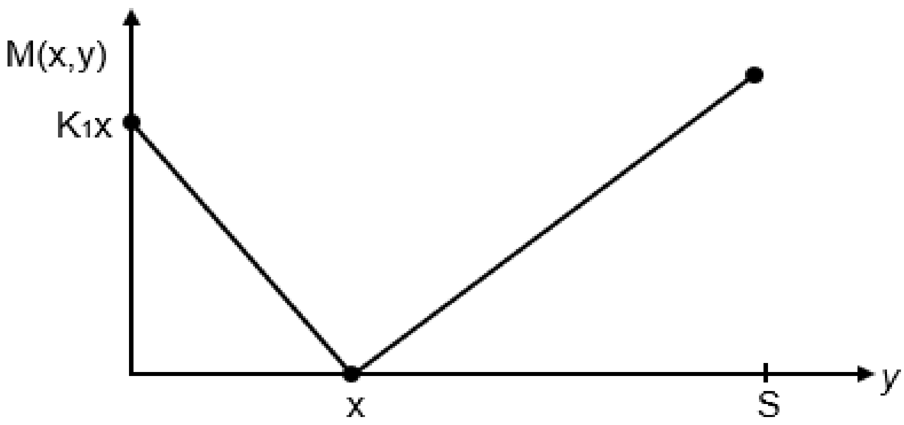
Θεωρούμε ότι η αμοιβή του Μπλε είναι ανάλογη του αριθμού των επιτιθέμενων δυνάμεων που φτάνουν στον στόχο και της αξίας του στόχου. Ως εκ τούτου, αν $x\geq y$, τότε $S-x\leq S-y$, στην οποία περίπτωση υποθέτουμε ότι $x-y$ μονάδες επιβιώνουν για να πλήξουν τον στόχο T_1 και καμία μονάδα δεν επιβιώνει ώστε να πλήξει τον στόχο T_2. Στην περίπτωση αυτή η αποδοχές του επιτιθέμενου είναι $k_1(x-y)$. Αν $x\leq y$ τότε $S-x\geq S-y$ και $y-x$ μονάδες επιβιώνουν για να επιτεθούν στον στόχο T_2 ενώ καμία δεν επιβιώνει για να προσβάλει τον στόχο T_1. Η συνάρτηση αποδοχών μπορεί να συνοψιστεί όπως παρακάτω:

$$M(x,y)=\begin{cases}k_1(x-y)\ \alpha\nu\ x\geq y\\ k_2(y-x)\ \alpha\nu\ x\leq y.\end{cases}$$

Μία άλλη προσέγγιση ερμηνεύει το k_1 ως την αμοιβή του επιτιθέμενου ανά επιτιθέμενη μονάδα η οποία διαπερνά τις αμυνόμενες στον στόχο T_1.

Είναι προφανές ότι η $M(x,y)$ είναι κυρτή συνάρτηση του y για κάθε x. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3, αποτελείται από δύο γραμμές. Επομένως

$$u = \min_y \max_x M(x,y) = \min_y \max[k_2 y, k_1(S-y)].$$



Σχήμα 3

Τώρα για την συνάρτηση

$$\max[k_2 y,\ k_1(S-y)]$$

υποθέτουμε ότι ελαχιστοποιείται στο y για το οποίο

$$k_2 y = k_1(S-y)$$

ή

$$y^* = \frac{k_1 S}{k_1 + k_2}.$$

Επομένως η βέλτιστη στρατηγική για τον Κόκκινο είναι να τοποθετήσει $\frac{k_1}{k_1+k_2}S$ αμυνόμενες μονάδες στον στόχο T_1 και το υπόλοιπο των δυνάμεων του, $\frac{k_2}{k_1+k_2}S$, στον στόχο T_2.

Η τιμή του παιγνίου είναι

$$u = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} S.$$

Λύνοντας το πρόβλημα για την βέλτιστη στρατηγική του Μπλε , θέτουμε

$$M\left(x, \frac{k_1 S}{k_1 + k_2}\right) = u.$$

Αυτή η ισότητα αποδίδει δύο λύσεις:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = S.$$

Τώρα

$$\frac{\partial M(0, y^*)}{\partial y} = k_2, \qquad \frac{\partial M(S, y^*)}{\partial y} = -k_1.$$

Ως εκ τούτου

$$F^*(x) = \alpha I_0(x) + (1 - \alpha) I_S(x)$$

όπου

$$\alpha k_2 + (1 - a)(-k_1) = 0 \quad \acute{\eta} \quad \alpha = \frac{k_1}{k_1 + k_2}.$$

Συνοψίζουμε την λύση του παιγνίου ως ακολούθως: Ο αμυνόμενος χωρίζει τις δυνάμεις του και θα υιοθετήσει μια σταθερή ανάπτυξη αυτών, τοποθετώντας $k_1/(k_1+k_2)$ μονάδες στον στόχο T_1 και $k_2/(k_1+k_2)$ μονάδες στον στόχο T_2. Η βέλτιστη στρατηγική του επιτιθέμενου είναι μικτή. Ο επιτιθέμενος συγκεντρώνει τις δυνάμεις του είτε στον στόχο T_1 είτε στον T_2 επιλέγοντας στην τύχη. Επιλέγει T_1 με πιθανότητα $k_2/(k_1+k_2)$ και T_2 με πιθανότητα $k_1/(k_1+k_2)$.

Για παράδειγμα, αν ο στόχος T_2 είναι τρείς φορές πολυτιμότερος σε σχέση με τον στόχο T_1, ή με άλλα λόγια αν $k_2=3k_1$, τότε ο στόχος T_2 υπερασπίζεται από τα τρία τέταρτα της αμυνόμενης δύναμης. Η βέλτιστη στρατηγική για τον Επιτιθέμενο είναι να χτυπήσει τον στόχο T_1 με το σύνολο της διαθέσιμης δύναμης του, με πιθανότητα 0,75.

§9. Υπεράσπιση Πολλών Στόχων Διαφορετικής Αξίας

Ένα παράδειγμα της εφαρμογής των αποτελεσμάτων σε μια ν-διάστατη κυρτή συνάρτηση αποδοχών είναι ένα απλό πρόβλημα αεράμυνας. Όπως στις περισσότερες καταστάσεις μάχης, η μάχη μεταξύ του από αέρος επιτιθέμενου και του από αέρος αμυνόμενου μπορεί να εξεταστεί ως παίγνιο δύο παικτών, μηδενικού αθροίσματος: Ο επιτιθέμενος ψάχνει το μέγιστο δυνατό κέρδος υπό την μορφή της καταστροφής των στόχων και ο αμυνόμενος προσδοκά να μειώσει όσο το δυνατόν περισσότερο το κέρδος αυτό.

Μία σημαντική απόφαση του αμυνόμενου σε μία κατάσταση μάχης, είναι η κατανομή του συνόλου της δύναμης που διαθέτει για να αμυνθεί, μεταξύ των στόχων του. Μία σημαντική απόφαση για το Επιτιθέμενο που βρίσκεται επίσης σε κατάσταση μάχης, είναι η κατανομή του συνόλου της δύναμης που διαθέτει για να επιτεθεί, μεταξύ των ίδιων στόχων. Θα εξετάσουμε αυτό το παίγνιο σε μια πολύ απλοποιημένη μορφή του, στην οποία θεωρούμε ότι υπάρχει μία μοναδική επιλογή για κάθε παίκτη, πιο συγκεκριμένα, για τον επιτιθέμενο υπάρχει η επιλογή της τοποθέτησης των διαθέσιμων δυνάμεων του μεταξύ των στόχων και για τον αμυνόμενο η επιλογή της τοποθέτησης των δυνάμεων του μεταξύ των ίδιων στόχων.

Αναζητούμε απαντήσεις σε ερωτήματα όπως: Θα πρέπει να υπερασπίζονται όλοι στόχοι; Αν ο αμυνόμενος πρόκειται να υπερασπιστεί ορισμένους εκ των στόχων του, πώς θα πρέπει αυτοί να επιλεχθούν; Πώς θα πρέπει ο επιτιθέμενος να επιλέξει τους στόχους του;

Για να απαντήσουμε αυτά τα ερωτήματα, εξετάζουμε το ακόλουθο μοντέλο παιγνίων:

Άμυνα. Ο αμυνόμενος, Κόκκινος, διαθέτει D μονάδες άμυνας για να τις κατανείμει μεταξύ των n στόχων, τους οποίους ονομάζουμε $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$. Στο σημείο αυτό υποθέτουμε ότι οι προαναφερθέντες n στόχοι έχουν αξία $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, αντίστοιχα, και διατάσσονται ως εξής:

$$0 < k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n.$$

Επίθεση. Ο επιτιθέμενος, Μπλε, διαθέτει A μονάδες επίθεσης για να τις κατανείμει μεταξύ των n στόχων. Επιπλέον θεωρούμε ότι η επίθεση είναι τουλάχιστον ισοδύναμη της άμυνας ή με άλλα λόγια $A \geq D$.

Στρατηγική. Στρατηγική για τον Μπλε είναι η τοποθέτηση των δυνάμεων επίθεσης, A, που διαθέτει μεταξύ των n στόχων. Έτσι μια στρατηγική για τον Μπλε είναι ένα σύνολο αριθμών $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ τέτοιων ώστε

$$x_i \geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \sum_{i=1}^{n} x_i = A.$$

Μια στρατηγική για τον Κόκκινο είναι ένα σύνολο αριθμών $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ τέτοιων ώστε

$$y_i \geq 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \sum_{i=1}^{n} y_i = D.$$

Κάθε y_i αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αμυνόμενων δυνάμεων που τοποθετούνται στον στόχο T_i.

Αμοιβή. Υποθέτουμε ότι μία μονάδα της αμυνόμενης δύναμης μπορεί να ελέγξει μία μονάδα της επιτιθέμενης δύναμης. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το ποσό της ζημιάς σε οποιοδήποτε στόχο είναι ανάλογο του αριθμού των επιτιθέμενων μονάδων οι οποίες υπερέχουν αριθμητικά των αμυνόμενων μονάδων και ο συντελεστής της αναλογικότητας εξαρτάται από τον συγκεκριμένο στόχο. Τέλος, υποθέτουμε ότι η αμοιβή είναι το άθροισμα των ζημιών που σημειώθηκαν επι των στόχων. Έτσι, η αμοιβή του Μπλε είναι

$$\mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{k_i} \max(0, \mathrm{x_i} - \mathrm{y_i})$$

όπου

$$x_i \geq 0, \; y_i \geq 0, \qquad \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i} = \mathrm{A} \;\; \kappa\alpha\iota \; \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{y_i} = \mathrm{D}.$$

Λύση. Είναι προφανές ότι M(x,y) είναι κυρτό στο y για κάθε x. Είναι επίσης κυρτό στο x για κάθε y. Επομένως ο Κόκκινος, αμυνόμενος, έχει μια καθαρή στρατηγική η οποία είναι μέγιστη. Ο επιτιθέμενος έχει μια μικτή στρατηγική η οποία είναι βέλτιστη.

Μπορεί να επαληθευτεί ότι είναι βέλτιστο για τον αμυνόμενο να κατανείμει τις δυνάμεις του, D, μεταξύ των στόχων υψηλής-αξίας. Μπορεί επίσης να επαληθευτεί ότι είναι βέλτιστη επιλογή για τον επιτιθέμενο να επιλέξει τυχαία έναν από τους στόχους υψηλής αξίας, υπό μια δοθείσα κατανομή πιθανότητας και έπειτα να τοποθετήσει το σύνολο της δυνάμεως επιθέσεως του στον στόχο αυτό.

Προκειμένου να αποδώσουμε μια πιο ακριβή περιγραφή; των βέλτιστων στρατηγικών των δύο παικτών, εισάγουμε την ακόλουθη έννοια:

$$\frac{1}{h_s} = \sum_{i=s}^{n} \frac{1}{k_i}, \qquad s=1,2,\ldots,n$$

$$l_s = k_s - h_s\left(n - s + 1 - \frac{D}{A}\right), \qquad s=1,2,\ldots,n$$

m= η μικρότερη τιμή του s, τέτοια ώστε $l_s \geq 0$.

Σε όρους των παραπάνω ορισμών, μπορούμε να επαληθεύσουμε το εξής:
Η βέλτιστη μικτή στρατηγική του επιτιθέμενου είναι:

α. Να μην επιτεθεί ποτέ στους στόχους χαμηλής αξίας, $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{m-1}$.
β. Να χρησιμοποιήσει το σύνολο της διαθέσιμης για επίθεση δύναμης του, την A, ενάντια σε έναν στόχο, ο οποίος επιλέγεται τυχαία, υπό την ακόλουθη κατανομή πιθανότητας:

$$pr\{x_i = A\} = \frac{h_m}{k_i}, \qquad m \leq i \leq n.$$

Η βέλτιστη καθαρή στρατηγική του αμυνόμενου είναι:

α. Να αφήσει ανυπεράσπιστους τους στόχους χαμηλής αξίας, $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{m-1}$.
β. Να υπερασπιστεί τους στόχους υψηλής αξίας $T_m, T_{m+1}, \ldots, T_n$ τοποθετώντας

$$A\left\{1 - \frac{h_m}{k_i}\left(n - m + 1 - \frac{D}{A}\right)\right\}, \qquad m \leq i \leq n,$$

μονάδες στον $i_{κοστό}$ στόχο.

Η τιμή του παιγνίου για τον επιτιθέμενο είναι

$$u = A(k_m - l_m).$$

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι αν $m \leq i \leq n$, τότε

$$\begin{aligned} k_i \max(0, A - y_i) &= k_i A \frac{h_m}{k_i}\left(n - m + 1 - \frac{D}{A}\right) \\ &= h_m A\left(n - m + 1 - \frac{D}{A}\right) \\ &= A(k_m - l_m) = u. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου σε καθένα εκ των υπερασπιζόμενων στόχων, ο επιτιθέμενος κερδίζει την τιμή του παιγνίου αν αυτός ο στόχος δέχεται επίθεση από το σύνολο της επιτιθέμενης δύναμης.

Αν $1 \leq i \leq m-1$, τότε

$$\mathrm{k_i} \max(0, \mathrm{A} - \mathrm{y_i}) = \mathrm{k_i A} < \mathrm{A}(\mathrm{k_m} - \mathrm{l_m}).$$

Έτσι, σε κάθε ένα εκ των ανυπεράσπιστων στόχων, μία συγκεντρωτική επίθεση αποδίδει λιγότερο από την τιμή του παιγνίου. Αν ο αμυνόμενος έχει τοποθετήσει τις αμυνόμενες δυνάμεις του κατά τον βέλτιστο τρόπο, δεν υφίσταται ευπαθή σημείο στους στόχους που υπερασπίζεται.

9.1 Παράδειγμα.

Υποθέτουμε ότι ο αμυνόμενος έχει 5 στόχους να υπερασπιστεί από μία ενδεχόμενη επίθεση. Έστω ότι οι αξίες των στόχων αυτών είναι οι παρακάτω:

$$\mathrm{k_1} = \frac{1}{12}, \ \mathrm{k_2} = \frac{1}{9}, \ \mathrm{k_3} = \frac{1}{7}, \ \mathrm{k_4} = \frac{1}{5}, \ \mathrm{k_5} = \frac{1}{4}.$$

Υποθέτουμε ότι ο επιτιθέμενος και ο αμυνόμενος είναι ισοδύναμοι, ή με άλλα λόγια A = D = S. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{1}{\mathrm{h_1}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{5} \frac{1}{\mathrm{k_i}} = 12 + 9 + 7 + 5 + 4 = 37,$$

$$\mathrm{l_1} = \mathrm{k_1} - \mathrm{h_1}(5 - 1 + 1 - 1) = \frac{1}{12} - \frac{4}{37} < 0,$$

$$\frac{1}{\mathrm{h_2}} = \sum_{\mathrm{i}=2}^{5} \frac{1}{\mathrm{k_i}} = 9 + 7 + 5 + 4 = 25,$$

$$l_2 = k_2 - h_2(5-2+1-1) = \frac{1}{9} - \frac{3}{25} < 0,$$

$$\frac{1}{h_3} = \sum_{i=3}^{5} \frac{1}{k_i} = 7+5+4 = 16,$$

$$l_3 = k_3 - h_3(5-3+1-1) = \frac{1}{7} - \frac{2}{16} > 0.$$

Εφόσον $l_3>0$ και $l_2<0$, προκύπτει ότι m=3. Επομένως η βέλτιστη τοποθέτηση των δυνάμεων είναι τέτοια ώστε οι δύο πρώτοι στόχοι να είναι ανυπεράσπιστοι, αλλά και να μην δέχονται επίθεση. Οι στόχοι 3, 4 και 5 λαμβάνουν υπεράσπιση ως εξής:

$$S\left\{1-\frac{7}{16}(5-3+1-1)\right\} = \frac{S}{8} \text{ μονάδες υπεράσπισης στον στόχο } T_3,$$

$$S\left\{1-\frac{5}{16}(2)\right\} = \frac{3}{8}\,S \text{ μονάδες υπεράσπισης στον στόχο } T_4,$$

$$S\left\{1-\frac{4}{16}(2)\right\} = \frac{S}{2} \text{ μονάδες υπεράσπισης στον στόχο } T_5.$$

Η βέλτιστη στρατηγική για τον επιτιθέμενο είναι να επιλέξει έναν από τους τρείς στόχους T_3,T_4, ή T_5 τυχαία και να επικεντρώσει την επίθεση του σε αυτόν τον στόχο. Οι πιθανότητες που συσχετίζονται με τους προαναφερθέντες στόχους είναι $\frac{7}{16}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{4}{16}$, αντίστοιχα.

Η τιμή του παιγνίου είναι

$$u = A(k_m - l_m) = S\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{2}{16}\right) = \frac{S}{8}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9
Παιχνίδια Χρόνου – Μονομαχίες

§1. Η Μονομαχία ως Παίγνιο Χρόνου

Η Θεωρία Παιγνίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναλύσει μια κατηγορία προβλημάτων που ασχολούνται με το χρονοδιάγραμμα των αποφάσεων μέσα σε ένα ανταγωνιστικό περιβάλλον. Σε αυτά τα προβλήματα, οι ενέργειες στις οποίες θα προβούν οι παίκτες, δίνονται εκ των προτέρων, το χρονοδιάγραμμα όμως των ενεργειών αυτών εξαρτάται από τις στρατηγικές αποφάσεις των παικτών. Αυτού του είδους τα παίγνια χαρακτηρίζονται από την ακόλουθη σύγκρουση συμφερόντων: κάθε παίκτης επιθυμεί να καθυστερήσει όσο το δυνατόν περισσότερο να λάβει την απόφαση του, κινδυνεύει όμως και να τιμωρηθεί εξαιτίας της αναμονής αυτής. Σε μία μονομαχία για παράδειγμα, ο εκάστοτε μονομάχος επιθυμεί να καθυστερήσει την εκτόξευση των πυρών του για όσο το δυνατόν περισσότερο χρόνο, εφόσον η ακρίβεια των πυρών του επι του στόχου, αυξάνεται με τον χρόνο. Ωστόσο, αν ο μονομάχος καθυστερήσει αρκετά την εκτόξευση των πυρών του, ενδέχεται να χάσει την μονομαχία.

Εφόσον λοιπόν η μονομαχία αποτελεί ένα καλό παράδειγμα παιγνίων χρονικού προγραμματισμού, η μονομαχία με χρήση σφαιρών θα αποτελέσει το δικό μας μοντέλο χρονικού προγραμματισμού. Ως εκ τούτου, θα θεωρήσουμε ως δράση, την πυροδότηση μιας σφαίρας. Το αποτέλεσμα της δράσης δίνεται από μία συνάρτηση ακριβείας, η οποία αντιπροσωπεύει την πιθανότητα να χτυπηθεί ο αντίπαλος, ως συνάρτηση του χρόνου της πυροδότησης. Όπως σε όλα τα παιχνίδια, χρειαζόμαστε να περιγράψουμε την πληροφορία που είναι διαθέσιμη στους παίκτες. Αν ένας μονομάχος είναι ενήμερος για τις δράσεις του αντιπάλου του μόλις αυτές λάβουν χώρα, θα αναφερόμαστε στην μονομαχία ως "θορυβώδη μονομαχία". Αν κανένας εκ των μονομάχων δεν ενημερώνεται ποτέ για το πότε ή για το αν έχει πυροδοτήσει ο αντίπαλος του, θα αναφερόμαστε στην μονομαχία ως "σιωπηλή μονομαχία".

§2. Θορυβώδη Μονομαχία: Μία Σφαίρα κάθε Μονομάχος

Θα εξετάσουμε αρχικά την θορυβώδη μονομαχία στην οποία κάθε μονομάχος έχει μία σφαίρα στην διάθεση του. Κάθε μονομάχος είναι ενήμερος για τις δράσεις του αντιπάλου του, για την πυροδότηση της σφαίρας του, μόλις αυτή λάβει χώρα. Περεταίρω, θα υποθέσουμε ότι αν ένας μονομάχος πυροδοτεί και αστοχεί, ο αντίπαλος του μπορεί να πετύχει ένα σίγουρο χτύπημα με το να περιμένει την στιγμή που θα βρεθούν μαζί. Οι μονομάχοι, ξεκινώντας από μία απόσταση D μεταξύ τους, προσεγγίζουν ο ένας τον άλλο, χωρίς καμία ευκαιρία για υποχώρηση. Οι ακρίβειες αυξάνονται σταθερά καθώς οι μονομάχοι προσεγγίζουν ο ένας τον άλλο και τελικά αποτελούν βεβαιότητα, ή ίσες με 1, όταν οι μονομάχοι βρεθούν στήθος με στήθος.

Μια στρατηγική για τον Μπλε αποτελεί έναν οδηγό για το πότε θα πυροδοτήσει την σφαίρα του αν ο αντίπαλος του δεν έχει πυροδοτήσει ακόμα και αν ο αντίπαλος του έχει πυροδοτήσει και έχει αστοχήσει, τότε ο Μπλε πυροδοτεί όταν η ακρίβεια του είναι ίση με 1. Ως εκ τούτου μια στρατηγική για τον Μπλε είναι να πυροδοτήσει την σφαίρα που έχει στην διάθεση του, όταν οι μονομάχοι βρίσκονται σε απόσταση x μονάδες μεταξύ τους, όπου $0 \leq x \leq D$. Παρομοίως, μια στρατηγική για τον Κόκκινο είναι να πυροδοτήσει όταν οι μονομάχοι βρίσκονται σε απόσταση y μονάδες μεταξύ τους, όπου $0 \leq y \leq D$. Έστω ότι η ακρίβεια για τον Μπλε και τον Κόκκινο είναι $P_1(x)$ και $P_2(y)$, αντίστοιχα. Έτσι λοιπόν, $P_1(x)$ είναι η πιθανότητα ο Μπλε να πετύχει τον αντίπαλο του σε περίπτωση που πυροδοτήσει, όταν αυτοί βρίσκονται σε απόσταση x μονάδες μεταξύ τους. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η ακρίβεια ενός εκάστου αυξάνεται καθώς μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση.

Στην συνέχεια, θεωρούμε ότι αν επιζήσει μόνο ένας μονομάχος, τότε η αμοιβή που θα λάβει είναι ίση με +1, ενώ αν επιζήσουν ή πεθάνουν και οι δύο τότε η αμοιβή ενός εκάστου είναι ίση με 0. Η αμοιβή M(x,y), για τον Μπλε, είναι η προσδοκία του για την επιβίωση του για τα τρία πιθανά χρονικά διαστήματα πυροδότησης: πυροδότηση προτού πυροδοτήσει ο Κόκκινος, πυροδότηση την ίδια στιγμή που πυροδοτεί και ο Κόκκινος, πυροδότηση αφού πυροδοτήσει ο Κόκκινος. Ως εκ τούτου η αμοιβή δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση:

$$M(x,y) = \begin{cases} P_1(x)(1) + [1 - P_1(x)](-1) = 2P_1(x) - 1 & \text{αν } x>y \\ P_1(x)[1 - P_2(x)] + P_2(x)[1 - P_1(x)](-1) & \\ \quad = P_1(x) - P_2(x) & \text{αν } x=y \\ P_2(y)(-1) + [1 - P_2(y)](1) = 1 - 2P_2(y) & \text{αν } y>x. \end{cases}$$

Εφόσον $P_1(x)$ και $P_2(y)$ αυξάνονται, μειώνοντας τις τιμές x και y αντίστοιχα, προκύπτει ότι

$$\max_x \min_y M(x,y) = \max_x \min[2P_1(x) - 1,\ P_1(x) - P_2(x), 1 - 2P_2(x)].$$

Τώρα διαιρούμε το διάστημα [0,D] σε τρία διαστήματα όπως παρακάτω:

Πίνακας 16

Διάστημα	Αποτελείται από αυτά τα x για τα οποία
A	$P_1(x) + P_2(x) \geq 1$
B	$P_1(x) + P_2(x) = 1$
C	$P_1(x) + P_2(x) \leq 1$

Τα παραπάνω διαστήματα δεν είναι κενά.
Έστω

$$\mu(x) = \min[\,2P_1(x) - 1, P_1(x) - P_2(x), 1 - 2P_2(x)],$$

τότε

$$\max_x \min_y M(x,y) = \max_x \mu(x) = \max[\,\max_{x\,\varepsilon\,A} \mu(x),\ \max_{x\,\varepsilon\,B} \mu(x), \max_{x\,\varepsilon\,C} \mu(x)].$$

Τώρα για όλα τα x στο A, έχουμε

$$P_1(x) + P_2(x) \geq 1,$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$1 - 2P_2(x) \leq P_1(x) - P_2(x) \leq 2P_1(x) - 1.$$

Επομένως αν x ε A, τότε

$$\mu(x) = 1 - 2P_2(x).$$

Στο διάστημα B, το οποίο είναι σημείο, έχουμε

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{x}) + \mathrm{P}_2(\mathrm{x}) = 1.$$

Προκύπτει ότι

$$1 - 2\mathrm{P}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{x}) - \mathrm{P}_2(\mathrm{x}) = 2\mathrm{P}_1(\mathrm{x}) - 1.$$

Επομένως, αν x ε B, τότε

$$\mu(x) = \mathrm{P}_1(\mathrm{x}) - \mathrm{P}_2(\mathrm{x}).$$

Το διάστημα C ορίζεται από αυτά τα x για τα οποία,

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{x}) + \mathrm{P}_2(\mathrm{x}) \leq 1.$$

Προκύπτει ότι

$$2\mathrm{P}_1(\mathrm{x}) - 1 \leq \mathrm{P}_1(\mathrm{x}) - \mathrm{P}_2(\mathrm{x}) \leq 1 - 2\mathrm{P}_2(\mathrm{x}).$$

Επομένως, για όλα τα x στο C,

$$\mu(\mathrm{x}) = 2\mathrm{P}_1(\mathrm{x}) - 1.$$

Έστω ότι το x^* ορίζεται από την παρακάτω σχέση,

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{x}^*) + \mathrm{P}_2(\mathrm{x}^*) = 1.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι,

$$\max_{\mathrm{x}\,\varepsilon\,A} \mu(\mathrm{x}) = 1 - 2\mathrm{P}_2(\mathrm{x}^*),$$
$$\max_{\mathrm{x}\,\varepsilon\,\mathrm{B}} \mu(\mathrm{x}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{x}^*) - \mathrm{P}_2(\mathrm{x}^*),$$
$$\max_{\mathrm{x}\,\varepsilon\,C} \mu(\mathrm{x}) = 2\mathrm{P}_1(\mathrm{x}^*) - 1.$$

Επομένως έχουμε,

$$\max_{x} \min_{y} M(x,y) = P_1(x^*) - P_2(x^*).$$

όπου x^* ικανοποιεί την ισότητα

$$P_1(x^*) + P_2(x^*) = 1.$$

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\min_{y} \max_{x} M(x,y) = P_1(y^*) - P_2(y^*),$$

όπου y^* ικανοποιεί την ισότητα

$$P_1(y^*) + P_2(y^*) = 1.$$

Ως εκ τούτου, έχουμε δείξει ότι M(x,y) έχει ένα σημείο ισορροπίας στο x^*,y^*. Η βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίκτη είναι να πυροδοτήσει όταν βρίσκεται σε απόσταση l από τον αντίπαλο του και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P_1(l) + P_2(l) = 1.$$

Η τιμή του παιγνίου είναι $P_1(l)$-$P_2(l)$.

Σύνοψη της λύσης. Η βέλτιστη στρατηγική για τους μονομάχους είναι να πυροδοτήσουν τις σφαίρες τους ταυτόχρονα στην απόσταση x_0, η οποία ικανοποιεί την ισότητα

$$P_1(x_0) + P_2(x_0) = 1.$$

Αν ο Μπλε χρησιμοποιήσει αυτήν την στρατηγική, τότε είναι βέβαιος ότι θα λάβει τουλάχιστον $P_1(x_0)$-$P_2(x_0)$. Αν ο Κόκκινος χρησιμοποιήσει αυτήν την στρατηγική, θα χάσει το πολύ $P_1(x_0)$-$P_2(x_0)$.

2.1. Παράδειγμα

Υποθέτουμε ότι η ακρίβεια του Μπλε δίδεται από την σχέση $P_1(x)=1-x$ και του Κόκκινου από την σχέση $P_2(y)=1-y^2$. Τότε κάθε μονομάχος θα πυροδοτούσε την σφαίρα του σε απόσταση x που ορίζεται από την σχέση

$$x + x^2 = 1$$

ή x=0.62. Η τιμή αυτής της μονομαχίας είναι $x^2-x=-0.24$ για τον Μπλε και +0.24 για τον Κόκκινο.

Αν οι δύο μονομάχοι έχουν την ίδια ακρίβεια, τότε θα πυροδοτούσαν όταν οι ακρίβειες τους είναι 0.5. Η τιμή αυτής της μονομαχίας είναι ίση με μηδέν.

§3. Θορυβώδη Μονομαχία: Μία σφαίρα κάθε μονομάχος, χωρίς σημεία ισορροπίας.

Στην προηγούμενη ενότητα μιλήσαμε για την θορυβώδη μονομαχία για την οποία η λύση, είναι ένα σημείο ισορροπίας, δηλαδή, κάθε παίκτης έχει μία βέλτιστη καθαρή στρατηγική. Η ύπαρξη του σημείο ισορροπίας εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την υπόθεση ότι οι μονομάχοι έχουν ίσες αξίες. Συγκεκριμένα υποθέσαμε μία αμοιβή της μίας μονάδας για τον επιζώντα μονομάχο, ανεξαρτήτως αν αυτός ήταν ο Κόκκινος ή ο Μπλε. Αν η αμοιβή για τον επιζώντα μονομάχο εξαρτάται από το ποιος μονομάχος επιβιώνει, τότε η προκύπτουσα μονομαχία δεν έχει σημείο ισορροπίας. Μια μονομαχία μεταξύ ενός βομβιστή και ενός μαχητή, όπου ο βομβιστής αξίζει περισσότερο από τον μαχητή, είναι ένα παράδειγμα μονομαχίας με άνισες αξίες.

Στο σημείο αυτό, θα υποθέσουμε όπως παραπάνω, ότι οι δύο μονομάχοι προσεγγίζουν ο ένας τον άλλο. Οι ακρίβεια τους είναι $P_1(x)$ και $P_2(y)$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε επίσης ότι η μονομαχία είναι θορυβώδης, δηλαδή, αν ένας μονομάχος αστοχήσει, ο αντίπαλος του είναι σίγουρος για το χτύπημα του. Παρακάτω παρατίθενται οι αμοιβές που υποθέτουμε ότι θα λάβει ο Μπλε ανάλογα με την τροπή που θα λάβει η μονομαχία:

α, αν μόνο ο Μπλε επιζήσει,

β, αν μόνο ο Κόκκινος επιζήσει,

γ, αν κανείς από τους δύο δεν επιζήσει,
0, αν επιζήσουν και οι δύο μονομάχοι.

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι α>β.

Θεωρούμε ως στρατηγική για τον κάθε μονομάχο, την επιλογή της χρονικής στιγμή της πυροδότησης, αν ο αντίπαλος του δεν έχει πυροδοτήσει, ενώ σε περίπτωση που ο αντίπαλος του έχει πυροδοτήσει και έχει αστοχήσει, θεωρούμε ως στρατηγική, το να πυροδοτήσει την στιγμή που η ακρίβεια του ισούται με την μονάδα. Αν x και y αποτελούν στρατηγικές του Μπλε και Κόκκινου, αντίστοιχα, τότε η αμοιβή για τον Μπλε θα είναι:

$$M(x,y) = \begin{cases} (\alpha-\beta)P_1(x)+\beta & \text{αν } x<y, \\ \alpha P_1(x)+\beta P_2(x)+(\gamma-\beta-\alpha)P_1(x)P_2(x) & \text{αν } x=y \\ \alpha-(\alpha-\beta)P_2(y) & \text{αν } x>y. \end{cases}$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε αν το παίγνιο έχει σημείο ισορροπίας ή όχι, πρέπει να αξιολογήσουμε τα $\max_x \min_y M(x,y)$ και $\min_y \max_x M(x,y)$. Από το γεγονός ότι $P_1(x)$ και $P_2(y)$ είναι μονοτονικά αύξουσες συναρτήσεις, προκύπτει ότι

$$\max_x \min_y M(x,y) = \max_x \min[(\alpha-\beta)P_1(x)+\beta, \alpha P_1(x)+\beta P_2(x) +(\gamma-\beta-\alpha)P_1(x)P_2(x), \alpha-(\alpha-\beta)P_2(x)],$$

$$\min_y \max_x M(x,y) = \min_y \max[(\alpha-\beta)P_1(y)+\beta, \alpha P_1(y)+\beta P_2(y) +(\gamma-\beta-\alpha)P_1(y)P_2(y), \alpha-(\alpha-\beta)P_2(y)].$$

Η συνάρτηση $(\alpha-\beta)P_1(x)+\beta$ και $\alpha-(\alpha-\beta)P_2(x)$ είναι μονοτονικά αύξουσα και μονοτονικά φθίνουσα, αντίστοιχα, έχοντας μια κοινή τιμή

$$z_0 = (\alpha-\beta)P_1(x_0)+\beta = \alpha-(\alpha-\beta)P_2(x_0)$$

για ορισμένα x_0 για τα οποία $P_1(x_0)+P_2(x_0)=1$. Υποθέτουμε ότι $(\gamma-\beta-\alpha)>0$. Τότε

$$\alpha P_1(x_0)+\beta P_2(x_0)+(\gamma-\beta-\alpha)P_1(x_0)P_2(x_0) > z_0.$$

Επομένως,

$$\max_x \min_y M(x,y) = z_0 \text{ και } \min_y \max_x M(x,y) > z_0.$$

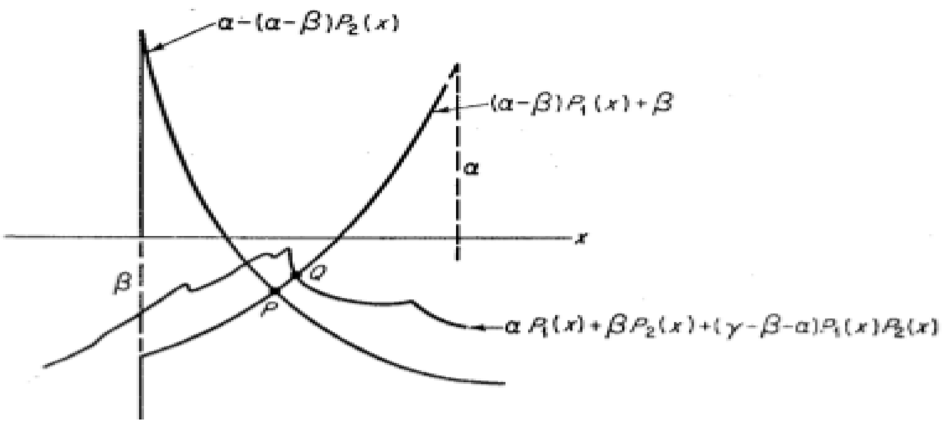
Ως εκ τούτου, αν (γ-β-α)>0, τότε το παίγνιο δεν έχει σημείο ισορροπίας, και επομένως ούτε και λύση σε καθαρή στρατηγική και για τις δύο πλευρές.

Αν (γ-β-α)<0, τότε προκύπτει ότι

$$\min_y \max_x M(x,y) = z_0, \quad \max_x \min_y M(x,y) < z_0,$$

και το παίγνιο ξανά δεν έχει λύσεις σε καθαρές στρατηγικές.

Το γράφημα του Σχήματος 4 απεικονίζει το γεγονός ότι η συνάρτηση M(x,y) δεν έχει σημείο ισορροπίας. Υποθέτουμε ότι (γ-β-α)>0. Το σημείο P ορίζεται από την $P_1(x)+P_2(x)=1$ και αποδίδει την τιμή $\max_x \min_y M(x,y)$. Το σημείο Q το οποίο δεν μπορεί να συμπίπτει με το σημείο P, αποδίδει την τιμή $\min_y \max_x M(x,y)$.



Σχήμα 4

Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου γ-β-α=0,το παίγνιο έχει ένα σημείο ισορροπίας στο x_0 ικανοποιώντας την εξίσωση $P_1(x_0)+P_2(x_0)=1$. Η υπόψη περίπτωση εξετάσθηκε στην τελευταία ενότητα.

Στο σημείο αυτό, συνοψίζουμε, χωρίς απόδειξη, τα αποτελέσματα αυτού του είδους μονομαχίας. Αν οι αξίες είναι τέτοιες ώστε (γ-β-α)>0, τότε το παίγνιο έχει μια τιμή η οποία δίνεται από την

$$u = (\alpha - \beta)P_1(x_0) + \beta,$$

όπου το x_0 είναι τέτοιο ώστε

$$P_1(x_0) + P_2(x_0) = 1.$$

Ο Μπλε έχει μια βέλτιστη καθαρή στρατηγική, την

$$F^*(x) = I_{x_0}(x).$$

Ωστόσο, ο Κόκκινος δεν έχει βέλτιστη στρατηγική. Επιθυμεί να ακολουθήσει μια καθαρή στρατηγική όσο το δυνατόν πιο κοντά στο x_0, αλλά όχι ίση με το x_0.

Αν οι αξίες είναι τέτοιες ώστε (γ-β-α)<0, τότε ο Κόκκινος έχει μια βέλτιστη καθαρής στρατηγική και ο Μπλε δεν έχει βέλτιστη στρατηγική.

§4. Θορυβώδη Μονομαχία: Πολλές σφαίρες, ίση ακρίβεια

Αν οι μονομάχοι έχουν περισσότερες από μια σφαίρες ο καθένας, και αν υποθέσουμε ότι οι αξίες των μονομάχων είναι οι ίδιες, και συγκεκριμένα, +1 για τον μονομάχο που επιζεί και 0 για διαφορετική περίπτωση, τότε είναι σχετικά εύκολο να υπολογιστεί η βέλτιστη στρατηγική. Υποθέτουμε ότι την χρονική στιγμή t, ο Μπλε και ο Κόκκινος έχουν m(t) και n(t) σφαίρες, αντίστοιχα, και ίσες συναρτήσεις ακρίβειας, p(t). Μια βέλτιστη στρατηγική για οποιονδήποτε από τους δύο παίκτες είναι να πυροδοτήσει μία σφαίρα οποτεδήποτε

$$p(t) = \frac{1}{m(t) + n(t)}.$$

Ωστόσο, ο μονομάχος με τις λιγότερες σφαίρες, σε οποιαδήποτε τέτοια χρονική στιγμή, δεν θα έπρεπε να πυροδοτήσει μέχρι ότου

$$p(t) > \frac{1}{m(t) + n(t)}.$$

Έτσι λοιπόν, θα μπορούσε να κρατήσει το πυρ του προς στιγμή και έπειτα να πυροδοτήσει, μόνο αν ο αντίπαλος του δεν πυροδοτεί. Η τιμή του παιγνίου είναι

$$u = \frac{m(0) - n(0)}{m(0) + n(0)}.$$

Για παράδειγμα, αν ο Μπλε έχει δύο σφαίρες και ο Κόκκινος έχει τρείς σφαίρες και χρησιμοποιούν και οι δύο τους τις βέλτιστες στρατηγικές τους, τότε ο Κόκκινος πυροδοτεί όταν η ακρίβεια είναι $p(t)=\frac{1}{5}$, και οι δύο πυροδοτούν αν $p(t)=\frac{1}{4}$ καθώς και όταν $p(t)=\frac{1}{2}$, και η τιμή του παιγνίου είναι $u=-\frac{1}{5}$ για τον Μπλε. Συγκεκριμένα, αν $p(t)=t$, τότε ο Κόκκινος πυροδοτεί την χρονική στιγμή $t=\frac{1}{5}$, και οι δύο πυροδοτούν την χρονική στιγμή $t=\frac{1}{4}$, καθώς και την χρονική στιγμή $t=\frac{1}{2}$.

§5. Θορυβώδη Μονομαχία: Μία σφαίρα, αυθαίρετη ακρίβεια

Μέχρι τώρα είχαμε υποθέσει ότι η ακρίβεια των μονομάχων αυξάνεται με το πέρασμα του χρόνου και προσεγγίζει την βεβαιότητα. Τώρα όμως εγκαταλείπουμε αυτόν τον περιορισμό. Υποθέτουμε ότι οι ακρίβειες $p_1(t)$, $p_2(t)$ την χρονική στιγμή $t>0$ είναι συνεχής συναρτήσεις, όχι απαραίτητα μονότονες, και ότι $p_1(t)= p_2(t)=C$ για όλες τις χρονικές στιγμές t που είναι μεγαλύτερες από ορισμένα t_0. Συνοψίζουμε χωρίς απόδειξη τις βέλτιστες στρατηγικές των μονομάχων. Αν ο Μπλε πυροδοτεί την χρονική στιγμή t_1 και αστοχεί, ο Κόκκινος πυροδοτεί την χρονική στιγμή t_2 για την οποία $p_2(t)$, είναι μέγιστο στο διάστημα t_1, t_0. Για ένα ζεύγος στρατηγικών (t_1, t_2), η αμοιβή για τον Μπλε είναι

$$\begin{aligned} f(T) &= p_1(T) - [1 - p_1(T)]m_2(T) && \text{αν } t_1<t_2, \\ g(T) &= -p_2(T) + [1 - p_2(T)]m_1(T) && \text{αν } t_2<t_1, \\ h(T) &= p_1(T) - p_2(T) && \text{αν } t_1=t_2, \end{aligned}$$

όπου $T = \min(t_1, t_2)$, $m(T) = \max_{t \geq T} p(t)$. Ορίζουμε

$$F(t) = \max_{r \leq t} f(r),$$

και

$$G(t) = \min_{r \leq t} g(r),$$

τότε

α. αν F(t) και G(t) τέμνονται πρώτα στο $T_0 > 0$, τότε $u = F(T_0) = G(T_0)$. Υπάρχει $t_1 \leq T_0$ και $t_2 \leq T_0$ τέτοιο ώστε $f(t_1) = g(t_2) = u$ και $\max(t_1, t_2) = T_0$. Κατά προσέγγιση, οι βέλτιστες στρατηγικές για τον Μπλε και τον Κόκκινο λαμβάνονται επιλέγοντας τυχαίες χρονικές στιγμές πλησίον των t_1 και t_2, αντίστοιχα, και έτσι περιορίζεται οποιαδήποτε επίπτωση της συνάρτησης h(T).

β. αν $F(0) \geq G(0)$, τότε $u = \mathrm{med}\{f(0), g(0), h(0)\}$. Αν ϵ είναι ένας μικρός θετικός αριθμός που επιλέχθηκε τυχαία, η λύση (t_1, t_2) είναι $(0, \epsilon)$, $(\epsilon, 0)$, ή $(0,0)$, ανάλογα με το αν ο μέσος όρος εκτιμάται στο f(0), g(0) ή στο h(0), αντίστοιχα.

5.1. Παράδειγμα

Υποθέτουμε ότι t_0 και οι ακρίβειες είναι

$$t_0 = \frac{2}{3}, \qquad C = \frac{1}{3}, \qquad p_1(t) = \left|\frac{1}{3} - t\right|, \qquad p_2(t) = \frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - t\right|.$$

Αυτή είναι η πρώτη περίπτωση, και έχουμε $u=0$, $t_1=0$, $t_2=\frac{2}{5}$. Αν έχει φτάσει η χρονική στιγμή $t = \frac{2}{5}$ και ο Μπλε έχει σφάλει με το να μην πυροδοτήσει, ο Κόκκινος θα πρέπει να αξιολογήσει εκ νέου την κατάσταση με βάση το νέο παίγνιο, ξεκινώντας την χρονική στιγμή $t = \frac{2}{5}$. Αυτή η μονομαχία αποτελεί την δεύτερη περίπτωση και η τιμή της είναι $-\frac{1}{6}$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_1 = 0.54$.

§6. Αθόρυβη Μονομαχία: Μία Σφαίρα Κάθε Μονομάχος, Ίσες Ακρίβειες

Σε μία αθόρυβη μονομαχία κάθε μονομάχος γνωρίζει πόσες σφαίρες διαθέτει κάθε μονομάχος στο ξεκίνημα της μονομαχίας, όμως δεν δύναται να γνωρίζει για την οποιαδήποτε πυροδότηση του άλλου. Θεωρούμε ότι κάθε μονομάχος έχει μία σφαίρα κατά το ξεκίνημα της μονομαχίας. Οι μονομάχοι προσεγγίζουν ο ένας τον άλλο χωρίς την δυνατότητα οπισθοχώρησης. Θεωρούμε ότι οι δύο μονομάχοι έχουν την ίδια συνάρτηση ακρίβειας, δηλαδή, αν ο χρόνος της πυροδότησης είναι ο ίδιος, οι μονομάχοι έχουν την ίδια πιθανότητα να σκοτώσουν τον αντίπαλο τους.

Εφόσον οι ακρίβειες αυξάνονται με τον χρόνο, κάθε μονομάχος επιθυμεί να αναβάλει την πυροδότηση του, για όσο το δυνατόν περισσότερο χρόνο. Ωστόσο, με το να αναβάλει την πυροδότηση του, αυξάνει συγχρόνως την πιθανότητα να χτυπηθεί από τον αντίπαλο του. Επιπλέον, η μονομαχία είναι αθόρυβη, δεν γνωρίζει εάν έχει πυροδοτήσει ο αντίπαλος του. Αυτή η σύγκρουση συμφερόντων μπορεί να επιλυθεί στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων. Στο σημείο αυτό, θα θεωρήσουμε ότι οι αξίες των μονομάχων είναι οι ίδιες και εκχωρούνται στον Μπλε οι ακόλουθες τιμές για το πιθανό αποτέλεσμα:

α. **+1**, αν επιζήσει μόνο ο Μπλε,
β. **-1**, αν επιζήσει μόνο ο Κόκκινος,
γ. **0**, αν και οι δύο ή κανένας εκ των δύο επιζήσουν.

Θεωρούμε ότι ο Μπλε και ο Κόκκινος πυροδοτούν όταν η ακρίβεια τους είναι x και y, αντίστοιχα, όπου $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Τότε λοιπόν, η αμοιβή για τον Μπλε είναι

$$(9.1) \qquad \mathrm{M(x,y)} = \begin{cases} x + (1-x)y(-1) = -y + (1+y)x & \text{αν } x<y, \\ \mathrm{x(1-x) + x(1-x)(-1) = 0} & \text{αν } x=y, \\ y(-1) + (1-y)x = -y + (1-y)x & \text{αν } x>y. \end{cases}$$

Βρίσκουμε ότι

$$\max_{\mathrm{x}} \ \min_{\mathrm{y}} \mathrm{M(x,y)} = 2\sqrt{2} - 3,$$

$$\min_{\mathrm{y}} \ \max_{\mathrm{x}} \mathrm{M(x,y)} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Επομένως, το παίγνιο δεν έχει σημείο ισορροπίας. Υποθέτουμε ότι ο Μπλε χρησιμοποιεί μια μικτή στρατηγική F και ο Κόκκινος χρησιμοποιεί μια καθαρή στρατηγική y. Τότε λοιπόν, η προσδοκία του Μπλε θα είναι

$$(9.2)\qquad E(F,y)=\int_0^1 M(x,y)dF(x)=\int_{x=0}^{x=y-0} M(x,y)\,dF(x)+\int_{y+0}^1 M(x,y)dF(x)=$$

$$=\int_0^{y-0}[-y+(1+y)x]dF(x)+\int_{y+0}^1[-y+(1-y)x]dF(x)\qquad=$$

$$=-yF(y-0)+(1+y)\int_0^{y-0} xdF(x)-y+yF(y+0)+$$

$$+(1-y)\int_{y+0}^1 xdF(x)=$$

$$=y[F(y)-F(y-0)]-y+(1+y)\int_0^{y-0} xdF(x)+(1-y)\int_{y+0}^1 xdF(x).$$

Υποθέτουμε ότι η μικτή στρατηγική F είναι μία συνάρτηση πυκνότητας στο διάστημα (α,1), ή, δηλαδή, $dF(x)=P(x)dx$ αν $a\leq x\leq 1$ και $dF(x)=0$ αν $x<α$. Τότε

$$(9.3)\qquad E(F,y)=\begin{cases}-y+(1+y)\int_a^y xP(x)dx+(1-y)\int_y^1 xP(x)dx & \text{αν } y\geq a,\\ -y+(1-y)\int_a^1 xP(x)dx & \text{αν } y\leq a.\end{cases}$$

Εφόσον το παίγνιο είναι συμμετρικό, η τιμή του παιγνίου είναι μηδενική. Προκύπτει ότι, αν το παίγνιο έχει έχει μια συνάρτηση πυκνότητας P για λύση, τότε για όλα τα y για τα οποία $P(y)\neq 0$, $E(F,y)=u=0$. Ως εκ τούτου, αν το παίγνιο έχει μια συνάρτηση πυκνότητας για λύση, πρέπει να έχουμε

$$(9.4)\qquad -y+(1+y)\int_a^y xP(x)dx+(1-y)\int_y^1 xP(x)dx=0,$$

ανεξάρτητα από το y.

Διαφοροποιώντας την προηγούμενη έκφραση δύο φορές ως προς το y, παίρνουμε

$$3P(y) + yP'(y) = 0.$$

Τώρα, επιλύοντας αυτήν την διαφοροποιημένη ισότητα, παίρνουμε

$$P(y) = \frac{C}{y^2} \tag{9.5}$$

Με υποκατάσταση της (9.5) στην (9.4), προκύπτει

$$-y + (1+y)C\int_a^y \frac{dx}{x^2} + (1-y)C\int_y^1 \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Ως εκ τούτου,

$$-y + C(1+y)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{y}\right) + C(1-y)\left(\frac{1}{y} - 1\right) = 0,$$

Ανεξάρτητα από το y για $\alpha \leq y \leq 1$. Αυτό αποδίδει

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{4}.$$

Τώρα θα δείξουμε ότι μια βέλτιστη στρατηγική για τον Μπλε και τον Κόκκινο είναι να πυροδοτήσει όταν η ακρίβεια είναι x με συνάρτηση πυκνότητας $P(x)=1/4x^3$ όπου $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ και να μην πυροδοτήσει πρίν από $x=\frac{1}{3}$. Υποθέτουμε ότι ο Μπλε χρησιμοποιεί αυτήν την στρατηγική· τότε για $\frac{1}{3} \leq y \leq 1$, έχουμε

$$E(F^*, y) = -y + \frac{(1+y)}{4}\int_{\frac{1}{3}}^{\nu} \frac{dx}{x^2} + \frac{(1-y)}{4}\int_y^1 \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Για $y \leq \frac{1}{3}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{f}^*, \mathrm{y}) &= -\mathrm{y} + \frac{(1-\mathrm{y})}{4} \int_{1/3}^{1} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2} \\ &= -\frac{3}{2}\mathrm{y} + \frac{1}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Επομένως η βέλτιστη στρατηγική για τον Μπλε και τον Κόκκινο είναι η ακόλουθη μικτή στρατηγική:

$$\begin{aligned} F^*(x) &= 0, && \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ &= \frac{1}{8}\left(9 - \frac{1}{x^2}\right), && \text{αν } \frac{1}{3} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

§7. Αθόρυβη-Θορυβώδη Μονομαχία: Μία σφαίρα κάθε μονομάχος

Σ' αυτήν την περίπτωση, δημιουργούμε μια μείξη μονομαχίας, δηλαδή, θεωρώντας ότι ένας μονομάχος είναι ενήμερος για την πυροδότηση του αντιπάλου του, αν υφίσταται πυροδότηση, αποδίδει βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες είναι διαφορετικές σε σχέση με αυτές στην θορυβώδη ή στην αθόρυβη μονομαχία. Υποθέτουμε ότι ο Μπλε είναι ο αθόρυβος μονομάχος και ο Κόκκινος είναι ο θορυβώδης. Θεωρούμε ότι οι δύο μονομάχοι έχουν τις ίδιες ακρίβειες. Τότε, αν x και y είναι οι ακρίβειες την στιγμή της πυροδότησης για τον Μπλε και τον Κόκκινο, αντίστοιχα, η αμοιβή για τον Μπλε είναι

$$\mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{y} + \mathrm{xy} & \text{για } \mathrm{x}<\mathrm{y}, \\ 1 - 2\mathrm{y} & \text{για } \mathrm{x}>\mathrm{y}, \\ 0 & \text{για } \mathrm{x}=\mathrm{y}. \end{cases}$$

Θεωρούμε ότι $\alpha=\sqrt{6}-2$. Τότε λοιπόν, μπορεί να επαληθευτεί ότι η τιμή του παιγνίου είναι

$$u = 1 - 2a = 0.101.$$

Μπορεί να επαληθευτεί ότι ο Μπλε, ο οποίος έχει μια αθόρυβη σφαίρα, έχει μια μοναδική βέλτιστη στρατηγική, και συγκεκριμένα, την συνάρτηση πυκνότητας

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 0 & \text{για } 0\leq x<a, \\ \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{a}}{(\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}-1)^{3/2}} & \text{για } \alpha\leq x\leq 1. \end{cases}$$

Η βέλτιστη στρατηγική για τον Κόκκινο είναι επίσης μοναδική και είναι η ίδια πυκνότητα f(y) σε συνδυασμό με την καθαρή στρατηγική y=1 σε αναλογία 2/α. Σε όρους μιας αθροιστικής συνάρτησης κατανομής, G(y), η βέλτιστη στρατηγική για τον Κόκκινο είναι

$$\mathrm{G(y)} = \frac{2}{2+\mathrm{a}}\int_0^{\mathrm{y}} \mathrm{f(y)dy} + \frac{\mathrm{a}}{2+\mathrm{a}}\mathrm{I}_1(\mathrm{y}).$$

§8. Αθόρυβη Μονομαχία: Μία Σφαίρα Εναντίον 2, Ίσες Ακρίβειες

Δίνοντας σε ένα εκ των μονομάχων μία επιπλέον σφαίρα, περιπλέκουμε αρκετά την λύση της μονομαχίας, ακόμα και για την απλή περίπτωση όπου όλες οι ακρίβειες είναι ίσες και μονοτονικά αυξανόμενες από το μηδέν στο ένα. Για ασφαλέστερα αποτελέσματα, ο μονομάχος με τις δύο σφαίρες θα έπρεπε να τις πυροδοτήσει σε ξεχωριστά διαστήματα αλλά με μια θετική πιθανότητα να κρατήσει την δεύτερη σφαίρα μέχρι το τέλος του παιγνίου. Ο μονομάχος με την μια σφαίρα υπερασπίζεται τον εαυτό του ενάντια σε κάθε μια από τις εχθρικές σφαίρες με δύο διαφορετικούς νόμους πυκνότητας, ξοδεύοντας λίγο περισσότερο από το ήμισυ της πιθανότητας πυροδότησης του, στην πρώτη.

Έστω ότι ο Μπλε είναι ο μονομάχος που έχει στην κατοχή του μία μόνο σφαίρα και ο οποίος επιλέγει μία χρονική στιγμή πυροδότησης x, όπου 0≤x≤1. Ο Κόκκινος, ο οποίος έχει δύο σφαίρες, επιλέγει αντίστοιχα δύο χρονικές στιγμές πυροδότησης, την y και την z, με 0≤y≤z≤1, όπου ο χρόνος ταυτίζεται με την ακρίβεια. Η αμοιβή στον για τον Μπλε είναι

$$M(x,y,z) = \begin{cases} x-(1-x)y-(1-x)(1-y)z & \text{για } x<y\leq z, \\ -y+(1-y)x-(1-y)(1-x)z & \text{για } y<x\leq z, \\ -y-(1-y)z+(1-y)(1-z)x & \text{για } y\leq z<x. \end{cases}$$

Η λύση για αυτήν την μονομαχία είναι εκτενής και πολύπλοκη. Θα συνοψίσουμε, χωρίς απόδειξη, τις βέλτιστες στρατηγικές σε αυτήν την μονομαχία. Ξεκινάμε λοιπόν από το ότι το παίγνιο έχει μία τιμή. Ο μονομάχος με την μία σφαίρα, ο Μπλε, βρίσκεται σε μειονεκτική θέση και η τιμή της μονομαχίας γι' αυτόν είναι

$$u = \frac{2-3a}{2+3a}, \quad \text{όπου } \alpha = \sqrt{1+\sqrt{1/3}} = 1.25593.$$

Επομένως

$$u = -0.30650.$$

Ο Μπλε έχει επίσης μια μοναδική βέλτιστη μικτή στρατηγική, η οποία περιγράφεται από την συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \le x \le a, \\ \dfrac{k}{x^8} & \text{αν } \alpha \le x \le b, \\ \dfrac{l}{x^3} & \text{αν } b \le x \le 1, \end{cases}$$

όπου οι σταθερές ορίζονται από

$$\mathrm{k} = \frac{\mathrm{a}(1-\mathrm{b})}{1+2\mathrm{a}-\mathrm{b}} = 0.13805, \ \mathrm{l} = \frac{\mathrm{a}}{1+2\mathrm{a}-\mathrm{b}} = 0.25760,$$

$$\mathrm{a} = \frac{1}{1+2\mathrm{a}} = 0.28475, \quad \mathrm{b} = \frac{1}{1+2\sqrt{\frac{1}{3}}} = 0.46410.$$

Αν ο Μπλε χρησιμοποιεί αυτήν στρατηγική, ο Κόκκινος είναι αναγκασμένος να πυροδοτήσει την πρώτη του σφαίρα ανάμεσα στα α και b, και την δεύτερη σφαίρα του μετά το b, αν είναι να εξασφαλίσει ο ίδιος την τιμή του παιγνίου. Ο Κόκκινος θα πρέπει να πυροδοτήσει την πρώτη σφαίρα του με πιθανότητες οι οποίες περιγράφονται από την συνάρτηση πυκνότητας

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq y \leq a, \\ \dfrac{m}{y^3} & \text{αν } \alpha \leq y \leq b, \\ 0 & \text{αν } b \leq y \leq 1, \end{cases}$$

όπου

$$m = \frac{3}{4+6a} = 0.26006.$$

Η δεύτερη σφαίρα θα έπρεπε να πυροδοτηθεί με ένα συνδυασμό συνάρτησης πυκνότητας και μοναδιαίας κλιμακωτής συνάρτησης, όπως παρακάτω:

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq z \leq b, \\ \dfrac{n}{z^3} & \text{αν } b \leq z \leq 1, \\ \gamma & z=1, \end{cases}$$

όπου

$$\gamma = 2 - \sqrt{3} = 0.26795,$$

$$n = \frac{3\gamma}{2} = 0.40192.$$

Οι τυχαιοποιήσεις στο y και z διεξάγονται ανεξάρτητα.

§9. Αθόρυβη Μονομαχία: Θετική Αρχική Ακρίβεια

Υποθέτουμε ότι οι δύο μονομάχοι έχουν μια αθόρυβη σφαίρα έκαστος και ότι οι ακρίβειες τους είναι ίσες και αυξάνονται μονοτονικά, αλλά από μια αρχική τιμή α≥0 προς την τιμή 1. Αυτή η κατάσταση μπορεί να προκύψει αν κανένας εκ των δύο μονομάχων δεν επιτρέπεται να πυροδοτήσει πρώτού η ακρίβεια του πλησιάσει την τιμή α. Η εισαγωγή αυτού του περιορισμού τροποποιεί τη λύση της σιωπηλής μονομαχίας. Παρακάτω, περιγράφουμε χωρίς απόδειξη, την βέλτιστη συμπεριφορά των μονομάχων.

Έστω ότι η $f(x)=\frac{1}{4}x^3$, είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η οποία είναι επίσης η λύση της αθόρυβης μονομαχίας, χωρίς περιορισμούς. Η βέλτιστη συμπεριφορά των μονομάχων θα εξαρτηθεί από το μέγεθος του a, όπως παρακάτω:

α. Αν $0\leq\alpha\leq\frac{1}{3}$, τότε πυροδοτούν σύμφωνα με την πυκνότητα πιθανότητας f(x) στο διάστημα $\frac{1}{3}\leq x\leq 1$ και ποτέ πριν από $x=\frac{1}{3}$.

β. Αν $\frac{1}{3}\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$, έστω ότι το $(\frac{1}{3},b)$ είναι το διάστημα στο οποίο η f(x) έχει κέντρο μάζας στο α. Πυροδοτούν μετά το b, σύμφωνα με την f(x), και συγκεντρώνουν την υπόλοιπη πιθανότητα πυροδότησης στο α.

γ. Αν $\frac{1}{2}\leq\alpha\leq 1$, πυροδοτούν πάντα στο α.

Για να απεικονίσουμε την λύση, υποθέτουμε ότι $\alpha=\frac{4}{9}$, το οποίο παραπέμπει στην δεύτερη περίπτωση. Για να προσδιορίσουμε το b, χρειάζεται να επιλύσουμε την ισότητα

$$\frac{\int_{1/3}^{b} xf(x)dx}{\int_{1/3}^{b} f(x)dx}=\frac{4}{9},$$

όπου $f(x)=\frac{1}{4}x^3$. Αυτό αποδίδει $b=\frac{2}{3}$. Επομένως η βέλτιστη στρατηγική για τους μονομάχους είναι να πυροδοτήσουν σύμφωνα με την πυκνότητα πιθανότητας $f(x)=\frac{1}{4}x^3$, από το $x=\frac{2}{3}$ στο $x=1$. Αυτό εξαντλεί τα $\frac{5}{32}$ της πιθανότητας πυροδότησης. Η υπολειπόμενη πιθανότητα πυροδότησης, $\frac{27}{32}$, είναι συγκεντρωμένη στο $\alpha=\frac{4}{9}$.

Θα παρατηρήσουμε ότι η μέση ακρίβεια πυροδότησης σε κάθε μια από τις τρείς περιπτώσεις που είδαμε παραπάνω, ισούται με

$$\max\left(\frac{1}{2},\alpha\right).$$

Αυτός είναι ακριβώς ο βέλτιστος χρόνος πυροδότησης για την σχετική αθόρυβη μονομαχία, όπου οι μονομάχοι έχουν ίσες συναρτήσεις ακρίβειας και ενδέχεται να πυροδοτήσουν αφότου η ακρίβεια τους υπερβεί το α.

§10. Πρόβλεψη Στόχου

Ένα κλασικό στρατιωτικό πρόβλημα είναι η επιλογή του τρόπου με τον οποίο θα στοχεύσουμε καλύτερα έναν κινητό στόχο, ο οποίος ελίσσεται σκοπίμως, ώστε να προκαλέσει σύγχυση ως προς την πρόβλεψη της θέσης του. Ο κινητός στόχος δύναται να είναι ένα πλοίο, ένα αεροσκάφος ή ένας οπλίτης ενώ οι επιτιθέμενοι σε αυτούς μπορεί να είναι ένα βομβαρδιστικό, ένα αντιαεροπορικό οπλικό σύστημα ή ένας ελεύθερος σκοπευτής, αντίστοιχα. Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει μια χρονική καθυστέρηση μεταξύ της ανίχνευσης του στόχου και της άφιξης του βλήματος σε αυτόν.

Υποθέτουμε ότι ένα θωρηκτό, ευρισκόμενο στα μέσα του ωκεανού, είναι ενήμερο για την παρουσία ενός εχθρικού βομβαρδιστικού αεροσκάφους, το οποίο λόγω του ότι ίπταται σε μεγάλο ύψος, δεν επιτρέπει στο πλοίο να λάβει επιθετικά μέτρα εναντίων του. Ωστόσο, το θωρηκτό δύναται να ελιχθεί προκειμένου να προκαλέσει σύγχυση ως προς την πρόβλεψη της θέσης του. Το πλοίο στην παρούσα φάση ενδιαφέρεται αποκλειστικά να μην χτυπηθεί από το εχθρικό βομβαρδιστικό. Το αεροσκάφος διαθέτει μία μόνο βόμβα, και υποθέτουμε ότι η σκοπευτική του ικανότητα είναι άριστη, όμως υφίσταται μία χρονική καθυστέρηση μεταξύ της στιγμής της αποδέσμευσης της βόμβας και της στιγμής της πρόσκρουσης-έκρηξης. Για τον λόγο αυτό λοιπόν, το βομβαρδιστικό αεροσκάφος πρέπει να στοχεύσει σε μια αναμενόμενη θέση του πλοίου.

Προκειμένου να κατανοήσουμε σε βάθος αυτό το δύσκολο πρόβλημα, είναι απαραίτητο να το απλοποιήσουμε περεταίρω, θεωρώντας ότι ο ωκεανός είναι ένας χώρος μονοδιάστατος και διακριτός. Θα θεωρήσουμε ότι το θωρηκτό βρίσκεται σε μία από τις μακριές γραμμές σημείων του χώρου και ότι σε κάθε μονάδα χρόνου κινείται είτε μία μονάδα αριστερά είτε μια μονάδα δεξιά. Θεωρούμε επίσης ότι η χρονική καθυστέρηση που προαναφέραμε, αντιστοιχεί σε 2 μονάδες ή διαφορετικά, σε 2 κινήσεις του πλοίου. Η αμοιβή για το βομβαρδιστικό αεροσκάφος σε περίπτωση που πετύχει το πλοίο ισούται με την μονάδα, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση ισούται με μηδέν.

Μία στρατηγική για το θωρηκτό θα εξαρτηθεί από τις προηγούμενες κινήσεις. Δεδομένου ότι η πορεία του θωρηκτού, είναι γνωστή στον αντίπαλο του, για περισσότερο από δύο κινήσεις πριν, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι αυτή η εξάρτηση δεν θα φτάσει πολλές κινήσεις πίσω. Θα υποθέσουμε ότι η επιλογή βασίζεται μόνο στην προηγούμενη κίνηση και ότι το θωρηκτό κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση με πιθανότητα x και στην ίδια κατεύθυνση με πιθανότητα $1\text{-}x$. Στο τέλος των δύο κινήσεων το θωρηκτό θα βρίσκεται σε μία από τις τρείς θέσεις. Οι πιθανότητες που σχετίζονται με τις τρείς αυτές θέσεις είναι

$$M = \begin{cases} (1-x)^2 \\ x \\ x(1-x). \end{cases}$$

Από την περιγραφή του παιγνίου, προκύπτει ότι το Μ συμβολίζει την προσδοκώμενη αμοιβή.

Αν περιοριστούμε σε αυτές τις στρατηγικές, τότε μια βέλτιστη στρατηγική για το θωρηκτό είναι η επιλογή "x", η οποία κάνει το μέγιστο εκ των τριών αυτών πιθανοτήτων, ελάχιστο. Αυτό συμβαίνει στο

$$x = (1-x)^2,$$

ή στο

$$x^* = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Μπορεί να δειχτεί ότι η τιμή του παιγνίου δίδεται από την $x^*=(3-\sqrt{5})/2$ και ότι x^* είναι επίσης η βέλτιστη στρατηγική για το θωρηκτό. Επιπλέον, αυτή η βέλτιστη στρατηγική είναι μοναδική. Από την άλλη μεριά, μπορεί να δειχτεί ότι το βομβαρδιστικό δεν έχει βέλτιστη στρατηγική. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $\epsilon>0$, υπάρχει μια μικτή στρατηγική για το αεροσκάφος, η οποία του εξασφαλίζει ένα χτύπημα στον αντίπαλο με πιθανότητα $\geq x^*-\epsilon$, αλλά καμία στρατηγική δεν του εγγυάται την x^*.

Βιβλιογραφία

American Management Association, Top Management Decision Gaming, May 2, 1957, American Management Association, Inc., New York, 1957.

Bellman, Richard, and David Blackwell, "Some two-person games involving bluffing," Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 35 (1949), pp. 600-605.

Beresford, R.S., and M. H. Peston, "A mixed strategy in action," Operational Res. Q., Vol. 6 (1955), pp.173-175.

Bernard, Jessie, "The theory of games of strategy as a modern sociology of conflict," Amer. J. Soc., Vol. LIX (1954), pp. 275-287.

Birch, B. J., "On games with almost complete information," Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol.51 (1955), pp. 275-287.

Caywood, T. E., and C. J. Thomas, "Applications of game theory in fighter versus bomber combat," J. Oper. Res. Soc., Vol. 3 (1955), pp.402-411.

Churchman, C. West, Russell L. Ackoff, and Leonard E. Arnoff, Introduction to Operations Research, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957, x, 645 pp.

Dantzig, Robert, "The matrix for an industrial game," Indust. Math., Vol. 6 (1955), pp. 1-5.

Dresher, Melvin, "Games of strategy," Math. Mag., Vol. 25 (1957), pp.93-99.

Glicksberg, Irving L., "A derivative test for finite solutions of games," Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 4 (1953), pp. 895-897.

Haywood, Col. O. G., Jr., "Military decision and the mathematical theory of games," Air University Q., Rev. 4 (1950), 67 pp.

Karlin, Samuel, "The theory of infinite games," Ann. of Math., Vol. 58 (1953), pp. 371-401.

Luce, R. Duncan, and Howard Raiffa, Games and Decisions, Introduction and Critical Survey, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957, xix, 509pp.

Morgenstern, Oskar, "The theory of games," Sci. Amer., Vol. 180 (1949), pp. 22-25.

Von Neumann, John, "A numerical method to determine optimum strategy," Naval Res. Log. Q., Vol. 1 (1954), pp. 109-115.

Nikaidô, Hukukane, "On von Neumann's minimax theorem," Pacific J. Math., Vol. 4 (1954), pp. 65-72.

Ιστότοποι

http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?Location=U2&doc=GetTRDoc.pdf&AD=ADA078804