ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
TECHNICAL UNIVERSITY OF CRETE

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

“ Έλεγχος αποθεμάτων σε συστήματα παραγωγής, με χρόνους παραγωγής Cox-2 και δύο κατηγορίες πελατών.”

Επιβλέπων: Επίκουρος καθηγητής   κ. Ιωαννίδης Ευστράτιος

Επιτροπή: Επίκουρος καθηγητής κ. Ιωαννίδης Ευστράτιος
Καθηγητής κ. Κουϊκόγλου Βασίλειος
Αναπληρωτής καθηγητής κ. Μαρινάκης Ιωάννης

ΝΤΟΥΣΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

ΧΑΝΙΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2019

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται ένα σύστημα παραγωγής που παράγει ένα προϊόν το οποίο απευθύνεται σε δύο κατηγορίες πελατών. Οι αφίξεις των πελατών είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson, ενώ οι χρόνοι παραγωγής ακολουθούν την κατανομή Cox – 2. Στόχος είναι η σύγκριση διαφόρων απλών πολιτικών ελέγχου του αποθέματος και των εισερχόμενων παραγγελιών, ώστε να επιλεγούν αυτές που ελαχιστοποιούν το κόστος λειτουργίας του συστήματος. Για το σκοπό αυτό αναπτύσσονται αναλυτικά και αριθμητικά μοντέλα, που περιγράφουν τη λειτουργία του συστήματος για κάθε εξεταζόμενη πολιτική και επιτρέπουν την εκτίμηση του κόστους λειτουργίας σε κάθε περίπτωση.

1.1.Έννοια και ρόλος των αποθεμάτων.

Ένα βασικό πεδίο στο οποίο υπεισέρχεται η Επιχειρησιακή Έρευνα, και το οποίο είναι συνδετικός κρίκος ανάμεσα στη διαδικασία της παραγωγής και στη διακίνηση των προϊόντων μιας επιχείρησης, είναι ο Έλεγχος των Αποθεμάτων.

Με τον όρο αποθέματα εννοούμε αγαθά που διατηρούνται για κάποια χρονική περίοδο σε αδράνεια περιμένοντας χρήση. Τα αγαθά αυτά μπορεί να είναι πρώτες ύλες, ενδιάμεσα προϊόντα ή ακόμα και διάφορες προμήθειες, μέσα δηλαδή που είναι απαραίτητα για την υποστήριξη της παραγωγής προϊόντων ή της παροχής υπηρεσιών.

Τα αποθέματα γενικά χρησιμοποιούνται για να εξισορροπήσουν τις διαφορές χρονισμού μεταξύ προσφοράς και ζήτησης, αλλά και πιο συγκεκριμένα για τους παρακάτω λόγους:

- Για προστασία από αβεβαιότητες (απόθεμα ασφαλείας)
- Για οικονομική παραγωγή (όφελος από εκπτώσεις, προστασία έναντι πληθωρισμού και των πιθανών αυξήσεων στις τιμές των εμπορευμάτων)
- Για κάλυψη προβλεπόμενων αλλαγών στη ζήτηση ή τον εφοδιασμό (η αποθεματοποίηση πρώτων υλών και εξαρτημάτων βοηθά στην ομαλή και συνεχή ροή της παραγωγής)

Ο έλεγχος και η διαχείριση των αποθεμάτων στα συστήματα παραγωγής αποτελεί ένα πολύ σημαντικό παράγοντα που επηρεάζει την λειτουργία τους. Στόχος είναι η επιλογή του μεγέθους της παραγγελίας καθώς και η συχνότητα αυτής. Ο στόχος αυτός εξασφαλίζει στην επιχείρηση την απαιτούμενη επάρκεια αποθεμάτων για την εύρυθμη λειτουργία της. Μεγάλο όφελος από αυτή την επιλογή είναι η ελαχιστοποίηση παραγόντων κόστους που σχετίζονται με τα αποθέματα. Τέτοια κόστη είναι το κόστος παραγγελίας, το κόστος και το κόστος εκκρεμών παραγγελιών αποθήκευσης. Πιο συγκεκριμένα, ο έλεγχος των αποθεμάτων είναι μια τεχνική με επιστημονικές βάσεις που σκοπό έχει να παρακολουθεί την αποθηκευμένη ποσότητα του αγαθού και να λαμβάνει τις σχετικές αποφάσεις όπως πότε και σε τι ποσότητα θα πρέπει να παραγγελθεί το εκάστοτε υλικό. Έχει αποδειχθεί ότι οι επιχειρήσεις που χρησιμοποιούν επιστημονικό έλεγχο αποθεμάτων έχουν ανταγωνιστικό πλεονέκτημα στην αγορά .

Μια από τις πλέον δημοφιλής πολιτικές διαχείρισης αποθεμάτων είναι η πολιτική οικονομικής ποσότητας παραγγελίας στην οποία η ζήτηση ικανοποιείται αμέσως και χωρίς καθυστέρηση. Το ύψος του αποθέματος παρακολουθείται συνεχώς και όταν πέσει κάτω από ένα συγκεκριμένο επίπεδο, το οποίο καλείται σημείο αναπαραγγελίας τότε δίνεται εντολή παραγγελίας (ή παραγωγής) μίας συγκεκριμένης ποσότητας. Αυτός ο κύκλος αναπλήρωσης επαναλαμβάνεται συνεχώς.

1.2.Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

1.2.1.Πολιτικές ελέγχου σε συστήματα παραγωγής με πολλές κατηγορίες πελατών

Σε αυτή την εργασία εξετάζουμε ένα σύστημα από τα λεγόμενα συστήματα παραγωγής προς αποθήκευση (*make-to-stock*) που παράγουν ένα προϊόν για να ικανοποιήσουν στοχαστική ζήτηση από δύο διαφορετικές κατηγορίες πελατών. Τα συστήματα παραγωγής είναι δυναμικά συστήματα γι’ αυτό και τα προβλήματα του ελέγχου της παραγωγής συνήθως διατυπώνονται ως προβλήματα βελτιστοποίησης δυναμικών συστημάτων και επιλύονται είτε με δυναμικό προγραμματισμό είτε με βέλτιστο έλεγχο. Το πρόβλημα της κατανομής των αποθεμάτων σε ένα σύστημα παραγωγής, όπου ικανοποιούνται διαφορετικοί τύποι πελατών από κοινό απόθεμα, έχει εξεταστεί εκτενώς τις τελευταίες δεκαετίες και είναι και αυτό που μελετάται στην συγκεκριμένη εργασία κάτω από ορισμένες πολιτικές και προϋποθέσεις που παρουσιάζονται εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια .Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό και ως πρόβλημα κατανομής αποθέματος (*stock rationing problem*).

Πολύ συχνά απόδοση προτεραιοτήτων μεταξύ των διαφόρων κατηγοριών πελατών προκύπτει συχνά στην πράξη. Για παράδειγμα, σε ένα δωμάτιο έκτακτης ανάγκης του νοσοκομείου το αίμα κατανέμεται σύμφωνα με τα επίπεδα έκτακτης ανάγκης των ασθενών. Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι η παρακολούθηση ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπου οι κωδικοί υπολογιστών κατανέμονται σύμφωνα με τις βαθμίδες προτεραιότητας, όπως οι καθηγητές, οι προπτυχιακοί φοιτητές και οι μεταπτυχιακοί φοιτητές. Ένα τρίτο παράδειγμα είναι σε ένα στρατιωτικό σύστημα όπου ένα αντικείμενο (π.χ. όπλα ή γενικότερα εξοπλισμός) χρησιμοποιείται σε πολλές διαφορετικές μονάδες με διαφορετικές αποστολές. Ένα τέταρτο παράδειγμα είναι μια γενική εταιρεία πωλήσεων, όπου διαφορετικοί πελάτες για το ίδιο προϊόν, αποφέρουν διαφορετικά κέρδη ανά μονάδα προϊόντος που πωλείται. Εκτός από αυτά τα συστήματα, βρίσκουμε παραδείγματα κατανομής σε κρατήσεις αεροπορικών εταιρειών, προπώλησης εισιτηρίων κ.λπ.

Για απλά συστήματα παραγωγής που αποτελούνται από μία μηχανή και παράγουν ένα τύπο προϊόντος πολύ συχνά αποδεικνύεται ότι οι βέλτιστες πολιτικές ελέγχου του ρυθμού παραγωγής είναι τύπου κατωφλιού (*threshold-type*).Οι πολιτικές αυτού του τύπου ορίζουν πως ο βέλτιστος ρυθμός παραγωγής είναι ο μέγιστος δυνατός, όσο η στάθμη του αποθέματος έτοιμων προϊόντων είναι χαμηλότερη από ένα προκαθορισμένο επίπεδο. Όταν ο αριθμός του αποθέματος έτοιμων προϊόντων γίνει ίσος με αυτό το προκαθορισμένο κατώφλι, η μηχανή παράγει συγχρονισμένα με την ζήτηση, ώστε το απόθεμα να διατηρείται σε αυτό το επίπεδο. Αν ο ρυθμός παραγωγής δεν μεταβάλλεται τότε η μηχανή σταματάει την λειτουργία της μόλις το απόθεμα φτάσει το προκαθορισμένο κατώφλι και επανεκκινεί μόλις το απόθεμα πέσει κάτω από αυτό το κατώφλι, που συνήθως ονομάζεται *βασικό απόθεμα* (base stock).

Ανατρέχοντας στην βιβλιογραφία αξίζει να αναφερθούν ορισμένες από τις πιο σημαντικές έρευνες που έχουν γίνει πάνω στο πρόβλημα κατανομής αποθέματος. Πρώτος ο Topkis (1968) εισάγει την κατανομή των αποθεμάτων χρησιμοποιώντας ένα δυναμικό μοντέλο ελέγχου, για να μελετήσει την βέλτιστη πολιτική παραγγελιών και κατανομής του αποθέματος σε ένα σύστημα με δύο κατηγορίες ζήτησης σε διακριτό χώρο. Αργότερα οι Nahmias και Demmy (1981) συγκρίνουν τα ποσοστά κέρδους σε διάφορα συστήματα με ή χωρίς κατανομή του αποθέματος για δύο κατηγορίες ζήτησης πελατών. Ο Cohen (1988) θεωρεί ένα πρόβλημα διακριτού χρόνου με δύο κατηγορίες ζήτησης. Σε κάθε περίοδο το απόθεμα χρησιμοποιείται για να καλύψει πρώτα τις απαιτήσεις των πελατών της υψηλής προτεραιότητας και έτσι οι πελάτες χαμηλής προτεραιότητας ικανοποιούνται με όσο απόθεμα έχει περισσέψει. Σε αντίθεση με ό,τι συνέβαινε σε προηγούμενες έρευνες ο Ha (1997) εφαρμόζει την κατανομή των αποθεμάτων σε συστήματα προς αποθεματοποίηση με αρκετές κατηγορίες πελατών, όπου δεν επιτρέπονται οι εκκρεμείς παραγγελίες και εφαρμόζει διαφορετική πολιτική για κάθε κατηγορία πελατών. Συγκεκριμένα, η απόφαση παραγωγής καθορίζεται από μια πολιτική κατωφλίου (βασικού αποθέματος) και η κατανομή των αποθεμάτων καθορίζεται από ένα κατώφλι διανομής, το οποίο μειώνεται όσο αυξάνεται το επίπεδο προτεραιότητας των πελατών. Υπολογίζει τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος και αξιολογεί την απόδοσή του με την προϋπόθεση ότι οι χρόνοι επεξεργασίας ακολουθούν την εκθετική κατανομή καθώς και την κατανομή Erlang σε μεταγενέστερη έρευνα του (Ηα, 2000) . Έπειτα το 2002 οι Lee και Hong στηριζόμενοι στην έρευνα του Ha μελέτησαν ένα σύστημα παραγωγής ενσωματώνοντας σε αυτό και το κόστος εγκατάστασής του, υπό την προϋπόθεση ότι οι χρόνοι επεξεργασίας των προϊόντων ακολουθούσαν την κατανομή Cox-2 φάσεων αντί της εκθετικής ή της Erlang. Η κατανομή Cox είναι πολύ χρήσιμη στην μοντελοποίηση των χρόνων επεξεργασίας στην πράξη. Το σύστημα που μελετούν είναι πολλαπλών κατηγοριών πελατών και υπάρχουν απώλειες πωλήσεων. Το σύστημά τους αναπαρίσταται με αλυσίδες Μαρκόβ. Το μοντέλο που υλοποίησαν έδινε μία καλή προσέγγιση για συστήματα που θέλουν να μειώσουν τον χρόνο παραγωγής προϊόντων χωρίς ακόμα όμως να μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα που παράγουν πολλαπλά προϊόντα. Όπως αναφέρθηκε ήδη πολλές μελέτες έχουν γίνει σχετικά με την κατανομή ενός κοινού αποθέματος πάνω σε πολλές κατηγορίες ζήτησης. Ενδεικτικά, κάποιος μπορεί να ανατρέξει στις εργασία του Ioannidis (2011) όπου εξετάζεται ένα σύστημα παραγωγής ενός σταδίου με δύο κατηγορίες πελατών και εκτός των άλλων γίνεται έλεγχος αποδοχής παραγγελιών. Επίσης, παρόμοιες μελέτες έχουμε από τους Gayon et al. (2009) σε συστήματα ενός προϊόντος με πολλές κατηγορίες πελατών και με διαφορετικά κόστη εκκρεμών παραγγελιών.

1.2.2.Πολιτικές αποδοχής ή απόρριψης πελατών

Οι πολιτικές αποδοχής πελατών που ακολουθούνται σε ένα σύστημα παραγωγής είναι συνήθως απλές και χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες. Στην πρώτη πολιτική αυτό που συμβαίνει είναι ότι, όταν δεν υπάρχουν έτοιμα προϊόντα στο σύστημα, τότε απορρίπτονται όλες παραγγελίες, ενώ στην δεύτερη πολιτική ότι γίνονται όλες οι παραγγελίες γίνονται δεκτές. Σε περιόδους όπου δεν υπάρχει απόθεμα στο σύστημα εισερχόμενων παραγγελιών, ονομάζεται *πολιτική πλήρους απόρριψης (LS, lost sales)*, ενώ στην περίπτωση όπου γίνονται όλες αποδεκτές, η πολιτική ονομάζεται *πλήρους αποδοχής (CB, complete backordering).* Η επιλογή της κάθε πολιτικής γίνεται κατά περίπτωση. Οι πολιτικές *LS* και *CB* είναι εκ διαμέτρου αντίθετες. Μια ενδιάμεση πολιτική ελέγχου παραγγελιών είναι η πολιτική *μερικής αποδοχής* της μη ικανοποιημένης ζήτησης. Η πολιτική αυτή ορίζει ένα κατώφλι, που ονομάζεται *έλλειμμα βάσης*. Όταν το πλήθος παραγγελιών που εκκρεμούν είναι κάτω από το έλλειμμα βάσης, τότε όλες οι παραγγελίες γίνονται δεκτές, ενώ όταν οι εκκρεμείς παραγγελίες φθάσουν αυτό το κατώφλι, τότε όλες οι εισερχόμενες παραγγελίες απορρίπτονται (Οικονομόπουλος 2005).

1.3.Δομή της διπλωματικής εργασίας

Η παρούσα εργασία διαρθρώνεται ως εξής στα επόμενα κεφάλαια: Στο κεφάλαιο 2 γίνεται πλήρης περιγραφή του συστήματος που μελετάται και των πολιτικών που ακολουθούνται σε αυτό καθώς και μια αναφορά των θεωρητικών εργαλείων που χρειάζονται για την επίλυση του. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται με αναλυτικό τρόπο οι εξισώσεις, η μοντελοποίηση και όλη η διαδικασία επίλυσης της κάθε πολιτικής που μελετάται. Στο κεφάλαιο 4 εφόσον έχουν γίνει οι κατάλληλοι υπολογισμοί από το προηγούμενο κεφάλαιο, υπολογίζεται η συνάρτηση κόστους για το κάθε σύστημα παραγωγής. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα βάσει του προγράμματος που χρησιμοποιήθηκε για την κάθε πολιτική και η μεταξύ τους σύγκριση για διάφορες τιμές παραμέτρων και μεταβλητών. Τέλος, στο κεφάλαιο 6 καταγράφονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις συγκρίσεις και τις μελέτες του κεφαλαίου 5.

2.1.Περιγραφή Συστήματος

Στην παρούσα εργασία μελετάται ένα σύστημα παραγωγής μιας μηχανής, που παράγει ένα προϊόν το οποίο απευθύνεται σε δύο κατηγορίες πελατών. Οι αφίξεις των πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson και είναι τυχαίες ενώ οι χρόνοι παραγωγής την κατανομή Cox - 2. Πιο συγκεκριμένα, όλα τα προϊόντα που παράγονται στο σύστημα περνούν από το 1ο στάδιο εξυπηρέτησης και στην συνέχεια είτε προχωρούν στο 2ο στάδιο παραγωγής με πιθανότητα q είτε η επεξεργασία τους ολοκληρώνεται με πιθανότητα $1-q$. Οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα με δύο διαφορετικούς ρυθμούς λ_1 και λ_2, όπου και $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ είναι ο συνολικός ρυθμός άφιξης πελατών. Κάθε πελάτης που φτάνει θα μπορεί να ζητήσει μία μονάδα προϊόντος. Οι πελάτες της 1ης κατηγορίας έχουν προτεραιότητα έναντι των πελατών της 2ης κατηγορίας. Επίσης αναφέρεται ότι στο σύστημα δεν επιτρέπονται εκκρεμείς παραγγελίες για την 2η κατηγορία πελατών και εξετάζουμε δύο πιθανές επιλογές γαι την 1η κατηγορία πελατών: μπορεί να έχουμε πλήρη ή μερική αποδοχή των παραγγελιών αυτής της κατηγορίας. Η βασική πολιτική ελέγχου του αποθέματος καθορίζεται από δύο κατώφλια μορφής (s,r). Πιο συγκεκριμένα:

Το σύστημά μας παράγει στον μέγιστο ρυθμό όσο το απόθεμα έτοιμων προϊόντων είναι μικρότερο από ένα κατώφλι που ονομάζεται βασικό απόθεμα (*base stock*) και συμβολίζεται με s. Έτσι λοιπόν το s αποτελεί μέγιστο όριο αποθέματος, καθώς και ένα κατώφλι που έχει σαν σκοπό την φύλαξη του συστήματος από τυχόν ελλείψεις αλλά και από την υπέρμετρη παραγωγή προϊόντων. Με r συμβολίζεται το κατώφλι προτεραιότητας των δύο τύπων πελατών που εισέρχονται στο σύστημα και ουσιαστικά αποτελεί ένα κατώφλι διανομής του αποθέματός μας. Το κατώφλι προτεραιότητας προσπαθεί να εξασφαλίσει στην ουσία ότι οι μελλοντικές παραγγελίες τύπου 1 θα ικανοποιηθούν χωρίς καθυστέρηση. Το σύστημα ικανοποιεί μέχρι το κατώφλι r όλες τις εισερχόμενες παραγγελίες ανεξαρτήτως κατηγορίας. Αν το απόθεμα πέσει κάτω από αυτό το κατώφλι ικανοποιούνται μόνο οι πελάτες υψηλής προτεραιότητας. Πιο αναλυτικά, το σύστημα εξυπηρετεί τους πελάτες τύπου 1 και 2 από το υπάρχον απόθεμα, αν $n > r$, όπου n είναι η κατάσταση του συστήματος. Για την πρώτη πολιτική όταν το απόθεμα πέσει κάτω από την τιμή του κατωφλιού r τότε εξυπηρετούνται μόνο οι παραγγελίες των πελατών τύπου 1, οι οποίες και απορρίπτονται μονάχα όταν η τιμή του αποθέματος s γίνει ίση με 0, καθώς στην πολιτική αυτή δεν επιτρέπονται εκκρεμείς παραγγελίες. Το σύστημα αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια αλυσίδα Μαρκόβ συνεχούς χρόνου και θα εξεταστεί στο κεφάλαιο 3 τόσο η μοντελοποίηση όσο και η επίλυσή του. Η πολιτική που εξετάζουμε σε αυτό το σύστημα ονομάζεται πολιτική βασικού αποθέματος απόδοσης προτεραιότητας και πλήρους απόρριψης και θα συμβολίζεται με τα αρχικά ΒΑΠΑ σε όλη την εργασία.

Πέρα από την πολιτική ΒΑΠΑ εξετάζονται και δύο επιπλέον πολιτικές για το σύστημα παραγωγής που μελετάμε τις ΒΑΠΑ2 (πολιτική βασικού αποθέματος απόδοσης προτεραιότητας και απόρριψης πελατών τύπου 2) και ΒΑΠΜΑ2 (πολιτική βασικού αποθέματος απόδοσης προτεραιότητας και απόρριψης πελατών τύπου 2 και μερικής αποδοχής πελατών τύπου 1). Η βασική διαφορά με την ΒΑΠΑ και για τις δύο αυτές πολιτικές είναι ότι επιτρέπονται εκκρεμείς παραγγελίες. Πιο αναλυτικά το σύστημα εξυπηρετεί τους πελάτες τύπου 1 και 2 από το υπάρχον απόθεμα αν $n > r$. Αν το n είναι θετικό έχουμε απόθεμα ίσο με το n, ενώ αν το n είναι αρνητικό τότε έχουμε εκκρεμείς παραγγελίες πελατών τύπου 1 ίσες με $-n$. Σε διαφορετική περίπτωση το σύστημα απορρίπτει τους πελάτες της δεύτερης κατηγορίες, καθώς έχουν χαμηλή προτεραιότητα. Στην πολιτική ΒΑΠΑ2 έχουμε άπειρο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών για τους πελάτες τύπου 1 , οι οποίοι αναμένουν στο σύστημα έως ότου εξυπηρετηθεί η παραγγελία τους. Όμοια με την πολιτική ΒΑΠΑ και εδώ η βασική πολιτική ελέγχου του αποθέματος καθορίζεται από δύο κατώφλια μορφής (s,r). Η διαφορά τώρα για την πολιτική ΒΑΠΜΑ2, είναι ότι έχουμε πεπερασμένο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών για τους πελάτες τύπου 1 έστω c, και άρα η βασική πολιτική ελέγχου του αποθέματος καθορίζεται αυτή τη φορά από τρία κατώφλια μορφής (s,r,c). Ακόμα, και οι δύο αυτές πολιτικές μπορούν να αναπαρασταθούν ως αλυσίδες Μαρκόβ συνεχούς χρόνου, κάτι το οποίο θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 3.

Τέλος, υπολογίζονται και στις τρεις πολιτικές τα εκάστοτε κόστη όπως το κόστος απόρριψης των πελατών τύπου 1 και 2, το κόστος του μέσου αποθέματος, το κόστος εκκρεμών παραγγελιών εκεί που συναντάται και το συνολικό κόστος λειτουργίας του κάθε συστήματος. Συγκρίνονται αριθμητικά τα αποτελέσματα και των τριών πολιτικών και εξάγονται τα ανάλογα συμπεράσματα για την απόδοση τους.

2.2.Θεωρητικά Εργαλεία

2.2.1.Αλυσίδες Μαρκόβ

Συχνά για να περιγραφούν μαθηματικά τα διάφορα συστήματα παραγωγής και να εκτιμηθούν διάφορα μέτρα απόδοσης, όπως η μέση παραγωγή του συστήματος και η μέση στάθμη των χώρων αποθήκευσης, χρησιμοποιούνται οι αλυσίδες Μαρκόβ που είναι ακριβή μοντέλα για προβλήματα με εκθετικούς χρόνους εμφάνισης των γεγονότων.

Η αλυσίδα Μαρκόβ, ή Μαρκοβιανή αλυσίδα, που πήρε το όνομα της από τον Αντρέι Μαρκόβ, είναι ένα μαθηματικό σύστημα που μεταβάλλεται από μια κατάσταση σε μια άλλη, σε διακριτό σύνολο καταστάσεων. Είναι μια τυχαία διαδικασία που δε διατηρεί μνήμη για τις προηγούμενες μεταβολές. Η επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση και σε καμιά περίπτωση από την παρελθούσα.

Για την περιγραφή και την αναπαράσταση του συστήματος θα χρησιμοποιηθούν οι συγκριμένες αλυσίδες σε συνεχή όμως χρόνο, δηλαδή υπάρχει μετάβαση από μία κατάσταση στην επόμενη χωρίς να γίνεται επιστροφή στην προηγούμενη.

Σύμφωνα με τον ορισμό μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ σε συνεχή χρόνο και χώρο καταστάσεων Ω={0,1,2, … .} καλείται Μαρκοβιανή ή στοχαστική ανέλιξη Markov αν για κάθε $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots . t_\nu \, \kappa\alpha\iota j_1, \dots \dots . j_\nu \in \Omega$

P(X$(t_\nu) = j_\nu | X(t_{\nu-1}) = j_{\nu-1}, \dots \dots . , X(t_1) = j_1$
=P(X$(t_\nu) = j_\nu | X(t_{\nu-1}) = j_{\nu-1})$

Οι πιθανότητες $p_{ij}(s,t) = P(X(t) = j | X(s) = i) \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; 0 \leq s < t \; \kappa\alpha\iota$ $i,j \in \Omega$ καλούνται πιθανότητες μεταπήδησης και ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorovοι οποίες χρησιμοποιούνται εκτενώς στην παρούσα εργασία και έχουν την εξής μορφή:

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t) \, , 0 \leq s < u < t$$

Το γινόμενο $p_{ik} \; \kappa\alpha\iota \; p_{kj}$ είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ξεκινώντας από την κατάσταση *i* την χρονική στιγμή *s*, η διαδικασία πηγαίνει στην κατάσταση *k* την χρονική στιγμή *u* και μετά στην κατάσταση *j* στιγμή *t*. Αθροίζοντας αυτές τις δεσμευμένες πιθανότητες για όλες τις ενδιάμεσες καταστάσεις *k* δίνει την πιθανότητα $p_{ij}(s,t)$.

2.2.2.Η διαδικασία Poisson

Η πιο απλή Μαρκοβιανή αλυσίδα σε συνεχή χρόνο είναι η στοχαστική ανέλιξη Poisson, η οποία χρησιμοποιείται κατά κόρον στην θεωρία ουρών και δείχνει την άφιξη των πελατών σε ένα σύστημα ανά μονάδα χρόνου.

Σύμφωνα με τον επίσημο ορισμό μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ καλείται Poisson αν:

1. $X(0) = 0$

2. Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις

3. Για κάθε $0 \leq s < t$ η τυχαία μεταβλητή $X(t) - X(s)$ είναι Poisson με παράμετρο $\lambda(t-s)$, λ>0, δηλαδή:

$$P(X(t) - X(s) = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}, k = 0,1, \dots \dots ..$$

2.2.3.Κατανομές φάσεων

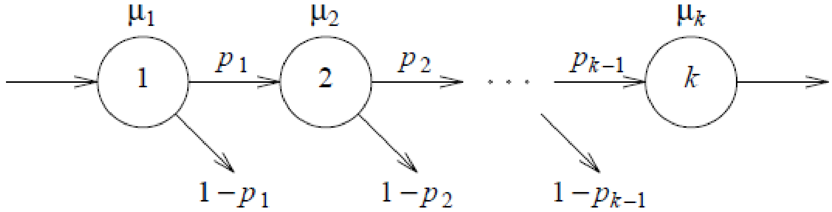
Στην μοντελοποίηση στοχαστικών συστημάτων έχει φανεί πολύ χρήσιμη η εκθετική κατανομή. Λόγω της μαθηματικής της μορφής αλλά και της αμνήμονης ιδιότητας καταλήγει σε απλούς και εύχρηστους τύπους. Επίσης, λόγω της "τυχαιότητας" που την χαρακτηρίζει μπορεί να περιγράψει επαρκώς μεγάλο αριθμό φυσικών προβλημάτων. Καθώς όμως τα προβλήματα γίνονται πιο περίπλοκα, με λιγότερες παραδοχές και εξιδανικεύσεις, το εκθετικό μοντέλο αρχίζει να υστερεί. Οι κατανομές φάσεων χρησιμοποιούνται για να λύσουν αυτό το πρόβλημα. Έχουν δύο βασικές ιδιότητες που τις καθιστούν τόσο χρήσιμες.

Πρώτον, επειδή βασίζονται στην εκθετική, διατηρούν μια σχετικά απλή μορφή. Δεύτερον, οι συναρτήσεις κατανομής τους είναι πυκνές στο πεδίο των συναρτήσεων πράγμα που σημαίνει ότι μπορούν να αναπαραστήσουν οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση.

2.2.4 .Η κατανομή Cox

Η κατανομή αυτή παρουσιάστηκε από τον Cox το 1955, ο οποίος έδειξε ότι κάθε κατανομή με κλασματικό μετασχηματισμό Laplace μπορεί να αναπαρασταθεί από την κατανομή του Cox. Στην ουσία πρόκειται για συνδυασμό των στοιχείων της υπερεκθετικής και υποεκθετικής κατανομής. Το αποτέλεσμα είναι μια κατανομή που έχει μεγάλη ευελιξία και μπορεί να προσαρμοστεί σε πάρα πολλά συστήματα. Το σύστημα διέρχεται από διαδοχικές εκθετικές φάσεις με τη διαφορά ότι μπορεί να σταματήσει μετά από οποιαδήποτε από αυτές. Δεν είναι σίγουρο, δηλαδή, πόσες φάσεις θα εκτελεστούν. Η κατανομή αυτή έχει την πολύ χρήσιμη ιδιότητα ότι μπορεί να αναπαραστήσει οποιαδήποτε ακυκλική κατανομή φάσεων.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται μία κατανομή Cox με ρυθμούς εξυπηρέτησης $\mu_1, \mu_2, \ldots. \mu_\kappa$ όπου πριν από κάθε στάδιο ο πελάτης που εισέρχεται στο σύστημα επιλέγει αν θα συνεχίσει τη διάσχιση ή θα σταματήσει σύμφωνα με τις αντίστοιχες πιθανότητες p και 1−p αντίστοιχα.



3.1.Μοντελοποίηση συστήματος πολιτικής ΒΑΠΑ

Το σύστημα παραγωγής που μελετάται μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μία αλυσίδα Μαρκόβ συνεχούς χρόνου. Οι αφίξεις πελατών και των δύο κατηγοριών ακολουθούν την κατανομή Poisson, ενώ οι χρόνοι παραγωγής ακολουθούν την κατανομή Cox-2. Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από τις εξής παραμέτρους:

λ_i: ρυθμός άφιξης πελατών κατηγορίας i, $i = 1, 2$. Ισχύει, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ότι $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$

s: βασικό απόθεμα, είναι το μέγιστο επίπεδο αποθέματος

r: κατώφλι προτεραιότητας. Όταν το απόθεμα είναι ίσο ή μικρότερο του r ικανοποιούνται μόνο οι παραγγελίες πελατών τύπου 1.

μ_i: ρυθμός ολοκλήρωσης της φάσης i του κύκλου παραγωγής, $i = 1, 2$.

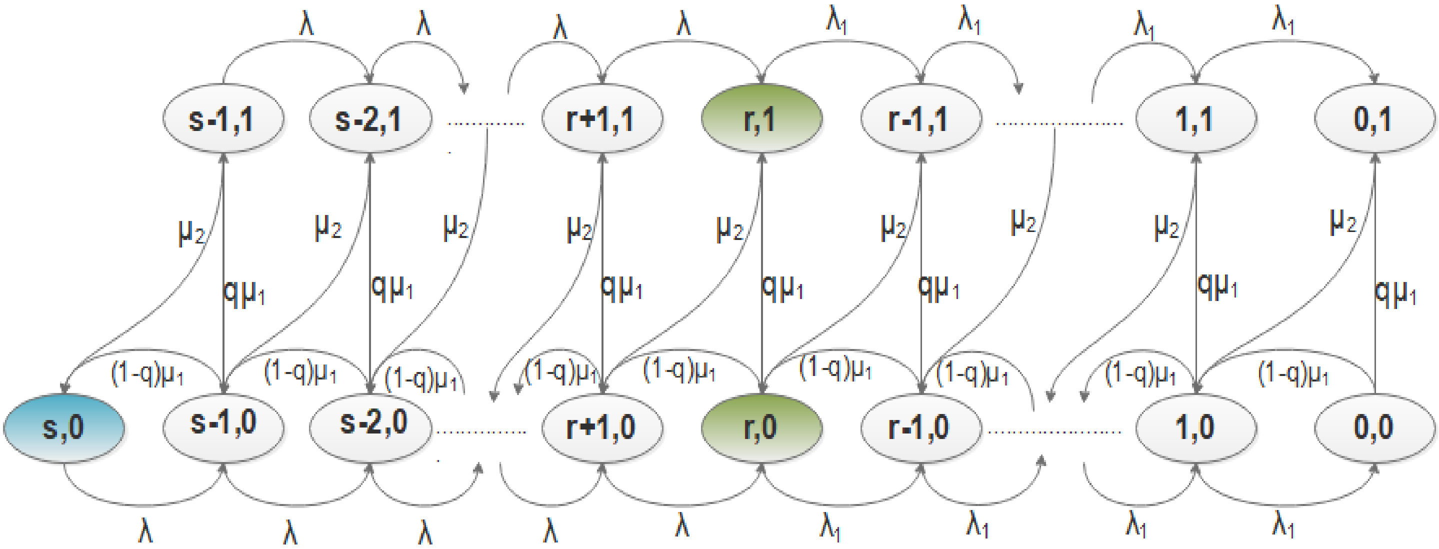
q: πιθανότητα μετάβασης από την φάση παραγωγής 1 στην φάση 2.

Τέλος πρέπει να αναφέρουμε ότι σε αυτή την πολιτική δεν επιτρέπονται εκκρεμείς παραγγελίες.

Η κατάσταση του συστήματος είναι της μορφής (n, i), όπου n είναι το ύψος του αποθέματος και η μεταβλητή i=0,1 εκφράζει την φάση παραγωγής στην οποία βρίσκεται το σύστημα. Όταν i=0 θεωρούμε ότι το παραγόμενο προϊόν βρίσκεται στην 1η φάση παραγωγής και όταν i=1 βρίσκεται στην 2η φάση επεξεργασίας. Επίσης καθώς το πλήθος των καταστάσεων του συστήματος είναι πεπερασμένο , το σύστημα είναι ευσταθές.

Μιας και οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι εκθετικά κατανεμημένοι το σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια αλυσίδα Μαρκόβ συνεχούς χρόνου. Εφόσον το σύστημα παραγωγής περιγράφεται ως μια αλυσίδα Μαρκόβ, οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman – Kolmogorov (C-K) στην μόνιμη κατάσταση.

$$P(K) \times (\text{Ρυθμός εξόδου από την κατάσταση } \kappa) = \sum_{i \neq k} \text{όλες οι καταστάσεις } P(i) \times (\text{μετάβαση από } i \text{ σε } \kappa)$$



Γράφημα 1: Αλυσίδα Markov για την πολιτική ΒΑΠΑ

3.1.1.Εξισώσεις καταστάσεων του συστήματος, Chapman-Kolmogorov

Όπου $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$P(s,0)(\lambda) = P(s-1,1)\mu_2 + P(s-1,0)(1-q)\mu_1 \quad (1)$$

$$P(n,0)(\lambda + \mu_1) = P(n-1,1)\mu_2 + P(n-1,0)(1-q)\mu_1 + P(n+1,0)\lambda \quad (2)$$

$$\text{για } n = r+1, \dots \dots . s-1$$

$$P(s-1,1)(\lambda+\mu_2) = P(s-1,0)q\mu_1 \tag{3}$$

$$P(n,1)(\lambda+\mu_2) = P(n,0)q\mu_1 + P(n+1,1)\lambda \tag{4}$$

$$\text{για } n = r+1, \dots.., s-2$$

$$P(r,1)(\lambda_1+\mu_2) = P(r+1,1)\lambda + P(r,0)q\mu_1 \tag{5}$$

$$P(r,0)(\lambda_1+\mu_1) = P(r-1,0)(1-q)\mu_1 + P(r-1,1)\mu_2 + P(r+1,0)\lambda \tag{6}$$

$$P(n,1)(\lambda_1+\mu_2) = P(n+1,1)\lambda_1 + P(n,0)q\mu_1 \tag{7}$$

$$\text{για } n = r-1, \dots\dots, 1$$

$$P(n,0)(\lambda_1+\mu_1) = P(n-1,0)(1-q)\mu_1 + P(n+1,0)\lambda_1 + P(n-1,1)\mu_2 \tag{8}$$

$$\text{για } n = r-1, \dots\dots., 1$$

$$P(0,1)\mu_2 = P(0,0)q\mu_1 + P(1,1)\lambda_1 \tag{9}$$

$$P(0,0)\mu_1 = P(1,0)\lambda_1 \tag{10}$$

Οι εξισώσεις (1),(3),(5),(6),(9),(10) αποτελούν συνοριακές συνθήκες του συστήματος.

3.1.2.Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο διαδοχικών αντικαταστάσεων σε συνδυασμό με την εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{n=0}^{s}\sum_{i=0}^{1} P(n,i) = 1$. Λύνουμε, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, όλες τις πιθανότητες του συστήματος συναρτήσει του $P(s,0)$ δηλαδή έχουμε:

$$P(n,i) = C(n,i)P(s,0) \tag{11}$$

Πιο συγκεκριμένα ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

Υπολογίζουμε αρχικά την πιθανότητα $P(s,0)$. Είναι προφανές ότι $C(s,0)=1$ από την σχέση (11) και ότι $C(s,1)=0$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (1), (3) έχουμε:

$$P(s-1,0)=P(s,0)\left[\frac{\lambda(\lambda+\mu_2)}{\beta}\right] \tag{12}$$

Όπου $\beta=\lambda\mu_1+\mu_1\mu_2-q\lambda\mu_1$ και κατά συνέπεια

$$C(s-1,0)=\frac{\lambda(\lambda+\mu_2)}{\beta}$$

Έπειτα αντικαθιστώ στην εξίσωση (3) την σχέση (12), προκύπτει ότι

$$P(s-1,1)=P(s,0)\left(\frac{\lambda q\mu_1}{\beta}\right) \tag{13}$$

και ο συντελεστής γίνεται:

$$C(s-1,1)=\frac{\lambda q\mu_1}{\beta}$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (2) και (4) για $n=s-1$

και $n=s-2$ αντίστοιχα και καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις:

$$P(s-1,0)(\lambda+\mu_1)=P(s-2,1)\mu_2+P(s-2,0)(1-q)\mu_1+P(s,0)\lambda$$
$$P(s-2,1)(\lambda+\mu_2)=P(s-2,0)q\mu_1+P(s-1,1)\lambda$$

Γνωρίζοντας τις πιθανότητες $P(s-1,0)$, $P(s-1,1)$ συναρτήσει του $P(s,0)$, λύνουμε το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων και οδηγούμαστε στις εκφράσεις:

$$P(s-2,0)=P(s,0)\left[\frac{\lambda(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_1)-\beta\lambda}{\beta^2}\right](\lambda+\mu_2)$$

$$C(s-2{,}0) = \left[\frac{\lambda(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_1)-\beta\lambda}{\beta^2}\right](\lambda+\mu_2)$$

$$P(s-2{,}1) = P(s,0)\left[\frac{(\lambda(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_1)-\beta\lambda)(\lambda+\mu_2)^2-\beta^2\lambda}{\beta^2(\lambda+\mu_2)}\right]$$

$$C(s-2{,}1) = \left[\frac{(\lambda(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_1)-\beta\lambda)(\lambda+\mu_2)^2-\beta^2\lambda}{\beta^2(\lambda+\mu_2)}\right]$$

Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες για τις καταστάσεις στο διάστημα $n = r + 1, \ldots, s-2$ προκύπτουν από τις εξισώσεις (2) και (4) μετά από διαδοχικές αντικαταστάσεις. Τελικά καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις:

$$P(n-1{,}0) = \left(\frac{\lambda+\mu_2}{\beta}\right)\left(P(n,0)(\lambda+\mu_1) + P(n,1)\left(\frac{\lambda\mu_2}{\lambda+\mu_2}\right) + P(n+1{,}0)\lambda\right)$$

$$C(n-1{,}0) = \left(\frac{\lambda+\mu_2}{\beta}\right)\left(C(n,0)(\lambda+\mu_1) + C(n,1)\left(\frac{\lambda\mu_2}{\lambda+\mu_2}\right) + C(n+1{,}0)\lambda\right)$$

$$P(n,1) = P(n,0)\left(\frac{q\mu_1}{\lambda+\mu_2}\right) + P(n+1{,}1)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu_2}\right)$$

$$C(n,1) = C(n,0)\left(\frac{q\mu_1}{\lambda+\mu_2}\right) + C(n+1{,}1)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu_2}\right)$$

Για να υπολογίσω τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης στο κατώφλι *r*, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (2) για *n=r+1* και την συνοριακή συνθήκη (5). Οπότε έχουμε:

$$P(r,0) = \left(\frac{\mu_2+\lambda_1}{\beta_2}\right)\left[P(r+1{,}0)(\lambda+\mu_1) - P(r+1{,}1)\left(\frac{\lambda\mu_2}{\mu_2+\lambda_1}\right) - P(r+2{,}0)\lambda\right] \tag{14}$$

$C(r,0) = \left(\frac{\mu_2+\lambda_1}{\beta_2}\right)\left[C(r+1,0)(\lambda+\mu_1) - C(r+1,1)\left(\frac{\lambda\mu_2}{\mu_2+\lambda_1}\right) - C(r+2,0)\lambda\right]$

Όπου $\beta_2 = \mu_1\mu_2 + \mu_1\lambda_1 - q\mu_1\lambda_1$

Με αντικατάσταση της σχέσης (14) στην συνοριακή συνθήκη (5) υπολογίζεται ο συντελεστής $C(r,1)$, δηλαδή:

$$\mathrm{C(r,1)}=\left(\frac{\lambda}{\lambda_1+\mu_2}\right)\mathrm{C(r+1,1)}\left(\frac{q\mu_1(\mu_2+\lambda_1)}{\beta_2}\right)\begin{bmatrix}\mathrm{C(r+1,0(}\lambda+\mu_1\mathrm{)-} \\ \mathrm{C(r+1,1)}\left(\frac{\lambda\mu_2}{\lambda_1+\mu_2}\right)\mathrm{C(r+2,0)}\lambda\end{bmatrix}$$

Συνεχίζοντας οι καταστάσεις για $n = r-1, \ldots\ldots, 2$ μπορούν να εκφραστούν λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (8) για $n = r-1, \ldots\ldots, 2$ και (7) για $n = r-1, \ldots\ldots, 1$. Οι συντελεστές που προκύπτουν είναι:

$C(n-1,0) = (1/(1-q)\mu_1)(C(n,0)(\lambda_1+\mu_1) - C(n+1,0)\lambda_1 - C(n-1,1)\mu_2)$

$C(n,1) = (1/\lambda_1+\mu_1)(C(n+1,1)\lambda_1 + C(n,0)q\mu_1)$

Και τέλος οι συντελεστές για την κατάσταση *n*=0 προκύπτουν από τις συνοριακές συνθήκες (9) και (10), γνωρίζοντας τους συντελεστές $C(1,0)$ και $C(1,1)$ που έχουν προκύψει από την εξίσωση (8) για *n=2* και την εξίσωση (7) για *n*=1.Δηλαδή:

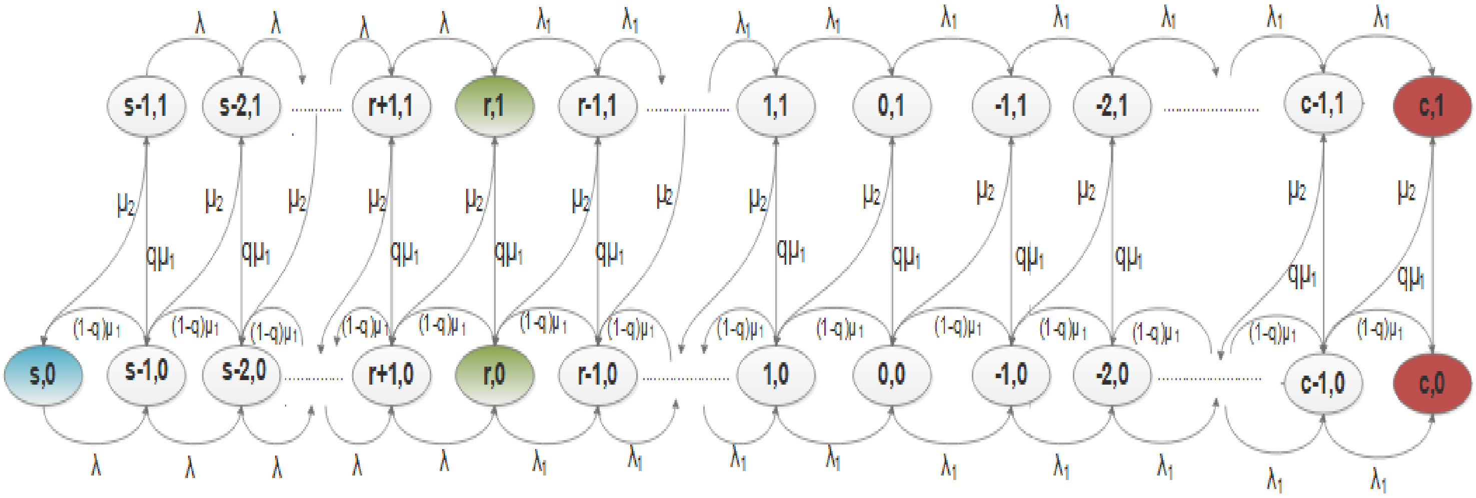
$C(0,0) = C(1,0)\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$

$C(0,1) = (1/\mu_2)(C(0,0)q\mu_1 + C(1,1)\lambda_1)$

Έτσι λοιπόν, όπως αναφέραμε και παραπάνω, με αυτό τον τρόπο καταφέρνουμε να εκφράσουμε όλες τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης συναρτήσει του $P(s,0)$ και στην συνέχεια υπολογίζουμε την πιθανότητα $P(s,0)$ με βάση την εξίσωση κανονικοποίησης: $P(s,0) = 1/\sum_{n=0}^{s}\sum_{i=0}^{1} C(n,i)$. Στην συνέχεια στα κεφάλαια 4 και 5 έχοντας εκτιμήσει τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης προχωράμε στην μελέτη και στην εκτίμηση διαφόρων μέτρων απόδοσης της πολιτικής ΒΑΠΑ που θα εξεταστούν πιο αναλυτικά εκεί.

3.2.Μοντελοποίηση συστήματος πολιτικής ΒΑΠΜΑ2

Σε αυτό το σύστημα όπως έχει ήδη αναφερθεί στο κεφάλαιο 2 ακολουθείται παρόμοια πολιτική με την ΒΑΠΑ με την βασική διαφορά ότι όταν το απόθεμα στο σύστημα γίνει ίσο με μηδέν τότε δημιουργείται έλλειμα και το σύστημα δέχεται ένα πεπερασμένο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών για τους πελάτες τύπου 1 μέχρι ένα ορισμένο κατώφλι c. Συνεπώς όταν το n είναι αρνητικό δημιουργείται έλλειμα για τους πελάτες της πρώτης κατηγορίας. Ακόμα οι πελάτες τύπου 2 απορρίπτονται από το σύστημα όταν το απόθεμα πάρει τιμές $r \leq n \leq c$. Δηλαδή η πολιτική ΒΑΠΜΑ2 είναι $s + c + 1$ καταστάσεων συγκριτικά με την ΒΑΠΑ. Η πολιτική που εξετάζεται εδώ καθορίζεται από τρία κατώφλια (s, r, c). Τέλος, καθώς το πλήθος των καταστάσεων είναι πεπερασμένο το σύστημα είναι ευσταθές.



Γράφημα 2: Αλυσίδα Markov για την πολιτική ΒΑΠΜΑ2.

3.2.1.Εξισώσεις καταστάσεων του συστήματος, Chapman-Kolmogorov

Όπου $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$P(s,0)(\lambda) = P(s-1,1)\mu_2 + P(s-1,0)(1-q)\mu_1 \qquad (15)$$

$$P(n,0)(\lambda+\mu_1) = P(n-1,1)\mu_2 + P(n-1,0)(1-q)\mu_1 + P(n+1,0)\lambda \quad (16)$$

$$\text{για } n = r+1, \dots\dots .\, s-1$$

$$P(s-1,1)(\lambda+\mu_2) = P(s-1,0)q\mu_1 \qquad (17)$$

$$P(n,1)(\lambda+\mu_2) = P(n,0)q\mu_1 + P(n+1,1)\lambda \qquad (18)$$

$$\text{για } n = r+1, \dots\dots, s-2$$

$$P(r,1)(\lambda_1+\mu_2)=P(r+1,1)\lambda+P(r,0)q\mu_1 \quad (19)$$

$$P(r,0)(\lambda_1+\mu_1)=P(r-1,0)(1-q)\mu_1+P(r-1,1)\mu_2+P(r+1,0)\lambda \quad (20)$$

$$P(n,1)(\lambda_1+\mu_2)=P(n+1,1)\lambda_1+P(n,0)q\mu_1 \quad (21)$$

για $n=r-1,\dots\dots,c-1$

$$P(n,0)(\lambda_1+\mu_1)=P(n-1,0)(1-q)\mu_1+P(n+1,0)\lambda_1+P(n-1,1)\mu_2$$

(22)

για $n=r-1,\dots\dots.,c-1$

$$P(c,1)\mu_2=P(c,0)q\mu_1+P(c-1,1)\lambda_1 \quad (23)$$

$$P(c,0)\mu_1=P(c-1,0)\lambda_1 \quad (24)$$

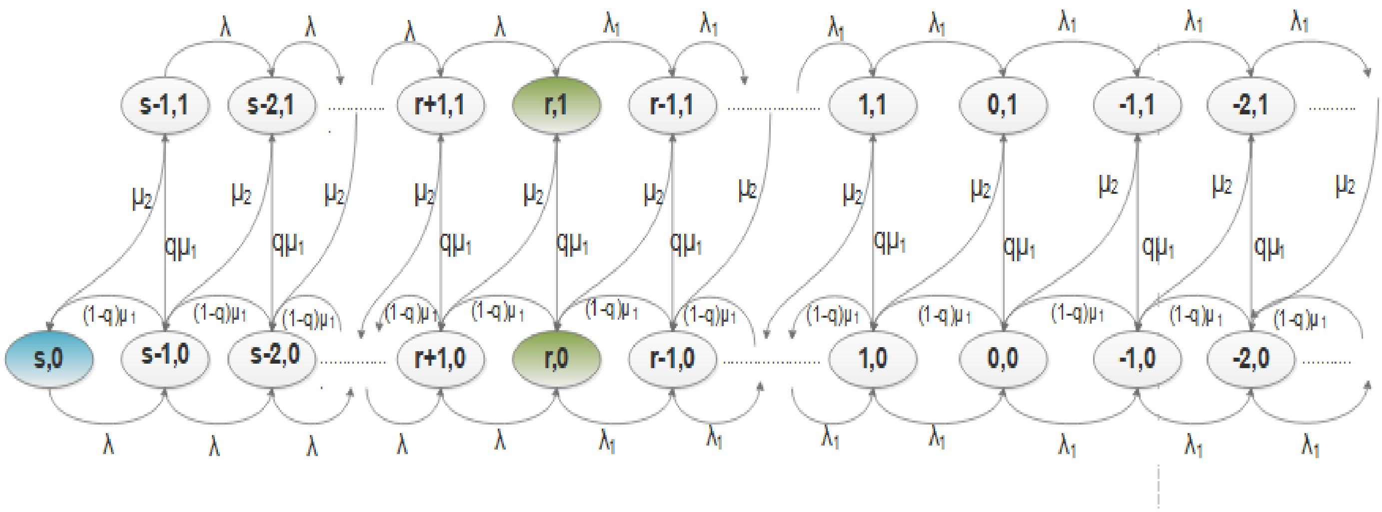
Οι εξισώσεις (15),(17),(19),(20),(23),(24) αποτελούν συνοριακές συνθήκες του συστήματος.

3.2.2.Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

Καθώς η πολιτική ΒΑΠΜΑ2 είναι και αυτή πεπερασμένων καταστάσεων όπως η πολιτική ΒΑΠΑ για την εύρεση των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης θα χρησιμοποιηθεί ακριβώς η ίδια μεθοδολογία. Πιο συγκεκριμένα θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος διαδοχικών αντικαταστάσεων σε συνδυασμό με την εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{n=0}^{c}\sum_{i=0}^{1}P(n,i)=1$ λύνοντας όλες τις πιθανότητες του συστήματός μας συναρτήσει της πιθανότητας $P(s,0)$. Εφόσον η πολιτική ΒΑΠΜΑ2 είναι $s+c+1$ καταστάσεων συγκριτικά με τη ΒΑΠΑ η ανάλυση είναι ακριβώς ίδιας με εκείνη της παραγράφου 3.1.2 και δεν θα ασχοληθούμε σε περεταίρω ανάλυση.

3.3.Μοντελοποίηση συστήματος πολιτικής ΒΑΠΑ2

Στο συγκεκριμένο σύστημα παραγωγής όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 2.1 ακολουθείται παρόμοια με την ΒΑΠΑ πολιτική με την διαφορά ότι, όταν το απόθεμα s γίνεται ίσο με το μηδέν, τότε το σύστημα δεν διώχνει τους πελάτες της υψηλής προτεραιότητας από το σύστημα (τύπου 1), αντιθέτως τους κρατάει έως ότου το σύστημα παράγει ποσότητα ικανή για την ικανοποίηση των εκκρεμών παραγγελιών. Συνεπώς ακολουθείται ένας είδος πολιτικής με μερική αποδοχή πελατών και άρα στο σύστημα υπάρχουν εκκρεμείς παραγγελίες. Το πλήθος των πελατών τύπου 1 που εισέρχονται και αναμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν μπορεί θεωρητικά να είναι άπειρο. Η βασική πολιτική που μελετάται καθορίζεται, όπως και στην πολιτική ΒΑΠΑ, από δύο κατώφλια (s, r). Ακόμα, έχουμε και εδώ δύο κατηγορίες πελατών υψηλής και χαμηλής προτεραιότητας με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, ενώ πρέπει να ισχύει η συνθήκη ευστάθειας $\rho = \lambda_1 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{q}{\mu_2} \right) < 1$.



Γράφημα 3 : Αλυσίδα Markov για την πολιτική ΒΑΠΑ2.

3.3.1.Οι εξισώσεις καταστάσεων του συστήματος, Chapman-Kolmogorov

Όπου $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$P(s,0)(\lambda) = P(s-1,1)\mu_2 + P(s-1,0)(1-q)\mu_1 \quad (25)$$

$$P(n,0)(\lambda + \mu_1) = P(n-1,1)\mu_2 + P(n-1,0)(1-q)\mu_1 + P(n+1,0)\lambda \quad (26)$$

$$\text{για } n = r+1, \dots\dots, s-1$$

$$P(s-1,1)(\lambda + \mu_2) = P(s-1,0)q\mu_1 \quad (27)$$

$$P(n,1)(\lambda+\mu_2)=P(n,0)q\mu_1+P(n+1,1)\lambda \quad (28)$$

για $n=r+1,\ldots\ldots,s-2$

$$P(r,1)(\lambda_1+\mu_2)=P(r+1,1)\lambda+P(r,0)q\mu_1 \quad (29)$$

$$P(r,0)(\lambda_1+\mu_1)=P(r-1,0)(1-q)\mu_1+P(r-1,1)\mu_2+P(r+1,0)\lambda \quad (30)$$

$$P(n,0)(\lambda_1+\mu_1)=P(n-1,1)\mu_2+P(n-1,0)(1-q)\mu_1+P(n+1,0)\lambda_1 \quad (31)$$

για $\mathrm{n}=\mathrm{r}-1,\mathrm{r}-2,\ldots.$

$$P(n,1)(\lambda_1+\mu_2)=P(n+1,1)\lambda_1+P(n,0)q\mu_1 \quad (32)$$

για $\mathrm{n}=\mathrm{r}-1,\mathrm{r}-2,\ldots.$

Οι εξισώσεις (25),(27),(29),(30) αποτελούν συνοριακές συνθήκες του συστήματός μας.

3.3.2.Υπολογισμός πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε εργαλεία από την θεωρία εξισώσεων διαφορών σύμφωνα με τις σημειώσεις των Adan και Wal (1998). Αρχικά εξετάζουμε το σύστημα των εξισώσεων (26) και (28) και στην συνέχεια το σύστημα των εξισώσεων (31) και (32). Στην περίπτωση που έχουμε σύστημα εξισώσεων διαφορών εξετάζουμε λύσεις της μορφής $P(n,i)=W(i)k^n$, $i=0{,}1$. Θέτοντας στις εξισώσεις μας όπου $W(0)=1$ καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις:

$$k(\lambda+\mu_1)=W(1)\mu_2+(1-q)\mu_1+k^2\lambda \quad (33)$$

$$W(1)k(\lambda+\mu_2)=kq\mu_1+W(1)k^2\lambda \quad (34)$$

Στο επόμενο βήμα χρησιμοποιούμε την εξίσωση (33) για την εκτίμηση του W(1) και έχουμε:

$$W(1) = \frac{q\mu_1}{(\lambda + \mu_2 - k\lambda)}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώ την $W(1)$ στην σχέση (33) και καταλήγουμε στην χαρακτηριστική εξίσωση:

$$(k-1)(k^2\lambda^2 - k\lambda^2 - k\lambda\mu_2 - k\lambda\mu_1 + \mu_1\mu_2 + \lambda\mu_1 - q\lambda\mu_1) = 0$$

Θεωρώντας την $k = 1$ τετριμμένη λύση καταλήγουμε στο τριώνυμο :

$$k^2\lambda^2 + (-\lambda^2 - \lambda\mu_2 - \lambda\mu_1)k + \mu_1\mu_2 + \lambda\mu_1 - q\lambda\mu_1 = 0$$

όπου οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι εξής:

$$k_{1,2} = \frac{\lambda(\lambda + \mu_1 + \mu_2) \mp \lambda\sqrt{(\lambda + \mu_1)^2 + \mu_2(-2\mu_1 + \mu_2) + 4\lambda\mu_1(q-1)}}{2\lambda^2} =$$

$$= \frac{(\lambda + \mu_1 + \mu_2) \mp \sqrt{(\lambda + \mu_1)^2 + \mu_2(-2\mu_1 + \mu_2) + 4\lambda\mu_1(q-1)}}{2\lambda}$$

Συνεπώς οι λύσεις των εξισώσεων (26) και (28) είναι της μορφής

$$P(n,1) = C_1W_1(1)k_1^n + C_2W_2(1)k_2^n + C_3W_3(1),\ n = r, \dots\dots, s-1 \qquad (35)$$

$$P(n,0) = C_1k_1^n + C_2k_2^n + C_3, n = r, \dots\dots\dots, s \qquad (36)$$

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (31) και (32) εργαζόμαστε με αντίστοιχο τρόπο. Δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής $P(n,i) = B(i)y^n$, $i = 0,1$. Θέτοντας όπου $B(0) = 1$ καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις:

$$y(\lambda_1 + \mu_1) = B(1)\mu_2 + (1-q)\mu_1 + y^2\lambda_1 \tag{37}$$

$$B(1)y(\lambda_1 + \mu_2) = B(1)y^2\lambda_1 + yq\mu_1 \tag{38}$$

Στην συνέχεια παίρνουμε την εξίσωση (38) και λύνοντας την ως προς $B(1)$ καταλήγουμε στην σχέση:

$$B(1) = \frac{q\mu_1}{\lambda_1 + \mu_2 - y\lambda_1}$$

Έπειτα αντικαθιστούμε την σχέση αυτή στην εξίσωση (37), οπότε μετά από αρκετές πράξεις καταλήγουμε στην χαρακτηριστική εξίσωση:

$$(y-1)(y^2\lambda_1^2 - y\lambda_1\mu_1 - y\lambda_1^2 - y\lambda_1\mu_2 + \mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_1 - q\lambda_1\mu_1) = 0$$

Θεωρώντας την $y = 1$ τετριμμένη ρίζα καταλήγουμε στο τριώνυμο:

$$y^2\lambda_1^2 + (-\lambda_1\mu_1 - \lambda_1^2 - \lambda_1\mu_2)y + \mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_1 - q\lambda_1\mu_1 = 0$$

με λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης τις:

$$y_{1,2} = \frac{(\mu_1 + \lambda_1 + \mu_2) \pm \sqrt{(\mu_1 - \lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_1 q\mu_1}}{2\lambda_1}$$

Απορρίπτουμε την μονάδα ως λύση επειδή έχουμε άπειρο πλήθος καταστάσεων και κρατάμε συνεπώς μόνο τις ρίζες y_1 και y_2.

Σε αυτή την περίπτωση οι εκφράσεις των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης θα είναι της μορφής

$$P(n,1) = C_4B_1(1)y_1^n + C_5B_2(1)y_2^n,\ n \le r \tag{39}$$

$$P(n,0) = C_4 y_1^n + C_5 y_2^n,\ n \le r \tag{40}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές των εξισώσεών μας C_j για $j = 1, \dots, 5$ χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (25), (27), (29) και (30) σε συνδυασμό με την εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{n=s}^{-\infty}\sum_{i=0}^{1} P(n,i) = 1$ η οποία αναλυτικά εκφράζεται ως εξής:

$$\sum_{n=s-1}^{r+1}(C_1W_1(1)k_1^n + C_2W_2(1)k_2^n + C_3W_3(1)) + \sum_{n=r}^{-\infty}(C_4B_1(1))y_1^n + C_5B_2(1))y_2^n) + \sum_{n=s}^{r+1}(C_1k_1^n + C_2k_2^n + C_3) + \sum_{n=r}^{-\infty}(C_4y_1^n + C_5y_2^n) = 1$$

Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις:

$$\sum_{n=s-1}^{r+1}(C_1W_1k_1^n) = C_1W_1k_1^{r+1}\left(\frac{1-k_1^{s-r-1}}{1-k_1}\right)$$

$$\sum_{n=s-1}^{r+1}(C_2W_2k_2^n) = C_2W_2k_2^{r+1}\left(\frac{1-k_2^{s-r-1}}{1-k_2}\right)$$

$$\sum_{n=s-1}^{r+1}(C_3W_3) = C_3W_3(r-s-3)$$

$$\sum_{n=s}^{r+1}(C_1W_1) = C_1k_1^{r+1}\left(\frac{1-k_1^{s-r}}{1-k_1}\right)$$

$$\sum_{n=s}^{r+1}(C_2k_2^n) = C_2k_2^{r+1}\left(\frac{1-k_2^{s-r}}{1-k_2}\right)$$

$$\sum_{n=s}^{r+1}(C_3) = C_3(r-s-2)$$

$$\sum_{n=r}^{-\infty}(C_4B_1y_1^n) = C_4B_1y_1^r\left(\frac{y_1}{y_1-1}\right)$$

$$\sum_{n=r}^{-\infty}(C_5B_2y_1^n) = C_5B_2y_2^r\left(\frac{y_2}{y_2-1}\right)$$

$$\sum_{n=r}^{-\infty} C_4y_1^n = C_4y_1^r\left(\frac{y_1}{y_1-1}\right)$$

$$\sum_{n=r}^{-\infty} C_5y_2^n = C_5y_2^r\left(\frac{y_2}{y_2-1}\right)$$

Οπότε η εξίσωση κανονικοποίησης με αντικατάσταση γίνεται:

$$C_1W_1k_1^{r+1}\left(\frac{1-k_1^{s-r-1}}{1-k_1}\right)+C_2W_2k_2^{r+1}\left(\frac{1-k_2^{s-r-1}}{1-k_2}\right)+C_3W_3(r-s-3)+$$
$$+C_1k_1^{r+1}\left(\frac{1-k_1^{s-r}}{1-k_1}\right)+C_2k_2^{r+1}\left(\frac{1-k_2^{s-r}}{1-k_2}\right)+C_3(r-s-2)+C_4B_1y_1^r\left(\frac{y_1}{y_1-1}\right)+$$
$$+C_5B_2y_2^r\left(\frac{y_2}{y_2-1}\right)+C_4y_1^r\left(\frac{y_1}{y_1-1}\right)+C_5y_2^r\left(\frac{y_2}{y_2-1}\right)=1$$

Σκοπός μας στο επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε τις σταθερές του πρώτου σκέλους των λύσεών μας δηλαδή για $r+1\leq n\leq s$ συναρτήσει της σταθεράς C_1. Για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (35) και (36).

Από την συνοριακή συνθήκη (25) και την (35) για $n = s$ έχουμε:

$$(C_1k_1^s+C_2k_2^s+C_3)\lambda=(C_1W_1k_1^{s-1}+C_2W_2k_2^{s-1}+C_3W_3)\mu_2+(C_1k_1^{s-1}+C_2k_2^{s-1}+C_3)(1-q)\mu_1$$

Επιλύουμε ως προς C_2 και καταλήγουμε στην:

$$C_2=\frac{C_1(-k_1^s\lambda+w_1k_1^{s-1}\mu_2+k_1^{s-1})(1-q)\mu_1+C_3(-\lambda+W_3\mu_2+(1-q)\mu_1)]}{(k_2^s\lambda-W_2k_2^{s-1}\mu_2-k_2^{s-1}(1-q)\mu_1)}$$

Για λόγους ευχρηστίας θέτουμε:

$$A_1=-k_1^s\lambda+w_1k_1^{s-1}\mu_2+k_1^{s-1}(1-q)\mu_1$$
$$A_2=(-\lambda+W_3\mu_2+(1-q)\mu_1)$$
$$A_4=k_2^s\lambda-W_2k_2^{s-1}\mu_2-k_2^{s-1}(1-q)\mu_1$$

Άρα:

$$C_2=\frac{C_1A_1+C_3A_2}{A_3} \tag{41}$$

Από την Συνοριακή Συνθήκη (27) με αντικατάσταση έχουμε:

$$(C_1W_1k_1^{s-1}+C_2W_2k_2^{s-1}+C_3W_3)(\lambda+\mu_2)=(C_1k_1^{s-1}+C_2k_2^{s-1}+C_3)q\mu_1$$

Από τις (27) και (41) έχουμε λοιπόν:

$$C_3 = \frac{C_1 A_4}{A_5} \tag{42}$$

Όπου,

$A_4 = W_1 k_1^{s-1}(\lambda + \mu_2)A_3 - k_1^{s-1}\mathrm{q}\mu_1 A_3 + A_1 C_2 W_2 k_2^{s-1}(\lambda + \mu_2) - A_1\mathrm{q}\mu_1$
$A_5 = -W_3 A_3\,(\lambda + \mu_2) + q\mu_1 A_3 - A_2 W_2 k_2^{s-1}\,(\lambda + \mu_2) + A_2 q\mu_1$

Από σχέσεις (41),(42) παίρνουμε :

$$C_2 = \frac{C_1(A_1 A_5 + A_4 A_2)}{A_3 A_5} \tag{43}$$

Έπειτα, αφού τελειώσαμε με την έκφραση των σταθερών του πρώτου σκέλους των λύσεων μας, προχωράμε και στο δεύτερο σκέλος για $\mathrm{n} \leq \mathrm{r}$, προσπαθώντας να εκφράσουμε τις σταθερές που έχουμε συναρτήσει μίας σταθεράς και συγκεκριμένα της C_4. Οπότε γίνεται χρήση των λύσεων (39), (40). Με τη βοήθεια της συνοριακής συνθήκης (29) εκφρασμένης βάσει των (39), (40) και λύνοντας ως προς C_5 οδηγούμαστε στην σχέση:

$$C_5 = \frac{C_4 A_5}{A_6} \tag{44}$$

Όπου,

$A_5 = C_4(B_1 y_1^r(\lambda_1 + \mu_2) - B_1 y_1^{r+1}\lambda - y_1^r q\mu_1)$

$A_6 = C_5(B_2 y_2^r(\lambda_1 + \mu_2) + B_2 y_2^{r+1}\lambda + y_2^r q\mu_1)$

Στην συνέχεια παρατηρώντας ότι η συνοριακή συνθήκη (29) εκφράζει και τις δύο καταστάσεις του συστήματος δηλαδή την $r + 1 \leq n \leq s$ αλλά και την $\mathrm{n} \leq \mathrm{r}$ η εξίσωση μπορεί να εκφραστεί και από τις δύο λύσεις των δύο διαφορετικών σκελών του συστήματος. Πιο αναλυτικά η συνοριακή συνθήκη (29) μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$C_1 k_1^r + C_2 k_2^r + C_3 = C_4 y_1^r + C_5 y_2^r$$

Αντικαθιστώντας στη εξίσωση αυτή την σχέση (44) και λύνοντας μετέπειτα ως προς την σταθερά C_4 καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$C_4 = \frac{C_1 A_7}{A_8} \tag{45}$$

Όπου,

$$A_7 = \frac{A_5 A_3 k_1^r + (A_5 A_1 + A_4 A_2) k_2^r + A_4 A_3}{A_5 A_3}$$

$$A_8 = \frac{A_6 y_1^r + A_5}{A_6}$$

Από (44) και (45) η σχέση (44) γίνεται :

$$C_5 = \frac{C_1 A_5 A_7}{A_6 A_8} \tag{46}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (42),(43),(45),(46) και κάνοντάς τις αντικατάσταση στην εξίσωση κανονικοποίησης, καταφέρνουμε να βρούμε την τιμή της σταθεράς C_1. Εφόσον βρεθεί αυτή η σταθερά, οι τιμές των υπολοίπων σταθερών βρίσκονται με μεγάλη ευκολία μέσω απλής αντικατάστασης στις παραπάνω σχέσεις.

4.1.Συνάρτηση κόστους

Όπως έχει αναφερθεί και στο 1^{o} Κεφάλαιο, ο έλεγχος των αποθεμάτων και η διαχείρισή τους αποτελεί μία πολύ σημαντική λειτουργία για τα συστήματα παραγωγής, διότι οφείλουν να τα εξισορροπήσουν την πιθανότητα έλλειψης καθώς και το επίπεδο των αποθεμάτων με στόχο το χαμηλότερο δυνατό κόστος.

Στην παρούσα εργασία έχουν εξεταστεί τρεις διαφορετικές πολιτικές για ένα συγκεκριμένο σύστημα παραγωγής οι ΒΑΠΑ, ΒΑΠΑ2 και ΒΑΠΜΑ2. Εύκολα συμπεραίνει κανείς ότι το συνολικό κόστος είναι το μέτρο σύγκρισης της κάθε πολιτικής με τον εαυτό της για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων, αλλά και με τις υπόλοιπες πολιτικές.

Το συνολικό κόστος και στα δύο συστήματα που εξετάζουμε αναφέρεται στο κόστος λόγω αποθήκευσης έτοιμων προϊόντων, στο κόστος λόγω της απόρριψης των δυο κατηγοριών των πελατών και στο κόστος εκκρεμών παραγγελιών όπου αυτές επιτρέπονται. Επομένως, οι κατηγορίες κόστους είναι:

1)Κόστος απόρριψης πελατών τύπου $j,\ j = 1{,}2$.

2)Κόστος αποθέματος

3)Κόστος εκκρεμών παραγγελιών πελατών τύπου 1 καθώς μόνο αυτές επιτρέπονται.

Βάσει των προηγούμενων κεφαλαίων είναι γνωστό ότι οι πελάτες τύπου 1 είναι πιο σημαντικοί και έτσι έχουν υψηλή προτεραιότητα στο σύστημα συγκριτικά με τους πελάτες τύπου 2 που έχουν χαμηλή προτεραιότητα. Αντίστοιχα, λοιπόν, και το μοναδιαίο κόστος απόρριψης των πελατών τύπου 1 είναι μεγαλύτερο από εκείνο του τύπου 2. Αν συμβολίσουμε με σ το μοναδιαίο κόστος απόρριψης πελατών στο σύστημά μας είναι προφανές ότι $\sigma_1 > \sigma_2$.

4.1.1.Κόστος απόρριψης και εκκρεμών παραγγελιών πελατών τύπου 1

Έχει ήδη αναφερθεί ότι στην πρώτη πολιτική που εξετάσαμε την ΒΑΠΑ δεν επιτρέπονται εκκρεμείς παραγγελίες και ότι όταν το απόθεμα γίνει ίσο με μηδέν τότε το σύστημα διώχνει και τους τελευταίους πελάτες του. Έτσι λοιπόν η μόνη στιγμή που απορρίπτονται οι πελάτες τύπου 1 είναι όταν s=0. Αν θεωρήσουμε ότι K_1 είναι το κόστος απόρριψης πελατών τύπου 1, τότε αυτό είναι ίσο με το γινόμενο σ_1 επί τον ρυθμό άφιξης των πελατών τύπου 1, δηλαδή λ_1, επί το άθροισμα των συνοριακών συνθηκών, όταν το απόθεμα είναι 0 στις καταστάσεις 0 και 1. Δηλαδή μαθηματικά εκφράζεται με τον παρακάτω τύπο:

$K_1 = \sigma_1 \lambda_1 [P(0,0) + P(0,1)]$.

Εκτός από την πολιτική ΒΑΠΑ κόστος απόρριψης πελατών τύπου 1 υφίσταται και στην πολιτική ΒΑΠΜΑ2 καθώς έχουμε πεπερασμένο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών όταν το απόθεμα γίνει ίσο με μηδέν, για αυτή την κατηγορία πελατών. Αυτό έχεις ως αποτέλεσμα στην τελευταία κατάσταση του συστήματός μας δηλαδή μετά το κατώφλι c, να απορρίπτονται οι πελάτες υψηλής προτεραιότητας. Αν συμβολίσουμε με c το πλήθος των εκκρεμών παραγγελιών τότε το κόστος απόρριψης πελατών τύπου 1 υπολογίζεται σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$K_1 = \sigma_1 \lambda_1 [P(c,0) + P(c,1)]$

Αντίθετα με την πολιτική ΒΑΠΑ στις πολιτικές ΒΑΠΑ2 και ΒΑΠΜΑ2, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το σύστημα δεν διώχνει τους πελάτες τύπου 1, αλλά τους κρατάει στο σύστημα σε αναμονή έως ότου παράγει ξανά προϊόντα και τελικά εξυπηρετηθούν. Συνεπώς σε αυτά τα συστήματα δημιουργείται ένα κόστος εκκρεμών παραγγελιών πελατών υψηλής προτεραιότητας εκείνων του τύπου 1.

Το κόστος εκκρεμών παραγγελιών υπολογίζεται ως το γινόμενο του μοναδιαίου κόστους εκκρεμών παραγγελιών έστω b, επί το μέσο πλήθος των πελατών τύπου 1 έστω B, που αναμένουν να εξυπηρετηθεί η παραγγελίας τους, όταν το απόθεμα πέσει κάτω από το μηδέν. Δηλαδή αν συμβολίσουμε το κόστος εκκρεμών παραγγελιών με K_ε τότε έχουμε:

<u>Πολιτική ΒΑΠΑ2</u>

$$K_\varepsilon = bB = b\sum_{n=0}^{-\infty}\sum_{i=0}^{1} -n\,P(n,i)$$

<u>Πολιτική ΒΑΠΜΑ2</u>

$$K_\varepsilon = bB = b\sum_{n=0}^{C}\sum_{i=0}^{1} -n\,P(n,i)$$

4.1.2 Κόστος απόρριψης πελατών τύπου 2

<u>Πολιτική ΒΑΠΑ</u>

Στο σύστημα αυτό οι πελάτες τύπου 2 απορρίπτονται, όταν το απόθεμα πέσει κάτω από ένα κατώφλι r όπως είχε οριστεί στο κεφάλαιο 2.Το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων κάτω από το κατώφλι r ισούται με την πιθανότητα απόρριψης των πελατών τύπου 2. Αν πάλι θεωρήσουμε ότι K_2 είναι το κόστος απόρριψης των πελατών τύπου 2, τότε αυτό είναι ίσο με το γινόμενο του σ_2 επί τον ρυθμό άφιξης των πελατών τύπου 2 δηλαδή λ_2 επί το άθροισμα τον πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης για $0 \leq n \leq r$. Αναλυτικά αυτό εκφράζεται ως:

$$K_2 = \sigma_2 \lambda_2 \sum_{n=0}^{r} [P(n,0) + P(n,1)]$$

Πολιτική ΒΑΠΑ2

Σε αυτή την περίπτωση το κόστος απόρριψης πελατών τύπου 2 για $n \leq$r αντίστοιχα εκφράζεται από την παρακάτω σχέση:

$$K_2 = \sigma_2 \lambda_2 \sum_{n=r}^{-\infty} [P(n,0) + P(n,1)]$$

Πολιτική ΒΑΠΜΑ2

Όμοια με τις παραπάνω πολιτικές οι πελάτες χαμηλής προτεραιότητας δηλαδή τύπου 2 απορρίπτονται όταν το απόθεμα του συστήματος πέσει κάτω από το κατώφλι r μέχρι την κατάσταση c. Το κόστος απόρριψης πελατών τύπου 2 για τις καταστάσεις $r \leq n \leq c$ εκφράζεται ως:

$$K_2 = \sigma_2 \lambda_2 \sum_{n=r}^{c} [P(n,0) + P(n,1)]$$

4.1.3.Κόστος αποθέματος του συστήματος

Πολιτική ΒΑΠΑ.

Αν συμβολίσουμε με K_α το κόστος αποθέματος του συστήματος, τότε αυτό είναι ίσο με το μοναδιαίο κόστος αποθέματος K_μ (εννοούμε το κόστος εκείνο που δαπανάται, για να παραχθεί ένα προϊόν ανά μονάδα χρόνου) επί το μέσο απόθεμα του συστήματος. Σύμφωνα με τον ορισμό το μέσο απόθεμα υπολογίζεται με το άθροισμα του γινομένου της κάθε τιμής αποθέματος με την αντίστοιχη πιθανότητα. Συνεπώς η μαθηματική έκφραση του κόστους αποθέματος συνολικά είναι:

$$K_\alpha = K_\mu \sum_{n=0}^{s} n\,[P(n,0) + P(n,1)]$$

Ομοίως υπολογίζεται το κόστος αποθέματος και για τις άλλες δύο πολιτικές που εξετάζουμε. Δηλαδή:

<u>Πολιτική ΒΑΠΑ2</u>

$$K_\alpha = K_\mu \sum_{n=0}^{s} n\,[P(n,0) + P(n,1)]$$

<u>Πολιτική ΒΑΠΜΑ2</u>

$$K_\alpha = K_\mu \sum_{n=0}^{s} n\,[P(n,0) + P(n,1)]$$

4.1.4.Κόστος λειτουργίας συστήματος

<u>Πολιτική ΒΑΠΑ</u>

Το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος εκφράζεται ως το άθροισμα των επιμέρους στοιχείων κόστους του συστήματος, δηλαδή του κόστους απόρριψης πελατών τύπου 1 συν το κόστος απόρριψης πελατών τύπου 2 συν το κόστος αποθέματος. Αν στην πολιτική ΒΑΠΑ επιτρέπονταν εκκρεμείς παραγγελίες, τότε θα προσθέταμε και αυτόν τον όρο στο συνολικό κόστος λειτουργίας. Επίσης, το κόστος λειτουργίας είναι συνάρτηση δύο παραμέτρων του βασικού αποθέματος s και του κατωφλιού r που έχουμε ορίσει. Έτσι λοιπόν το συνολικό κόστος $K_{ολικό}$ είναι ίσο με :

$$K_{ολικό}(s,r) = K_1 + K_2 + K_\alpha =$$

$$= \sigma_1\lambda_1[P(0,0) + P(0,1)] + \sigma_2\lambda_2 \sum_{n=0}^{r}[P(n,0) + P(n,1)] +$$

$$K_\mu \sum_{n=0}^{s} n\,[P(n,0) + P(n,1)]$$

Πολιτική ΒΑΠΑ2

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο και εδώ το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος υπολογίζεται με το άθροισμα των επιμέρους στοιχείων κόστους που είναι το κόστος απόρριψης πελατών τύπου 2, κόστος εκκρεμών παραγγελιών τύπου 1 και κόστος αποθέματος. Άρα η μαθηματική έκφραση των παραπάνω είναι η εξής:

$$K_{ολικό}(s,r) = K_2 + K_\varepsilon + K_\alpha = \sigma_2\lambda_2 \sum_{n=r}^{-\infty}[P(n,0) + P(n,1)] +$$

$$b \sum_{n=0}^{-\infty} \sum_{i=0}^{1} -n\,P(n,i) + + K_\mu \sum_{n=0}^{s} n\,[P(n,0) + P(n,1)]$$

Πολιτική ΒΑΠΜΑ2

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η συγκεκριμένη πολιτική εξαρτάται από τρία κατώφλια το απόθεμα s, το κατώφλι προτεραιότητας πελατών r αλλά και το κατώφλι c το οποίο μας εξασφαλίζει ότι μετά από c εκκρεμείς παραγγελίες απορρίπτονται και οι πελάτες τύπου 1 από το σύστημα. Συνεπώς το κόστος λειτουργίας συστήματος είναι συνάρτηση και των τριών κατωφλιών ελέγχου που αναφέραμε και υπολογίζεται όμοια με τις παραπάνω πολιτικές δηλαδή ως το άθροισμα των επιμέρους στοιχείων κόστους. Πιο αναλυτικά εκφράζεται ως εξής:

$$K_{ολικό}(s,r,c) = K_1 + K_2 + K_a + K_ε = σ_1 λ_1 [P(c,0) + P(c,1)] + σ_2 λ_2 \sum_{n=r}^{c} [P(n,0) + P(n,1)] + K_μ \sum_{n=0}^{s} n\,[P(n,0) + P(n,1)] + b \sum_{n=0}^{C} \sum_{i=0}^{1} -n\,P(n,i)$$

Και για τα τρία συστήματα τα οποία έχουμε εξετάσει πρέπει να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική δηλαδή το ελάχιστο κόστος λειτουργίας του συστήματος. Για να επιτευχθεί αυτό, υπάρχουν πολλές μέθοδοι .Εμείς στο επόμενο κεφάλαιο με την μέθοδο της εξαντλητικής αναζήτησης, δηλαδή με την μεταβολή όλων των σημαντικών παραμέτρων του συστήματός μας και με διάφορες δοκιμές, θα παρουσιάσουμε την συμπεριφορά των συστημάτων μας στις εκάστοτε αλλαγές και θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την βέλτιστη πολιτική τους και σε τελικό στάδιο να συγκριθούν μεταξύ τους έτσι ώστε να εξετάσουμε ποια τελικά λειτουργεί καλύτερα και σε ποιες συνθήκες συμβαίνει αυτό. Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιηθεί το κόστος λειτουργίας του συστήματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν αποδειχθεί ότι η ολική συνάρτηση κόστους είναι κυρτή ως προς τις μεταβλητές ελέγχου, τότε θα γνωρίζαμε απευθείας ότι θα είχε σίγουρα ένα βέλτιστο, το οποίο θα ήταν και το ολικό, χωρίς βλάβη της γενικότητας και θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου με πολύ λιγότερο υπολογιστικό φόρτο συγκριτικά με την μέθοδο της εξαντλητικής αναζήτησης.

5.Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται σύγκριση των τριών πολιτικών που έχουμε εξετάσει στην παρούσα εργασία. Λόγω μαθηματικής πολυπλοκότητας των συστημάτων μας ο υπολογισμός της συνάρτησης κόστους για το κάθε σύστημα εξετάστηκε σε περιβάλλον Matlab. Επιπλέον πραγματοποιείται αριθμητική διερεύνηση της κυρτότητας της κάθε συνάρτησης κόστους έτσι ώστε να διαπιστωθεί αν παρουσιάζει κάποια μορφή κυρτότητα και για ποιες τιμές των παραμέτρων αυτό επιτυγχάνεται. Τέλος, γίνονται κατάλληλοι υπολογισμοί και συγκρίσεις όχι μόνο όσον αφορά το απόθεμα s και το κατώφλι r, αλλά και για άλλες παραμέτρους εξίσου σημαντικές που επηρεάζουν το αναμενόμενο κόστος όπως είναι τα $\mu_1, \lambda_1, \sigma_1, k_\mu$. Όλα τα αρχεία του κώδικα που χρησιμοποιήθηκαν για την διεξαγωγή των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται αναλυτική στο παράρτημα, στο τέλος της διπλωματικής εργασίας.

5.1.Βελτιστοποίηση συνάρτησης κόστους και σύγκριση εξεταζόμενων πολιτικών

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο το αναμενόμενο κόστος του συστήματός μας για τις πολιτικές που εξετάζουμε είναι συνάρτηση των βασικών μεταβλητών ελέγχου δηλαδή του βασικού αποθέματος S αλλά και του κατωφλιού απόδοσης προτεραιότητας των πελατών τύπου 1 το οποίο συμβολίσαμε με r. Στόχος φυσικά της εργασίας μας είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους για κάθε ένα από τα τρία συστήματα που εξετάζουμε και για ποιες τιμές των βασικών παραμέτρων ελέγχου δίνεται. Η συνάρτηση κόστους στις πολιτικές ΒΑΠΑ, ΒΑΠΑ2 είναι δύο διαστάσεων δηλαδή είναι της μορφής $K_{ολικό}(s,r)$, ενώ στην πολιτική ΒΑΠΜΑ2 τριών διαστάσεων δηλαδή $K_{ολικό}(s,r,c)$. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω για την εύρεση του ελάχιστου κόστους χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος εξαντλητικής αναζήτησης ο οποίος αν και είναι πολύ εύκολος στην υλοποίηση του , δημιουργεί ερωτηματικά ως προς την βελτιστότητά του καθώς για να τον υλοποιήσουμε χρειάζεται να περιοριστούμε σε ένα συγκεκριμένο εύρος των παραμέτρων μας. Ακόμη είναι προφανές ότι απέχει από το να είναι υπολογιστικά αποδοτικός. Η δομή του αλγορίθμου εξαντλητικής αναζήτησης που χρησιμοποιήθηκε είναι η παρακάτω:

Αλγόριθμος εξαντλητικής αναζήτησης για την συνάρτηση κόστους

Βήμα 1^{ο}: Όρισε ανώτατες τιμές για τα s, r (το r παίρνει ανώτατες τιμές μέχρι $s-1$).

Βήμα 2^{ο}: Υπολόγισε το κόστος για τις ανώτατες τιμές s, r που έχεις δώσει.

Βήμα 3^{ο}: Υπολόγισε το κόστος για κάθε συνδυασμό s, r και αποθήκευσέ το σε ένα πίνακα Κ.

Βήμα 4^{ο}: Αναζήτησε από τον πίνακα Κ το ελάχιστο κόστος.

Βήμα 5^{ο}: Τύπωσε το συνδυασμό των s, r που δίνει το ελάχιστο Κ.

Όμοια υπολογίζεται και το βέλτιστο κόστος για την πολιτική ΒΑΠΜΑ2 με τη διαφορά όμως ότι το κόστος της υπολογίζεται συναρτήσει τριών μεταβλητών δηλαδή των s , r , c .Αυτό έχεις ως αποτέλεσμα στο βήμα 1 του αλγορίθμου να ορίσουμε επιπλέον και ένα εύρος για το πλήθος εκκρεμών παραγγελιών c.

Κάνοντας χρήση του παραπάνω αλγορίθμου και για τις τρεις πολιτικές καταφέραμε να υπολογίσουμε το βέλτιστο κόστος για κάθε μία από αυτές και εν τέλει να γίνει μία σύγκριση για το ποια αποδίδει καλύτερα. Και οι τρεις πολιτικές εξετάστηκαν για τις ίδιες τιμές παραμέτρων, όπου ήταν εφικτό. Πιο αναλυτικά δόθηκαν οι παρακάτω τιμές :

$\lambda_1 = 2.5, \lambda_2 = 1.5, \mu_1 = 5, \mu_2 = 3$, $q = 0.4, \sigma_1 = 20, \sigma_2 = 10, K_\mu = 0.2, b = 1$

Επίσης το απόθεμα s και για τις τρεις πολιτικές εξετάστηκε σε ένα εύρος από 2 έως 100 με σκοπό να πάρουμε όσο το δυνατό καλύτερα αποτελέσματα και το κατώφλι προτεραιότητας r από την τιμή 1 έως $s-1$. Ακόμα, καθώς η πολιτική ΒΑΠΜΑ2 έχει πεπερασμένες στο πλήθος εκκρεμείς παραγγελίες δόθηκε στο c ένα εύρος από 1 μέχρι 15. Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει τα βέλτιστα κόστη για κάθε πολιτική και για ποιες τιμές των s, r σημειώθηκαν.

Πίνακας 1: Βέλτιστα κόστη και σύγκριση εξεταζόμενων πολιτικών για ορισμένες τιμές παραμέτρων.

ΒΑΠΑ	**ΒΑΠΑ2** **για $\boldsymbol{c = 500}$**	**ΒΑΠΜΑ2**
$\boldsymbol{K_{ολικό}(s,r) = 12,2960}$ Για $\boldsymbol{s = 62, r = 8}$	$K_{ολικό}(s,r) = 12{,}1135$ Για $s = 61, r = 7$	$K_{ολικό}(s,r,c) = \mathbf{11,8263}$ Για $s = 60, r = 6, c = 6$
$\boldsymbol{K_\varepsilon = 0}$	$K_\varepsilon = 0{,}9302$	$K_\varepsilon = 0{,}3931$
$\boldsymbol{K_\alpha = 1,5584}$	$K_\alpha = 1{,}1863$	$K_\alpha = 1{,}0915$
$\boldsymbol{K_1 = 1,4831}$	$K_1 = 0$	$K_1 = 0{,}6645$
$\boldsymbol{K_2 = 9,2544}$	$K_2 = 9{,}9996$	$K_2 = 9{,}6674$

Βάσει του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η πολιτική η οποία αποφέρει το μικρότερο κόστος είναι η ΒΑΠΜΑ2 χωρίς όμως μεγάλη διαφορά από τις άλλες δύο πολιτικές. Αξίζει να σημειωθεί ότι το βέλτιστο κόστος και για τις τρεις πολιτικές για αυτό το παράδειγμα παρατηρείται για μεγάλες τιμές αποθέματος κοντά στο 60 και για μικρές τιμές του κατωφλιού r. Για τον λόγο αυτό πραγματοποιείται μία επιπλέον σύγκριση των πολιτικών μας με ίδιες τιμές παραμέτρων με την πρώτη σύγκριση, εκτός από το μοναδιαίο κόστος αποθέματος και το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών. Οι νέες τιμές για αυτές τις δύο παραμέτρους είναι οι εξής:

$K_{\mu} = 1\ , b = 2.$

Πίνακας 2: Βέλτιστα κόστη και σύγκριση πολιτικών για ορισμένες τιμές παραμέτρων

ΒΑΠΑ	**ΒΑΠΑ2** **για $\boldsymbol{c = 500}$**	**ΒΑΠΜΑ2**
$\boldsymbol{K_{\text{ολικό}}(s,r)}$ $= \mathbf{16{,}6470}$ Για $\boldsymbol{s = 16, r = 3}$	$K_{\text{ολικό}}(s,r) = 16{,}7614$ Για $s = 16, r = 3$	$K_{\text{ολικό}}(s,r,c) = \mathbf{15{,}0624}$ Για $s = 15, r = 2, c = 5$
$\boldsymbol{K_{\varepsilon} = 0}$	$K_{\varepsilon} = 3{,}8888$	$K_{\varepsilon} = 1{,}7717$
$\boldsymbol{K_{\alpha} = 4{,}1317}$	$K_{\alpha} = 2{,}7927$	$K_{\alpha} = 2{,}5083$
$\boldsymbol{K_1 = 4}{,}7944$	$K_1 = 0$	$K_1 = 1{,}4974$
$\boldsymbol{K_2 = 7{,}7209}$	$K_2 = 10{,}0798$	$K_2 = 9{,}3431$

Από τον πίνακα 2 εύκολα βγάζουμε το συμπέρασμα ότι το μικρότερο κόστος συναντάται πάλι στην πολιτική ΒΑΠΜΑ2 χωρίς μεγάλες αποκλίσεις από τις άλλες δύο πολιτικές. Αν και στο δεύτερο πίνακα τα βέλτιστα κόστη , αλλάζοντας τις τιμές των K_μ , b, συναντώνται αυτή τη φορά για μικρότερες τιμές του αποθέματος s και του κατωφλιού r παρατηρούμε ότι τα βέλτιστα κόστη συγκριτικά με τον πίνακα 1 είναι μεγαλύτερα. Είναι φανερό το πόσο σημαντικές είναι οι επιρροές των παραμέτρων πάνω στην συνάρτηση κόστους για την εκάστοτε πολιτική. Στην συνέχεια της εργασίας παρουσιάζεται πως μεταβάλλεται το βέλτιστο κόστος και οι τιμές των κατωφλιών ελέγχου για την κάθε πολιτική καθώς αλλάζουμε τις τιμές κάποιων παραμέτρων.

5.2.Μελέτη συμπεριφοράς της συνάρτησης κόστους ως προς τις τιμές των παραμέτρων

Σε αυτό το στάδιο μελετάται πως μεταβάλλεται το βέλτιστο συνολικό κόστος για την κάθε πολιτική που εξετάζουμε καθώς αλλάζουμε τις τιμές των παραμέτρων. Για κάθε συνδυασμό των διαφόρων παραμέτρων εκτιμούμε τις βέλτιστες τιμές των κατωφλιών ελέγχου που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος για κάθε πολιτική. Οι τιμές των παραμέτρων που θα εξεταστούν για την επίδρασή τους πάνω στο κόστος λειτουργίας της κάθε πολιτικής είναι οι $\mu_1, \lambda_1, \sigma_1, k_\mu$.

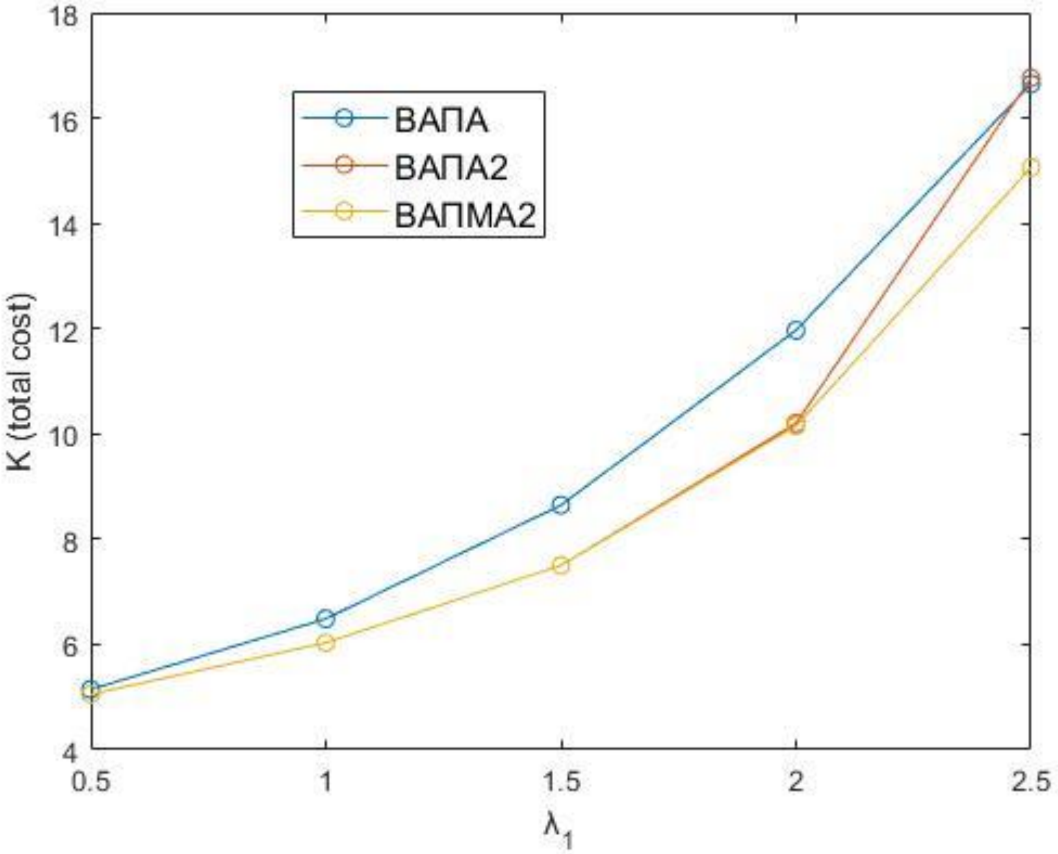
5.2.1.Επίδραση συνάρτησης κόστους λόγω μεταβολής του λ_1

Μία σημαντική παράμετρος και για τις τρεις εξεταζόμενες πολιτικές είναι ο ρυθμός άφιξης πελατών τύπου 1 , εκείνων δηλαδή με την υψηλή προτεραιότητα. Σε αυτό το παράδειγμα οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την διεξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι:

$$\lambda_2 = 1.5, \mu_1 = 5, \mu_2 = 3\ , q = 0.4, \sigma_1 = 20, \sigma_2 = 10, K_\mu = 1, b = 2$$

Πίνακας 3: Επίδραση της παραμέτρου λ_1 στην απόδοση των πολιτικών ΒΑΠΑ, ΒΑΠΑ2 και ΒΑΠΜΑ2

	ΒΑΠΑ			**ΒΑΠΑ2**			**ΒΑΠΜΑ2**			
$\boldsymbol{\lambda_1}$	$K_{ολικο}(s,r)$	s	r	$K_{ολικο}(s,r)$	s	r	$K_{ολικο}(s,r,c)$	s	r	c
0,5	5,1466	5	1	**5,0527**	5	1	**5,0527**	5	1	15
1	6,4888	6	1	6,0336	6	1	6,0336	6	1	15
1,5	8,6471	8	1	7,5000	7	1	7,4999	7	1	11
2	11,9678	11	2	10,2014	10	1	10,1510	10	1	7
2,5	16,6470	6	3	16,7614	16	3	15,0624	15	2	5



Γράφημα 1: Κόστος εξεταζόμενων πολιτικών ως προς την παράμετρο λ_1.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και στον Πίνακα 3, όσο μικρότερο είναι το λ_1 τόσο μικρότερο είναι και το συνολικό κόστος. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν έρχονται με μικρό ρυθμό οι πελάτες υψηλής προτεραιότητας το σύστημα προλαβαίνει να τους εξυπηρετήσει με αποτέλεσμα να μειώνεται το κόστος απόρριψης το οποίο είναι και ιδιαίτερα υψηλό καθώς οι πελάτες τύπου 1 είναι πιο σημαντικοί έναντι των πελατών τύπου 2. Επίσης το λ_1 όπως φαίνεται και στον πίνακα 1 είναι ανάλογο του βασικού αποθέματος s, καθώς όσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός άφιξης τόσο περισσότερο είναι το διαθέσιμο απόθεμα που χρειαζόμαστε για να μην απορρίπτεται μεγάλος αριθμός πελατών. Παρατηρούμε ότι για $\lambda_1 = 0{,}5$ εμφανίζεται το μικρότερο κόστος το οποίο είναι ίδιο στις πολιτικές ΒΑΠΜΑ2 και ΒΑΠΑ2. Όταν το λ_1 παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 1 τότε αρχίζει υπάρχει να κάποια μικρή διαφορά στο κόστος των πολιτικών ΒΑΠΜΑ2 και ΒΑΠΑ2 με την πρώτη να δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

5.2.2.Επίδραση συνάρτησης κόστους λόγω μεταβολής του μ_1

Σε αυτό το παράδειγμα οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν για την διεξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι:

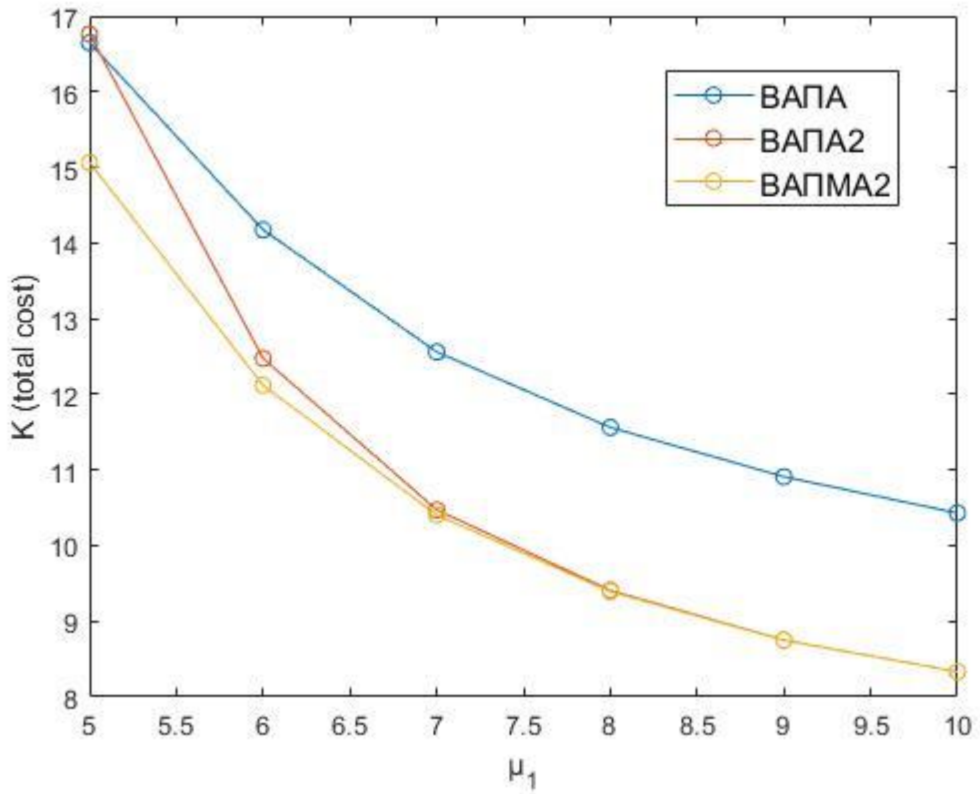
$\lambda_1 = 2.5, \lambda_2 = 1.5, \mu_2 = 3\,, q = 0.4, \sigma_1 = 20, \sigma_2 = 10, K_\mu = 1, b = 2$

Είναι γνωστό από την θεωρία συστημάτων ότι όσο αυξάνεται ο ρυθμός εξυπηρέτησης σε ένα σύστημα τόσο μειώνεται το κόστος λειτουργίας του. Αυτό ακριβώς επιβεβαιώνεται και στον παρακάτω πίνακα και για τις τρεις πολιτικές που μελετάμε. Καθώς αυξάνεται ο ρυθμός εξυπηρέτησης πελατών τύπου 1 , τόσο μειώνεται και το κόστος λειτουργίας του συστήματος και άρα πιο γρήγορα το σύστημα θα αρχίσει να διώχνει τους πελάτες της δεύτερης κατηγορίας , κάτι το οποίο συνεπάγεται και κόστος απόρριψης πελατών τύπου 2.

Επίσης ο ρυθμός εξυπηρέτησης των πελατών τύπου 1 φαίνεται να είναι αντιστρόφως ανάλογος του βασικού αποθέματος s αλλά και του κατωφλιού r καθώς η αύξηση του μ_1 οδηγεί σε μείωση του βασικού αποθέματος. Επιπλέον η πολιτική ΒΑΠΜΑ2 εξακολουθεί να παρουσιάζει το μικρότερο κόστος για όλες τις διαφορετικές τιμές του μ_1 που επιλέχθηκαν σε σχέση με τις άλλες δύο πολιτικές. Παρόλα αυτά για μεγάλες τιμές παρατηρείται ότι η διαφορά στο κόστος λειτουργίας μεταξύ των πολιτικών ΒΑΠΑ2 και ΒΑΠΜΑ2 είναι αμελητέα.

Πίνακας 4: Επίδραση της παραμέτρου μ_1 στην απόδοση των πολιτικών ΒΑΠΑ, ΒΑΠΑ2 και ΒΑΠΜΑ2

	ΒΑΠΑ			**ΒΑΠΑ2**			**ΒΑΠΜΑ2**			
$\boldsymbol{\mu_1}$	$K_{ολικο}(s,r)$	s	r	$K_{ολικο}(s,r)$	s	r	$K_{ολικο}(s,r,c)$	s	r	c
5	16,6470	16	3	16,7614	16	3	15,0624	15	2	5
6	14,1746	14	3	12,4741	12	1	12,1189	12	1	6
7	12,5600	12	2	10,4715	10	1	10,4038	10	1	8
8	11,5616	11	2	9,4072	9	1	9,3924	9	1	10
9	10,9098	10	2	8,7511	8	1	8,7473	8	1	12
10	10,4301	10	1	8,3320	7	1	**8,3308**	7	1	14



Γράφημα 2: Κόστος εξεταζόμενων πολιτικών ως προς την παράμετρο μ_1.

5.2.3.Επίδραση συνάρτησης κόστους λόγω μεταβολής του σ_1

Μία από τις πιο σημαντικές παραμέτρους για τις πολιτικές που εξετάζονται στην παρούσα εργασία είναι το μοναδιαίο κόστος απόρριψης πελατών τύπου 1 , εκείνων δηλαδή στους οποίους και οι τρεις πολιτικές δίνουν προτεραιότητα. Το μοναδιαίο κόστος απόρριψης πελατών τύπου 1, σ_1 είναι σίγουρα πολύ μεγαλύτερο τόσο από το K_μ όσο και από το b. Η πολιτική ΒΑΠΑ2 όπως έχει ήδη αναφερθεί και στο κεφάλαιο 3 δεν διώχνει τους πελάτες τύπου 1 από το σύστημα ακόμα και σε περιόδους ελλείμματος , αντιθέτως τους κρατάει σε αναμονή έως ότου το σύστημα παράγει ξανά προϊόντα. Η πολιτική ΒΑΠΑ απορρίπτει τους πελάτες τύπου 1 μόνο στην κατάσταση μηδενικού αποθέματος ενώ η πολιτική ΒΑΠΜΑ2 , τους απορρίπτει ύστερα από ένα ορισμένο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών. Οι τιμές των βασικών παραμέτρων που δόθηκαν για το παράδειγμα που ακολουθεί είναι οι εξής:

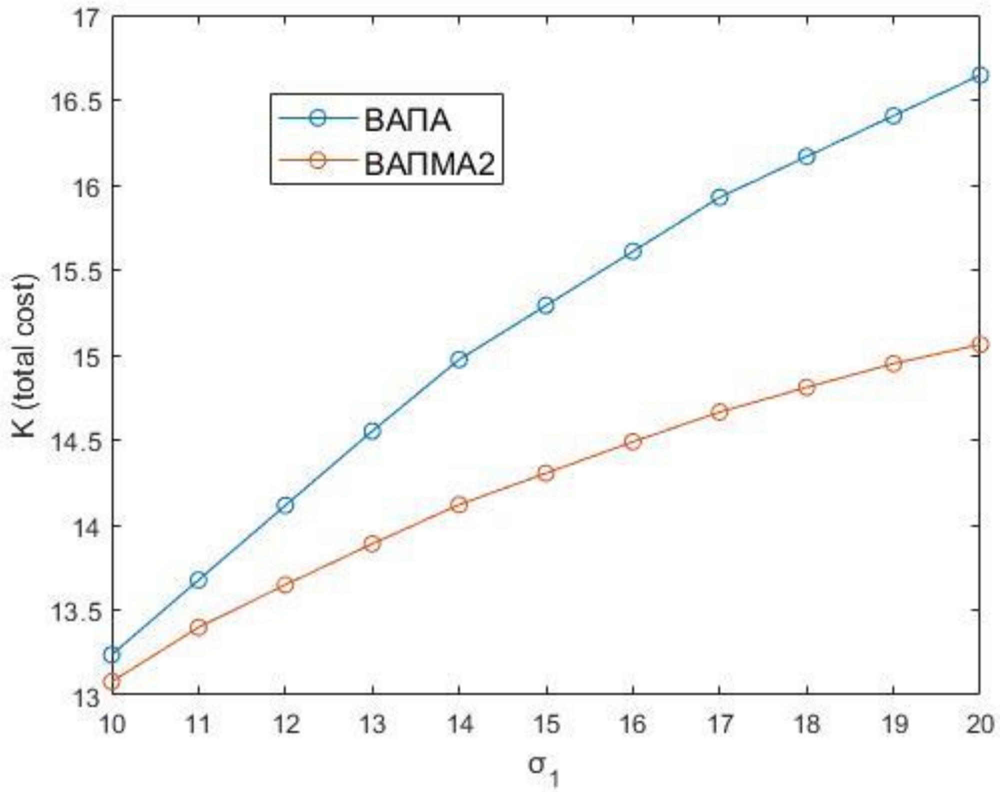
$\lambda_1 = 2.5, \lambda_2 = 1.5, \mu_1 = 5\ \mu_2 = 3\ , q = 0.4, \sigma_2 = 10, K_\mu = 1, b = 2$

Παρατηρώντας κανείς τον ακόλουθο πίνακα και την αντίστοιχη γραφική παράσταση, διαπιστώνει ότι όσο αυξάνεται το σ_1 τόσο αυξάνεται και η συνάρτηση κόστους για τις πολιτικές ΒΑΠΑ, ΒΑΠΜΑ2. Οι πελάτες τύπου 1 είναι πιο σημαντικοί για το σύστημα που εξετάζουμε και έτσι είναι λογικό ότι το όσο αυξάνεται το μοναδιαίο κόστος απόρριψης πελατών τύπου 1 να προκαλείται αύξηση του κόστους απόρριψης πελατών τύπου 1 και άρα του συνολικού κόστους λειτουργίας του συστήματος. Ακόμα, όσο αυξάνεται το σ_1 αυξάνεται και το απόθεμα s επειδή χρειάζεται να υπάρχει διαθέσιμο απόθεμα για να μην αυξηθεί πολύ το κόστος απόρριψης των πελατών τύπου 1. Είναι φανερό ότι και σε αυτή τη σύγκριση η πολιτική ΒΑΠΜΑ2 φαίνεται να λειτουργεί καλύτερα και να αποφέρει στο σύστημα το μικρότερο κόστος λειτουργίας.

Πίνακας 5: Επίδραση της παραμέτρου σ_1 στην απόδοση των πολιτικών ΒΑΠΑ και ΒΑΠΜΑ2

	ΒΑΠΑ			**ΒΑΠΜΑ2**			
$\boldsymbol{\sigma_1}$	$K_{ολικο}(s,r)$	s	r	$K_{ολικο}(s,r,c)$	s	r	c
10	13,2363	13	1	**13,0783**	13	1	1
12	14,1151	14	1	13,6484	13	1	2
14	14,9731	14	2	14,1196	14	1	3
16	15,6096	15	2	14,4856	14	1	3
18	16,1676	16	3	14,8097	14	1	4
20	16,6470	16	3	15,0624	15	2	5

.



Γράφημα 3: Κόστος πολιτικών ΒΑΠΑ,ΒΑΠΜΑ2 ως προς την παράμετρο σ_1.

5.2.4.Επίδραση συνάρτησης κόστους λόγω μεταβολής του K_μ

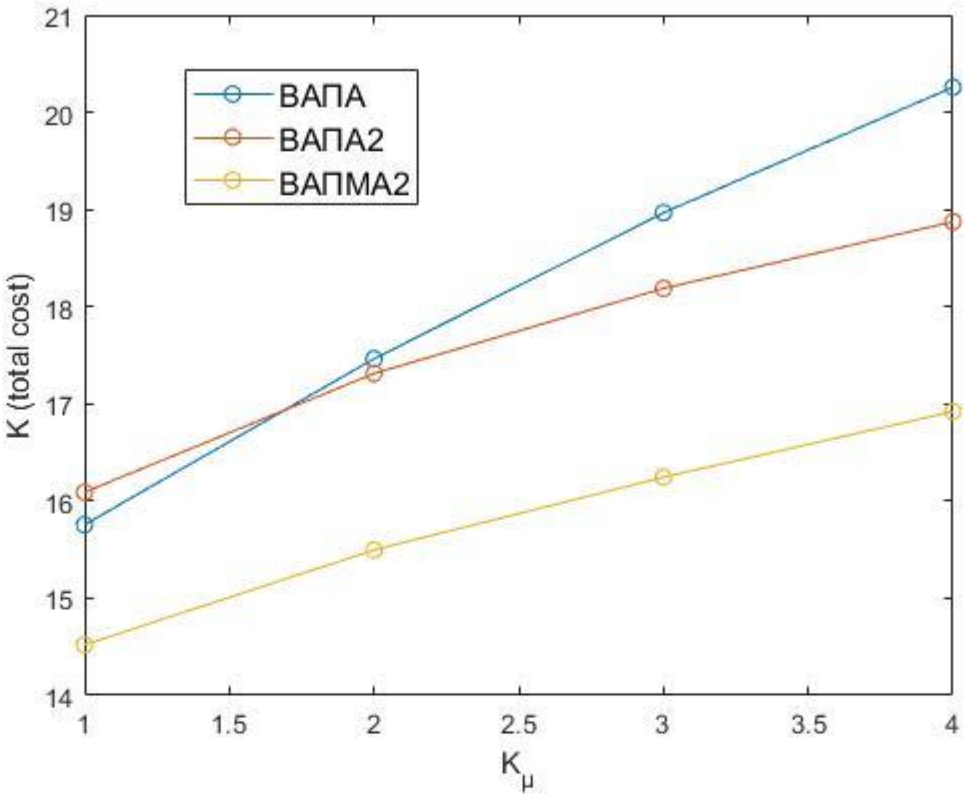
Με την αύξηση του μοναδιαίου κόστους αποθέματος ανά μονάδα προϊόντος αυξάνεται το κόστος αποθέματος και άρα και το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος. Οι τιμές των βασικών παραμέτρων που δόθηκαν για το παράδειγμα που ακολουθεί είναι οι εξής:

$\lambda_1 = 2.5, \lambda_2 = 1.5, \mu_1 = 5\ \mu_2 = 3\ , q = 0.4, \sigma_1 = 20, \sigma_2 = 10, b = 2$

Ο πίνακας 6 καθώς και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις για κάθε εξεταζόμενη πολιτική επιβεβαιώνουν τον παραπάνω ισχυρισμό. Όσο αυξάνεται το K_μ αυξάνεται και η τιμή της συνάρτηση κόστους και για τις τρεις πολιτικές. Συμπεραίνουμε ότι όσο το K_μ αυξάνεται, η τιμή του αποθέματος s μειώνεται επειδή όσο πιο μεγάλη είναι η μοναδιαία τιμή αποθήκευσης του προϊόντος τόσο μικρότερος πρέπει να είναι ο αριθμός των προϊόντων που αποθηκεύονται. Όταν το K_μ παίρνει την τιμή 2 δηλάδή την ανώτερη τιμή που εξετάζεται για αυτή την παράμετρο, το κόστος λειτουργίας της πολιτικής ΒΑΠΑ είναι αρκετά μεγαλύτερο από εκείνο της πολιτικής ΒΑΠΜΑ2. Ακόμα, η πολιτική ΒΑΠΜΑ2 φαίνεται και πάλι να δίνει το μικρότερο κόστος για όλες τις τιμές που δόθηκαν στο K_μ.

Πίνακας 6: Επίδραση της παραμέτρου K_μ στην απόδοση των πολιτικών ΒΑΠΑ, ΒΑΠΑ2 και ΒΑΠΜΑ2

	ΒΑΠΑ			ΒΑΠΑ2			ΒΑΠΜΑ2			
$\boldsymbol{K_\mu}$	$K_{ολικο}(s,r)$	s	r	$K_{ολικο}(s,r)$	s	r	$K_{ολικο}(s,r,c)$	s	r	c
0,8	15,7568	19	4	16,0906	20	4	**14,5217**	18	2	4
1,2	17,4637	14	3	17,3125	14	3	15,4965	12	1	5
1,6	18,9657	11	2	18,1879	11	2	16,2449	10	1	5
2	20,2577	10	2	18,8733	9	1	16,9209	8	1	5



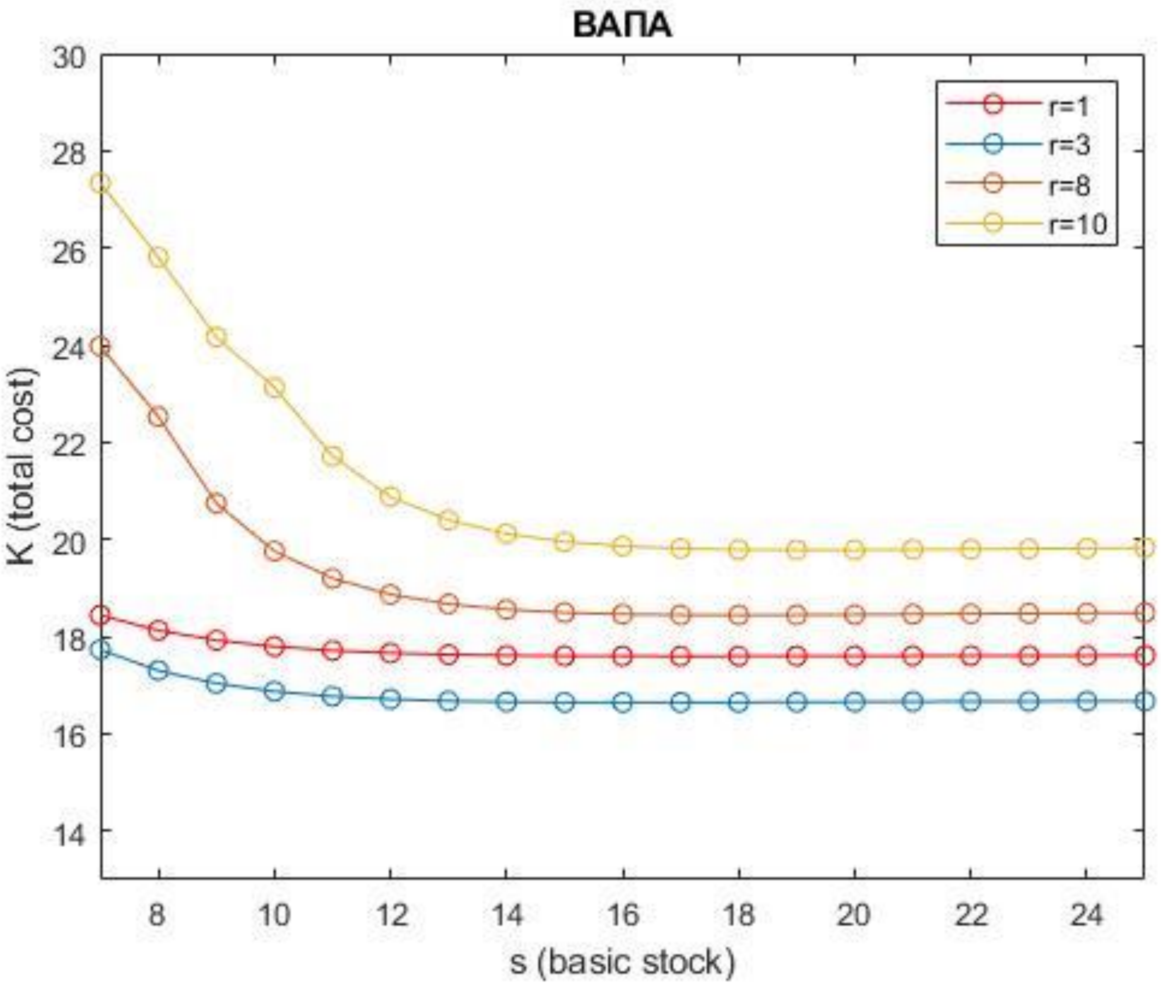
Γράφημα 4: Κόστος εξεταζόμενων πολιτικών ως προς την παράμετρο K_μ.

5.3.Μελέτη κυρτότητας εξεταζόμενων πολιτικών

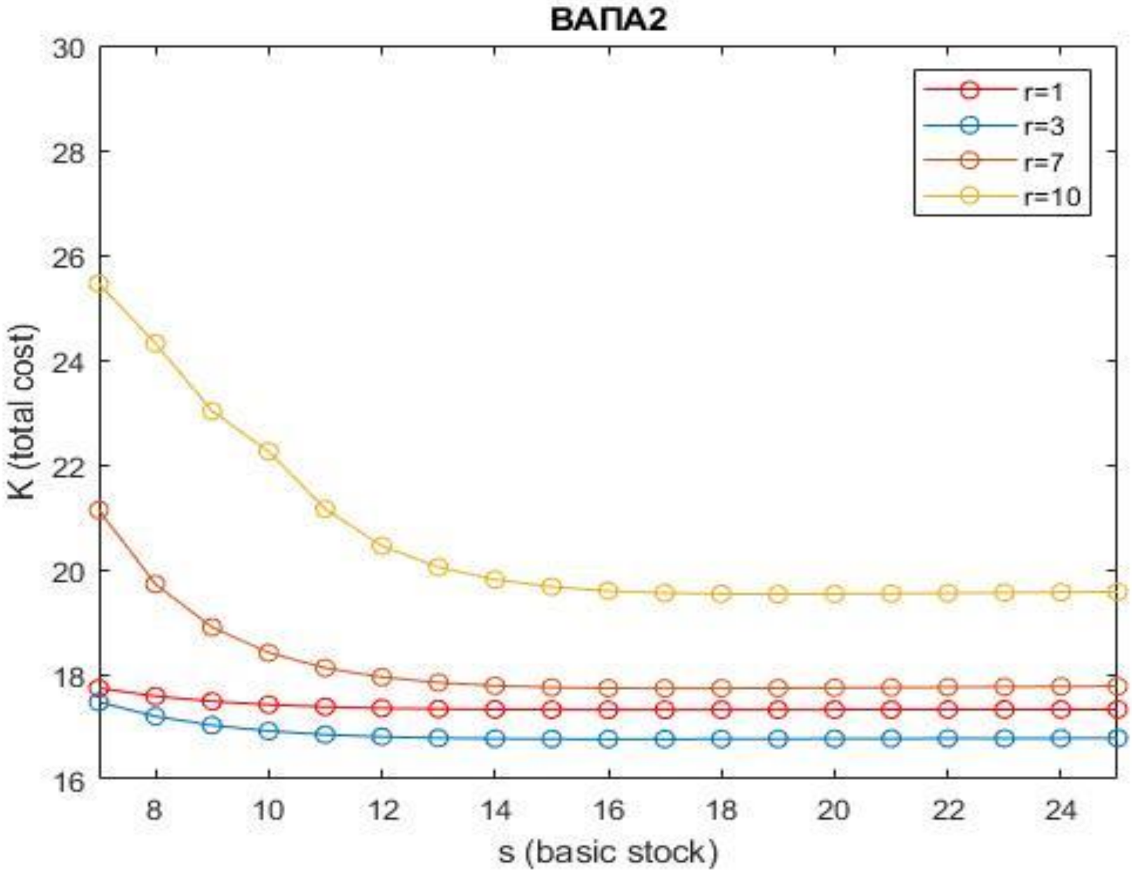
Για να ελέγξουμε την κυρτότητα της κάθε πολιτικής εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία:

Ορίζουμε ένα εύρος τιμών για το απόθεμα *s* και κάποιες διακριτές τιμές για το κατώφλι προτεραιότητας *r*. Κάθε καμπύλη που σχηματίζεται και στα τρία γραφήματα αντιστοιχεί σε μία καμπύλη κόστους για σταθερό *r* και μεταβαλλόμενο *s*. Στον άξονα *x* βρίσκονται όλες οι δυνατές τιμές του αποθέματος και στον άξονα y το αντίστοιχο συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος. Όπως φαίνεται και στις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν οι συναρτήσεις κόστους είναι κυρτές ή τουλάχιστον όπως φαίνεται και στο σχήμα είναι μονοκόρυφες για το εύρος τιμών που έχουμε δώσει στο s. Τα γραφήματα που ακολουθούν εμφανίζονται για τις παρακάτω τιμές παραμέτρων και για τις τρείς πολιτικές:

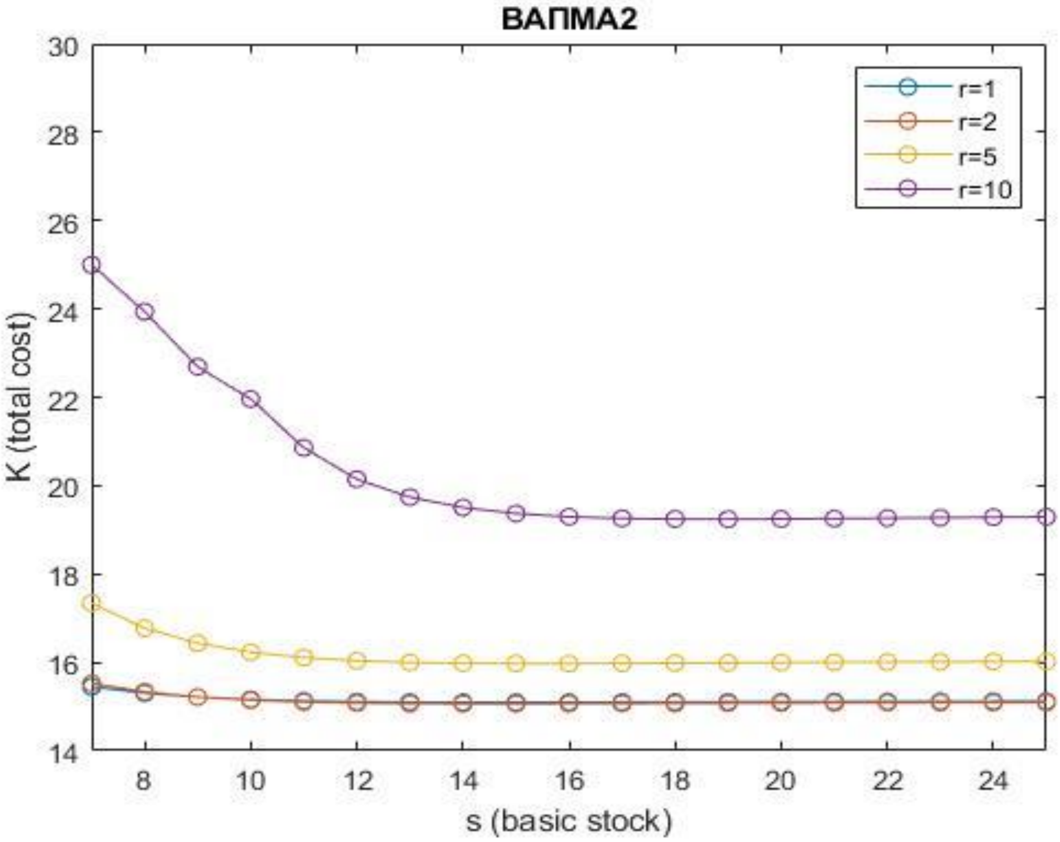
$$\lambda_1 = 2.5, \lambda_2 = 1.5, \mu_1 = 5, \mu_2 = 3\ , q = 0.4, \sigma_1 = 20, \sigma_2 = 10, K_\mu = 1, b = 2$$



Γράφημα 5: Κυρτότητα πολιτικής ΒΑΠΑ.



Γράφημα 6: Κυρτότητα πολιτικής ΒΑΠΑ2.



Γράφημα 7: Κυρτότητα πολιτικής ΒΑΠΜΑ2.

Πίνακας 7: Κυρτότητα πολιτικής ΒΑΠΑ

s	r=1	r=3	r=8	r=10
7	18,4429	17,7326	23,9778	27,3383
8	18,1284	17,3045	22,5312	25,8120
9	17,9268	17,0393	20,7462	24,1659
10	17,7976	16,8746	19,7633	23,1309
11	17,7156	16,7733	19,2007	21,7178
12	17,6643	16,7124	18,8699	20,8774
13	17,6331	16,6771	18,6744	20,3977
14	17,6150	16,6582	18,5605	20,1182
15	17,6052	16,6495	18,4966	19,9558
16	17,6007	**16,6469**	18,4634	19,8639
17	**17,5995**	16,6480	18,4490	19,8148
18	17,6001	16,6510	**18,4457**	**19,7918**
19	17,6039	16,6548	18,4487	19,7844
20	17,6061	16,6590	18,4551	19,7859
21	17,6083	16,6630	18,4629	19,7922
22	17,6102	16,6667	18,4710	19,8009
23	17,6120	16,6700	18,4787	19,8194
24	17,6135	16,6728	18,4858	19,8102

Πίνακας 8: Κυρτότητα πολιτικής ΒΑΠΑ2

s	r=1	r=3	r=7	r=10
2	21,1111	24,0282	29,2143	31,2653
3	19,7179	21,9259	27,3965	29,8534
4	18,8606	19,7160	25,6943	28,6381
5	18,3158	18,5840	24,0174	27,5457
6	17,9632	17,8976	22,2767	26,5063
7	17,7327	17,4693	21,1319	25,4519
8	17,5816	17,1982	19,7210	24,3141
9	17,4829	17,0258	18,8963	23,0217
10	17,4189	16,9168	18,4111	22,2507
11	17,3779	16,8487	18,1198	21,1534
12	17,3523	16,8072	17,9446	20,4492
13	17,3368	16,7829	17,8406	20,0429
14	17,3280	16,7697	17,7810	19,8054
15	17,3233	16,7634	17,7490	19,6678
16	17,3214	**16,7613**	17,7341	19,5907
17	**17,3210**	16,7618	**17,7294**	19,5505
18	17,3216	16,7637	17,7307	19,5327
19	17,3226	16,7662	17,7352	**19,5281**
20	17,3239	16,7689	17,7412	19,5311
21	17,3251	16,7715	17,7477	19,5381
22	17,3263	16,7740	17,7540	19,5469
23	17,3272	16,7762	17,7599	19,5561
24	17,3279	16,7780	17,7651	19,5649

Πίνακας 9: Κυρτότητα πολιτικής ΒΑΠΜΑ2

s	r=1	r=2	r=5	r=10
7	15,4478	15,5226	17,3410	24,9982
8	15,3043	15,3333	16,7721	23,9385
9	15,2144	15,2159	16,4326	22,6894
10	15,1593	15,1444	16,2285	21,9599
11	15,1266	15,1023	16,1070	20,8581
12	15,1082	15,0788	16,0367	20,1450
13	15,0990	15,0670	15,9982	19,7382

14	15,0954	15,0625	15,9793	19,5032
15	**15,0952**	**15,0623**	**15,9724**	19,3690
16	15,0968	15,0646	15,9726	19,2954
17	15,0994	15,0680	15,9766	19,2584
18	15,1024	15,0719	15,9825	19,2433
19	15,1054	15,0757	15,9891	**19,2412**
20	15,1082	15,0794	15,9957	19,2462
21	15,1108	15,0827	16,0019	19,2548
22	15,1130	15,0856	16,0074	19,2650
23	15,1149	15,0881	16,0122	19,2753
24	15,1165	15,0901	16,0163	19,2851

Όπως παρατηρούμε από τις γραφικές παραστάσεις αλλά και τους σχετικούς πίνακες οι συναρτήσεις κόστους και για τις τρεις πολιτικές εμφανίζουν μία μορφή κυρτότητας. Αν και δεν πραγματοποιήθηκε εξαντλητικός έλεγχος , στον αριθμό πειραμάτων που πραγματοποιήθηκε οι συναρτήσεις κόστους εμφανίζουν ένα τοπικό ελάχιστο , το οποίο γίνεται φανερό και από τους πίνακες παραπάνω. Δηλαδή για κάθε κατώφλι που ορίσαμε υπήρχε πάντα ένα μοναδικό ελάχιστο. Αξίζει να αναφερθεί ότι σε περιπτώσεις που η κυρτότητα ισχύει , προφανώς δεν χρειάζεται εξαντλητικός έλεγχος για την εύρεση της βέλτιστης, αρκεί απλά ένας κλασσικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης ο οποίος φυσικά απαιτεί πολύ μικρότερο υπολογιστικό κόστος.

6.Συμπεράσματα

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας ήταν να εξεταστεί ένα σύστημα παραγωγής το οποίο παράγει ένα προϊόν που απευθύνεται σε δύο κατηγορίες πελατών υψηλής και χαμηλής προτεραιότητας. Οι αφίξεις των πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson , ενώ οι χρόνοι παραγωγής την Cox-2. Για αυτό το σύστημα παραγωγής μελετήθηκαν τρεις διαφορετικές πολιτικές ελέγχου του αποθέματος, οι ΒΑΠΑ,ΒΑΠΜΑ2 και ΒΑΠΑ2. Και οι τρεις απέρριπταν τους πελάτες χαμηλής προτεραιότητας (τύπου 2) όταν η τιμή του αποθέματος έπεφτε κάτω από ένα ορισμένο κατώφλι *r*, σε διαφορετική περίπτωση εξυπηρετούσαν μόνο τους πελάτες υψηλής προτεραιότητας (τύπου 1). Η πολιτική ΒΑΠΑ όταν δεν είχε πλέον άλλο διαθέσιμο απόθεμα απέρριπτε τους πελάτες τύπου 1 ενώ οι πολιτικές ΒΑΠΜΑ2 και ΒΑΠΑ2 σε αυτή την περίπτωση δέχονταν εκκρεμείς παραγγελίες για αυτή την κατηγορία πελατών. Η ΒΑΠΜΑ2 δεχόταν πεπερασμένες στο πλήθος εκκρεμείς παραγγελίες και η ΒΑΠΑ2 άπειρες έως ότου το σύστημα παράγει ξανά και εξυπηρετήσει τελικά τους πελάτες τύπου 1. Για την μοντελοποίηση του συστήματος και για τις τρεις πολιτικές χρησιμοποιήθηκαν αλυσίδες Μαρκόβ συνεχούς χρόνου και εκτιμήθηκαν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης και το αντίστοιχο κόστος λειτουργίας του συστήματος για κάθε πολιτική. Με την εκτίμηση της συνάρτησης κόστους μπορέσαμε και υπολογίσαμε τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου οι οποίες αριθμητικά εκτιμήθηκαν σε περιβάλλον Matlab. Χρησιμοποιήθηκε μία προσέγγιση του αλγορίθμου εξαντλητικής αναζήτησης για την εύρεση του ελάχιστου κόστους για κάθε πολιτική που ακολουθήθηκε. Πραγματοποιήθηκε πληθώρα αριθμητικών πειραμάτων και δοκιμών προκειμένου να εξεταστούν οι επιρροές που δέχεται η συνάρτηση κόστους ως προς τις μεταβλητές ελέγχου. Τέλος συγκρίθηκαν μεταξύ τους και οι τρεις πολιτικές που εξετάσθηκαν και έγινε φανερό ότι η πολική ΒΑΠΜΑ2 υπερτερεί έναντι των άλλων δύο πολιτικών καθώς δίνει το μικρότερο κόστος λειτουργίας για το σύστημά μας.

7.Βιβλιογραφία

Adan I. and van der Wal. J. Difference and differential equations in Stochastic Operations Research, Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology, 1998.

Cohen, M. A., Kleindorfer, P. R., & Lee, H. L. (1988). Service Constrained (s, S) Inventory Systems with Priority Demand Classes and Lost Sales.

Gayon, J., Vericourt, F. De, & Karaesmen, F. (2005). Stock Rationing in an M / E k / 1 Make-to-Stock Queue with Backorders.

Ha, A. Y. (1997). Inventory Rationing in a Make-to-Stock Production System with Several Demand Classes and Lost Sales.

Ha, A. Y. (2000). Stock Rationing in an M / E k / 1 Make-to-Stock Queue.

Ioannidis, S. (2011). Int. J. Production Economics An inventory and order admission control policy for production systems with two customer classes. *Intern. Journal of Production Economics*, *131*(2), 663–673.

Lee, J. E., & Hong, Y. (2003). A stock rationing policy in a (s, S) -controlled stochastic production system with 2-phase Coxian processing times and lost sales, *83*, 299–307.

Nahmias, S., & Demmy, W. S. (1981). Operating Characteristics of an Inventory System with Rationing.

Topkis, D. M. (1968). Optimal Ordering and Rationing Policies in α Nonstationary Dynamic Inventory Model with n Demand Classes.

Οικονομόπουλος Α. Άγγελος,(2005). Πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων και πωλήσεων για απλά συστήματα παραγωγής με πελάτες που αποθαρρύνονται. Μεταπτυχιακή Διατριβή. Πολυτεχνείο Κρήτης.

8.Παράρτημα

Πολιτική ΒΑΠΑ

```
%arxikopoihseis
sin =7; %arxiko apothema
kmin=1000;
L1=2.5;
L2 = 1.5;
m1 =5;
m2 = 3;
q = 0.4;
rin=6; %arxiko katofli
r=rin+1;
s = sin+1;
L = L1+L2;


for z = 1:5
    c(s,1)=1;
    c(s-1,2)=((q*m1)/(L+m2))*c(s-1,1);
    c(s-1,1) = (c(s,1)*L -c(s-1,2)*m2)/((1-q)*m1);
end

for k=1:5000000
    s1=s-2;
    while s1>0

        if(s1>r)
            c(s1,1) =(1/(L+m1))*(c(s1-1,2)*m2+c(s1-1,1)*(1-
q)*m1+c(s1+1,1)*L);
            c(s1,2) =(1/(L+m2))*(c(s1,1)*q*m1+c(s1+1,2)*L);
        elseif(s1==r)
            c(s1,2)= (1/(m2+L1))*(c(s1+1,2)*L+c(s1,1)*q*m1);
            c(s1,1)= (1/(L1+m1))*(c(s1-1,1)*(1-q)*m1+c(s1-
1,2)*m2+c(s1+1,1)*L);
        elseif(s1<r && s1>1)
            c(s1,2)= (1/(L1+m2))*(c(s1+1,2)*L1+c(s1,1)*q*m1);
            c(s1,1)=(1/(L1+m1))*(c(s1-1,1)*(1-q)*m1+c(s1+1,1)*L1+c(s1-
1,2)*m2);
        elseif(s1==1)
            c(s1,2)= (1/m2)*(c(1,1)*q*m1+c(2,2)*L1);
            c(s1,1)= (1/m1)*(c(2,1)*L1);
        end
        s1 = s1-1;
    end
end

sum = 0;
for j=1:2
    for i=1:s
        sum= c(i,j)+sum;
    end
end

norm_coef= 1/sum; %sydelestis kanonikopoihshs
```

```
for j=1:2
    for i=1:s
        p(i,j)= c(i,j)*norm_coef;
    end
end

final_sum=0;
for j=1:2
    for i=1:s
        final_sum= p(i,j)+final_sum;
    end
end

sigma1 = 20; %monadiaio kostos aporipsis pelatwn 1
sigma2 = 10; %monodiaio kostos aporripsi pelatwn 2

K1 = sigma1*L1*((p(1,1)+p(1,2))); %Kostos aporipsis pelatwn 1

sum_k2=0;
for i=1:r
    sum_k2= p(i,1)+p(i,2)+sum_k2;
end

K2 = sigma2*L2*sum_k2;  %kostos aporipshs pelatwn typoy  2

h=0.2;

K = 0;
for i=1:s

    K = (i-1)*(p(i,1)+p(i,2))+K;
end

Ka =K*h;  %kostos apothematos

Kostos = Ka+K2+K1;
```

Πολιτική ΒΑΠΜΑ2

```
%arxikopoihseis
sin1 =60; %arxiko apothema
kmin=1000;
L1=2.5;
L2 = 1.5;
m1 =5;
m2 = 3;
q = 0.4;
r1=6; %arxiko katofli
neg =6;
L = L1+L2;

s = sin1+neg+1;
r = r1+neg+1;

for z = 1:5
    c(s,1)=1;
```

```
    c(s-1,2)=((q*m1)/(L+m2))*c(s-1,1);
    c(s-1,1) = (c(s,1)*L -c(s-1,2)*m2)/((1-q)*m1);
end
 % Ypologismos pithanothtwn monimhs katastashs
for k=1:5000000
    s1=s-2;
    while s1>=0

        if(s1>r)
            c(s1,1) =(1/(L+m1))*(c(s1-1,2)*m2+c(s1-1,1)*(1-
q)*m1+c(s1+1,1)*L);
            c(s1,2) =(1/(L+m2))*(c(s1,1)*q*m1+c(s1+1,2)*L);
        elseif(s1==r)
            c(s1,2)= (1/(m2+L1))*(c(s1+1,2)*L+c(s1,1)*q*m1);
            c(s1,1)= (1/(L1+m1))*(c(s1-1,1)*(1-q)*m1+c(s1-
1,2)*m2+c(s1+1,1)*L);
        elseif(s1<r && s1>1)
            c(s1,2)= (1/(L1+m2))*(c(s1+1,2)*L1+c(s1,1)*q*m1);
            c(s1,1)=(1/(L1+m1))*(c(s1-1,1)*(1-q)*m1+c(s1+1,1)*L1+c(s1-
1,2)*m2);
        elseif(s1==1)
            c(s1,2)= (1/m2)*(c(1,1)*q*m1+c(2,2)*L1);
            c(s1,1)= (1/m1)*(c(2,1)*L1);
        end
        s1 = s1-1;
    end
end

sum = 0;
for j=1:2
    for i=1:s
        sum= c(i,j)+sum;
    end
end

norm_coef= 1/sum; %sydelestis kanonikopoihshs
for j=1:2
    for i=1:s
        p(i,j)= c(i,j)*norm_coef;
    end
end

final_sum=0;
for j=1:2
    for i=1:s
        final_sum= p(i,j)+final_sum;
    end
end

sigma1 = 20; %monadiaio kostos aporipsis pelatwn 1
sigma2 = 10; %monodiaio kostos aporripsi pelatwn 2

K1 = sigma1*L1*((p(1,1)+p(1,2))); %Kostos aporipsis pelatwn 1

sum_k2=0;
for i=1:r
    sum_k2= p(i,1)+p(i,2)+sum_k2;
end
```

```
K2 = sigma2*L2*sum_k2;  %kostos aporipshs pelatwn typoy  2

h=0.2;

K = 0;
for i=neg+1:s

    K = (i-(neg+1))*(p(i,1)+p(i,2))+K;
end

Ka =K*h;  %kostos apothematos

b=1;
B=0;
for i=1:neg
  B = ((neg+1)-i)*(p(i,1)+p(i,2))+B;  %kostos ekremon paraggelion
end
Ke =b*B;  %kostos ekremon paraggelion
Kostos = Ka+K2+K1+Ke;
```

Πολιτική ΒΑΠΑ2

```
%arxikopoihseis
sin1 =61; %arxiko apothema
kmin=1000;
L1=2.5;
L2 = 1.5;
m1 =5;
m2 = 3;
q = 0.4;
r1=7; %arxiko katofli
neg =500;
L = L1+L2;

s = sin1+neg+1;
r = r1+neg+1;

for z = 1:5
    c(s,1)=1;
    c(s-1,2)=((q*m1)/(L+m2))*c(s-1,1);
    c(s-1,1) = (c(s,1)*L -c(s-1,2)*m2)/((1-q)*m1);
end
   %Ypologismos pithanothtwn monimhs katastashs
for k=1:5000000
    s1=s-2;
    while s1>=0
       % s1 = s2+1;
        if(s1>r)
            c(s1,1) =(1/(L+m1))*(c(s1-1,2)*m2+c(s1-1,1)*(1-
q)*m1+c(s1+1,1)*L);
            c(s1,2) =(1/(L+m2))*(c(s1,1)*q*m1+c(s1+1,2)*L);
        elseif(s1==r)
            c(s1,2)= (1/(m2+L1))*(c(s1+1,2)*L+c(s1,1)*q*m1);
            c(s1,1)= (1/(L1+m1))*(c(s1-1,1)*(1-q)*m1+c(s1-
1,2)*m2+c(s1+1,1)*L);
        elseif(s1<r && s1>1)
```

```
            c(s1,2)= (1/(L1+m2))*(c(s1+1,2)*L1+c(s1,1)*q*m1);
            c(s1,1)=(1/(L1+m1))*(c(s1-1,1)*(1-q)*m1+c(s1+1,1)*L1+c(s1-
1,2)*m2);
        elseif(s1==1)
            c(s1,2)= (1/m2)*(c(1,1)*q*m1+c(2,2)*L1);
            c(s1,1)= (1/m1)*(c(2,1)*L1);
        end
        s1 = s1-1;
    end
end

sum = 0;
for j=1:2
    for i=1:s
        sum= c(i,j)+sum;
    end
end

norm_coef= 1/sum; %sydelestis kanonikopoihshs
for j=1:2
    for i=1:s
        p(i,j)= c(i,j)*norm_coef;
    end
end

final_sum=0;
for j=1:2
    for i=1:s
        final_sum= p(i,j)+final_sum;
    end
end

sigma2 = 10; %monodiaio kostos aporripsi pelatwn 2

sum_k2=0;
for i=1:r
    sum_k2= p(i,1)+p(i,2)+sum_k2;
end

K2 = sigma2*L2*sum_k2;  %kostos aporipshs pelatwn typoy  2

h=0.2;

K = 0;
for i=neg+1:s

    K = (i-(neg+1))*(p(i,1)+p(i,2))+K;
end

Ka =K*h;  %kostos apothematos

b=1;
B=0;
for i=1:neg
  B = ((neg+1)-i)*(p(i,1)+p(i,2))+B;  %kostos ekremon paraggelion
end
Ke =b*B;  %kostos ekremon paraggelion
Kostos = Ka+K2+Ke;
```