ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Η. ΚΟΣΜΑΤΟΠΟΥΛΟΣ

'Ανάλυση 3 διαφορετικών μεθόδων αυτόματου ελέγχου γερανών'

Βαρβαντάκης Βαγγέλης Α.Μ. 1999010049

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι ένα πρόβλημα το οποίο έχει άμεσες οικονομικές προεκτάσεις κι αυτό το γεγονός κάνει την επίλυση του, άμεσου ενδιαφέροντος. Το πρόβλημα αυτό έχει να κάνει με τη μεταφορά φορτίων μέσω γερανού. Για παράδειγμα σε ένα λιμάνι, ο γερανός να πρέπει να πάρει κάποια πράγματα από ένα φορτηγό σε ένα πλοίο. Συνήθως αυτά τα φορτία που πρέπει να μεταφερθούν είναι πολλά οπότε η κίνηση του γερανού να πάρει τα πράγματα π.χ. από το όχημα και να τα αφήσει στο πλοίο πρέπει να γίνει πολλές φορές που σημαίνει ότι απαιτείται πολύς χρόνος. Αυτή η καθυστέρηση λοιπόν μας οδηγεί στην ανάπτυξη όσο το δυνατόν μεγαλύτερης ταχύτητας της κίνησης αυτής. Παρατηρείται όμως ότι όταν αυτή η κίνηση πραγματοποιείται γρήγορα, τότε εμφανίζεται ταλάντωση στην κίνηση και μάλιστα όσο μεγαλύτερη η ταχύτητα με την οποία κινείται το φορτίο, τόσο μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης έχουμε. Προφανώς αυτή η ταλάντωση είναι ανεπιθύμητη διότι επιβραδύνει τη μεταφορά. Συνεπώς, θέλουμε να επιτύχουμε και όσο το δυνατόν μικρότερο χρόνο μεταφοράς (μεγαλύτερη ταχύτητα) και όσο το δυνατόν μικρότερο πλάτος ταλάντωσης. Το πρόβλημα είναι ότι τα δύο προαναφερθέντα είναι αντικρουόμενα μεταξύ τους και η εμφάνιση του ενός παρεμποδίζει την ανάπτυξη του άλλου. Η δουλειά μας λοιπόν είναι να καταφέρουμε να αναπτύξουμε τις κατάλληλες μεθόδους που θα εξασφαλίζουν το δυνατόν μικρότερο πλάτος ταλάντωσης και το δυνατόν μικρότερο χρόνο διεκπεραίωσης της κίνησης.

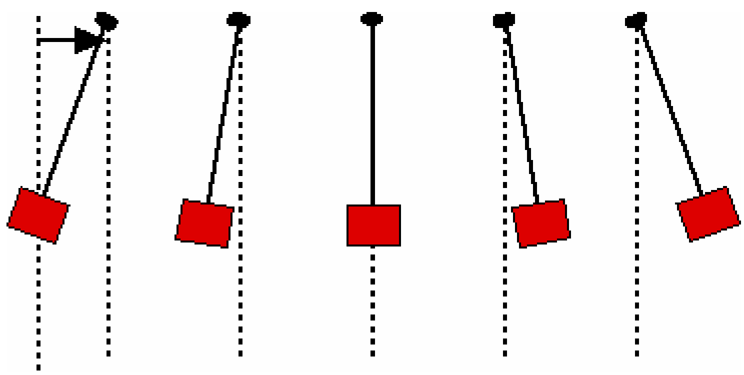
1.1 ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΤΙΤΑΛΑΝΤΕΥΣΗ

Ένα βάρος κρεμασμένο σε ένα μακρύ σκοινί ή καλώδιο μοιάζει πολύ με ένα θεωρητικό εκκρεμές. Σε ένα περιβάλλον χωρίς τριβές, μόλις το βάρος αντισταθμιστεί από την κάθετο, θα επιστρέψει σε σημείο από την άλλη μεριά, το ίδιο μακρυά και θα συνεχίσει αυτή την κίνηση για πάντα.

Ο χρόνος που απαιτείται για να επιστρέψει κάθε φορά το βάρος στο ίδιο σημείο ονομάζεται περίοδος του εκκρεμούς. Ο χρόνος αυτός εξαρτάται μόνο από το μήκος του σκοινιού και δεν έχει να κάνει με το βάρος που προσαρτίζεται σε αυτό.

Όσον αφορά τους γερανούς τώρα αν το υπομόχλιο σταματήσει ξαφνικά, τότε θα υπάρξει παραμένουσα ταλάντωση. Το σώμα αυτό θα κινείται για πολλή ώρα εκτός αν υπάρχει μεγάλη τριβή για να το σταματήσει. Με σωστές κινήσεις του υπομοχλίου, είναι δυνατό να σταματήσουμε αυτή την παραμένουσα ταλάντωση αλλά απαιτείται αρκετός χρόνος.

Αν η κίνηση του υπομόχλιου ελεγχθεί κατάλληλα, τότε η ταλάντωση μπορεί να εξαφανιστεί από τις επιταχύνσεις και από τις δύο μεριές. Η μέθοδος αποκαλείται ‘bang bang’ και σημαίνει ότι αρχικά το υπομόχλιο επιταχύνεται στη μισή ταχύτητα, και μισή περίοδο αργότερα επιταχύνεται σε πλήρη ταχύτητα. Αν αυτό γίνει με ακρίβεια, τότε το βάρος θα κρέμεται ακριβώς κάτω από το υπομόχλιο. Η όλη κίνηση φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Το σταμάτημα χωρίς ταλάντωση είναι ακριβώς η αντίστροφη διαδικασία: χαμηλώνουμε στη μισή ταχύτητα και μετά να περιμένουμε μισή περίοδο μέχρι να σταματήσει. Το βάρος δε θα ταλαντώνεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάγκη για ταχύτερο χειρισμό του φορτίου, συγκεκριμένα στη φόρτωση και στην εκφόρτωση πλοίων κοντέινερ των οποίων ο χρόνος εξυπηρέτησης πρέπει να ελαχιστοποιηθεί, απαιτεί τον έλεγχο της κίνησης του γερανού ώστε η δυναμική του απόδοση να βελτιστοποιηθεί.

Ένας διδιάστατης εφαρμογής κύκλος ταλάντωσης μπορεί να διαιρεθεί σε τρεις θεμελιώδεις κινήσεις: η ανύψωση του φορτίου από ένα δοσμένο σημείο, η μεταφορά του με μια συνήθως σταθερή ταχύτητα για το καροτσάκι, το χαμήλωμα στο τέλος της μεταφοράς. Το πρόβλημα είναι αυτό της μείωσης της ταλάντωσης του φορτίου κατά τη διάρκεια της κίνησής του στην επιθυμητή θέση όσο το δυνατόν πιο γρήγορα.

Διάφοροι συγγραφείς έχουν αναπτύξει τεχνικές ελέγχου βελτιστοποίησης είτε στον ολοκληρωμένο κύκλο είτε σε μία από τις κινήσεις που τον αποτελούν. Οι Auernig και Troger [2] και Hippe [3] έχουν χρησιμοποιήσει τεχνικές ελέγχου ελαχίστου χρόνου˙ οι Sakawa και Shindo [6] έχουν χρησιμοποιήσει βέλτιστο έλεγχο για να ελαχιστοποιήσουν την ταλάντωση του φορτίου. Από τη στιγμή που το φορτίο βασίζεται στην επιτάχυνση του καροτσιού, η ελαχιστοποίηση του χρόνου κύκλου και η ελαχιστοποίηση της ταλάντωσης του φορτίου είναι μερικώς αντιμαχόμενες απαιτήσεις.

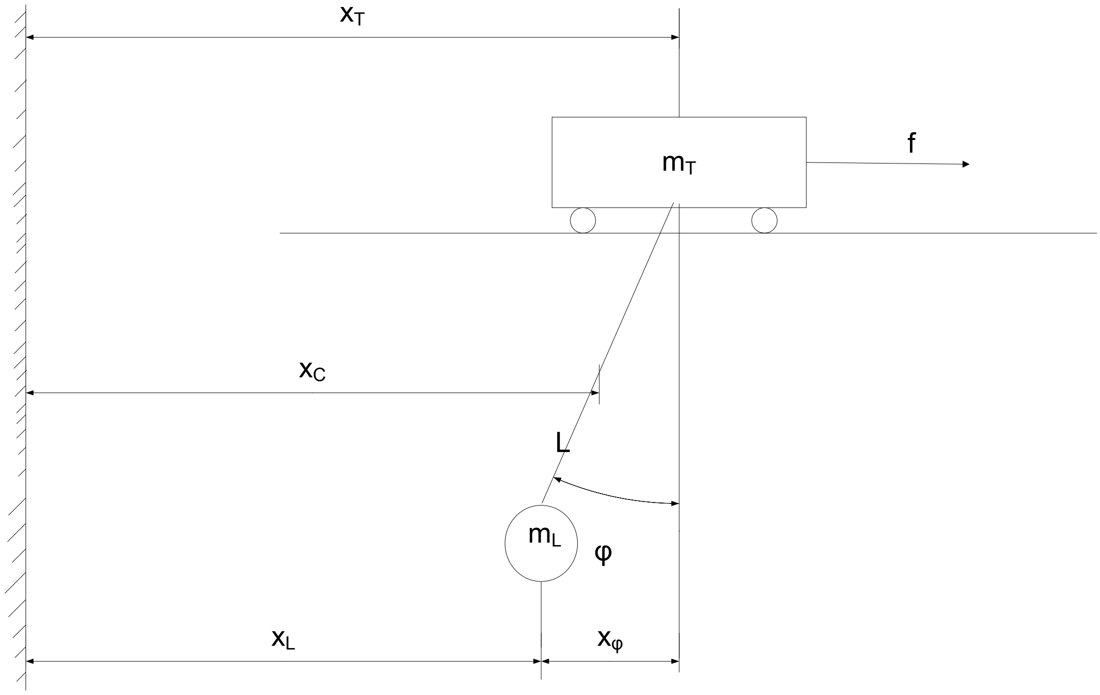
Σε αυτό το έγγραφο λοιπόν έχουμε να κάνουμε με ένα πρόβλημα ελέγχου. Στόχος μας είναι να δημιουργήσουμε μία κατάλληλη ανάδραση $u=f(x)$ για να περιορίσουμε την κίνηση του αιωρούμενου σχοινιού σε επιθυμητά πλαίσια (να μη δημιουργείται ταλάντωση).

Μία εταιρεία που έχει ασχοληθεί με αυτό ακριβώς το πρόβλημα είναι η SmartCrane η οποία έχει εγκαταστήσει 5 ‘αντιταλαντευτικά’ συστήματα σε γερανούς στο Λιμάνι του New Jersey και της Νέας Υόρκης. Το σύστημα χρησιμοποιεί την τεχνολογία SmartCamera για να ανιχνεύει ταλάντωση και έναν διακόπτη για να σταματά την ταλάντωση σε ένα βήμα. Η SmartCrane έκανε επίδειξη του πρώτου αυτόματου φορτώματος πλοίων σε ένα πρωτότυπο αντιταλαντευτικό σύστημα στο Λιμάνι του Freeport στο Texas. Η πρώτη επίδειξη με έμπειρους χειριστές στο τιμόνι διήρκησε 45 λεπτά και κατέγραψε ρυθμούς φορτώματος της τάξης των 24 κοντέινερ την ώρα

Το νέο και βελτιωμένο αντιταλαντευτικό σύστημα εξετάστηκε πρώτη φορά στο New Jersey το Φεβρουάριο του 2001 και περιέχει ένα διακόπτη ο οποίος επιτρέπει στο χειριστή να καταγράψει μία θέση όσο το φορτίο κινείται. Ο υπολογιστής του SmartCrane έπειτα τοποθετεί αμέσως το καροτσάκι του γερανού πάνω από εκείνο το σημείο και εξαλείφει την ταλάντωση.

Το σύστημα SmartCrane παρουσιάζει τα παρακάτω πλεονεκτήματα.

- Μπορεί να δεχτεί εξωτερικές μετρήσεις ταλάντωσης για να συμψηφίσει τη μη κάθετη ανύψωση και την επίδραση του ανέμου. Αν ο εξωτερικός αισθητήρας αποτύχει, η βασική αντιταλάντευση συνεχίζει να αποτρέπει την ταλάντωση που προκαλείται από το χειριστή
- Παραμονεύει για ταλάντωση κατά τη διάρκεια της κίνησης, έτσι ώστε να σταματήσει οποιαδήποτε στιγμή, δίχως παραμένουσα ταλάντωση
- Εξαλείφει όλη την ταλάντωση που έχει προκληθεί, ακόμα και κατά την ανύψωση
- Μπορεί να λειτουργεί σε πλήρη ταχύτητα για το καροτσάκι
- Δεν απαιτεί περαιτέρω τροποποίηση για μηχανοκίνητους ελεγκτές γερανών
- Λειτουργεί και για χειροκίνητες καταστάσεις και για πλήρως αυτοματοποιημένες



Σχήμα 1. Μοντέλο του γερανού

2.2 ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Θα θεωρήσουμε ένα διδιάστατο γερανό, του οποίου το μοντέλο φαίνεται στο Σχήμα 1. Τα σύμβολα έχουν ως εξής:

m_T, m_L	Μάζα του καροτσιού και του φορτίου, αντίστοιχα
L	Μήκος του αιωρούμενου σχοινιού
x_T, x_L	Μετατόπιση του καροτσιού και του φορτίου, αντίστοιχα
$x_C=(m_T\, x_T+m_L\, x_L)/(m_L+ m_T)$	Μετατόπιση του κέντρου βαρύτητας όλου του συστήματος
φ	Γωνία μεταξύ του αιωρούμενου σχοινιού και της καθέτου που δίνεται ως θετική με την κατεύθυνση του ρολογιού
$x_φ= x_T-x_L= L\sin φ$	Μετατόπιση του φορτίου
f	Δύναμη ελεγκτή που εφαρμόζεται στο καροτσάκι

g Σταθερά βαρύτητας

Αν το φορτίο είναι πολύ βαρύ, είναι δυνατό να θεωρήσουμε το αιωρούμενο σχοινί ως άκαμπτη ράβδο. Με τις προϋποθέσεις που θεωρούνται (μικρές γωνίες και δύναμη ασκούμενη από το σχοινί ίση με το βάρος του σχοινιού) επιλέγουμε τις παρακάτω καταστατικές μεταβλητές:

$$x_1(t)=x_\varphi(t), \quad x_2(t)=x_C(t)$$
$$x_3(t)=\dot{x}_\phi(t), \quad x_4(t)=\dot{x}_C(t) \tag{1}$$

και

$$\omega_t=\omega_t\left(L(t)\right)=\left(\frac{g(m_T+m_L)}{m_T L}\right)^{0.5} \tag{2}$$

και παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση

$$\dot{x}_t=A_t x_t+B_t f \tag{3}$$

με

$$x_t=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad A_t=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_t=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_T} \\ \dfrac{1}{m_T+m_L} \end{bmatrix}.$$

Ο δείκτης t έχει χρησιμοποιηθεί για να δείξει ότι οι μεταβλητές είναι συναρτήσεις του χρόνου. Το μοντέλο που δίνεται από την (3) είναι χρονικά μεταβαλλόμενο επειδή το ω_t είναι συνάρτηση του L(t).

Η δυναμική του συστήματος στο Σχήμα 1, περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
m_T \ddot{x}_T &= f - F\sin\phi \\
m_L \ddot{x}_L &= F\sin\phi \\
m_L \ddot{y}_L &= m_L g - F\cos\phi
\end{aligned}
\tag{4}
$$

όπου F είναι η δύναμη στη διεύθυνση του σχοινιού

$$x_L = x_T - L\sin\varphi \tag{5}$$

είναι η μετατόπιση του φορτίου στην οριζόντια διεύθυνση

$$y_L = L\cos\varphi \tag{6}$$

είναι η μετατόπιση του φορτίου στην κατακόρυφη διεύθυνση

Με τους μετασχηματισμούς $x_C=(m_T x_T+ m_L x_L)/(m_L+m_T)$ και $x_\varphi= L\sin\varphi= x_T- x_L$, οι πρώτες δύο εξισώσεις της (4) μπορούν να ξαναγραφτούν ως

$$\ddot{x}_\phi + \frac{F\left(\vec{\phi},\vec{L}\right)}{L}\left(\frac{1}{m_T}+\frac{1}{m_L}\right)x_\phi = \frac{f}{m_T} \qquad \ddot{x}_C = \frac{f}{m_T + m_L} \tag{7}$$

όπου η δύναμη του σχοινιού $F\left(\vec{\phi},\vec{L}\right)$ είναι μία συνάρτηση του $\vec{\phi}:(\phi,\dot{\phi},\ddot{\phi})$ και του $\vec{L}:(L,\dot{L},\ddot{L})$ οπότε η τρίτη εξίσωση της (4) γίνεται με τη βοήθεια της (6):

$$m_L\left(\ddot{L}\cos\phi - 2\dot{L}\sin\phi - L\dot{\phi}^2\cos\phi - L\ddot{\phi}\sin\phi\right) = -m_L g - F\cos\phi \tag{8}$$

Γραμμικοποιώντας γύρω από το σημείο ισορροπίας $\vec{\phi}^*:\left(\phi=0,\dot{\phi}=0,\ddot{\phi}=0\right)$ είναι ισοδύναμο με

$$\sin\varphi=\varphi, \qquad \cos\varphi=1, \qquad \dot{\phi}\sin\varphi=0$$

$$\dot{\phi}^2=0, \qquad \ddot{\phi}\sin\varphi=0$$

και υποθέτοντας ότι $\ddot{L}(t)=0$ και $F\left(\vec{\phi}^*,\ddot{L}(t)=0\right)=m_L g$, δηλαδή η δύναμη κατά μήκος του σχοινιού είναι ίση με το βάρος του φορτίου. Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή της F στην (27) επιτυγχάνουμε το γραμμικοποιημένο μοντέλο

$$\ddot{x}_\phi + \frac{g\left(m_T + m_L\right)}{m_T L}x_\phi = \frac{f}{m_T} \qquad \ddot{x}_C = \frac{f}{m_T + m_L}. \tag{9}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Για τη λύση του προβλήματος έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι από τις οποίες άλλες ήταν αποτελεσματικότερες και άλλες δεν είχαν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Παρακάτω παραθέτουμε τρεις από αυτές συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που προκύπτουν.

3.1 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Εμείς θέλουμε το σύστημά μας να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Ένα σύστημα $\{\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t})), \mathbf{x}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0\}$ καλείται ασυμπτωτικά ευσταθές γύρω από το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*\mathbf{=0}$ αν υπάρχει μια περιοχή δ έτσι ώστε για αρχικές συνθήκες εντός αυτής της περιοχής το σύστημα να τείνει πάντα να επιστρέψει στο $\mathbf{x}^*\mathbf{=0}$, δηλαδή

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \underset{\mathbf{t}\to\infty}{\text{ορ}}\, \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$$

Επίσης, ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ είναι ευσταθές εάν Re(λ(A))<0, δηλαδή αν οι πραγματικές τιμές των ιδιοτιμών του πίνακα A είναι όλες αρνητικές.

Όταν λέμε συστήματα αυτομάτου ελέγχου εννοούμε βασικά *συστήματα αυτομάτου ελέγχου με ανατροφοδότηση*.

Τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου αναπαρίστανται γραφικά με τη χρήση των **δομικών διαγραμμάτων**. Τα δομικά διαγράμματα απεικονίζουν την ακολουθία των διαδικασιών και τις σχέσεις μεταξύ των υποσυστημάτων που απαρτίζουν το συνολικό σύστημα.

Τα δομικά διαγράμματα απαρτίζονται από επιμέρους τμήματα συνδεδεμένα μεταξύ τους με διάφορους τρόπους. Το απλούστερο τμήμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

Σχήμα 2: Βασικό δομικό στοιχείο δομικών διαγραμμάτων

Η συνάρτηση G(s) καλείται συνάρτηση μεταφοράς, η R(s) είσοδος και η Y(s) έξοδος. Αυτό λοιπόν που δείχνει ουσιαστικά το δομικό στοιχείο είναι το τι θα συμβεί (Y(s)) σ' ένα σύστημα (G(s)) αν διεγερθεί από την R(s).

Τα βήματα που πρέπει αν ακολουθήσει ένας μηχανικός αυτομάτου ελέγχου (ή καλύτερα μια ομάδα σχεδίασης) είναι:

- Κατάστρωση φυσικού μοντέλου και εύρεση μαθηματικών εξισώσεων που το περιγράφουν. Πιθανές απλοποιήσεις λόγω μη γραμμικότητας. Το βήμα αυτό χρειάζεται ειδικές γνώσεις επί της ελεγχόμενης διαδικασίας, για παράδειγμα γνώση χημείας αν πρόκειται για χημικές διεργασίες, γνώση βιολογίας αν πρόκειται για βιολογικές διεργασίες κ.ο.κ.
- Τυποποίηση προδιαγραφών συμπεριφοράς και σχεδίαση ελεγκτή που να τις ικανοποιεί. Το βήμα αυτό είναι μια διαδικασία δοκιμής-σφάλματος (trial and error) αφού οι προδιαγραφές είναι συνήθως αντικρουόμενες και πρέπει να βρεθεί μια διάταξη με αμοιβαίες παραχωρήσεις. Στην περίπτωσή μας έχουμε εισάγει δύο μεγέθη στη 2η μέθοδο των οποίων οι μεταβολές είναι αντικρουόμενες. Τα μεγέθη αυτά είναι:
    - το overshoot που δείχνει τη μέγιστη απόλυτη τιμή του μεγέθους έστω x, αφού περάσει το 0 μία φορά
    - το settling time που δείχνει τη χρονική στιγμή που $|\mathbf{x}| < \mathbf{3\%}|\mathbf{x_0}|$ και παραμένει εντός του διαστήματος $[-\mathbf{3\%}|\mathbf{x_0}|, +\mathbf{3\%}|\mathbf{x_0}|]$ για πάντα.

3.2 1Η ΜΕΘΟΔΟΣ

3.2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για να βελτιώσουμε τη λειτουργικότητα του χειρισμού φορτίου με γερανούς είναι απαραίτητο να ελέγχουμε τη θέση για το καροτσάκι του γερανού ώστε η ταλάντωση του κρεμάμενου φορτίου να ελαχιστοποιηθεί. Σ' αυτή τη μέθοδο θεωρούμε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο γραμμικό μοντέλο του γερανού, όπου ο χρονικά μεταβαλλόμενος συντελεστής είναι το μήκος του αιωρούμενου σχοινιού. Θεωρούμε το σύνολο των μοντέλων που δίνεται από τις 'παγωμένες'* τιμές του μήκους του σχοινιού και δείχνουμε πώς όλα αυτά τα μοντέλα μπορούν να αναχθούν σε ένα απλό, αμετάβλητο χρονικά μοντέλο χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη κλίμακα χρόνου. Η χρονική κλίμακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξαχθεί ένας κανόνας ελέγχου για το χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα που εφαρμόζει έναν εν δυνάμει προγραμματισμό κέρδους. Είναι επίσης δυνατό να βρούμε σχετικό άνω όριο για το ρυθμό της μεταβολής της μεταβαλλόμενης παραμέτρου που εξασφαλίζει τη σταθερότητα του χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος.

Εδώ λοιπόν θεωρούμε μία προσέγγιση που βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της ταλάντωσης του φορτίου και χρησιμοποιεί ένα γραμμικό, μεταβαλλόμενων παραμέτρων μοντέλο γερανού για να θέσει σε εφαρμογή έναν ελεγκτή. Ο μεταβαλλόμενος παράγοντας είναι το μήκος του σχοινιού στο οποίο αιωρείται το φορτίο.

Θεωρούμε το σύνολο των 'παγωμένων' μοντέλων που δίνεται από διαφορετικές σταθερές τιμές του μήκους του σχοινιού. Χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη χρονική κλίμακα [4], όλα αυτά τα μοντέλα μπορούν να αναχθούν σε ένα απλό αμετάβλητο με το χρόνο μοντέλο το οποίο να μην εξαρτάται από την τιμή του μήκους του σχοινιού.

* σταθερές με το χρόνο τιμές

Η χρονική κλίμακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξαχθεί ένας κανόνας ελέγχου για το χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα που εφαρμόζει έναν εν δυνάμει προγραμματισμό κέρδους [1].

Έχουμε επίσης μελετήσει τη σταθερότητα του συστήματος κλειστού βρόχου με τον προγραμματισμό κέρδους. Πρόσφατες δουλειές [7]-[9] παρουσιάζουν διάφορες μεθοδολογίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση άνω ορίων στο ρυθμό μεταβολής της μεταβαλλόμενης παραμέτρου για την εξασφάλιση της σταθερότητας ενός δοσμένου μεταβαλλόμενων παραμέτρων συστήματος. Αυτές οι μεθοδολογίες δίνουν αρκετές συνθήκες που είναι συνήθως συντηρητικές με την έννοια ότι συχνά απαιτούν ρυθμούς μεταβολής της μεταβαλλόμενης παραμέτρου, τόσο μικρούς ώστε να είναι πρακτικά μηδαμινοί. Αυτό το άνω όριο, στην ουσία, εξαρτάται σημαντικά από τη διαδικασία η οποία ακολουθείται για να τις προσδιορίσει και απέχει συνήθως πολύ από το πραγματικό όριο του προβλήματος.

Εντούτοις, μία κλασσική μεθοδολογία [8] μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτή την περίπτωση που θεωρούμε, για να εξασφαλίσουμε τη σταθερότητα του χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος για τον ονομαστικό ρυθμό της μεταβολής του μήκους του σχοινιού.

Ένα σημαντικό ζήτημα που χρειάζεται σχολιασμό αφορά την πρακτική εφαρμογή της μεθοδολογίας που περιγράφουμε. Η προσέγγισή μας απαιτεί η μάζα του φορτίου να είναι γνωστή για να επαναπροσδιοριστεί η θέση του κέντρου βάρους. Αυτή είναι μία ρεαλιστική υπόθεση σε πολλές εφαρμογές, όπως ο χειρισμός των πλοίων κοντέινερ, στα οποία οι πληροφορίες για τη φυσική (αρχική και τελική) θέση και το βάρος του κάθε κοντέινερ είναι γνωστές, πριν αρχίσει η επιχείρηση φόρτωσης/εκφόρτωσης. Η θέση του καροτσιού, η θέση του φορτίου, η γωνία του σχοινιού και το μήκος του σχοινιού μπορούν εύκολα να μετρηθούν από κατάλληλους αισθητήρες όπως σχολιάζεται στα [5], [10] και [11], ενώ ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του καροτσιού και της γωνίας του φορτίου μπορεί να επαναπροσδιορισθεί από έναν παρατηρητή που μπορεί επίσης να σχεδιαστεί. Συνεπώς, η θέση του κέντρου βάρους και η παράγωγός της (που έχουμε υποθέσει σαν μεταβλητές κατάστασης) μπορούν επίσης πολύ εύκολα να υπολογιστούν.

Υπάρχουν πολλές βιομηχανικές εφαρμογές στις οποίες η τιμή της μάζας του φορτίου είναι γνωστή εκ των προτέρων. Παρ' όλα αυτά, σε διάφορες από αυτές τις εφαρμογές η μάζα του φορτίου είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα του καροτσιού. Σ' αυτή την περίπτωση, μπορούμε απλά να αγνοήσουμε τη μάζα του φορτίου και να θεωρήσουμε εκ του ασφαλούς τη θέση του κέντρου βαρύτητας να συμπέφτει με τη θέση του καροτσιού. Αυτή είναι μία συγκεκριμένη περίπτωση της προσέγγισής μας στην οποία παίρνουμε $m_L=0$, και οι προσομοιώσεις που έχουν εκτελεστεί έδειξαν ότι η μεθοδολογία ελέγχου που περιγράφουμε δίνει καλές αποδόσεις και σ' αυτή την περίπτωση.

3.2.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Στη μέθοδο αυτή θεωρήθηκε μια δοσμένη σταθερή τιμή του ω_t, π.χ. αν θεωρήσουμε το σύστημα για μια σταθερή τιμή του L, μπορούμε να θεωρήσουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό:

$$\tau=\omega_t t \qquad (10)$$

Αυτός ο μετασχηματισμός ορίζει μια κλίμακα που μετατρέπει την (1) ως εξής:

$x_1(t)=x_\varphi(t)=x_\varphi(\tau)=x_1(\tau)$

$x_2(t)=x_C(t)=x_C(\tau)=x_2(\tau)$

$$x_3(t)=\frac{dx_\phi(t)}{dt}=\frac{dx_\phi(\tau(t))}{dt}=\omega_t\frac{dx_\phi(\tau)}{d\tau}=\omega_t x_3(\tau)$$

$$x_4(t)=\frac{dx_C(t)}{dt}=\frac{dx_C(\tau(t))}{dt}=\omega_t\frac{dx_C(\tau)}{d\tau}=\omega_t x_4(\tau). \qquad (11)$$

Σύμφωνα με την (11), οι μεταβλητές x_C και x_φ μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις του t ή του τ, ενώ οι παράγωγοί τους αλλάζουν με τη χρονική κλίμακα. Μπορούμε να γράψουμε την (11) ως

$$x_t=Nx_\tau \qquad (12)$$

όπου

$$\mathrm{N}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_t \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x}_\tau=\begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ x_3(\tau) \\ x_4(\tau) \end{bmatrix} \tag{13}$$

Σύμφωνα με την (11) μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\dot{x}_t = \omega_t N \dot{x}_\tau \tag{14}$$

όπου

$\dot{x}_\tau$ είναι η παράγωγος του x_τ ως προς τ.

Χρησιμοποιώντας τις (12) και (14), είναι δυνατό να ξαναγράψουμε το σύστημα (3) ως

$$\dot{x}_\tau = \mathrm{A}_\tau \mathrm{x}_\tau + \mathrm{B}_\tau \mathrm{u}_\tau \tag{15}$$

με

$$\mathrm{A}_\tau = \omega_t^{-1}\mathrm{N}^{-1}\mathrm{A}_t\mathrm{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$B_\tau = \omega_t \mathrm{N}^{-1}\mathrm{B}_t m_\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dfrac{1}{1+\mu} \end{bmatrix}, \quad \left(\mu = \frac{m_L}{m_T}\right) \tag{17}$$

$$\mathrm{u}_\tau = \frac{f}{\omega_t^2 m_\mathrm{T}} \tag{18}$$

Η παράσταση που δίνεται από την (15) είναι αμετάβλητη με το χρόνο και δεν εξαρτάται από τη σταθερή τιμή του L στην (3). Είναι επίσης δυνατό να εκφράσουμε τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων των πινάκων A_t και A_τ. Έστω Λ_t (Λ_τ) οι διαγώνιοι πίνακες των ιδιοτιμών των A_t , A_τ˙ έπειτα από τη (16) παίρνουμε

$$\Lambda_t=\omega_t\Lambda_\tau \tag{19}$$

ενώ για τους πίνακες ιδιοδιανυσμάτων V_t και V_τ έχουμε

$$V_t=NV_\tau \tag{20}$$

Ένας ευνοϊκότερος ελεγκτής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελέγξει το σύστημα (15) ελαχιστοποιώντας το γραμμικό τετραγωνικό κόστος

$$J = \int_0^\infty (x_\tau^{\mathrm{T}} Q_\tau x_\tau + u_\tau^{\mathrm{T}} R_\tau u_\tau) d\tau \tag{21}$$

όπου $Q_\tau = Q_\tau^{\mathrm{T}} \geq 0$ και $R_\tau = R_\tau^{\mathrm{T}} > 0$ είναι κατάλληλοι πίνακες βάρους. Ο τελικός κανόνας ελέγχου έχει τη μορφή

$$u_\tau=-K_\tau x_\tau \tag{22}$$

όπου K_τ είναι ένας σταθερός πίνακας και δεν εξαρτάται από την τιμή του L.

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να μετασχηματιστεί, χρησιμοποιώντας τις (12) και (18), σε έναν αντίστοιχο κανόνα για το σταθερό σύστημα (3) που δίνει

$$f(t)= K_t x_t \tag{23}$$

όπου

$$\mathrm{K}_t = m_T \omega_t^2 \mathrm{K}_\tau \mathrm{N}^{-1} \tag{24}$$

Οι κανόνες ανατροφοδότησης (22) και (23) οδηγούν σε κλειστού βρόχου συστήματα των οποίων οι χαρακτηριστικοί πίνακες είναι

$$\overline{A_\tau} = \mathrm{A}_\tau - \mathrm{B}_\tau \mathrm{K}_\tau \qquad \overline{A_t} = \mathrm{A}_t - \mathrm{B}_t \mathrm{K}_t \tag{25}$$

Οι εξισώσεις (16), (19) και (20), γραμμένες για τα συστήματα ανοιχτού βρόχου, απαντούν και στα αντίστοιχα συστήματα κλειστού βρόχου. Χρησιμοποιώντας τις (10),(12) και (18), η συνάρτηση κόστους (21) μπορεί να ξαναγραφτεί για το σταθερό σύστημα του t ως

$$J = \int_0^\infty \left(x_t^T N^{-1} x_t + \frac{R_\tau}{\omega_t^4 m_T^2} f^2 \right) \omega_t dt \tag{26}$$

Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι ο κανόνας ελέγχου (23) είναι βέλτιστος για το σταθερό σύστημα (3) αν επιλεχθούν οι ακόλουθοι πίνακες βαρών:

$$Q_t = N^{-1}Q_\tau N^{-1}\omega_t, \qquad R_t = \frac{R_\tau}{\omega_t^3 m_T^2} \tag{27}$$

3.2.3 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΕΡΔΟΥΣ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ

Έστω L(t) μία χρονικά μεταβαλλόμενη παράμετρος (θεωρούμε πάντα ότι $\dot{L}(t) \neq 0, \ddot{L}(t) = 0$). Έπειτα οι (23) και (24) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εφαρμοστεί ένας μεταβλητός με το χρόνο κανόνας ελέγχου ανάδρασης που μπορεί να θεωρηθεί ως προγραμματισμός ελέγχου. Στην πραγματικότητα, στην (24) το ω_t και το N^{-1} είναι και τα δύο συναρτήσεις του L(t). Από τη στιγμή που το σταθερό σύστημα (3) με σταθερό κανόνα ελέγχου (23) είναι βέλτιστο, τότε όλες οι ρίζες του $\overline{A_t}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος για όλες τις σταθερές τιμές του L(t). Αυτό παρ' όλ' αυτά, δεν είναι επαρκές για να εξασφαλίσει τη σταθερότητα του χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος.

Νέα θεωρητικά αποτελέσματα αναλύουν την περίπτωση των συστημάτων ελέγχου προγραμματισμού κέρδους και δίνουν άνω όρια για το ρυθμό μεταβολής της χρονικά μεταβαλλόμενης παραμέτρου έτσι ώστε να εξασφαλιστεί σταθερότητα. Στην περίπτωσή μας, αυτές οι μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν για να βρεθεί ένα άνω όριο για το $|\dot{L}(t)|$ τέτοιες ώστε για τις ονομαστικές τιμές του $\dot{L}(t)$, το χρονικά μεταβαλλόμενο κλειστού βρόχου σύστημα να είναι σίγουρα σταθερό. Αυτές οι μέθοδοι μπορούν μόνο να δώσουν επαρκείς συνθήκες και στην περίπτωσή μας, έχουν δείξει να είναι πολυ 'συντηρητικές' με την έννοια ότι δίνουν άνω όρια πολύ μικρά για να είναι πρακτικού ενδιαφέροντος.

Βελτιωμένα όρια σταθερότητας έχουν επιτευχθεί χρησιμοποιώντας μία κλασσική διαδικασία βασισμένη στο θεώρημα του Lyapunov.

Θεώρημα: Δοθέντος του χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{28}$$

όπου A(t) είναι ορισμένη και ολικά Lipschitz συνεχής, έστω ότι υπάρχουν πίνακες P(t) και Q(t) συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι, έτσι ώστε

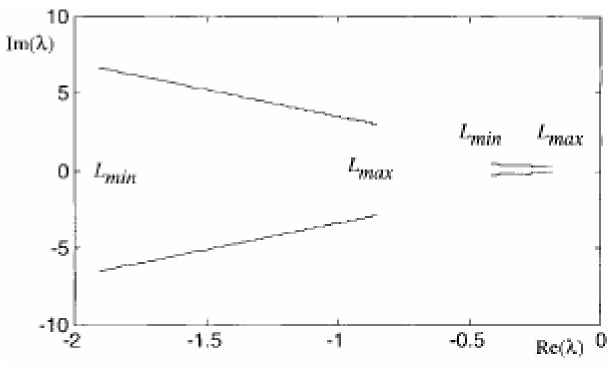
1) ο P(t) να είναι συνεχώς διαφορήσιμος για όλα τα t>0,

2) να υπάρχουν σταθερές α_1,α_2 και $\alpha_3>0$ τέτοιες ώστε για όλα τα $t \geq 0$

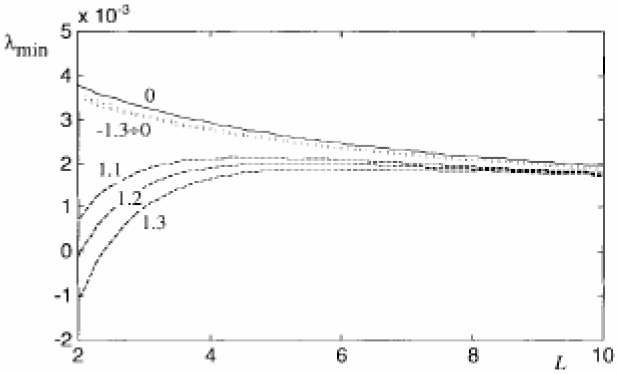
$$\alpha_1 \leq \sigma_{\min}\{P(t)\} \leq \sigma_{\max}\{P(t)\} \leq \alpha_2$$

$$\lambda_{\min}\{Q(t) - \dot{P}(t)\} \geq a_3, \qquad (29)$$

3) $P(t)A(t)+A^T(t)P(t)=-Q(t) \quad (\forall t \geq 0)$,



Σχήμα 3. Ιδιοτιμές του πίνακα $\overline{A_t}$ για διάφορες τιμές του L



Σχήμα 4. Γράφημα του $\lambda_{\min}\{Q(L) - (dP/dL)\dot{L}\}$ για διάφορες τιμές του $\dot{L}$

όπου $\sigma_{\min}$ (αντίστοιχα, $\sigma_{\max}$) δηλώνουν τη μικρότερη (αντίστοιχα, μεγαλύτερη) ιδιάζουσα τιμή και $\lambda_{\min}$ δηλώνει τη μικρότερη ιδιοτιμή.

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, το γραμμικό σύστημα του (28) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Τη μέθοδο αυτή την αναπτύξαμε σε κώδικα μέσω του προγράμματος Matlab. Το πρόγραμμα στο οποίο υπάρχει ο κώδικας αυτής της μεθόδου περιλαμβάνει και τον κώδικα της επόμενης μεθόδου. Επίσης, και τα γραφήματα των δύο αυτών μεθόδων παρατίθενται μαζί. Τα γραφήματα αυτά μπορούμε να τα δούμε στην ενότητα **3.3** ενώ ο κώδικας των δύο μεθόδων παρατίθεται στο παράρτημα.

3.2.4 ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ

Η παραπάνω περιγραφείσα προσέγγιση αναφερόταν σε ένα γερανό κοντέινερ του οποίου το μοντέλο φαίνεται στο Σχήμα 1. Οι τιμές των παραμέτρων είναι $m_T=6*10^3$ kg, $m_L=42.5*10^3$. Αυτές οι τιμές αναφέρονται σε ένα γερανό κοντέινερ στο λιμάνι του Kobe στην Ιαπωνία.

Υποθέτουμε το μήκος του αιωρούμενου σχοινιού να είναι: $\mathbf{L(t)} \in [\mathbf{L_{min}}, \mathbf{L_{max}}]$, όπου L_{min}=2 m και L_{max}=10 m. Σε ονομαστικές συνθήκες λειτουργίας $|\dot{\mathbf{L}}| \leq$ 1m/s.

Τα βάρη του πίνακα απόδοσης είναι

$$\mathbf{Q}_\tau = \begin{bmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{-0.5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-0.5} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{R_\tau=40.}$$

Αυτές οι τιμές επιτεύχθηκαν με τη διαδικασία δοκιμή-σφάλμα. Ο αντίστοιχος πίνακας ελέγχου είναι

K_τ = [0,2611 0,0707 0,5760 1,2821].

Το Σχήμα 2 δείχνει το πως κινούνται οι ιδιοτιμές του πίνακα $\overline{\mathbf{A}}_t$ όταν το L μεταβάλλεται από L_{min} σε L_{max}.

Για να μελετήσουμε τη σταθερότητα του χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος με τον πίνακα συστήματος $\overline{\mathbf{A}}_t$, δοκιμάσαμε διάφορες προσεγγίσεις.

Προσπαθήσαμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα που αναπτύχθηκε παραπάνω. Συγκεκριμένα, έστω ότι $\overline{\Lambda}_\tau$ και $\overline{\mathbf{V}}_\tau$ οι πίνακες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων για τον $\overline{\mathbf{A}}_\tau$. Έπειτα χρησιμοποιώντας τη μετατροπή της (16), είναι πιθανό να δείξουμε ότι οι $\overline{\Lambda}_t = \omega_t \overline{\Lambda}_\tau$ και $\overline{\mathbf{V}}_t = \mathbf{N}^{-1}\overline{\mathbf{V}}_\tau$ είναι οι πίνακες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων για τον $\overline{\mathbf{A}_t}^{\mathbf{T}}$. Έπειτα επιλέγουμε τον πίνακα P(t) στο θεώρημα ως

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{t}} \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{H}} = \mathbf{N}^{-1} \overline{\mathbf{V}}_{\tau} \overline{\mathbf{V}}_{\tau}^{\mathbf{H}} \mathbf{N}^{-1}$$

όπου το ^{H} υποδεικνύει τη σύνθετη συζυγή μετατροπή. Επομένως, ο αντίστοιχος πίνακας Q(t) που ικανοποιεί το θεώρημα θα είναι

$$\mathbf{Q}(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{Q}(\mathbf{L}(\mathbf{t})) = -\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{t}} \left(\overline{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbf{t}} + \overline{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{H}} \right) \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{H}} .$$

Είναι επίσης δυνατό να υπολογίσουμε αναλυτικά τον πίνακα $\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t})$. Έστω

$$\dot{\mathbf{N}}^{-1} = \mathbf{diag}\left(\mathbf{0,0,} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}(\mathbf{g}(\mathbf{1}+\mu)\mathbf{L})^{0.5}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}(\mathbf{g}(\mathbf{1}+\mu)\mathbf{L})^{0.5}} \right) \dot{\mathbf{L}}$$

Έπειτα έχουμε ότι:

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{N}}^{-1} \overline{\mathbf{V}}_{\tau} \overline{\mathbf{V}}_{\tau}^{\mathbf{H}} \mathbf{N}^{-1} + \mathbf{N}^{-1} \overline{\mathbf{V}}_{\tau} \overline{\mathbf{V}}_{\tau}^{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{N}}^{-1} = \left(\frac{\mathbf{dP}}{\mathbf{dL}} \right) \dot{\mathbf{L}} .$$

Το Σχήμα 3 δείχνει το γράφημα του $\lambda_{\min}\{Q(L) - (dP/dL)\dot{L}\}$ με το L για διάφορες τιμές του $\dot{\mathbf{L}}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα, το άνω όριο του $|\dot{\mathbf{L}}|$ είναι η τιμή που αντιστοιχεί στην πρώτη καμπύλη η οποία όσο το $|\dot{\mathbf{L}}|$ αυξάνεται, πάει σε αρνητικές τιμές. Όπως μπορεί να φανεί από το σχήμα, αυτό συμβαίνει για $\dot{\mathbf{L}}$ =1.2 m/s, γι' αυτό μπορούμε να καταλήξουμε στο γεγονός ότι το χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα με πίνακα συστήματος $\overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{t}}$ είναι σταθερό αν $|\dot{\mathbf{L}}|$<1.2m/s. Εφόσον σε κανονικές συνθήκες $|\dot{\mathbf{L}}|$<1 m/s, αυτό το αποτέλεσμα εξασφαλίζει τη σταθερότητα του χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος.

Τα Σχήματα 2 και 3 απαιτούν σχολιασμό. Το Σχήμα 2 δείχνει ότι όσο το L αυξάνεται τα παγωμένα συστήματα με πίνακα συστήματος $\overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{t}}$ πάντα έχουν ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και πιο κοντά στο φανταστικό άξονα. Αυτό προϋποθέτει ότι αυξάνοντας το L μπορεί να οδηγήσει το χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα προς την αστάθεια.

Αντιθέτως, από το Σχήμα 3 μπορούμε να δούμε ότι η σταθερότητα είναι δύσκολο να αποδειχθεί για μικρές τιμές του L. Στην πραγματικότητα είναι πολύ καλά γνωστό ότι όταν χρησιμοποιείται ο προγραμματισμός κέρδους, η σταθερότητα των παγωμένων συστημάτων εξασφαλίζει τη σταθερότητα του χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος για πολύ μικρές σχετικά αλλαγές της μεταβαλλόμενης παραμέτρου. Στην περίπτωσή μας, για δοσμένο $|\dot{\mathbf{L}}|$, ο σχετικός ρυθμός μεταβολής του L θα είναι υψηλότερος για μικρές τιμές του L. Αυτό επίσης δείχνει ότι παρόλο που έχουμε θεωρήσει ότι $\mathbf{L \leq L_{max} = 10m}$, αυτά τα αποτελέσματα σταθερότητας ισχύουν επίσης και για υψηλότερες τιμές του L_{max}. Όσον αφορά τα αποτελέσματα και τις γραφικές για τα $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{x_\varphi}$ και **u**, αυτά θα τα δούμε στην επόμενη ενότητα σε σύγκρισή τους με τα αντίστοιχα μεγέθη της επόμενης μεθόδου.

3.3 2Η ΜΕΘΟΔΟΣ

3.3.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η μέθοδος αυτή σκοπό έχει να δημιουργήσει το σύστημα ελέγχου που προσπαθήσαμε να κατασκευάσουμε και με την προηγούμενη μέθοδο. Εδώ η διαφορά έγκειται στο μαθηματικό πρότυπο που χρησιμοποιήσαμε.

Αυτό που επιθυμούμε είναι να έχουμε ένα σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές. Το σύστημά μας είναι της μορφής

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$$

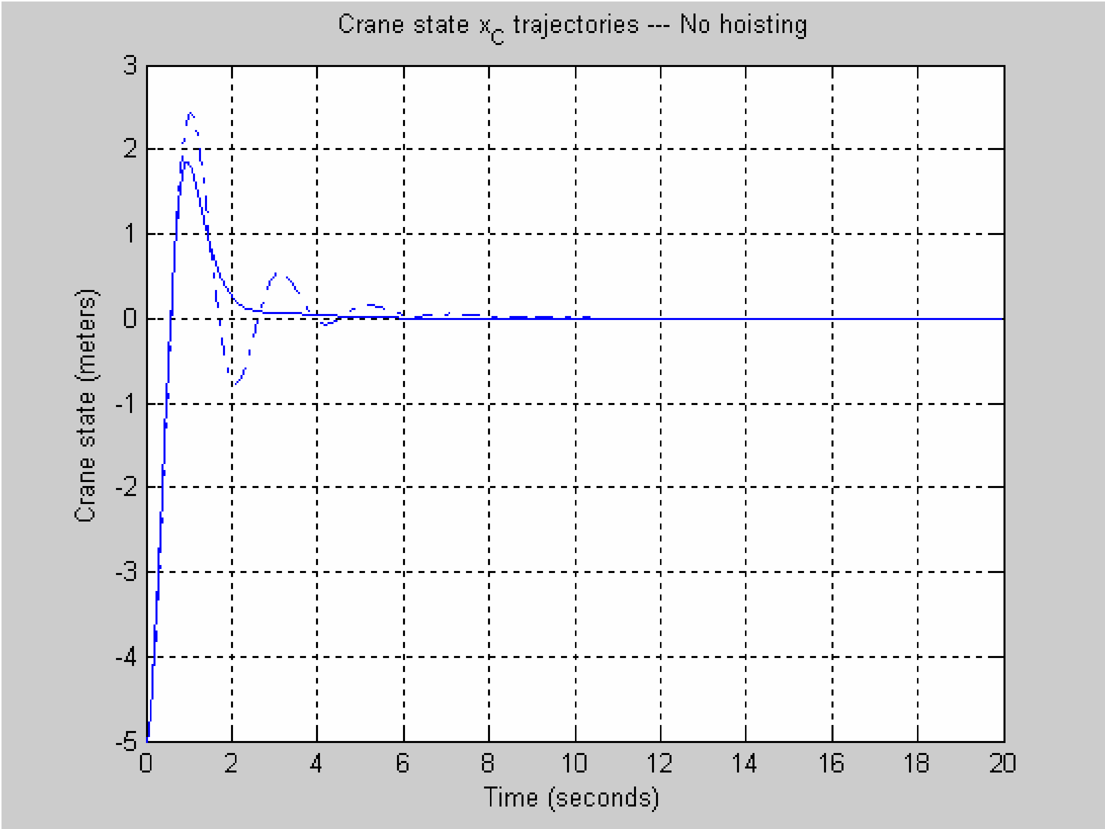
Ο κανόνας ελέγχου έχει και πάλι τη μορφή u = - Kx. K είναι και πάλι ένας πίνακας του οποίου οι τιμές αυτή τη φορά προκύπτουν από τη συνάρτηση του Ackermann. Περαιτέρω σχολιασμός της συνάρτησης αυτής παρατίθεται παρακάτω. Με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτής, βρίσκουμε τον κατάλληλο κανόνα ελέγχου. Επίσης, για τη βελτίωση του συστήματος χρησιμοποιούμε τη μέθοδο trade-off μεταξύ δύο μεγεθών. Τα μεγέθη αυτά είναι τα overshoot και settling time. Όταν λέμε trade-off μεταξύ των δύο αυτών μεγεθών εννοούμε ότι προσπαθούμε να βελτιώσουμε και τα δύο μόνο που η επίτευξη αυτού του στόχου είναι δύσκολη διότι βελτίωση της τιμής του ενός συνεπάγεται αυτόματη επιδείνωση της τιμής του άλλου. Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε το κατάλληλο ζευγάρι τιμών ώστε να επιτύχουμε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Ο ορισμός των δύο αυτών μεγεθών γίνεται στην ενότητα **3.1**.

Ορίζουμε κι εδώ έναν πίνακα P ο οποίος είναι ένας πίνακας βαρών του συστήματος. Εάν στον πίνακα P, βάλουμε τα κατάλληλα στοιχεία, τότε αυτός μπορεί να βελτιώσει τη δράση του ελεγκτή επομένως είναι πολύ σημαντική η επιλογή του κατάλληλου P για την καλή λειτουργία του ελεγκτή. Ο πίνακας P είναι ο πίνακας ιδιοτιμών του πίνακα A. Επομένως οι τιμές των στοιχείων του P θέλουμε να είναι αρνητικές για να επιτύχουμε σταθερότητα του συστήματος. Έτσι λοιπόν προκύπτουν οι επιλογές για τον πίνακα που παρουσιάζονται στην παρακάτω ενότητα.

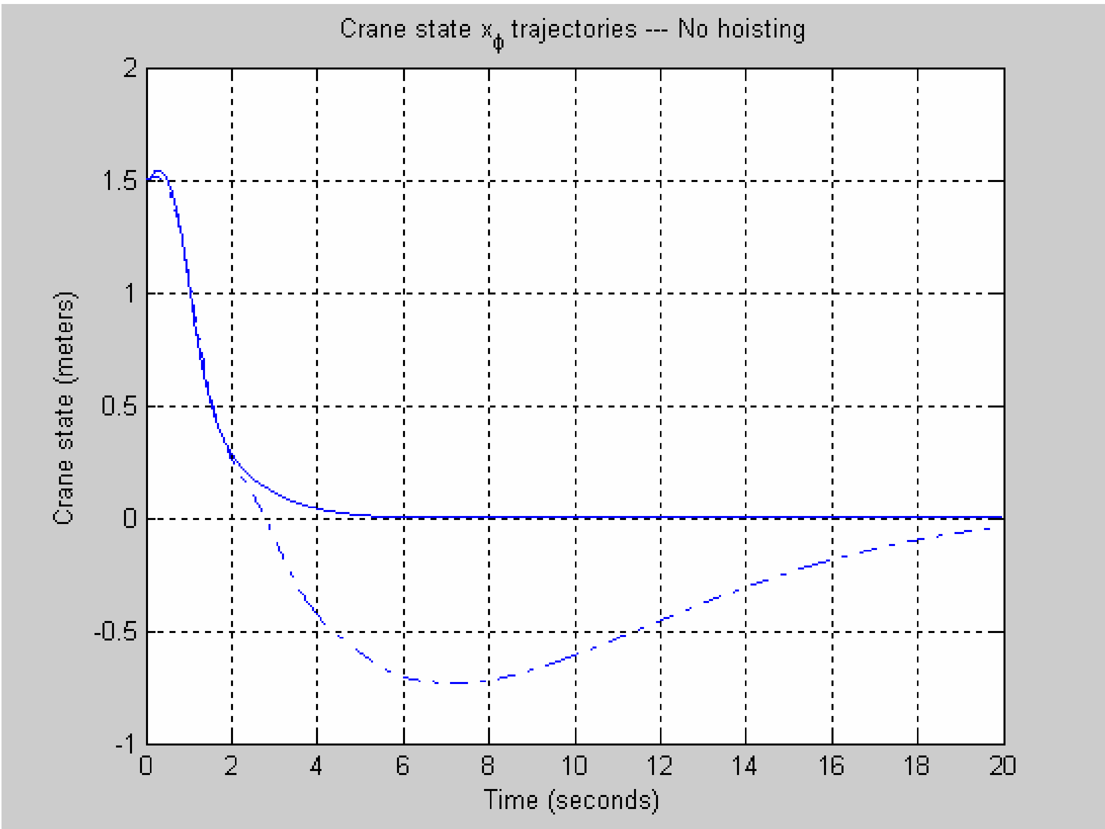
3.3.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ

Αρχικά είχαμε θεωρήσει τον πίνακα P=[-2 -2 -2 -2]. Με τον πίνακα αυτόν, είχαμε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Δοκιμάσαμε και τους εξής πίνακες P=[-1 -1 -1 -1] και P=[-3 -3 -3 -3]. Η δοκιμή αυτή έγινε σε συνδυασμό με τις δοκιμές των άλλων μεγεθών. Παρατηρήσαμε λοιπόν ότι για τον πίνακα P, η καλύτερη από τις τρεις προαναφερθείσες περιπτώσεις είναι η P=[-2 -2 -2 -2]. Ας συγκρίνουμε τρεις περιπτώσεις για τα ίδια $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{x_\varphi}$, **L** και $\dot{\mathbf{L}}$ για τις τρεις περιπτώσεις πινάκων για να γίνει πιο εμφανής η υπεροχή της περίπτωσης του P=[-2 -2 -2 -2] σε σχέση με τις άλλες δύο. Στις περιπτώσεις που θα συγκρίνουμε, τα μεγέθη που συγκρίνονται είναι τα $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{x_\varphi}$ και **N** όπου **N** είναι ο πίνακας στον οποίο αποθηκεύονται οι τιμές του u κάθε φορά. Εμείς θέλουμε $\mathbf{u} \in \left[-\mathbf{10^5}, \mathbf{10^5}\right]$ ώστε ο ελεγκτής να περιορίζει την κίνηση του γερανού σε ικανοποιητικά πλαίσια. Αυτό το διάστημα για το **u** προκύπτει από τα δεδομένα του προβλήματος όπως και οι τιμές των $\mathbf{x_C}$ και $\mathbf{x_\varphi}$.

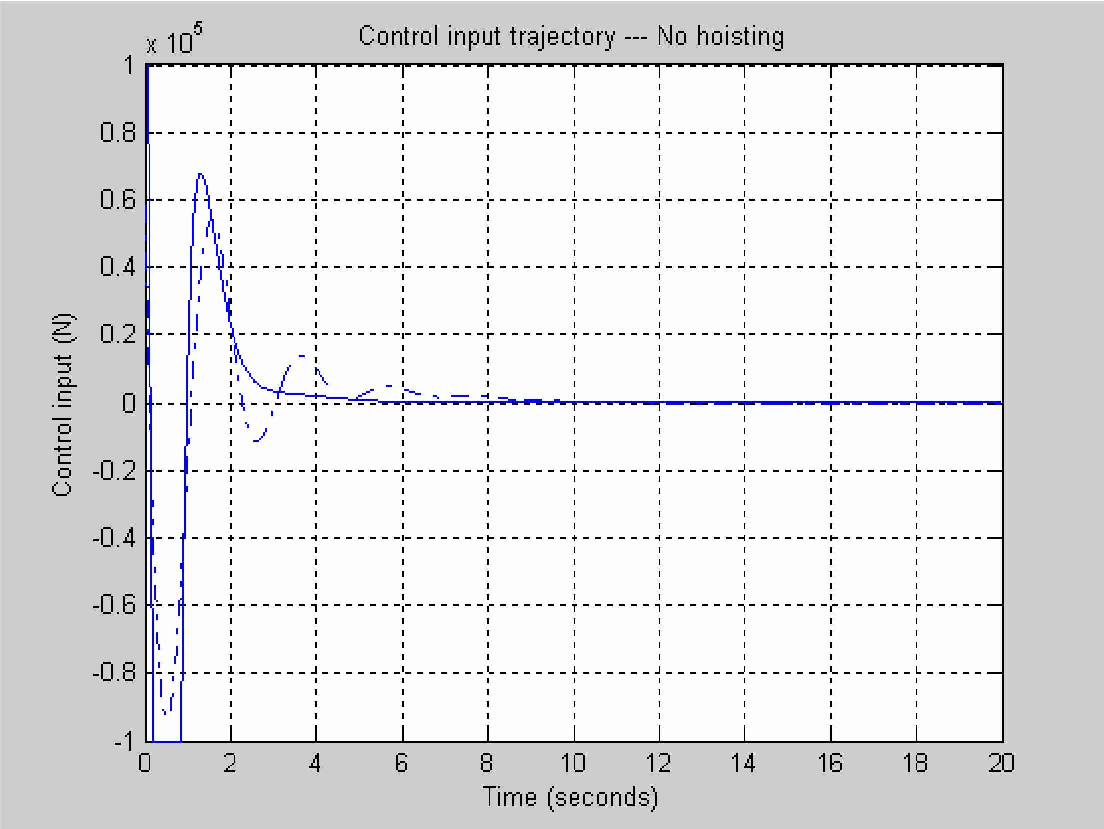
Έστω P=[-2 -2 -2 -2], x_C=-5, x_φ=1.5, L=10, $\dot{L}$=0. Οι μεταβολές των $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{x_\varphi}$ και **N** φαίνονται παρακάτω:



Σχήμα 5: Μεταβολή του $\mathbf{x_C}$ με το χρόνο για x_C=-5, x_φ=1.5, L=10 και $\dot{\mathbf{L}}$ =0 και P=[-2 -2 -2 -2].

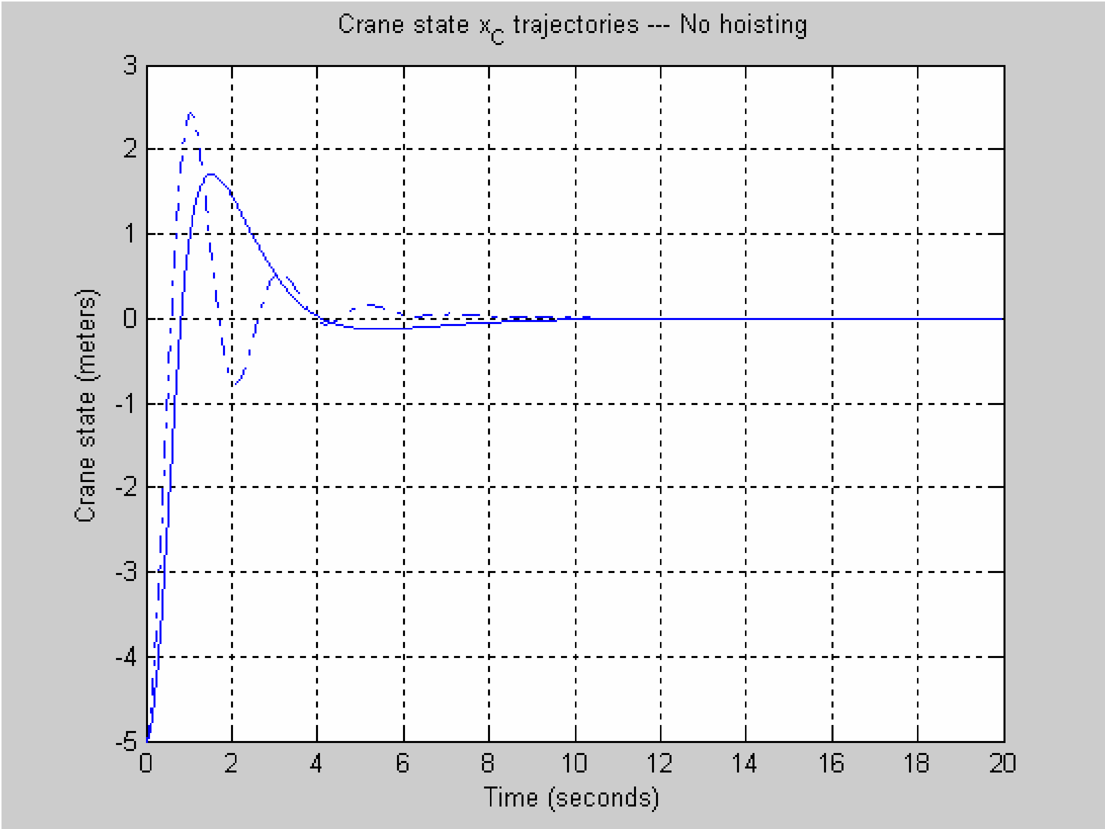


Σχήμα 6: Μεταβολή του $\mathbf{x_\varphi}$ με το χρόνο για x_C=-5, x_φ=1.5, L=10 και $\dot{\mathbf{L}}$ =0 και P=[-2 -2 -2 -2].

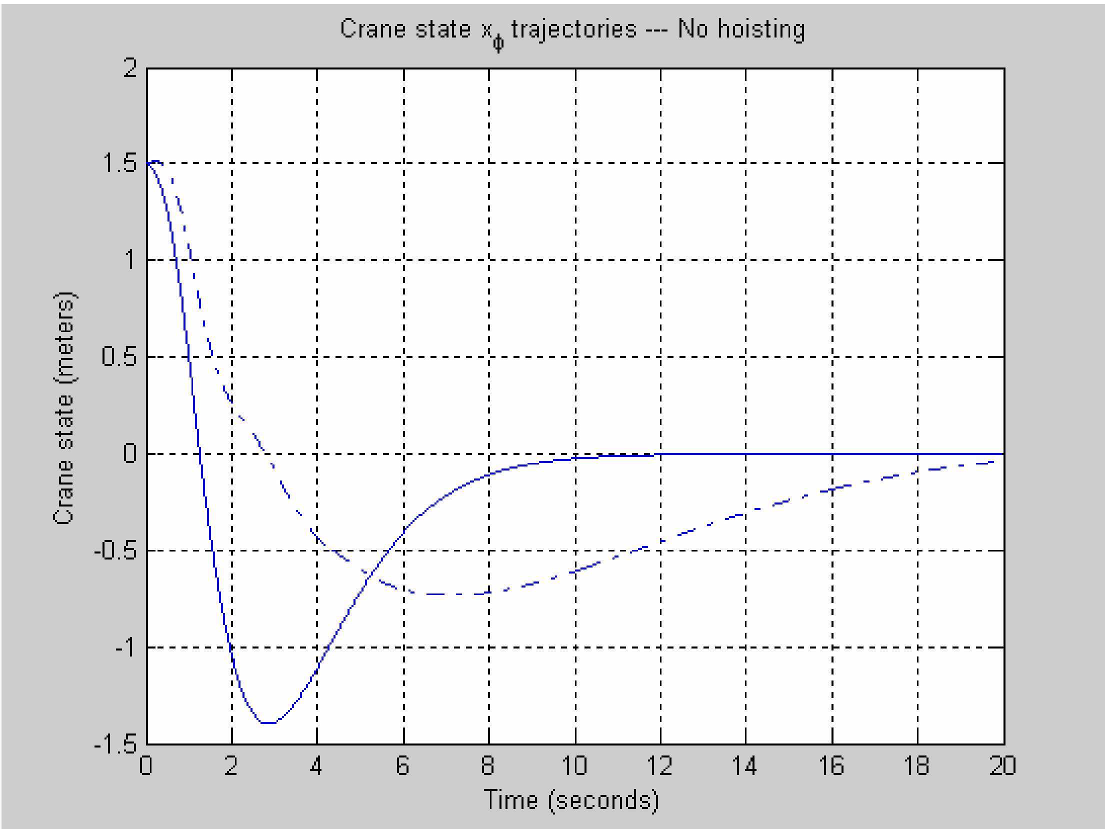


Σχήμα 7: Μεταβολή του **u** με το χρόνο για x_C=-5, $x_φ$=1.5, L=10 και $\dot{L}$=0 και P=[-2 -2 -2 -2].

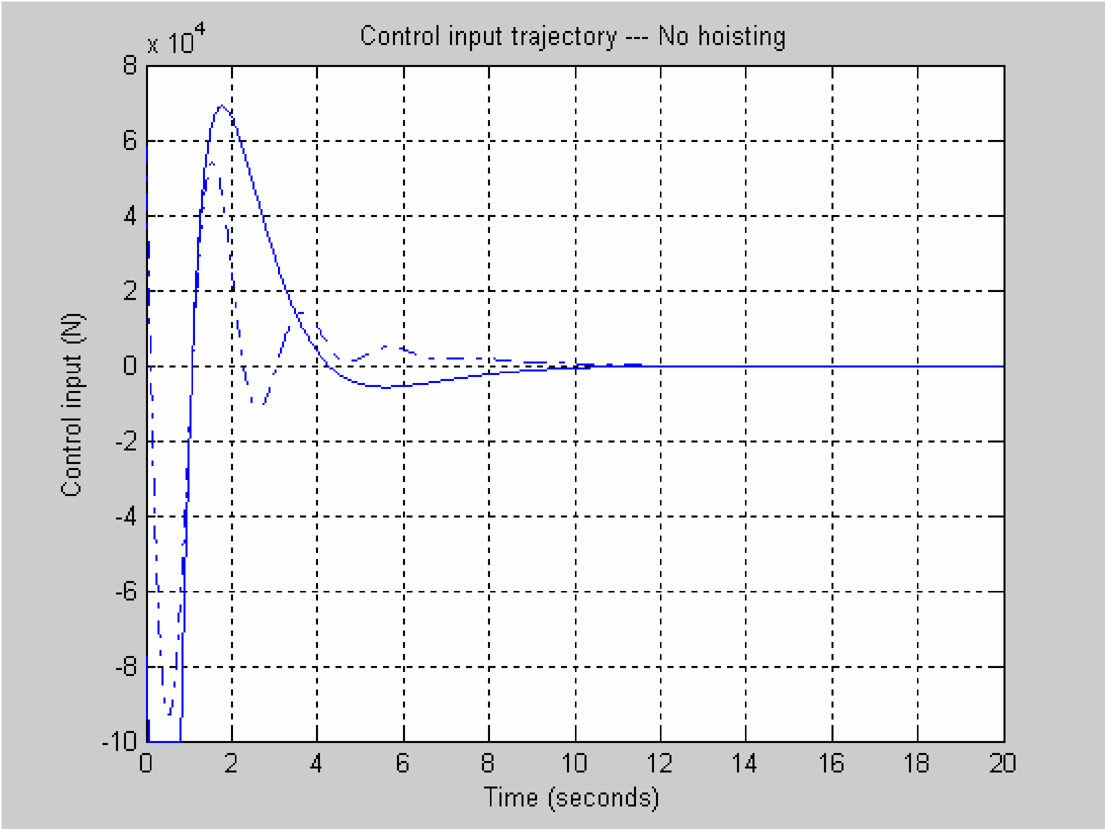
Έστω P=[-1 -1 -1 -1], x_C=-5, $x_φ$=1.5, L=10, $\dot{L}$=0. Οι μεταβολές των $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{x_φ}$ και **N** φαίνονται παρακάτω:



Σχήμα 8: Μεταβολή του $\mathbf{x_C}$ με το χρόνο για x_C=-5, $x_φ$=1.5, L=10 και $\dot{\mathbf{L}}$ =0 και P=[-1 -1 -1 -1].

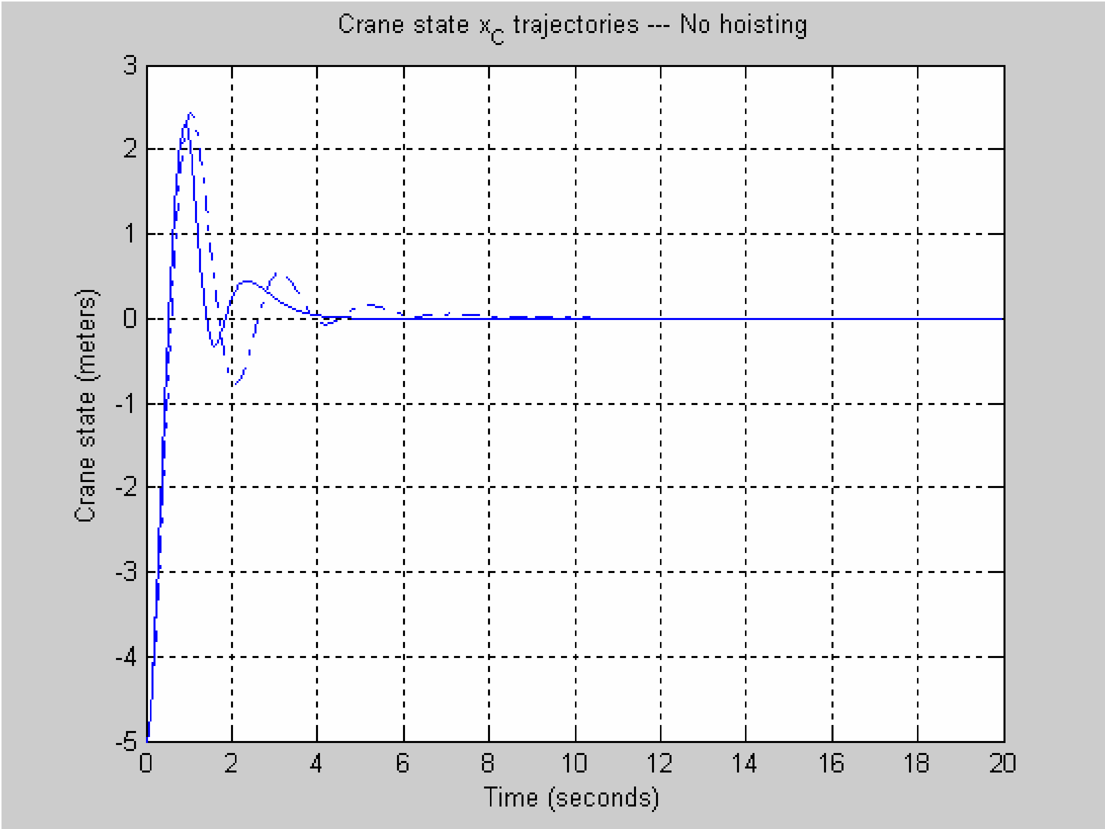


Σχήμα 9: Μεταβολή του $\mathbf{x_φ}$ με το χρόνο για x_C=-5, $x_φ$=1.5, L=10 και $\dot{\mathbf{L}}$ =0 και P=[-1 -1 -1 -1].

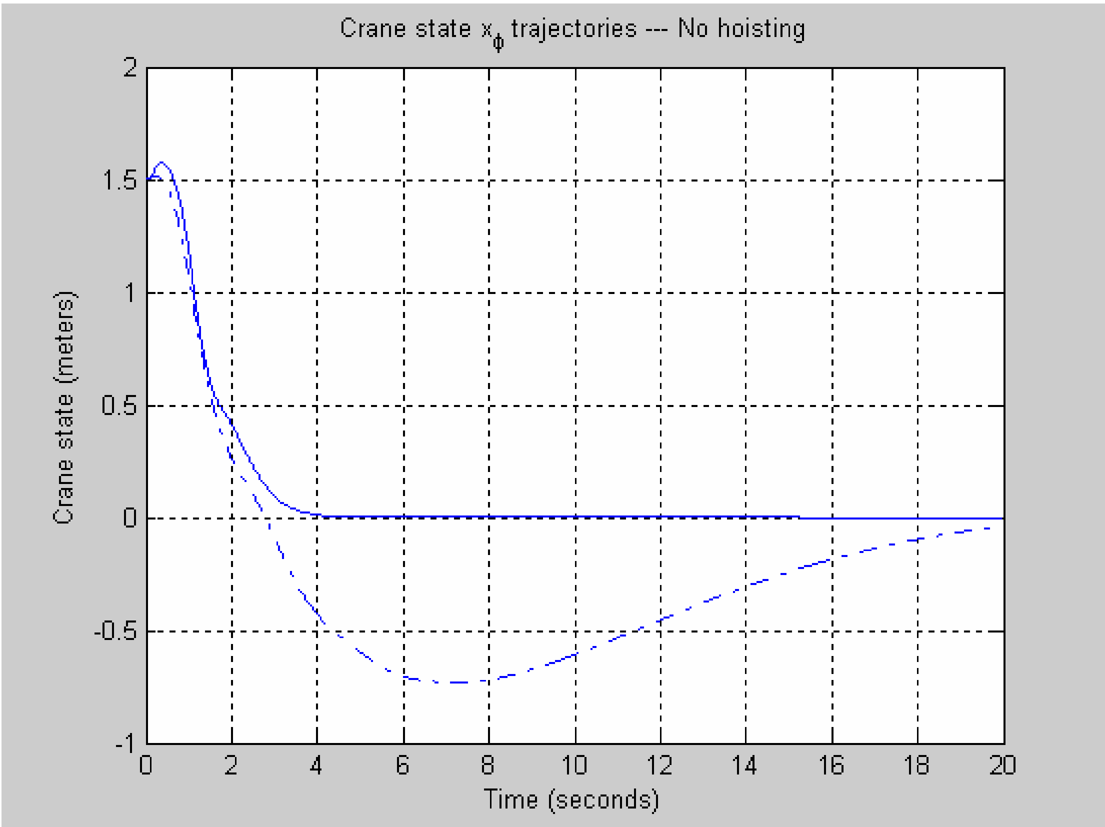


Σχήμα 10: Μεταβολή του **u** με το χρόνο για x_C=-5, x_φ=1.5, L=10 και $\dot{\mathbf{L}}$ =0 και P=[-1 -1 -1 -1].

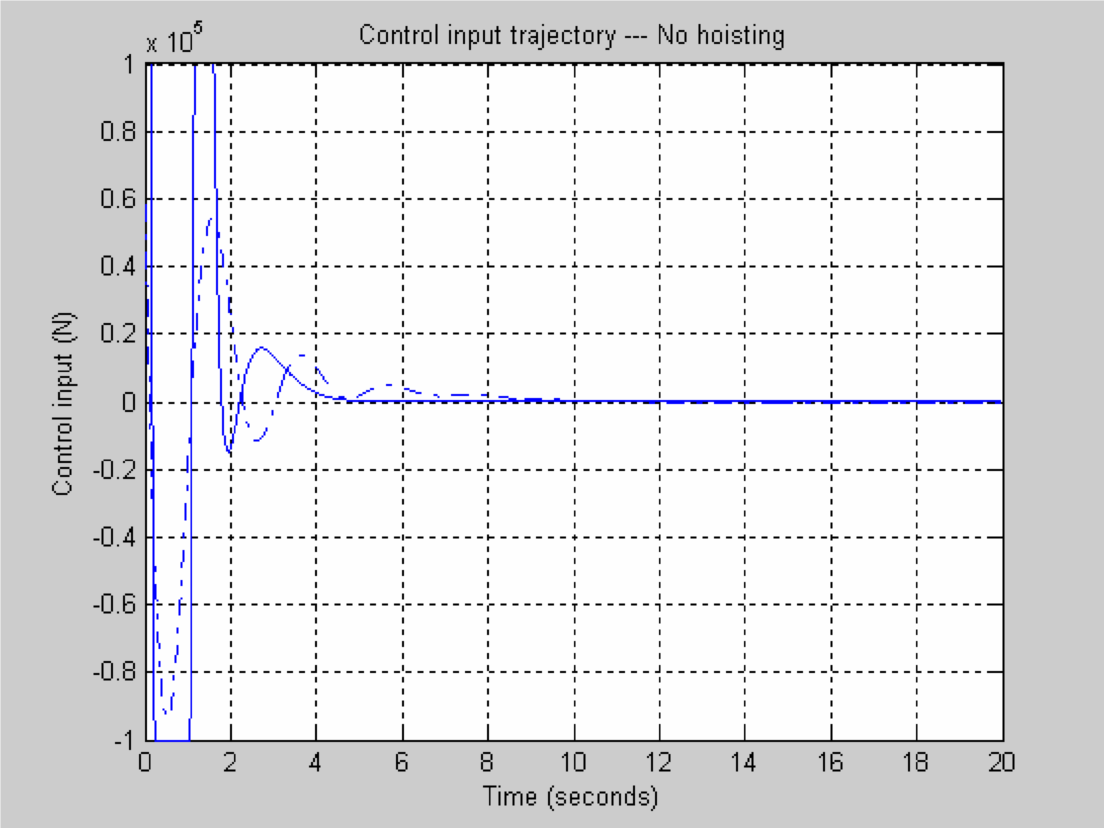
Έστω P=[-3 -3 -3 -3], x_C=-5, x_φ=1.5, L=10, $\dot{\mathbf{L}}$=0. Οι μεταβολές των $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{x_\varphi}$ και **N** φαίνονται παρακάτω:



Σχήμα 11: Μεταβολή του $\mathbf{x_C}$ με το χρόνο για x_C=-5, x_φ=1.5, L=10 και $\dot{\mathbf{L}}$ =0 και P=[-3 -3 -3 -3].



Σχήμα 12: Μεταβολή του $\mathbf{x_\varphi}$ με το χρόνο για x_C=-5, x_φ=1.5, L=10 και $\dot{\mathbf{L}}$ =0 και P=[-3 -3 -3 -3].



Σχήμα 13: Μεταβολή του **u** με το χρόνο για x_C=-5, x_φ=1.5, L=10 και $\dot{\mathbf{L}}$ =0 και P=[-3 -3 -3 -3].

Στις παραπάνω γραφικές παραστάσεις, η διακεκομμένη γραμμή δείχνει τη μεταβολή των μεγεθών σύμφωνα με την 1η μέθοδο και η συνεχής, τη μεταβολή των μεγεθών σύμφωνα με τη 2η μέθοδο . Οπότε η σύγκριση σε αυτή τη φάση επικεντρώνεται στην πορεία της συνεχούς γραμμής κάθε φορά αφού η σύγκριση για κάθε P, αφορά μόνο τη 2η μέθοδο.

Συγκρίνοντας λοιπόν τις περιπτώσεις των P=[-2 -2 -2 -2] και P=[-1 -1 -1 -1] παρατηρούμε για όλα τα μεγέθη ότι έχουμε μεγαλύτερη διακύμανση στην περίπτωση του πίνακα P=[-1 -1 -1 -1] και μάλιστα στην περίπτωση του **u** (γραφική παράσταση του πίνακα N), ο ελεγκτής φεύγει γρηγορότερα εκτός ορίων και μάλιστα σε μεγαλύτερο βαθμό από ότι για τον πίνακα P=[-2 -2 -2 -2] (Σχήμα 9). Στην περίπτωση του πίνακα P=[-3 -3 -3 -3], για το $\mathbf{x_C}$ έχουμε περίπου την ίδια μεταβολή όπως και με του πίνακα P=[-2 -2 -2 -2], για το $\mathbf{x_\varphi}$ έχουμε λίγο μεγαλύτερη διακύμανση αλλά εκεί που φαίνεται εμφανώς ότι ο πίνακας P=[-2 -2 -2 -2] είναι καλύτερος, είναι στη γραφική παράσταση του **u** που βλέπουμε κι εδώ ότι ο ελεγκτής ξεφεύγει γρήγορα και πολύ σχετικά με αυτόν της περίπτωσης του πίνακα P=[-2 -2 -2 -2] (Σχήμα 12). Επομένως όπως είναι κατανοητό, αρχικά επιλέγουμε τον πίνακα P=[-2 -2 -2 -2] για το πρόγραμμά μας.

Ανατρέχοντας στο πρόγραμμα, θα παρατηρήσουμε ότι υπολογίζουμε στη $2^{η}$ μέθοδο, τις μεταβλητές overshoot1, overshoot2 και settling_time. Αυτά τα μεγέθη είναι χρήσιμα για να κάνουμε μερικές συγκρίσεις σε αυτή τη μέθοδο όπως αυτή της επιλογής του καλύτερου πίνακα P. Σε μία γραφική παράσταση:

- το overshoot δείχνει τη μέγιστη απόλυτη τιμή του μεγέθους έστω x, αφού περάσει το 0 μία φορά και
- το settling time δείχνει τη χρονική στιγμή που $|\mathbf{x}| < \mathbf{3\%}|\mathbf{x_0}|$ και παραμένει εντός του διαστήματος $\left[-\mathbf{3\%}|\mathbf{x_0}|,+\mathbf{3\%}|\mathbf{x_0}|\right]$ για πάντα.

Ουσιαστικά το overshoot δείχνει πόσο μεγάλη διασπορά μπορούν να έχουν τα **x**, ενώ το settling time φανερώνει πόσο μεγάλο είναι το διάστημα του χρόνου στο οποίο το **x** βρίσκεται σε ένα ικανοποιητικό διάστημα τιμών που εμείς επιλέγουμε ($\left[-\mathbf{3\%}|\mathbf{x_0}|,+\mathbf{3\%}|\mathbf{x_0}|\right]$).

Συνεπώς, εμείς σε κάθε περίπτωση για τα **x**, θέλουμε να έχουμε το δυνατόν μικρότερο overshoot και το δυνατόν μικρότερο settling time. Άρα, τα συμπεράσματα που βγάζουμε για τον καλύτερο πίνακα P, μπορούν να προκύψουν και με συγκρίσεις των overshoot και settling time. Το overshoot1 είναι το overshoot του x_C και το overshoot2 είναι το overshoot του $x_φ$. Αντίστοιχα και για τα settling time, με τη διαφορά ότι εδώ συγκρίνουμε τα settling_time1 και settling_time2 και βρίσκουμε ένα ολικό settling_time το οποίο είναι το μέγιστο εκ των settling_time1 και settling_time2.

- Για P=[-2 -2 -2 -2], x_C=-5, $x_φ$=1.5, L=10, $\dot{\mathbf{L}}$=0 έχουμε:
  - overshoot1 = 1.8509
  - overshoot2 = 0
  - settling_time =3.9600
- Για P=[-1 -1 -1 -1], x_C=-5, $x_φ$=1.5, L=10, $\dot{\mathbf{L}}$=0 έχουμε:
  - overshoot1 = 1.7048

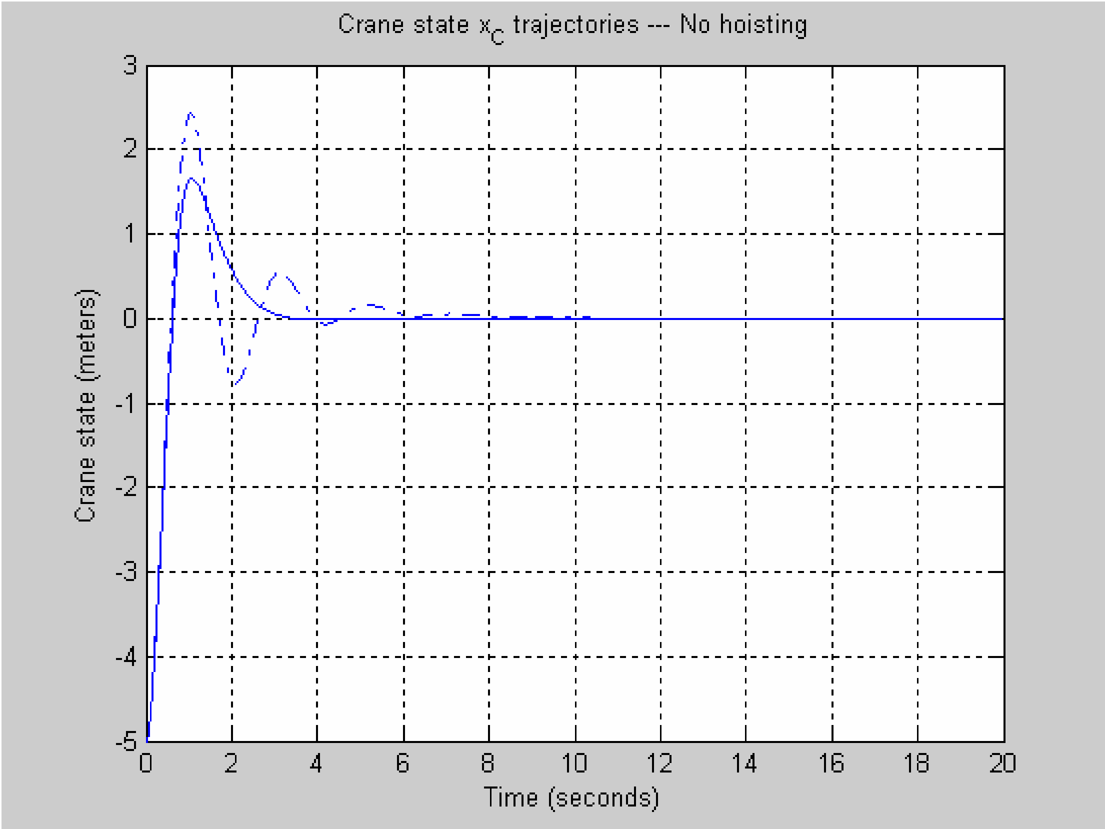
- overshoot2 = 1.3977
- settling_time = 9.2500

- Για P=[-3 -3 -3 -3], x_C=-5, x_φ=1.5, L=10, $\dot{\mathbf{L}}$=0 έχουμε:
  - overshoot1 = 2.2854
  - overshoot2 = 0
  - settling_time =3.3900

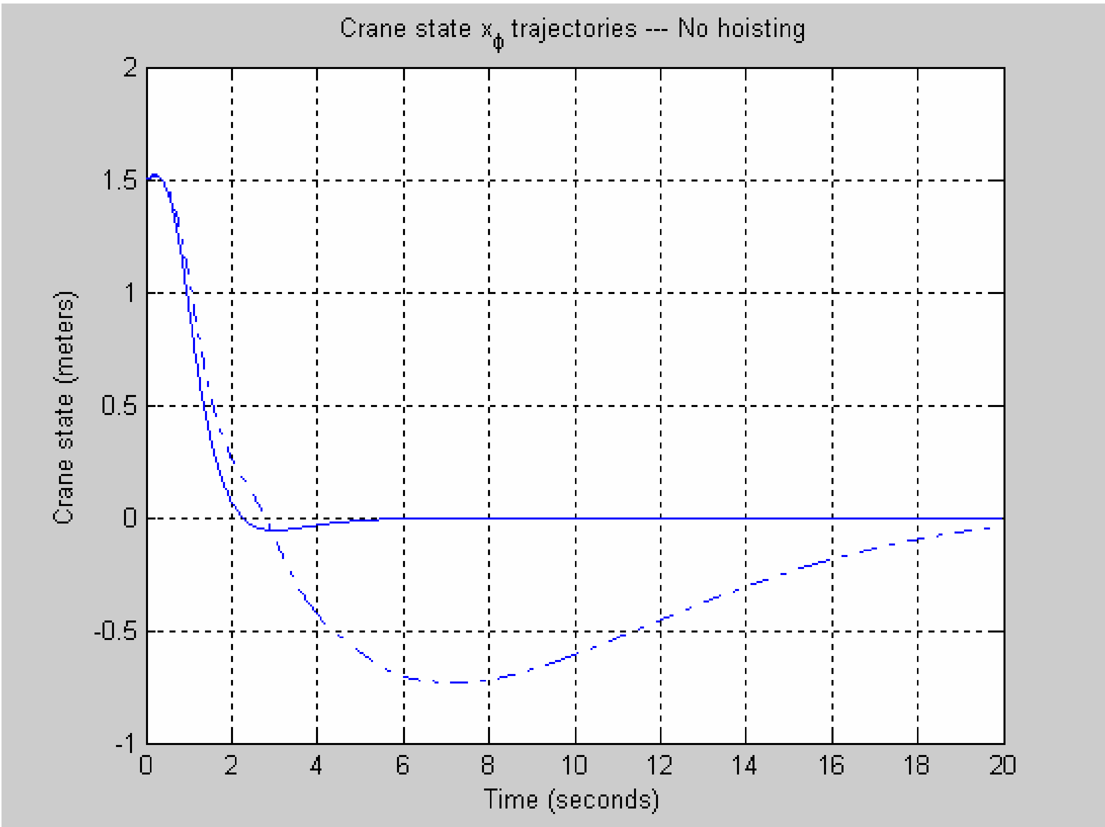
Όπως βλέπουμε λοιπόν, συγκρίνοντας τα παραπάνω μεγέθη, προκύπτει ότι ο πίνακας P=[-2 -2 -2 -2] είναι ο καλύτερος που σημαίνει ότι και αυτή η μέθοδος είναι αξιόπιστη.

Έχοντας καταλήξει στον πίνακα P=[-2 -2 -2 -2], θελήσαμε να βελτιώσουμε περαιτέρω τα αποτελέσματα της μεθόδου αλλάζοντας κάποια πράγματα. Έτσι λοιπόν, προσπαθήσαμε να βρούμε κάποιον καλύτερο πίνακα P για τον οποίο θα επιτύχουμε μικρότερα overshoots και settling times και ελεγκτές όσο το δυνατόν εντός των ορίων που έχουμε θέσει. Κάναμε λοιπόν στο πρόγραμμα κάποιες δοκιμές μέσω της συνάρτησης randn. Η randn είναι μία συνάρτηση που επιλέγει τυχαία τιμές από κανονική κατανομή με μέση τιμή μ=0 και διασπορά σ^2=1. Συνεπώς, για να πάρουμε τιμές ικανοποιητικές για την περίπτωσή μας είπαμε ότι P= -abs(2*randn(4,1)) στο πρόγραμμα. Έτσι από τη μία εξασφαλίζουμε την αρνητικότητα των στοιχείων του P και από την άλλη παίρνουμε τιμές στην περιοχή τιμών που είδαμε ότι έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Κάναμε λοιπόν γύρω στις 30 προσομοιώσεις και συγκρίνοντας μεταξύ τους τις γραφικές παραστάσεις καθώς και τα overshoots και τα settling times, καταλήξαμε στις τρεις καλύτερες περιπτώσεις οι οποίες έχουν η κάθε μία το θετικό τους στοιχείο, κάτι που θα αναλύσουμε παρακάτω. Οι περιπτώσεις αυτές είναι:

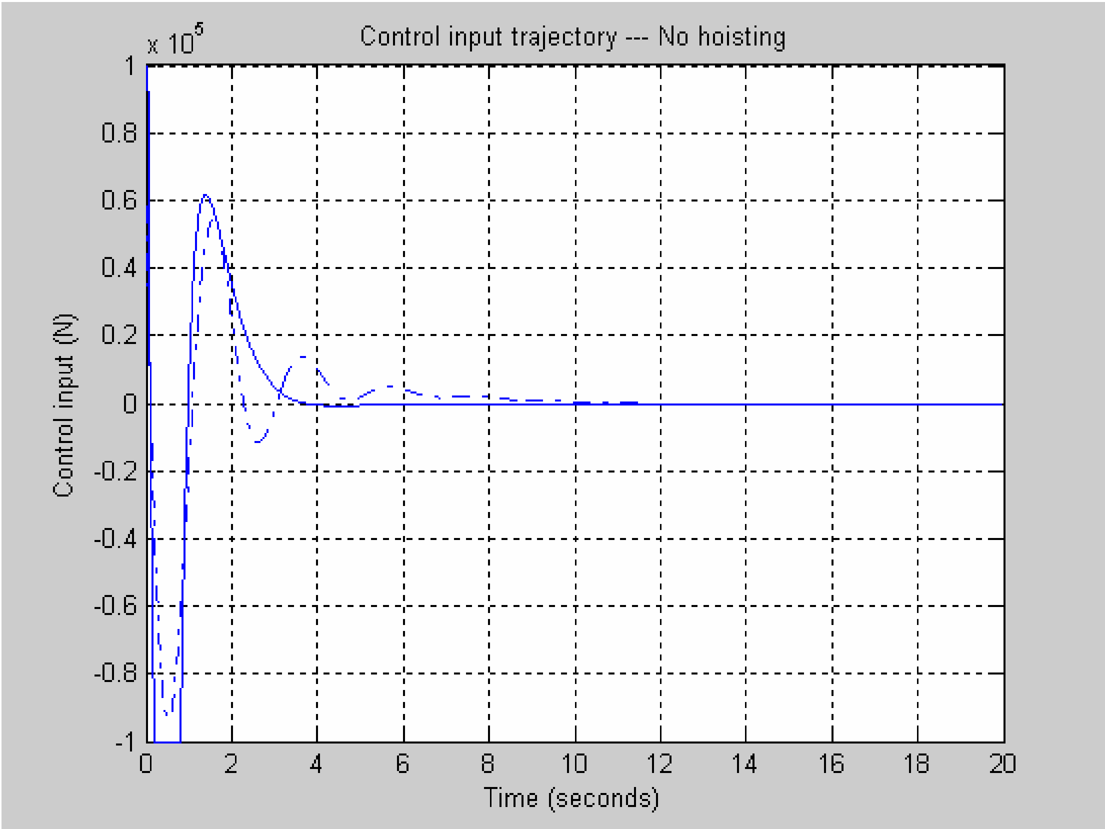
➡ P = [-1.6312 -1.4238 -2.5805 -1.3372] με
overshoot1 = 1.6642 overshoot2 = 0.0565 settling_time = 3.64 και γραφικές παραστάσεις



Σχήμα 14: Μεταβολή του x_C με το χρόνο για P = [-1.6312 -1.4238 -2.5805 -1.3372]



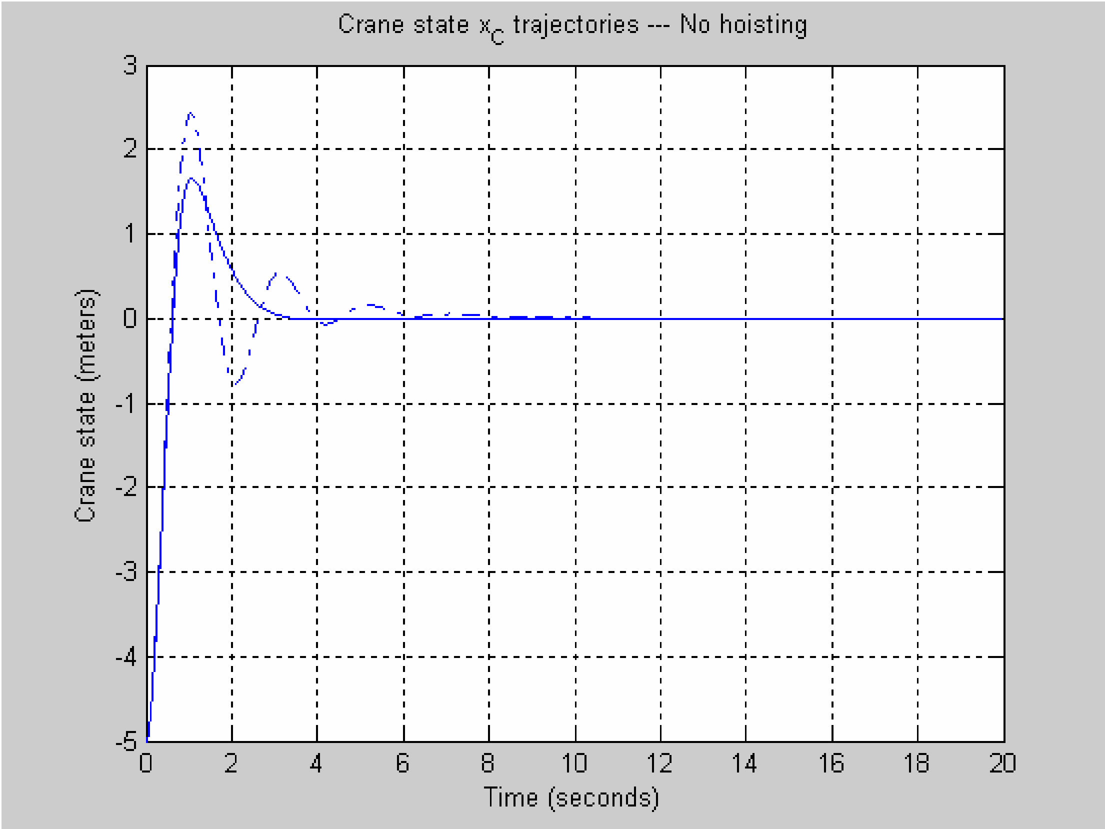
Σχήμα 15: Μεταβολή του x_φ με το χρόνο για P = [-1.6312 -1.4238 -2.5805 -1.3372]



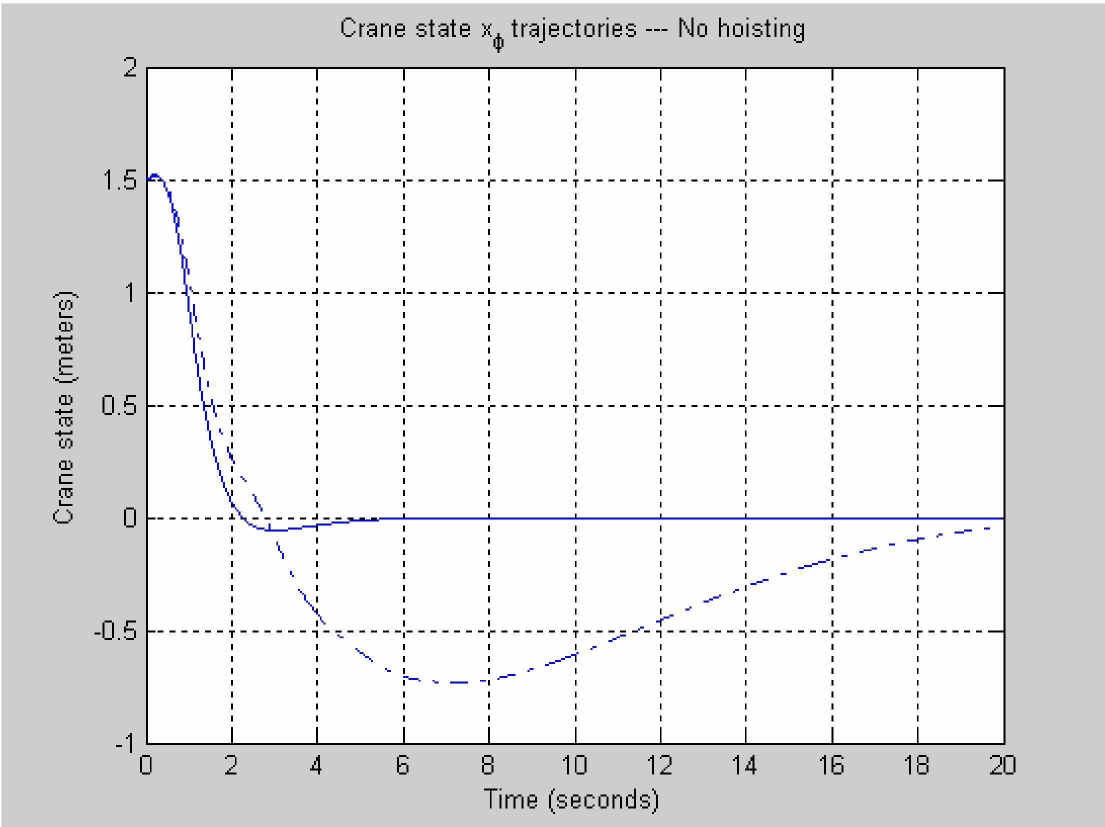
Σχήμα 16: Μεταβολή του u με το χρόνο για P = [-1.6312 -1.4238 -2.5805 -1.3372]

- P = [-1.6332,-1.43,-2.58,-1.4732] με

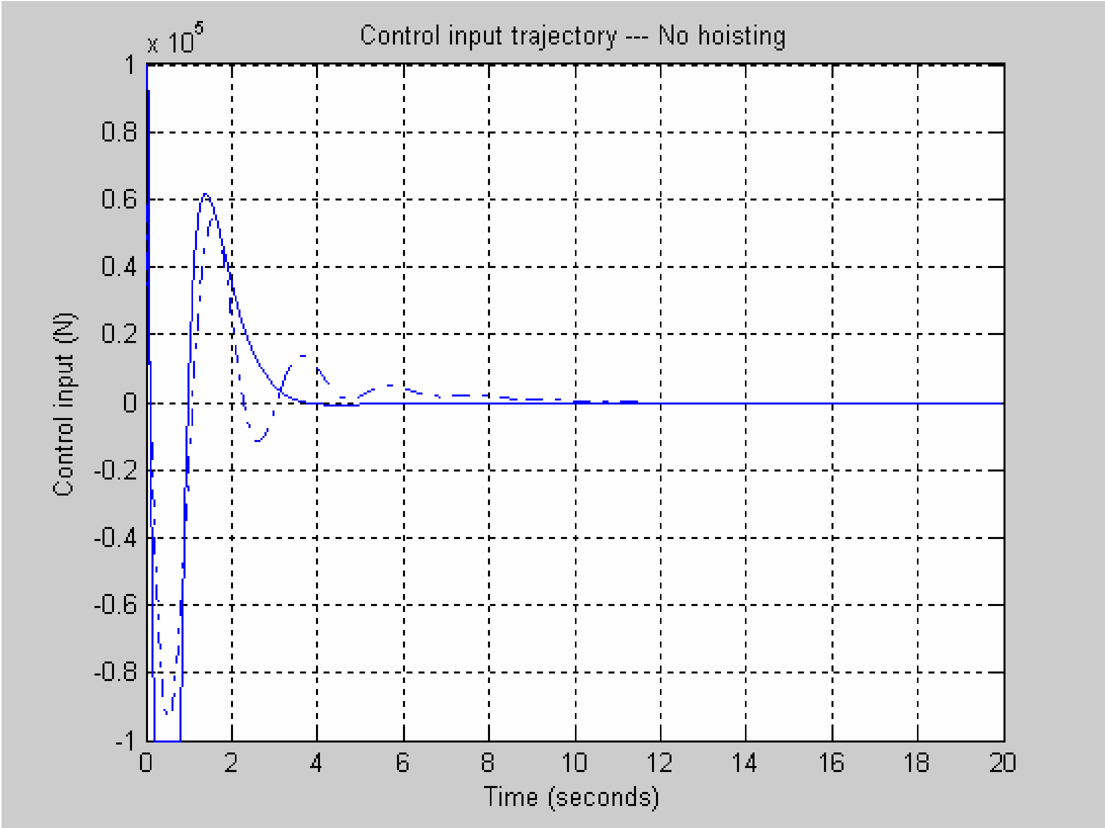
overshoot1 = 1.6642 overshoot2 = 0.0565 settling_time = 3.6400 και γραφικές παραστάσεις



Σχήμα 17: Μεταβολή του x_C με το χρόνο για P = [-1.6332,-1.43,-2.58,-1.4732].



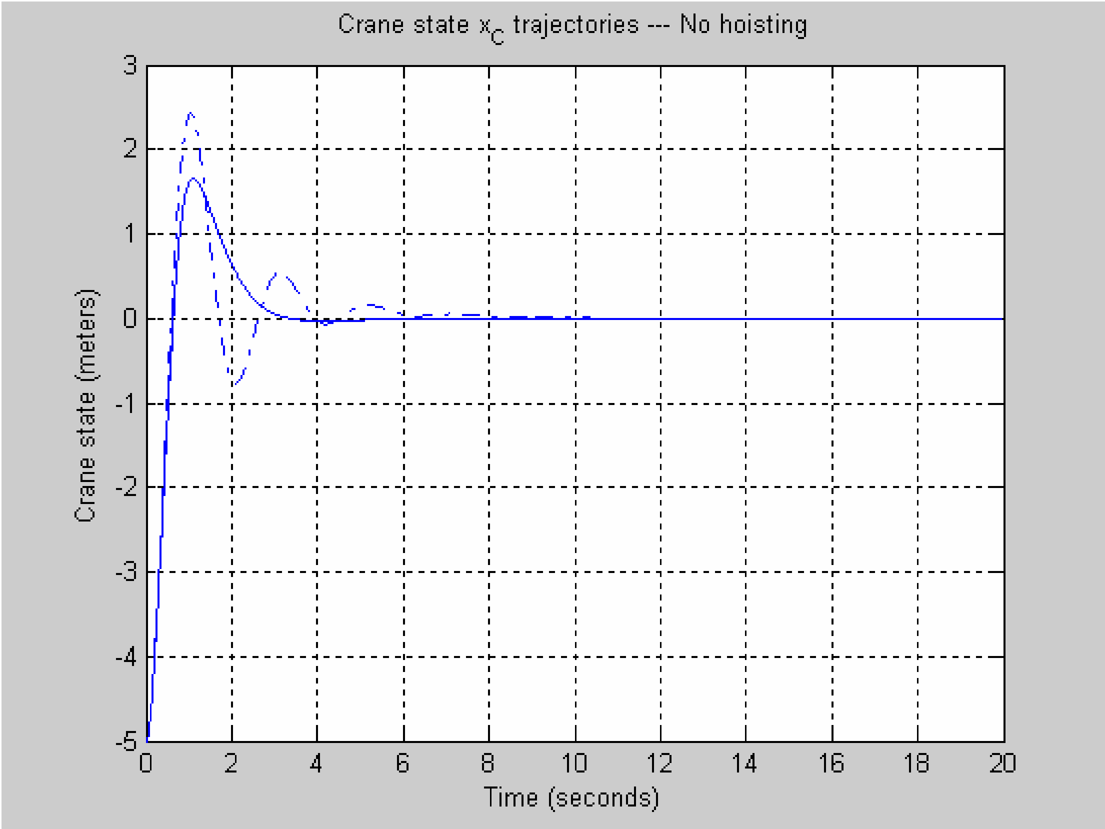
Σχήμα 18: Μεταβολή του x_φ με το χρόνο για P = [-1.6332,-1.43,-2.58,-1.4732].



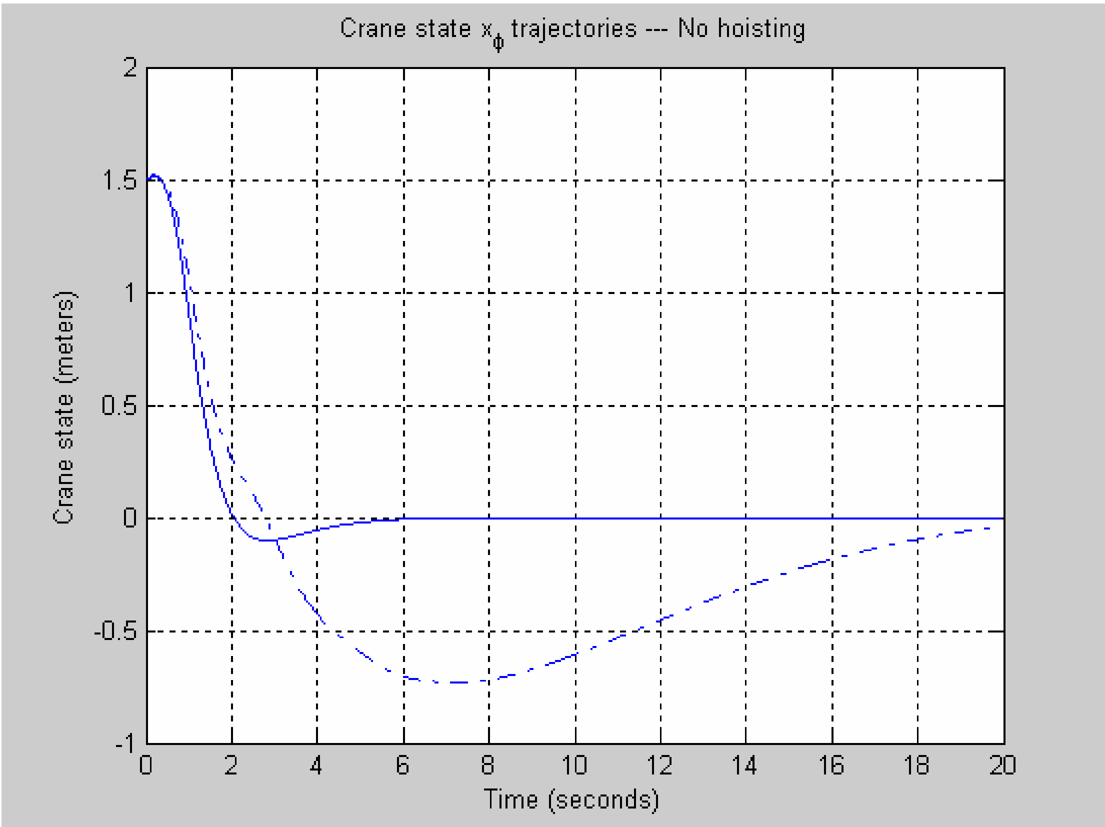
Σχήμα 19: Μεταβολή του με το χρόνο για P = [-1.6332,-1.43,-2.58,-1.4732].

- P = [-1.2465,-1.5981,-1.8818,-1.9842] με

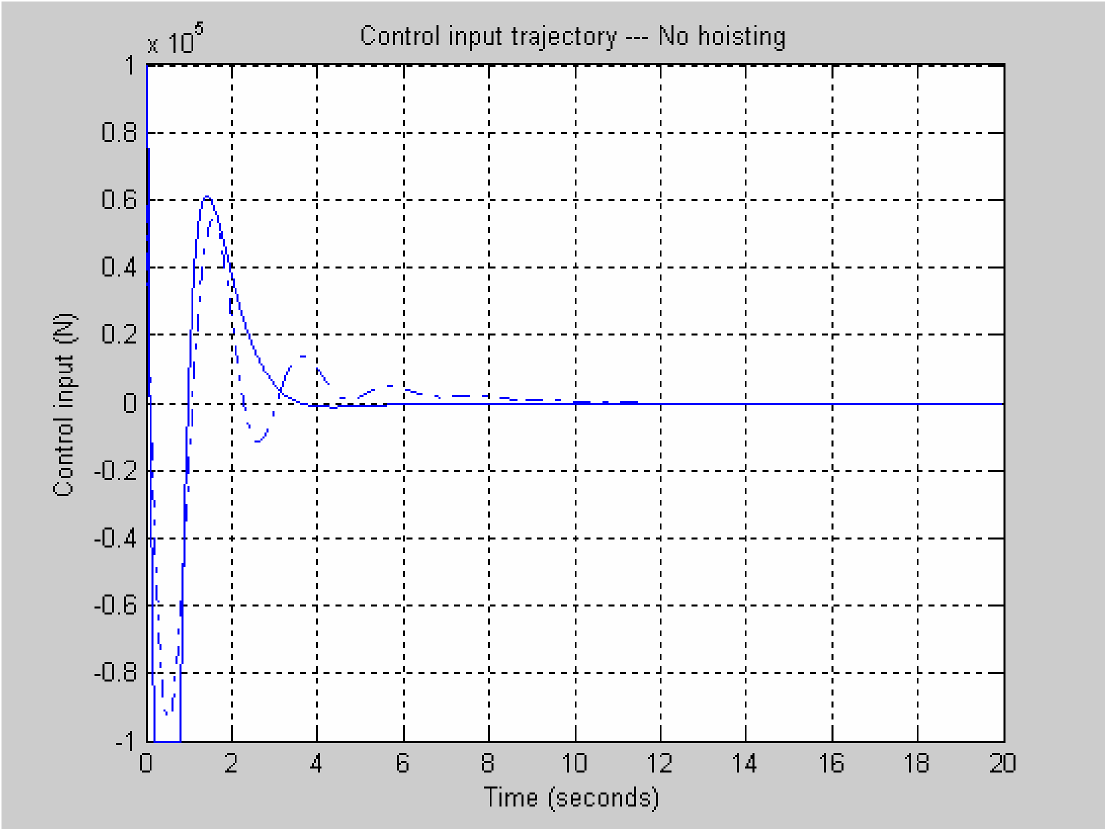
overshoot1 =1.6548 overshoot2 = 0.1013 settling_time = 4.2800 και γραφικές παραστάσεις



Σχήμα 20: Μεταβολή του x_C με το χρόνο για P = [-1.2465,-1.5981,-1.8818,-1.9842]



Σχήμα 21: Μεταβολή του x_φ με το χρόνο για P = [-1.2465,-1.5981,-1.8818,-1.9842]



Σχήμα 22: Μεταβολή του u με το χρόνο για P = [-1.2465,-1.5981,-1.8818,-1.9842]

Αναφέραμε προηγουμένως ότι εμείς χρειαζόμαστε όσο το δυνατόν μικρότερο overshoot και settling time. Η 1η περίπτωση έχει πολύ μικρά overshoots (και τα δύο) και πολύ μικρό settling time. Προφανώς αυτή είναι μία πολύ ικανοποιητική περίπτωση έχοντας πολύ ευνοϊκά αποτελέσματα και για τα δύο overshoots και για το settling time. Η 2η περίπτωση έχει πολύ μικρά overshoots (και τα δύο) και το πιο μικρό settling time. Επομένως αυτή είναι μία περίπτωση που έχουμε πολύ ικανοποιητικές τιμές και για τα τρία μεγέθη. Η 3η περίπτωση είναι αυτή για την οποία επιτύχαμε το καλύτερο overshoot για το $\mathbf{x}_C$ με ικανοποιητικές τιμές και για τα άλλα δύο μεγέθη.

Εμείς, στο πρόγραμμά μας, έχουμε θέσει τον πίνακα P να παίρνει κάθε φορά διαφορετικές τυχαίες τιμές σύμφωνα με τη συνάρτηση randn. Όμως αυτό έγινε για να μπορέσουμε να επιλέξουμε τελικά τον καλύτερο P. Η επιλογή του καλύτερου P λοιπόν εξαρτάται από το τι θέτουμε ως προτεραιότητα (μικρό overshoot, μικρό settling time ή ένας καλός συνδυασμός μεταξύ των δύο) οπότε θέτουμε και στο πρόγραμμα τον ανάλογο πίνακα.

Σ’ αυτήν όπως και στην προηγούμενη μέθοδο, για τις τιμές των $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{x_\varphi}$, $\mathbf{L}$ και $\mathbf{\dot{L}}$ παίρνουμε αρχικά διάφορες περιπτώσεις ώστε να δούμε τη συμπεριφορά των μεθόδων σε διάφορες τιμές εντός των διαστημάτων που μας ενδιαφέρουν. Οπότε έχουμε:

$$\mathbf{x_C \in [1,2]\ m \quad x_\varphi \in [-4.5,-5.5]\ m \quad L \in [9,11]\ m \quad \dot{L} \in [-1,1]\ m/s}$$

Συγκεκριμένα πήραμε τις τιμές

$\mathbf{x_C}$**: 1, 1.5, 2**

$\mathbf{x_\varphi}$**: -4.5, -5, -5.5**

L: 9, 10, 11

$\mathbf{\dot{L}}$: **-1, 0, 1**

και τους διάφορους συνδυασμούς τους. Παρατηρήσαμε από τα αποτελέσματα και για τις δύο μεθόδους ότι σε όλες αυτές τις περιπτώσεις είχαμε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Σε καμία από όλες αυτές τις περιπτώσεις δεν προέκυψε αποτέλεσμα που να μη μας ικανοποιεί. Οπότε καλύπτουμε ένα αρκετά μεγάλο εύρος περιπτώσεων σε περιοχές τιμών που μας ενδιαφέρουν.

3.4 3Η ΜΕΘΟΔΟΣ

3.4.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Θεωρούμε το γραμμικό δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου

$$\mathbf{\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x(0) = x_0} \qquad \mathbf{(1)}$$

με τα διανύσματα κατάστασης $\mathbf{x} \in \Re^{\mathbf{n}}$ και ελέγχου $\mathbf{u} \in \Re^{\mathbf{m}}$ και τους χρονικά μεταβλητούς **πίνακες συστήματος** $\mathbf{A(t)} \in \Re^{\mathbf{nxn}}$ και **εισόδου** $\mathbf{B(t)} \in \Re^{\mathbf{nxm}}$. Στόχος μας είναι να βρούμε το βέλτιστο κανόνα ελέγχου για την ελαχιστοποίηση του κριτηρίου κόστους

$$\mathbf{J = \frac{1}{2}\|x(T)\|_S^2 + \frac{1}{2}\int_0^T \left[\|x(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2\right] dt} \qquad \mathbf{(2)}$$

με δεδομένο τελικό χρόνο T και συμμετρικούς πίνακες βαρών $\mathbf{S \geq 0, Q(t) \geq 0, R(t) \geq 0}$ όπου οι δύο τελευταίοι πίνακες μπορούν να μεταβάλλονται με το χρόνο t. Χάριν συντομίας, η μεταβλητή t θα παραλείπεται εν μέρει στο επόμενο κεφάλαιο.

Διευκρινίζουμε τον ορισμό της **τετραγωνικής μορφής**

$$\mathbf{T(x)=\|x\|_Q^2=x^T Q x} \qquad \textbf{(3)}$$

με συμμετρικό πίνακα **Q**. Ονομάζουμε τον πίνακα **Q**

θετικά ορισμένο,	αν $\mathbf{T(x)>0}$	$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
θετικά ημιορισμένο	αν $\mathbf{T(x)\geq 0}$	$\forall \mathbf{x}$
αρνητικά ορισμένο	αν $\mathbf{T(x)<0}$	$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
αρνητικά ημιορισμένο	αν $\mathbf{T(x)\leq 0}$	$\forall \mathbf{x}$

και συμβολίζουμε τις περιπτώσεις αυτές με $\mathbf{Q>0}$, $\mathbf{Q\geq 0}$, $\mathbf{Q<0}$, $\mathbf{Q\leq 0}$ αντίστοιχα.

Με το κριτήριο κόστους **(2)** επιχειρείται προφανώς η βέλτιστη μεταφορά της αρχικής κατάστασης x_0 σε τιμές κοντά στο μηδέν. Η βέλτιστη αυτή μεταφορά λαμβάνει όμως υπόψη και το κόστος του ελέγχου μέσω του τελευταίου όρου στο κριτήριο **(2).** Η τελική κατάσταση **x(T)** είναι ελεύθερη, τιμωρούνται όμως αποκλίσεις από το μηδέν μέσω του τελικού κόστους.

Για την επίλυση του προβλήματος θεωρούμε την εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman* και έχουμε με την **(1)**

$$\mathbf{0=\frac{\partial V}{\partial t}+\min_{u\in R^m}\left[\frac{1}{2}\|x\|_Q^2+\frac{1}{2}\|u\|_R^2+\frac{\partial V^T}{\partial x}(Ax+Bu)\right]} \qquad \textbf{(4)}$$

Η παραπάνω ελαχιστοποίηση δίνει

$$\mathbf{u^*=-R^{-1}B^T\frac{\partial V}{\partial x}} \qquad \textbf{(5)}$$

Με την υπόθεση

$$\mathbf{V(x,t)=\frac{1}{2}\|x\|_{P(t)}^2} \qquad \textbf{(6)}$$

* $\mathbf{0=\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}+\min_{u\in U(x,t)}\left[\varphi(x,u,t)+\frac{\partial V(x,t)^T}{\partial x}f(x,u,t)\right]}.$

όπου **P(t)** συμμετρικός πίνακας, έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{t}} = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2_{\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t})} \quad \textbf{(7)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{P}(\mathbf{t})\mathbf{x} \quad \textbf{(8)}$$

Δι’ αντικαταστάσεως των **(5)**,**(7)**,**(8)** στην **(4)** έχουμε

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2_{\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t})} + \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2_{\mathbf{Q}} + \frac{1}{2}\left\|\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}\right\|^2_{\mathbf{R}} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = 0 \quad \textbf{(9)}$$

Λόγω συμμετρίας του πίνακα **P** έχουμε

$$\mathbf{x}^T\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{A}^T\mathbf{x} \quad \textbf{(10)}$$

που μπορεί να αντικατασταθεί στην **(9)**. Η ισότητα **(9)** πρέπει να ισχύει για κάθε **x** και άρα ο πίνακας **P** πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη μη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{Q} \quad \textbf{(11)}$$

που φέρει το όνομα **διαφορική εξίσωση Ricatti.**

Ο πίνακας $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{nxn}$ φέρει το όνομα **πίνακας Ricatti**. Ο αριθμητικός υπολογισμός του **P** μέσω της διαφορικής εξίσωσης **(11)** είναι εύκολος ακόμη και για συστήματα μεγάλων διαστάσεων. Να σημειωθεί ότι, λόγω συμμετρίας του **P**, η επίλυση της **(11)** απαιτεί ολοκλήρωση ενός συστήματος αποτελούμενου από n(n+1)/2 (και όχι n^2) εξισώσεις. Μετά τον υπολογισμό του **P(t)** και αντικατάστασή του στις **(8)** και **(5)** έχουμε το βέλτιστο κανόνα ελέγχου

$$\mathbf{u(t)=-R^{-1}(t)B(t)^TP(t)x(t)=-K(t)x(t)} \quad \textbf{(12)}$$

όπου **K(t)** είναι ο **πίνακας ελέγχου** του γραμμικού κανόνα **(12)** , έχουμε δηλαδή

$$\mathbf{K(t)=R(t)^{-1}B(t)^TP(t)} \quad \textbf{(13)}$$

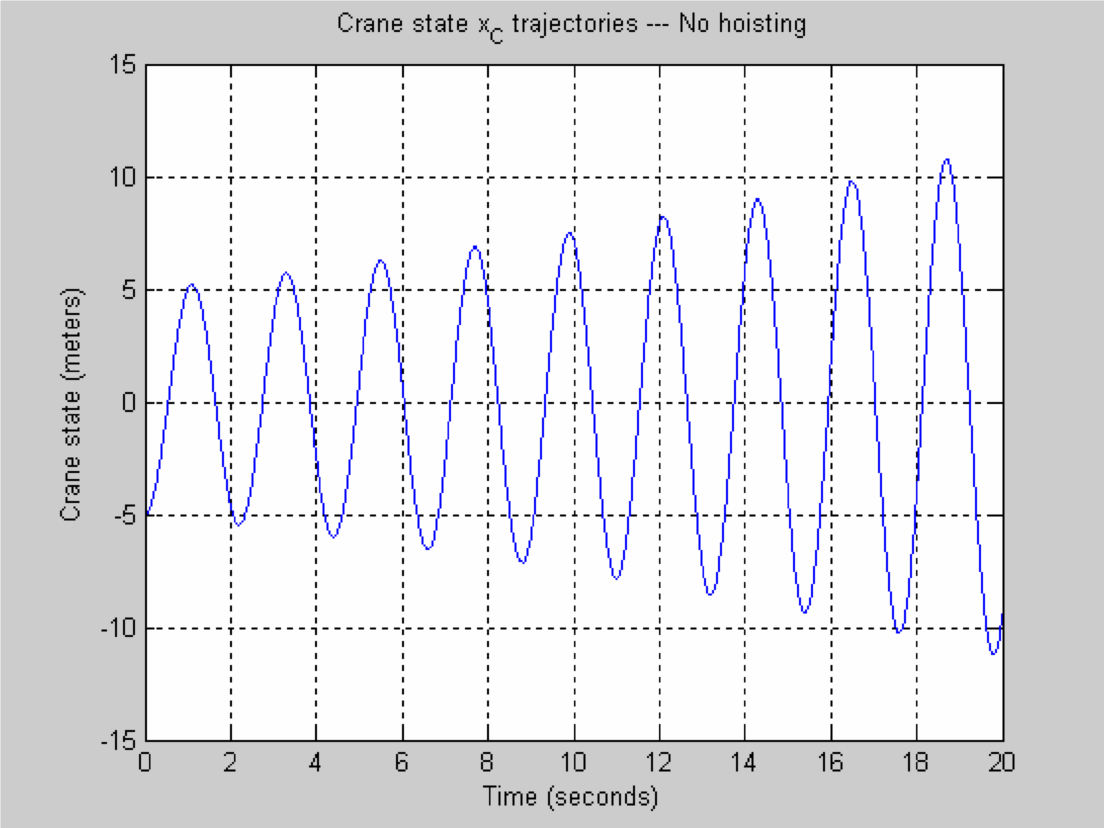
Παρατηρούμε ότι οι **P(t)** και **K(t)** εξαρτώνται από τα μεγέθη του προβλήματος **A,B,Q,R** και **T** όχι όμως από τις μετρήσεις πραγματικού χρόνου **x**. Κατά συνέπεια ο υπολογισμός των **P(t)** και **K(t)** μέσω **(11)**, **(13)** μπορεί να γίνει εκ των προτέρων, στη φάση ανάπτυξης του κανόνα ελέγχου ενώ οι υπολογισμοί στη φάση εφαρμογής του κανόνα ελέγχου περιορίζονται στην εκτέλεση της **(12)**.

3.4.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ

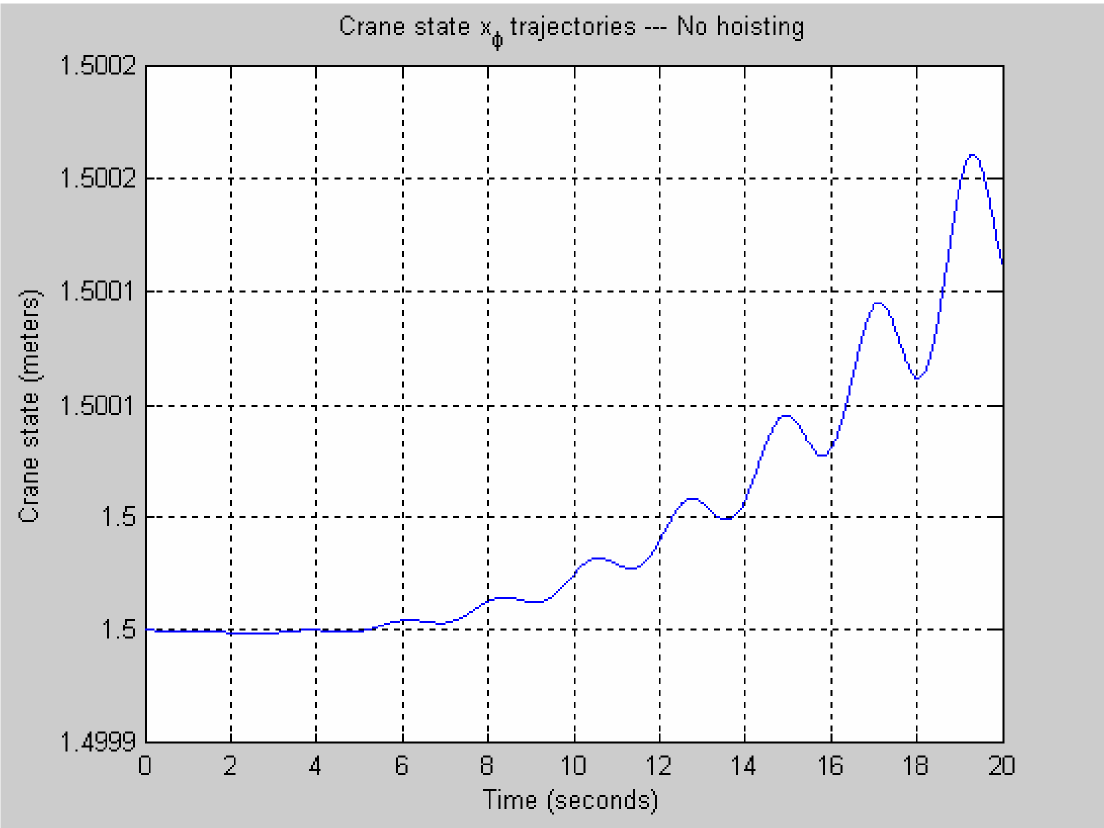
Ενώ η μέθοδος θεωρητικά φαίνεται να έχει υπόβαθρο, δυστυχώς στην πράξη αποδείχθηκε ότι δεν είχαμε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Όπως μπορούμε να δούμε στο πρόγραμμα οι πίνακες Q και P ορίζονται ως P=300*eye(4) και Q=12*eye(4). Δηλαδή οι πίνακες είναι οι εξής:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{300} & \mathbf{300} & \mathbf{300} & \mathbf{300} \\ \mathbf{300} & \mathbf{300} & \mathbf{300} & \mathbf{300} \\ \mathbf{300} & \mathbf{300} & \mathbf{300} & \mathbf{300} \\ \mathbf{300} & \mathbf{300} & \mathbf{300} & \mathbf{300} \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{12} & \mathbf{12} & \mathbf{12} \\ \mathbf{12} & \mathbf{12} & \mathbf{12} & \mathbf{12} \\ \mathbf{12} & \mathbf{12} & \mathbf{12} & \mathbf{12} \\ \mathbf{12} & \mathbf{12} & \mathbf{12} & \mathbf{12} \end{bmatrix}$$

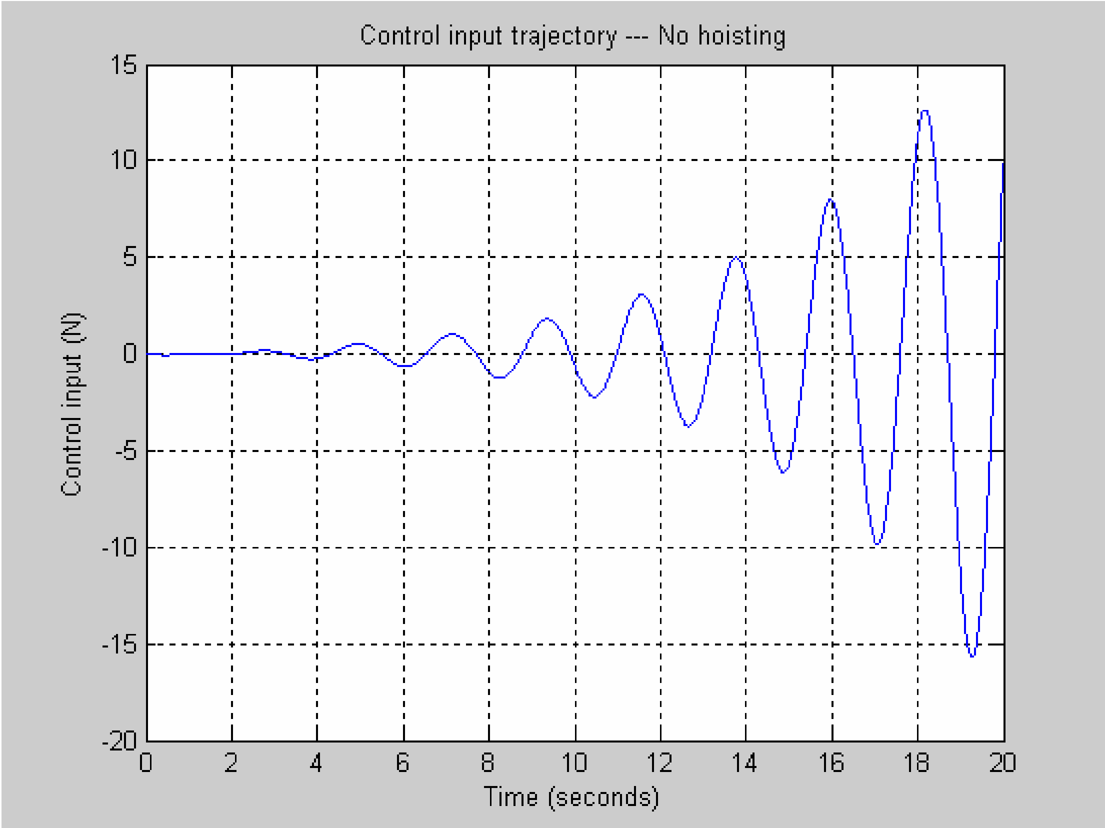
Αυτό συμβαίνει επειδή επιθυμούμε αυτοί οι δύο πίνακες να είναι θετικά ορισμένοι. Οι γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν για τα $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{x_\varphi}$ και $\mathbf{u}$ είναι οι εξής:



Σχήμα 23: Μεταβολή του x_C με το χρόνο για τη μέθοδο Ricatti



Σχήμα 24: Μεταβολή του x_φ με το χρόνο για τη μέθοδο Ricatti



Σχήμα 25: Μεταβολή του u με το χρόνο για τη μέθοδο Ricatti

Παρατηρώντας κανείς τις γραφικές παραστάσεις, είναι εύκολο να καταλάβει γιατί είπαμε προηγουμένως ότι τα αποτελέσματα δεν είναι τα αναμενόμενα. Στο Σχήμα 22, παρατηρούμε ότι το $\mathbf{x}_C$ μεταβάλλεται συνεχώς και μάλιστα όσο περνάει ο χρόνος αυτό παίρνει συνεχώς μεγαλύτερες τιμές. Προφανώς αυτό το γεγονός κάθε άλλο παρά μας ικανοποιεί αφού αυτό που εμείς επιθυμούμε είναι το $\mathbf{x}_C$ με την πάροδο του χρόνου να γίνει 0 και να σταθεροποιηθεί εκεί. Έπειτα στο Σχήμα 23, παρατηρούμε ότι το $\mathbf{x}_\varphi$ στην ουσία μένει αμετάβλητο (έχει ανεπαίσθητη μεταβολή) αλλά κυρίως δεν πλησιάζει στο μηδέν, αντιθέτως αυξάνεται συνεχώς. Αυτό το γεγονός όπως και για το $\mathbf{x}_C$, προφανώς δεν είναι ικανοποιητικό για μας. Επομένως, δεν έχει νόημα να συζητάμε για το u αφού τα x δεν είναι τα αναμενόμενα.

Στη συνέχεια αλλάξαμε τιμές για τους P και Q πίνακες όμως παρατηρήσαμε ότι δεν υπήρξε καμιά μεταβολή στις γραφικές παραστάσεις ούτε των x αλλά ούτε και του u. Δοκιμάσαμε διάφορες τιμές και για τον έναν και για τον άλλο πίνακα όμως το αποτέλεσμα παρέμενε αμετάβλητο. Συνεπώς η μέθοδος δε μπορούσε να βελτιωθεί εφ' όσον η μοναδική αλλαγή που μπορούσε να γίνει ήταν στις τιμές αυτών των δύο πινάκων και αυτή δεν απέδωσε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση των αποτελεσμάτων των τριών μεθόδων. Κατ' αρχήν, οι δύο πρώτες μέθοδοι στην ουσία έχουν παρουσιαστεί συγκρινόμενες διότι οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών τους παρουσιάζονται μαζί. Από τις διάφορες περιπτώσεις που πήραμε, παρατηρήσαμε ότι στις περισσότερες των περιπτώσεων, τα αποτελέσματα της $2^{ης}$ μεθόδου είναι καλύτερα από αυτά της $1^{ης}$ μεθόδου. Ειδικά, στις περιπτώσεις των τριών πινάκων P που επιλέχθηκαν τελικά για τη $2^{η}$ μέθοδο, τα αποτελέσματα είναι σαφώς καλύτερα στη $2^{η}$ μέθοδο. Το μόνο σημείο στο οποίο υπερτερεί η $1^{η}$ μέθοδος είναι στην περίπτωση του u, το οποίο δεν ξεπερνά ποτέ το διάστημα **[-10^5, 10^5]**. Από κει και πέρα όμως, στη $2^{η}$ μέθοδο στις τρεις τουλάχιστον περιπτώσεις που επιλέξαμε, το u 'ηρεμεί' πιο γρήγορα. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $2^{η}$ μέθοδος παρά τη μικρή αδυναμία την οποία παρουσιάζει, είναι γενικά καλύτερη από την $1^{η}$ μέθοδο. Όσον αφορά την $3^{η}$ μέθοδο, η μέθοδος όπως αναφέραμε και παραπάνω δεν είχε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Προφανώς, είναι δύσκολο να κάνουμε κάποια σύγκριση με τις άλλες μεθόδους εφ' όσον αυτή δεν απέδωσε. Αυτό που μπορούμε να πούμε με σιγουριά είναι ότι η μέθοδος αυτή δεν ενδείκνυται για την αντιμετώπιση του προβλήματός μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τελικά αυτό που προκύπτει από τη μελέτη του προβλήματος είναι ότι η $2^{η}$ μέθοδος είναι ενδεδειγμένη για τη δημιουργία του ελεγκτή που χρειαζόμαστε. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αυτές δεν είναι οι μοναδικές μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Έχουν αναπτυχθεί και άλλες οι οποίες όμως δεν είχαν καλύτερα αποτελέσματα. Επί της παρούσης λοιπόν η $2^{η}$ μέθοδος είναι η καλύτερη δυνατή με την επιλογή φυσικά του καλύτερου πίνακα P (ενός από τους τρεις που προέκυψαν) και μπορεί να αποδειχθεί ένα καλό εργαλείο για την περίπτωση των γερανών που εξετάζουμε. Η επιλογή αυτού του πίνακα όπως προαναφέρθηκε, εξαρτάται από το που επικεντρώνεται το ενδιαφέρον μας (overshoot/settling time). Βεβαίως, η μέθοδος έχει δοκιμαστεί μόνο θεωρητικά κι επομένως δε μπορούμε να μιλήσουμε για αποτελέσματα στην πράξη.

Η $1^{η}$ μέθοδος είχε και αυτή θετικά αποτελέσματα. Όμως είναι γεγονός ότι με τη $2^{η}$ μέθοδο έχουμε σαφή βελτίωση των αποτελεσμάτων αυτών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ο παρακάτω κώδικας είναι γραμμένος στο πρόγραμμα Matlab.

```
clear all;
close all;
                    % 2H   METHODOS
dt=0.01;
Max_l=2000;
ZZ=zeros(Max_l,6);
P=-abs(2*randn(4,1))                    %P = eig(A-B*K)
m1=6000;
m2=42500;
st1=zeros(Max_l,1);
st2=zeros(Max_l,1);
settling_time=0;
settling_time1=0;
settling_time2=0;
OV1=zeros(Max_l,1);
OV2=zeros(Max_l,1);
dt1=0;
dt2=0;
lo1=0;                    %lo1:loop gia to overshoot tou x1=xc
lo2=0;                    %lo2:loop gia to overshoot tou x2=xph
lo3=0;
lo4=0;
overshoot1=0;
overshoot2=0;
X=zeros(Max_l,4);
```

```
x=zeros(4,1);
x1s=-5;                          %x1s=arxiko x1
x2s=1.5;                         %x2s=arxiko x2
x(1)=x1s;
x(2)=x2s;
dx=zeros(4,1);
ph=0;
dph=0;
ddph=0;
B=[0;0;1/m1;1/(m1+m2)];
for loop=1:Max_l,
X(loop,:)=x';
L=10;
dL=0;
ddL=0;
sph=x(2)/L;                          %   sph:sinφ=xph/L
cph=sqrt(1-sph^2);
dph=(x(4)-dL*sph)/(L*cph);
ddph=((dx(4)-(dL*sph)-(ddL*dph*cph))*(L*cph)-(x(4)-
L*sph)*(dL*cph-L*dph*sph))/(L^2*cph^2);
z=[cph,dph,ddph,L,dL,ddL]';
ZZ(loop,:)=z';
F=(m2*10-m2*(ddL*cph-2*dL*dph*sph-L*dph*dph*cph-
L*ddph*sph))/cph;
F=abs(F);
gg=-(1/L)*(1/m1+1/m2)*F;
GG(loop,1)=gg;
A=[0,0,1,0;
0,0,0,1;
```

```
gg, 0,0,0;
0,0,0,0];
Ki=acker(A,B,P);
KK(loop,:)=Ki;
u=-Ki*x;
if abs(u)>1e+05
u=sign(u)*1e+05;
end
x=x+dt*(A*x+B*u);
dx=(A*x+B*u);
U(loop,1)=u;
T(loop,1)=(loop-1)*dt;
if abs(X(loop,1))<0.03*abs(x1s)            %Ypologismos pinaka st1
st1(loop,1)=T(loop,1);
end
if abs(X(loop,2))<0.03*abs(x2s)            %Ypologismos pinaka st2
st2(loop,1)=T(loop,1);
end
end
for loop=1:Max_l-1
   if st1(loop,1)==0                        %Ypologismos settling_time1
        if st1(loop+1,1)>0
        lo3=loop;
        settling_time1=st1(lo3+1,1);
        end
   end
end
for loop=1:Max_l-1
     if (st2(loop+1,1)-st2(loop,1)~=0) & (st2(loop,1)==0)
```

```
%Ypologismos
       lo4=loop;                                        % settling_time2
settling_time2=st2(lo4+1,1);
      end
end
for loop=lo4:Max_l-1
      if  abs(X(loop+1,2))>0.03*abs(x2s)
      settling_time2=0;
      end
end
settling_time=max(settling_time1,settling_time2);
for loop=Max_l:(-1):1
     if (X(loop,1)>=0)
     lo1=loop;
     dt1=T(loop,1);
     end
end
if lo1>0
for loop=lo1:Max_l                          %Ypologismos overshoot1
OV1(loop,1)=abs(X(loop,1));
overshoot1=max(OV1);
end
else
overshoot1=0;
end
for loop=Max_l:(-1):1
    if (X(loop,2)<=0)
    lo2=loop;
    dt2=T(loop,1);
```

```
    end
end
if lo2>0
for loop=lo2:Max_l                          %Ypologismos overshoot2
   OV2(loop,1)=abs(X(loop,2));
   overshoot2=max(OV2);
end
else
   overshoot2=0;
end
                                        % 1H METHODOS
X1=zeros(Max_l,4);
KG=[0.2611, 0.0707, 0.5760, 1.2821];
x=zeros(4,1);
x1s=-5;
x2s=1.5;
x(1)=x1s;
x(2)=x2s;
dx=zeros(4,1);
ph=0;
dph=0;
ddph=0;
B=[0;0;1/m1;1/(m1+m2)];
for loop=1:Max_l,
X1(loop,:)=x';
L=10;
dL=0;
ddL=0;
sph=x(2)/L;
```

```
cph=sqrt(1-sph^2);
dph=(x(4)-dL*sph)/(L*cph);
ddph=((dx(4)-(dL*sph)-(ddL*dph*cph))*(L*cph)-(x(4)-
L*sph)*(dL*cph-L*dph*sph))/(L^2*cph^2);
z=[cph,dph,ddph,L,dL,ddL]';
ZZ(loop,:)=z';
F=(m2*10-m2*(ddL*cph-2*dL*dph*sph-L*dph*dph*cph-
L*ddph*sph))/cph;
F=abs(F);
gg=-(1/L)*(1/m1+1/m2)*F;
A=[0,0,1,0;
0,0,0,1;
gg, 0,0,0;
0,0,0,0];
NG=eye(4);
omega=sqrt(10*(m1+m2)/(L*m1));
NG(3,3)=omega;                          %NG: pinakas N
NG(4,4)=NG(3,3);
u=-m1*omega*omega*KG*inv(NG)*x;
if abs(u)>1e+05
   u=sign(u)*1e+05;
end
x=x+dt*(A*x+B*u);
dx=(A*x+B*u);
U1(loop,1)=u;
end
figure(1)
plot(T,X(:,1))
hold;
```

```
plot(T,X1(:,1), '-.')
hold;
grid;
xlabel('Time (seconds)');
ylabel('Crane state (meters)');
title('Crane state x_C trajectories --- No hoisting');
print -depsc fig1a.ps
figure(2)
plot(T,X(:,2) );
hold;
plot(T,X1(:,2), '-.');
hold;
grid;
xlabel('Time (seconds)');
ylabel('Crane state (meters)');
title('Crane state x_{\phi} trajectories --- No hoisting');
print -depsc fig1b.ps
figure(3);
plot(T,U);
hold;
plot(T, U1, '-.');
hold;
grid;
xlabel('Time (seconds)');
ylabel('Control input (N)');
title('Control input trajectory --- No hoisting');
print -depsc fig1c.ps
overshoot1
overshoot2
```

```
settling_time1
settling_time2
settling_time
```

% 3^H METHODOS

```
clear all;
close all;
dt=0.01;
Max_l=2000;
ZZ=zeros(Max_l,6);
P=300*eye(4);
Q=12*eye(4);
m1=6000;
m2=42500;
dt1=0;
dt2=0;
X=zeros(Max_l,4);
x=zeros(4,1);
x1s=-5;         %x1s=arxiko x1
x2s=1.5;        %x2s=arxiko x2
x(1)=x1s;
x(2)=x2s;
dx=zeros(4,1);
ph=0;
dph=0;
ddph=0;
B=[0;0;1/m1;1/(m1+m2)];
for loop=1:Max_l,
```

```
X(loop,:)=x';
L=10;
dL=0;
ddL=0;
sph=x(2)/L;                              %   sph:sinφ=xc/L
cph=sqrt(1-sph^2);
dph=(x(4)-dL*sph)/(L*cph);
ddph=((dx(4)-(dL*sph)-(ddL*dph*cph))*(L*cph)-(x(4)-
L*sph)*(dL*cph-L*dph*sph))/(L^2*cph^2);
z=[cph,dph,ddph,L,dL,ddL]';
ZZ(loop,:)=z';
F=(m2*10-m2*(ddL*cph-2*dL*dph*sph-L*dph*dph*cph-
L*ddph*sph))/cph;
F=abs(F);
gg=-(1/L)*(1/m1+1/m2)*F;
GG(loop,1)=gg;
A=[0,0,1,0;
0,0,0,1;
gg, 0,0,0;
0,0,0,0];
dP=-P*A-A'*P+P*B*B'*P-Q;
P=P+dt*dP;
u=-B'*P*x;
if abs(u)>1e+05
  u=sign(u)*1e+05;
end
x=x+dt*(A*x+B*u);
dx=(A*x+B*u);
U(loop,1)=u;
```

```
T(loop,1)=(loop-1)*dt;
end
figure(1)
plot(T,X(:,1))
hold;
grid;
xlabel('Time (seconds)');
ylabel('Crane state (meters)');
title('Crane state x_C trajectories --- No hoisting');
print -depsc fig1a.ps
figure(2)
plot(T,X(:,2) );
hold;
grid;
xlabel('Time (seconds)');
ylabel('Crane state (meters)');
title('Crane state x_{\phi} trajectories --- No hoisting');
print -depsc fig1b.ps
figure(3);
plot(T,U);
hold;
grid;
xlabel('Time (seconds)');
ylabel('Control input (N)');
title('Control input trajectory --- No hoisting');
print -depsc fig1c.ps
```

Παρατηρούμε στο πρόγραμμα ότι για την $1^{η}$ μέθοδο παίρνουμε έτοιμο τον πίνακα K ο οποίος έχει προκύψει όπως αναφέραμε παραπάνω μέσω της μεθόδου δοκιμή-σφάλμα. Με δεδομένο τον πίνακα K λοιπόν και τις τιμές των $\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \ddot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}$ να δίνονται από συνδυασμούς τύπων που αναφέρονται στο Κεφάλαιο 2 προκύπτει ο παραπάνω κώδικας. Άρα έχουμε σαν input τους πίνακες A, B και K (αναφέρονται στο Κεφάλαιο 2) και παίρνουμε σαν output τις τιμές των x και u και τις μεταβολές αυτών με το χρόνο σε γραφικές παραστάσεις.

Για τη 2η μέθοδο βλέπουμε στο πρόγραμμα ότι παίρνουμε έτοιμους τους πίνακες A, B και P με τον P να παίρνει τυχαίες τιμές κάθε φορά για να επιλέξουμε τις καλύτερες περιπτώσεις όπως είπαμε παραπάνω. Ο πίνακας K εδώ υπολογίζεται μέσα στο πρόγραμμα μέσω της συνάρτησης Ackermann. Επομένως για κάθε μεταβολή του P, μεταβάλλεται και ο πίνακας K άρα και η τιμή του u, ώστε να μεταβάλλεται συνεχώς και ο κανόνας ελέγχου. Συν τοις άλλοις, στη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε και δύο μεγέθη που αναφέρθηκαν και παραπάνω, το overshoot και το settling time. Υπολογίζουμε κάθε φορά δύο overshoot, ένα για το x_C και ένα για το x_φ. Ομοίως συμβαίνει και για το settling time, όμως για το settling time συγκρίνουμε τα δύο που βρίσκουμε μεταξύ τους και βρίσκουμε το settling time του συστήματος που είναι το μεγαλύτερο από τα δύο. Επομένως εδώ έχουμε σαν input τους πίνακες A, B και P. Το output που παίρνουμε είναι και πάλι οι τιμές των x και u και οι μεταβολές αυτών με το χρόνο σε γραφικές παραστάσεις καθώς και οι τιμές των overshoot και settling time.

Όσον αφορά τώρα την 3η μέθοδο, οι πίνακες A και B είναι και πάλι οι ίδιοι και δεδομένοι. Αυτό που μεταβάλλεται είναι ο πίνακας P και μαζί μ' αυτόν και το u επομένως μεταβάλλεται και ο κανόνας ελέγχου. Δηλαδή τα inputs είναι οι A και B πίνακες ενώ outputs είναι ο πίνακας P και οι τιμές των x και u καθώς και οι γραφικές παραστάσεις αυτών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive Control*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

[2] J.W. Auernig and H. Troger, "Time optimal control of overhead cranes with hoisting of the load," *Automatica*, vol. 23, no. 4, pp. 437–447, 1987.

[3] P. Hippe, "Time optimal control of an ore crane," *Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung* (in German), vol. 18, no. 8, pp. 346–350, 1970.

[4] A. Marttinen and J. Virkkunen, "Modeling and analysis of trolley crane,"in *Proc. Int. ASME Conf. Modeling and Simulation*, Pomona, CA, vol.3, pp. 15–26, Dec. 1987.

[5] A. J. Ridout, "Antiswing control of the overhead crane using linear feedback," *J. Electr. Electron. Eng., Australia*, vol. 9, no. 1/2, pp. 17–26, Mar./June 1989.

[6] Y. Sakawa and Y. Shindo, "Optimal control of container cranes," *Automatica*, vol. 18, no. 3, pp. 257–266, 1982.

[7] S. M. Shahruz and S. Behtash, "Design of controllers for linear parameter-varying systems by the gain scheduling technique," *J. Math. Anal. Applicat.*, no. 168, pp. 195–217, 1992.

[8] J. S. Shamma, "Analysis and design of gain scheduled control systems," Ph.D. dissertation, Lab. Inform. Decision Systs, Massachusetts Inst. Technology, Cambridge, May 1988.

[9] J. S. Shamma and M. Athans, "Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants," *Automatica*, vol. 27, no. 3, pp. 559–564, 1991.

[10] J. Virkkunen and A. Marttinen, “Computer control of a loading bridge,” in *Proc. IEE Int. Conf. Contr.,* Oxford, U.K., 1988, pp. 484–488.

[11] J. Virkkunen, A. Marttinen, K. Rintanen, R. Salminen, and J. Seitsonen, “Computer control of over-head and gantry cranes,” in *Proc. IFAC 11th World Congr.,* Tallin, Estonia, 1990, pp. 401–405.