



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Διπλωματική εργασία: Μελέτη συστημάτων παραγωγής ενός σταδίου, των οποίων τα προϊόντα έχουν πεπερασμένη διάρκεια ζωής και στοχαστικούς χρόνους παραγωγής, που ακολουθούν την κατανομή Coxian-2.

Πάντος Γεώργιος

Επιβλέπων καθηγητής:

Ιωαννίδης Ευστράτιος

Χανιά, 2012

© 2012 από τον Πάντο Γεώργιο

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή μου κ. Ιωαννίδη Ευστράτιο για την ανάθεση της διπλωματικής αυτής εργασίας. Είμαι ευγνώμων για τις εποικοδομητικές συμβουλές και επισημάνσεις του που με βοήθησαν στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλονται στο προσωπικό του εργαστηρίου CAM και συγκεκριμένα στον Δημήτρη Κωνσταντά για την πολύτιμη βοήθεια του. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την μητέρα μου για την παρουσία και στήριξη της αφιερώνοντας της αυτή την εργασία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετάει το πρόβλημα της ανάλυσης συστημάτων παραγωγής ενός σταδίου με τυχαίους χρόνους παραγωγής, που ακολουθούν την κατανομή Coxian-2, και τα παραγόμενα προϊόντα έχουν πεπερασμένη διάρκεια ζωής που είναι επίσης τυχαία. Εξετάζουμε την υπόθεση ότι οι ρυθμοί αλλοίωσης των προϊόντων είναι ίδιοι με αυτούς που έχουμε σε ένα παρόμοιο σύστημα με εκθετικούς χρόνους παραγωγής. Αναπτύσσουμε ένα μοντέλο για την ανάλυση του συστήματος, βασισμένη σε αυτή την υπόθεση και επιχειρούμε να επαληθεύσουμε πειραματικά την υπόθεση μας συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου μας με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την χρήση εργαλείων προσομοίωσης. Αν και τα αποτελέσματα δεν επιβεβαίωσαν την υπόθεση μας το μοντέλο που αναπτύχθηκε φαίνεται ότι αποτελεί μια ικανοποιητική μέθοδο προσέγγισης του συστήματος που μελετάμε.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	6
2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	8
2.1. Το σύστημα παραγωγής.....	10
3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.....	13
3.1 Εκτίμηση πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης.....	13
3.2 Υπολογισμός του ρυθμού απώλειας προϊόντων γ_m	20
3.3 Αναλυτικές εκφράσεις των μέτρων απόδοσης του συστήματος..	22
4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	23
5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	50
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	51
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	60

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα συστήματα παραγωγής απαρτίζουν ίσως τον βασικότερο πυλώνα των σύγχρονων βιομηχανικών επιχειρήσεων καθορίζοντας σημαντικά την βιωσιμότητα και την ανάπτυξη τους. Με την πάροδο των ετών η ανάγκη για καλύτερο έλεγχο των συστημάτων παραγωγής συνεχώς αυξάνεται, με στόχο την μεγαλύτερη ευελιξία παραγωγής, τη μείωση του λειτουργικού κόστους, την αύξηση του κέρδους και την παραγωγή ανταγωνιστικότερων προϊόντων και υπηρεσιών ώστε να καλυφθούν με επιτυχία οι ανάγκες του σύγχρονου καταναλωτή.

Τον προηγούμενο αιώνα, η βιομηχανία είχε υιοθετήσει τη μαζική παραγωγή προϊόντων ως πρότυπο παραγωγής, όπου κάθε τμήμα του εργοστασίου παρήγαγε στο μέγιστο ρυθμό, εφόσον είχε ικανή τροφοδοσία και επαρκή χώρο αποθήκευσης. Μέχρι τα μέσα του αιώνα, το είδος αυτό της παραγωγής εξυπηρετούσε μεγάλες βιομηχανίες όπου το περιθώριο κέρδους ήταν αρκετά μεγάλο καθώς βασιζόταν σε μονοπώλια της τότε εποχής.

Στην σύγχρονη εποχή τα δεδομένα έχουν αλλάξει δραματικά στον χώρο της βιομηχανίας. Πλέον για να εξασφαλίσει μια βιομηχανία την βιωσιμότητα της στο σύγχρονο ανταγωνιστικό περιβάλλον θα πρέπει να είναι σε θέση να παράγει με βέλτιστο τρόπο ποιοτικά και ποσοτικά. Έτσι λοιπόν η σύγχρονη παραγωγική διαδικασία περιλαμβάνει τη λήψη σημαντικών αποφάσεων που σχετίζονται με το συντονισμένο έλεγχο της παραγωγής σε κάθε τμήμα ώστε να αποφεύγεται η διατήρηση υψηλών αποθεμάτων και συγχρόνως η έλλειψη προϊόντων που οδηγεί σε ανικανοποίητη ζήτηση, δυο σημαντικές παραμέτρους για την διατήρηση του κόστους σε χαμηλά επίπεδα.

Συγκεκριμένα ο έλεγχος παραγωγής καλύπτει θέματα που σχετίζονται με το χρονικό προγραμματισμό της διαδικασίας παραγωγής και τον έλεγχο των αποθεμάτων με στόχο την βέλτιστη κάλυψη της ζήτησης. Σκοπός του ελέγχου είναι η βελτιστοποίηση ενός ή και περισσότερων μέτρων απόδοσης του συστήματος. Αυτά

μπορεί να είναι το καθαρό κέρδος από πωλήσεις, το κόστος λειτουργίας, το μέσο απόθεμα και η ικανοποίηση των πελατών από απόψεως χρόνου παράδοσης και ποιότητας.

Στα περισσότερα συστήματα παραγωγής οι αποφάσεις που λαμβάνονται στα θέματα ελέγχου των αποθεμάτων παίζουν σημαντικότερο ρόλο στην διαδικασία παραγωγής. Ο αντικειμενικός σκοπός είναι να διατηρείται μια ισορροπία μεταξύ υπερβολικού και ελάχιστου αποθέματος ώστε να μην οδηγεί σε μεγάλα κόστη αποθήκευσης και μεγάλες ελλείψεις, οι οποίες μετατρέπονται σε αδυναμία εξυπηρέτησης των πελατών αντίστοιχα.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με αποθεματικά συστήματα των οποίων τα προϊόντα αλλοιώνονται. Πρόκειται για έναν τομέα των συστημάτων παραγωγής συνεχώς αυξανόμενο καθώς η ανάγκη για την κατανόηση τέτοιων συστημάτων γίνεται ολοένα μεγαλύτερη με στόχο την λήψη βέλτιστων αποφάσεων πάνω στις πολιτικές αποθεμάτων.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Σε αυτή τη εργασία, εξετάζουμε συστήματα παραγωγής με μία μηχανή και τυχαίους χρόνους παραγωγής που ακολουθούν την κατανομή Coxian-2. Η ζήτηση είναι επίσης τυχαία και ακολουθεί την κατανομή Poisson. Τα παραγόμενα προϊόντα αλλοιώνονται, δηλαδή έχουν πεπερασμένη διάρκεια ζωής, η οποία είναι επίσης τυχαία και θεωρούμε, ότι ακολουθεί γνωστή κατανομή. Στην περίπτωση, που ένα προϊόν παραμένει στο απόθεμα για χρονικό διάστημα μεγαλύτερο από τη διάρκεια ζωής του θεωρούμε, ότι είναι ακατάλληλο προς πώληση και αποσύρεται. Η πολιτική ελέγχου που ακολουθείται είναι η πολιτική βασικού αποθέματος – βασικού ελλείμματος. Σε αυτή την πολιτική το σύστημα παράγει, μέχρι η στάθμη του αποθέματος ετοιμών προϊόντων γίνει ίση με το βασικό απόθεμα s . Τότε η παραγωγή διακόπτεται και ξαναρχίζει όταν το απόθεμα πέσει κάτω από αυτό το κατώφλι. Αντίστοιχα όταν δεν υπάρχει απόθεμα προϊόντων για την άμεση ικανοποίηση των παραγγελιών αυτές γίνονται δεκτές μέχρι το πλήθος τους να γίνει ίσο με το βασικό έλλειμμα c . Όταν οι εκκρεμείς παραγγελίες είναι ίσες με το βασικό έλλειμμα οι νέες παραγγελίες απορρίπτονται.

Πρόσφατα, ο Monaghan [1] ανάλυσε το φαινόμενο της εγκατάλειψης της ουράς αναμονής από τους πελάτες για απλά συστήματα μιας μηχανής με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης και αφίξεις Poisson. Υπέθεσε ότι κάθε αφικνούμενος πελάτης έχει ένα μέγιστο διάστημα αναμονής από την ώρα της άφισξής του (διορία) που ακολουθεί γνωστή κατανομή με γνωστή μέση τιμή. Αν ο χρόνος αναμονής μέχρι την ικανοποίηση της παραγγελίας ξεπεράσει αυτό το διάστημα, ο πελάτης εγκαταλείπει το σύστημα. Αποδείχθηκε πως το σύστημα υπό μελέτη είναι στοχαστικά ισοδύναμο με ένα σύστημα γέννησης – θανάτου. Στην παραπάνω εργασία παρουσιάζονται επίσης αναλυτικοί τύποι για τον υπολογισμό του ρυθμού εγκατάλειψης της ουράς ως συνάρτηση του αριθμού πελατών μέσα το σύστημα. Έτσι χρησιμοποιώντας τα παραπάνω καταλήγει σε κάποιους τύπους υπολογισμού του χρόνου αναμονής στην ουρά που προκύπτουν για διάφορους τύπους ανυπομονησίας πελατών (εκθετική κατανομή, ντετερμινιστική κατανομή,

ομοιόμορφη κατανομή) αλλά και σε εκφράσεις για την κατανομή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης.

Είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς, ότι ένα σύστημα παραγωγής βασικού αποθέματος με μία μηχανή με εκθετικούς χρόνους παραγωγής και Poisson αφίξεις πελατών, στο οποίο οι πελάτες είναι ανυπόμονοι, είναι συμμετρικό και ισοδύναμο με ένα σύστημα παραγωγής βασικού αποθέματος με μία μηχανή με εκθετικούς χρόνους και προϊόντα που αλλοιώνονται (βλέπε S. Ioannidis et al [2]). Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να ελέγξουμε κατά πόσο τα αποτελέσματα της εργασίας του Monaghan [1] μπορούν να επεκταθούν σε συστήματα παραγωγής με χρόνους παραγωγής, που ακολουθούν την κατανομή Coxian-2. Για τον σκοπό αυτό θα αναπτύξουμε ένα μοντέλο στο οποίο οι ρυθμοί καταστροφής προϊόντων υπολογίζονται βάσει των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στην παραπάνω εργασία. Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να επαληθεύσουμε αριθμητικά τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την αναλυτική επίλυση του θεωρητικού μοντέλου για μια σειρά από διαφορετικές κατανομές χρόνων ζωής των προϊόντων του αποθέματος, μέσω σύγκρισης των πειραματικών αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την λειτουργία ενός προσομοιωτή διακριτών γεγονότων, που αναπτύχθηκε για την προσομοίωση της λειτουργίας του συστήματος μας.

2.1. Το σύστημα παραγωγής

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής με μια μηχανή, το οποίο παράγει ένα μόνο προϊόν για να ικανοποιήσει τυχαία ζήτηση. Υποθέτουμε ότι οι πελάτες έρχονται στο σύστημα ακολουθώντας μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και κάθε πελάτης ζητά μια μονάδα προϊόντος. Οι χρόνοι παραγωγής είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την Coxian-2 κατανομή. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων και οι χρόνοι παραγωγής είναι αμοιβαίως ανεξάρτητοι.

Για τον έλεγχο της παραγωγής και των αφικνούμενων πελατών εφαρμόζουμε απλές πολιτικές κατωφλίου. Σύμφωνα με αυτές τις πολιτικές, το σύστημα παράγει στον μέγιστο ρυθμό όσο το απόθεμα έτοιμων προϊόντων είναι μικρότερο από ένα κατώφλι που ονομάζεται *βασικό απόθεμα* και διακόπτει την παραγωγή όταν το απόθεμα είναι ίσο με αυτό το κατώφλι. Όταν υπάρχει απόθεμα έτοιμων προϊόντων, κάθε αφικνούμενος πελάτης ικανοποιείται αμέσως. Για τον έλεγχο των πωλήσεων αντίστοιχα, ορίζεται μια μέγιστη τιμή ανικανοποίητων παραγγελιών η οποία ονομάζεται *βασικό έλλειμμα*. Το σύστημα αποδέχεται παραγγελίες πελατών όσο το πλήθος των παραγγελιών που ήδη εκκρεμούν είναι μικρότερο του ελλείμματος βάσης, αλλιώς τις απορρίπτει.

Τα έτοιμα προϊόντα δεν αποθηκεύονται επ' αόριστο χρόνο. Κάθε προϊόν έχει τυχαία διάρκεια ζωής μέχρι να αλλοιωθεί. Όταν παρέλθει αυτή η διάρκεια και το προϊόν είναι ακόμα στη αποθήκη απορρίπτεται από το σύστημα ως μη χρηστικό. Ο χρόνος μεταξύ παραγωγής του προϊόντος και αλλοίωσης του θα ονομάζεται ως *χρόνος ζωής* του προϊόντος. Ο *χρόνος ζωής* των προϊόντων ακολουθεί γνωστή κατανομή με γνωστές τιμές παραμέτρων (μέση τιμή διασπορά κλπ.). Εδώ θα εξετάσουμε συστήματα με χρόνους ζωής που είναι ανάλογα με την περίπτωση εκθετικά κατανεμημένοι, αιτιοκρατικοί ή ομοιόμορφα κατανεμημένοι.

Ο τρόπος λειτουργίας της ουράς του συστήματος μας είναι "FIFO" (first-in,first-out). Έτσι λοιπόν οι παραγγελίες που πραγματοποιούνται πρώτες εξυπηρετούνται και

πρώτες και τα προϊόντα που αποθηκεύονται πρώτα πωλούνται και πρώτα. Στην περίπτωση του αποθέματος που αλλοιώνεται σε αιτιοκρατικούς χρόνους η πολιτική "FIFO" τυγχάνει να είναι και η βέλτιστη καθώς συνάδει με την λογική ότι το προϊόν που πρέπει να πουληθεί πρώτο είναι αυτό με τον μικρότερο 'αναμενόμενο' χρόνο ζωής.

Η λειτουργία του συστήματος συνδέεται με τα παρακάτω οικονομικά μεγέθη:

- p : το κέρδος από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος.
- h : το μοναδιαίο κόστος αποθέματος τελικού προϊόντος, που είναι το κόστος διατήρησης αποθέματος μιας μονάδας τελικού προϊόντος για μια χρονική μονάδα.
- b : το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών, που είναι το κόστος καθυστέρησης ικανοποίησης μιας εκκρεμούσας παραγγελίας στη μονάδα του χρόνου.
- c_p : το κόστος από την αλλοίωση μίας μονάδας προϊόντος.

Έστω s το επίπεδο βασικού αποθέματος και c το βασικό έλλειμμα. Υποθέστε ότι αρχικά στο σύστημα παραγωγής υπάρχουν s έτοιμα προϊόντα, κανένα προϊόν υπό κατεργασία και καμία εκκρεμής παραγγελία. Όσο υπάρχουν έτοιμα προϊόντα, κάθε εισερχόμενη παραγγελία θα οδηγεί και σε πώληση. Με την πώληση ενός προϊόντος, μια πρώτη ύλη εισάγεται στην μονάδα παραγωγής για να ξεκινήσει η παραγωγή και να αντικατασταθεί το προϊόν που πουλήθηκε. Σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, οι εισερχόμενες παραγγελίες γίνονται δεκτές μόνο αν ο αριθμός εκκρεμών παραγγελιών είναι μικρότερος από c .

Παρακάτω υπολογίζεται ο μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος. Αυτή η ποσότητα ισούται με το μέσο ρυθμό κέρδους από τις πωλήσεις μείον το

αναμενόμενο κόστος αποθεμάτων, το κόστος μη ικανοποίησης της ζήτησης και το κόστος των αλλοιωμένων προϊόντων, ήτοι:

$$J(s,c) = p TH(s,c) - hH(s,c) - bB(s,c) - c_p P_r(s,c) \quad (2.1)$$

Όπου:

- $TH(s,c)$ ορίζεται ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος
- $H(s,c)$ το μέσο απόθεμα έτοιμων προϊόντων,
- $B(s,c)$ το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών
- $P_r(s,c)$ ο ορίζεται ο μέσος ρυθμός απώλειας προϊόντων λόγω αλλοίωσης.

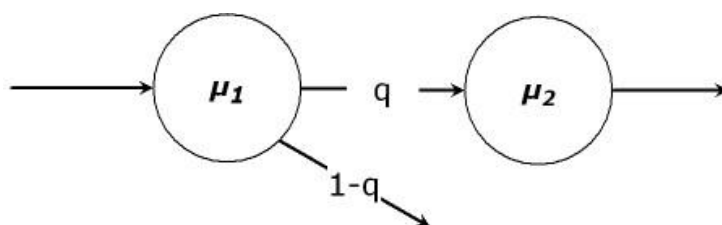
Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Monaghan [1] για να μοντελοποιήσουμε το σύστημά μας ως ένα Μαρκοβιανό σύστημα. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να εκτιμήσουμε την κατανομή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης του συστήματος. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις εκτιμηθείσες πιθανότητες μόνιμης κατάστασης θα αναζητήσουμε αναλυτικές εκφράσεις αυτών των προαναφερθέντων μέτρων απόδοσης.

3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Εδώ θα παρουσιάσουμε τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση του συστήματος που εξετάζουμε. Με αυτό τον τρόπο μπορέσαμε να υπολογίσουμε τα διάφορα μέτρα απόδοσης του συστήματος, που είναι απαραίτητα για την σωστή αξιολόγηση της λειτουργίας του.

3.1 Εκτίμηση πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

Όπως έχουμε δει οι χρόνοι παραγωγής είναι τυχαίοι και ακολουθούν την κατανομή Coxian-2. Η κατανομή Coxian-2 είναι μια κατανομή τύπου φάσεων, δηλαδή προκύπτει από συνδυασμό τυχαίων μεταβλητών εκθετικά κατανεμημένων. Πιο συγκεκριμένα, μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Coxian-2 με πιθανότητα $1 - q$ είναι ίση με μια τυχαία μεταβλητή εκθετικά κατανεμημένη με ρυθμό μ_1 , ενώ με πιθανότητα q είναι ίση με το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών εκθετικά κατανεμημένων με ρυθμούς μ_1 και μ_2 (βλέπε π.χ. I.J.B.F. Adan, and J. van der Wal [3]).

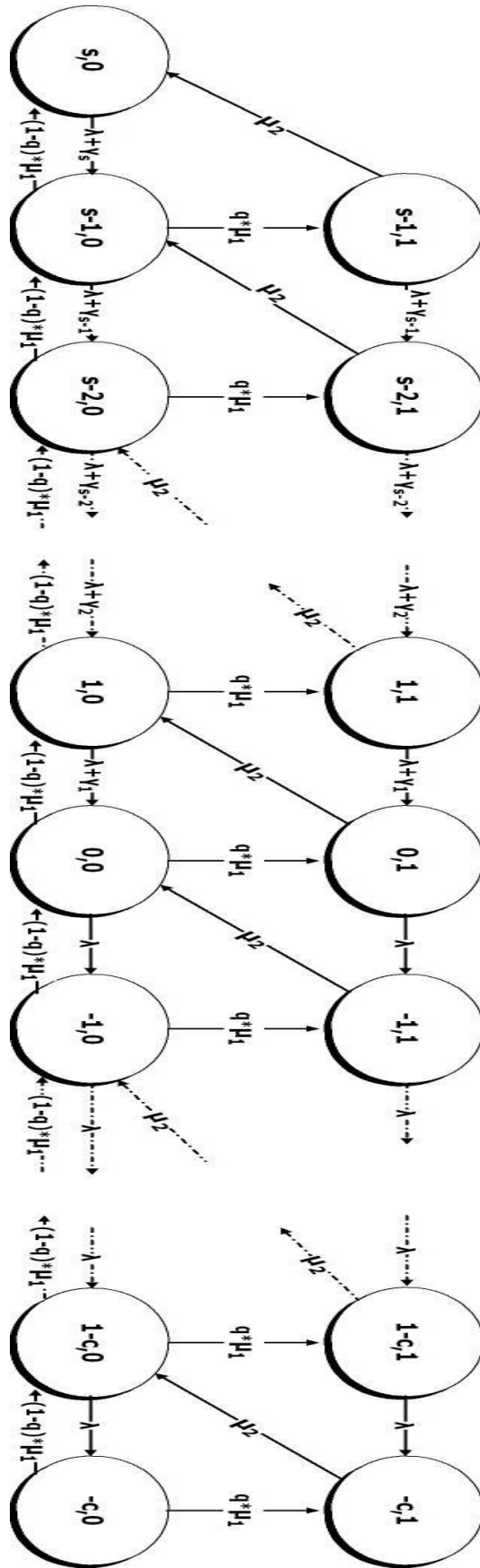


Σχήμα 3.1: Διάγραμμα φάσης για την Coxian-2 κατανομή.

Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από το ζεύγος (n, i) . Όπου n ένας ακέραιος αριθμός τέτοιος ώστε: $-c \leq n \leq s$. Αν $n \geq 0$ τότε στο σύστημα υπάρχουν n έτοιμα προϊόντα, Όταν $n < 0$, δεν υπάρχουν έτοιμα προϊόντα, εκκρεμούν $-n$ παραγγελίες. Ειδικότερα, όταν $n = s$, η αποθήκη έτοιμων προϊόντων είναι πλήρης και η παραγωγική μονάδα αδρανής. Όταν $n = -c$, δεν υπάρχουν έτοιμα προϊόντα στο σύστημα και εκκρεμούν c παραγγελίες. Η μεταβλητή i αναφέρεται στην φάση που βρίσκεται το υπό κατεργασία προϊόν. Όταν η κατεργασία βρίσκεται στην πρώτη

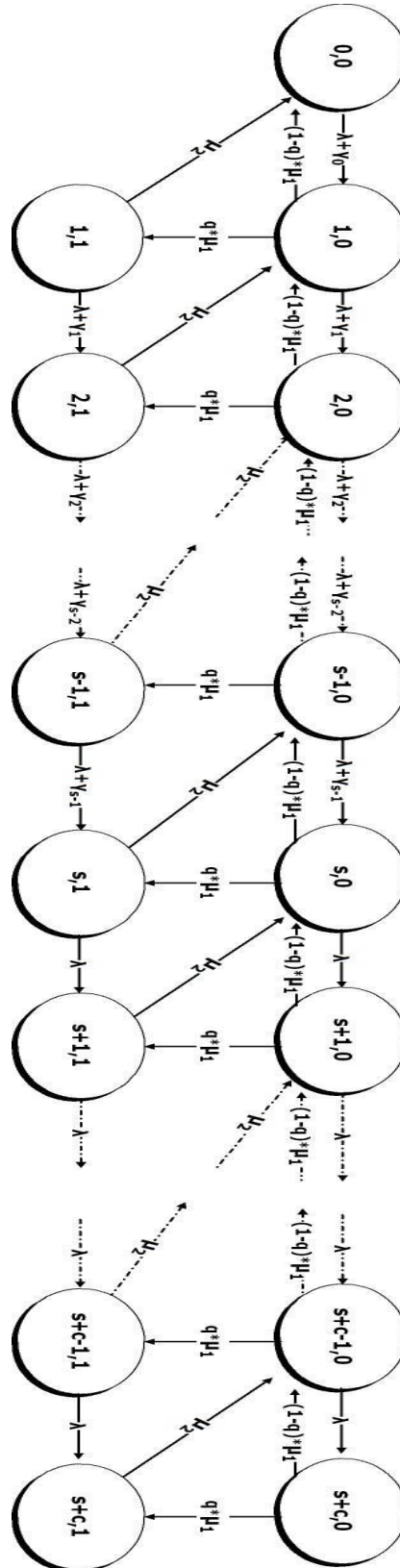
φάση, τότε το i είναι 0 αλλιώς, όταν βρισκόμαστε στην δεύτερη φάση κατεργασίας, είναι ίσο με τη μονάδα.

Εδώ έχουμε υποθέσει, ότι οι απώλειες προϊόντων λόγω αλλοίωσης εξαρτώνται μόνο από το πλήθος προϊόντων στο απόθεμα και ότι οι ρυθμοί απώλειας προϊόντων γ_n , όταν το απόθεμα είναι n , ταυτίζονται με αυτούς ενός συστήματος με εκθετικούς χρόνους παραγωγής. Κατά συνέπεια η εξέλιξη του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από μια αλυσίδα Markov. Οι καταστάσεις της αλυσίδας και οι μεταβάσεις της παρουσιάζονται στο σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2

Για λόγους ευκολίας στην μοντελοποίηση και μετέπειτα στον υπολογισμό των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης πραγματοποιούμε έναν μετασχηματισμό της μορφής, $m = s - n$.



Σχήμα 3.3

Έστω $P(\mathbf{k})$ η πιθανότητα το αναμονητικό σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $\mathbf{k}$, όπου: $\mathbf{k} = (m, i)$, $m = 0, 1, \dots, s + c - 1, s + c$, $i = 0, 1$. Στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας του συστήματος αυτές οι πιθανότητες ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov:

$$P(\mathbf{k}) \times (\text{ρυθμός εξόδου από την κατάσταση } \mathbf{k}) = \sum_{\substack{\text{Όλες οι καταστάσεις} \\ i \neq \mathbf{k}}} P(\mathbf{i}) \times (\text{μετάβαση από } \mathbf{i} \text{ σε } \mathbf{k})$$

Πιο αναλυτικά έχουμε:

$$(\lambda + \gamma_0)P(0, 0) = (1 - q)\mu_1 P(1, 0) + \mu_2 P(1, 1),$$

$$(\mu_2 + \lambda + \gamma_1)P(1, 1) = q\mu_1 P(1, 0),$$

$$(\mu_1 + \lambda + \gamma_m)P(m, 0) = (\lambda + \gamma_{m-1})P(m - 1, 0) + (1 - q)\mu_1 P(m + 1, 0) + \mu_2 P(m + 1, 1),$$

$$0 < m < s,$$

$$(\mu_2 + \lambda + \gamma_m)P(m, 1) = (\lambda + \gamma_{m-1})P(m - 1, 1) + q\mu_1 P(m, 0), \quad 1 < m < s,$$

$$(\mu_1 + \lambda)P(s, 0) = (\lambda + \gamma_{s-1})P(s - 1, 0) + (1 - q)\mu_1 P(s + 1, 0) + \mu_2 P(s + 1, 1),$$

$$(\mu_2 + \lambda)P(s, 1) = (\lambda + \gamma_{s-1})P(s - 1, 1) + q\mu_1 P(s, 0),$$

$$(\mu_1 + \lambda)P(m, 0) = \lambda P(m - 1, 0) + (1 - q)\mu_1 P(m + 1, 0) + \mu_2 P(m + 1, 1), \quad s < m < s + c,$$

$$(\mu_2 + \lambda)P(m, 1) = \lambda P(m - 1, 1) + q\mu_1 P(m, 0), \quad s < m < s + c,$$

$$\mu_1 P(s + c, 0) = \lambda P(s + c - 1, 0),$$

$$\mu_2 P(s + c, 1) = \lambda P(s + c - 1, 1) + q\mu_1 P(s + c, 0).$$

Έστω το διάνυσμα στήλη $P_m = [P(m, 0), P(m, 1)]^T$, που είναι το διάνυσμα πιθανοτήτων των καταστάσεων, οι οποίες αντιστοιχούν σε απόθεμα $n = s - m$, όταν το $n > 0$ ή σε έλλειμμα $-n$ αλλιώς. Οι εξισώσεις Chapman–Kolmogorov μπορούν με αυτό τον τρόπο να εκφρασθούν συνοπτικά ως εξής:

$$A_0 P_0 = C_1 P_1, \quad (4.1)$$

$$A_m P_m = B_{m-1} P_{m-1} + C_{m+1} P_{m+1}, \quad 0 < m < s + c, \quad (4.2)$$

$$A_{s+c} P_{s+c} = B_{s+c-1} P_{s+c-1}, \quad (4.3)$$

όπου A_m , B_m , C_m είναι πίνακες 2×2 που περιέχουν τους ρυθμούς μετάβασης από και προς τις καταστάσεις που αντιστοιχούν στην μεταβλητή m . Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μπορεί να επιλυθεί με τον ακόλουθο τρόπο

- α. Επιλύουμε την Εξ. (4.1) ως προς $P_0 = G_1 P_1$, όπου $G_1 = A_0^{-1} C_1$.
- β. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την έκφραση που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα για να επιλύσουμε την Εξ. (4.2) ως προς $P_m = G_{m+1} P_{m+1}$, όπου $G_{m+1} = [A_m - B_{m-1} G_m]^{-1} C_{m+1}$ και $m = 1, 2, \dots, s + c - 1$.
- γ. Αντικαθιστούμε την έκφραση του $P_{s+c-1} = G_{s+c} P_{s+c}$ στην Εξ. (4.3) και έχουμε ότι $[A_{s+c} - B_{s+c-1} G_{s+c}] P_{s+c} = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα. Υπολογίζουμε το διάνυσμα P_s επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, όπου μια από τις εξίσωσης αντικαθίσταται από την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{m=0}^{s+c} \mathbf{1} P_m = 1$$

όπου $\mathbf{1}$ είναι ένα διάνυσμα γραμμή 1×2 , που όλα του τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα. Στην εξίσωση κανονικοποίησης χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις του

προηγούμενου βήματος έτσι ώστε όλα τα διανύσματα πιθανοτήτων να είναι εκφρασμένα συναρτήσει του P_s .

δ. Τέλος υπολογίζουμε επαναληπτικά τα υπόλοιπα διανύσματα πιθανοτήτων χρησιμοποιώντας τη σχέση $P_{m-1} = G_m P_m$, για $m = 1, 2, \dots, s-1$.

Σύμφωνα με τις εξισώσεις C-K οι πίνακες A_m , B_m , C_m & G_m για τις αντίστοιχες τιμές του m διαμορφώνονται ως εξής:

$$A_m = \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda + \gamma_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & m = 0, \\ \begin{bmatrix} \mu_1 + \lambda + \gamma_m & 0 \\ -q\mu_1 & \mu_2 + \lambda + \gamma_m \end{bmatrix}, & 0 < m < s, \\ \begin{bmatrix} \mu_1 + \lambda & 0 \\ -q\mu_1 & \mu_2 + \lambda \end{bmatrix}, & s \leq m < s + c, \\ \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ -q\mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}, & m = s + c, \end{cases}$$

$$B_m = \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda + \gamma_{s-1} & 0 \\ 0 & \lambda + \gamma_{s-1} \end{bmatrix}, & 0 < m \leq s, \\ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, & s < m \leq s + c, \end{cases}$$

$$C_m = \begin{bmatrix} (1-q)\mu_1 & \mu_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 0 \leq m < s + c,$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{(1-q)\mu_1}{\lambda + \gamma_0} & \frac{\mu_2}{\lambda + \gamma_0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2 Υπολογισμός του ρυθμού απώλειας προϊόντων γ_m .

Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης και στη συνέχεια τα διάφορα μέτρα απόδοσης του συστήματος χρειαζόμαστε τους ρυθμούς απώλειας προϊόντων. Όπως προαναφέραμε έχουμε υποθέσει ότι ισχύουν οι αναλυτικοί τύποι που παρουσιάζει ο Monaghan [1] για συστήματα με εκθετικούς χρόνους παραγωγής. Έτσι έχουμε:

$$\gamma_0 = 0,$$

$$\gamma_n = n \frac{\Phi_{n-1}(\lambda)}{\Phi_n(\lambda)} - \lambda, 0 < n \leq s,$$

όπου $\Phi_n(\lambda)$ ο μετασχηματισμός Laplace του $\left[\int_0^t (1 - G(\tau)) d\tau \right]^n$ και $G(t)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του χρόνου ζωής των προϊόντων, δηλαδή έχουμε:

$$\Phi_n(\lambda) = \int_0^\infty \left[\int_0^t (1 - G(\tau)) d\tau \right]^n e^{-\lambda t} dt.$$

Για τις διάφορες κατανομές που χρησιμοποιούνται σε αυτή την εργασία οι παραπάνω τύποι προσαρμόζονται ως εξής:

- **Εκθετική κατανομή $Exp(1/\theta)$:**

$$\gamma_n = \frac{n}{\theta},$$

όπου θ , ο μέσος χρόνος ζωής των έτοιμων προϊόντων. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση που έχουμε εκθετικούς χρόνους ζωής των προϊόντων το μοντέλο μας είναι ακριβές καθώς το σύστημα μας είναι Μαρκοβιανό.

- **Ντετερμινιστική κατανομή $D(\theta)$:**

$$\gamma_n = \lambda \frac{F_{E(n-1)}(\lambda, \theta) - F_{E(n)}(\lambda, \theta)}{F_{E(n)}(\lambda, \theta)}, n > 0,$$

Όπου $F_{E(n)}(\lambda, \theta)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Erlang- n κατανομής με παράμετρο λ .

- **Ομοιόμορφη κατανομή $U(0, 2\theta)$:**

Εδώ έχουμε ότι

$$G_U(\theta, \tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{2\theta}, & \text{αν } \tau < 2\theta \\ 1, & \text{αν } \tau \geq 2\theta \end{cases},$$

και οι τύποι που προκύπτουν είναι ιδιαίτερος πολύπλοκοι γι' αυτό παραλείπονται.

Γενικά δεν είναι πάντα εφικτό να βρεθούν αναλυτικές εκφράσεις των $\Phi_n(\lambda)$. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούνται αριθμητικές τεχνικές υπολογισμού των μεγεθών αυτών.

3.3 Αναλυτικές εκφράσεις των μέτρων απόδοσης του συστήματος

Σε αυτό το σημείο θα αναζητήσουμε αναλυτικές εκφράσεις για τα μέτρα απόδοσης του συστήματος όπως ο μέσος ρυθμός πωλήσεων $TH(s,c)$, η μέση στάθμη αποθέματος $H(s,c)$, το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών $B(s,c)$ και το μέσο ρυθμό απώλειας προϊόντων $P_r(s,c)$ ώστε να υπολογίσουμε το μέσο ρυθμό κέρδους όπως δίνεται στην Εξ. (2.1). Ο μέσος ρυθμός πωλήσεων είναι ίσος με το μέσο ρυθμό αφίξεων παραγγελιών επί την πιθανότητα αποδοχής μιας παραγγελίας:

$$TH(s,c) = \lambda[1 - 1P_{s+c}].$$

Το μέσο απόθεμα του συστήματος $H(s,c)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$H(s,c) = \sum_{m=1}^s 1P_m(s-m).$$

Το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών $B(s,c)$ είναι:

$$B(s,c) = \sum_{m=s}^{s+c} 1P_m(m-s).$$

Ο μέσος ρυθμός των προϊόντων που “χάνονται” $P_r(s,c)$, δηλαδή παρήλθε ο χρόνος ζωής τους και αλλοιώθηκαν είναι:

$$P_r(s,c) = \sum_{m=0}^s 1P_m\gamma_{s-m}.$$

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα, που προέκυψαν από την εκτέλεση ενός συνόλου αριθμητικών πειραμάτων, για την αξιολόγηση της απόδοσης του μοντέλου, που παρουσιάσθηκε στο Κεφ. 3. Για να γίνει αυτό αναπτύξαμε μια σειρά από προσομοιωτές διακριτών γεγονότων του συστήματος που μελετάμε. Έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου που αναπτύξαμε με αυτά των προσομοιωτών προκειμένου να διαπιστώσουμε αν τα μοντέλα μας προσεγγίζουν ικανοποιητικά την πραγματικότητα.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω προκύπτουν από αναλυτική επίλυση του παραπάνω συστήματος σε περιβάλλον MATLAB (ενδεικτικός κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα Α). Ο προσομοιωτής διακριτών γεγονότων αναπτύχθηκε επίσης σε περιβάλλον MATLAB (ενδεικτικός κώδικας παρατίθεται στο Παράρτημα Β). Για κάθε περίπτωση πραγματοποιήθηκαν $n=20$ προσομοιώσεις και η διάρκεια κάθε προσομοίωσης ήταν 1.000.000 χρονικές μονάδες. Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε τα αντίστοιχα σετ δεδομένων για τα οποία έγιναν τα πειράματα:

Πίνακας 4.1

<i>SIMULATION DATA</i>						
<i>SET-1</i>		$\mu_1=$	6	$s=$	12	$c=$ 5
$\lambda=$	3	$\mu_2=$	7	$h=$	2	$b=$ 1
$\theta=$	6	$q=$	0.4	$C_p=$	5	$r=$ 10
<i>SET-2</i>		$\mu_1=$	15	$s=$	75	$c=$ 5
$\lambda=$	10	$\mu_2=$	25	$h=$	2	$b=$ 1
$\theta=$	8	$q=$	0.8	$C_p=$	5	$r=$ 10
<i>SET-3 {$\theta=4$}</i>		$\mu_1=$	5	$s=$	10	$c=$ 2
$\lambda=$	1	$\mu_2=$	4	$h=$	2	$b=$ 1
$\theta=$	4	$q=$	0.8	$C_p=$	5	$r=$ 10
<i>SET-3 {$\theta=4$}</i>		$\mu_1=$	5	$s=$	10	$c=$ 2
$\lambda=$	2	$\mu_2=$	4	$h=$	2	$b=$ 1
$\theta=$	4	$q=$	0.8	$C_p=$	5	$r=$ 10
<i>SET-3 {$\theta=4$}</i>		$\mu_1=$	5	$s=$	10	$c=$ 2
$\lambda=$	4	$\mu_2=$	4	$h=$	2	$b=$ 1
$\theta=$	4	$q=$	0.8	$C_p=$	5	$r=$ 10
<i>SET-3 {$\lambda=1.5$}</i>		$\mu_1=$	5	$s=$	10	$c=$ 2
$\lambda=$	1.5	$\mu_2=$	4	$h=$	2	$b=$ 1
$\theta=$	2	$q=$	0.8	$C_p=$	5	$r=$ 10
<i>SET-3 {$\lambda=1.5$}</i>		$\mu_1=$	5	$s=$	10	$c=$ 2
$\lambda=$	1.5	$\mu_2=$	4	$h=$	2	$b=$ 1
$\theta=$	4	$q=$	0.8	$C_p=$	5	$r=$ 10
<i>SET-3 {$\lambda=1.5$}</i>		$\mu_1=$	5	$s=$	10	$c=$ 2
$\lambda=$	1.5	$\mu_2=$	4	$h=$	2	$b=$ 1
$\theta=$	8	$q=$	0.8	$C_p=$	5	$r=$ 10

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε για το κάθε μέτρο απόδοσης συνοπτικά αποτελέσματα για επιλεγμένα σεντ δεδομένων, όπου πραγματοποιούμε έλεγχο υποθέσεων, για να ελέγξουμε κατά πόσο η τιμή που προκύπτει από το προτεινόμενο μοντέλο ταυτίζεται με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

Για να ελέγξουμε την ακρίβεια του μοντέλου χρησιμοποιούμε τα κατάλληλα εργαλεία από την θεωρία στατιστικής προσομοίωσης (βλέπε Κουϊκόγλου [4]).

Για την εκτίμηση ενός μέτρου απόδοσης μ με τη χρήση εργαλείων της προσομοίωσης πραγματοποιούμε ένα αριθμό n προσομοιώσεων και συνήθως ως καλύτερη εκτίμηση χρησιμοποιούμε τον αριθμητικό μέσο $X(n)$. Φυσικά σε αυτή την εκτίμηση υπάρχει ένα σφάλμα ε . Ένας τρόπος για να εκφράσουμε την εκτίμηση του μ συναρτήσει του σφάλματος ε είναι με την χρήση διαστήματος εμπιστοσύνης. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι "Το μ ευρίσκεται στο διάστημα $[X(n)-\varepsilon, X(n)+\varepsilon]$ με πιθανότητα $1-\alpha$ ". Ο αριθμός α δηλώνει την πιθανότητα να απορρίψουμε την ανωτέρω εκτίμηση ενώ είναι αληθής (πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι) και καθορίζεται ανάλογα με την κρίσιμότητα του προβλήματος. Το ε δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}$$

όπου $S^2(n)$ είναι η δειγματική διασπορά των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων και $z_{\alpha/2}$ είναι ο αριθμός για τον οποίο ισχύει, ότι αν Z είναι τυχαία μεταβλητή, που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, τότε $P(Z \geq z_{\alpha/2}) = \alpha/2$. Ο έλεγχος που κάνουμε επαληθεύεται αν η εκτίμηση του μέτρου απόδοσης που μας ενδιαφέρει από το προτεινόμενο μοντέλο είναι εντός του διαστήματος εμπιστοσύνης που προκύπτει από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων. Εδώ πραγματοποιούμε έλεγχο για τρία διαφορετικά διαστήματα εμπιστοσύνης με $\alpha=1\%$, 2% και 5% αντίστοιχα. Το πρώτο μέτρο απόδοσης που θα αναλύσουμε είναι ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος:

Πίνακας 4.2

πιθανότητα σφάλματος τύπου I

thrpt	$\alpha=$	1%	2%	5%
set1	EXP	FALSE	FALSE	FALSE
{ $\theta=6$ } & $\lambda=3$	DET	TRUE	TRUE	TRUE
s=12 c=5	UNI	TRUE	TRUE	TRUE
set2	EXP	FALSE	FALSE	FALSE
{ $\theta=8$ } & $\lambda=10$	DET	TRUE	TRUE	TRUE
s=75 c=5	UNI	TRUE	TRUE	TRUE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\theta=4$ } & $\lambda=1$	DET	TRUE	TRUE	TRUE
s=10 c=2	UNI	TRUE	TRUE	TRUE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\theta=4$ } & $\lambda=2$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=10 c=2	UNI	TRUE	TRUE	TRUE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\lambda=1.5$ } & $\theta=4$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=10 c=2	UNI	TRUE	TRUE	TRUE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\lambda=1.5$ } & $\theta=8$	DET	TRUE	TRUE	TRUE
s=10 c=2	UNI	TRUE	TRUE	TRUE

Παρατηρούμε ότι σε γενικές γραμμές για το συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης τα αποτελέσματα για τα τρία διαφορετικά σενάρια είναι αρκετά ικανοποιητικά. Αυτό που θα πρέπει να παρατηρήσουμε είναι ότι για την εκθετική κατανομή παρατηρούμε αστοχία στα πρώτα σετ δεδομένων. Αυτό είναι κάτι που δεν περιμέναμε καθώς για εκθετικούς χρόνους ζωής το μοντέλο μας είναι ακριβές άρα τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου θα έπρεπε να επαληθεύονται τουλάχιστον για αυτή την κατανομή. Ο λόγος που δε συμβαίνει αυτό είναι ότι η εκθετική κατανομή έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα, οπότε κατά πάσα πιθανότητα απαιτείται μεγαλύτερο πλήθος προσομοιώσεων. Βέβαια στα άλλα σετ επαληθεύεται πλήρως κάτι το οποίο μας οδηγεί στο παραπάνω συμπέρασμα.

Τα αποτελέσματα για την ομοιόμορφη κατανομή είναι πολύ καλά, ενώ ενδιαφέροντα αποτελέσματα έχουμε και για αιτιοκρατικούς χρόνους ζωής. Για

αιτιοκρατικούς χρόνους ζωής βλέπουμε ότι ο έλεγχος δεν επαληθεύεται για μικρούς μέσους χρόνους ζωής ($\vartheta = 4$). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μεγαλύτερη πιθανότητα αλλοίωσης των προϊόντων και η επίδραση του φαινομένου στην απόδοση του συστήματος αυξάνει. Αυτό αποτελεί μια πρώτη ένδειξη ότι η υπόθεση μας σχετικά με τη μορφή των ρυθμών αλλοίωσης των προϊόντων δεν ισχύει.

Το δεύτερο μέτρο απόδοσης που θα αναλύσουμε είναι το μέσο απόθεμα του συστήματος :

Πίνακας 4.3

πιθανότητα σφάλματος τύπου I

h	$\alpha =$	1%	2%	5%
set1	EXP	FALSE	FALSE	FALSE
{ $\theta=6$ } & $\lambda=3$	DET	TRUE	TRUE	TRUE
s=12 c=5	UNI	FALSE	FALSE	FALSE
set2	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\theta=8$ } & $\lambda=10$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=75 c=5	UNI	TRUE	TRUE	TRUE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\theta=4$ } & $\lambda=1$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=10 c=2	UNI	FALSE	FALSE	FALSE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\theta=4$ } & $\lambda=2$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=10 c=2	UNI	TRUE	TRUE	TRUE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\lambda=1.5$ } & $\theta=4$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=10 c=2	UNI	FALSE	FALSE	FALSE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\lambda=1.5$ } & $\theta=8$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=10 c=2	UNI	FALSE	FALSE	FALSE

Για αυτό το μέτρο απόδοσης το οποίο συνδέεται προφανώς με τον ρυθμό απώλειας των προϊόντων, τα αποτελέσματα είναι σαφώς λιγότερο ενθαρρυντικά καθώς τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων συμπίπτουν με το θεωρητικό μοντέλο για μικρό

αριθμό περιπτώσεων. Και εδώ παρατηρούμε ότι για μικρές διάρκειες ζωής δεν επαληθεύεται η υπόθεση μας.

Επόμενο μέτρο απόδοσης και ίσως λιγότερο σημαντικό για τον σκοπό της παρούσας εργασίας αλλά αρκετά σημαντικό για την εξαγωγή συμπερασμάτων για την αποτελεσματικότητα της μοντελοποίησης του συστήματος μας είναι το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών:

Πίνακας 4.4

πιθανότητα σφάλματος τύπου I

bcklg	$\alpha=$	1%	2%	5%
set1	EXP	FALSE	FALSE	FALSE
$\{\theta=6\} \& \lambda=3$	DET	TRUE	TRUE	TRUE
$s=12 \ c=5$	UNI	TRUE	TRUE	FALSE
set2	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
$\{\theta=8\} \& \lambda=10$	DET	TRUE	TRUE	TRUE
$s=75 \ c=5$	UNI	TRUE	TRUE	TRUE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
$\{\theta=4\} \& \lambda=1$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
$s=10 \ c=2$	UNI	FALSE	FALSE	FALSE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
$\{\theta=4\} \& \lambda=2$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
$s=10 \ c=2$	UNI	FALSE	FALSE	FALSE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
$\{\lambda=1.5\} \& \theta=4$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
$s=10 \ c=2$	UNI	FALSE	FALSE	FALSE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
$\{\lambda=1.5\} \& \theta=8$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
$s=10 \ c=2$	UNI	FALSE	FALSE	FALSE

Η εκθετική κατανομή προφανώς παρουσιάζει τα καλύτερα αποτελέσματα, εκτός από το πρώτο σετ δεδομένων όπως προαναφέρθηκε και παραπάνω. Οι άλλες δύο κατανομές επιτυγχάνουν μόνο στα πρώτα δυο σετ, εκτός της ομοιόμορφης κατανομής για το αυστηρότερο όριο ελέγχου στο πρώτο σετ δεδομένων.

Τελευταίο θα αναλύσουμε το σημαντικότερο μέτρο απόδοσης του συστήματος μας τον μέσο ρυθμό απώλειας έτοιμων προϊόντων:

Πίνακας 4.5

πιθανότητα σφάλματος τύπου I

pr	$\alpha=$	1%	2%	5%
set1	EXP	FALSE	FALSE	FALSE
{ $\theta=6$ } & $\lambda=3$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=12 c=5	UNI	FALSE	FALSE	FALSE
set2	EXP	FALSE	FALSE	FALSE
{ $\theta=8$ } & $\lambda=10$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=75 c=5	UNI	TRUE	TRUE	TRUE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\theta=4$ } & $\lambda=1$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=10 c=2	UNI	FALSE	FALSE	FALSE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\theta=4$ } & $\lambda=2$	DET	TRUE	TRUE	TRUE
s=10 c=2	UNI	FALSE	FALSE	FALSE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\lambda=1.5$ } & $\theta=4$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=10 c=2	UNI	FALSE	FALSE	FALSE
set3	EXP	TRUE	TRUE	TRUE
{ $\lambda=1.5$ } & $\theta=8$	DET	FALSE	FALSE	FALSE
s=10 c=2	UNI	FALSE	FALSE	FALSE

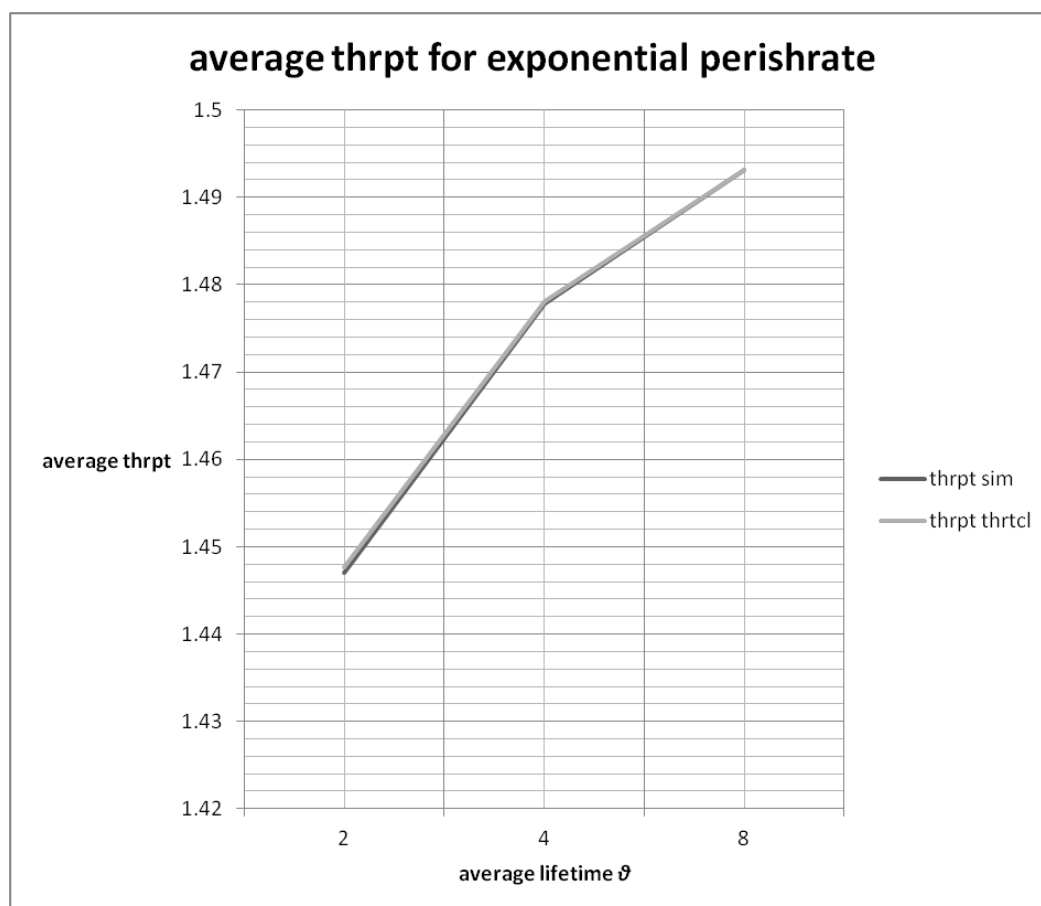
Παρατηρούμε στα παραπάνω συνοπτικά αποτελέσματα ότι η μόνη κατανομή που επαληθεύεται για τα περισσότερα σετ δεδομένων είναι η εκθετική κάτι το οποίο επιβεβαιώνει την θεωρία ότι στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής ταυτίζεται πλήρως το θεωρητικό με το πειραματικό αποτέλεσμα, εκτός από τα πρώτα δυο σετ για λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω. Η ντετερμινιστική και η ομοιόμορφη κατανομή επιτυγχάνουν για ένα ξεχωριστό σετ η καθεμία, κάτι το οποίο δεν είναι ενθαρρυντικό.

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε την συμπεριφορά του προσομοιωτή μας για συγκεκριμένο σετ δεδομένων καθώς αλλάζουν μόνο τα (λ, θ), όπου λ ο ρυθμός

αφίξεων παραγγελιών και ϑ μέσος χρόνος ζωής προϊόντων αντίστοιχα. Ο ρυθμός παραγωγής του συστήματος μας και η χωρητικότητα παραμένουν σταθερά. Επιπλέον θα συγκρίνουμε την συμπεριφορά του θεωρητικού μοντέλου με αυτή του προσομοιωτή μας για τα διάφορα σενάρια.

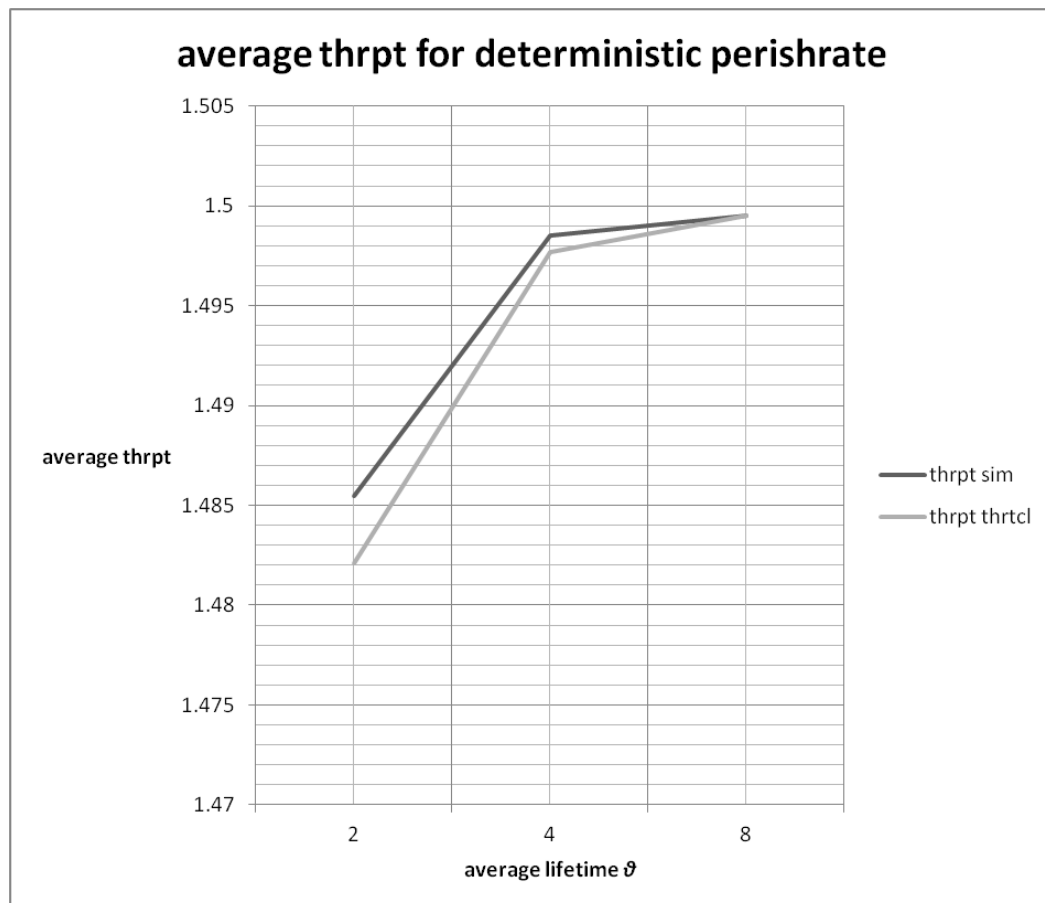
Αρχικά θα μελετήσουμε το SET-3 ($s=10$, $c=2$, $\mu_1=5$, $\mu_2=4$, $q=0.8$, $\lambda=1.5$ και $\vartheta=2, 4, 8$) όπου κρατάμε σταθερό τον ρυθμό αφίξεων και αλλάζουμε τον μέσο χρόνο ζωής των έτοιμων προϊόντων.

Το πρώτο μέτρο απόδοσης είναι ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος για την εκθετική κατανομή:



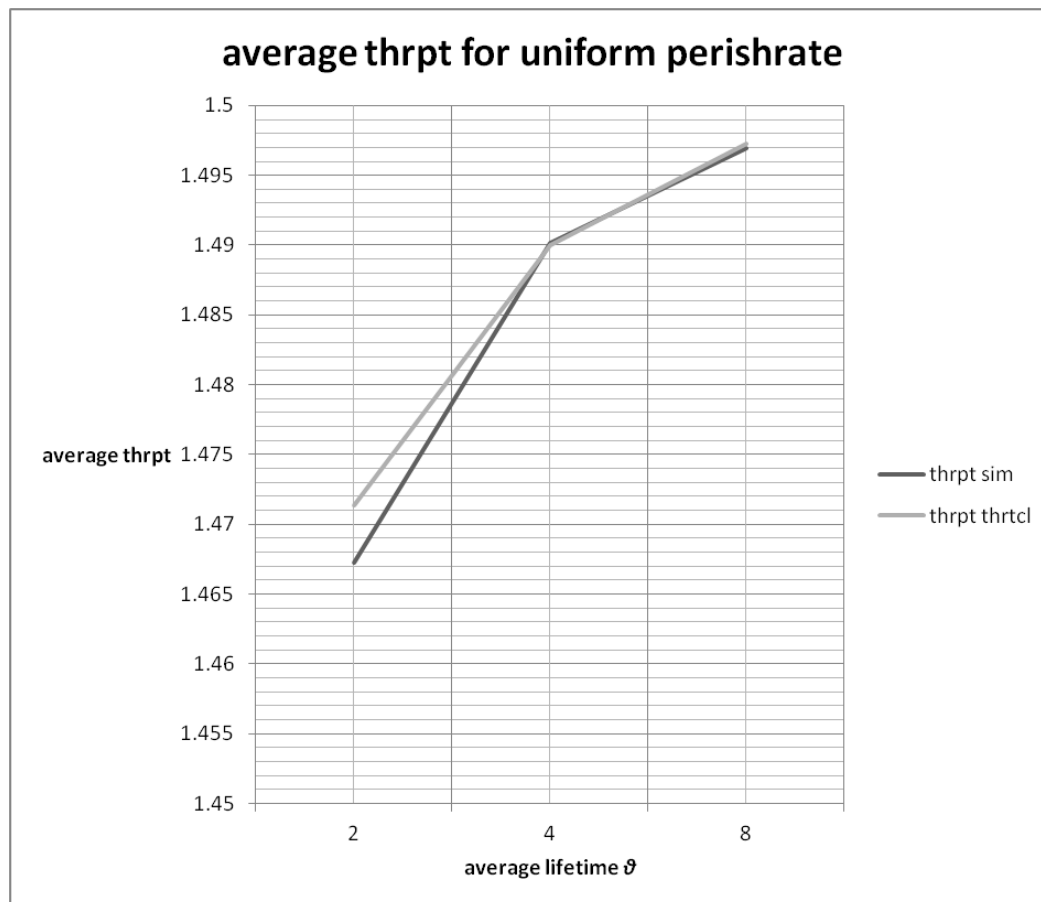
Σχήμα 4.1 Μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος συναρτήσει του (ϑ) μέσου χρόνου ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την εκθετική κατανομή .

Εδώ παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά του προσομοιωτή και του θεωρητικού μοντέλου σχεδόν ταυτίζονται. Βλέπουμε ότι όσο ο μέσος χρόνος ζωής μεγαλώνει αυξάνεται και ρυθμός με τον οποίο εξυπηρετούμε αφού έχουμε μικρότερες απώλειες προϊόντων. Όμοια αποτελέσματα έχουμε για τις άλλες δυο κατανομές, για την ντετερμινιστική έχουμε:



Σχήμα 4.2 Μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος συναρτήσει του (θ) μέσου χρόνου ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την ντετερμινιστική κατανομή.

Εδώ παρατηρούμε μια μικρή απόκλιση για μικρούς μέσους χρόνους ζωής των προϊόντων. Παρόμοια απόκλιση παρατηρούμε στην ομοιόμορφη κατανομή.

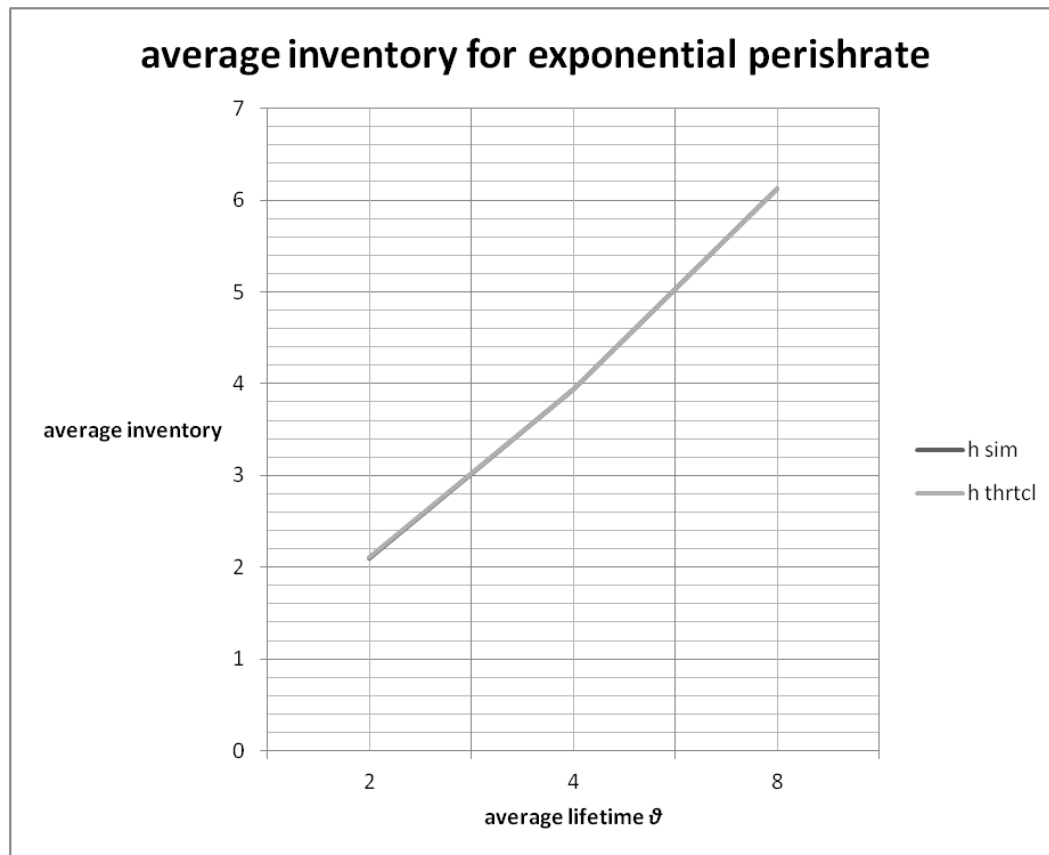


Σχήμα 4.3 Μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος συναρτήσει του (θ) μέσου χρόνου ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτές οι αποκλίσεις είναι ιδιαίτερα μικρές αφού είναι μικρότερες από 0.5%.

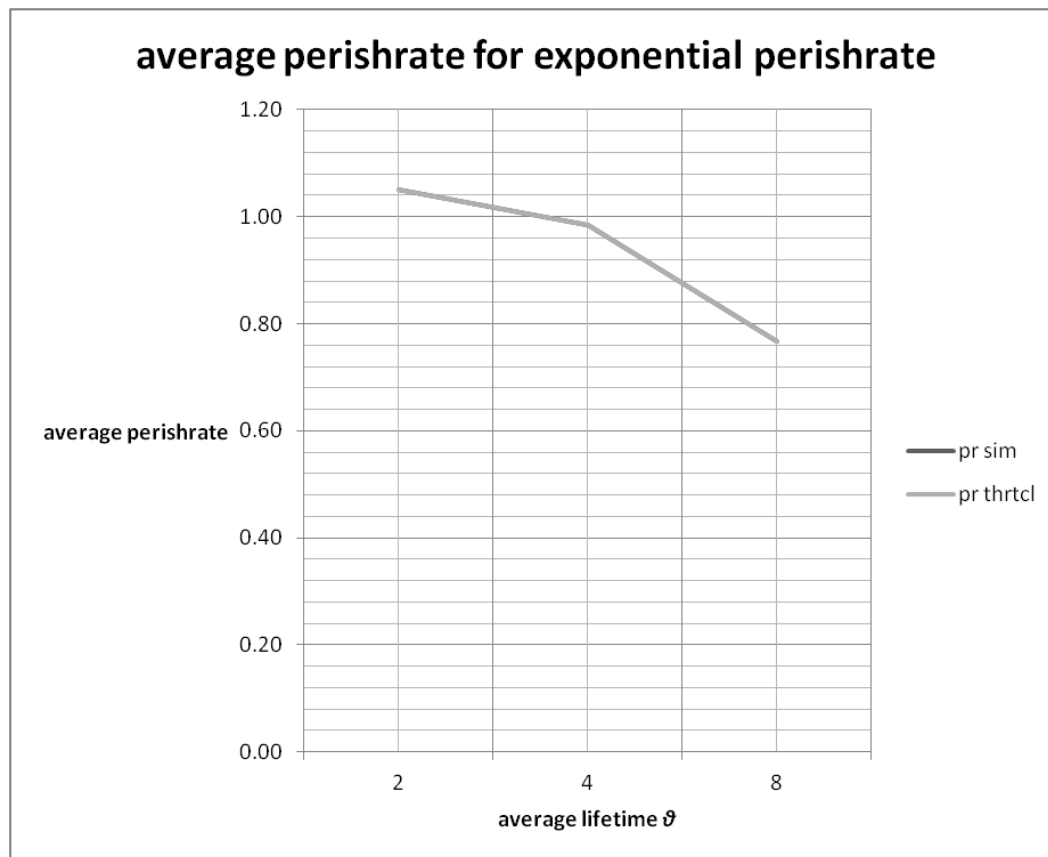
Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζεται η συμπεριφορά του προσομοιωτή και του θεωρητικού μοντέλου για δύο μέτρα απόδοσης συναφή μεταξύ τους, του μέσου ρυθμού απώλειας έτοιμων προϊόντων και του μέσου αποθέματος.

- **Εκθετική κατανομή:**



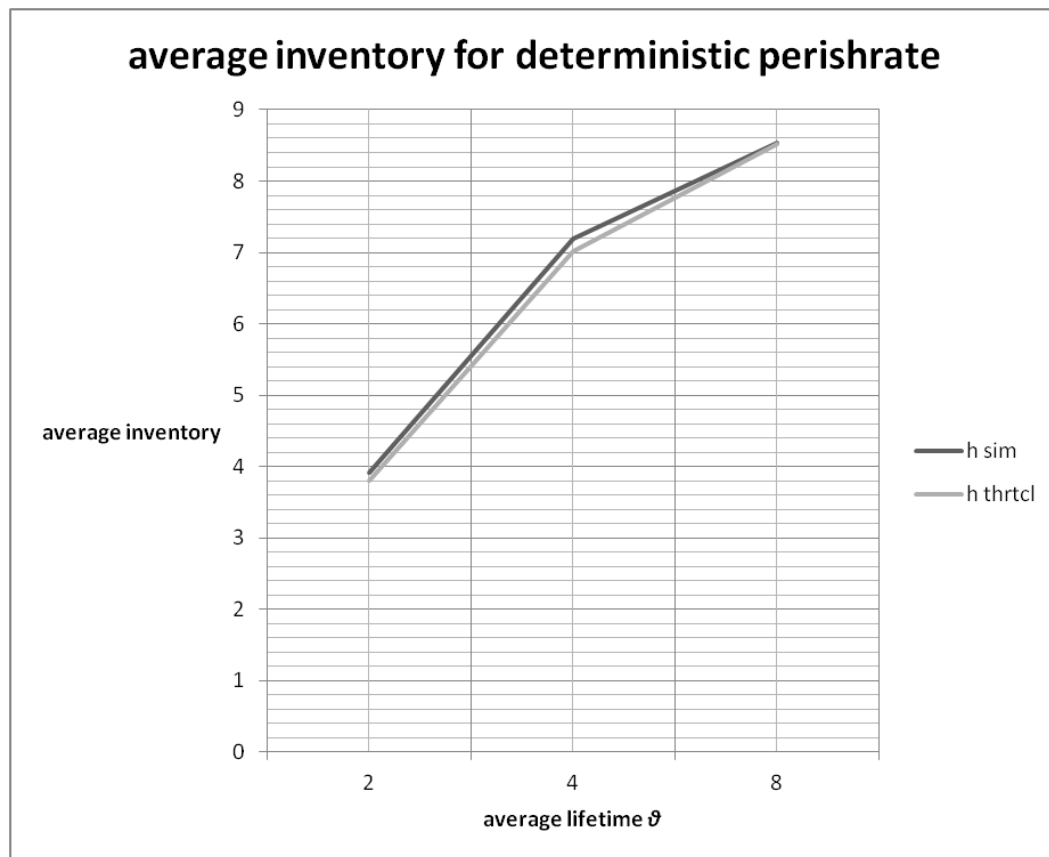
Σχήμα 4.4 Μέσο απόθεμα του συστήματος συναρτήσει του (θ) μέσου χρόνου ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Αρχικά παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα συμπίπτουν και για τα δύο μέτρα απόδοσης, το οποίο φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:

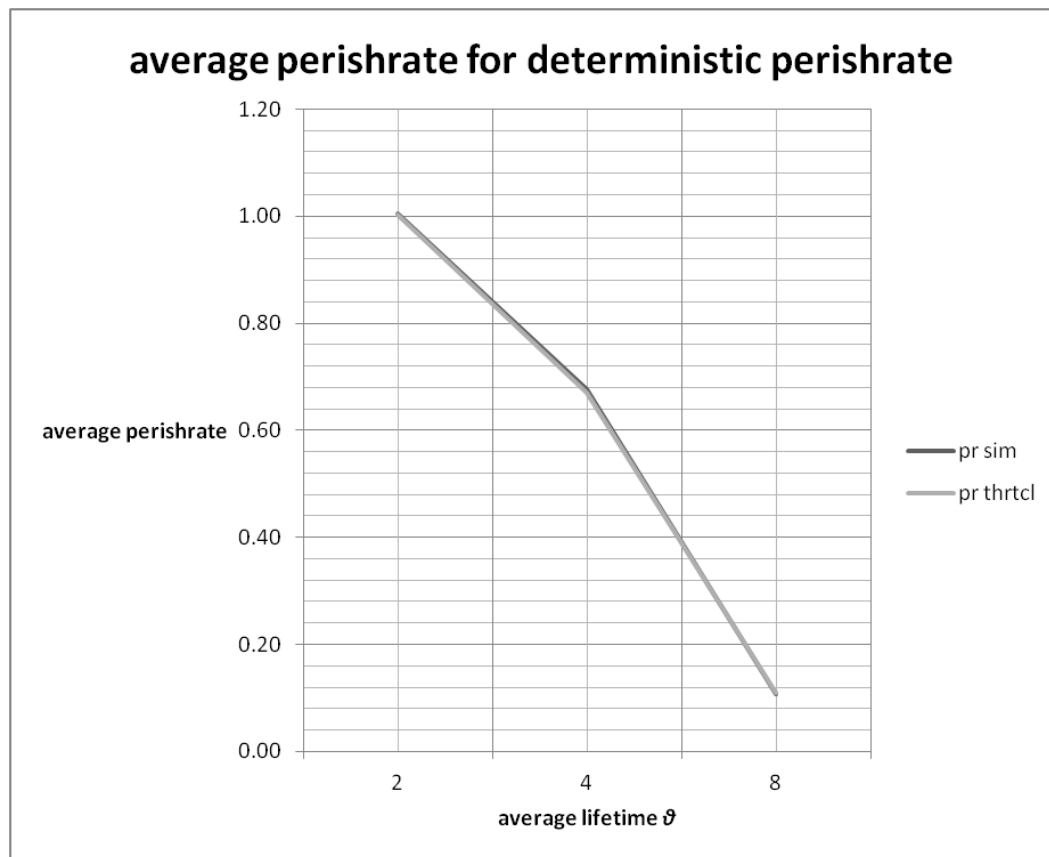


Σχήμα 4.5 Μέσος ρυθμός απώλειας έτοιμων προϊόντων του συστήματος συναρτήσει του (θ) μέσου χρόνου ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Παρατηρούμε ότι όσο ο μέσος χρόνος ζωής των έτοιμων προϊόντων αυξάνει έχουμε ταυτόχρονη μείωση του ρυθμού απώλειας προϊόντων και ραγδαία αύξηση του αποθέματος, ένα λογικό αποτέλεσμα που λειτουργεί θετικά στην αξιολόγηση του τρόπου λειτουργίας και των δυο υπολογιστικών συστημάτων μας, (προσομοιωτής και θεωρητικό μοντέλο). Παραθέτουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα για τις άλλες δυο κατανομές που εξετάζουμε.



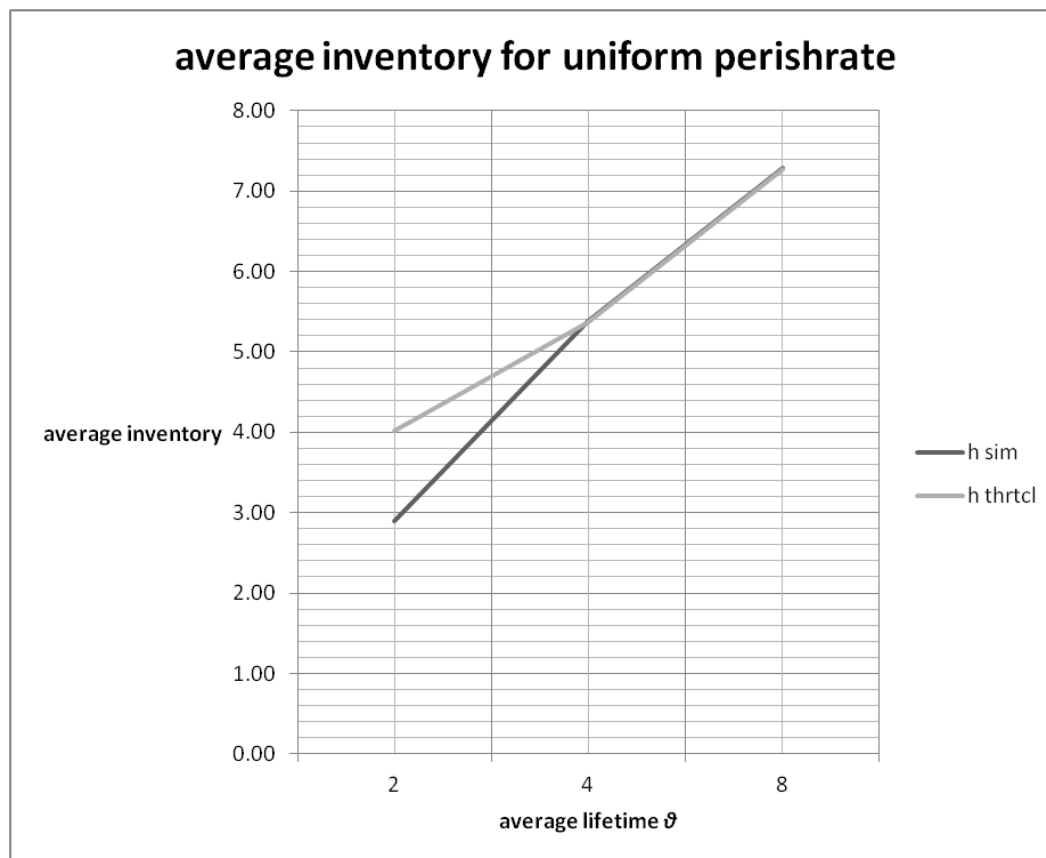
Σχήμα 4.6 Μέσο απόθεμα του συστήματος συναρτήσει του (θ) μέσου χρόνου ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την νετερμινιστική κατανομή.



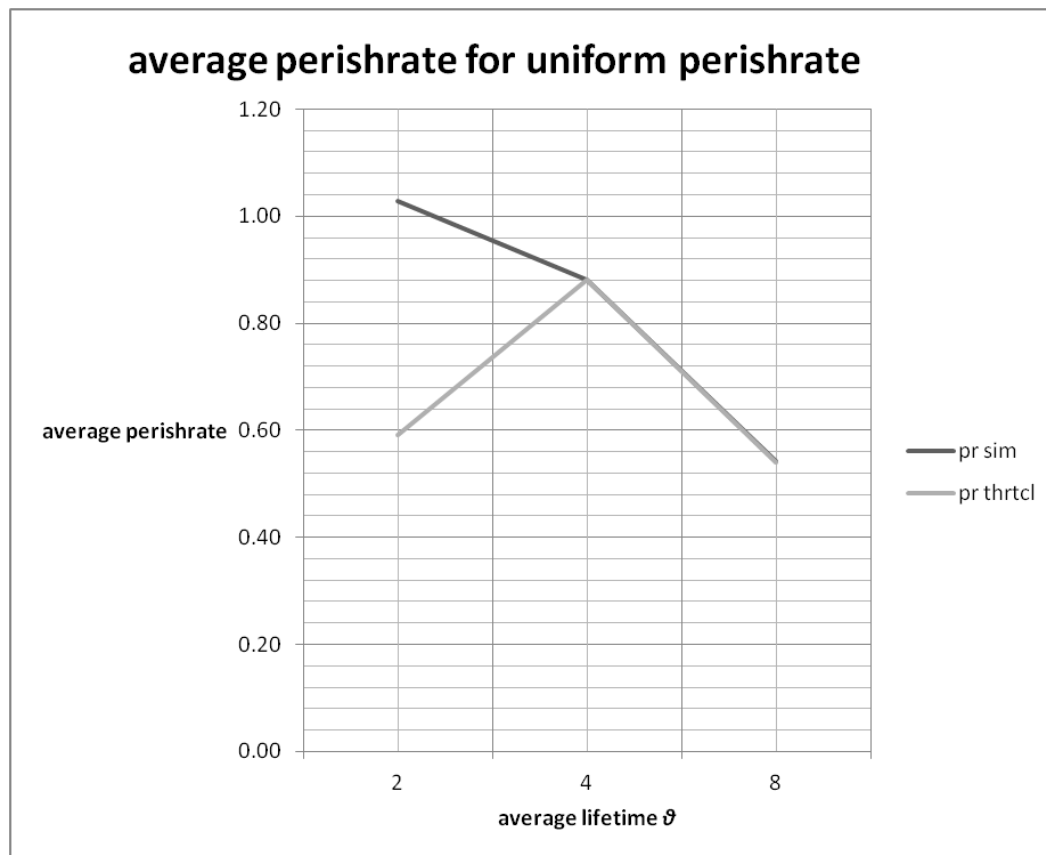
Σχήμα 4.7 Μέσος ρυθμός απώλειας έτοιμων προϊόντων του συστήματος συναρτήσει του (θ) μέσου χρόνου ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την ντετερμινιστική κατανομή.

Εδώ μπορούμε να διακρίνουμε μια μικρή απόκλιση των θεωρητικών δεδομένων από τα πειραματικά, που όμως παραμένει πολύ μικρή σχεδόν αμελητέα.

- Ομοιόμορφη κατανομή:



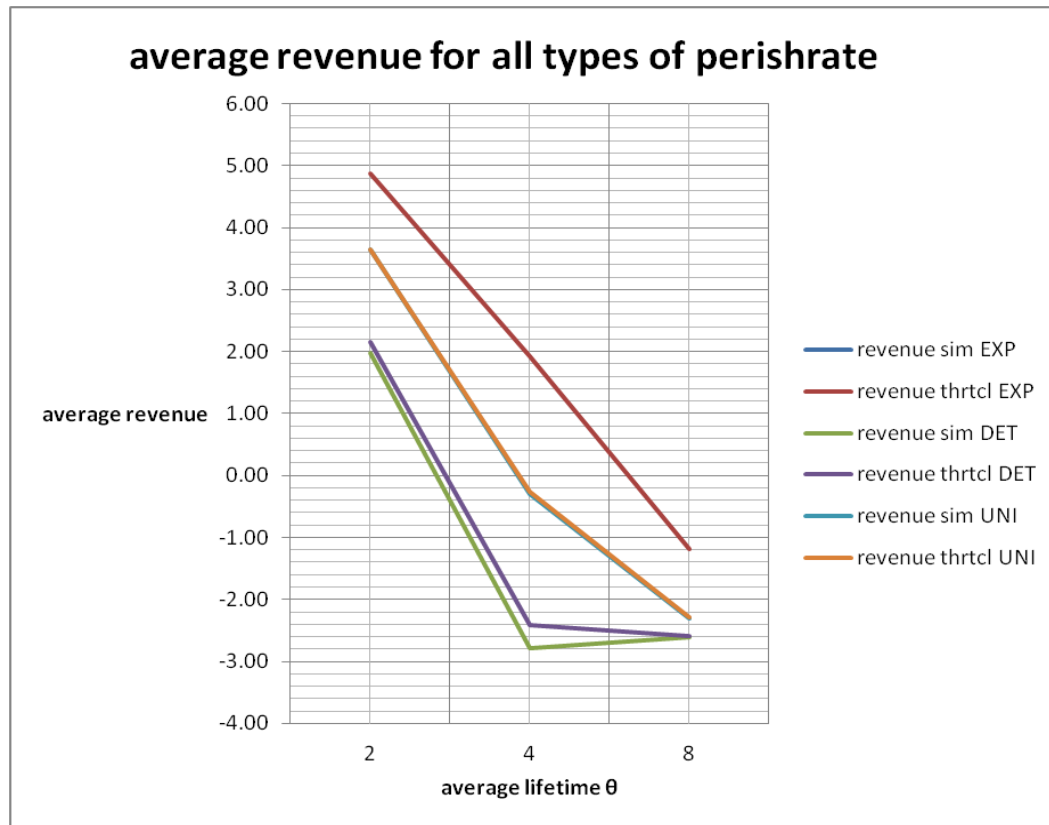
Σχήμα 4.8 Μέσο απόθεμα του συστήματος συναρτήσει του (θ) μέσου χρόνου ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή.



Σχήμα 4.9 Μέσος ρυθμός απώλειας έτοιμων προϊόντων του συστήματος συναρτήσει του (θ) μέσου χρόνου ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή.

Η απόκλιση που παρατηρούμε για $\theta=2$ βλέπουμε ότι είναι αρκετά μεγάλη και απορρίπτει την αρχική υπόθεση πάνω στην οποία βασιστήκαμε για την ανάπτυξη του προτεινόμενου μοντέλου.

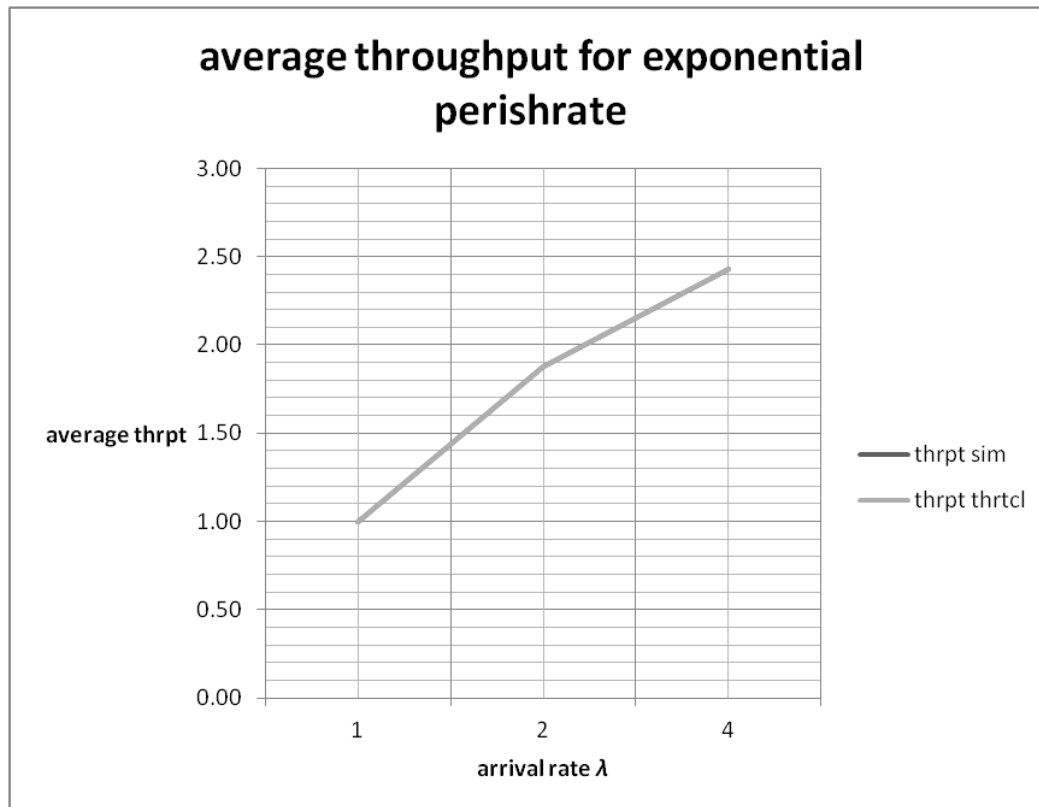
Επίσης θα παραθέσουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα για τον ρυθμό κέρδους του συστήματος ταυτόχρονα για τις τρεις κατανομές.



Σχήμα 4.10 Μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος συναρτήσει του (θ) μέσου χρόνου ζωής των προϊόντων για όλους τους τύπους προϊόντων.

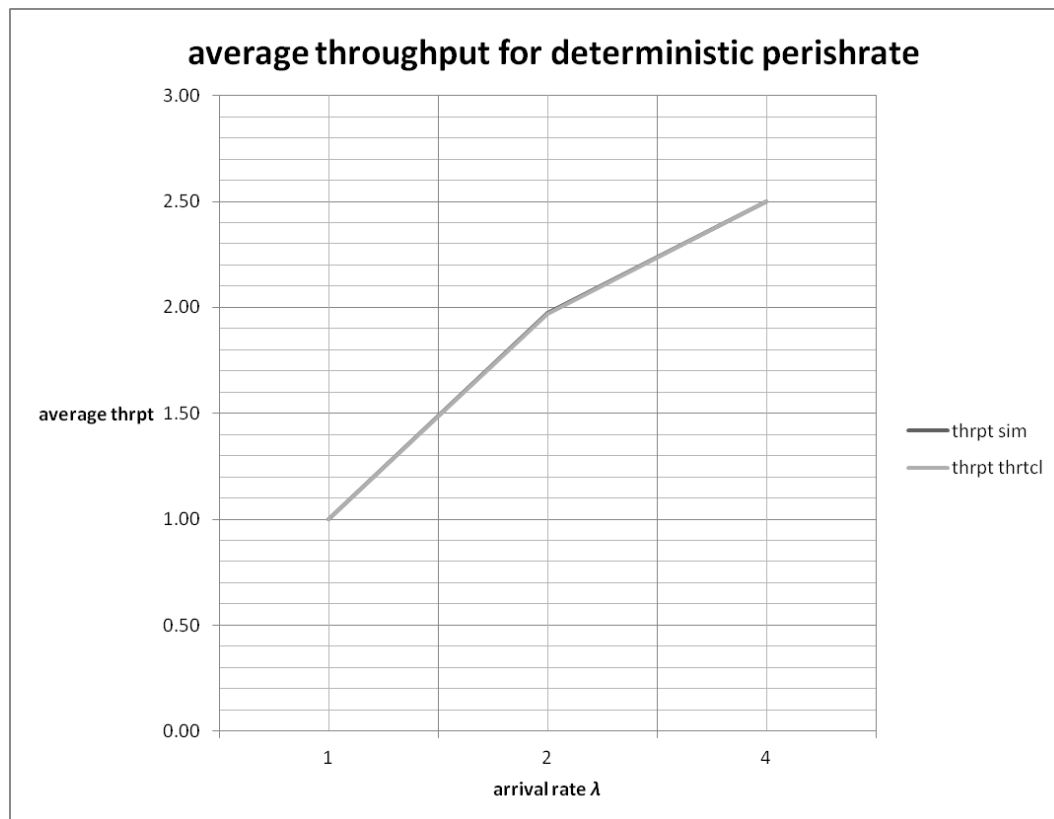
Τώρα θα μελετήσουμε το SET-3 ($s=10$, $c=2$, $\mu_1=5$, $\mu_2=4$, $q=0.8$, $\theta=4$ και $\lambda=1, 2, 4$), όπου κρατάμε σταθερό τον μέσο χρόνο ζωής των έτοιμων προϊόντων και αλλάζουμε τον ρυθμό αφίξεων.

Το πρώτο μέτρο απόδοσης είναι ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος για την εκθετική κατανομή:



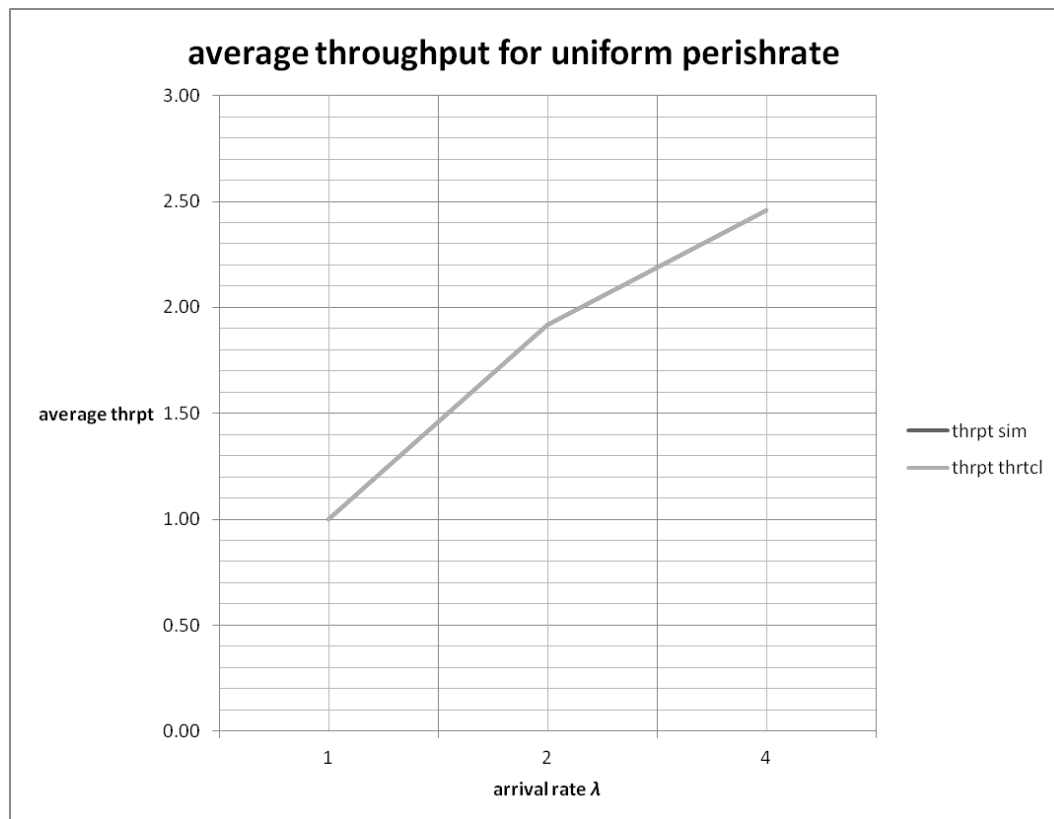
Σχήμα 4.11 Μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος συναρτήσει του (λ) ρυθμού αφίξεων για χρόνους ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Τα αποτελέσματα για αυτήν την κατανομή συμπίπτουν σχεδόν απόλυτα, πράγμα που είναι βέβαια αναμενόμενο. Παραθέτουμε στην συνέχεια την ντετερμινιστική και την ομοιόμορφη κατανομή για τις τρεις διαφορετικές τιμές του ρυθμού αφίξεων λ .



Σχήμα 4.12 Μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος συναρτήσει του (λ) ρυθμού αφίξεων για χρόνους ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την ντετερμινιστική κατανομή.

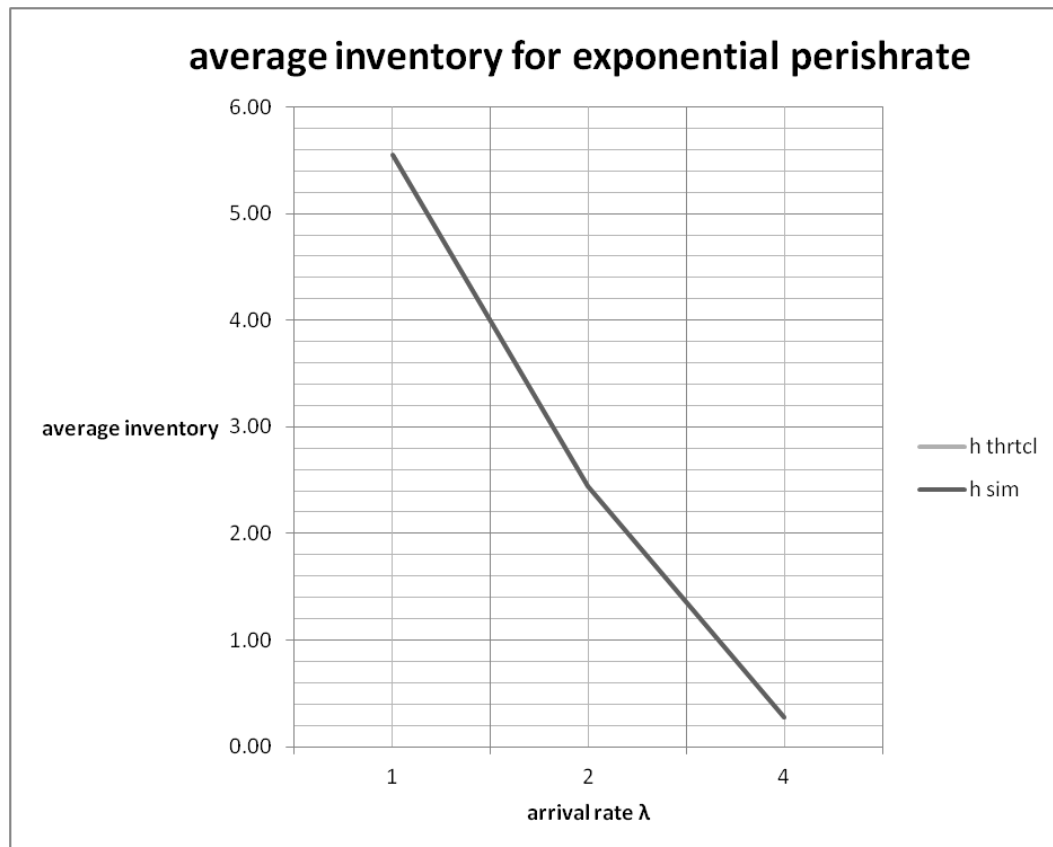
Παρατηρούμε και σε αυτή την περίπτωση ταύτιση αποτελεσμάτων μεταξύ προσομοιωτή και του προτεινόμενου θεωρητικού μοντέλου. Το μοντέλο μας επιτυγχάνει και στην περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής που παρουσιάζεται παρακάτω.



Σχήμα 4.13 Μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος συναρτήσει του (λ) ρυθμού αφίξεων για χρόνους ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή.

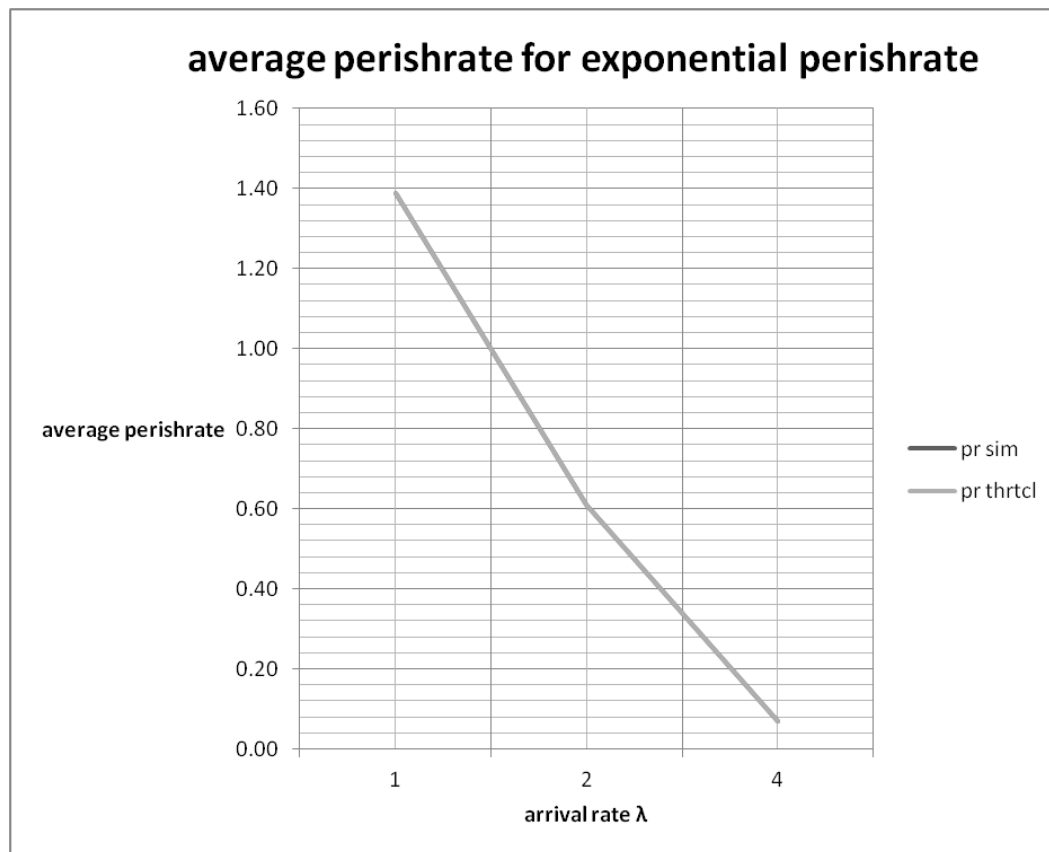
Σε αυτό το σημείο θα συγκρίνουμε τον μέσο ρυθμό απώλειας προϊόντων και του μέσο απόθεμα για την κάθε κατανομή ξεχωριστά.

- Εκθετική κατανομή:



Σχήμα 4.14 Μέσο απόθεμα του συστήματος συναρτήσει του (λ) ρυθμού αφίξεων για χρόνους ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

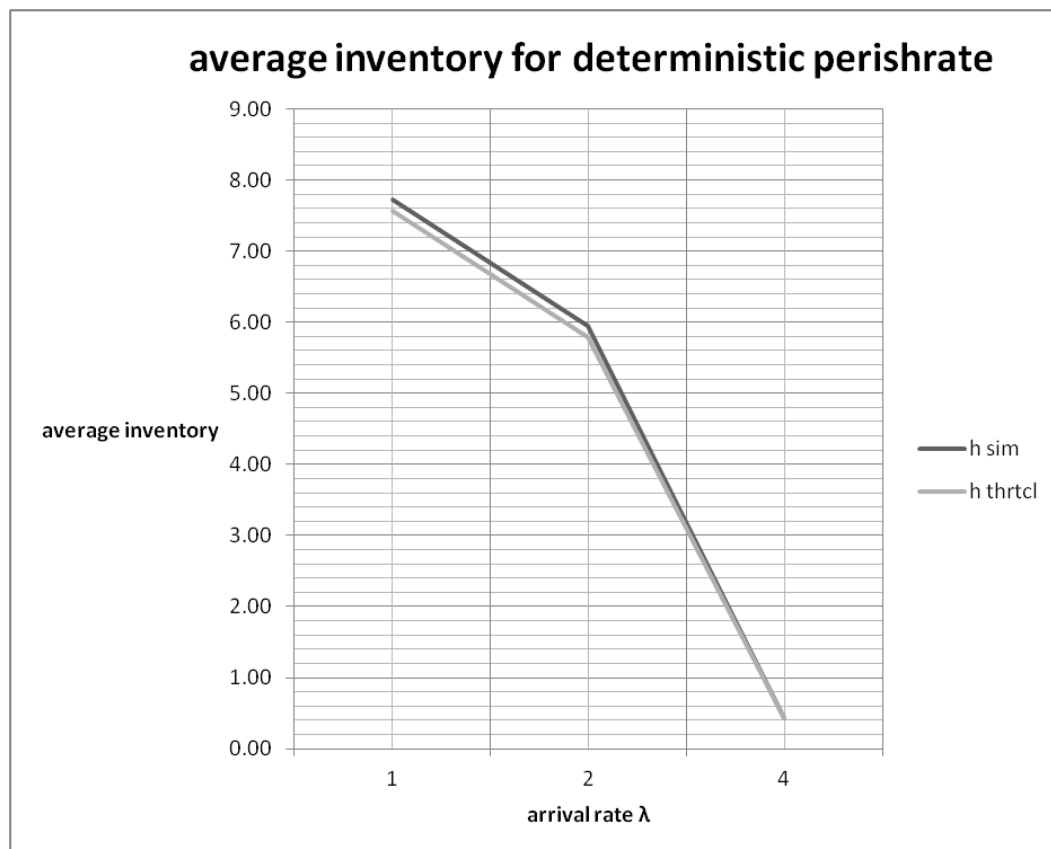
Στο παραπάνω διάγραμμα που αναφέρεται στο μέσο απόθεμα όπως και στο παρακάτω διάγραμμα που αφορά τον μέσο ρυθμό απώλειας προϊόντων, και για αυτό το σετ δεδομένων το μοντέλο μας επιτυγχάνει πλήρως στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής.



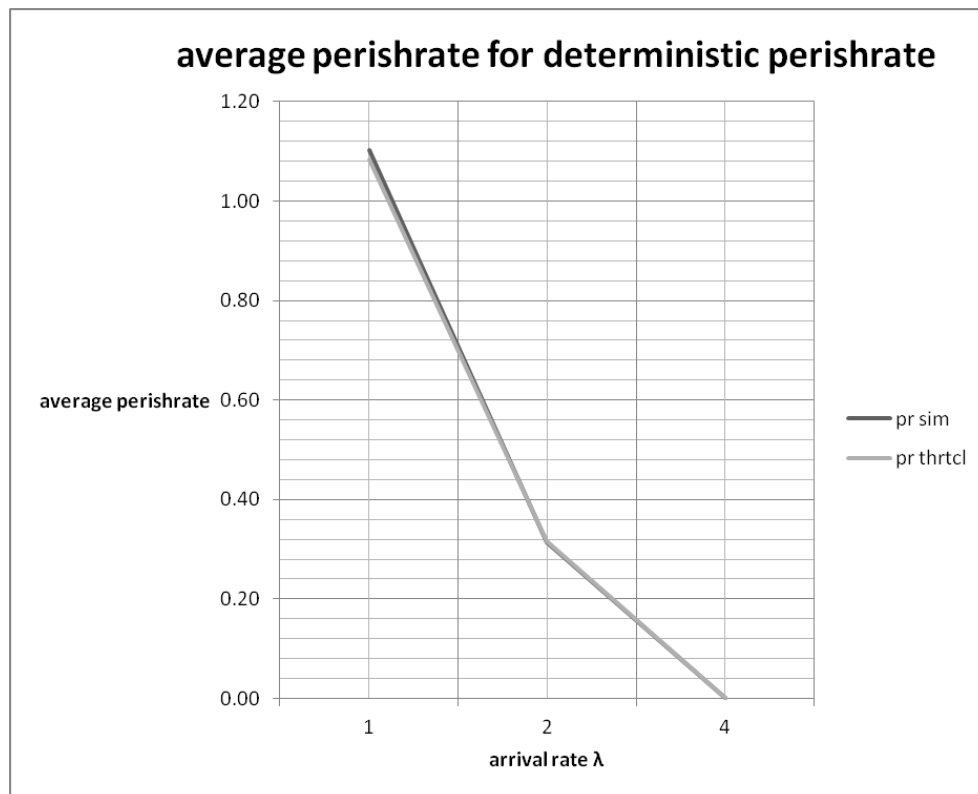
Σχήμα 4.15 Μέσος ρυθμός απώλειας έτοιμων προϊόντων του συστήματος συναρτήσει του (λ) ρυθμού αφίξεων για χρόνους ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε την ταυτόχρονη μείωση του μέσου αποθέματος και του ρυθμού απώλειας προϊόντων όσο αυξάνεται ο ρυθμός αφίξεων λ . Το ίδιο συμβαίνει και για τις άλλες κατανομές μόνο με μικρές αποκλίσεις μεταξύ των δύο εργαλείων για την ντετερμινιστική κατανομή μόνο όσον αφορά το μέσο απόθεμα.

- Ντετερμινιστική κατανομή:



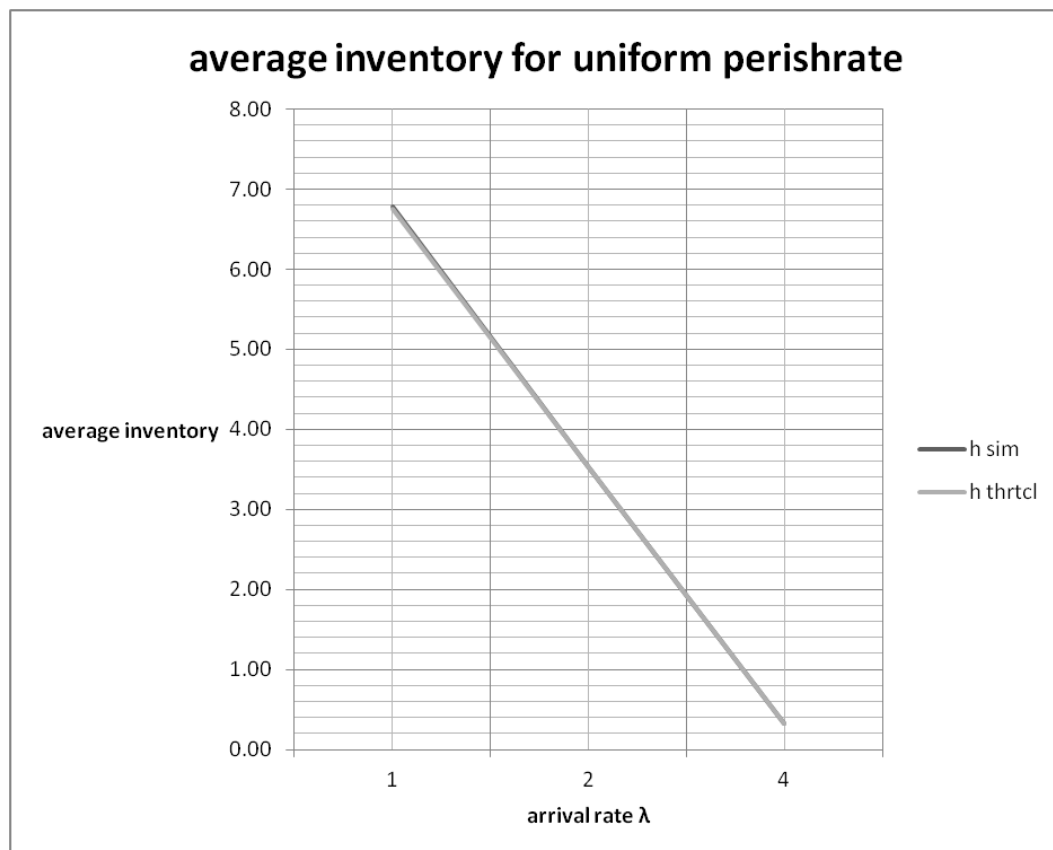
Σχήμα 4.16 Μέσο απόθεμα του συστήματος συναρτήσει του (λ) ρυθμού αφίξεων για χρόνους ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την ντετερμινιστική κατανομή.



Σχήμα 4.17 Μέσος ρυθμός απώλειας έτοιμων προϊόντων του συστήματος συναρτήσει του (λ) ρυθμού αφίξεων για χρόνους ζωής των προϊόντων που ακολουθούν ντετερμινιστική κατανομή.

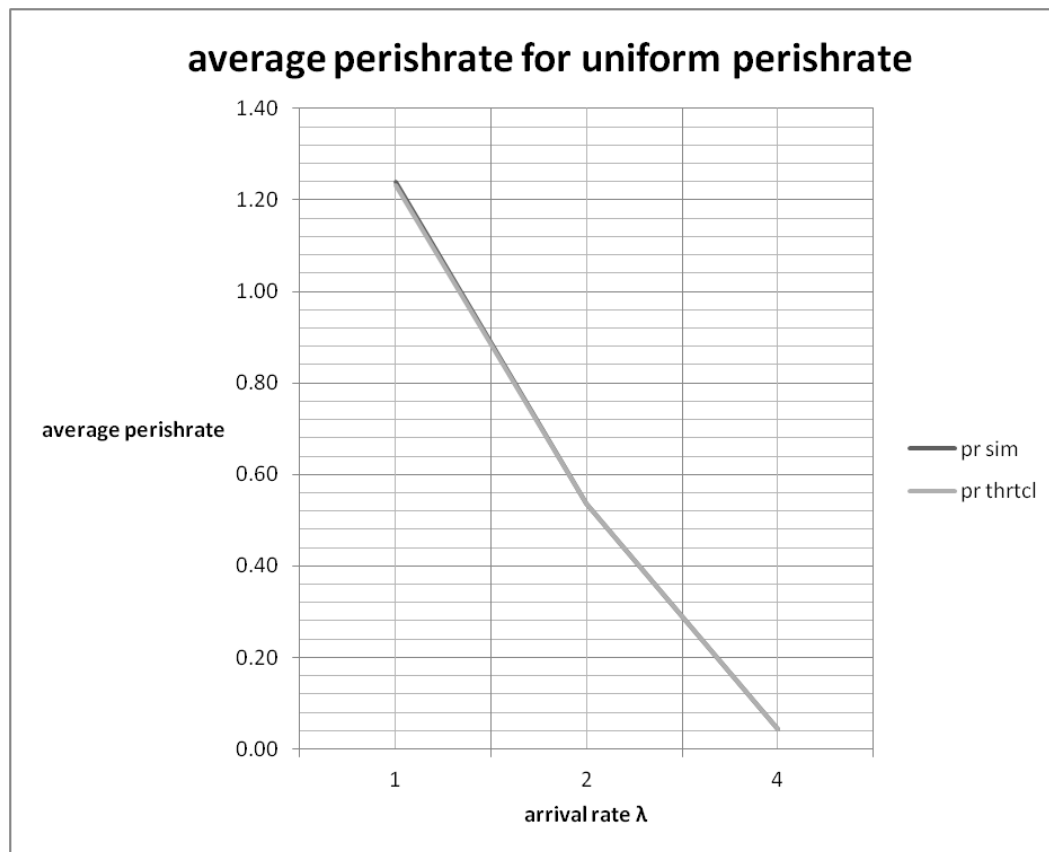
Σε αυτή τη περίπτωση παρατηρούμε μια μικρή απόκλιση για ρυθμούς αφίξεων $\lambda=1,2$ και για τα δυο μέτρα απόδοσης καθώς συνδέονται άμεσα μεταξύ τους.

- Ομοιόμορφη κατανομή:



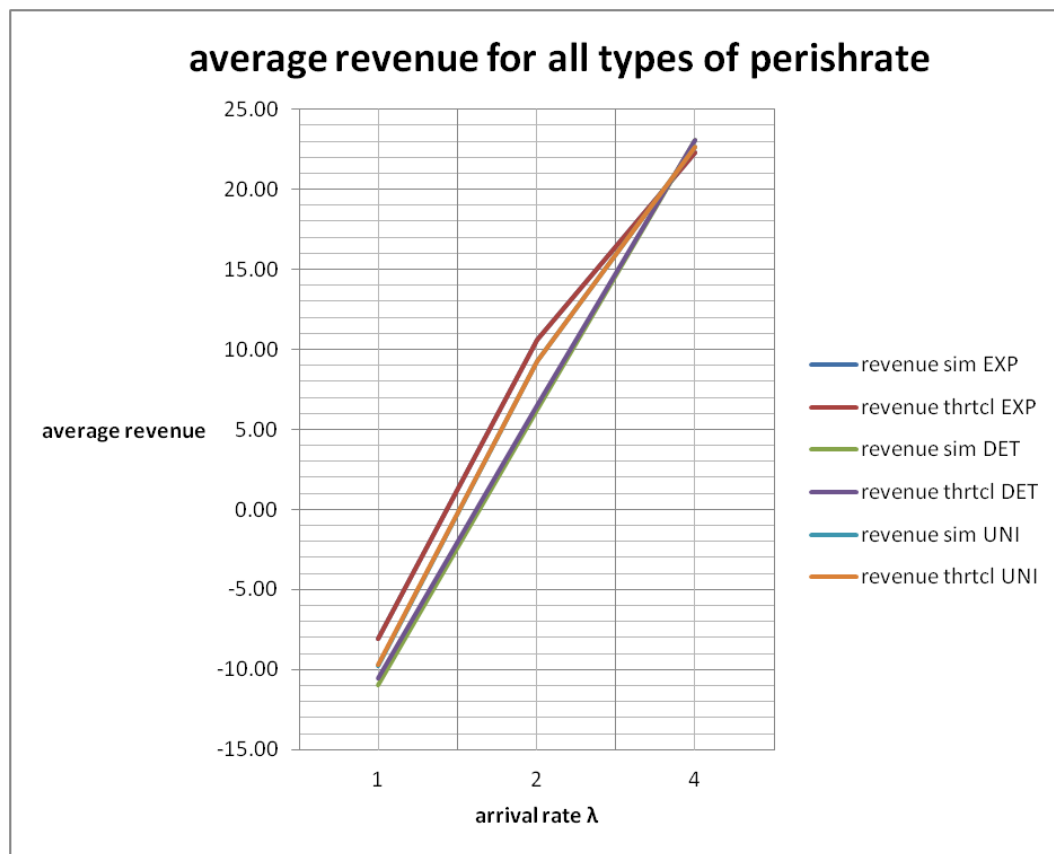
Σχήμα 4.18 Μέσο απόθεμα του συστήματος συναρτήσει του (λ) ρυθμού αφίξεων για χρόνους ζωής των προϊόντων που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή.

Στην περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής η απόκλιση είναι ελάχιστη και επικεντρώνεται πάλι για ρυθμούς αφίξεων $\lambda=1,2$.



Σχήμα 4.19 Μέσος ρυθμός απώλειας έτοιμων προϊόντων του συστήματος συναρτήσει του (λ) ρυθμού αφίξεων για χρόνους ζωής των προϊόντων που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή.

Στο παρακάτω διάγραμμα μπορούμε να παρατηρήσουμε πως μεταβάλλεται ο μέσος ρυθμός κέρδους καθώς αυξάνεται το λ . Είναι προφανής η ταύτιση μεταξύ αριθμητικών και θεωρητικών αποτελεσμάτων. Επίσης μπορούμε να διακρίνουμε για κάθε λ ποιά είναι η αντίστοιχη κατανομή που μεγιστοποιεί το κέρδος του συστήματος.



Σχήμα 4.20 Μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος συναρτήσει του (λ) ρυθμού αφίξεων για όλους τους τύπους προϊόντων.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε ένα σύστημα παραγωγής ενός σταδίου, με αφίξεις παραγγελιών που ακολουθούν την κατανομή Poisson, χρόνους παραγωγής που ακολουθούν την κατανομή Coxian-2, ενώ τα παραγόμενα προϊόντα αλλοιώνονται σε τυχαίους χρόνους με γνωστές κατανομές.

Υποθέσαμε ότι οι ρυθμοί απώλειας προϊόντων λόγω αλλοίωσης τους ταυτίζονται με αυτούς ενός παρόμοιου συστήματος με εκθετικούς χρόνους παραγωγής. Βασιζόμενοι σε αυτή την υπόθεση αναπτύξαμε ένα Μαρκοβιανό μοντέλο για την εκτίμηση των διαφόρων μέτρων απόδοσης του συστήματος. Για να ελέγξουμε την αλήθεια της υπόθεσης μας αναπτύξαμε προσομοιωτές διακριτών γεγονότων του συστήματος που μελετήσαμε.

Πραγματοποιήσαμε μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων, όπου εξετάστηκαν διάφορες κατανομές των διαρκειών ζωής των παραγόμενων προϊόντων, όπως η εκθετική, η ομοιόμορφη και η αιτιοκρατική. Τα αποτελέσματα των αριθμητικών πειραμάτων δεν επιβεβαίωσαν την αρχική μας υπόθεση. Παρόλα αυτά στη μεγάλη πλειοψηφία των περιπτώσεων το μοντέλο μας αποδείχθηκε ότι είναι μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικότητας.

Το επόμενο βήμα είναι να εξεταστούν συστήματα με χρόνους παραγωγής που ακολουθούν την κατανομή Coxian- n , η οποία αποτελεί γενίκευση της Coxian-2. Μια άλλη πολύ ενδιαφέρουσα επέκταση είναι η θεωρητική εκτίμηση των πραγματικών τιμών των ρυθμών απωλειών προϊόντων στα συστήματα αυτού του τύπου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A.

Αναλυτική επίλυση του συστήματος σε περιβάλλον MATLAB (ενδεικτικός κώδικας):

```
close all
clear all
clc
format long g
m1=input('dose m1:');
m2=input('dose m2:');
lamda=input('dose lamda:');
gamma=input('dose ruthmo gamma:');
s=input('dose sta8mi s:');
c=input('dose xwritikotita c:');
q=input('dose q:');
s=s+1;
for i=1:s
    if i<s
        g(s-i)=gamma*i; " καλώ την υπορουτίνα που υπολογίζει τους
ρυθμούς απώλειας των προϊόντων  $Y_m$  "
    end
end
g(s)=0;
```

"Υπολογισμός του πίνακα A_m "

```
for m=1:(s+c)
    if (m==2)
        Am=[m1+lamda+g(m) 0;-q*m1 m2+lamda+g(m)];
        A(:, :, m)=Am;
    end
    if ((m<s)&& (m>2))
        Am=[m1+lamda+g(m) 0;-q*m1 m2+lamda+g(m)];
        A(:, :, m)=Am;
    end
    if (m==s)
        Am=[lamda+m1 0;-q*m1 lamda+m2];
        A(:, :, m)=Am;
    end
    if ((m<(s+c)) && (m>s))
        Am=[m1+lamda 0;-q*m1 m2+lamda];
        A(:, :, m)=Am;
    end
    if (m==(s+c))
        Am=[m1 0;-q*m1 m2];
        A(:, :, m)=Am;
    end
end
```

end

"Υπολογισμός του πίνακα B_m "

```

for m=1:(s+c)
    if (m==2)
        Bm=[lamda+g(m-1) 0;0 0];
        B(:, :, (m-1))=Bm;
    end
    if ((m<s)&& (m>2))
        Bm=[lamda+g(m-1) 0;0 lamda+g(m-1)];
        B(:, :, (m-1))=Bm;
    end
    if (m==s)
        Bm=[lamda+g(s-1) 0;0 lamda+g(s-1)];
        B(:, :, (m-1))=Bm;
    end
    if ((m<=(s+c)) && (m>s))
        Bm=[lamda 0;0 lamda];
        B(:, :, (m-1))=Bm;
    end
end

```

end

"Υπολογισμός του πίνακα C_m "

```
C=[(1-q)*m1 m2;0 0];
```

"Υπολογισμός του πίνακα G_m "

```

G(:, :, 1)=[(1-q)*m1/(lamda+g(1)) m2/(lamda+g(1));0 0];
for m=1:(s+c-1)
    if (m>1)
        G(:, :, (m))=(A(:, :, m)-B(:, :, (m-1))*G(:, :, (m-1)))\C;
    end
end

```

end

"Υπολογισμός των απαραίτητων διανυσμάτων για την αλγεβρική επίλυση των εξισώσεων"

```

F(:, :, (s+c-1))=G(:, :, (s+c-1));
for m=1:(s+c-2)
    F(:, :, (s+c-1-m))=G(:, :, (s+c-1-m))*F(:, :, (s+c-m));
end
tf=0;
for m=1:(s+c-1)
    tf=tf+F(:, :, m);
end
tf=tf+eye(2);
Qs=(eye(2)-A(:, :, (s+c))\B(:, :, (s+c-1))*G(:, :, (s+c-1)));

```

"Υπολογίζουμε το διάνυσμα P_{s+c} χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης"

```

b=[1;0];

d=[1 1]*tf;

x=[1 1]*Qs;

GG=[d;x];

```

```
P_m=GG\b;
```

" Υπολογίζουμε επαναληπτικά τα υπόλοιπα διανύσματα πιθανοτήτων χρησιμοποιώντας τη σχέση $P_{m-1} = G_m P_m$, για $m = 1, 2, \dots, s+c-1$ "

```
for m=1:(s+c-1)
P(:, :, m)=F(:, :, (m)) * P_m;
end
P(:, :, s+c)=P_m;
```

"Υπολογισμός των μέτρων απόδοσης του συστήματος"

```
for m=1:s
    H(m)=(P(1, :, m)+P(2, :, m)) * (s-m);
End
h=0;
for m=1:s
    h=h+H(m);
end
for m=s:s+c
    bcklog(m)=(P(1, :, m)+P(2, :, m)) * (m-s);
end
bcklog=0;
for m=s:s+c
    bcklog=bcklog+bcklog(m);
end
thrpt=(1-P(1, :, s+c)-P(2, :, s+c)) * lamda;
for m=1:s
    pr(m)=(P(1, :, m)+P(2, :, m)) * g(m);
end
perrrt=0;
for m=1:s
    perrrt=perrrt+pr(m);
end

r1=10;
h1=2;
bc1=1;
pp1=5;
'results'
reven=r1*thrpt-h1*h-bc1*bcklog-pp1*perrrt
thrpt
h
bcklog
perrrt
```

" Υπορουτίνα που υπολογίζει τους ρυθμούς απώλειας των προϊόντων γ_m "

```
clear all
close all
clc
theta=input('dose theta:');
li=input('dose li:');
s=10;
format long g
pertype=input('dwse pertype 1 for EXP,2 for D,3 for UNI:');
if (pertype==1)
    disp('exponential perishtime');
    for n=1:s
        g(n)=n/theta;
    end
elseif (pertype==2)
    disp('determenistic perishtime');
    disp('Erlang propability distribution function');
    sum(1)=(li*theta)^0/factorial(0);
    for i=2:s
        sum(i)=sum(i-1)+((li*theta)^(i-1))/factorial(i-1);
    end
    for i=1:s
        Ferlang(i)=1-exp(-li*theta)*sum(i);
    end
    g(1)=li*(1-Ferlang(1))/Ferlang(1);
    for n=2:s
        g(n)=li*(Ferlang(n-1)-Ferlang(n))/Ferlang(n);
    end
elseif (pertype==3)
    k=s;
    disp('uniform (0-2*theta) perishtime');
    syms f ff fi t Gu x din;
    f=1-x/(2*theta);
    Gu=int(f,0,t);
    for n=1:k
        din(n)=Gu^n
        qw(n)=laplace(din(n))
    end
    for n=1:k
        ww(n)=subs(qw(n),li)
    end
    g(1)=(1/(li*ww(1)))-li
    for n=2:s
        g(n)=n*((ww(n-1)/ww(n)))-li
    end
end
end

gamma=g'
```

B.

Παρατίθεται ο προσομοιωτής διακριτών γεγονότων του συστήματος που μελετήσαμε ο οποίος αναπτύχθηκε σε περιβάλλον MATLAB (ενδεικτικός κώδικας):

```
close all
clear all
li=2;
m1=5;
m2=4;
theta=4;
s=10;
c=2;
Q=0.8;
tsim=1000000;
format long g
st=0;
t=0;
h=0;
bck=0;
tnps=0;
tnpp=0;
pp=0;
peri=0;

" Αρχικοποίηση χρόνων "

for i=1:s
    prst(i)=0;
end
time=tsim/4;
x=rand;
art=-log(x)/li;
x=rand;
if (Q<=x)
    x=rand;
    prdt=-log(x)/m1;
else
    x1=rand;
    prdt=(-log(x1))/m2;
    x2=rand;
    x3=-log(x2)/m1;
    prdt=prdt+x3;
end

for i=1:s
    pert(i)=tsim+1;
end
epert=tsim+1;
while (t<tsim)
    net(1)=art;
    net(2)=prdt;
    net(3)=epert;
    net(4)=tsim;
```

```

nett=tsim+1;
event=0;
for i=1:4
    if (nett>net(i))
        nett=net(i);
        event=i;
    end
end
if t>time
    time
    time=2*time;
end

```

“ Αφίξη πελάτη ή αλλοίωση προϊόντος ”

```

if (event==1)
    st=st-1;
    tnps=tnps+1;
    if (st<0)
        bck=bck+(nett-t)*(-st-1);
        t=nett;
    elseif (st>0)
        for i=1:st
            pert(i)=pert(i+1);
        end
        pert(st+1)=tsim+1;
        if (peri==1)
            epert=tsim+1;
            for i=1:st
                if (epert>pert(i))
                    epert=pert(i);
                    peri=i;
                end
            end
        else
            peri=peri-1;
        end
        h=h+(nett-t)*(st+1);
        t=nett;
    else
        epert=tsim+1;
        peri=0;
        h=h+(nett-t)*(st+1);
        t=nett;
    end
    if (st<=-c)
        art=tsim+1;
    elseif (st==s-1)
        x=rand;
        if (Q<=x)
            x=rand;
            prdt=t-log(x)/m1;
        else
            x1=rand;
            x2=-log(x1)/m2;
            x3=rand;
            x4=-log(x3)/m1;
            prdt=t+x2+x4;
        end
        x=rand;
    end
end

```



```

        art=t-log(x)/li;
    else
        x=rand;
        art=t-log(x)/li;
    end

    " Παραγωγή νέου προϊόντος "

elseif (event==2)
    pp=pp+1;
    st=st+1;
    if (st<=0)
        bck=bck+(nett-t)*(-st+1);
        t=nett;
    else
        h=h+(nett-t)*(st-1);
        x=rand;
        pert(st)=nett-log(x)*theta;
        if (pert(st)<epert);
            epert=pert(st);
            peri=st;
        end
        t=nett;
    end

    end

    if (st>=s)
        prdt=tsim+1;
    elseif (st<=1-c)
        x=rand;
        art=t-log(x)/li;
        x=rand;
        if (Q<=x)
            x=rand;
            prdt=t-log(x)/m1;
        else
            x1=rand;
            x2=-log(x1)/m2;
            x3=rand;
            x4=-log(x3)/m1;
            prdt=t+x2+x4;
        end
    else
        x=rand;
        if (Q<=x)
            x=rand;
            prdt=t-log(x)/m1;
        else
            x1=rand;
            x2=-log(x1)/m2;
            x3=rand;
            x4=-log(x3)/m1;
            prdt=t+x2+x4;
        end
    end

    end

    " Αλλοίωση προϊόντος "

elseif (event==3)
    prst(st)=prst(st)+1;

```

```

st=st-1;
h=h+(nett-t)*(st+1);
tnpp=tnpp+1;
if (st>0)
    for i=peri:st
        pert(i)=pert(i+1);
    end
    pert(st+1)=tsim+1;
    epert=tsim+1;
    for i=1:st
        if(pert(i)<epert)
            epert=pert(i);
            peri=i;
        end
    end
    t=nett;
else
    epert=tsim+1;
    peri=0;
    t=nett;
end
if (st==s-1)
    x=rand;
    if (Q<=x)
        x=rand;
        prdt=t-log(x)/m1;
    else
        x1=rand;
        x2=-log(x1)/m2;
        x3=rand;
        x4=-log(x3)/m1;
        prdt=t+x2+x4;
    end
end
end

```

" Ενημέρωση αποθέματος και πλήθους εκκρεμών παραγγελιών "

```

elseif (event==4)
    if (st>0)
        h=h+(tsim-t)*st;
    else
        bck=bck+(tsim-t)*(-st);
    end
    t=tsim+1;
end
end
r1=10;
h1=2;
bcl=1;
pp1=5;
'simulation results'

```

"Υπολογισμός των μέτρων απόδοσης του συστήματος"

```

format long g
h=h/tsim;
th=tnps/tsim;
bck=bck/tsim;
pr=tnpp/tsim;

```

```

pp=pp/tsim;
for i=1:s
    prst(i)=prst(i)/tsim;
end

reven=r1*th-h1*h-bc1*bck-pp1*pr
th
h
bck
pr
pp
perishperstathmi=prst';

```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A. Movaghar, "On queueing with customer impatience until the end of service", *Stochastic Models*, **22**, 149–173, 2006
2. S. Ioannidis, O. Jouini, A.A. Economopoulos and V.S. Kouikoglou, "An (s-1, s) Inventory System with General Product Lifetimes and Customer Impatience", *Annals of OR*, accepted for publication, 2011.
3. I.J.B.F. Adan, and J. van der Wal, Difference and differential equations in stochastic operation research. Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology. Eindhoven, Netherlands, 1998. Available at SSRN: [〈ftp://ftp.win.tue.nl/pub/techreports/iadan/difcourse.ps〉](ftp://ftp.win.tue.nl/pub/techreports/iadan/difcourse.ps).
4. Β. Κουϊκόγλου, *Προσομοίωση*, Σημειώσεις μαθήματος, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2006.
5. Α. Οικονομόπουλος, *Ανάλυση και σύγκριση πολιτικών ελέγχου σε συστήματα παραγωγής με πελάτες που αποθαρρύνονται*, Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2010.
6. Γ. Φίλης, *Συστήματα Παραγωγής*, Σημειώσεις μαθήματος, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2001.
7. Γ. Φίλης, *Δίκτυα Παραγωγής C.A.M.*, Σημειώσεις μαθήματος, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2003.