



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

ΚΥΚΛΟΣ: ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕΘΕΥΡΕΤΙΚΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΔΙΚΤΥΩΝ**

ΤΖΙΛΙΒΑΚΗΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΜΑΡΙΝΑΚΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΧΑΝΙΑ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2010

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΟΧΗΜΑΤΩΝ

1.1 Εισαγωγή – Περιγραφή βασικού προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων.....	5
1.2 Χαρακτηριστικά ενός προβλήματος VRP.....	6
1.3 Περιγραφή ανοικτού προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων.....	10
1.4 Ιστορική αναδρομή.....	11
1.4.1 Ιστορική αναδρομή VRP.....	11
1.4.2 Ιστορική αναδρομή OVRP.....	14
1.5 Μοντελοποίηση προβλημάτων.....	15
1.5.1 Μοντελοποίηση VRP.....	15
1.5.2 Μοντελοποίηση OVRP.....	16
1.5 Κατεύθυνση της παρούσας εργασίας.....	17

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

2.1 Περιγραφή μεθευρετικών αλγορίθμων.....	19
2.2 Μια πρώτη ματιά στη μέθοδο της διαφορικής εξέλιξης.....	23
2.3 Εφαρμογή της διαφορικής εξέλιξης στο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων.....	30
2.3.1 Εισαγωγή.....	30

2.3.2 Αναπαράσταση πληθυσμού.....	31
2.3.3 Συνάρτηση ποιότητας.....	32
2.3.4 Αρχικοποίηση πληθυσμού.....	32
2.3.5 Μετάλλαξη.....	32
2.3.5.1 Τυχαία στρατηγική μετάλλαξης.....	33
2.3.5.2 Κατευθυνόμενη στρατηγική μετάλλαξης.....	36
2.3.5.3 Τοπική στρατηγική μετάλλαξης.....	37
2.3.5.4 Υβριδική στρατηγική μετάλλαξης.....	38
2.3.6 Διασταύρωση.....	39
2.3.7 Τοπική αναζήτηση.....	40
2.3.7.1 Τοπική αναζήτηση – Μέθοδος 2-opt.....	41
2.3.8 Επιλογή.....	43
2.3.9 Μηχανισμός επιβράδυνσης σύγκλισης και περιοδική τοπική αναζήτηση..	43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

3.1 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων.....	48
3.1.1 Αποτελέσματα ανά στιγμιότυπο.....	50
3.2 Ανοιχτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων.....	64
3.2.1 Αποτελέσματα ανά στιγμιότυπο.....	66

3.3 Συμπεράσματα.....	80
Βιβλιογραφία.....	81

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΟΧΗΜΑΤΩΝ

1.1 Εισαγωγή – Περιγραφή βασικού προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων

Η διανομή προϊόντων αφορά την εξυπηρέτηση, σε μια δεδομένη χρονική περίοδο ενός συνόλου από πελάτες από ένα σύνολο οχημάτων, που έχουν σαν αφετηρία τους μια συγκεκριμένη τοποθεσία (λ.χ μια αποθήκη), χρησιμοποιούνται από δεδομένο αριθμό οδηγών και πραγματοποιούν τις κινήσεις τους χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο οδικό δίκτυο. Η επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων, έχει σαν αποτέλεσμα τον καθορισμό ενός συνόλου από διαδρομές, όπου κάθε μια από αυτές ξεκινά και καταλήγει σε μια αποθήκη, ικανοποιώντας τις απαιτήσεις των πελατών, μην παραβιάζοντας τους περιορισμούς και έχοντας ελαχιστοποιήσει το κόστος της συνολικής διαδρομής όλων των οχημάτων. Στόχος μιας επιχείρησης είναι η βελτιστοποίηση του συστήματος διανομής μέσω της μείωσης των χιλιομέτρων που διανύουν τα οχήματα, της καλύτερης αξιοποίησης της χωρητικότητας των οχημάτων, της μείωσης του χρόνου μεταφοράς και της αύξησης του επιπέδου εξυπηρέτησης (αξιοπιστία, συχνότητα επίσκεψης και χρόνος εκτέλεσης παραγγελίας [63]. Η οικογένεια αυτών των προβλημάτων είναι γνωστή με τον όρο Προβλήματα Δρομολόγησης Οχημάτων (Vehicle Routing Problems – VRP). Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με το Βασικό Πρόβλημα Δρομολόγησης Οχημάτων (Open Vehicle Routing Problem – OVRP), όπου οι οδηγοί δεν επιστρέφουν στην αποθήκη, αλλά η εργασία τους τελειώνει με την παράδοση των προϊόντων στον τελευταίο πελάτη της διαδρομής που τους αντιστοιχεί.

1.2 Χαρακτηριστικά ενός προβλήματος VRP

Η οικογένεια των προβλημάτων δρομολόγησης οχημάτων μπορεί να περιγραφεί μέσα από ένα συγκεκριμένο αριθμό χαρακτηριστικών: το οδικό δίκτυο, τους πελάτες, τα δρομολόγια, τους οδηγούς και τα οχήματα. Αυτά τα χαρακτηριστικά τα συναντάμε σε κάθε παραλλαγή των προβλημάτων δρομολόγησης, ανάλογα όμως με την παραλλαγή μπορεί να διαφέρουν ορισμένα στοιχεία αυτών των χαρακτηριστικών. Παρακάτω τα περιγράφουμε αναλυτικότερα προσαρμοσμένα στις δύο παραλλαγές που ερευνήσαμε, των οποίων η μοναδική διαφορά έγκειται στη μη επιστροφή στην αποθήκη των οχημάτων στην περίπτωση του ανοικτού προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων.

Οδικό δίκτυο

Το οδικό δίκτυο περιγράφεται γενικά ως ένα γράφημα, του οποίου τα τόξα αντιπροσωπεύουν τους δρόμους του δικτύου ενώ οι κόμβοι αντιπροσωπεύουν τις αποθήκες και τις θέσεις των πελατών. Τα τόξα μπορεί να είναι προσανατολισμένα ή μη ανάλογα με το αν ο δρόμος είναι διπλής κατεύθυνσης ή όχι. Κάθε τόξο γενικά σχετίζεται με ένα κόστος που αντιστοιχεί συνήθως στο μήκος του και σε ένα χρόνο ταξιδιού. Στο σχήμα 1.1 (α) φαίνεται το οδικό δίκτυο σε ένα μικρού μέγεθος πρόβλημα, ενώ στα σχήματα 1.1 (β) και 1.1 (γ) φαίνονται κάποιες υποθετικές εφικτές λύσεις για το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων και για το ανοικτό πρόβλημα, αντίστοιχα.

Πελάτες

Οι πελάτες αναπαρίστανται από τους κόμβους του γραφήματος, έχουν ζητήσει μια συγκεκριμένη ποσότητα αγαθών για παραλαβή από τα οχήματα και είναι ορισμένος ο χρόνος εκφόρτωσης των αγαθών, ο οποίος είναι ίδιος για όλους τους πελάτες.

Δρομολόγια

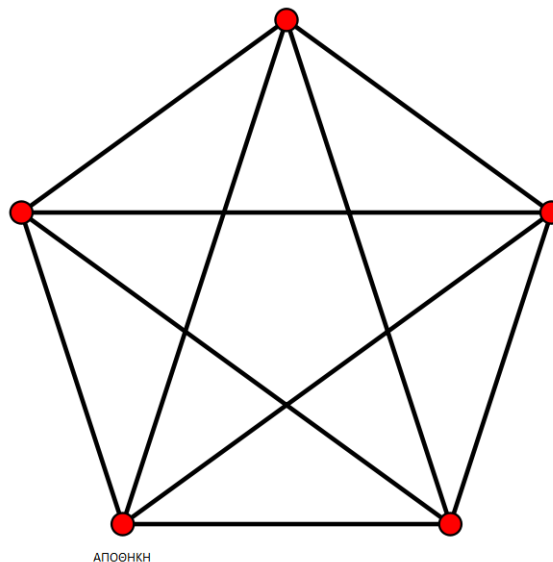
Τα δρομολόγια που εκτελούνται για την εξυπηρέτηση των πελατών ξεκινούν και καταλήγουν σε μια αποθήκη ή στον τελευταίο πελάτη της διαδρομής τους. Τα δρομολόγια πρέπει να ικανοποιούν λειτουργικούς περιορισμούς που εξαρτώνται από την ποσότητα των μεταφερόμενων προϊόντων, και τα χαρακτηριστικά των οχημάτων. Σε κάθε διαδρομή η μεταφερόμενη ποσότητα δεν θα πρέπει να ξεπερνά τη χωρητικότητα του οχήματος.

Οχήματα

Η μεταφορά και διακίνηση προϊόντων εκτελείται με τη χρησιμοποίηση ενός στόλου οχημάτων, του οποίου η σύνθεση μπορεί να καθοριστεί σύμφωνα με τις απαιτήσεις των πελατών. Κάθε όχημα έχει συγκεκριμένη χωρητικότητα εκφρασμένη σαν μέγιστο βάρος, ή όγκο, ή αριθμό παλετών ή προϊόντων που μπορεί να μεταφέρει το κάθε όχημα. Το κόστος που συνδέεται με την χρήση του οχήματος εκφράζεται π.χ. σαν κόστος /μονάδα απόστασης κλπ.

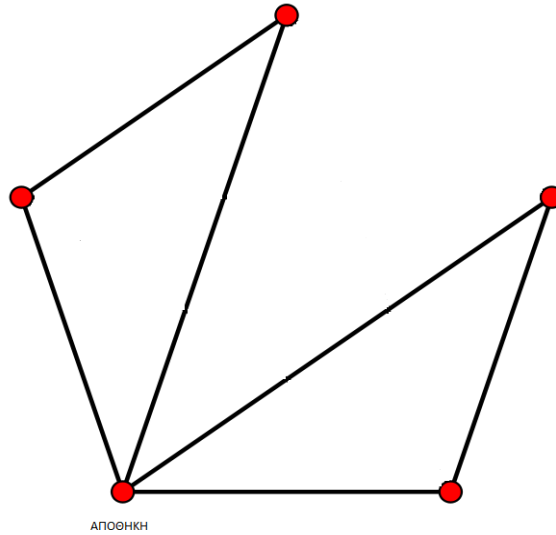
Οδηγοί

Κατά την μοντελοποίηση, το σύνολο των περιορισμών που αναφέρεται στα οχήματα μπορεί να περικλείει και περιορισμούς που προκύπτουν από τους οδηγούς. Οι οδηγοί των οχημάτων είναι απαραίτητο να ικανοποιούν διάφορους περιορισμούς που έχουν να κάνουν με συμβόλαια εργατικών ενώσεων καθώς και κανονισμούς της εταιρείας για την οποία εργάζονται. Ο χρόνος εργασίας κατά τη διάρκεια της ημέρας, ο αριθμός και η διάρκεια των διαλειμμάτων και οι υπερωρίες αποτελούν ορισμένους μόνο από τους "κανόνες" τους οποίους πρέπει να τηρούν οι οδηγοί των οχημάτων. [46]



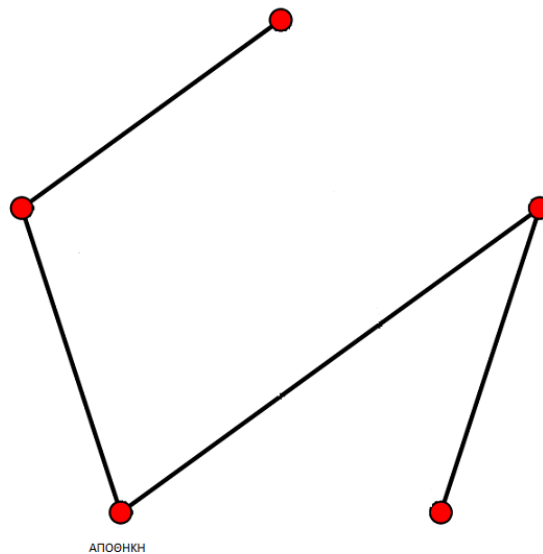
Σχήμα 1.1 (α)

Το πλήρες οδικό δίκτυο για ένα πρόβλημα μίας αποθήκης και τεσσάρων πελατών



Σχήμα1.1 (β)

Μια υποθετική λύση για το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων



Σχήμα1.1 (γ)

Μια υποθετική λύση για το ανοικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων

Για να εκτιμηθεί το συνολικό κόστος των διαδρομών και να ελεγχθεί η εφικτότητα των περιορισμών, απαιτείται η γνώση του κόστους ταξιδιού και του χρόνου ταξιδιού ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι πελατών και ανάμεσα στους πελάτες και την αποθήκη. Έτσι, για να επιλυθεί το πρόβλημα (η τελική λύση είναι ένα πολύ αραιό δίκτυο) θεωρούμε το πλήρες γράφημα μεταξύ των πελατών – κόμβων και της αποθήκης, βάσει του

πραγματικού οδικού δικτύου όπου σε αυτό διαφαίνεται ότι το πλήθος των λύσεων είναι μη μετρήσιμο. Επίσης σημαντικό στοιχείο είναι ο ορισμός των αντικειμενικών συναρτήσεων του προβλήματος, οι οποίες συνήθως είναι αντικρουόμενες, οι πιο συνηθισμένες εξ' αυτών είναι:

- Ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς, που εξαρτάται από τη συνολική απόσταση που διανύθηκε (ή το συνολικό χρόνο ταξιδιού που χρειάστηκε) και από κάποιο καθορισμένο κόστος που αναλογεί στη χρήση των οχημάτων
- Ελαχιστοποίηση του αριθμού των οχημάτων (ή των οδηγών) που απαιτούνται για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών
- Εξισορρόπηση των διαδρομών, όσον αφορά το χρόνο διαδρομής και τη φόρτωση του οχήματος
- Ελαχιστοποίηση των ποινών που σχετίζονται με την ελλιπή εξυπηρέτηση ορισμένων πελατών.

Στην παρούσα εργασία οι αντικειμενικοί στόχοι που τέθηκαν είναι ο πρώτος και ο τρίτος [64].

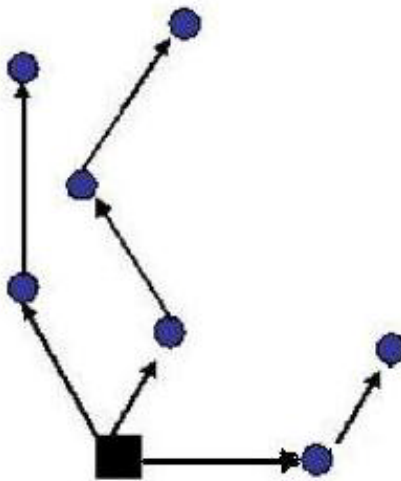
Γενικά οι μεταφορές σχετίζονται σχεδόν με όλα τα στάδια μιας παραγωγικής διαδικασίας αλλά και των συστημάτων διανομής των προϊόντων. Αναμφίβολα αντιπροσωπεύουν ένα σημαντικό ποσοστό του τελικού κόστους των προϊόντων. Γι' αυτό η επιστήμη της Επιχειρησιακής έρευνας ασχολείται όλο και περισσότερο με θέματα και μοντέλα βελτιστοποίησης, αφού η χρήση τους έχει αποδειχθεί καθοριστική στη διαχείριση δικτύων διανομής και γενικότερα σε όλα τα επίπεδα λειτουργίας μιας επιχείρησης. Η χρήση τέτοιων μοντέλων μπορεί να μειώσει σημαντικά τα κόστη μεταφοράς των επιχειρήσεων βοηθώντας στην εύρυθμη λειτουργία των συγκεκριμένων επιχειρήσεων αλλά και της παγκόσμιας οικονομίας γενικότερα.

Στην αύξηση της χρήσης των παραπάνω μοντέλων βοήθησε η δημιουργία λογισμικών πακέτων και πληροφοριακών συστημάτων με δυνατότητες επίλυσης πολύπλοκων προβλημάτων όμοιων με αυτών που αντιμετωπίζει μια σύγχρονη μονάδα παραγωγής. Γι' αυτό και η χρησιμοποίησή τους στις σύγχρονες βιομηχανίες διαρκώς επεκτείνεται καθιστώντας το απαραίτητο και μοναδικό εργαλείο για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση μιας παραγωγικής διαδικασίας.

1.3 Περιγραφή ανοικτού προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων

Το ανοικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Open Vehicle Routing problem – OVRP) είναι μια ιδιαίτερη παραλλαγή του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing problem – VRP). Στις περισσότερες παραλλαγές του VRP, οι περιορισμοί που προστίθενται, διαφοροποιούν επί της ουσίας τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζονται οι λύσεις. Η ιδιαιτερότητα αυτής της παραλλαγής έγκειται στο ότι διαφοροποιεί την αντικειμενική συνάρτηση του VRP, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται το κόστος των λύσεων. Στο OVRP, το χαρακτηριστικό που διαφέρει, είναι ότι τα οχήματα δεν απαιτείται να επιστρέψουν στη βάση τους ή αν χρειαστεί κάτι τέτοιο θα επιστρέψουν ακολουθώντας την ίδια διαδρομή με αντίστροφη σειρά. Σε όρους συνδυαστικής βελτιστοποίησης, αυτό μεταφράζεται ότι οι διαδρομές των οχημάτων αποτελούν Χαμιλτονιανά μονοπάτια και όχι Χαμιλτονιανοί κύκλοι όπως στο VRP. Βάσει λοιπόν της δομής του OVRP, οι επεκτάσεις - παραλλαγές που έχουν υλοποιηθεί στο VRP, μπορούν να γίνουν τροφή για έρευνα στο μέλλον (για κάποιες ήδη έχουν γίνει προσπάθειες), και να εφαρμοστούν και στο OVRP.

Πλήθος πραγματικών προβλημάτων μπορούν να αναπαρασταθούν από αυτό. Για παράδειγμα μια εταιρεία διανομής προϊόντων η οποία δε διαθέτει δικό της στόλο οχημάτων, συνεργάζεται με οδηγούς που χρησιμοποιούν τα δικά τους οχήματα και έχουν συμφωνήσει να πληρώνονται το κόστος του ταξιδιού τους μέχρι τον τελευταίο πελάτη που έχουν να παραδώσουν, δηλαδή δε συμπεριλαμβάνεται το κόστος από τον τελευταίο πελάτη μέχρι τον τελικό προορισμό τους. Άλλα μοντελοποιήσιμα προβλήματα είναι το πρόβλημα διανομής εφημερίδων κατ' οίκων ή η πορεία που θα ακολουθήσουν τα σχολικά λεωφορεία [37].



Σχήμα 1.2

Παράδειγμα λύσης για το πρόβλημα OVRP. Στη συγκεκριμένη λύση θα χρειαστούν τρία οχήματα – τρεις διαδρομές για να εξυπηρετηθούν επτά πελάτες.

1.4 Ιστορική αναδρομή

1.4.1 Ιστορική αναδρομή VRP

Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων πρωτοεμφανίστηκε στην επιστημονική κοινότητα πριν από πέντε δεκαετίες και πιο συγκεκριμένα το 1959 από τους Dantzig και Ramser. Αποτελεί ένα από τα πιο δημοφιλή αντικείμενα ερευνών (το ίδιο αλλά και οι παραλλαγές του), τόσο λόγω της δομής του και της πολυπλοκότητάς του, όσο και για την πρακτική του αξία. Οι πολυάριθμες έρευνες που έχουν δημοσιευθεί στην πάροδο των χρόνων, μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με τον αλγόριθμο που εφάρμοσαν οι ερευνητές για την επίλυση του προβλήματος. Έτσι τις χωρίζουμε σε τρεις κατηγορίες: έρευνες που χρησιμοποιούν ακριβείς, ευρετικούς ή μεθευρετικούς αλγόριθμους.

Οι δυο πιο διαδεδομένοι ακριβείς μέθοδοι που έχουν εφαρμοστεί στο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων είναι οι αλγόριθμοι διακλάδωσης και οριοθέτησης (branch and bound) και οι αλγόριθμοι διακλάδωσης και διακοπής (branch and cut). Με βασικό χαρακτηριστικό τους ότι είναι πρακτικά εφαρμόσιμοι για προβλήματα που συμπεριλαμβάνουν ως 100 πελάτες. Μάλιστα ο τρόπος εφαρμογής τους αρκετές φορές ήταν εμπνευσμένος από προϋπάρχουσες έρευνες για το πρόβλημα του πλανόδιου

πωλητή. Τέτοιες περιπτώσεις είναι οι αλγόριθμοι που ανέπτυξαν οι Laporte, Mercure και Nobert (1986) [34] και οι Fischetti, Toth, και Vigo (1994) [21]. Ο Miller (1995) [40] ανέπτυξε έναν αλγόριθμο παρόμοιας δομής, με τη διαφορά στο πως επιλέγεται το τόξο, όπου θα γίνει η διακλάδωση. Ο Fischer (1994) [19] χρησιμοποίησε ένα μεικτό σχήμα, όπου η διακλάδωση εφαρμοζόταν μόνο όταν δεν υπήρχε κανένα μερικό μονοπάτι στο τρέχον υποπρόβλημα. Άλλες αξιολογες έρευνες αυτής της κατηγορίας σχετίζονται με τη μέθοδο εύρεσης όλων των εφικτών διαδρομών του προβλήματος, όπου στόχος είναι να βρεθεί το σύνολο των διαδρομών με τη μικρότερο δυνατό κόστος, αλλά παράλληλα σε αυτό το σύνολο να εξυπηρετείται ο κάθε πελάτης, ακριβώς μια φορά. Για την εύρεση όλων των διαδρομών (χωρίς την πλήρη απαρίθμησή τους), υπάρχουν διάφορες τεχνικές, μια από αυτές είναι η τεχνική της γεννήτριας στηλών (column generating) και σε αυτήν επικεντρώθηκαν οι έρευνες τεσσάρων ομάδων επιστημόνων. (Agarwal, Mathur, και Salkin (1989) [1], Bixby, Coullard, και Simchi-Levi (1997) [6], Desrochers, Desrosiers, και Solomon (1992) [13], Hadjiconstantinou, Christofides, και Mingozzi (1995) [29]). Για την υλοποίηση της χρησιμοποίησαν αλγόριθμους οριοθέτησης και διακλάδωσης. Στην κατηγορία των αλγόριθμων διακλάδωσης και διακοπής ο όγκος των ερευνών είναι σαφώς μικρότερος ενώ ένα μεγάλο μέρος του δεν έχει δημοσιευθεί. Οι δυο πιο σημαντικές αναφορές στη βιβλιογραφία από τους Cornuejols and Harche (1993) [12] και Araque, Hall, and Magnanti (1990) [4], χρησιμοποιούν στοιχεία από την πολυεδρική ανάλυση και αναπαριστούν το πρόβλημα ως ένα πολύτοπο.

Το διάστημα από το 1960 ως το 1990, εφαρμόστηκαν με σχετική επιτυχία κλασσικοί ευρετικοί αλγόριθμοι, ενώ τα τελευταία χρόνια αναπτύχθηκαν μεθευρετικοί αλγόριθμοι. Οι διαδικασίες βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα έχουν σα βάση τους κλασσικούς ευρετικούς αλγόριθμους. Ίσως ο πιο γνωστός αλγόριθμος που έχει εφαρμοστεί στο πρόβλημα δρομολόγησης είναι ο αλγόριθμος αποταμίευσης των Clarke και Wright (1964) [10], που βασίζεται στην ιδέα της εξοικονόμησης κόστους από τη συγχώνευση δύο εφικτών διαδρομών. Αργότερα οι Gaskell (1967) [23] και Yellow (1970) [59], δημοσίευσαν έρευνες βασισμένες στον αλγόριθμο αποταμίευσης, όπως και οι Desrochers και Verhoog (1989) [14] και Altinkemer and Gavish (1991) [3]. Ο Nelson και άλλοι (1985) [43] εξερεύνησαν πιο πολύπλοκες δομές δεδομένων, βασισμένες σε σωρούς, με στόχο την μείωση των απαιτήσεων αποθήκευσης και επακόλουθα την παραγωγή πιο εύκολα ανανεώσιμων διαδικασιών βελτιστοποίησης. Οι Mole και Jameson (1976) [41], Christofides, Mingozzi και Toth (1979) [9], ανέπτυξαν αλγορίθμους με ακολουθιακή εισαγωγή κόμβων. Οι μεν πρώτοι δημιουργώντας μία διαδρομή ανά επανάληψη του αλγορίθμου τους, ενώ στη δεύτερη περίπτωση οι διαδρομές κατασκευάζονταν παράλληλα. Ευρετικούς δυο φάσεων υλοποιήθηκαν σε

διάφορες έρευνες, ενδεικτικά από τους: Gillett και Miller (1974) [24], Wren και Holliday (1972) [60], Fisher και Jaikumar (1981) [20], Bramel και Simchi-Levi (1995) [7].

Στην κατηγορία των μεθευρετικών αλγόριθμων, υπάρχουν έξι επιτυχημένοι τύποι αλγορίθμων που εφαρμόστηκαν στη διάρκεια των χρόνων: προσομοιωμένη ανόπτηση, καθορισμένη ανόπτηση, περιορισμένη αναζήτηση, γενετικοί αλγόριθμοι, αλγόριθμοι μυρμηγκιών και νευρωνικά δίκτυα. Οι έρευνες των Robuste, Daganzo, and Souleyrette (1990) [47], and Alfa, Heragu, and Chen (1991) [2] καθώς και του Osman (1993) [44] αποτελούν τις πιο αντιπροσωπευτικές με βάση την προσομοιωμένη ανόπτηση, ενώ οι κλασσικότερες έρευνες που περιέχουν καθορισμένη ανόπτηση και στις οποίες γίνονται δεκτές κινήσεις που δίνουν χειρότερες λύσεις αλλά με ένα προκαθορισμένο κατώφλι είναι των Dueck and Scheurer (1990) [16] και η εγγραφή προς εγγραφή μέθοδος του Dueck (1993) [15]. Η περιορισμένη αναζήτηση στην πορεία των χρόνων κρίνεται ως μια από τις πιο δημοφιλείς και πιο αποτελεσματικές μεθόδους. Οι σημαντικότερες έρευνες υλοποιήθηκαν από τον Osman (1993) [45], τους Xu and Kelly (1996) [61] που χρησιμοποίησαν μια ευφυή δομή γειτονιάς, όπου επιτρεπόντουσαν ανταλλαγές κόμβων και τοπικές διαδικασίες βελτιστοποίησης, τους Rochat and Taillard (1995) [48], όπου χρησιμοποιήθηκε προσαρμοστική μνήμη που περιείχε μια λίστα ποιοτικών λύσεων, και ανανεωνόταν δυναμικά κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αναζήτησης και τους Toth and Vigo (2003) [58], που ονόμασαν τη μέθοδο τους Σπυρωτή Περιορισμένη Αναζήτηση (Granular Tabu Search) και βασίστηκε στην ιδέα του αποκλεισμού όλων των τόξων που το κόστος τους ξεπερνούσε ένα ορισμένο κατώφλι. Ο όγκος ερευνών βασισμένων σε γενετικούς αλγόριθμους, κρίνεται μάλλον ανεπαρκής. Οι πιο σημαντικοί γενετικοί αλγόριθμοι αναπτύχθηκαν από τους Goldberg and Lingle (1985) [27], Schmitt (1995) [50] και Bean (1994) [5]. Η διαφορά των τριών ερευνών έγκειται στη διαφορετική χρήση τελεστών μετάλλαξης ή διασταύρωσης. Οι Colormi, Dorigo, and Maniezzo (1991) [11] είναι οι δημιουργοί του αλγόριθμου των μυρμηγκιών. Αποτύπωσαν αλγοριθμικά και προσομοίωσαν τον τρόπο με τον οποίο εξερευνούν τα αληθινά μυρμηγκία το περιβάλλον, οι τιμές των λύσεων αξιολογούνται βάσει της ποιότητάς τους και κρατούνται σε μια προσαρμοστική μνήμη κατά αναλογία με τα ίχνη φερομόνης που αφήνουν στην πραγματικότητα τα μυρμηγκία. Οι δημιουργοί δοκίμασαν τον αλγόριθμό τους στο πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή, ενώ μέχρι σήμερα έχει δημοσιευθεί ένας μικρός αριθμός ερευνών σχετικός με το πρόβλημα δρομολόγησης, δύο εκ των οποίων ανήκουν στον Kawamura et al. (1998) [33]. Τέλος βασισμένες στα νευρωνικά δίκτυα είναι οι έρευνες των Ghaziri (1996) [25], Matsuyama (1991) [39], and Schumann and Retzko (1995) [52], όπου γενίκευσαν μεθόδους ήδη εφαρμοσμένες στο πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή, προσαρμοσμένες στις ιδιαιτερότητες του προβλήματος δρομολόγησης [45], [57].

1.4.2 Ιστορική αναδρομή OVRP

Το OVRP έχει προταθεί περίπου τρεις δεκαετίες πριν, αλλά μόνο τα τελευταία χρόνια έχει προσελκύσει πραγματικά το ενδιαφέρον των ερευνητών. Η πρώτη αναφορά στο πρόβλημα γίνεται από τον Shrage το 1981 [51], αλλά από την πρώτη δημοσίευση μέχρι και το τέλος του αιώνα δεν είχε πραγματοποιηθεί ανάλογη έρευνα. Από το 2000 και μετά όμως πραγματοποιήθηκαν αρκετές αξιόλογες έρευνες, οι περισσότερες εκ των οποίων εμπλέκουν ευρετικούς ή μεθευρετικούς αλγόριθμους, αλλά η ερευνητική δραστηριότητα δεν παύει να είναι περιορισμένη.

Οι Sariklis και Powell [49], πρότειναν έναν αλγόριθμο δύο φάσεων, μία φάση για ομαδοποίηση των κόμβων και μία για την εύρεση βέλτιστης διαδρομής ανά ομάδα (Cluster first, route second - CFRS). Στην πρώτη φάση ο αλγόριθμος φτιάχνει ομάδες κόμβων, λαμβάνοντας υπόψη τη χωρητικότητα των οχημάτων ,και έπειτα ισορροπεί τις ομάδες, ανακατανέμοντας τους πελάτες. Στη δεύτερη φάση παράγονται ανοικτές διαδρομές μέσω τη λύσης του προβλήματος του ελάχιστου τανύοντος δέντρου. Έπειτα χρησιμοποιούνται ποινές ώστε να τροποποιηθούν οι λύσεις και επαναληπτικά μετατρέπει τις ανέφικτες λύσεις σε εφικτές. Ο Brandao [8], για τη δημιουργία αρχικής λύσης χρησιμοποίησε μια ποικιλία από μεθόδους, όπως τον αλγόριθμο του πλησιέστερου γείτονα ή τη μέθοδο του K – δέντρου. Στη συνέχεια εφάρμοσε σε αυτή τη λύση είτε άλλη μια φορά τον αλγόριθμο του πλησιέστερου γείτονα είτε διαδικασίες, με μικρές διαταράξεις με σκοπό να βελτιώσει κάθε διαδρομή. Επόμενο βήμα η χρησιμοποίηση της περιορισμένης αναζήτησης (tabu search), όπου επιτρέπονται δύο ειδών κινήσεις. Είτε κίνηση εισαγωγής (μετακίνηση κάποιου κόμβου από μια διαδρομή σε κάποια άλλη), είτε κίνηση ανταλλαγής (δηλαδή αμοιβαία μετάθεση 2 κόμβων από δύο διαφορετικές διαδρομές). Ο Ταραντίλης και άλλοι [53], αποσπούσαν ακολουθίες σημείων (τις οποίες περιέγραφαν με την αγγλική λέξη bones) από έναν αριθμό λύσεων και δημιουργούσαν μια καινούργια διαδρομή, χρησιμοποιώντας προσαρμοστική μνήμη. Αν για ένα μεγάλο αριθμό διαδρομών στο σύνολο των λύσεων συναντούσαν μια συγκεκριμένη ακολουθία σημείων, υπέθεταν ότι αυτή θα έπρεπε να εμφανίζεται και σε κάποια διαδρομή μιας λύσης υψηλής ποιότητας. Ο αλγόριθμος που υλοποίησαν είχε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση παράγει ένα σύνολο αρχικών λύσεων, οι οποίες βελτιωνόντουσαν με τον κλασικό αλγόριθμο της περιορισμένης αναζήτησης. Στη δεύτερη φάση, εφαρμοζόταν η απόσπαση των υποσχόμενων ακολουθιών σημείων, δημιουργώντας νέες λύσεις και για την περαιτέρω βελτίωση τους χρησιμοποιήθηκε και σε αυτή τη φάση η περιορισμένη αναζήτηση. Σε μεταγενέστερες εργασίες τους, ο Ταραντίλης και άλλοι [54], χρησιμοποίησαν ένα χαρακτηριστικό της προσομοιωμένης ανόπτησης, το κατώφλι. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, επέτρεπαν να κρατηθεί η νέα

λύση που παραγόταν, ακόμα κι αν αύξανε την παλιά, αλλά δέχονταν αύξηση μέχρι Τ μονάδες. Το κατώφλι το χρησιμοποίησαν σε δύο διαφορετικές έρευνες, με διαφορετικό τρόπο. Στην πρώτη επέτρεπαν το κατώφλι Τ να αυξάνεται κατά τη διάρκεια της αναζήτησης, ενώ στη δεύτερη χρησιμοποιούσαν μια λίστα με διαφορετικές τιμές για το Τ. Εφάρμοσαν μια σειρά από μεθόδους τοπικής αναζήτησης: 2-opt, swap και relocate. Ο Fu και άλλοι [22], για τη δημιουργία αρχικής λύσης, χρησιμοποίησαν έναν ευρετικό αλγόριθμο. Υπολόγιζαν τον κόμβο με τη μακρινότερη απόσταση από την αποθήκη και πρόσθεταν κόμβους μέχρι τα οχήματα να είναι επαρκώς γεμάτα. Στη συνέχεια επέλεγαν τυχαία δύο κόμβους και προχωρούσαν σε μία από τις εξής τέσσερις κινήσεις τοπικής αναζήτησης: επαναεισαγωγή τους σε διαφορετικά σημεία ή ανταλλαγή θέσεων μεταξύ τους ή τοπική αναζήτηση 2-opt ή ανταλλαγή από τους κόμβους, μέχρι το τέλος μιας διαδρομής. Πολλοί ανάλογοι ευρετικοί αλγόριθμοι μπορούν να εφαρμοστούν δίνοντας ισχύ στην αναζήτηση. Οι νέες λύσεις γινόντουσαν δεκτές, σύμφωνα με τα κριτήρια της προσομοιωμένης ανόπτωσης. Άλλες προτάσεις για το ανοικτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων, περιλαμβάνουν μεταβλητή τοπική αναζήτηση, που εξετάζουν αντιστροφές ή ανταλλαγές σε στοιχεία γειτονιών ή έναν εξελικτικό αλγόριθμο, όπου ο αρχικός πληθυσμός υποβλήθηκε σε διαδικασία μετάλλαξης και οι απόγονοι τους βελτιώθηκαν με έναν υβριδικό αλγόριθμο που αποτελούσε σύνθεση περιορισμένης αναζήτησης και καθοδηγούμενης τοπικής αναζήτησης. Τον αλγόριθμο των μυρμηγκιών σε συνεργασία με την περιορισμένη αναζήτηση παρουσίασαν ο Li και άλλοι [36].

1.5 Μοντελοποίηση προβλημάτων

1.5.1 Μοντελοποίηση VRP

Η μαθηματική αναπαράσταση – προτυποποίηση για το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων δίνεται παρακάτω. Σημειώνουμε ότι αυτή δεν είναι η μοναδική, καθώς κατά καιρούς έχουν δοθεί πολλές και διαφορετικές.

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{αν το όχημα } k \text{ επισκέπτεται τον πελάτη } j \text{ ακριβώς μετά τον πελάτη } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο πελάτης } i \text{ επισκέπτεται από το όχημα } k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} \sum_k x_{ijk} \quad (1.3)$$

$$\text{υπό} \sum_k y_{ik} = \begin{cases} 1, & i=2, \dots, n \\ m, & i=1 \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\sum_i q_i y_{ij} \leq Q_k \quad k=1, \dots, m \quad (1.5)$$

$$\sum_j x_{ijk} = \sum_j x_{jik} = y_{ik} \quad i=1, \dots, n \quad (1.6)$$

$$k=1, \dots, m$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad \text{για όλα τα } S \subseteq \{2, \dots, n\} \quad (1.7)$$

$$k=1, \dots, m$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i=1, \dots, n \quad (1.8)$$

$$k=1, \dots, m$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i, j=1, \dots, n \quad (1.9)$$

$$k=1, \dots, m$$

Ο περιορισμός 1.4 δείχνει ότι κάθε πελάτης εκχωρείται σε ένα μόνο όχημα, εκτός από την αποθήκη που την επισκέπτονται όλα τα οχήματα. Ο περιορισμός 1.5 είναι ο περιορισμός χωρητικότητας των οχημάτων, ενώ ο περιορισμός 1.6 δείχνει ότι ένα όχημα που επισκέπτεται ένα πελάτη φεύγει από τον πελάτη [63].

1.5.2 Μοντελοποίηση OVRP

Η μοντελοποίηση για το ανοιχτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων είναι παρόμοια με τη μοντελοποίηση του κλασικού προβλήματος, η μόνη διαφορά έχει να κάνει στον περιορισμό που αφορά τη φυγή των οχημάτων από τους πελάτες που επισκέπτονται. Σε αυτό το σημείο θεωρούμε από τον ορισμό του προβλήματος ότι από τον τελευταίο πελάτη το όχημα δεν φεύγει.

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{αν το όχημα } k \text{ επισκέπτεται τον πελάτη } j \text{ ακριβώς μετά τον πελάτη } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.10)$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο πελάτης } i \text{ επισκέπτεται από το όχημα } k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} \sum_k x_{ijk} \quad (1.12)$$

υπό

$$\sum_k y_{ik} = \begin{cases} 1, & i=2,\dots,n \\ m, & i=1 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\sum_i q_i y_{ij} \leq Q_k \quad k=1,\dots,m \quad (1.14)$$

$$\sum_j x_{ijk} = \sum_j x_{jik} = y_{ik} \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n-1 \\ k=1,\dots,m \end{matrix} \quad (1.15)$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad \begin{matrix} \text{για όλα τα } S \subseteq \{2,\dots,n\} \\ k=1,\dots,m \end{matrix} \quad (1.16)$$

$$y_{ik} \in \{0,1\}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m \end{matrix} \quad (1.17)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad \begin{matrix} i,j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m \end{matrix} \quad (1.18)$$

1.6 Κατεύθυνση της παρούσας εργασίας

Λόγω της τεράστιας πολυπλοκότητας που συναντάμε σε προβλήματα NP – πλήρη όπως αυτά, στόχος μας είναι να βρούμε μια βέλτιστη λύση με ένα λογικό υπολογιστικό κόστος. Μια λογική επιλογή είναι να εφαρμόσουμε ένα μεθευρετικό αλγόριθμο ώστε να παράγουμε γρήγορα σχετικά καλές λύσεις. Στην παρούσα εργασία επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο της Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης. Αποτελεί μια γενετική προσομοίωση του αλγορίθμου της διαφορικής εξέλιξης του οποίου η χρήση είναι αυξανόμενη τα τελευταία χρόνια, έχει προσφέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πλήθος προβλημάτων (με συνεχείς μεταβλητές) που εφαρμόστηκε και δεν έχει παρουσιαστεί παρόμοια έρευνα σε σχετικό πρόβλημα. Παράλληλα έγινε προσπάθεια να εφαρμοστεί η κλασική μέθοδος της διαφορικής εξέλιξης αλλά τα αποτελέσματα δεν ήταν ικανοποιητικά, καθώς είναι μια μέθοδος που δημιουργήθηκε στοχεύοντας στη λύση προβλημάτων συνεχών μεταβλητών. Η Γενετική Διαφορική Εξέλιξη στοχεύει να λύσει αυτή την αδυναμία της κλασικής μεθόδου. Στην πρακτική εφαρμογή χρησιμοποιήσαμε

έναν υβριδικό αλγόριθμο που περιλαμβάνει τη μέθοδο της γενετικής διαφορικής εξέλιξης συνδυασμένη με τοπική αναζήτηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

2.1 Περιγραφή μεθευρετικών αλγορίθμων

Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι είναι μέθοδοι επίλυσης που συνδυάζουν διαδικασίες τοπικής αναζήτησης και υψηλότερου επιπέδου στρατηγικές για να δημιουργήσουν μια διαδικασία που είναι ικανή να ξεφύγει από κάποιο τοπικό ελάχιστο. Τα τελευταία χρόνια η χρήση τους είναι έντονη για την επίλυση NP – πλήρων προβλημάτων.

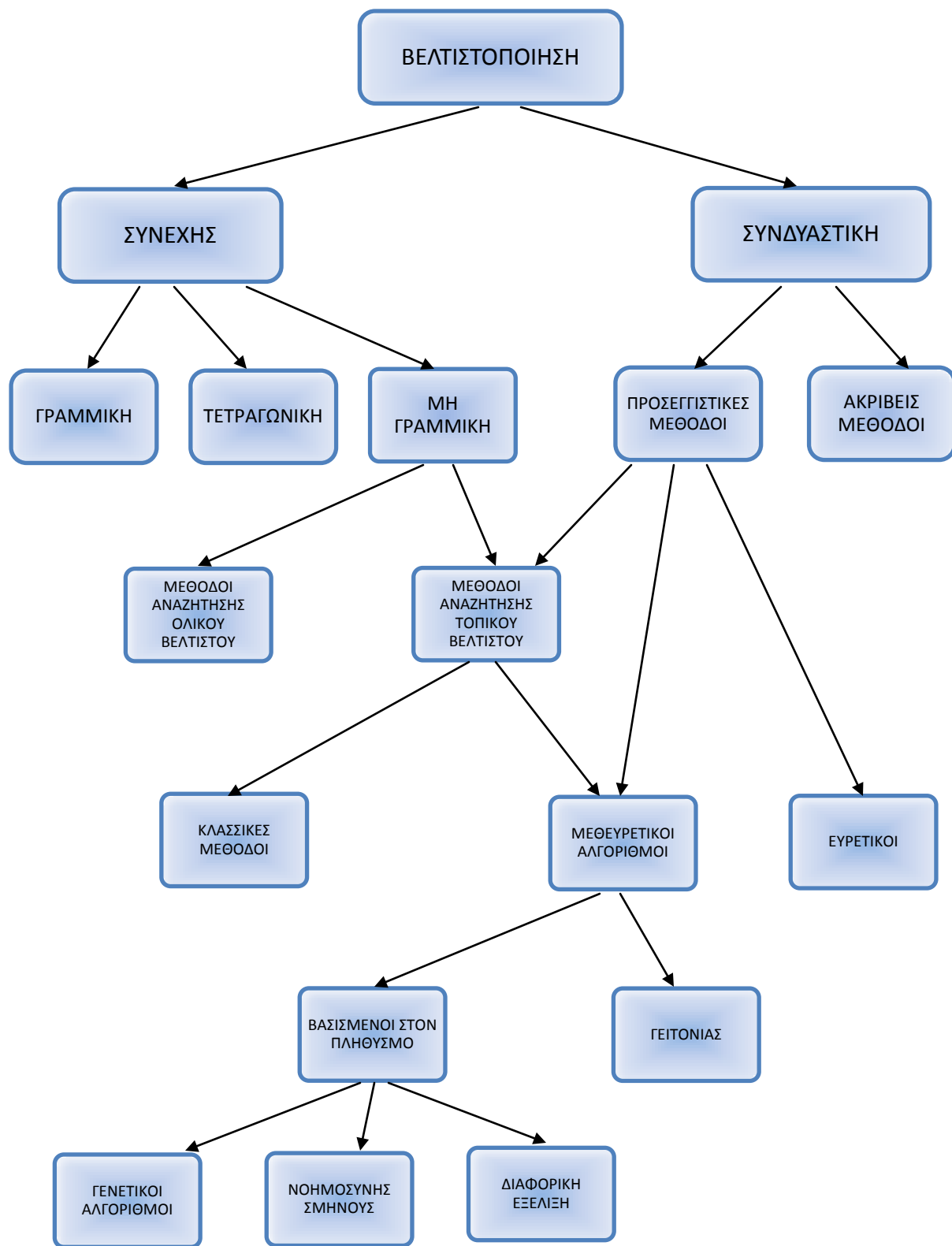
Χρησιμοποιούνται για να επιλύσουμε προβλήματα για τα οποία γνωρίζουμε πολύ λίγα που μπορούν να μας βοηθήσουν: δε γνωρίζουμε πως θα μοιάζει η βέλτιστη λύση, δε γνωρίζουμε πως θα τη βρούμε με κάποια συγκεκριμένη, δημοφιλή, τακτική και η πλήρη απαρίθμηση των λύσεων είναι αδύνατη, λόγω του εύρους του πεδίου των λύσεων. Όμως, όταν μας δοθεί μια οποιαδήποτε λύση μπορούμε να τη δοκιμάσουμε και να κρίνουμε πόσο ικανοποιητική είναι [38].

Στην παρούσα διατριβή εξετάζουμε το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων και μια ιδιαίτερη παραλλαγή του, το ανοιχτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων, τα οποία περιγράφονται παραπάνω. Η απλούστερη κίνηση που θα σκεφτόμασταν για την επίλυσή τους, θα ήταν να κάνουμε μια τυχαία αναζήτηση. Απλά θα δοκιμάζαμε διάφορες τυχαίες λύσεις, για όσο χρόνο διαθέταμε, και θα επιλέγαμε στο τέλος εκείνη που έχει την καλύτερη απόδοση. Εμβαθύνοντας περισσότερο θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο Hill-climbing, που είναι ο απλούστερος μεθευρετικός αλγόριθμος. Παίρνουμε ένα σύνολο από τυχαίες λύσεις και επαναληπτικά κάνουμε μια μικρή τυχαία τροποποίηση στο σύνολο των λύσεων. Αν το καινούργιο σύνολο είναι καλύτερο από το παλιό κρατάμε το καινούριο, διαφορετικά συνεχίζουμε με το παλιό. Η μέθοδος εκμεταλλεύεται ένα αξίωμα το οποίο ισχύει συνήθως σε προβλήματα αυτού του είδους: λύσεις που είναι παρόμοιες, τείνουν να έχουν παρόμοια συμπεριφορά και ποιότητα, οπότε μικρές τροποποιήσεις σε αυτές, γενικά θα επιφέρουν μικρές βελτιώσεις στην ποιότητα των λύσεων. Η διαδικασία αναλογικά θα μπορούσε να συγκριθεί με την προσπάθεια να ανεβούμε σε ένα λόφο.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό σχεδόν όλων των μεθευρετικών αλγορίθμων είναι η επεξεργασία τυχαίων αναζητήσεων και μεθόδων όπως το hill-climbing, και γενικότερα παραδοσιακών αλγορίθμων σαν υποδιαδικασίες τους. Άλλα βασικά χαρακτηριστικά τους, και συγκεκριμένα μιας ολόκληρης οικογένειας μεθευρετικών αλγορίθμων, των γενετικών, είναι ότι πίσω από τη σύλληψή τους κρύβεται ένα φαινόμενο που συναντάμε στη φύση

(όπως ο αλγόριθμος των μυρμηγκιών), μπορούν να μεταφερθούν εύκολα σε παράλληλη μορφή και είναι προσαρμοστικοί αλγόριθμοι. Στοιχεία που συνηθίζονται στην πλειοψηφία τους, είναι: η χρήση ενός πλήθους επαναληπτικών δοκιμών, περιλαμβάνουν ένα ή περισσότερους πράκτορες, λειτουργούν βάση ενός μηχανισμού συνεργασίας και ανταγωνισμού, και περιλαμβάνουν διαδικασίες αυτο-τροποποιήσεων των ευρετικών παραμέτρων ή ακόμα και της αναπαράστασης του προβλήματος [18], [46].

Ανάλογα με τον αριθμό πρακτόρων που χρησιμοποιούν (έναν ή περισσότερους) μπορούμε να τους διαχωρίσουμε σε δύο κατηγορίες. Μεθευρετικοί βασιζόμενοι στη γειτονιά και μεθευρετικοί βασιζόμενοι στον πληθυσμό. Ένας από αυτούς είναι και ο αλγόριθμος της διαφορικής εξέλιξης ο οποίος ανήκει στη δεύτερη κατηγορία, όπως και η γενετική προσομοίωσή του.



Σχήμα 2.1
Σχεσιακό Διάγραμμα μεθόδων βελτιστοποίησης [18]

Οι γενετικοί αλγόριθμοι

Η ιδέα της μίμησης της διαδικασίας της εξέλιξης στην αναζήτηση για καλύτερες λύσεις οδήγησε στην ανάπτυξη του πεδίου των γενετικών αλγορίθμων. Αναλυτικότερα, βασίζονται σε μια μίμηση της βιολογικής διαδικασίας στην οποία νέοι και καλύτεροι πληθυσμοί μεταξύ διαφορετικών ειδών αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της εξέλιξης. Έτσι, σε αντίθεση με τους περισσότερους ευρετικούς αλγορίθμους, οι γενετικοί κατά τη διάρκεια της αναζήτησης μιας καλύτερης λύσης χρησιμοποιούν πληροφορίες από ένα πληθυσμό λύσεων που ονομάζονται άτομα. Κάθε αλγόριθμος αυτής της κατηγορίας είναι μια στοχαστική επαναληπτική διαδικασία που διατηρεί το μέγεθος του πληθυσμού σταθερό σε κάθε επανάληψη, η οποία ονομάζεται γενιά. Η βασική τους λειτουργία είναι το ταίριασμα δύο λύσεων με στόχο να δημιουργηθεί μια νέα λύση. Για να δημιουργηθεί μια νέα λύση στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων εφαρμόζονται δύο τελεστές, ένας δυαδικός τελεστής που ονομάζεται διασταύρωση και ένας μοναδιαίος τελεστής που ονομάζεται μετάλλαξη. Η διασταύρωση παίρνει δύο άτομα που ονομάζονται γονείς και παράγει με την ανταλλαγή τμημάτων των γονέων δύο νέα άτομα που ονομάζονται απόγονοι. Κάθε άτομο στον πληθυσμό αντιπροσωπεύει μια υποψήφια λύση για το πρόβλημα επιλογής υποσυνόλου χαρακτηριστικών.

Υπάρχουν δύο μοντέλα για τη διαδικασία της εξέλιξης, μοντέλα που χρησιμοποιούν διαφορετικές εξισώσεις για τη δυναμική επιλογή και μοντέλα που χρησιμοποιούν 'χειριστές εξέλιξης': διασταύρωση, μετάλλαξη και επιλογή, που επενεργούν στα χαρακτηριστικά.

Η αναλογία ανάμεσα στη συνδυαστική βελτιστοποίηση και στους γενετικούς αλγορίθμους καθορίζεται από μια αντιστοιχία ανάμεσα στο χώρο λύσης του προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης και σε ένα γενετικό κώδικα στη μορφή μίας προς μίας απεικόνισης ανάμεσα σε κάθε σημείο στο χώρο λύσης και σε κάθε πιθανό κώδικα. Ο γενετικός κώδικας συνήθως αναπαρίσταται με δυαδικά στοιχεία, αλλά και άλλες δομές που είναι εύκολες στο χειρισμό είναι εξίσου πιθανές.

Το γεγονός ότι οι γενετικοί αλγόριθμοι έχουν προσαρμόσει στρατηγικές βιολογικής εξέλιξης οδηγεί στο να μην υπάρχει μόνο μία αλλά ένας πληθυσμός από αρχικές λύσεις. Αυτό σημαίνει ότι ένας πληθυσμός αναπαρίσταται από ξεχωριστά άτομα. Αντίθετα με τους βιολογικούς οργανισμούς όπου κάθε κύτταρο ενός συγκεκριμένου είδους μεταφέρει ένα συγκεκριμένο αριθμό από χρωμοσώματα, τα ξεχωριστά άτομα στους γενετικούς αλγόριθμους αποτελούνται από ένα χρωμόσωμα, και για αυτό το λόγο οι όροι ξεχωριστά άτομα και χρωμόσωμα χρησιμοποιούνται χωρίς ιδιαίτερη εννοιολογική διαφορά. Κάποια χρωμοσώματα, τα οποία ονομάζονται γονείς, επιλέγονται από τον τρέχοντα πληθυσμό για αναπαραγωγή. Στο αποτέλεσμα που παίρνουμε

εφαρμόζεται στη συνέχεια τοπική αναζήτηση, η φάση μετατροπής και η λύση που παίρνουμε είναι ο απόγονος. Οι απόγονοι προκύπτουν στην ουσία από δύο (συνήθως) διαδικασίες τη διασταύρωση και τη μετάλλαξη, στη συνέχεια υπολογίζεται μέσω μιας συνάρτησης ποιότητας η αξία του απογόνου και αν προκύπτει καλύτερη ποιοτικά λύση κρατάμε τον απόγονο στον πληθυσμό στη θέση του γονέα του. Διαφορετικά ο πληθυσμός παραμένει ως έχει.

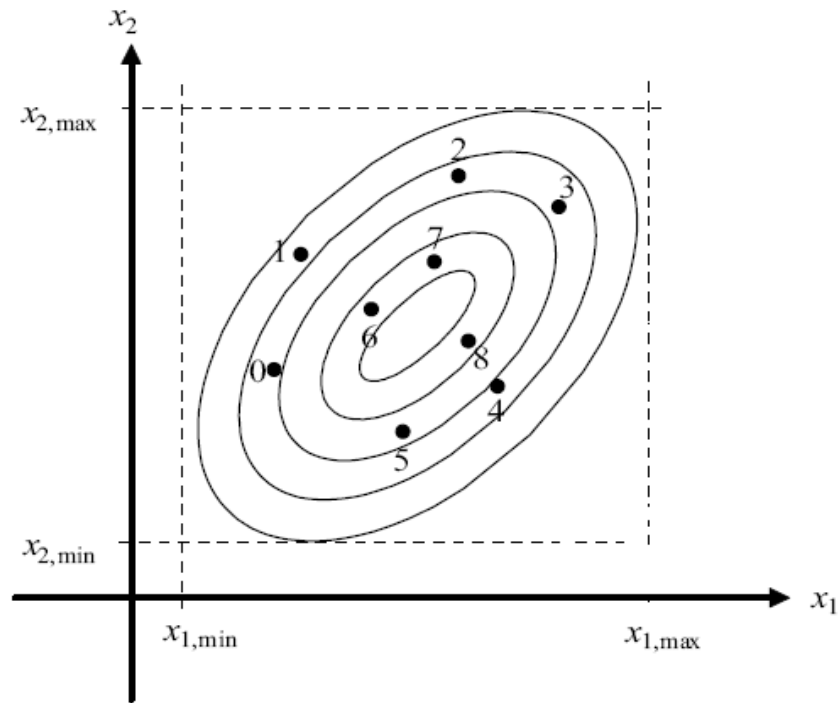
Συμπερασματικά μπορούμε να συγκεντρώσουμε τους βασικούς παράγοντες από τους οποίους αποτελείται κάθε γενετικός και γενικότερα κάθε εξελικτικός αλγόριθμος:

- Η κωδικοποίηση των λύσεων έτσι ώστε να αναπαριστούν κάποιο χρωμόσωμα
- Μια συνάρτηση ποιότητας που εκτιμά την αξία κάθε ατόμου του πληθυσμού
- Αρχικοποίηση του πληθυσμού
- Επιλογή τελεστών διασταύρωσης και μετάλλαξης
- Τελεστές επιλογής ατόμων από γενιά σε γενιά [63]

2.2 Μια πρώτη ματιά στη μέθοδο της διαφορικής εξέλιξης

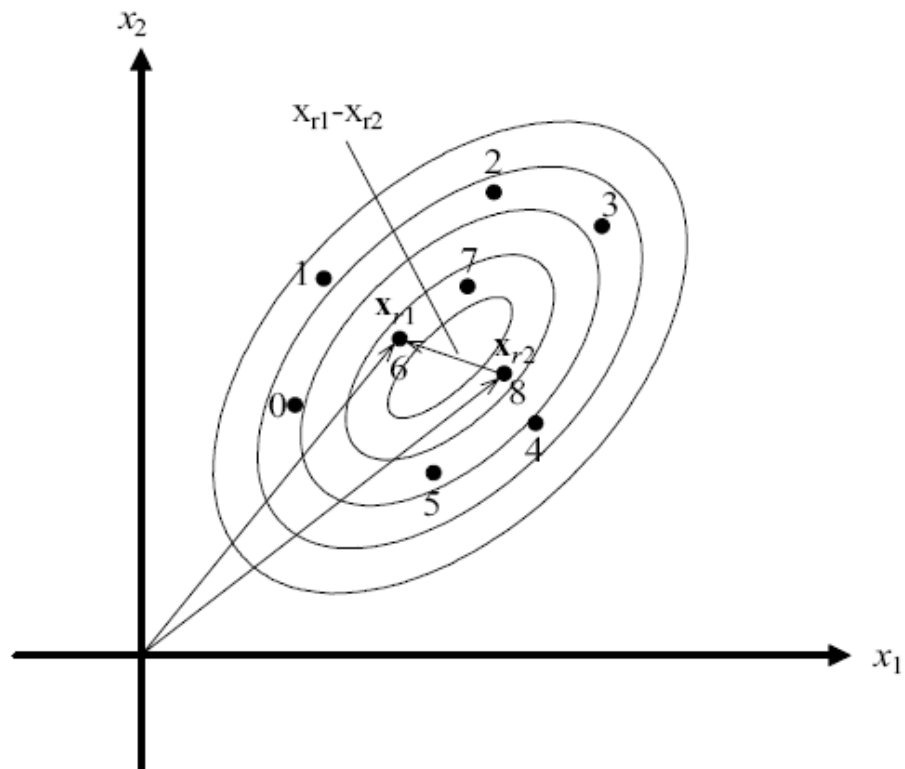
Η μέθοδος της διαφορικής εξέλιξης στην πρώτη της μορφή δημοσιεύτηκε το 1995 από τους Storn και Price. Τα επόμενα χρόνια πιστοποιήθηκε η αξία της μέσω διεθνών διαγωνισμών όπου ανταγωνίστηκε με πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα τους υπάρχοντες μεθευρετικούς αλγόριθμους, ενώ δοκιμάστηκε και σε πλήθος πρακτικών εφαρμογών. Στην πορεία των χρόνων προτάθηκαν και εφαρμόστηκαν διάφορες βελτιώσεις - παραλλαγές στη μέθοδο, με συνέπεια να έχει τη σημερινή μορφή, στην οποία δίνεται η δυνατότητα στους ερευνητές, ανάλογα με το πρόβλημα ή ανάλογα τα σημεία στα οποία θέλουν να δώσουν βαρύτητα, να ακολουθούν τη στρατηγική που τους ταιριάζει.

Όπως σχεδόν όλοι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, η μέθοδος της διαφορικής εξέλιξης είναι ένας βασιζόμενος στον πληθυσμό αλγόριθμος που ξεκινά από πολλαπλά αρχικά σημεία, τυχαία επιλεγμένα, εξετάζοντας την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε καθένα από αυτά, σχήμα (2.2). Ο αριθμός των τυχαίων σημείων NP είναι προκαθορισμένος και όλα μαζί αποτελούν τον αρχικό πληθυσμό του προβλήματος.

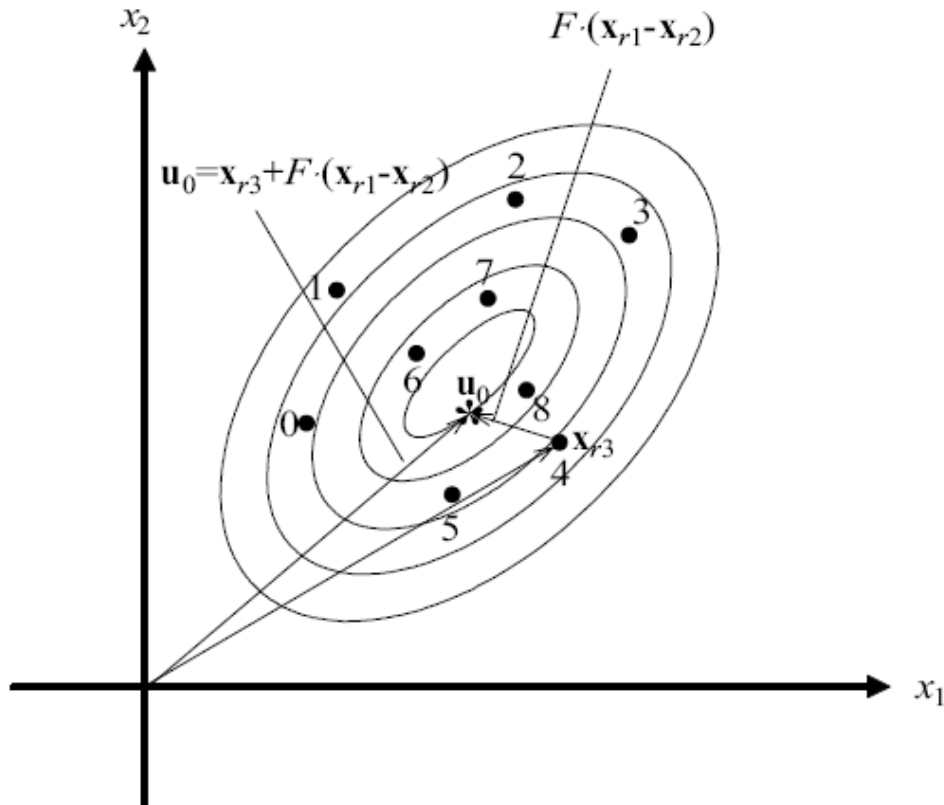


Σχήμα 2.2
Ο αρχικός πληθυσμός

Η παραγωγή νέων σημείων, όπως και σε άλλες μεθόδους, γίνεται μέσω της διατάραξης των σημείων - διανυσμάτων του υπάρχοντος πληθυσμού. Η διαφορά της μεθόδου είναι ο τρόπος που 'πειράζουμε' τα υπάρχοντα διανύσματα. Για την εφαρμογή αυτού του είδους μετάλλαξης, επιλέγονται δύο τυχαία διανύσματα του πληθυσμού, βρίσκουμε τη διαφορά τους (σχήμα 2.3), την οποία την πολλαπλασιάζουμε με ένα βάρος, έναν παράγοντα κανονικοποίησης. Στη συνέχεια επιλέγουμε ένα τρίτο διάνυσμα του πληθυσμού, στο οποίο προσθέτουμε αυτή την κανονικοποιημένη διαφορά. Το νέο διάνυσμα που θα προκύψει είναι το δοκιμαστικό $\mathbf{u}_0$ (σχήμα 2.4). Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι στην πρώτη μορφή της διαφορικής εξέλιξης απουσίαζε η διαδικασία της διασταύρωσης. Όμως πλέον υπάρχει η επιλογή στους ερευνητές να τη χρησιμοποιήσουν αν θέλουν. Σε περίπτωση χρήσης της τα δοκιμαστικά διανύσματα είναι τα παράγωγα της διασταύρωσης.



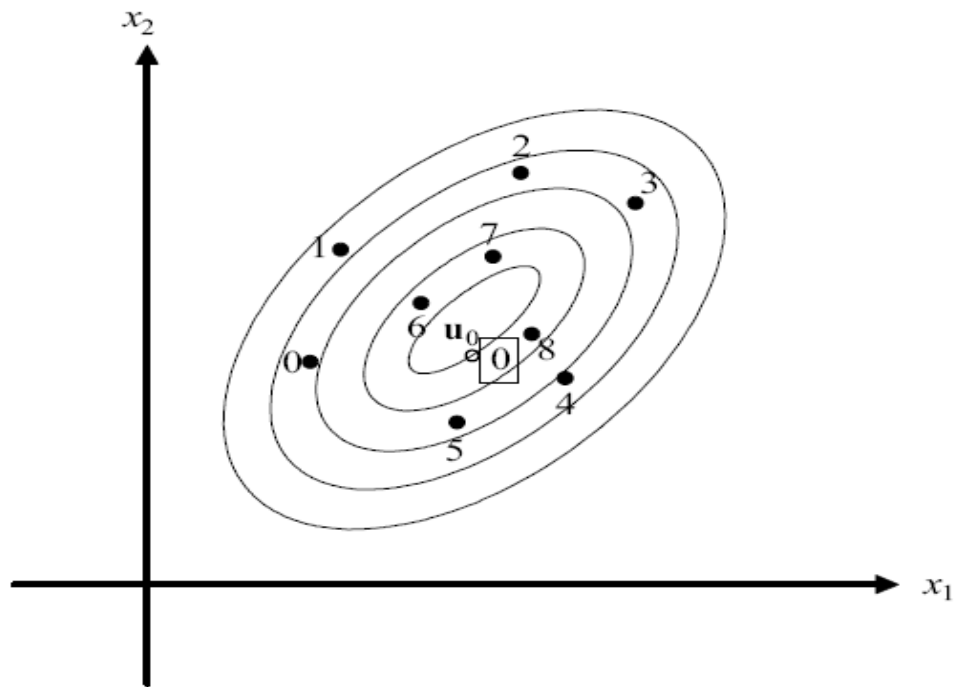
Σχήμα 2.3
Υπολογισμός της διαφοράς δύο τυχαίων διανυσμάτων του πληθυσμού



Σχήμα 2.4

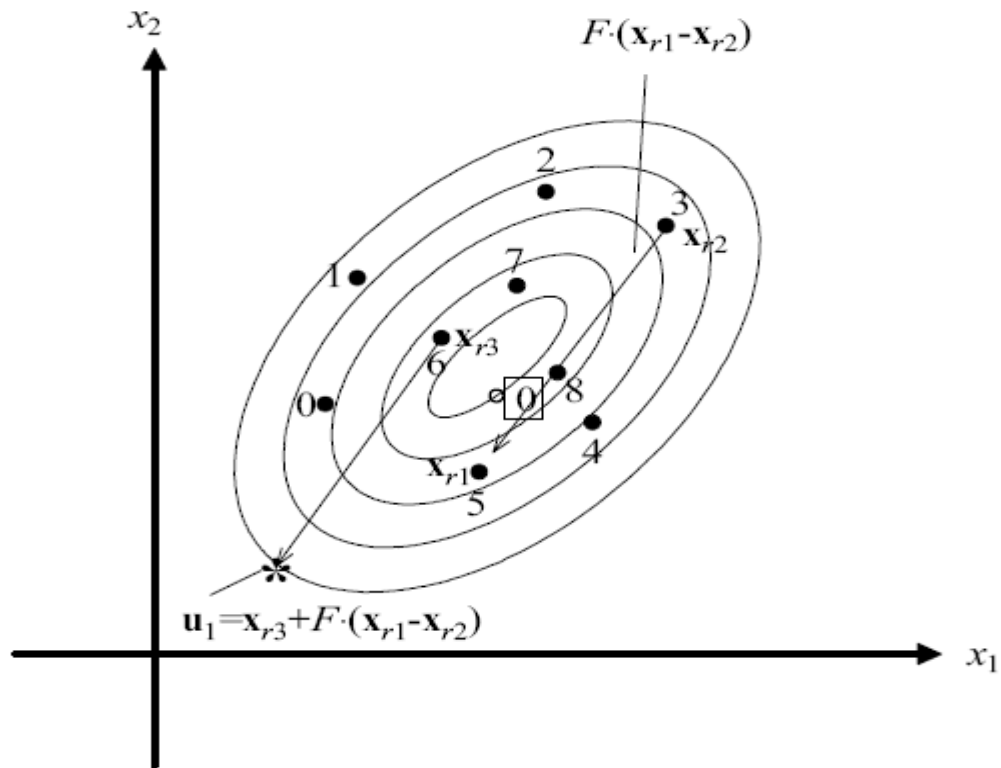
Μετάλλαξη: Στο διάνυσμα x_{r3} , προσθέτουμε την κανονικοποιημένη διαφορά των δύο άλλων τυχαίων διανυσμάτων. Το αποτέλεσμα είναι το δοκιμαστικό διάνυσμα u_0 .

Στο στάδιο της επιλογής το δοκιμαστικό διάνυσμα u_0 συγκρίνεται με το διάνυσμα του πληθυσμού το οποίο το ακολουθεί ο ίδιος δείκτης. Στο παράδειγμα που βλέπουμε στα σχήματα η σύγκριση θα γίνει ανάμεσα στα διανύσματα που έχουν δείκτη 0. Το διάνυσμα που έχει την καλύτερη απόδοση προκρίνεται και πλέον θα ανήκει στον πληθυσμό της επόμενης γενιάς (σχήμα 2.5). Στα σχήματα 2.6 και 2.7 απεικονίζεται η συνέχεια της διαδικασίας. Ουσιαστικά η διαδικασία θα συνεχιστεί μέχρι να παραχθεί δοκιμαστικό διάνυσμα για όλα τα διανύσματα του τρέχοντος πληθυσμού. Τα διανύσματα που προκρίθηκαν από τον ανταγωνισμό δοκιμαστικών – τρέχοντος πληθυσμού, θα αποτελέσουν τον πληθυσμό – γονέα στον επόμενο εξελικτικό κύκλο (στην επόμενη επανάληψη της μεθόδου).



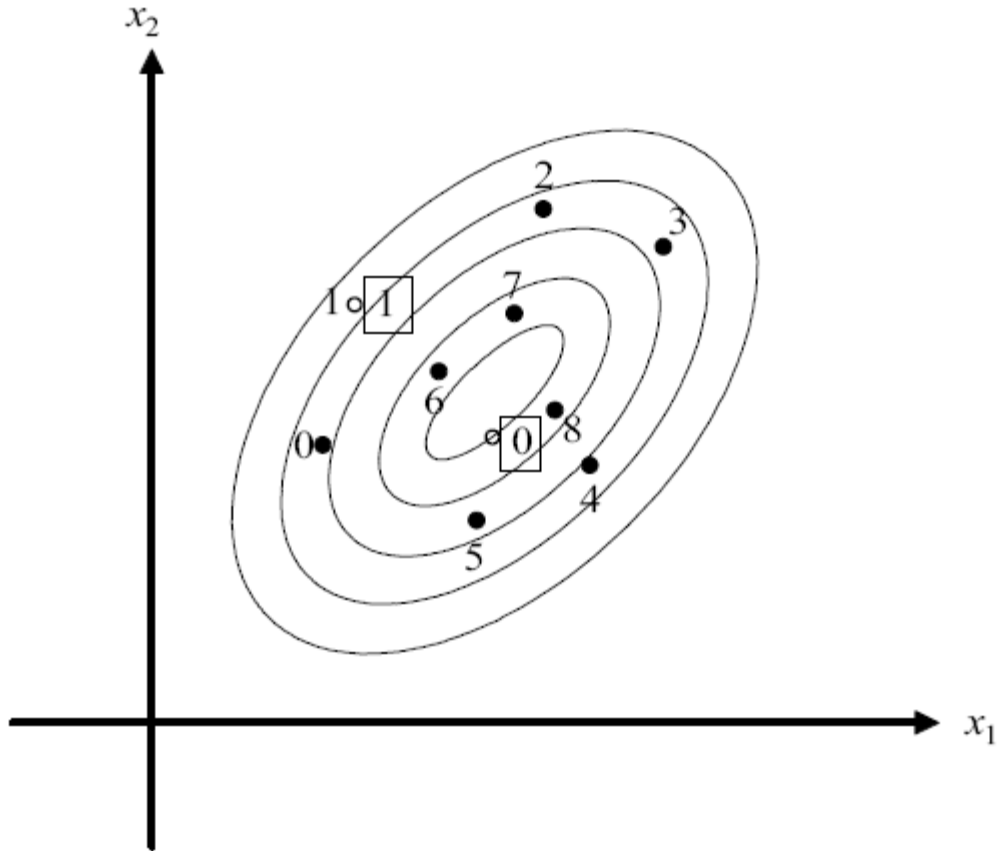
Σχήμα 2.5

Το διάνυσμα u_0 ανταγωνίζεται το διάνυσμα νούμερο 0 του τρέχοντος πληθυσμού. Το διάνυσμα με την καλύτερη απόδοση θα είναι στο εξής το διάνυσμα νούμερο 0 του πληθυσμού.



Σχήμα 2.6

Μετάλλαξη: Εύρεση δοκιμαστικού διανύσματος u_1 , το οποίο θα ανταγωνιστεί το διάνυσμα του τρέχοντος πληθυσμού με δείκτη 1.



Σχήμα 2.7

Επιλογή: Στη συγκεκριμένη περίπτωση καλύτερη απόδοση έχει το διάνυσμα του τρέχοντος πληθυσμού, οπότε παραμένει στον πληθυσμό.

Παρόλο που η διαδικασία που παρουσιάσαμε εν συντομία, δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα σε προβλήματα με συνεχείς μεταβλητές, η απόδοση της διαφορικής εξέλιξης έχει και άλλα περιθώρια βελτίωσης, τα οποία απορρέουν από τις διαφορετικές στρατηγικές που έχουν προταθεί και εφαρμόζονται ανάλογα με τις ανάγκες του προβλήματος. Στα επόμενα κεφάλαια θα αναλύσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες τον αλγόριθμο και τις διάφορες στρατηγικές που έχουν εφαρμοστεί κατά καιρούς, αλλά και με ποιον τρόπο μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα πλεονεκτήματα της μεθόδου για προβλήματα με διακριτές μεταβλητές, όπως τα προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων [46].

2.3. Η μέθοδος της διαφορικής εξέλιξης και η γενετική της προσομοίωση στο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων

2.3.1 Εισαγωγή

Η διαδικασία της διαφορικής εξέλιξης όπως αναφέραμε και παραπάνω έχει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα, σε διάφορα προβλήματα, τα οποία πολλές φορές υπερέχουν έναντι των υπολοίπων εξελικτικών αλγορίθμων [42]. Όμως, το κοινό χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων είναι ότι περιέχουν συνεχείς μεταβλητές, άλλωστε οι δημιουργοί της διαφορικής εξέλιξης στόχευαν στη λύση συνεχών προβλημάτων. Στα προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων οι λύσεις αποτελούνται από διανύσματα διακριτών μεταβλητών. Στη διαφορική εξέλιξη, η παραγωγή απογόνων βασίζεται σε γραμμικούς συνδυασμούς των γονέων, οι οποίοι αναπαρίστανται σα σημεία στο χώρο, και οι συνδυασμοί τους μπορούν επίσης να αναπαρασταθούν και να ερμηνευτούν γεωμετρικά. Στην πορεία των χρόνων, έγιναν διάφορες προσπάθειες, να προσομοιωθεί ο μηχανισμός της διαφορικής εξέλιξης σε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Κυρίως, έγιναν προσπάθειες όπου συνήθως γινόταν αναδιατύπωση των προβλημάτων του διακριτού χώρου σα συνεχή προβλήματα και μόνο τότε εφάρμοζαν την παραδοσιακή διαφορική εξέλιξη. Σε άλλες εργασίες εφαρμόστηκε απευθείας η παραδοσιακή διαφορική εξέλιξη στον διακριτό χώρο, αλλά σε καμία περίπτωση δεν ήταν εφικτό να προσομοιωθεί η γεωμετρική ερμηνεία του μηχανισμού της μεθόδου. Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η εύρεση κατάλληλης προσομοίωσης του μηχανισμού της διαφορικής εξέλιξης σε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

Εφαρμόσαμε έναν γενετικό αλγόριθμο των Li Jian, Chen Peng και Liu Zhiming, τη γενετική διαφορική εξέλιξη [32], του οποίου οι διαδικασίες αποτυπώνουν τη γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου και παλαιότερα έχει επιδείξει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε μια ειδική περίπτωση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων, το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή. Η εφαρμογή του στη δική μας έρευνα έγινε με τροποποιήσεις που θα αναλυθούν παρακάτω.

Επιλέξαμε το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων λόγω του μεγάλου ιστορικού ερευνών που έχουν γίνει σε αυτό, ώστε η σύγκριση των αποτελεσμάτων του αλγορίθμου μας να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή αξιοπιστία.

2.3.2 Αναπαράσταση πληθυσμού

Στα προβλήματα που χρησιμοποιούνται μεθευρετικοί αλγόριθμοι βασιζόμενοι σε πληθυσμό είναι στην ευχέρεια των ερευνητών να διαλέξουν τον κατάλληλο αριθμό αρχικών λύσεων που θα αποτελέσουν τον πληθυσμό του προβλήματος. Το μέγεθος του πληθυσμού εδώ το συμβολίζουμε με N_p και στην παρούσα διατριβή διαφέρει ανάλογα με το μέγεθος του στιγμιότυπου, ενώ το σύνολο των πελατών – κόμβων, συμβολίζεται με D το οποίο επίσης διαφέρει, προφανώς, από πρόβλημα σε πρόβλημα. Έστω ο τρέχων πληθυσμός P_x , που αποτελείται από τα διανύσματα x , τα οποία είναι είτε αρχικές λύσεις, είτε λύσεις που έχουν προκριθεί συγκρινόμενες με άλλες κατά την επαναληπτική διαδικασία του αλγορίθμου [46].

$$P_{x,g} = (x_{i,g}), \quad i=1,\dots,N_p, \quad g=1,\dots,g_{\max} \quad (2.1)$$

$$x_{i,g} = (x_{j,i,g}), \quad j=1,\dots,D \quad (2.2)$$

Οι δείκτες ξεκινούν με αρίθμηση από το 1 και ο δείκτης g , συμβολίζει τον αριθμό της επανάληψης - γενιάς στην οποία βρισκόμαστε.

i	$j=n$	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$
$i=1$		45	23	17	
$i=2$		3	56	34	
$i=3$		22	2	46	
....		87	104	33	

Σχήμα 2.8

Σε μια τυχαία επανάληψη g , απεικονίζεται ο πληθυσμός των λύσεων και η δομή κάθε διανύσματος x_i , που αποτελείται από j κόμβους το καθένα.

Κατά αντιστοιχία οι συμβολισμοί μετά την εφαρμογή της μετάλλαξης θα είναι:

$$P_{v,g} = (v_{i,g}), \quad i=1,\dots,N_p, \quad g=1,\dots,g_{\max} \quad (2.3)$$

$$v_{i,g} = (v_{j,i,g}), \quad j=1,\dots,D \quad (2.4)$$

Στη συγκεκριμένη διατριβή εν τέλει δεν χρησιμοποιήσαμε διασταύρωση, οι συμβολισμοί, ανάλογα, θα ήταν:

$$P_{u,g} = (u_{i,g}), \quad i=1,\dots,N_p, \quad g=1,\dots,g_{\max} \quad (2.5)$$

$$u_{i,g} = (u_{j,i,g}), \quad j=1,\dots,D \quad (2.6)$$

2.3.3 Συνάρτηση ποιότητας

Σε ένα πρόβλημα δρομολόγησης, ως συνάρτηση ποιότητας, η οποία αξιολογεί τα άτομα – λύσεις του πληθυσμού, ορίζεται η συνολική απόσταση όλων των δρομολογίων που θα εκτελέσουν τα οχήματα.

2.3.4 Αρχικοποίηση πληθυσμού

Στο πρόβλημα μας η αρχικοποίηση του πληθυσμού γίνεται μέσω μιας γεννήτριας παραγωγής τυχαίων διανυσμάτων, της `randperm`, συνάρτησης του MATLAB. Τα όρια των διανυσμάτων είναι ο αριθμός των πελατών κόμβων κάθε στιγμιότυπου.

2.3.5 Μετάλλαξη

Στην προηγούμενη παράγραφο δώσαμε μια πρώτη περιγραφή και μια γεωμετρική ερμηνεία της μετάλλαξης. Η σημασία της μετάλλαξης είναι κομβική για τη διαφορική εξέλιξη και στην πάροδο των χρόνων προτάθηκαν πολλές παραλλαγές της. Η επιλογή της παραλλαγής που εφαρμόζεται ισοδυναμεί με επιλογή στρατηγικής. Ανάλογα με το αν θέλουμε να επικεντρωθούμε στην όσο το δυνατόν μεγαλύτερη εξερεύνηση του πεδίου των λύσεων ή στην πορεία της διαδικασίας να εκμεταλλευτούμε τα χαρακτηριστικά κάποιων καλών (ή των βέλτιστων) λύσεων, ανά επανάληψη, επιλέγουμε διαφορετικό τρόπο εφαρμογής της μετάλλαξης. Το ιδανικό αποτέλεσμα θα είναι να ισορροπήσουμε μεταξύ αυτών των δύο χαρακτηριστικών. Πρακτικά η εξίσωση της μετάλλαξης διαφέρει σε κάθε παραλλαγή. Οι παραλλαγές της μετάλλαξης έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κατηγορίες: *τυχαίες, κατευθυνόμενες, τοπικές και υβριδικές*. Σε κάθε περίπτωση το διάνυσμα που προκύπτει από τη μετάλλαξη είναι η πρόσθεση ενός

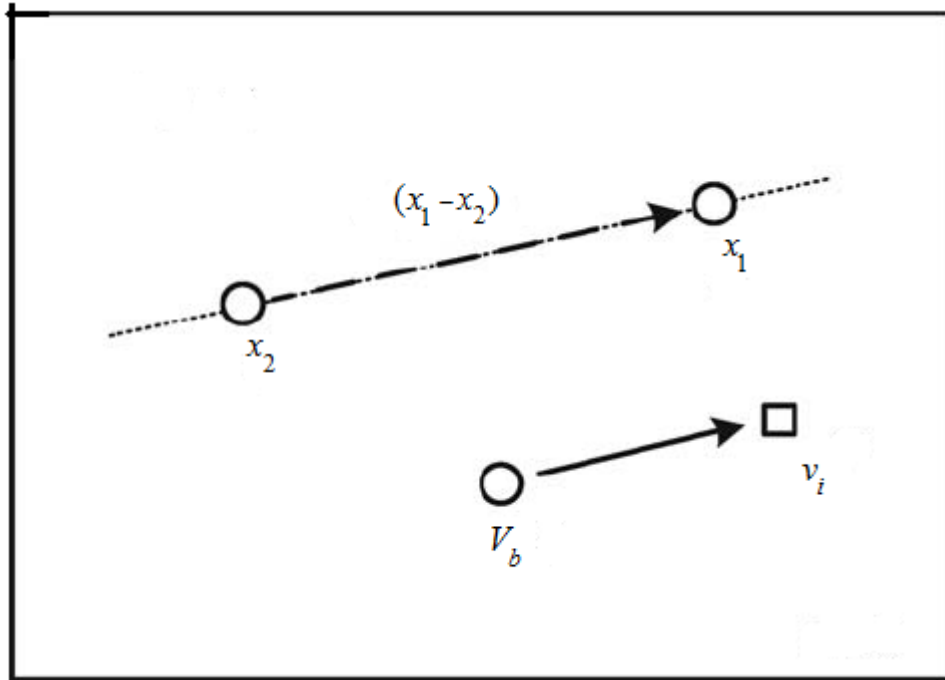
διανύσματος, που το ορίζουμε ως βάση και το συμβολίζουμε με v_i , με τη διαφορά (ή τις διαφορές) ενός ζευγαριού διανυσμάτων [18].

2.3.5.1 Τυχαία στρατηγική μετάλλαξης

Επιλέγοντας τυχαία στρατηγική μετάλλαξης, επιτυγχάνουμε σε μεγαλύτερο βαθμό την εξερεύνηση του πεδίου των λύσεων. Η παραλλαγή που υλοποιήσαμε απαιτεί την επιλογή τριών τυχαίων διανυσμάτων διαφορετικών μεταξύ τους και διαφορετικών από το διάνυσμα με το οποίο θα συγκριθεί το παράγωγο των τριών τυχαίων. Η εξίσωση της μετάλλαξης στην παραδοσιακή διαφορική εξέλιξη έχει ως εξής:

$$v_i = V_b + F(x_1 - x_2) \quad (2.7)$$

Όπου v_i το παράγωγο διάνυσμα της μετάλλαξης και x_1, x_2 τα δύο τυχαία διανύσματα που αποσπάσαμε από τον πληθυσμό και θα χρησιμοποιήσουμε τη διαφορά τους. Στη γενετική διαφορική εξέλιξη για να προσομοιώσουμε αυτή την εξίσωση εφαρμόζουμε δύο τελεστές διασταύρωσης, έναν τον Greedy Subtour Crossover (GSX) ο οποίος προσομοιώνει τη διαφορά μεταξύ δύο διανυσμάτων και στη συνέχεια το παράγωγο διάνυσμά του μαζί με το διάνυσμα βάσης τα χρησιμοποιούμε στην εφαρμογή του δεύτερου τελεστή ο οποίος ονομάζεται Modified Ordered Crossover (MOX).

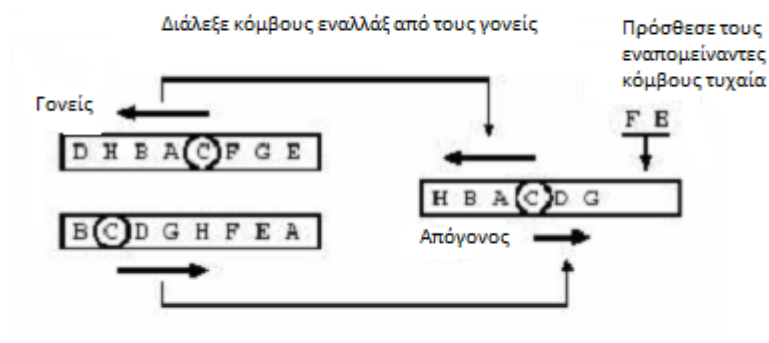


Σχήμα 2.9

Απεικόνιση της τυχαίας στρατηγικής. Το παράγωγο διάνυσμα της μετάλλαξης v_i , θα διασταυρωθεί με το διάνυσμα του τρέχοντα πληθυσμού x_i , ώστε να παραχθεί το δοκιμαστικό διάνυσμα [18]

Greedy Subtour Crossover

Κατά την εφαρμογή του τελεστή GSX, χρειάζονται δύο διανύσματα. Η διασταύρωση των δύο διανυσμάτων γίνεται εφαρμόζοντας έναν απλό και παράλληλα άπληστο ευρετικό κανόνα. Ξεκινώντας από έναν κόμβο που βρίσκεται σε μια τυχαία, αυθαίρετη θέση, εισάγουμε έναν – έναν κόμβο, αλλά εναλλάξ σε κάθε άκρη του και από κάθε γονιό, με επακόλουθο να απλώνονται από δεξιά και αριστερά του τυχαία επιλεγμένου κόμβου, ακολουθίες κόμβων που βρίσκονται αυτούσιες στους δυο γονείς. Ο συγκεκριμένος τελεστής έτσι αναπαριστά, γενετικά, την αφαίρεση δύο διανυσμάτων



Σχήμα 2.10
Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή GSX [56]

Στο σχήμα 2.10, επιλέγεται αυθαίρετα ο κόμβος C, αρχικά. Στη συνέχεια προστίθεται, εναλλάξ, ένας κόμβος από τον πάνω γονέα και από τα αριστερά του, και ένας κόμβος από τον κάτω γονέα και στα δεξιά του. Όταν συναντήσουμε κατά τη διάρκεια της διαδικασίας κάποιο κόμβο που υπάρχει ήδη στον απόγονο, τότε οι υπόλοιποι κόμβοι του αντίστοιχου γονέα προστίθενται με τυχαίο τρόπο [56].

Modified Ordered Crossover

Ο τελεστής Modified Ordered Crossover (MOX) είναι μια μετεξέλιξη ενός παλαιότερου τελεστή του Ordered Crossover. Η διαδικασία εν ολίγοις, απαιτεί την ύπαρξη δύο διανυσμάτων. Ορίζουμε μια παράμετρο L, η οποία αναπαριστά τον αριθμό των κόμβων που θα πάρουμε ακολουθιακά από το ένα διάνυσμα, έστω το διάνυσμα πηγή. Από που θα ξεκινήσει η ακολουθία των κόμβων είναι σε συνάρτηση με μια τυχαία επιλογή κόμβου. Στη συνέχεια προσθέτουμε το κομμάτι αυτό στην αρχή του διανύσματος στόχου, αφού πρώτα έχουμε αφαιρέσει τους κόμβους που η ύπαρξη τους θα ήταν διπλή αν παρέμεναν. Έστω ένα παράδειγμα με διάνυσμα στόχο το $\alpha = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$ και διάνυσμα πηγή το $\beta = [1, 3, 7, 10, 9, 6, 2, 8, 5, 4]$. Ορίζουμε την παράμετρο L ίση με 4 και επιλέγουμε τυχαία τον κόμβο 5. Στο μεν διάνυσμα στόχο τον κόμβο 5, μέσω μιας αντιμετάθεσης τον τοποθετούμε στο τέλος του διανύσματος και άρα $\alpha = [6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5]$, από το δε διάνυσμα πηγή παίρνουμε τους επόμενους 4 κόμβους μετά το 5. Οπότε έχουμε το κομμάτι $[4, 1, 3, 7]$, το οποίο θέλουμε να προσθέσουμε στην αρχή του διανύσματος στόχου. Όμως πριν από αυτή την ενέργεια αφαιρούμε από το διάνυσμα στόχο τους κόμβους που βρίσκονται στο κομμάτι που θα προσθέσουμε και άρα

$\alpha=[6,8,9,10,2,5]$. Έτσι εν τέλει παράγεται το διάνυσμα $\alpha=[4,1,3,7,6,8,9,10,2,5]$. Να σημειώσουμε ότι η παράμετρος L , παρέμενε σταθερή καθόλη τη διάρκεια της εκτέλεσης του αλγορίθμου. [32].

Πρακτικά αυτή είναι η στρατηγική που έδωσε ουσιαστικά αποτελέσματα στην έρευνά μας. Οι υπόλοιπες στρατηγικές λόγω της ιδιαιτερότητας της Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης οδηγούν σε γρήγορη σύγκλιση και κατά συνέπεια σε παγίδευση σε τοπικό ελάχιστο. Αξίζει όμως να αναφέρουμε στις επόμενες παραγράφους τη λογική πίσω από τις υπόλοιπες κατηγορίες στρατηγικής στην Παραδοσιακή Διαφορική Εξέλιξη.

2.3.5.2 Κατευθυνόμενη στρατηγική μετάλλαξης

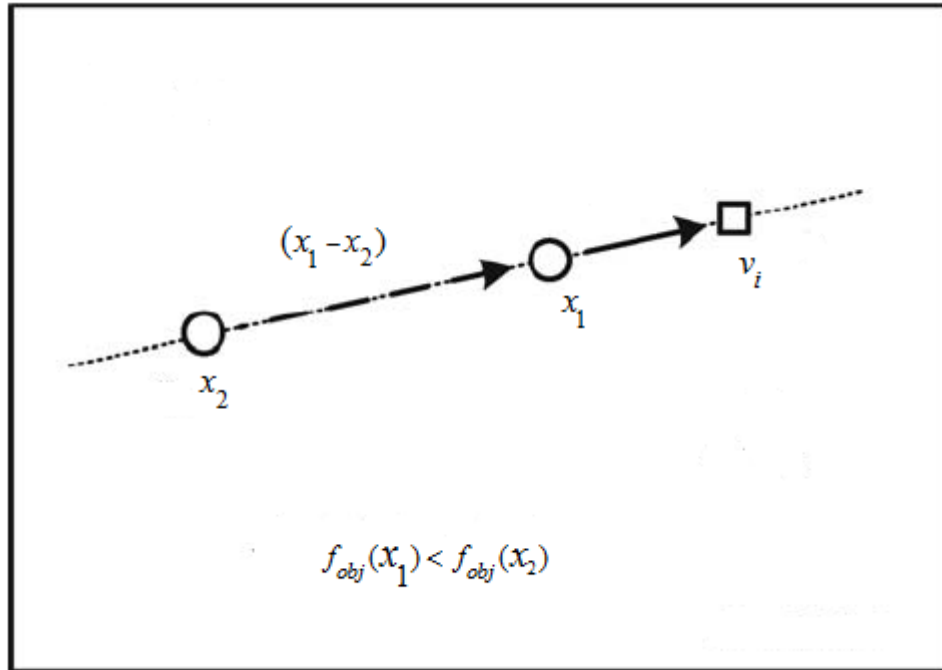
Σε αυτή την περίπτωση από τον τρέχοντα πληθυσμό επιλέγουμε τυχαία μόνο δύο διανύσματα. Επειδή θέλουμε να εκμεταλλευτούμε τα χαρακτηριστικά (και συγκεκριμένα την ποιότητα των επιλεγμένων διανυσμάτων) η εξίσωση της μετάλλαξης έχει δύο υποπεριπτώσεις. Διάνυσμα βάσης ορίζεται ένα από τα δύο τυχαία διανύσματα, σε κάθε περίπτωση. Στην περίπτωση που η απόδοση του x_1 , είναι μικρότερη του x_2 ($f(x_1) < f(x_2)$) η εξίσωση έχει ως εξής:

$$v_i = x_1 + F(x_1 - x_2) \quad (2.8)$$

Διαφορετικά:

$$v_i = x_2 + F(x_2 - x_1) \quad (2.9)$$

Στη Γενετική Διαφορική Εξέλιξη η συγκεκριμένη στρατηγική δεν έχει την ίδια βαρύτητα που έχει στην παραδοσιακή. Ο λόγος είναι ο τρόπος προσομοίωσης της διαφοράς δύο διανυσμάτων, στον οποίο δεν έχει νόημα ο τελεστής της αφαίρεσης.



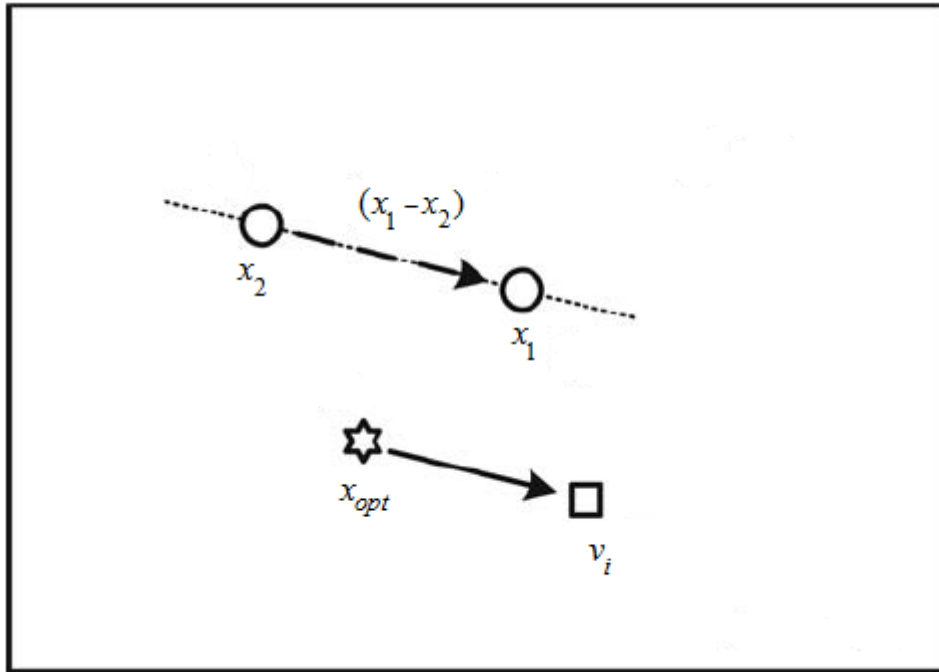
Σχήμα 2.11

Απεικόνιση της κατευθυνόμενης στρατηγικής [18]

2.3.5.3 Τοπική στρατηγική μετάλλαξης

Η τοπική στρατηγική μετάλλαξης χρησιμοποιείται για παρόμοιους λόγους με την κατευθυνόμενη. Η διαφορά είναι ότι θέλουμε να εκμεταλλευτούμε τη βέλτιστη λύση του τρέχοντος πληθυσμού (x_{opt}) και τη χρησιμοποιούμε ως διάνυσμα βάσης. Όπως και στις άλλες στρατηγικές επιλέγουμε δύο τυχαία διανύσματα (διαφορετικά όλα τα διανύσματα μεταξύ τους) και προσθέτουμε τη διαφορά τους στη βέλτιστη λύση. Η εξίσωση έχει ως εξής:

$$v_i = x_{opt} + F(x_2 - x_1) \quad (2.10)$$



Σχήμα 2.12
Απεικόνιση της τοπικής στρατηγικής [18]

Η αδυναμία της συγκεκριμένης στρατηγικής είναι η ραγδαία σύγκλιση του αλγορίθμου η οποία παρατηρείται τόσο στην Παραδοσιακή όσο και στη Γενετική Διαφορική Εξέλιξη.

2.3.5.4 Υβριδική στρατηγική μετάλλαξης

Οι στρατηγικές υβριδικής μετάλλαξης, ‘παντρεύουν’ τα στοιχεία των τριών παραπάνω στρατηγικών με σκοπό να αξιοποιηθούν όλα τα πλεονεκτήματα που μπορούν να μας προσφέρουν, βρίσκοντας την καλύτερη ισορροπία μεταξύ τους. Στην παραλλαγή αυτή επιλέγουμε τρία τυχαία διανύσματα, με τον ίδιο τρόπο όπως στις άλλες στρατηγικές. Ως διάνυσμα βάσης, όμως, θα χρησιμοποιήσουμε το διάνυσμα που θα προκύψει από την πρόσθεση ενός εκ των τυχαίων διανυσμάτων και του διανύσματος που παράγει τη βέλτιστη λύση του τρέχοντος πληθυσμού. Επίσης χρησιμοποιούμε την παράμετρο γ που ανήκει στο διάστημα $[0,1]$, ώστε να μπορούμε να ελέγχουμε το ποσοστό επιρροής από καθένα από τα δύο διανύσματα και ανάλογα σε ποιο χαρακτηριστικό θέλουμε να δώσουμε βαρύτητα θα επιλέγουμε την τιμή του γ . Στη συνέχεια, θα προσθέσουμε σε αυτό, τη διαφορά των δύο άλλων τυχαίων διανυσμάτων. Η εξίσωση θα έχει ως εξής:

$$v_i = \gamma x_{opt} + (1 - \gamma)x_1 + F(x_2 - x_3) \quad (2.11)$$

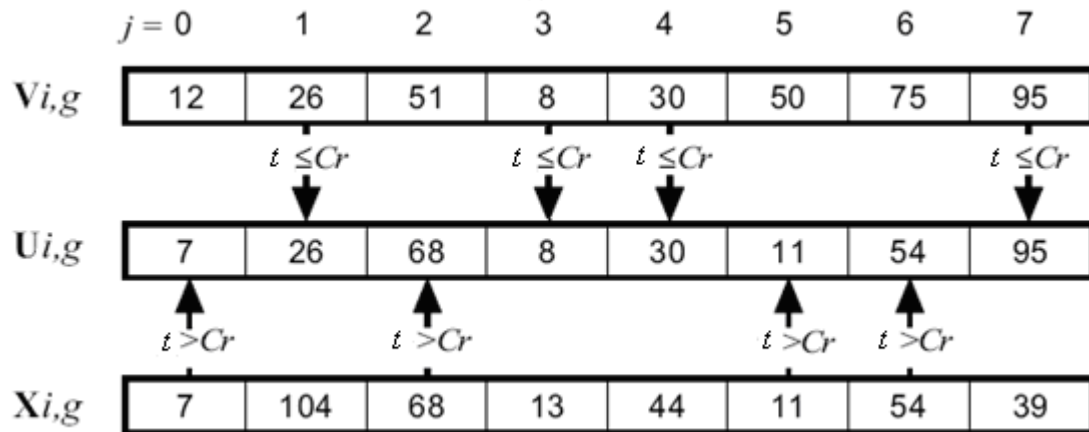
Η συγκεκριμένη στρατηγική θα μπορούσε να είναι μια μελλοντική έρευνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εφαρμοζόταν στη Γενετική Διαφορική εξέλιξη.

2.3.6 Διασταύρωση

Στη γενετική διαφορική εξέλιξη που εφαρμόστηκε από τους Li Jian, Chen Peng, Liu Zhiming για το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή χρησιμοποιήθηκε και η διαδικασία της διασταύρωσης, εν αντιθέσει με τη δική μας έρευνα όπου η επιπρόσθετη εφαρμογή της είχε ως συνέπεια χειρότερα αποτελέσματα από ότι η μη εφαρμογή της. Οι εμπνευστές τη γενετικής διαφορικής εξέλιξης προσομοίωσαν τη διαδικασία της διασταύρωσης εφαρμόζοντας για δεύτερη φορά τον τελεστή Modified Ordered Crossover ανάμεσα σε κάθε διάνυσμα του πληθυσμού των μεταλλαγμένων με το αντίστοιχο του βασικού πληθυσμού.

Στην περίπτωση της παραδοσιακής διαφορικής εξέλιξης, αυτό το βήμα είναι προαιρετικό και στην ευχέρεια μας να το χρησιμοποιήσουμε. Και σε αυτή την περίπτωση η διασταύρωση γίνεται μεταξύ των διανυσμάτων που παράχθηκαν από τη διαδικασία της μετάλλαξης με τα διανύσματα του τρέχοντος πληθυσμού. Δηλαδή το πρώτο διάνυσμα – λύση του πληθυσμού, διασταυρώνεται με το πρώτο διάνυσμα του πληθυσμού των μεταλλαγμένων διανυσμάτων. Το δεύτερο του τρέχοντος με το δεύτερο του πληθυσμού των μεταλλαγμένων και ούτω καθεξής. Τα παράγωγα της διασταύρωσης, είναι τα λεγόμενα δοκιμαστικά διανύσματα. Όπως και στη μετάλλαξη, υπάρχουν παραπάνω από ένας τρόπος εφαρμογής της διασταύρωσης. Στην παραδοσιακή διαφορική εξέλιξη εφαρμόζεται η διωνυμική (ή ομοιόμορφη) διασταύρωση, στην οποία αρχικά επιλέγεται μια παράμετρος C_r στο διάστημα $[0,1]$ και η τιμή της συγκρίνεται με μια παράμετρο t , που ανήκει στο ίδιο διάστημα επίσης και δημιουργείται από μια γεννήτρια παραγωγής τυχαίων αριθμών. Η διασταύρωση γίνεται γονίδιο-γονίδιο οπότε κάθε φορά η τιμή του t διαφέρει, όσα γονίδια έχουμε, τόσες οι συγκρίσεις του t με το C_r . Αν ο τυχαίος αριθμός είναι μικρότερος ή ίσος με το C_r η τιμή του γονιδίου του δοκιμαστικού διανύσματος κληρονομείται από το μεταλλαγμένο διάνυσμα, διαφορετικά επιλέγεται από το γονέα [46].

$$u_{i,g} = u_{j,i,g} = \begin{cases} v_{j,i,g}, & \text{αν } t \leq C_r \\ x_{j,i,g}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.12)$$



Σχήμα 2.13
Διωνυμική διασταύρωση

Η επιλογή της τιμής της παραμέτρου Cr , μας δίνει τη δυνατότητα να ελέγξουμε την επιρροή της μετάλλαξης στην κατασκευή του δοκιμαστικού διανύσματος. Μάλιστα αν επιλέξουμε την τιμή 1, ουσιαστικά καταργούμε το στάδιο της διασταύρωσης και ο πληθυσμός των δοκιμαστικών διανυσμάτων θα είναι ο πληθυσμός των διανυσμάτων που παράχθηκαν από τη μετάλλαξη.

2.3.7 Τοπική αναζήτηση

Ο αλγόριθμος που εφαρμόσαμε στα προβλήματα δρομολόγησης είναι μια σύνθεση της μεθόδου της γενετικής διαφορικής εξέλιξης με τοπική αναζήτηση. Στα δοκιμαστικά διανύσματα (οι απόγονοι της διαφορικής εξέλιξης) που παράχθηκαν από τα παραπάνω στάδια εφαρμόσαμε τοπική αναζήτηση για έναν αριθμό επαναλήψεων. Είναι η αρχαιότερη μέθοδος βελτιστοποίησης και βασίζεται στο δόγμα: δοκιμή και σφάλμα. Η ιδέα είναι τόσο απλή που είναι εκπληκτικό πόσο επιτυχημένη έχει αποδειχτεί στην πράξη σε ένα μεγάλο πλήθος προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης.



Σχήμα 2.14

Ξεκινάμε από μια αρχική λύση, η οποία γειτονεύει με πλήθος άλλων λύσεων [31]

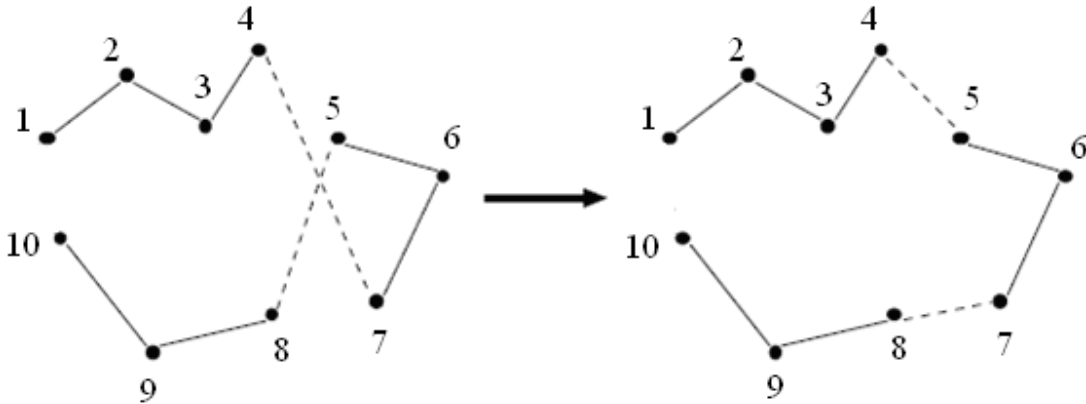
Σε γενικές γραμμές η ιδέα είναι η εξής: Ξεκινάμε από μία αρχική λύση, την οποία με κάποια καθορισμένη διαδικασία, τη διαφοροποιούμε σε ένα ή λίγο περισσότερα σημεία, με συνέπεια να παράγεται μια νέα λύση. Αν η καινούργια λύση έχει καλύτερη απόδοση από την προηγούμενη, κρατάμε την καινούργια, διαφορετικά συνεχίζουμε με την παλιά. Για όσο χρονικό διάστημα υπάρχει βελτίωση συνεχίζεται η διαδικασία, καθώς τότε θα έχει βρεθεί κάποιο τοπικό βέλτιστο.

Υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης, άλλοι με μικρότερη ταχύτητα σύγκλισης και άλλοι με μεγαλύτερη. Εξαρτάται όμως και από το που εφαρμόζονται, και έτσι η αποτελεσματικότητά τους διαφέρει από πρόβλημα σε πρόβλημα ή από ένα σημείο του προβλήματος σε κάποιο άλλο.

2.3.7.1 Τοπική αναζήτηση – Μέθοδος 2-opt

Στο συγκεκριμένο σημείο του προβλήματος επιλέξαμε τη μέθοδο 2-opt. Είναι η πιο απλή και συνάμα διαδεδομένη μορφή τοπικής αναζήτησης. Γενικά αποτελείται από δύο βήματα. Διαγραφή δυο ακμών του μονοπατιού και επανασύνδεση των μονοπατιών

που έμειναν ασύνδετα. Σε αυτή την περίπτωση η επανασύνδεση μπορεί να γίνει μόνο με ένα δυνατό τρόπο. Στην υλοποίησή μας θέσαμε τον περιορισμό οι ακμές που διαγράφονται να μην είναι γειτονικές, καθώς σε μια τέτοια περίπτωση η μοναδική εφικτή λύση θα ήταν να επανασυνδεθούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.



Σχήμα 2.15 (α)
Παράδειγμα 2-opt σε ένα Χαμιλτονιανό μονοπάτι [28]

1	2	3	4	7	6	5	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Σχήμα 2.15 (β)
Παράδειγμα 2-opt σε ένα Χαμιλτονιανό μονοπάτι. Πρακτικά αντιστρέφεται η σειρά των κόμβων που οι ακμές τους διαγράφονται.

Βέβαια, στην εφαρμογή της μεθόδου 2-opt, στο πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων, οι αντιμεταθέσεις των κόμβων γίνονται στα διανύσματα - λύσεις όπως στο σχήμα 2.15 (β), αλλά το διάγραμμα της λύσης που παράγεται θα είναι πολύ διαφορετικό, καθώς αλλάζουν οι συσχετισμοί των οχημάτων και των φορτίων που μεταφέρουν. Ουσιαστικά είναι πολύ πιθανό, οι περισσότεροι χαμιλτονιανοί κύκλοι (ή χαμιλτονιανά μονοπάτια στην περίπτωση του ανοικτού προβλήματος) της αρχικής λύσης να είναι διαφορετικά από αυτά της παράγωγης λύσης.

2.3.8 Επιλογή

Έστω οι απόγονοι που παράχθηκαν με τον υβριδικό αλγόριθμο που εφαρμόσαμε, h . Συγκρίνουμε το κόστος, ένα προς ένα, των λύσεων των απογόνων με το κόστος των λύσεων του τρέχοντος πληθυσμού g . Συγκρίνουμε το κόστος ενός διανύσματος i των απογόνων με το κόστος του i -οστού διανύσματος του τρέχοντος πληθυσμού. Η διαδικασία είναι ευρύτερα γνωστή και ως ελιτισμός. Αν το κόστος του διανύσματος των απογόνων είναι μικρότερο ή ίσο του κόστους του διανύσματος του τρέχοντος πληθυσμού, τότε στο νέο πληθυσμό θα το αντικαταστήσει, διαφορετικά θα παραμείνει το ίδιο και στον επόμενο πληθυσμό.

$$x_{i,g+1} = \begin{cases} h_{i,g}, & \text{αν } f(h_{i,g}) \leq f(x_{i,g}) \\ x_{i,g}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.13)$$

Με την ολοκλήρωση του σταδίου της επιλογής, ταυτόχρονα ολοκληρώνεται η διαδικασία του υβριδικού αλγορίθμου, η οποία όμως επαναλαμβάνεται, με τρέχοντα πληθυσμό αυτόν που παράχθηκε από το στάδιο της επιλογής της προηγούμενης επανάληψης. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου βρεθεί η βέλτιστη λύση ή μέχρι να ικανοποιείται ένα προκαθορισμένο κριτήριο, όπως έχουμε στην υλοποίηση μας, όταν έχει παραχθεί ένας συγκεκριμένος αριθμός γενεών [46].

2.3.9 Μηχανισμός επιβράδυνσης σύγκλισης και περιοδική τοπική αναζήτηση

Σημείο κλειδί για την επιτυχία του αλγορίθμου μας αποτέλεσαν δύο στοιχεία που βοήθησαν στην αποφυγή παγίδευσης σε τοπικά ελάχιστα και στη βελτίωση των αποτελεσμάτων.

Το πρώτο στοιχείο είναι η περιοδική τοπική αναζήτηση που εφαρμόζαμε στον πληθυσμό. Ανά ορισμένο διάστημα εφαρμόζαμε στο βασικό πληθυσμό τη μέθοδο 2-opt, μια ιδέα που υλοποιήθηκε έχοντας υπόψη τη μέθοδο της άπληστης τυχοποιημένης προσαρμοστικής αναζήτησης (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure – GRASP), κατά την οποία όμως εφαρμόζεται βελτίωση των λύσεων του πληθυσμού κάθε φορά πριν από οποιαδήποτε επανάληψη του μεθευρετικού αλγορίθμου.

Το δεύτερο στοιχείο είναι η δημιουργία ενός μηχανισμού επιβράδυνσης του αλγορίθμου. Κατά τη διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας, όταν δεν χρησιμοποιήσαμε έναν τέτοιο μηχανισμό, όλες οι λύσεις κάποια στιγμή εξελίσσονταν σε ίδιες, ουσιαστικά όλες οι λύσεις συνέκλιναν εν τέλει σε μία. Έτσι θέσαμε τον περιορισμό κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων να μη γίνονται δεκτές λύσεις οι οποίες

ταυτιζόντουσαν με οποιαδήποτε από τις υπάρχουσες του βασικού πληθυσμού. Σε περιπτώσεις ταύτισης στη θέση αυτής της λύσης υπήρξε και εναλλακτικό πλάνο. Εφαρμόζαμε μια άλλη μορφή τοπικής αναζήτησης την επανασύνδεση διαδρομών (Path Relinking) μεταξύ της καλύτερης υπάρχουσας λύσης και των επόμενων δέκα ποιοτικότερων λύσεων. Αν η λύση που προέκυπτε ήταν καλύτερη από τη λύση στην οποία προέκυψε πρόβλημα ταύτισης, τότε αντικαθιστούσαμε αυτή.

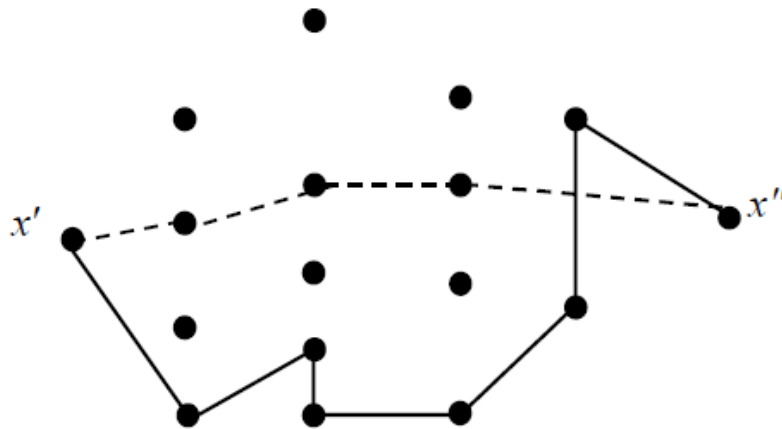
Επανασύνδεση Διαδρομών (Path Relinking)

Η μέθοδος της επανασύνδεσης διαδρομών είναι μια ιδιότυπη μορφή τοπικής αναζήτησης. Αποτελεί μέρος μιας παλαιότερης μεθόδου της διασκορπισμένης αναζήτησης (Scatter Search) και παρόλο που σαν μέθοδοι παραβιάζουν την αρχή της τυχαιότητας, τις κατατάσσουμε στην κατηγορία των εξελικτικών αλγόριθμων. Σύμφωνα με τον Fogel [26], οι εξελικτικοί αλγόριθμοι πρέπει να βασίζονται στο στοιχείο της τυχαιότητας και παρόλο που η επανασύνδεση διαδρομών κατά κάποιο τρόπο παραβιάζει αυτή την αρχή, ο τρόπος που λειτουργεί εμπεριέχει στοιχεία τυχαιότητας και κατ' επέκταση τον θεωρούμε εξελικτικό αλγόριθμο. Επιπρόσθετα, σαν μέθοδος την τελευταία δεκαετία ξεκίνησε να χρησιμοποιείται σε συνάρτηση με τους γενετικούς αλγορίθμους (όπως και στην παρούσα εργασία), με συνέπεια στην πορεία των χρόνων να δημιουργηθούν συνδυασμοί γενετικών αλγορίθμων με επανασύνδεση διαδρομών, δηλαδή υβριδικοί γενετικοί αλγόριθμοι. Το σημαντικότερο, όμως, στοιχείο της επανασύνδεσης διαδρομών είναι η ενσωμάτωση αρχών και στρατηγικών, που όμοιων τους δεν συναντάμε σε άλλους εξελικτικούς αλγόριθμους και αποδεικνύονται στην πράξη ιδιαίτερα αποτελεσματικοί βοηθώντας στην επίλυση ποικιλίας πολύπλοκων προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Μερικά από αυτά είναι το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων, προβλήματα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού, προβλήματα σχετικά με δέντρα, χρονοπρογραμματισμού, σχεδίασης γράφων και άλλα. Μια μορφή επανασύνδεσης διαδρομών συναντάμε στο σχήμα 2.16, όπου κάθε κουκίδα αναπαριστά μια ολοκληρωμένη λύση. Έστω x' και x'' δύο υπάρχουσες λύσεις του πληθυσμού. Η μαύρη γραμμή αναπαριστά ένα υπάρχον μονοπάτι μεταξύ των λύσεων, ενώ η διακεκομμένη το μονοπάτι που δημιουργείται από την επανασύνδεση διαδρομών.

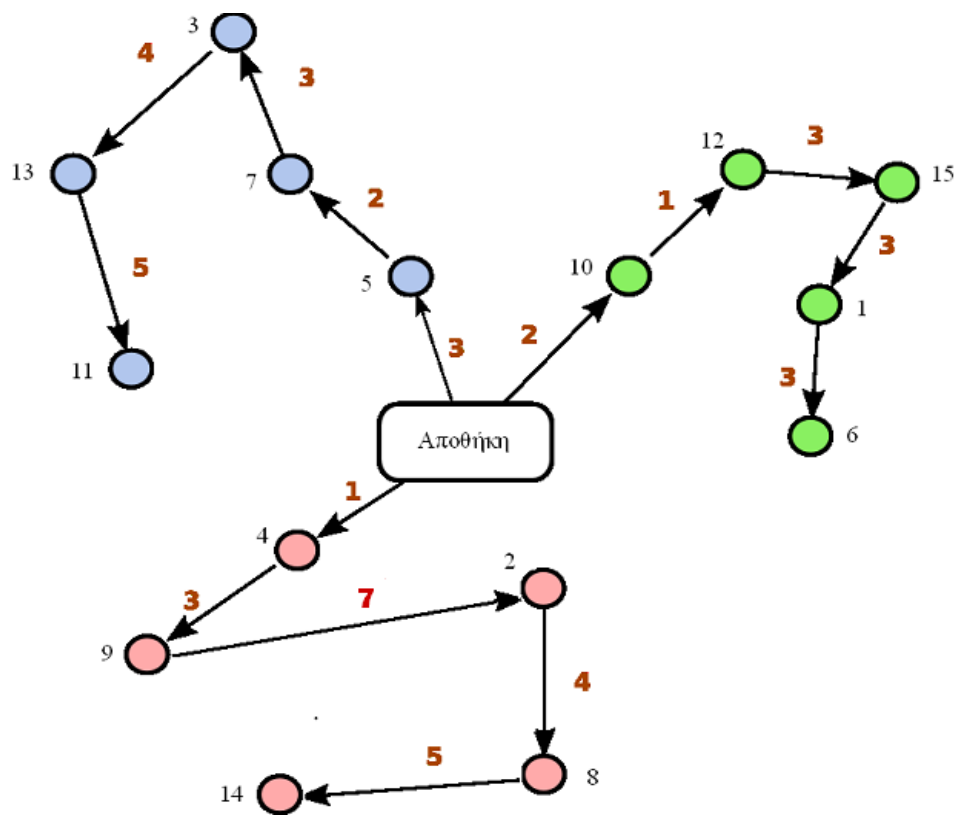
Πρακτικά, όπως και σε άλλες εξελικτικές στρατηγικές, λειτουργεί με ένα σύνολο λύσεων, τις οποίες συνδυάζει, με συγκεκριμένες διαδικασίες, για την παραγωγή νέων λύσεων. Δημιουργεί καινούριες λύσεις εξετάζοντας τροχιές που ενώνουν υψηλής ποιότητας λύσεις, ξεκινώντας από μία από αυτές, η οποία ονομάζεται αρχική λύση και δημιουργεί μια διαδρομή στη γειτονιά της που οδηγεί σε άλλες λύσεις, οι οποίες ονομάζονται λύσεις καθοδήγησης. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας κινήσεις που

αντιστοιχούν σε κάποια ελπιδοφόρα χαρακτηριστικά που υπάρχουν στις λύσεις καθοδήγησης [26], [30], [63].

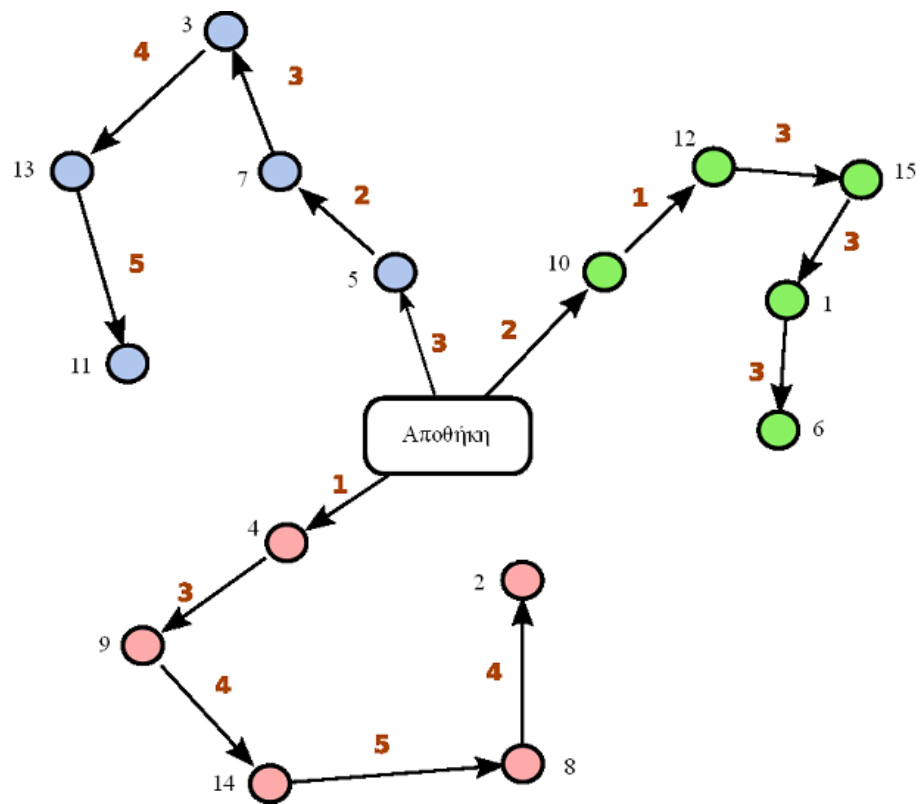
Στην παρούσα εργασία η μέθοδος επανασύνδεσης διαδρομών, έχει κομβικό ρόλο, καθώς όταν ο αλγόριθμος έτεινε προς τη σύγκλιση, με την επανασύνδεση διαδρομών δόθηκε η απαραίτητη ώθηση σε αυτόν και με αυτό τον τρόπο 'μεγαλώσαμε' τα όρια του. Από το σύνολο των λύσεων διαλέγαμε τις 10 ποιοτικότερες λύσεις και εφαρμόζαμε τη μέθοδο ανάμεσα στην ποιοτικότερη με καθεμία από τις επόμενες ποιοτικότερες. Ουσιαστικά, επεξηγώντας σε καθαρά πρακτικούς όρους: έστω ότι κάθε λύση αναπαριστάται από ένα διάνυσμα. Σε κάθε βήμα αλλάζουμε ένα στοιχείο της πρώτης λύσης και το κάνουμε όμοιο με το αντίστοιχο στοιχείο της δεύτερης λύσης υπολογίζοντας το κόστος της ενδιάμεσης λύσης που προέκυψε. Η συγκεκριμένη τροποποίηση είναι μια περίπτωση ανταλλαγής κόμβων, που μας παραπέμπει στη μέθοδο *swar* (βλ. Σχήμα 2.17 όπου γίνεται αντιμετάθεση των ροζ κόμβων 2 και 14. Έτσι το αρχικό διάνυσμα [5,7,3,13,11,10,12,15,1,6,4,9,2,8,14] με κόστος 49 μετατρέπεται σε [5,7,3,13,11,10,12,15,1,6,4,9,14,8,2] με κόστος 46. Η νέα λύση είναι φτηνότερη και για το επόμενο στάδιο της διαδικασίας κρατάμε αυτή), όχι όμως τυχαία όπως στη μέθοδο τοπικής αναζήτησης *swar*, αλλά με ένα πολύ συγκεκριμένο κατευθυνόμενο τρόπο. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου η πρώτη λύση γίνει ίση με τη δεύτερη λύση. Για την εύρεση της τελικής παραγόμενης λύσης της μεθόδου συγκρίνουμε τα κόστη όλων των ενδιάμεσων αλλά και των δύο αρχικών λύσεων. Μετά τη σύγκριση θα προκρίνουμε τη λύση με το μικρότερο κόστος.



Σχήμα 2.16
Αναπαράσταση του χώρου των λύσεων



Σχήμα 2.17 (α)



Σχήμα 2.17 (β)
Παράδειγμα της μεθόδου swap σε ένα στιγμιότυπο OVRP

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

3.1 Πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων

Τα αποτελέσματα για το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων δίνονται καταρχήν συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα και αναλυτικότερα στη συνέχεια. Τα αποτελέσματα ήταν αρκετά ικανοποιητικά, τόσο όσον αφορά το κομμάτι της εκμετάλλευσης των χαρακτηριστικών της διαφορετικής εξέλιξης όσο και για την απόκλιση των αποτελεσμάτων μας από τα μέχρι σήμερα βέλτιστα. Σε δυο από τα στιγμιότυπα (στο πρώτο και το στο έκτο) επιτύχαμε την εύρεση, της μέχρι σήμερα, βέλτιστης λύσης, ενώ σε όλα τα υπόλοιπα η απόκλιση των λύσεων που παράχθηκαν από τη γενετική διαφορετική εξέλιξη ήταν έως 10% από τις βέλτιστες, εξαιρουμένων των τεσσάρων στιγμιότυπων όπου τα οχήματα έπρεπε να καλύψουν τη μεγαλύτερη συνολική απόσταση και είχαν το μεγαλύτερο αριθμό πελατών προς εξυπηρέτηση.

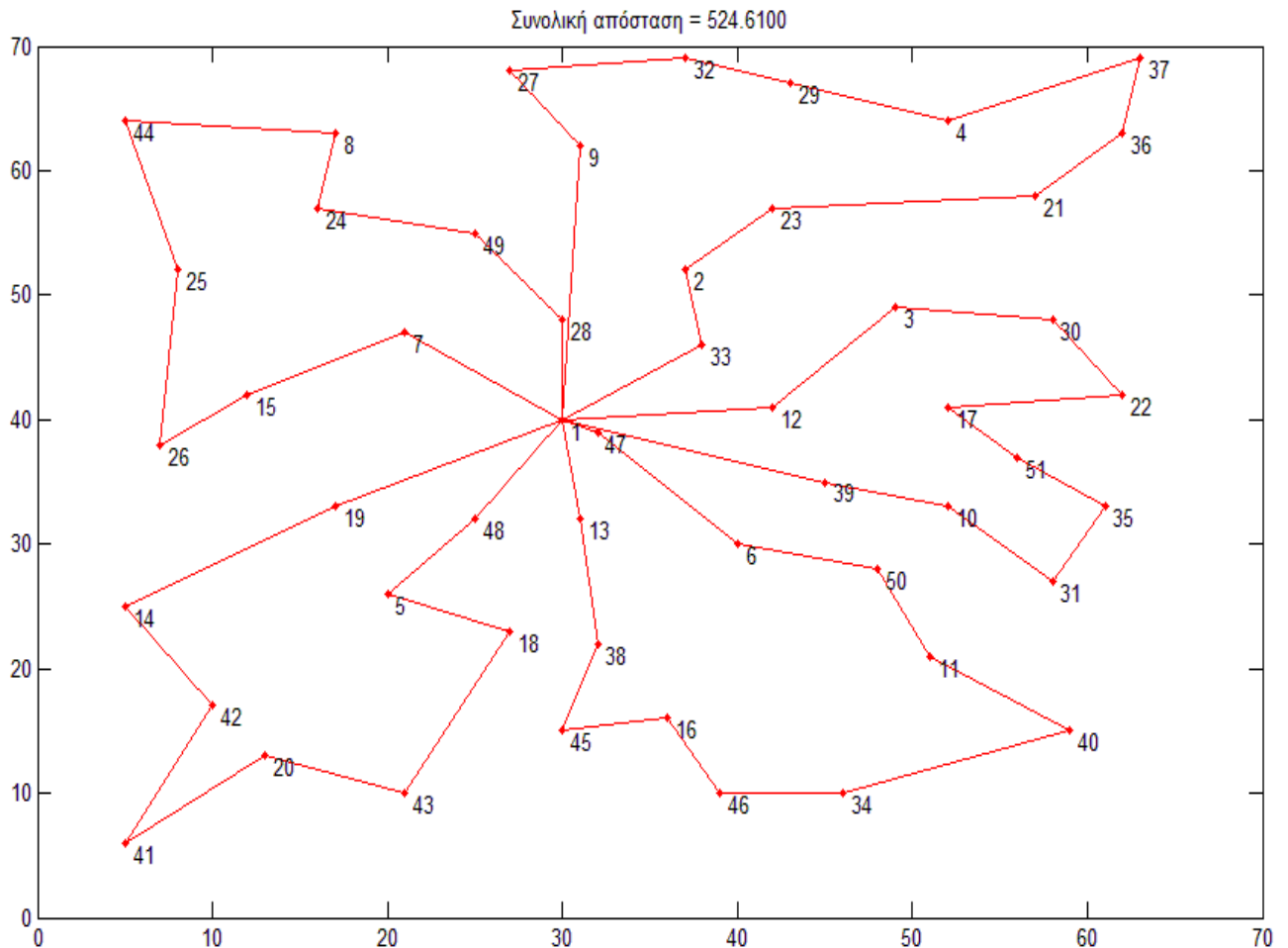
Στιγμιότυπο	Αριθμός πελατών	Χωρητικότητα οχημάτων	Μέγιστος κόστος διαδρομής ενός οχήματος	Γενετική Διαφορική Εξέλιξη	Βέλτιστη Λύση	Απόκλιση από το βέλτιστο
1	50	160	-	524,61	524,61	0%
2	75	140	-	889,73	835,26	6,52%
3	100	200	-	863,1	826,14	4,47%
4	150	200	-	1118	1028,42	8,79%
5	200	200	-	1511,18	1291,29	17,02%
6	50	160	200	555,43	555,43	0%
7	75	140	160	954,22	909,68	4,89%
8	100	200	230	927,17	865,94	7,07%
9	150	140	160	1379,56	1162,55	18,66%
10	200	200	200	1608,1	1395,85	15,02%
11	120	200	-	1177,86	1042,11	13,02%
12	100	200	-	854,52	819,56	4,26%
13	100	200	720	1604,23	1541,14	4,09%
14	120	200	1040	872,37	866,37	0,69%

Δυό κομβικές παράμετροι στην υλοποίηση μας ήταν το πλήθος N των αρχικών πληθυσμών ανά στιγμιότυπο και η παράμετρος L που βοηθά στη διαδικασία της μετάλλαξης της Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης. Σε όλα τα στιγμιότυπα το πλήθος του αρχικού πληθυσμού ήταν συνάρτηση του πλήθους K των πελατών του στιγμιότυπου. Στις υλοποιήσεις μας στα μικρότερα στιγμιότυπα τον παίρναμε ίσο με K , ενώ στα μεγαλύτερα στιγμιότυπα ίσο με $2K$. Η παράμετρος L , ισούτο με την ακέραια διαίρεση του αριθμού των πελατών K , με το 3.

Στην επόμενη παράγραφο παραθέτουμε τα αντίστοιχα γραφικά διαγράμματα για κάθε στιγμιότυπο, όπου διακρίνονται οι χαμιλτονιανοί κύκλοι που εκτελούν τα οχήματα σε κάθε περίπτωση. Με τον αριθμό 1 προσδιορίζεται η αποθήκη των προϊόντων, άρα η αρίθμηση των πελατών ξεκινά πάντα από τον αριθμό 2.

3.1.1 Αποτελέσματα ανα στιγμιότυπο

Στιγμιότυπο 1



Αριθμός πελατών: 50

Χωρητικότητα οχήματος: 160

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

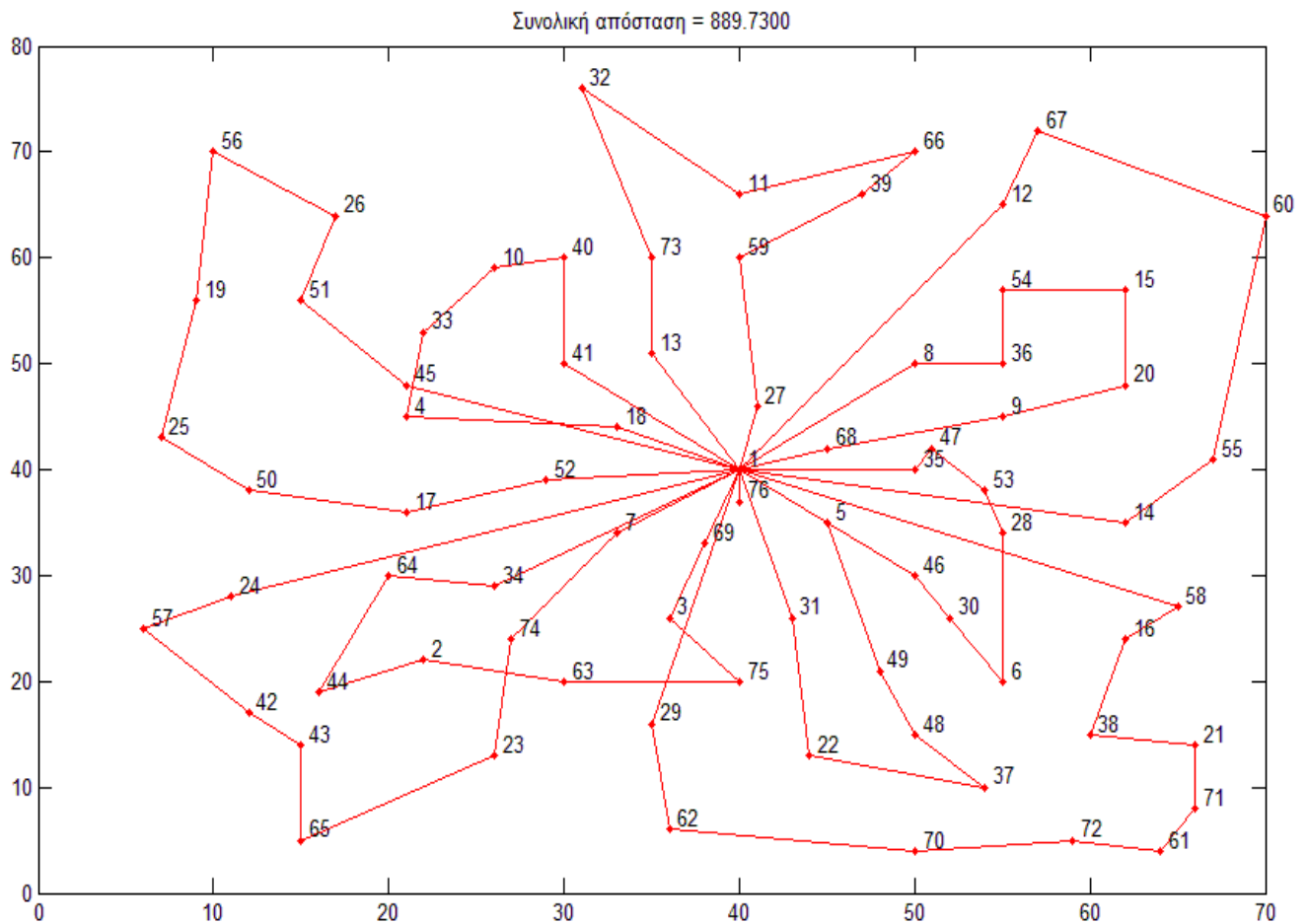
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 524,61

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 524,61

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{524,61 - 524,61}{524,61} = 0\%$

Στιγμιότυπο 2



Αριθμός πελατών: 75

Χωρητικότητα οχήματος: 140

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

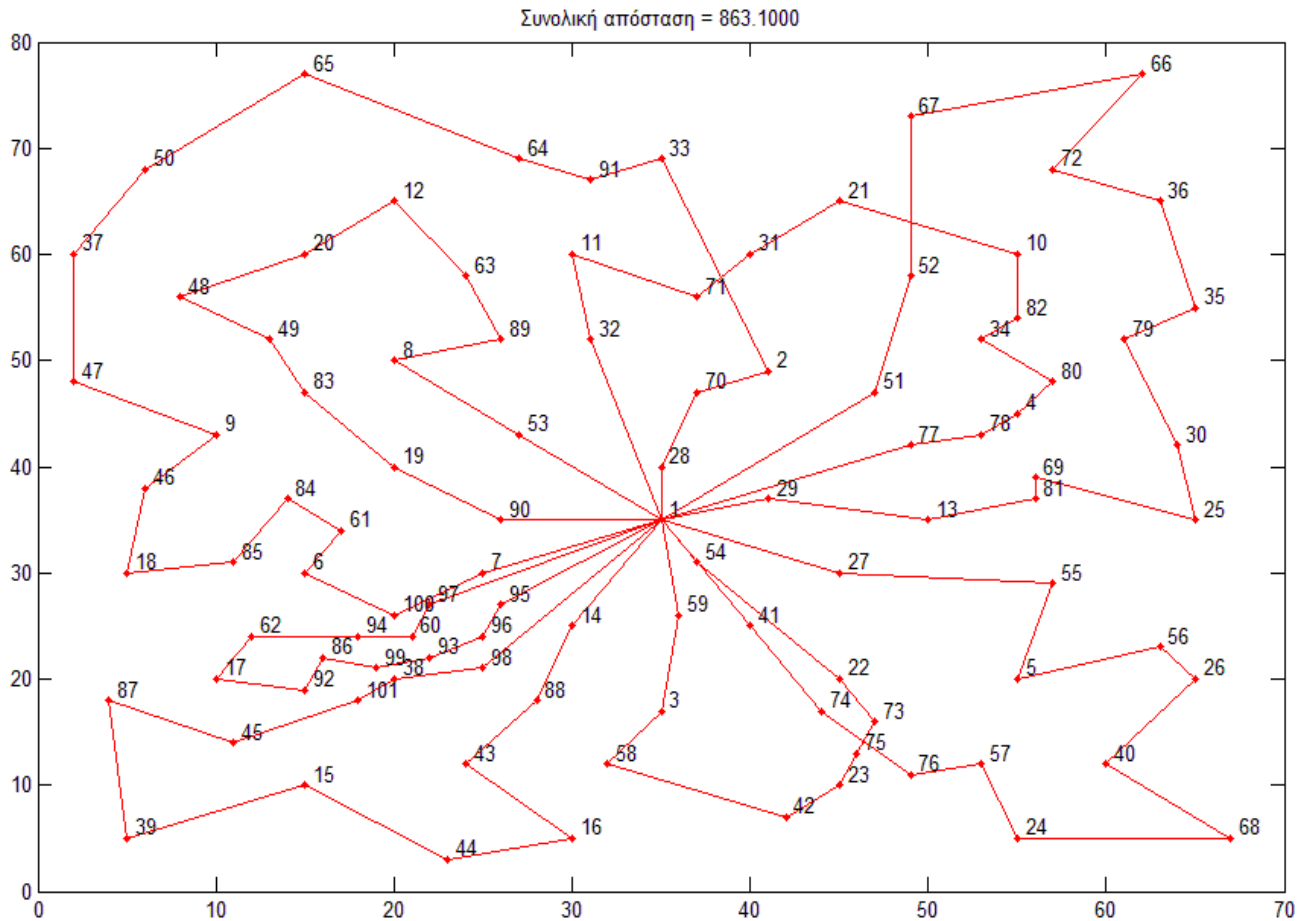
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 835,26

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 889,73

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{889,73 - 835,26}{835,26} = 6,52\%$

Στιγμιότυπο 3



Αριθμός πελατών: 100

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

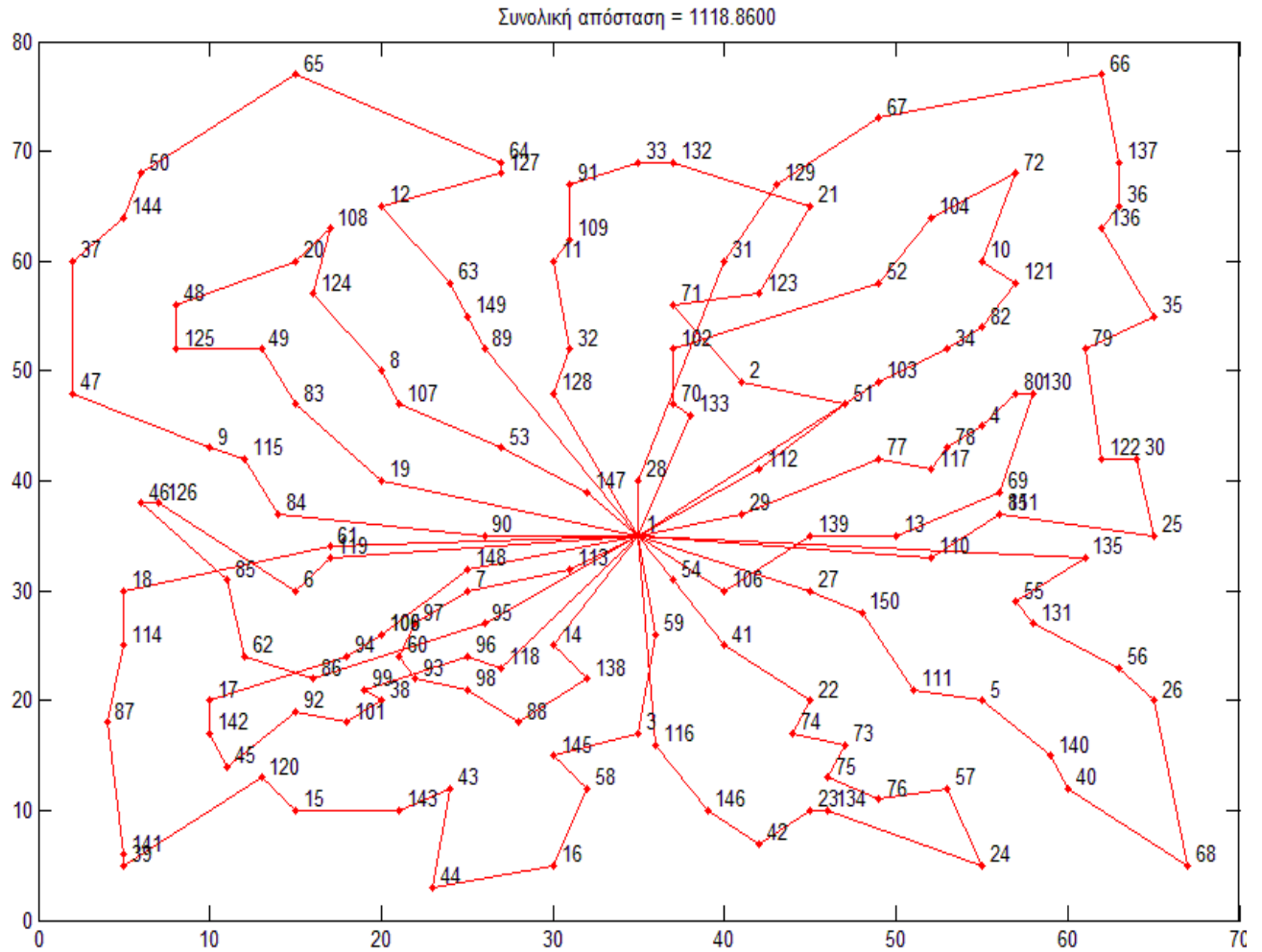
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 826,14

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 863,1

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{863,1 - 826,14}{826,14} = 4,47\%$

Στιγμιότυπο 4



Αριθμός πελατών: 150

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

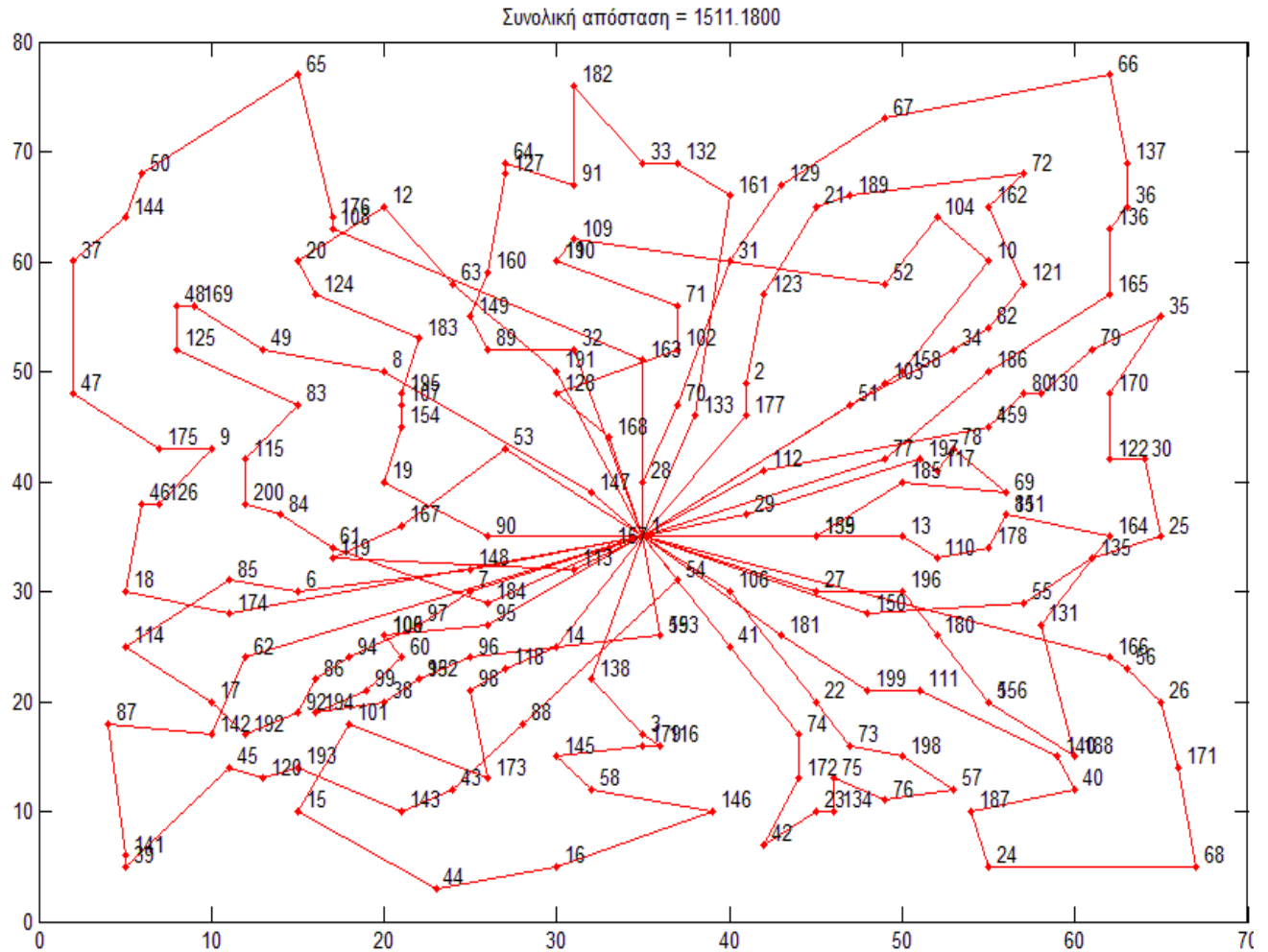
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 1028,42

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 1118,86

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{1118,86 - 1028,42}{1028,42} = 8,79\%$

Στιγμιότυπο 5



Αριθμός πελατών: 200

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

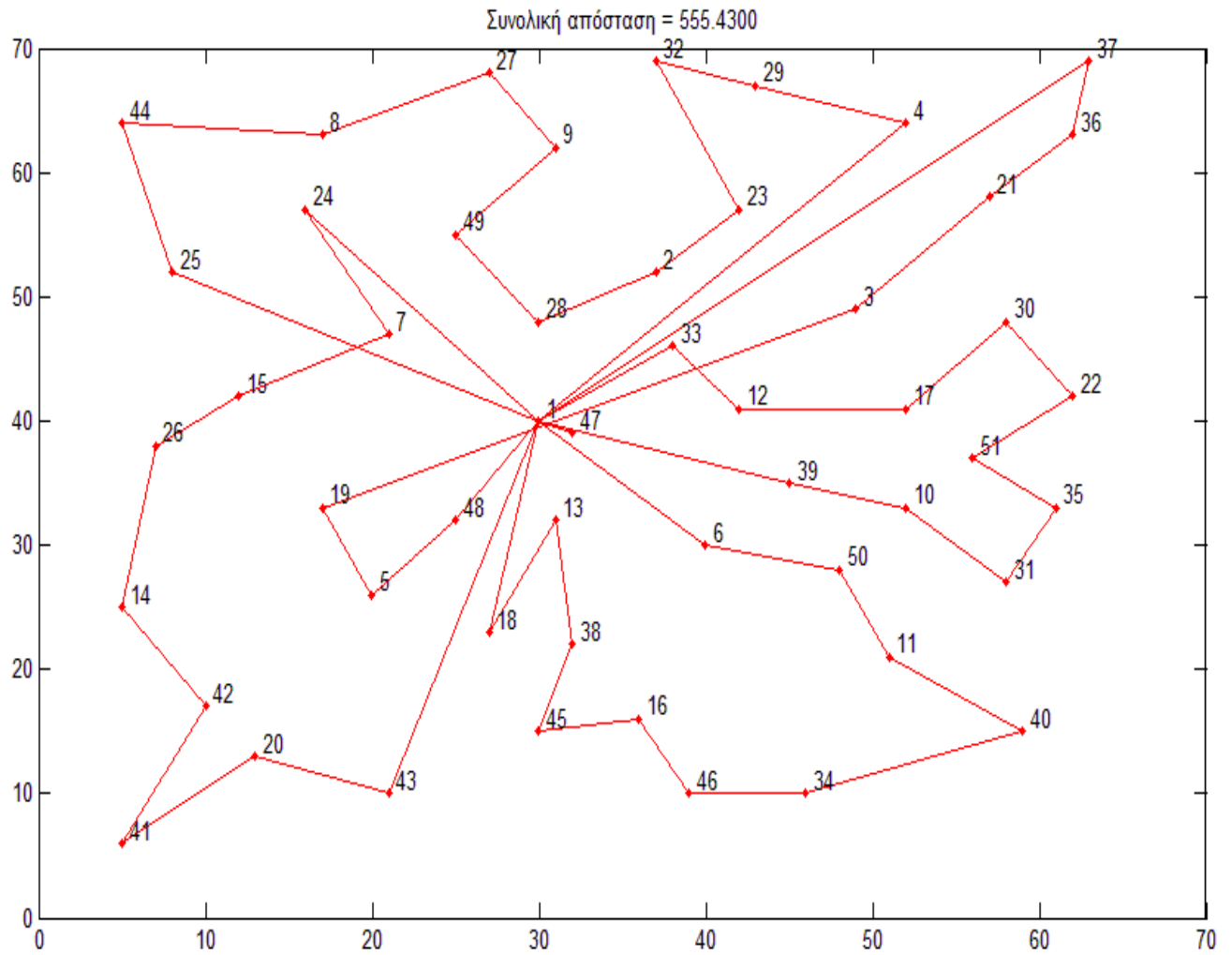
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 1291,29

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 1511,18

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{1511,18 - 1291,29}{1291,29} = 17,02\%$

Στιγμιότυπο 6



Αριθμός πελατών: 50

Χωρητικότητα οχήματος: 160

Χρόνος εξυπηρέτησης: 10

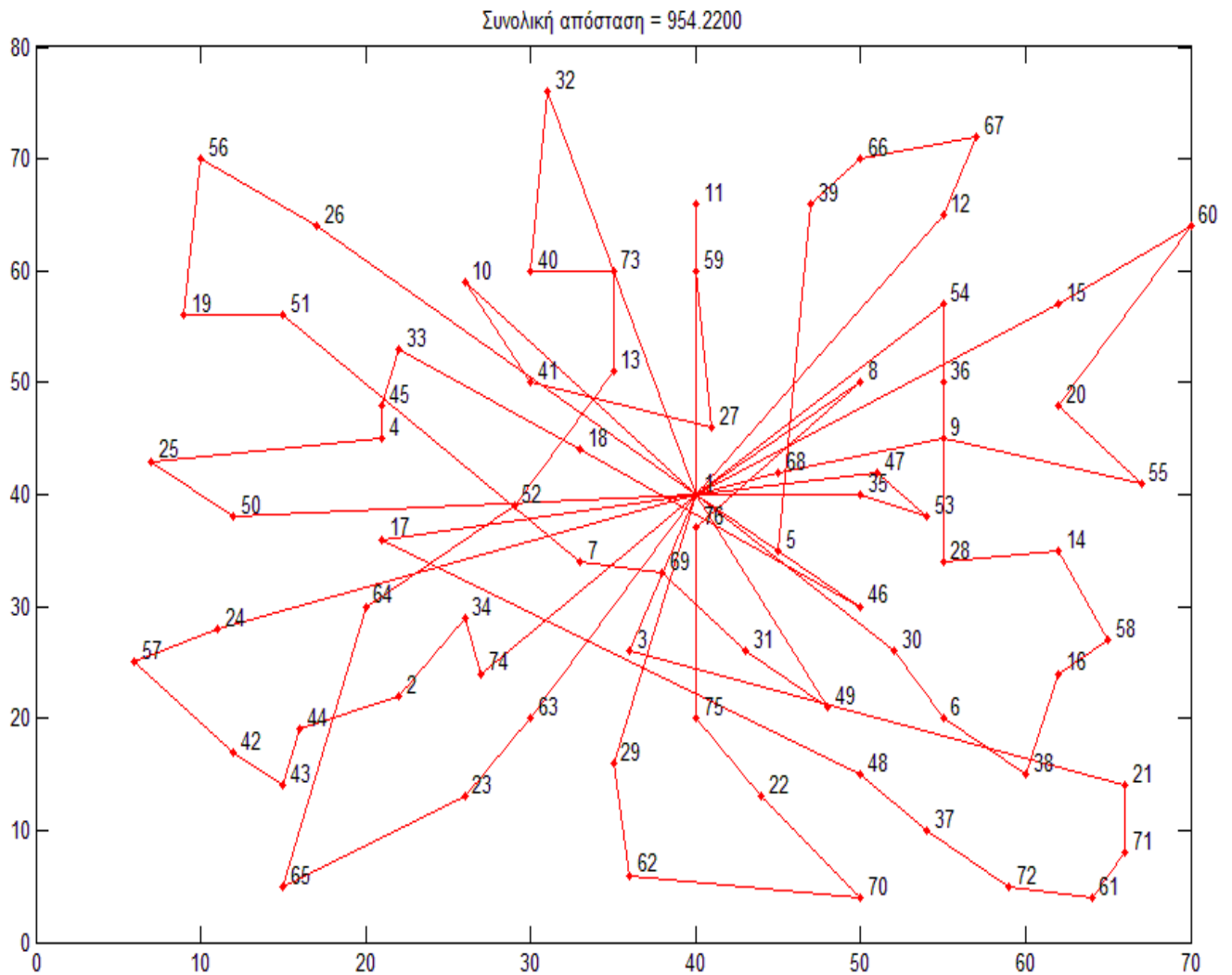
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 200

Βέλτιστη λύση: 555,43

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 555,43

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{555,43 - 555,43}{555,43} = 0\%$

Στιγμιότυπο 7



Αριθμός πελατών: 75

Χωρητικότητα οχήματος: 140

Χρόνος εξυπηρέτησης: 10

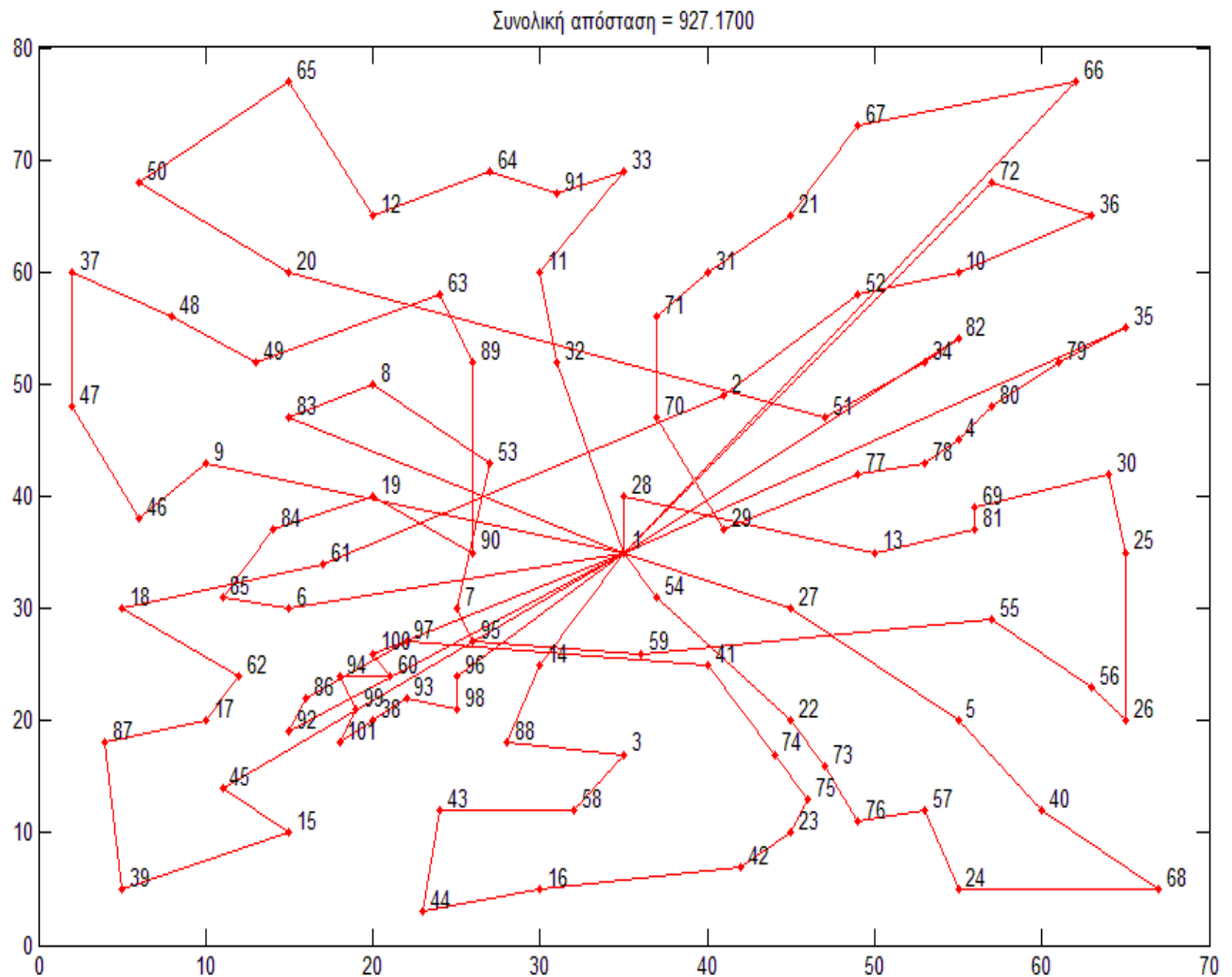
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 160

Βέλτιστη λύση: 909,68

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 954,22

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{954,22 - 909,68}{909,68} = 4,89\%$

Στιγμιότυπο 8



Αριθμός πελατών: 100

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 10

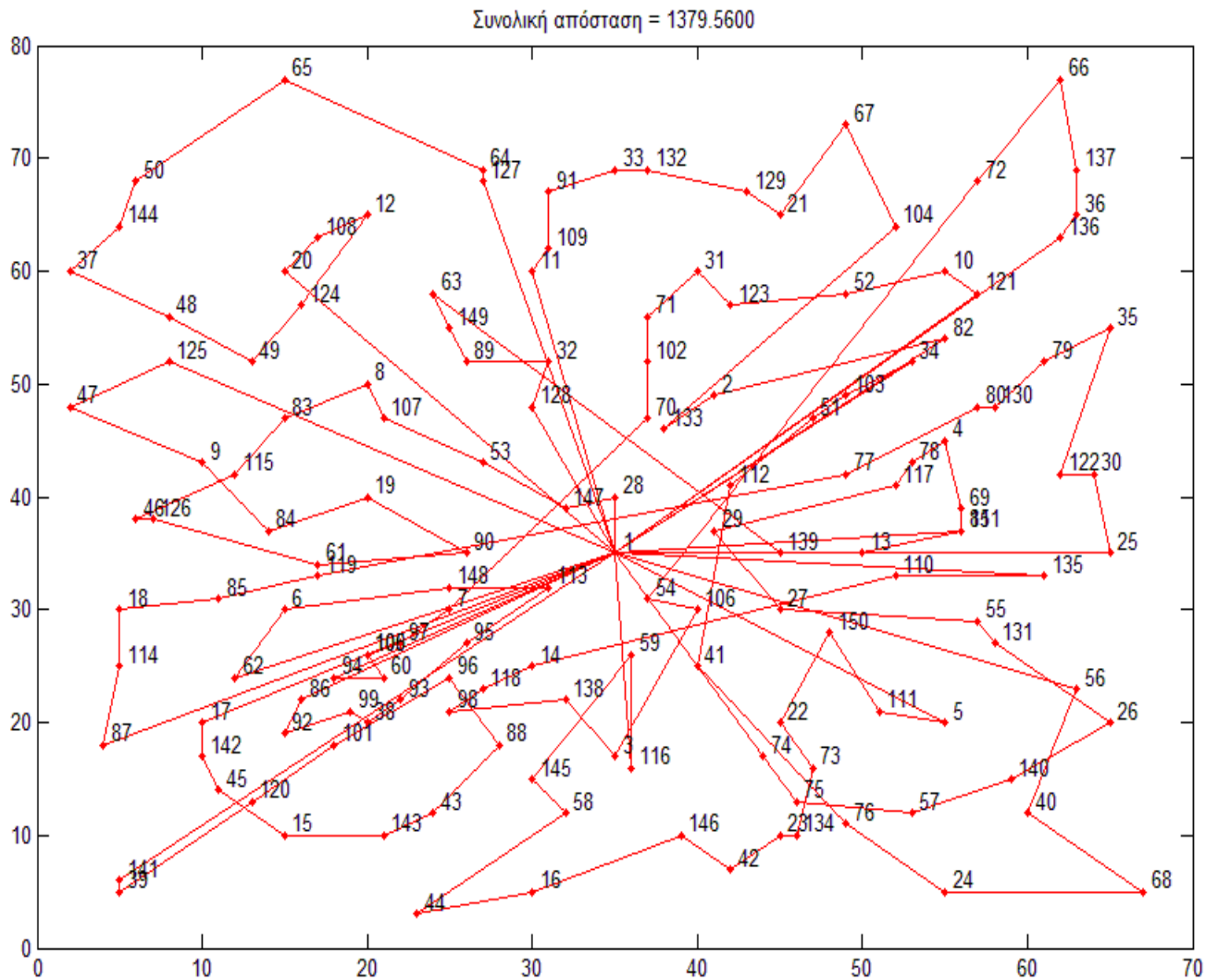
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 230

Βέλτιστη λύση: 865,94

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 927,17

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{927,17 - 865,94}{865,94} = 7,07\%$

Στιγμιότυπο 9



Αριθμός πελατών: 150

Χωρητικότητα οχήματος: 140

Χρόνος εξυπηρέτησης: 10

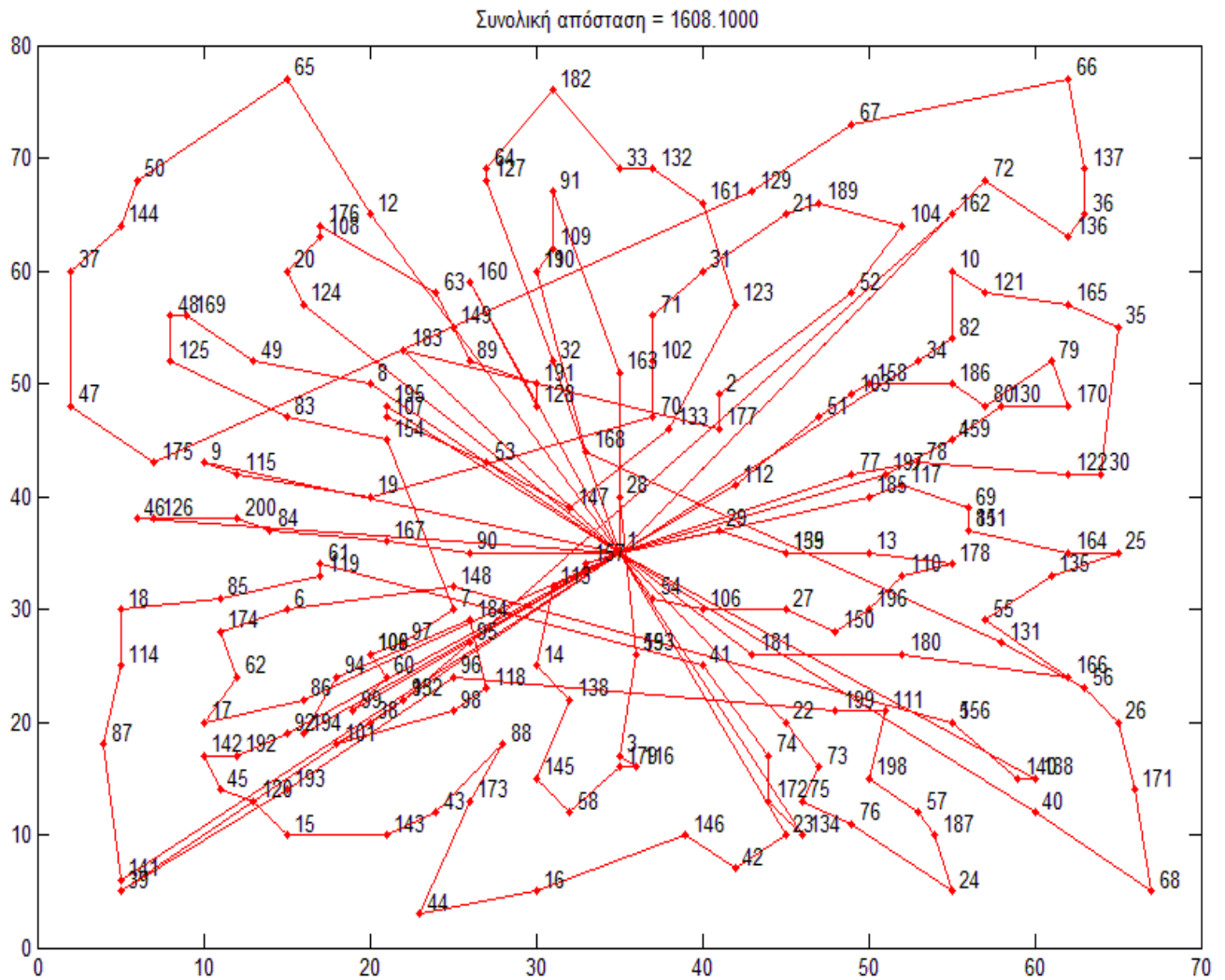
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 160

Βέλτιστη λύση: 1162,55

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 1379,56

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{1379,56 - 1162,55}{1162,55} = 18,66\%$

Στιγμιότυπο 10



Αριθμός πελατών: 200

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 10

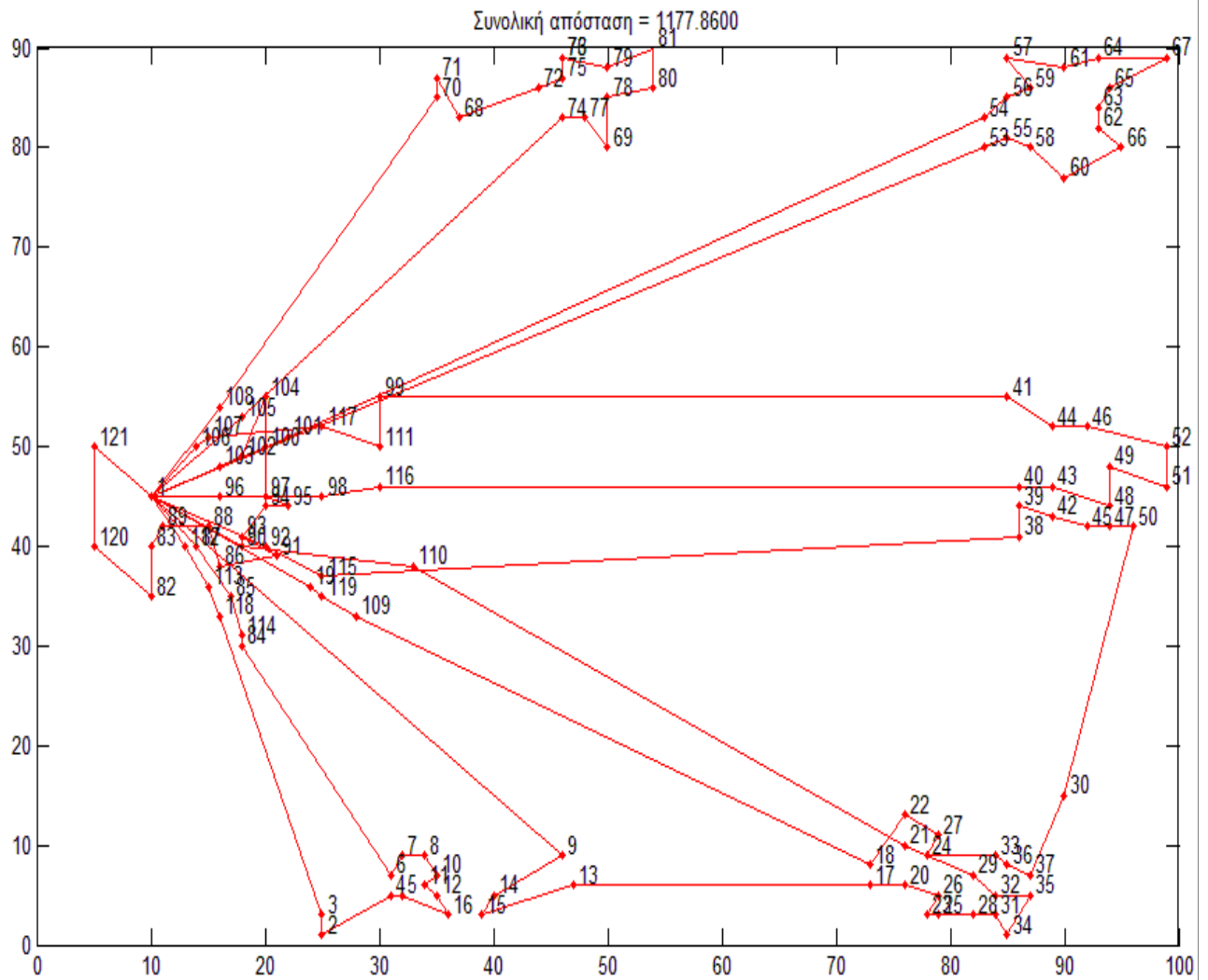
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 200

Βέλτιστη λύση: 1395,85

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 1608,1

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{1608,1 - 1395,85}{1395,85} = 15,02\%$

Στιγμιότυπο 11



Αριθμός πελατών: 100

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

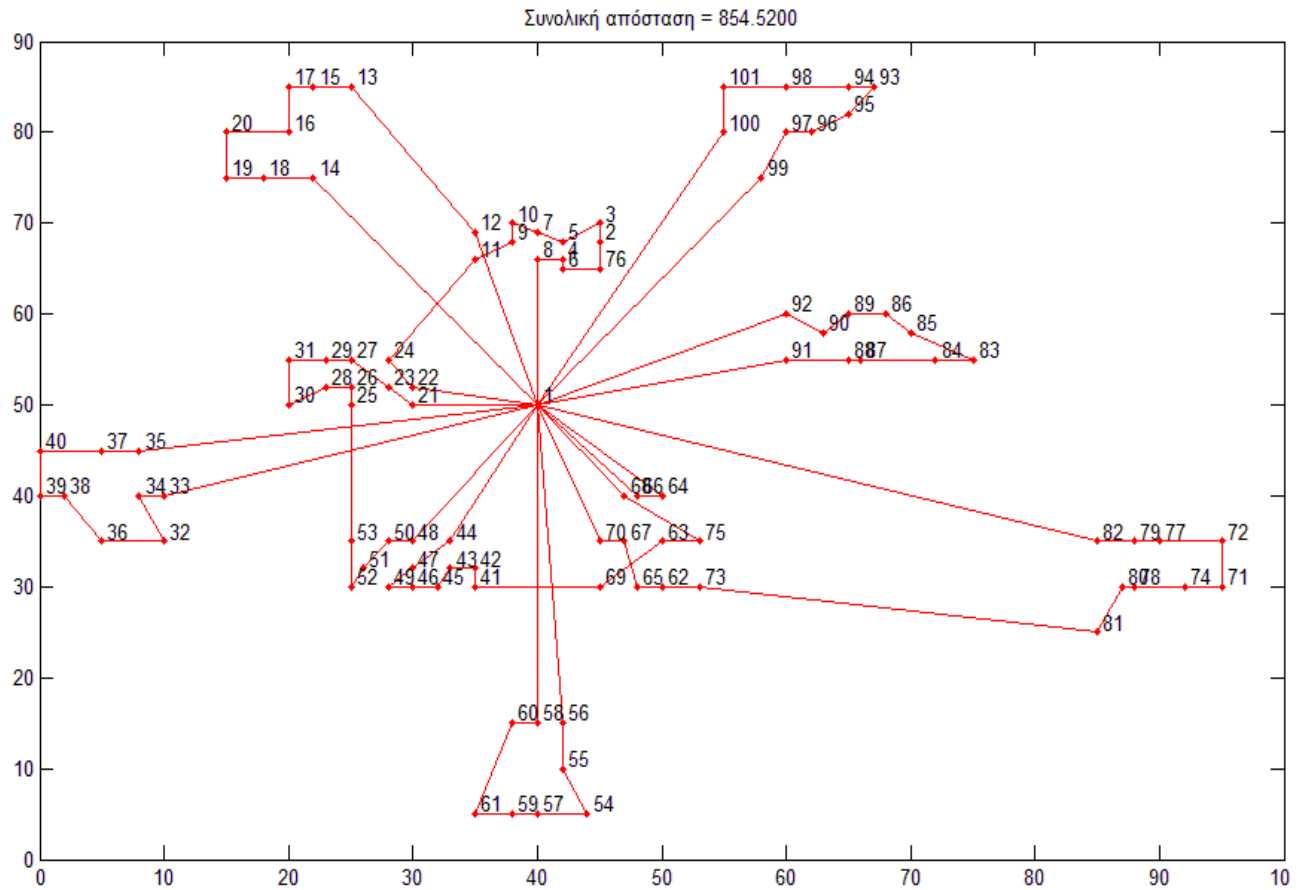
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 1042,11

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 1177,86

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{1177,86 - 1042,11}{1042,11} = 13,02\%$

Στιγμιότυπο 12



Αριθμός πελατών: 100

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

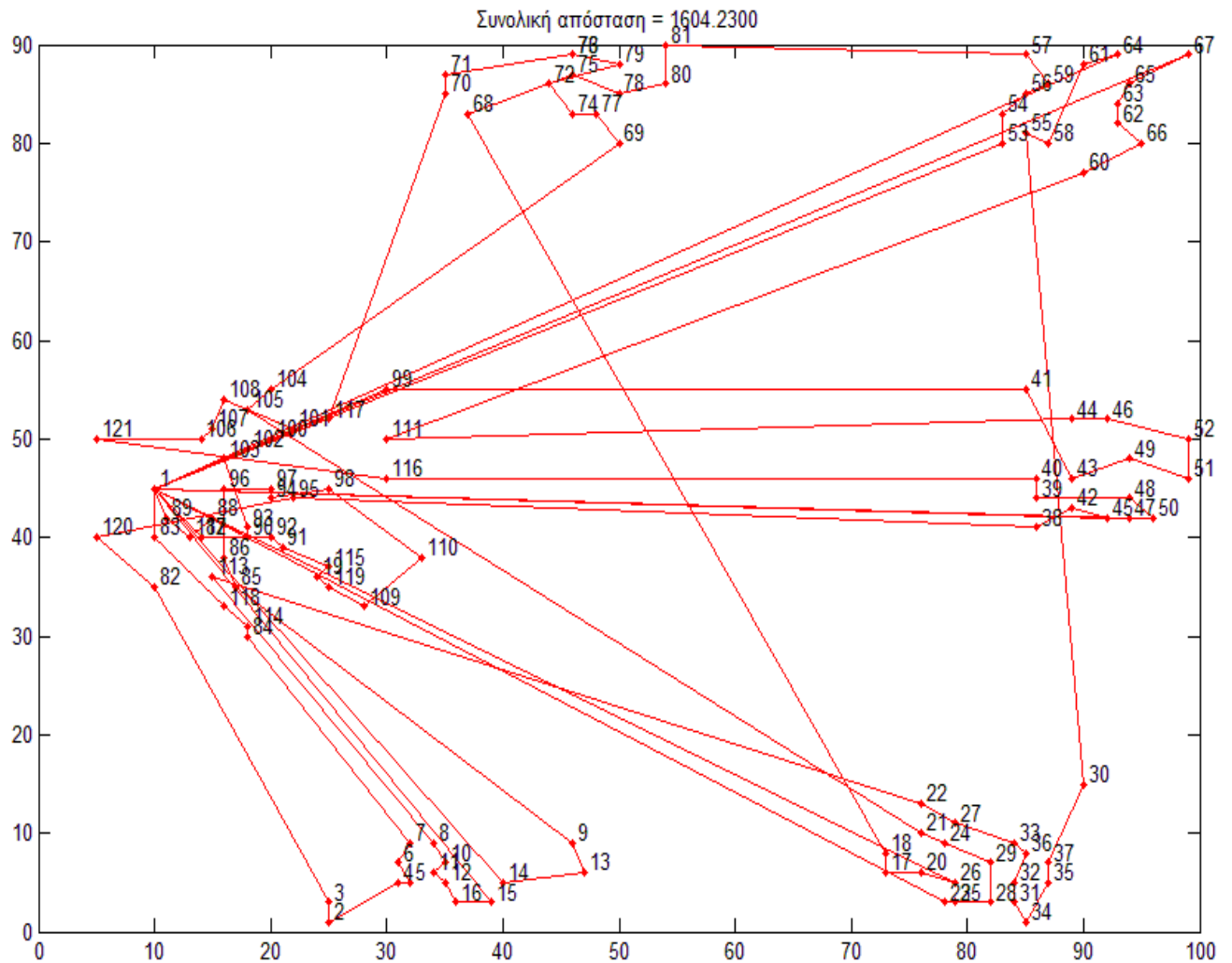
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 819,56

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 854.52

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{854,52 - 819,56}{819,56} = 4,26\%$

Στιγμιότυπο 13



Αριθμός πελατών: 100

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 50

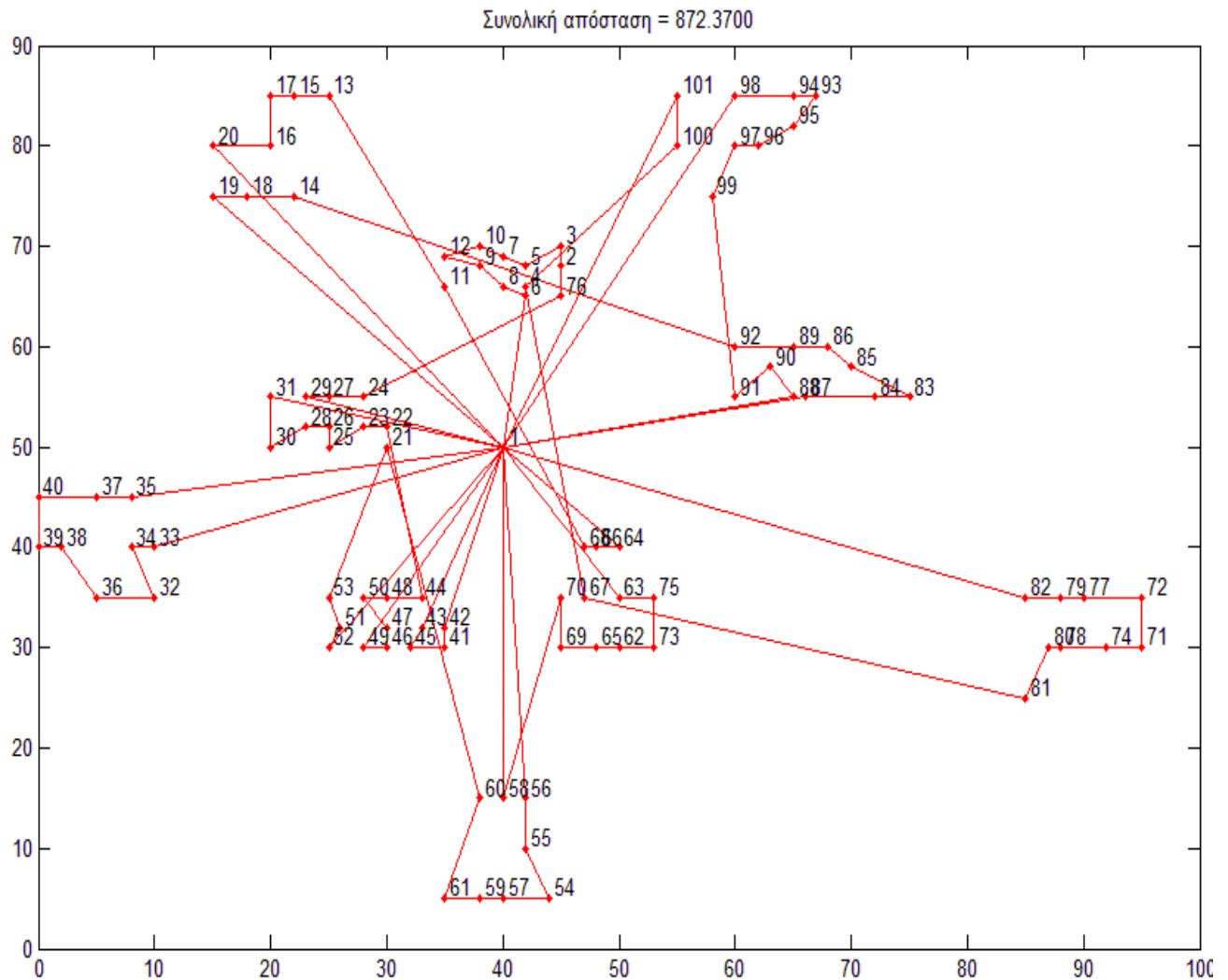
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 720

Βέλτιστη λύση: 1541,14

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 1604,23

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{1604,23 - 1541,14}{1541,14} = 4,09\%$

Στιγμιότυπο 14



Αριθμός πελατών: 120

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 90

Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 1040

Βέλτιστη λύση: 866,37

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 872,37

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{872,37 - 866,37}{866,37} = 0,69\%$

3.2 Ανοιχτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων

Τα αποτελέσματα για το ανοιχτό πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων δίνονται καταρχήν συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα και αναλυτικότερα στη συνέχεια. Τα αποτελέσματα σε αυτή την περίπτωση ήταν λιγότερο επιτυχημένα σε σχέση με το κλασικό πρόβλημα δρομολόγησης. Στο ανοιχτό πρόβλημα παρατηρείται συνολικά ανεπαρκής ερευνητική δραστηριότητα. Γενικά για το πρόβλημα έχουν πραγματοποιηθεί παγκοσμίως σχετικά λίγες έρευνες. Οι αποκλίσεις των λύσεων της γενετικής διαφορικής εξέλιξης σε σχέση με τις βέλτιστες κυμαίνονται από 1,44% - 20%, εκτός όπως και στο κλασικό πρόβλημα στα μεγαλύτερα στιγμιότυπα, όπου εδώ όμως ο αλγόριθμος αδυνατεί να βρει λύσεις συγκρίσιμες με παλαιότερες έρευνες.

Στιγμιότυπο	Αριθμός πελατών	Χωρητικότητα οχημάτων	Μέγιστος κόστος διαδρομής ενός οχήματος	Γενετική Διαφορική Εξέλιξη	Βέλτιστη Λύση	Απόκλιση από το βέλτιστο
1	50	160	-	419,56	408,5	2,7%
2	75	140	-	623,02	567,14	9,85%
3	100	200	-	752,59	617	21,97%
6	50	160	180	418,15	400,6	4,38%
7	75	140	144	634,33	583,19	8,77%
8	100	200	207	760,7	638,2	19,19%
11	100	200	-	703,93	682,12	3,19%
12	120	200	-	577,3	534,24	8,05%
13	100	200	648	965,57	909,80	6,13%
14	120	200	936	600,43	591,87	1,44%

Σε όλα τα στιγμιότυπα το πλήθος του αρχικού πληθυσμού ήταν συνάρτηση του πλήθους K των πελατών του στιγμιότυπου. Στις υλοποιήσεις μας στα μικρότερα στιγμιότυπα τον παίρναμε ίσο με K , ενώ στα μεγαλύτερα στιγμιότυπα ίσο με $2K$. Η παράμετρος L , ισούτο με την ακέραια διαίρεση του αριθμού των πελατών K , με το 3.

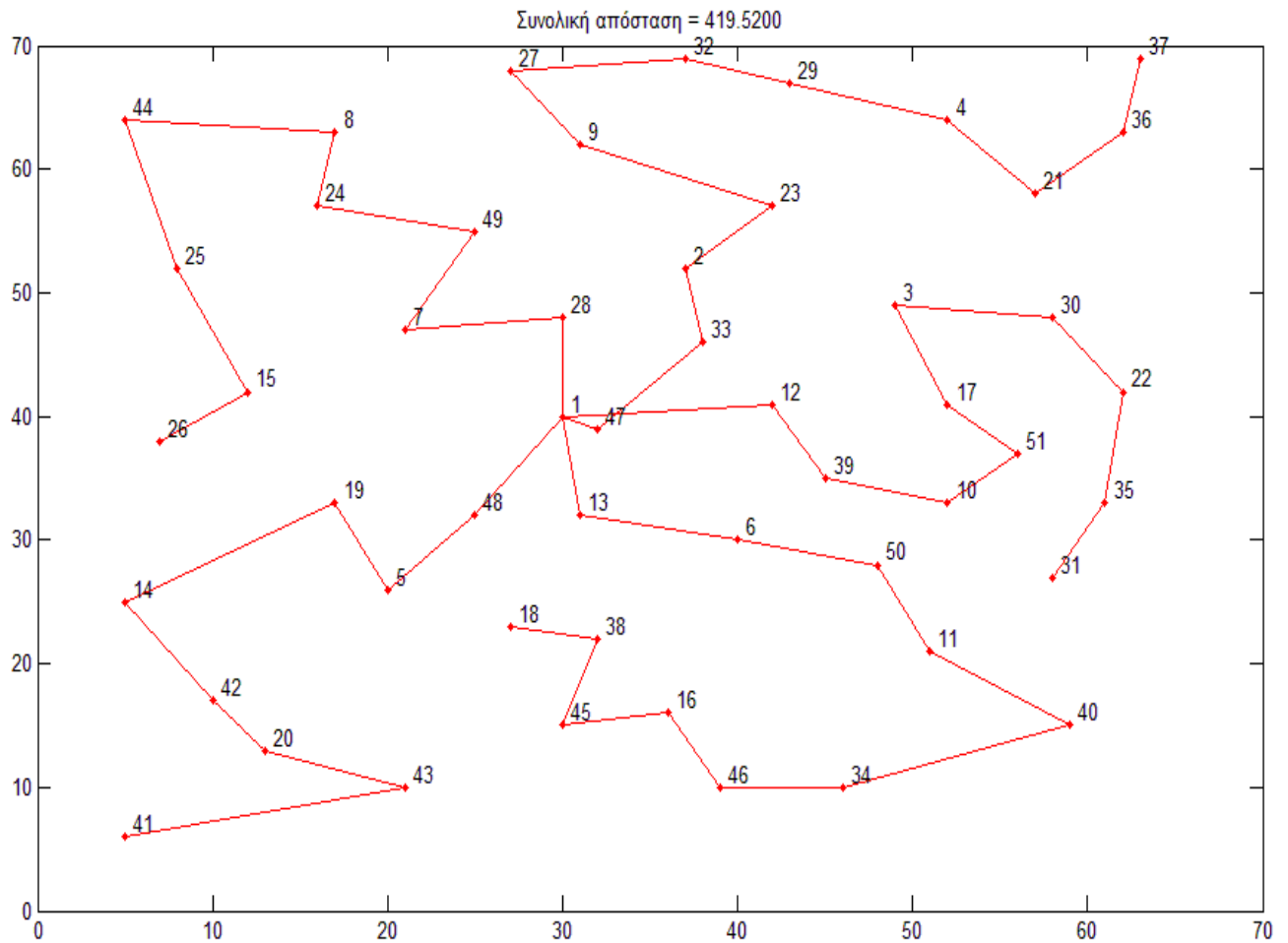
Ο αλγόριθμος στο ανοιχτό πρόβλημα δρομολόγησης ήταν ανέφικτο να δημιουργήσει λύσεις με χαμηλή απόκλιση στα μεγαλύτερα προβλήματα (στιγμιότυπα 4,5,9,10), δηλαδή σε εκείνα όπου υπήρχαν οι περισσότεροι κόμβοι (150 ή 200).

Θεωρητικά ξεκινώντας από ένα σχετικά μεγαλύτερο αρχικό πληθυσμό (της τάξης των 300-400 λύσεων) ο αλγόριθμος θα συνέκλινε σε υψηλής ποιότητας λύσης. Όμως πρακτικά για να συμβεί αυτό ξεφεύγαμε από τα φυσιολογικά χρονικά όρια εκτέλεσης του αλγορίθμου. Πιθανή υλοποίηση του σε γλώσσα C ή η εκτέλεση των πειραμάτων σε ισχυρότερο υπολογιστή να έδινε λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Στην επόμενη παράγραφο παραθέτουμε τα αντίστοιχα γραφικά διαγράμματα για κάθε στιγμιότυπο, όπου διακρίνονται τα χαμιλτονιανά μονοπάτια που εκτελούν τα οχήματα σε κάθε περίπτωση. Με τον αριθμό 1 προσδιορίζεται η αποθήκη των προϊόντων, άρα η αρίθμηση των πελατών ξεκινά πάντα από τον αριθμό 2.

3.2.1 Αποτελέσματα ανα στιγμιότυπο

Στιγμιότυπο 1



Αριθμός πελατών: 50

Χωρητικότητα οχήματος: 160

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

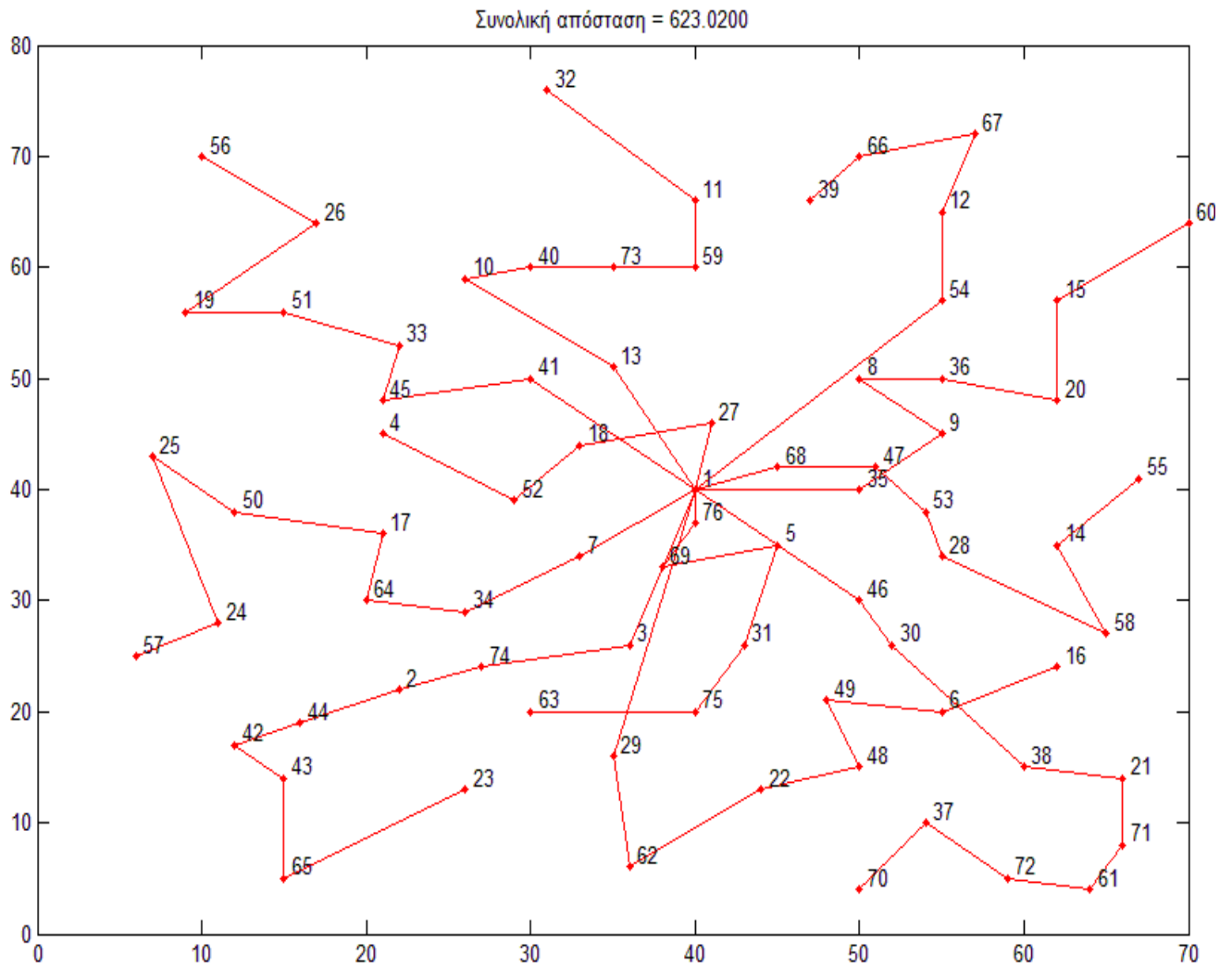
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 408,5

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 419,52

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{419,52 - 408,5}{408,5} = 2,7\%$

Στιγμιότυπο 2



Αριθμός πελατών: 75

Χωρητικότητα οχήματος: 140

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

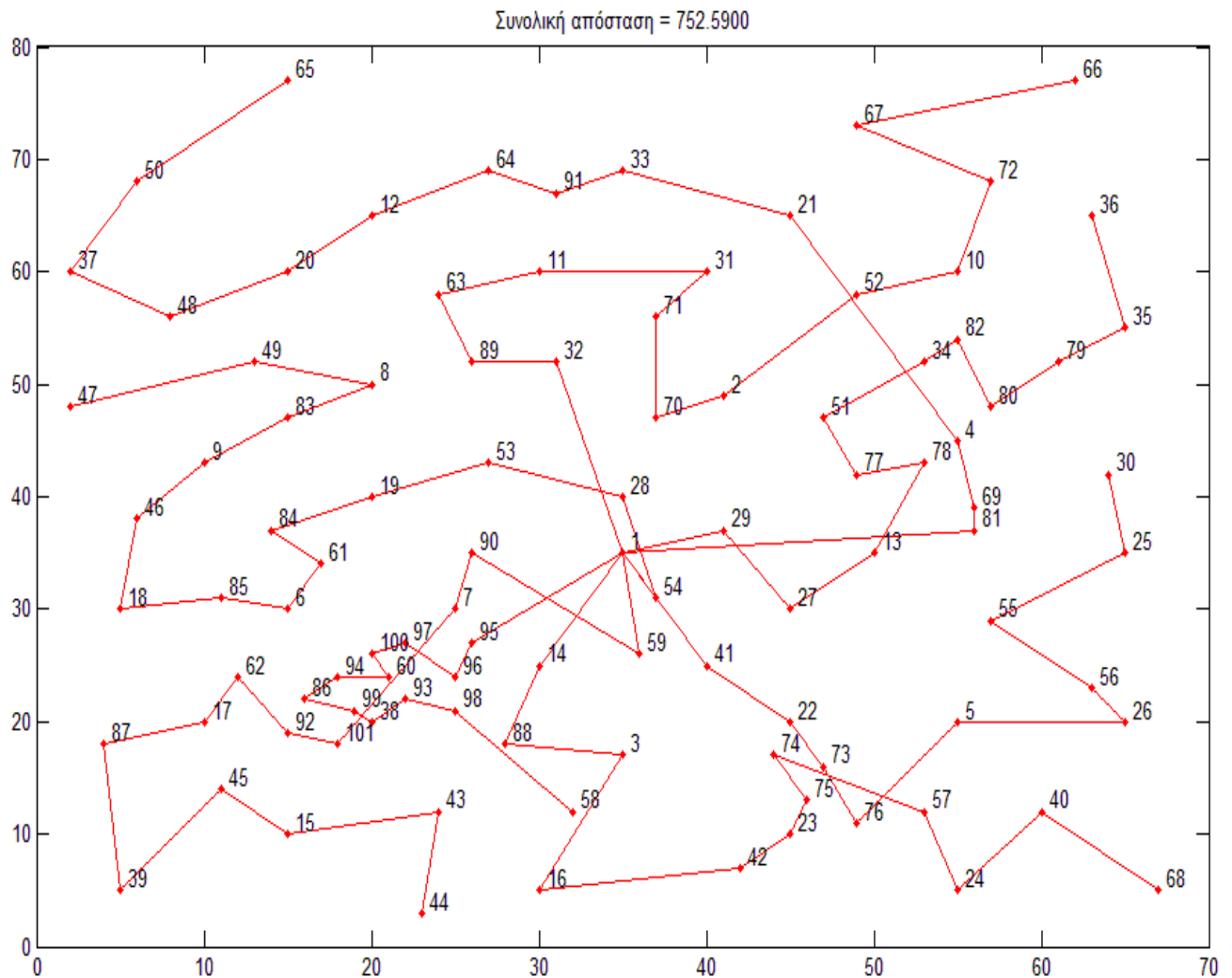
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 567,14

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 623,02

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{623,02 - 567,14}{567,14} = 9,85\%$

Στιγμιότυπο 3



Αριθμός πελατών: 100

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

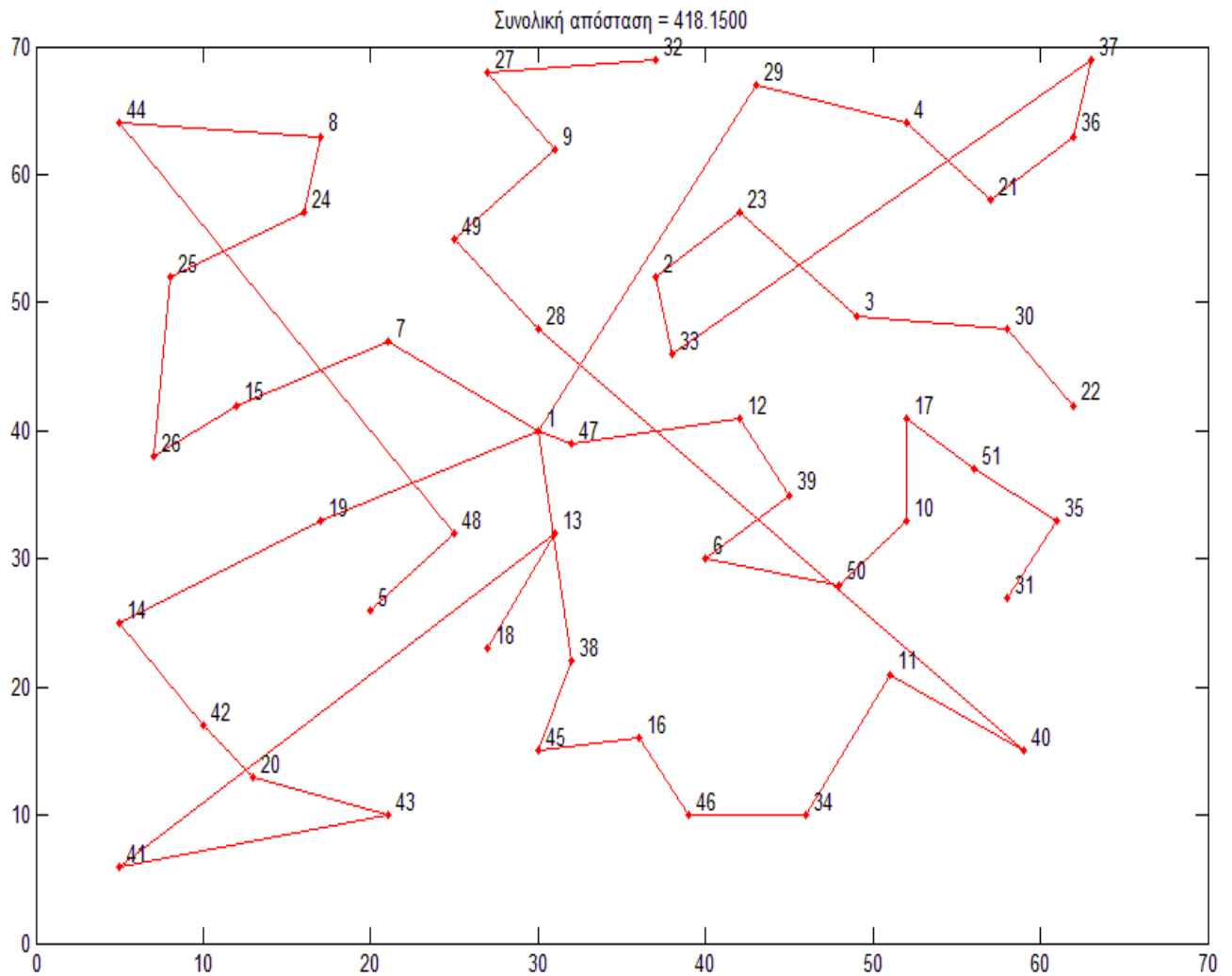
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 617

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 752,59

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{752,59 - 617}{617} = 21,97\%$

Στιγμιότυπο 6



Αριθμός πελατών: 50

Χωρητικότητα οχήματος: 160

Χρόνος εξυπηρέτησης: 10

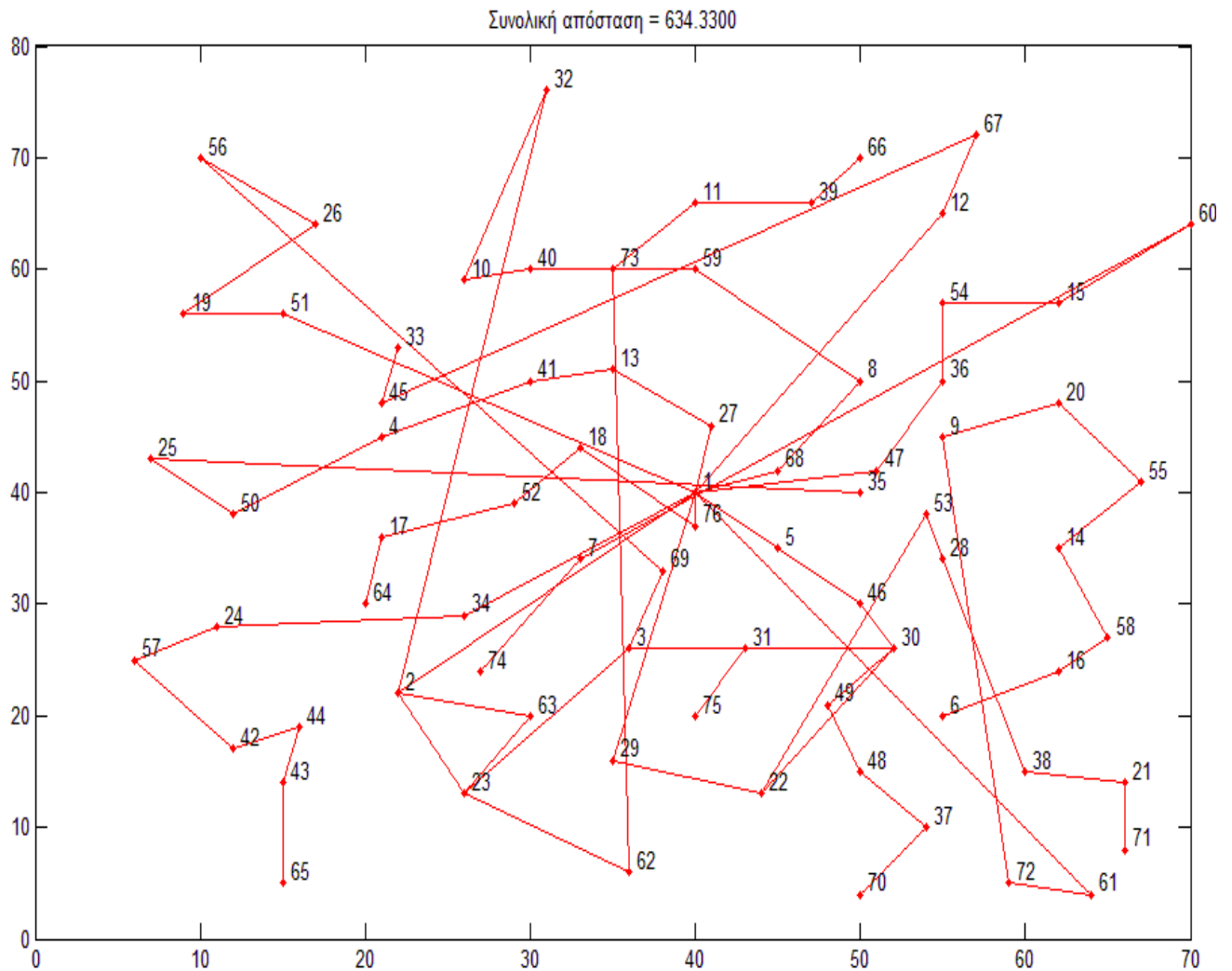
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 180

Βέλτιστη λύση: 400,6

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 418,15

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{418,15 - 400,6}{400,6} = 4,38\%$

Στιγμιότυπο 7



Αριθμός πελατών: 75

Χωρητικότητα οχήματος: 140

Χρόνος εξυπηρέτησης: 10

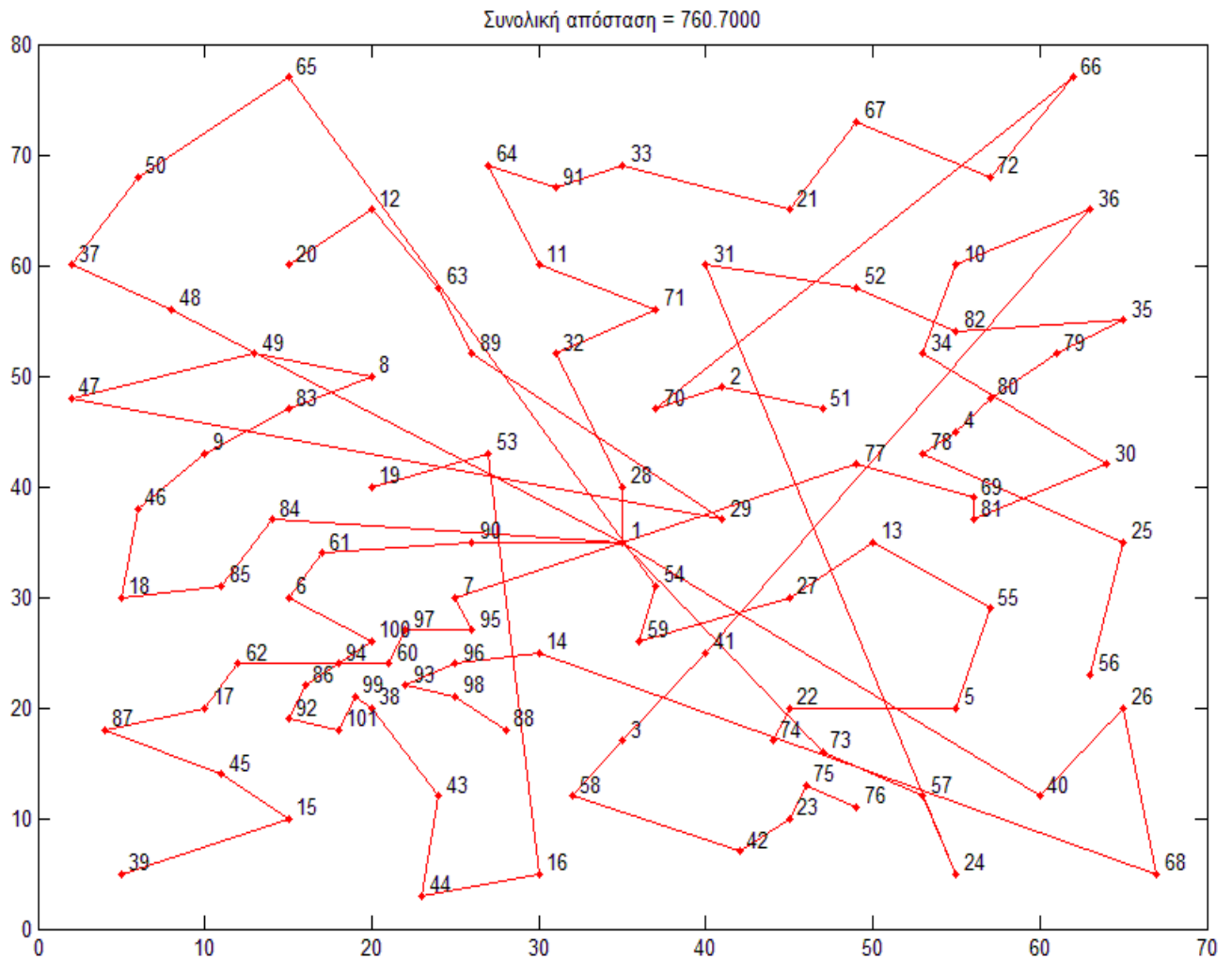
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 144

Βέλτιστη λύση: 583,19

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 634,33

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{634,33 - 583,19}{583,19} = 8,77\%$

Στιγμιότυπο 8



Αριθμός πελατών: 100

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 10

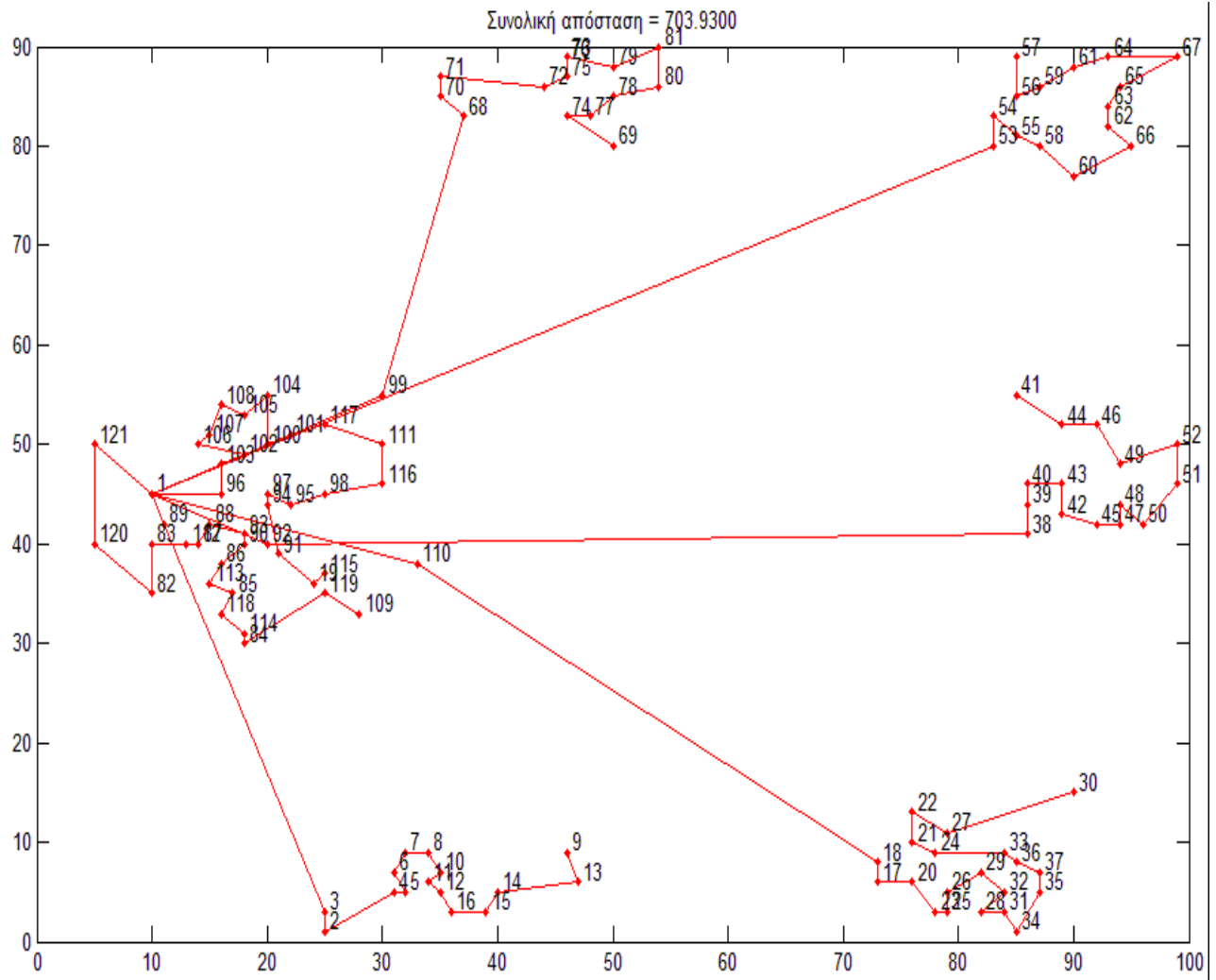
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 207

Βέλτιστη λύση: 638,2

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 760,7

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{760,7 - 638,2}{638,2} = 19,19\%$

Στιγμιότυπο 11



Αριθμός πελατών: 100

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 0

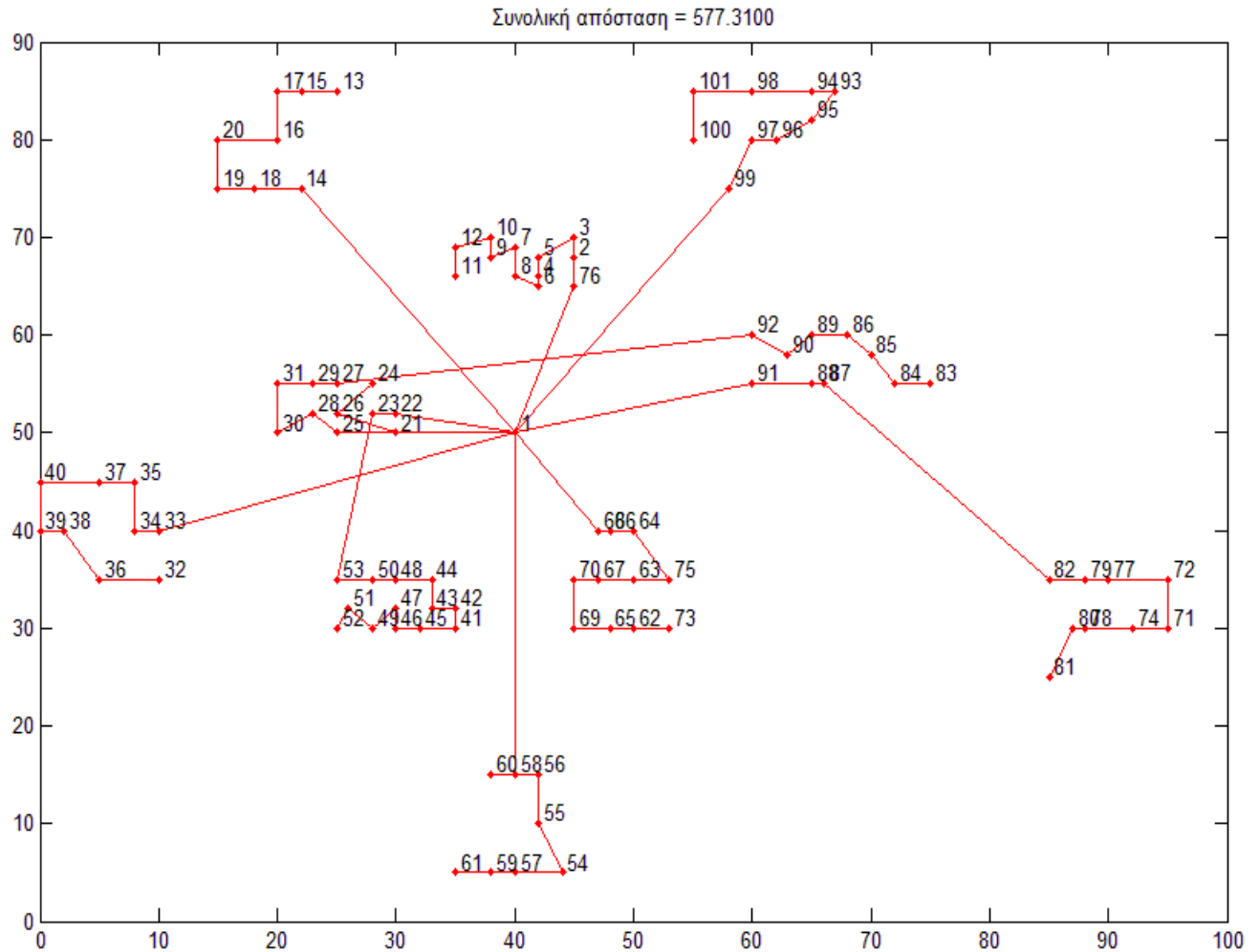
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 682,12

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 703,93

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{703,93 - 682,12}{682,12} = 3,19\%$

Στιγμιότυπο 12



Αριθμός πελατών: 100

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: -

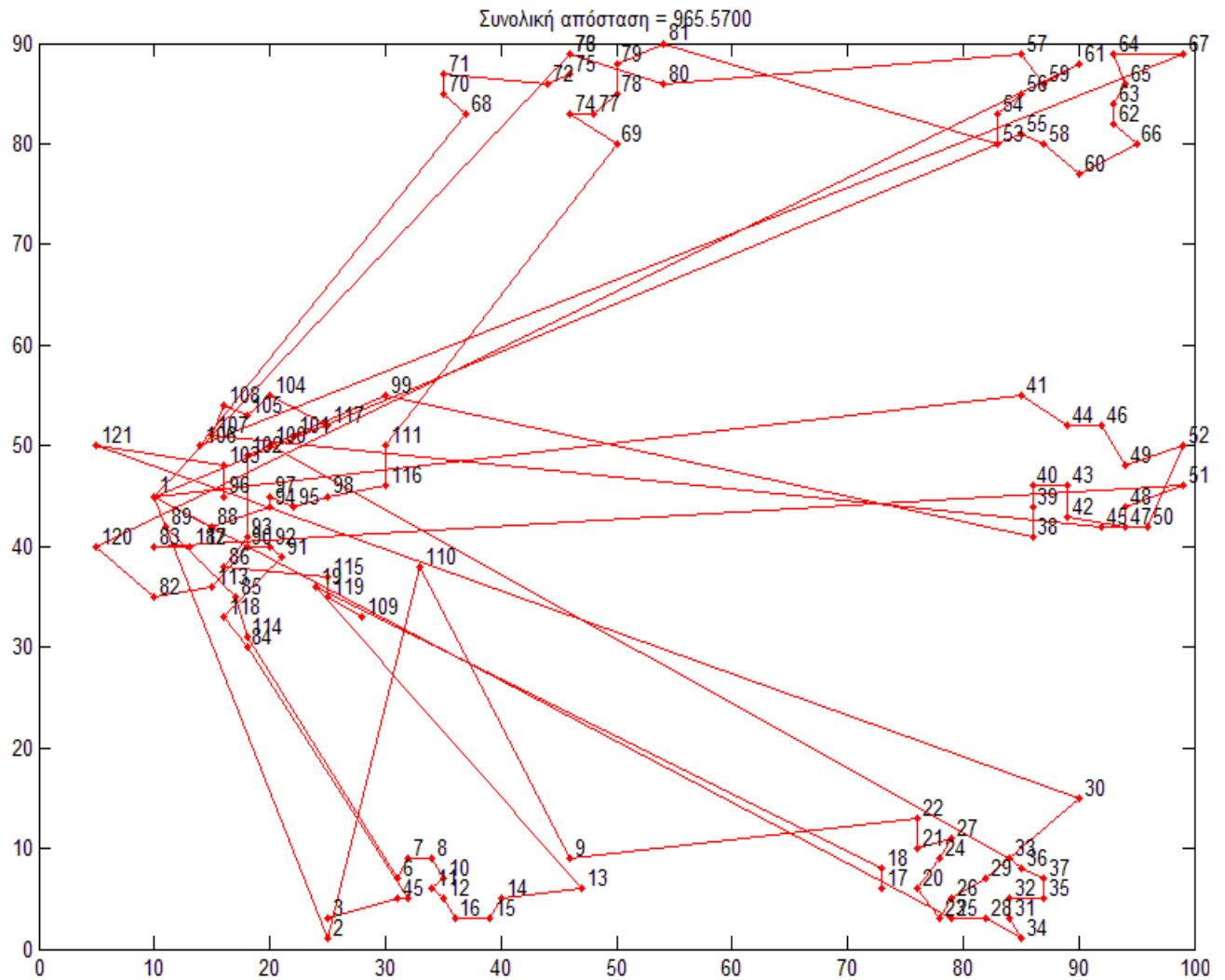
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: -

Βέλτιστη λύση: 534,24

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 577,31

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{577,31 - 534,24}{534,24} = 8,05\%$

Στιγμιότυπο 13



Αριθμός πελατών: 100

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 50

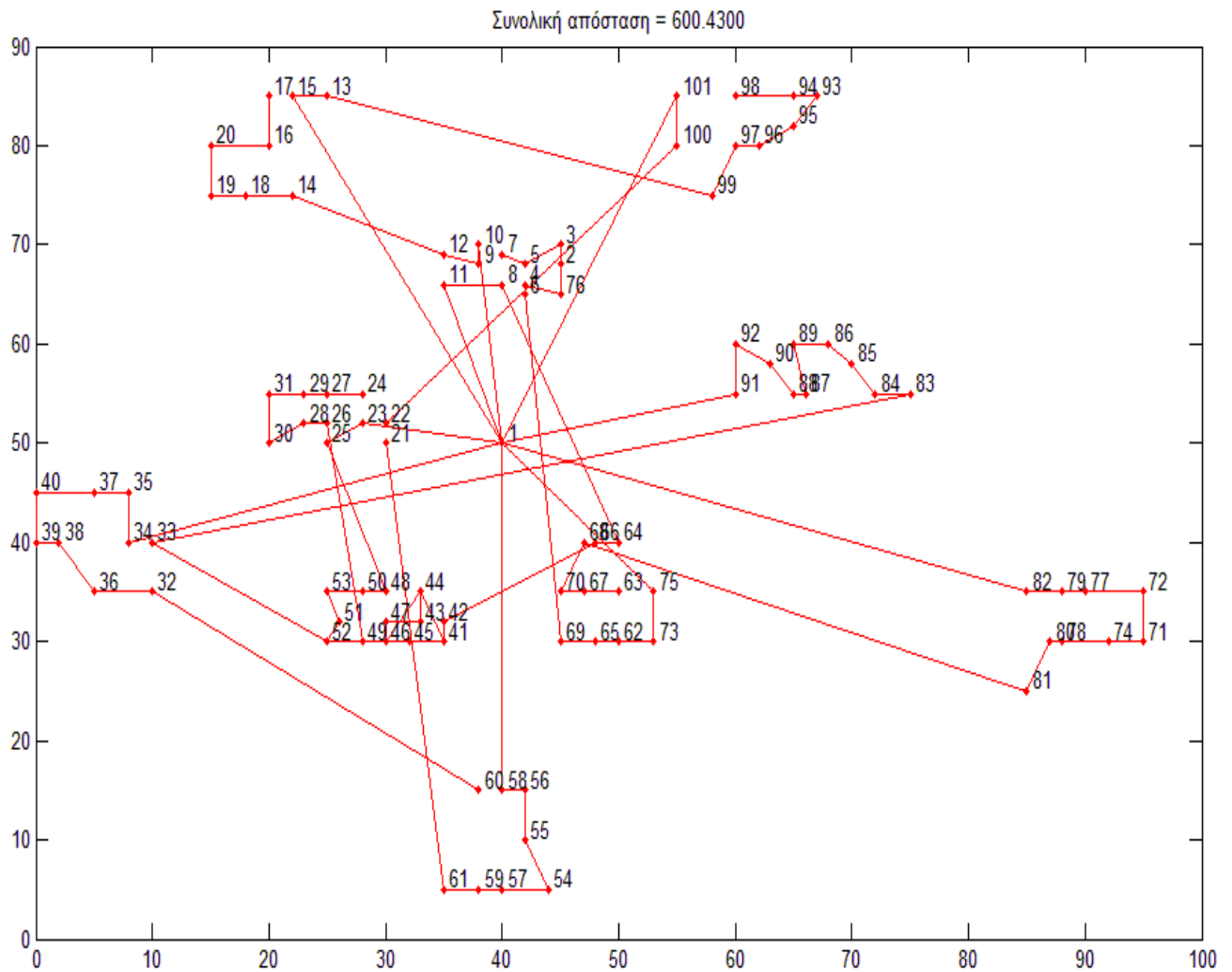
Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 648

Βέλτιστη λύση: 909,8

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 965,57

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{965,57 - 909,8}{909,8} = 6,13\%$

Στιγμιότυπο 14



Αριθμός πελατών: 120

Χωρητικότητα οχήματος: 200

Χρόνος εξυπηρέτησης: 90

Περιορισμός διαδρομής οχήματος: 936

Βέλτιστη λύση: 591,87

Λύση Γενετικής Διαφορικής Εξέλιξης: 600,43

Απόκλιση από το βέλτιστο: $\frac{600,43 - 591,87}{591,87} = 1,44\%$

3.3 Συμπεράσματα

Στόχος της εργασίας από την έναρξή της ήταν να αξιοποιηθούν τα στοιχεία ενός αλγορίθμου, της διαφορικής εξέλιξης, με πολύ επιτυχημένα αποτελέσματα σε προβλήματα συνεχούς βελτιστοποίησης, σε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Κατά δεύτερο λόγο, στόχος μας ήταν η όσο το δυνατόν ικανοποιητικότερη λύση των προβλημάτων δρομολόγησης οχημάτων, κάτι που ουσιαστικά αποτέλεσε και τον οδηγό μας για την επίτευξη του κύριου στόχου μας.

Η διαφορική εξέλιξη στην κλασική της μορφή ήταν αδύνατο να φανεί χρήσιμη στην έρευνα μας. Ο μηχανισμός της από τη φύση του εμπλέκει πραγματικούς αριθμούς κατά τη διάρκεια της διαδικασίας και οι τρόποι που χρησιμοποιήθηκαν ώστε να αναχθούν σε ακέραιους αριθμούς που θα ικανοποιούσαν τους περιορισμούς των προβλημάτων κρίθηκαν ακατάλληλοι. Ουσιαστικά με τους προτεινόμενους τρόπους από τους δημιουργούς της διαφορικής εξέλιξης, σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, ήταν σαν να ξεκινούσαν όλα από την αρχή. Ο κορμός της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε, από προηγούμενη έρευνα στο πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή [33] υπήρξε οδηγός στην επίτευξη των στόχων μας. Η γενετική προσομοίωση της διαφορικής εξέλιξης υιοθετεί το πνεύμα της κλασικής μεθόδου και έδωσε και ικανοποιητικά αποτελέσματα στο βασικό πρόβλημα δρομολόγησης και μερικώς ικανοποιητικά στο ανοιχτό πρόβλημα.

Το αντικείμενο της έρευνας μας θα μπορούσε κάλλιστα να διερευνηθεί σε ακόμα μεγαλύτερο βαθμό και με διαφορετική βάση σε μελλοντικές έρευνες. Η προσπάθεια του Alberto Moraglio [42] να περάσει τη διαφορική εξέλιξη στο χώρο Hamming από τον ευκλείδιο χώρο είναι μια ριζοσπαστική ιδέα, αλλά η εφαρμογή του στα προβλήματα δρομολόγησης χρειάζεται περαιτέρω έρευνα, μιας και συναντώνται σημαντικές δυσκολίες στην οικογένεια αυτών των προβλημάτων λόγω των ισχυρών περιορισμών που περιέχουν. Σε κάθε περίπτωση η αναγωγή του αλγορίθμου σε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης, με τρόπο που να καλύπτει όλες τις οικογένειες προβλημάτων είναι ένα πρόβλημα που οι ερευνητές μπορούν να επικεντρωθούν μελλοντικά.

Βιβλιογραφία

1. Agarwal Y., Mathur K., Salkin H.M. (1989). A set-partitioning-based exact algorithm for the vehicle routing problem. *Networks*, 19:731-749.
2. Alfa A.S., Heragu S.S., Chen M. (1991). A 3-opt based simulated annealing algorithm for vehicle routing problems. *Computers & Industrial Engineering*, 21:635-639.
3. Altinkemer K., Gavish B. (1991). Parallel savings based heuristic for the delivery problem. *Operations Research*, 39:456-469.
4. Araque J.R., Hall L., Magnanti T.L. (1990). Capacitated trees, capacitated routing and associated polyhedra. *Discussion Paper 90-61, CORE, University of Louvain La Neuve*. Belgium.
5. Bean J.C. (1994). Genetic algorithms and random keys for sequencing and optimization. *ORSA Journal on Computing*, 6:154-160.
6. Bixby A., Coullard C., Simchi-Levi D. (1997). The capacitated prize-collecting traveling salesman problem. *Working paper, Department of Industrial Engineering and Engineering Management, Northwestern University, Evanston, IL*.
7. Bramel J., Simchi-Levi D. (1995). A location based heuristic for general routing problems. *Operations Research*, 43:649-660.
8. Brandao J., (2004). A tabu search algorithm for the open vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 2004;157:552-64.
9. Christofides N., Mingozzi A., Toth P. (1979). The vehicle routing problem. In Christofides N., Mingozzi A., Toth P., and Sandi C., editors, *Combinatorial Optimization*. Wiley, Chichester, UK. pp. 315-338.
10. Clarke G., Wright J.V. (1964). Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations Research*, 12:568-581.
11. Colorni A., Dorigo M., Maniezzo V. (1991). Distributed optimization by ant colonies. In Varela F., Bourgine P., editors, *Proceedings of the European Conference on Artificial Life*. Elsevier.
12. Cornuejols G., Harche F. (1993). Polyhedral study of the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, 60:21-52.

13. Desrochers M., Desrosiers J., Solomon M.M. (1992). A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows. *Operations Research*, 40:342-354.
14. Desrochers M., Verhoog T.W. (1989). A matching based savings algorithm for the vehicle routing problem. *Technical Report Cahiers du GERAD G-89-04, Ecole des Hautes Etudes Commerciales de Montreal*. Canada.
15. Dueck G. (1993). New optimization heuristics: The great deluge algorithm and the record to record travel. *Journal of Computational Physics*, 104:86-92.
16. Dueck G., Scheurer T. (1990). Threshold accepting: A general purpose optimization algorithm. *Journal of Computational Physics*, 90:161-15.
17. Erbao C., Mingyong L., (2009). The open vehicle routing problem with fuzzy demands. *Expert Systems with Applications: An International Journal*. Vol. 37 , Issue 3. pp 2405-2411, 0957-4174.
18. Feoktistov, V. (2006). *Differential Evolution: In Search of Solutions*. Springer. ISBN 978-0-387-36895-5.
19. Fisher M.L. (1994). Optimal solution of vehicle routing problems using minimum fc-trees. *Operations Research*. 42:626-642.
20. Fisher M.L., Jaikumar R. (1981). A generalized assignment heuristic for the vehicle routing problem. *Networks*, 11:109-124.
21. Fischetti M., Toth P., Vigo D. (1994). A branch-and-bound algorithm for the capacitated vehicle routing problem on directed graphs. *Operations Research*, 42:846-859.
22. Fu Z, Eglese R, Li L., (2005). A new tabu search heuristic for the open vehicle routing problem. *Journal of the Operational Research Society*, 2005;56:267–74.
23. Gaskell T.J. (1967). Bases for vehicle fleet scheduling. *Operational Research Quarterly*, 18:281-295.
24. Gillett B.E., Miller L.R. (1974). A heuristic algorithm for the vehicle dispatch problem. *Operations Research*, 22:340-349.
25. Ghaziri H. (1991). Solving routing problems by a self-organizing map.

Artificial Neural Networks. pp. 829-834.

26. Glover F., Laguna M., (2000). Fundamentals of Scatter Search and Path Relinking. *Control and Cybernetics*. Vol. 39 (2000) (3), pp. 653–684.

27. Goldberg D.E, Lingle R. (1985). Alleles, loci and the traveling salesman problem. In Grefenstette J.J., editor, *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 154-159.

28. Gonzalez T. (2007). *Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics*. Chapman&Hall/CRC.

29. Hadjiconstantinou E., Christofides N., Mingozzi A. (1995). A new exact algorithm for the vehicle routing problem based on q-paths and shortest paths relaxations. *Annals of Operations Research*, 61:21—43.

30. Ho S.C., Gendreau M. (2006). Path relinking for the vehicle routing problem. *Journal of Heuristics*. Vol. 12.pp 55-72.

31. Holger H., Stutzle T.H. (2005). *Stochastic local search foundations and applications*. Elsevier/Morgan Kaufmann, San Francisco, 1-55860-872-9658

32. Jian L., Peng C., Zhiming L., (2008). Solving Traveling Salesman Problems by Genetic Differential Evolution with Local Search. *2008 Workshop on Power Electronics and Intelligent Transportation System*, 978-0-7695-3342-1

33. Kawamura H., Yamamoto M., Mitamura T., Suzuki K., Ohuchi A. (1998). Cooperative search on pheromone communication for vehicle routing problems. *IEEE Transactions on Fundamentals*, E81-A: 1089-1096.

34. Laporte G., Mercure H., Nobert Y., (1986). An exact algorithm for the asymmetrical capacitated vehicle routing problem. *Networks*. 16:33-46.

35. Letchford A.N., Lysgaard J., Eglese R.W. (2006). A Branch-and-Cut Algorithm for the Capacitated Open Vehicle Routing Problem. *Journal of the Operational Research Society*. Vol.58. pp1642-1651.

36. Li F., Golden B., Wasil E., (2005). The open vehicle routing problem: Algorithms, large-scale test problems, and computational results. *Computers & Operations Research*. Vol. 34, Issue 10. pp 2918-2930

37. Li X., Tian P. (2006). An Ant Colony System for the Open Vehicle Routing Problem. *Springer*, 3-540-38482-0
38. Luke S. (2009) *Essentials of Metaheuristics – A set of undergraduate lecture notes by Sean Luke* (Department of Computer Science George Mason University)
39. Matsuyama Y. (1991). Self-organization via competition, cooperation and categorization applied to extended vehicle routing problems. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, Seattle, WA. pp. 385-390.
40. Miller D.L. (1995). A matching based exact algorithm for capacitated vehicle routing problems. *ORSA Journal on Computing*. 7:1-9.
41. Mole R.H., Jameson S.R. (1976). A sequential route-building algorithm employing a generalized savings criterion. *Operational Research Quarterly*, 27:503-511.
42. Moraglio A. Togelius J. (2009). *Geometric Differential Evolution*. *ACM*, pp 1705-1712, 978-1-60558-325-9.
43. Nelson M.D., Nygard K.E., Griffin J.H., Shreve WE. (1985). Implementation techniques for the vehicle routing problem. *Computers and Operations Research*, 12:273-283.
44. Osman I.H. (1993). Metastrategy simulated annealing and tabu search algorithms for the vehicle routing problem. *Annals of Operations Research*, 41:421-451.
45. Pereira F.B., Tavares J. (2008). *Bio-inspired Algorithms for the Vehicle Routing Problem*. Springer, 978-3-540-85151-6.
46. Price K.V., Storn R.M., Lampinen J.A. (2005). *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*. Springer, 3540209506.
47. Robuste F., Daganzo C.F., Souleyrette R. (1990). Implementing vehicle routing models. *Transportation Research B*, 24:263-286.
48. Rochat Y., Taillard E.D. (1995). Probabilistic diversification and intensification in local search for vehicle routing. *Journal of Heuristics*, 1:147-167.
49. Sariklis D, Powell S., (2000). A heuristic method for the open vehicle routing problem. *Journal of the Operational Research Society*, 2000;51:564–73.

50. Schmitt L.J. (1995). An evaluation of a genetic algorithmic approach to the vehicle routing problem. *Working paper, Department of Information Technology Management, Christian Brothers University, Memphis, TN.*
51. Schrage L., (1981). Formulation and structure of more complex/realistic routing and scheduling problems. *Networks*, 1981;11:229–32. Schmitt L.J. (1995). An evaluation of a genetic algorithmic approach to the vehicle routing problem. *Working paper, Department of Information Technology Management, Christian Brothers University, Memphis, TN.*
52. Schumann M., Retzko R. (1995). Self-organizing maps for vehicle routing problems—minimizing an explicit cost function. In Fogelman-Soulie F., editor, *Proceedings of the International Conference on Artificial Neural Networks*, Paris. pp. 401-406.
53. Tarantilis C, Diakoulaki D, Kiranoudis C., (2004). Combination of geographical information system and efficient routing algorithms for real lifedistribution operations. *European Journal of Operational Research*, 2004;152:437–53
54. Tarantilis C, Ioannou G, Kiranoudis C, Prastacos G., (2004). A threshold accepting approach to the open vehicle routing problem. *RAIRO Operations Research.*, 2004;38:345–60
55. Tarantilis C, Ioannou G, Kiranoudis C, Prastacos G., (2005). Solving the open vehicle routing problem via a single parameter metaheuristic algorithm. *Journal of the Operational Research Society*, 2005;56:588–96.
56. The University of Texas at Arlington - UT Arlington – UTA
<http://students.uta.edu/bx/bxk7163/tsp/tsp.html>
57. Toth, P., Vigo, D. (2002). *The Vehicle Routing Problem*. Siam, Philadelphia, 0898715792.
58. Toth P., Vigo D. (2003). The granular tabu search and its application to the vehicle routing problem. *INFORMS Journal on Computing*, 15:333-346.
59. Yellow P. (1970). A computational modification to the savings method of vehicle scheduling. *Operational Research Quarterly*, 21:281-283.
60. Wren A., Holliday A. (1972). Computer scheduling of vehicles from one or more depots to a number of delivery points. *Operational Research Quarterly*, 23:333-344.

61. Xu J., Kelly J.P. (1996). A network flow-based tabu search heuristic for the vehicle routing problem. *Transportation Science*, 30:379-393.
62. Zhang J., Xu J. (2007). A New Differential Evolution for Discontinuous Optimization Problems. *ICNC, Vol. 3*, pp.483-487, 0-7695-2875-9.
63. Μαρινάκης Ι., Μυγδαλάς Α. (2008). *Σχεδιασμός και Βελτιστοποίηση εφοδιαστικής αλυσίδας*. Εκδόσεις “σοφία”, Θεσσαλονίκη.
64. Ρογδάκης Ι. (2009). *Μεμετικός Αλγόριθμος πολλαπλών πληθυσμών – νησιών στο πρόβλημα VRP*. (ΔΙΠ).