ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ ΜΕ ΣΥΝΟΧΗ ΚΑΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΤΡΙΒΗ

ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΛΙΟΛΙΟΣ
ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΧΑΝΙΑ
ΜΑΙΟΣ 2013

Περίληψη

Στην παρούσα Διδακτορική Διατριβή προτείνεται ένα υπερβολικό κριτήριο αστοχίας υλικών με συνοχή, εσωτερική τριβή και διαστολικότητα. Η επιφάνεια διαρροής/κριτήριο αστοχίας βαθμονομείται με τρεις παραμέτρους οι οποίες έχουν ξεκάθαρη φυσική έννοια. Το κριτήριο περιγράφει καλά τόσο την περιοχή των εφελκυστικών τάσεων όσο και την περιοχή των θλιπτικών τάσεων ενώ λαμβάνει υπόψη και την επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης. Οι μεσημβρινοί του κριτηρίου περιγράφονται από υπερβολικές συναρτήσεις ενώ το ίχνος του στο αποκλίνον επίπεδο από μια ελλειπτική συνάρτηση. Το σχήμα στο αποκλίνον επίπεδο μεταβάλλεται από τριγωνοειδές σε κυκλικό με την αύξηση της θλιπτικής υδροστατικής πίεσης. Έτσι, επιτυγχάνεται ψαθυρή συμπεριφορά σε χαμηλές τάσεις περιορισμού και πλαστική σε υψηλές. Η βαθμονόμηση του μοντέλου δείχνει ότι συμφωνεί πολύ καλά με πολλά διαφορετικά πειραματικά δεδομένα και η απόδοσή του είναι καλύτερη ή ισάξια με τα περισσότερα ευρέως διαδεδομένα μοντέλα αστοχίας.

Επίσης, προτείνεται ένα ελαστοπλαστικό μοντέλο για την υπερβολική επιφάνεια διαρροής. Για την βαθμονόμηση του ελαστοπλαστικού μοντέλου απαιτούνται επιπλέον πέντε παράμετροι οι οποίες υπολογίζονται από το πείραμα της μονοαξονικής θλίψης. Για την ελαστική συμπεριφορά του μοντέλου, θεωρείται ο γραμμικός νόμος του Hooke με σταθερές ελαστικές παραμέτρους. Για το φαινόμενο της πλαστικής κράτυνσης προτείνεται ένας κανόνας κράτυνσης ο οποίος προκαλεί ανισότροπη κράτυνση στην υπερβολική επιφάνεια. Το ιστορικό των μη αντιστρεπτών πλαστικών παραμορφώσεων και κατά επέκταση ο μηχανισμός του κανόνα κράτυνσης καθορίζονται από την πλαστική διατμητική οκταεδρική παραμόρφωση. Η τάση αστοχίας επιτυγχάνεται όταν συσσωρευτεί στο υλικό μια κρίσιμη ποσότητα πλαστικής διατμητικής παραμόρφωσης η οποία θεωρείται ιδιότητα του υλικού. Επίσης, προτείνεται ένας κανόνας διαστολικότητας που λαμβάνει υπόψη την θέση του τασικού σημείου. Τέλος, το φαινόμενο της φθοράς δεν λαμβάνεται υπόψη.

Από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων προκύπτει ότι το ελαστοπλαστικό μοντέλο προβλέπει σχετικά καλά την συμπεριφορά του υλικού για χαμηλές τάσεις περιορισμού. Οι αποκλίσεις που παρατηρούνται οφείλονται κυρίως στη θεώρηση σταθερών ελαστικών παραμέτρων. Επίσης, επίδραση έχουν και οι θεωρήσεις του κανόνα κράτυνσης αλλά και η αγνόηση του φαινομένου της φθοράς.

Τέλος, στα πλαίσια της παρούσας Διατριβής, κατασκευάστηκε σχεσιακή βάση δεδομένων για πειράματα Μηχανικής Πετρωμάτων. Όλες οι παράμετροι του καταστατικού μοντέλου βαθμονομήθηκαν πάνω σε διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα τα οποία έχουν καταχωρηθεί στη βάση αυτή.

Abstract

In this PhD Dissertation a hyperbolic failure criterion for cohesive, frictional and dilatant materials (rocks, soils, concrete etc.) is proposed. The failure/yield surface is calibrated by virtue of three free variables which have a clear physical meaning. The criterion predicts well both the tensile and compression regimes of a geomaterial and it takes under consideration the influence of the intermediate principal stress. The meridians of the failure surface are hyperbolas while the trace on the deviatoric plane is described by an elliptic function. The shape on the deviatoric plane evolves from triangular at the tensile regime to circular at high confinement. Thus, the failure surface exhibits brittle behavior at low confinement and ductile at high compression stresses. The calibration results show that the proposed criterion can predict very well the experimental results and it is equivalent or even better than the most widespread used criteria.

Based on this hyperbolic criterion, an elastoplastic constitutive model was also elaborated. The calibration of the elastoplastic model requires five additional parameters which are calculated from the uniaxial compression test. For the elastic response of the model, the linear isotropic Hooke law with constant parameters has been considered. For the work hardening behavior, a hardening law is proposed that results in anisotropic hardening of the yield surface. The history of the irreversible plastic deformation, that also drives the hardening law, is the plastic octahedral shear strain. The failure stress is attained when a critical amount of plastic octahedral shear strain has been accumulated into the material. This critical plastic shear strain is considered as a material property. Moreover, a dilatancy rule is proposed that takes under consideration the position of the stress point or in other words the stress inclination. Finally, the damage effect is not considered in this work.

Back-analysis results show that the proposed elastoplastic model predicts relatively well the material response a low confinement stresses. The discrepancies observed are mainly due to the assumed constant elastic parameters. The considerations of the hardening law as well as the damage effect also contribute to the observed discrepancies. It was realized that a good elastoplastic model should be based on a robust elasticity model.

Finally, in the context of this PhD Dissertation, a relational database for Rock Mechanics tests has been constructed. All the parameters of the elastoplastic model were calibrated on data stored in this database.

Πρόλογος

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανικών Πόρων του Πολυτεχνείου Κρήτης υπό την επίβλεψη του Καθηγητή μου κ. Γεώργιου Εξαδάκτυλου, διευθυντή του Εργαστηρίου Μελέτης και Σχεδιασμού Εκμεταλλεύσεων.

Το θέμα της παρούσας Διατριβής εντάσσεται στα προβλήματα εντατικοπαραμορφωσιακής ανάλυσης της απόκρισης των υλικών με συνοχή, εσωτερική τριβή και διαστολικότητα. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα πετρώματα, το σκυρόδεμα αλλά και τα ψαθυρά εδάφη. Η Διατριβή χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος προτείνεται ένα υπερβολικό κριτήριο αστοχίας ενώ στο δεύτερο μέρος προτείνεται ένα ελαστοπλαστικό καταστατικό μοντέλο για το συγκεκριμένο κριτήριο.

Το προτεινόμενο υπερβολικό κριτήριο αστοχίας βασίζεται σε μια γεωμετρική προσέγγιση των φυσικών/μακροσκοπικών φαινομένων που παρατηρούνται κατά την αστοχία. Έτσι, συνδυάζονται τα γεωμετρικά σχήματα προγενέστερων κριτηρίων αστοχίας σε διάφορες περιοχές του τασικού χώρου ώστε να προκύψει μια σύνθετη ομαλή επιφάνεια αστοχίας. Με αυτόν το τρόπο επιτυγχάνεται η προσομοίωση της ψαθυρής συμπεριφοράς στην περιοχή των εφελκυσμών και των χαμηλών τάσεων περιορισμού και της πλαστική συμπεριφοράς σε ισχυρά θλιπτικά υδροστατικά πεδία. Ασφαλώς, το προτεινόμενο κριτήριο δεν καλύπτει όλες τις δυνατές περιπτώσεις και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλα τα υλικά. Έτσι, επειδή η επιφάνεια αστοχίας είναι "ανοιχτή" από την πλευρά των θλίψεων, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για φαινόμενα κατάρρευσης των κόκκων του υλικού λόγω πίεσης. Από την άλλη, το μοντέλο απαιτεί μια ελάχιστη συνοχή, συνεπώς δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για υλικά χωρίς συνοχή όπως είναι η άμμος.

Το προτεινόμενο ελαστοπλαστικό μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί ως μια πρώτη προσέγγιση η οποία απαιτεί περαιτέρω διερεύνηση. Η ελαστική απόκριση του μοντέλου θεωρείται ότι διέπεται από τον γραμμικό νόμο του Hooke όμως στην πράξη φαίνεται ότι οι ελαστικές σταθερές μεταβάλλονται με την τάση. Επίσης, το σημαντικό φαινόμενο της φθοράς δεν λαμβάνεται υπόψη, όπως δεν μοντελοποιείται και η απόκριση μετά την αστοχία. Από την άλλη πλευρά, οι προτεινόμενοι κανόνες κράτυνσης και διαστολικότητας παρουσιάζουν χαρακτηριστικά τα οποία απαντώνται στην πραγματικότητα. Αφενός, ο κινηματικός μηχανισμός του φαινομένου της κράτυνσης οδηγεί σε συνεχώς αυξανόμενη ψαθυρότητα στις χαμηλές τάσεις περιορισμού και αφετέρου ο κανόνας διαστολικότητας λαμβάνει υπόψη την θέση του τασικού σημείου. Σε κάθε περίπτωση, το προτεινόμενο ελαστοπλαστικό μοντέλο μπορεί να αποτελέσει την βάση για μελλοντική έρευνα.

Σε αυτό το σημείο θεωρώ χρέος μου να αναγνωρίσω την συμβολή του Καθηγητή μου κ. Γεώργιου Εξαδάκτυλου στην εκπόνηση της παρούσας Διατριβής. Ο κ. Εξαδάκτυλος αποτελούσε για μένα πηγή γνώσης και έμπνευσης και χωρίς την συμβολή του η διεκπεραίωση της παρούσας εργασίας θα ήταν αδύνατη. Τον ευχαριστώ θερμά. Επίσης, οφείλω να ευχαριστήσω θερμά και την γυναίκα μου, κα. Σταυρούλα Τσουβάλα. Η αμέριστη συμπαράσταση και η συνεχής εμψύχωσή της σε όλη την πορεία μέχρι την ολοκλήρωση της παρούσας Διατριβής ήταν καταλυτική. Τέλος, θα πρέπει να ευχαριστήσω το Ευρωπαϊκό Ερευνητικό Πρόγραμμα "Designing Safer Urban Spaces (DESURBS)" για την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε.

Παντελής Λιόλιος
Μάιος 2013

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Κατάλογος πινάκων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στις φάσεις του προσχεδιασμού αλλά και του σχεδιασμού των γεωτεχνικών και μεταλλευτικών έργων απαιτείται η όσο το δυνατόν καλύτερη πρόβλεψη της μηχανικής συμπεριφοράς της βραχομάζας και των εδαφών. Η ορθή εκτίμηση των μηχανικών ιδιοτήτων των πετρωμάτων και της μηχανικής συμπεριφοράς τους οδηγεί σε μείωση του ρίσκου αστοχιών και καλύτερο οικονομικό σχεδιασμό των έργων. Επίσης, ελαχιστοποιεί τα πιθανά μελλοντικά προβλήματα. Για τον λόγο αυτό έχουν προταθεί διάφοροι τύποι πειραμάτων βραχομηχανικής και εδαφομηχανικής με τα οποία μετρώνται εργαστηριακά οι μηχανικές ιδιότητες σε δοκίμια υπό διάφορους τρόπους φόρτισης. Με τα δεδομένα που προκύπτουν από τα στοιχειώδη αυτά πειράματα, βαθμονομούνται θεωρητικά καταστατικά μοντέλα. Με την βοήθεια των μοντέλων αυτών γίνεται η εκτίμηση της συμπεριφοράς της βραχομάζας, του σκυροδέματος ή του εδάφους κάτω από δεδομένες εντατικές συνθήκες. Σήμερα, τα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα έχουν βοηθήσει την επιστημονική κοινότητα να αναπτύξει όλο και πιο πολύπλοκα καταστατικά μοντέλα για την προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς. Τα τελευταία προσεγγίζουν καλύτερα την μηχανική συμπεριφορά με κόστος όμως την ανάγκη βαθμονόμησης μεγαλύτερου αριθμού παραμέτρων.

Σε αυτή την Διατριβή προτείνεται ένα Υπερβολικό Μοντέλο Αστοχίας για υλικά με συνοχή, εσωτερική τριβή και διαστολικότητα. Το μοντέλο αποτελείται, καταρχήν, από ένα υπερβολικό κριτήριο αστοχίας. Το κριτήριο απαιτεί τρεις παραμέτρους για την βαθμονόμησή του οι οποίες έχουν ξεκάθαρη φυσική έννοια. Με βάση το υπερβολικό κριτήριο αναπτύχθηκε ένας ελαστοπλαστικός καταστατικός νόμος ο οποίος βαθμονομείται από το πείραμα της μονοαξονικής θλίψης. Συνολικά, απαιτούνται πέντε επιπλέον παράμετροι: οι δύο ελαστικές σταθερές, δύο παράμετροι για τον κανόνα κράτυνσης και μια παράμετρος για τον κανόνα διαστολής. Η βαθμονόμηση του μοντέλου γίνεται χρησιμοποιώντας δεδομένα από μια σχεσιακή βάση δεδομένων πειραμάτων μηχανικής πετρωμάτων που αναπτύχθηκε για το σκοπό αυτό.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια εισαγωγή στις βασικές έννοιες και τις συμβάσεις που χρησιμοποιούνται στην παρούσα Διατριβή. Περιγράφονται οι αναλλοίωτες των τανυστών των τάσεων και των παραμορφώσεων, ο χώρος των κυρίων τάσεων, ο ορισμός του αποκλίνοντος επιπέδου κλπ.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται, καταρχήν, μια αναδρομή σε μερικά απ' τα πιο χρησιμοποιούμενα μοντέλα αστοχίας. Κατόπιν, παρουσιάζεται το προτεινόμενο υπερβολικό κριτήριο αστοχίας. Στο ίδιο Κεφάλαιο, δίδονται συνοπτικά τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της δομής της βάσης δεδομένων. Τέλος, ακολουθεί η σύγκριση του υπερβολικού κριτηρίου αστοχίας με τα άλλα μοντέλα σε διάφορα πειραματικά δεδομένα.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται οι βασικές καταστατικές εξισώσεις της θεωρίας ελαστικότητας καθώς και της θεωρίας πλαστικότητας. Κατόπιν, παρουσιάζεται ένα ελαστοπλαστικό καταστατικό μοντέλο για το προτεινόμενο υπερβολικό κριτήριο αστοχίας. Προτείνεται ένας κανόνας κράτυνσης και ένας κανόνας διαστολικότητας. Τέλος, δίδεται ένα παράδειγμα εφαρμογής του ελαστοπλαστικού μοντέλου.

Η παρούσα Διατριβή ολοκληρώνεται στο Κεφάλαιο 5 όπου εξάγονται τα τελικά συμπεράσματα και δίδονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα. Στα Παραρτήματα δίδονται πολύπλοκοι υπολογισμοί, σχήματα και πίνακες καθώς και αναλυτική περιγραφή της βάσης δεδομένων.

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες και συμβάσεις

2.1 Συμβάσεις

Στην παρούσα Διατριβή, θεωρείται ότι το υλικό είναι ισότροπο τόσο ελαστικά όσο και πλαστικά. Επίσης, οι θλιπτικές τάσεις θεωρούνται αρνητικές και οι εφελκυστικές θετικές. Η έννοια *παραμόρφωση* ή *τροπή* υποδηλώνει ανηγμένη παραμόρφωση. Επίσης, θεωρείται ότι οι παραμορφώσεις είναι απειροελάχιστες (infinitesimal). Ανάλογα με τις τάσεις, οι παραμορφώσεις που τείνουν να μειώσουν τα μήκη των πλευρών του υλικού (μείωση όγκου) θα θεωρούνται αρνητικές και θετικές αντίστροφα. Όσον αφορά την σύμβαση των δεικτών των τανυστών, έχει υιοθετηθεί η σύμβαση άθροισης του Einstein. Δηλαδή, ένας δείκτης που επαναλαμβάνεται δύο φορές σε ένα μονώνυμο υποδηλώνει άθροιση ως προς αυτόν τον δείκτη. Τέλος, για το σύνολο των εξισώσεων που ακολουθούν θεωρείται η παρακάτω σύμβαση

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \tag{2.1}$$

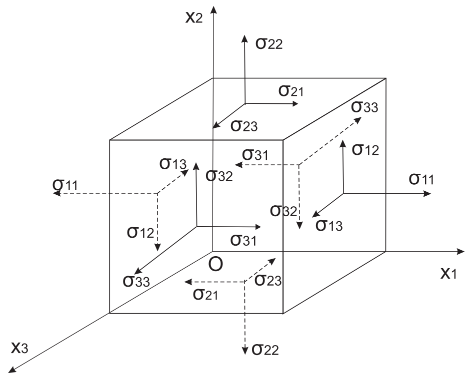
όπου $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ είναι οι κύριες τάσεις.

2.2 Τανυστής τάσεων και αναλλοίωτες

Έστω στερεό σώμα σε ισορροπία υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων και δυνάμεων πεδίου. Έστω, επίσης, ότι το σώμα παρουσιάζει μικρές παραμορφώσεις. Η εντατική κατάσταση ενός σημείου εντός του σώματος και για δεδομένο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να περιγραφεί από ένα συμμετρικό τανυστή δεύτερης τάξης, τον τανυστή των τάσεων κατά Cauchy [Landau and Lifshitz, 1970; Timoshenko and Goodier, 1970; Fung, 1994]

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Τα στοιχεία του τανυστή σ_{ij} είναι οι τάσεις που αντιστοιχούν στις πλευρές ενός στοιχειώδους όγκου που απεικονίζει το σημείο και περιλαμβάνουν τόσο



Σχήμα 2.1: Γεωμετρική απεικόνιση τανυστή τάσεων.

ορθές όσο και διατμητικές τάσεις (Σχ. 2.1). Λόγω ισορροπίας ροπών ως προς τους άξονες x_i του συστήματος συντεταγμένων ισχύει $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Οι δείκτες i,j παίρνουν τιμές 1,2 και 3 και δηλώνουν τις τρείς κατευθύνσεις του δεξιόστροφου συστήματος συντεταγμένων. Περισσότερα στοιχεία σχετικά με τον τανυστικό λογισμό και τις εφαρμογές του μπορούν να βρεθούν στη διεθνή βιβλιογραφία [π.χ. Levi-Civita, 1927; Lebedev and Cloud, 2003].

Οι αναλλοίωτες του τανυστή προκύπτουν κατά τον υπολογισμό των κυρίων τάσεων, δηλαδή τον υπολογισμό του μέτρου και της κατεύθυνσης των ορθών τάσεων που προκαλούν στο σώμα την ίδια εντατική κατάσταση. Από μαθηματικής απόψεως αυτό ισοδυναμεί με τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα. Έτσι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τανυστή προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j = 0 \tag{2.3}$$

όπου δ_{ij} είναι το Kronecker Δέλτα (μοναδιαίος πίνακας), σ είναι οι άγνωστες κύριες τάσεις και n_j είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατεύθυνσης.

Για να έχει το σύστημα εξισώσεων (2.3) μη τετριμμένη λύση θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι ίση με μηδέν

$$|\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = 0 \tag{2.4}$$

Η ανάπτυξη της εξίσωσης (2.4) οδηγεί στην *χαρακτηριστική εξίσωση* του τανυστή

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{2.5}$$

όπου I_1,I_2 και I_3 είναι οι τρεις αναλλοίωτες του τανυστή. Οι τρείς αναλλοίωτες είναι εκφράσεις των στοιχείων του τανυστή σ_{ij} και δεν εξαρτώνται από τον προσανατολισμό του συστήματος συντεταγμένων. Η I_1 είναι ίση με το ίχνος του τανυστή σ_{ij}, δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{2.6}$$

Τέλος, οι ρίζες της εξίσωσης (2.5) είναι οι κύριες τάσεις σ_1, σ_2 και σ_3.

Μια συνήθης και βολική τεχνική η οποία χρησιμοποιείται στην τασική ανάλυση είναι η διάσπαση του τανυστή των τάσεων σε δύο τμήματα. Το πρώτο καλείται σφαιρικός ή υδροστατικός τανυστής των τάσεων και ο δεύτερος ονομάζεται αποκλίνων τανυστής των τάσεων. Ο υδροστατικός τανυστής προκύπτει από το γινόμενο $p\delta_{ij}$ όπου p είναι η μέση πίεση ή αλλιώς ορθή οκταεδρική τάση

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}I_1 \tag{2.7}$$

Ο αποκλίνων τανυστής προκύπτει αν από τον τανυστή των τάσεων αφαιρεθεί ο υδροστατικός τανυστής

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \tag{2.8}$$

Αν για τον τανυστή s_{ij} εφαρμοστεί η μεθοδολογία εύρεσης των κύριων αποκλίνουσων τάσεων, ανάλογα με την εξίσωση (2.3), τότε προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \tag{2.9}$$

όπου οι εκφράσεις των αναλλοίωτων του αποκλίνοντα τανυστή δίδονται από τις σχέσεις

$$J_1 = 0 \tag{2.10}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} \tag{2.11}$$

$$J_3 = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} \tag{2.12}$$

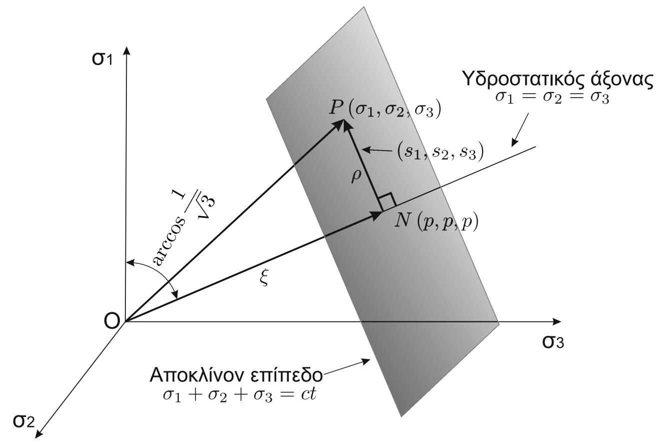
Από την εξίσωση (2.10) προκύπτει ότι ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων αναφέρεται στο διατμητικό τμήμα του τανυστή των τάσεων εφόσον το άθροισμα της κύριας διαγωνίου (υδροστατικό τμήμα) είναι μηδέν. Οι αναλλοίωτες I_1, J_2 και J_3 χρησιμοποιούνται όπως θα παρουσιαστεί στα επόμενα Κεφάλαια στην κατασκευή καταστατικών μοντέλων.

2.3 Χώρος Haigh-Westergaard

Η γεωμετρική απεικόνιση μιας εντατικής κατάστασης ενός σημείου είναι πολύ χρήσιμη κατά την κατασκευή καταστατικών μοντέλων. Η επικρατούσα μεθοδολογία που ακολουθείται είναι να απεικονίζεται η εντατική κατάσταση ενός σημείου ως σημείο στον χώρο των κυρίων τάσεων. Ο χώρος αυτός ονομάζεται χώρος Haigh-Westergaard (Σχ. 2.2). Αν θεωρηθεί ευθεία η οποία σχηματίζει ίσες γωνίες και με τους τρεις άξονες σ_1, σ_2 και σ_3 όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε επί της ευθείας αυτής ισχύει $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ και ο άξονας αυτός ονομάζεται υδροστατικός άξονας. Επίσης κάθε επίπεδο κάθετο σε αυτόν τον άξονα ονομάζεται αποκλίνον επίπεδο. Ειδικά δε το αποκλίνον επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων ονομάζεται το π-επίπεδο.

Οποιαδήποτε εντατική κατάσταση μπορεί να απεικονισθεί στο χώρο των κυρίων τάσεων με ένα διάνυσμα, π.χ. το OP. Τότε το διάνυσμα αυτό μπορεί να αναλυθεί ως άθροισμά του διανύσματος ON που βρίσκεται επί του υδροστατικού άξονα και του διανύσματος NP που βρίσκεται επί του αποκλίνοντος επιπέδου. Το μέτρο του διανύσματος ON δίδεται από τη σχέση

$$\xi = |ON| = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}p \tag{2.13}$$



Σχήμα 2.2: Χώρος των κύριων τάσεων Haigh-Westergaard

.

ενώ το μέτρο ρ του διανύσματος NP δίδεται από την σχέση

$$\rho = |NP| = \sqrt{2J_2} = \sqrt{3}T \tag{2.14}$$

όπου T είναι η διατμητική οκταεδρική τάση

$$T = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} \tag{2.15}$$

Στη συνέχεια, αν προβληθεί το διάνυσμα ON και οι άξονες του συστήματος συντεταγμένων σ_1, σ_2 και σ_3 επί του αποκλίνοντος επιπέδου τότε προκύπτει το Σχ. 2.3. Η γωνία θ ονομάζεται γωνία του Lode [Lode, 1926] και μπορεί να εκφραστεί από τις αναλλοίωτες των τάσεων J_2 και J_3 [Nayak and Zienkiewicz, 1972]. Για την σύμβαση (2.1) η γωνία θ ορίζεται ως

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}} \tag{2.16}$$

Από την γεωμετρία των Σχ. 2.2 και 2.3 και για την σύμβαση (2.1) μπορεί να αποδειχθεί ότι οι κύριες τάσεις που αντιστοιχούν στην εντατική κατάσταση ενός σημείου δίδεται από τις σχέσεις

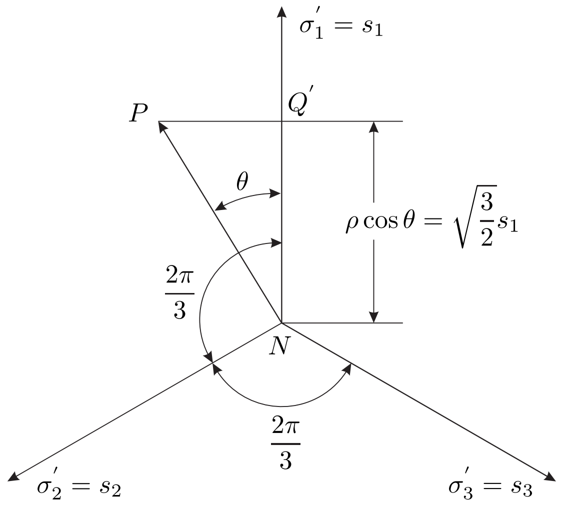
$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = p + \sqrt{2}T \left\{ \begin{array}{c} \cos\theta \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{array} \right\} \tag{2.17}$$

Οι Εξ. (2.17) ισχύουν για γωνία θ μεταξύ

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \tag{2.18}$$

Ανάλογες σχέσεις μπορούν να προκύψουν και για το υπόλοιπο εύρος γωνιών.

Όλες οι εντατικές καταστάσεις για τις οποίες ισχύει $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ αντιστοιχούν σε γωνία $\theta = \pi/3$. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα πειράματα



Σχήμα 2.3: Εντατική κατάσταση σημείου στο αποκλίνον επίπεδο.

μονοαξονικής θλίψης και τα πειράματα συμβατικής τριαξονικής θλίψης. Στα επόμενα Κεφάλαια, όπου θα αναπτυχθούν τα κριτήρια αστοχίας, το ίχνος της επιφάνειας αστοχίας που αντιστοιχεί σε σταθερή γωνία $\theta = \pi/3$ θα ονομάζεται *Μεσημβρινός της Θλίψης*. Όλες οι εντατικές καταστάσεις για τις οποίες ισχύει $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ αντιστοιχούν σε γωνία $\theta = 0$. Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν τα πειράματα μονοαξονικού εφελκυσμού και διαξονικής θλίψης. Στα επόμενα Κεφάλαια, το ίχνος της επιφάνειας αστοχίας που αντιστοιχεί σε σταθερή γωνία $\theta = 0$ θα ονομάζεται *Μεσημβρινός του Εφελκυσμού*.

2.4 Μετατοπίσεις και παραμορφώσεις

Έστω και πάλι ένα σώμα σε ισορροπία υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων και δυνάμεων πεδίου. Το εντατικό πεδίο προκαλεί παραμορφώσεις στο σώμα αλλάζοντας τόσο τον όγκο του όσο και το σχήμα του. Θεωρείται, επίσης, ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές και η πιθανή μεταφορά και στροφή του σώματος σε σχέση με την αρχική του θέση δεν λαμβάνεται υπόψη. Τότε για ένα σημείο εντός του σώματος και για τυχαίο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (current configuration), οι παραμορφώσεις μπορούν να περιγραφούν και αυτές, κατά αναλογία με το Υποκεφάλαιο 2.2, από ένα συμμετρικό τανυστή δεύτερης τάξης, τον τανυστή των παραμορφώσεων [π.χ. [Timoshenko and Goodier, 1970; Landau and Lifshitz, 1970; Fung, 1994]]

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

όπου ισχύει $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Ο τανυστής των παραμορφώσεων περιλαμβάνει όλες τις αλλαγές των μηκών των πλευρών του στοιχειώδη όγκου και τις αλλαγές των γωνιών που σχηματίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα των πλευρών μεταξύ τους.

Από τον τανυστή των παραμορφώσεων μπορούν να υπολογιστούν οι κύριες παραμορφώσεις και οι αναλλοίωτες του τανυστή των παραμορφώσεων I_1', I_2' και I_3' κατά αναλογία με τον τανυστή των τάσεων. Η διάσπαση του τανυστή σε υδροστατικό ή σφαιρικό και αποκλίνων τανυστή δίδεται από την σχέση

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{2.20}$$

όπου e_{ij} είναι ο αποκλίνων τανυστής, δ_{ij} είναι το Kronecker Δέλτα και

$$\epsilon_{oct} = \frac{1}{3}\epsilon_{kk} = \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \tag{2.21}$$

είναι η μέση ή ορθή οκταεδρική παραμόρφωση. Ο σφαιρικός τανυστής αναφέρεται στην αλλαγή του όγκου ενώ ο αποκλίνων τανυστής αναφέρεται στην αλλαγή του σχήματος.

Από τον αποκλίνοντα τανυστή μπορούν να υπολογιστούν οι κύριες αποκλίνουσες παραμορφώσεις και οι αντίστοιχες αναλλοίωτες J_2' και J_3'. Αντίστοιχα με την περίπτωση των τάσεων μπορεί να οριστεί και η οκταεδρική διατμητική παραμόρφωση κατά την έννοια της μηχανικής (engineering octahedral shear strain)

$$\gamma_{oct} = 2\sqrt{\frac{2}{3}J_2'} \tag{2.22}$$

Οι παραμορφώσεις είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με τις μετατοπίσεις. Αν θεωρηθεί ότι οι μετατοπίσεις και οι παράγωγοί τους είναι μικρές, τότε ο τανυστής των παραμορφώσεων δίδεται από την σχέση

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.23}$$

όπου u_i οι τρεις συνιστώσες των μετατοπίσεων. Από την Εξ. (2.23) και για δεδομένες τυχαίες μετατοπίσεις μπορούν να υπολογιστούν οι έξι συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων. Αντίθετα, για δεδομένες τυχαίες παραμορφώσεις, το σύστημα των έξι μερικών διαφορικών εξισώσεων (2.23) δεν είναι βέβαιο ότι έχει λύση η οποία να εξασφαλίζει ότι οι μετατοπίσεις είναι συνεχείς και μονοσήμαντες συναρτήσεις στο χώρο. Για να επιτευχθεί το τελευταίο απαιτείται να εφαρμοστούν κάποιοι περιορισμοί στις συνιστώσες ϵ_{ij} οι οποίες ονομάζονται συνθήκες συμβιβαστού των τροπών ή συνθήκες του Saint Venant [π.χ. Muskhelishvili, 1963; Amrouche et al., 2006]

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \tag{2.24}$$

Κεφάλαιο 3

Κριτήριο αστοχίας

3.1 Αναδρομή στα κριτήρια αστοχίας

3.1.1 Κριτήριο αστοχίας Tresca

Τα κριτήρια αστοχίας τάσης ορίζουν την εντατική κατάσταση πάνω από την οποία το προς μελέτη υλικό αστοχεί. Ιστορικά, ένα από τα πρώτα κριτήριο αστοχίας που διατυπώθηκε για ισότροπα υλικά και αφορούσε το όριο διαρροής των μετάλλων είναι το κριτήριο αστοχίας του Tresca [Tresca, 1864]. Σύμφωνα με το κριτήριο του Tresca η διαρροή ή αστοχία θα συμβεί όταν η μέγιστη διατμητική τάση που ασκείται σε ένα υλικό ξεπεράσει ένα όριο

$$\max(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|) = R \tag{3.1}$$

όπου το R μπορεί να συσχετιστεί με την μέγιστη αντοχή σε εφελκυσμό

$$R = \frac{\sigma_t}{2} \tag{3.2}$$

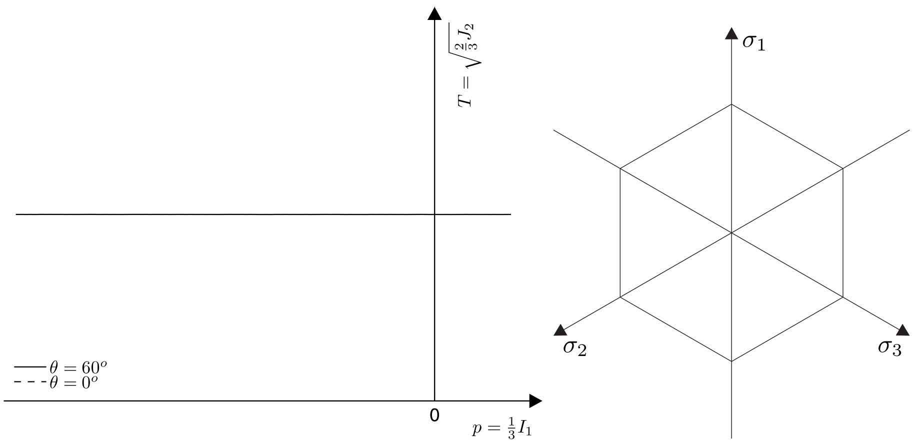
όπου σ_t η αντοχή σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Λαμβάνοντας υπόψη τη σύμβαση (2.1), το κριτήριο του Tresca μπορεί να αποδοθεί με όρους τις αναλλοίωτες I_1, J_2 και θ ως εξής

$$f(J_2, \theta) = 2\sqrt{J_2}\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) - \sigma_t = 0 \tag{3.3}$$

ή ισοδύναμα με όρους τις οκταεδρικές τάσεις p, T και την γωνία θ

$$f(T, \theta) = \sqrt{6}T\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) - \sigma_t = 0 \tag{3.4}$$

όπου παρατηρείται ότι το κριτήριο είναι ανεξάρτητο από την μέση υδροστατική πίεση. Το κριτήριο του Tresca στο χώρο των κύριων τάσεων απεικονίζεται ως κύλινδρος του οποίου η γενέτειρά είναι παράλληλη στον υδροστατικό άξονα (Σχ. 3.1α). Η διατομή του είναι ένα κανονικό εξάγωνο που δεν μεταβάλλεται με την αύξηση της μέσης υδροστατικής πίεσης ή αλλιώς τάσης περιορισμού (Σχ. 3.1β).



(α) Επίπεδο μεσημβρινών. (β) Αποκλίνον επίπεδο.

Σχήμα 3.1: Κριτήριο αστοχίας Tresca.

3.1.2 Κριτήριο αστοχίας von Mises

Το κριτήριο Tresca είναι απλό και δεν λαμβάνει υπόψη του την επίδραση της τρίτης ενδιάμεσης κύριας τάσης. Μια εξελιγμένη μορφή του κριτηρίου που λαμβάνει υπόψη και την τρίτη κύρια τάση είναι το κριτήριο της μέγιστης στροφικής ενέργειας του von Mises [von Mises, 1913] το οποίο δίδεται από την σχέση

$$f(J_2) = J_2 - R^2 = 0 \tag{3.5}$$

όπου R είναι η τάση διαρροής σε καθαρή διάτμηση και θεωρείται ιδιότητα του υλικού. Αν χρησιμοποιηθούν οι οκταεδρικές τάσεις, η σχέση (3.5) γίνεται

$$f(T) = \frac{3}{2}T^2 - R^2 = 0 \tag{3.6}$$

όπου και πάλι παρατηρείται ότι το κριτήριο είναι ανεξάρτητο από την μέση υδροστατική πίεση. Η γραφική απεικόνιση του κριτηρίου στον χώρο των κύριων τάσεων είναι ένας κανονικός κύλινδρος με την γενέτειρα παράλληλη στον υδροστατικό άξονα (Σχ. 3.2α). Η διατομή του στο αποκλίνον επίπεδο είναι ένας κύκλος που δεν μεταβάλλεται με την αύξηση της μέσης υδροστατικής πίεσης (Σχ. 3.2β).

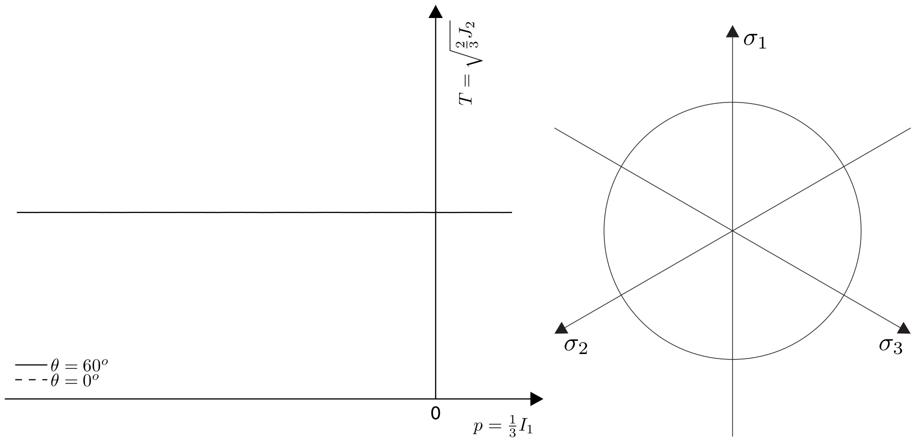
3.1.3 Κριτήριο αστοχίας Rankine

Το κριτήριο Rankine περιγράφει την ψαθυρή αστοχία του υλικού σε εφελκυσμό. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, ένα σημείο εντός του σώματος αστοχεί όταν η μέγιστη κύρια τάση γίνει ίση με την αντοχή σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Το κριτήριο Rankine δίδεται από τις σχέσεις

$$\sigma_1 = \sigma_t, \quad \sigma_2 = \sigma_t, \quad \sigma_3 = \sigma_t \tag{3.7}$$

όπου σ_t η αντοχή σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Από την μετατροπή των σχέσεων (3.7) σε όρους p, T και θ προκύπτει η σχέση

$$f_R(p, T, \theta) = T - \tilde{f}_R(p, \theta) = 0 \tag{3.8}$$



(α) Επίπεδο μεσημβρινών. (β) Αποκλίνον επίπεδο.

Σχήμα 3.2: Κριτήριο αστοχίας von Mises.

όπου

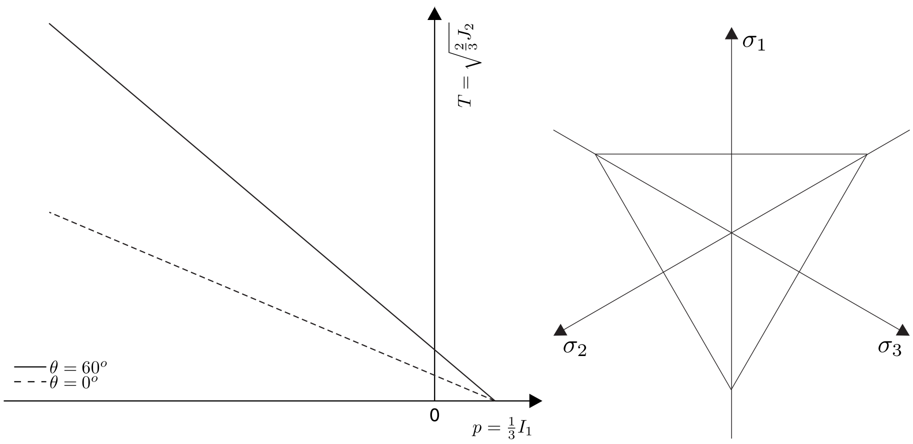
$$\tilde{f}_R(p,\theta) = \frac{\sigma_t - p}{\sqrt{2}\cos\theta} \tag{3.9}$$

Στο χώρο των κύριων τάσεων, το κριτήριο Rankine αποτελείται από τρία επίπεδα κάθετα στους άξονες σ_1, σ_2 και σ_3. Στο επίπεδο $p{-}T$ οι μεσημβρινοί της θλίψης και του εφελκυσμού είναι δυο ευθείες γραμμές (Σχ. 3.3α). Στο αποκλίνον επίπεδο, το σχήμα του κριτηρίου είναι ισόπλευρο τρίγωνο που μεγεθύνεται με την αύξηση της θλιπτικής υδροστατικής πίεσης (Σχ. 3.3β). Για την περίπτωση των υλικών με εσωτερική τριβή και συνοχή, το κριτήριο Rankine μπορεί να περιγράψει καλά την αστοχία στην εφελκυστική περιοχή αλλά όχι και την αστοχία σε θλίψη. Για το λόγο αυτό συχνά χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με κάποιο άλλο κριτήριο που περιγράφει καλά την αστοχία σε θλίψη. Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η επιφάνεια αστοχίας δεν είναι ομαλή στις κορυφές του τριγώνου.

3.1.4 Κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb

Ένα από τα σημαντικότερα κριτήρια αστοχίας που έχει χρησιμοποιηθεί και χρησιμοποιείται κατά κόρον στην Μηχανική Πετρωμάτων, στην Εδαφομηχανική και στο σκυρόδεμα είναι το κριτήριο Mohr-Coulomb [Coulomb, 1776; Mohr, 1900]. Το κριτήριο Mohr-Coulomb μπορεί να θεωρηθεί ως η γενικευμένη μορφή του κριτηρίου Tresca καθώς και τα δύο κριτήρια θεωρούν ότι το υλικό θα αστοχήσει όταν ξεπεραστεί μια κρίσιμη διατμητική τάση. Η διαφορά είναι ότι το κριτήριο Mohr-Coulomb θεωρεί ότι η κρίσιμη αυτή διατμητική τάση αυξάνεται γραμμικά όσο αυξάνεται η υδροστατική πίεση. Η σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης και της ορθής τάσης που δρουν επί της επιφάνειας αστοχίας του υλικού δίδεται από την εξίσωση

$$\tau = c - \sigma\tan\phi \tag{3.10}$$



(α) Επίπεδο μεσημβρινών. (β) Αποκλίνον επίπεδο.

Σχήμα 3.3: Κριτήριο αστοχίας Rankine.

όπου τ είναι η διατμητική τάση

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos\phi \tag{3.11}$$

και σ είναι η ορθή τάση

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sin\phi \tag{3.12}$$

Οι παράμετροι c και ϕ είναι η συνοχή και η γωνία εσωτερικής τριβής του υλικού, αντίστοιχα. Από τις Εξ. (3.10),(3.11),(3.12) και τις Εξ. (2.17) το κριτήριο μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση των οκταεδρικών τάσεων p,T και της γωνίας του Lode θ

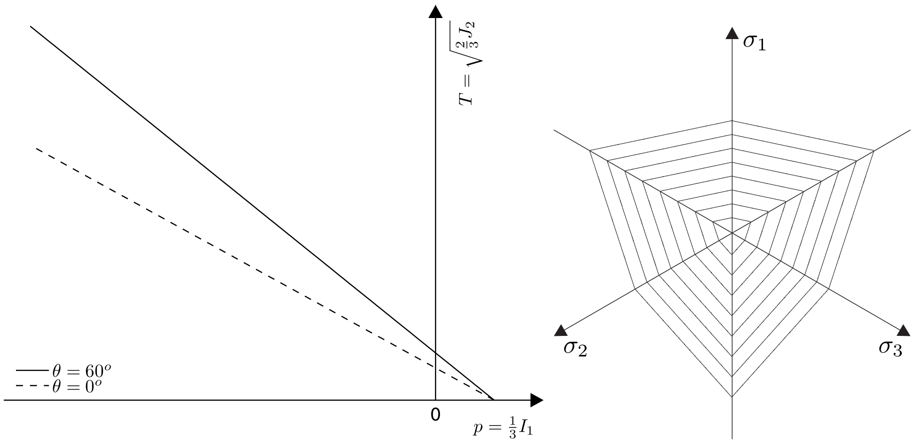
$$f_{MC}(p,T,\theta) = T - \tilde{f}_{MC}(p,\theta) = 0 \tag{3.13}$$

όπου

$$\tilde{f}_{MC}(p,\theta) = \frac{c\cos\phi - p\sin\phi}{\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\phi} \tag{3.14}$$

Οι μεσημβρινοί της θλίψης και του εφελκυσμού του κριτηρίου Mohr-Coulomb είναι ευθείες γραμμές στο επίπεδο $p-T$ όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4α. Στο αποκλίνον επίπεδο, το ίχνος του κριτηρίου είναι ένα μη κανονικό εξάγωνο όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4β. Το σχήμα του κριτηρίου στο αποκλίνον επίπεδο παραμένει αυτοόμοιο και μεγεθύνεται με την αύξηση της υδροστατικής πίεσης.

Το κριτήριο Mohr-Coulomb είναι απλό, βαθμονομείται εύκολα και προβλέπει σχετικά καλά την αστοχία των υλικών με εσωτερική τριβή και συνοχή. Παρ' όλα αυτά, έχει τρία σημαντικά μειονεκτήματα. Καταρχήν δεν λαμβάνει υπόψη του την ενδιάμεση κύρια τάση, η οποία σε πολύπλοκες συνθήκες φόρτισης έχει σημαντικό ρόλο [π.χ. Mogi, 2007]. Επίσης, τείνει να υπερεκτιμά την αντοχή σε εφελκυσμό λόγω των γραμμικών μεσημβρινών. Γι' αυτό το λόγο πολλές φορές συνδυάζεται με το κριτήριο Rankine ώστε να εισαχθεί



(α) Επίπεδο μεσημβρινών. (β) Αποκλίνον επίπεδο.

Σχήμα 3.4: Κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb.

μια τάση αποκοπής στον εφελκυσμό (tension cut-off). Τέλος, η επιφάνεια αστοχίας/διαρροής δεν είναι ομαλή στις γωνίες $\theta = 0$ και $\theta = \pi/3$, συνεπώς, στις γωνίες αυτές δεν μπορεί να οριστεί εύκολα παράγωγος. Έτσι, μπορούν να δημιουργηθούν προβλήματα στους σύγχρονους αριθμητικούς κώδικες και ειδικότερα στις υπορουτίνες αριθμητικής ολοκλήρωσης [Zienkiewicz and Pande, 1977].

3.1.5 Κριτήριο αστοχίας Drucker-Prager

Το κριτήριο Drucker-Prager [Drucker and Prager, 1952] είναι, κατά αναλογία με το κριτήριο Mohr-Coulomb, η γενίκευση του κριτηρίου von Mises, ώστε να συμπεριλάβει τη μέση υδροστατική πίεση. Το μοντέλο θεωρεί μια γραμμική σχέση μεταξύ των αναλλοίωτων I_1 και J_2 κατά την αστοχία

$$f_{I_1,J_2} = aI_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \tag{3.15}$$

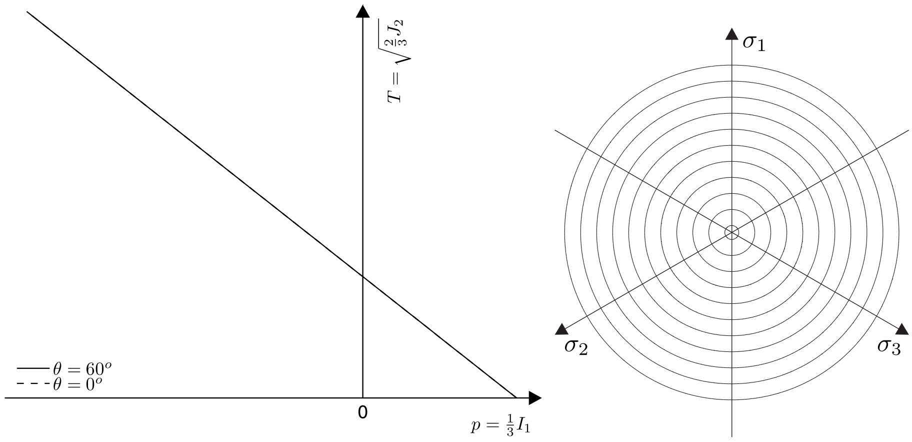
όπου a, k είναι παράμετροι του υλικού. Η μετατροπή της Εξ. (3.15) σε όρους p, T, θ οδηγεί στην σχέση

$$f_{DP}(p, T, \theta) = T - \tilde{f}_{DP}(p, \theta) = 0 \tag{3.16}$$

όπου

$$\tilde{f}_{DP}(p, \theta) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(k - 3ap) \tag{3.17}$$

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, το κριτήριο δεν λαμβάνει υπόψη του την γωνία του Lode θ. Στο επίπεδο $p - T$, οι μεσημβρινοί της θλίψης και του εφελκυσμού είναι ευθείες γραμμές και ταυτίζονται (Σχ. 3.5α). Στο αποκλίνον επίπεδο, το σχήμα της επιφάνειας αστοχίας είναι διαρκώς κυκλικό που μεγεθύνεται με την αύξηση της θλιπτικής υδροστατικής πίεσης (Σχ. 3.5β). Το κυκλικό σχήμα συνεπάγεται μέγιστη επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης. Τέλος, η επιφάνεια αστοχίας είναι παντού ομαλή εκτός από την κορυφή που αντιστοιχεί στο σημείο υδροστατικού εφελκυσμού.



(α) Επίπεδο μεσημβρινών. (β) Αποκλίνον επίπεδο.

Σχήμα 3.5: Κριτήριο αστοχίας Drucker-Prager.

3.1.6 Κριτήριο αστοχίας Hoek-Brown

Το κριτήριο αστοχίας Hoek-Brown [Hoek and Brown, 1980; Hoek et al., 2002] θεωρεί ότι η επιφάνεια αστοχίας είναι μια παραβολή στο επίπεδο $\sigma_1 - \sigma_3$. Πρακτικά είναι μια βελτιωμένη εκδοχή του κριτηρίου Mohr-Coulomb, όπου οι γραμμικοί μεσημβρινοί έχουν αντικατασταθεί από παραβολικούς μεσημβρινούς. Έτσι, επιτυγχάνεται καλύτερη και πιο ρεαλιστική πρόβλεψη της αντοχής του υλικού σε εφελκυσμό. Το κριτήριο Hoek-Brown αναπτύχθηκε για πετρώματα και είναι ανάλογο αν όχι επεξεργασία του κριτηρίου Leon [Leon, 1935] που αναπτύχθηκε για σκυρόδεμα. Η γενική του μορφή δίδεται από την σχέση

$$\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_c \left(m_b \frac{\sigma_1}{\sigma_c} + s \right)^a \tag{3.18}$$

όπου σ_c είναι η αντοχή σε μονοαξονική θλίψη. Οι παράμετροι m_b, s και a εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά της βραχομάζας ως εξής

$$m_b = m \exp\left(\frac{GSI - 100}{28 - 14D} \right) \tag{3.19}$$

$$s = \exp\left(\frac{GSI - 100}{9 - 3D} \right) \tag{3.20}$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left[\exp\left(\frac{-GSI}{15} \right) - \exp\left(\frac{-20}{3} \right) \right] \tag{3.21}$$

όπου GSI είναι ο δείκτης γεωλογικής αντοχής (Geological Strength Index) [Hoek, 1994] και περιγράφει την ισότροπη μείωση της αντοχής της βραχομάζας λόγω των προϋπαρχουσών ασυνεχειών. Το D είναι ένας συντελεστής διαταραχής της βραχομάζας που περιγράφει την φθορά που εισέρχεται στο πέτρωμα λόγω των έργων εκσκαφής. Τέλος, το m είναι παράμετρος του άρρηκτου πετρώματος. Για την περίπτωση του άρρηκτου πετρώματος, το

$GSI = 100$, συνεπώς η Εξ. (3.18) απλοποιείται στην ακόλουθη

$$\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_c \left(m\frac{\sigma_1}{\sigma_c} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.22}$$

Από τις Εξ. (3.22) και (2.17), το κριτήριο Hoek-Brown μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των p,T και θ

$$f_{HB}(p, T, \theta) = T - \tilde{f}_{HB}(p, \theta) = 0 \tag{3.23}$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{HB}(p, \theta) &= -\frac{1}{2A}\left[B + \left(B^2 - 4AC\right)^{1/2}\right] \\ A &= \frac{2}{\sigma_c}\left[\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\theta\right]^2 \\ B &= -\sqrt{2}m\cos\theta \\ C &= -mp - \sigma_c \end{aligned} \tag{3.24}$$

Στην παραπάνω Εξ. (3.24) έχει έννοια μόνο η αρνητική λύση του τριωνύμου λόγω της σύμβασης προσήμου των τάσεων και της Εξ. (2.1).

Οι μεσημβρινοί της θλίψης και του εφελκυσμού του κριτηρίου Hoek-Brown είναι παραβολές στο επίπεδο $p - T$ όπως φαίνεται στο Σχ. 3.6α. Το σχήμα του κριτηρίου στο αποκλίνον επίπεδο είναι ένα συμμετρικό μη κανονικό εξάγωνο (Σχ. 3.6β). Το σχήμα του εξαγώνου μεταβάλλεται με την αύξηση της τάσης περιορισμού. Από ισόπλευρο τρίγωνο στο σημείο του υδροστατικού εφελκυσμού (ιδιόμορφο σημείο) μετατρέπεται σε κανονικό εξάγωνο για πολύ μεγάλες θλιπτικές υδροστατικές πιέσεις. Παρ' όλα αυτά, όπως και στο κριτήριο Mohr-Coulomb, το μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη την επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης και η επιφάνεια αστοχίας δεν είναι ομαλή. Το κριτήριο Hoek-Brown έχει ευρεία χρήση στην βραχομηχανική γιατί μετατρέπει την αντοχή που μετράται στην κλίμακα του εργαστηρίου στην πραγματική κλίμακα μέσω του GSI και του D.

3.1.7 Τροποποιημένο κριτήριο αστοχίας Lade-Duncan

Το κριτήριο Lade-Duncan [Lade and Duncan, 1975] προτείνει μια κυβική σχέση μεταξύ της πρώτης I_1 και της τρίτης I_3 αναλλοίωτης του τανυστή των τάσεων κατά την αστοχία

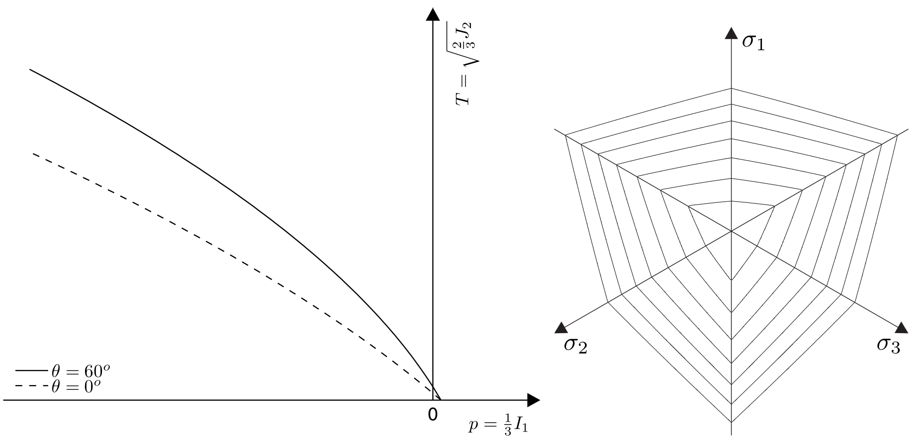
$$\frac{I_1^3}{I_3} = 27 + n \tag{3.25}$$

όπου n είναι παράμετρος του υλικού. Η παραπάνω Εξ. (3.25) είναι κατάλληλη μόνο για υλικά χωρίς συνοχή όπως είναι η άμμος. Ο Ewy [1999] πρότεινε μια τροποποιημένη μορφή του κριτηρίου, ώστε να λαμβάνεται υπόψη και η συνοχή, ως εξής

$$\frac{I_1^{'3}}{I_3^{'}} = 27 + n \tag{3.26}$$

όπου

$$I_1^{'} = (\sigma_1 - a) + (\sigma_2 - a) + (\sigma_3 - a) \tag{3.27}$$



(α) Επίπεδο μεσημβρινών. (β) Αποκλίνον επίπεδο.

Σχήμα 3.6: Κριτήριο αστοχίας Hoek-Brown.

$$I_3^{'} = (\sigma_1 - a)(\sigma_2 - a)(\sigma_3 - a) \tag{3.28}$$

με την παράμετρο a να συσχετίζεται με την συνοχή. Οι παράμετροι a και n μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις της συνοχής c και της γωνίας εσωτερικής τριβής ϕ του κριτηρίου Mohr-Coulomb από τις ακόλουθες σχέσεις

$$a = \frac{c}{\tan\phi} \tag{3.29}$$

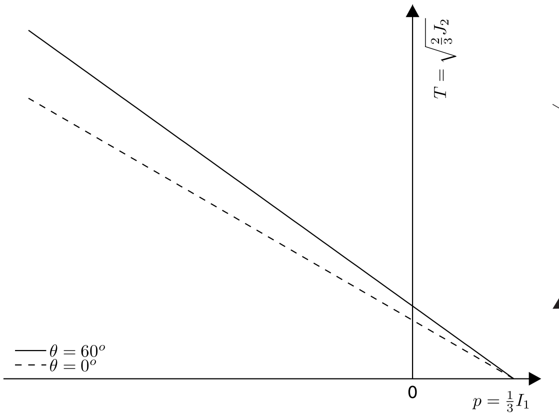
$$n = \frac{4\tan^2\phi\,(9 - 7\sin\phi)}{1 - \sin\phi} \tag{3.30}$$

Η μετατροπή της Εξ. (3.26) σε όρους p, T, θ οδηγεί σε ένα κυβικό πολυώνυμο της T. Η λύση αυτού του πολυωνύμου μπορεί να επιτευχθεί με την μέθοδο του Lagrange και τον μετασχηματισμό Tschirnhaus. Η τελική μορφή του κριτηρίου δίδεται από την σχέση

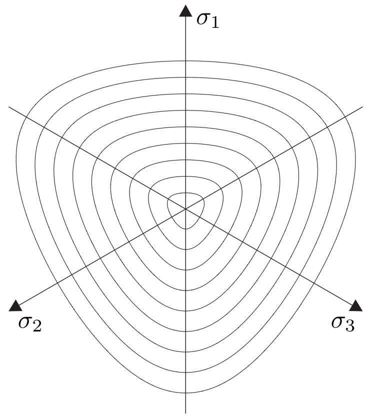
$$f_{LD}(p, T, \theta) = T - \tilde{f}_{LD}(p, \theta) = 0 \tag{3.31}$$

όπου $\tilde{f}_{LD}(p,\theta)$ είναι η ακόλουθη σύνθετη συνάρτηση

$$\tilde{f}_{LD}(p,\theta) = \begin{cases} 2\sqrt{-\dfrac{P}{3}}\cos\left(\dfrac{1}{3}\arccos\left(\dfrac{3Q}{2P}\sqrt{-\dfrac{3}{P}}\right)\right) - \dfrac{B}{3A} & \text{αν } 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{6}, \\ \sqrt{\dfrac{2}{3}\dfrac{n}{27+n}}\,(p-a) & \text{αν } \theta = \dfrac{\pi}{6}, \\ 2\sqrt{-\dfrac{P}{3}}\cos\left(\dfrac{1}{3}\arccos\left(\dfrac{3Q}{2P}\sqrt{-\dfrac{3}{P}}\right) - \dfrac{2\pi}{3}\right) - \dfrac{B}{3A} & \text{αν } \dfrac{\pi}{6} < \theta \le \dfrac{\pi}{3}. \end{cases} \tag{3.32}$$



(α) Επίπεδο μεσημβρινών.



(β) Αποκλίνον επίπεδο.

Σχήμα 3.7: Τροποποιημένο κριτήριο αστοχίας Lade-Duncan.

με τους όρους

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3\theta \\
B &= -\frac{3}{2}(p-a) \\
P &= -\frac{3(p-a)^2}{2\cos^2 3\theta} \\
Q &= \frac{\frac{n}{27+n}\cos^2 3\theta - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^3 3\theta}(p-a)^3
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Το τροποποιημένο κριτήριο Lade-Duncan έχει γραμμικούς μεσημβρινούς εφελκυσμού και θλίψης στο επίπεδο $p-T$ (Σχ. 3.7α). Στο αποκλίνον επίπεδο, το σχήμα της επιφάνειας αστοχίας είναι μια ομαλή συμμετρική καμπύλη η οποία παραμένει αυτοόμοια και μεγεθύνεται με την αύξηση της μέσης θλιπτικής υδροστατικής πίεσης (Σχ. 3.7β). Το μόνο μη ομαλό σημείο είναι η κορυφή της επιφάνειας αστοχίας που αντιστοιχεί στην αντοχή σε υδροστατικό εφελκυσμό. Τέλος, το μοντέλο λαμβάνει υπόψη την επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης μέσω της αναλλοίωτης I_3.

3.1.8 Κριτήριο αστοχίας Menétrey-Willam

Το κριτήριο Menétrey-Willam [Menétrey and Willam, 1995] αναπτύχθηκε αρχικά για σκυρόδεμα. Συνδυάζει το μοντέλο Willam-Warnke [Willam and Warnke, 1974] με το μοντέλο Hoek-Brown. Ο μεσημβρινός της θλίψης δίδεται από την παραβολική εξίσωση του κριτηρίου Hoek-Brown (με μια μικρή τροποποίηση), ενώ το σχήμα στο αποκλίνον επίπεδο δίδεται από μια παραλλαγή της ελλειπτικής εξίσωσης του κριτηρίου Willam-Warnke. Το κριτήριο είναι τριών παραμέτρων και ορίζεται ως εξής

$$f(\xi,\rho,\theta) = \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\rho}{\sigma_c}\right]^2 + m\left[\frac{\rho}{\sqrt{6}\sigma_c}r(\theta,e) + \frac{\xi}{\sqrt{3}\sigma_c}\right] - c = 0 \tag{3.34}$$

όπου σ_c είναι η αντοχή σε μονοαξονική θλίψη, m είναι παράμετρος της εσωτερικής τριβής, και c είναι η συνοχή.

Η ελλειπτική συνάρτηση $r(\theta,e)$ αναπτύχθηκε από τον Klisinski [1985] με βάση την ελλειπτική συνάρτηση του κριτηρίου Willam-Warnke

$$r(\theta,e) = \frac{4\left(1-e^2\right)\cos^2\theta + (2e-1)^2}{2\left(1-e^2\right)\cos\theta + (2e-1)\left[4\left(1-e^2\right)\cos^2\theta + 5e^2 - 4e\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.35}$$

όπου το e ονομάζεται εκκεντρότητα και περιγράφει την απόκλιση που έχει το ίχνος της επιφάνειας αστοχίας στο αποκλίνον επίπεδο από το κυκλικό σχήμα. Η επιφάνεια αστοχίας είναι ομαλή και κυρτή όταν

$$\frac{1}{2} < e \leq 1 \tag{3.36}$$

Το άνω όριο $e = 1$ περιγράφει κυκλικό ίχνος στο αποκλίνον επίπεδο. Το κάτω όριο $e = 1/2$ περιγράφει ένα ισόπλευρο τρίγωνο με μη ομαλές κορυφές, συνεπώς πρέπει να εξαιρεθεί από το εύρος τιμών.

Η παράμετροι m και c μπορούν να εκφρασθούν ως συναρτήσεις της αντοχής σε μονοαξονική θλίψη σ_c και της αντοχής σε μονοαξονικό εφελκυσμό σ_t ως εξής

$$c = 1 \tag{3.37}$$

$$m = 3\frac{\sigma_c^2 - \sigma_t^2}{\sigma_c\sigma_t}\frac{e}{e+1} \tag{3.38}$$

Η μετατροπή του κριτηρίου σε όρους p, T, θ οδηγεί στις ακόλουθες εξισώσεις

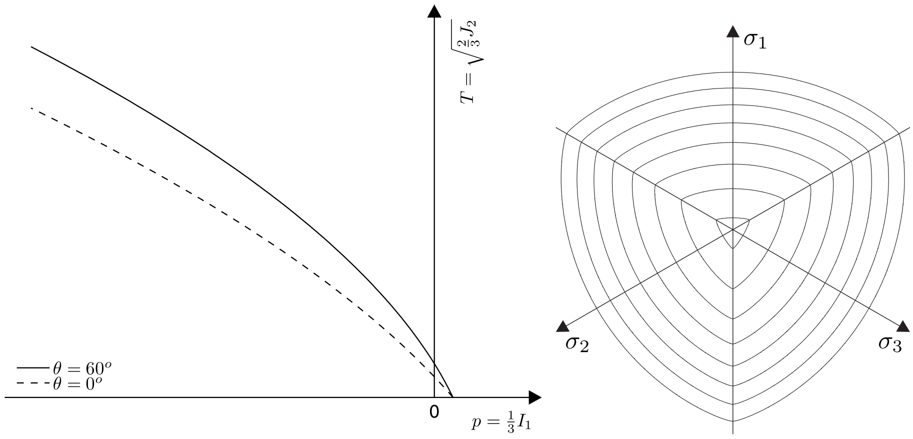
$$f_{MW}(p,T,\theta) = T - \tilde{f}_{MW}(p,\theta) = 0 \tag{3.39}$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{MW}(p,\theta) &= \frac{1}{2A}\left[-B + \left(B^2 - 4AC\right)^{1/2}\right] \\ A &= \frac{9}{2\sigma_c^2} \\ B &= \frac{mr(\theta,e)}{\sqrt{2}\sigma_c} \\ C &= \frac{mp}{\sigma_c} - 1 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Η ελλειπτική συνάρτηση $r(\theta,e)$ και η παράμετρος m υπολογίζονται από τις Εξ. (3.35) και (3.38), αντίστοιχα.

Το σχήμα των μεσημβρινών στο επίπεδο $p - T$ είναι παραβολές όπως φαίνεται στο Σχ. 3.8α. Το ίχνος της επιφάνειας αστοχίας στο αποκλίνον επίπεδο εξελίσσεται από τριγωνικό σε κυκλικό με την αύξηση της μέσης θλιπτικής υδροστατικής πίεσης (Σχ. 3.8β). Η επιφάνεια αστοχίας είναι ομαλή και κυρτή εκτός από την κορυφή του αντιστοιχεί στην αντοχή σε υδροστατικό εφελκυσμό. Τέλος, αν και το μοντέλο βασίζεται εν μέρη στο κριτήριο Hoek-Brown, λαμβάνει υπόψη την επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης μέσω της παραμέτρου e.



(α) Επίπεδο μεσημβρινών. (β) Αποκλίνον επίπεδο.

Σχήμα 3.8: Κριτήριο αστοχίας Menétrey-Willam.

3.1.9 Άλλα κριτήρια αστοχίας

Στη διεθνή βιβλιογραφία έχει προταθεί πλήθος άλλων κριτηρίων αστοχίας. Πέραν αυτών που παρουσιάστηκαν, κάποια άλλα κριτήρια άξια αναφοράς είναι το τροποποιημένο κριτήριο των Wiebols-Cook [Wiebols and Cook, 1968; Zhou, 1994], τα εμπειρικά κριτήρια του Mogi [Mogi, 1971], των Hoek-Brown-Matsuoka-Nakai [Matsuoka, 1974; Matsuoka and Nakai, 1982], των Willam-Warnke [Willam and Warnke, 1974], των Bresler-Pister [Bresler and Pister, 1958], του van Eekelen [van Eekelen, 1980] κλπ. Λεπτομερής ανάλυση για τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει η επιφάνεια αστοχίας μπορεί να βρεθεί π.χ. στις εργασίες των Zienkiewicz and Pande [1977] και Bigoni and Piccolroaz [2004].

3.2 Υπερβολικό κριτήριο αστοχίας υλικών με συνοχή και εσωτερική τριβή

Από την αναδρομή των κριτηρίων αστοχίας, προκύπτουν τα βασικά ποιοτικά χαρακτηριστικά που θα πρέπει να έχει ένα κριτήριο αστοχίας για υλικά που χαρακτηρίζονται από εσωτερική τριβή και συνοχή. Καταρχήν, ένα καλό κριτήριο για να μπορεί να προβλέψει κατά το δυνατόν καλύτερα την αστοχία σε όλες τις συνθήκες φόρτισης θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη την επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης. Επίσης, στην περιοχή του εφελκυσμού τα πετρώματα και το σκυρόδεμα παρουσιάζουν ψαθυρή συμπεριφορά. Συνεπώς, για αυτή την περιοχή, το κριτήριο θα πρέπει να προσομοιώνει την ψαθυρή συμπεριφορά του κριτηρίου Rankine. Αντίθετα, σε υψηλές θλιπτικές υδροστατικές πιέσεις, τα πετρώματα και το σκυρόδεμα γίνονται πιο πλαστικά. Αυτό σημαίνει ότι το σχήμα του κριτηρίου στο αποκλίνον επίπεδο θα πρέπει να μεταβάλλεται με την μεταβολή της μέσης πίεσης. Η κάτω οριακή περίπτωση είναι το κριτήριο Rankine για την περιοχή του εφελκυσμού. Αντίθετα, η άνω οριακή περίπτωση, για πολύ μεγάλες θλιπτικές πιέσεις, είναι το κριτήριο Drucker-Prager. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι θα θεωρηθεί ότι η επιφάνεια αστοχίας είναι “ανοιχτή” στην πλευρά των πολύ μεγάλων θλιπτικών τάσεων. Δεν θα ληφθούν, δηλαδή, υπόψη φαινόμενα κατάρρευσης του κόκκων του υλικού (grain compaction) λόγω της υδροστατικής πίεσης που θα απαιτούσε κλειστή επιφάνεια αστοχίας και από την πλευρά των θλιπτικών τάσεων. Άλλη μια σημαντική παρατήρηση, είναι ότι το κριτήριο θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν λιγότερες παραμέτρους και στις παραμέτρους αυτές να μπορεί να αποδοθεί φυσική ερμηνεία. Τέλος, η επιφάνεια αστοχίας θα πρέπει να είναι κυρτή και ομαλή για όλο το εύρος των πιέσεων. Η κυρτότητα της επιφάνειας είναι αναγκαία συνθήκη ώστε το υλικό να είναι ενεργειακά ευσταθές [Drucker, 1951]. Η ομαλότητα δεν είναι αναγκαία συνθήκη, αλλά είναι επιθυμητή ώστε να μπορεί να οριστεί εύκολα παράγωγος. Ο λόγος είναι ότι όλοι οι ελαστοπλαστικοί νόμοι βασίζονται στην παράγωγο της επιφάνειας αστοχίας/διαρροής και μια ομαλή καμπύλη εξασφαλίζει σταθερή αριθμητική λύση.

Στην παρούσα Διατριβή, προτείνεται ένα υπερβολικό κριτήριο αστοχίας για υλικά με συνοχή και εσωτερική τριβή [Liolios and Exadaktylos, 2013]. Το μοντέλο είναι τριών παραμέτρων στις οποίες μπορεί να αποδοθεί ξεκάθαρη φυσική έννοια. Οι μεσημβρινοί της θλίψης και του εφελκυσμού προσεγγίζονται από υπερβολές ενώ το σχήμα στο αποκλίνον επίπεδο δίδεται από την ελλειπτική συνάρτηση του κριτηρίου Willam-Warnke [Willam and Warnke, 1974].

3.2.1 Υπερβολικό κριτήριο αστοχίας στο επίπεδο Rendulic

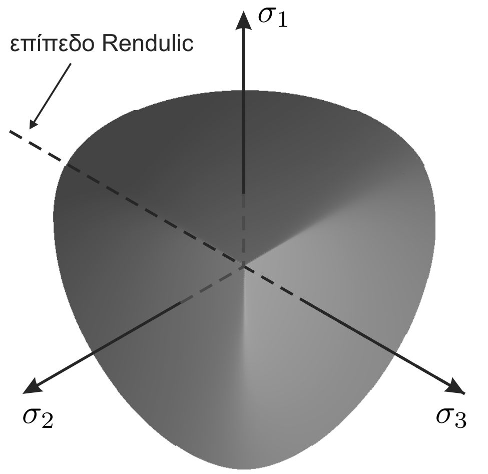
Έστω αξονοσυμμετρική εντατική κατάσταση η οποία ορίζεται ως $\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$. Αυτή η εντατική κατάσταση μπορεί να αποτυπωθεί σε δύο διαστάσεις στο επίπεδο Rendulic (βλ. Σχ. 3.9 και 3.10). Ο οριζόντιος άξονας αυτού που επιπέδου ορίζεται ως $\sigma_h = \sqrt{2}\sigma_1$, ενώ ο κάθετος άξονας ορίζεται ως $\sigma_v = \sigma_3$. Έστω ότι η επιφάνεια αστοχίας αποδίδεται στο επίπεδο αυτό από τον αριστερό κλάδο μιας υπερβολής όπως φαίνεται στο Σχ. 3.10. Η κορυφή της υπερβολής είναι το σημείο υδροστατικού εφελκυσμού που συμβολίζεται με p_t. Το κέντρο K βρίσκεται στο σημείο $(\sqrt{2}(\sigma_0 + a), \sigma_0)$, όπου a παράμετρος και σ_0 είναι η τιμή των κύριων τάσεων κατά τον υδροστατικό εφελκυσμό ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$). Τότε, η εξίσωση αυτού του υπερβολικού κριτηρίου, δίδεται από την σχέση

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_0 - a)^2}{a^2} - \frac{(\sigma_3 - \sigma_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.41}$$

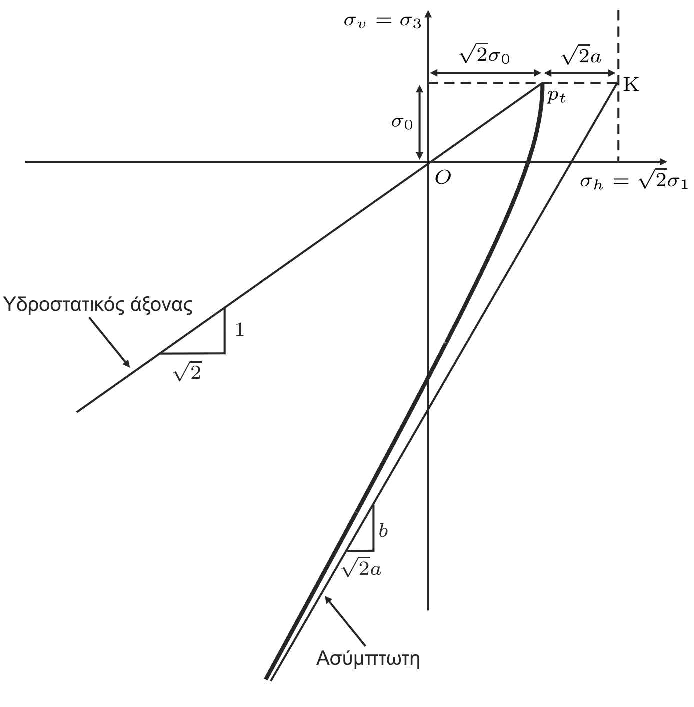
όπου b παράμετρος και $a, b, \sigma_0 > 0$.

Από τον συνδυασμό της εξίσωσης (3.41) με τις εξισώσεις (2.17) προκύπτει η έκφραση του κριτηρίου με όρους p, T και θ

$$\begin{aligned}
&AT^2 + BT + C = 0\\
&A = 2\beta^2\cos^2\theta - 2\cos^2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\\
&B = 2\sqrt{2}\left[\beta^2\left(p - \sigma_0 - a\right)\cos\theta - \left(p - \sigma_0\right)\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right]\\
&C = \beta^2\left(p - \sigma_0 - a\right)^2 - \left(p - \sigma_0\right)^2 - \beta^2 a^2
\end{aligned} \tag{3.42}$$



Σχήμα 3.9: Ίχνος του επιπέδου Rendulic στο χώρο Haigh-Westergaard.



Σχήμα 3.10: Ίχνος υπερβολικού κριτηρίου αστοχίας στο επίπεδο Rendulic.

όπου

$$\beta = \frac{b}{a} \tag{3.43}$$

Από την παραπάνω Εξ. (3.42) προκύπτουν δύο οριακές περιπτώσεις: ο μεσημβρινός της θλίψης και ο μεσημβρινός του εφελκυσμού. Για τον μεσημβρινό της θλίψης, η γωνία Lode γίνεται $\theta = \pi/3$, συνεπώς η εξίσωση (3.42) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} &A_c T_c^2 + B_c T_c + C_c = 0 \\ &A_c = \frac{1}{2}\beta_c^2 - 2 \\ &B_c = 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\beta_c^2 (p - \sigma_0 - a) + (p - \sigma_0)\right] \\ &C_c = \beta_c^2 (p - \sigma_0 - a)^2 - (p - \sigma_0)^2 - \beta_c^2 a^2 \end{aligned} \tag{3.44}$$

όπου ο δείκτης c υποδηλώνει τον μεσημβρινό της θλίψης και $\beta_c = \beta$. Η γενική λύση της Εξ. (3.44) είναι

$$T_c = \begin{cases} -\dfrac{1}{2A_c}\left[B_c + \left(B_c^2 - 4A_c C_c\right)^{1/2}\right] & \text{αν } \beta \neq 2 \\ -\dfrac{C_c}{B_c} & \text{αν } \beta = 2 \end{cases} \tag{3.45}$$

όπου έχει κρατηθεί μόνο η αρνητική λύση $(-)$ που αντιστοιχεί στον κάτω κλάδο της υπερβολής. Η κλίση της ασύμπτωτης του μεσημβρινού της θλίψης πρέπει να είναι πάντα μεγαλύτερη από την κλίση του υδροστατικού άξονα. Συνεπώς, προκύπτει ο ακόλουθος περιορισμός

$$1 < \beta_c < +\infty \tag{3.46}$$

Για την οριακή περίπτωση $\beta_c \to 1$ προκύπτει το κριτήριο του Tresca με αποκοπή στον εφελκυσμό (tension cut-off) ενώ για την οριακή περίπτωση $\beta_c \to +\infty$ προκύπτει το κριτήριο Rankine.

Για την περίπτωση του μεσημβρινού του εφελκυσμού, η γωνία Lode γίνεται $\theta = 0$ και από την Εξ. (3.42) προκύπτει

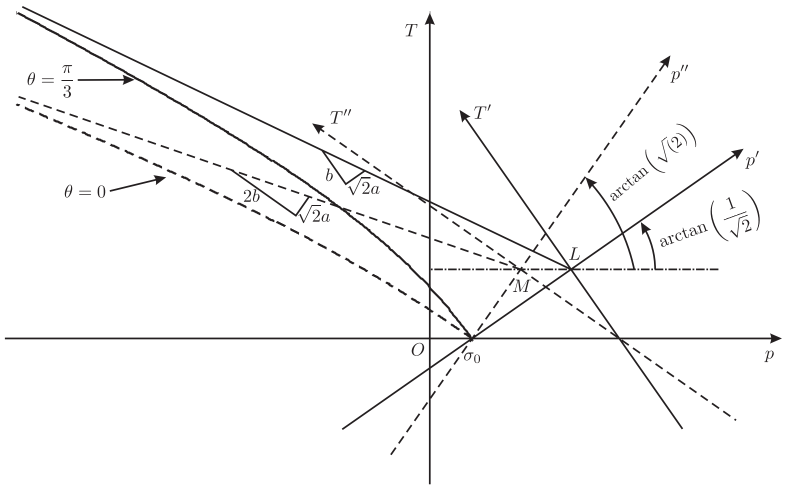
$$\begin{aligned} &A_t T_t^2 + B_t T_t + C_t = 0 \\ &A_t = 2\beta_t^2 - \frac{1}{2} \\ &B_t = 2\sqrt{2}\left[\beta_t^2 (p - \sigma_0 - a) + \frac{1}{2}(p - \sigma_0)\right] \\ &C_t = \beta_t^2 (p - \sigma_0 - a)^2 - (p - \sigma_0)^2 - \beta_t^2 a^2 \end{aligned} \tag{3.47}$$

όπου ο δείκτης t υποδηλώνει τον μεσημβρινό του εφελκυσμού και $\beta_t = \beta$. Η γενική λύση της Εξ. (3.47) είναι

$$T_t = -\frac{1}{2A_t}\left[B_t + \left(B_t^2 - 4A_t C_t\right)^{1/2}\right] \tag{3.48}$$

όπου τυχόν περιορισμοί καλύπτονται από την Εξ. (3.46).

Μέχρι αυτό το σημείο, η επιφάνεια του κριτηρίου αστοχίας δεν είναι ούτε ομαλή, ούτε λαμβάνει υπόψη την ενδιάμεση κύρια τάση. Το πρώτο πρόβλημα θα επιλυθεί στο Υποκεφάλαιο 3.2.3. Το δεύτερο πρόβλημα θα επιλυθεί με την αλλαγή της κλίσης της ασύμπτωτης του μεσημβρινού του εφελκυσμού όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια.



Σχήμα 3.11: Μεσημβρινοί της θλίψης και του εφελκυσμού στο επίπεδο $p-T$.

3.2.2 Επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης

Η επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης μπορεί να μελετηθεί από τον μετασχηματισμό των Εξ. (3.44) και (3.47) στην γενική πολυωνυμική μορφή των εξισώσεων των κωνικών τομών και την διερεύνηση των χαρακτηριστικών τους στο επίπεδο των μεσημβρινών $p-T$ (Σχ. 3.11). Η γενική πολυωνυμική εξίσωση μιας κωνικής τομής στο επίπεδο $p-T$ δίδεται από την σχέση

$$A_{pp}p^2 + 2A_{pT}pT + A_{TT}T^2 + 2B_p p + 2B_T T + D = 0 \tag{3.49}$$

όπου A_{pp}, A_{pT}, A_{TT}, B_p, B_T και D σταθερές.

Η μετατροπή της Εξ. (3.44) στην γενική πολυωνυμική μορφή (3.49) οδηγεί στις ακόλουθες σχέσεις για τις σταθερές

$$\begin{aligned}
A_{pp}^c &= \beta_c^2 - 1 \\
A_{pT}^c &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\beta_c^2 + 1\right) \\
A_{TT}^c &= \frac{1}{2}\beta_c^2 - 2 \\
B_p^c &= \sigma_0 - \beta_c^2\left(\sigma_0 + a\right) \\
B_T^c &= \sqrt{2}\left[-\sigma_0 - \frac{1}{2}\beta_c^2\left(\sigma_0 + a\right)\right] \\
D^c &= \beta_c^2\left(\sigma_0 + a\right)^2 - \sigma_0^2 - \beta_c^2 a^2
\end{aligned} \tag{3.50}$$

όπου ο δείκτης c υποδηλώνει τον μεσημβρινό της θλίψης. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σταθερές και την θεωρία των κωνικών τομών, το κέντρο L αυτής της υπερβολής στο επίπεδο $p-T$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής

$$\begin{aligned}
p_L &= \sigma_0 + \frac{2}{3}a \\
T_L &= \frac{\sqrt{2}}{3}a
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Στη συνέχεια, η γωνία ϕ' μεταξύ του άξονα p' της υπερβολής και του άξονα p (Σχ. 3.11) είναι

$$\phi' = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{3.52}$$

όπου η γωνία ϕ' μετράται αριστερόστροφα από τον άξονα p. Η κλίση της ασύμπτωτης στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $p' - T'$ είναι

$$k_c = -\frac{b}{\sqrt{2}a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_c \tag{3.53}$$

η οποία είναι ίση με την κλίση της ασύμπτωτης στο επίπεδο Rendulic. Αν στραφεί η εξίσωση της ασύμπτωτης κατά $(-\phi')$ δεξιόστροφα και ληφθεί υπόψη η μετάθεση, δηλαδή το κέντρο L, τότε προκύπτει η εξίσωση της ασύμπτωτης στο σύστημα συντεταγμένων $p - T$

$$T_c^a = \sqrt{2}\frac{1-\beta_c}{2+\beta_c}\left(p - p_L\right) + T_L \tag{3.54}$$

όπου ο δείκτης a υποδηλώνει την ασύμπτωτη.

Αν εφαρμοστεί η ίδια διαδικασία για τον μεσημβρινό του εφελκυσμού, τότε οι σταθερές της γενικής πολυωνυμικής εξίσωσης δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
A_{pp}^t &= \beta_t^2 - 1 \\
A_{pT}^t &= \sqrt{2}\left(\beta_t^2 + \frac{1}{2}\right) \\
A_{TT}^t &= 2\beta_t^2 - \frac{1}{2} \\
B_p^t &= \sigma_0 - \beta_t^2\left(\sigma_0 + a\right) \\
B_T^t &= \sqrt{2}\left[-\frac{1}{2}\sigma_0 - \beta_t^2\left(\sigma_0 + a\right)\right] \\
D^t &= \beta_t^2\left(\sigma_0 + a\right)^2 - \sigma_0^2 - \beta_t^2 a^2
\end{aligned} \tag{3.55}$$

όπου ο δείκτης t υποδηλώνει την μεσημβρινό του εφελκυσμού. Το κέντρο M αυτής της υπερβολής στο επίπεδο $p - T$ έχει τις ακόλουθες συντεταγμένες

$$\begin{aligned}
p_M &= \sigma_0 + \frac{1}{3}a \\
T_M &= \frac{\sqrt{2}}{3}a
\end{aligned} \tag{3.56}$$

ενώ η γωνία μεταξύ του άξονα p'' της υπερβολής και του άξονα p είναι

$$\phi'' = \arctan\left(\sqrt{2}\right) \tag{3.57}$$

όπου η γωνία ϕ'' μετράται αριστερόστροφα από τον άξονα p. Σε αυτήν την περίπτωση, η κλίση της ασύμπτωτης στο σύστημα συντεταγμένων $p'' - T''$ δίδεται από την σχέση

$$k_t = -\frac{2b}{\sqrt{2}a} = -\sqrt{2}\beta_t \tag{3.58}$$

Αν στραφεί η εξίσωση της ασύμπτωτης κατά $(-\phi'')$ δεξιόστροφα και ληφθεί υπόψη η μετάθεση λόγω του κέντρου M, τότε προκύπτει η εξίσωση της ασύμπτωτης στο σύστημα συντεταγμένων $p-T$

$$T_t^a = \sqrt{2}\frac{1-\beta_t}{1+2\beta_t}\left(p-p_M\right)+T_M \tag{3.59}$$

Όπως φαίνεται στο Σχ. 3.11, οι δύο μεσημβρινοί τέμνουν τον οριζόντιο άξονα p στο σημείο σ_0. Επιπλέον το σημείο τομής είναι ανεξάρτητο από την γωνία του Lode θ. Ο λόγος μεταξύ της οκταεδρικής διατμητικής τάσης T_t και της οκταεδρικής διατμητικής τάσης T_c στο σημείο σ_0 μπορεί να υπολογισθεί αν εφαρμοστεί το θεώρημα του L' Hôpital ή Bernoulli στις Εξ. (3.45) και (3.48) ως εξής

$$\lim_{p\to\sigma_0}\frac{T_t}{T_c} = \lim_{p\to\sigma_0}\frac{\mathrm{d}T_t/\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T_c/\mathrm{d}p} = \frac{1}{2} \tag{3.60}$$

Η σταθερή αναλογία 1/2 υποδηλώνει ότι το μοντέλο συμπεριφέρεται ακριβώς όπως το κριτήριο Rankine στο σημείο της αντοχής σε υδροστατικό εφελκυσμό σ_0. Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι αν η υπερβολική καμπύλη κατασκευάζονταν στο επίπεδο $\sigma_1-\sigma_3$, ανάλογα δηλαδή με το κριτήριο Hoek-Brown, τότε η αναλογία (3.60) θα ήταν μικρότερη του 1/2. Δηλαδή, η επιφάνεια αστοχίας θα γινόταν κοίλη για ένα εύρος τιμών p. Συνεπώς, το κριτήριο δεν θα ήταν ενεργειακά ευσταθές [Drucker, 1951].

Μέχρι αυτό το σημείο το μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη την ενδιάμεση κύρια τάση και χαρακτηρίζεται από τις τρεις παραμέτρους σ_0, a και $\beta=\beta_c=\beta_t$. Ειδικότερα, η κλίση της ασύμπτωτης του μεσημβρινού του εφελκυσμού είναι το κατώτερο όριο όπου η ενδιάμεση κύρια τάση δεν έχει καμία επίδραση. Αν αυξηθεί αυθαίρετα η κλίση της ασύμπτωτης του εφελκυσμού, τότε εισάγεται η επίδραση της τάσης σ_2 στο μοντέλο. Η αύξηση της κλίσης μπορεί να επιτευχθεί με την αύξηση της παραμέτρου β_t στην Εξ. (3.47). Το κατώτατο όριο όπου δεν υπάρχει επίδραση της σ_2, είναι όταν $\beta_{t(min)}=\beta_c=\beta$. Έστω ότι το ανώτατο όριο, όπου η επίδραση της σ_2 μεγιστοποιείται, είναι όταν οι κλίσεις των ασύμπτωτων των δύο μεσημβρινών γίνουν ίσες, δηλαδή όταν οι δύο ασύμπτωτες γίνουν παράλληλες στο επίπεδο $p-T$. Αν οι δύο κλίσεις είναι ίσες, τότε το μοντέλο προσομοιώνει την συμπεριφορά κριτηρίου τύπου Drucker-Prager για πολύ μεγάλες θλιπτικές υδροστατικές πιέσεις. Δηλαδή, όταν $p\to-\infty$, τότε $T_t/T_c=1$. Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι το απόλυτο ανώτατο όριο, έτσι ώστε η επιφάνεια αστοχίας να είναι κυρτή, είναι όταν $T_t/T_c=2$ για $p\to-\infty$. Σε αυτή την περίπτωση η επιφάνεια αστοχίας προσομοιώνει κριτήριο Rankine μέγιστης αντοχής σε θλίψη. Δηλαδή, το υλικό αστοχεί σε θλίψη όταν οποιαδήποτε κύρια τάση γίνει ίση με μια κρίσιμη τιμή.

Αν απαιτηθεί οι κλίσεις των Εξ. (3.54) και (3.59) να είναι ίσες, τότε προκύπτει η μέγιστη τιμή για την παράμετρο β_t

$$\beta_{t(max)} = \frac{1+2\beta_c}{4-\beta_c} \tag{3.61}$$

από την οποία προκύπτει ο περιορισμός

$$4-\beta_c>0 \Leftrightarrow \beta_c<4 \tag{3.62}$$

Για $\beta_c = 4$ ο μεσημβρινός του εφελκυσμού γίνεται παράλληλος με τον οριζόντιο άξονα του επιπέδου Rendulic (Σχ. 3.10). Συνεπώς, ο μεσημβρινός του εφελκυσμού παρουσιάζει τη συμπεριφορά του κριτηρίου Rankine και το υλικό δεν θα αστοχήσει ποτέ σε διαξονική θλίψη.

Η εισαγωγή του β_t ως επιπλέον ελεύθερη παράμετρο στο μοντέλο, οδηγεί σε ένα κριτήριο αστοχίας τεσσάρων παραμέτρων. Επιπλέον, το άνω όριο του β_t είναι μη γραμμική συνάρτηση του β_c σύμφωνα με την Εξ. (3.61). Οι δύο αυτοί παράγοντες κάνουν δυσκολότερη την βαθμονόμηση του μοντέλου από πειραματικά δεδομένα. Για να ξεπεραστούν αυτά τα προβλήματα, θα θεωρηθεί ότι η παράμετρος β_t είναι ίση με το άνω της όριο. Με αυτή την θεώρηση το μοντέλο γίνεται τριών παραμέτρων με

$$\beta = \beta_c \tag{3.63}$$

και

$$\beta_t = \frac{1 + 2\beta}{4 - \beta} \tag{3.64}$$

Επιπλέον, από τις Εξ. (3.46) και (3.62) το β υπόκειται στους περιορισμούς

$$1 < \beta < 4 \tag{3.65}$$

Από την Εξ. (3.60) και τον ορισμό (3.64) προκύπτει ότι το σχήμα του μοντέλου στο αποκλίνον επίπεδο μεταβάλλεται σταδιακά από το κριτήριο Rankine σε κανονικό εξάγωνο με την αύξηση της υδροστατικής πίεσης.

3.2.3 Ομαλή καμπύλη στο αποκλίνον επίπεδο

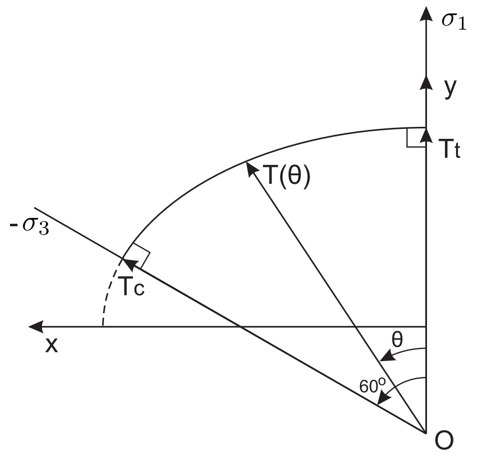
Οι δύο κύριοι μεσημβρινοί, δηλαδή οι μεσημβρινοί της θλίψης και του εφελκυσμού, καθορίζουν την εξέλιξη του σχήματος του κριτηρίου στο αποκλίνον επίπεδο. Η σύνδεση, όμως, μεταξύ τους είναι γραμμική και η επιφάνεια αστοχίας παρουσιάζει ακμές. Για να επιτευχθεί ομαλή καμπύλη στο αποκλίνον επίπεδο θα χρησιμοποιηθεί η ελλειπτική συνάρτηση του κριτηρίου Willam-Warnke [Willam and Warnke, 1974].

Το κριτήριο Willam-Warnke θεωρεί ότι οι μεσημβρινοί της θλίψης και του εφελκυσμού συνδέονται μεταξύ τους στο αποκλίνον επίπεδο μέσω ενός τμήματος μιας έλλειψης (Σχ. 3.12). Η εξίσωση της έλλειψης κατασκευάζεται έτσι, ώστε να τέμνει κάθετα τα διανύσματα T_c και T_t που αντιστοιχούν στους δύο μεσημβρινούς. Τότε, το διάνυσμα $T(\theta)$ δίνεται από την σχέση

$$T(\theta) = r(\theta, T_c, T_t) \tag{3.66}$$

όπου θ η γωνία του Lode και

$$\begin{aligned}
r\left(\theta, T_c, T_t\right) &= \frac{s + t}{v} \\
s &= 2T_c\left(T_c^2 - T_t^2\right)\cos\theta \\
t &= T_c\left(2T_t - T_c\right)u^{1/2} \\
u &= 4\left(T_c^2 - T_t^2\right)\cos^2\theta + 5T_t^2 - 4T_tT_c \\
v &= 4\left(T_c^2 - T_t^2\right)\cos^2\theta + \left(T_c - 2T_t\right)^2
\end{aligned} \tag{3.67}$$



Σχήμα 3.12: Ελλειπτική συνάρτηση του κριτηρίου Willam-Warnke στο αποκλίνον επίπεδο.

Οι μεσημβρινοί της θλίψης T_c και του εφελκυσμού T_t υπολογίζονται από τις Εξ. (3.45) και (3.48).

Με την χρήση της ελλειπτικής συνάρτησης (3.67) η επιφάνεια αστοχίας γίνεται ομαλή σε όλο το εύρος της εκτός από την κορυφή που αντιστοιχεί στο σημείο του υδροστατικού εφελκυσμού. Η επιφάνεια αστοχίας είναι επίσης κυρτή εφόσον η αναλογία των οκταεδρικών διατμητικών τάσεων στους δύο μεσημβρινούς είναι πάντα μεταξύ 1/2 και 1. Στην περιοχή των εφελκυστικών τάσεων το σχήμα της επιφάνειας γίνεται τριγωνικό με στρογγυλεμένες γωνίες εκτός από το ιδιόμορφο σημείο της κορυφής. Στις μεγάλες θλιπτικές τάσεις, το ίχνος της επιφάνειας στο αποκλίνον επίπεδο γίνεται κυκλικό και το μοντέλο προσομοιώνει το κριτήριο Drucker-Prager.

3.2.4 Συσχέτιση των παραμέτρων του μοντέλου με μηχανικές ιδιότητες

Το υπερβολικό κριτήριο που προτείνεται έχει τρεις ελεύθερες παραμέτρους: την αντοχή σε υδροστατικό εφελκυσμό σ_0, την παράμετρο a και την παράμετρο β. Και οι τρεις αυτές παράμετροι μπορούν να συσχετισθούν με πειραματικά μετρήσιμες ποσότητες.

Η παράμετρος σ_0 είναι δύσκολο να υπολογιστεί άμεσα με πείραμα λόγω της δυσκολίας που παρουσιάζει ένα πείραμα υδροστατικού εφελκυσμού. Θεωρητικά, όμως, μπορεί να υπολογισθεί από την θεωρία της Θραυστομηχανικής. Αν υποτεθεί ότι το υλικό περιέχει ρωγμές Griffith, μορφής κυκλικού δίσκου, ακτίνας α και τυχαίου προσανατολισμού, τότε μπορεί να βρεθεί ότι

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}K_{IC} \tag{3.68}$$

όπου K_{IC} η θραυστική στιβαρότητα τύπου I.

Από την άλλη πλευρά, το μοντέλο παρουσιάζει, όπως φαίνεται και από τις βαθμονομήσεις του Υποκεφαλαίου 3.4, “ισχυρή” συμπεριφορά τύπου

Rankine στην περιοχή του εφελκυσμού. Η αντοχή, λοιπόν, σε τριαξονικό εφελκυσμό είναι πάντα περίπου ίση με την αντοχή σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Συνεπώς, μπορεί προσεγγιστικά να τεθεί

$$\sigma_0 \approx \sigma_t \tag{3.69}$$

όπου σ_t η αντοχή σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

Η παράμετρος a μπορεί να συσχετισθεί άμεσα με την αντοχή σε μονοαξονική θλίψη από την Εξ. (3.41)

$$a = \frac{1}{2}\left[\frac{(\sigma_c - \sigma_0)^2}{\sigma_0 \beta^2} - \sigma_0\right] \tag{3.70}$$

όπου σ_c η αντοχή σε μονοαξονική θλίψη. Από την Εξ. (3.70) και τους περιορισμούς $a, \beta, \sigma_0 > 0$, προκύπτει ο παρακάτω περιορισμός για την σ_c

$$\sigma_c < \sigma_0(1 - \beta) \tag{3.71}$$

Τέλος, η παράμετρος β μπορεί να συσχετισθεί με την αντοχή σε ισότροπη διαξονική θλίψη από τις Εξ. (3.47), (3.64) και (3.70)

$$\frac{\beta_t}{\beta} = \frac{1 + 2\beta}{\beta\,(4 - \beta)} = \frac{\sigma_{bc} - \sigma_0}{\sigma_c - \sigma_0} \tag{3.72}$$

όπου σ_{bc} η αντοχή σε ισότροπη διαξονική θλίψη. Πρακτικά, επειδή τα πειράματα διαξονικής θλίψης είναι δύσκολο να πραγματοποιηθούν, μπορεί να γίνει μια εκτίμηση της αναλογίας σ_{bc}/σ_c ώστε να υπολογιστεί η παράμετρος β. Ανάλογη εκτίμηση μπορεί να γίνει και για τον λόγο σ_t/σ_c που είναι σημαντικός προκειμένου για ψαθυρά υλικά.

3.2.5 Πλήρες υπερβολικό κριτήριο αστοχίας

Συνοψίζοντας, το υπερβολικό κριτήριο αστοχίας έχει τρεις ελεύθερες παραμέτρους: την αντοχή σε υδροστατικό εφελκυσμό σ_0 (περίπου ίση με την αντοχή σε μονοαξονικό εφελκυσμό σ_t ή υπολογισμός από την Θραυστομηχανική), την αντοχή σε μονοαξονική θλίψη σ_c και την αντοχή σε ισότροπη διαξονική θλίψη σ_{bc}. Η επιφάνεια αστοχίας δίδεται από την σχέση

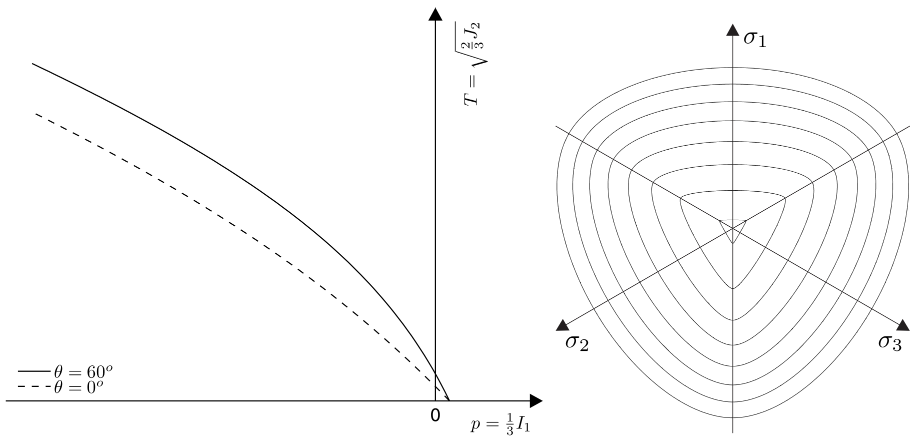
$$f_H\,(p, T, \theta) = T - \tilde{f}_H\,(p, \theta) = 0 \tag{3.73}$$

όπου

$$\tilde{f}_H\,(p, \theta) = \frac{s + t}{v} \tag{3.74}$$

με τις ποσότητες s, t και v να δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} s &= 2T_c\left(T_c^2 - T_t^2\right)\cos\theta \\ t &= T_c\,(2T_t - T_c)\,u^{1/2} \\ u &= 4\left(T_c^2 - T_t^2\right)\cos^2\theta + 5T_t^2 - 4T_tT_c \\ v &= 4\left(T_c^2 - T_t^2\right)\cos^2\theta + (T_c - 2T_t)^2 \end{aligned} \tag{3.75}$$



(α) Επίπεδο μεσημβρινών. (β) Αποκλίνον επίπεδο.

Σχήμα 3.13: Υπερβολικό κριτήριο αστοχίας.

Οι μεσημβρινοί T_c και T_t υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} T_c &= \begin{cases} -\dfrac{1}{2A_c}\left[B_c + \left(B_c^2 - 4A_cC_c\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{αν } \beta \neq 2, \\ -\dfrac{C_c}{B_c} & \text{αν } \beta = 2. \end{cases} \\ A_c &= \frac{1}{2}\beta^2 - 2 \\ B_c &= 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\beta^2\left(p - \sigma_0 - a\right) + \left(p - \sigma_0\right)\right] \\ C_c &= \beta^2\left(p - \sigma_0 - a\right)^2 - \left(p - \sigma_0\right)^2 - \beta^2 a^2 \end{aligned} \tag{3.76}$$

και

$$\begin{aligned} T_t &= -\frac{1}{2A_t}\left[B_t + \left(B_t^2 - 4A_tC_t\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ A_t &= 2\beta_t^2 - \frac{1}{2} \\ B_t &= 2\sqrt{2}\left[\beta_t^2\left(p - \sigma_0 - a\right) + \frac{1}{2}\left(p - \sigma_0\right)\right] \\ C_t &= \beta_t^2\left(p - \sigma_0 - a\right)^2 - \left(p - \sigma_0\right)^2 - \beta_t^2 a^2 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Οι παράμετροι β_t, a και β υπολογίζονται από τις εκφράσεις

$$\beta_t = \frac{1 + 2\beta}{4 - \beta} \tag{3.78}$$

$$a = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sigma_c - \sigma_0\right)^2}{\sigma_0\beta^2} - \sigma_0\right] \tag{3.79}$$

$$\frac{1 + 2\beta}{\beta\left(4 - \beta\right)} = \frac{\sigma_{bc} - \sigma_0}{\sigma_c - \sigma_0} \tag{3.80}$$

Τέλος, ισχύουν οι περιορισμοί

$$\begin{aligned} &\sigma_0 > 0 \\ &\sigma_c < \sigma_0(1-\beta) \\ &1 < \beta < 4 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Η επιφάνεια αστοχίας είναι κυρτή και ομαλή σε όλο το εύρος των τιμών p εκτός από την κορυφή που αντιστοιχεί στο σημείο υδροστατικού εφελκυσμού. Γεωμετρικά, η μορφή της αποδίδεται από ένα τμήμα δίχωνου ελλειπτικού υπερβολοειδούς (elliptic hyperboloid of two sheets) με τρία επίπεδα συμμετρίας. Το σχήμα των μεσημβρινών της θλίψης και του εφελκυσμού αποδίδεται στο επίπεδο $p-T$ από δύο υπερβολές (Σχ. 3.13α). Το σχήμα της επιφάνειας στο αποκλίνον επίπεδο μεταβάλλεται σταδιακά από ισόπλευρο τρίγωνο (κριτήριο Rankine) στο σημείο σ_0 σε κύκλο (κριτήριο Drucker-Prager) για πολύ υψηλές θλιπτικές πιέσεις p (Σχ. 3.13β). Μια ειδική περίπτωση προκύπτει όταν $\beta \to 1$ όπου για μεγάλες θλιπτικές πιέσεις το κριτήριο μετατρέπεται σε von Mises με αποκοπή στον εφελκυσμό.

Το κριτήριο είναι παρόμοιο με τα κριτήρια Menétrey-Willam και Willam-Warnke υπό την έννοια ότι χρησιμοποιούν την ίδια ελλειπτική συνάρτηση στο αποκλίνον επίπεδο. Το πλεονέκτημα αυτού του κριτηρίου είναι ότι οι υπερβολικοί μεσημβρινοί είναι φραγμένοι από τις ασύμπτωτες και η συμπεριφορά τους μπορεί να ελεγχθεί πολύ πιο εύκολα. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη και για το ελαστοπλαστικό μοντέλο που θα παρουσιασθεί στα επόμενα Κεφάλαια. Τέλος, όλες οι παράμετροι του μοντέλου είναι πειραματικά μετρήσιμες μηχανικές ιδιότητες σε αντίθεση με τα άλλα δύο μοντέλα. Αυτό συνεπάγεται ότι, σε περίπτωση έλλειψης πειραματικών δεδομένων, είναι ευκολότερο να γίνει εκτίμηση των παραμέτρων σ_{bc} και σ_0 ως προς την αντοχή σε μονοαξονική θλίψη σ_c.

3.3 Βάση δεδομένων πειραμάτων μηχανικής πετρωμάτων

Στα πλαίσια της παρούσας Διατριβής δημιουργήθηκε μια σχεσιακή βάση δεδομένων πειραμάτων μηχανικής πετρωμάτων η οποία περιλαμβάνει τόσο προτυποποιημένα πειράματα όσο και νέα είδη πειραμάτων [Liolios and Exadaktylos, 2011; Exadaktylos et al., 2007]. Στην βάση δεδομένων περιλαμβάνονται οι ακόλουθες προτυποποιημένες δοκιμές: δοκιμές μονοαξονικής και τριαξονικής θλίψης, οι δοκιμές άμεσου και έμμεσου (Brazilian) εφελκυσμού και η δοκιμή άμεσης διάτμησης. Επίσης περιλαμβάνεται μια σχετικά νέα και μη τυποποιημένη δοκιμή, η δοκιμή αντοχής σε μικροδιάτρηση [Exadaktylos et al., 2000]. Τα δεδομένα της βάσης, όπως και δεδομένα πραγματικών τριαξονικών δοκιμών από τη διεθνή βιβλιογραφία, χρησιμοποιήθηκαν τόσο για την βαθμονόμηση των παραμέτρων του καταστατικού μοντέλου, όσο και για την σύγκριση των προσομοιώσεων με πραγματικά αποτελέσματα.

Για την αποθήκευση των δεδομένων έχει αναπτυχθεί μιας τυποποιημένη και ιεραρχική μεθοδολογία σύμφωνη πάντα με την μεθοδολογία προτυποποίησης που προτείνεται από την Διεθνή Κοινότητα Μηχανικής Πετρωμάτων

(International Society of Rock Mechanics)[Brown, 1981]. Τα δεδομένα αποθηκεύονται σε μορφή λογιστικών φύλλων μέσα στη βάση δεδομένων τα οποία περιλαμβάνουν τόσο τα ανεπεξέργαστα δεδομένα όσο και επεξεργασμένα δεδομένα από τα οποία έχουν προκύψει οι βασικές μηχανικές ιδιότητες των δοκιμίων. Οι ιδιότητες αυτές, οι οποίες έχουν εξαχθεί από την επεξεργασία, αποθηκεύονται, επίσης, και ως ξεχωριστές παράμετροι μέσα στην βάση δεδομένων με σκοπό την άμεση και εύκολη πρόσβασή τους.

Η ανάπτυξη της βάσης δεδομένων έχει γίνει σε ένα Σύστημα Διαχείρισης Σχεσιακών Βάσεων Δεδομένων (Relational Database Management System (RDBMS)) [Codd, 1970] χρησιμοποιώντας την ευρέως διαδεδομένη Δομημένη Γλώσσα Ερωτήσεων (Structured Query Language (SQL)) [Chamberlin and Boyce, 1974]. Η κατασκευή του λογισμικού που διαχειρίζεται την βάση δεδομένων έχει γίνει με τη γλώσσα προγραμματισμού Java. Ένας από τους στόχους κατά την ανάπτυξη του λογισμικού ήταν η δυνατότητα να χρησιμοποιείται μέσω του διαδικτύου ώστε να μπορούν να έχουν πρόσβαση και άλλοι ερευνητές. Συνεπώς η εφαρμογή αναπτύχθηκε ως διαδικτυακή εφαρμογή χρησιμοποιώντας την τεχνική Ελεγκτής-Μοντέλο-Όψη (Model-View-Controller (MVC)) [Trygve, 1979; Burbeck, 1987], μια συνήθης τεχνική ανάπτυξης διαδικτυακών εφαρμογών. Αναλυτική περιγραφή της σχεσιακή βάσης δεδομένων μπορεί να βρεθεί στο Παράρτημα Α.

3.4 Βαθμονόμηση και σύγκριση κριτηρίων αστοχίας

Το υπερβολικό κριτήριο αστοχίας βαθμονομήθηκε σε διάφορα πειραματικά δεδομένα τόσο από την βάση δεδομένων όσο και από τη διεθνή βιβλιογραφία. Στα ίδια πειραματικά δεδομένα βαθμονομήθηκαν και τα κριτήρια Mohr-Coulomb, Hoek-Brown, τροποποιημένο Lade-Duncan και Menétrey-Willam ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ τους. Η βαθμονόμηση των κριτηρίων Tresca, von Mises, Rankine και Drucker-Prager δεν θα παρουσιασθεί γιατί δεν μπορούν να προσομοιώσουν την μηχανική συμπεριφορά των πετρωμάτων και του σκυροδέματος. Με άλλα λόγια, το σφάλμα που παρουσιάζουν είναι πάρα πολύ μεγάλο.

3.4.1 Διαδικασία βαθμονόμησης

Για την βαθμονόμηση των κριτηρίων αστοχίας στα πειραματικά δεδομένα, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Ο στόχος της μεθόδου είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ των πειραματικών δεδομένων και της πρόβλεψης του εκάστοτε μοντέλου. Η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Μια μέθοδος που έχει χρησιμοποιηθεί, είναι η διάσπαση των δεδομένων σε ομάδες και κατόπιν εφαρμογή μιας μεθόδου αναζήτησης καννάβου [π.χ. Colmenares and Zoback, 2002; Benz and Schwab, 2008]. Μια άλλη μέθοδος που έχει χρησιμοποιηθεί, είναι τα μη γραμμικά ελάχιστα τετράγωνα [π.χ. Lee et al., 2012] που βαθμονομούν το μοντέλο χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα μαζί. Στην παρούσα Διατριβή χρησιμοποιήθηκε η δεύτερη μέθοδος.

Τα υπόλοιπα που χρησιμοποιούνται στην αντικειμενική συνάρτηση υπολογίζονται ως εξής

$$r_i = T_i - \tilde{f}\left(p_i, \theta_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.82}$$

όπου η τριάδα (p_i,T_i,θ_i) αντιπροσωπεύει το i-οστό πειραματικό σημείο, r_i είναι το i-οστό υπόλοιπο και n είναι ο συνολικός αριθμός των πειραματικών σημείων. Η έκφραση $\tilde{f}\left(p, \theta\right)$ αντιστοιχεί στην εκάστοτε συνάρτηση του κριτηρίου αστοχίας που βαθμονομείται (π.χ. $\tilde{f}_H$, $\tilde{f}_{MW}$, κλπ.). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η τεχνική μπορεί να μην είναι η βέλτιστη προσέγγιση για την βαθμονόμηση. Ο λόγος είναι ότι η Εξ. (3.82) δεν λαμβάνει υπόψη την κλίμακα. Το ίδιο υπόλοιπο θα παράγει σημαντικά υψηλότερο σφάλμα, ως ποσοστό του υπολογιζόμενου T, στην περιοχή των εφελκυσμών και των χαμηλών τάσεων περιορισμού σε αντίθεση με την περιοχή των υψηλών τάσεων περιορισμού. Με άλλα λόγια, αυτή η τεχνική ευνοεί τα πειραματικά δεδομένα σε υψηλά και πολύ υψηλά θλιπτικά p. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι είτε να είναι διαθέσιμος μεγάλος αριθμός πειραματικών δεδομένων σε όλες τις περιοχές ενδιαφέροντος (θλιπτικές και εφελκυστικές), είτε να εφαρμοστεί μια μέθοδος σταθμισμένων μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων. Όμως, το τελευταίο ξεπερνά το σκοπό στης παρούσας Διατριβής.

Η αντικειμενική συνάρτηση που ελαχιστοποιείται δίδεται από την σχέση

$$\{x_j\} = \operatorname{argmin}\{SSR\} = \operatorname{argmin}\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right\} \tag{3.83}$$

όπου $x_j \quad (j = 1, 2, \ldots)$ είναι το διάνυσμα των παραμέτρων του υπό βαθμονόμηση κριτηρίου, SSR είναι το άθροισμα των τετραγώνων των υπολοίπων (sum of squared residuals) και τα r_i υπολογίζονται από την Εξ. (3.82). Για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης (3.83) χρησιμοποιήθηκε ο μη-γραμμικός αλγόριθμος περιοχής εμπιστοσύνης με αντανάκλαση (trust region reflective algorithm) [Coleman and Li, 1994, 1996].

3.4.2 Πειραματικά δεδομένα

Όλα τα κριτήρια αστοχίας βαθμονομήθηκαν τόσο σε πειραματικά δεδομένα συμβατικών δοκιμών από την βάση δεδομένων όσο και σε δεδομένα πραγματικών τριαξονικών (πολυαξονικών) δοκιμών από την διεθνή βιβλιογραφία. Στον Πίν. 3.1 παρουσιάζονται οι αρχικές πηγές των πολυαξονικών δεδομένων ενώ στον Πιν. 3.2 παρουσιάζονται οι πηγές από τις οποίες συλλέχθηκαν αυτά τα δεδομένα. Όσον αφορά τα συμβατικά πειράματα, στη βάση δεδομένων εμπεριέχεται σχετικά μεγάλος αριθμός πειραματικών δεδομένων. Στα πλαίσια, όμως, της παρούσας Διατριβής θα παρουσιασθούν μόνο τα αποτελέσματα για το μάρμαρο Lorano και το μάρμαρο Διονύσου. Ο λόγος είναι ότι στα συγκεκριμένα πετρώματα υπήρχαν διαθέσιμα δεδομένα και στον εφελκυσμό. Η σειρά, λοιπόν, των πειραματικών δεδομένων για κάθε μάρμαρο κρίθηκε πιο πλήρης ως προς άλλα πετρώματα. Στον Πιν. 3.3 δίδονται τα πειραματικά δεδομένα για το μάρμαρο Lorano. Τα πειραματικά δεδομένα για το μάρμαρο Διονύσου δίδονται στο Παράρτημα Β.

Πίνακας 3.1: Αρχικές πηγές δεδομένων πολυαξονικών δοκιμών.

Α/Α	Όνομα	Αρχική πηγή
1	Τραχείτης Mizuho	[Mogi, 1971]
2	Γρανίτης Westerly	[Haimson and Chang, 2000]
3	Δολομίτης Dunham	[Mogi, 1971]
4	Ασβεστόλιθος Solenhofen	[Mogi, 1971]
5	Ψαμμίτης Shirahama	[Takahashi and Koide, 1989]
6	Σκυρόδεμα (Μίγμα Α)	[Mills and Zimmerman, 1970]

Πίνακας 3.2: Πηγές συλλογής δεδομένων πολυαξονικών δοκιμών.

Α/Α	Όνομα	Πηγή συλλογής
1	Τραχείτης Mizuho	[Al-Ajmi and Zimmerman, 2005]
2	Γρανίτης Westerly	[Al-Ajmi and Zimmerman, 2005]
3	Δολομίτης Dunham	[Colmenares and Zoback, 2002]
4	Ασβεστόλιθος Solenhofen	[Colmenares and Zoback, 2002]
5	Ψαμμίτης Shirahama	[Colmenares and Zoback, 2002]
6	Σκυρόδεμα (Μίγμα Α)	[Mills and Zimmerman, 1970]

Πίνακας 3.3: Πειραματικά δεδομένα μαρμάρου Lorano.

σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	Τύπος δοκιμής
6.1	0	0	Μονοαξονικός εφελκυσμός
0	0	-73	Μονοαξονική θλίψη
0	0	-83	Μονοαξονική θλίψη
0	0	-89	Μονοαξονική θλίψη
-0.5	-0.5	-82	Τριαξονική θλίψη
-2	-2	-91	Τριαξονική θλίψη
-5	-5	-106	Τριαξονική θλίψη
-6	-6	-108	Τριαξονική θλίψη
-15	-15	-142	Τριαξονική θλίψη

Πίνακας 3.4: Αποτελέσματα βαθμονομήσεων στο μάρμαρο Lorano.

Παράμετροι	Πείραμα	MC	HB	LD	MW	H
σ_c (MPa)	-82	-74*	-79	-73*	-79	-79
σ_t (MPa)	6.1	12.7*	8.1*	12.7*	8.1	7.3*
σ_{bc} (MPa)		-74*	-79*	-119*	-79*	-79
c (MPa)		15.3		14.7		
ϕ (^{o})		45.1		46.0		
m			9.6			
e					0.500	
σ_0 (MPa)						7.4
SSR (MPa^2)		42.2	8.8	48.1	8.8	5.9

* Οι τιμές υπολογίστηκαν από το βαθμονομημένο μοντέλο.

Πίνακας 3.5: Αποτελέσματα βαθμονομήσεων στον τραχείτη Mizuho.

Παράμετροι	Πείραμα	MC	HB	LD	MW	H
σ_c (MPa)	-100	-143*	-103	-158*	-129	-125
σ_t (MPa)		39.3*	7.5*	64.8*	18.3	13.0*
σ_{bc} (MPa)		-143*	-103*	-188*	-167*	-138
c (MPa)		37.4		49.0		
ϕ (^{o})		34.6		26.3		
m			13.7			
e					0.559	
σ_0 (MPa)						13.1
SSR (MPa^2)		1560	1308	825	218	218

* Οι τιμές υπολογίστηκαν από το βαθμονομημένο μοντέλο.

3.4.3 Αποτελέσματα βαθμονομήσεων

Τα αποτελέσματα των βαθμονομήσεων για το μάρμαρο Lorano και τον τραχείτη Mizuho συνοψίζονται στους Πιν. 3.4 και 3.5, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα των βαθμονομήσεων για τις υπόλοιπες σειρές πειραμάτων δίδονται στο Παράρτημα Β. Στους ίδιους Πίνακες, αν είναι διαθέσιμες, δίδονται η πειραματική αντοχή σε μονοαξονική θλίψη σ_c, η πειραματική αντοχή σε μονοαξονικό εφελκυσμό σ_t και η πειραματική αντοχή σε διαξονική θλίψη σ_{bc}. Τέλος, η βαθμονόμηση του κάθε μοντέλου σημειώνεται στους Πίνακες με το δείκτη της αντίστοιχής συνάρτησής του $\tilde{f}$. Στο Σχ. 3.14 παρουσιάζονται τα βαθμονομημένα κριτήρια αστοχίας στο επίπεδο Rendulic για το μάρμαρο Lorano. Στο Σχ. 3.15 παρουσιάζονται τα ίχνη των βαθμονομημένων κριτηρίων στο επίπεδο $\sigma_2 - \sigma_3$, ομαδοποιημένα κατά την κύρια τάση σ_1, για τον τραχείτη Mizuho. Τα υπόλοιπα διαγράμματα για τις άλλες σειρές πειραμάτων παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β.

Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών SSR είναι ένας δείκτης για το πόσο καλά ένα μοντέλο προβλέπει τα πειραματικά αποτελέσματα. Όμως, από ποιοτική σκοπιά, ο δείκτης SSR δεν θα πρέπει να είναι το μόνο κριτήριο. Ένα μοντέλο μπορεί να προβλέπει τα πειραματικά αποτελέσματα πολύ καλά αλλά μπορεί να προβλέπει μη λογικές τιμές σε περιοχές όπου υπάρχει έλλειψη δεδομένων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τα κριτήρια με γραμμικούς μεσημβρινούς, όπου προβλέπουν πολύ υψηλές αντοχές σε εφελκυσμό. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η πρόβλεψη της αντοχής σε ισότροπη διαξονική θλίψη. Ένα μοντέλο είναι δυνατόν να προβλέπει καλά τα διαθέσιμα δεδομένα όμως να υπερεκτιμά την αντοχή σε ισότροπη διαξονική θλίψη.

Τα κριτήρια Mohr-Coulomb και Hoek-Brown δεν λαμβάνουν υπόψη την ενδιάμεση κύρια τάση. Συνεπώς, τα ίχνη τους στο επίπεδο $\sigma_2 - \sigma_3$ είναι ευθύγραμμα και δεν μπορούν να προβλέψουν τις πειραματικές αντοχές των πολυαξονικών πειραμάτων. Επίσης, προβλέπουν πάντα $\sigma_c = \sigma_{bc}$. Στις περισσότερες των περιπτώσεων παρουσιάζουν την χειρότερη πρόβλεψη με το κριτήριο Hoek-Brown να είναι καλύτερο λόγω των παραβολικών μεσημβρινών. Το συγκριτικό μειονέκτημα του κριτηρίου Mohr-Coulomb είναι οι γραμμικοί μεσημβρινοί που οδηγούν σε υπερεκτίμηση της αντοχής σε εφελκυσμό. Από την άλλη πλευρά, τα δύο αυτά κριτήρια είναι ευρέως διαδεδομένα στην Μηχανική Πετρωμάτων. Οι λόγοι είναι ότι: (α) είναι απλά, με την έννοια ότι χρειάζονται μόνο δύο εύκολα βαθμονομήσιμες παραμέτρους και (β) έχουν αναπτυχθεί εμπειρικές μέθοδοι μέσω συστημάτων κατάταξης της βραχομάζας όπως το RMR [Bieniawski, 1989], το Q [Barton et al., 1974] και το GSI [Hoek, 1994] που μετασχηματίζουν τις βαθμονομημένες παραμέτρους από την κλίμακα του εργαστηρίου στην κλίμακα του φυσικού προβλήματος, λαμβάνοντας υπόψη τις πάσης φύσεως ασυνέχειες που διασχίζουν το πέτρωμα.

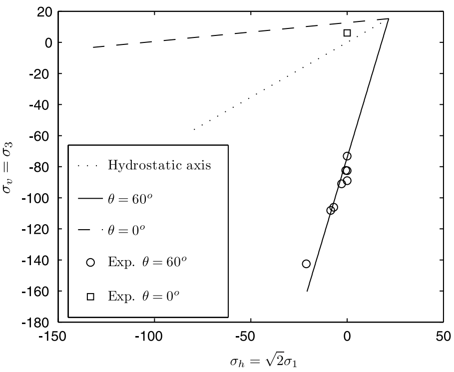
Το τροποποιημένο Lade-Duncan είναι επίσης ένα κριτήριο δύο παραμέτρων το οποίο λαμβάνει υπόψη την ενδιάμεση κύρια τάση. Παρόλα αυτά έχει μερικά βασικά μειονεκτήματα. Καταρχήν, συνεχώς προβλέπει υψηλές εφελκυστικές αντοχές, μεγαλύτερες ακόμη και από το Mohr-Coulomb, λόγω των γραμμικών μεσημβρινών. Κατά δεύτερον, το ίχνος του στο αποκλίνον επίπεδο παραμένει αυτοόμοιο με την μεταβολή της μέσης πίεσης. Αυτό μειώνει την ευελιξία της επιφάνειας αστοχίας και μπορεί να οδηγήσει σε κακή προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα (π.χ. γρανίτης Westerly, ψαμμίτης Shirahama). Σε γενικές γραμμές, η απόδοση του τροποποιημένου κριτηρίου Lade-Duncan είναι στη μέση συγκρινόμενη με τα άλλα μοντέλα.

Το κριτήριο Menétrey-Willam και το υπερβολικό κριτήριο είναι ανώτερα από τα προηγούμενα κριτήρια αλλά με το κόστος μιας επιπλέον τρίτης παραμέτρου. Οι μεσημβρινοί τους είναι καμπύλες και το ίχνος τους στο αποκλίνον επίπεδο μεταβάλλεται με την μεταβολή της μέσης πίεσης από τριγωνικό σε κυκλικό. Και τα δυο μοντέλα προβλέπουν πολύ καλά τα πειραματικά δεδομένα με το υπερβολικό κριτήριο να είναι λίγο καλύτερο στις τιμές SSR. Το υπερβολικό κριτήριο τείνει να είναι πιο συντηρητικό στις προβλέψεις των σ_c, σ_t και σ_{bc} ως προς το κριτήριο Menétrey-Willam.

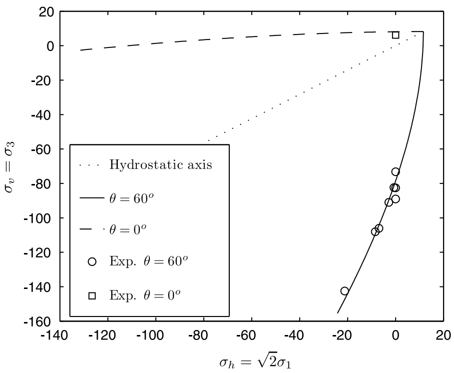
Παρόλα αυτά και τα δύο μοντέλα μπορεί να παρουσιάσουν προβληματική συμπεριφορά όταν βαθμονομούνται σε συμβατικά πειράματα ή σε σειρές πειραμάτων όπου τα δεδομένα περιορίζονται σε μια στενή ζώνη κοντά στον μεσημβρινό της θλίψης. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι η βαθμονόμηση του κριτηρίου Menétrey-Willam για το γρανίτη Westerly και η βαθμονόμηση του υπερβολικού κριτηρίου στο μάρμαρο Διονύσου. Ειδικά για την δεύτερη περίπτωση, η βαθμονόμηση έγινε χρησιμοποιώντας την φραγμένη παράμετρο β αντί της παραμέτρου σ_{bc}. Ενώ, λοιπόν, το μοντέλο προβλέπει πολύ καλά τις πειραματικές τιμές και έχει το καλύτερο SSR, η βαθμονόμηση κρίνεται κακή λόγω της υπερβολικά υψηλής πρόβλεψης στην αντοχή σε ισότροπη διαξονική θλίψη. Ανάλογη υψηλή πρόβλεψη γίνεται και για την ισότροπη διαξονική αντοχή του γρανίτη Westerly από το κριτήριο Menétrey-Willam. Ο λόγος είναι ότι δεν υπάρχουν δεδομένα εκτός και μακριά από τον μεσημβρινό της θλίψης που να είναι μακριά και από την περιοχή του εφελκυσμού. Έτσι, ο αλγόριθμος των ελαχίστων τετραγώνων βρίσκει μεν την βέλτιστη αριθμητική λύση αλλά αυτή δεν είναι ρεαλιστική. Η λύση για αυτές τις περιπτώσεις είναι να γίνει βαθμονόμηση με την παράμετρο σ_{bc} και να δοθεί κατά εκτίμηση ένα εύρος τιμών μέσα στο οποίο θα γίνει αναζήτηση της βέλτιστης λύσης. Ασφαλώς στην περίπτωση του κριτηρίου Menétrey-Willam η διαδικασία αυτή είναι πιο δύσκολη λόγω της μη φυσικής ερμηνείας της παραμέτρου e.

Στην περιοχή των εφελκυσμών και για την περίπτωση που υπάρχει έλλειψη πειραματικών δεδομένων υπάρχει μια αβεβαιότητα ως προς τις προβλέψεις. Παρόλα αυτά, το υπερβολικό κριτήριο, το Menétrey - Willam και το Hoek-Brown προβλέπουν πολύ πιο ρεαλιστικές τιμές σε σχέση με το Mohr-Coulomb και το τροποποιημένο Lade-Duncan. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα από τις βαθμονομήσεις των πολυαξονικών δεδομένων.

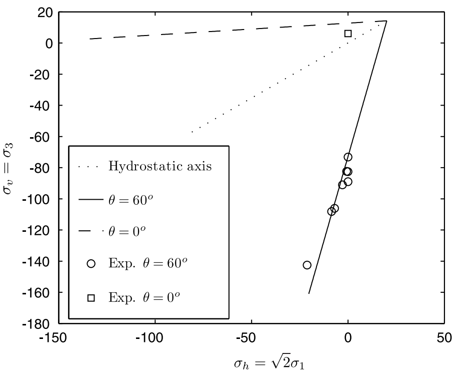
Η παράμετρος σ_0 του υπερβολικού κριτηρίου είναι πολύ δύσκολο να μετρηθεί. Όμως, όπως φαίνεται και από τα αποτελέσματα των βαθμονομήσεων, επειδή το μοντέλο παρουσιάζει "ισχυρή" συμπεριφορά Rankine στην περιοχή των εφελκυσμών η παράμετρος σ_0 μπορεί να τεθεί ίση με την αντοχή σε μονοαξονικό εφελκυσμό σ_t. Τέλος, οι ασύμπτωτες του υπερβολικού κριτηρίου εξασφαλίζουν, από μαθηματικής απόψεως, καλά ορισμένη συμπεριφορά σε πολύ υψηλές τάσεις περιορισμού.



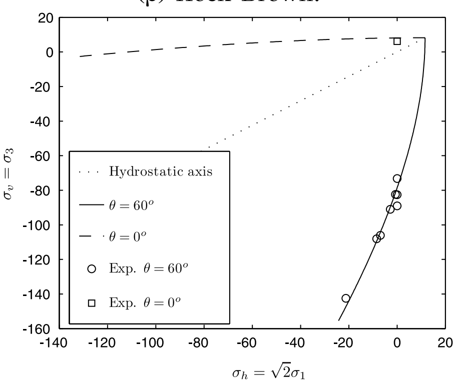
(α) Mohr-Coulomb.



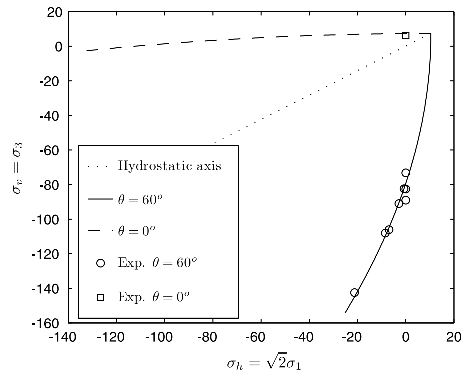
(β) Hoek-Brown.



(γ) Τροπ. Lade-Duncan.

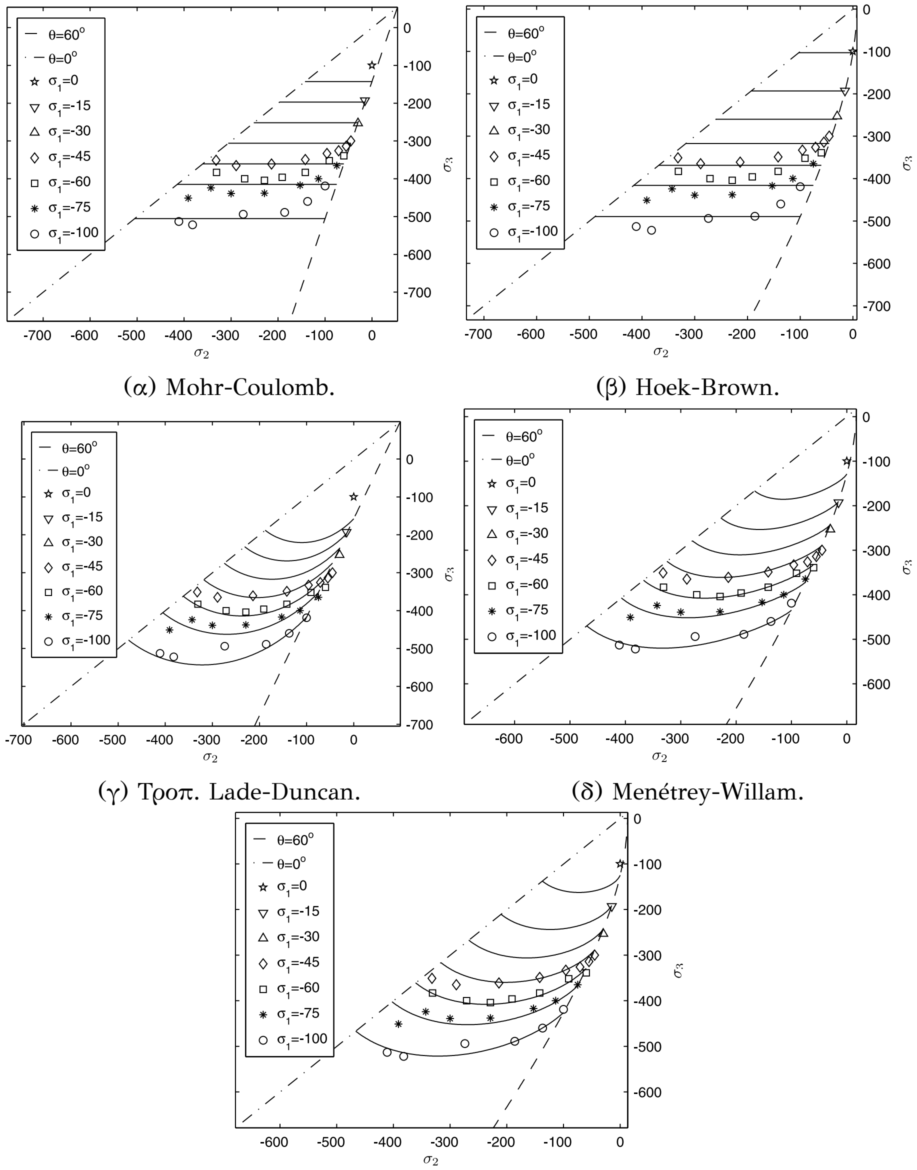


(δ) Menétrey-Willam.



(ε) Υπερβολικό κριτήριο.

Σχήμα 3.14: Επίπεδο Rendulic για το μάρμαρο Lorano.



(α) Mohr-Coulomb.

(β) Hoek-Brown.

(γ) Τροπ. Lade-Duncan.

(δ) Menétrey-Willam.

(ε) Υπερβολικό κριτήριο.

Σχήμα 3.15: Επίπεδο σ_2-σ_3 για τον τραχείτη Mizuho.

Κεφάλαιο 4

Ελαστοπλαστικό καταστατικό μοντέλο

4.1 Θεωρία ελαστικότητας

Για ένα στοιχειώδη όγκο ενός σώματος το οποίο βρίσκεται σε ισορροπία, ισχύουν καταρχήν οι τρείς εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{4.1}$$

Για τον ίδιο στοιχειώδη όγκο ισχύουν επίσης και οι έξι Εξ.(2.23) που συνδέουν τις τροπές με τις μετατοπίσεις. Το σύστημα των παραπάνω εννέα εξισώσεων έχει συνολικά δεκαπέντε αγνώστους (έξι τάσεις, έξι παραμορφώσεις και τρείς μετατοπίσεις) και απαιτεί άλλες έξι εξισώσεις για την επίλυσή του. Αυτές οι επιπλέον εξισώσεις ονομάζονται καταστατικές εξισώσεις των υλικών και συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις.

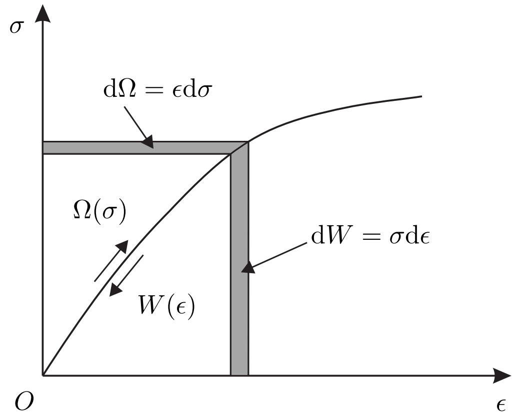
Για ένα γραμμικά ελαστικό υλικό, η γενική σχέση που συνδέει τις τάσεις με τις παραμορφώσεις είναι

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{4.2}$$

όπου ο τανυστής τέταρτης τάξης C_{ijkl} είναι το μητρώο των ελαστικών παραμέτρων του υλικού και ονομάζεται τανυστής δυστροπίας (stiffness tensor). Η εξίσωση (4.2) ονομάζεται *γενικευμένος νόμος του Hooke* και είναι η απλούστερη γενίκευση της γραμμικής σχέσης που παρατηρήθηκε μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης στο πείραμα εφελκυσμού που εκτέλεσε ο Hooke. Ο τανυστής C_{ijkl} στην γενική του μορφή έχει 81 σταθερές, όμως λόγω των συμμετρικών τανυστών σ_{ij} και ϵ_{ij} οι σταθερές μειώνονται σε 36. Επιπλέον, αν θεωρηθεί ισότροπο μέσο, τότε απαιτούνται μόλις δύο ανεξάρτητες σταθερές για να περιγράψουν την ελαστική συμπεριφορά του υλικού. Τότε, ο τανυστής C_{ijkl} παίρνει την μορφή

$$C_{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{2\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right] \tag{4.3}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young και ν είναι ο λόγος του Poisson. Σε αυτήν την περίπτωση, η Εξ. (4.2) μπορεί να αντιστραφεί και



Σχήμα 4.1: Ενέργεια παραμόρφωσης W και ελαστικό δυναμικό Ω.

να γραφεί ως

$$\epsilon_{ij} = D_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{4.4}$$

όπου ο τανυστής ενδοτικότητας D_{ijkl} (compliance tensor) είναι ο αντίστροφος του C_{ijkl} και δίδεται από την έκφραση

$$D_{ijkl} = \frac{1+\nu}{2E}\left[-\frac{2\nu}{(1+\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right] \tag{4.5}$$

Το μέτρο Ελαστικότητας E και ο λόγος του Poisson ν, όπως συμβαίνει σε πολλά υλικά, μπορεί να μην είναι σταθερές ποσότητες αλλά να εξαρτώνται από την τάση ή/και την παραμόρφωση. Στην περίπτωση αυτή, ο γραμμικός νόμος του Hooke δεν είναι επαρκής, όμως, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η μη γραμμική προσέγγιση των υπερελαστικών ή υλικών τύπου Green. Η καταστατική εξίσωση των υπερελαστικών υλικών δίδεται από την σχέση

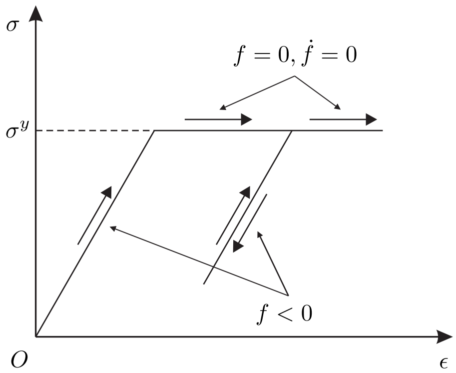
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} \tag{4.6}$$

όπου $W(\epsilon_{ij})$ είναι η συνάρτηση ή αλλιώς δυναμικό πυκνότητας της ενέργειας παραμόρφωσης (strain energy density) και για την μονοαξονική περίπτωση είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $\sigma - \epsilon$ (Σχ. 4.1). Αντίστοιχα μπορεί να οριστεί ότι οι παραμορφώσεις προκύπτουν από ένα ελαστικό δυναμικό των τάσεων

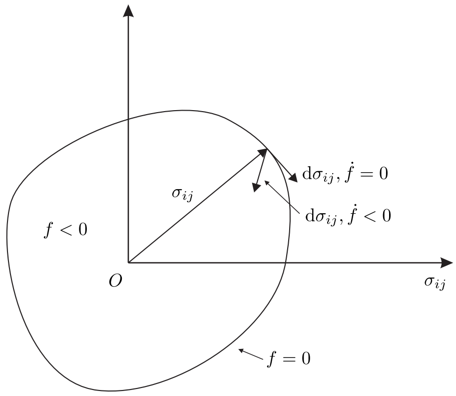
$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.7}$$

όπου Ω η συνάρτηση του ελαστικού δυναμικού. Ο καταστατικός νόμος των υπερελαστικών υλικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε υλικά τα οποία αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας με την αύξηση του φορτίου [π.χ. Sulem et al., 1999].

Η προσέγγιση των υπερελαστικών υλικών μπορεί να περιγράψει καλύτερα και πιο ρεαλιστικά την συμπεριφορά των πετρωμάτων με κόστος, όμως, την αυξημένη πολυπλοκότητα του καταστατικού νόμου. Με σκοπό να διατηρηθεί το ελαστοπλαστικό μοντέλο όσο το δυνατόν πιο απλό, στην παρούσα



(α) Καμπύλη φόρτισης.



(β) Επιφάνεια διαρροής.

Σχήμα 4.2: Ελαστικό - τέλεια πλαστικό υλικό.

Διατριβή θα χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση του γραμμικού και ισότροπου νόμου του Hooke. Έτσι, θα θεωρηθεί ότι οι δύο σταθερές παράμετροι E και ν μπορούν να προσομοιώσουν αρκετά ικανοποιητικά την ελαστική συμπεριφορά.

4.2 Θεωρία πλαστικότητας

Η θεωρία της πλαστικότητας πρωτοεμφανίστηκε σε μια σειρά δημοσιεύσεων του Tresca μεταξύ 1864 και 1872 [Tresca, 1864] που αφορούσαν την μηχανική συμπεριφορά των μετάλλων. Στην παρούσα Διατριβή θα περιγραφούν μόνον οι πολύ βασικές αρχές της θεωρίας για την οποία υπάρχει εκτενής διεθνής βιβλιογραφία [π.χ. Katchanov, 1971; Chen and Han, 1988; Hill, 1998]. Επίσης, θα θεωρηθεί ότι η πλαστική παραμόρφωση είναι ισότροπη και ότι οι άξονες του χώρου των κυρίων τάσεων είναι συγγραμμικοί με τους άξονες του χώρου των κυρίων πλαστικών τροπών.

4.2.1 Τέλεια πλαστικά υλικά

Η απλούστερη περίπτωση που εξετάζεται από την θεωρία της πλαστικότητας αφορά ιδανικά υλικά τα οποία θεωρούνται ελαστικά - τέλεια πλαστικά. Σε ένα τέτοιο υλικό όταν η φόρτιση φθάσει ένα όριο, το οποίο ονομάζεται όριο διαρροής, τότε το υλικό παύει να είναι ελαστικό και παραλαμβάνει μόνο πλαστικές παραμορφώσεις (Σχ. 4.2α). Για τα τέλεια πλαστικά υλικά το όριο διαρροής ταυτίζεται με το όριο αστοχίας. Το όριο διαρροής για οποιαδήποτε εντατική κατάσταση περιγράφεται μαθηματικά από την συνάρτηση διαρροής

$$f(\sigma_{ij}) = F'(\sigma_{ij}) - R = 0 \tag{4.8}$$

Η συνάρτηση διαρροής απεικονίζεται γραφικά στον χώρο των τάσεων με μία επιφάνεια (Σχ. 4.2β). Για τα τέλεια πλαστικά υλικά η συνάρτηση διαρροής θεωρείται αμετάβλητη. Συνεπώς η παράμετρος R είναι μια σταθερά και η επιφάνεια διαρροής παραμένει ακίνητη στο χώρο των τάσεων.

Για να παραλάβει το υλικό πλαστικές παραμορφώσεις θα πρέπει το σημείο που εκφράζει την εντατική κατάσταση στον χώρο των τάσεων να είναι πάνω στην επιφάνεια διαρροής. Αν το σημείο σ_{ij} είναι επί της επιφάνειας διαρροής και επιβληθεί μια απειροελάχιστη μεταβολή στην τάση $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ τότε το υλικό θα συμπεριφερθεί ελαστικά ή πλαστικά ανάλογα με την κατεύθυνση που θα κινηθεί το σημείο σ_{ij}. Για ένα τέλεια πλαστικό υλικό το σημείο σ_{ij} δεν μπορεί να κινηθεί εκτός της επιφάνειας διαρροής. Συνεπώς, αν θα κινηθεί εφαπτομενικά επί της επιφάνειας διαρροής τότε θα επιφέρει επιπλέον πλαστική παραμόρφωση στο υλικό και θεωρείται ότι είναι συνθήκη φόρτισης. Η κατάσταση αυτή εκφράζεται από τις σχέσεις

$$f(\sigma_{ij}, R) = 0 \quad \text{και} \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}\sigma_{ij} = 0 \tag{4.9}$$

Αντίθετα, η συνθήκη αποφόρτισης είναι όταν το σημείο κινείται προς το εσωτερικό της καμπύλης

$$f(\sigma_{ij}, R) = 0 \quad \text{και} \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}\sigma_{ij} < 0 \tag{4.10}$$

Κάθε μεταβολή $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ επιφέρει και μια μεταβολή $\mathrm{d}\epsilon_{ij}$ στις παραμορφώσεις. Η μεταβολή αυτή μπορεί να αποσυντεθεί στο τμήμα που αναφέρεται στις ελαστικές παραμορφώσεις και στο τμήμα που αναφέρεται στις πλαστικές παραμορφώσεις

$$\mathrm{d}\epsilon_{ij} = \mathrm{d}\epsilon^{e}_{ij} + \mathrm{d}\epsilon^{p}_{ij} \tag{4.11}$$

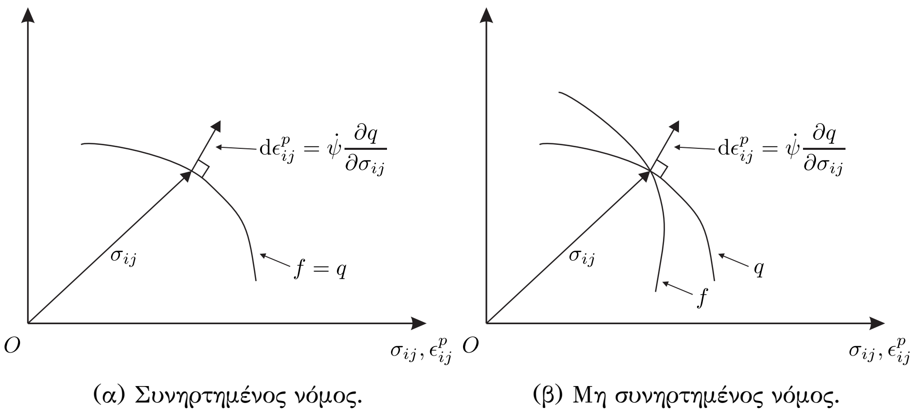
Η καταστατική εξίσωση του Hooke (4.2) ή κάποιου μη γραμμικού ελαστικού μοντέλου δίδει την σχέση των ελαστικών παραμορφώσεων της Εξ. (4.11) με τις τάσεις. Η σχέση των τάσεων με τις πλαστικές παραμορφώσεις δίδεται από τον νόμο διαρροής. Όπως η ελαστική παραμόρφωση μπορεί να εξαχθεί παραγωγίζοντας το ελαστικό δυναμικό ως προς την τάση (βλ. υλικό Green), έτσι και η πλαστική παραμόρφωση δίδεται από την παραγώγιση ενός πλαστικού δυναμικού $q(\sigma_{ij})$ ως προς την τάση [von Mises, 1928]

$$\mathrm{d}\epsilon^{p}_{ij} = \dot{\psi} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.12}$$

όπου το $\dot{\psi}$ είναι θετική παράμετρος η οποία ονομάζεται πλαστικός πολλαπλασιαστής. Το $\dot{\psi}$ είναι διάφορο του μηδενός μόνο όταν το υλικό παραμορφώνεται πλαστικά. Η τελεία πάνω από την μεταβλητή $\dot{\psi}$ υποδηλώνει παράγωγο ως προς τον χρόνο, όμως, επειδή στην παρούσα Διατριβή θεωρείται ότι η συμπεριφορά του υλικού δεν εξαρτάται από τον χρόνο, υποδηλώνει απειροελάχιστη μεταβολή. Το πλαστικό δυναμικό $q(\sigma_{ij})$ απεικονίζεται γραφικά στον χώρο των τάσεων από μια επιφάνεια. Από την εξίσωση (4.12) προκύπτει ότι το διάνυσμα της πλαστικής ροής $\mathrm{d}\epsilon^{p}_{ij}$ είναι πάντα κάθετο στην επιφάνεια του πλαστικού δυναμικού (Σχ. 4.3).

Όταν το πλαστικό δυναμικό ταυτίζεται με την συνάρτηση διαρροής ($f = q$), τότε η εξίσωση (4.12) γίνεται

$$\mathrm{d}\epsilon^{p}_{ij} = \dot{\psi} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.13}$$



Σχήμα 4.3: Επιφάνεια πλαστικού δυναμικού.

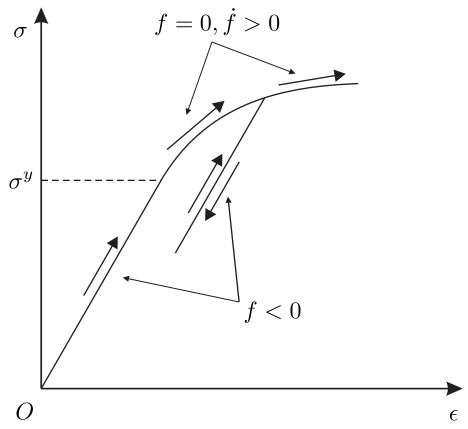
και ονομάζεται *συνηρτημένος νόμος διαρροής* (associated flow rule) επειδή η πλαστική ροή συνδέεται απευθείας με το κριτήριο διαρροής ή αστοχίας (Σχ. 4.3α). Αντίθετα, όταν $f \neq q$ τότε η εξίσωση (4.12) ονομάζεται *μη συνηρτημένος νόμος διαρροής* (non associative flow rule) (Σχ. 4.3β). Ως συνάρτηση διαρροής μπορούν να χρησιμοποιηθούν όλα τα κριτήρια αστοχίας που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 3.

Η πλαστική παραμόρφωση είναι μη αντιστρεπτή διαδικασία, συνεπώς το έργο που καταναλώνεται στην πλαστική παραμόρφωση σε ένα κλειστό κύκλο φόρτισης είναι πάντα θετικό. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για να είναι το έργο θετικό θα πρέπει η επιφάνεια διαρροής να είναι κυρτή. Επίσης, για τις περιπτώσεις που χρησιμοποιείται συνηρτημένος νόμος διαρροής μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα ελαστοπλαστικό πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει πάντα μοναδική λύση [Drucker, 1951, 1960].

4.2.2 Πλαστικά υλικά με κράτυνση

Το σύνολο σχεδόν των υλικών και ειδικά τα πετρώματα, τα εδάφη και το σκυρόδεμα δεν συμπεριφέρονται ιδανικά όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο Υποκεφάλαιο. Όταν η τάση φόρτισης φθάσει στο όριο διαρροής, τότε περαιτέρω αύξηση της τάσης επιφέρει τόσο ελαστικές όσο και πλαστικές παραμορφώσεις μέχρι να επιτευχθεί η τάση αστοχίας. Για να επιτευχθεί επιπλέον πλαστική παραμόρφωση απαιτείται μεγαλύτερη τάση από το αρχικό όριο διαρροής. Τα υλικά που παρουσιάζουν αυτήν την συμπεριφορά ονομάζονται πλαστικά υλικά με κράτυνση (Σχ. 4.4).

Για την μελέτη των πλαστικών υλικών με κράτυνση έχουν αναπτυχθεί δύο προσεγγίσεις. Η πρώτη ονομάζεται *θεωρία παραμόρφωσης* (deformation theory) και θεωρεί ότι η εντατική κατάσταση καθορίζει μονοσήμαντα την κατάσταση των παραμορφώσεων με την παραδοχή ότι η πλαστική παραμόρφωση συνεχίζεται. Η θεωρία αυτή είναι απλή και χρήσιμη μόνο για περιπτώσεις μονοτονικής φόρτισης επειδή η συμπεριφορά του υλικού δεν εξαρτάται από την διαδρομή του τασικού σημείου στο χώρο των τάσεων. Στην παρούσα Διατριβή θα χρησιμοποιηθεί η δεύτερη προσέγγιση η οποία είναι πιο πολύπλοκη άλλα έχει πλεονεκτήματα ως προς την πρώτη ειδικά σε



Σχήμα 4.4: Καμπύλη φόρτισης υλικού με κράτυνση.

αλγορίθμους αριθμητικής επίλυσης. Σύμφωνα με την δεύτερη προσέγγιση, που ονομάζεται *προσαυξητική θεωρία* (incremental theory) ή *θεωρία ροής* (flow theory), η αύξηση της πλαστικής παραμόρφωσης σε διαδοχικές απειροελάχιστες ποσότητες $d\epsilon_{ij}^p$ συσχετίζεται τόσο με την προηγούμενη εντατική κατάσταση σ_{ij} όσο και με την μεταβολή $\mathrm{d}\sigma_{ij}$.

Η βασική διαφορά των πλαστικών υλικών με κράτυνση σε σχέση με τα τέλεια πλαστικά υλικά είναι ότι η επιφάνεια διαρροής μπορεί να μεταβάλλεται, ενώ το τασικό σημείο σ_{ij} μπορεί να κινηθεί και με φορά έξω από την επιφάνεια διαρροής. Η συμπεριφορά της επιφάνειας διαρροής καθορίζεται από τον κανόνα κράτυνσης (hardening rule) και γενικά περιγράφεται από μια σχέση της μορφής

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, R) = F'(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) - R^2(\epsilon_p) = 0 \tag{4.14}$$

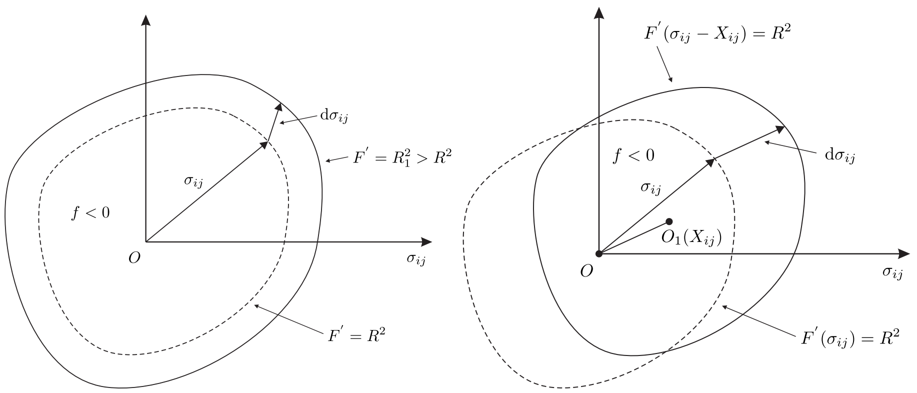
όπου R είναι ο κανόνας κράτυνσης και καθορίζει το μέγεθος της επιφάνειας διαρροής ενώ η συνάρτηση $F'(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p)$ καθορίζει το σχήμα της. Ο κανόνας κράτυνσης R εκφράζεται ως συνάρτηση της ϵ_p η οποία ονομάζεται *ενεργή παραμόρφωση* (effective strain) και εξαρτάται από την τασική διαδρομή. Με άλλα λόγια, η ϵ_p καταγράφει το μη αντιστρεπτό ιστορικό των πλαστικών παραμορφώσεων και καθορίζει τη θέση της επιφάνειας διαρροής στο χώρο των κυρίων τάσεων.

Μια συνήθης έκφραση για την ενεργή παραμόρφωση δίδεται από την σχέση

$$\mathrm{d}\epsilon_p = C\sqrt{\mathrm{d}\epsilon_{ij}^p \mathrm{d}\epsilon_{ij}^p} \tag{4.15}$$

Η παράμετρος C μπορεί να υπολογιστεί από την συνάρτηση της επιφάνειας διαρροής και την θεώρηση ενός πειράματος μονοαξονικής φόρτισης. Για παράδειγμα, για τα υλικά τύπου von Mises $C = \sqrt{2/3}$.

Τα απλούστερα κινηματικά μοντέλα που καθορίζουν τον τρόπο που μεταβάλλεται η επιφάνεια διαρροής είναι το μοντέλο της ισότροπης κράτυνσης, το μοντέλο της κινηματικής κράτυνσης και ο συνδυασμός τους. Κατά το μοντέλο της ισότροπης κράτυνσης η επιφάνεια διαρροής μεγεθύνεται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις καθώς αυξάνεται η πλαστική παραμόρ-



(α) Ισότροπη κράτυνση. (β) Κινηματική κράτυνση.

Σχήμα 4.5: Κινηματικοί μηχανισμοί κράτυνσης.

φωση (Σχ. 4.5α). Το μέγεθος της επιφάνειας διαρροής καθορίζεται από την τιμή του R^2 το οποίο εξαρτάται από το ιστορικό της πλαστικής τροπής ϵ_p

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, R) = F'(\sigma_{ij}) - R^2(\epsilon_p) = 0 \tag{4.16}$$

Το μοντέλο της κινηματικής κράτυνσης θεωρεί ότι η επιφάνεια διαρροής μετακινείται στο χώρο των τάσεων καθώς αυξάνεται η πλαστική τροπή χωρίς να αλλάζει το σχήμα της (Σχ. 4.5β). Η κίνηση αυτή περιγράφεται από την σχέση [Prager, 1955, 1956]

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, R) = F'(\sigma_{ij} - X_{ij}) - R^2 = 0 \tag{4.17}$$

όπου το R είναι σταθερά και X_{ij} είναι το κέντρο της επιφάνειας διαρροής (στην διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται ως υποστηρικτική τάση (back stress)). Το μικτό μοντέλο αποτελείται από τον συνδυασμό των δύο προηγούμενων και δίδεται από την σχέση

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, R) = F'(\sigma_{ij} - X_{ij}) - R^2(\epsilon_p) = 0 \tag{4.18}$$

Η σύνδεση μεταξύ της συνάρτησης f και της σχέσης των τάσεων με τις πλαστικές παραμορφώσεις γίνεται μέσω του νόμου διαρροής (βλ. Εξ. (4.12)). Η συνάρτηση f υπεισέρχεται στον υπολογισμό της παραμέτρου ψ. Για τον υπολογισμό της $\dot{\psi}$ χρησιμοποιείται η *συνθήκη συνέπειας* (consistency condition) [π.χ. Chen and Han, 1988]

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p}\mathrm{d}\epsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\epsilon_p}\mathrm{d}\epsilon_p = 0 \tag{4.19}$$

Αν χρησιμοποιηθεί η Εξ. (4.15) ως ενεργή παραμόρφωση, τότε προκύπτει

$$\dot{\psi} = \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}C_{ijkl}\mathrm{d}\epsilon_{kl} \tag{4.20}$$

όπου

$$h = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}C_{ijkl}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\epsilon_p}C\sqrt{\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}} \tag{4.21}$$

Η Εξ. (4.20) εκφράζει την μεταβολή της βαθμωτής παραμέτρου $\dot{\psi}$ ως συνάρτηση της μεταβολής της παραμόρφωσης $\mathrm{d}\epsilon_{ij}$. Αντίστοιχα, η ποσότητα $\dot{\psi}$ μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση της μεταβολής της τάσης $\mathrm{d}\sigma_{ij}$. Από την αρχή της γραμμικότητας [Drucker, 1960] το $\dot{\psi}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\kappa}\partial f = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} \tag{4.22}$$

όπου το κ ονομάζεται μέτρο κράτυνσης (hardening modulus). Από τις Εξ. (4.22) και (4.12) ο νόμος διαρροής παίρνει την μορφή

$$\mathrm{d}\epsilon^p_{ij} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\mathrm{d}\sigma_{kl} \tag{4.23}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (4.22) η συνθήκη της συνέπειας μπορεί να γραφεί ως

$$\mathrm{d}f = \partial f + \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p_{ij}}\frac{\partial f}{\kappa}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\epsilon_p}\frac{C\partial f}{\kappa}\sqrt{\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}} = 0 \tag{4.24}$$

από όπου προκύπτει

$$\kappa = -\frac{\partial f}{\partial \epsilon^p_{ij}}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\epsilon_p}C\sqrt{\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}} \tag{4.25}$$

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από την Εξ. (4.25), η παράμετρος κ εξαρτάται μόνο από τον κινηματικό μηχανισμό της ισότροπης κράτυνσης. Από τις Εξ. (4.25) και (4.21) το h μπορεί, επίσης, να εκφραστεί ως συνάρτηση της παραμέτρου κ

$$h = \kappa + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}C_{ijkl}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kl}} \tag{4.26}$$

Εφόσον υπολογιστεί η παράμετρος h τότε από τον νόμο διαρροής μπορεί να υπολογιστεί η μεταβολή της πλαστικής παραμόρφωσης για δεδομένη μεταβολή της ολικής παραμόρφωσης $\mathrm{d}\epsilon_{ij}$

$$\mathrm{d}\epsilon^p_{ij} = \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}C_{mnst}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\epsilon_{st} \tag{4.27}$$

Τέλος, η μεταβολή του τανυστή των τάσεων μπορεί να υπολογιστεί από την Εξ. (4.2) σε συνδυασμό με τις Εξ. (4.11) και (4.27)

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = \left(C_{ijst} - \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}C_{mnst}C_{ijkl}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kl}}\right)\mathrm{d}\epsilon_{st} \tag{4.28}$$

ή διαφορετικά

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = C^{ep}_{ijkl}\mathrm{d}\epsilon_{kl} \tag{4.29}$$

όπου το C^{ep}_{ijkl} είναι ο τανυστής των ελαστοπλαστικών παραμέτρων του υλικού (tangent elastoplastic stiffness tensor). Αν χρησιμοποιηθεί μη συνηρτημένος νόμος διαρροής, τότε το C^{ep}_{ijkl} είναι μη συμμετρικός τανυστής.

Τέλος, η ελαστοπλαστική συμπεριφορά του υλικού εξαρτάται από την θέση του τασικού σημείου σ_{ij} και από την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathrm{d}\sigma_{ij}$.

Όταν το τασικό σημείο βρίσκεται επί της επιφάνειας διαρροής, τότε: (1) αν το $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ κινείται με κατεύθυνση προς τα έξω προκαλείται ελαστοπλαστική παραμόρφωση και θεωρείται φόρτιση, (2) αν κινείται εφαπτομενικά τότε θεωρούνται ουδέτερες συνθήκες και (3) αν κινείται προς το εσωτερικό τότε θεωρείται αποφόρτιση. Οι συνθήκες φόρτισης συνοψίζονται στην παρακάτω σύνθετη συνάρτηση

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}\sigma_{ij} \begin{cases} > 0, \text{φόρτιση} \\ = 0, \text{ουδέτερη φόρτιση} \\ < 0, \text{αποφόρτιση} \end{cases} \tag{4.30}$$

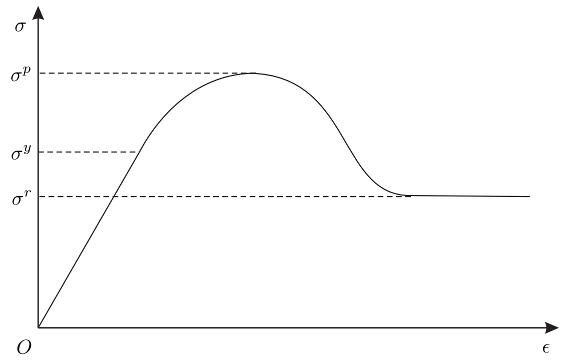
Για τις περιπτώσεις ανάπτυξης καταστατικών μοντέλων για πετρώματα και σκυρόδεμα έχει παρατηρηθεί ότι ο συνηρτημένος νόμος διαρροής υπερεκτιμά την ογκομετρική παραμόρφωση του υλικού στα θλιπτικά πεδία. Συνεπώς, συνίσταται να χρησιμοποιείται μη συνηρτημένος νόμος διαρροής. Επίσης, ένα από τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας διαρροής είναι ότι μπορεί να είναι αρχικά κλειστή (capped) και προς τις δύο κατευθύνσεις του υδροστατικού άξονα. Έτσι μπορούν να προβλεφθούν οι πλαστικές παραμορφώσεις λόγω υδροστατικών θλιπτικών φορτίσεων.

Στην διεθνή βιβλιογραφία μπορεί να βρεθεί μεγάλος αριθμός ελαστοπλαστικών καταστατικών μοντέλων που προσομοιώνουν την ελαστοπλαστική συμπεριφορά των πετρωμάτων και του σκυροδέματος [π.χ. Chen and Chen, 1975; Dragon and Mróz, 1979; Lin et al., 1987; Pramono and Willam, 1989; Etse and Willam, 1994; Pekau and Zhang, 1994; Lade and Kim, 1995; Menétrey and Willam, 1995; Feenstra and de Borst, 1996; Kang, 1997; Grassl et al., 2002, κλπ.]. Ένα παράδειγμα ελαστοπλαστικού μοντέλου, το οποίο αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας Διατριβής με βάση ένα υπερβολικό κριτήριο πέντε παραμέτρων, μπορεί να βρεθεί στο Stavropoulou et al. [2012].

4.2.3 Πλαστικά υλικά με χαλάρωση

Ένα ελαστοπλαστικό υλικό όπως τα πετρώματα, τα οιονεί ψαθυρά εδάφη και το σκυρόδεμα αυξάνει σταδιακά την τάση διαρροής του μέχρι να επιτευχθεί η τάση αστοχίας. Μετά την αστοχία παρατηρείται μια βαθμιαία μείωση των φορτίων που μπορεί να παραλάβει το υλικό. Ταυτόχρονα μειώνονται και οι ελαστικές του παράμετροι έως ότου επιτευχθεί μια υπολειπόμενη αντοχή (Σχ. 4.6). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται χαλάρωση. Η καμπύλη φόρτισης μετά την αστοχία παρουσιάζει ιδιαιτερότητες στην μοντελοποίηση. Αφενός οι μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις περιορίζονται σε μια ζώνη διάτμησης και αφετέρου η μορφή της καμπύλης είναι αποτέλεσμα της γεωμετρίας του υλικού σε συνδυασμό με το φορτίο [π.χ. Sinha et al., 1964; van Mier, 1984]. Οι βασικές εξισώσεις της θεωρίας πλαστικότητας που αναπτύχθηκαν προηγουμένως έχουν ως βάση τον χώρο των τάσεων και βασίζονται στο αξίωμα του Drucker. Έτσι, λειτουργούν καλά μέχρι το σημείο αστοχίας όμως δεν μπορούν να περιγράψουν το φαινόμενο της χαλάρωσης.

Για την μοντελοποίηση του φαινομένου της χαλάρωσης έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις. Μια προσέγγιση είναι τα ελαστοπλαστικά μοντέλα που βασίζονται στον χώρο των παραμορφώσεων και στο αξίωμα του Il'yushin [π.χ. Il'yushin, 1961; Naghdi and Trapp, 1975; Yoder and Iwan,



Σχήμα 4.6: Καμπύλη φόρτισης υλικού με χαλάρωση.

1981; Casey and Naghdi, 1983]. Μια άλλη προσέγγιση, η οποία παρουσιάζει ενδιαφέρον, είναι η θεωρία της *Μηχανικής της Φθοράς* (Damage Mechanics) [π.χ. Katchanov, 1986; Lemaitre, 1996; Krajcinovic, 1996; Voyiadjis et al., 1998; Lemaitre and Desmorat, 2005].

Η θεωρία της Μηχανικής της Φθοράς αναπτύχθηκε για να περιγράψει την δημιουργία και διάδοση ελαττωμάτων δομής, όπως μικρορωγμές και πόροι, τα οποία επηρεάζουν την μηχανική συμπεριφορά και εν τέλει οδηγούν στην δημιουργία μακρορωγμών και στην αστοχία Για την περιγραφή της φθοράς στα πλαίσια της Μηχανικής του Συνεχούς απαιτείται, καταρχήν, ο ορισμός του αντιπροσωπευτικού στοιχειώδους όγκου του υλικού (Representative Volume Element [RVE]). Ο όγκος αυτός είναι τόσο μεγάλος ώστε οι μικρορωγμές και οι πόροι είναι πολύ μικροί, με συνέπεια οι επιπτώσεις τους στο υλικό να μπορούν να ομογενοποιηθούν και να περιγραφούν από εσωτερικές μεταβλητές. Η φθορά μέσα σε αυτόν τον όγκο θεωρείται ότι μπορεί να περιγραφεί από τον λόγο της επιφανειακής πυκνότητας των ρωγμών και των πόρων σε ένα επίπεδο που τέμνει τον RVE (Σχ. 4.7)

$$D_{\vec{n}} = \frac{\delta S_D}{\delta S} \tag{4.31}$$

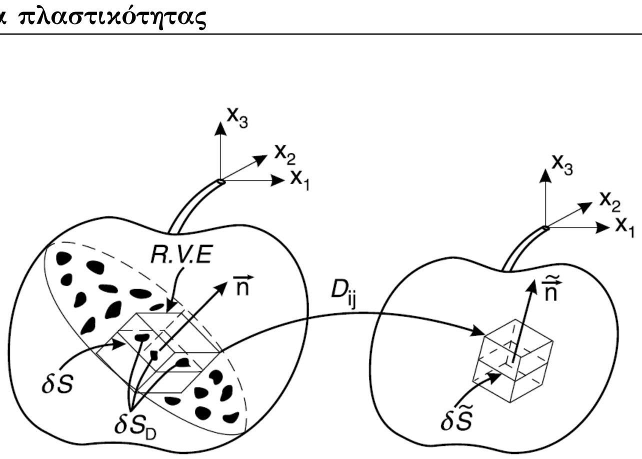
όπου $D_{\vec{n}}$ η παράμετρος της φθοράς, $\vec{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου, δS_D το εμβαδό των μικρορωγμών και πόρων και δS το εμβαδό του επιπέδου που τέμνει στον στοιχειώδη όγκο.

Αν η φθορά είναι ισότροπη, τότε δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{n}$. Συνεπώς η φθορά μπορεί να αποδοθεί με ένα μονόμετρο μέγεθος [Kachanov, 1958]

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} \tag{4.32}$$

Η έκφραση (4.32) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της φθοράς σε πραγματικά τρισδιάστατα προβλήματα. Επίσης δίδει καλά αποτελέσματα στις περιπτώσεις όπου η φόρτιση είναι μονοτονική.

Για τις πιο πολύπλοκες περιπτώσεις, η χρήση μιας μόνο παραμέτρου δεν είναι επαρκής για τον προσδιορισμό της φθοράς. Όταν δημιουργούνται οι μικρορωγμές κατά την φόρτιση, έχουν την τάση να προσανατολίζονται κάθετα στην μεγαλύτερη κύρια τάση, φαινόμενο που προκαλεί ανισοτροπία



Σχήμα 4.7: Φυσική φθορά και μαθηματικό ισοδύναμο (Πηγή: Lemaitre and Desmorat [2005]).

στην φθορά. Στη γενικότερη μορφή η παράμετρος της φθοράς μπορεί να απεικονιστεί με έναν τανυστή τέταρτης τάξης [π.χ. Chaboche, 1978]. Για λόγους απλότητας, συνήθως χρησιμοποιείται ένας τανυστής δεύτερης τάξης. Μέσω αυτού του τανυστή η επιφάνεια δS με μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}$ (Σχ. 4.7) μετασχηματίζεται σε μία συνεχή και μικρότερη επιφάνεια $\delta\tilde{S} = \delta S - \delta S_D$ με νέο μοναδιαίο διάνυσμα $\tilde{\vec{n}}$ [Murakami, 1981]

$$(\delta_{ij} - D_{ij})n_j\delta S = \tilde{n_i}\delta\tilde{S} \tag{4.33}$$

Εφόσον μέσω της παραμέτρου της φθοράς μεταβάλλεται η επιφάνεια επί της οποίας δρα η τάση, τότε ως *ενεργή τάση* ορίζεται η τάση που δρα πλέον επί της επιφάνειας $\delta\tilde{S} = \delta S - \delta S_D$. Στην περίπτωση της ισότροπης φθοράς η ενεργή τάση δίδεται από τη σχέση

$$\tilde{\sigma_{ij}} = \frac{\sigma ij}{1-D} \tag{4.34}$$

Για την περίπτωση της ανισότροπης φθοράς ο ακριβής ορισμός της ενεργής τάσης απαιτεί την χρήση του τανυστή τέταρτης τάξης. Για πρακτικούς λόγους απλότητας προτιμάται η χρήση του τανυστή δεύτερης τάξης ο οποίος οδηγεί στην προσεγγιστική σχέση

$$\tilde{\sigma_{ij}} = (H_{ik}s_{kl}H_{lj})^D + \frac{p}{1-nD_H}\delta_{ij}, \quad \text{με} \quad H_{ij} = (1-D)_{ij}^{-1/2} \tag{4.35}$$

όπου $D_H = (1/3)D_{kk}$ είναι η υδροστατική φθορά. Ο δείκτης D υποδηλώνει το αποκλίνον τμήμα του τανυστή και H είναι ο ενεργός τανυστής της φθοράς. Ο συντελεστής n δεν εξαρτάται από το υλικό και συνήθως $n = 3$, ενώ για ισότροπη φθορά $n = 1$.

Οι παραμορφώσεις όπως έχει αναφερθεί μπορούν να διαχωριστούν στο ελαστικό και πλαστικό τμήμα. Η καταστατική εξίσωση που συνδέει τις τάσεις και τις ελαστικές παραμορφώσεις μπορεί να δοθεί ως συνάρτηση ενός ελαστικού δυναμικού, ενώ η καταστατική εξίσωση που συνδέει τις τάσεις με τις πλαστικές παραμορφώσεις δίδεται ως συνάρτηση του πλαστικού δυναμικού. Τα δύο αυτά δυναμικά μπορούν να συνδυαστούν σε ένα και μόνο δυναμικό το οποίο θα περιλαμβάνει και την επίδραση της φθοράς αλλά και την επίδραση της θερμοκρασίας. Το δυναμικό αυτό, που ονομάζεται *Καταστατικό Δυναμικό* του υλικού, είναι η ειδική ελεύθερη ενέργεια του Helmholtz (Helmholtz free specific energy) και είναι συνάρτηση όλων των μεταβλητών που περιγράφουν την κατάσταση του σώματος. Το καταστατικό δυναμικό είναι βολικό να εκφράζεται ως ειδική ελεύθερη ενθαλπία του Gibbs (Gibbs specific free enthalpy) η οποία προκύπτει με μετασχηματισμό της ενέργειας Helmholtz

$$\Psi^* = \Psi_e^* + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\epsilon_{ij}^p - \Psi_p - \Psi_T \tag{4.36}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα, Ψ_e^* είναι το θερμοελαστικό δυναμικό, Ψ_p είναι η συνεισφορά της κράτυνσης και Ψ_T είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας και σχετίζεται με την θερμοχωρητικότητα του υλικού.

Το ελαστικό δυναμικό Ψ_e^* περιέχει την επίδραση της φθοράς μέσω της ενεργής τάσης και της αρχής του ισοδύναμου των παραμορφώσεων (principle of strain equivalence) [Lemaitre, 1971]. Σύμφωνα με αυτή την αρχή, οι καταστατικές εξισώσεις που εκφράζουν τις παραμορφώσεις ως προς τις τάσεις είναι οι ίδιες με αυτές για ένα υλικό χωρίς φθορά εκτός από τις τάσεις, οι οποίες αντικαθίστανται από τις ενεργές τάσεις.

Η συνεισφορά της πλαστικής κράτυνσης δίδεται από την σχέση

$$\Psi_p = \frac{1}{\rho}\left(\int_0^r R\mathrm{d}r + \frac{1}{3}C\alpha_{ij}\alpha_{ij}\right) \tag{4.37}$$

όπου r η παράμετρος ισότροπης κράτυνσης στον χώρο των παραμορφώσεων, α_{ij} το κέντρο της επιφάνειας διαρροής επίσης στον χώρο των παραμορφώσεων και C σταθερά του υλικού που αφορά την γραμμική κινηματική κράτυνση. Αν η εξίσωση (4.37) πολλαπλασιαστεί με ρ τότε συμβολίζει την ενέργεια w_s που αποθηκεύεται στον RVE.

Από το καταστατικό δυναμικό (4.36) μπορούν να προκύψουν οι καταστατικές εξισώσεις του υλικού

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \rho\frac{\partial\Psi^*}{\partial\sigma ij} = \rho\frac{\partial\Psi_e^*}{\partial\sigma ij} + \epsilon_{ij}^p \\ s &= \frac{\partial\Psi^*}{\partial T} \end{aligned} \tag{4.38}$$

όπου s η εντροπία του υλικού. Οι άλλες παράμετροι του υλικού προκύπτουν, επίσης, από το καταστατικό δυναμικό και τις σχέσεις

$$\begin{aligned} R &= -\rho\frac{\partial\Psi^*}{\partial r} \\ X_{ij} &= -\rho\frac{\partial\Psi^*}{\partial\alpha_{ij}} \\ -Y &= -\rho\frac{\partial\Psi^*}{\partial D} \quad \text{ή} \quad -Y_{ij} = -\rho\frac{\partial\Psi^*}{\partial D_{ij}} \end{aligned} \tag{4.39}$$

όπου Y είναι ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας (energy density release rate) και σχετίζεται με την παράμετρο της φθοράς.

Το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα με την μορφή της ανισότητας Clausius - Duhem ικανοποιείται όταν ο ρυθμός μεταβολής της φθοράς είναι θετικός, δηλαδή, η φθορά αυξάνεται

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}^p_{ij} - \dot{w}_s + Y_{ij}\dot{D}_{ij} - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \qquad (4.40)$$

Η φυσική σημασία είναι ότι το άθροισμα του ρυθμού διασκόρπισης της ενέργειας που αποτελείται από την πλαστική ισχύ ($\sigma_{ij}\dot{\epsilon}^p_{ij}$), μείον τον ρυθμό αποθήκευσης ενέργειας ($\dot{w}_s = R\dot{r} + X_{ij}\dot{\alpha}_{ij}$), συν την διασκόρπιση λόγω φθοράς ($Y_{ij}\dot{D}_{ij}$) και συν την θερμική ενέργεια μετατρέπεται όλο σε θερμότητα.

Οι κινηματικοί νόμοι οι οποίοι διέπουν την εξέλιξη των εσωτερικών μεταβλητών του υλικού μπορούν να εξαχθούν από ένα δυναμικό διασκόρπισης F. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, για να ικανοποιεί το F το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα, πρέπει να είναι κυρτή συνάρτηση. Το δυναμικό αποτελείται (για συνηρτημένο νόμο διαρροής) από το άθροισμα του πλαστικού δυναμικού (συνθήκη διαρροής) f, του μη γραμμικού κινηματικού όρου της κράτυνσης F_X και του δυναμικού φθοράς F_D

$$F = f + F_X + F_D \qquad (4.41)$$

Από το δυναμικό διασκόρπισης προκύπτουν οι κινηματικοί νόμοι των εσωτερικών παραμέτρων του υλικού

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}^p_{ij} &= -\dot{\psi}\frac{\partial F}{\partial(-\sigma_{ij})} = \dot{\psi}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \\
\dot{r} &= -\dot{\psi}\frac{\partial F}{\partial R} \\
\dot{\alpha}_{ij} &= -\dot{\psi}\frac{\partial F}{\partial X_{ij}} \\
\dot{D} &= -\dot{\psi}\frac{\partial F}{\partial(-Y)} = \dot{\psi}\frac{\partial F}{\partial Y} \quad \text{ή} \quad \dot{D}_{ij} = -\dot{\psi}\frac{\partial F}{\partial(-Y_{ij})} = \dot{\psi}\frac{\partial F}{\partial Y_{ij}}
\end{aligned} \qquad (4.42)$$

όπου $\dot{\psi}$ είναι ο πλαστικός πολλαπλασιαστής και μπορεί να υπολογιστεί από την συνθήκη συνέπειας $f = 0$ και $\dot{f} = 0$ (βλ. και Εξ. (4.19)).

Ως παράδειγμα εφαρμογής του καταστατικού δυναμικού μπορεί να δοθεί η περίπτωση του γραμμικά ελαστικού υλικού. Στην περίπτωση της ισότροπης φθοράς το καταστατικό δυναμικό γίνεται

$$\rho\Psi^*_e = \frac{1+\nu}{2E}\frac{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}{1-D} - \frac{\nu}{2E}\frac{\sigma^2_{kk}}{1-D} \qquad (4.43)$$

Ο ελαστικός καταστατικός νόμος που προκύπτει από το δυναμικό είναι

$$\epsilon^e_{ij} = \rho\frac{\partial \Psi^*_e}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1+\nu}{E}\tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E}\tilde{\sigma}_{kk} \qquad (4.44)$$

όπου $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/(1-D)$ είναι η ενεργή τάση. Η εξίσωση (4.44) είναι ο γραμμικός ελαστικός νόμος του Hooke στον οποίον έχει ληφθεί υπόψη και η επίδραση της φθοράς.

Όπως αναφέρθηκε, από το δυναμικό διασκόρπισης F και ειδικότερα από τον όρο F_D προκύπτει ο κινηματικός μηχανισμός που αφορά την εξέλιξη της παραμέτρου της φθοράς

$$\dot{D} = \dot{\psi}\frac{\partial F_D}{\partial Y} \quad \text{ή} \quad \dot{D}_{ij} = \dot{\psi}\frac{\partial F_D}{\partial Y_{ij}} \qquad (4.45)$$

Όπως και στην περίπτωση της πλαστικότητας υπάρχουν πολλές επιλογές για την συνάρτηση F_D και η μορφή της εξαρτάται από το υλικό για το οποίο αναπτύσσεται το μοντέλο. Για την περίπτωση της ισότροπης φθοράς, από πειράματα έχει προκύψει ότι η F_D πρέπει να είναι μη γραμμική συνάρτηση της Y. Για παράδειγμα, μια πιθανή μορφή του κινηματικού νόμου της εξέλιξης της ισότροπης φθοράς είναι [Lemaitre, 1996]

$$\dot{D} = \begin{cases} \left(\dfrac{Y}{S}\right)^s \dot{p} & \text{αν } w_s > w_D \text{ ή } p > p_D \\ 0 & \text{αν } w_s \leq w_D \text{ ή } p \leq p_D \\ D_c & \text{εκκίνηση μακρορωγμής} \end{cases} \tag{4.46}$$

όπου $\dot{p}$ είναι ο ρυθμός συσσώρευσης της πλαστικής τροπής και δίδεται από την σχέση

$$\dot{p} = \frac{\dot{r}}{1-D} = \frac{\dot{\psi}}{1-D} \tag{4.47}$$

Τα S και s είναι παράμετροι του υλικού και εξαρτώνται από την θερμοκρασία. Οι ανισότητες $w_s > w_D$ και $p > p_D$ δείχνουν ότι για να εκκινήσει η φθορά απαιτείται μία ελάχιστη αποθήκευση ενέργειας (w_D) ή ισοδύναμα πλαστικής τροπής (p_D). Τα όρια αυτά εξαρτώνται από το υλικό όμως εξαρτώνται πολύ και από τον τρόπο φόρτισης. Η παράμετρος D_c είναι το όριο της φθοράς πάνω από το οποίο θα εκκινήσει μακρορωγμή στο υλικό (συνήθως $D_c \approx 0.5$). Τέλος η συνάρτηση Y εξαρτάται τόσο από τις τάσεις όσο και από τις ελαστικές παραμέτρους του υλικού [Lemaitre and Desmorat, 2005].

Όταν η φθορά στο υλικό ξεπεράσει ένα όριο (π.χ. το όριο D_c) τότε δημιουργείται μακρορωγμή. Μπορεί να θεωρηθεί ότι η μακρορωγμή εκδηλώνεται σε ζώνες όπου είναι εντοπισμένες πλαστικές παραμορφώσεις και μεγάλη συγκέντρωση μικρορωγμών οι οποίες ενώνονται [π.χ. Billardon and Doghri, 1989; Benallal et al., 1989, 1993]. Η προσέγγιση αυτή είναι ρεαλιστική όμως παρουσιάζει δυσκολίες στην υλοποίησή της. Οι λόγοι είναι ότι αφενός ένα τέτοιο κριτήριο αστοχίας συνδέεται ισχυρά με τις πλαστικές παραμορφώσεις και τον κινηματικό νόμο της φθοράς και αφετέρου είναι πολύ δύσκολο να υλοποιηθεί σε κώδικες πεπερασμένων στοιχείων. Παρ' όλα αυτά, έχουν αναπτυχθεί δύο κύριες θεωρίες οι οποίες προσπαθούν να μελετήσουν το φαινόμενο. Η πρώτη θεωρία ονομάζεται *Θεωρία των Διακλαδώσεων* (Bifurcation Theory) και στηρίζεται στην υπόθεση ότι το μηχανικό πρόβλημα χάνει την μοναδικότητα της λύσης του και μπορεί να υπάρχει και δεύτερη λύση [Hill, 1962; Rice, 1973; Rudnicki and Rice, 1975; Vardoulakis and Sulem, 1995]. Η δεύτερη θεωρία ονομάζεται *Θεωρία Διαταραχής* (Perturbation Theory) και επιβάλλει τεχνητά μια διαταραχή στην ομογενή - σταθερή λύση του προβλήματος. Αν η εξέλιξη του φαινομένου σταθεροποιηθεί τότε υπάρχει ευστάθεια, διαφορετικά εκδηλώνεται ζώνη διάτμησης [π.χ. Molinari, 1985; Dudzinski and Molinari, 1991; Toth et al., 1996].

Στα πλαίσια της παρούσας Διατριβής το φαινόμενο της χαλάρωσης και κατ' επέκταση το μοντέλο της φθοράς δεν θα μελετηθεί. Το ελαστοπλαστικό μοντέλο θα αναπτυχθεί μόνο για το φαινόμενο της κράτυνσης και μέχρι το σημείο αστοχίας. Όπως θα δειχθεί και από τα αποτελέσματα του μοντέλου (Υποκεφάλαιο 4.3.5), το φαινόμενο της φθοράς έχει σημαντική επίδραση στις ελαστικές παραμέτρους του υλικού λίγο πριν την αστοχία. Η επίδραση αυτή είναι πιο έντονη για υψηλές σχετικά τάσεις περιορισμού.

Στη διεθνή βιβλιογραφία μπορούν να βρεθούν αρκετά μοντέλα φθοράς που έχουν προταθεί από άλλους ερευνητές. Τα περισσότερα από αυτά αφορούν κυρίως το σκυρόδεμα, όμως, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για πετρώματα [π.χ. Ju, 1989; Yazdani and Schreyer, 1990; Chazallon and Hicher, 1998; Lu and Shao, 2002; Contrafatto and Cuomo, 2006; Grassl and Jirásek, 2006; Cicekli et al., 2007; Desmorat et al., 2007; Grassl and Rempling, 2008; Nguyen and Houlsby, 2008a,b; Voyiadjis et al., 2008; Zhu et al., 2009].

4.3 Υπερβολικό ελαστοπλαστικό μοντέλο

Το υπερβολικό κριτήριο αστοχίας χρησιμοποιήθηκε ως συνάρτηση διαρροής για την ανάπτυξη ενός ελαστοπλαστικού καταστατικού μοντέλου. Το μοντέλο απαιτεί, καταρχήν, την βαθμονόμηση της επιφάνειας αστοχίας στα πειραματικά δεδομένα ώστε να υπολογιστούν οι παράμετροι σ_0, σ_c και β (ή ισοδύναμα η σ_{bc}). Κατόπιν, από τις καμπύλες φόρτισης ενός πειράματος μοναξονικής θλίψης υπολογίζονται οι υπόλοιπες παράμετροι. Το μειονέκτημα του μοντέλου είναι ότι είναι "ανοιχτό" στην πλευρά των υψηλών υδροστατικών πιέσεων. Συνεπώς, δεν μπορεί να προβλέψει την ελαστοπλαστική συμπεριφορά για υδροστατικές ή σχεδόν υδροστατικές θλιπτικές φορτίσεις. Παρόλα αυτά, η προσέγγιση αυτή κρίνεται ικανοποιητική για χαμηλές τάσεις περιορισμού.

4.3.1 Καταστατικές εξισώσεις

Αν φορτιστεί ένα υλικό με κράτυνση κατά $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ πάνω από το όριο διαρροής του, τότε δημιουργούνται τόσο ελαστικές, όσο και πλαστικές παραμορφώσεις. Η συνολική μεταβολή στην παραμόρφωση μπορεί να υπολογισθεί ως το άθροισμα των μεταβολών των ελαστικών και των πλαστικών παραμορφώσεων από την Εξ. (4.11)

$$\mathrm{d}\epsilon_{ij} = \mathrm{d}\epsilon_{ij}^{e} + \mathrm{d}\epsilon_{ij}^{p} \tag{4.48}$$

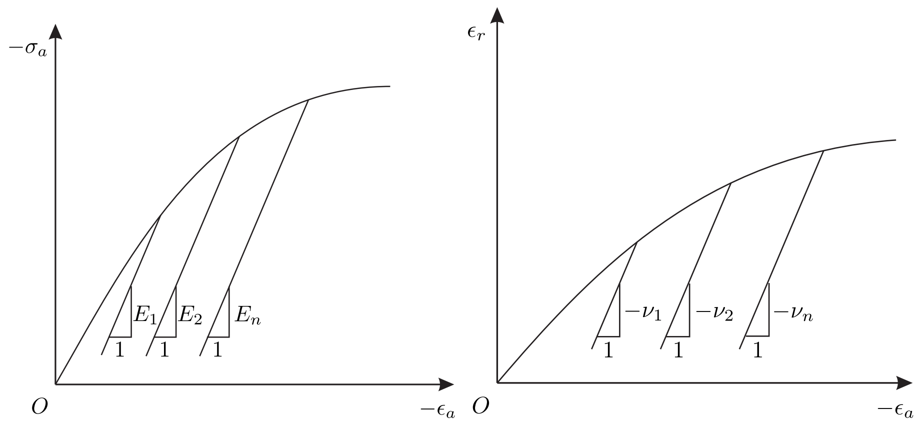
Αν θεωρηθεί ότι ο νόμος του Hooke περιγράφει τις ελαστικές παραμορφώσεις, τότε η μεταβολή $\mathrm{d}\epsilon_{ij}^{e}$ δίδεται από την Εξ. (4.4)

$$\mathrm{d}\epsilon_{ij}^{e} = D_{ijkl}\mathrm{d}\sigma_{kl} \tag{4.49}$$

όπου ο τανυστής D_{ijkl} δίδεται από την Εξ. (4.5)

$$D_{ijkl} = \frac{1+\nu}{2E}\left[-\frac{2\nu}{(1+\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right] \tag{4.50}$$

Το μέτρο ελαστικότητας E και το ο λόγος του Poisson ν μπορεί να εξαρτώνται από την μέση πίεση p ή/και την πλαστική παραμόρφωση ή/και την συσσωρευμένη φθορά εντός του υλικού. Στην παρούσα Διατριβή και για λόγους απλότητας θα θεωρηθεί ότι τα E και ν είναι σταθερές ποσότητες. Ο υπολογισμός τους μπορεί να γίνει από τους κύκλους φόρτισης - αποφόρτισης ενός τυπικού πειράματος μοναξονικής θλίψης. Το μέτρο ελαστικότητας E υπολογίζεται ως η μέση κλίση των κύκλων φόρτισης - αποφόρτισης του διαγράμματος της αξονικής τάσης σ_a ως προς την αξονική παραμόρφωση ϵ_a



(α) Μέτρο ελαστικότητας.

(β) Λόγος Poisson.

Σχήμα 4.8: Υπολογισμός ελαστικών παραμέτρων.

(Σχ. 4.8α). Αντίστοιχα, ο λόγος του Poisson υπολογίζεται ως η μέση κλίση των κύκλων φόρτισης - αποφόρτισης του διαγράμματος της ακτινικής ϵ_r ως προς την αξονική παραμόρφωση ϵ_a (Σχ. 4.8β). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα φαινόμενα υστέρησης στους κύκλους φόρτισης - αποφόρτισης δεν θα ληφθούν υπόψη.

Ο τανυστής των μεταβολών των πλαστικών τροπών $\mathrm{d}\epsilon_{ij}^p$ της Εξ. (4.48) μπορεί να διασπασθεί σε ένα υδροστατικό ή σφαιρικό τμήμα και σε ένα αποκλίνον τμήμα ως εξής (βλ. και Εξ. (2.20))

$$\mathrm{d}\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{3}\mathrm{d}\epsilon_{kk}^p\delta_{ij} + \mathrm{d}e_{ij}^p \tag{4.51}$$

όπου $\mathrm{d}e_{ij}^p$ είναι ο αποκλίνων τανυστής των μεταβολών των πλαστικών παραμορφώσεων. Από την Εξ. (4.51) προκύπτει ότι η συνολική ογκομετρική μεταβολή των πλαστικών παραμορφώσεων δίδεται από την σχέση

$$\mathrm{d}v_p = \mathrm{d}\epsilon_{kk}^p \tag{4.52}$$

Ενώ από τον τανυστή $\mathrm{d}e_{ij}^p$ μπορεί να υπολογιστεί η μεταβολή στην πλαστική διατμητική οκταεδρική παραμόρφωση ή αλλιώς *ένταση πλαστικής διατμητικής παραμόρφωσης* (deviatoric plastic strain intensity) (βλ. και Εξ. (2.22))

$$\mathrm{d}g_p = 2\sqrt{\frac{2}{3}J_2'^p} = 2\sqrt{\frac{1}{3}\mathrm{d}e_{ij}^p\mathrm{d}e_{ij}^p} \tag{4.53}$$

όπου $J_2^{'p}$ είναι η δεύτερη αναλλοίωτη του τανυστή $\mathrm{d}e_{ij}^p$.

Από την άλλη πλευρά, η συνολική μεταβολή των πλαστικών παραμορφώσεων υπολογίζεται από τον νόμο διαρροής

$$\mathrm{d}\epsilon_{ij}^p = \dot{\psi}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.54}$$

Συνδυάζοντας την Εξ. (4.54) με τις Εξ. (4.52) και (4.53) προκύπτουν οι σχέσεις των $\mathrm{d}v_p$ και $\mathrm{d}g_p$ συναρτήσει του πλαστικού δυναμικού

$$\mathrm{d}v_p = \dot{\psi}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kk}} \tag{4.55}$$

$$\mathrm{d}g_p = 2\dot{\psi}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}\delta_{ij}\right)} \tag{4.56}$$

Οι συνολικές πλαστικές παραμορφώσεις v_p και g_p που συσσωρεύονται στο υλικό μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ενεργές παραμορφώσεις στον ελαστοπλαστικό καταστατικό νόμο [Vardoulakis and Sulem, 1995]. Η ογκομετρική πλαστική παραμόρφωση v_p προτιμάται στις περιπτώσεις όπου μοντελοποιείται η συμπεριφορά σε ισχυρά θλιπτικά υδροστατικά πεδία (π.χ. φαινόμενα συμπύκνωσης). Συνεπώς απαιτεί “κλειστή” επιφάνεια διαρροής και από τις δυο πλευρές του υδροστατικού άξονα. Η διατμητική πλαστική παραμόρφωση g_p προτιμάται στις περιπτώσεις όπου ο κύριος μηχανισμός αστοχίας είναι η διάτμηση. Οι ισχυρές διατμητικές παραμορφώσεις παρατηρούνται σε χαμηλές σχετικά τάσεις περιορισμού, συνεπώς η επιφάνεια διαρροής δεν χρειάζεται να είναι “κλειστή”. Στην παρούσα Διατριβή θα χρησιμοποιηθεί η ποσότητα g_p ως ενεργή παραμόρφωση.

Αν χρησιμοποιηθεί το υπερβολικό κριτήριο αστοχίας (3.73) ως συνάρτηση διαρροής και η ποσότητα g_p ως ενεργή παραμόρφωση, τότε, από την συνθήκη συνέπειας μπορεί να υπολογιστεί το μέτρο κράτυνσης ως εξής (βλ. και Εξ. (4.25)

$$\kappa = -2\frac{\partial f_H}{\partial R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}g_p}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)} \tag{4.57}$$

όπου R είναι ο κανόνας κράτυνσης ο οποίος εξαρτάται μόνο από το g_p και θα ορισθεί στο επόμενο Υποκεφάλαιο 4.3.2. Από τον υπολογισμό του κ μπορεί να υπολογισθεί άμεσα ο πλαστικός πολλαπλασιαστής $\dot{\psi}$ και οι μεταβολές των πλαστικών παραμορφώσεων $\mathrm{d}\epsilon^p_{ij}$. Από τις Εξ. (4.22) και (4.23) προκύπτει ότι

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} \tag{4.58}$$

$$\mathrm{d}\epsilon^p_{ij} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kl}}\mathrm{d}\sigma_{kl} \tag{4.59}$$

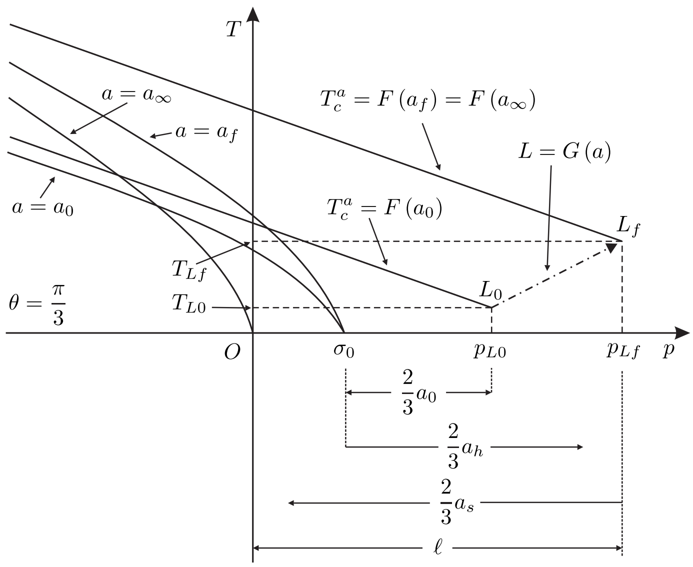
Υπενθυμίζεται ότι για να είναι ο πλαστικός πολλαπλασιαστής διάφορος του μηδενός θα πρέπει

$$\begin{aligned} f_H &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} &> 0 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Από τις Εξ. (4.48), (4.49), (4.59) και (4.57) μπορεί να υπολογιστεί η συνολική μεταβολή των παραμορφώσεων για δεδομένο $\mathrm{d}\sigma_{ij}$. Αντίστοιχα, αν χρησιμοποιηθούν οι Εξ.(4.21), (4.28) και (4.56) μπορεί να υπολογιστεί η μεταβολή $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ για δεδομένο $\mathrm{d}\epsilon_{ij}$. Όλοι οι υπολογισμοί των παραγώγων που απαιτούνται για το καταστατικό μοντέλο δίδονται στο Παράρτημα Γ. Τέλος, το πλαστικό δυναμικό q θα ορισθεί στο Υποκεφάλαιο 4.3.3.

4.3.2 Κανόνας κράτυνσης

Από την παρατήρηση των παραμέτρων του υπερβολικού κριτηρίου αστοχίας προκύπτει ότι η βέλτιστη παράμετρος, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί



Σχήμα 4.9: Κινηματικός μηχανισμός κανόνα κράτυνσης.

ως κανόνας κράτυνσης, είναι η παράμετρος a

$$a = \frac{1}{2}\left[\frac{(\sigma_c - \sigma_0)^2}{\sigma_0 \beta^2} - \sigma_0\right] \tag{4.61}$$

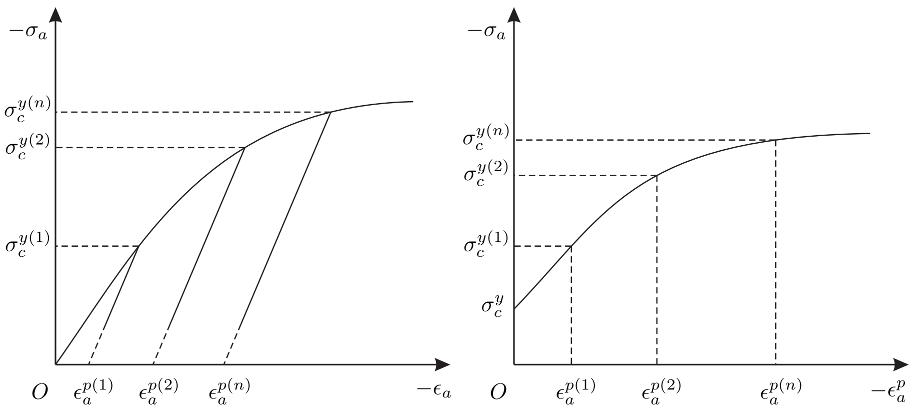
Η παράμετρος a συνδέει μεταξύ τους και τις τρεις ελεύθερες παραμέτρους του μοντέλου, συνεπώς, μια μεταβολή στην a μπορεί να μεταβάλλει όποιες ελεύθερες παραμέτρους είναι επιθυμητό. Επιπλέον, η παράμετρος a συνδέεται άμεσα με τα κέντρα των ασύμπτωτων των δύο κύριων μεσημβρινών μέσω των Εξ. (3.51) και (3.56) (βλ. και Σχ. 3.11).

$$\begin{aligned} p_L &= \sigma_0 + \frac{2}{3}a \\ T_L &= \frac{\sqrt{2}}{3}a \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned} p_M &= \sigma_0 + \frac{1}{3}a \\ T_M &= \frac{\sqrt{2}}{3}a \end{aligned} \tag{4.63}$$

Στο Σχ. 4.9 δίδεται ο προτεινόμενος κινηματικός μηχανισμός για τον κανόνα κράτυνσης a. Για την περιγραφή του μηχανισμού θα χρησιμοποιηθεί ο μεσημβρινός της θλίψης ($\theta = \pi/3$). Όμως, με την μεταβολή του a επηρεάζεται και ο μεσημβρινός του εφελκυσμού όπως θα δειχθεί στην συνέχεια. Ο κινηματικός μηχανισμός μπορεί να προβλέψει τόσο το φαινόμενο της κράτυνσης όσο και το φαινόμενο της χαλάρωσης. Παρόλα αυτά στην παρούσα Διατριβή, όπως έχει ήδη αναφερθεί, θα μελετηθεί μόνο το φαινόμενο της κράτυνσης.

Από την βαθμονόμηση του υπερβολικού κριτηρίου αστοχίας προκύπτουν οι τιμές των σ_0, σ_c και β. Από τις τιμές αυτές μπορεί να υπολογισθεί η



(α) Κύκλοι φόρτισης. (β) Αρχική τάση διαρροής.

Σχήμα 4.10: Υπολογισμός αρχικής τάσης διαρροής.

τιμή του a κατά την αστοχία και συμβολίζεται με a_f. Επίσης, μπορεί να υπολογισθεί και το μέγιστο μήκος ℓ όπως φαίνεται στο Σχ. 4.9 από την Εξ. (4.62)

$$\ell = \sigma_0 + \frac{2}{3}a_f \tag{4.64}$$

Έστω ότι η τιμή του β παραμένει πάντα σταθερή. Έστω, επίσης, ότι η τιμή σ_0 παραμένει σταθερή κατά την κράτυνση. Με άλλα λόγια, κατά τον υδροστατικό εφελκυσμό το υλικό είναι τέλεια ψαθυρό. Αν η αρχική επιφάνεια διαρροής υπολογίζεται από μια τιμή a_0, τότε από την Εξ. (4.61) μπορεί να υπολογισθεί η αρχική τάση διαρροής σ_c^y για το πείραμα μονοαξονικής θλίψης. Αντίστροφα, αν υπολογισθεί η αρχική τάση διαρροής από ένα πείραμα μονοαξονικής θλίψης, τότε μπορεί να υπολογισθεί η αρχική τιμή a_0. Ο υπολογισμός της αρχικής τάσης διαρροής από το πείραμα μονοαξονικής θλίψης γίνεται σε δύο βήματα. Αρχικά, από τους κύκλους φόρτισης - αποφόρτισης του διαγράμματος $\sigma_a - \epsilon_a$ υπολογίζεται η αξονική πλαστική παραμόρφωση (Σχ. 4.10α). Η αξονική πλαστική παραμόρφωση του κάθε κύκλου είναι το σημείο τομής της προέκτασης του ευθύγραμμου τμήματος του κύκλου με τον άξονα τον παραμορφώσεων. Η αντίστοιχη τάση διαρροής είναι η μέγιστη αξονική τάση του κύκλου. Κατόπιν, από το διάγραμμα των αξονικών τάσεων διαρροής με τις αντίστοιχές τους πλαστικές παραμορφώσεις υπολογίζεται η αρχική τάση διαρροής (Σχ. 4.10β). Αν υποτεθεί ότι οι αξονικές τάσεις και πλαστικές παραμορφώσεις σχετίζονται μεταξύ τους με μια απλή πολυωνυμική σχέση (συνήθως γραμμική), τότε η αρχική τάση διαρροής σ_c^y είναι το σημείο τομής της καμπύλης που προκύπτει από την πολυωνυμική σχέση με τον άξονα τον τάσεων.

Έστω, τώρα, ότι η παράμετρος a εξαρτάται από την ένταση των πλαστικών διατμητικών παραμορφώσεων g_p. Έστω, επίσης, ότι η παράμετρος a είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του g_p. Μια τασική μεταβολή κατά $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ πάνω από το αρχικό όριο διαρροής θα προκαλέσει διατμητική παραμόρφωση $\mathrm{d}g_p$ στο υλικό. Η μεταβολή της g_p με την σειρά της θα προκαλέσει αύξηση της παραμέτρου a. Αυτό έχει ως συνέπεια δύο μεταβολές στην επιφάνεια διαρροής. Αφενός θα μεταθέσει το κέντρο L του συστήματος συντεταγμένων της ασύμπτωτης (Σχ. 4.9) και αφετέρου θα αυξήσει την τάση διαρροής σ_c^y. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχισθεί μέχρι να επιτευχθεί η επιφάνεια αστοχίας ή αλλιώς μέχρι το $a = a_f$. Ο μηχανισμός αυτός οδηγεί σε ένα κινηματικό μηχανισμό κράτυνσης για την ασύμπτωτη του μεσημβρινού. Η μετάθεση της ασύμπτωτης μεταβάλλει το σχήμα της επιφάνειας διαρροής αυξάνοντας την κλίση της σε χαμηλές τάσεις περιορισμού. Αντίθετα, σε υψηλές θλιπτικές τάσεις η κλίση της επιφάνειας διαρροής θα μεταβληθεί ελάχιστα λόγω της υπερβολικής μορφής του κριτηρίου. Η αύξηση της κλίσης της επιφάνειας διαρροής μπορεί να ερμηνευθεί ως αύξηση της εσωτερικής τριβής του υλικού λόγω της αναδιάταξης των κόκκων.

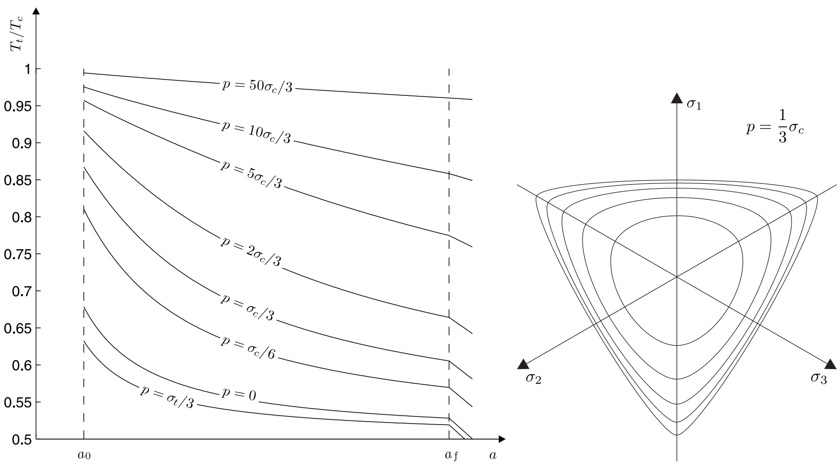
Η διατμητική πλαστική παραμόρφωση g_p μπορεί να συνεχίσει να αυξάνεται και μετά την τάση αστοχίας, όπου, πλέον, παρατηρείται το φαινόμενο της χαλάρωσης. Αν υποτεθεί ότι το μήκος ℓ παραμένει σταθερό μετά την αστοχία, τότε και η ασύμπτωτη του μεσημβρινού παραμένει σταθερή στο χώρο $p - T$. Όμως, η αύξηση της g_p θα επιφέρει περαιτέρω αύξηση της παραμέτρου a. Από την Εξ. (4.64) προκύπτει ότι ο μόνος τρόπος να αυξηθεί το a διατηρώντας παράλληλα το ℓ σταθερό είναι να μειωθεί η τιμή της σ_0 (βλ. και Σχ. 4.9). Αυτό θα ωθήσει την επιφάνεια διαρροής προς την αρχή των αξόνων επιφέροντας μια ταυτόχρονη αύξηση της κλίσης της στις χαμηλές τάσεις περιορισμού, δηλαδή περαιτέρω αύξηση της εσωτερικής τριβής. Επιπλέον, η τάση διαρροής σ_c^y και η συνοχή του υλικού θα μειωθούν τάχιστα. Αντίθετα, στις υψηλές τάσεις περιορισμού η κλίση της επιφάνειας αστοχίας θα παραμείνει πρακτικά αμετάβλητη. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχισθεί μέχρι το $\sigma_0 \to 0$. Στο σημείο αυτό, το υλικό έχει χάσει πλήρως την συνοχή του και περαιτέρω αύξηση της g_p δεν μεταβάλλει την επιφάνεια διαρροής. Τέλος, η τιμή της παραμέτρου a γίνεται ίση με $a_\infty = (3/2)\ell$.

Η μεταβολή της παραμέτρου a δεν επιδρά το ίδιο στους δύο κύριους μεσημβρινούς. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τις Εξ. (4.62) και (4.63), μια μεταβολή της παραμέτρου a επιφέρει διπλάσια μετάθεση της ασύμπτωτης του μεσημβρινού της θλίψης σε σχέση με αυτήν του εφελκυσμού. Αυτό έχει ως συνέπεια την διεύρυνση του τριγωνοειδούς σχήματος της επιφάνειας διαρροής από την περιοχή των εφελκυσμών σε μεγαλύτερο εύρος τιμών p. Με άλλα λόγια, το υλικό γίνεται πιο ψαθυρό σε χαμηλές τάσεις περιορισμού. Ο κινηματικός, λοιπόν, μηχανισμός της παραμέτρου a επιφέρει ανισότροπη κράτυνση στην επιφάνεια διαρροής. Στο Σχ. 4.11α αποτυπώνεται η μεταβολή του λόγου T_t/T_c ως προς την μεταβολή του a για διάφορες τιμές p. Υπενθυμίζεται ότι η αναλογία $T_t/T_c = 1/2$ αντιστοιχεί στο κριτήριο Rankine και η αναλογία $T_t/T_c = 1$ στο κριτήριο Drucker-Prager. Στο Σχ. 4.11β απεικονίζεται η ανισότροπη μεταβολή της επιφάνειας διαρροής στο αποκλίνον επίπεδο για $p = \sigma_c/3$.

Έστω ότι η γνησίως αύξουσα συνάρτηση που συνδέει την παράμετρο a με το g_p δίδεται από την κάτωθι καταστατική σχέση

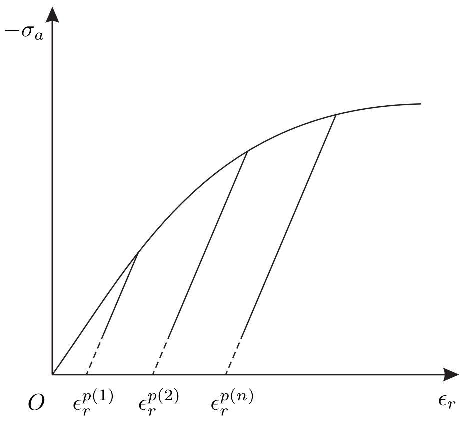
$$a = a_\infty + (a_0 - a_\infty)\, e^{-\gamma g_p} \tag{4.65}$$

όπου γ θετική παράμετρος. Από την Εξ. (4.65) προκύπτει ότι όταν το $g_p = 0$ τότε $a = a_0$. Ενώ όταν $g_p \to +\infty$ τότε $a \to a_\infty$. Με άλλα λόγια, στις πολύ μεγάλες διατμητικές πλαστικές παραμορφώσεις, που παρατηρούνται μετά την αστοχία, το υλικό έχει χάσει σχεδόν πλήρως την συνοχή του. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η απώλεια της συνοχής επέρχεται σε μια στενή ζώνη (ή ζώνες) διάτμησης και όχι στο σύνολο του υλικού.

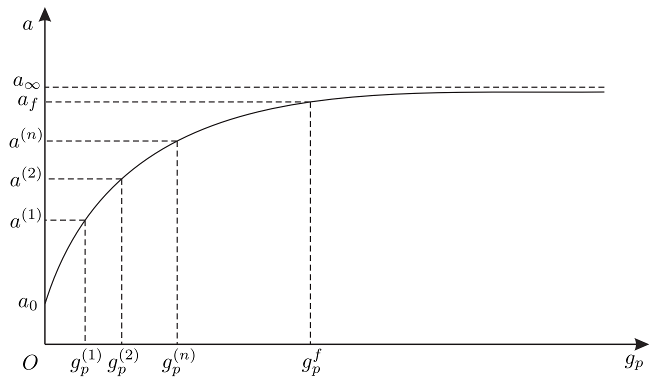


(α) Μεταβολή Tt/Tc ως προς a. (β) Αποκλίνον επίπεδο.

Σχήμα 4.11: Ανισότροπη κράτυνση.



Σχήμα 4.12: Υπολογισμός ακτινικών πλαστικών παραμορφώσεων.



Σχήμα 4.13: Βαθμονόμηση παραμέτρου γ.

Η παράμετρος γ μπορεί να υπολογισθεί από το πείραμα της μονοαξονικής θλίψης. Καταρχήν, υπολογίζονται τόσο οι αξονικές όσο και οι ακτινικές πλαστικές παραμορφώσεις που αντιστοιχούν σε κάθε κύκλο φόρτισης - αποφόρτισης (Σχ. 4.10α και 4.12). Από τον ορισμό της έντασης της διατμητικής πλαστικής παραμόρφωσης

$$g_p = 2\sqrt{\frac{1}{3}e_{ij}^p e_{ij}^p} \tag{4.66}$$

υπολογίζεται η ολική διατμητική πλαστική παραμόρφωση σε κάθε κύκλο. Για την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης, το g_p δίδεται από την σχέση

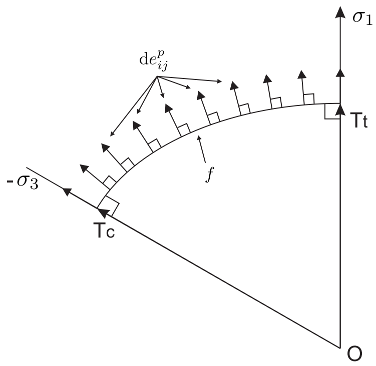
$$g_p = \frac{2\sqrt{2}}{3}|\epsilon_r^p - \epsilon_a^p| \tag{4.67}$$

όπου το σύμβολο $|\cdot|$ υποδηλώνει απόλυτη τιμή. Στην συνέχεια, από την τάση διαρροής του κάθε κύκλου και την Εξ. (4.61) υπολογίζεται η αντίστοιχη τιμή του a. Η τιμή a_0 μπορεί, επίσης, να υπολογισθεί από την Εξ. (4.61) αν τεθεί $\sigma_c = \sigma_c^y$. Παρόμοια, η τιμή a_∞ προκύπτει από την Εξ. (4.64)

$$a_\infty = \frac{3}{2}\ell = a_f + \frac{3}{2}\sigma_0 \tag{4.68}$$

όπου to a_f προκύπτει από την βαθμονόμηση του κριτηρίου αστοχίας και την Εξ. (4.61). Τέλος, ο υπολογισμός της παραμέτρου γ γίνεται με εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων στην Εξ. (4.65). Ως πειραματικά σημεία χρησιμοποιούνται τα ζεύγη (g_p, a) που υπολογίσθηκαν από τους κύκλους φόρτισης - αποφόρτισης (Σχ. 4.13).

Η τιμή a_f η οποία επιτυγχάνεται κατά την αστοχία, αντιστοιχεί σε μια σταθερή τιμή g_p^f. Η g_p^f είναι ανεξάρτητη της πίεσης και θεωρείται ως ιδιότητα του υλικού. Με άλλα λόγια, το υλικό θα αστοχήσει όταν συσσωρευτεί μια συγκεκριμένη ποσότητα πλαστικής διατμητικής τροπής. Η θεώρηση μιας σταθερής g_p^f οδηγεί σε ένα κριτήριο τύπου von Mises στο χώρο των πλαστικών παραμορφώσεων. Για χαμηλές τάσεις περιορισμού, η θεώρηση αυτή ισχύει προσεγγιστικά. Αντίθετα, για υψηλές τάσεις περιορισμού ή για εφελκυστικά πεδία απαιτείται διαφορετικός μηχανισμός αστοχίας.



Σχήμα 4.14: Καθετότητα στο αποκλίνον επίπεδο.

4.3.3 Πλαστικό δυναμικό

Τα περισσότερα πετρώματα, το σκυρόδεμα αλλά και τα οιονεί ψαθυρά εδάφη είναι υλικά με συνοχή, εσωτερική τριβή και παρουσιάζουν το φαινόμενο της διαστολικότητας. Η μοντελοποίηση της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς αυτών των υλικών απαιτεί μη συνηρτημένο νόμο διαρροής [Mróz, 1963, 1966]. Ο λόγος είναι ότι ο συνηρτημένος νόμος διαρροής, όπως έχει παρατηρηθεί από πειραματικές μετρήσεις, υπερεκτιμά την ογκομετρική πλαστική παραμόρφωση. Αντίθετα, παρατηρήθηκε ότι οι διατμητικές πλαστικές παραμορφώσεις προβλέπονται καλά από τον συνηρτημένο νόμο διαρροής. Δηλαδή, το διάνυσμα των διατμητικών πλαστικών παραμορφώσεων είναι κάθετο στο διατμητικό τμήμα της επιφάνειας διαρροής. Η συνάρτηση, λοιπόν, του πλαστικού δυναμικού μπορεί να υποτεθεί ότι είναι ίδια με την συνάρτηση διαρροής όσον αφορά το διατμητικό της τμήμα. Αντιθέτως, θα πρέπει να διαφέρει όσον αφορά το ογκομετρικό τμήμα. Η συμπεριφορά αυτή ονομάζεται *καθετότητα στο αποκλίνον επίπεδο* (deviatoric normality) [Gudehus, 1972; Lade and Duncan, 1973; Baker and Desai, 1982; Vardoulakis and Sulem, 1995] και απεικονίζεται στο Σχ. 4.14.

Εφόσον έχει υποτεθεί καθετότητα στο αποκλίνον επίπεδο, τότε το πλαστικό δυναμικό μπορεί να συνδεθεί με την επιφάνεια διαρροής μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = d\delta_{ij} \tag{4.69}$$

όπου το d είναι βαθμωτό μέγεθος. Από την Εξ. (4.69) εξασφαλίζεται ότι το αποκλίνον τμήμα του πλαστικού δυναμικού είναι ίδιο με το αντίστοιχο της συνάρτησης διαρροής. Αντίθετα, το υδροστατικό τμήμα αποκλίνει από τον συναρτημένο νόμο. Η απόκλιση καθορίζεται από τον *κανόνα διαστολικότητας* d (dilatancy rule).

Έστω, τώρα, ότι οι ογκομετρικές πλαστικές παραμορφώσεις συνδέονται με τις διατμητικές πλαστικές παραμορφώσεις με μια καταστατική σχέση της μορφής [π.χ. Roscoe et al., 1958; Roscoe and Burland, 1968; Nova and Wood, 1979; Wood, 1990; Wood et al., 1994; Vardoulakis and Sulem, 1995]

$$\mathrm{d}v_p = \delta \mathrm{d}g_p \tag{4.70}$$

όπου δ συνάρτηση του g_p και ονομάζεται *συντελεστής διαστολής* [Reynolds, 1885]. Η σωστή περιγραφή της διαστολικότητας αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη ζητήματα της μοντελοποίησης της εντατικοπαραμορφωσιακής συμπεριφοράς ενός γεωϋλικού.

Η απλούστερη προσέγγιση για την επιλογή μιας κατάλληλης συνάρτησης δ είναι η θεωρία της τασικά εξαρτώμενης διαστολής (stress-dilatant theory) [Taylor, 1948; Rowe, 1972]. Η θεωρία, όμως, αυτή απαιτεί γραμμικούς μεσημβρινούς. Δηλαδή, η αναλογία μεταξύ της οκταεδρικής διατμητικής τάσης T και της μέσης πίεσης p θα πρέπει να είναι σταθερή ανεξάρτητα από την θέση του τασικού σημείου. Συνεπώς, η προσέγγιση αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο υπερβολικό μοντέλο.

Σύμφωνα με τον δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο και για συνθήκη ομοαξονικότητας, η μεταβολή του πλαστικού έργου ανά μονάδα όγκου που καταναλώνεται κατά την κράτυνση πρέπει να μην είναι αρνητική

$$\mathrm{d}w_p = \frac{3}{2} T \mathrm{d}g_p + p \mathrm{d}v_p \geq 0 \tag{4.71}$$

όπου αν ληφθεί υπόψη η Εξ. (4.70) γίνεται

$$\mathrm{d}w_p = (-p) \left(\frac{3}{2} \frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kk}} - \delta \right) \mathrm{d}g_p \geq 0 \tag{4.72}$$

Εφόσον $\mathrm{d}g_p > 0$, από την Εξ. (4.72) προκύπτει η καταστατική ανισότητα για τα υλικά με διαστολικότητα

$$\delta \leq \frac{3}{2} \frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kk}} \tag{4.73}$$

Αν το δ γίνει ίσο με $(3/2)\partial f_H / \partial \sigma_{kk}$, τότε το διάνυσμα των πλαστικών παραμορφώσεων $\mathrm{d}\epsilon_{ij}^p$ γίνεται κάθετο στην επιφάνεια διαρροής. Δηλαδή, το πλαστικό δυναμικό q ταυτίζεται με την επιφάνεια διαρροής f. Για αυτήν την περίπτωση και αν θεωρηθεί υλικό που παρουσιάζει μόνο εσωτερική τριβή, από την Εξ. (4.72) προκύπτει ότι η μεταβολή του πλαστικού έργου ως προς την g_p είναι μηδέν. Επειδή, όμως, η συμπεριφορά αυτή είναι μη ρεαλιστική, συνεπάγεται ότι στην γενική περίπτωση θα πρέπει $\delta < (3/2)\partial f_H / \partial \sigma_{kk}$ [π.χ. Vardoulakis and Sulem, 1995].

Για την εύρεση μιας κατάλληλης συνάρτησης δ θα πρέπει πρώτα να αναλυθεί το φαινόμενο της διαστολικότητας. Η μεταβολή της ογκομετρικής πλαστικής παραμόρφωσης $\mathrm{d}v_p$ είναι η συνισταμένη δύο διαφορετικών φυσικών μηχανισμών. Από την μία πλευρά είναι η μέση πίεση p η οποία ανάλογα με το πρόσημό της τείνει να συστέλλει ή να διαστέλλει το υλικό. Από την άλλη πλευρά είναι η διάτμηση η οποία τείνει να διαστέλλει το υλικό λόγω της αναδιάταξης της συσκευασίας (packing) των κόκκων ή λόγω της διατμητικής παραμόρφωσης των μικρορωγμών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η διάτμηση μπορεί κατά περίπτωση να προκαλέσει μια μικρή συστολή στην αρχή του φαινομένου. Συνεπώς, στην περιοχή των εφελκυσμών η πίεση και η διάτμηση προκαλούν και οι δυο διαστολή του υλικού. Αντίθετα, στην περιοχή των θλίψεων οι δύο αυτοί μηχανισμοί ανταγωνίζονται μεταξύ τους. Η απάντηση στο ερώτημα του ποιος μηχανισμός θα επικρατήσει από τους δύο εξαρτάται από την τασική αναλογία T/p (stress inclination). Ειδικότερα, για το προτεινόμενο υπερβολικό μοντέλο η αναλογία αυτή θα κανονικοποιηθεί με την γωνία του Lode και την τάση σ_0 και δίδεται από την σχέση

$$R = \sqrt{2}\cos\theta \frac{T}{\sigma_0 - p} \tag{4.74}$$

όπου $R \in (0, 1]$. Όταν η κλίση των ασύμπτωτων $\beta \to 1$ και $p \to -\infty$, τότε $R \to 0$. Αντίθετα, όταν $p \to \sigma_0$, τότε το μοντέλο συμπεριφέρεται ακριβώς όπως το Rankine. Δηλαδή, αν $\theta = 0$ τότε $T/(\sigma_0 - p) = \sqrt{2}/2$ και $R = 1$. Αν $\theta = \pi/3$ τότε $T/(\sigma_0 - p) = \sqrt{2}$ και $R = 1$. Όλες οι υπόλοιπες εντατικές καταστάσεις επί της επιφάνειας διαρροής βρίσκονται μέσα στο διάστημα $(0, 1]$.

Έστω, τώρα, ότι για όλες τις τασικές οδεύσεις μέχρι την αστοχία υπάρχει μια πλαστική διατμητική παραμόρφωση $g_p^v \leq g_p^f$ τέτοια ώστε $\mathrm{d}v_p/\mathrm{d}g_p^v = 0$. Με άλλα λόγια η g_p^v είναι το σημείο ισόχωρης πλαστικής παραμόρφωσης όπου το υλικό περνάει από την συστολή στην διαστολή. Όταν ο λόγος $R = 1$, τότε θα πρέπει ο λόγος $g_p^v/g_p^f = 0$. Δηλαδή, κατά τον υδροστατικό εφελκυσμό δεν υπάρχει συστολή. Αντίθετα, όταν $R \to 0$ θα πρέπει $g_p^v/g_p^f \to 1$. Αυτό σημαίνει ότι στις πολύ υψηλές θλιπτικές πιέσεις δεν υπάρχει ποτέ διαστολή. Από την συμπεριφορά του λόγου g_p^v/g_p^f ως προς το R μπορεί να υποτεθεί ότι η σχέση μεταξύ αυτών των δύο ποσοτήτων δίδεται από μια ημιτονοειδή συνάρτηση της μορφής (Σχ. 4.15)

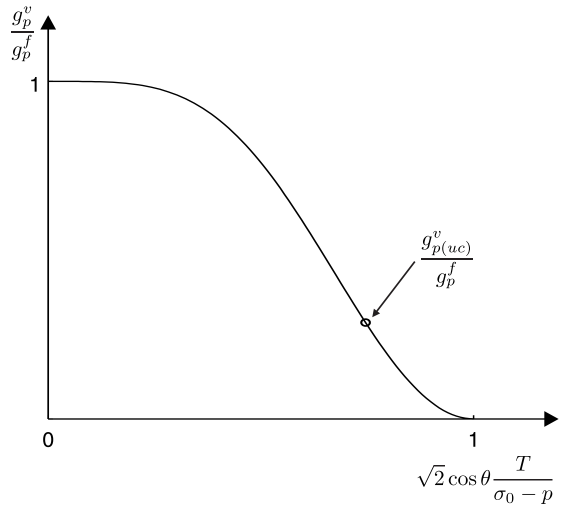
$$\frac{g_p^v}{g_p^f} = 1 - \left[\sin\left(\pi \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \frac{T}{\sigma_0 - p}\right)\right]^\lambda \tag{4.75}$$

όπου λ θεωρείται σταθερή θετική παράμετρος. Η Εξ. (4.75) και για $\lambda > 1$ έχει μικρό ρυθμό μεταβολής όταν $R \to 0$, υψηλό στο ενδιάμεσο και πάλι χαμηλό όταν $R \to 1$. Με άλλα λόγια στα ισχυρά θλιπτικά πεδία είναι δύσκολο να επιτευχθεί διαστολή. Αντίθετα σε χαμηλές τάσεις περιορισμού και στον εφελκυσμό η διαστολή επιτυγχάνεται γρήγορα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ένας αντίστοιχος νόμος συνημίτονου παρουσιάζει αντίθετη συμπεριφορά και δεν συμφωνεί καλά με τις πειραματικές μετρήσεις. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από το Σχ. 4.15 το μοντέλο προβλέπει μια πολύ μικρή συστολή στην αρχή του φαινομένου ακόμη και για την περιοχή των εφελκυσμών. Όμως, επειδή το μοντέλο κατασκευάζεται για θλιπτικά πεδία η συμπεριφορά αυτή θα αγνοηθεί.

Η παράμετρος λ καθορίζει τον ρυθμό μεταβολής του λόγου g_p^v/g_p^f ως προς την θέση του τασικού σημείου. Το λ είναι ιδιότητα του υλικού που σχετίζεται με την μικροδομή, δηλαδή την συσκευασία και την γεωμετρία των κόκκων, το πορώδες, τις μικρορωγμές που ενεργοποιούνται κλπ. Ο υπολογισμός του μπορεί να γίνει από το πείραμα της μονοαξονικής θλίψης. Από τα πειραματικά δεδομένα μπορεί να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση της σ_a ως προς την συνολική ογκομετρική παραμόρφωση $v_t = \epsilon_{kk}$. Επίσης, μπορεί να υπολογισθεί η γραφική παράσταση της σ_a ως προς την ογκομετρική ελαστική παραμόρφωση

$$v_e = \frac{1}{3K}\sigma_a = \frac{1 - 2\nu}{E}\sigma_a \tag{4.76}$$

όπου K είναι το μέτρο συμπιεστότητας (bulk modulus). Αν από την καμπύλη $\sigma_a - v_t$ αφαιρεθούν οι ελαστικές ογκομετρικές παραμορφώσεις, τότε



Σχήμα 4.15: Συνάρτηση ισόχωρης πλαστικής μεταβολής.

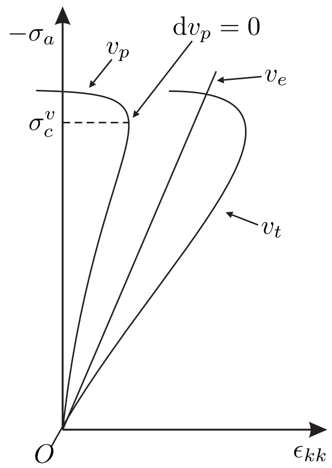
προκύπτει το διάγραμμα της σ_a ως προς την v_p (Σχ. 4.16). Από το διάγραμμα $\sigma_a - v_p$ μπορεί να βρεθεί η αξονική τάση σ_c^v για την οποία $\mathrm{d}v_p = 0$. Δηλαδή, η τάση σ_c^v αντιστοιχεί σε πλαστικά ισόχωρη παραμόρφωση. Για την τάση σ_c^v μπορούν να υπολογισθούν τα αντίστοιχα p_v, T_v αλλά και η g_p^v από τις Εξ. (4.61) και (4.65). Από τις ίδιες σχέσεις μπορεί να υπολογισθεί το g_p^f που αντιστοιχεί στην αντοχή σε μονοαξονική θλίψη σ_c. Συνεπώς, από την Εξ. (4.75) μπορεί να υπολογισθεί το λ (βλ. και Σχ. 4.15). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι επειδή το R κανονικοποιείται ανισότροπα μέσω της γωνίας θ, η ποσότητα λ θα πρέπει να είναι επίσης συνάρτηση του θ. Όμως, αυτό θα απαιτούσε τουλάχιστον ένα επιπλέον πείραμα σε γωνία $\theta \neq \pi/3$ για την βαθμονόμηση της συνάρτησης $\lambda(\theta)$. Στα πλαίσια αυτής της Διατριβής και για να διατηρηθεί το μοντέλο όσο το δυνατόν πιο απλό θα θεωρηθεί ότι η παράμετρος λ είναι προσεγγιστικά σταθερή.

Έστω, τώρα, ότι όταν $g_p = g_p^f$ τότε $\delta = (3/2)\partial f/\partial\sigma_{kk}$. Δηλαδή, κατά την αστοχία το πλαστικό δυναμικό ταυτίζεται με την επιφάνεια διαρροής. Με βάση την θεώρηση αυτή, μπορεί να υποτεθεί ότι η συνάρτηση δ δίδεται από την ακόλουθη σχέση

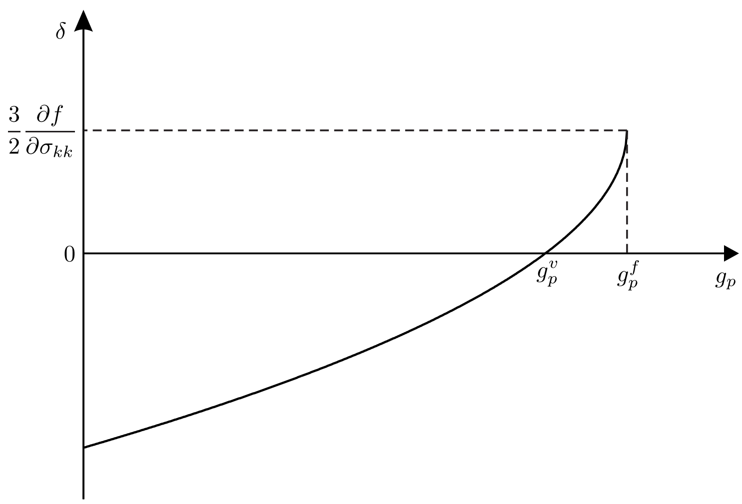
$$\delta = \frac{3}{2}\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kk}}\left(1 - \sqrt{\frac{g_p^f - g_p}{g_p^f - g_p^v}}\right) \tag{4.77}$$

όπου το $(3/2)\partial f_H/\partial\sigma_{kk}$ είναι η κλίση του μεσημβρινού της επιφάνειας διαρροής στο σημείο σ_{ij}. Επίσης, το g_p^v δίδεται από την Εξ. (4.75). Η καμπύλη της Εξ. (4.77) απεικονίζεται γραφικά στο Σχ. 4.17.

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από το Σχ. 4.17, η συνάρτηση δ προβλέπει έντονη αύξηση του ρυθμού διαστολής λίγο πριν την αστοχία και σχεδόν γραμμική στο υπόλοιπο εύρος των g_p. Κατά την ελαστοπλαστική φόρτιση του υλικού το g_p αυξάνεται, δηλαδή κινείται προς τα δεξιά. Ταυτόχρονα, όμως, αυξάνεται και η κλίση της επιφάνειας διαρροής ($(3/2)\partial f_H \partial\sigma_{kk}$). Αυτό



Σχήμα 4.16: Υπολογισμός τάσης σ_c^v.



Σχήμα 4.17: Συνάρτηση διαστολικότητας δ.

συνεπάγεται την μετάθεση της καμπύλης προς πάνω. Από την άλλη πλευρά, το g_p^v μεταβάλλεται και αυτό ανάλογα με την τασική όδευση. Συνεπώς, η κλίση της συνάρτησης δ αλλάζει. Για την περίπτωση των μονοτονικών φορτίσεων (π.χ. συμβατικές τριαξονικές θλίψεις), το g_p^v συνεχώς μειώνεται, δηλαδή κινείται προς τα αριστερά. Η σύνθετη αυτή μεταβολή του δ οδηγεί σε συστολή στο αρχικό στάδιο της φόρτισης και διαστολή στο τελικό. Η ένταση της συστολής/διαστολής εξαρτάται από την θέση του τασικού σημείου. Για την περιοχή των εφελκυσμών το g_p^v είναι πολύ κοντά στο μηδέν, συνεπώς ο ρυθμός συστολής είναι πολύ μικρός. Αντίθετα προβλέπεται συνεχώς αυξανόμενος ρυθμός διαστολής για μεγάλο εύρος τιμών g_p. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην περιοχή των εφελκυσμών το μοντέλο λειτουργεί κατά προσέγγιση γιατί ο κύριος μηχανισμός αστοχίας είναι ο εφελκυσμός και όχι η διάτμηση. Δηλαδή, το g_p^f είναι υπερεκτιμημένο. Από την άλλη πλευρά, στις υψηλές τάσεις περιορισμού το $g_p^v \to g_p^f$. Δηλαδή, το μοντέλο προβλέπει στην αρχή της φόρτισης πολύ υψηλό ρυθμό συστολής και διαστολή λίγο πριν την αστοχία. Θα πρέπει να τονισθεί ότι θετικό δ δεν σημαίνει ότι το υλικό έχει διασταλεί πλαστικά ως προς τον αρχικό του όγκο κατά την αστοχία. Δηλαδή, αν έχει συσσωρευτεί μεγάλη ποσότητα πλαστικής συστολής κατά τα αρχικά στάδια της φόρτισης τότε αυτή απλά θα μειωθεί λίγο πριν την αστοχία.

Με βάση την συνάρτηση δ μπορεί, εν τέλει, να υπολογισθεί ο κανόνας διαστολικότητας d. Αν συνδυαστούν οι Εξ. (4.70), (4.55), (4.56) και (4.69), προκύπτει η έκφραση για τον κανόνα διαστολικότητας

$$d = \frac{1}{3}\left[\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kk}} - 2\delta\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)\left(\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)}\right] \qquad (4.78)$$

Συνεπώς, μπορεί να υπολογισθεί και η παράγωγος του πλαστικού δυναμικού από την Εξ. (4.69).

4.3.4 Αλγόριθμος

Η βαθμονόμηση του ελαστοπλαστικού καταστατικού μοντέλου απαιτεί συνολικά οκτώ παραμέτρους. Ο πρώτες τρεις παράμετροι είναι οι τιμές σ_0, σ_c και β (ή ισοδύναμα η σ_{bc}) που προκύπτουν από την βαθμονόμηση του κριτηρίου αστοχίας. Οι υπόλοιπες πέντε παράμετροι υπολογίζονται από το πείραμα της μονοαξονικής θλίψης. Ονομαστικά είναι: οι δύο ελαστικές παράμετροι E και ν, οι δύο παράμετροι για τον κανόνα κράτυνσης σ_c^y και γ και η τάση σ_c^v για τον κανόνα διαστολικότητας. Εφόσον υπολογισθούν όλες οι παράμετροι, τότε, από το καταστατικό μοντέλο είναι δυνατόν να υπολογισθεί η σχέση μεταξύ των $\mathrm{d}\epsilon_{ij}$ και $\mathrm{d}\sigma_{ij}$. Για την μοντελοποίηση πολύπλοκων εντατικοπαραμορφωσιακών συνθηκών, απαιτούνται αριθμητικές μέθοδοι (π.χ. μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, μέθοδος πεπερασμένων διαφορών). Αν, όμως, είναι γνωστή από πριν η τασική ή η παραμορφωσιακή όδευση και η γεωμετρία είναι απλή, τότε το καταστατικό μοντέλο μπορεί να αποδοθεί με την μορφή απλού αλγορίθμου.

Για τα συμβατικά πειράματα μονοαξονικής/τριαξονικής θλίψης και τα πειράματα μονοαξονικού εφελκυσμού είναι γνωστή από πριν η όδευση του τασικού σημείου. Συνεπώς, για τα πειράματα αυτά, μπορεί να κατασκευαστεί αλγόριθμος που υπολογίζει το $\mathrm{d}\epsilon_{ij}$ συναρτήσει του $\mathrm{d}\sigma_{ij}$. Κατ' επέκταση μπορεί να αναπαραχθεί όλη η καμπύλη φόρτισης μέχρι την αστοχία.

Έστω ότι η αρχική εντατικοπαραμορφωσιακή κατάσταση του υλικού δίδεται από τους τανυστές σ_{ij} και ϵ_{ij}. Επίσης, έστω ότι είναι γνωστό το $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ για κάθε κύκλο και το αρχικό $g_p = 0$. Τότε, τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα ακόλουθα:

1. Αρχικά υπολογίζονται οι παράμετροι a_0, a_∞, g_p^f και λ από τις Εξ. (4.61), (4.68), (4.65) και (4.75). Επίσης, τίθεται $a = a_0$.

2. Υπολογίζεται η μεταβολή στην ελαστική παραμόρφωση από την Εξ. (4.49)
$$\mathrm{d}\epsilon_{ij}^e = D_{ijkl}\mathrm{d}\sigma_{kl} \tag{4.79}$$

3. Υπολογίζεται η f_H από την Εξ. (3.73)
$$f_H(p, T, \theta) = T - \tilde{f}_H(p, \theta) \tag{4.80}$$
όπου αντί της τάσης αστοχίας σ_c χρησιμοποιείται η σ_c^y του προηγούμενου κύκλου. Το p και το θ υπολογίζεται από τον τανυστή σ_{ij}, επίσης του προηγούμενου κύκλου.

4. Υπολογίζεται η παράγωγος της f_H ως προς τον σ_{ij} του προηγούμενου κύκλου από την Εξ. (Γ.18).

5. Γίνεται έλεγχος αν ικανοποιούνται οι συνθήκες ελαστοπλαστικής παραμόρφωσης από την Εξ. (4.60)
$$\begin{aligned} f_H &= 0 \\ \frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} &> 0 \end{aligned} \tag{4.81}$$
Αν ικανοποιούνται, ακολουθεί το επόμενο Βήμα 6. Αλλιώς, $\mathrm{d}\epsilon_{ij} = \mathrm{d}\epsilon_{ij}^e$ και γίνεται προώθηση στο Βήμα 20.

6. Υπολογίζεται η τιμή του σημείου ισόχωρης πλαστικής παραμόρφωσης g_p^v από την Εξ. (4.75)
$$\frac{g_p^v}{g_p^f} = 1 - \left[\sin\left(\pi \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \frac{T}{\sigma_0 - p}\right)\right]^\lambda \tag{4.82}$$

7. Υπολογίζεται η τιμή του συντελεστή διαστολής δ από την Εξ. (4.77)
$$\delta = \frac{3}{2}\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kk}}\left(1 - \sqrt{\frac{g_p^f - g_p}{g_p^f - g_p^v}}\right) \tag{4.83}$$

8. Υπολογίζεται η τιμή του κανόνα διαστολικότητας d από την Εξ. (4.78)
$$d = \frac{1}{3}\left[\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kk}} - 2\delta\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)\left(\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)}\right] \tag{4.84}$$

9. Υπολογίζεται η παράγωγος του πλαστικού δυναμικού από την Εξ. (4.69)

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}} - d\delta_{ij} \tag{4.85}$$

10. Υπολογίζεται η παράγωγος της f_H ως προς τον κανόνα κράτυνσης a από την Εξ. (Γ.42).

11. Υπολογίζεται η παράγωγος του κανόνα κράτυνσης a ως προς το g_p του προηγούμενου κύκλου από την Εξ. (4.65)

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}g_p} = \gamma \left(a_\infty - a_0\right) e^{-\gamma g_p} \tag{4.86}$$

12. Υπολογίζεται το μέτρο κράτυνσης κ από την Εξ. (4.57)

$$\kappa = -2\frac{\partial f_H}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}g_p}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)} \tag{4.87}$$

13. Υπολογίζεται ο πλαστικός πολλαπλασιαστής $\dot{\psi}$ από την Εξ. (4.58)

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} \tag{4.88}$$

14. Υπολογίζεται η μεταβολή των πλαστικών παραμορφώσεων $\mathrm{d}\epsilon_{ij}^p$ από την Εξ. (4.54)

$$\mathrm{d}\epsilon_{ij}^p = \dot{\psi}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.89}$$

15. Υπολογίζεται η συνολική μεταβολή των παραμορφώσεων $\mathrm{d}\epsilon_{ij}$ από την Εξ. (4.48)

$$\mathrm{d}\epsilon_{ij} = \mathrm{d}\epsilon_{ij}^e + \mathrm{d}\epsilon_{ij}^p \tag{4.90}$$

16. Υπολογίζεται η μεταβολή $\mathrm{d}g_p$ από την Εξ. (4.56)

$$\mathrm{d}g_p = 2\dot{\psi}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3}\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kk}}\delta_{ij}\right)} \tag{4.91}$$

17. Αυξάνεται η τιμή της g_p κατά $\mathrm{d}g_p$

$$g_p = g_p + \mathrm{d}g_p \tag{4.92}$$

18. Υπολογίζεται η νέα τιμή του a από την Εξ. (4.65)

$$a = a_\infty + \left(a_0 - a_\infty\right) e^{-\gamma g_p} \tag{4.93}$$

19. Υπολογίζεται η νέα τάση διαρροής σ_c^y από την Εξ. (4.61)

$$\sigma_c^y = \sigma_0 - \beta\sqrt{\sigma_0\left(2a + \sigma_0\right)} \tag{4.94}$$

Πίνακας 4.1: Ελαστοπλαστικές παράμετροι μαρμάρου Lorano.

Παράμετρος	Τιμή	Παράμετρος	Τιμή
σ_0 (MPa)	7.4	ν	0.3
σ_c (MPa)	-79.4	σ_c^y (MPa)	$0.114\sigma_c$
β	1.001	γ	2150
E (GPa)	53.7	σ_c^v (MPa)	$0.890\sigma_c$

20. Υπολογίζονται και καταγράφονται οι νέες τιμές των σ_{ij} και ϵ_{ij} για τον τρέχοντα κύκλο
$$\sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^{n-1} + \mathrm{d}\sigma_{ij} \tag{4.95}$$
$$\epsilon_{ij}^n = \epsilon_{ij}^{n-1} + \mathrm{d}\epsilon_{ij} \tag{4.96}$$

21. Αν $\sigma_c^y < \sigma_c$ ή ισοδύναμα $g_p > g_p^f$ τότε έχει επιτευχθεί η τάση αστοχίας και ο αλγόριθμος σταματά. Διαφορετικά εκτελείται νέος κύκλος αρχίζοντας από το Βήμα 2

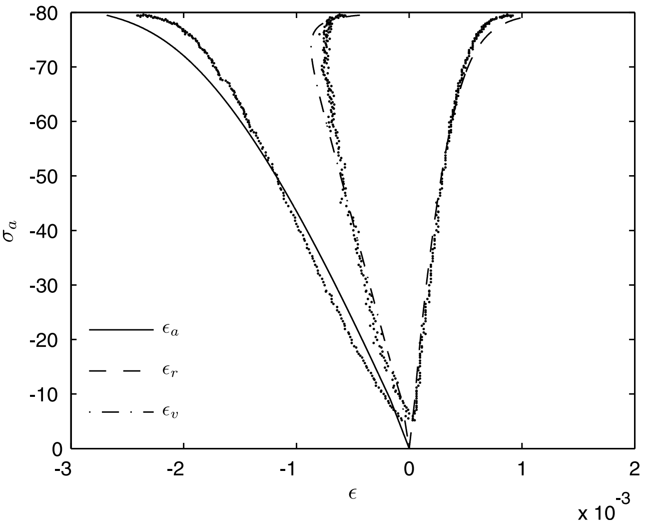
4.3.5 Παράδειγμα

Ως παράδειγμα εφαρμογής του ελαστοπλαστικού μοντέλου χρησιμοποιήθηκε το μάρμαρο Lorano για το οποίο είχε ήδη βαθμονομηθεί το υπερβολικό κριτήριο αστοχίας (βλ. και Υποκεφάλαιο 3.4). Στον Πιν. 4.1 συνοψίζονται οι βαθμονομημένες παράμετροι του καταστατικού μοντέλου.

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τις παραμέτρους, η τιμή της β προβλέπει $\sigma_{bc} = \sigma_c$. Ο λόγος είναι ότι δεν υπήρχαν διαθέσιμα δεδομένα εκτός του μεσημβρινού της θλίψης και μακριά από την περιοχή των εφελκυσμών (βλ. και Υποκεφάλαιο 3.4.3). Παρόλα αυτά, το γεγονός αυτό δεν επηρεάζει τον μεσημβρινό της θλίψης στις χαμηλές τάσεις περιορισμού. Επίσης, η επίδραση στην περιοχή των εφελκυσμών είναι ελάχιστη λόγω της ισχυρής συμπεριφοράς Rankine σε αυτή την περιοχή.

Στο Σχ. 4.18 παρουσιάζεται το πείραμα μονοαξονικής θλίψης στο οποίο έγινε η βαθμονόμηση του μοντέλου. Η τάση στις πειραματικές καμπύλες έχει κανονικοποιηθεί ώστε κατά την αστοχία να είναι ίση με την πρόβλεψη του βαθμονομημένου υπερβολικού κριτηρίου αστοχίας. Η απόκλιση των πειραματικών δεδομένων από τις καμπύλες του μοντέλου οφείλονται κυρίως στην θεώρηση σταθερών ελαστικών παραμέτρων. Οι ελαστικές παράμετροι του υλικού εξαρτώνται από την μέση πίεση. Ειδικότερα, το ν και κυρίως το E αυξάνονται με την μέση πίεση ενώ στο μοντέλο χρησιμοποιήθηκε η μέση τιμή τους. Η εξάρτηση των ελαστικών σταθερών από την μέση πίεση επηρεάζει σημαντικά τα πειραματικά δεδομένα, γεγονός που φαίνεται πιο έντονα και στα υπόλοιπα πειράματα.

Στο Σχ. 4.19 συγκρίνονται οι προβλέψεις του βαθμονομημένου μοντέλου με τα αποτελέσματα των διαθέσιμων συμβατικών τριαξονικών δοκιμών. Στο Σχ. 4.20 παρουσιάζονται οι συγκρίσεις για το πείραμα βαθμονόμησης χωρίς κανονικοποίηση της αξονικής τάσης, δύο επιπλέον πειράματα μονοαξονικής θλίψης και ένα πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το πείραμα τριαξονικής θλίψης με πλευρική τάση 15 MPa δεν μπορεί να



Σχήμα 4.18: Κανονικοποιημένο πείραμα βαθμονόμησης: $\sigma_r = 0$ MPa.

μοντελοποιηθεί γιατί η τάση περιορισμού είναι μεγαλύτερη από την αρχική τάση διαρροής. Συνεπώς, το υλικό έχει ήδη παραμορφωθεί ελαστοπλαστικά πριν επιτευχθεί η τάση διαρροής του μοντέλου. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τα διαγράμματα, το μοντέλο προβλέπει σχετικά καλά την ελαστοπλαστική συμπεριφορά του υλικού. Ο κύριος λόγος των αποκλίσεων που παρατηρούνται είναι η εκτίμηση των ελαστικών σταθερών.

Οι ελαστικές σταθερές E, ν έχουν θεωρηθεί σταθερές στο μοντέλο. Όμως, από τις πειραματικές καμπύλες φαίνεται ότι εξαρτώνται από την μέση πίεση. Επιπλέον, η μεταβολή των ελαστικών σταθερών μπορεί να οφείλεται και στον τρόπο μέτρησης των παραμορφώσεων. Η θεώρηση, λοιπόν, σταθερών E και ν είναι ο κυριότερος λόγος της απόκλισης μεταξύ της πρόβλεψης και του πειράματος. Αν είχε χρησιμοποιηθεί ένας καταστατικός νόμος υπερελαστικού ή υποελαστικού υλικού, όπου τα E και ν είναι μεταβαλλόμενα, τότε τα αποτελέσματα θα ήταν καλύτερα. Από την μελέτη των πειραματικών καμπυλών προκύπτει ότι η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας έχει πολύ μεγαλύτερη επίδραση στις πειραματικές καμπύλες σε σχέση με την μεταβολή του λόγου του Poisson ν. Αν χρησιμοποιηθεί, για παράδειγμα, μεταβλητό E και το ν κρατηθεί σταθερό, τότε προκύπτουν οι καμπύλες των Σχ. 4.21 και 4.22. Το E υπολογίστηκε από τους κύκλους φόρτισης-αποφόρτισης του πειράματος βαθμονόμησης και δίδεται από την γραμμική σχέση (σε MPa)

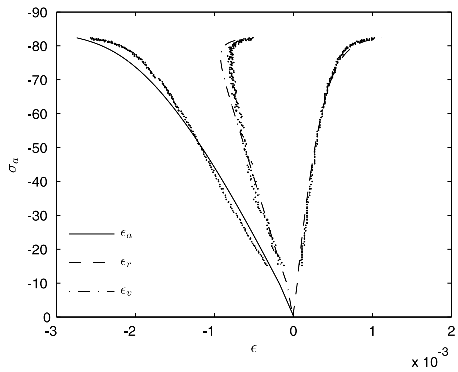
$$E = -1042p + 50556 \tag{4.97}$$

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τα διαγράμματα, το μεταβλητό μέτρο ελαστικότητας προκαλεί αισθητή βελτίωση των προσομοιώσεων. Συνεπώς, απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση του ελαστικού τμήματος του καταστατικού μοντέλου.

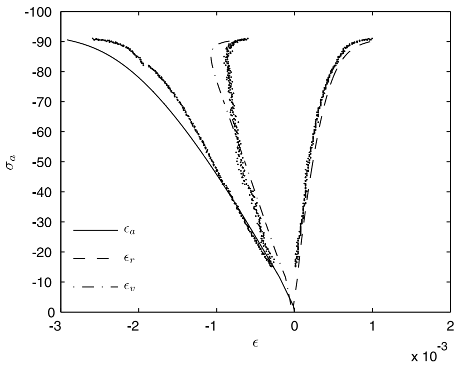
Ένας άλλος λόγος για την απόκλιση στις υψηλές τάσεις περιορισμού και λίγο πριν την αστοχία μπορεί να είναι και η θεώρηση σταθερού g_p^f, ως ιδιότητα του υλικού ή/και η κακή του εκτίμηση. Όταν επιβάλλονται υψηλές τάσεις περιορισμού, τότε ενδεχομένως το υλικό να μπορεί να παραλάβει μεγαλύτερες πλαστικές διατμητικές τροπές πριν την αστοχία. Επιπλέον, για μεγάλες υδροστατικές πιέσεις είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί η v_p για τον μηχανισμό κράτυνσης. Αν η ποσότητα g_p που μπορεί να συσσωρευτεί στο υλικό εξαρτάται από το συζευγμένο σύστημα φορτίων - υλικού, τότε θα πρέπει να διερευνηθεί αν το σύστημα αυτό είναι ενεργειακά ευσταθές. Με άλλα λόγια, αν συσσωρευτεί $g_p > g_p^f$ λίγο πριν την αστοχία και κατόπιν το υλικό αποφορτισθεί πλήρως, τότε το υλικό θα είναι ευσταθές ή θα αστοχήσει;

Τέλος, η απόκλιση του μοντέλου λίγο πριν την αστοχία μπορεί να οφείλεται και στο φαινόμενο της φθοράς. Η αύξηση της φθοράς έχει την έννοια της δημιουργίας μικρορωγμών στο υλικό οι οποίες τείνουν να προσανατολίζονται κάθετα στον άξονα της μέγιστης κύριας τάσης. Συνεπώς, η ενεργή διατομή του υλικού, η οποία παραλαμβάνει και τα φορτία, μειώνεται ανισότροπα. Σε ένα πείραμα συμβατικής τριαξονικής θλίψης οι μικρορωγμές θα τείνουν να προσανατολιστούν παράλληλα με την αξονική τάση. Η κατακόρυφη ενεργή διατομή, λοιπόν, θα μειωθεί πολύ πιο έντονα από την οριζόντια. Αυτό το φαινόμενο έχει ισχυρή επίδραση στο λόγο του Poisson ν και στις μετρούμενες πλευρικές παραμορφώσεις. Το φαινόμενο παρατηρείται έντονα και στο πείραμα του μονοαξονικού εφελκυσμού (Σχ. 4.20δ).

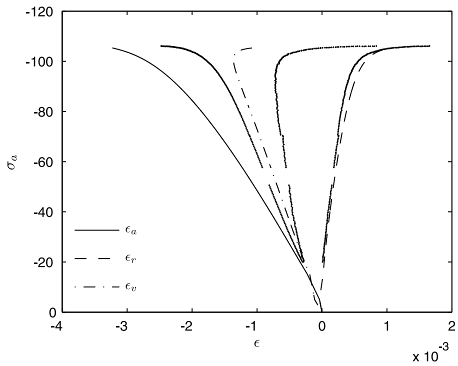
Συνοψίζοντας, η πρόβλεψη της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς του υλικού είναι εξαιρετικά πολύπλοκο και πολυπαραμετρικό φαινόμενο. Αν ληφθεί δε υπόψη και η ασάφεια για την ακρίβεια των πειραματικών μετρήσεων, τότε το πρόβλημα γίνεται ακόμη πιο δύσκολο. Το ίδιο αποτέλεσμα/πρόβλεψη μπορεί να επιτευχθεί από πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις. Το προτεινόμενο ελαστοπλαστικό μοντέλο, λοιπόν, είναι ικανοποιητικό για χαμηλές τάσεις περιορισμού ενώ για τις υπόλοιπες περιοχές απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση. Επίσης, το μοντέλο θα πρέπει να ελεγχθεί και σε πιο πολύπλοκες συνθήκες φόρτισης και γεωμετρίας μέσω αριθμητικών μεθόδων (π.χ. πεπερασμένα στοιχεία).



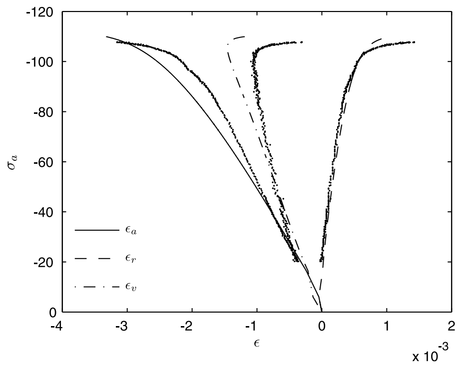
(α) $\sigma_r = -0.5$ MPa.



(β) $\sigma_r = -2$ MPa.

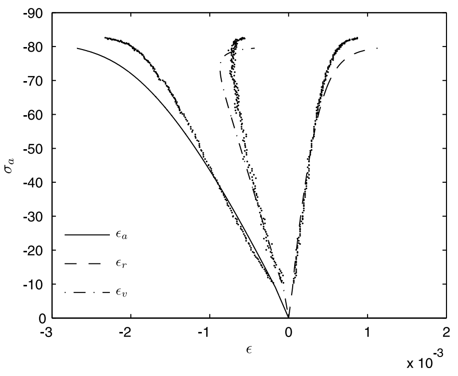


(γ) $\sigma_r = -5$ MPa.

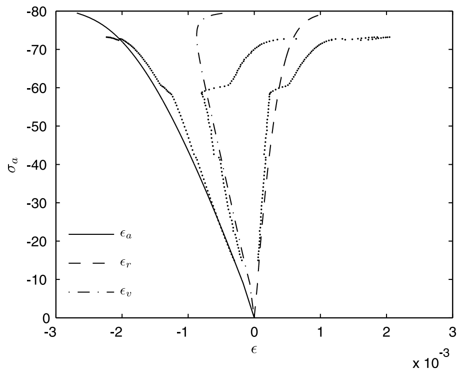


(δ) $\sigma_r = -6$ MPa.

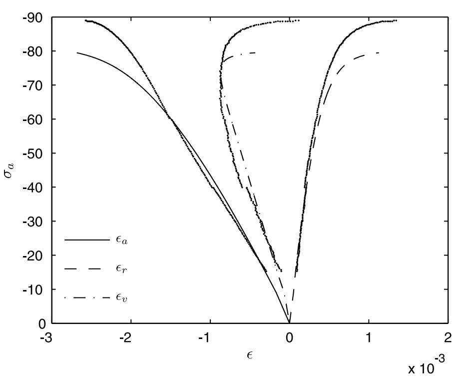
Σχήμα 4.19: Τριαξονικές δοκιμές μαρμάρου Lorano.



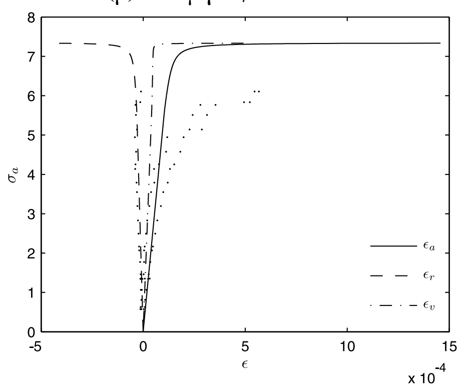
(α) Πείραμα βαθμονόμησης: $\sigma_r = 0$ MPa.



(β) Θλίψη: $\sigma_r = 0$ MPa.

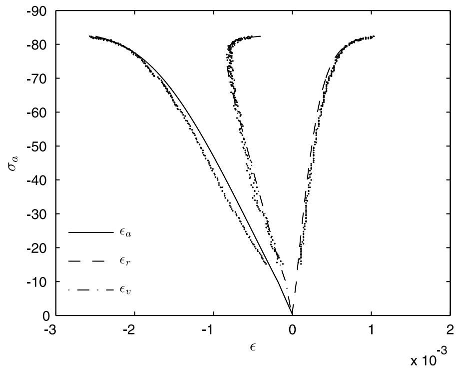


(γ) Θλίψη: $\sigma_r = 0$ MPa.

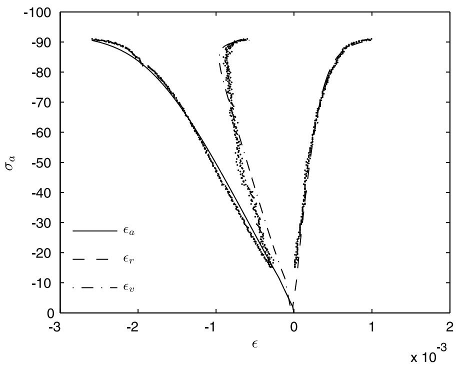


(δ) Εφελκυσμός: $\sigma_r = 0$ MPa.

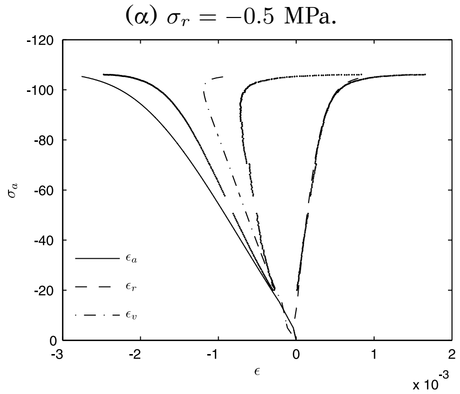
Σχήμα 4.20: Μονοαξονικές δοκιμές μαρμάρου Lorano.



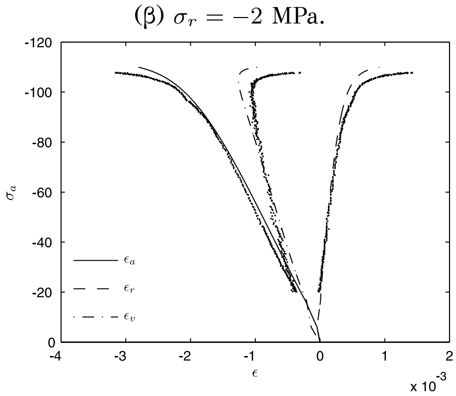
(α) $\sigma_r = -0.5$ MPa.



(β) $\sigma_r = -2$ MPa.

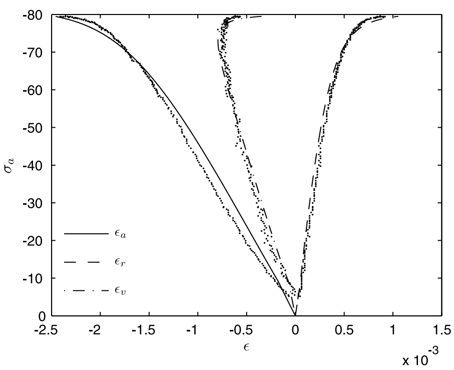


(γ) $\sigma_r = -5$ MPa.

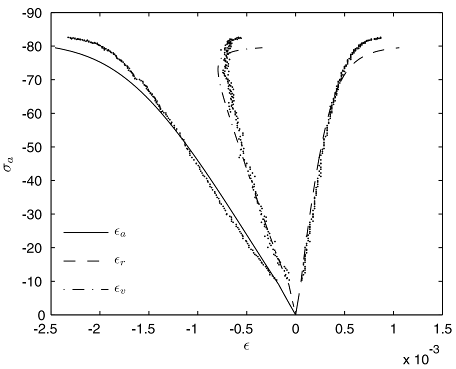


(δ) $\sigma_r = -6$ MPa.

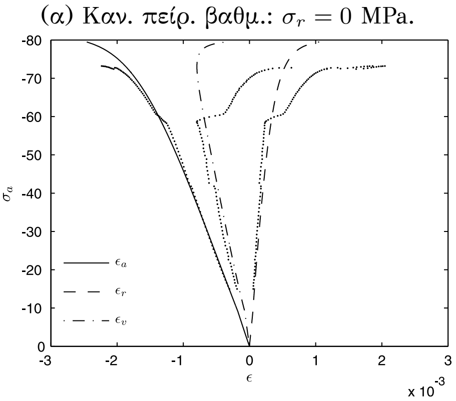
Σχήμα 4.21: Τριαξονικές δοκιμές μαρμάρου Lorano με μεταβλητό E.



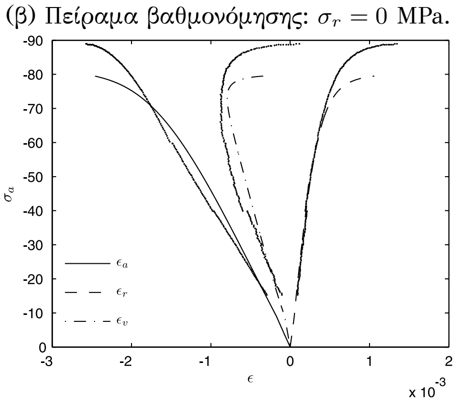
(α) Καν. πείρ. βαθμ.: $\sigma_r = 0$ MPa.



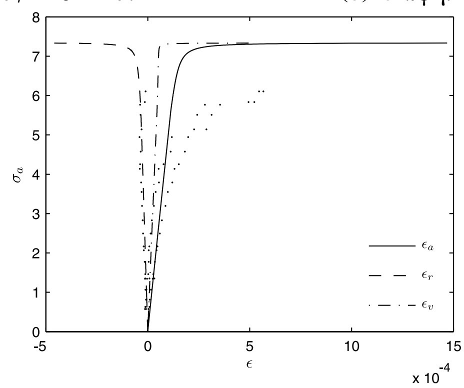
(β) Πείραμα βαθμονόμησης: $\sigma_r = 0$ MPa.



(γ) Θλίψη: $\sigma_r = 0$ MPa.



(δ) Θλίψη: $\sigma_r = 0$ MPa.



(ε) Εφελκυσμός: $\sigma_r = 0$ MPa.

Σχήμα 4.22: Μονοαξονικές δοκιμές μαρμάρου Lorano με μεταβλητό E.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα και προτάσεις

5.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα Διδακτορική Διατριβή προτάθηκε ένα υπερβολικό κριτήριο αστοχίας υλικών που επιδεικνύουν συνοχή, εσωτερική τριβή και διαστολικότητα. Η επιφάνεια διαρροής/κριτήριο αστοχίας βαθμονομείται με τρεις παραμέτρους οι οποίες έχουν ξεκάθαρη φυσική έννοια. Το κριτήριο περιγράφει καλά τόσο την περιοχή των εφελκυστικών τάσεων όσο και την περιοχή των θλιπτικών τάσεων ενώ λαμβάνει υπόψη και την επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης. Οι μεσημβρινοί του κριτηρίου περιγράφονται από υπερβολικές συναρτήσεις ενώ το ίχνος του στο αποκλίνον επίπεδο από μια ελλειπτική συνάρτηση. Το σχήμα στο αποκλίνον επίπεδο μεταβάλλεται από τριγωνοειδές σε κυκλικό με την αύξηση της θλιπτικής υδροστατικής πίεσης. Έτσι, επιτυγχάνεται ψαθυρή συμπεριφορά σε χαμηλές τάσεις περιορισμού και πλαστική σε υψηλές. Η βαθμονόμηση του μοντέλου δείχνει ότι συμφωνεί πολύ καλά με πολλά διαφορετικά πειραματικά δεδομένα και η απόδοσή του είναι καλύτερη ή ισάξια με τα περισσότερα ευρέως διαδεδομένα μοντέλα αστοχίας.

Για την βαθμονόμηση του προτεινόμενου ελαστοπλαστικού μοντέλου, απαιτούνται συνολικά πέντε επιπλέον παράμετροι. Όλες οι παράμετροι υπολογίζονται από το πείραμα της μονοαξονικής θλίψης. Για την ελαστική συμπεριφορά του μοντέλου, θεωρήθηκε ο γραμμικός νόμος του Hooke με σταθερές ελαστικές παραμέτρους. Για το φαινόμενο της πλαστικής κράτυνσης προτάθηκε ένας κανόνας κράτυνσης ο οποίος προκαλεί ανισότροπη κράτυνση στην υπερβολική επιφάνεια διαρροής. Το ιστορικό των μη αντιστρεπτών πλαστικών παραμορφώσεων και κατά επέκταση ο μηχανισμός του κανόνα κράτυνσης καθορίζονται από την πλαστική διατμητική οκταεδρική παραμόρφωση. Η τάση αστοχίας επιτυγχάνεται όταν συσσωρευτεί στο υλικό μια κρίσιμη ποσότητα πλαστικής διατμητικής παραμόρφωσης η οποία θεωρείται ιδιότητα του υλικού. Για το φαινόμενο της διαστολικότητας προτάθηκε ένας κανόνας διαστολικότητας που λαμβάνει υπόψη του την θέση του τασικού σημείου στο χώρο των τάσεων. Τέλος, το φαινόμενο της φθοράς δεν λήφθηκε υπόψη.

Από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων προέκυψε ότι το ελαστοπλαστικό μοντέλο προβλέπει σχετικά καλά την συμπεριφορά του υλικού για χαμηλές τάσεις περιορισμού. Οι αποκλίσεις που παρατηρούνται οφείλονται κυρίως στη θεώρηση σταθερών ελαστικών παραμέτρων. Επίσης, επίδραση έχουν και οι θεωρήσεις του κανόνα κράτυνσης αλλά και η αγνόηση του φαινομένου της φθοράς.

Τέλος, στα πλαίσια της παρούσας Διατριβής, κατασκευάστηκε σχεσιακή βάση δεδομένων για πειράματα Μηχανικής Πετρωμάτων. Όλες οι παράμετροι του καταστατικού μοντέλου βαθμονομήθηκαν σε διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα τα οποία έχουν καταχωρηθεί στη βάση αυτή.

5.2 Προτάσεις

Από την ανάπτυξη του υπερβολικού καταστατικού μοντέλου προέκυψαν διάφορα ερωτήματα που απαιτούν περαιτέρω διερεύνηση. Όσον αφορά το κριτήριο αστοχίας, θα μπορούσε να μελετηθεί η πιθανότητα να μετατραπεί σε κλειστή επιφάνεια και από την πλευρά της υδροστατικής θλίψης. Αυτό πιθανότατα θα απαιτούσε την προσάρτηση μιας συνάρτησης η οποία μειώνει ομαλά την διατμητική τάση με την αύξηση της θλιπτικής πίεσης. Μια τέτοια συνάρτηση θα απαιτούσε μια ή και επιπλέον παραμέτρους για την βαθμονόμησή της.

Όσον αφορά το ελαστοπλαστικό μοντέλο, υπάρχουν διάφορα θέματα τα οποία απαιτούν περαιτέρω μελέτη. Σε γενικές γραμμές συνοψίζονται στα παρακάτω:

1. Όπως παρουσιάσθηκε στις προσομοιώσεις, οι ελαστικές παράμετροι έχουν σημαντική επίδραση στην απόκριση του μοντέλου. Δηλαδή, η ελαστικότητα επηρεάζει την συμπεριφορά και την πρόβλεψη του συνολικού ελαστοπλαστικού μοντέλου. Ως πρώτο βήμα, λοιπόν, προτείνεται να διερευνηθεί η πιθανότητα χρήσης μη γραμμικού ελαστικού μοντέλου.

2. Η θεώρηση μιας σταθερής πλαστικής διατμητικής παραμόρφωσης κατά την αστοχία οδηγεί σε κριτήριο τύπου von Mises στο χώρο των πλαστικών παραμορφώσεων. Προτείνεται να εξετασθεί αν η θεώρηση αυτή είναι επαρκής ή απαιτείται διόρθωση. Επίσης, σε πιθανή διόρθωση θα πρέπει να μελετηθεί αν το υλικό παραμένει ενεργειακά ευσταθές.

3. Για να είναι το μοντέλο πιο πλήρες, θα μπορούσε να εισαχθεί η έννοια της φθοράς μέσω ενός επιπλέον δυναμικού.

4. Αν μετατραπεί η επιφάνεια διαρροής σε κλειστή και από τις δύο πλευρές του υδροστατικού άξονα, θα πρέπει να μεταβληθεί και ο κανόνας κράτυνσης. Θα μπορούσε να μελετηθεί η πιθανότητα να χρησιμοποιηθεί το πλαστικό έργο ως ιστορικό των πλαστικών παραμορφώσεων και κατ' επέκταση ως ελεύθερη παράμετρος του κανόνα κράτυνσης.

5. Τέλος, προτείνεται η εισαγωγή του μοντέλου σε κώδικες πεπερασμένων στοιχείων/διαφορών ώστε να μελετηθεί η απόκρισή του σε πιο σύνθετες συνθήκες φόρτισης και γεωμετρίας.

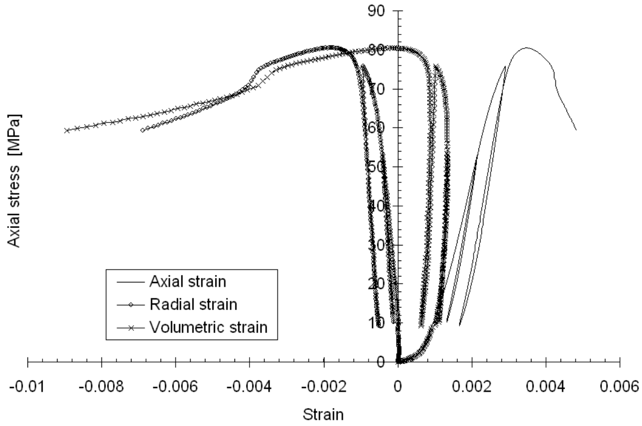
Παράρτημα Α

Αναλυτική περιγραφή σχεσιακής βάσης δεδομένων

Ο μεγάλος αριθμός των εργαστηρίων που ασχολούνται με πειράματα βραχομηχανικής ή εδαφομηχανικής σε συνδυασμό με τις πολλές παραμέτρους που εισέρχονται σε κάθε τύπο πειράματος έχει οδηγήσει στην παραγωγή ενός μεγάλου αριθμού δεδομένων. Τα δεδομένα αυτά μπορεί να μην είναι συμβατά μεταξύ τους και άρα μη συγκρίσιμα, να είναι ελλιπή όσον αφορά ουσιώδεις πληροφορίες επί του πειράματος, να είναι δύσκολα προσβάσιμα κλπ. Στην παρούσα Διδακτορική Διατριβή έχει κατασκευαστεί μια βάση δεδομένων πειραμάτων μηχανικής πετρωμάτων η οποία συμβάλλει στην τυποποίηση των πειραμάτων, συμπεριλαμβάνει όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες τόσο επί του κάθε πειράματος όσο και επί των πετρωμάτων και είναι εύκολα προσβάσιμη μέσω του διαδικτύου. Η βάση δεδομένων περιορίζεται στην συγκεκριμένη Διατριβή μόνο σε πειράματα μηχανικής πετρωμάτων αλλά η δομή της είναι τέτοια, ώστε μπορεί να επεκταθεί εύκολα τόσο όσον αφορά τα εδάφη όσο και όσον αφορά την προσθήκη νέων τύπων πειραμάτων.

Α.1 Μεθοδολογία επεξεργασίας δεδομένων

Για την επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων έχει αναπτυχθεί μια μεθοδολογία η οποία περιλαμβάνει διακριτά βήματα ή επίπεδα επεξεργασίας. Στην παρούσα βάση δεδομένων αποθηκεύονται μόνο τα δυο πρώτα επίπεδα ανάλυσης τα οποία αποτελούν και την βασική ανάλυση ενώ η μεθοδολογία για τα ανώτερα επίπεδα ανάλυσης περιγράφεται κατά την ανάπτυξη των τμημάτων του καταστατικού μοντέλου. Το πρώτο επίπεδο επεξεργασίας - το Επίπεδο Μηδέν - περιλαμβάνει τα ανεπεξέργαστα δεδομένα (π.χ. χρόνος, δυνάμεις, μετατοπίσεις κλπ.), δεδομένα που αφορούν την γεωμετρία του δοκιμίου, την πειραματική διάταξη και τη διαδικασία. Στο αμέσως επόμενο επίπεδο, το Επίπεδο Α, γίνεται επεξεργασία των πειραματικών καμπυλών και εξάγονται βασικές μηχανικές ιδιότητες των δοκιμίων (π.χ. μέτρο ελαστικότητας, λόγος Poisson κλπ.). Ο υπολογισμός πιο πολύπλοκων ιδιοτήτων των πετρωμάτων όπως οι πλαστικές παράμετροι του πε-



Σχήμα A.1: Πείραμα συμβατικής τριαξονικής θλίψης.

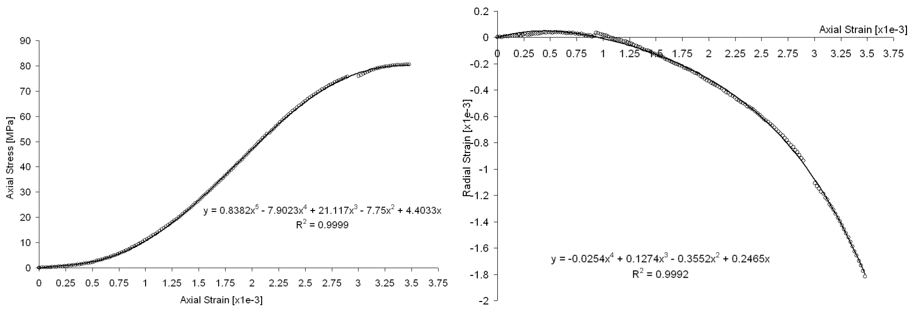
τρώματος, η εύρεση της επιφάνειας διαρροής κλπ. δεν αποθηκεύονται σε πρώτη φάση στην βάση δεδομένων αλλά αποτελούν μέρος της μεθοδολογίας που έχει αναπτυχθεί για την βαθμονόμηση του καταστατικού μοντέλου. Για λόγους απλότητας θα δοθεί μια σύντομη περιγραφή της επεξεργασίας που γίνεται μόνο για τα πειράματα μονοαξονικής-τριαξονικής θλίψης. Η περιγραφή για τα υπόλοιπα πειράματα που αποθηκεύονται στην βάση μπορούν να βρεθούν στο άρθρο των Liolios and Exadaktylos [2011]. Για όλες τις παραμέτρους που ακολουθούν και έχουν μονάδα μέτρησης θα χρησιμοποιείται το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI).

Σε ένα τυπικό πείραμα μονοαξονικής ή συμβατικής τριαξονικής θλίψης [Brown, 1981] το δοκίμιο, το οποίο είναι συνήθως κυλινδρικό, φορτίζεται αξονοσυμμετρικά με αξονικές και ακτινικές τάσεις. Όταν οι ακτινικές τάσεις είναι ίσες με μηδέν τότε το πείραμα χαρακτηρίζεται ως μονοαξονική θλίψη ενώ όταν είναι διάφορες του μηδενός τότε θεωρείται συμβατική τριαξονική θλίψη με τις δύο κύριες τάσεις ίσες. Κατά την διάρκεια του πειράματος μεταβάλλεται και μετράται η αξονική δύναμη F. Επίσης μετρώνται η αξονική παραμόρφωση ϵ_a και η ακτινική παραμόρφωση ϵ_r. Η αξονική τάση υπολογίζεται από την σχέση:

$$\sigma_a = \frac{F}{\pi D^2/4} \tag{A.1}$$

όπου F είναι η εφαρμοζόμενη αξονική δύναμη και D είναι η διάμετρος του δοκιμίου. Στο Σχ. A.1 φαίνονται τα δεδομένα που καταγράφονται κατά την διάρκεια ενός πειράματος μονοαξονικής/τριαξονικής θλίψης σε μια τυπική γραφική παράσταση της αξονικής τάσης σε σχέση με την αξονική, την ακτινική και την ογκομετρική παραμόρφωση. Από αυτά τα δεδομένα και με κατάλληλη επεξεργασία υπολογίζονται οι βασικές παράμετροι του πετρώματος όπως η τάση αστοχίας, το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος του Poisson ν.

Στη συνέχεια, στο επόμενο επίπεδο ανάλυσης, η παρατηρούμενη μηχανική συμπεριφορά περιγράφεται με απλές μαθηματικές σχέσεις. Καταρχήν, θεωρώντας μόνο τον κύριο κλάδο φόρτισης (παραλείποντας προσωρινά τους



(α) Αξονική τάση ως προς την αξονική παραμόρφωση.

(β) Αξονική ως προς την ακτινική παραμόρφωση.

Σχήμα A.2: Κύριοι κλάδοι φόρτισης.

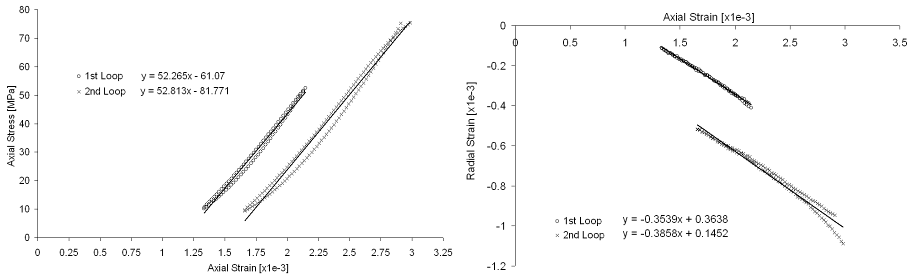
κύκλους φόρτισης - αποφόρτισης) η διαδρομή φόρτισης του δοκιμίου μέχρι την αστοχία μπορεί να απεικονισθεί με τις γραφικές παραστάσεις της αξονικής τάσης και της ακτινικής παραμόρφωσης σε σχέση με την αξονική παραμόρφωση. Στα Σχ. A.2α και A.2β δίδεται ένα παράδειγμα αυτών των γραφικών απεικονίσεων. Κατόπιν, στα δεδομένα αυτών των γραφικών παραστάσεων εφαρμόζεται παλινδρόμηση με απλά πολυώνυμα της μορφής:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \\ 1000\epsilon_r &= b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots, \\ x &= 1000\epsilon_a \end{aligned} \tag{A.2}$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι παραμορφώσεις αυξάνονται κατά τρεις τάξεις μεγέθους ώστε να αποφευχθούν οι πολύ μικροί συντελεστές στα πολυώνυμα.

Όπως αναφέρθηκε, κατά την διάρκεια του πειράματος μπορεί να εκτελεστούν κύκλοι φόρτισης αποφόρτισης με σκοπό να εξαχθούν οι ελαστοπλαστικές ιδιότητες του υλικού. Από τις γραφικές παραστάσεις που φαίνονται στα Σχ. A.3α και A.3β μπορεί να παρατηρηθεί ότι οι κύκλοι φόρτισης αποφόρτισης μπορεί να εμφανίζουν υστέρηση. Στο πρώτο επίπεδο ανάλυσης Α, η υστέρηση θα αγνοηθεί για λόγους απλότητας και σε κάθε κύκλο θα εφαρμοστεί παλινδρόμηση με ευθύγραμμα τμήματα. Το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος του Poisson ν που αντιστοιχούν σε κάθε κύκλο υπολογίζονται ως η κλίση του κάθε ευθύγραμμου τμήματος. Οι παράμετροι αυτοί αντιστοιχούν σε μια ποσότητα αξονικής πλαστικής τροπής ϵ_a^{pl} η οποία αυξάνεται στο δοκίμιο κατά την διαδικασία της φόρτισης. Για κάθε κύκλο, η αξονική πλαστική τροπή μπορεί να υπολογιστεί ως το σημείο τομής του οριζόντιου άξονα των αξονικών παραμορφώσεων με την ευθεία που αντιστοιχεί στον κύκλο φόρτισης αποφόρτισης.

Οι ελαστικές παράμετροι (E,ν) που υπολογίζονται στο επίπεδο Α, απεικονίζονται γραφικά ως προς την αξονική πλαστική τροπή. Γενικά, για την γραφική απεικόνιση των ελαστικών παραμέτρων σε σχέση με την αξονική πλαστική τροπή πριν τη αστοχία, απαιτούνται τουλάχιστον τρεις κύκλοι φόρτισης/αποφόρτισης: σε μικρή, μέση και κοντά στην αστοχία τάση [Martin and Chandler, 1994]. Η εξάρτηση του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson από την αξονική πλαστική τροπή μπορεί κατόπιν να περιγραφεί



(α) Αξονική τάση ως προς την αξονική παραμόρφωση.

(β) Αξονική ως προς την ακτινική παραμόρφωση.

Σχήμα Α.3: Κύκλοι φόρτισης - αποφόρτισης.

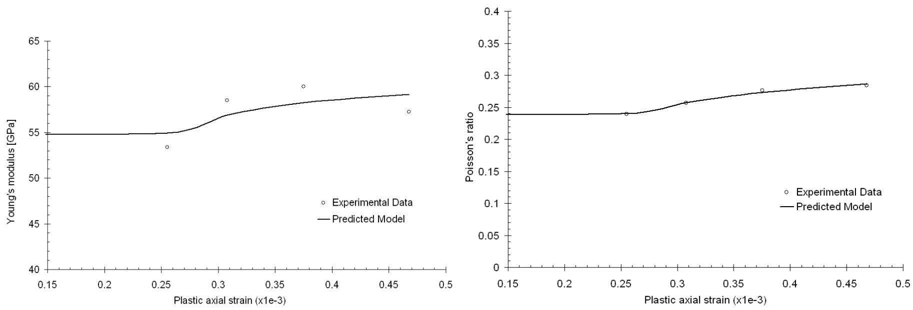
ποσοτικά με απλά μαθηματικά μοντέλα. Για παράδειγμα (βλ. Σχ. Α.4α και Α.4β)

$$E = \begin{cases} E_0 & \text{αν } 0 \le \epsilon_a^{pl} < \epsilon_{a(lim)}^{pl} \\ E_{ct}\left(1 - e^{-\dfrac{\epsilon_a^{pl}}{b_E}}\right) & \text{αν } \epsilon_a^{pl} \ge \epsilon_{a(lim)}^{pl} \end{cases}$$
$$\nu = \begin{cases} \nu_0 & \text{αν } 0 \le \epsilon_a^{pl} < \epsilon_{a(lim)}^{pl} \\ \nu_{ct}\left(1 - e^{-\dfrac{\epsilon_a^{pl}}{b_\nu}}\right) & \text{αν } \epsilon_a^{pl} \ge \epsilon_{a(lim)}^{pl} \end{cases} \tag{A.3}$$

όπου E_0, ν_0 είναι το αρχικό μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος του Poisson όταν οι πόροι και οι μικρορωγμές του πετρώματος είναι ακόμη ανοικτά. E_{ct}, b_E, ν_{ct} και b_ν είναι παράμετροι που υπολογίζονται με παλινδρόμηση στα δεδομένα με τα E_{ct}, ν_{ct} να είναι οι ασυμπτωτικές τιμές του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson αντίστοιχα. Οι τροπές και σε αυτή την περίπτωση έχουν αυξηθεί κατά τρεις τάξεις μεγέθους ώστε να αποφευχθούν πολύ μικρές τιμές στα b_E και b_ν. Το όριο $\epsilon_{a(lim)}^{pl}$ είναι η αξονική πλαστική τροπή πέρα από την οποία τα E και ν εξαρτώνται από την παραμόρφωση και ορίζεται ίση με την πλαστική τροπή που αντιστοιχεί στην πλαστική τροπή του πρώτου κύκλου φόρτισης. Οι ελαστικές παράμετροι E_0 και ν_0 πριν από αυτήν την πλαστική τροπή θεωρούνται σταθερές εφόσον η συμπεριφορά τους δεν μπορεί να προβλεφθεί και υπολογίζονται από την σχέση (Α.3) για $\epsilon_a^{pl} = \epsilon_{a(lim)}^{pl}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι είναι πολύ σημαντικό να εκτιμηθούν σωστά οι ελαστικές παράμετροι του υλικού για την καλή βαθμονόμηση των πλαστικών του ιδιοτήτων σε ένα ανώτερο επίπεδο ανάλυσης.

Α.2 Δομή της σχεσιακής βάσης δεδομένων

Η βάση δεδομένων περιλαμβάνει και τα πέντε πειράματα που προαναφέρθηκαν, όμως, στα πλαίσια της παρούσας Διατριβής θα περιγραφεί η δομή



(α) Μέτρο ελαστικότητας. (β) Λόγος Poisson.

Σχήμα A.4: Ελαστικές παράμετροι ως προς την αξονική πλαστική τροπή.

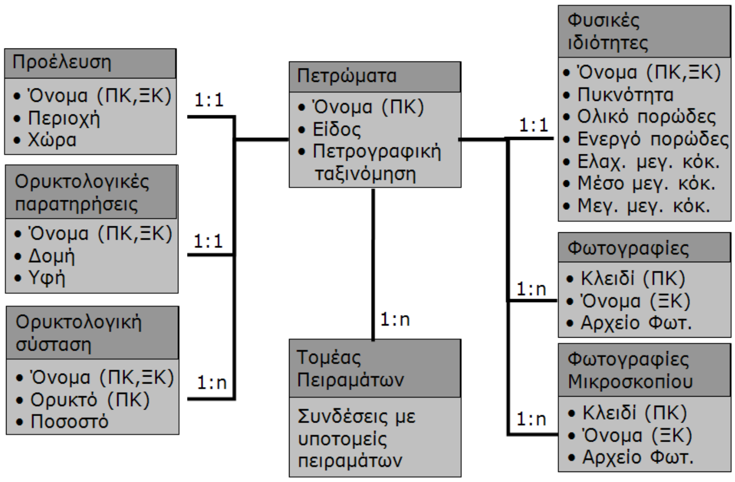
μόνο για τα πειράματα μονοαξονικής-τριαξονικής θλίψης. Η δομή για τα υπόλοιπα πειράματα μπορεί να βρεθεί στο Liolios and Exadaktylos [2011]. Στην βάση δεδομένων εκτός από τα πειράματα αποθηκεύονται και αναλυτικές πληροφορίες που αφορούν τα πετρώματα τα οποία υποβλήθηκαν σε δοκιμές καθώς επίσης και πληροφορίες για τα εργαστήρια που διεξήγαγαν τις πειραματικές δοκιμές. Έτσι δίδεται η δυνατότητα να συνδυαστούν οι πληροφορίες με αποτέλεσμα την εξαγωγή σύνθετων συμπερασμάτων. Για να επιτευχθεί το τελευταίο, η βάση στηρίζεται σε ένα *Σύστημα Διαχείρισης Σχεσιακών Βάσεων Δεδομένων* (Relational Database Management System (RDBMS)) [Codd, 1970] και χρησιμοποιεί την ευρέως διαδεδομένη *Δομημένη Γλώσσα Ερωτήσεων* (Structured Query Language (SQL)) [Chamberlin and Boyce, 1974]. Αποτελείται από τρία τμήματα ή τομείς τα οποία αντιστοιχούν στα δεδομένα για τα πετρώματα, τα πειράματα και τα εργαστήρια. Η βάση είναι σχεδιασμένη ακολουθώντας την 3η Κανονική Μορφή (3rd Normal Form (3NF)) σύμφωνα με τον Codd [1970] με σκοπό την μείωση του όγκου των δεδομένων. Έτσι επιτυγχάνεται αφενός η εξάλειψη των πολλαπλών αποθηκεύσεων για τις ίδιες παραμέτρους και αφετέρου αυξάνεται η ευελιξία και η ανθεκτικότητα της βάσης [Maier, 1983].

Παράλληλα με την βάση αναπτύχθηκε και μια διαδικτυακή εφαρμογή σε Java για την διαχείρισή της. Η εφαρμογή βασίζεται στην τεχνική προγραμματισμού Ελεγκτής - Μοντέλο - Όψη (Model - View - Controller [MVC]) [Trygve, 1979; Burbeck, 1987]. Τα πλεονεκτήματα αυτής της εφαρμογής είναι ότι επιτρέπει την πρόσβαση στη βάση μέσω του διαδικτύου και ταυτόχρονα τυποποιεί τα πειραματικά δεδομένα μεταξύ των διάφορων εργαστηρίων.

A.2.1 Τομέας πετρωμάτων

Το τμήμα του σχεσιακού διαγράμματος που αφορά στον τομέα των πετρωμάτων φαίνεται στο Σχ. A.5. Κάθε πλαίσιο στο Σχ. A.5 αντιπροσωπεύει και ένα πίνακα στην βάση. Το όνομα του κάθε πίνακα φαίνεται στην επικεφαλίδα του πλαισίου (σκουρόχρωμη γκρι περιοχή) ενώ κάτω από το κάθε όνομα φαίνεται η λίστα με τις παραμέτρους που αποθηκεύονται στον πίνακα (ανοιχτόχρωμη γκρι περιοχή).

Ο τομέας των πετρωμάτων αποτελείται από επτά πίνακες. Ο πίνακας *Πετρώματα* περιέχει απαραίτητες πληροφορίες για τα πετρώματα που απο-



Σχήμα Α.5: Τομέας πετρωμάτων.

θηκεύονται στην βάση και θεωρείται ως ο πρωτεύων πίνακας του τομέα. Οι απαραίτητες πληροφορίες, όπως φαίνεται στο Σχ. Α.5, είναι το όνομα του πετρώματος, το είδος του και η πετρογραφική του ταξινόμηση τα οποία δεν μπορούν να είναι κενά όταν εισάγεται ένα νέο πέτρωμα στην βάση. Το σύμβολο (ΠΚ) δίπλα στο όνομα του πετρώματος δηλώνει ότι η παράμετρος αυτή είναι το Πρωτεύον Κλειδί του πίνακα και προσδιορίζει την κάθε εγγραφή. Το πρωτεύον κλειδί είναι μοναδικό και εξασφαλίζει την μοναδικότητα της εγγραφής.

Επιπλέον του πρωτεύοντα πίνακα, υπάρχουν έξι δευτερεύοντες πίνακες που περιέχουν προαιρετικές πληροφορίες σχετικά με το κάθε πέτρωμα. Οι κατηγοριοποιημένες πληροφορίες που αποθηκεύονται σε κάθε πίνακα φαίνονται στο Σχ. Α.5. Ο πίνακας *Προέλευση* αποθηκεύει πληροφορίες για την προέλευση του πετρώματος δηλαδή την περιοχή και την χώρα από την οποία συλλέχθηκε. Στον πίνακα *Ορυκτολογικές παρατηρήσεις* αποθηκεύονται λεπτομερείς περιγραφές σχετικά με την δομή και την υφή του πετρώματος. Επιπλέον, μια λίστα με τα κύρια ορυκτά που απαρτίζουν το πέτρωμα καθώς και τις περιεκτικότητές τους αποθηκεύονται στον πίνακα *Ορυκτολογική σύσταση*. Άλλες σημαντικές πληροφορίες αφορούν στις μετρήσεις των φυσικών ιδιοτήτων του πετρώματος που αποθηκεύονται στον αντίστοιχο πίνακα. Η πυκνότητα καθώς και το ολικό και το ενεργό πορώδες αποθηκεύονται σε αυτόν τον πίνακα. Επιπλέον, το ελάχιστο, το μέγιστο και το μέσο μέγεθος κόκκου που αποθηκεύονται μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της κατανομής των κόκκων υποθέτοντας μια κατάλληλη συνάρτηση πυκνότητας. Τέλος, στους πίνακες *Φωτογραφίες* και *Φωτογραφίες μικροσκοπίου* αποθηκεύονται οι αντίστοιχες φωτογραφίες του πετρώματος.

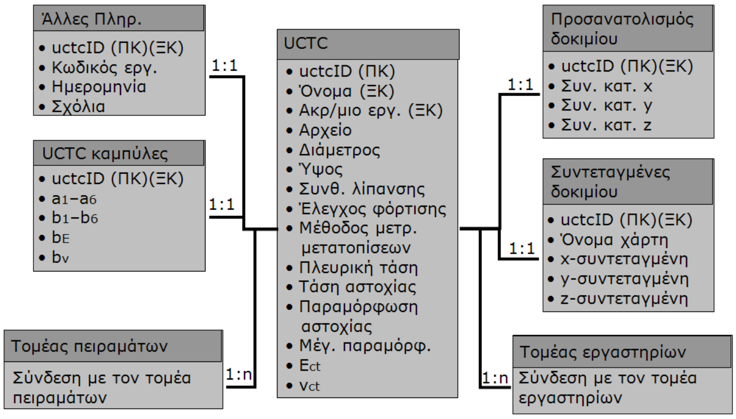
Μια σημαντική ιδιότητα στον σχεδιασμό της βάσης είναι ότι όταν υπάρχουν διαθέσιμες δευτερεύουσες πληροφορίες για ένα συγκεκριμένο πίνακα (π.χ. πληροφορίες σχετικά με την προέλευση του πετρώματος) τότε θα πρέπει να εισαχθούν όλες οι ιδιότητες στον συγκεκριμένο πίνακα (π.χ. στον πίνακα *Προέλευση* και η περιοχή και η χώρα προέλευσης πρέπει να εισαχθούν). Ένα άλλο σημαντικό σύμβολο στο Σχ. Α.5 είναι το σύμβολο του Ξένου Κλειδιού (ΞΚ) που φαίνεται δίπλα στο όνομα του πετρώματος στους δευτερεύοντες πίνακες. Τα ξένα κλειδιά διασφαλίζουν ότι το όνομα του πετρώματος που εισάγεται σε ένα δευτερεύοντα πίνακα υπάρχει και στον πρωτεύοντα πίνακα. Αυτό οδηγεί σε μια συσχέτιση μεταξύ του πρωτεύοντα και των δευτερευόντων πινάκων η τάξη της οποίας φαίνεται στην γραμμή σύνδεσης δίπλα σε κάθε δευτερεύοντα πίνακα. Μια σχέση $1:1$ ή ένα-προς-ένα υποδηλώνει ότι μία εγγραφή στον πρωτεύοντα πίνακα συσχετίζεται με μόνο μία εγγραφή στον δευτερεύοντα πίνακα (π.χ. ένα συγκεκριμένο πέτρωμα έχει μια συγκεκριμένη προέλευση). Οι σχέσεις $1:n$ ή ένα-προς-πολλά επιτρέπουν μια εγγραφή στον πρωτεύοντα πίνακα να συσχετίζεται με πολλές εγγραφές στον δευτερεύοντα πίνακα (π.χ. ένα πέτρωμα μπορεί να περιέχει πολλά ορυκτά). Σε περιπτώσεις σαν την τελευταία μπορεί να παρατηρηθεί ότι υπάρχουν δύο πρωτεύοντα κλειδιά (π.χ. πίνακας *Ορυκτολογική σύσταση*) τα οποία απαρτίζουν ένα σύνθετο πρωτεύον κλειδί. Αυτό εξασφαλίζει ότι μόνο ο συνδυασμός αυτών των δύο παραμέτρων πρέπει να είναι μοναδικός στον πίνακα (π.χ. στον πίνακα *Ορυκτολογική σύσταση* ένα συγκεκριμένο ορυκτό σε ένα συγκεκριμένο πέτρωμα μπορεί να καταχωρηθεί μόνο μια φορά). Επιπλέον, υπάρχουν περιπτώσεις όπως ο πίνακας *Φωτογραφίες* όπου το πρωτεύον κλειδί επιλέγεται να δημιουργείται αυτόματα από το σύστημα.

Ο τομέας των πετρωμάτων συνδέεται με την υπόλοιπη βάση μέσω του τομέα των πειραμάτων με σχέση ένα-προς-πολλά. Στο Σχ. Α.5 φαίνεται ότι υπάρχει μόνο μια γραμμή συσχέτισης με τον τομέα των πειραμάτων όμως στην πραγματικότητα υπάρχουν πέντε γραμμές συσχέτισης όσα είναι δηλαδή και τα είδη των πειραμάτων που αποθηκεύονται.

Α.2.2 Τομέας πειραμάτων

Ο τομέας των πειραμάτων χωρίζεται σε πέντε υποτομείς όσα δηλαδή και τα πειράματα που αποθηκεύονται στην βάση. Εδώ θα παρουσιασθεί μόνο ο τομέας που αφορά στα πειράματα μονοαξονικής-τριαξονικής θλίψης και σημειώνεται ότι οι υπόλοιποι τομείς έχουν ανάλογη μορφή. Στα πειράματα μονοαξονικής-τριαξονικής θλίψης τα δεδομένα αποθηκεύονται σε πέντε πίνακες όπως φαίνεται στο τμήμα του σχεσιακού διαγράμματος του Σχ. Α.6. Η λογική που ακολουθείται είναι παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε και για τον τομέα των πετρωμάτων. Ο πρωτεύον πίνακας αποθηκεύει απαραίτητες πληροφορίες σχετικά με το πείραμα ενώ υπάρχει και ένας αριθμός από συσχετισμένους δευτερεύοντες πίνακες που αποθηκεύουν προαιρετικές πληροφορίες.

Στον πρωτεύοντα πίνακα *UCTC* το πρωτεύον κλειδί uctcID είναι ακέραιος αριθμός που δημιουργείται αυτόματα ενώ το όνομα του πετρώματος και το ακρωνύμιο του εργαστηρίου που εκτέλεσε το πείραμα είναι ξένα κλειδιά που συσχετίζουν την εγγραφή με τις αντίστοιχες εγγραφές στους αντίστοιχους τομείς. Στη συνέχεια στο αρχείο αποθηκεύονται τα λογιστικά φύλλα που περιέχουν τα δεδομένα. Άλλα απαραίτητα δεδομένα είναι η διάμετρος, το ύψος του κυλινδρικού δοκιμίου και πληροφορίες σχετικά με την διαδικασία εκτέλεσης του πειράματος. Έτσι αποθηκεύονται παράμετροι όπως οι συνθήκες λίπανσης μεταξύ του δοκιμίου και των εδράνων φόρτισης και ο τρόπος με τον οποίο έγινε ο έλεγχος της αξονικής φόρτισης, δηλαδή

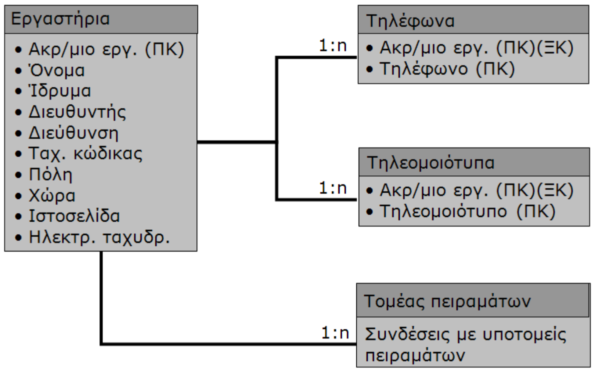


Σχήμα A.6: Υποτομέας πειραμάτων μονοαξονικής-τριαξονικής θλίψης.

με έλεγχο της τάσης ή της μετατόπισης. Ακόμη αποθηκεύεται η μέθοδος με την οποία έγινε η μέτρηση των μετατοπίσεων. Όσον αφορά τα αποτελέσματα του πειράματος, αποθηκεύονται η τάση αστοχίας, η παραμόρφωση που αντιστοιχεί στην τάση αστοχίας, η μέγιστη παραμόρφωση που επιτεύχθηκε, η πλευρική ή ακτινική τάση και οι ασυμπτωτικές τιμές του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου του Poisson οι οποίες υπολογίζονται από τις εξισώσεις (A.3).

Οι δευτερεύοντες πίνακες είναι παρόμοιοι και για τα πέντε είδη πειραμάτων που αποθηκεύονται. Στον πίνακα *Άλλες πληροφορίες* αποθηκεύονται πληροφορίες από το εργαστήριο που εκτέλεσε την δοκιμή. Στον κωδικό πειράματος αποθηκεύεται ένας κωδικός αναγνώρισης του πειράματος/δοκιμίου που δόθηκε από το εργαστήριο. Στην ημερομηνία αποθηκεύεται η ημερομηνία εκτέλεσης του πειράματος και στο πεδίο των σχολίων διάφορες παρατηρήσεις που έγιναν από το εργαστήριο. Ο πίνακας *UCTC καμπύλες* αποθηκεύει τους συντελεστές των πολυωνύμων που προέκυψαν από την παλινδρόμηση στις καμπύλες φόρτισης (Εξ. (A.2) και (A.3)). Ο προσανατολισμός του δοκιμίου σε περίπτωση ανισότροπου πετρώματος αποθηκεύεται στον πίνακα *Προσανατολισμός δοκιμίου*. Αυτό επιτυγχάνεται με την αποθήκευση των συνημίτονων κατεύθυνσης των τριών επιπέδων ανισοτροπίας του πετρώματος ως προς τον άξονα φόρτισης. Τέλος, είναι δυνατή η αποθήκευση του ονόματος του χάρτη και των συντεταγμένων της περιοχής δειγματοληψίας του δοκιμίου στον πίνακα *Συντεταγμένες δοκιμίου*.

Η σχέση του πρωτεύοντα πίνακα με τους δευτερεύοντες πίνακες σε όλες τις περιπτώσεις είναι ένα-προς-ένα, ενώ η σχέση του με τον τομέα των πετρωμάτων και των εργαστηρίων είναι πολλά-προς-ένα καθώς ένα πέτρωμα ή ένα εργαστήριο μπορεί να σχετίζεται με πολλά πειράματα του ίδιου τύπου. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι λόγω του διαχωρισμού του τομέα των πειραμάτων σε υποτομείς, είναι σχετικά εύκολο να εισαχθούν και νέοι τύπου πειραμάτων στην βάση. Ένας νέος υποτομέας για κάποιο πείραμα (π.χ. δοκιμή κάμψης τριών σημείων) θα είναι μία ομάδα πινάκων παρόμοια με αυτήν που περιγράφηκε η οποία θα προσαρτηθεί στο σύστημα πινάκων της βάσης.



Σχήμα A.7: Τομέας εργαστηρίων.

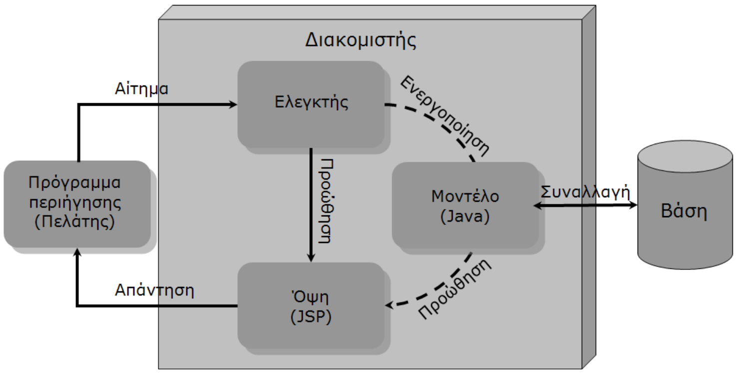
A.2.3 Τομέας εργαστηρίων

Ο τομέας των εργαστηρίων είναι πολύ πιο απλός σε σχέση με τους άλλους τομείς. Το τμήμα του σχεσιακού διαγράμματος που αντιστοιχεί στον τομέα αυτόν φαίνεται στο Σχ. A.7. Ο τομέας αποτελείται από τον πρωτεύοντα πίνακα *Εργαστήρια* που περιέχει πληροφορίες σχετικά με τα εργαστήρια και από δύο δευτερεύοντες πίνακες που αποθηκεύουν τα τηλέφωνα και τα τηλεομοιότυπα (fax) των εργαστηρίων. Στον πίνακα *Εργαστήρια* αποθηκεύεται το ακρωνύμιο του εργαστηρίου που αποτελεί το πρωτεύον κλειδί και χρησιμοποιείται ως ξένο κλειδί στους υποτομείς των πειραμάτων. Εν συνεχεία αποθηκεύονται το πλήρες όνομα του εργαστηρίου, το ίδρυμα που ανήκει, την διεύθυνση κλπ. Η σχέση του πρωτεύοντα πίνακα με τους δευτερεύοντες είναι ένα-προς-πολλά με σκοπό να μπορούν να αποθηκευθούν περισσότερα του ενός τηλέφωνα ή τηλεομοιότυπα ανά εργαστήριο.

A.2.4 Διαδικτυακή εφαρμογή

Εκτός από την βάση δεδομένων, αναπτύχθηκε και μια διαδικτυακή εφαρμογή για την πρόσβαση στα δεδομένα και τον έλεγχο της βάσης. Η εφαρμογή έχει αναπτυχθεί σε γλώσσα προγραμματισμού Java και για την οπτικοποίηση των δεδομένων έχει χρησιμοποιηθεί η τεχνολογία ιστοσελίδων JSP ένα μίγμα της Java με τη γλώσσα προγραμματισμού HTML. Η διαδικτυακή εφαρμογή είναι αδύνατον να παρουσιασθεί σε αυτό το κείμενο, όμως, μπορεί να περιγραφεί η βασική αρχή λειτουργίας.

Η εφαρμογή αναπτύχθηκε με την μέθοδο Ελεγκτής-Μοντέλο-Όψη (MVC pattern) η οποία απεικονίζεται στο Σχ. A.8. Αν θεωρηθεί ένα πρόγραμμα περιήγησης ιστοσελίδων (web browser) τότε αυτό είναι ο πελάτης ο οποίος στέλνει ένα αίτημα για δεδομένα στο διακομιστή όπου έχει εγκατασταθεί η εφαρμογή. Το αίτημα τροφοδοτείται στον *Ελεγκτή* (Controller) ο οποίος ενεργοποιεί το κατάλληλο τμήμα του *Μοντέλου* (Model). Ο *Ελεγκτής* προωθεί το αίτημα στην κατάλληλη *Όψη* η οποία είναι μια δυναμική ιστοσελίδα. Το *Μοντέλο* ανάλογα με το αίτημα πραγματοποιεί μια συναλλαγή με την βάση και εξάγει τα κατάλληλα δεδομένα. Τα δεδομένα προωθούνται στην *Όψη* η οποία τροφοδοτεί την δυναμική ιστοσελίδα με τα δεδομένα και απο-



Σχήμα A.8: Η τεχνική Ελεγκτής - Μοντέλο - Όψη.

στέλλεται ως απάντηση στον πελάτη.

Παράρτημα Β

Αποτελέσματα βαθμονομήσεων

Πίνακας Β.1: Πειραματικά δεδομένα μαρμάρου Διονύσου.

σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	σ_3 (MPa)	Τύπος δοκιμής
7.5	0	0	Μονοαξονικός εφελκυσμός
7	0	-21	Έμμεσος εφελκυσμός (Brazil)
0	0	-85	Μονοαξονική θλίψη
0	0	-90	Μονοαξονική θλίψη
-2	-2	-88	Τριαξονική θλίψη
-5	-5	-115	Τριαξονική θλίψη
-6	-6	-102	Τριαξονική θλίψη
-15	-15	-159	Τριαξονική θλίψη

Πίνακας Β.2: Αποτελέσματα βαθμονομήσεων στο μάρμαρο Διονύσου.

Παράμετροι	Πείραμα	MC	HB	LD	MW	H
σ_c (MPa)	-88	-74*	-82	-70*	-81	-81
σ_t (MPa)	7.5	11.2*	7.5*	10.5*	7.4	7.5*
σ_{bc} (MPa)		-74*	-82*	-123*	-102*	-418
c (MPa)		14.4		13.2		
ϕ (^{o})		47.4		48.9		
m			10.8			
e					0.533	
σ_0 (MPa)						7.5
SSR (MPa^2)		27.5	11.8	34.6	11.6	11.2

* Οι τιμές υπολογίστηκαν από το βαθμονομημένο μοντέλο.

Πίνακας Β.3: Αποτελέσματα βαθμονομήσεων στο γρανίτη Westerly.

Παράμετροι	Πείραμα	MC	HB	LD	MW	H
σ_c (MPa)	-201	-328*	-260	-243*	-208	-200
σ_t (MPa)		38.8*	7.1*	37.6*	5.4	4.3*
σ_{bc} (MPa)		-328*	-260*	-419*	-354*	-200
c (MPa)		56.4		46.3		
ϕ (^{o})		52.0		48.3		
m			36.8			
e					0.522	
σ_0 (MPa)						4.3
SSR (MPa^2)		3020	2096	6885	822	805

* Οι τιμές υπολογίστηκαν από το βαθμονομημένο μοντέλο.

Πίνακας Β.4: Αποτελέσματα βαθμονομήσεων στο δολομίτη Dunham.

Παράμετροι	Πείραμα	MC	HB	LD	MW	H
σ_c (MPa)	-257	-364*	-306	-348*	-307	-304
σ_t (MPa)		87.3*	24.5*	128.8*	40.5	30.9*
σ_{bc} (MPa)		-364*	-306*	-428*	-415*	-334
c (MPa)		89.2		102.5		
ϕ (^{o})		37.8		29.1		
m			12.4			
e					0.564	
σ_0 (MPa)						31.1
SSR (MPa^2)		8794	8087	3220	1766	1409

* Οι τιμές υπολογίστηκαν από το βαθμονομημένο μοντέλο.

Πίνακας Β.5: Αποτελέσματα βαθμονομήσεων στον ασβεστόλιθο Solenhofen.

Παράμετροι	Πείραμα	MC	HB	LD	MW	H
σ_c (MPa)		-328*	-301	-329*	-314	-308
σ_t (MPa)		89.6*	36.0*	149.9*	66.0	52.7*
σ_{bc} (MPa)		-328*	-301*	-381*	-355*	-330
c (MPa)		85.7		107.7		
ϕ (^{o})		34.8		23.5		
m			8.3			
e					0.541	
σ_0 (MPa)						53.9
SSR (MPa^2)		2359	2496	1162	535	559

* Οι τιμές υπολογίστηκαν από το βαθμονομημένο μοντέλο.

Πίνακας Β.6: Αποτελέσματα βαθμονομήσεων στον ψαμμίτη Shirahama.

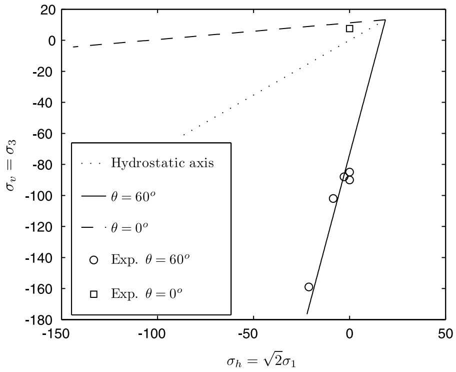
Παράμετροι	Πείραμα	MC	HB	LD	MW	H
σ_c (MPa)		-87*	-61	-72*	-60	-39
σ_t (MPa)		19.4*	3.3*	22.2*	4.0	1.3*
σ_{bc} (MPa)		-87*	-61*	-93*	-65*	-39
c (MPa)		20.5		19.3		
ϕ (^{o})		39.4		33.4		
m			18.3			
e					0.508	
σ_0 (MPa)						1.3
SSR (MPa^2)		275	243	464	82	62

* Οι τιμές υπολογίστηκαν από το βαθμονομημένο μοντέλο.

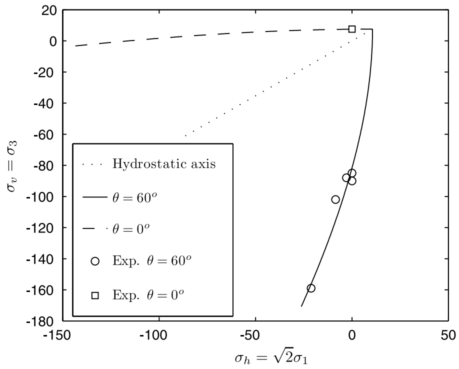
Πίνακας Β.7: Αποτελέσματα βαθμονομήσεων στο σκυρόδεμα (Μίγμα Α).

Παράμετροι	Πείραμα	MC	HB	LD	MW	H
σ_c (MPa)	-23	-28*	-26	-24*	-23	-24
σ_t (MPa)		4.8*	1.5*	6.4*	1.9	1.8*
σ_{bc} (MPa)	-30	-28*	-26*	-33*	-32*	-28
c (MPa)		5.8		6.0		
ϕ (^{o})		44.9		36.9		
m			17.0			
e					0.541	
σ_0 (MPa)						1.8
SSR (MPa^2)		57	56	35	17	16

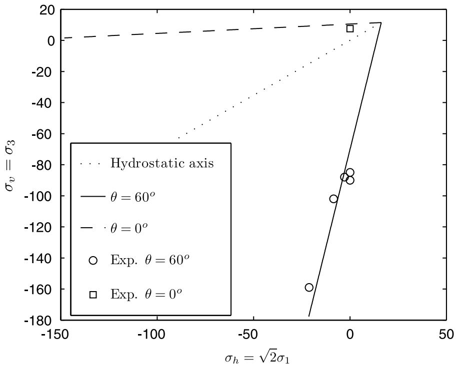
* Οι τιμές υπολογίστηκαν από το βαθμονομημένο μοντέλο.



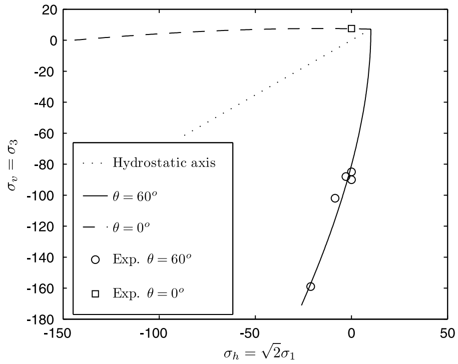
(α) Mohr-Coulomb.



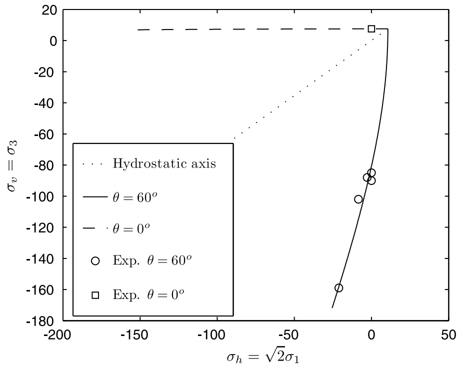
(β) Hoek-Brown.



(γ) Τροπ. Lade-Duncan.

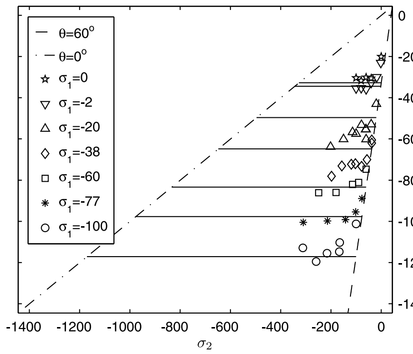


(δ) Menétrey-Willam.

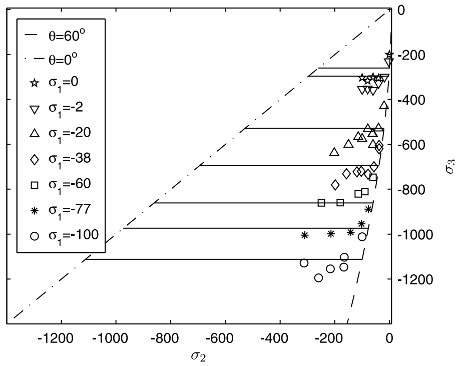


(ε) Υπερβολικό κριτήριο.

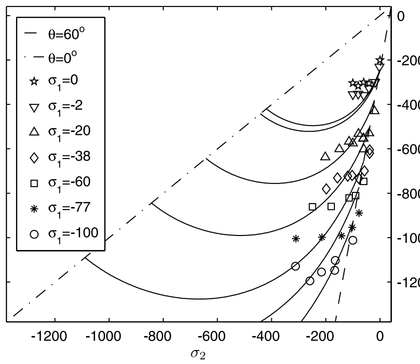
Σχήμα Β.1: Επίπεδο Rendulic για το μάρμαρο Διονύσου.



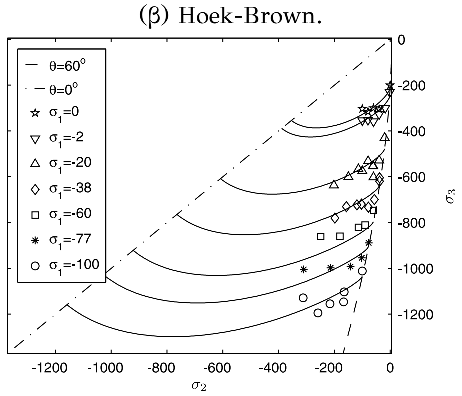
(α) Mohr-Coulomb.



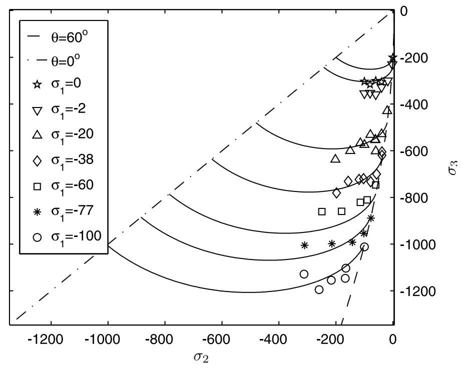
(β) Hoek-Brown.



(γ) Τροπ. Lade-Duncan.

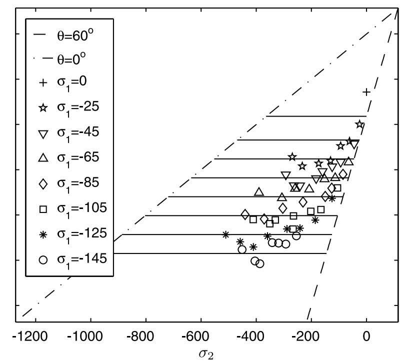


(δ) Menétrey-Willam.

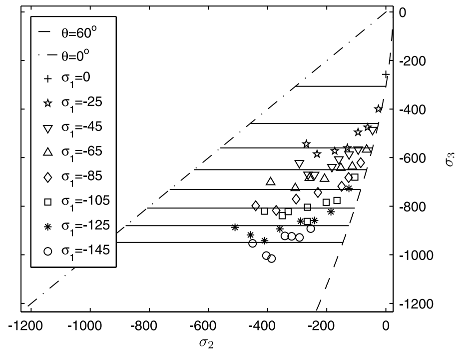


(ε) Υπερβολικό κριτήριο.

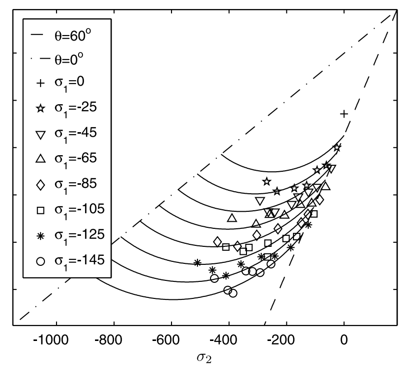
Σχήμα Β.2: Επίπεδο σ_2-σ_3 για το γρανίτη Westerly.



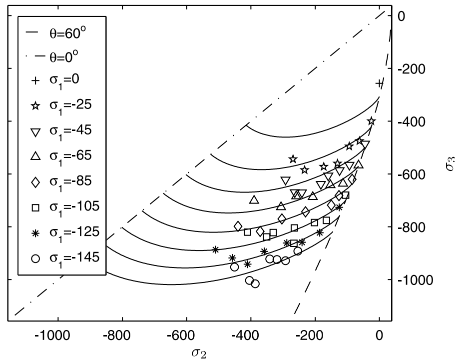
(α) Mohr-Coulomb.



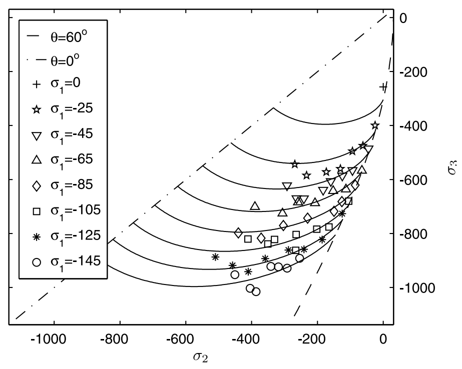
(β) Hoek-Brown.



(γ) Τροπ. Lade-Duncan.

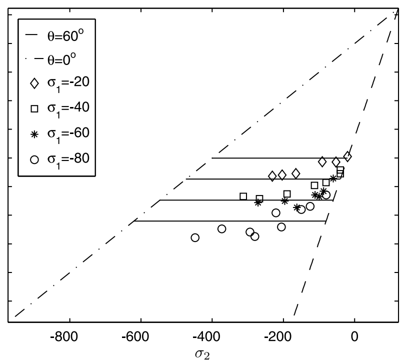


(δ) Menétrey-Willam.

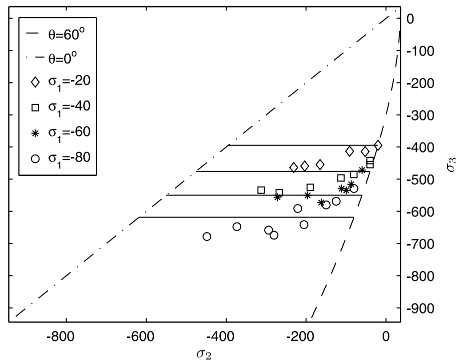


(ε) Υπερβολικό κριτήριο.

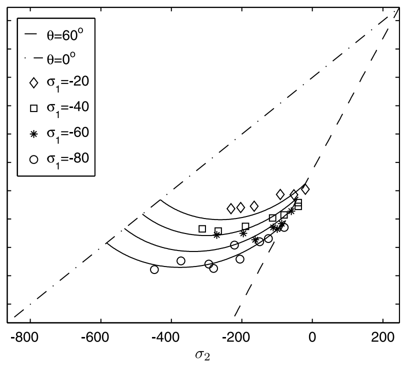
Σχήμα Β.3: Επίπεδο σ_2-σ_3 για το δολομίτη Dunham.



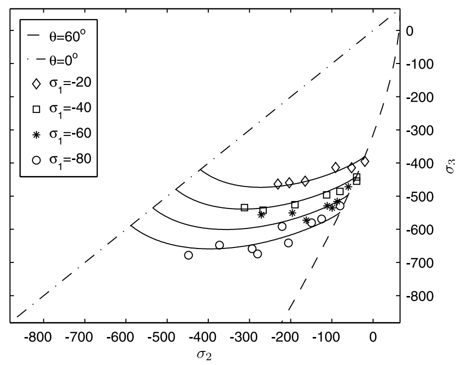
(α) Mohr-Coulomb.



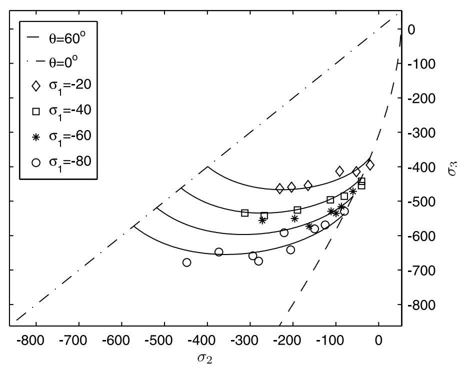
(β) Hoek-Brown.



(γ) Τροπ. Lade-Duncan.

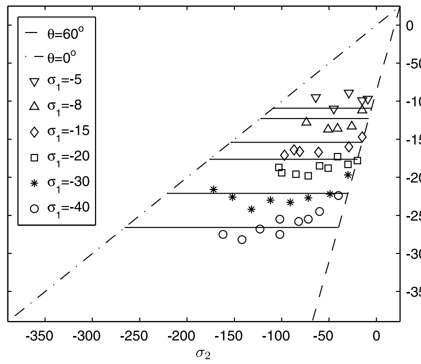


(δ) Menétrey-Willam.

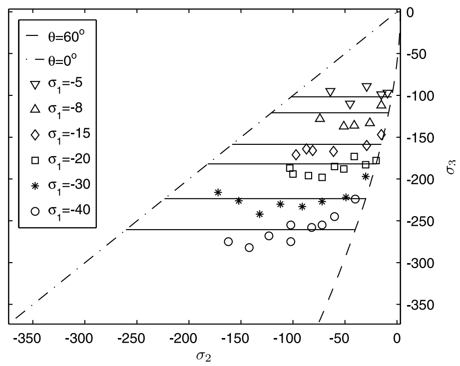


(ε) Υπερβολικό κριτήριο.

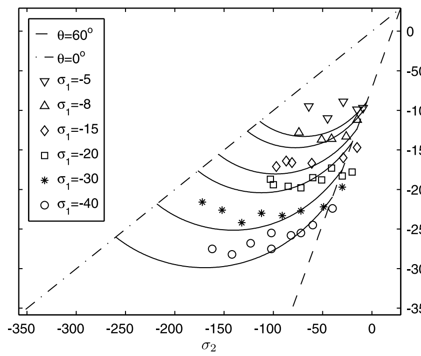
Σχήμα Β.4: Επίπεδο σ_2-σ_3 για τον ασβεστόλιθο Solenhofen.



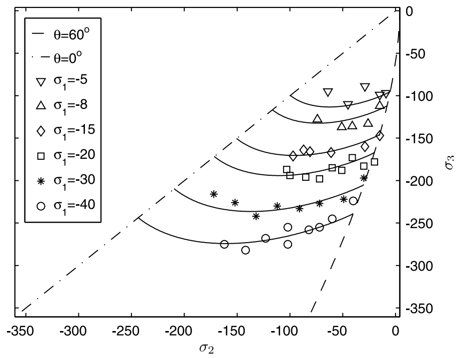
(α) Mohr-Coulomb.



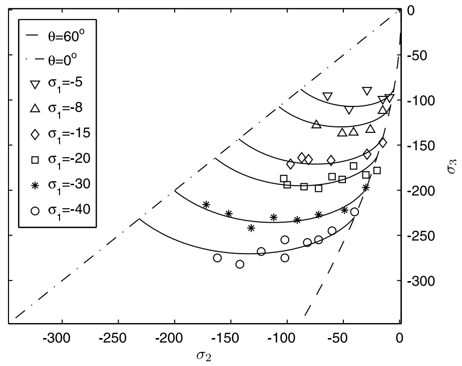
(β) Hoek-Brown.



(γ) Τροπ. Lade-Duncan.

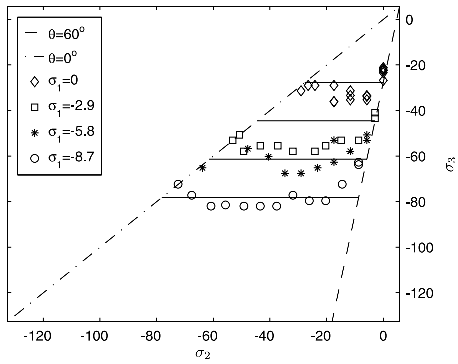


(δ) Menétrey-Willam.

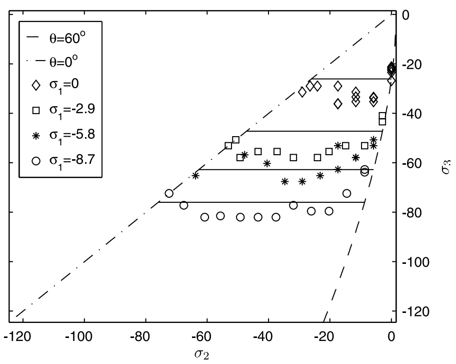


(ε) Υπερβολικό κριτήριο.

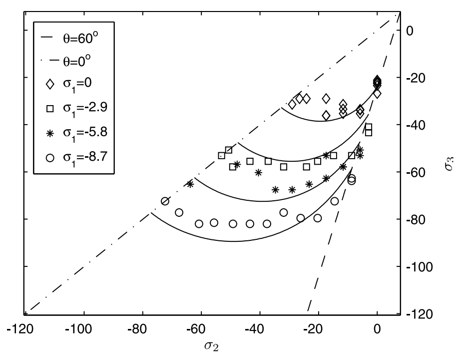
Σχήμα B.5: Επίπεδο σ_2-σ_3 για τον ψαμμίτη Shirahama.



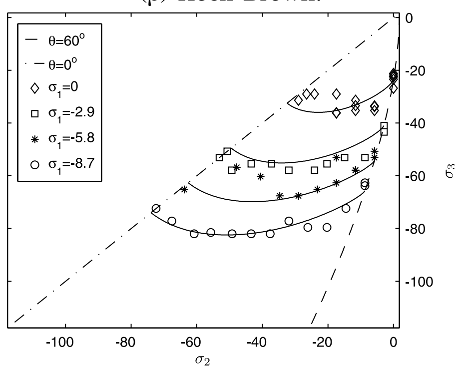
(α) Mohr-Coulomb.



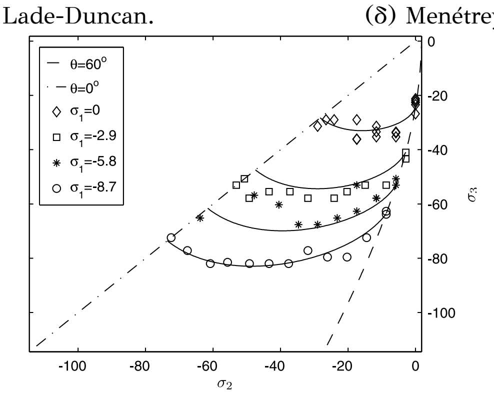
(β) Hoek-Brown.



(γ) Τροπ. Lade-Duncan.



(δ) Menétrey-Willam.



(ε) Υπερβολικό κριτήριο.

Σχήμα Β.6: Επίπεδο σ_2-σ_3 για το σκυρόδεμα (Μίγμα Α).

Παράρτημα Γ

Παράγωγοι επιφάνειας διαρροής

Ο ελαστοπλαστικός καταστατικός νόμος απαιτεί την εύρεση της παραγώγου της επιφάνειας διαρροής ως προς τον τανυστή των τάσεων και ως προς τον κανόνα κράτυνσης. Στα Υποκεφάλαια που ακολουθούν δίδονται οι δύο αυτές παράγωγοι.

Γ.1 Συνάρτηση επιφάνειας διαρροής

Η υπερβολική επιφάνεια διαρροής δίδεται από τη σχέση

$$f_H\left(p,T,\theta\right) = T - \tilde{f}_H\left(p,\theta\right) = 0 \tag{Γ.1}$$

όπου

$$\tilde{f}_H\left(p,\theta\right) = \frac{s+t}{v} \tag{Γ.2}$$

με τις ποσότητες s, t και v να δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} s &= 2T_c\left(T_c^2 - T_t^2\right)\cos\theta \\ t &= T_c\left(2T_t - T_c\right)u^{1/2} \\ u &= 4\left(T_c^2 - T_t^2\right)\cos^2\theta + 5T_t^2 - 4T_tT_c \\ v &= 4\left(T_c^2 - T_t^2\right)\cos^2\theta + \left(T_c - 2T_t\right)^2 \end{aligned} \tag{Γ.3}$$

Τέλος, οι μεσημβρινοί T_c και T_t υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} T_c &= \begin{cases} -\dfrac{1}{2A_c}\left[B_c + \left(B_c^2 - 4A_cC_c\right)^{\frac{1}{2}}\right] & \text{αν } \beta \neq 2, \\ -\dfrac{C_c}{B_c} & \text{αν } \beta = 2. \end{cases} \\ A_c &= \frac{1}{2}\beta^2 - 2 \\ B_c &= 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\beta^2\left(p-\sigma_0-a\right) + \left(p-\sigma_0\right)\right] \\ C_c &= \beta^2\left(p-\sigma_0-a\right)^2 - \left(p-\sigma_0\right)^2 - \beta^2a^2 \end{aligned} \tag{Γ.4}$$

και

$$
\begin{aligned}
T_t &= -\frac{1}{2A_t}\left[B_t + \left(B_t^2 - 4A_tC_t\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
A_t &= 2\beta_t^2 - \frac{1}{2} \\
B_t &= 2\sqrt{2}\left[\beta_t^2\left(p-\sigma_0-a\right) + \frac{1}{2}\left(p-\sigma_0\right)\right] \\
C_t &= \beta_t^2\left(p-\sigma_0-a\right)^2 - \left(p-\sigma_0\right)^2 - \beta_t^2 a^2
\end{aligned}
\tag{Γ.5}
$$

Γ.2 Παράγωγος ως προς τον τανυστή των τάσεων

Η παράγωγος της Εξ. (Γ.1) ως προς τον τανυστή των τάσεων σ_{ij} μπορεί να υπολογιστεί από τον κανόνα της αλυσίδας ως εξής

$$\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f_H}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f_H}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f_H}{\partial J_3}\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} \tag{Γ.6}$$

Αν ληφθεί υπόψη ότι

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \tag{Γ.7}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \tag{Γ.8}$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ik}s_{kj} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij} \tag{Γ.9}$$

και

$$\frac{\partial f_H}{\partial I_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial f_H}{\partial T_c}\frac{\partial T_c}{\partial p} + \frac{\partial f_H}{\partial T_t}\frac{\partial T_t}{\partial p}\right) \tag{Γ.10}$$

η σχέση (Γ.6) γίνεται

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial f_H}{\partial T_c}\frac{\partial T_c}{\partial p} + \frac{\partial f_H}{\partial T_t}\frac{\partial T_t}{\partial p}\right)\delta_{ij} \\
+ \frac{\partial f_H}{\partial J_2}s_{ij} + \frac{\partial f_H}{\partial J_3}\left(s_{ik}s_{kj} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij}\right)
\end{aligned}
\tag{Γ.11}
$$

Από την Εξ. (Γ.1) και τους ορισμούς των αναλλοίωτων προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial f_H}{\partial J_2} = \frac{1}{3T} - \frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial J_2} \tag{Γ.12}$$

$$\frac{\partial f_H}{\partial J_3} = -\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial J_3} \tag{Γ.13}$$

$$\frac{\partial f_H}{\partial T_c} = -\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial T_c} \tag{Γ.14}$$

$$\frac{\partial f_H}{\partial T_t} = -\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial T_t} \tag{Γ.15}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial J_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sin 3\theta}\frac{J_3}{J_2^{5/2}} \tag{Γ.16}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial J_3} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sin 3\theta}\frac{1}{J_2^{3/2}} \tag{Γ.17}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις η Εξ. (Γ.11) γίνεται

$$\frac{\partial f_H}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial T_c}\frac{\partial T_c}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial T_t}\frac{\partial T_t}{\partial p}\right)\delta_{ij} + \frac{1}{3T}s_{ij} + \frac{1}{\sqrt{3}T}\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial \theta}s_{ij}^{\perp} \tag{Γ.18}$$

όπου

$$s_{ij}^{\perp} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sin 3\theta}\left(\frac{1}{T^2}s_{ik}s_{kj} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\cos 3\theta}{T}s_{ij} - \delta_{ij}\right) \tag{Γ.19}$$

Ο τρίτος όρος της Εξ. (Γ.18) είναι ίσος με μηδέν όταν $\theta = 0$ ή $\theta = \pi/3$ γιατί

$$\left.\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial \theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 0 \tag{Γ.20}$$

και το μέτρο (norm) του τανυστή $|s_{ij}^{\perp}| = 1$ [π.χ. Bigoni and Piccolroaz, 2004]. Γεωμετρικά αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός ότι η ελλειπτική συνάρτηση του κριτηρίου αστοχίας τέμνει εκ κατασκευής κάθετα τα διανύσματα T_c και T_t των δύο κύριων μεσημβρινών.

Τέλος, οι επιμέρους παράγωγοι της Εξ. (Γ.18) υπολογίζονται και πάλι από τον κανόνα της αλυσίδας και τις Εξ. (Γ.2), (Γ.4) και (Γ.5).

$$\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial \theta} = \frac{1}{v^2}\left[\left(\frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{\partial t}{\partial \theta}\right)v - (s+t)\frac{\partial v}{\partial \theta}\right] \tag{Γ.21}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = -2T_c\left(T_c^2 - T_t^2\right)\sin\theta \tag{Γ.22}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \theta} = \frac{1}{2}T_c\left(2T_t - T_c\right)u^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{Γ.23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -8\left(T_c^2 - T_t^2\right)\sin\theta\cos\theta \tag{Γ.24}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -8\left(T_c^2 - T_t^2\right)\sin\theta\cos\theta \tag{Γ.25}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial T_c} = \frac{1}{v^2}\left[\left(\frac{\partial s}{\partial T_c} + \frac{\partial t}{\partial T_c}\right)v - (s+t)\frac{\partial v}{\partial T_c}\right] \tag{Γ.26}$$

$$\frac{\partial s}{\partial T_c} = 2\left(3T_c^2 - T_t^2\right)\cos\theta \tag{Γ.27}$$

$$\frac{\partial t}{\partial T_c} = 2\left(T_t - T_c\right)u^{1/2} + \frac{1}{2}T_c\left(2T_t - T_c\right)u^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial T_c} \tag{Γ.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial T_c} = 4\left(2T_c\cos^2\theta - T_t\right) \tag{Γ.29}$$

$$\frac{\partial v}{\partial T_c} = 2T_c\left(4\cos^2\theta + 1\right) - 4T_t \tag{Γ.30}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial T_t} = \frac{1}{v^2}\left[\left(\frac{\partial s}{\partial T_t} + \frac{\partial t}{\partial T_t}\right) v - (s+t)\frac{\partial v}{\partial T_t}\right] \tag{Γ.31}$$

$$\frac{\partial s}{\partial T_t} = -4T_c T_t \cos\theta \tag{Γ.32}$$

$$\frac{\partial t}{\partial T_t} = 2T_c u^{1/2} + \frac{1}{2}T_c\left(2T_t - T_c\right) u^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial T_t} \tag{Γ.33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial T_t} = -2\left[\left(4\cos^2\theta - 5\right) T_t + 2T_c\right] \tag{Γ.34}$$

$$\frac{\partial v}{\partial T_t} = 4\left(2T_t \sin^2\theta - T_c\right) \tag{Γ.35}$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial p} = \begin{cases} -\frac{1}{2A_c}\left[\frac{\partial B_c}{\partial p} + \left(B_c - 4A_c C_c\right)^{-1/2}\left(B_c\frac{\partial B_c}{\partial p} - 2A_c\frac{\partial C_c}{\partial p}\right)\right] & \text{αν } \beta \neq 2 \\ -\frac{1}{B_c^2}\left(\frac{\partial C_c}{\partial p}B_c - C_c\frac{\partial B_c}{\partial p}\right) & \text{αν } \beta = 2 \end{cases} \tag{Γ.36}$$

$$\frac{\partial B_c}{\partial p} = \sqrt{2}\left(\beta^2 + 2\right) \tag{Γ.37}$$

$$\frac{\partial C_c}{\partial p} = 2\beta^2\left(p - \sigma_0 - a\right) - 2\left(p - \sigma_0\right) \tag{Γ.38}$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial p} = -\frac{1}{2A_t}\left[\frac{\partial B_t}{\partial p} + \left(B_t - 4A_t C_t\right)^{-1/2}\left(B_t\frac{\partial B_t}{\partial p} - 2A_t\frac{\partial C_t}{\partial p}\right)\right] \tag{Γ.39}$$

$$\frac{\partial B_t}{\partial p} = \sqrt{2}\left(2\beta_t^2 + 1\right) \tag{Γ.40}$$

$$\frac{\partial C_t}{\partial p} = 2\beta_t^2\left(p - \sigma_0 - a\right) - 2\left(p - \sigma_0\right) \tag{Γ.41}$$

Γ.3 Παράγωγος ως προς τον κανόνα κράτυνσης

Η παράγωγος της Εξ. (Γ.1) ως προς τον κανόνα κράτυνσης a μπορεί να υπολογιστεί από τον κανόνα της αλυσίδας (βλ. και Υποκεφάλαιο Γ.2)

$$\frac{\partial f_H}{\partial a} = -\left(\frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial T_c}\frac{\partial T_c}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{f}_H}{\partial T_t}\frac{\partial T_t}{\partial a}\right) \tag{Γ.42}$$

Οι παράγωγοι $\partial \tilde{f}_H/\partial T_c$ και $\partial \tilde{f}_H/\partial T_t$ δίδονται στο Υποκεφάλαιο Γ.2. Οι υπόλοιπες παράγωγοι μπορούν να υπολογισθούν από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\frac{\partial T_c}{\partial a} = \begin{cases} -\frac{1}{2A_c}\left[\frac{\partial B_c}{\partial a} + \left(B_c - 4A_c C_c\right)^{-1/2}\left(B_c\frac{\partial B_c}{\partial a} - 2A_c\frac{\partial C_c}{\partial a}\right)\right] & \text{αν } \beta \neq 2 \\ -\frac{1}{B_c^2}\left(\frac{\partial C_c}{\partial a}B_c - C_c\frac{\partial B_c}{\partial a}\right) & \text{αν } \beta = 2 \end{cases} \tag{Γ.43}$$

$$\frac{\partial B_c}{\partial a} = -\sqrt{2}\beta^2 \tag{Γ.44}$$

$$\frac{\partial C_c}{\partial a} = -2\beta^2 \left(p - \sigma_0\right) \tag{Γ.45}$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial a} = -\frac{1}{2A_t}\left[\frac{\partial B_t}{\partial a} + \left(B_t - 4A_tC_t\right)^{-1/2}\left(B_t\frac{\partial B_t}{\partial a} - 2A_t\frac{\partial C_t}{\partial a}\right)\right] \tag{Γ.46}$$

$$\frac{\partial B_t}{\partial a} = -2\sqrt{2}\beta_t^2 \tag{Γ.47}$$

$$\frac{\partial C_t}{\partial a} = -2\beta_t^2 \left(p - \sigma_0\right) \tag{Γ.48}$$

Βιβλιογραφία

A. M. Al-Ajmi and R. W. Zimmerman. Relation between the Mogi and the Coulomb failure criteria. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 42:431–439, 2005.

C. Amrouche, P.G. Ciarlet, L. Gratie, and S. Kesavan. On Saint Venant's compatibility conditions and Poincaré's lemma. *C. R. Math.*, 342(11):887 – 891, 2006.

R. Baker and C.S. Desai. Consequences of deviatoric normality in plasticity with isotropic strain hardening. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 6:383–390, 1982.

N.R. Barton, R. Lien, and J. Lunde. Engineering classification of rock masses for the design of tunnel support. *Rock Mech.*, 6(4):189–239, 1974.

A. Benallal, R. Billardon, and G. Geymonat. Some mathematical aspects of the damage softening rate problem. In J. Mazars and Z.P. Bažant, editors, *Cracking and Damage - Strain Localization and Size Effect*, pages 247–257, London, New York, 1989. Elsevier.

A. Benallal, R. Billardon, and G. Geymonat. Bifurcation and localization in rate-independent materials. In Q.S. Nguyen, editor, *Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*. CISM Lecture Notes, Springer, 1993.

T. Benz and R. Schwab. A quantitave comparison of six failure criteria. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 45:1176–1186, 2008.

Z.T. Bieniawski. *Engineering rock mass classifications*. Wiley, New York, 1989.

D. Bigoni and A. Piccolroaz. Yield criteria for quasibrittle and frictional materials. *Int. J. Solids Struct.*, 41:2855–2878, 2004.

R. Billardon and I. Doghri. Localization bifurcation analysis for damage softening elastoplastic materials. In J. Mazars and Z.P. Bažant, editors, *Cracking and Damage - Strain Localization and Size Effect*, pages 295–303, London, New York, 1989. Elsevier.

B. Bresler and K.S. Pister. Strength of concrete under combined stresses. *ACI J.*, 55(9):321–345, 1958.

E.T. Brown, editor. *Rock characterization, testing and monitoring*. ISRM Suggested Methods. Pergamon Press, Oxford, 1981.

S. Burbeck. Application programming in smalltalk-80: How to use the model-view-controller(mvc). Report, ParcPlace Systems, 1987. http://st-www.cs.uiuc.edu/users/smarch/st-docs/mvc.html.

J. Casey and P.M. Naghdi. On the nonequivalence of the stress space and strain space formulations of plasticity theory. *J. Appl. Mech. - T. ASME*, 50:350–354, 1983.

J.-L. Chaboche. *Description thermodynamique et phenomenologique de a viscoplasticite cyclique avec endomagement*. PhD thesis, Univ. Paris VI., 1978.

D. Chamberlin and R. Boyce. SEQUEL: A structured english query language. In *Proceedings of the 1974 ACM SIGFIDET (now SIGMOD) workshop on data description, access and control*, pages 149–264, New York, 1974.

C. Chazallon and P.Y. Hicher. A constitutive model coupling elastoplasticity and damage for cohesive-frictional materials. *Mech. Cohes.-Frict. Mat.*, 3: 41–63, 1998.

A.C. Chen and W.F. Chen. Constitutive relations for concrete. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 101:465–481, 1975.

W.F. Chen and D.J. Han. *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag, New York, 1988.

U. Cicekli, G.Z. Voyiadjis, and R.K. Abu Al-Rub. A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete. *Int. J. Plasticity*, 23(10-11):1874 – 1900, 2007.

E.F. Codd. A relational model of data for large shared data banks. *Commun. ACM*, 13(6):377–387, 1970.

T.F. Coleman and Y. Li. On the convergence of reflective Newton methods for large-scale nonlinear minimization subject to bounds. *Math. Program.*, 67(2):189–224, 1994.

T.F. Coleman and Y. Li. An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM J. Optimiz.*, 6:418–445, 1996.

L.B. Colmenares and M.D. Zoback. A statistical evaluation of intact rock failure criteria constrained by polyaxial test data for five different rocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 39:695–729, 2002.

L. Contrafatto and M. Cuomo. A framework of elastic-plastic damaging model for concrete under multiaxial stress states. *Int. J. Plasticity*, 22(12):2272 – 2300, 2006.

C. A. Coulomb. Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelquels problemes de statique, relatifs à l'architecture. *Mem. Acad. Roy. Sci.*, 7:343–382, 1776.

R. Desmorat, F. Ragueneau, and H. Pham. Continuum damage mechanics for hysteresis and fatigue of quasi-brittle materials and structures. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 31:307–329, 2007.

A. Dragon and Z. Mróz. A continuum model for plastic - brittle behavior of rock and concrete. *Int. J. Eng. Sci.*, 17:121–137, 1979.

D.C. Drucker. A more fundamental approach to plastic stress-strain relation. In *Proc. 1st National Congress of Applied Mechanics*, pages 487–491, Chicago, 1951. ASME.

D.C. Drucker. Plasticity. In J.N. Goodier and N.J. Hoff, editors, *Structural Mechanics*, pages 407–445. Pergamon Press, London, 1960.

D.C. Drucker and W. Prager. Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Q. Appl. Math.*, 10(2):157–165, 1952.

D. Dudzinski and A. Molinari. Perturbation analysis of thermoviscoplastic instabilities in biaxial loading. *Int. J. Solids Struct.*, 27:601–628, 1991.

G. Etse and K.J. Willam. A fracture - energy based constitutive formulation for inelastic behavior of plain concrete. *J. Eng. Mech., ASCE*, 120:1983–2011, 1994.

R. Ewy. Wellbore-stability predictions by use of a modified Lade criterion. *SPE Drill Complet.*, 14(2):85–91, 1999.

G. Exadaktylos, P. Tiano, and C. Filareto. Validation of a model of rotary drilling of rocks with the drilling force measurement system. *Int. J. Rest. Build. Monum.*, 6(3):307–340, 2000.

G. Exadaktylos, P. Liolios, and G. Barakos. Some new developments on the representation and standardization of rock mechanics data: From the laboratory to the full scale project. In *Rock Mechanics Data: Representation and Standardisation*, Lisbon, Portugal, July 2007. 11th ISRM Congress.

P.H. Feenstra and R. de Borst. A composite plasticity model for concrete. *Int. J. Solids Struct.*, 33:707–730, 1996.

Y.C. Fung. *A first course in continuum mechanics*. Prentice Hall, New Jersey, third edition, 1994.

P. Grassl and M. Jirásek. Damage-plastic model for concrete failure. *Int. J. Solids Struct.*, 43:7166–7196, 2006.

P. Grassl and R. Rempling. A damage-plasticity interface approach to the meso-scale modelling of concrete subjected to cyclic compressive loading. *Eng. Fract. Mech.*, 75:4804–4818, 2008.

P. Grassl, K. Lundgren, and K. Gylltoft. Concrete in compression: A plasticity theory with a novel hardening law. *Int. J. Solids Struct.*, 39:5205–5223, 2002.

G. Gudehus. Elastic-plastic consitutive equations for dry sand. *Arch. Mech. Stosowanej*, 24:395–402, 1972.

B.C. Haimson and C. Chang. A new true triaxial cell for testing mechanical properties of rocks, and its use to determine strength and deformability of Westerly granite. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 37:285–297, 2000.

R. Hill. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:1–16, 1962.

R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford Classics Series. Oxford University Press, New York, 1998.

E. Hoek. Strength of rock and rock masses. *ISRM News J.*, 2(2):4–16, 1994.

E. Hoek and E. T. Brown. Empirical strength criterion for rock masses. *J. Geotech. Eng. Div., ASCE*, 106(9):1013–1035, 1980.

E. Hoek, C. Carranza-Torres, and B. Corkum. Hoek-Brown failure criterion - 2002 Edition. In *Proceedings of the 5th North American symposium of NARMS-TAC*, pages 267–71, Toronto, 2002.

A.A. Il'yushin. On the postulate of plasticity. *Prikl. Mat. Mekh.*, 25(3):503–507, 1961.

J.W. Ju. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. *Int. J. Solids Struct.*, 25(7):803–833, 1989.

L.M. Kachanov. On creep rupture time. In *Proc. Acad. Sci.*, volume 8, pages 26–31, USSR, 1958. Div. Eng. Sci.

H.D. Kang. *Triaxial constitutive model for plain and reinforced concrete behavior*. PhD thesis, University of Colorado, Boulder, CO, 1997.

L.M. Katchanov. *Foundations of the theory of plasticity*. North Holland Publishing, Amsterdam, 1971.

L.M. Katchanov. *Introduction to continuum damage mechanics*. Martinus Nijhoff Dortrecht, The Netherlands, 1986.

M. Klisinski. Degradation and plastic deformation of concrete. IFTR Report 38, Polish Academy of Sciences, 1985. PhD thesis.

D. Krajcinovic. *Damage mechanics*, volume 41 of *North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier, Amsterdam, 1996.

P. Lade and J. Duncan. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil. *J. Geotech. Eng. Div., ASCE*, 101(GT10):1037–1053, 1975.

P.V. Lade and J.M. Duncan. Cubical triaxial tests on cohesionless soil. *J. Soil Mech. Found. Div., ASCE*, 99(10):793–812, 1973.

P.V. Lade and M.K. Kim. Single hardening constitutive model for soil, rock and concrete. *Int. J. Solids Struct.*, 32:1963–1978, 1995.

L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Theory of elasticity*. Pergamon Press, Oxford, second edition, 1970.

L.P. Lebedev and M.J. Cloud. *Tensor analysis*. World Scientific Publishing, Singapore, 2003.

Y.-K. Lee, S. Pietruszczak, and B.-H. Choi. Failure criteria for rocks based on smooth approximations to Mohr-Coulomb and Hoek-Brown failure functions. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 56:146–160, 2012.

J. Lemaitre. Evaluation of dissipation and damage in metals. In *Proc. Int. Conf. on Mechanical Behavior of Materials*, Kyoto, Japan, 1971.

J. Lemaitre. *A course on damage mechanics*. Springer, Berlin, 1996.

J. Lemaitre and R. Desmorat. *Engineering damage mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

A. Leon. Uber die scherfestigkeit des betons. *Beton und Eisen*, 34:130–135, 1935.

T. Levi-Civita. *The absolute differential calculus*. Blackie & Son Limited, London, 1927.

F.-B. Lin, Z.P. Bažant, J.-C. Chern, and A.H. Marchertas. Concrete model with normality and sequential identification. *Comput. Struct.*, 26:1011–1025, 1987.

P. Liolios and G. Exadaktylos. A relational rock mechanics database with a hierarchical structure. *Comput. Geosci.*, 37:1192–1204, 2011.

P. Liolios and G. Exadaktylos. A smooth hyperbolic failure criterion for cohesive-frictional materials. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 58:85–91, 2013.

W. Lode. Versuche ueber den einfuss der mitt leren hauptspannung auf das fliessen der metalle eisen kupfer und nickel. *Zeitung Phys.*, 36:913–939, 1926.

Y.F. Lu and J.F. Shao. Modelling of anisotropic damage in brittle rocks under compression dominated stresses. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 26:945–961, 2002.

D. Maier. *Theory of relational databases*. Computer Science Pr, Rockville, Maryland, 1983.

C.D. Martin and N.A. Chandler. The progressive fracture of Lac du Bonnet granite. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 31(6):643–649, 1994.

H. Matsuoka. Stress-strain relationships of sands based on the mobilized plane. *Soils Found.*, 14(2):47–61, 1974.

H. Matsuoka and T. Nakai. A new failure criterion for soils in three dimensional stresses. In *IUTAM conference on deformation and failure of granular materials*, pages 253–263, Delft, 1982.

P. Menétrey and K.J. Willam. A triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Struct. J.*, 92:311–318, 1995.

L. L. Mills and R. M. Zimmerman. Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions. *ACI J. Proc.*, 67(10):802–807, 1970.

K. Mogi. Fracture and flow of rocks under high triaxial compression. *J. Geophys. Res.*, 76(5):1255–1269, 1971.

K. Mogi. *Experimental rock mechanics*. Taylor & Francis, London, 2007.

O. Mohr. Welche umstande bedingen die elastizitatsgrenze und den bruch eines materials? *Z. Ver. Dtsch. Ing.*, 44:1524–1530, 1900.

A. Molinari. Instabilité thermo-visco-plastique en cisaillement simple. *J. Mec. Theor. Appl.*, 4:659–684, 1985.

Z. Mróz. Non-associate flow laws in plasticity. *J. Méchanique*, 2:21–42, 1963.

Z. Mróz. On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids. *Arch. Mech. Stosowanej*, 18:3–35, 1966.

S. Murakami. Effects of cavity distribution in constitutive equations of creep and creep damage. In *EUROMECH Colloquium on Damage Mechanics*, Cachan, France, 1981.

N.I. Muskhelishvili. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. P. Noordhoff, Groningen, 1963.

P.M. Naghdi and J.A. Trapp. The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surface in strain space. *Int. J. Eng. Sci.*, 13: 785–797, 1975.

G.C. Nayak and O.C. Zienkiewicz. Convenient forms of stress invariants for plasticity. *J. Struct. Div. ASCE*, 98(4):949–954, 1972.

G.D. Nguyen and G.T. Houlsby. A coupled damage - plasticity model for concrete based on thermodynamic principles. Part I: model formulation and parameter identification. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 32:353–389, 2008a.

G.D. Nguyen and G.T. Houlsby. A coupled damage - plasticity model for concrete based on thermodynamic principles. Part II: non-local regularization and numerical implementation. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 32:391–413, 2008b.

R. Nova and D.M. Wood. A constitutive model for sand in triaxial compression. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 3:225–278, 1979.

O.A. Pekau and Z.X. Zhang. Strain - space cracking model for concrete and its application. *Comput. Struct.*, 51:151–162, 1994.

W. Prager. The theory of plasticity: A survey of recent achievements (James Clayton lecture). *I. Mech. E.*, 169:41–57, 1955.

W. Prager. A new method of analyzing stress and strains in work-hardening solids. *J. Appl. Mech. - T. ASME*, 23:493–496, 1956.

E. Pramono and K. Willam. Fracture energy - based plasticity formulation of plain concrete. *J. Eng. Mech., ASCE*, 115:1183–1203, 1989.

O. Reynolds. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. *Phil. Mag.*, (Series 5) 20:469–481, 1885.

J.R. Rice. The initiation and growth of shear bands. In A.C. Palmer, editor, *Plasticity and Soil Mechanics*, pages 263–274, Cambridge, 1973.

K.H. Roscoe and J.B. Burland. On the generalised stress-strain behaviour of wet clay. In J. Heyman and F.A. Leckie, editors, *Engineering Plasticity*, pages 535–609, Cambridge University, Oxfordshire, 1968. Cambridge University Press.

K.H. Roscoe, A.N. Schofield, and C.P. Wroth. On the yielding of soils. *Geotechnique*, 8:22–53, 1958.

P.W. Rowe. Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil. In R.H.G. Parry, editor, *Proc. Roscoe Memorial Symposium*, pages 143–194, Cambridge University, Oxfordshire, 1972. G.T. Foulis & Co.

J.W. Rudnicki and J.R. Rice. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371–394, 1975.

B.P. Sinha, K.H. Gerstle, and L.G. Tulin. Stress-strain relations for concrete under cyclic loading. *ACI J.*, 61(2):195–211, 1964.

M. Stavropoulou, P. Liolios, and G. Exadaktylos. Calibration of the triaxial hyperbolic Mohr-Coulomb elastoplastic model parameters on laboratory rock mechanics tests. *Int. J. Geomech. ASCE*, 12(6):618–631, 2012.

J. Sulem, I. Vardoulakis, E. Papamichos, A. Oulahna, and J. Tronvoll. Elasto-plastic modelling of Red Wildmoor sandstone. *Mech. Cohes.-Frict. Mat.*, 4: 215 – 245, 1999.

M. Takahashi and H. Koide. Effect of the intermediate principal stress on strength and deformation behavior of sedimentary rocks at the depth swallower than 2000 m. In V. Maury and D. Fourmaintraux, editors, *Rock at great depth*, volume 1, pages 19–26. Balkema, Rotterdam, 1989.

D.W. Taylor. *Fundamentals of soil mechanics*. John Wiley, New York, London, 1948.

S.P. Timoshenko and J.N. Goodier. *Theory of elasticity*. McGraw – Hill, New York, third edition, 1970.

L.S. Toth, D. Dudzinski, and A. Molinari. Forming limit predictions with the perturbation method using stress potential functions of polycrystal viscoplasticity. *I. J. Mech. Sci.*, 38:805–824, 1996.

H. Tresca. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis á de fortes pressions. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 59:754–758, 1864.

R. Trygve. THING - MODEL - VIEW - EDITOR an example from a planning system. Technical note, Xerox PARC, Norway, 1979. URL `http://heim.ifi.uio.no/trygver/themes/mvc/mvc-index.html`.

H.A.M. van Eekelen. Isotropic yield surfaces in three dimensions for use in soil mechanics. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 4:89–101, 1980.

J.G.M. van Mier. Complete stress-strain behavior and damaging status of concrete under multiaxial conditions. In *RILEM-CEB-CNRS, International Conference on Concrete Under Multiaxial Conditions*, volume 1 of *Presses de l'Université Paul Sabatier*, pages 75–85, Toulouse, France, 1984.

I. Vardoulakis and J. Sulem. *Bifurcation analysis in geomechanics*. Blackie Academic & Professional, London, 1995.

R. von Mises. Mechanik der festen korper im plastisch deformablen zustand. *Göttin. Nachr. Math. Phys.*, 1:582–592, 1913.

R. von Mises. Mechanik der plastischen formänderung von kristallen. *Z. angew. Math. Mech.*, 8:161 – 185, 1928.

G. Voyiadjis, J.-W. Ju, and J.-L. Chaboche, editors. *Damage mechanics in engineering materials*, volume 46 of *Studies in Applied Mechanics*. Elsevier, Oxford, 1998.

G.Z. Voyiadjis, Z.N. Taqieddin, and P. Kattan. Anisotropic damage-plasticity model for concrete. *Int. J. Plasticity*, 24:1946–1965, 2008.

G.A. Wiebols and N.G.W. Cook. An energy criterion for the strength of rocks in polyaxial compression. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 5:529–549, 1968.

K.J. Willam and E.P. Warnke. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. In *Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*, volume 19, pages 1–30, Zurich, 1974. International Association of Bridge and Structural Engineers.

D.M. Wood. *Soil behaviour and critical state soil mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge University, Oxfordshire, 1990.

D.M. Wood, K. Belkheir, and D.F. Liu. Strain softening and state parameter for sand modeling. *Geotechnique*, 44(2):335–339, 1994.

S. Yazdani and H.L. Schreyer. Combined plasticity and damage mechanics model for plain concrete. *J. Eng. Mech.*, 116(7):1435–1450, 1990.

P.J. Yoder and W.D. Iwan. On the formulation of strain space plasticity with multiple loading surfaces. *J. Appl. Mech. - T. ASME*, 48:773–778, 1981.

S. Zhou. A program to model the initial shape and extend of borehole breakout. *Comput. Geosci.*, 20(7-8):1143–1160, 1994.

Q.Z. Zhu, D. Kondo, and J.F. Shao. Homogenization-based analysis of anisotropic damage in brittle materials with unilateral effect and interactions between microcracks. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 33:749–772, 2009.

O.C. Zienkiewicz and G.N. Pande. Some useful forms of isotropic yield surfaces for soil and rock mechanics. In G. Gudehus, editor, *Finite Elements in Geomechanics*, pages 179–190. Wiley, Chichester, 1977.

Ευρετήριο