ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Γενικό τμήμα-Τομέας Εφαρμοσμένων και Υπολογιστικών Μαθηματικών

Διπλωματική εργασία

Μελέτη Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων σε Χώρους Sobolev

Λιαντράκη Σοφία

Επιβλέπων καθηγητής: Κανδυλάκης Δημήτριος

Χανιά,Σεπτέμβριος 2014

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με οποιονδήποτε τρόπο στην επιτυχή εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Θα πρέπει να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κύριο Κανδυλάκη Δημήτριο για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Ήταν πάντα διαθέσιμος με τις πολύτιμες συμβουλές του, γνώσεις, εμπειρία και την ουσιαστική καθοδήγηση του για τη βαθύτερη κατανόηση των χώρων Sobolev και την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων μέσα σε αυτόν τον χώρο.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου, των οποίων η πίστη στις δυνατότητες μου αποτέλεσε ένα μεγάλο κίνητρο σε όλους τους στόχους και τα όνειρα μου για να συνεχίσω τις σπουδές μου και να αποκτήσω αυτό το μεταπτυχιακό δίπλωμα.

Επίσης τους λίγους και πολύ καλούς μου φίλους που ήταν και ελπίζω να συνεχίσουν να είναι δίπλα μου να με στηρίζουν σε όλες τις σημαντικές στιγμές και αποφάσεις της ζωής μου.

Την παρούσα διπλωματική εργασία την αφιερώνω στην αγαπημένη μου αδερφή μου Μελανθία και στον Κωνσταντίνο.

Λιαντράκη Σοφία

Χανιά , Σεπτέμβριος 2014

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σε πολλά προβλήματα διαφορικών εξισώσεων δεν είναι πάντα εφικτό να βρίσκουμε κλασσικές λύσεις, δηλαδή λύσεις με συνεχείς παραγώγους. Μπορούμε όμως, κάτω από κατάλληλες προυποθέσεις να αποδεικνύουμε την ύπαρξη ασθενών λύσεων, δηλαδή λύσεων που έχουν «ασθενείς» παραγώγους (weak derivatives). Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη ασθενών λύσεων μπορούμε χρησιμοποιώντας τις ιδιότητ ές τους όπως -μοναδικότητα και ομαλότητα (regularity) - να αποδείξουμε ότι οι ασθενείς λύσεις είναι επίσης κλασσικές λύσεις.

Ως παράδειγμα, θεωρούμε το πρόβλημα του Dirichlet για την Λαπλασιανή με μηδενική συνοριακή συνθήκη σε μια φραγμένη περιοχή Ω του $\mathbb{R}^N$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$

$$-\Delta u = f \ \sigma\tau o\ \Omega$$

$$u = 0 \ \sigma\tau o\ \partial\Omega.$$

Αν η u είναι μια κλασσική λύση της εξίσωσης, τότε πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με μια ομαλή συνάρτηση φ που μηδενίζεται κοντά στο σύνορο του Ω έχουμε

$$-\int_\Omega \Delta u\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Από το θεώρημα της απόκλισης, επειδή η φ μηδενίζεται κοντά στο σύνορο του Ω παίρνουμε ότι

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi, \qquad (1)$$

που είναι μια σχέση που ισχύει για κάθε ομαλή φ που μηδενίζεται κοντά στο σύνορο.

Μπορούμε τώρα, χρησιμοποιώντας την σχέση (1), να ορίσουμε ως ασθενή λύση της εξίσωσης μια συνάρτηση u η οποία ικανοποιεί τη σχέση (1) για κάθε συνάρτηση φ ∈ $C_c^\infty(\Omega)$. Παρατηρούμε ότι το αριστερό ολοκλήρωμα στην (1) είναι πεπερασμένο αν η ∇u είναι στον $L^2(\Omega)$. Είναι μάλλον φυσικό να ορίσουμε τον χώρο Sobolev (τον χώρο όπου βρίσκονται οι ασθενείς λύσεις της (1)) ως το σύνολο που περιέχει τις συναρτήσεις του $L^2(\Omega)$ οι οποίες έχουν ασθενείς παραγώγους επίσης στον $L^2(\Omega)$. Η ασθενής παράγωγος ως προς x_i της u είναι η σ.π. μοναδική συνάρτηση $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\varphi = \int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Σκοπός της πτυχιακής είναι η εμβάθυνση στους χώρους Sobolev και η επίλυση εξισώσεων όπως η (1).

<u>Εισαγωγικές έννοιες</u>

$\mathbb{R}^n$ *ο συνήθης διανυσματικός χώρος διάστασης* n.

Ένα σημείο στον $\mathbb{R}^{n+1}$ *θα γράφεται ενίοτε ως* $(x,t) = (x_{1,\dots,}x_n,t)$ *με το* $t = x_{n+1}$ *να σημειώνει τον χρόνο.*

Το $x \in \mathbb{R}^n$ *κάποιες φορές θα γράφεται επίσης ως* $x = (x', x_n)$ *όπου* $x' = (x_{1,\dots,}x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$\mathbb{R}_+^n : \{x = (x_1 \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$

$B^0(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \big| |x-y| < r\}$ *η ανοικτή μπάλα με κεντρο το x και ακτίνα* $r > 0$.

$\mathbb{C}^n$: *το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.*

Ανοικτά σύνολα : ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου λέγεται ανοικτό αν περιέχει μια περιοχή κάθε στοιχείου του , δηλαδή αν για κάθε $\alpha \in A$

$\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(b,a) < \delta$ τότε $b \in A$.

Κλειστά σύνολα : ένα σύνολο A λέγεται κλειστό αν το συμπλήρωμα του

είναι ανοικτό, ισοδύναμα αν για κάθε ακολουθία (a_n) στοιχείων του A

που συγκλίνει ισχύει $\lim_n a_n \in A$.

Συμπαγείς χώροι :

Η οικογένεια O_t , $t \in T$, καλείται κάλυμμα του X αν $\cup O_t = X$.

Αν τα O_t είναι ανοικτά τότε το κάλλυμα λέγεται ανοικτό κάλλυμα.

Αν $T_0 \subseteq T$ και η οικογένεια $O_t, t \in T_0$ είναι επίσης κάλυμμα του X,

τότε η $O_t, t \in T_0$, λέγεται υποκάλλυμα της O_t , $t \in T$.

Ένα σύνολο X λέγεται συμπαγές αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του περιέχει

ένα πεπερασμένο υποκάλλυμα, δηλ. αν O_t , $t \in T$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X

τότε $\exists\ t_1, .. t_n \in T$ τέτοια ώστε $O_{t_1} \cup O_{t_2} \cup \ldots \cup O_{t_n} = X$.

Ενα υποσύνολο Y ενός χώρου X λέγεται προσυμπαγές αν

το κλειστό περίβλημα του είναι συμπαγές.

Το σύνολο

$$supp(f) = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}$$

λέγεται σύνολο υποστήριξης της συνάρτησης $f: U \to \mathbb{R}$. Αν είναι συμπαγές, τότε

θα λέμε ότι η συνάρτηση έχει συμπαγή υποστήριξη.

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο ∂U.

$C^k(U)$: το σύνολο των συναρτήσεων $f: U \to \mathbb{R}$ των οποίων οι μερικές παράγωγοι

μέχρι τάξης k υπάρχουν και είναι συνεχείς.

Επομένως αν $f \in C^1(U)$ αυτό σημαίνει οτι οι πρώτες μερικές παράγωγοι

της f υπάρχουν και είναι συνεχείς.

$C^\infty(U)$: το σύνολο των συναρτήσεων $f: U \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι απείρως

διαφορίσιμες.

$C_c^\infty(U)$: οι συναρτήσεις που βρίσκονται στον χώρο $C^\infty(U)$ και έχουν συμπαγή υποστήριξη.

$L^p(U), 1 \leq p < \infty$: οι συναρτήσεις $f: U \to \mathbb{R}$ με

$$\int_U |f|^p dx < \infty.$$

Η νόρμα του $L^p(U)$ ορίζεται ως ακολούθως

$$\|u\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$V \subset\subset U$: σημαίνει οτι η κλειστότητα του συνόλου V είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του συνόλου U, δηλαδή $\bar{V} \subseteq U$.

Ακολουθία Cauchy : μια ακολουθία (a_n) λέγεται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν $m, n \geq n_0(\varepsilon)$,

$$\text{τότε } |a_n - a_m| < \varepsilon .$$

Πλήρης χώρος : ένας χώρος ονομάζεται πλήρης όταν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.

Χώρος Hilbert : ένας χώρος $(E, <,>)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Χώροι Banach : ένας χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς την μετρικη που ορίζει η νόρμα.

Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και $f: A \to \mathbb{R}$. Θα λέμε οτι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο A και θα γράφουμε $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $sup_{x \in A}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$,

$$\text{τότε } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$Το\ σύνολο\ A \subset C(E, \mathbb{N})\ θα\ λέγεται\ ισοσυνεχές\ στο\ σημείο\ x_0\ \epsilon\ E$ όταν $για\ κάθε$ $\varepsilon > 0\ \exists\ \rho > 0\ τ.ω\ \forall f\ \epsilon\ A\ και\ \forall x\ \epsilon\ E\ με\ d(x, x_0) < \rho\ να\ έχουμε$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$Θεώρημα\ Ascoli - Arzela:$

$Έστω\ K\ συμπαγής\ μετρικός\ χώρος. Τότε\ κάθε\ φραγμένη\ ισοσυνεχής\ ακολουθία$ $στον\ C(K, \mathbb{N})\ διαθέτει\ μια\ ομοιόμορφα$ συγκλίνουσα υπακολουθία.

$Ο\ δυικός\ χώρος\ ενος\ χώρου\ Banach\ X\ είναι\ το\ σύνολο$

$X^* = \{f: X \to \mathbb{R}: f\ γραμμική, συνεχής\ και\ φραγμένη\}.$

$Τα\ στοιχεία\ του\ X^*\ λέγονται\ γραμμικά\ συναρτησοειδή.$

Ασθενείς παράγωγοι

Ορισμοί ασθενών παραγώγων

Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών έχει την ακόλουθη μορφή

$$\int_U u_{x_i} v = \int_U v_{x_i} u + \int_{\partial U} uv\eta_\iota dS,$$

με $u, v \in C^1(\overline{U})$ και η_ι η i συντεταγμένη του μοναδιαίου διανύσματος που είναι κάθετο στο σύνορο ∂U.

1) Υποθέτουμε ότι $u \epsilon C^1(U)$ και $\varphi \epsilon C_c^\infty(U)$. Τότε, μέσω της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, ισχύει η σχέση

$$\int_U u\varphi_{x_i} dx = -\int_U u_{x_i}\varphi dx\ , \quad i = 1, \dots n.$$

Γενικότερα θα έχουμε ότι αν $u \epsilon C^k(U)$, k είναι ένας θετικός ακέραιος, και α=$(\alpha_1, \dots., \alpha_n)$ με $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = k$ τότε,

$$\int_U uD^a\varphi dx = (-1)^{|a|}\int_U D^a u\varphi dx$$

όπου $D^\alpha\varphi = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}\varphi}{\partial\chi_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}\varphi}{\partial\chi_n^{\alpha_n}}\right)$.

2) Έστω $u, v \epsilon L_{loc}^1(U)$, λέμε ότι η v είναι η $\alpha^{οστη}$ ασθενής παράγωγος (α^{th} $weak\ partial\ derivative$) της u, δηλαδή $D^a u = v$, αν :

$$\int_U uD^a\varphi dx = (-1)^{|a|}\int_U v\varphi dx\ ,$$

για όλες τις συναρτήσεις $\varphi \epsilon C_c^\infty(U)$.

Λήμμα -Μοναδικότητα των ασθενών παραγώγων

Η $\alpha^{o\sigma\tau\eta}$ ασθενής παράγωγος της u, αν αυτή υπάρχει, είναι μοναδική εκτός από ένα σύνολο με μέτρο μηδέν.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι οι $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(U)$ είναι ασθενείς παράγωγοι της u ,

τότε :

$$\int_C uD^a\,\varphi dx = (-1)^{|a|}\int_C v\varphi dx \; = (-1)^{|a|}\int_C \tilde{v}\varphi dx\,.$$

Άρα, για όλες τις συναρτήσεις $\varphi \in C_c^\infty(U)$,

$$\int_C (v-\tilde{v})\,\varphi dx = 0 \;\Rightarrow\; v-\tilde{v} = 0\;\sigma.\pi. \Rightarrow v = \tilde{v}\;\;\sigma.\pi.$$

<u>Χώροι Sobolev</u>

Ορισμός

Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις $u : U \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $D^a u \in L^p(U)$ όταν $|\alpha| \le k$.

Η νόρμα της $u \in W^{k,p}(U)$ ορίζεται παρακάτω

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U |D^a u|^p\,dx\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\le k} sup_U |D^a u|\;, & p = \infty \end{cases}$$

Επίσης

i. Αν $\{u_m\}_{m=1}^\infty$, $u_m \in W^{k,p}(U)$, τότε θα λέμε ότι η u_m συγκλίνει στην $u \in W^{k,p}(U)$ δηλαδή ,

$$u_m \to u \text{ στον } W^{k,p}(U),$$

αν

$$\lim_{m\to\infty}\|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

ii. Γράφουμε $u_m \to u$ στον $W^{k,p}_{loc}(U)$ όταν

$$u_m \to u \text{ στον } W^{k,p}(V)\ ,$$

για κάθε $V \subset\subset U$.

iii. Ορίζουμε τον χώρο $W_0^{k,p}(U)$ να είναι η κλειστότητα του $C_c^\infty(U)$ στον $W^{k,p}(U)$ ως προς την παραπάνω νόρμα.

Δηλαδή $u \epsilon W_0^{k,p}(U)$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία συναρτήσων $u_m \epsilon C_c^\infty(U)$ τέτοια ώστε, $u_m \to u$ στον $W^{k,p}(U)$.

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος $W_0^{k,p}(U)$ περιλαμβάνει συναρτήσεις $u \epsilon W_0^{k,p}(U)$ με $D^a u = 0$ στο ∂U για όλα τα $|\alpha| \le k-1$.

iv. Γράφουμε $H^k(U) = W^{k,2}(U)$, $(k = 0,1,\ldots)$. Ο $H^k(U)$ είναι ένας χώρος Hilbert. Επίσης έχουμε $H^0(U) = L^2(U)$.

Επίσης, $H_0^k(U) = W_0^{k,2}(U)$.

Θεώρημα 1 - Ιδιότητες των ασθενών παραγώγων

Υποθέτουμε ότι $u, v\ W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \le k$, τότε :

1. $D^a u\ \epsilon\ W^{k-|a|,p}(U)$ και $D^\beta(D^a u) = D^a\left(D^\beta u\right) = D^{a+\beta}u$ για όλα τα α, β με $|\alpha| + |\beta| \le k$,
2. Για κάθε $\lambda\ , \mu \epsilon \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \epsilon W^{k,p}(U)$ και $D^a(\lambda u + \mu v) = \lambda D^a u + \mu D^a v$ με $|\alpha| \le k$,
3. Αν V είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του U τότε $u\ \epsilon\ W^{k,p}(V)$,
4. Αν $\zeta \epsilon C_c^\infty(U)$ τότε $\zeta u \epsilon\ W^{k,p}(U)$ και

$$D^{\alpha}(\zeta u)=\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\beta}\zeta D^{\alpha-\beta}u \quad (Leibiniz'formula) \qquad (*)$$

$$\text{όπου } \binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}.$$

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε το (1) ,

έστω $\varphi \in C_c^{\infty}(U)$ και $D^{\beta}\varphi \in C_c^{\infty}(U)$ οπότε ,

$$\int_U D^{\alpha}uD^{\beta}\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_U uD^{\alpha+\beta}\,\varphi dx$$

$$=(-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|}\int_U D^{\alpha+\beta}u\varphi\, dx$$

$$=(-1)^{|\beta|}\int_U D^{\alpha+\beta}u\varphi\, dx.$$

Άρα ισχύει ότι $D^{\beta}(D^{\alpha}u)=D^{\alpha+\beta}u$.

Για να αποδείξουμε την (4) , υποθέτουμε αρχικά ότι $|\alpha|=1$ και $\varphi \in C_c^{\infty}(U)$.

Τότε :

$$\int_U \zeta uD^{\alpha}\varphi dx=\int_U uD^{\alpha}(\zeta\varphi)-u(D^{\alpha}\,\zeta)\varphi dx=-\int_U(\zeta D^{\alpha}\,u+uD^{\alpha}\zeta)\varphi dx$$

$$\text{όπου } D^{\alpha}(\zeta u)=\zeta D^{\alpha}u+uD^{\alpha}\zeta$$

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι η σχέση (*) είναι αληθής για όλα τα $|\alpha|\le l$ και όλες τις συναρτήσεις ζ.

Διαλέγουμε α με $|\alpha|=l+1$, τότε $\alpha=\beta+\gamma$ για κάποια $|\beta|=l$ και $|\gamma|=1$, οπότε :

$$\int_U \zeta u D^a \varphi dx = \int_U \zeta u\, D^\beta (D^\gamma \varphi) dx$$

$$= (-1)^{|\beta|} \int_U \sum_{\sigma \le \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \zeta D^{\beta-\sigma} u D^\gamma \varphi dx$$

$$= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_U \sum_{\sigma \le \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma (D^\sigma \zeta D^{\beta-\sigma} u) \varphi dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\sigma \le \beta} \binom{\beta}{\sigma} [D^\rho \zeta D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \zeta D^{\alpha-\sigma} u] \varphi dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U \left[\sum_{\sigma \le \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \zeta D^{\alpha-\sigma} u \right] \varphi dx$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \;\; \rho = \sigma + \gamma \quad \kappa\alpha\iota \quad \binom{\beta}{\sigma-\gamma} + \binom{\beta}{\sigma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Θεώρημα 2 –Οι Χώροι Sobolev ως χώροι συναρτήσεων

Για κάθε $k = 1, \ldots$ και $1 \le p \le \infty$ ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$ είναι ένας χώρος Banach.

<u>Απόδειξη</u>

Πρώτα ελέγχουμε ότι η έκφραση $\|u\|_{W^{k,p}(U)}$ είναι μια νόρμα.

- Είναι προφανές ότι ισχύει $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(U)}$ και $\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$ αν και μόνο αν $u = 0$.
- Υποθέτουμε ότι $u, v \,\epsilon\, W^{k,p}(U)$. Τότε αν $1 \le p < \infty$, από την ανισότητα Minkowski έχουμε:

$$\|u + v\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{|a| \le k} \|D^a u + D^a v\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{|a|\leq k} \|D^a u\|_{L^p(U)} + \|D^a v\|_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{|a|\leq k} \|D^a u\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|a|\leq k} \|D^a v\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)} .$$

Στην συνέχεια πρέπει να δείξουμε ότι ο χώρος $W^{k,p}(U)$ είναι πλήρης.

Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία Cauchy στον $W^{k,p}(U)$, οπότε για κάθε $|\alpha| \leq k$, η $\{D^a u_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία Cauchy στον $L^p(U)$ και επειδή ο $L^p(U)$ είναι πλήρης υπάρχουν συναρτήσεις $u_a \in L^p(U)$ τέτοιες ώστε

$$D^a u_m \rightarrow u_a \text{ στον } L^p(U) \text{ για κάθε } |\alpha| \leq k.$$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι $u_m \rightarrow u_{(0,\ldots 0)} = u$ στον $L^p(U)$.

Ισχυριζόμαστε ότι $u \in W^{k,p}(U)$, $D^a u = u_a$ $\quad (|\alpha| \leq k)$ και $\varphi \in C_c^{\infty}(U)$,

τότε έχουμε :

$$\int_U u D^a \varphi dx = \lim_{m\to\infty} \int_U u_m D^a \varphi dx = \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^a u_m \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u_a \varphi dx$$

Επομένως καθώς $D^a u_m \rightarrow D^a u$ στον $L^p(U)$ για όλα τα $|\alpha| \leq k$ βλέπουμε ότι $u_m \rightarrow u$ στον $W^{k,p}(U)$.

Προσεγγίσεις

Θεώρημα 1 – Τοπική προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις

Η συνάρτηση $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγεται ομαλή αν είναι απείρως παραγωγίσιμη.

Ο*ρίζουμε μια συνάρτηση η στον $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ από τον τύπο,*

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

$\mu\varepsilon\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\ C > 0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \nu\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1.$

Η η λέγεται τυπικός ομαλοποιητής (standard mollifier).

$\text{Επίσης για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ ορίζουμε}$

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

$\text{Έστω τώρα ότι η } f: U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε την}$

$\underline{\text{ομαλοποίηση (mollification)}}$ $f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$ $\text{της } f$ στο σύνολο

$U_\varepsilon = \{x \,\epsilon\, U \mid dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$, ως εξής

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)dy\,, \quad \text{όταν } x \,\epsilon\, U_\varepsilon.$$

Για την $u \,\epsilon\, W^{k,p}(U)$, $1 \leq p \leq \infty$, ορίζουμε

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \quad \text{στο } U_\varepsilon.$$

Τότε

1. $u^\varepsilon \,\epsilon\, C^\infty(U_\varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$,

2. $u^\varepsilon \to u$ στον $W^{k,p}_{loc}(U)$ καθώς $\varepsilon \to 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Το (1) αποδεικνύεται εύκολα.

Για το (2) , έστω $|\alpha| \leq k$. Τότε η $\alpha^{\text{οστη}}$ παράγωγος της ομαλής συνάρτησης u^ε ικανοποιεί την σχέση

$$D^a u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^a u \quad \text{στον} \quad U_\varepsilon \qquad (*)$$

Για $x \,\epsilon\, U_\varepsilon$ έχουμε:

$$D^a u^\varepsilon(x) = D^a \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

$$= \int_U D^a_x \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^a_y \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy.$$

Αν $x \,\epsilon\, U_\varepsilon$, τότε $\varphi(y) = \eta_\varepsilon(x-y) \,\epsilon\, C^\infty_c(U)$, οπότε

$$\int_U D_y^a \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = (-1)^{|\alpha|} \int_U \eta_\varepsilon(x-y) D^a u(y)dy.$$

Άρα,

$$D^a u^\varepsilon(x) = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_U \eta_\varepsilon(x-y) D^a u(y)dy = [\eta_\varepsilon * D^a u\,](x).$$

Στην συνέχεια διαλέγουμε ένα ανοικτό σύνολο $V \subset\subset U$ και από την (*) έχουμε ότι

$$D^a u^\varepsilon \to D^a u \text{ στον } L^p(V)\ \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \varepsilon \to 0 \text{ για κάθε } |\alpha| \leq k.$$

Συνεπώς,

$$\|u^\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(V)} = \sum_{|a|\leq k} \|D^a u^\varepsilon - D^a u\,\|^p_{L^p(V)} \to 0 \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \ \varepsilon \to 0.$$

Ορισμός. Διαμέριση της μονάδας (Partition of unity)

Μια διαμέριση της μονάδας στον μετρικό χώρο X είναι μια συλλογή $\{g_i\}$ απο συνεχείς συναρτήσεις στον X τ.ω:

i) $g_i \geq 0$ για κάθε i,

ii) Κάθε $x \in X$ έχει μια γειτονιά στο U τ.ω

$$U \cap supp(g_i) = \emptyset \text{ εκτός από πεπερασμένο αριθμό δεικτών,}$$

iii) Για κάθε $x \in X$, $\sum_i g_i(x) = 1$.

Θεώρημα 2 – Προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις

Έστω U φραγμένο σύνολο και $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq p \leq \infty$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ τέτοιες ώστε

$$u_m \to u \text{ στον } W^{k,p}(U).$$

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε $U = \cup_{i=1}^\infty U_i$ όπου $U_i = \{x \in U \mid dist(x, \partial U) > 1/i\}$, $i = 1,2, \dots$

Ορίζουμε $V_i = U_{i+3} - \breve{U}_{i+1}$ και επιλέγουμε ένα σύνολο $V_0 \subset\subset U$

τέτοιο ώστε $U = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$.

Έστω σύνολο συναρτήσεων $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}$ να αποτελεί μια ομαλή διαμέριση της μονάδας του ανοικτού συνόλου $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε :

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1 \quad , \quad \zeta_i \in C_c^{\infty}(V_i) \\ \quad \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i = 1 \qquad \sigma\tau o \ U \end{cases}$$

Έστω $u \in W^{k,p}(U)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1 (Στοιχειώδης ιδιότητες ασθενών συναρτήσεων – (iv)) έχουμε $\zeta_i u \in W^{k,p}(U)$ και supp $(\zeta_i u) \subset V_i$.

Έστω δ > 0 , $\varepsilon_i > 0$ και $u^i = \eta_\varepsilon * (\zeta_i u)$, επομένως έχουμε :

$$\begin{cases} \left\|u^i - \zeta_i u\right\|_{W^{k,p}(U)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} \quad , \ (i = 0,1, \dots) \\ \qquad supp\ u^i \ \subset \ W_i \quad , \quad (i = 1, \dots) \end{cases} \quad ,$$

$W_i = U_{i+4} - \breve{U}_i \supset V_i$, $i = 1, \dots$

Επίσης ορίζουμε $v = \sum_{i=1}^{\infty} u^i$ με $v \in C^{\infty}(U)$, $u = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i u$ και V ⊂⊂ U. Τότε

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(V)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left\|u^i - \zeta_i u\right\|_{W^{k,p}(U)}$$

$$\leq \delta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \delta.$$

Παίρνουμε το supremum πάνω στο σύνορο V ⊂⊂ U και υπολογίζουμε ότι ,

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \delta.$$

Θεώρημα 3 –Προσέγγιση από συναρτήσεις ομαλές έως το σύνορο

Έστω U φραγμένο σύνολο με ομαλό σύνορο ∂U και $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq p \leq \infty$.

Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^{\infty}(\overline{U})$ τέτοιες ώστε ,

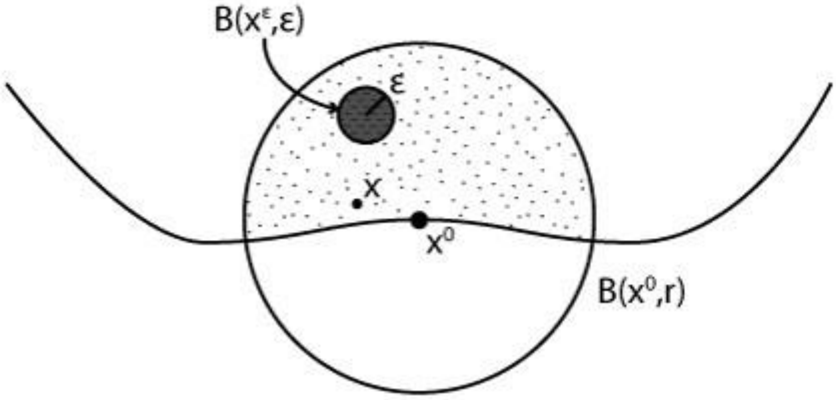
$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}(U).$$

Απόδειξη

Έστω $x^0 \in \partial U$ και καθώς το ∂U *είναι ομαλό υπάρχουν* $r > 0$ και μια συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι C^1 ώστε:

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) |\ x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

Ορίζουμε επίσης $V = U \cap B(x^0, r/2)$ και $x^\varepsilon = x + \lambda\varepsilon e_n$ $(x \in V, \varepsilon > 0)$



Παρατηρούμε ότι για κάποιο σταθερό αριθμό $\lambda > 0$, η μπάλα $B(x^0, \varepsilon)$ είναι υποσύνολο του συνόλου $U \cap B(x^0, r)$ για όλα τα $x \in V$ και μικρό $\varepsilon > 0$.

Επίσης για $x \in V$ ορίζουμε $u_\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon)$.

Ορίζουμε επίσης $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$, τότε $v^\varepsilon \in C^\infty(\bar{V})$. Θα αποδείξουμε ότι

$v^\varepsilon \to u \; \sigma\tau o\nu \; W^{k,p}(V)$.

Έστω λοιπόν $\alpha \; \mu\varepsilon \; |\alpha| \leq k$. Τότε

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέρος της ανισότητας πλησιάζει το 0 επειδή η μετατόπιση είναι συνεχής στον $L^p(V)$. Ο δεύτερος όρος επίσης πλησιάζει το 0 από το θεώρημα για προσέγγιση μέσω ομαλών συναρτήσεων.

Καθώς το ∂U είναι συμπαγές, για $\delta > 0$ υπάρχουν πεπερασμένα σημεία $x_i^0 \in \partial U$ και ακτίνες $r_i > 0$, σύνολα $V_i = U \cap B(x_i^0, r_i/2)$ και συναρτήσεις $v_i \in C^\infty(\bar{V_i})$, $i = 1, \dots, N$, τέτοιες ώστε $\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq \delta$ και $\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N B^0(x_i^0, r_i/2)$.

Παίρνουμε ένα ανοικτό σύνολο $V_0 \subset\subset U$, τέτοιο ώστε $U \subset \bigcup_{i=0}^N V_i$ και λαμβάνοντας υπόψη μας το θεώρημα 1 (τοπική προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις) για τις συναρτήσεις $v_0 \in C^\infty(\bar{V_0})$ έχουμε :

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \leq \delta .$$

Έστω $\{\zeta_i\}_{i=0}^{N}$ μια ομαλή διαμέριση της μονάδας για το ανοικτό σύνολο $\{V_i\}_{i=0}^{N}$ $\sigma\tau o\ U$.

Ορίζουμε $v_i = \sum_{i=0}^{N} \zeta_i\, v_i$, οπότε έχουμε ότι $v \in C^{\infty}(\bar{U})$, και καθώς $u = \sum_{i=0}^{N} \zeta_i\, u$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1 (ιδιότητες ασθενών συναρτήσων) για $|\alpha| \le k$ έχουμε:

$$\|D^{\alpha} v - D^{\alpha} u\|_{L^p(U)} \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{N} \|D^{\alpha}(\zeta_i v_i) - D^{\alpha}(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)}$$
$$\le C \sum_{i=0}^{N} \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} = CN.$$

<u>Επεκτάσεις</u>

Θεώρημα 1 – θεώρημα επέκτασης

Έστω U φραγμένο σύνολο ώστε το $\partial U\ \nu\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ C^1$. Έστω V ένα ανοικτό σύνολο τέτοιο ώστε $U \subset\subset V$. Τότε υπάρχει ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής

$$E: W^{k,p}(V) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

τέτοιος ώστε για κάθε $u \in W^{1,p}(U)$:

I. $Eu = u\ \sigma\tau o\ U,$

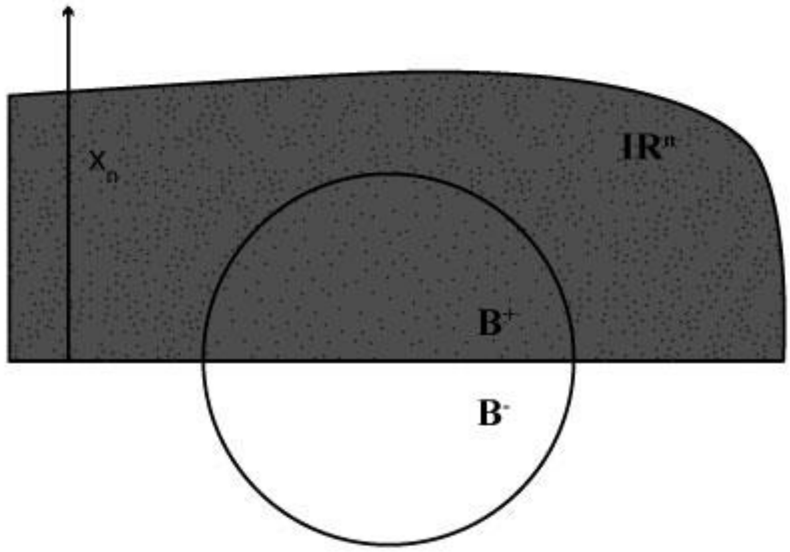
II. Eu έχει υποστήριξη μέσα στο V,

III. $\|Eu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα $p\ ,V\ ,U$.

- Καλούμε την Eu μια επέκταση του u στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη

Έστω $x^0 \epsilon \partial U$, υποθέτουμε πρώτα ότι ∂U είναι επίπεδο κοντά στο x^0.



Έστω ότι υπάρχει μια ανοικτή μπάλα B με κέντρο x^0 και ακτίνας r , τέτοια ώστε :

$$\begin{cases} B^+ = B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \overline{U} \\ B^- = B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n - U \end{cases}$$

Έστω $u \epsilon C^\infty(\overline{U})$, τότε

Ορίζουμε $\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) \quad , \quad x \epsilon B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right) \quad , \quad x \epsilon B^- \end{cases}$ (1)

Αυτή η συνάρτηση καλείται αντανάκλαση υψηλότερης τάξης της u από το

$B^+ \ \sigma\tau o \ B^-$.

Έστω $\bar{u} \epsilon C^1(B)$ και $u^- = \bar{u}|_{B^-}$, $u^+ = \bar{u}|_{B^+}$

όπου $u^-{}_{x_n} = u^+{}_{x_n}$ (για $x_n = 0$) (2)

Πράγματι σύμφωνα με την (1) έχουμε :

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n}(x) = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right)$$

Και από (2) έχουμε γενικά ότι $u^-{}_{x_i} = u^+{}_{x_i}$ (για $x_n = 0$) , $i = 1,2, \dots, n-1$

Άρα ,

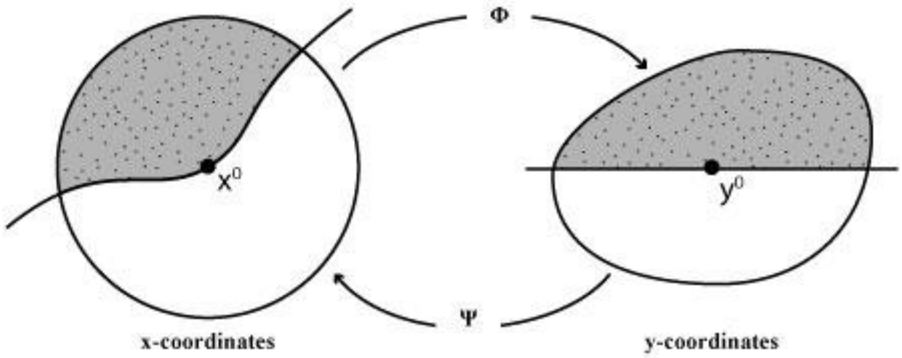
$$D^a u^-|_{\{x_n=0\}} = D^a u^+|_{\{x_n=0\}} \text{ για κάθε } |\alpha| \leq 1.$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας όλα τα παραπάνω προκύπτει ,

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)} ,$$

όπου το C δεν εξαρτάται από το u.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου ∂U δεν είναι απαραίτητα επίπεδο κοντά στο x^0. Έτσι μπορούμε να βρούμε μια ομαλή συνάρτηση Φ με αντίστροφο Ψ τέτοια ώστε η Φ να «ευθυγραμμίζει το ∂U κοντά στο x^0».



Γράφουμε $y = \Phi(x)$, $x = \Psi(y)$, $u'(y) = u(\Psi(y))$ τέτοια ώστε

$\|\overline{u'}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u'\|_{W^{1,p}(B^+)} \xRightarrow{W=\Psi(B)} \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$

Καθώς το ∂U είναι συμπαγές υπάρχουν πεπερασμένα σημεία $x_i^0 \epsilon \ \partial U$, W_i ανοικτα σύνολα και επεκτάσεις $\bar{u}_i$ του u στο W_i $\gamma\iota\alpha$ $(i = 1, \dots , N)$, τέτοια ώστε $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{N} W_i$. Παίρνουμε $W_0 \subset\subset U$ τέτοιο ώστε $U \subset \bigcup_{i=1}^{N} W_i$ και θεωρούμε μια διαμέριση της μονάδας $\{\zeta_i\}_{i=0}^{N}$. Τότε

$\bar{u} = \sum_{i=0}^{N} \zeta_i \, \bar{u}_i$ $\acute{o}\pi o \upsilon$ $\bar{u}_0 = u$ και έχουμε ότι

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} .$$

Γράφουμε $Eu = \bar{u}$ και παρατηρούμε ότι η αντιστοιχία $u \mapsto Eu$ είναι γραμμική.

Επίσης $u \,\epsilon\, W^{1,p}(U)$ και η $u_m \ \epsilon \ C^\infty(\bar{U})$ συγκλίνει στο $u \,\epsilon\, W^{1,p}(U)$

οπότε :

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Άρα η ακολουθία $\{Eu_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία Cauchy, οπότε συγκλίνει στο $Eu = \bar{u}$. Αυτή η επέκταση δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, οπότε έχουμε αποδείξει το θεώρημα.

<u>Ίχνη</u>

Θεώρημα 1 – θεώρημα ίχνους

Έστω U φραγμένο σύνολο με το ∂U να είναι C^1 . Τότε υπάρχει ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής $T: W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ τέτοιος ώστε :

I. $Tu = u|_{\partial U}$, αν $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$

II. $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, $u \in W^{1,p}(U)$

- Καλούμε Tu το ίχνος του u στο ∂U.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $u \in C^1(\overline{U})$, όπως στο πρώτο σημείο της απόδειξης του θεωρήματος 1 (θεώρημα επέκτασης) , υποθέτουμε ότι $x^0 \in \partial U$ και ότι το ∂U είναι επίπεδο κοντά στο x^0.

Διαλέγουμε μια ανοικτή μπάλα B όπως στην προηγούμενη απόδειξη και $\hat{B}$ μια ομόκεντρη μπάλα ακτίνας $r/2$.

Έστω $\zeta \in C_c^{\infty}(B)$ με $\zeta \geq 0$, $\sigma\tau\eta\nu$ B και $\zeta \equiv 1$, $\sigma\tau\eta\nu$ $\hat{B}$.

Συμβολίζουμε με Γ εκείνο το τμήμα του συνόρου ∂U στο εσωτερικό $\hat{B}$.

Έστω $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$, τότε :

$$\int_{\Gamma} |u|^p dx' \leq \int_{\{x_n=0\}} \zeta\, |u|^p dx' = \int_{B^+} (\zeta\, |u|^p)_{x_n} dx$$

$$= -\int_{B^+} |u|^p \zeta_{x_n} + p|u|^{p-1}(sgn\, u) u_{x_n} \zeta dx$$

$$\leq C \int_{B^+} |u|^p + |Du|^p dx \quad (1)$$

Αν τώρα $x^0 \epsilon\, \partial U$ και ∂U δεν είναι απαραίτητα επίπεδο κοντά στο x^0, τότε το μετατρέπουμε σε επίπεδο κοντά στο x^0 και ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) και κάνοντας αλλαγή μεταβλητών έχουμε :

$$\int_{\Gamma} |u|^p dS \leq C \int_{U} |u|^p + |Du|^p dx\, ,$$

όπου το Γ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του ∂U που περιέχει το x^0.

Καθώς το ∂U είναι συμπαγές υπάρχουν πεπερασμένα σημεία $x_i^0\ \epsilon\ \ \partial U$ και ανοικτά υποσύνολα $\Gamma_i \subset \partial U$, $(i = 1, \ldots, N)$ όπου $\partial U\ = \cup_{i=1}^{N} \Gamma_i$ και

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}\ , (i = 1, \ldots, N).$$

Συνεπώς $Tu = u|_{\partial U}\ \ \tau \acute{o} \tau \varepsilon$,

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}\, , \qquad (2)$$

για μια κατάλληλη σταθερά C η οποία δεν εξαρτάται από την u.

Η ανισότητα (2) ισχύει για $u \,\epsilon\, C^1(\overline{U})$. Έστω τώρα ότι $u \,\epsilon\, W^{1,p}(U)$, τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m\ \epsilon\ C^\infty(\overline{U})$ που συγκλίνουν στο $u \,\epsilon\, W^{1,p}(U)$ και λαμβάνοντας υπόψη μας την ανισότητα (2) προκύπτει :

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial U)} \leq C \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)} \qquad (3)$$

όπου αυτή η ακολουθία $\{Tu_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία Cauchy στον $L^p(\partial U)$.

Επομένως ορίζουμε $Tu = \lim_{m\to\infty} T\, u_m$.

Σύμφωνα με την σχέση (3) ο παραπάνω ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή των ομαλών συναρτήσεων που συγκλίνουν στην u.

Αν τώρα $u \epsilon W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$ παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $u_m \ \epsilon \ C^{\infty}(\overline{U})$ που κατασκευάστηκαν στην απόδειξη του θεωρήματος 3 (Προσέγγιση από συναρτήσεις ομαλές έως το σύνορο) συγκλίνουν ομοιόμορφα στην $u \ \sigma\tau o\nu \ \overline{U}$, οπότε $Tu = u|_{\partial U}$.

Το παρακάτω θεώρημα χαρακτηρίζει τις συναρτήσεις των οποίων το ίχνος στο σύνορο είναι η μηδενική συνάρτηση.

Θεώρημα 2 – Συναρτήσεις μηδενικού ίχνους στον $W_0^{1,p}(U)$

Έστω U φραγμένο σύνολο με C^1 σύνορο ∂U και $u \epsilon W^{1,p}(U)$. Τότε

$$u \epsilon W_0^{1,p}(U) \ \alpha\nu \ \kappa\alpha\iota \ \mu\acute{o}\nu o \ \alpha\nu \ \ Tu = 0 \ \sigma\tau o \ \partial U.$$

Απόδειξη

(Ευθύ)

Έστω $u \epsilon W_0^{1,p}(U)$, τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \ \epsilon \ C^{\infty}(U)$ τέτοιες ώστε

$$u_m \to u \text{ στον } W^{1,p}(U).$$

Επειδή $Tu_m \ = 0$ στο ∂U για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $o \ T: W^{1,p}(U) \ \to L^p(\partial U\,)$ είναι ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής, συμπεραίνουμε ότι

$$Tu = 0 \ \sigma\tau o \ \partial U.$$

(Αντίστροφο)

Υποθέτουμε ότι $Tu = 0 \ \sigma\tau o \ \partial U.$ Χρησιμοποιώντας μια διαμέριση της μονάδας και επιπεδοποιώντας το σύνορο υποθέτουμε ότι

$$\begin{cases} u \ \epsilon \ W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+), \eta \ u \ \acute{\epsilon}\chi\varepsilon\iota \ \sigma\upsilon\mu\pi\alpha\gamma\acute{\eta} \ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\alpha \ \sigma\tau o \ \mathbb{R}^n_+ \\ \qquad Tu = 0 \quad \sigma\tau o \ \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases} \quad (1)$$

Επομένως, καθώς $Tu = 0$ στον $\mathbb{R}^{n-1}$, υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \ \epsilon \ C^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ τέτοιες ώστε

$$u_m \to u \text{ στον } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \ \ (2)$$

και

$$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0 \text{ στον } L^p(\mathbb{R}^{n-1}\,)\,.\ \ (3)$$

Αν $x' \,\epsilon\, \mathbb{R}^{n-1}$ $\kappa\alpha\iota$ $x_n \geq 0$ έχουμε

$$|u_m(x', x_n)| \leq |u_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} \left|u_{m,x_n}(x', t)\right| dt.$$

οπότε

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p dx' \leq$$

$$C\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)| dx' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x', t)|^p dx'\, dt\right).$$

Καθώς $m \to \infty$ και λαμβάνοντας υπόψη μας τις σχέσεις (2),(3) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)| dx' \leq C x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx'\, dt\ \ , x_n > 0. \qquad (4)$$

Έστω τώρα $\zeta \,\epsilon\, C^\infty(\mathbb{R})$ με $\zeta \equiv 1$ $\sigma\tau o$ $[0,1]$, $\zeta \equiv 0$ $\sigma\tau o$ $\mathbb{R} \setminus [0,2]$ $\kappa\alpha\iota$ $0 \leq \zeta \leq 1$.

Ορίζουμε
$$\begin{cases} \zeta_m(x) = \zeta(m x_n) \quad , \quad (x \,\epsilon\, \mathbb{R}^n_+) \\ w_m = u(x)(1 - \zeta_m). \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{cases} w_{m,x_n} = u_{x_n}(1 - \zeta_m) - m u \zeta' \\ D_{x'} w_m = D_{x'} u (1 - \zeta_m), \end{cases}$$

οπότε

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m|^p |Du|^p dx + C m^p \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^p dx'\, dt = A + B \ (5)$$

Παρατηρούμε ότι $A \to 0$ καθώς $m \to \infty$ επειδή $\zeta_m \neq 0$ όταν $0 \leq x_n \leq 2/m$. Για να φράξουμε το B χρησιμοποιούμε την σχέση (4) και έχουμε

$$B \leq Cm^p \left(\int_0^{\frac{2}{m}} t^{p-1} dt \right) \left(\int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' \, dx_n \right)$$

$$\leq C \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' dx_n \to 0 \;\; \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \; m \to 0. \quad (6)$$

Επομένως από τις σχέσεις (5)- (6) προκύπτει ότι

$$Dw_m \to Du \; \sigma\tau o\nu \; L^p(\mathbb{R}^n_+) \; \kappa\alpha\iota \; \varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta} \;\; w_m \to u \; \sigma\tau o\nu \; L^p(\mathbb{R}^n_+)$$

$\acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon \; \acute{o}\tau\iota$

$$w_m \to u \; \sigma\tau o\nu \; W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Όμως $w_m = 0$ αν $0 < x_n < 1/m$. Οπότε χρησιμοποιώντας mollification στις συναρτήσεις w_m παίρνουμε συναρτήσεις $u_m \; \epsilon \; C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ τέτοιες ώστε $u_m \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, άρα $u \; \epsilon \; W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>Ανισότητες Sobolev</u>

Σκοπός του κεφαλαίου είναι η μελέτη των εμφυτεύσεων μεταξύ χώρων Sobolev. Το κύριο εργαλείο γι΄αυτήν είναι οι αποκαλούμενες ανισότητες τύπου Sobolev τις οποίες θα δούμε παρακάτω για ομαλές συναρτήσεις.

Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Έστω $1 \leq p < n$. Θέλουμε να εξετάσουμε αν ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (*)$$

όπου $1 \leq q < \infty$, $u \; \epsilon \; C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $C > 0$ μια σταθερά ανεξάρτητη της u.

Αν ισχύει η σχέση (*), τότε ο αριθμός q δεν μπορεί να είναι αυθαίρετος αλλά πρέπει να εξαρτάται από κάποιες παραμέτρους. Για να μελετήσουμε αυτή την εξάρτηση, για $u \; \epsilon \; C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \not\equiv 0 \; \kappa\alpha\iota \; \lambda > 0$ ορίζουμε ,

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x) \quad , \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Εφαρμόζοντας την (*) για την u_λ έχουμε :

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (**)$$

οπότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy \qquad (1)$$

Και ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^q dy \ (2)$$

Έτσι, η παραπάνω ανισότητα παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\frac{\lambda}{\lambda^{n/p}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

ή ισοδύναμα ,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{1-n/q+n/p}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3)$$

Αν υποθέσουμε ότι $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$, τότε αν θεωρήσουμε ότι το λ συγκλίνει στο 0 είτε αποκλίνει στο άπειρο τότε η σχέση (3) οδηγεί σε άτοπο. Άρα αν η επιθυμητή ανισότητα (*) ισχύει θα πρέπει απαραίτητα να έχουμε $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ οπότε $q = \frac{np}{n-p}$.

Ορισμός. Αν $1 \leq p < n$ τότε ο Sobolev συζυγής (ή κρίσιμος εκθέτης Sobolev) του αριθμού p είναι ο

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Προφανώς $p^* > p$.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την ανισότητα (*).

$Ανισότητα\ Hölder$: $Για\ όλους\ τους\ μη\ αρνητικούς\ αριθμούς\ \alpha_k\ και\ b_k,$

$k = 1,2, \dots, n,\ \ ισχύει\ η\ ανισότητα$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \ \ με\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, p > 1\,, q > 1.$$

Θεώρημα 1 – Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Έστω $1 \leq p < n$. Υπάρχει μια σταθερά C η οποία εξαρτάται μόνο από τα p, n τέτοια ώστε

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ , για\ όλα\ τα\ u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$$

$για\ κάθε\ u \in C_C^1(\mathbb{R}^n).$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω αρχικά $p = 1$. Επειδή οι συναρτήσεις u έχουν συμπαγή υποστήριξη για $i = 1, \dots, n$ και $x \in \mathbb{R}^n$, έχουμε :

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1\,, \dots, x_{i-1}\,, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i,$$

οπότε

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1\,, \dots, y_i, \dots, x_n)|\, dy_i\ \ , \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Κατά συνέπεια

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1\,, \dots, y_i, \dots, x_n)|\, dy_i \ \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Ολοκληρώνοντας την ανισότητα ως προς το x_1 έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{n}{n-1}}dx_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1$$

$$\leq\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{i=2}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dx_1dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι αποτέλεσμα της ανισότητας $Hölder$.

Συνεχίζουμε ολοκληρώνοντας ως προς το $x_2, οπότε$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2 \leq\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1\,dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1,i\neq 2}^{n}I_i^{\frac{1}{n-1}}dx_2$$

όπου,

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1$$

και

$$I_i=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1\,dy_i\ \ ,\qquad (i=3,\dots,n)$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα $Hölder$ για άλλη μια φορά

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2 \leq\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1\,dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dy_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\left(\prod_{i=3}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dx_2dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία και με τα υπόλοιπα $x_3,\dots,x_n$ οπότε έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{n}{n-1}}dx \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1\dots dy_i\dots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|dx\right)^{\frac{1}{n-1}}\ (1)$$

που είναι η ανισότητα που θέλαμε να αποδείξουμε.

Έστω τώρα $1<p<n$. Χρησιμοποιούμε την σχέση (1) για $v=|u|^{\gamma}\ και\ \gamma>1$

οπότε προκύπτει ότι

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^{\gamma}| dx$$

$$= \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1}|Du| dx \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Διαλέγουμε αριθμό γ ώστε $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1}$ $οπότε\ \gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$

και $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = p^*$. Από την παραπάνω σχέση,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Θεώρημα 2 – Εκτιμήσεις για τον χώρο $W^{1,p}$, $1 \leq p < n$

Έστω U ανοικτό , φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\partial U \in C^1, 1 \leq p < n$ και

$u \in W^{1,p}(U)$. Τότε $u \in L^{p^*}(U)$ και

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

$η\ σταθερά\ C\ εξαρτάται\ μόνο\ απο\ τα\ p, n\ και\ το\ σύνολο\ U.$

Απόδειξη

Επειδή $\partial U \in C^1$, σύμφωνα με το θεώρημα 1 (θεώρημα Επέκτασης) υπάρχει μια

επέκταση $Eu = \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε :

$$\begin{cases} \bar{u} = u\ στο\ U\ , \bar{u}\ έχει\ συμπαγή\ υποστήριξη \\ \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \end{cases} \quad (*)$$

Επειδή το $\bar{u}$ έχει συμπαγή υποστήριξη, από το θεώρημα 1 (Τοπική προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις) υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n), m = 1,2, \ldots$ τέτοιες ώστε :

$$u_m \to \bar{u}\ \ στον\ W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \qquad (1)$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα 1 (Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) έχουμε :

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_m - Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ για κάθε } m, l \geq 1.$$

Άρα

$$u_m \to \bar{u} \text{ στον } L^{p^*}(\mathbb{R}^n). \qquad (2)$$

Επίσης έχουμε

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

οπότε προσθέτοντας τις σχέσεις (1) , (2) προκύπτει :

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα μαζί με την σχέση (*) ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Θεώρημα 3 –Εκτιμήσεις για τον χώρο $W_0^{1,p}$, $1 \leq p < n$

Έστω U ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $u \in W_0^{1,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq p < n$. Τότε *για κάθε* $q \in [1, p^*]$

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο απο τα p, q, n και το σύνολο U.

Σημείωση: Αυτή η ανισότητα ονομάζεται <u>ανισότητα του $Poincare'$</u>. Η διαφορά με το θεώρημα 2 είναι ότι το ανάδελτα του u εμφανίζεται μόνο στην δεξιά πλευρά της ανισότητας.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $u \in W_0^{1,p}(U)$. *Τότε* υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(U), m = 1,2, \ldots$ οι οποίες συγκλίνουν στο u στον $W^{1,p}(U)$. Ορίζουμε αυτές τις συναρτήσεις u_m να είναι μηδέν στο $\mathbb{R}^n - U$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα 1 (Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) έχουμε :

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

Επειδή $|U| < \infty$, προκύπτει :

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{L^{p^*}(U)} \text{ ,για } 1 \leq q \leq p^*.$$

Συμπάγεια

Ορισμός

Έστω X , Y χώροι Banach , $X \subset Y$. Θα λέμε ότι ο X ενσφηνώνεται συμπαγώς στον Y και θα γράφουμε $X \subset\subset Y$ όταν

I. $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$, $x \in X$ *για κάποια σταθερά* C,

II. Κάθε φραγμένη ακολουθία στον X είναι προσυμπαγής (precompact) στον Y.

Θεώρημα 1 –θεώρημα συμπάγειας των Rellich-Kondrachov

Έστω U ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\partial U \in C^1$ *και* $1 \leq p < n$.

Τότε *για κάθε* $1 \leq q < p^*$ έχουμε

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U).$$

<u>Απόδειξη</u>

Από το θεώρημα 2 (εκτιμήσεις για τον χώρο $W^{1,p}$, $1 \leq p < n$) έχουμε ότι ισχύει $W^{1,p}(U) \subset L^q(U)$ και $\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι αν η $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $W^{1,p}(U)$, τότε υπάρχει μια υπακολουθία $\left\{u_{m_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει στον $L^q(U)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα επέκτασης υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $U = \mathbb{R}^n$ και οι συναρτήσεις $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ έχουν συμπαγή υποστήριξη σε ένα ανοικτό, φραγμένο σύνολο $V \subset \mathbb{R}^n$. Επίσης υποθέτουμε ότι

$$sup_m\|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty. \qquad (1)$$

Πρώτα μελετάμε την ομαλότητα των συναρτήσεων

$$u_m^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_m \ , \qquad \varepsilon > 0, m = 1,2, \ldots$$

όπου ο η_ε είναι ο συνήθης ομαλοποιητή. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας

ότι οι συναρτήσεις $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ έχουν υποστήριξη στο σύνολο V.

Ισχυριζόμαστε ότι

$$u_m^\varepsilon \longrightarrow u_m \ \sigma\tau o\nu \ L^q(V)\,, \tag{2}$$

$\kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \varepsilon \to 0\,, o\mu o\iota\acute{o}\mu o\rho\varphi\alpha\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ m$.

Επειδή οι u_m είναι ομαλές συναρτήσεις αποδεικνύουμε έχουμε

$$\begin{aligned} u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) & \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y)\big(u_m(x-\varepsilon y) - u_m(x)\big)dy \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(u_m(x-\varepsilon t y)\big)dtdy \\ &= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Du_m(x-\varepsilon t y) y dtdy. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_V & |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|dx \\ & \leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V |Du_m(x-\varepsilon t y)|dxdtdy \leq \varepsilon \int_V |Du_m(z)|dz\,. \end{aligned}$$

Αυτή η σχέση ισχύει επίσης αν $u_m \,\epsilon\, W^{1,p}(V)$, οπότε επειδή $\tau o\ V$ είναι φραγμένο,

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon \|Du_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon C \|Du_m\|_{L^p(V)},$$

Λόγω της σχέσης (1) έχουμε:

$$u_m^\varepsilon \longrightarrow u_m \ \sigma\tau o\nu \ L^1(V)\,, \tag{3}$$

$\kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \varepsilon \to 0\,, o\mu o\iota\acute{o}\mu o\rho\varphi\alpha\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ m.$

Όμως καθώς $1 \leq q < p^*$ βλέπουμε την χρήση της ανισότητας παρεμβολής

για την $L^p\ \nu\acute{o}\rho\mu\alpha$ ότι,

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta},$$

όπου $\frac{1}{q} = \theta + \frac{(1+\theta)}{p^*}$ με $0 < \theta < 1$, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev έχουμε

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta,$$

άρα ο ισχυρισμός (2) προκύπτει από τον (3).

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\begin{cases} \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ η ακολουθία } \{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty \\ \text{είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής} \end{cases} \tag{4}$$

Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}^n$ και $m = 1,2, \dots$ τότε

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|dy \leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty\,,$$

$$|Du_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} |D\eta_\varepsilon(x-y)||u_m(y)|dy \leq \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty,$$

οπότε ισχυρισμός (4) προκύπτει από αυτές τις σχέσεις.

Έστω $\delta > 0$, θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $\left\{u_{m_j}\right\}_{j=1}^\infty \subset \{u_m\}_{m=1}^\infty$ τέτοια ώστε :

$$\lim_{j,k\to\infty} sup \left\|u_{m_j} - u_{m_k}\right\|_{L^q(V)} \leq \delta \tag{5}$$

Για να το δείξουμε, θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό (2) οπότε διαλέγουμε ένα $\varepsilon > 0$ τόσο μικρό ώστε

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq {}^{\delta}/_{2}\ , m = 1,2,.. \tag{6}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς οι συναρτήσεις $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ και οι $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ έχουν υποστήριξη στο φραγμένο σύνολο $V \subset \mathbb{R}^n$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (4) και το θεώρημα συμπάγειας Arzela-Ascoli για να πάρουμε μια υπακολουθία $\left\{u_{m_j}^\varepsilon\right\}_{j=1}^\infty \subset \{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ η οποία να συγκλίνει ομοιόμορφα στο V. Άρα

$$\lim_{j,k\to\infty} sup \left\|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\right\|_{L^q(V)} = 0 \tag{7}$$

οπότε από τις σχέσεις (6) και (7) συνεπάγεται ότι

$$\lim_{j,k\to\infty} sup \left\| u_{m_j} - u_{m_k} \right\|_{L^q(V)} \leq \delta,$$

που αποδεικνύει την (5).

Χρησιμοποιώντας την σχέση (5) για $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ και εφαρμόζοντας ένα διαγώνιο επιχείρημα μπορούμε να εξάγουμε μια υπακολουθία $\left\{u_{m_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{l,k\to\infty} sup \left\| u_{m_l} - u_{m_k} \right\|_{L^q(V)} = 0.$$

<u>Ανισότητα Poincaré</u>

Στην συνέχεια θα δείξουμε πως η συμπάγεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δημιουργήσουμε νέες ανισότητες.

Ορισμός

Ορίζουμε $(u)_U = \frac{1}{|U|} \int_U \, u dy \, , \tau o\nu\ \mu \acute{\varepsilon} \sigma o\ \acute{o} \rho o\ \tau \eta \varsigma\ u\ \pi \acute{\alpha} \nu \omega\ \sigma \tau o\ U.$

Θεώρημα 1 –Ανισότητα Poincaré

Έστω U ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\partial U \epsilon\, C^1$. Αν $1 \leq p \leq \infty$, τότε υπάρχει μια σταθερά C η οποία εξαρτάται μόνο από τα n, p, U τέτοια ώστε:

$$\|u - (u)_U\|_{L^p(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)} \qquad (1)$$

για κάθε συνάρτηση $u \,\epsilon\, W^{1,p}(U)$.

Η σπουδαιότητα της σχέσης (1) είναι ότι το ανάδελτα του u εμφανίζεται μόνο στην δεξιά πλευρά της ανίσωσης.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η (1) είναι ψευδής, δηλαδή υπάρχει μια συναρτήση $u_k \epsilon W^{1,p}(U)$, για κάθε $k = 1, \ldots$, που ικανοποιεί την σχέση:

$$\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)} > k\|Du_k\|_{L^p(U)}. \qquad (2)$$

Ορίζουμε

$$v_k = \frac{u_k - (u_k)_U}{\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)}} \qquad (3)$$

Τότε,

$$(v_k)_U = 0, \qquad \|v_k\|_{L^p(U)} = 1$$

$$\textit{και απο σχέση } (2) \textit{ συνεπάγεται ότι } \|Dv_k\|_{L^p(U)} < \frac{1}{k}. \qquad (4)$$

Επίσης, οι συναρτήσεις $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι φραγμένες στον $W^{1,p}(U)$.

Από το θεώρημα συμπάγειας (Rellich-Kondrachov Theorem) υπάρχει μια υπακολουθία $\left\{v_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ και μια συνάρτηση $v \epsilon L^p(U)$ τέτοια ώστε :

$$v_{k_j} \to v \textit{ στον } L^p(U). \qquad (5)$$

Από την (3) προκύπτει ότι:

$$(v)_U = 0\,, \|v\|_{L^p(U)} = 1 \qquad (6)$$

και η (4) δίνει ότι για $i = 1, \ldots, n$ και $\varphi \epsilon C_c^{\infty}(U)$,

$$\int_U v\varphi_{x_i} dx = \lim_{k_j \to \infty} \int_U v_{k_j}\varphi_{x_i} dx = -\lim_{k_j \to \infty} \int_U v_{k_j, x_i}\varphi dx = 0.$$

Άρα $v \epsilon W^{1,p}(U)$ με $Dv = 0$. Οπότε η v είναι σταθερή επειδή το U είναι συνεκτικό. Αυτό το γεγονός όμως αντίκειται στην σχέση (6).

Άλλοι χώροι συναρτήσεων

Ο χώρος H^{-1}

Ορισμοί

1. Ο $H^{-1}(U)$ είναι ο δυικό χώρος του $H_0^1(U)$. Αυτό σημαίνει ότι αν $f \in H^{-1}(U)$ τότε η f είναι μια γραμμική και φραγμένη συνάρτηση στον $H_0^1(U)$.

2. Αν $f \in H^{-1}(U)$ τότε η νόρμα της είναι

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = sup\{\langle f, u\rangle \big| u \in H_0^1(U)\ ,\ \ \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1\}$$

Θεώρημα 1- Χαρακτηρισμός του χώρου H^{-1}

1. Αν $f \in H^{-1}(U)$ τότε υπάρχουν συναρτήσεις $f^0, f^1, \dots, f^n\ στον\ L^2(U)$

τέτοιες ώστε

$$\langle f, v\rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} dx \quad για\ κάθε\ \ v \in H_0^1(U) \tag{1}$$

2. $\|f\|_{H^{-1}(U)} =$
$inf\left\{\left(\int_U \sum_{i=1}^{n}\left|f^i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} : οι\ f^0, f^1, \dots, f^n\ ικανοποιούν\ την\ (1)\right\}$.

Απόδειξη

1. Για τις $u, v \in H_0^1(U)$ ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο όπως παρακάτω

$$(u, v) = \int_U DuDv + uvdx.$$

Έστω $f \in H^{-1}(U)$, από το το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz συμπεραίνουμε την ύπαρξη μιας μοναδικής συνάρτησης $u \in H_0^1(U)$ η οποία ικανοποιεί την σχέση $(u, v) = \langle f, v\rangle\ για\ όλα\ τα\ v \in H_0^1(U)$, δηλαδή για κάθε $v \in H_0^1(U)$

$$\langle f, v\rangle = \int_U DuDv + uvdx, \tag{2}$$

αποδεικνύοντας τη σχέση (1) για τις συναρτήσεις

$$\begin{cases} f^0 = u \\ f^i = u_{x_i}, i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

2. Υποθέτουμε ότι $f \epsilon H^{-1}(U)$ με

$$\langle f, v \rangle = \int_U g^0 v + \sum_{i=1}^{n} g^i v_{x_i} dx \quad (4),$$

όπου $g^0, g^1, \dots, g^n \epsilon L^2(U)$.

Θέτουμε $u = v$ στην (2) και χρησιμοποιώντας την (4) έχουμε,

$$\int_U |Du|^2 + |u|^2 dx \leq \int_U \sum_{i=0}^{n} |g^i|^2 dx.$$

Έτσι η σχέση (3) συνεπάγεται ότι

$$\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \leq \int_U \sum_{i=0}^{n} |g^i|^2 dx. \quad (5)$$

3. Από την (1) έχουμε ότι αν $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ τότε

$$|\langle f, v \rangle| \leq \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Συνεπώς,

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} \leq \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Θέτουμε $v = \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(U)}}$ στην (1) οπότε

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4)-(6).

Ελλειπτικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Ελλειπτικές εξισώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα διερευνήσουμε την επίλυση των ομοιόμορφα ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που έχουν προκαθορισμένες συνοριακές συνθήκες. Θα αξιοποιήσουμε δυο διαφορετικές τεχνικές, της ενέργειας και της αρχής του μεγίστου.

Ελλειπτικές εξισώσεις

1) Το πρόβλημα συνοριακών τιμών που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι το παρακάτω

$$\begin{cases} Lu = f \ \sigma\tau o \ U, \\ u = 0 \ \sigma\tau o \ \partial U, \end{cases} \tag{1}$$

όπου το U είναι ένα ανοικτό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η συνάρτηση $f: U \to \mathbb{R}$ είναι δοσμένη και ο L είναι ένας δευτέρου βαθμού διαφορικός τελεστής ο οποίος δίνεται από την σχέση

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \qquad (*)$$

Θέλουμε να βρούμε τις συναρτήσεις $u: U \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την (1).

2) Ο διαφορικός τελεστής L είναι (ομοιόμορφα) ελλειπτικός αν υπάρχει μια σταθερά $\theta > 0$ τέτοια ώστε :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

για κάθε $x \in U$ και $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Δηλαδή, ελλειπτικότητα σημαίνει ότι για κάθε σημείο $x \in U$ ο $n \ x \ n$ συμμετρικός πίνακας $A(x) = a^{ij}(x)$ είναι θετικά ορισμένος και η μικρότερη ιδιοτιμή του είναι μεγαλύτερη ή ίση με την σταθερά θ.

<u>Ασθενείς λύσεις</u>

Ορισμοί

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (1) και υποθέτουμε ότι

$a^{ij}\ ,\ b^i\ , c\ \epsilon\ L^{\infty}(U)\ \ ,\ (i,j=1,\dots.,n)\ , f\ \epsilon\ L^2(U)$ και $v\ \epsilon\ C_c^{\infty}(U)$.

Αν υποθέσουμε ότι η λύση u του προβλήματος είναι ομαλή, τότε

πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $Lu = f$ με ένα $v\ \epsilon\ C_c^{\infty}(U)$ και ολοκληρώνοντας στο U

έχουμε

$$\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuvdx = \int_U fvdx.$$

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

Λέμε ότι η $u\ \epsilon\ H_0^1(U)$ είναι μια <u>ασθενής λύση</u> του προβλήματος (1) αν

$$B[u,v] = \langle f, v\rangle \quad (2)$$

για όλα τα $v\ \epsilon\ H_0^1(U)$ και το $\langle\ ,\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(U)$ και η

διγραμμική μορφή $B[\ \ ,\ \ ]: H_0^1(U) \times H_0^1(U) \to \mathbb{R}$ δίνεται από τη σχέση

$$B[u,v] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuvdx = \int_U fvdx$$

όταν $u, v\ \epsilon\ H_0^1(U)$.

Γενικότερα, θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^i \quad \sigma\tau o\ U \\ \qquad u = 0 \quad \sigma\tau o\ \partial U \end{cases} \qquad (3)$$

όπου $f^i\ \epsilon\ L^2(U),\ i = 0,\dots,n,$ και $f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^i\ \epsilon\ H^{-1}(U)$ (ο $H^{-1}(U)$ είναι ο

δυικός χώρος του $H_0^1(U)$).

Θα λέμε ότι η $u\ \epsilon\ H_0^1(U)$ είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος (3) αν

$$B[u,v] = \langle f, v\rangle$$

για όλα τα $v\ \epsilon\ H_0^1(U)$, όπου $\langle f, v\rangle = \int_U\ f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i}\, dx$ και

$\langle .\,,. \rangle : H^{-1}(U) \times H_0^1(U) \to \mathbb{R}$ είναι το δυικό ζεύγος μεταξύ του $H_0^1(U)$ και του δυϊκού του.

Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f \quad \sigma\tau o\ U \\ u = g \quad \sigma\tau o\ \partial U \end{cases} \tag{4}$$

εύκολα μετατρέπεται στην μορφή (1). Θεωρούμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $w \in H^1(U)$ τέτοια ώστε *w=g* $\sigma\tau o\ \partial U$. Τότε η συνάρτηση $\tilde{u} = u - w$ ανήκει στον $H_0^1(U)$. Αν η $\tilde{u}$ είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{f} \quad \sigma\tau o\ U \\ \tilde{u} = 0 \quad \sigma\tau o\ \partial U \end{cases}$$

όπου $\tilde{f} = f - Lw \in H^{-1}(U)$, τότε είναι μια ασθενής λύση του (4).

<u>Θεωρήματα ύπαρξης ασθενών λύσεων</u>

Για την απόδειξη του θεωρήματος υπαρξης των Lax-Milgram θα χρειαστούμε το παρακάτω:

Θεώρημα (Αναπαράστασης του Riesz)

Έστω H ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο (.,.). Αν $h \in H^*$ τότε υπάρχει μοναδικό $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$\langle h, v \rangle = (u, v)$$

για κάθε $v \in H$. Η απεικόνιση $h \to u$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός του H^* επί του *H*.

Θεώρημα Lax-Milgram

Έστω $B : H\ x\ H \to \mathbb{R}$ μια διγραμμική μορφή για την οποία υπάρχουν σταθερές $\alpha\,, \beta > 0$ τέτοιες ώστε :

i) $|B[u, v]| \leq a\|u\|\|v\|$, $u\,, v \in H$,

ii) $\beta\|u\|^2 \leq B[u, u]$, $u \in H$, και $f: H \to \mathbb{R}$ μια γραμμική και φραγμένη συνάρτηση στον H.

Τότε υπάρχει μοναδικό $u \epsilon H$ τέτοιο ώστε

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle \quad (1)$$

$για \; όλα \; τα \; v \epsilon H.$

Απόδειξη

Έστω $u \epsilon H$, η συνάρτηση $v \to B[u, v]$ είναι μια γραμμική και φραγμένη συνάρτηση στον H. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μοναδικό $w \epsilon H$ τέτοιο ώστε

$$B[u, v] = \langle w, v \rangle \quad για \; κάθε \; v \epsilon H. \quad (2)$$

Θέτουμε $Au = w$ στην (2) οπότε

$$B[u, v] = (Au, v) \; για \; κάθε \; v \epsilon H. \quad (3)$$

Ισχυριζόμαστε ότι ο τελεστής $A : H \to H$ είναι γραμμικός και φραγμένος. Πράγματι, αν $\lambda_1 , \lambda_2 \epsilon \mathbb{R}$ και $u_1 , u_2 \epsilon H$, βλέπουμε ότι για κάθε $v \epsilon H$

$$(A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \;), v) = B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v]$$

$$= \lambda_1 \, B[u_1, v] + \lambda_2 \, B[u_2, v]$$

$$= \lambda_1 \, (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v)$$

$$= (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v).$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι ο A είναι γραμμικός.

Επίσης,

$$\|Au\|^2 = (Au \, , Au) = B[u \, , Au] \leq a\|u\|\|Au\|$$

Οπότε,

$$\|Au\| \leq a\|u\|.$$

δηλαδή ο A είναι φραγμένος.

Στην συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι

$$\begin{gathered} ο \; τελεστής \; A \; είναι \; ένα \; προς \; ένα \; και \; το \; πεδίο \; τιμών \\ R(A) \;\; του \; A \; είναι \; κλειστό \; υποσύνολο \; του \; H \end{gathered} \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\beta\|u\|^2 \leq B[u\,,u] = (Au\,,u) \leq \|Au\|\|u\|$$

οπότε προκύπτει $\beta\|u\| \leq \|Au\|$ και αυτή η ανισότητα αποδεικνύει την (4) .

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$R(A) = H. \tag{5}$$

Αν αυτό δεν ίσχυε, επειδή το σύνολο $R(A)$ είναι κλειστό θα υπήρχε ένα μη-μηδενικό στοιχείο $w \in R(A)^{\perp}$. Αλλά τότε

$$\beta\|w\|^2 \leq B[w\,,w] = (Aw\,,w) = 0$$

που είναι άτοπο.

Στην συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη μας για άλλη μια φορά το θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz έχουμε ότι :

$$\langle f, v\rangle = \langle w, v\rangle \ , \ για\ όλα\ τα\ v \in H \ \text{ και κάποιο στοιχείο } w \in H.$$

Από τις σχέσεις (4) , (5) βρίσκουμε ένα $u \in H$ με $Au = w$. Έτσι

$$B[u, v] = (Au, v) = (w, v) = \langle f, v\rangle \ , \qquad v \in H,$$

που αποδεικνύει τη σχέση (1).

Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα υποθέτουμε ότι

$B[u, v] = \langle f, v\rangle$ και $B[\tilde{u}, v] = \langle f, v\rangle$.

Όμως τότε ,

$$B[u - \tilde{u}, v] = 0\,, \qquad v \in H.$$

Θέτοντας $v = u - \tilde{u}$ έχουμε

$$\beta\|u - \tilde{u}\|^2 \leq B[u - \tilde{u}\,, u - \tilde{u}]=0$$

οπότε $u = \tilde{u}$.

Ανισότητα Cauchy με ε: $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$, $a, b > 0\,, \varepsilon > 0$.

Επιστρέφουμε τώρα στην διγραμμική μορφή $B[.,.]$ η οποία ορίζεται από την σχέση,

$$B[u,v] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuvdx \quad όταν\ u,v \in H_0^1(U)$$

και θα προσπαθήσουμε να επαληθεύσουμε τις υποθέσεις του θεωρήματος Lax-Milgram.

Θεώρημα 2- Εκτιμήσεις ενέργειας

Υπάρχουν σταθερές α , $\beta > 0$ και $\gamma \geq 0$ τέτοιες ώστε

i) $|B[u,v]| \leq a\|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$,

ii) $\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u,u] + \gamma \|v\|_{L^2(U)}^2$

για κάθε u , $v \in H_0^1(U)$.

<u>Απόδειξη</u>

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |B[u,v]| \leq & \sum_{i,j=1}^{n} \left\|a^{ij}\right\|_{L^\infty} \int_U |Du||Dv|dx \\ & + \sum_{i,j=1}^{n} \left\|b^i\right\|_{L^\infty} \int_U |Du||v|dx \\ & + \|c\|_{L^\infty} \int_U |u||v|dx \leq a\|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}. \end{aligned}$$

για κάποια κατάλληλη σταθερά α. Από τη σχέση της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας έχουμε

$$\begin{aligned} \theta \int_U |Du|^2 dx \leq & \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx \\ & = B[u,u] - \int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} u + cu^2 dx \ \leq B[u,u] \quad (1) \\ & + \sum_{i=1}^{n} \left\|b^i\right\|_{L^\infty} \int_U |Du||u|dx + \|c\|_{L^\infty} \int_U u^2 dx, \end{aligned}$$

η δε ανισότητα του Cauchy με $\varepsilon > 0$ δίνει

$$\int_U |Du||u|dx \leq \varepsilon \int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_U u^2 dx.$$

Αντικαθιστούμε αυτήν την σχέση στην (1) οπότε για $\varepsilon > 0$ μικρό έχουμε

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left\| b^i \right\|_{L^\infty} < \frac{\theta}{2}.$$

Έτσι

$$\frac{\theta}{2}\int_U |Du|^2 dx \leq B[u,u] + C\int_U u^2 dx$$

για μια κατάλληλη σταθερά C.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Poincare' παίρνουμε

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C\|Du\|_{L^2(U)},$$

οπότε

$$\beta\|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma\|u\|^2_{H_0^1(U)}$$

για κατάλληλες σταθερές $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$.

Θεώρημα 3-θεώρημα ύπαρξης για ασθενείς λύσεις

Υπάρχει ένας αριθμός $\gamma \geq 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $\mu \geq \gamma$ και για κάθε συνάρτηση $f \in L^2(U)$ να υπάρχει μια μοναδική ασθενής λύση $u \in H_0^1(U)$ του συνοριακού προβλήματος

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \sigma\tau o\ U \\ u = 0 & \sigma\tau o\ \partial U. \end{cases} \qquad (*)$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\mu \geq \gamma$ όπου το δίνεται γ στο θεώρημα 2. Ορίζουμε την διγραμμική μορφή

$$B_\mu[u,v] = B[u,v] + \mu(u,v) \quad , \quad u\,, v \in H_0^1(U)$$

η οποία αντιστοιχεί στον τελεστή $L_\mu u = Lu + \mu u$. Ο $B_\mu[\,,]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Lax-Milgram.

Έστω $f \epsilon L^2(U)$. Θέτουμε $\langle f, v\rangle = (f, v)_{L^2(U)}$ που δίνει μια γραμμική και φραγμένη συνάρτηση στον $L^2(U)$, άρα ανήκει στον $H_0^1(U)$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Lax-Milgram παίρνουμε μια μοναδική συνάρτηση $u \epsilon H_0^1(U)$ που ικανοποιεί την σχέση ,

$$B_\mu[u, v] = \langle f, v\rangle,$$

$\text{για κάθε } v \epsilon H_0^1(U)$, η οποία είναι η μοναδική ασθενής λύση του προβλήματος (*).

<u>Βιβλιογραφία</u>

Τα βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα παρακάτω:

L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 1988.

H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Dunod, Paris, 1999.