ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΧΩΡΟΙ SOBOLEV ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Γαλανάκη Χρυσίδα

Διπλωματική Διατριβή

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Επιβλέπων Καθηγητής: Επ. Καθηγητής Δ. Κανδυλάκης

Χανιά, Φεβρουάριος 2005

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Δημήτρη Κανδυλάκη για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το ενδιαφέρον αυτό θέμα καθώς και για την επιστημονική καθοδήγηση και την ηθική υποστήριξη που μου πρόσφερε κατά την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας. [1]
Ευχαριστώ τον Επίκουρο Καθηγητή Μίνωα Πετράκη για τις πολύτιμες γνώσεις που μου παρείχε σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου και την συμμετοχή του στην εξεταστική επιτροπή.
Ευχαριστώ τον Λέκτορα Αργύρη Δελή για την συμμετοχή του στην εξεταστική επιτροπή.
Ευχαριστώ τα αδέλφια μου Γιάννη και Χάρη για την συμπαράσταση και την υπομονή τους και τους γονείς μας που μας μετέδωσαν την αγάπη για την επιστήμη και μας στηρίζουν σάυτήν την περιπέτεια.

[1] Δύο άνθρωποι ταξιδεύουν με ένα αερόστατο. Ο πρώτος ρωτάει ¨Πού βρισκόμαστε·¨. Ο δεύτερος σκέπτεται για αρκετή ώρα και απαντά ¨Βρισκόμαστε σε ένα καλάθι κάτω από ένα μπαλόνι που πετάει¨. Από την απάντηση αυτή καταλαβαίνουμε ότι ο δεύτερος είναι μαθηματικός διότι σκέφτηκε για πολλή ώρα και είπε κάτι ακριβές αλλά άχρηστο.

Αγνώστου

Στους γονείς μου

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μία διαδικασία διάχυσης ή ένα κύμα που βρίσκονται σε στατική (stationary) κατάσταση περιγράφεται από μία εξίσωση ελλειπτικού τύπου της μορφής

$$-\triangle_p u = F(x, u)$$

όπου $\triangle_p u = div(|\nabla u|^p \nabla u)$ είναι ο p-Λαπλασιανός τελεστής.
Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη της παραπάνω εξίσωσης στην ειδική περίπτωση όπου

$$F(x, u) = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)|u|^{q-2}u - h(x)|u|^{s-2}u$$

σε μία περιοχή Ω που είναι είτε ένα φραγμένο ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ είτε το $\mathbb{R}^N$, $q < p$, $p^* < s$, και οι f, g, h είναι φραγμένες μη αρνητικές συναρτήσεις. Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης αναζητούνται στο χώρο Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ που αποτελείται από συναρτήσεις $u : \Omega \to \mathbb{R}$ οι οποίες μαζί με τις μερικές παραγώγους τους πρώτης τάξης (με την έννοια των κατανομών) βρίσκονται στο χώρο $L^p(\Omega)$. Αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα έχει μία μη αρνητική λύση με τη χρήση της μεθόδου fibering την οποία εισήγαγε ο Stanislav Pohozaev, γενικεύοντας έτσι αντίστοιχα αποτελέσματα της εργασίας [2] όπου η συνάρτηση h δεν εμφανίζεται.
Η δομή της εργασίας είναι η ακόλουθη:
Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται οι βασικές έννοιες και οι ιδιότητες που αφορούν στην ασθενή τοπολογία ενός χώρου Banach. Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζονται οι χώροι Sobolev και ακολούθως παρουσιάζονται προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων που έχουν λύσεις σε αυτούς τους χώρους. Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζεται το πρόβλημα ιδιοτιμών του p-Λαπλασιανού τελεστή και παρουσιάζονται οι ιδιότητες της πρώτης ιδιοτιμής και του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί σε αυτήν. Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάται η εξίσωση όταν το Ω είναι φραγμένο και στο τελευταίο κεφάλαιο μελετάται η εξίσωση στον $\Omega = \mathbb{R}^N$.

1 Ασθενείς Τοπολογίες

Έστω E ένας χώρος Banach, με δυϊκό τον E^*.

Ορισμός 1.1 *Στο χώρο* E^* *ορίζουμε μια βάση περιοχών ενός σημείου* $\xi_0 \in E^*$ *ως εξής*

$$V_{\epsilon;x_1,...,x_n}(\xi_0) = \{\xi \in E^*;\ |\xi(x_1) - \xi_0(x_1)| < \epsilon, ..., |\xi(x_n) - \xi_0(x_n)| < \epsilon\} \quad (1)$$

για κάθε $\epsilon > 0$, $n \geq 1$ *και* $x_1, ..., x_n \in E$. *Η τοπολογία αυτή καλείται* ***ασθενής* τοπολογία στον*** $\mathbf{E}^*$ *και συμβολίζεται* $\sigma(E^*, E)$.

Αν $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων του E^* , αυτή συγκλίνει στο $\xi_0 \in E^*$ για την ασθενή τοπολογία αν και μόνο αν για κάθε $x \in E$, $\xi_n(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \xi_0(x)$.

Ορισμός 1.2 *Στον E ορίζουμε μία βάση περιοχών του σημείου* x_0

$$W_{\epsilon;\xi_1,...,\xi_n}(x_0) = \{x \in E\ ;\ |\langle x - x_0, \xi_1\rangle| < \epsilon\ , ...,\ |\langle x - x_0, \xi_n\rangle| < \epsilon\} \qquad (2)$$

για κάθε $\epsilon > 0$, $n \geq 1$ *και* $\xi_1, ..., \xi_n \in E^*$. *Η τοπολογία αυτή καλείται* ***ασθενής τοπολογία στον E*** *και συμβολίζεται* $\sigma(E, E^*)$

Από τη μορφή των περιοχών στην (2) βλέπουμε ότι πρόκειται για την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης των στοιχείων του E^* . Δηλαδή μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του E συγλίνει σε ένα x_0 για την $\sigma(E, E^*)$, αν και μόνο αν, για κάθε $\xi \in E^*$ ισχύει $\xi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \xi(x_0)$ (ή $\langle x_n, \xi\rangle \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x_0, \xi\rangle$).

Πρόταση 1.1 *Η τοπολογία* $\sigma(E^*, E)$ *είναι η ασθενέστερη τοπολογία στον* E^* *για την οποία κάθε γραμμικό συναρτησιακό* $\xi \in E^* \to \langle x, \xi\rangle$ *είναι συνεχές για* $x \in E$.

Απόδειξη. Αν η E^* είναι εφοδιασμένη με την $\sigma(E^*, E)$, τότε η αντίστροφη εικόνα μιας γειτονιάς του 0 ακτίνας μικρότερης του ε, είναι το σύνολο

$$\{\xi \in E^*;\ |\langle x, \xi\rangle| < \varepsilon\}$$

άρα οι απεικονίσεις ξ είναι συνεχείς.
Αντίστροφα, έστω $\mathcal{T}$ μία τοπολογία στον E^* τέτοια ώστε όλα τα γραμμικά συναρτησιακά $\xi \to \langle x, \xi\rangle$, $x \in E$ να είναι συνεχή. Έστω $x_1, ..., x_n$ σημεία του E, $\epsilon > 0$ και $V_{\epsilon;x_1,...,x_n}$ μια γειτονιά του 0 για την $\sigma(E^*, E)$. Η

απεικόνιση $\xi \to \langle x_i, \xi\rangle$ είναι συνεχής για την $\mathcal{T}$, έτσι το σύνολο $O_i = \{\xi \in E^*;\ |\langle x_i, \xi\rangle| < \varepsilon\}$ είναι ανοικτό για την $\mathcal{T}$. Τότε και η τομή $\bigcap_{i=1,\ldots,n} O_i$ είναι ανοικτό σύνολο για την $\mathcal{T}$ και είναι η γειτονιά $V_{\epsilon;x_1,\ldots,x_n}$. Άρα η $\mathcal{T}$ είναι ισχυρότερη της $\sigma(E^*, E)$. $\square$

Ομοίως αποδεικνύεται η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 1.2 *Η τοπολογία $\sigma(E, E^*)$ είναι η ασθενέστερη τοπολογία στον E για την οποία όλα τα γραμμικά συναρτησιακά στον E^* είναι συνεχή.*

Πρόταση 1.3 *Αν ο E^* είναι εφοδιασμένος με την $\sigma(E^*, E)$, τότε ο δυϊκός του E^* μπορεί να ταυτιστεί με τον E, δηλαδή δεν υπάρχουν άλλα συνεχή γραμμικά συναρτησιακά στον E^* εκτός από τα $\xi \in E^* \to \langle x, \xi\rangle$, $x \in E$.*

Πρόταση 1.4 *Αν ο E είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία $\sigma(E, E^*)$, ο δυϊκός του είναι ο E^* .*

Απόδειξη. Η τοπολογία $\sigma(E, E^*)$ είναι ασθενέστερη από την τοπολογία νόρμας, άρα υπάρχουν λιγότερα γραμμικά συναρτησιακά. Όμως τα στοιχεία του E^* παραμένουν συνεχή. Άρα ο δυϊκός του E είναι ο E^*. $\square$

Πρόταση 1.5 *Έστω E ένας χώρος με νόρμα. Κάθε κυρτό υποσύνολο του E που είναι κλειστό ως προς τη νόρμα, είναι επίσης κλειστό ως προς την τοπολογία $\sigma(E, E^*)$.*

Ορισμός 1.3 *Ένα υποσύνολο B του E θα λέγεται φραγμένο για την τοπολογία $\sigma(E, E^*)$, αν για κάθε ανοιχτό σύνολο V για την τοπολογία $\sigma(E, E^*)$ έχουμε $B \subseteq \lambda V$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Πρόταση 1.6 *Τα υποσύνολα του E που είναι φραγμένα για την τοπολογία $\sigma(E, E^*)$, είναι επίσης φραγμένα ως προς τη νόρμα και αντίστροφα. Άρα ένα σύνολο B είναι φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $f \in E^*$, υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε $|f(x)| \leq M$, για κάθε $x \in B$.*

2 Χώροι Sobolev και εφαρμογές τους στις Μερικές Διαφορικές εξισώσεις

Έστω Ω ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Για $m \in \mathbb{N}$ έστω $C^m(\Omega)$ ο διανυσματικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων φ οι οποίες έχουν συνεχείς παραγώγους $D^\alpha \varphi$ με $|\alpha| \leq m$ όπου

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} \varphi$$

και $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$, και $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$. Με $C_0^\infty(\Omega)$ συμβολίζουμε το υποσύνολο του $C^\infty(\Omega)$ που περιέχει τις συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Ορισμός 2.1 *Έστω $p \in [1, +\infty)$. Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ τέτοιες ώστε} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1, ..., N \end{array} \right\}.$$

Θεωρούμε ότι ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

Ορισμός 2.2 *Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι το κλειστό περίβλημα του $C_0^1(\Omega)$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ με την $\|u\|_{1,p}$.*

Παραθέτουμε τα παρακάτω αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.1 *Ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι ανακλαστικός αν $p \in (1, +\infty)$ και διαχωρίσιμος αν $p \in [1, +\infty)$. Ο $W^{1,2}(\Omega)$ είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο*

$$< u, v > = \int_\Omega uv \, dx \; + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$$

Θεώρημα 2.2 *Υποθέτουμε ότι το Ω έχει ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Τότε οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:*
(i) $u = 0$ *στο* $\partial\Omega$
(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Πρόταση 2.1 *Υποθέτουμε ότι το Ω έχει ομαλό σύνορο και* $u \in L^p(\Omega)$ *με* $1 < p < \infty$. *Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες*
(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
(ii) Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}} \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N), \qquad \forall i = 1, 2, ..., N$$

όπου $p' = \frac{p}{p-1}$.
(iii) Η συνάρτηση

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

ανήκει στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *και στην περίπτωση αυτή,* $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$.

Πρόταση 2.2 *(Ανισότητα Poincaré)*
Υποθέτουμε ότι το ανοιχτό Ω είναι φραγμένο και $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από το Ω και το p) τέτοια ώστε

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ορισμός 2.3 *Με* $W^{-1,p'}(\Omega)$ *συμβολίζουμε τον δυϊκό χώρο του* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Πρόταση 2.3 *Αν το Ω είναι φραγμένο τότε οι ενσφηνώσεις*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega), \qquad \frac{2N}{N+2} \leq p < \infty,$$

είναι συνεχείς και πυκνές. Αν το Ω δεν είναι φραγμένο τότε οι ενσφηνώσεις

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega), \qquad \frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2,$$

είναι συνεχείς και πυκνές.

Η παρακάτω πρόταση χαρακτηρίζει τα στοιχεία του $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Πρόταση 2.4 *Έστω* $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$. *Τότε υπάρχουν* $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$, *τέτοιες ώστε*

$$< F, \upsilon >= \int f_0 \upsilon \; + \; \sum_{i=1}^{N} \int f_i \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}, \qquad \forall \upsilon \in W_0^{1,p},$$

και

$$\max_{0 \le i \le N} \|f_i\|_{L^{p'}} = \|F\|.$$

Αν το Ω *είναι φραγμένο, μπορούμε να πάρουμε* $f_0 = 0$.

Θεώρημα 2.3 *(Rellich-Kondrachov) Αν το* Ω *έχει ομαλό σύνορο, έχουμε τα παρακάτω:*
(i) αν $p < N$, *τότε* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*)$, *όπου* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
(ii) αν $p = N$, *τότε* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty)$,
(iii) αν $p > N$, *τότε* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, *με συμπαγείς ενσφηνώσεις.*
Η ενσφήνωση
(iv) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ *είναι συνεχής.*

Θεώρημα 2.4 *(τύπος του Green) Έστω ότι το* Ω *έχει ομαλό σύνορο και* $u, \upsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Τότε για κάθε* $i = 1, \ldots, N$ *έχουμε*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} \; = \; - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \upsilon.$$

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα δούμε μερικές εφαρμογές των χώρων Sobolev.
Έστω ότι το Ω είναι φραγμένο. Ζητείται μία συνάρτηση $u \; : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί

$$\begin{cases} -\triangle u + u = f & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

όπου

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

και f μία δεδομένη συνάρτηση πάνω στο Ω. Η συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο $\partial\Omega$ καλείται ομογενής συνθήκη Dirichlet.

Ορισμός 2.4 *Κλασική λύση της (3) είναι μία συνάρτηση* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *που την ικανοποιεί.*
Ασθενής λύση της (3)είναι μία συνάρτηση $u \in H_0^1(\Omega)$ *που ικανοποιεί*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Πρόταση 2.5 *Κάθε κλασική λύση είναι και ασθενής λύση.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν $u \in C^2(\overline{\Omega})$, τότε $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ και άρα $u \in H_0^1(\Omega)$ από το θεώρημα 2.2. Εξάλλου, αν $v \in C_c^1(\Omega)$, από τον τύπο του Green έχουμε

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

και μέσω πυκνότητας η ανισότητα αυτή ισχύει για $v \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

Ύπαρξη και μοναδικότητα της ασθενούς λύσεως. Σαν συνέπεια του Θεωρήματος Lax-Milgram έχουμε:

Θεώρημα 2.5 *Για κάθε* $f \in L^2(\Omega)$, *υπάρχει μοναδική ασθενής λύση* $u \in H_0^1(\Omega)$ *της (2.2). Επιπλέον, η* u *είναι λύση του προβλήματος*

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla \nu|^2 + \nu^2) - \int_\Omega f\nu \right\}$$

Αυτή είναι η αρχή Dirichlet.

Για πληρότητα αναφέρουμε το θεώρημα Lax-Milgram:

Θεώρημα 2.6 *Έστω* $\alpha(u,v)$ *ένα διγραμμικό, συνεχές και πιεστικό (δηλαδή* $\alpha(v,v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in H$*) συναρτησιακό. Τότε για κάθε* $\varphi \in H'$ *υπάρχει μοναδικό* $u \in H$ *τέτοιο ώστε*

$$\alpha(u,v) = <\varphi, v> \qquad \forall v \in H.$$

Επιπλέον, αν το α *είναι συμμετρικό, τότε το* u *χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα*

$$\frac{1}{2}\alpha(u,u) - <\varphi, u> = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}\alpha(v,v) - <\varphi, v> \right\}.$$

Παράγωγος Συναρτησιακού

Ορισμός 2.5 *Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $\varphi : U \to \mathbb{R}$. Η φ έχει παράγωγο κατά Gateaux $\varphi'(u) \in X^*$ στο σημείο $u \in U$ αν για κάθε $h \in X$ ισχύει:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\varphi(u+th) - \varphi(u) - < \varphi'(u), th > \right] = 0.$$

Η φ έχει παράγωγο κατά Frechét $\varphi' \in X^*$ στο $u \in U$ αν ισχύει:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \left[\varphi(u+h) - \varphi(u) - < \varphi'(u), h > \right] = 0.$$

Αν η παράγωγος κατά Frechét της φ υπάρχει και είναι συνεχής στον U, θα λέμε ότι η φ ανήκει στον $C^1(U, \mathbb{R})$.
Αν ο X είναι ένας χώρος Hilbert και το φ έχει παράγωγο κατά Gateaux στο $u \in U$, ορίζουμε την κλίση $\nabla \varphi(u)$ της φ στο u ως:

$$(\nabla \varphi(u), h) = < \varphi'(u), h > .$$

Παρατηρήσεις
α) Η παράγωγος κατά Gateaux δίνεται επίσης από τη σχέση:

$$< \varphi'(u), h > = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\varphi(u+th) - \varphi(u) \right].$$

β)Κάθε παράγωγος κατά *Frechét* είναι παράγωγος κατά Gateaux. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.6 *Αν η φ έχει συνεχή παράγωγο κατά Gateaux στο U τότε $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Πρόταση 2.7 *Έστω Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και $2 < p < \infty$. Τα συναρτησιακά*

$$\psi(u) = \int_\Omega |u|^p \, dx \quad , \qquad \chi(u) = \int_\Omega |u^+|^p \, dx$$

είναι κλάσης $C^1(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ και ισχύει:

$$< \psi'(u), h > = p \int_\Omega |u|^{p-2} u h \, dx \quad , \qquad < \chi'(u), h > = p \int_\Omega (u^+)^{p-1} h \, dx.$$

Απόδειξη. Ύπαρξη της παραγώγου κατά Gateaux.
Έστω $u, h \in L^p$. Δοθέντος $x \in \Omega$ και $0 < |t| < 1$ από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\lambda \in]0,1[$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \frac{\Big||u(x)+th(x)|^p - |u(x)|^p\Big|}{|t|} &= p|u(x)+\lambda th(x)|^{p-1}|h(x)| \\ &\leq p\Big(|u(x)|+|h(x)|\Big)^{p-1}|h(x)|. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\Big(|u(x)|+|h(x)|\Big)^{p-1}|h(x)| \in L^1(\Omega)$$

και από το Θεώρημα Lebesgue συνάγουμε ότι

$$<\psi'(u), h>= \; p\int_\Omega |u|^{p-2}uh.$$

Συνέχεια της παραγώγου κατά Gateaux.
Έστω $f(u) = p|u|^{p-2}u$. Υποθέτουμε ότι $u_n \to u$ στον L^p. Τότε $f(u_n) \to f(u)$ στον L^q με $q = \frac{p}{p-1}$. Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε:

$$| <\psi'(u_n) - \psi'(u), h> | \;\leq\; |f(u_n) - f(u)|_q |h|_p$$

και έτσι

$$\|\psi'(u_n) - \psi'(u)\| \leq |f(u_n) - f(u_n)|_q \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ φραγμένο και ανοιχτό. Ζητείται μία συνάρτηση $u\; : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί

$$\begin{cases} -\triangle u + u = f & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

όπου $f \in L^2(\Omega)$ μία δεδομένη συνάρτηση και g δεδομένη πάνω στο $\partial\Omega$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ τέτοια ώστε $\tilde{g} = g$ στο $\partial\Omega$ και ορίζουμε το σύνολο

$$K = \big\{ v \in H^1(\Omega) : v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega) \big\}$$

Ορισμός 2.6 *Κλασική λύση της (4) είναι μία συνάρτηση* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *που την ικανοποιεί.*
Ασθενής λύση της (4) είναι μία συνάρτηση $u \in H_0^1(\Omega)$ *που ικανοποιεί*

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv) = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

Τότε κάθε κλασική λύση είναι και ασθενής λύση.

Πρόταση 2.8 *Για κάθε* $f \in L^2(\Omega)$ *υπάρχει* $u \in K$ *μοναδική ασθενής λύση της (4). Επίπλέον, η* u *είναι λύση του προβλήματος*

$$\min_{\nu \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla \nu|^2 + \nu^2) - \int_\Omega f\nu \right\}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η $u \in K$ είναι ασθενής λύση της (4) αν και μόνο αν ισχύει

$$\int_\Omega \nabla u(\nabla v - \nabla u) + \int_\Omega u(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u) \qquad \forall v \in K. \tag{6}$$

Πράγματι, αν η u είναι ασθενής λύση της (4), ισχύει

$$\int_\Omega \nabla u(\nabla v - \nabla u) + \int_\Omega u(v-u) = \int_\Omega f(v-u) \qquad \forall v \in K.$$

Αντίστροφα, αν η $u \in K$ ικανοποιεί την (6), επιλέγουμε $v = u \pm w$ στην (6), με $w \in H_0^1(\Omega)$ και παίρνουμε την (5). Εφαρμόζουμε τότε το θεώρημα Stampacchia στον $H = H^1(\Omega)$. $\square$

Θεώρημα 2.7 *(Stampacchia)*
Έστω $\alpha(u,v)$ *ένα διγραμμικό, συνεχές και πιεστικό συναρτησιακό. Έστω* K *ένα κλειστό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του* H*. Για δεδομένο* $\varphi \in H'$ *υπάρχει* $u \in K$ *μοναδικό τέτοιο ώστε*

$$\alpha(u, v-u) \ \geq <\varphi, v-u> \qquad \forall v \in K.$$

Επιπλέον, αν το α *είναι συμμετρικό, τότε το* u *χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα*

$$\frac{1}{2}\alpha(u,u) - <\varphi, u> = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}\alpha(v,v) - <\varphi, v> \right\}.$$

3 Η πρώτη ιδιοτιμή του p-Λαπλασιανού Τελεστή

Ορισμός 3.1 *Έστω $g \in L^\infty(\Omega)$, $g \not\equiv 0$. Μία συνάρτηση $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, καλείται ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος*

$$\begin{cases} -\triangle_p u = \lambda g|u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

αν ισχύει

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega g|u|^{p-2}uv \, dx \tag{8}$$

για κάθε $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Το αντίστοιχο λ καλείται ιδιοτιμή.

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $v \equiv u$ στην (8) παίρνουμε

$$\lambda = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega g|u|^p dx}.$$

Άρα κάθε ιδιοτιμή λ είναι θετική.

Ορισμός 3.2 *Πρώτη ιδιοτιμή καλείται ο θετικός αριθμός*

$$\lambda_1 = \inf_\varphi \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi|^p dx}{\int_\Omega g|\varphi|^p dx} \qquad (\textit{πηλίκο } \text{Rayleigh}) \tag{9}$$

όπου $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \not\equiv 0$.

Λήμμα 3.1 *(Ανισότητα Harnack)*
Αν u μη αρνητική ιδιοσυνάρτηση, τότε

$$\max_{y \in B_r(x)} u(y) \leq C \min_{y \in B_r(x)} u(y)$$

όπου $C = C(N,p)$ και $B_r(x)$, $B_{2r}(x)$ ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας r και $2r$ που περιέχονται στο Ω.

Λήμμα 3.2 *Για την πρώτη ιδιοτιμή λ_1 υπάρχει μία αντίστοιχη θετική ιδιοσυνάρτηση $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ που ελαχιστοποιεί το πηλίκο Rayleigh. Επιπλέον κάθε ελαχιστοποιούσα συνάρτηση είναι πολλαπλάσιο της u_1 οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.*

Απόδειξη. Έστω μία ελαχιστοποιούσα ακολουθία $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ του πηλίκου Rayleigh.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\int_\Omega g|\varphi_i|^p\,dx = 1$, $i \in \mathbb{N}$, οπότε η $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Επειδή ο $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι ανακλαστικός $\varphi_i \to u_i$ ασθενώς στο $W_0^{1,p}(\Omega)$ (για μία υπακολουθία). Αποδεικνύεται ότι η u_1 είναι μία ιδιοσυνάρτηση.
Η $|u_1|$ είναι επίσης ελαχιστοποιούσα άρα θα ικανοποιεί την (9). Επειδή $|u_1| \geq 0$ από την ανισότητα Harnack έχουμε $|u_1| > 0$. Άρα είτε $u_1 > 0$ στο Ω, είτε $u_1 < 0$ στο Ω. □

Θεώρημα 3.1 *Η πρώτη ιδιοτιμή είναι απλή σε κάθε φραγμένο πεδίο ορισμού. Μια ιδιοσυνάρτηση που δεν αλλάζει πρόσημο αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή.*

Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στην εργασία [6].

4 Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών σε φραγμένη περιοχή

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\triangle_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)|u|^{q-2}u - h(x)|u|^{s-2}u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

όπου το Ω είναι ένα ανοιχτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$, $g,\ f,\ h \in L^\infty(\Omega)$ μη αρνητικές συναρτήσεις $p < N$ και $1 < q < p < p^* < s$ όπου $p^* = \frac{Np}{N-p}$.
Θα εξετάσουμε την ύπαρξη μη αρνητικών λύσεων για $\lambda \leq \lambda_1$, όπου λ_1 η μικρότερη θετική ιδιοτιμή του αντίστοιχου προβλήματος ιδιοτιμών

$$\begin{cases} -\triangle_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{11}$$

Θα ασχοληθούμε αρχικά με την περίπτωση όπου $\lambda < \lambda_1$. Υποθέτουμε ότι ο χώρος

$$L^s_h(\Omega) = \{u : \int_\Omega h|v|^s dx < +\infty\}$$

είναι εφοδιασμένος με την ημινόρμα

$$|u|_{h,s} = \left(\int_\Omega h|v|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$$

και ο

$$E = W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^s_h(\Omega)$$

είναι εφοδιασμένος με την νόρμα

$$\|u\|_E = \|u\|_{1,p} + |u|_{h,s}. \tag{12}$$

Το συναρτησιακό ενέργειας που αντιστοιχεί στο πρόβλημα (10) είναι το

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega g|u|^p\,dx - \frac{1}{q}\int_\Omega f|u|^q\,dx + \frac{1}{s}\int_\Omega h|u|^s \tag{13}$$

Μία συνάρτηση u καλείται ασθενής λύση του προβλήματος, αν είναι στατικό σημείο της $\Phi_\lambda(u)$ δηλαδή ισχύει:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \upsilon \, dx = \lambda \int_\Omega g|u|^{p-2}u\upsilon \, dx + \int_\Omega f|u|^{q-2}u\upsilon \, dx - \int_\Omega h|u|^{s-2}u\upsilon \, dx \tag{14}$$

για κάθε $\upsilon \in E$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο fibering. Θέτουμε $u(x) = r\upsilon(x)$ στην (13), όπου $r \in \mathbb{R}$ και $\upsilon \in E$, οπότε

$$\Phi_\lambda(r\upsilon) = \frac{|r|^p}{p}\left(\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx - \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^p \, dx\right) - \frac{|r|^q}{q}\int_\Omega f|\upsilon|^q \, dx + \frac{|r|^s}{s}\int_\Omega h|\upsilon|^s \, dx. \tag{15}$$

Αν το $u \in E$ είναι ένα κρίσιμο σημείο του $\Phi_\lambda(u)$ ϑα πρέπει

$$\frac{\partial \Phi_\lambda(r\upsilon)}{\partial r} = 0,$$

δηλαδή

$$|r|^p(\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx - \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^p \, dx) - |r|^q \int_\Omega f|\upsilon|^q \, dx + |r|^s \int_\Omega h|\upsilon|^s \, dx = 0,$$

οπότε

$$|r|^{p-q}\left(\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx - \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^p \, dx\right) + |r|^{s-q}\int_\Omega h|\upsilon|^s dx = \int_\Omega f|\upsilon|^q dx. \tag{16}$$

Αν υποθέσουμε ότι $f > 0$ σ.π. στο Ω τότε η (16) έχει μοναδική ϑετική λύση $r = r(\upsilon)$ για κάθε $\upsilon \in E$, $\upsilon \neq 0$, και η συνάρτηση $\upsilon \to r(\upsilon)$ είναι C^1 [7]. Επειδή $\lambda < \lambda_1$ έχουμε ότι $\left(\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx - \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^p \, dx\right) > 0$ για κάθε $\upsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\upsilon \neq 0$. Έστω $\widetilde{\Phi}_\lambda(\upsilon) = \Phi(r(\upsilon)\upsilon)$. Λόγω της (16) η (15) γίνεται

$$\widetilde{\Phi}_\lambda(\upsilon) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)|r|^p\left(\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx - \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^p \, dx\right) + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{q}\right)|r|^s \int_\Omega h|\upsilon|^s \, dx. \tag{17}$$

Παρατηρούμε ότι $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < 0$ και $\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{q}\right) < 0$ άρα $\widetilde{\Phi}_\lambda(\upsilon) \leq 0$.
Θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω:

Λήμμα 4.1 *Το συναρτησιακό* $\widetilde{\Phi}_\lambda(\upsilon)$ *είναι 0-ομογενές, δηλαδή για κάθε* $\upsilon \in E$, $\upsilon \neq 0$ *και* $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *έχουμε*

$$\widetilde{\Phi}_\lambda(t\upsilon) = \widetilde{\Phi}_\lambda(\upsilon).$$

Αν το $\upsilon_c \neq 0$ *είναι κρίσιμο σημείο του* $\widetilde{\Phi}_\lambda$*, τότε το*

$$u_c = r(\upsilon_c)\upsilon_c$$

είναι κρίσιμο σημείο του Φ_λ*. Ακόμα αν* $\upsilon_c \in E$ *είναι κρίσιμο σημείο του* $\widetilde{\Phi}_\lambda$*, τότε και το* $|\upsilon_c|$ *είναι κρίσιμο σημείο του* $\widetilde{\Phi}_\lambda$*.*

Απόδειξη. Η σχέση

$$\widetilde{\Phi}_\lambda(t\upsilon) = \widetilde{\Phi}_\lambda(\upsilon)$$

είναι άμεση συνέπεια της

$$(\mu\upsilon)r(\mu\upsilon) = \upsilon r(\upsilon), \tag{18}$$

η οποία ισχύει για $\mu > 0$ και $\upsilon \neq 0$. Από την (13) έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi'_\lambda(\upsilon)(\varphi) = \int_\Omega |\nabla\upsilon|^{p-2}\nabla\upsilon\nabla\varphi\, dx \; - \lambda\int_\Omega g|\upsilon|^{p-2}\upsilon\varphi\, dx \\ - \int_\Omega f|\upsilon|^{q-2}\upsilon\varphi\, dx \; + \int_\Omega h|\upsilon|^{s-2}\upsilon\varphi\, dx.\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\Phi'_\lambda(r(\upsilon)\upsilon)(\varphi) = |r|^{p-1}\int_\Omega |\nabla\upsilon|^{p-2}\nabla\upsilon\nabla\varphi\, dx \; - \; \lambda r^{p-1}\int_\Omega g|\upsilon|^{p-2}\upsilon\varphi\, dx \\ -r^{q-1}\int_\Omega f|\upsilon|^{q-2}\upsilon\varphi\, dx \; + \; \int_\Omega h|\upsilon|^{s-2}\upsilon\varphi\, dx\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\Phi'_\lambda(r(\upsilon)\upsilon)(\upsilon) = |r|^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla\upsilon|^p\, dx \; - \; \lambda\int_\Omega g|\upsilon|^p\, dx\right) \\ - \, r^{q-1}\int_\Omega f|\upsilon|^q\, dx \; + \; r^{s-1}\int_\Omega h|\upsilon|^s\, dx \; = 0.\end{aligned}$$

Έτσι από τον κανόνα της αλυσίδας και την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi'_\lambda(\upsilon)(h) = r(\upsilon)\Phi'_\lambda(r(\upsilon)\upsilon)(h) + \frac{dr}{d\upsilon}(r(\upsilon)\upsilon)(h)\Phi'_\lambda(r(\upsilon)\upsilon)(\upsilon) \\ = r(\upsilon)\Phi'_\lambda\left(r(\upsilon)\upsilon\right)(h)\end{aligned} \tag{19}$$

για κάθε $h \in E$. Έστω τώρα ότι το υ_0 είναι στατικό σημείο της $\widetilde{\Phi_\lambda}(\cdot)$. Τότε $\Phi'_\lambda(\upsilon)(h) = 0$ για κάθε $h \in E$ άρα από την (19), $\Phi'_\lambda(r(\upsilon_c)\upsilon_c)(h) = 0$ άρα $\Phi'_\lambda(r(\upsilon_c)\upsilon_c) = 0$ οπότε το $r(\upsilon_c)\upsilon_c$ είναι στατικό σημείο της Φ_λ. $\square$

Λήμμα 4.2 *[2] Έστω ένα συναρτησιακό* $H : E \to \mathbb{R}$ *για το οποίο υπάρχει* $c \in \mathbb{R}$ *ώστε να ισχύει*

$$H'(\upsilon)(\upsilon) \neq 0$$

για κάθε $\upsilon \in G = \{u \in E : H(u) = c\}$. *Τότε κάθε υπό συνθήκη κρίσιμο σημείο του προβλήματος*

$$crit\{\widetilde{\Phi}_\lambda(\upsilon);\ H(\upsilon) = c\} \tag{20}$$

είναι κρίσιμο σημείο του $\widetilde{\Phi}_\lambda$.

Απόδειξη. Έστω υ_c ένα κρίσιμο σημείο του προβλήματος (20). Τότε υπάρχουν μ_i , $i = 1, 2$, τέτοια ώστε

$$\mu_1 \widetilde{\Phi}'_\lambda(\upsilon_c) = \mu_2 H'(\upsilon_c) \tag{21}$$

και

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 > 0.$$

Από την (21) έχουμε

$$\mu_1 \widetilde{\Phi}'_\lambda(\upsilon_c)(\upsilon_c) = \mu_2 H'(\upsilon_c)(\upsilon_c).$$

Όμως από το Λήμμα 4.1 $\widetilde{\Phi}'_\lambda(\upsilon_c)(\upsilon_c) = 0$ και $H'(\upsilon)(\upsilon) \neq 0$ από την υπόθεση. Άρα $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$. Έτσι

$$\widetilde{\Phi}'_\lambda(\upsilon_c) = 0,$$

δηλαδή το υ_c είναι κρίσιμο σημείο του $\widetilde{\Phi}_\lambda$. $\square$

Θέτουμε

$$H_\lambda(\upsilon) = \int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx \ - \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^p \, dx \ + \int_\Omega h|\upsilon|^s \, dx$$

και

$$G = \{\upsilon \in E : H(\upsilon) = 1\}\,.$$

Θα δείξουμε ότι το G είναι φραγμένο. Για $\upsilon \in G$ έχουμε:

$$\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx - \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^p \, dx \ \leq 1$$

Λόγω της (9) παίρνουμε

$$\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx \leq \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^p \, dx \ + 1 \ \leq \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx \ + 1$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx \leq 1$$

$$\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda}$$

Οπότε το G είναι φραγμένο στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Επειδή $\int_\Omega h|\upsilon|^s \, dx \leq 1$, το G είναι φραγμένο και στον $L_h^s(\Omega)$. Αρα το G είναι φραγμένο στον Ε.
Παρατηρούμε ότι $H_\lambda(\upsilon) \geq 0$ επειδή $\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx \ - \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^p \, dx \geq 0$ και $\int_\Omega h|\upsilon|^s \, dx \geq 0$. Ακόμα έχουμε

$$H'_\lambda(\upsilon)(\upsilon) = p \left[\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx \ - \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^p \, dx \ \right] + s \int_\Omega h|\upsilon|^s \, dx$$

και επειδή $p < s$

$$H'_\lambda(\upsilon)(\upsilon) > p \left[\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx \ - \lambda \int_\Omega g|\upsilon|^s \, dx \ \right] + p \int_\Omega h|\upsilon|^s \, dx.$$

Άρα

$$H'_\lambda(\upsilon)(\upsilon) > pH_\lambda(\upsilon).$$

Παίρνοντας λοιπόν τον περιορισμό

$$H_\lambda(\upsilon) = 1$$

ικανοποιούνται οι συνθήκες του Λήμματοσ(4.2). Εξετάζουμε τώρα το πρόβλημα

$$m_\lambda = \inf\left\{\widetilde{\Phi}_\lambda(\upsilon) : H_\lambda(\upsilon) = 1\right\}. \qquad (P_\lambda)$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\left\{\int_\Omega f|\upsilon|^q\,dx : H_\lambda(\upsilon)=1\right\}$ είναι φραγμένο. Από την (16) έχουμε ότι

$$r^{p-q} \le \frac{\int_\Omega f|\upsilon|^q\,dx}{\|\upsilon\|_{1,p}^p} \quad \text{και} \quad r^{s-q} \le \frac{\int_\Omega f|\upsilon|^q\,dx}{|\upsilon|_{h,s}^s}.$$

Οπότε

$$r \le \min\left\{\left(\frac{\int_\Omega f|\upsilon|^q\,dx}{\|\upsilon\|^p}\right)^{\frac{1}{p-q}}, \left(\frac{\int_\Omega f|\upsilon|^q\,dx}{|\upsilon|_{h,s}^s}\right)^{\frac{1}{s-q}}\right\} < +\infty.$$

Άρα το σύνολο $r(G)$, είναι επίσης φραγμένο. Από την (17), το σύνολο $I = \{\Phi(r(\upsilon)\upsilon) \ :\ \upsilon \in G\}$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ με άκρα $\alpha, \beta \le 0$. Ισχύει δηλαδή $\alpha = \inf_{\upsilon\in G}\Phi(r(\upsilon)\upsilon) \le \Phi(r(\upsilon)\upsilon) \le \beta \le 0$. Θα δείξουμε ότι το $\Phi(r(\upsilon)\upsilon)$ παίρνει και την τιμή α. Έστω λοιπόν μία ακολουθία $\upsilon_n \in G$ τέτοια ώστε $\Phi(r(\upsilon_n)\upsilon_n) \to \alpha$. Επειδή η $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στους $W_0^{1,p}$ και L_h^s θα έχουμε, τουλάχιστον για μία υπακολουθία ότι $\upsilon_n \to \upsilon_0$ ασθενώς στους $W_0^{1,p}$ και L_h^s. Η ακολουθία $r_n = r(\upsilon_n)$ είναι φραγμένη, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $d \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $r(\upsilon_n) \to d$. Τότε $r(\upsilon_n)\upsilon_n \to d\upsilon_0$ ασθενώς στους $W_0^{1,p}$ και L_h^s. Έτσι για το $\Phi(d\upsilon_0)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\Phi(d\upsilon_0) \ &= |d|^p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\left(\int_\Omega |\nabla\upsilon_0|^p\,dx - \lambda_1\int_\Omega g|\upsilon_0|^p\,dx\right)\\ &\qquad + |d|^s\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega h|\upsilon_0|^s\,dx \ \le\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\le \liminf\Bigg[|r|^p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)&\left(\int_\Omega |\nabla\upsilon_n|^p\,dx - \lambda_1\int_\Omega g|\upsilon_n|^p\,dx\right)\\ &+|r|^s\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega h|\upsilon_n|^s\,dx\Bigg] =\\ = \liminf \Phi\left(r(\upsilon_n)\upsilon_n\right) \ = \ \alpha\end{aligned}$$

Επειδή $\upsilon_n \to \upsilon_0$ ασθενώς στους $W_0^{1,p}$ και L_h^s οι σχέσεις $H_\lambda(\upsilon_n) = 1$ και (16) δίνουν

$$\int_\Omega |\nabla\upsilon_0|^p\,dx - \lambda\int_\Omega g|\upsilon_0|^p\,dx + \int_\Omega h|\upsilon_0|^s\,dx \le 1$$

και

$$|d|^{p-q}\left[\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^p\,dx - \lambda\int_\Omega g|\upsilon_0|^p\,dx\right] + |d|^{s-q}\int_\Omega h|\upsilon_0|^s\,dx \leq$$
$$\leq \int_\Omega f|\upsilon_0|^q\,dx. \qquad (22)$$

Από την (22) έχουμε $d \leq r(\upsilon_0)$. Θα δείξουμε ότι $d = r(\upsilon_0)$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $d < r(\upsilon_0)$, οπότε

$$|d|^{p-q}\left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^p\,dx - \lambda\int_\Omega g|\upsilon_0|^p\,dx\right) + |d|^{s-q}\int_\Omega h|\upsilon_0|^s\,dx$$
$$< \int_\Omega f|\upsilon_0|^q\,dx.$$

Υπάρχει μοναδικό $\mu > 1$ τέτοιο ώστε

$$|d\mu|^{p-q}\left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^p\,dx - \lambda\int_\Omega g|\upsilon_0|^p\,dx\right) + |d\mu|^{s-q}\int_\Omega h|\upsilon_0|^s\,dx =$$
$$\int_\Omega f|\upsilon_0|^q\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\Phi(r\upsilon_0)}{\partial r} = r^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^p\,dx - \lambda\int_\Omega g|\upsilon_0|^p\,dx\right) + r^{s-1}\int_\Omega h|\upsilon_0|^s\,dx$$
$$-r^{q-1}\int_\Omega f|\upsilon_0|^q\,dx =$$

$$= r^{q-1}\left[r^{p-q}\left(\int_\Omega |\nabla \upsilon_0|^p\,dx - \lambda\int_\Omega g|\upsilon_0|^p\,dx\right) + r^{s-q}\int_\Omega h|\upsilon_0|^s\,dx\right.$$
$$\left. - \int_\Omega f|\upsilon_0|^q\,dx\right] < 0.$$

Άρα η $\Phi(r\upsilon_0)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, r(\upsilon_0)]$ και επειδή $d < r(\upsilon_0)$, έχουμε

$$\Phi(d\upsilon_0) > \Phi(r(\upsilon_0)\upsilon_0). \qquad (23)$$

Έστω $\gamma \geq 1$ τέτοιο ώστε

$$\int_\Omega |\nabla \gamma v_0|^p\, dx - \lambda \int_\Omega g|\gamma v_0|^p\, dx + \int_\Omega h|\gamma v_0|^s\, dx = 1, \tag{24}$$

δηλαδή $\gamma v_0 \in G$. Από το Λήμμα 4.1 και τις (24), (23) έχουμε

$$\Phi(r(\gamma v_0)\gamma v_0) = \Phi(r(v_0)v_0) < \Phi(dv_0) \le \liminf \Phi\left(r(v_n)v_n\right) \;=\; \alpha,$$

που είναι άτοπο. Άρα $d = r(v_0)$ και $\widetilde{\Phi}(v_0) = \Phi(r(v_0)v_0) = m_\lambda$. Από τη σχέση (17), $\widetilde{\Phi}(|v_0|) = \widetilde{\Phi}(v_0)$, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_0 \ge 0$. Το Λήμμα 4.1 εξασφαλίζει ότι η $r(v_0)v_0$ είναι λύση του προβλήματος. Αποδείξαμε λοιπόν το παρακάτω

Θεώρημα 4.1 *Έστω* $1 < p < q < p^* < s$, $\lambda < \lambda_1$, $f, g, h \in L^\infty(\Omega)$ *μη αρνητικές συναρτήσεις και* $f > 0$ *σ.π. Τότε το πρόβλημα (10) έχει τουλάχιστον μία μη αρνητική ασθενή λύση* $u \in E$.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση $\lambda = \lambda_1$. Θεωρούμε το σύνολο

$$W = \left\{v \in E\ : H_{\lambda_1}(v) = 1\right\},$$

όπου

$$H_{\lambda_1}(v) = \int_\Omega |\nabla v|^p\, dx \ - \lambda_1 \int_\Omega g|v|^p\, dx \ + \int_\Omega h|v|^s\, dx.$$

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα

$$m_{\lambda_1} = \inf\left\{\, \widetilde{\Phi}_{\lambda_1}(v)\, ;\, H_{\lambda_1}(v) = 1\right\} \tag{P_{λ_1}}$$

Έστω μία ακολουθία $v_n \in W$ που ελαχιστοποιεί το (P_{λ_1}) δηλαδή $H_{\lambda_1}(v_n) = 1$ και $\widetilde{\Phi}_{\lambda_1} \to m_{\lambda_1}$. Θα δείξουμε ότι η v_n είναι φραγμένη.
Επειδή $\int_\Omega h|v_n|^s \le 1$, η v_n είναι φραγμένη στον $L_h^s(\Omega)$. Μένει να δείξουμε ότι είναι φραγμένη και στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Έστω λοιπόν ότι $\|v_n\|_{1,p} \to +\infty$. Θέτουμε $t_n = \|v_n\|_{1,p}$ οπότε έχουμε $v_n = t_n w_n$ με $\|w_n\|_{1,p} = 1$.Έτσι :

$$\begin{aligned}
H_{\lambda_1}(v_n) &= H_{\lambda_1}(t_n w_n)\\
&= \left[\int_\Omega |\nabla t_n w_n|^p\, dx \ - \lambda_1 \int_\Omega g|t_n w_n|^p\, dx\right] \ + \ \int_\Omega h|t_n w_n|^s\, dx\\
&= t_n^p \left[\int_\Omega |\nabla w_n|^p\, dx \ - \lambda_1 \int_\Omega g|w_n|^p\, dx\right] \ + \ t_n^s \int_\Omega h|w_n|^s\, dx\\
&= 1
\end{aligned}$$

Άρα
$$\left[\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx \; - \lambda_1 \int_\Omega g|w_n|^p \, dx\right] \le \frac{1}{t_n^p} \to 0 \tag{25}$$
και
$$\int_\Omega h|w_n|^s \, dx \le \frac{1}{t_n^s} \to 0. \tag{26}$$
Έτσι έχουμε
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1 \int_\Omega g|w_n|^p \, dx \; = 1$$
Όμως η w_n είναι φραγμένη άρα έχει υπακολουθία που συγκλίνει, δηλαδή $w_n \rightharpoonup w$ ασθενώς στους $W_0^{1,p}(\Omega)$ και $L_h^s(\Omega)$. Επειδή $\int_\Omega |\nabla w_n|^p dx = 1$ από την (25) έχουμε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1 \int_\Omega g|w_n|^p \, dx = 1$$
και από το Θεώρημα 2.3 παίρνουμε
$$\lambda_1 \int_\Omega g|w|^p dx = 1 \tag{27}$$
άρα $w \neq 0$. Όμως
$$\int_\Omega |\nabla w|^p dx \le \liminf \int_\Omega |\nabla w_n|^p dx = 1$$
άρα $\int_\Omega |\nabla w|^p dx \le 1$. Από τις (25) και (27)
$$\int_\Omega |\nabla w|^p dx = 1 = \int_\Omega g|w|^p dx$$
δηλαδή το w είναι ιδιοδιάνυσμα, οπότε $w > 0$. Αλλά από την (26)
$$\int_\Omega h|w|^s dx \le \liminf \int_\Omega h|w_n|^s dx = 0$$
που είναι άτοπο. Άρα η ακολουθία v_n είναι φραγμένη. Εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση $\lambda < \lambda_1$ και έχουμε το παρακάτω

Θεώρημα 4.2 *Έστω $1 < p < q < p^* < s$, $\lambda = \lambda_1$, $f, g, h \in L^\infty(\Omega)$ μη αρνητικές συναρτήσεις και $f > 0$ σ.π.. Τότε το πρόβλημα (10) έχει τουλάχιστον μία μη αρνητική ασθενή λύση $u \in E$.*

5 Η εξίσωση στον $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$

Θα εξετάσουμε την περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}^N$. Θα εργαστούμε στον χώρο V που είναι η πλήρωση του χώρου $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ως προς τη νόρμα

$$\|u\|_V = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega \frac{|u|^p}{(1+|x|)^p} dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Τότε ο V είναι ένας ομοιόμορφα κυρτός (άρα ανακλαστικός) χώρος Banach. Έστω $E = V \cap L_h^s(\mathbb{R}^N)$.
Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} -\triangle_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)|u|^{q-2}u - h(x)|u|^{s-2}u \\ u \in E. \end{aligned} \tag{28}$$

Υποθέτουμε ότι $1 < p < q < p^* < N$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$, όπου $q_1 = \frac{p^*}{p^*-q}$ και $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_2}(\mathbb{R}^N)$, όπου $q_2 = \frac{p^*}{p^*-s}$ μη αρνητικές συναρτήσεις και $f > 0$ σ.π. Μία συνάρτηση $u \in E$ καλείται ασθενής λύση του προβλήματος, αν ισχύει:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^{p-2}uv \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} f|u|^{q-2}uv \, dx - \\ - \int_{\mathbb{R}^N} h|u|^{s-2}uv \, dx \end{aligned}$$

για κάθε $v \in E$.

Λήμμα 5.1 *([3], Λήμμα 2.3)*
Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\begin{aligned} -\triangle_p u = \lambda g|u|^{p-2}u \\ u \in V. \end{aligned} \tag{29}$$

Τότε το πρόβλημα (29) έχει μία πρώτη ιδιοτιμή λ_1 η οποία είναι θετική και χαρακτηρίζεται από το πηλίκο Rayleigh. Η λ_1 είναι επίσης απλή και μεμονωμένη. Αν η u_1 είναι ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην λ_1 τότε η u_1 δεν αλλάζει πρόσημο στον $\mathbb{R}^N$.

Λήμμα 5.2 *(Ανισότητα Hardy)*
Αν $u \in V$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{(1+|u|)^p} dx \leq \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx.$$

Από την ανισότητα (1.46) του [5] έχουμε ότι αν $u \in V$ τότε $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ και $\|u\|_{p^*} \leq c\|\nabla u\|_p$. Επειδή

$$g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N),$$

από τις ανισότητες των Hölder και Sobolev έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^p dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} g^{\frac{N}{p}} dx\right)^{\frac{p}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \\ &\leq c\left(\int_{\mathbb{R}^N} g^{\frac{N}{p}} dx\right)^{\frac{p}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right) \qquad (30) \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $\lambda < \lambda_1$. Όπως στο Θεώρημα 4.1 μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $\upsilon \in G$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \upsilon|^p dx \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda}$$

$$H_\lambda(\upsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} h|u|^s \, dx$$

και $V_\lambda = \{\upsilon \in E, H_\lambda(\upsilon) = 1\}$. Από την ανισότητα Hardy και την (30) τα $\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\upsilon|^p}{(1+|x|)^p} dx$ και $\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|\upsilon|^p dx$ είναι φραγμένα για $\upsilon \in G$. Άρα

$$\|\upsilon\|_V \leq c$$

για κάθε $\upsilon \in V_\lambda$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\inf_{\upsilon \in V_\lambda} \widehat{\Phi}(\upsilon) \qquad (31)$$

Όπως στο Θεώρημα 4.1 αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\widehat{\Phi}(V_\lambda)$ είναι φραγμένο και $\widehat{\Phi}(\upsilon) \leq 0$ όταν $\upsilon \in V_\lambda$. Έστω $\{\upsilon_n\}$ μία ελαχιστοποιούσα ακολουθία του προβλήματος (31). Τότε επειδή η υ_n είναι φραγμένη και ο V είναι ανακλαστικός υπάρχει $\upsilon_c \in V$ τέτοιο ώστε $\upsilon_n \to \upsilon_c$ ασθενώς στον E. Θεωρούμε τον τελεστή $G : V \to V^*$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\langle G(u), \upsilon \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^{p-2} u\upsilon dx.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα (30) βλέπουμε ότι ο G είναι καλά ορισμένος. Από το Λήμμα 2.2 στην [5], ο τελεστής G είναι συμπαγής. Όμως

$$\begin{aligned}\langle G(u_n), u_n \rangle - \langle G(u), u \rangle &= \langle G(u_n), u_n \rangle - \langle G(u), u_n \rangle + \langle G(u), u_n \rangle - \langle G(u), u \rangle \\ &= \langle G(u_n) - G(u), u_n \rangle + \langle G(u), u_n - u \rangle. \qquad (32)\end{aligned}$$

Επειδή ο G είναι συμπαγής $G(u_n) \to G(u)$ στον V^*. Άρα από την (32) $\langle G(u_n), u_n \rangle \to \langle G(u), u \rangle$ δηλαδή $\int_{\mathbb{R}^N} g|u_n|^p dx \to \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^p dx$. Ορίζουμε επίσης $F : V \to V^*$ από τη σχέση

$$\langle F(u), \upsilon \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f|u|^{q-2} u\upsilon \, dx$$

Επειδή

$$\begin{aligned}|\langle F(u), \upsilon \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} f|u|^{q-1}|\upsilon| \, dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \right)^{\frac{q-1}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (f|\upsilon|)^{\frac{p^*}{p^*-\gamma+1}} \right)^{\frac{p^*-\gamma+1}{p^*}} \\ &\leq c_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \right)^{\frac{q-1}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\upsilon|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f^{\gamma_1} \, dx \right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\end{aligned}$$

ο F είναι καλά ορισμένος. Από το Λήμμα 2.2 στην [5] έχουμε ότι ο F είναι συμπαγής. Όπως στην περίπτωση του G αποδεικνύεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^N} f|u_n|^q \, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f|u|^q \, dx.$$

Εργαζόμαστε όπως στο Θεώρημα 4.1 για να αποδείξουμε το παρακάτω

Θεώρημα 5.1 *Έστω* $1 < p < q < p^* < N$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$, *όπου* $q_1 = \frac{p^*}{p^*-q}$ *και* $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_2}(\mathbb{R}^N)$, *όπου* $q_2 = \frac{p^*}{p^*-s}$ *μη αρνητικές συναρτήσεις και* $f > 0$ *σ.π. Τότε το πρόβλημα (28) έχει τουλάχιστον μία μη αρνητική ασθενή λύση* $u \in E$.

Αν $\lambda = \lambda_1$ εργαζόμαστε όπως το προγούμενο θεώρημα και το Θεώρημα 4.2 για να αποδείξουμε το παρακάτω

Θεώρημα 5.2 *Έστω* $1 < p < q < p^* < N$, $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$, *όπου* $q_1 = \frac{p^*}{p^*-q}$ *και* $h \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_2}(\mathbb{R}^N)$, *όπου* $q_2 = \frac{p^*}{p^*-s}$, *μη αρνητικές συναρτήσεις και* $f > 0$ *σ.π. Τότε το πρόβλημα (28) έχει τουλάχιστον μία μη αρνητική ασθενή λύση* $u \in E$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να εφαρμοστούν και στην περίπτωση που αντί των συνοριακών συνθηκών Dirichlet έχουμε ομογενείς συνοριακές συνθήκες όπως για παράδειγμα την

$$|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \eta + \alpha(x)|u|^{p-2}u = 0.$$

Αναφορές

[1] H. Brezis, *Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1997.

[2] P. Drábek and S. Pohozaev, *Positive solutions for the p-Laplacian:application of the fibrering method*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 127A, 703-726,1997.

[3] P. Drábek and Y. Huang, *Bifurcation problems for the p-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$. Trans. Amer.Math.Soc., 349, No1, 1997, p171-188.

[4] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North-Holland, 1982.

[5] P. Drábek, A. Kufner, F. Nicolosi, *Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities*, De Gruyter, 1997.

[6] P. Lindqvist, *On a nonlinear eigenvalue problem*, Lecture Notes, Norwegian University of Science and Technology, Norway.

[7] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its applications*, Vol.1, Springer Verlag 1985.