ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ
Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2016-17
ΣΧΕΔΙΑΣΗ & ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ (SYSTEMS ENGINEERING)

(ΠΔ 96 /2015/ΦΕΚ 163Α'/20.08.2014)

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΠΟΡΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων
για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Υπό:

ΜΗΤΚΑ ΕΛΙΣΑΒΕΤ

Α.Μ.:

2014018010

ΙΟΥΛΙΟΣ 2017

Η Μεταπτυχιακή Διατριβή της ΜΗΤΚΑ ΕΛΙΣΑΒΕΤ εγκρίνεται:

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Καθηγητής Νικόλαος Ι. Δάρας
Επίκουρος Καθηγητής Στέλιος Τσαφαράκης
Επίκουρος Καθηγητής Κωνσταντίνος Καραματσούκης (Επιβλέπων)

Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας δεν απηχεί απαραίτητα τις απόψεις του Τμήματος, του Επιβλέποντα, ή της επιτροπής που την ενέκρινε.

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστική συγγραφέας της παρούσας Μεταπτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογη έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Μεταπτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Μεταπτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

(Υπογραφή)

. . . .

Ελισάβετ Μήτκα

4/11/2017

Αφιερώσεις

Στους γονείς μου…

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Νιώθω την ανάγκη να αναφέρω στο σημείο αυτό όλους εκείνους τους ανθρώπους που βοήθησαν, ο καθένας με τον δικό του τρόπο και στα πλαίσια των δυνατοτήτων τους, ώστε να πραγματοποιηθεί η παρούσα διπλωματική εργασία.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος της Στρατιωτικής Σχολής Ευελπίδων, Επίκουρο Καθηγητή Κωνσταντίνο Χ. Καραματσούκη, που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με αυτό το τόσο ενδιαφέρον και επιτακτικό στις μέρες μας, θέμα της βέλτιστης κατανομής των πόρων σε καθημερινά, απλά αλλά και σύνθετα, προβλήματα της καθημερινότητας. Ήταν αυτός που μέσα από την διδασκαλία του, μου κέντρισε το ενδιαφέρον και με ώθησε να κάνω ένα βήμα παραπέρα στο συνδυασμό της επιστήμης του Στρατιωτικού και του Μηχανικού Παραγωγής και Διοίκησης.

Επίσης, θέλω να αναφέρω και να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου, τους γονείς μου, οι οποίοι είναι αυτοί που χωρίς την ύπαρξή τους τίποτα δε θα ήταν εφικτό. Αυτοί που μου παρέχουν, ανιδιοτελώς και αδιαλείπτως, το ψυχολογικό, συναισθηματικό αλλά και οικονομικό υπόβαθρο ούτως ώστε να καταφέρνω να γίνομαι ένας χρήσιμος άνθρωπος στον κόσμο. Ελπίζοντας να μην τους απογοητεύσω.

Ελισάβετ Μήτκα

Αλεξανδρούπολη 2017

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή έχει ως στόχο τη μελέτη του προβλήματος της της κατανομής πόρων σε κάποιες δραστηριότητες. Η μελέτη προβλημάτων εύρεσης της βέλτιστης κατανομής πόρων είναι σημαντική καθώς πολλές φορές υπάρχει περιορισμός στη διαθεσιμότητα των πόρων ενώ παράλληλα κάποιοι επιπρόσθετοι περιορισμοί καθιστούν το πρόβλημα αρκετά πολύπλοκο. Στη διεθνή βιβλιογραφία τέτοιου είδους προβλήματα καλούνται προβλήματα κατανομής πόρων (resource allocation problems).

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στον δυναμικό προγραμματισμό, δηλαδή πως ξεκίνησε και επινοήθηκε σαν μέθοδος, σε τι είδους προβλήματα μπορεί να δώσει λύση, ποιοι αλγόριθμοι χρησιμοποιούνται, αλλά και σε ποιους τομείς και σε ποιες καταστάσεις μπορεί να δώσει λύσεις. Η διαδικασία επιλογής του κατάλληλου αλγόριθμου είναι σημείο καίριας σημασίας καθώς είναι αυτή που θα οδηγήσει με μικρότερο υπολογιστικό κόστος στη λύση του προβλήματος. Αναφέρονται επιγραμματικά οι τεχνικές επίλυσης και οι βασικοί αλγόριθμοι για τα προβλήματα κατανομής πόρων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην επίλυση προβλημάτων κατανομής πόρων με τη βοήθεια της μεθόδου του δυναμικού προγραμματισμού. Δίνονται στοιχεία για την ιστορία του σαν μέθοδος επίλυσης πολύπλοκων προβλημάτων, το κόστος που έχει κάθε φορά καθώς και τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων στα οποία μπορεί να δώσει λύση. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στην αρχή της βελτιστοποίησης, δηλαδή στη μέθοδο εύρεσης της βέλτιστης λύσης αναδρομικά. Στο τέλος παρουσιάζονται κάποιες βασικές έννοιες του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού, ενώ στη συνέχεια παρουσιάζονται οι πιο γνωστοί αλγόριθμοι για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές του δυναμικού προγραμματισμού, όπως το πρόβλημα των επενδύσεων, το πρόβλημα κατανομής εργασιών, προβλήματα προγραμματισμού της παραγωγής και ελέγχου αποθεμάτων, η αντικατάσταση εξοπλισμού και μηχανημάτων, η λήψη αποφάσεων υπό συνθήκες αβεβαιότητας ή το πρόβλημα βέλτιστης φόρτωσης οχήματος. Επίσης γίνεται ανάλυση στρατιωτικών εφαρμογών σε προβλήματα κατανομής πόρων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μια ανασκόπηση των προαναφερθέντων. Δίνονται συμπεράσματα που προέκυψαν από την ανάλυση της θεωρίας και των εφαρμογών που παρουσιάστηκαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1Ιστορική αναδρομή

Ο **δυναμικός προγραμματισμός** αποτελεί μια υπολογιστική μέθοδος της Επιχειρησιακής Έρευνας, η οποία έχει καθιερωθεί ως ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων σε πεπερασμένο ή άπειρο χρονικό ορίζοντα. Από τότε που πρωτο-αναπτύχθηκε έχει συντελέσει στην μελέτη και επίλυση περίπλοκων θεωρητικών και πρακτικών προβλημάτων.

Θεμελιώδης έννοια στο δυναμικό προγραμματισμό αποτελεί η αρχή βελτιστοποίησης, (Principle of Optimality). Η αρχή της βελτιστοποίησης αναφέρει ότι "Μια βέλτιστη πολιτική έχει την ιδιότητα ότι ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση και την αρχική απόφαση, οι υπόλοιπες αποφάσεις πρέπει να αποτελούν μια βέλτιστη πολιτική (δεδομένου ότι αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση που προέκυψε μετά τη λήψη της πρώτης απόφασης)".

1.2 Το πρόβλημα της κατανομής πόρων

Το πρόβλημα της κατανομής πόρων εφαρμόζεται σε αρκετές περιπτώσεις, μερικές εκ των οποίων είναι: η διαχείριση έργων, η επιλογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου, η κατανομή πόρων κοινής ωφέλειας (νερό, ηλεκτρική ενέργεια κλπ), όπως το πρόβλημα των επενδύσεων, το πρόβλημα κατανομής εργασιών, προβλήματα προγραμματισμού της παραγωγής και ελέγχου αποθεμάτων, η αντικατάσταση εξοπλισμού και μηχανημάτων, η μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με δίκτυα και σε πολλές άλλες περιπτώσεις.

Στη μοντελοποίηση προβλημάτων κατανομής πόρων, αφού προχωρήσουμε στην ανάλυση των παραμέτρων του προβλήματος , θα πρέπει να προσδιοριστούν οι απαιτήσεις σε πόρους για την υλοποίηση του εγκαίρως, σύμφωνα με τον προϋπολογισμό και σύμφωνα με τις προδιαγραφές απόδοσης/ ποιότητας. Τα αρχικά στάδια της κατανομής των πόρων σε ένα πρόβλημα περιλαμβάνουν:

- επισκόπηση του αντικειμένου και του καταλόγου δραστηριοτήτων/ εργασιών, ώστε να προσδιοριστούν οι απαιτήσεις του έργου σε ανθρώπινους πόρους, εξοπλισμό, μηχανήματα, υλικά κλπ
- συλλογή ιστορικών πληροφοριών από φακέλους παλαιότερων έργων, από βάσεις δεδομένων και από άτομα που έχουν εργαστεί σε παρόμοια έργα, λαμβάνοντας υπόψη ποια είδη και ποιες ποσότητες πόρων απαιτήθηκαν για την εκτέλεση παρόμοιων εργασιών σε προηγούμενα έργα, καθώς και τη διάρκεια των σχετικών εργασιών.

Ο τρόπος με τον οποίο καταναλώνει μία εργασία πόρους είναι συνήθως (α) είτε ανάλογος του χρόνου (π.χ. ανάλογα με τον χρόνο καταβάλλονται τα ημερομίσθια των εργατών, ανεξάρτητα της παραγωγικότητάς τους ή της προόδου του έργου) είτε (β) ανάλογος του ποσοστού ολοκλήρωσης της εργασίας (π.χ. ανάλογα με την πρόοδο ολοκλήρωσης μίας κατασκευής καταναλώνονται τα υλικά). Η δεύτερη περίπτωση μπορεί να μεταπέσει στην πρώτη αν η πρόοδος εργασιών είναι και αυτή με την σειρά της ανάλογη του χρόνου. Καταγράφονται, επίσης, και άλλες περιπτώσεις όπως η κατανάλωση του συνόλου της απαιτούμενης ποσότητας ενός πόρου με την αρχή της εργασίας (π.χ. προκαταβολή για παραγγελία υλικών) ή στο τέλος αυτής (π.χ. πληρωμή αμοιβής υπεργολάβου).

Αφού γίνει η συλλογή των αναγκαίων πληροφοριών, προσδιορίζεται το είδος των πόρων και η απαιτούμενη ποσότητα καθενός από αυτούς. Γενικά, οι πόροι, ή διαφορετικά, τα μέσα παραγωγής ενός έργου διακρίνονται σε τέσσερις κατηγορίες:

- **Ανθρώπινοι Πόροι:** Θα πρέπει να προσδιορίζονται τα επαγγελματικά προσόντα και το είδος των δεξιοτήτων που απαιτούνται για τη διεκπεραίωση μίας δραστηριότητας/ εργασίας.
- **Εξοπλισμός/ Μηχανήματα:** Θα πρέπει να συνταχθεί κατάλογος με τον εξοπλισμό/ τα μηχανήματα που θα χρησιμοποιηθούν για την εκτέλεση των τεχνικών έργων (π.χ. εκσκαφείς, ανυψωτικά μηχανήματα), για την παροχή υπηρεσιών ή την παράδοση προμηθειών (π.χ. αίθουσες για τη διεξαγωγή εκπαιδευτικών σεμιναρίων, φορτηγά για τη μεταφορά προμηθειών και αποθήκες για την αποθήκευση προμηθειών), καθώς και για την ανάληψη υποστηρικτικών ενεργειών.
- **Υλικά:** Θα πρέπει να συνταχθεί κατάλογος με τα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή των παραδοτέων.
- **Πληροφορίες:** Εκτός από τις παραπάνω τρεις βασικές κατηγορίες, οι πληροφορίες θα μπορούσαν επίσης να αναφερθούν ως ξεχωριστή κατηγορία πόρων. Υπάρχουν περιπτώσεις έργων που οι πληροφορίες (βάσεις δεδομένων, ερευνητικά αποτελέσματα, σχέδια κ.λπ.) θεωρούνται σαν ουσιαστικοί πόροι ενός έργου.

Ανεξάρτητα από το βαθμό στον οποίο το έργο θα υλοποιηθεί με ίδιους πόρους ή θα ανατεθεί σε άλλον τρίτο φορέα/ οργάνωση, θα πρέπει να εξεταστεί η **επάρκεια** των πόρων, επειδή ακόμη και στη δεύτερη περίπτωση (εξωτερική ανάθεση της παραγωγής) θα απαιτηθεί η χρήση εσωτερικών πόρων για την εκτέλεση των εργασιών διαχείρισης έργου, ώστε να εξασφαλιστούν η παρακολούθηση και ο έλεγχος της οργάνωσης που θα εκτελέσει το έργο.

1.3 Τεχνικές Επίλυσης για τα προβλήματα κατανομής πόρων

Μια από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων κατανομής πόρων είναι η μέθοδος του γραμμικού προγραμματισμού.

Ο γραμμικός προγραμματισμός (αγγλ: linear programming) αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο μοντέλο στο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας αλλά και της διοικητικής επιστήμης (αγγλ: management science) γενικότερα. Η μεγάλη επιτυχία που είχαν σε εφαρμογές του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων των ιδιωτικών και δημόσιων επιχειρήσεων και οργανισμών αποδίδεται, από τη μια πλευρά στα επιτεύγματα της έρευνας μαθηματικών και οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και από την άλλη πλευρά στην επαναστατική ανέλιξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας. Κυριαρχεί σήμερα η αντίληψη ότι, τρεις στις τέσσερις εφαρμογές μοντέλων επιχειρησιακής έρευνας σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης παραπέμπουν στο γραμμικό προγραμματισμό. (Κολέτσος Γ. 2006)

Λεξιλογικά η μέθοδος οφείλει το όνομά της στο γεγονός ότι στα προβλήματα που δίνει λύση ο Δυναμικός Προγραμματισμός παρατηρείται σχεδόν κάθε φορά μια ακολουθία αποφάσεων. Περίπου το 1950, όπου και υπήρξε μεγάλη ανάπτυξη της συγκεκριμένης μεθόδου, δημιουργήθηκαν περίπλοκα προβλήματα με σύνθετο χαρακτήρα και με πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές, που έπρεπε να απαντηθούν με εξίσου σύνθετο, ακριβές και αξιόπιστο τρόπο. Υπήρχαν προφανώς ήδη γνωστές και εφαρμοσμένες μέθοδοι (γραμμικός ή ακέραιος προγραμματισμός), που όμως γίνονταν δυσλειτουργικές, πολύπλοκες και επίπονες σε προβλήματα με αποφάσεις, όπου η μια επηρέαζε την άλλη.

Η μεθοδολογία του Δυναμικού Προγραμματισμού έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Χωρίζεται το πρόβλημα σε τόσα στάδια όσες και οι αποφάσεις που θα πρέπει, στο τέλος, να ληφθούν.

- Ξεκινούμε από την τελική απόφαση και στη συνέχεια αναδρομικά βρίσκουμε τη βέλτιστη ακολουθία των αποφάσεων.
- Σε κάθε στάδιο υπολογίζεται η βέλτιστη απόφαση, από οποιαδήποτε θέση αυτού του σταδίου, μέχρι τον τελικό προορισμό, την λύση του προβλήματος.

Αποτέλεσμα αυτού του μοντέλου είναι ότι όταν θα φτάσουμε στην αρχή του προβλήματος, ακολουθώντας αναδρομικά τη διαδικασία θα καταλήξουμε στη γενική βέλτιστη λύση.

Οι υπολογισμοί διεξάγονται σε στάδια αναλύοντας το πρόβλημα σε υπο-προβλήματα. Κάθε υπο-πρόβλημα εξετάζεται ξεχωριστά με στόχο τη μείωση των υπολογισμών. Επειδή όμως τα υπο-προβλήματα αλληλοσυνδέονται μεταξύ τους, πρέπει να επινοηθεί μια διαδικασία που να συνδέει τους υπολογισμούς, με τέτοιο τρόπο ώστε μια εφικτή λύση για ένα στάδιο να είναι επίσης εφικτή για το συνολικό πρόβλημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός

2.1 Στοιχεία της Θεωρίας του Δυναμικού Προγραμματισμού

Η μέθοδος του δυναμικού προγραμματισμού ανακαλύπτεται αρχικά, καθώς την ίδια περίοδο, διαφορετικοί επιστήμονες στην ερεύνα των μαθηματικών, αρχίζουν την ασχολία με την αναδρομική διαδικασία ως ένα τρόπο επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης. Στην προσπάθειά τους αυτή, που ξεκινά στα μέσα της δεκαετίας του '40 λαμβάνεται υπόψη το φαινόμενο της τυχαιότητας. Αυτό που σήμερα είναι γνωστό σαν « subgame perfect equilibria of extensive form games», ανακαλύφθηκε από τους John von Neumann και Oskar Morgenstern το 1944 όταν χρησιμοποίησαν την οπισθοδρομική επαγωγή πάνω στην εργασία τους σχετικά με θεωρία παιγνίων. Σε συνέχεια της έρευνας των Neumann και Morgenstern, έρχεται ο Abraham Wald, με τις εργασίες του πάνω στην θεωρία λήψης διαδοχικών αποφάσεων εκδίδοντας το βιβλίο του με τίτλο "Sequential Analysis", το 1947, το οποίο πρακτικά ήταν μια επέκταση της θεωρίας παιγνίων. Ο Wald γενίκευσε τη θεωρία της καταστροφής του παίκτη από τη θεωρία πιθανότητας και εισήγαγε την διαδοχική δοκιμή πιθανότητας, που ελαχιστοποιεί τον αναμενόμενο αριθμό παρατηρήσεων σε μια διαδοχική γενίκευση της κλασσικής δοκιμής υπόθεσης. Παρ' όλα αυτά ο ρόλος της οπισθοδρομικής επαγωγής είναι λιγότερο εμφανής στην εργασία του Wald. Πιο κατανοητό έγινε όταν έγινε μελέτης μιας γενικευμένης έκδοσης του προβλήματος λήψης αποφάσεων βασισμένη στη στατιστική, το οποίο το διατύπωσαν και το έλυσαν με τέτοιο τρόπο, ώστε να αποδεικνύεται σήμερα ότι αποτελεί μια σύγχρονη εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού.

2.2 Εισαγωγικά στοιχεία του Στοχαστικού Δυναμικού Προγραμματισμού

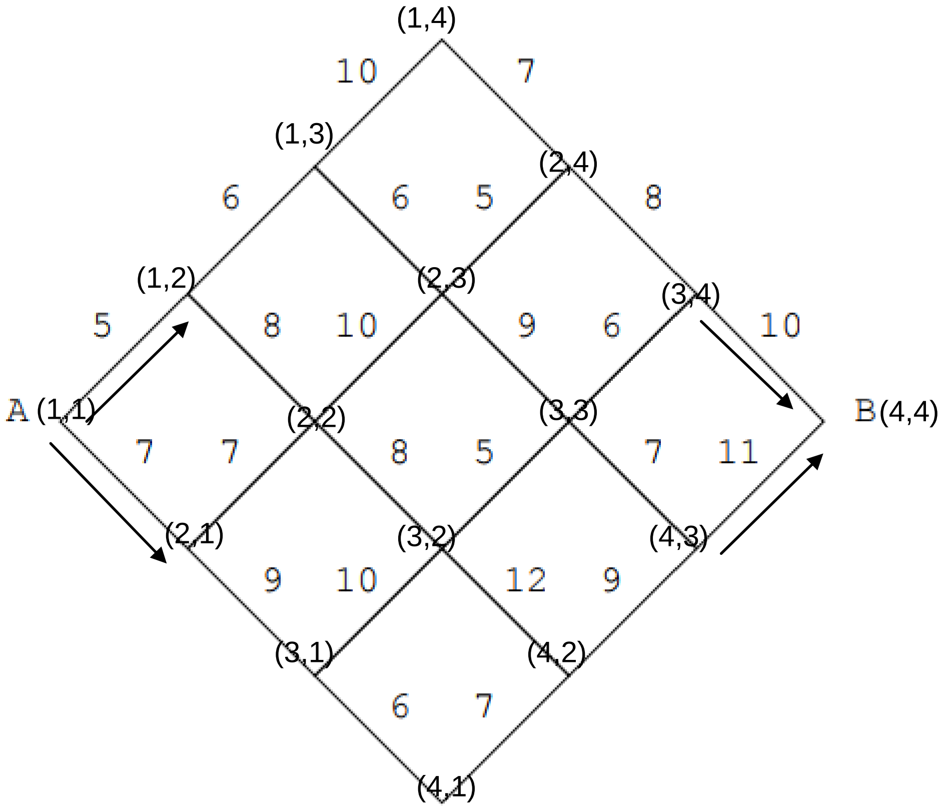
2.2.1 Γενικά

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι μια υπολογιστική μέθοδος, όπως προαναφέρθηκε, η οποία εφαρμόζεται όταν πρόκειται να ληφθεί μια σύνθετη απόφαση η οποία προκύπτει από τη σύνθεση επιμέρους αποφάσεων που αλληλοεξαρτώνται. Η αλληλεξάρτηση μπορεί να προκύψει επειδή οι αποφάσεις είτε παρουσιάζουν κάποια χρονική διαδοχή (όπως στην περίπτωση αναζήτησης της συντομότερης διαδρομής), είτε συνδέονται με κοινούς περιορισμούς (όπως στην περίπτωση κατανομής περιορισμένων πόρων μεταξύ ανταγωνιστικών δραστηριοτήτων).

Τα υποπροβλήματα αυτά λύνονται παραμετρικά, δηλαδή με όλες τις δυνατές τιμές ορισμένων παραμέτρων, ώστε να καλυφθούν όλες οι εκδοχές από τη διασύνδεση των επιμέρους προβλημάτων. Χαρακτηριστικό του δυναμικού προγραμματισμού είναι ότι δεν υπάρχει μια γενικευμένη διατύπωση της μεθόδου που να εφαρμόζεται άμεσα. Οι αναδρομικές σχέσεις που προκύπτουν από τη μέθοδο διαφοροποιούνται ριζικά ανάλογα με τη φύση του προβλήματος.

2.2.2 Υπολογισμός Ελαχίστου Μονοπατιού (παράδειγμα)

Παρακάτω εξετάζεται το πρόβλημα της μετάβασης από το ένα σημείο Α σε ένα άλλο σημείο Β, ελαχιστοποιώντας το κόστος και ακολουθώντας το παρακάτω γράφημα:



Σχήμα 1. Παράδειγμα κλειστού μονοπατιού

Τα μήκη των πλευρών υποδηλώνουν το κόστος της επιλογής μιας συγκεκριμένης διαδρομής μεταξύ δυο κορυφών. Γίνεται η υπόθεση ότι η μετακίνηση μπορεί να γίνει σύμφωνα με τα βέλη στο παραπάνω σχήμα.

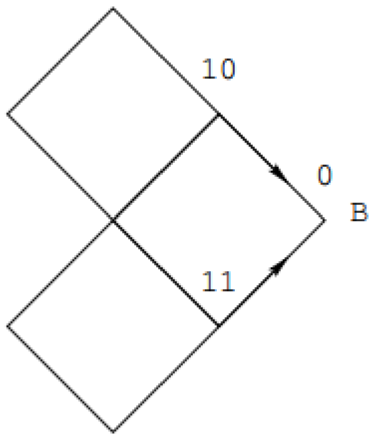
Ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι φυσικά, να υπολογιστεί το συνολικό κόστος για όλες τις πιθανές διαδρομές πηγαίνοντας από το σημείο Α στο σημείο Β. Ένας πιο αποτελεσματικός τρόπος (ιδίως, εάν ο αριθμός των κορυφών είναι μεγάλος) είναι να χρησιμοποιηθεί ο δυναμικός προγραμματισμός. Για την κατανόηση της συλλογιστικής πορείας γίνεται η εισαγωγή των παρακάτω:

1. Έστω Κ το σύνολο των κορυφών, δηλαδή $K = \{(x, y), x = 1, \dots 4\} y = 1, \dots 4\}$, καθορίζουν την κατάσταση σε διακριτό χρόνο $t \in \{0, \dots, 6\}$, όπου κάθε κίνηση αντιστοιχεί στη μετάβαση, μέσω ενός βήματος, προς τα δεξιά στο γράφημα. Τονίζεται ότι το κάθε ζεύγος (x,y) αντιστοιχεί σε μια κορυφή από το διάγραμμα στο Σχήμα 1. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται σαφής ο χώρος των καταστάσεων.
2. Οι κορυφές επισημαίνονται μετά τις σειρές (που δείχνουν νοτιοανατολικά) και τις στήλες (που δείχνουν βορειοανατολικά) στο γράφημα, ώστε η αρχική κατάσταση Α να δηλώνει ότι $x(0) \in \{1,1\}$ και η τελική κατάσταση Β ότι $x(6) \in \{4,4\}$.
3. Κάθε φορά που $t \in \{0, \dots, 5\}$, θα πρέπει να επιλεγεί μια ενέργεια $u(t) \in \{\pm 1\}$, η οποία καθορίζει το πώς θα πραγματοποιηθεί η επόμενη κίνηση. Δηλαδή το σύνολο των ενεργειών είναι U={1,-1}, όπου με το u=1 συμβολίζουμε την βορειοανατολική κίνηση και με u=-1 συμβολίζουμε την νοτιοανατολική κίνηση.
4. Τη χρονική στιγμή t=6 βρισκόμαστε στο σημείο Β. Επισημαίνεται ότι για μερικές καταστάσεις το σύνολο των δυνατών ενεργειών είναι διαφορετικό, όπως π.χ. στην κορυφή $\{4,1\}$, μόνο το $u(4) = +1$ είναι δυνατό.

Ορίζεται η συνάρτηση κόστους $J(u(\cdot) = \sum_{k=0}^{5} W\big(x(k), x(k+1)\big)$ για μια διαδρομή από το Α στο Β, όπου $W\big(x(k), x(k+1)\big)$ είναι το μήκος της πλευράς $\big(x(k), x(k+1)\big)$. Έστω η συνάρτηση κόστους διαδρομής $J(u(t), t)$ υποδηλώνει την βέλτιστη (ελάχιστη) συνάρτηση κόστους, ξεκινώντας από το $x(t)$ σε χρονο t, π.χ.:

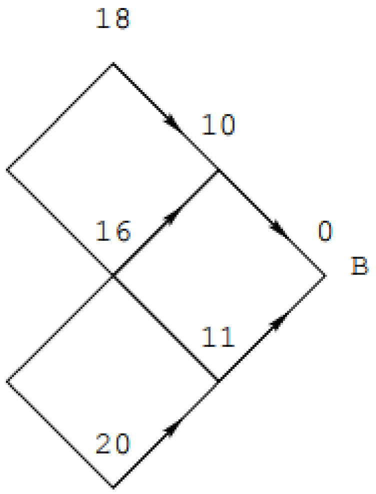
$$J(u(t), t) = \min_{u(t), \dots u(5)} J\big(u(\cdot)\big).$$

Η λύση του προβλήματος μετακίνησης, με χρήση του δυναμικού προγραμματισμού, βασίζεται στον καθορισμό της συνάρτησης του κόστους διαδρομής για όλες τις καταστάσεις, ξεκινώντας από την τελική και πηγαίνοντας αναδρομικά, μέχρι να φτάσουμε στην αρχική κατάσταση. Η συλλογιστική μας βασίζεται στον καθορισμό της τιμής της $J(u(t),t)$ στην κορυφή που αντιστοιχεί στο $(x(t),t)$. Στην τελική κατάσταση B, προφανώς έχουμε $J\big((4{,}4),6\big)=0$. Στο(3,4), έχουμε $J\big((3{,}4),5\big)=J\big((4{,}4),6\big)+W\big((3{,}4),(4{,}4)\big)=0+11=11$ και παρομοίως $J\big((4{,}3),5\big)=10$, όπως φαίνεται και στη λεπτομέρεια του γραφήματος από κάτω:



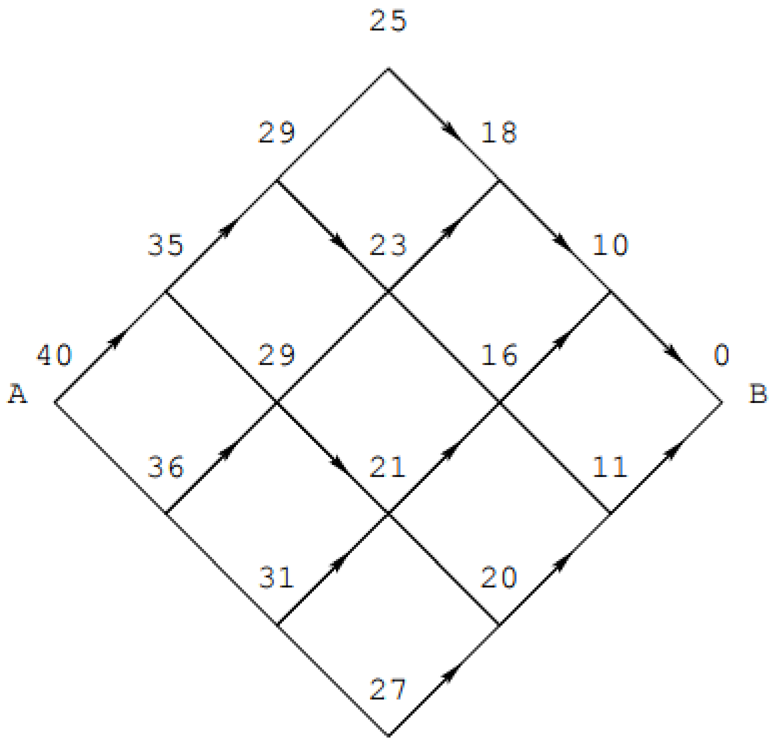
Σχήμα 2. Μέρος του κλειστού μονοπατιού

Τα βέλη δείχνουν την βέλτιστη πορεία, π.χ. την βέλτιστη κίνηση για τη μετάβαση σε μια συγκεκριμένη κατάσταση. Για (3,4) και (4,3) η βέλτιστη διαδρομή, φυσικά, είναι οι επιλογές που φαίνονται παρακάτω:



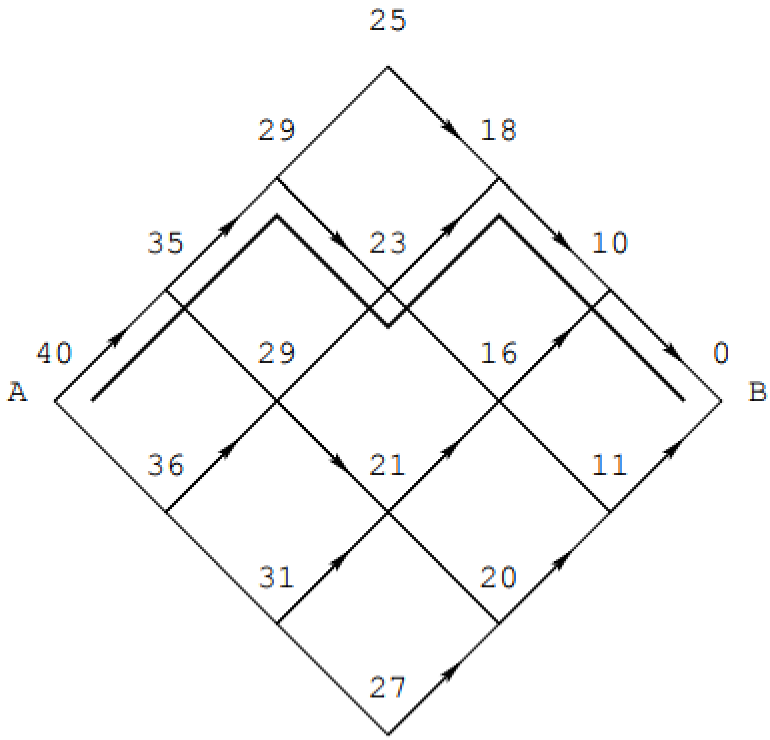
Σχήμα 3. Μέρος του κλειστού μονοπατιού

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτει το παρακάτω γράφημα:



Σχήμα 4. Παράδειγμα κλειστού μονοπατιού με βέλτιστες διαδρομές

Μέσω αυτού του, εντοπίζεται εύκολα η βέλτιστη λύση για τη μετάβαση από το σημείο Α στο Β, ακολουθώντας τα παρακάτω βέλη:



Σχήμα 5. Παράδειγμα κλειστού μονοπατιού με βέλτιστες διαδρομές (τονίζεται ότι ο αριθμός σε καθέ κορυφή δηλώνει το κόστος μετάβασης από την κορυφή στο Β)

Γενικά ισχύει το παρακάτω:

$$J^*(x(t),t) = J^*(x(t+1),t+1) + W\big(x(t),x(t+1)\big).$$

Συνεπώς, η συνάρτηση κόστους διαδρομής στο χρόνο t εξαρτάται μόνο από συνάρτηση κόστους διαδρομής στο χρόνο t+1 και το βέλτιστο κόστος μετάβασης από το x(t) στο x(t+1). Αυτό είναι ένα απλό, αλλά θεμελιώδες, γεγονός που ονομάζεται *αρχή βελτιστοποίησης*. Η αρχή της βελτιστοποίησης δηλώνει ότι εάν

$$u(i), u(i+1), \dots, u(j), \dots, u(k)$$

δίνει τη βέλτιστη λύση

$$x(i), x(i+1), \dots, x(j), \dots, x(k)$$

Τότε ο έλεγχος $u(j), \dots, u(k)$ δίνει τη βέλτιστη λύση από $x(j)$. Από αυτό συνεπάγεται ότι δεν είναι απαραίτητο να επιλυθεί ολόκληρο το πρόβλημα με τη μία, αλλά αντιθέτως μπορεί να επιλυθεί σε μεμονωμένα τμήματα πηγαίνοντας αντίστροφα από την τελική κατάσταση και μετά συνθέτοντας τα τμήματα αυτά μεταξύ τους, όπως έγινε και στο παράδειγμα.

Συγκρίνοντας την μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού, με μιας αναλυτικής προσέγγισης του προβλήματος στην οποία θα εξετάσουμε όλες τις διαδρομές από το Α στο Β, γίνεται φανερό ότι ο δυναμικός προγραμματισμός οδηγεί στον υπολογισμό 15 αριθμών, ενώ είναι 20 πιθανές διαδρομές. Γενικά, για ένα γράφημα με NxN κορυφές, υπάρχουν $N^2 - 1$ συναρτήσεις κόστους να υπολογιστούν σε σχέση με $(2(N-1))!/(N-1)!)^2$ διαδρομές. Για παράδειγμα, εάν N=8, τότε έχουμε 63 συναρτήσεις για 3432 διαδρομές. Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η προσέγγιση μέσω δυναμικού προγραμματισμού επιφέρει σημαντική μείωση στο υπολογιστικό κόστος.

Ο δυναμικός προγραμματισμός αυτόματα οδηγεί στη βέλτιστη λύση: σε κάθε κατάσταση υπάρχει μια συγκεκριμένη ενέργεια που μπορεί να πραγματοποιηθεί. Αυτό σημαίνει ότι η λύση είναι δυνατή, για παράδειγμα, εάν κάτι απρόοπτο μεταβάλλει την κατάσταση από τη μια θέση στην άλλη, ο βέλτιστος έλεγχος συνεχίζει να εφαρμόζεται.

Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι ιδιαιτέρως αποτελεσματικός στην επίλυση προβλημάτων που χρειάζεται λήψη αποφάσεων για πολλαπλές καταστάσεις, οπότε υπάρχουν αρκετές επιλογές ελέγχου σε κάθε κατάσταση. Στο πρόβλημα της βέλτιστης διαδρομής, υπάρχουν μόνο δυο επιλογές σε κάθε βήμα. Εάν οι διαστάσεις χώρου δράσης και των καταστάσεων είναι μεγάλες, τότε ο δυναμικός προγραμματισμός ίσως να είναι λιγότερο εφαρμόσιμος. Σε τέτοιες περιπτώσεις έχει αναπτυχθεί η μέθοδος του προσεγγιστικού δυναμικού προγραμματισμού η οποία είναι δυνατόν να επιτύχει λύσεις που έχουν μικρή απόκλιση από τη βέλτιστη λύση (Johansson K.-H., 2000).

2.3 Βασικές έννοιες

Τα προβλήματα του Δυναμικού Προγραμματισμού παρουσιάζουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Οι αποφάσεις λαμβάνονται διαδοχικά.
2. Το πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε βήματα και σε κάθε βήμα απαιτείται να ληφθεί μια απόφαση.
3. Κάθε βήμα έχει ένα ορισμένο αριθμό «καταστάσεων» που συνδέονται με αυτό.
4. Στη παρούσα κατάσταση λαμβάνουμε μια απόφαση και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη μετάβαση σε μια νέα κατάσταση.
5. Με κάθε απόφαση συνδέεται ένα κέρδος ή μια ζημία (κόστος).
6. Ο αντικειμενικός σκοπός, που εκφράζεται από την αντικειμενική συνάρτηση, είναι να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος ή να ελαχιστοποιηθεί η συνολική ζημία ή γενικότερα να επιτευχθεί το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.
7. Δηλαδή οι αποφάσεις που θα επακολουθήσουν εξαρτώνται μόνο από την κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε και όχι από τον τρόπο με τον οποίον βρεθήκαμε σ' αυτήν την κατάσταση.

Κύριο χαρακτηριστικό του δυναμικού προγραμματισμού είναι ότι δεν υπάρχει γενικευμένη διατύπωση της μεθόδου για την επίλυση όλων των προβλημάτων με τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Η μεθοδολογία του δυναμικού προγραμματισμού βασίζεται στην αρχή της βελτιστοποίησης, σύμφωνα με την οποία μία πολιτική έχει την ιδιότητα, οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική κατάσταση και η αρχική απόφαση, οι υπόλοιπες αποφάσεις πρέπει να αποτελούν μία βέλτιστη πολιτική, σε σχέση με την κατάσταση η οποία προκύπτει από την πρώτη απόφαση (Βασιλειάδης Γ. 2012).

2.4 Μαθηματική μοντελοποίηση και αλγόριθμοι

2.4.1 Τι ονομάζουμε πρόβλημα

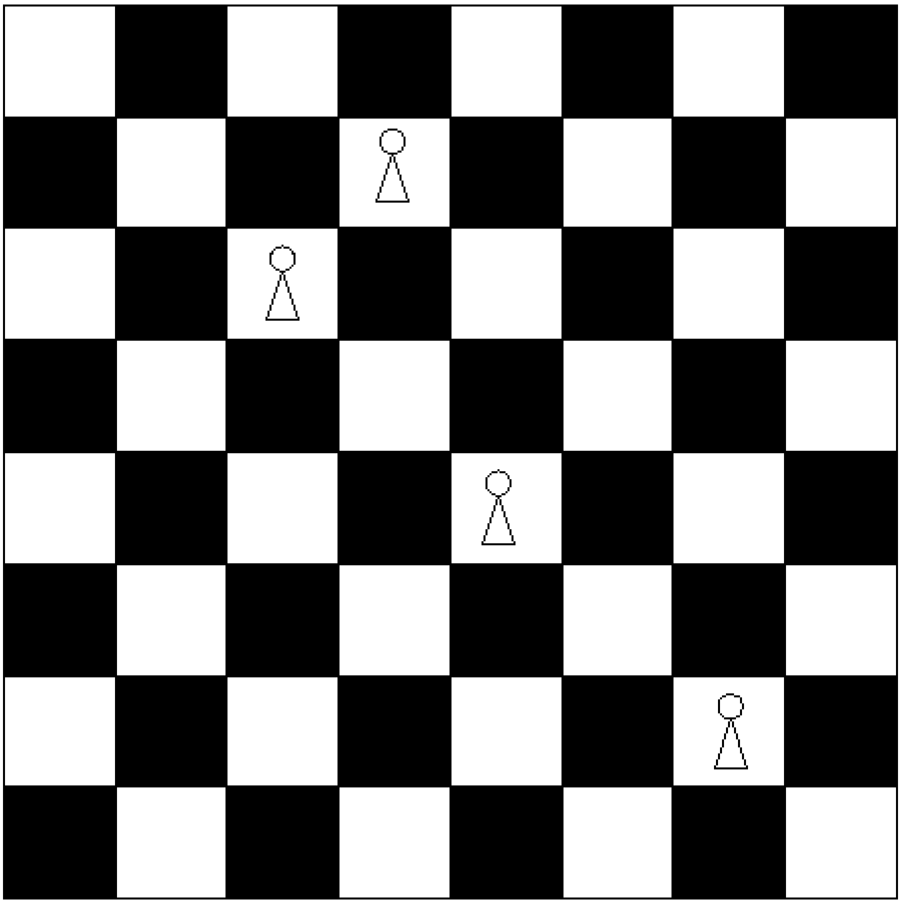
Η επίλυση προβλημάτων με μαθηματικά μοντέλα απαιτεί τον τυποποιημένο και σαφή ορισμό τους. Ο καθορισμός των μαθηματικών μοντέλων δεν λαμβάνει υπόψη την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων εύρεσης της βέλτιστης λύσης.

2.4.2 Κατηγορίες προβλημάτων

2.4.2.1 Πραγματικά και πολύπλοκα προβλήματα

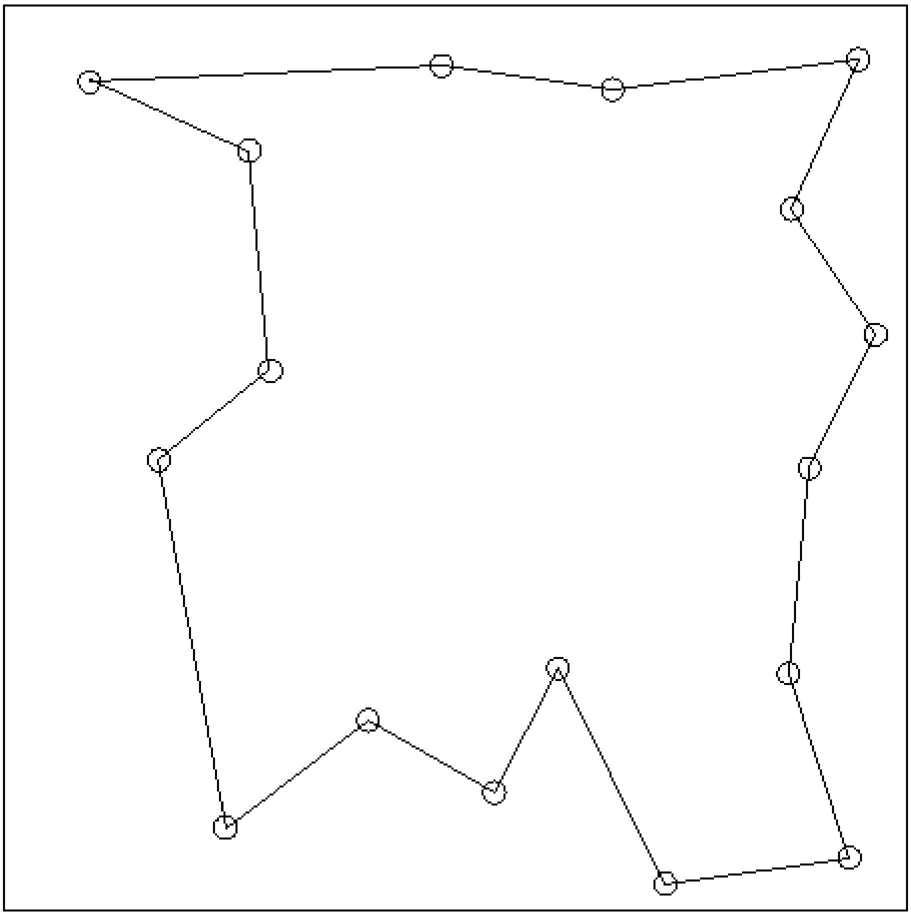
Μερικά από τα προβλήματα συναντώνται σε διάφορες μορφές. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα παρακάτω:

- Σκάκι (chess),
- Πλανόδιος πωλητής (problem of traveling salesperson)
- Ν – βασίλισσες (N – queens)
- Σάκος (knapsack)



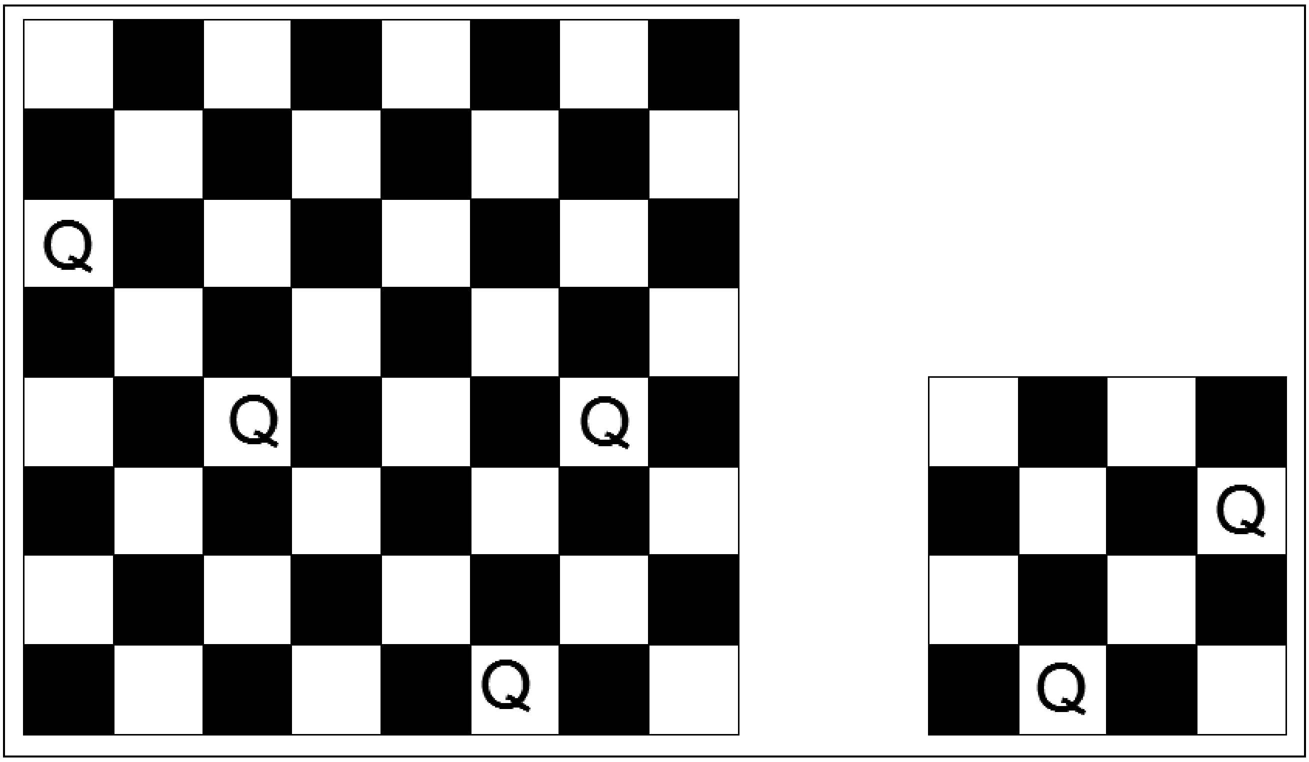
Εικόνα 1. Το πρόβλημα του ΣΚΑΚΙΟΥ

Στο πρόβλημα του σκακιού ο παίκτης καλείται να βελτιστοποιεί συνέχεια την τακτική του, με το πιο γρήγορο και αποδοτικό τρόπο. Θα πρέπει να γνωρίζει ότι υπάρχουν χιλιάδες τακτικές σε ένα αληθινό παιχνίδι και ότι χρειάζεται να αναμετριέται με δυνητικούς παίκτες πολύ δυνατότερους από τον ίδιον.



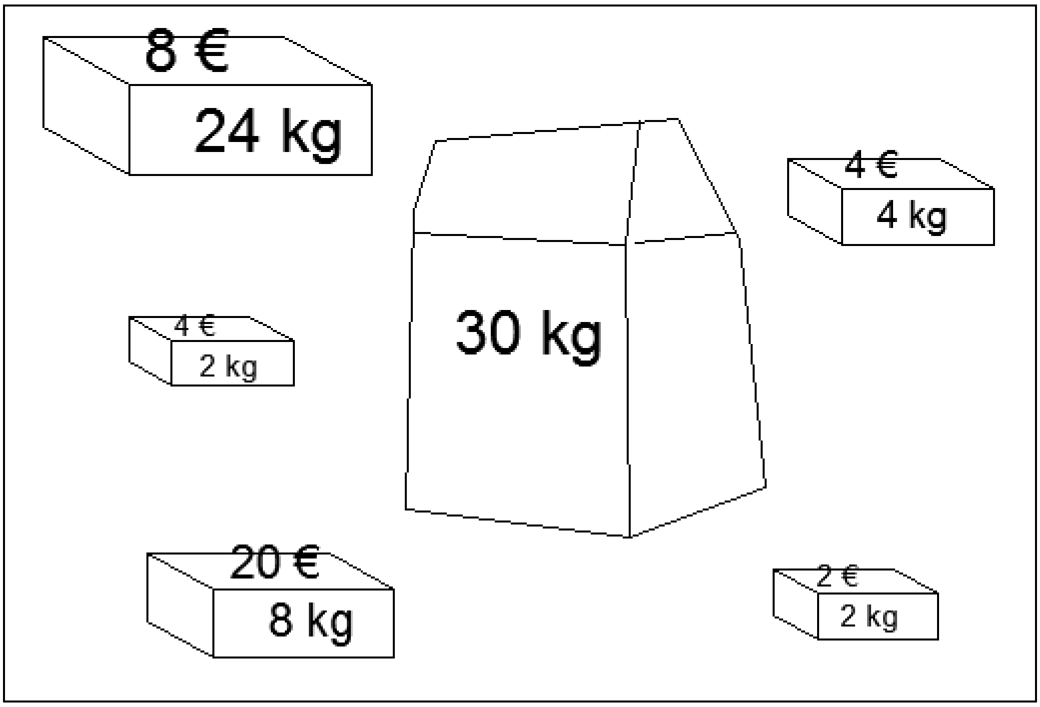
Εικόνα 2. Το πρόβλημα του ΠΛΑΝΟΔΙΟΥ ΠΩΛΗΤΗ

Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή ασχολείται με την εξής ερώτηση: Έστω ένα διάγραμμα από συγκεκριμένες πόλεις – σημεία με δεδομένη την απόσταση μεταξύ τους. Ζητείται ποια είναι η συντομότερη διαδρομή ώστε να επισκεφθεί κάποιος την κάθε πόλη ξεχωριστά και να γυρίσει στην αρχική. Είναι ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, αρκετά σημαντικό στην επιχειρησιακή έρευνα και στη θεωρητική πληροφορική.



Εικόνα 3. Το πρόβλημα των Ν – ΒΑΣΙΛΙΣΣΩΝ

Ο στόχος του συγκεκριμένου προβλήματος είναι: Στο σκάκι, η βασίλισσα μπορεί να κινηθεί όσο μακριά θέλει, οριζόντια, κάθετα ή διαγώνια. Μια σκακιέρα έχει 8 γραμμές και 8 στήλες. Το πρόβλημα είναι έγκειται στο πως πρέπει να τοποθετηθούν 4 βασίλισσες σε μια συνηθισμένη σκακιέρα, ώστε καμιά απ’ αυτές να μη μπορεί να χτυπήσει την άλλη.



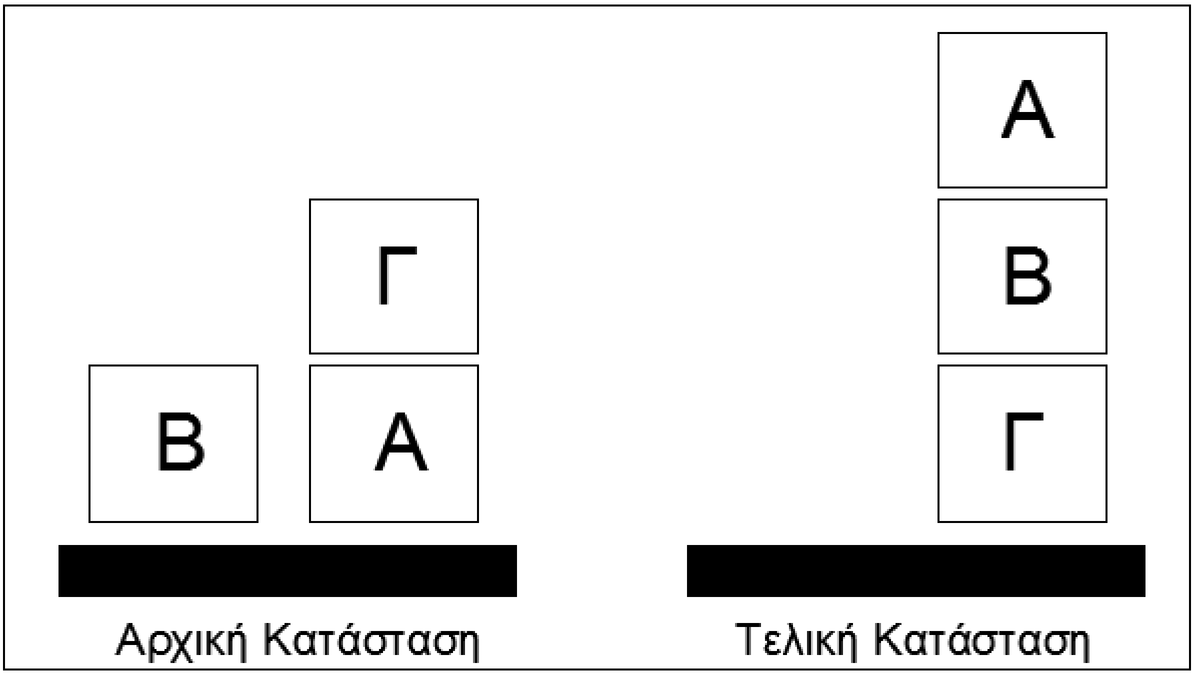
Εικόνα 4. Το πρόβλημα του ΣΑΚΟΥ

Το πρόβλημα του σάκου είναι και αυτό ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης πόρων. Δεδομένου ενός αριθμού αντικειμένων, καθένα από τα οποία έχει ένα συγκεκριμένο βάρος και τιμή, πρέπει να αποφασιστεί ποια από αυτά τα αντικείμενα θα συμπεριληφθούν σε μια συλλογή, ώστε το συνολικό βάρος να είναι μικρότερο ή ίσο από το παρεχόμενο και η αξία τους όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Δανείζεται το όνομα του από το πρόβλημα κάποιου που διαθέτει έναν σάκο συγκεκριμένης χωρητικότητας και πρέπει να το γεμίσει με τα πιο πολύτιμα αντικείμενα.

2.4.2.2 Απλά προβλήματα

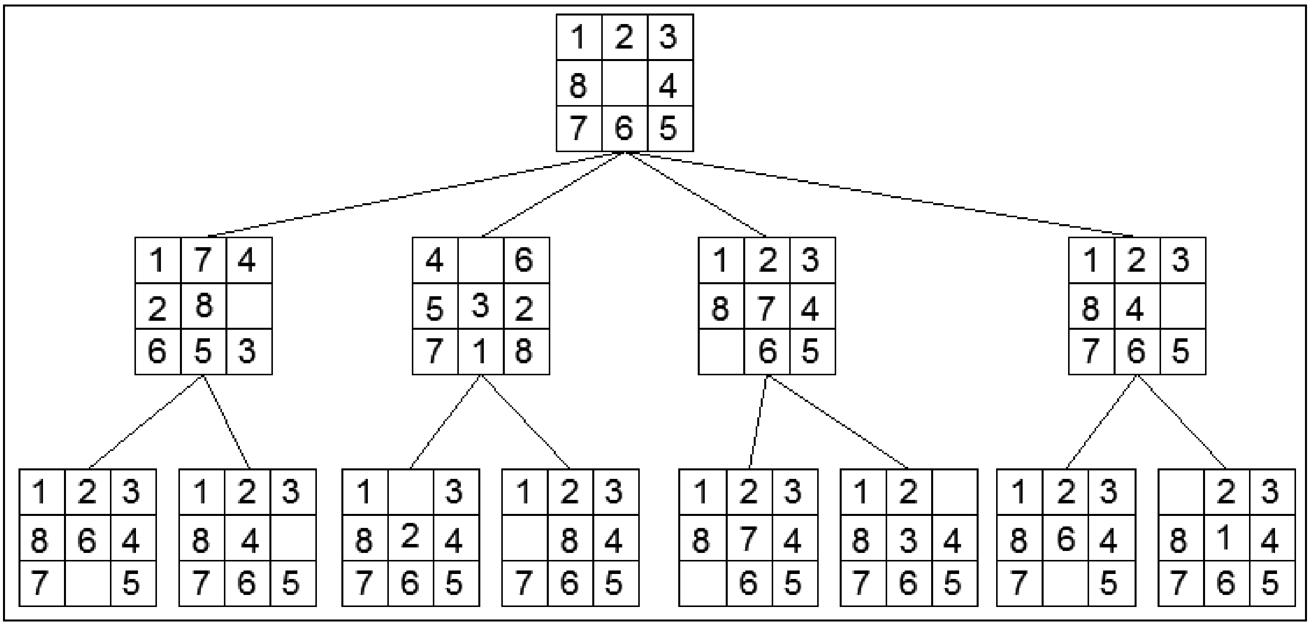
Μερικά από τα απλά προβλήματα που είναι γνωστά είναι τα εξής:

- **Κύβοι (blocks),** αναφέρεται σε πρόβλημα όπου υπάρχει μια άναρχη κατανομή των υφιστάμενων πόρων. Εξετάζονται οι ενέργειες που πρέπει να γίνουν ώστε να επιτευχθεί βέλτιστη χρήση τους για ένα άρτιο αποτέλεσμα.



Εικόνα 5. Το πρόβλημα των ΚΥΒΩΝ

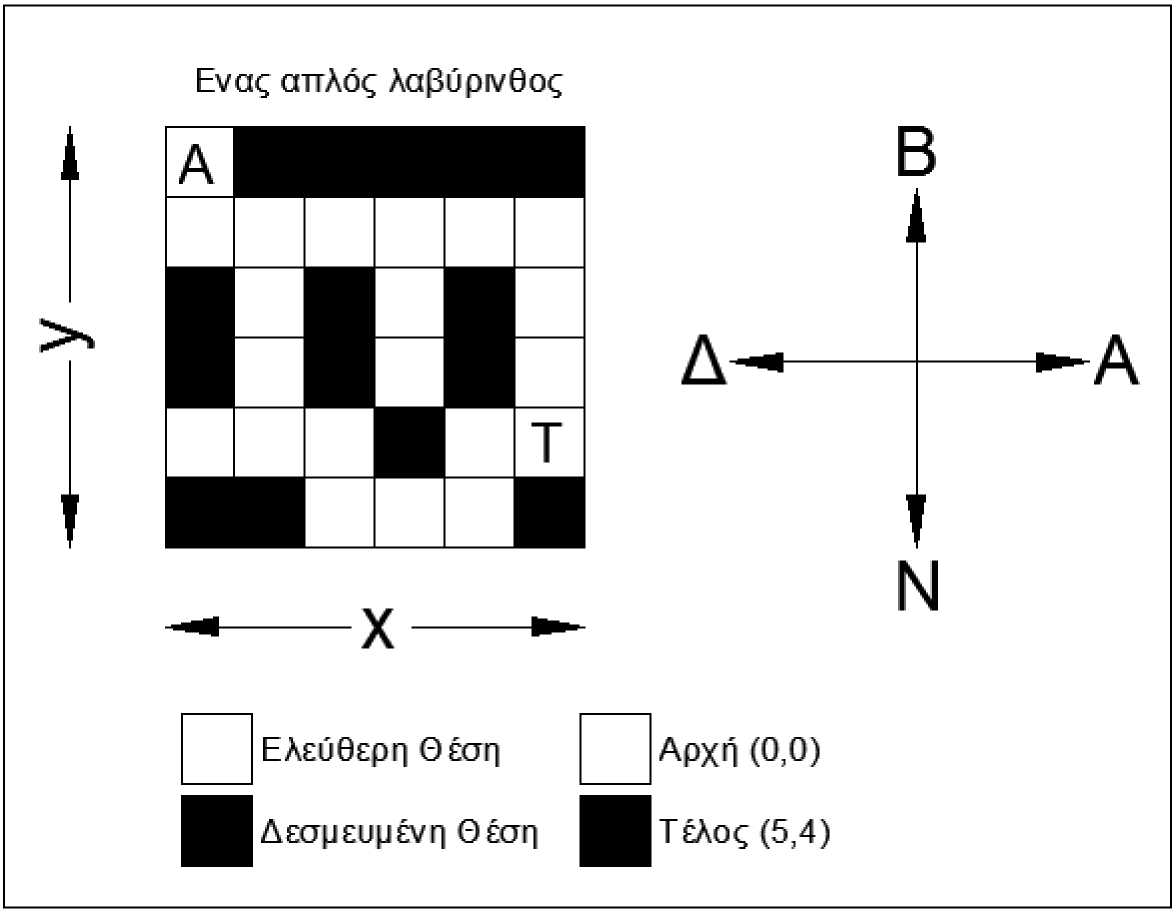
- **Ν – puzzle,** όπου έχουμε για παράδειγμα μια τρίλιζα με 9 κελιά. Η κατάσταση είναι ότι έχουμε διάφορες τιμές για το κάθε πλακίδιο και οι ενέργειες που μπορούμε να κάνουμε είναι να μετακινήσουμε το κενό πλακίδιο και στις τέσσερις κατευθύνσεις. Για μερικά προβλήματα, η επιλογή του χώρου δράσης δεν είναι τόσο προφανής. Ένας γενικός κανόνας είναι ότι μια μικρότερη παρουσίαση, με την έννοια λιγότερων καταστάσεων για επίλυση, είναι συχνά καλύτερη από μια μεγαλύτερη.



Εικόνα 6. Το πρόβλημα των N – PUZZLE

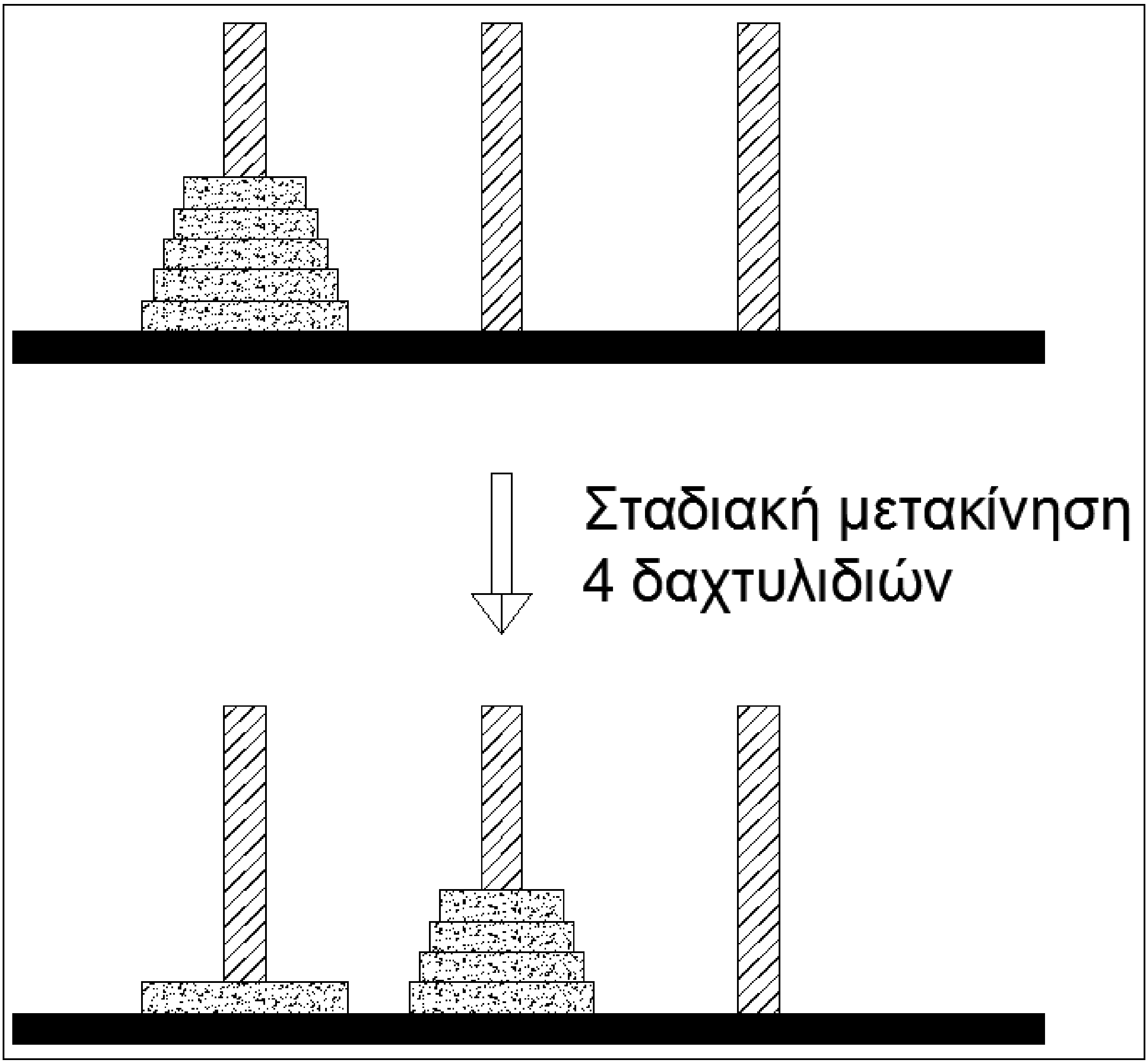
- **Τρίλιζα (tic-tac-toe),** αποτελεί το κλασσικό παιχνίδι, όπου δυο αντίπαλοι πρέπει να βρουν τον βέλτιστο τρόπο κατανομής των πόρων τους (Χ και Ο αντίστοιχα), με διαδοχικές κινήσεις ώστε να επιτευχθεί η βέλτιστη τοποθέτηση τους στο χώρο (η ευθεία).

- **Λαβύρινθος (maze),** όπου το πρόβλημα έχει ως εξής: Ζητείται η εξερεύνηση του λαβύρινθου. Ο εξερευνητής τοποθετείται σε μια συγκεκριμένη θέση (σημείο εκκίνησης) στον λαβύρινθο και του ζητείται να επιχειρήσει να φτάσει σε ένα άλλο σημείο (σημείο στόχου). Οι θέσεις μέσα στον λαβύρινθο είτε θα είναι ανοιχτές είτε θα είναι κατειλημμένες από κάποιο εμπόδιο. Οι θέσεις καθορίζονται από συντεταγμένες (x , y). Σε μια δεδομένη κατάσταση, ο εξερευνητής μπορεί να κάνει 1 βήμα σε μια από τις τέσσερις κατευθύνσεις.



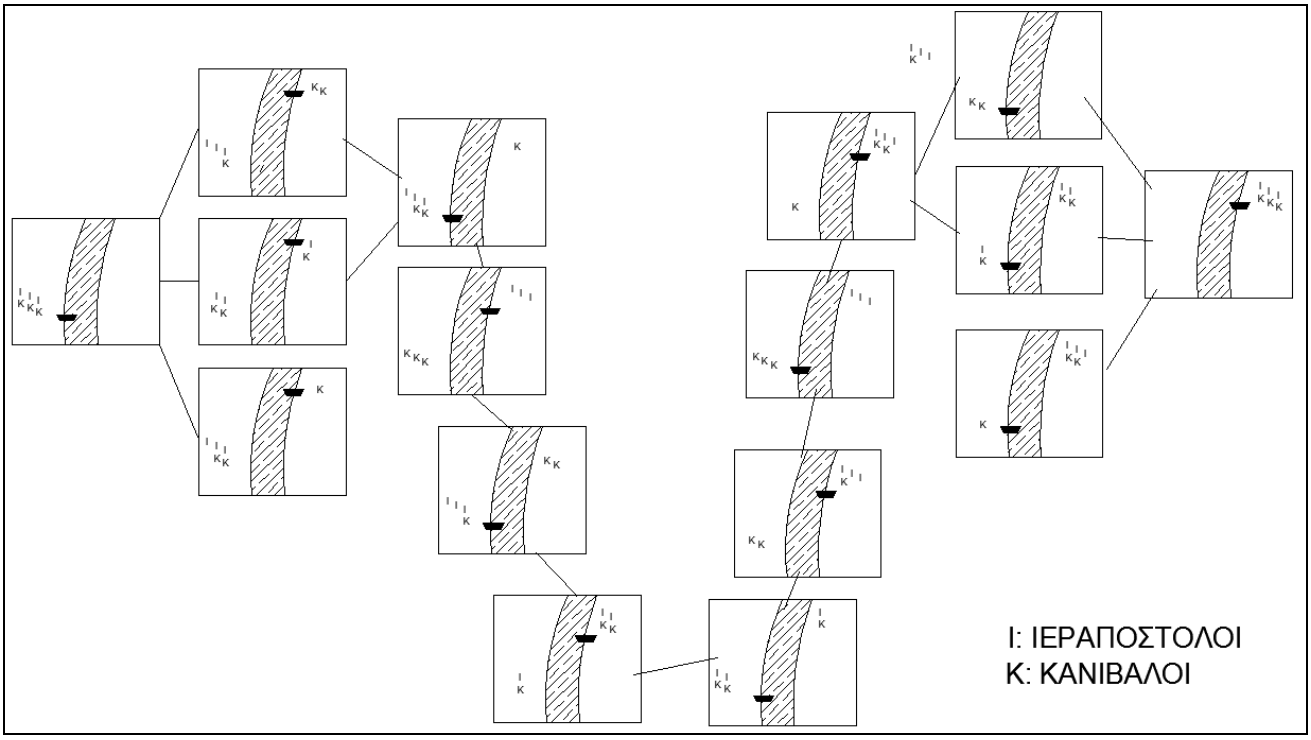
Εικόνα 7. Το πρόβλημα του ΛΑΒΥΡΙΝΘΟΥ

- **Πύργοι του Ανόι (Hanoi towers).** Στο πρόβλημα αυτό υποτίθεται ότι υπάρχει ένας αριθμός δαχτυλιδιών σε έναν στύλο και ζητείται η μεταφορά τους σε άλλο στύλο, ένα ένα. Ο περιορισμός είναι ότι κανένα δαχτυλίδι δε μπορεί σε καμιά περίπτωση να στηρίζεται σε μικρότερό του.



Εικόνα 8. Το πρόβλημα των ΠΥΡΓΩΝ ΤΟΥ ΑΝΟΪ

- **Κανίβαλοι και ιεραπόστολοι (missionaries and cannibals).** Το πρόβλημα αυτό είναι ένα κλασσικό πρόβλημα που αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού και ορίζεται ως εξής: Σε μια όχθη ενός ποταμού υπάρχουν τρεις ιεραπόστολοι και τρεις κανίβαλοι. Υπάρχει μια διαθέσιμη βάρκα που μπορεί να χωρέσει μέχρι δύο άτομα και η οποία θα χρησιμοποιηθεί για να διασχίσουν τον ποταμό. Αν οι κανίβαλοι ξεπεράσουν σε αριθμό, ποτέ τους ιεραποστόλους σε οποιαδήποτε από τις όχθες του ποταμού, οι ιεραπόστολοι θα φαγωθούν. Εξετάζεται το πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί το σκάφος για να μεταφέρει με ασφάλεια όλους τους ιεραπόστολους και τους κανίβαλους στην αντίπερα όχθη.



Εικόνα 9. Το πρόβλημα των ΙΕΡΑΠΟΣΤΟΛΩΝ ΚΑΙ ΚΑΝΙΒΑΛΩΝ

2.4.3 Βασικοί αλγόριθμοι

Όταν δίνεται ή προκύπτει ένα πρόβλημα, αυτό περιγράφεται αναλυτικά από τον χώρο καταστάσεων. Η τυποποίηση της περιγραφής ενός προβλήματος διευκολύνει την επίλυσή του. Εφ' όσον επιτευχθεί η τυποποίηση αυτή, πολύ εύκολα οδηγούμαστε στην μοντελοποίηση, δηλαδή στη διαδικασία κατά την οποία χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές για την επίλυση του προβλήματος. Η διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος επιτυγχάνεται μέσω αυστηρά προκαθορισμένων βημάτων, που πρέπει να εφαρμοστούν. Τα βήματα εύρεσης της βέλτιστης λύσης συνήθως μας οδηγούν στη κατασκευή "αλγορίθμων αναζήτησης" (search algorithms).

2.4.4 Επιλογή του κατάλληλου αλγόριθμου

Όπως φάνηκε παραπάνω αλγόριθμοι υπάρχουν αρκετοί, οπότε είναι επιτακτική η ανάγκη επιλογής του κατάλληλου για την επίλυση του κάθε προβλήματος. Η επιλογή αυτή εξαρτάται από πολλές παραμέτρους, κυρίως όμως από τη φύση του προβλήματος. Εν συντομία, η επιλογή ενός αλγόριθμου βασίζεται στα εξής κριτήρια:

- Τον αριθμό των καταστάσεων που αυτός επισκέπτεται.
- Την δυνατότητα εύρεσης λύσεων εφόσον αυτές υπάρχουν.
- Τον αριθμό των λύσεων.
- Την ποιότητα των λύσεων.
- Την αποδοτικότητα σε χρόνο.
- Την αποδοτικότητα σε χώρο (στην μνήμη του συστήματος).
- Την ευκολία υλοποίησης του.

Στα κριτήρια αυτά εντάσσεται και η έννοια της αποκοπής καταστάσεων (pruning) του χώρου αναζήτησης. Αποκοπή είναι η διαδικασία κατά την οποία ο αλγόριθμος απορρίπτει, κάτω από ορισμένες συνθήκες, κάποιες καταστάσεις και μαζί με αυτές όλες τις επόμενες καταστάσεις που εξαρτώνται από αυτήν. Η αποκοπή μπορεί να βασίζεται είτε σε αντικειμενικά κριτήρια, όταν είναι σίγουρο ότι δεν υπάρχει λύση από εκεί και κάτω ή σε αυθαίρετα κριτήρια. Για παράδειγμα, αν και η συνέχιση της αναζήτησης από μια κατάσταση μπορεί να οδηγήσει σε λύση, το κόστος υπολογισμού της ίσως να είναι υπερβολικά μεγάλο, με αποτέλεσμα να αποφασιστεί να κλαδευτεί ο χώρος αναζήτησης που συνδέεσαι με αυτήν την κατάσταση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εφαρμογές σε Προβλήματα Κατανομής Πόρων

3.1 Μαθηματικό υπόβαθρο

Τα μαθηματικά μοντέλα γενικά, που θα χρησιμοποιηθούν για να γίνει εφικτή η χρήση της μεθόδου του Δυναμικού Προγραμματισμού βασίζονται σε κάποιες έννοιες και τύπους, τα οποία θα αναλυθούν παρακάτω.

Για να γίνει πιο κατανοητή η όλη διαδικασία θα χρησιμοποιηθούν στοιχεία από τα παραδείγματα προβλημάτων που παρουσιάστηκαν παραπάνω:

Οι έννοιες αυτές είναι:

- **Στάδιο απόφασης:** Ονομάζεται το χρονικό σημείο στο οποίο λαμβάνεται η απόφαση από τον διαχειριστή του συστήματος (decision maker).
- **Κατάσταση:** Περιγράφει αναλυτικά την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα και συμπεριλαμβάνει τη διαθέσιμη πληροφορία.

Στη συνέχεια διατυπώνεται ο μαθηματικός τύπος επίλυσης της συγκεκριμένης μεθοδολογίας:

Έστω ότι:

- ✓ **ν,** το χρονικό σημείο στο οποία λαμβάνεται απόφαση

- ✓ **i,** η τωρινή κατάσταση
- ✓ **j,** η αμέσως επόμενη κατάσταση (στο στάδιο ν + 1)
- ✓ **δ,** η απόφαση που λαμβάνουμε στην κατάσταση i.

S_V το σύνολο των καταστάσεων στο **ν** στάδιο απόφασης που λαμβάνουμε στην κατάσταση i.

- ✓ $\varphi_\nu(i)$**,** η βέλτιστη – ελάχιστη υπόλοιπη απόσταση από τη θέση **i** του σταδίου **ν** μέχρι τον τελικό προορισμό

Οπότε με βάση την εξίσωση του Bellman προκύπτει:

$$\varphi_\nu(i) = \min_{\delta}[\delta + \varphi_{\nu+1}(i)], \qquad i \in S_V \ \kappa\alpha\iota\ j \in S_{V+1} \ \acute{o}\pi o\upsilon\ \nu = 1, \ldots \mathrm{n}$$

3.2 Το πρόβλημα της βέλτιστης κατανομής

Η μέθοδος του Δυναμικού Προγραμματισμού βρίσκει μεγάλη εφαρμογή σε προβλήματα χρηματοοικονομικού χαρακτήρα αλλά και σε ζητήματα καθημερινής φύσης, όπου οι αποφάσεις που θα πρέπει να ληφθούν είναι ποικίλες και αλληλεξαρτώμενες μεταξύ τους, ώστε να επιτευχθεί ένα βέλτιστο αποτέλεσμα. Ένα τέτοιο ζήτημα, που αφορά τις ένοπλες δυνάμεις, θα αναλυθεί παρακάτω.

Το πρόβλημα έχει ως εξής:

Έστω το Γενικό Επιτελείο Στρατού, έχει αποφασίσει να διαθέσει ένα κονδύλιο έως τετρακόσιες χιλιάδες ευρώ (400,000 €), για να χρηματοδοτηθεί μία (1) από τέσσερις διαφορετικές εναλλακτικές μονάδες του Έβρου (Α, Β, Γ, Δ), η καθεμιά με δική της τεκμηριωμένη Έκθεση Απαιτούμενης Δαπάνης. Σε κάθε μονάδα μπορεί να χορηγηθεί ακέραια πολλαπλάσια των εκατό χιλιάδων (100,000 €) για τις αντίστοιχες επενδύσεις.

Ύψος Χρηματοδότησης (σε εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ)	Απόδοση (σε χιλιάδες ευρώ)			
	Α	**Β**	**Γ**	**Δ**
0	0	0	0	0
1	1.85	1.37	1.52	1.74
2	3.14	2.94	2.87	2.31
3	3.95	4.25	4.87	4.13
4	5.12	5.63	5.98	5.54

Πίνακας 1. Αποδόσεις ανάλογα με την χρηματοδοτούμενη μονάδα

Το Γενικό Επιτελείο Στρατού ενδιαφέρεται να επενδύσει τα κονδύλια με τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνει αποδοτικότερη η αντίστοιχη κατανομή των χρημάτων από τις εκάστοτε μονάδες. Στατιστικά στοιχεία έχουν δείξει ότι οι μονάδες αξιοποιούν με διαφορετικό τρόπο τις χρηματοδοτήσεις από το Επιτελείο, ανάλογα με το ύψος τους κάθε φορά και τους διαθέσιμους πόρους.

Το πρόβλημα αυτό είναι κλασσικό πρόβλημα συνδυασμών και επομένως μπορεί να λυθεί με απαρίθμηση διαφόρων συνδυασμών. Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος θα γίνει αναδρομικά με εφαρμογή της μεθόδου του δυναμικού προγραμματισμού Σαν παράδειγμα «ένας πιθανός συνδυασμός είναι ο **1Α, 1Β, 1Γ, 1Δ**, δηλαδή εκατό χιλιάδες ευρώ σε κάθε μονάδα. Ο συνδυασμός αυτός έχει σαν απόδοση 1.85+1.37+1.52+1.74 = 6.48. Ένας άλλος συνδυασμός είναι ο **4Α, 0Β, 0Γ, 0Δ**, ο οποίος δίνει απόδοση 5.12. Επομένως ο πρώτος συνδυασμός υπερέχει του επόμενου. Με αυτήν την λογική μπορούμε να βρούμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς ώστε να καταλήξουμε στον βέλτιστο καταμερισμό της αρχικής χρηματοδότησης στις επιμέρους μονάδες.

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιείται η προαναφερθείσα μεθοδολογία του Δυναμικού Προγραμματισμού.

1. Αρχικά ορίζονται τα **στάδια αποφάσεων** και οι πιθανές **καταστάσεις** του προβλήματος.
2. Θεωρείται ότι οι αποφάσεις για κάθε χρηματοδότηση θα ληφθούν με κάποια χρονική σειρά:
    a. Πρώτα θα ληφθεί απόφαση για την μονάδα **Α** μετά για το **Β,** μετά για το **Γ** και τέλος για το **Δ**.
    b. Επίσης δεν υπάρχει η δυνατότητα αναίρεσης της χρηματοδότησης εφ’ όσον αυτή αποσταλεί στο εκάστοτε 4^{ο} Επιτελικό Γραφείο της μονάδας **Χ**.

Στάδιο απόφασης θεωρείται επί της παρούσης η κάθε μονάδα που αποφασίζει να αποστείλει Έκθεση Απαιτούμενης Δαπάνης στο Επιτελείο.

Κατάσταση είναι το υπόλοιπο χρηματοδοτούμενο κεφάλαιο το οποίο είναι διαθέσιμο στο Γενικό Επιτελείο για διάθεση στην επόμενη μονάδα καθώς και σ’ όλες τις υπόλοιπες.

Επομένως στο δεδομένο πρόβλημα έχουμε 4 στάδια απόφασης – μονάδες που έχουν αιτιολογήσει δαπάνη.

Με βάση τα παραπάνω γίνεται δυνατή η παράσταση του προβλήματος σαν ένα δίκτυο αποφάσεων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Για να βρεθεί η λύση του παραπάνω προβλήματος υποθέτουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:

Έστω:

1. $f_v(x)$ η μεγαλύτερη δυνατή συνολική απόδοση από την τωρινή και τις υπόλοιπες εναπομένουσες μονάδες, εάν το Επιτελείο τώρα έχει δώσει κάποια χρηματοδότηση στη **ν** μονάδα και έχει υπόλοιπο **x**.
2. $a_{v,y}$ η άμεση απόδοση της χρηματοδότησης ύψους **y** στο στάδιο **ν**.
3. $E_v(x)$ η καλύτερη επένδυση για τη συγκεκριμένη μονάδα και κατάσταση τότε προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση:

$$f_v(x) = \max_y\left[a_{v,y} + f_{v+1}(x-y)\right], y \in \{0, \dots x\}$$

Για την λύση της παραπάνω εξίσωσης, αρχίζουμε από το τελευταίο στάδιο (ν=4) και χρησιμοποιούμε βέβαια σαν παραδοχή ότι $f_4(x) = 0$ δηλαδή ότι αν δεν υπάρξει χρηματοδότηση δεν θα υπάρξει και απόδοση.

Εάν υποτεθεί ότι η χρηματοδότηση έχει φτάσει στην μονάδα **ν = Δ (4^{ο} Στάδιο)**, τότε αυτό σημαίνει ένα από τα παρακάτω:

1. $f_Δ(4) = a_{Δ,4} = 5.54$, δηλαδή η μονάδα **Δ** έχει λάβει όλη τη δυνατή χρηματοδότηση των 400,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 5.54, οπότε $E_Δ(4) = 4$
2. $f_Δ(3) = a_{Δ,3} = 4.13$, δηλαδή στη μονάδα **Δ** έχουν φτάσει 300,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 4.13, οπότε $E_Δ(3) = 3$
3. $f_Δ(2) = a_{Δ,2} = 2.31$, δηλαδή στη μονάδα **Δ** έχουν φτάσει 200,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 2.31, οπότε $E_Δ(2) = 2$
4. $f_Δ(1) = a_{Δ,1} = 1.74$, δηλαδή στη μονάδα **Δ** έχουν φτάσει 100,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 1.74, οπότε $E_Δ(1) = 1$

Εάν υποτεθεί ότι η χρηματοδότηση έχει φτάσει στην μονάδα **ν = Γ (3^{ο} Στάδιο)**, τότε αυτό σημαίνει ένα από τα παρακάτω:

1. $f_\Gamma(4) = a_{\Gamma,4} = \max[5.98 + 0,\quad 4.87 + 1.74,\quad 2.87 + 2.31,\quad 1.52 + 4.13,\quad 0 + 5.54] = [5.98,\quad 6.61,\quad 5.18,\quad 5.65,\quad 5.54] = 6.61$, δηλαδή στη μονάδα **Γ** έχουν φτάσει 400,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 6.61, οπότε $E_\Gamma(4) = 3$
2. $f_\Gamma(3) = a_{\Gamma,3} = \max[4.87 + 0,\quad 2.87 + 1.74,\quad 1.52 + 2.31,\quad 0 + 4.13] = [4.87,\quad 4.61,\quad 3.83,\quad 4.13] = 4.87$, δηλαδή στη μονάδα **Γ** έχουν φτάσει 300,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 4.87, οπότε $E_\Gamma(3) = 3$
3. $f_\Gamma(2) = a_{\Gamma,2} = \max[2.87 + 0,\quad 1.52 + 1.74,\quad 0 + 2.31] = [2.87,\quad 3.26,\quad 2.31] = 3.26$, δηλαδή στη μονάδα **Γ** έχουν φτάσει 200,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 3.26, οπότε $E_\Gamma(2) = 2$ ή 1
4. $f_\Gamma(1) = a_{\Gamma,1} = \max[1.52 + 0,\quad 0 + 1.74] = [1.52,\quad 1.74] = 1.74$, δηλαδή στη μονάδα **Γ** έχουν φτάσει 100,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 1.74, οπότε $E_\Gamma(1) = 0$
5. $f_\Gamma(0) = a_{\Gamma,0} = \max[0 + 0,\quad 0 + 0] = [0,\quad 0] = 0$, δηλαδή στη μονάδα **Γ** έχουν φτάσει 0 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 0, οπότε $E_\Gamma(0) = 0$

Εάν υποτεθεί ότι η χρηματοδότηση έχει φτάσει στην μονάδα **ν = Β (2ο Στάδιο)**, τότε αυτό σημαίνει ένα από τα παρακάτω:

1. $f_B(4) = a_{B,4} = \max[5.63 + 0,\quad 4.25 + 1.52,\quad 2.94 + 2.87,\quad 1.37 + 4.87,\quad 0 + 5.98] = [5.63,\quad 5.77,\quad 5.81,\quad 6.24,\quad 5.98] = 6.24$, δηλαδή η μονάδα **Β** έχει λάβει όλη τη δυνατή χρηματοδότηση των 400,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 6.24, οπότε $E_B(4) = 1$
2. $f_B(3) = a_{B,3} = \max[4.25 + 0,\quad 2.94 + 1.52,\quad 1.37 + 2.87,\quad 0 + 4.87] = [4.25,\quad 4.46,\quad 4.24,\quad 4.87] = 4.87$, δηλαδή στη μονάδα **Β** έχουν φτάσει 300,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 4.2, οπότε $E_B(3) = 3$ ή 0

3. $f_B(2) = a_{B,2} = \max[2.94 + 0,\quad 1.37 + 1.52,\quad 0 + 2.87] = [2.94,\quad 2.89,\quad 2.87] = 2.94$, δηλαδή στη μονάδα **B** έχουν φτάσει 200,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 2.94, οπότε $E_B(2) = \ 1$
4. $f_B(1) = a_{B,1} = \max[1.37 + 0,\quad 0 + 1.52] = [1.37,\quad 1.52] = 1.52$, δηλαδή στη μονάδα **B** έχουν φτάσει 100,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 1.4, οπότε $E_B(1) = 1$
5. $f_\Gamma(0) = a_{\Gamma,0} = \max[0 + 0,\quad 0 + 0] = [0,\quad 0] = 0$, δηλαδή στη μονάδα **B** έχουν φτάσει 0 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 0, οπότε $E_B(0) = 0$

Εάν υποτεθεί ότι η χρηματοδότηση έχει φτάσει στην μονάδα **ν = A (1^ο^ Στάδιο)**, τότε αυτό σημαίνει ένα από τα παρακάτω:

1. $f_A(4) = a_{A,4} = \max[5.12 + 0,\quad 3.95 + 1.37,\quad 3.14 + 2.94,\quad 1.85 + 4.25,\quad 0 + 5.63] = [5.12,\quad 5.32,\quad 6.08,\quad 6.1,\quad 5.63] = 6.1$, δηλαδή η μονάδα **B** έχει λάβει όλη τη δυνατή χρηματοδότηση των 400,000 €, οπότε η απόδοση, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα είναι 6.1, οπότε $E_B(4) = 2$ ή 1
2. *Παρομοίως για τις επόμενες περιπτώσεις η απόδοση θα είναι μικρότερη, οπότε παραλείπονται οι υπολογισμοί.*

Επομένως ξεκινώντας από το 1^ο Στάδιο έχουμε τις εξής 2 περιπτώσεις:

A. Να διατεθούν στην μονάδα **A** 200,000 € και τα υπόλοιπα, από 100,000 € στην **B** (μιας και η διάθεση αυτή δίνει απόδοση 5.6) και 100,000 € στην **Γ** (μιας και η διάθεση αυτή δίνει απόδοση 2.5)
B. Να διατεθούν στη μονάδα **B** 100,000 € (με απόδοση 5.6) και στη μονάδα **Γ** 300,000 € (με απόδοση 4.2) και 0 € στην **A** (με απόδοση 5.5)

	A	**B**	**Γ**	**Δ**
1^η Λύση	200,000 €	100,000 €	100,000 €	0 €
2^η Λύση	0 €	100,000 €	300,000 €	0 €

Πίνακας 2. Συνοπτικά οι δυνατές χρηματοδοτήσεις

Συνεπώς, σύμφωνα με τον Πίνακα 2, υπάρχουν δύο βέλτιστες λύσεις.

Το Επιτελείο μπορεί είτε να διαθέσει στην μονάδα Α 200,000 € και τα υπόλοιπα, από 100,000 € στην Β και 100,000 € στην Γ .Εναλλακτικά μπορεί να διαθέσει στη μονάδα Β 100,000 € και στη μονάδα Γ 300,000 € και 0 € στην Α.

3.3 Στρατιωτικές εφαρμογές του δυναμικού προγραμματισμού

3.3.1 Δυναμικός Προγραμματισμός *και η κατανομή των* πόρων σε δίκτυα δραστηριοτήτων.

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός εφαρμόζεται καθημερινά σε ποικίλα προβλήματα, για παράδειγμα σε προβλήματα κατανομής εργασιών στο χώρο της εργασίας. Ο Elmaghraby (1993) έχει μελετήσει μια εφαρμογή του Δυναμικού Προγραμματισμού σε προβλήματα κατανομής πόρων σε ένα έργο. Σκοπό έχει να ελαχιστοποιήσει τον χρόνο ολοκλήρωσης του έργου, αναφέροντας ότι υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στην ποσότητα των πόρων που κατανέμεται στη δραστηριότητα και στη χρονική διάρκεια αυτή της δραστηριότητας. Ο Elmaghraby (1993) καταλήγει στο ότι υπάρχει μία διαδικασία η οποία οδηγεί στην ελαχιστοποίηση των κόμβων που παράγονται στα δίκτυα δραστηριοτήτων. Έτσι ο Δυναμικός Προγραμματισμός ασχολείται με την διαδικασία ελαχιστοποίησης του αριθμού των παραγώμενων κόμβων.

Ένα έργο μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένα δίκτυο G = (N, A) όπου N είναι το σύνολο των κόμβων, που αντιπροσωπεύουν γεγονότα, και A είναι το σύνολο των τόξων, που αντιπροσωπεύουν τις δραστηριότητες, στη δραστηριότητα σε τόξο (AoA), όπου $m = |A| \, και \, n = |N|$ (Elmaghraby 1993).

Ο Elmaghraby (1993) υποθέτει ότι υπάρχει ένας μοναδικός κόμβος που ορίζεται ως "κόμβος εκκίνησης", ο οποίος συμβολίζεται με s ή 1, ο οποίος δηλώνει την «έναρξη του έργου». Υπάρχει επίσης ένας «τερματικός κόμβος», που υποδηλώνεται με t ή n, το οποίο σημαίνει «τέλος του έργου» .

Στην εργασία του Elmaghraby (1993) το γράφημα που προκύπτει που προκύπτει είναι ένας διμερής γράφος διπλής κατεύθυνσης, το οποίο συνοπτικά αναφέρεται ως s, t (ή 1, n). Μια δραστηριότητα χαρακτηρίζεται εναλλακτικά με την ονομασία του «α» (που μπορεί να είναι ένας αριθμός, οπότε $1 \le a \le m$), ή από το άκρο του κόμβοι i και j, όπου και θα πρέπει να προσδιορίσουμε την ταυτότητα των δυο αντιπροσωπεύσεων μέσω $a \leftrightarrow (ij)$. Ο Elmaghraby (1993) διατυπώνει το πρόβλημα ως εξής:

Διατύπωση του προβλήματος

Η συνολική διαθεσιμότητα των πόρων θεωρείται σταθερή και ίση με R. δηλαδή, η κατανομή πρέπει να πραγματοποιηθεί για να ικανοποιηθεί το παρακάτω σύνολο περιορισμών.

$$\sum_a x_a \le R$$

Για να πραγματοποιηθεί η κατανομή των πόρων πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος ολοκλήρωσης του έργου. Συμβολίζουμε με ως $\mathbf{t}_i$ τον συντομότερο χρόνο υλοποίησης του κόμβου i.

Τότε πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα $z(R) = t_n - t_1, ώστε \, t_j - t_i - g_{ij}(x_{ij}) \ge 0 \;\; για \, κάθε \, (ij) \leftrightarrow a \in A$

Για t=0 έχουμε την αρχή του έργου, η αρχή του χρόνου συμπίπτει με την έναρξη του έργου, στην περίπτωση αυτή το κριτήριο θα μετατραπεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης της ποσότητας z(R)=t: ελαχιστοποίηση $z\,(R) = t_n$. Για να δοθεί έμφαση στην εξάρτηση του χρόνου $\mathbf{t_n}$ με τη διαθεσιμότητα των πόρων γράφουμε $t_n(R)$. Στη συνέχεια ο Elmaghraby (1993) προσεγγίζει το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού.

Έστω μια διαδρομή από τον κόμβο i στον κόμβο j στο δίκτυο συμβολίζεται με P (i, j). Προς το παρόν θα μας ενδιαφέρουν διαδρομές από το s προς το t και, χάριν συντομίας, γράφουμε P για P (s, t). Με τον συμβολισμό «$a \in P_k$» σημαίνει ότι η δραστηριότητα α είναι στην πορεία του P_k. Το μήκος της διαδρομής P_k για ένα δεδομένο επίπεδο κατανομής πόρων $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ στις δραστηριότητες του έργου υποδηλώνεται από $L_k\,(X)$, που δίνεται από τη σχέση $L_k\,(X) = \sum_{a \in P_k} g_a(x_a)$ (Elmaghraby (1993)).

Η μεγαλύτερη διαδρομή η οποία ονομάζεται «κρίσιμη διαδρομή», καθορίζει την διάρκεια του έργου $z\,(R)$, σχέση η οποία δίνεται από την ποσότητα $max_k\{L_k(X)\}$. Συνεπώς, το κριτήριο $z\,(R) = t_n - t_1$, μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής $\min_X\{\max_k L_k(X)\}$.ο Elmaghraby(1993) εξετάζει τις δύο ακόλουθες περιπτώσεις

Σαν μια πρώτη εφαρμογή του Δυναμικού Προγραμματισμού τις δυο ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Ένα έργο που αποτελείται αποκλειστικά από σειρά δραστηριοτήτων σε σειρά, π.χ. η δραστηριότητα α_1 προηγείται της α_2, που προηγείται της α_3, που προηγείται α_m. Τότε, σαφώς, το μήκος του έργου είναι το άθροισμα των ατομικών ωρών δραστηριότητας και η βέλτιστη κατανομή εξασφαλίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις του Δυναμικού Προγραμματισμού (Elmaghraby (1993)) :

$$f_m(r) = \min_{x_m}[g_m(x_m)], 0 \le x_m \le r, 0 \le r \le R,$$

$$f_i(r) = \min_{x_m}[g_i(x_i) + f_{i+1}(r - x_i)], 0 \le x_m \le r, 0 \le r \le R, \qquad i = m-1, \dots, 1$$

2. Ένα έργο που αποτελείται αποκλειστικά από ένα σύνολο δραστηριοτήτων παράλληλα. Στην περίπτωση αυτή οι δραστηριότητες $a_{1,\dots}a_m$ μπορεί να εκτελούνται ταυτόχρονα, ανάλογα με τη διαθεσιμότητα των πόρων (Elmaghraby (1993)). Συνεπώς η συνολική διάρκεια του έργου είναι ίση με τη μέγιστη διάρκεια δραστηριότητας και η βέλτιστη κατανομή εξασφαλίζεται από την ακολουθία των εξισώσεων του Δυναμικού Προγραμματισμού.

O Elmaghraby (1993) παραθέτει τις παρακάτω εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού.

$$f_m(r) = \min_{x_m}[g_m(x_m)], 0 \le x_m \le r, 0 \le r \le R,$$

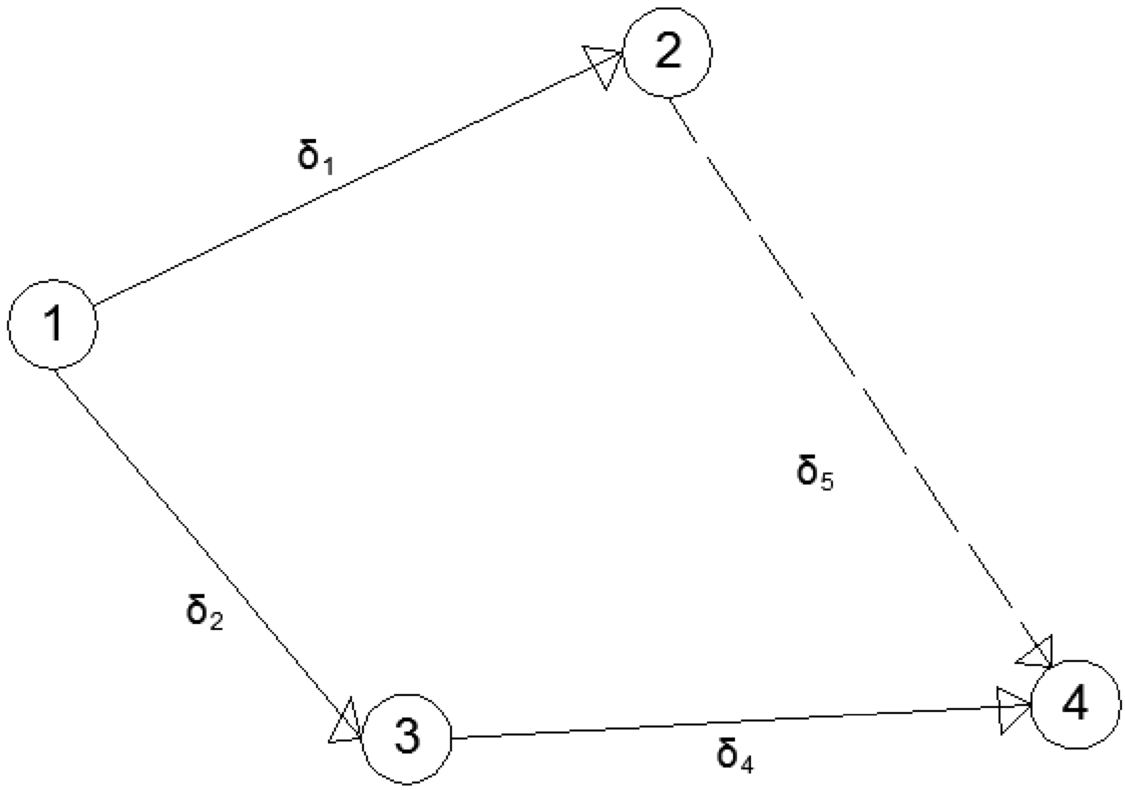
$$f_i(r) = \min_{x_m}[g_i(x_i) + f_{i+1}(r - x_i)], 0 \le x_m \le r, 0 \le r \le R, \qquad i = m-1, \dots, 1$$

Ένα έργο που μπορεί να βελτιστοποιηθεί μέσω διαδοχικών σειρών και παράλληλων βελτιστοποιήσεων όπως υποδεικνύεται στις παραπάνω παραστάσεις, ονομάζεται σειριακό/παράλληλο διαχωρίσιμο (s / p, για συντομία). Ένα έργο στο οποίο δεν μπορεί να προκύψει η βέλτιστη κατανομή των πόρων του καλείται μη διαχωρίσιμο. Για να καταφέρουμε μια διατύπωση του Δυναμικού Προγραμματισμού στο πρόβλημα βελτιστοποίησης για ένα κατευθυνόμενο μη γραμμικό γράφο, ορίζεται το σύνολο των δραστηριοτήτων ως σ.

$$\sigma = \bigcap_k Pk$$

Ο Elmaghraby (1993) τονίζει ότι οι δραστηριότητες σε ένα σύνολο πρέπει να εκτελούνται διαδοχικά, ως εκ τούτου, το άθροισμα των διάρκειών τους πρέπει να προστεθούν στον προγραμματισμό του υπολειπόμενου δικτύου. Ο Elmaghraby(1993) αναλύει το κριτήριο $\min_X\{\max_k L_k(X)\}$

Σύμφωνα με τον Elmaghraby (1993) μπορεί να συνεχιστεί η διαδικασία τη διαδικασία διερευνώντας το υπόλοιπο δίκτυο για να ανιχνεύσουμε σύνολα δραστηριοτήτων που είναι κοινά σε υποσύνολα διαδρομών και αφαιρούν τις διάρκειές τους από τα μήκη των υπολειπόμενων διαδρομών στα αντίστοιχα υποσύνολα για να δημιουργηθούν νέα υπολειπόμενα υποπεράσματα L'_k κ.λπ. Εάν κατά τη λήξη αυτής της διαδικασίας έχουμε μία δέσμη ανεξάρτητων δραστηριοτήτων που μπορούν να εκτελεστούν παράλληλα, τότε θα έχουμε επιτύχει την πλήρη αποσύνθεση του έργου στις μειώσεις του στοιχείου s / p και την εφαρμογή του Δυναμικού Προγραμματισμού. Προφανώς, ένα έργο μπορεί να είναι s / p χωρίς να αποτελείται αποκλειστικά από δραστηριότητες σε σειρά ή παράλληλα (Elmaghraby 1993)).



Σχήμα 6. Παράδειγμα s/p βελτιστοποίησης. Με δ απεικονίζονται οι δραστηριότητες.

Από την άλλη πλευρά, εάν κατά τον τερματισμό έχουμε ένα μη αναγωγικό κατευθυνόμενο μη κυκλικό γράφο, τότε πρέπει να επιλέξουμε μία από τις ακόλουθες δύο στρατηγικές:

1. Είτε καθορίζοντας την κατανομή των πόρων σε ένα υποσύνολο των δραστηριοτήτων στο μη αναστρέψιμο κατευθυνόμενο μη κυκλικό γράφο, εκτελώντας τη s / p βελτιστοποίηση του υπολειπόμενου κατευθυνόμενου μη κυκλικού γράφου, στη συνέχεια γίνεται αναζήτηση στο χώρο όλων των πιθανών κατανομών των "σταθερών δραστηριοτήτων" για να καταργηθεί η υπό όρους φύση της βελτιστοποίησης.
2. Προχωρώντας σε βελτιστοποίηση των μεταβλητών μέσω του Δυναμικού Προγραμματισμού. Σε τελική ανάλυση, οι δύο προσεγγίσεις αντιστοιχούν στην ίδια υπολογιστική προσπάθεια, δηλαδή, την απαρίθμηση πάνω από όλες τις πιθανές τιμές που

μπορεί να πάρει ένα διάνυσμα διαστάσεων h, όπου h είναι ο αριθμός των δραστηριοτήτων που «εξαρτώνται» από την πρώτη προσέγγιση ή ο αριθμός των μεταβλητών που βελτιστοποιούνται ταυτόχρονα στη δεύτερη προσέγγιση (Elmaghraby (1993)).

Σύμφωνα με τον Elmaghraby (1993), εάν το x_α μπορεί να πάρει U_α διαφορετικές τιμές για κάθε δραστηριότητα α στο σύνολο των δραστηριοτήτων, τότε πρέπει να αξιολογήσουμε τη μεγιστοποίηση του $\prod_\alpha U_\alpha$, έναν αριθμό που αυξάνεται πολλαπλασιαστικά με τον αριθμό των δραστηριοτήτων αυτών. Το ίδιο ισχύει προφανώς όταν έχουμε να κάνουμε με την ταυτόχρονη βελτιστοποίηση έναντι των μεταβλητών h. Οι δύο προσεγγίσεις εξετάζουν το ίδιο θέμα, ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός δραστηριοτήτων που μπορούν να βελτιστοποιηθούν ταυτόχρονα. Συμβολίζουμε αυτό το ελάχιστο έως c. Για λόγους σαφήνειας θα ασχοληθούμε μόνο με την πρώτη προσέγγιση. Θα το αναφέρουμε ως το πρόβλημα ελάχιστης συνθήκης. Αλλά πριν απαντήσουμε σε αυτή την ερώτηση αντιμετωπίζουμε ένα πιο θεμελιώδες ζήτημα που προηγείται λογικά.

Το πρόβλημα της ελάχιστης συνθήκης Elmaghraby(1993)

Το πρόβλημα που αναφέρεται εδώ εκδηλώνεται σε άλλα πλαίσια, όπως στην εκτίμηση της πιθανότητας κατανομής της διάρκειας του έργου και τον προσδιορισμό της αξιοπιστίας του δικτύου (δηλαδή η πιθανότητα μιας διαδρομής που συνδέει τους κόμβους s και t).

Υπάρχει ένας αλγόριθμος που μπορεί να μας δώσει τις επιθυμητές μειώσεις ελάχιστου κόμβου.

Ξεκινώντας με τον κατευθυνόμενο μη κυκλικό γράφο G που αντιπροσωπεύει το έργο στη λειτουργία AoA της αναπαράστασης, εκτελούν όλες οι s / p μειώσεις του τόξου στον κατευθυνόμενο μη κυκλικό γράφο G για να εξασφαλίσει τον [G], ο οποίος υποδηλώνει τη μη αναγώγιμη μορφή του κατευθυνόμενου μη κυκλικού γράφου G. Εάν το αποτέλεσμα είναι το ενιαίο τόξο (1, n), τότε είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε και το δίκτυο είναι s / p. Εφαρμόζεται άμεσα ο Δυναμικός Προγραμματισμός (Elmaghraby (1993)).

Σε διαφορετική περίπτωση, κατασκευάζεται το γράφημα πολυπλοκότητας C (G) του [G]. Η κατασκευή του γραφήματος πολυπλοκότητας C(G)έχει ως εξής: σχηματίζουμε το κυρίαρχο δέντρο $T_1(G)$ και το αντίστροφο δέντρο αυτού $T_2(G)$ (το τελευταίο εξασφαλίζεται με αντιστροφή όλων των βέλων στο [G] και την κατασκευή του δέντρο δεσπόζουσας θέσης του προκύπτοντος γραφήματος). Για κάθε T(G), i= 1, 2, εξασφαλίζονται τα δύο γραφήματα $C_1(G)$ και C_2 (G) που ορίζονται ως εξής:

$C_1(G)=\{(u,w)\,|\,\exists P(u,w)$ με $P(u,w)\cap P(u,w)=\{u\}\}$,

$C_2(G)=\{(u,w)\,|\,\exists P(u,w)$ με $P(u,w)\cap P(u,w)=\{u\}\}$,

Στη συνέχεια, εξασφαλίζεται η διασταύρωση τους, που είναι το γράφημα πολυπλοκότητας $C(G)=C_1(G)\cap C_2(G)$.

Δεδομένου ότι τα $C_1(G)$ και $C_2(G)$ είναι συμμετρικά σε σχέση με τα s και t αρκεί να αναλυθεί πώς προσδιορίζεται το $C_2(G)$.

Θεωρώντας το $T_2(G)$ κυρίαρχο δέντρο. Για κάθε κορυφή $w\in T_2$ μπορούμε να υπολογίσουμε ένα υποσύνολο του $C_2(w)=\{u\,|\,(u,w)\in C_2(G)\}$ ως εξής σύμφωνα με τον Elmaghraby(1993):

Βήμα 1. Σημειώστε όλους όσους κυριαρχούν στο w το οποίο ανήκει στο $T_2(G)$

Βήμα 2. Για (u, w) ∈ G

Βήμα 3. εφόσον το υ δεν ορίζεται

Βήμα 4. πρόσθεσε το υ στο $C_2(w)$;

Βήμα 5. ορίστε το u ;

Βήμα 6. υ: = μητρική της υ στο $T_2(G)$;

Τέλος

Τέλος

Σημαντικό ρόλο στην παραπάνω διαδικασία παίζει η έννοια της μείωσης του αριθμού των κόμβων που υπεισέρχονται σε αυτή. Σαφώς η διαδικασία βελτιστοποίησης της διαδικασίας μέσω του Δυναμικου Προγραμματισμού έχει ως αποτέλεσμα την ελάχιστη μείωση των διατιθέμενων κόμβων .

O Elmaghraby(1993, p. 205) αναφέρει δύο σημαντικές παρατηρήσεις σχετικά με τη διαδικασία μείωσης του αριθμού των κόμβων που υπεισέρχονται στη διαδικασία.

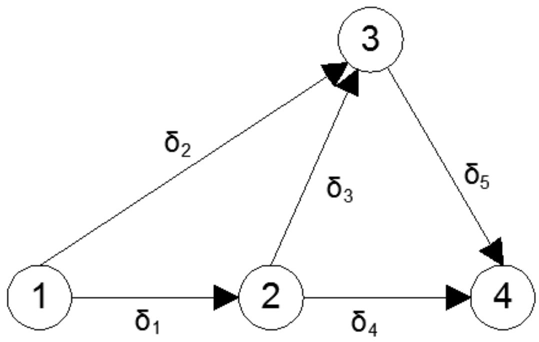
1. Στο πλαίσιο του ενδιαφέροντος μας, «μειώνοντας» κατά μία κορυφή είναι ισοδύναμη με την στερέωση «της διάρκειας ενός τυχαίου τόξου» στην κορυφή αυτή.

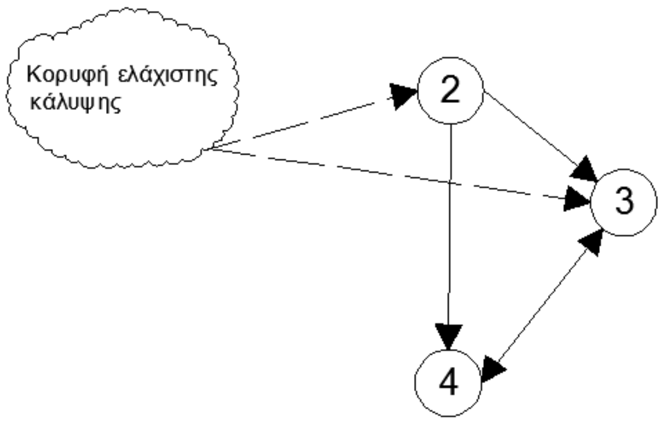
2. Σκοπός της διαδικασίας αυτής είναι να επιτύχει τη βέλτιστη λειτουργία μέσω της διαδοχικής μείωσης των κόμβων, είτε με τη διαδοχική στερέωση των τόξων. Δεδομένου ότι η μείωση s / p μπορεί να παρεμβληθεί μεταξύ δύο μειώσεις κόμβων, το τόξο η διάρκεια του οποίου είναι «σταθερή» μπορεί να είναι ένα σύνθετο τόξο, δηλαδή ένα τόξο που είναι αποτέλεσμα μειώσεων κατά s/p. Αυτό οδηγεί σε ενοποιημένα προβλήματα βελτιστοποίησης Δυναμικού Προγραμματισμού .

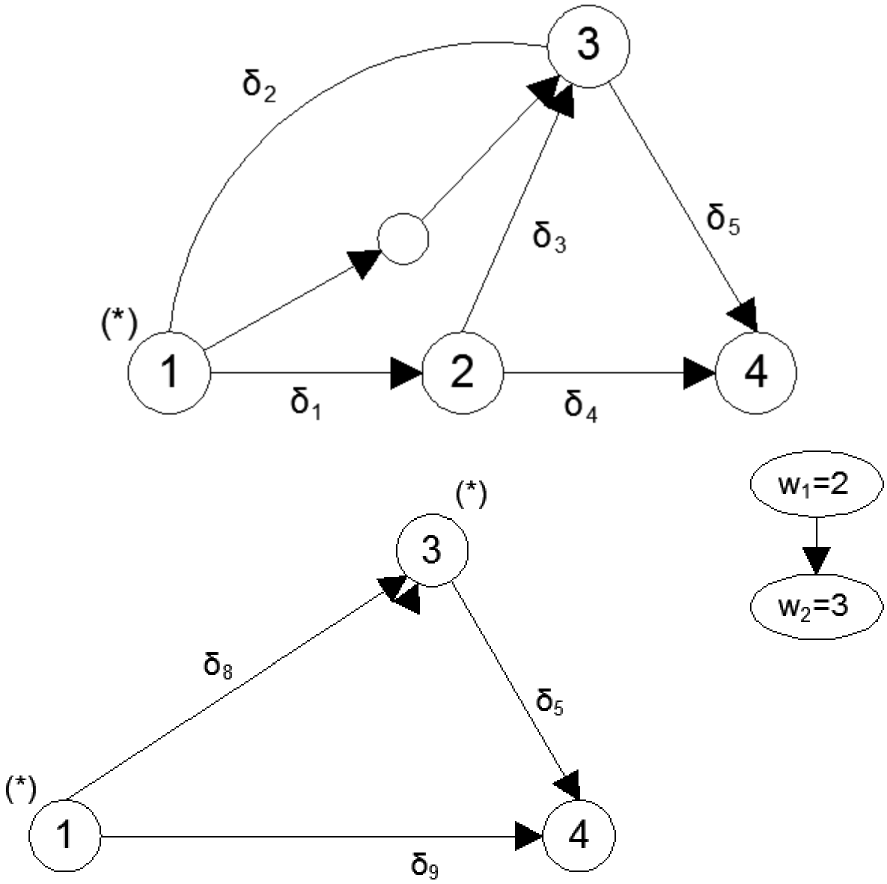
Βελτιστοποίηση με χρήση της μεθόδου δυναμικού προγραμματισμού (Elmaghraby(1993))

Το σύνολο των κορυφών που πρέπει να μειωθούν, ορίζεται ως W, στην παραπάνω διαδικασία. Η ακολουθία της αναγωγής ταυτοποιείται με την αρίθμηση των κορυφών w_1 έως w_c , όπου $c = |W|$. Αυτή η ακολουθία δημιουργεί μια σχέση μεταξύ κάποιων ή όλων των τόξων των οποίων οι διάρκειες πρόκειται να καθοριστούν. Αυτή η ιεραρχία περιορισμού μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας κατευθυνόμενος μη κυκλικός γράφος με ορισμένους πιθανούς πολλαπλούς κόμβους «πηγής» και «τερματισμού» (Elmaghraby(1993)).

Γενικά ο κατευθυνόμενος ακυκλικός γράφος συμβολίζεται ως Q (W) έχει ως κορυφές του τους κόμβους από w_1 έως w_c . Η ακολουθία της μειώσης των κόμβων φαίνεται να είναι $w_1 = 2$ ακολουθούμενη από $w_2 = 3$. Ο κόμβος μειώσεως 2 είναι ισοδύναμος με τον καθορισμό της κατανομής-στερέωσης στο τόξο $\delta_1 \leftrightarrow(1,2)$ με τη ίδια αξία. Τώρα υπάρχουν δύο ανεξάρτητες διαδρομές από τον κόμβο 1 στον κόμβο 3: μια διαδρομή που αποτελείται από το μονό τόξο $\delta_2 \leftrightarrow (1,3)$ του μήκους $g_2(x_2)$ και ενός μονοπατιού με τόξα α_1, α_3 του μήκους $y_1(\delta_1)+g_3(x_3)$. Επιπλέον, η διαδρομή δ_1 , δ_4 από τον κόμβο 1 στον κόμβο 4 είναι ανεξάρτητη του μονοπατιού δ_1, δ_3. Συνεπώς είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί μια λειτουργία παράλληλης μείωσης στις δύο διαδρομές μεταξύ κόμβων 1 και 3, αυτό επιτυγχάνεται πριν από οποιαδήποτε περαιτέρω μείωση. Αυτό οδηγεί σε ένα σύνθετο τόξο δ_8 (Elmaghraby(1993)).







Σχήμα 7. Παράδειγμα σταδιακής μείωσης των κόμβων .

Επίσης τα μονοπάτια δ_1, δ_4 δημιουργούν ένα σύνθετο τόξο δ_9. Μειώνοντας τον κόμβο 3 που ισοδυναμεί με τον καθορισμό της κατανομής στο σύνθετο τόξο δ_8, το δ_2 που περιλαμβάνει την πρώτη τιμή α_1. Τελικά έχουμε $0 \leq \delta1 \leq \delta2$. Ως συνέπεια του καθορισμού του δ_8 στο δ_2 το υπόλοιπο δίκτυο μπορεί τώρα να μειωθεί στο μηδαμινό τόξο (1,4) (Elmaghraby(1993)).

Ο συμβολισμός δ_i χρησιμοποιείται για να δηλώσουμε το σύνολο των δραστηριοτήτων των οποίων η κατανομή είναι προσωρινά σταθερή. Στο παράδειγμα αυτό το δ_1 δηλώνει το σύνολο {δ1} καθώς και την αξία με την οποία διατέθηκε ο πόρος σε αυτήν τη δραστηριότητα με αποτέλεσμα τη διάρκεια $y_1(\delta_1)$ (Elmaghraby(1993)).

3.3.2 Το πρόβλημα της κατανομής των αρμοδιοτήτων

Ας υποθέσουμε ότι η μονάδα έχει στην περιοχή ευθύνης της 7 υπομονάδες, και στις οποίες πρέπει να στείλει άτομα για επάνδρωση τους 4 μήνες του βαρύ χειμώνα (Δεκέμβριος, Ιανουάριος, Φεβρουάριος, Μάρτιος). Η αποστολή κάθε μήνα πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός των υπομονάδων.

Για να επιλυθεί το πρόβλημα αυτό εισάγουμε την εξής συνάρτηση στην οποία έχουμε συσχετίσει κάποιους τυχαίους συντελεστές δυσκολίας α_i (για να γίνει εφικτή η παρουσίαση του προβλήματος) με τις μεταβλητές b_i (όπου είναι ο αριθμός των ατόμων που θα συμμετάσχουν στην αποστολή, βασισμένος σε εμπειρικά δεδομένα):

$$a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + a_3 b_3^2 + a_4 b_4^2,$$

όπου b_1, b_2, b_3, b_4, οι αποστολές του μήνες Δεκέμβριο, Ιανουάριο, Φεβρουάριο, Μάρτιο

και α_1, α_2, α_3, α_4 οι συντελεστές δυσκολίας για τον αντίστοιχο μήνα με δεδομένο βέβαια, ότι $\alpha_1 = 2.8$, $\alpha_2 = 3.4, \alpha_3 = 4.2$, $\alpha_4 = 5.6$

Στάδια του προβλήματος ορίζονται οι τέσσερις μήνες. Έτσι υπάρχουν τέσσερα στάδια:

1. Το 1^o αντιστοιχεί στο Δεκέμβριο
2. Το 2^o στον Ιανουάριο
3. Το 3^o στον Φεβρουάριο
4. Το 4^o στον Μάρτιο

Καταστάσεις σε κάθε σταδίου είναι ο αριθμός των ατόμων που επανδρώνουν κάθε υπομονάδα.

Έστω $f_n(s)$ η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στα επιμέρους στάδια όταν το προσωπικό που πρέπει να ακόμα να σταλθεί είναι:

$$f_n(s) = \underset{bn}{min}[a_n b_n^2 + f_{n-1}(s - b_n)], \qquad b_n = 0,1, \dots s$$

Η αναπαράσταση του προβλήματος σε στάδια και οι πιθανές καταστάσεις σε κάθε στάδιο δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Έτσι $g_n(s)$ είναι η βέλτιστη απόφαση για κάθε στάδιο n.

Στάδιο 1	*0*	*1.2*	*2.5*	*3.4*	*4.5*	*5.1*	*6.6*	*7.3*
Στάδιο 2	*0*	*1.25*	*2.51*	*3.65*	*4.54*	*5.87*	*6.41*	*7.21*
Στάδιο 3	*7.25*							
Στάδιο 4	*7.14*							

Πίνακας 3. Αναπαράσταση του προβλήματος σε στάδια και καταστάσεις

Στη συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός της συνάρτησης αναδρομικά για τις διάφορες τιμές του n.

Για **n=1** (δηλαδή για το Δεκέμβριο), έχουμε τα εξής $f_1(s) = a_1 b_1^2 = 2.8 * s^2$

f1(1)	2.8	1.2	4.03
f1(2)	2.8	2.5	17.50
f1(3)	2.8	3.4	32.37
f1(4)	2.8	4.5	56.70
f1(5)	2.8	5.1	72.83
f1(6)	2.8	6.6	121.97
f1(7)	2.8	7.3	149.21

- $g_1(1) = 1$
- $g_1(2) = 2$
- $g_1(3) = 3$
- $g_1(4) = 4$
- $g_1(5) = 5$
- $g_1(6) = 6$
- $g_1(7) = 7$

Για **n=2** (δηλαδή για τον Ιανουάριο), έχουμε τα εξής

$f_2(s) = \min[a_2 b_2^2 + f_1(s - b_2)] = \min[3.4 b_2^2 + f_1(s - b_2)]$

- $f_2(0) = \min[3.4 * 0 + f_1(0)] = 0,$ $\quad g_2(0) = 0$
- $f_2(1) = \min[3.4 b_2^2 + f_1(1 - b_2)] = 2{,}47 \quad αφού\, b_2 = 0{,}1$ $\quad g_2(1) = 0$
- $f_2(2) = \min[3 b_2^2 + f_1(2 - b_2)] = 5{,}47 \quad αφού\, b_2 = 0{,}1{,}2$ $\quad g_2(2) = 1$
- $f_2(3) = \min[3.4 b_2^2 + f_1(3 - b_2)] = 12{,}32 \quad αφού\, b_2 = 0{,}1{,}2{,}3$ $\quad g_2(3) = 1$
- $f_2(4) = 21{,}59,$ $\quad g_2(4) = 2$
- $f_2(5) = 35{,}21,$ $\quad g_2(5) = 2$
- $f_2(6) = 48{,}26,$ $\quad g_2(6) = 2$
- $f_2(7) = 60{,}87,$ $\quad g_2(7) = 3$

Για **n=3** (δηλαδή για το Φεβρουάριο), έχουμε τα εξής

$f_3(s) = \min[a_3 b_3^2 + f_2(s - b_3)] = \min[4{,}2 b_3^2 + f_2(s - b_3)]$

- $f_3(7) = \min[4{,}2b_3^2 + f_2(9 - b_3)] = \min[271.27, 211.27, 163.52, 126.59, 102.41, 86.06, 77.67, 89.43, 105.63] = 77.67$

  $g_3(7) = 1$

Για **n=4** (δηλαδή για τον Μάρτιο), έχουμε τα εξής

$f_4(s) = \min[\,a_4 b_4^2 + f_3(s - b_4)] = \min[5{,}6b_3^2 + f_2(s - b_3)]$

- $f_3(7) = \min[5{,}6b_3^2 + f_2(9 - b_3)] = 88{,}96$ $\qquad g_4(7) = 1$

Επομένως η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι 84 και επιτυγχάνεται για

$g_4 = 1, \quad g_3 = 1, \; g_2 = 3, \; g_1 = 5$

δηλαδή γίνει αποστολή προσωπικού σε 1 υπομονάδα τον Μάρτιο, σε 3 τον Φεβρουάριο,σε 5 τον Ιανουάριο και σε 1 το Δεκέμβριο.

3.3.3 Το πρόβλημα αντικατάστασης στρατιωτικού εξοπλισμού της Διμοιρίας Συντηρήσεως

Πολύ σημαντικό πρόβλημα των μονάδων του Όπλου του Πεζικού, είναι η αντικατάσταση των απαρχαιωμένων μηχανών και εργαλείων που χρησιμοποιεί το προσωπικό της Διμοιρίας Συντηρήσεως, με πιο σύγχρονα και αποδοτικά. Καθώς περνάει ο χρόνος η απόδοση των μηχανών μειώνεται, με αποτέλεσμα τα αρχικά έξοδα αγοράς και εγκατάστασης μιας νέας μηχανής να υπερκαλύπτονται από την αύξηση της παραγωγικότητας και την ελάττωση των δαπανών λειτουργίας και συντηρήσεως νέων πιο σύγχρονων μηχανολογικών εργαλείων.

Είναι απαραίτητος ο καθορισμός της βέλτιστης πολιτικής συντήρησης και αντικατάστασης μηχανικού εξοπλισμού, με διάφορες υποθέσεις σχετικά με το κόστος και τα λοιπά χαρακτηριστικά των μηχανών, τόσο στην παρούσα κατάσταση όσο και στις μελλοντικές. Αυτό αποτελεί ένα πολύπλοκο πρόβλημα, καθώς ανάλογα με τον τύπο της μηχανής η απόφαση της αντικατάστασης ποικίλει.

Εξαιρετικής σημασίας για τις μελέτες αυτού του είδους είναι οι υποθέσεις που γίνονται όσον αφορά το μέλλον. Θα μελετήσουμε την περίπτωση στην οποία δεν υπάρχουν στοχαστικές παράμετροι. Έτσι προκύπτει ένα αιτιοκρατικό πρόβλημα Δυναμικού Προγραμματισμού. Στην πραγματικότητα οι τιμές των παραμέτρων αναθεωρούνται σε κάθε στάδιο της διαδικασίας.

Στα πλαίσια της παρούσης εργασίας γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχει μόνο μια μηχανή και τα παρακάτω μεγέθη εξαρτώνται από την ηλικία της μηχανής αυτής. Ορίζονται:

a) $r(t)$: *το κέρδος που παρέχεται από τη μηχανή κατά το έτος* t
b) $u(t)$: *τα έξοδα λειτουργίας και συντήρησης που απαιτούνται*
c) $c(t)$: *η απαιτούμενη δαπάνη για την αντικατάστασή της με μια νέα*

Οπότε το πρόβλημα διατυπώνεται σαν μοντέλο Δυναμικού Προγραμματισμού ως εξής:

Έστω ότι λαμβάνονται αποφάσεις κατά τις χρονικές στιγμές t=0, 1, 2 και ότι κάθε φορά υπάρχουν μόνο δύο δυνατές επιλογές:

a) Η επιλογή **K**, όπου διατηρείται η παλιά μηχανή
b) Η επιλογή **A**, όπου αγοράζεται μια νέα.

Οπότε εισάγεται η συνάρτηση $f(t)$ που εκφράζει το ολικό κέρδος για όλη τη διάρκεια που εξετάζεται. Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από τη μεταβλητή t (ηλικία μηχανής) και ακολουθεί μια βέλτιστη πολιτική.

Επίσης κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από τη μεταβλητή t εισάγοντας τον συντελεστή $\alpha, συντελεστής\ αποπληθωρισμού\ (discount\ factor)$, που ανάγει την αξία του κέρδους κατά το επόμενο στάδιο, σε αξία κέρδους κατά το παρόν στάδιο.

Οπότε διατυπώνεται η παρακάτω συναρτησιακή σχέση, με την οποία είναι δυνατός ο καθορισμός της βέλτιστης πολιτικής, αρκεί μόνο να ορίζεται ο χρονικός ορίζοντας του προβλήματος, δηλαδή ο ολικός χρόνος κατά τον οποίο εκτείνεται η διαδικασία:

$$f(t) = max\begin{Bmatrix} A: r(0) - u(0) - c(t) + af(1) \\ K: r(t) - u(t) + af(t+1) \end{Bmatrix}$$

Έστω ότι η μηχανή χρησιμοποιείται για **t** έτη και μετά αντικαθίσταται με μια νέα. Το πρόβλημα επομένως συνίσταται στον καθορισμό της ηλικίας αντικατάστασης της μηχανής **t^{*}**. Έτσι τίθεται η ακόλουθη παράμετρος:

$$n(t) = r(t) - u(t)$$

Στην προηγούμενη συναρτησιακή σχέση και προκύπτει το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$f(0) = n(0) + af(1)$$

$$f(1) = n(1) + af(2)$$

…

$$f(t-1) = n(t-1) + af(t)$$

$$f(t) = -c(t) + n(0) + af(1)$$

Επιλύοντας το σύστημα αυτό ως προς $f(1)$ προκύπτει:

$$f(1) = \frac{[n(1) + an(2) + \cdots + a^{t-2}n(t-1) + a^{t-1}n(0)] - a^{t-1}c(t)}{1 - a^t}$$

Η άγνωστη ποσότητα **t^{*}** εκλέγεται ώστε να ικανοποιείται η $f(1)$, οπότε προφανώς και θα καταβληθεί προσπάθεια να μεγιστοποιηθεί ο χρόνος χρήσης της μηχανής πριν την αντικατάσταση. Αυτό μπορεί να γίνει είτε αναλυτικά, είτε δοκιμάζοντας διάφορες τιμές στο **t** και υπολογίζοντας τις αντίστοιχες τιμές της $f(1)$.

Προχωρούμε στη συνέχεια στην περίπτωση που υπάρχει τεχνολογική εξέλιξη, δηλαδή μία παλαιά μηχανή αντικαθίσταται από μια άλλη διαφορετικού τύπου και απόδοσης. Υποθέτουμε ότι ο τύπος της μηχανής χαρακτηρίζεται μόνο από το έτος κατασκευής της. Τότε τα οικονομικά μεγέθη που αναφέραμε πιο πάνω γίνονται

$r_N(t), \quad u_N(t),\ c_N(t),$

δηλαδή, εκτός από την ηλικία της μηχανής εξαρτώνται και από το έτος της διαδικασίας που διανύουμε.

Οπότε ορίζεται η συνάρτηση $f_N(t)$, που παριστάνει την τιμή κατά το χρόνο **N**, του ολικού κέρδους για μια μηχανή ηλικίας **t**, όταν ακολουθείται μια βέλτιστη πολιτική κατά τα εναπομείναντα στάδια. Χρησιμοποιείται και πάλι ο συντελεστής αναγωγής **α**, υποθέτοντας όμως εδώ ότι η όλη διαδικασία διαρκεί μόνο $\mathbf{N_0}$ στάδια και μετά σταματά. Επομένως:

$f_N(t) = 0 \quad για \quad N \geq N_0 + 1$

Σε αυτή την περίπτωση, η συναρτησιακή σχέση του ΔΠ παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$f_N(t) = max\begin{Bmatrix} A: r_N(0) - u_N(0) - c_N(t) + af_N(1) \\ K: r_N(t) - u_N(t) + af_{N+1}(t+1) \end{Bmatrix}$$

Έστω ότι υπάρχει μια διαδικασία ολικής διάρκειας **t=10 έτη**. Τα μεγέθη r, u, c (σε χιλιάδες ευρώ) για μηχανές κατασκευασμένες σε καθένα από τα 10 αυτά έτη συναρτήσει της ηλικίας τους δίνονται στους παρακάτω πίνακες.

Παρ.	Ηλικία Μηχανής									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
R	90	85	80	75	70	70	70	60	60	60
U	20	20	25	25	30	30	35	40	45	50
C	200	220	240	250	255	260	265	270	270	270

Πίνακας 4. Παράμετροι μηχανής 10 ετών

Παρ.	Ηλικία Μηχανής								
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
R	100	90	80	75	70	65	65	65	65
U	15	20	20	25	25	30	30	35	35
C	200	220	240	250	255	260	265	270	270

Πίνακας 5. Παράμετροι μηχανής 9 ετών

Παρ.	Ηλικία Μηχανής							
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
R	110	105	100	95	90	80	70	60
U	15	15	20	20	25	25	30	30
C	200	220	240	250	255	260	265	270

Πίνακας 6. Παράμετροι μηχανής 8 ετών

Παρ.	Ηλικία Μηχανής						
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
R	115	110	100	90	80	70	60

U	15	15	20	20	25	25	30
C	210	215	220	225	230	235	240

Πίνακας 7. Παράμετροι μηχανής 7 ετών

Παρ.	**Ηλικία Μηχανής**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
R	120	115	115	110	105	100
U	10	10	15	15	20	20
C	210	215	220	225	230	235

Πίνακας 8. Παράμετροι μηχανής 6 ετών

Παρ.	**Ηλικία Μηχανής**				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
R	125	120	110	105	105
U	10	10	10	15	15
C	210	220	230	240	250

Πίνακας 9. Παράμετροι μηχανής 5 ετών

Παρ.	**Ηλικία Μηχανής**			
	0	**1**	**2**	**3**
R	135	125	110	105
U	10	10	10	10
C	210	220	230	240

Πίνακας 10. Παράμετροι μηχανής 4 ετών

Παρ.	**Ηλικία Μηχανής**		
	0	**1**	**2**

R	140	135	125
U	5	10	10
C	220	230	240

Πίνακας 11. Παράμετροι μηχανής 3 ετών

Παρ.	**0**	**1**
R	150	140
U	5	10
C	220	225

Πίνακας 12. Παράμετροι μηχανής 2 ετών

Παρ.	**0**
r	155
u	5
c	220

Πίνακας 13. Παράμετροι μηχανής 1 έτους

Έστω ότι η Διμοιρία διαθέτει ένα μηχάνημα (υπάρχον μηχάνημα), ηλικίας έστω 3 ετών, του οποίου τα μελλοντικά οικονομικά στοιχεία δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Παρ.	**Ηλικία Μηχανής**									
	3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
r	60	60	50	50	50	40	40	40	30	30
u	55	55	55	60	60	60	60	65	65	70

c	250	260	270	280	290	290	300	300	300	310

Πίνακας 14. Μελλοντικά οικονομικά στοιχεία μηχανήματος 3 ετών

Η λύση του προβλήματος ακολουθεί τα παρακάτω βήματα[1]:

1. Υπολογίζονται και οι τιμές του $f_{10}(t)$ ως εξής:

i. $$f_{10}(1) = max\begin{Bmatrix} A: r_{10}(0) - u_{10}(0) - c_{10}(1) + af_{10}(1) \\ K: r_{10}(1) - u_{10}(1) + af_{11}(2) \end{Bmatrix} =>$$

$$f_{10}(1) = max\begin{Bmatrix} A: 155 - 5 - 225 + 0 = -75 \\ K: 140 - 10 + 0 = 130 \end{Bmatrix} =>$$

$f_{10}(1) = 130$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".

ii. $$f_{10}(2) = max\begin{Bmatrix} A: r_{10}(0) - u_{10}(0) - c_{10}(2) + af_{10}(2) \\ K: r_{10}(2) - u_{10}(2) + af_{11}(3) \end{Bmatrix} =>$$

$$f_{10}(2) = max\begin{Bmatrix} A: 155 - 5 - 240 + 0 = -90 \\ K: 125 - 10 + 0 = 115 \end{Bmatrix} =>$$

$f_{10}(2) = 115$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".

iii. $$f_{10}(3) = max\begin{Bmatrix} A: r_{10}(0) - u_{10}(0) - c_{10}(3) + af_{10}(3) \\ K: r_{10}(3) - u_{10}(3) + af_{11}(4) \end{Bmatrix} =>$$

[1] Για ευκολία των υπολογισμών ας υποθέσουμε ότι α = 1, παρόλο ότι στην πραγματικότητα ισχύει ότι α <1

$$f_{10}(3) = max\begin{Bmatrix} A: 155 - 5 - 240 + 0 = -90 \\ K: 105 - 10 + 0 = 95 \end{Bmatrix} =>$$

$f_{10}(3) = 95$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".

iv. $f_{10}(4) = 85$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".
v. $f_{10}(5) = 80$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".
vi. $f_{10}(6) = 30$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".
vii. $f_{10}(7) = 30$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".
viii. $f_{10}(8) = 30$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".
ix. $f_{10}(9) = 10$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".
x. $f_{10}(10) = -40$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".

2. Παρομοίως υπολογίζονται και οι τιμές του $f_9(t)$ ως εξής:

i. $$f_9(1) = max\begin{Bmatrix} A: r_9(0) - u_9(0) - c_9(1) + af_{10}(1) \\ K: r_9(1) - u_9(1) + af_{10}(2) \end{Bmatrix} =>$$

$$f_9(1) = max\begin{Bmatrix} A: 150 - 5 - 230 + 130 = 45 \\ K: 135 - 10 + 115 = 240 \end{Bmatrix} =>$$

$f_9(1) = 240$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".

ii. $f_9(2) = 195$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".
iii. $f_9(3) = 175$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".
iv. $f_9(4) = 165$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "K".

v. $f_9(5) = 75$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
vi. $f_9(6) = 70$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
vii. $f_9(7) = 60$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
viii. $f_9(8) = 25$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
ix. $f_9(11) = -25$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".

3. Παρομοίως υπολογίζονται και οι τιμές του $f_8(t)$ ως εξής:
    i. $f_8(1) = 310$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
    ii. $f_8(2) = 275$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
    iii. $f_8(3) = 260$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
    iv. $f_8(4) = 145$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".
    v. $f_8(5) = 125$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".
    vi. $f_8(6) = 110$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".
    vii. $f_8(7) = 105$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".
    viii. $f_8(10) = 75$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".

4. Παρομοίως υπολογίζονται και οι τιμές του $f_7(t)$ ως εξής:
    i. $f_7(1) = 385$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
    ii. $f_7(2) = 360$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
    iii. $f_7(3) = 215$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
    iv. $f_7(4) = 190$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
    v. $f_7(5) = 175$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".
    vi. $f_7(6) = 170$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".
    vii. $f_7(9) = 145$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".

5. Παρομοίως υπολογίζονται και οι τιμές του $f_6(t)$ ως εξής:
    i. $f_6(1) = 465$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".

ii. $f_6(2) = 295$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
iii. $f_6(3) = 265$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
iv. $f_6(4) = 245$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".
v. $f_6(5) = 240$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".
vi. $f_6(8) = 210$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".

6. Παρομοίως υπολογίζονται και οι τιμές του $f_5(t)$ ως εξής:
   i. $f_5(1) = 390$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
   ii. $f_5(2) = 345$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
   iii. $f_5(3) = 325$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".
   iv. $f_5(4) = 320$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".
   v. $f_5(7) = 295$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".

7. Παρομοίως υπολογίζονται και οι τιμές του $f_4(t)$ ως εξής:
   i. $f_4(1) = 435$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
   ii. $f_4(2) = 385$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
   iii. $f_4(3) = 370$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
   iv. $f_4(6) = 285$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".

8. Παρομοίως υπολογίζονται και οι τιμές του $f_3(t)$ ως εξής:
   i. $f_3(1) = 455$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
   ii. $f_3(2) = 425$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".
   iii. $f_3(5) = 280$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".

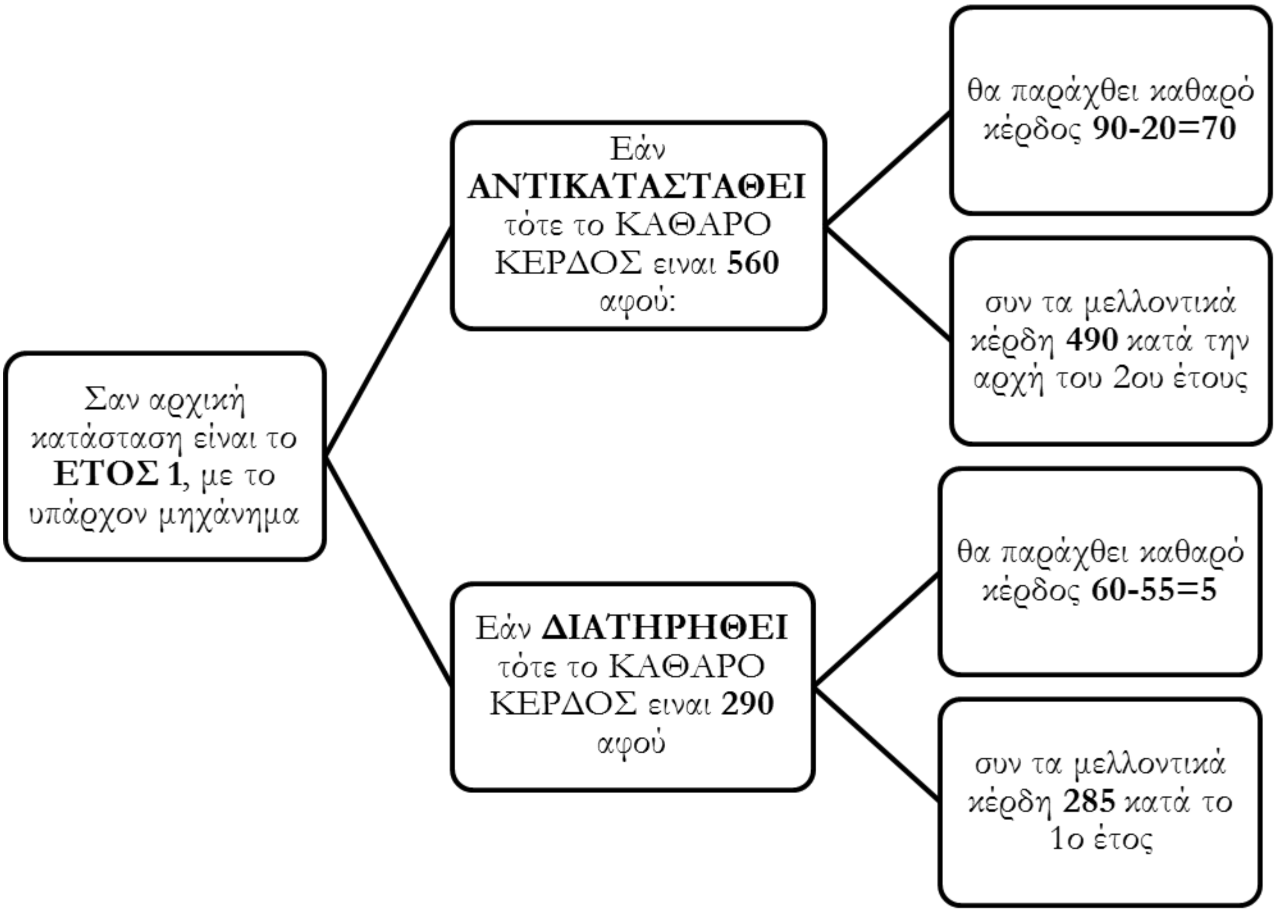
9. Παρομοίως υπολογίζονται και οι τιμές του $f_2(t)$ ως εξής:
   i. $f_2(1) = 490$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".

ii. $f_2(4) = 285$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Κ".

10. Παρομοίως υπολογίζονται και οι τιμές του $f_1(t)$ ως εξής:

i. $f_1(3) = 310$ Επομένως επιλέγουμε την ενέργεια "Α".

Ύστερα από τα παραπάνω δημιουργείται η παρακάτω ροή σκέψης:



Διάγραμμα 1. Διάγραμμα αποφάσεων για το πρόβλημα αντικατάστασης του μηχανήματος.

Επομένως αποφασίζεται να αντικατασταθεί το μηχάνημα εξ'αρχής.

Έχοντας αγοράσει μια νέα μηχανή το έτος 1, προφανώς αρχίζουμε το έτος 2 με μια νέα μηχανή ενός έτους, και από τις τιμές του $f_2(t)$ βλέπουμε ότι πρέπει να την κρατήσουμε ακόμη ένα έτος. Αρχίζουμε λοιπόν στη συνέχεια το έτος 3 με μια μηχανή ηλικίας 2 ετών και πάλι συμβουλευόμαστε τις τιμές του $f_3(t)$ και βλέπουμε ότι και πάλι πρέπει να την κρατήσουμε την μηχανή. Προχωρώντας με αυτόν τον τρόπο, βλέπουμε ότι η βέλτιστη πολιτική συνίσταται στην αγορά μιας νέας μηχανής το έτος 1, διατήρησή της μέχρι το έτος 5 οπού τότε θα πρέπει να αγοράσουμε μία νέα μηχανή και να τη διατηρήσουμε ως το τέλος.

3.3.4 Το πρόβλημα μεταφοράς – διανομής του καθημερινού συσσιτίου στα φυλάκια ευθύνης μιας μονάδας

Στο πρόβλημα αυτό θα υποθέσουμε ότι έχουμε να μεταφέρουμε τρία φορτία διαφορετικού βάρους [τα ταψιά με το κυρίως φαγητό (1), τα σακιά με το ψωμί (2), τα τελάρα με τα φρούτα – λαχανικά (3)] με ένα μεταφορικό μέσο (όχημα 1 ¼ τόνους "Mercedes Benz 290 GD") μέγιστου επιτρεπόμενου βάρους 1200 κιλών. Το καθένα από τα φορτία, έχει διαφορετική προτεραιότητα και βάρος όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα:

Αντικείμενο	Βάρος (x100 kg)	Προτεραιότητα
1	5	12
2	4	7
3	3	10

Πίνακας 15. Βάρος και Προτεραιότητα Μεταφερόμενων Ειδών

Το πρόβλημα δημιουργείται είναι πως πρέπει να κατανεμηθούν οι ποσότητες των παραπάνω υλικών για βέλτιστη εξυπηρέτηση όλων των μονάδων.

Έστω λοιπόν $g(w)$ η βέλτιστη κάλυψη των μονάδων που επιτυγχάνεται από μια μεταφορά βάρους **w (kg)**.

Οπότε δημιουργείται η παρακάτω σχέση:

$$g(w) = \max_{w_j}[b_j + g(w - w_j)]$$

- b_j: η βέλτιστη κάλυψη αναγκών από το αγαθό **j**
- w_j: το βάρος του αγαθού **j**

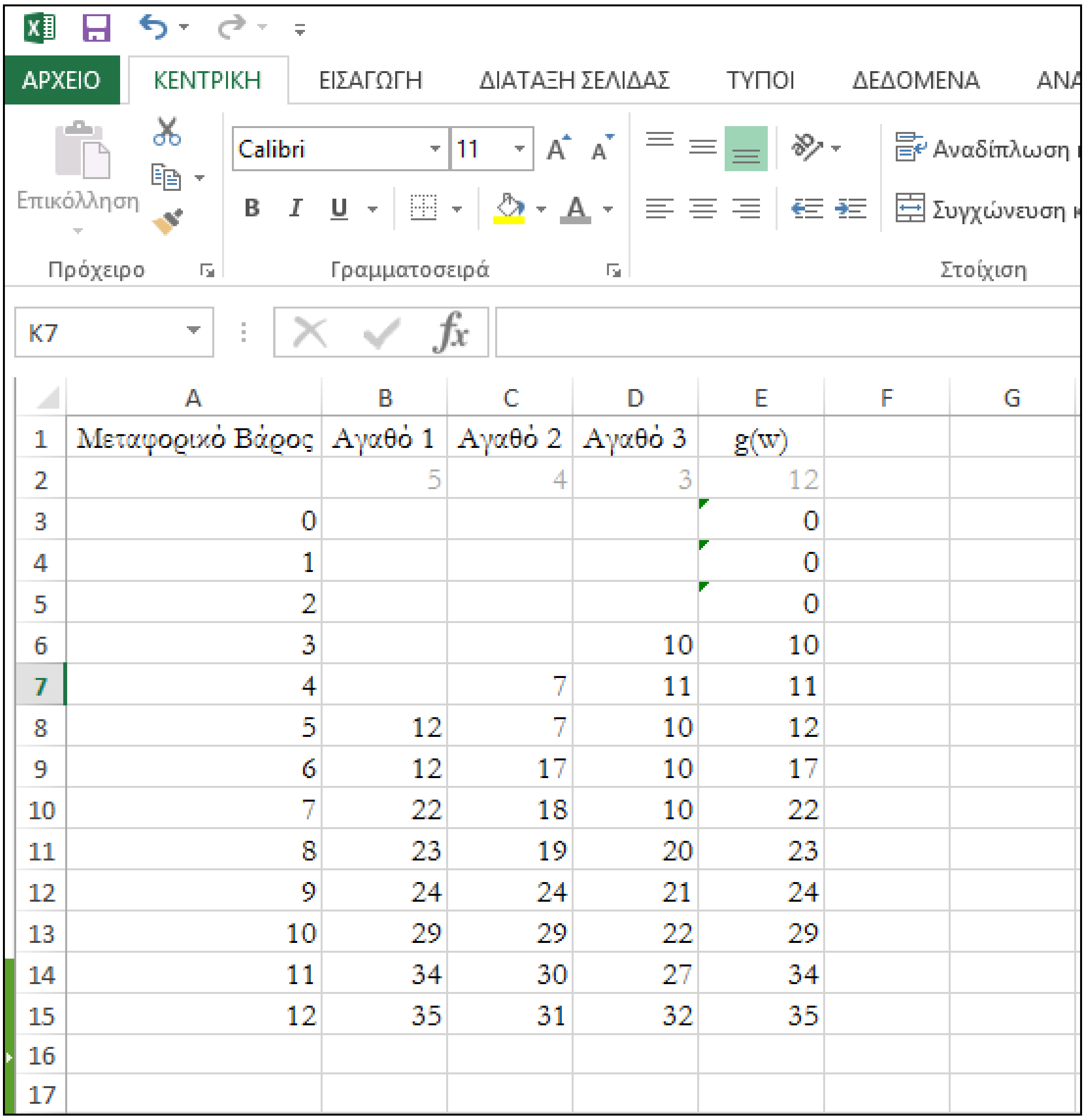
Όταν υποθέτουμε ότι η μεταφορική ικανότητα του οχήματος είναι από 0 έως 300 kg, δηλαδή $\boldsymbol{w} \in [0{,}300]$, τότε $g(3) = 10$. Προφανώς $g(0) = g(1) = g(2) = 0$ αφού το κάθε ένα αγαθό, από μόνο του, είναι ήδη πιο βαρύ από την συνολική μεταφορική ικανότητα του οχήματος.

Σε κάθε στήλη «Αγαθό j», εισάγεται η συνάρτηση $b_j + g(w - w_j)$ με την προϋπόθεση βέβαια να είναι εφικτή σε πρακτικό επίπεδο. Γι' αυτό κάποια κελιά είναι άνευ τιμής.

Όταν για παράδειγμα υπολογίζεται το $g(5)$ εισάγονται οι παρακάτω συναρτήσεις:

- $\mathbf{w1 = 12 + \boldsymbol{g}(1)}$
- $\mathbf{w2 = 7 + g(2)}$
- $\mathbf{w3 = 10 + g(0)}$
- $\mathbf{E8 = max(w1, w2, w3)}$

Οπότε, όπως φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα φύλλου εργασίας excel, η μεταφορά που αποτελεί την βέλτιστη λύση είναι ένα Αγαθό τύπου 1, ένα Αγαθό τύπου 2 και ένα Αγαθό τύπου 3 με μέγιστό ωφέλιμο κέρδος – προτεραιότητα 29 (εκατοντάδες κιλά).



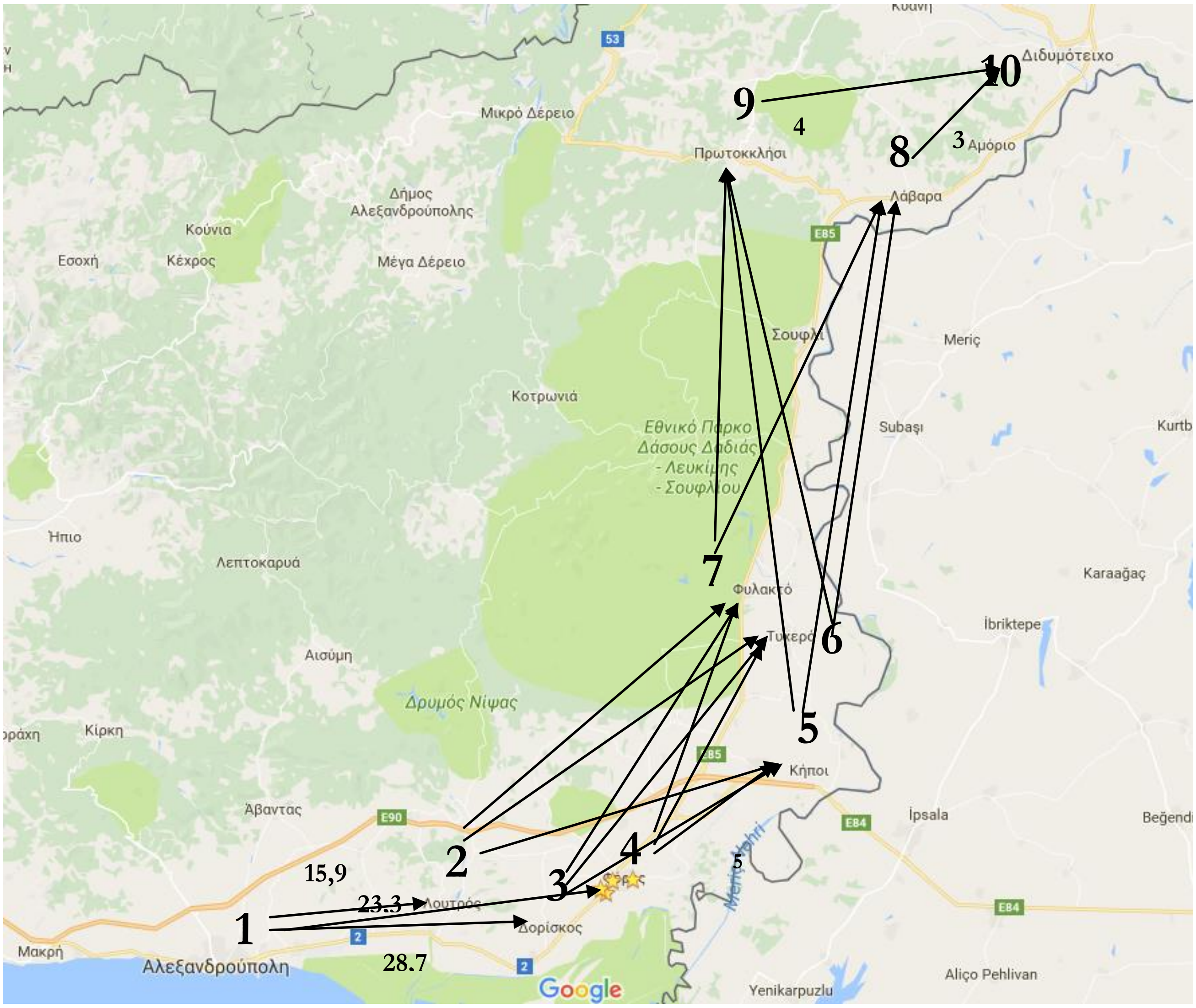
	A	B	C	D	E	F	G
1	Μεταφορικό Βάρος	Αγαθό 1	Αγαθό 2	Αγαθό 3	g(w)		
2		5	4	3	12		
3	0				0		
4	1				0		
5	2				0		
6	3			10	10		
7	4		7	11	11		
8	5	12	7	10	12		
9	6	12	17	10	17		
10	7	22	18	10	22		
11	8	23	19	20	23		
12	9	24	24	21	24		
13	10	29	29	22	29		
14	11	34	30	27	34		
15	12	35	31	32	35		
16							
17							

Εικόνα 10. Λύση στο Excel στο πρόβλημα της μεταφοράς των αγαθών

3.3.5 Το πρόβλημα σύντομης διαδρομής

Γνωρίζουμε ότι τα στρατιωτικά φορτηγά αυτοκίνητα της μονάδας μπορούν να ταξιδεύουν μόνο μεταξύ των σημείων εντός της περιοχής ευθύνης της στρατιωτικής μονάδας, (όπως φαίνεται στο απόσπασμα χάρτη που θα ακολουθεί). Όμως χρειάζεται μερικές φορές να μεταβαίνουν και σε σημεία ευθύνης της Μεραρχίας.

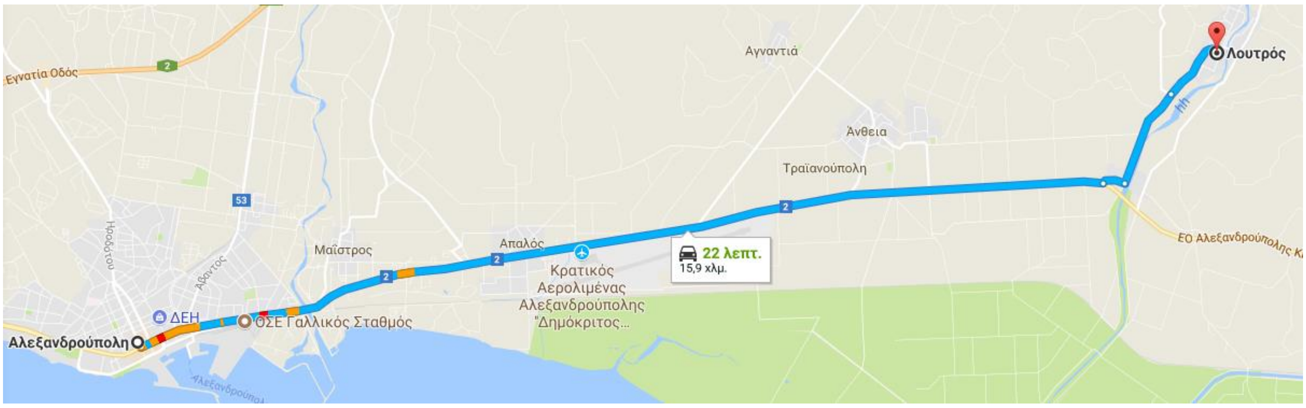
Στον παρακάτω χάρτη χρειάζεται να βρεθεί η ελάχιστη – πιο συμφέρουσα – διαδρομή. Χωρίζεται σε 4 στάδια (υποπεριοχές, n=1, 2, 3, 4) μετρώντας από το τέλος (Διδυμότειχο – 10) σαν μεταβλητή απόφασης $\mathbf{x}_n$ είναι ο αμέσως επόμενος προορισμός και σαν μεταβλητή κατάστασης $\mathbf{s}_n$ είναι το τωρινό σημείο.



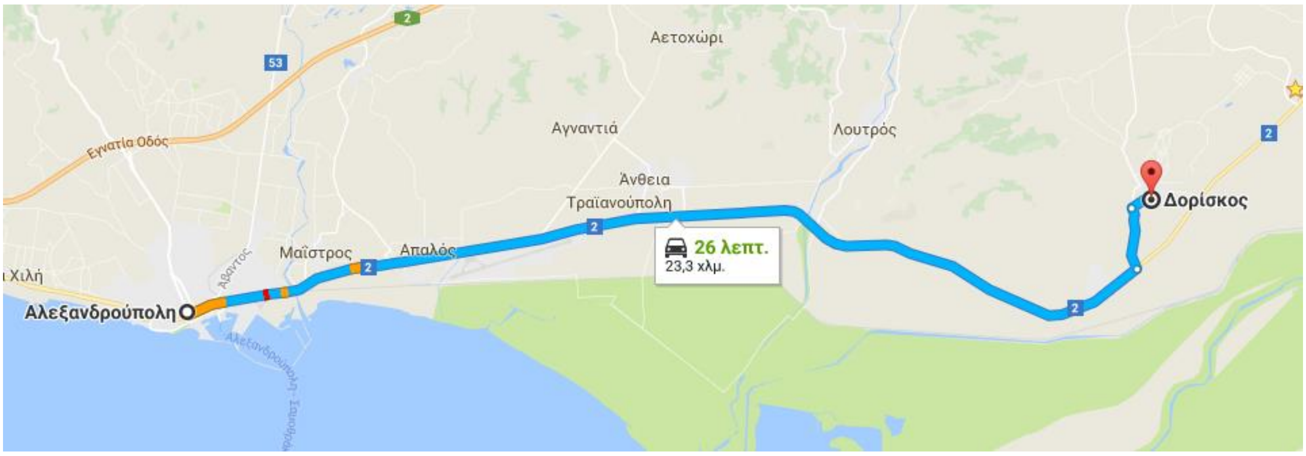
Εικόνα 11. Διάγραμμα, όπου φαίνονται οι διάφοροι προορισμοί καθώς και το «κόστος» από την μετάβαση του προσωπικού μεταξύ των κόμβων *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*

ΠΟΛΗ	ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ
Αλεξανδρούπολη	1
Λουτρός	2
Δορίσκος	3
Φέρες	4
Κήποι	5
Τυχερό	6
Φυλακτό	7
Λάβαρα	8
Πρωτοκκλήσι	9
Διδυμότειχο	10

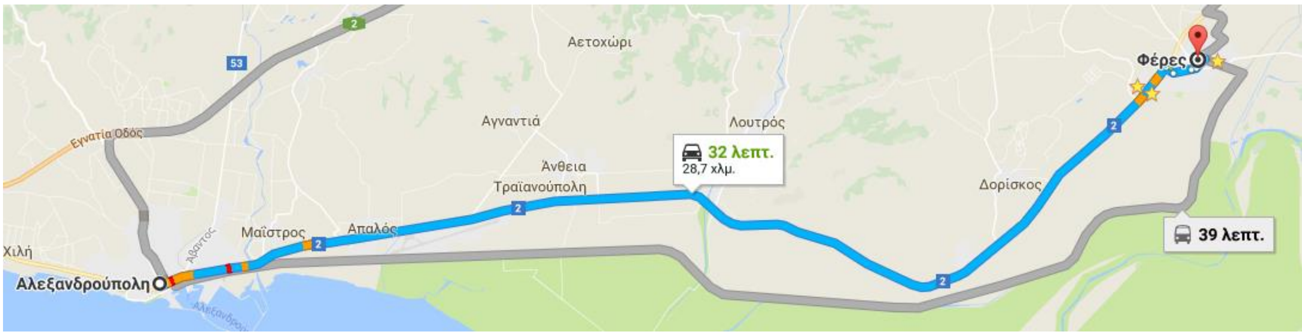
Πίνακας 16. Αντιστοίχιση των αριθμών σε περιοχές



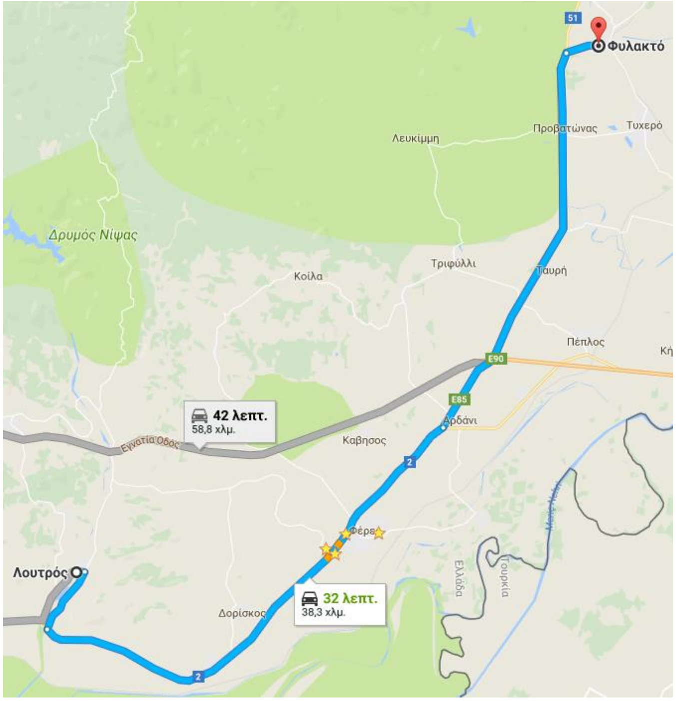
Εικόνα 12. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από την Αλεξανδρούπολη στον Λουτρό *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



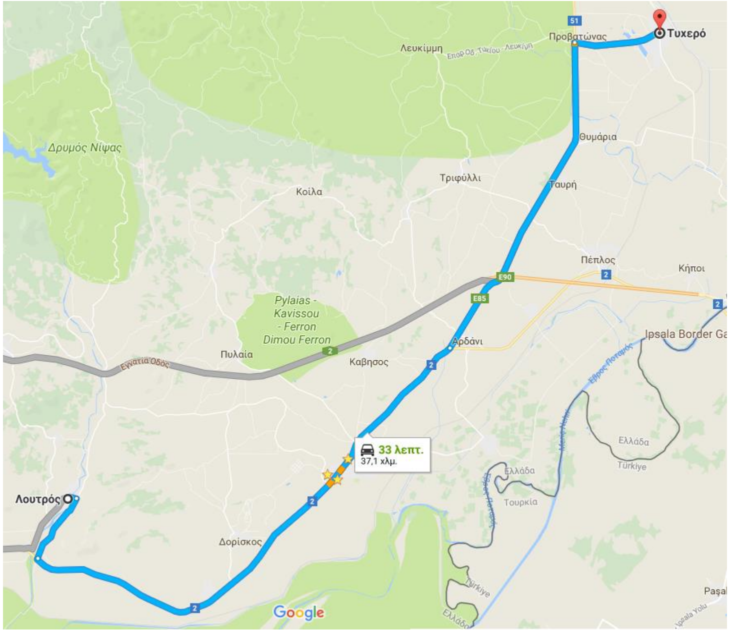
Εικόνα 13. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από την Αλεξανδρούπολη στο Δορίσκο *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



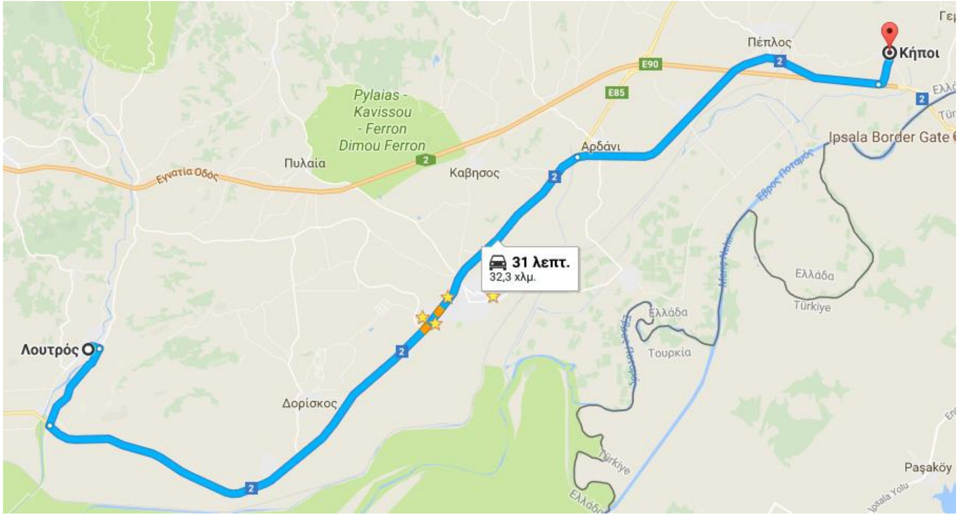
Εικόνα 14. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από την Αλεξανδρούπολη στις Φέρες *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



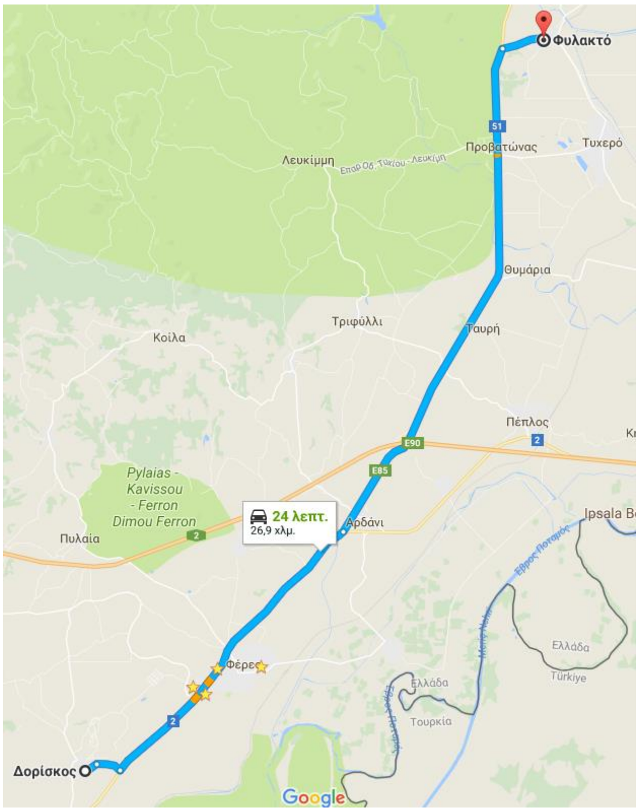
Εικόνα 15. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Λουτρό στο Φυλακτό *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



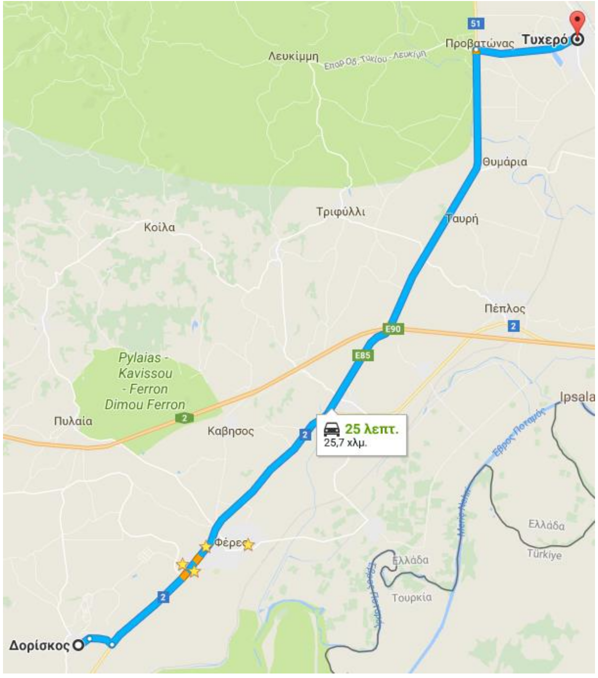
Εικόνα 16. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Λουτρό στο Τυχερό *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



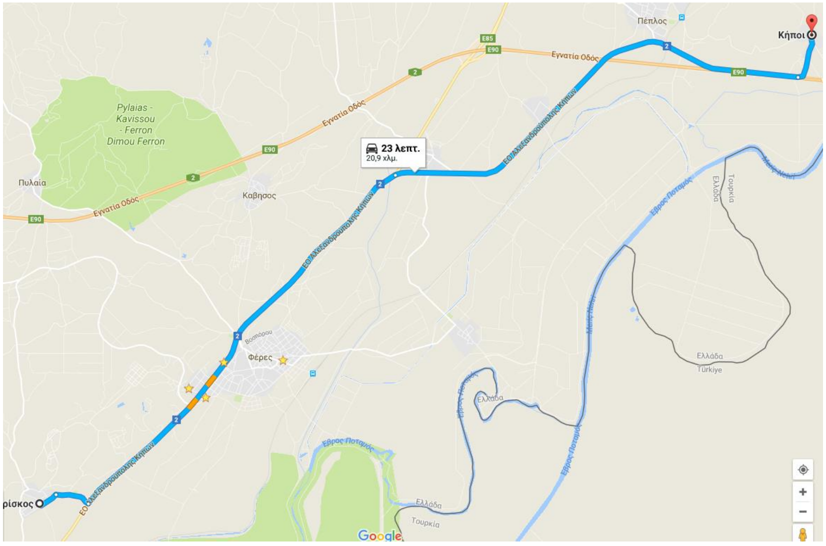
Εικόνα 17. Εικόνα 18. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Λουτρό στους Κήπους *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



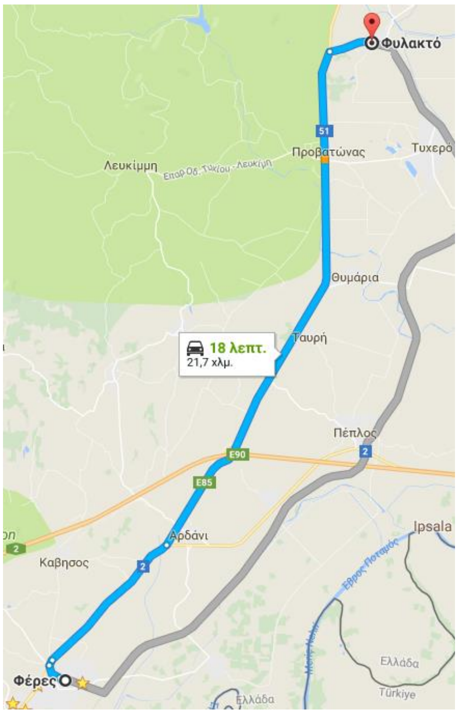
Εικόνα 19. Εικόνα 20. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Δορίσκο στο Φυλακτό *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



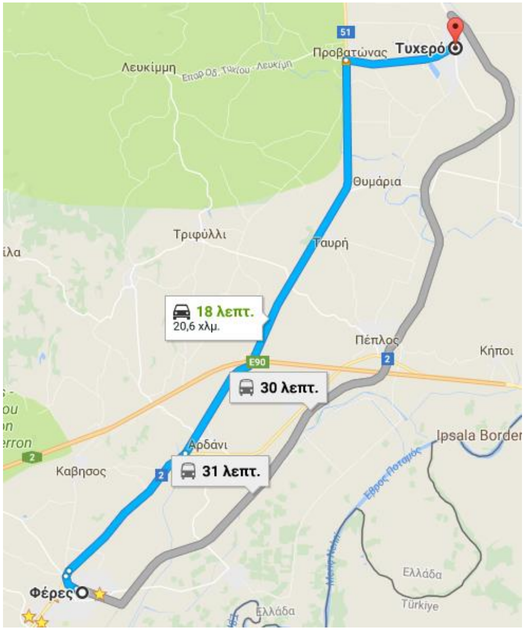
Εικόνα 21. Εικόνα 22. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Δορίσκο στο Τυχερό *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



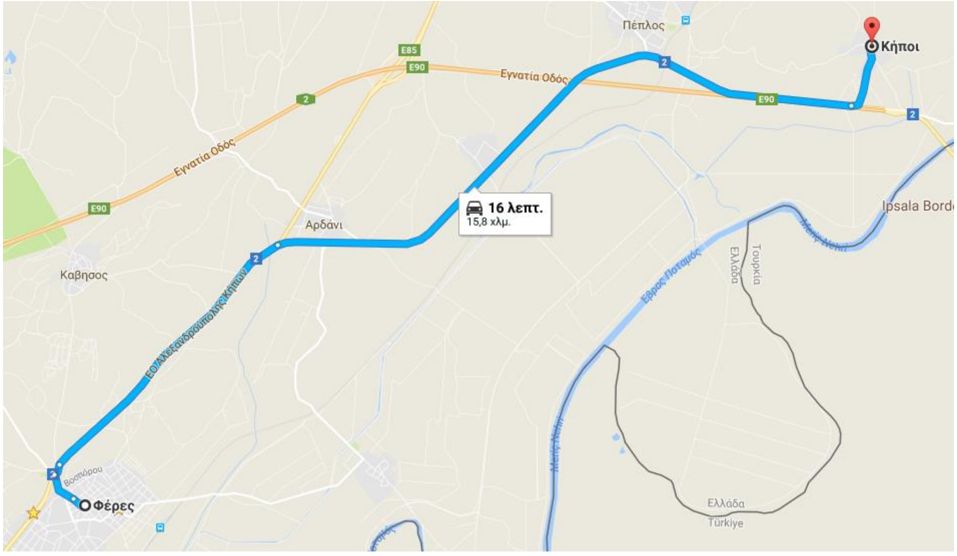
Εικόνα 23. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Δορίσκο στους Κήπους *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



Εικόνα 24. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από τις Φέρες στο Φυλακτό *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*

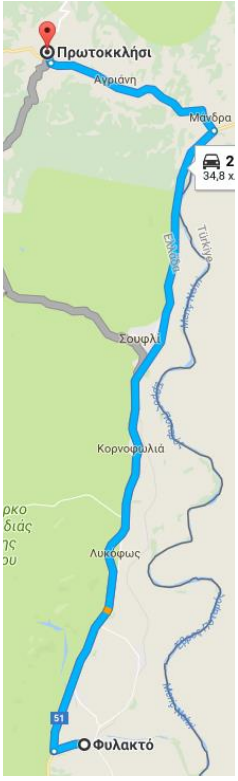


Εικόνα 25. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από τις Φέρες στο Τυχερό *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



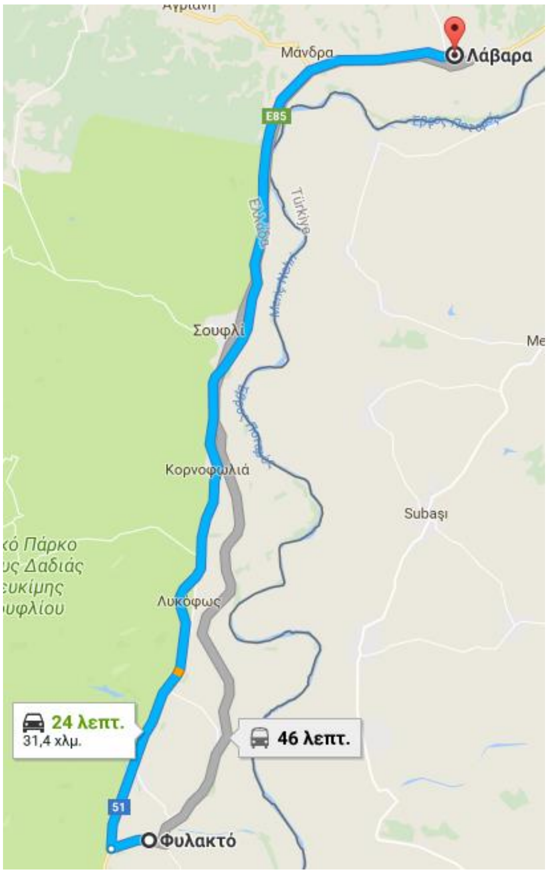
Εικόνα 26. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από τις Φέρες στους Κήπους

(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)

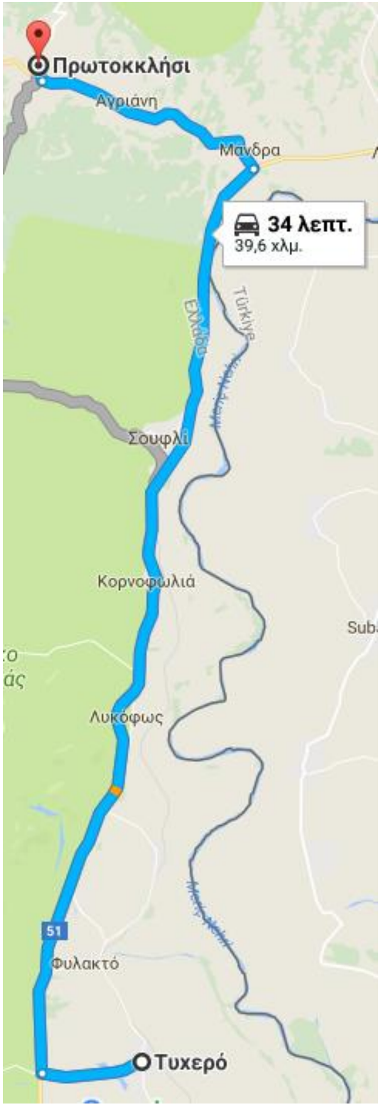


Εικόνα 27. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Φυλακτό στο Πρωτοκκλήσι

(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)

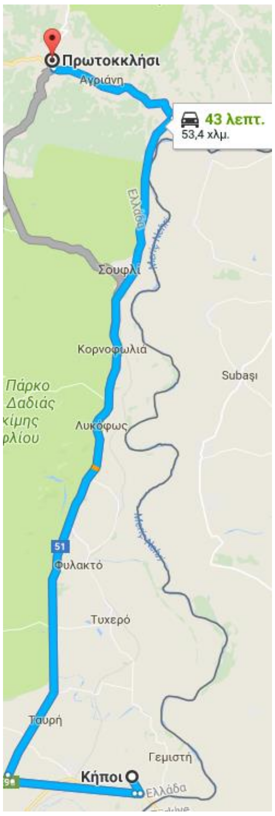


Εικόνα 28. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Φυλακτό στα Λάβαρα *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



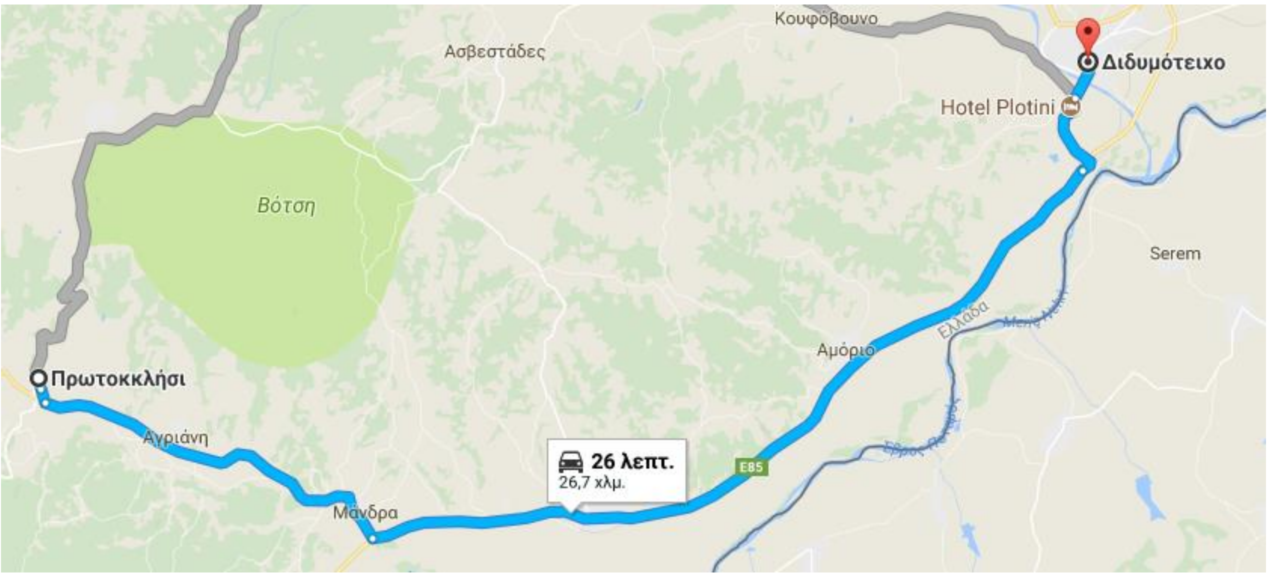
Εικόνα 29. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Τυχερό στο Πρωτοκκλήσι *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*

Εικόνα 30. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Τυχερό στα Λάβαρα *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*

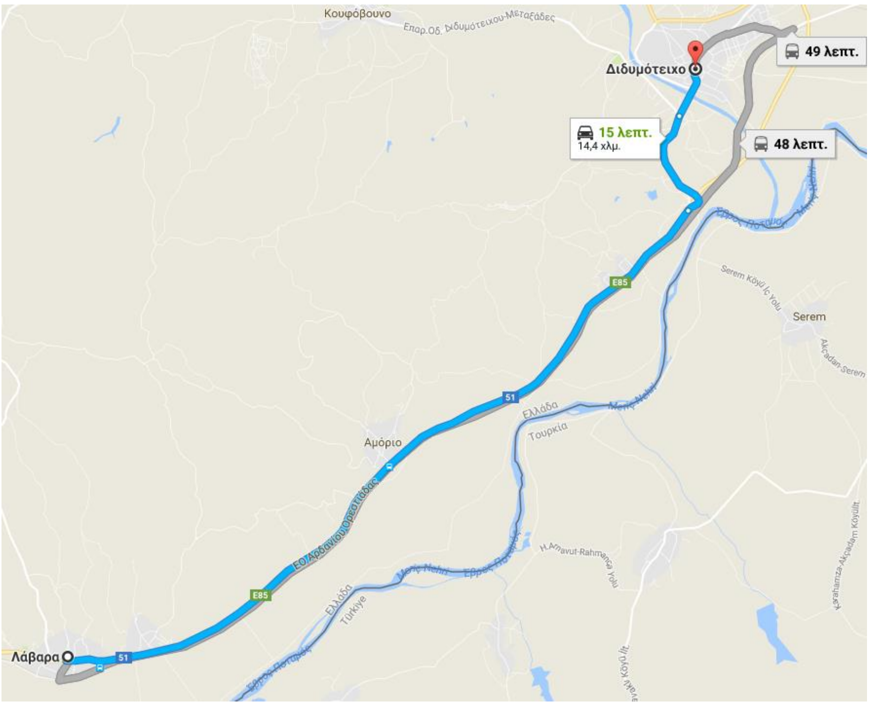


Εικόνα 31. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από τους Κήπους στο Πρωτοκκλήσι *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*

Εικόνα 32. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από τους Κήπους στα Λάβαρα *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



Εικόνα 33. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από το Πρωτοκκλήσι στο Διδυμότειχο *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*



Εικόνα 34. Διάγραμμα όπου φαίνεται το «κόστος» της μετάβασης από τα Λάβαρα στο Διδυμότειχο

(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)

Θα πρέπει το προσωπικό να μεταβεί από την Αλεξανδρούπολη (κόμβος 1) στο Διδυμότειχο (κόμβος 10), μέσω των ενδιάμεσων στάσεων (π.χ. Δορίσκος>κόμβος 3, Φέρες>κόμβος 4 κ.ο.κ.) βασιζόμενη στη βέλτιστη διαδρομή.

Ορίζεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$f_n(s_n, x_n) = c_{s_n x_n} + f_{n-1}^*(x_n),$$

$$\text{όπου } f_n^*(s_n) = \min_{x_n}[f_n(s_n, x_n)] \quad \text{και } c_{s_n x_n} \text{ το κόστος της διαδρομής } s_n \rightarrow x_n$$

Σημειώνεται ότι το κόστος για τα τελευταία **n** στάδια θα ισούται με το κόστος της βέλτιστης πολιτικής για τα τελευταία **n-1** στάδια (f_{n-1}^*) συν το κόστος της διαδρομής $x_n \rightarrow s_n$ και η σχέση μεταξύ x_n *και* s_n είναι ο προορισμός του σταδίου **n** είναι η αφετηρία του σταδίου **n-1** δηλαδή $x_n = s_{n-1}$.

Οπότε προκύπτει:

Για **n=1**:

s_1	**8**	**9**
$f_1^*(s_1)$	26.7	14.4
x_1	10	10

Για **n=2**:

s_2 \ x_2	**8**	**9**	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
5	34.8	31.4	31.4	9
6	39.6	36.3	36.3	9
7	53.4	50.0	50.0	9

Για **n=3**

s_3 \ x_3	**5**	**6**	**7**	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
2	38.3	37.1	32.3	32.3	7
3	26.9	25.7	20.9	20.9	7
4	21.7	20.6	15.8	15.8	7

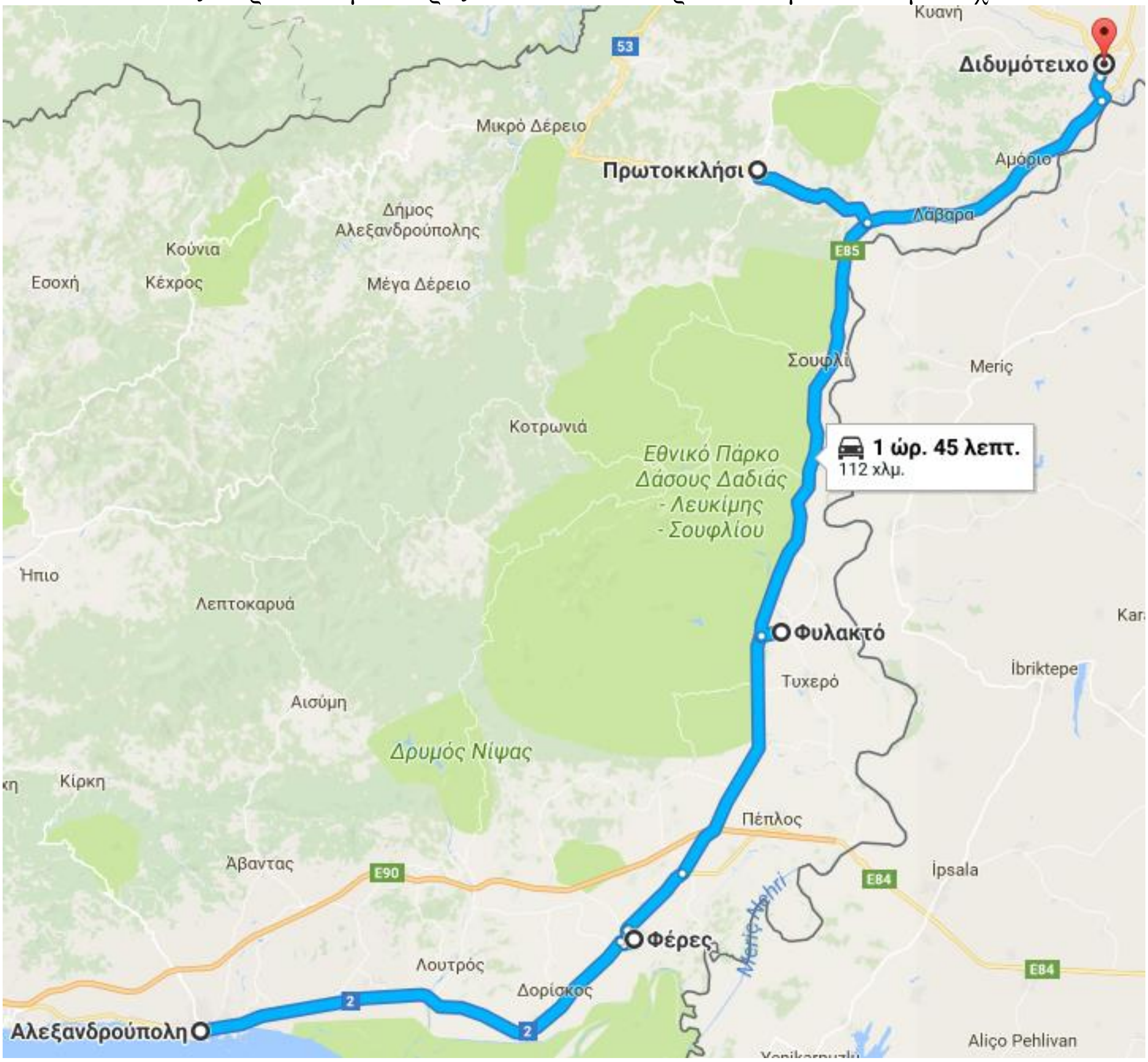
Για **n=4**

s_4 \ x_4	**2**	**3**	**4**	$f_4^*(s_4)$	x_4^*
1	15.9	23.3	28.7	15.9	2

Όπως φαίνεται και παραπάνω, το συνολικό κόστος είναι $f_4^*(s_4) = 77.5\ \chi\lambda\mu$ και για προκύψει αυτό το αποτέλεσμα ακολουθήθηκε την παρακάτω βέλτιστη διαδρομή:

1⟶4⟶7⟶9⟶10

Αλεξανδρούπολη→Φέρες→Φυλακτό→Πρωτοκκλήσι→Διδυμότειχο



Εικόνα 35. Χάρτης με τη βέλτιστη διαδρομή *(άντληση των δεδομένων από www.google.gr/maps)*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συμπεράσματα

Στη σύγχρονη εποχή, ο δυναμικός προγραμματισμός, έχει ποικίλλες εφαρμογές και προσφέρει βέλτιστες λύσεις σε πολύπλοκα προβλήματα, δίνοντας λύση σε ρεαλιστικά προβλήματα που μπορούν να προκύψουν καθημερινά στο χώρο εργασίας. Η εφαρμογή, επ' έργω, των μεθόδων του Δυναμικού Προγραμματισμού, αλλάζει ριζικά τον τρόπο επίλυσης προβλημάτων Επιχειρησιακής Έρευνας.

Με την εξέλιξη του πολιτισμού και της τεχνολογίας, οι σύγχρονοι ρυθμοί ζωής απαιτούσαν κάτι πιο αποτελεσματικό για την αντιμετώπιση των, ολοένα και πιο σύνθετων ζητημάτων. Ο, μέχρι το 1950, Γραμμικός Προγραμματισμός, έδειχνε σημάδια αδυναμίας για την παροχή τέτοιων «υπηρεσιών». Ο Richard Bellman, όπως προαναφέρθηκε, με την ανάπτυξη της θεωρίας του Δυναμικού Προγραμματισμού, ανοίγει διάπλατα έναν ιδιαίτερο δρόμο στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Αυτό έγινε με έναν, κάπως ανορθόδοξο, μέχρι εκείνη τη στιγμή, τρόπο λύσης: «με την αναδρομική επίλυση προβλημάτων», που αποδεικνύεται πολλές φορές ότι είναι ο μόνος τρόπος επίλυσης προβλημάτων.

Πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της μεθοδολογίας του ΔΠ αποτελεί ο υπολογισμός σε στάδια, αναλύοντας έτσι το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται σε μικρότερα, σαφώς ευκολότερα αντιμετωπίσιμα, κατά μέρους προβλήματα. Κάθε ένα τέτοιο πρόβλημα εξετάζεται ξεχωριστά με στόχο τη μείωση των πολλών υπολογισμών και πράξεων. Αυτό βοηθάει στη διατήρηση μιας βέλτιστης πολιτικής στα προβλήματα που προκύπτουν και που περιλαμβάνουν στις μεταβλητές τους και τον όρο του χρόνου, μιας και λαμβάνεται μια αλληλουχία διαδοχικών αποφάσεων.

Όλα αυτά φάνηκαν και από τα παραδείγματα, τα οποία προκύπτουν από προβλήματα που σχετίζονται με δραστηριότητες μιας στρατιωτικής μονάδας, και στα οποία δόθηκε μια βέλτιστη λύση.

Πιο συγκεκριμένα, ξεκινώντας αντίστροφα κατά την προσφιλή «δυναμική» συνήθεια, έγινε κατανοητό ότι χρησιμοποιώντας τον Δυναμικό Προγραμματισμό βρέθηκε η καλύτερη διαδρομή, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος (τόσο σε ανθρώπινο παράγοντα, όσο και σε υλική ζημία) κατά την καθημερινή μετακίνηση προσωπικού και αγαθών στις διάφορες μονάδες του Έβρου.

Μελετήθηκε το πρόβλημα μεταφοράς συσσιτίου σε φυλάκια μιας στρατιωτικής μονάδας έτσι ώστε όχι μόνο να μην υπάρχει καμιά απολύτως έλλειψη σε κανένα αγαθό και σε κανένα φυλάκιο, αλλά και να γίνεται βέλτιστη χρήση των διαθέσιμων πόρων.

Άλλη σημαντική απάντηση, για την καλύτερη κατανομή εργασιών, δόθηκε και για την μεθοδολογία με την οποία θα πρέπει να φορτώνονται τα οχήματα της μονάδας ώστε να υπάρχει καλύτερο αποτέλεσμα με όσο το δυνατόν λιγότερο κόστος.

Λύση δόθηκε και σε ένα άλλο φλέγον ζήτημα που έχουν δύο από τις «ιδιαίτερες» διμοιρίες της μονάδας (αυτή των κατασκευών και της συντηρήσεως). Τα θέματα που έχουν να αντιμετωπίσουν έχουν να κάνουν με την παλαιότητα των μηχανημάτων και των εργαλείων που χρησιμοποιούν και τα οποία χρήζουν αντικατάστασης ή επισκευής. Προτάθηκε λοιπόν μια βέλτιστη πολιτική με την οποία αυτό μπορεί να γίνει σταδιακά, έτσι ώστε και να ελαχιστοποιηθεί το κόστος αλλά και να μην επηρεαστεί το παραγόμενο έργο.

Τέλος επειδή παρατηρείται το φαινόμενο της μη σωστής αξιοποίησης του διαθέσιμου προσωπικού στις μονάδες έγινε προσπάθεια ώστε να προταθεί μια λύση στην βελτιστοποίηση της κατανομής των αρμοδιοτήτων, έτσι ώστε όλα να λειτουργούν κατά την προβλεπόμενη στρατιωτική – και όχι μόνο – διαδικασία.

Κατ’ αυτόν τον τρόπο γίνεται σαφές ότι ο Δυναμικός Προγραμματισμός, αποτελεί ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία για την επίλυση πολυδιάστατων και αλληλεξαρτώμενων προβλημάτων στην Επιχειρησιακή Έρευνα.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Elmaghraby(1968), The Machine Sequencing Problem - Review and Extensions, *Naval Research Logistics*, **15**, 205–232.

Elmaghraby S.E. (1993), Resource allocation via dynamic programming in activity networks, *European Journal of Operational Research*, **64**, 199-215.

Johansson K.-H., Dynamic Programming, Lecture 21, Berkeley, 2000.

Lew A. & Mauch H., Dynamic Programming, A Computational Tool, Springer Verlag , Berlin, 2007.

Ελληνική βιβλιογραφία

Βασιλειάδης Γ., Σημειώσεις δυναμικού προγραμματισμού, Θεσσαλονίκη, 2012.

Κολέτσος Γ., Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα – Γραμμικός Προγραμματισμός, Αθήνα, 2006.

Ιστότοποι

- http://ai.uom.gr/Courses/ArtificialIntelligence/Slides/2004/Lesson1/Chapter2a.pdf
- http://aibook.csd.auth.gr/include/slides/Chap02.pdf
- http://algorithms.tutorialhorizon.com/backtracking-n-queens-problem/
- http://www.aiai.ed.ac.uk/~gwickler/missionaries.html
- http://www.dcs.warwick.ac.uk/~sgm/open/hanoi.html
- https://www.google.gr/maps/
- http://www.ques10.com/p/12787/draw-game-tree-for-a-tic-tac-toe-problem-1/
- https://www.365chess.com/puzzles.php
- https://www.andrew.cmu.edu/course/15-121/lectures/Game%20Trees/Game%20Trees.html
- https://www.cs.bu.edu/teaching/alg/maze/
- https://www.researchgate.net/publication/268330715_Interactions_in_Planning_Systems/figures?lo=1