



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΞΥΠΝΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΟΥ
ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση
των απαιτήσεων για την απόκτηση
του Διδακτορικού Διπλώματος

υπό Αμαλίας Μουτσοπούλου

Χανιά, 2009

Copyright υπό Αμαλίας Μουτσοπούλου

Έτος 2009

Η διατριβή της Αμαλίας Μουτσοπούλου εγκρίνεται:

Όνομα

- Πουλιέζος Αναστάσιος
Καθηγητής τμήματος Μηχανικών
Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
- Σταυρουλάκης Γεώργιος
Καθηγητής τμήματος Μηχανικών
Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
- Κουϊκόγλου Βασίλειος
Καθηγητής τμήματος Μηχανικών
Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
- Προβιδάκης Κωνσταντίνος
Καθηγητής Γενικού τμήματος
Πολυτεχνείο Κρήτης
- Βλάσσης Νικόλαος
Επ. Καθηγητής τμήματος Μηχανικών
Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
- Marinova Daniela
Αν. Καθηγήτρια Πανεπιστημίου
Technical University
Sofia Boulgaria
- Ζαχαρενάκης Εμμανουήλ
Καθηγητής τμήματος Πολιτικών
Δομικών Έργων
Α.Τ.Ε.Ι. Κρήτης

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή στις έξυπνες κατασκευές	1
1.1	Εισαγωγή	1
1.2	Έξυπνες κατασκευές	3
1.3	Ανασκόπηση της θεωρίας των έξυπνων κατασκευών	7
1.4	Καινοτομίες διατριβής	11
1.5	Δομή διδακτορικού	12
2	Μοντελοποίηση έξυπνων κατασκευών	14
2.1	Μοντελοποίηση	14
2.2	Εξίσωση κίνησης της δοκού	15
2.2.1	Η μορφή της μηχανικής φόρτισης $f_m(t, r)$	19
2.2.2	Η μορφή της ηλεκτρικής φόρτισης $f_e(t, r)$	19
2.2.3	Μερική διαφορική εξίσωση κίνησης λόγω μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης	22
2.3	Πρότυπο πεπερασμένων στοιχείων	23
2.3.1	Στοιχειώδεις πίνακες μάζας και ακαμψίας	25
2.3.2	Στοιχειώδεις μηχανικό φορτίο	26
2.3.3	Στοιχειώδεις ηλεκτρικό φορτίο	27
2.3.4	Ολικοί πίνακες μάζας και ακαμψίας	28
2.3.5	Ολικό διάνυσμα μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης	32
2.4	Γενικές εξισώσεις κίνησης της δοκού	33
2.5	Περιγραφή στο χώρο κατάστασης	35
2.6	Εξισώσεις κίνησης της υπό μελέτη δοκού	37

2.6.1	Μηχανικές εισοδοι στο σύστημα	39
2.6.2	Θόρυβος	41
3	Έλεγχος	43
3.1	Ορισμός του προβλήματος ελέγχου	43
3.2	Σχεδιασμός και καθορισμός του συστήματος	44
3.2.1	Σήματα και νόρμες πινάκων	45
3.2.2	Δομημένη ιδιόμορφη τιμή	47
3.2.3	Στόχοι σχεδίασης	47
3.2.4	Προδιαγραφές συστήματος	47
3.3	Σύνθεση ελεγκτών	51
3.4	Σύνδεση με το πρόβλημα ελέγχου της δοκού	52
3.5	Το σύστημα ανοικτού βρόχου	62
3.5.1	Απόκριση του συστήματος σε μηχανικές και ηλεκτρικές εισόδους	65
3.6	Έλεγχος LQR	67
3.6.1	Επιλογή των βαρών	71
3.7	Αποτελέσματα από την εφαρμογή του ελέγχου LQR	71
3.8	Συμπεράσματα για τα αποτελέσματα από το γραμμικό τετραγωνικό κριτήριο επιδόσεων (LQR)	83
3.9	Έλεγχος H_∞ για την ονομαστική απόδοση	84
3.9.1	Μορφοποίηση προβλήματος σε διάγραμμα δύο θυρών	84
3.10	Καθορισμός κριτηρίων απόδοσης	89
3.11	Επιλογή συναρτήσεων βαρών	91
3.12	Αποτελέσματα ελέγχου ονομαστικής σχεδίασης H_∞	94
3.13	Συμπεράσματα ελέγχου ονομαστικής σχεδίασης	105
3.14	Μείωση τάξης ελεγκτή H_∞	106
3.15	Αποτελέσματα με χρήση ελεγκτή HIFOO	107
4	Έλεγχος με αβεβαιότητα	112
4.1	Μοντελοποίηση της αβεβαιότητας	112
4.2	Εύρωστος έλεγχος	114

4.3	Εύρωστος έλεγχος – Ανάλυση	115
4.4	Εύρωστη Σύνθεση: μ -ελεγκτής	124
4.5	Σύνοψη διατριβής και προτάσεις για μελλοντική έρευνα	126
Βιβλιογραφία		129
 Παραρτήματα		
A	Πιεζοηλεκτρισμός	138
A.1	Φυσική ερμηνεία	139
A.2	Υλικά που εμφανίζουν πιεζοηλεκτρισμό	141
A.3	Μαθηματική περιγραφή φαινομένου	142
A.4	Ορθό πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο	144
A.5	Ανάστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο	145
A.6	Ενεργειακή αντιμετώπιση	146
A.7	Η Γραμμική θεωρία της πιεζοηλεκτρικότητας	146
A.8	Πιεζοηλεκτρικές θεμελιώδης εξισώσεις	148
B	Οι τιμές των πινάκων μάζας M, ακαμψίας K, απόσβεσης D, A, B και F_e^* της δοκού	151
Γ	Θεωρία ελέγχου H_∞	155
Γ.1	Διατύπωση του προβλήματος - Ανάλυση	155
Γ.2	Διατύπωση του προβλήματος - Σύνθεση	157
Γ.3	Λύση προβλήματος	157
Δ	Τιμές ελεγκτών με βάση τη θεωρία των κριτηρίων LQR και H_∞	160
Ε	Τιμές των πινάκων $A_1, B_1, B_2, B_3, C_1, D_{11}, D_{22}, D_{12}$ και D_{21} με βάση το κριτήριο H_∞	166

Ευχαριστίες

Η παρούσα διατριβή δε θα μπορούσε να εκπονηθεί χωρίς την πολύτιμη βοήθεια του επιβλέποντα καθηγητή κ. Πουλιέζου Αναστάσιου. Είναι από τις περιπτώσεις που είναι δύσκολο να βρεθούν λόγια για να περιγράψουν την ειλικρινή ευγνωμοσύνη που νιώθω απέναντι στο πρόσωπό του. Τον ευχαριστώ για τις απεριόριστες μέρες που αφιέρωσε, για την επιστημονική καθοδήγησή του πάνω στο αντικείμενο του αυτόματου ελέγχου, ακόμα και κάτω από δύσκολες πολλές φορές, συνθήκες.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Σταυρουλάκη Γεώργιο για την πολύτιμη επιστημονική βοήθειά του, την υπομονή και το ήθος του. Η καθοδήγηση του ήταν ανεκτίμητη. Είμαι ευγνώμων για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου για τις πολύτιμες υποδείξεις του, και την αμέριστη επιστημονική στήριξη που μου παρείχε.

Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τους γονείς μου, τον άντρα μου και τα παιδιά μου για την πολύτιμη ηθική συμπαράστασή τους καθώς και την κατανόηση που έδειξαν τα χρόνια της εκπόνησης αυτής της διδακτορικής διατριβής.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Κουϊκόγλου Βασίλειο, για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου, για τις πολύτιμες υποδείξεις του, και τη συνεργασία του στα πλαίσια αυτής της διατριβής, καθώς και τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής τους καθηγητές κ.κ. Ζαχαρενάκη Εμμανουήλ, Marinova Daniela, Προβιδάκη Κωνσταντίνο και Βλάσση Νικόλαο για την προσεκτική ανάγνωση της διατριβής και τις πολύτιμες υποδείξεις τους.

Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα

Η Αμαλία Μουτσοπούλου γεννήθηκε στις 24/3/72 στην Αθήνα. Είναι έγγαμη και μητέρα τριών παιδιών. Είναι διπλωματούχος Πολιτικός Μηχανικός του Πολυτεχνείου Θράκης και κάτοχος μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης Μηχανικού Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης.

Διατηρεί τεχνικό γραφείο με έδρα το Ηράκλειο της Κρήτης από το 1994 έως σήμερα, και έχει εκπονήσει πλήθος στατικών μελετών και επιβλέψεων κατασκευαστικών έργων. Από το 1997 έως το 2006 εργάστηκε στο τμήμα Πολιτικών Δομικών Έργων του Α.Τ.Ε.Ι. Κρήτης και δίδασκε τα μαθήματα: Σκυρόδεμα Ι, Σκυρόδεμα ΙΙ, Μηχανική ΙΙ, Κατασκευές Κτηρίων ΙΙ, Κόστος και Προϋπολογισμός Κατασκευών, Υγιεινή και Ασφάλεια, και Υπολογισμοί Κατασκευών.

Από το 2007 έως σήμερα είναι καθηγήτρια εφαρμογών του τμήματος Πολιτικών Δομικών Έργων και διδάσκει τα μαθήματα Κόστος και Προϋπολογισμός Κατασκευών και Σκυρόδεμα Ι. Είναι υπεύθυνη του εργαστηρίου Διαχείρισης Έργων του Α.Τ.Ε.Ι. Κρήτης. Έχει εισηγηθεί και επιβλέψει τριάντα πέντε πτυχιακές εργασίες σε θέματα κατασκευών πολιτικού μηχανικού.

Έχει συγγράψει δύο βιβλία «Συστηματική Διαχείριση Υγιεινής και Ασφάλειας Εργασίας στα Τεχνικά Έργα», Εκδόσεις Τζιόλα 2006 και «Κόστος και Προϋπολογισμός κατασκευών», Εκδόσεις Τζιόλα 2007, τα οποία αποτελούν το κύριο σύγγραμμα στα αντίστοιχα μαθήματα του Α.Τ.Ε.Ι. Κρήτης. Επιπλέον, έχει συγγράψει σημειώσεις που διανέμονται στους σπουδαστές στα μαθήματα Σκυρόδεμα Ι, Σκυρόδεμα ΙΙ ασκήσεις πράξης και Κατασκευές Κτηρίων ΙΙ. Έχει συνεργαστεί με το πανεπιστήμιο του Aachen στα πλαίσια του προγράμματος Aachen Ausbildungspartnerschaft καθώς και το Glasgow Caledonian University στα πλαίσια του προγράμματος Leonardo da Vinci.

Είναι υποψήφια διδάκτορας του Πολυτεχνείου Κρήτης και έχει εκπονήσει στα πλαίσια του διδακτορικού τις εξής εργασίες:

- A. Moutsopoulou, A. Pouliezos, G.E. Stavroulakis : Robust control in smart systems and their management. PM-04 - 4th SCPM, 1st IPMA/MedNet Conference "Project Management Advances, Training, Certification in the Mediterranean", Chios May 2008

- A.Moutsopoulou, A. Pouliezos, G.E. Stavroulakis: Modelling with Uncertainty and Robust Control of Smart Beams. Paper 35, Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Structures Technology, B.H.V. Topping and M. Papadrakakis, (Editors), Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland, Civil-Comp Press, 2008

- A. Moutsopoulou, C. Vidalakis, N. Hytiris: The role of management in preventing construction accidents: A systemic analysis. PM-04 - 4th SCPM, 1st IPMA/MedNet Conference "Project Management Advances, Training, Certification in the Mediterranean", Chios May 2008

- A. Moutsopoulou, G.E. Stavroulakis, A. Pouliezos: H-inf control for active vibration suppression in smart structures using nonsmooth and nonconvex optimization. 2nd Intern. Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering COMPDYN 2009, Rhodes, Greece, 22-24 June 2009

- A. Moutsopoulou, A. Pouliezos and G.E. Stavroulakis, Smart structure monitoring using robust control. 2nd International Conference on Environmental Management, Engineering, Planning and Economics (CEMEPE) and SECOTOX Conference, Mykonos, June 21-26 2009

- A. Moutsopoulou, A. Pouliezos and G.E. Stavroulakis, Simulation and modelling using robust control of wind induced vibration on smart beams, Advances in Engineering Software, (in press).

Είναι μέλος του Συλλόγου Πολιτικών Μηχανικών Ελλάδας και του Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδας

Περίληψη

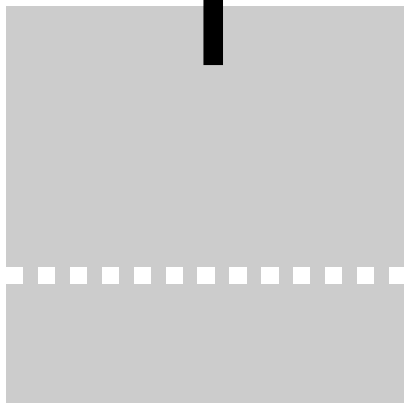
Η χρήση των τεχνολογιών του ενεργού ελέγχου σε έξυπνες κατασκευές παρουσιάζεται σε αυτή τη διατριβή. Μια έξυπνη κατασκευή μπορεί να οριστεί ως μια κατασκευή ή ένα δομικό στοιχείο με ενσωματωμένους αισθητήρες και ενεργοποιητές καθώς και ένα σύστημα ελέγχου που βοηθάει την κατασκευή να αντιδράει αυτόματα σε εξωτερικά ερεθίσματα που ασκούνται σε αυτή και μετά να καταστέλλει ανεπιθύμητες επιδράσεις ή να βελτιώνει επιθυμητές επιδράσεις. Ως παράδειγμα μελετάται μια έξυπνη δοκός με ενσωματωμένους πιεζοηλεκτρικούς ενεργοποιητές, με στόχο την καταστολή των ταλαντώσεων κάτω από ντετερμινιστικές και στοχαστικές φορτίσεις.

Αρχικά, εξετάστηκε το κριτήριο του γραμμικού τετραγωνικού ελέγχου με χρήση παρατηρητή και έγινε ρύθμιση της κατακόρυφης θέσης της στη θέση ισορροπίας της. Στη συνέχεια εφαρμόστηκαν πιο προχωρημένες τεχνικές ελέγχου όπως το κριτήριο H_∞ . Το πλεονέκτημα του ελέγχου H_∞ οφείλεται στη δυνατότητα να λάβουμε υπόψη στους υπολογισμούς το χειρότερο αποτέλεσμα των αβέβαιων διαταραχών και του θορύβου του συστήματος. Είναι δυνατόν να συνθέσουμε ένα H_∞ ελεγκτή που θα είναι εύρωστος έως ένα προκαθορισμένο ποσοστό σφαλμάτων μοντελοποίησης. Τα αποτελέσματα είναι πολύ καλά και παρατηρείται καταστολή της ταλάντωσης ακόμα και για πραγματική αιολική φόρτιση, με τις τάσεις των πιεζοηλεκτρικών να βρίσκονται εντός των ορίων αντοχής τους.

Θέλοντας να μειωθούν οι υπολογιστικές απαιτήσεις του μοντέλου, μειώθηκε η τάξη του ελεγκτή, με τη βοήθεια μη παραμετρικής και μη κυρτής βελτιστοποίησης, και χρησιμοποιώντας τον ελεγκτή HIFOO. Η καλή απόδοση του ελεγκτή διατηρήθηκε ακόμα και για πολύ μικρότερο βαθμό του συστήματος. Στη συνέχεια θέλοντας να ληφθούν υπόψη οι αβεβαιότητες μοντελοποίησης, εξαιτίας των διαφορών ανάμεσα στο πραγματικό μοντέλο και στο μαθηματικό μοντέλο προσομοίωσης, ελέγχθησαν τα εύρωστα χαρακτηριστικά του ελεγκτή H_∞ .

Τέλος λαμβάνοντας υπόψη τις μη γραμμικότητες του συστήματος που παραλεί-

πονται κατά τη μοντελοποίηση, την ανακριβή γνώση των τιμών και των παραμέτρων του μοντέλου και τη φυσιολογική μεταβολή των τιμών κατά τη διάρκεια λειτουργίας των κατασκευών, εισάγονται οι αβεβαιότητες μοντελοποίησης. Έγινε ανάλυση και σύνθεση ενός εύρωστου μ -ελεγκτή, με τη βοήθεια της επαναληπτικής μεθόδου $D - K$. Συγκρίθηκαν και σχολιάστηκαν τα αποτελέσματα με τη χρήση των διαφορετικών ελεγκτών.



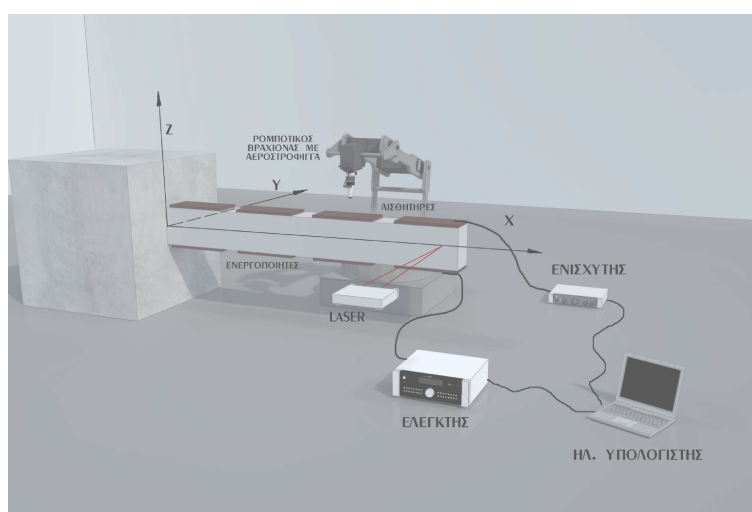
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΕΞΥΠΝΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι στόχοι και οι καινοτομίες της διατριβής ενώ αναφέρονται και τα πιο σημαντικά αποτελέσματα στο πεδίο των έξυπνων κατασκευών, που αφορούν τη μοντελοποίηση και τον έλεγχο των ταλαντώσεων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται με σύντομο τρόπο η δομή του διδακτορικού.

1.1 Εισαγωγή

Οι μεγάλου εύρους ταλαντώσεις και οι μεγάλες περίοδοι φθίνουσας ταλάντωσης καταλήγουν σε κόπωση, αστάθεια και κακή λειτουργία των κατασκευών. Λαμβάνοντας υπόψη τις έρευνες που έχουν γίνει, αυτή η διατριβή έχει σκοπό να προβάλει μερικές καινοτομίες στον έλεγχο ταλάντωσης των έξυπνων κατασκευών και συγκεκριμένα των κατασκευών με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά υλικά. Παρουσιάζονται στρατηγικές ελέγχου, όπως η θεωρία του γραμμικού τετραγωνικού ελεγκτή αλλά και πιο προχωρημένες θεωρίες όπως η θεωρία του εύρωστου ελέγχου.

Η μοντελοποίηση ενός πρότυπου συστήματος που αποτελείται από μια δοκό και πιεζοηλεκτρικά στρώματα έγινε με πεπερασμένα στοιχεία μιας διάστασης και δύο βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο, ενώ κυβικά και τετραγωνικά πολυώνυμα Hermite χρησιμοποιήθηκαν για να περιγράψουν τις στρωφικές και κατακόρυφες μετατοπίσεις των κόμβων. Οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος βασίστηκαν στη θεωρία Euler Bernoulli. [1](σχήμα 1.1)



Σχήμα 1.1: Τρισδιάστατη απεικόνιση μοντελοποίησης έξυπνης δοκού

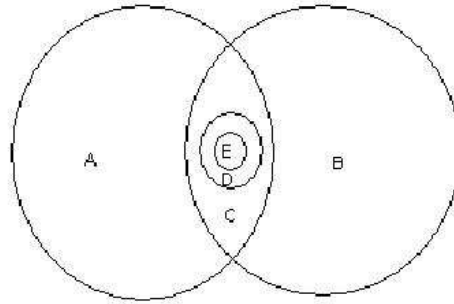
Για την προσομοίωση του συγκεκριμένου προβλήματος σε πραγματικές συνθήκες λειτουργίας, λήφθηκε υπόψη ότι το σύστημα επηρεάζεται από διαταραχές, όπως η δύναμη του ανέμου καθώς και ο θόρυβος μετρήσεων. Το μαθηματικό πρότυπο που χρησιμοποιήθηκε στη σχεδίαση είναι μια προσέγγιση του πραγματικού.

Η μορφοποίηση του προβλήματος σε διάγραμμα δύο θυρών (εισόδου - εξόδου) δεν ήταν προφανής. Το κλασσικό πρόβλημα ρύθμισης μετασχηματίστηκε σε διάταξη προβλήματος δύο θυρών. Στόχος της ονομαστικής σχεδίασης είναι να διατηρηθεί το μέγεθος του σφάλματος μικρό παρ' όλες τις διαταραχές και το θόρυβο των μετρήσεων. Επίσης ο έλεγχος έπρεπε να έχει μικρό μέγεθος ούτως ώστε να εξοικονομείται ενέργεια, και να παραμένει εντός των ορίων λειτουργίας των πιεζοηλεκτρικών ($\pm 500V$). Μετασχηματίζοντας τις συναρτήσεις μεταφοράς σε εξισώσεις του χώρου κατάστασης και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που συνδέουν τις εξόδους, εισόδους, προέκυψαν οι πίνακες που χρησιμοποιούνται στο χώρο κατάστασης για την εύρεση του βέλτιστου ελεγκτή, σύμφωνα με το κριτήριο του ελέγχου H_∞ .

Ο τομέας των έξυπνων υλικών έχει προσελκύσει το μεγάλο ενδιαφέρον της ερευνητικής κοινότητας τις τελευταίες δεκαετίες. Τα έξυπνα υλικά μπορούν να καθοριστούν ως υλικά που είναι ικανά να αντιλαμβάνονται και να ενεργοποιούν με ένα ελεγχόμενο τρόπο την αντίδραση σε ένα ερέθισμα [3]. Μια έξυπνη κατασκευή μπορεί να οριστεί ως μια κατασκευή ή δομικό στοιχείο με ενσωματωμένους αισθητήρες και ενεργοποιητές καθώς και ένα σύστημα ελέγχου που βοηθάει την κατασκευή να αντιδράει αυτόματα σε εξωτερικά ερεθίσματα που ασκούνται σε αυτό και μετά να καταστέλλει ανεπιθύμητες επιδράσεις ή να βελτιώνει επιθυμητές επιδράσεις. Η ανάπτυξη αυτού του πεδίου της επιστήμης υποστηρίζεται τόσο από την επιστήμη των υλικών όσο και από το πεδίο ελέγχου. Στην επιστήμη των υλικών, αναπτύσσονται νέα υλικά τα οποία θα ενοποιηθούν με τις κατασκευές ώστε να χρησιμοποιηθούν ως ενεργοποιητές και αισθητήρες [3].

3

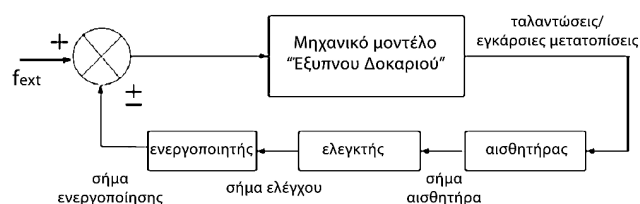
μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ενεργοποιητές και αισθητήρες. Τέτοια υλικά είναι τα πιεζοηλεκτρικά, υλικά με μνήμη, electrostrictive και magnetostrictive materials. Εδώ, επικεντρώνουμε στην χρήση πιεζοηλεκτρικών υλικών γιατί έχουν καλές ιδιότητες αίσθησης και ενεργοποίησης.



Σχήμα 1.2: Σχηματική αναπαράσταση έξυπνων κατασκευών

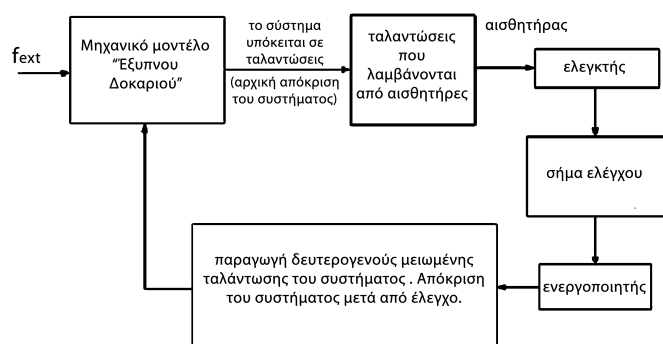
Ένα γενικό πλαίσιο των προσεγγίσεων δομικού ελέγχου και ορολογίας φαίνεται στο σχήμα 1.2. Μία προσαρμοζόμενη κατασκευή (υποσύνολο A) περιέχει ενεργοποιητές, αλλά όχι αισθητήρες, για να βοηθήσει την αλλαγή της κατάστασης ή των χαρακτηριστικών της κατασκευής με ελεγχόμενο τρόπο. Μία αντιλαμβανόμενη κατασκευή (υποσύνολο B) περιέχει αισθητήρες αλλά όχι ενεργοποιητές, για την παρακολούθηση της κατασκευής, όπως στην περίπτωση της παρακολούθησης δομικής υγείας. Μία ελεγχόμενη κατασκευή, (υποσύνολο D, τομή των συνόλων A και B) περιέχει και αισθητήρες και ενεργοποιητές σε σύστημα κλειστού βρόχου για τον ενεργό έλεγχο της κατάστασης ή των χαρακτηριστικών της κατασκευής [4]. Μία ενεργή κατασκευή (υποσύνολο D), είναι μία ελεγχόμενη κατασκευή που περιέχει ενοποιημένους αισθητήρες και ενεργοποιητές. Μία έξυπνη κατασκευή (υποσύνολο E) είναι μία ενεργή κατασκευή που έχει ταυτόχρονα λογική ελέγχου και ηλεκτρονική λογική, επιπρόσθετα με τους καταναμεμένους αισθητήρες και ενεργοποιητές. Τα τελευταία χρόνια ο όρος έξυπνη κατασκευή χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία. Αν και η διάκριση ανάμεσα σε μία έξυπνη κατασκευή και μία ευφυή κατασκευή δεν γίνεται ξεκάθαρη στη βιβλιογραφία, είναι γενικώς κατανοητό ότι η έξυπνη κατασκευή ενσωματώνει ένα έξυπνο υλικό όπως ένα πιεζοηλεκτρικό με τη μορφή, π.χ. έξυπνου περιβλήματος. Έτσι με την ευρεία έννοια, μία έξυπνη κατασκευή θα έχει ένα ενσωματωμένο έξυπνο περίβλημα που επιτρέπει στην κατασκευή να καταγράφει ενεργά και να ανταποκρίνεται στο περιβάλλον της με ένα ακριβή ελεγχόμενο τρόπο.

Ο ενεργός έλεγχος είναι ένα βασικό πρόβλημα στις κατασκευές. Το κύριο αν-



Σχήμα 1.3: Σχηματική αναπαράσταση έξυπνης κατασκευής

τικείμενο του ενεργού ελέγχου είναι η μείωση της ταλάντωσης ενός συστήματος μέσα από μια διαδικασία αυτοματοποίησης όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3 [5].



Σχήμα 1.4: Μείωση των ταλαντώσεων των έξυπνων κατασκευών μέσα από μια διαδικασία αυτοματοποίησης

Σε πολλές περιπτώσεις είναι σημαντικό να ελαχιστοποιηθούν αυτές οι δομικές ταλαντώσεις με στόχο την ευστάθεια και την ευρωστία του συστήματος. Κάθε σύστημα ελέγχου καθορίζεται από τη διάταξη ενεργοποιητών, αισθητήρων και ελεγκτή ενώ οι διαταραχές που ασκούνται στο σύστημα είναι δυναμικές σχήμα 1.4 [5].

Το 1880, οι Pierre και Paul-Jacques Curie ανακάλυψαν την άμεση πιεζοηλεκτρική επίδραση σε διάφορους κρυστάλλους (όπως tourmaline, Rouchelle salt και quartz). Οι κρύσταλλοι παράγουν ηλεκτρικό πεδίο στις επιφάνειές τους όταν εντείνονται μηχανικά σε κάποια κατεύθυνση. Το επόμενο έτος, ανακάλυψαν επίσης το αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο, ότι το σχήμα των κρυστάλλων θα αλλάζει όταν εφαρμοστεί σε αυτούς ένα ηλεκτρικό πεδίο [6].

Η ικανότητα των πιεζοηλεκτρικών υλικών να εναλλάσσουν ηλεκτρική και μηχανική ενέργεια δίνει την δυνατότητα εφαρμογής τους ως ενεργοποιητές και αισθητήρες.

Αν τα πιεζοηλεκτρικά υλικά τοποθετηθούν κατάλληλα σε μία κατασκευή μπορούν να λειτουργήσουν ως ενεργοποιητές, όταν προκληθούν δομικές παραμορφώσεις από την εφαρμογή μίας τάσης στα αυτά. Από την άλλη, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αισθητήρες καθώς παραμορφώσεις της κατασκευής θα προκαλέσουν τα παραμορφωμένα πιεζοηλεκτρικά υλικά να παράγουν ένα ηλεκτρικό φορτίο. Το μέγεθος της δομικής παραμόρφωσης μπορεί να παρατηρηθεί με την μέτρηση της ηλεκτρικής τάσης που παράγουν τα υλικά. Δυστυχώς, η πιεζοηλεκτρική επίδραση σε φυσικούς κρυστάλλους είναι αρκετά αδύναμη και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν οι απαιτήσεις σε δύναμη είναι μεγάλες [7].

Πρόσφατες εξελίξεις στο πεδίο της επιστήμης υλικών έχουν δώσει πιεζοηλεκτρικά υλικά που έχουν ικανοποιητική σύνδεση μεταξύ των ηλεκτρικών και μηχανικών πεδίων. Δύο από τα κοινώς χρησιμοποιούμενα πιεζοηλεκτρικά υλικά είναι polyvinylidene fluoride(PVDF) ένα ημικρυσταλλικό πολυμερές φιλμ, και lead zirconate titanate(PZT) ένα πιεζοηλεκτρικό κεραμικό υλικό. Το πιεζοκεραμικό υλικό PZT έχει μεγαλύτερους συντελεστές ηλεκτρομηχανικής σύνδεσης από ότι το PVDF και άρα το PZT μπορεί να προκαλέσει μεγαλύτερες δυνάμεις ή ροπές στις κατασκευές [8]. Όμως το PZT είναι σχετικά εύθραυστο ενώ το PVDF είναι ευέλικτο και μπορεί να κοπεί σε οποιοδήποτε επιθυμητό σχήμα. Το PVDF έχει επίσης καλές ιδιότητες αίσθησης, έτσι χρησιμοποιείται για αισθητήρες.

Σε αυτή τη διατριβή χρησιμοποιούνται πιεζοηλεκτρικά υλικά ως αισθητήρες και ενεργοποιητές. Τα πιεζοηλεκτρικά υλικά, όπως, μόλυβδος, ζirkόνιο, τιτάνιο (PZT), συνδυάζουν μηχανικά και ηλεκτρικά χαρακτηριστικά. Παρουσιάζουν μηχανική παραμόρφωση όταν υπόκεινται σε ένα εφαρμοσμένο ηλεκτρικό πεδίο, που ονομάζεται «αντίθετη πιεζοηλεκτρική επίδραση». Επίσης δημιουργούν μία τάση ή ένα φορτίο όταν υπόκεινται σε μία δύναμη ή παραμόρφωση, όπου ορίζεται ως «άμεση πιεζοηλεκτρική επίδραση» [9]. Τοποθετώντας ή ενσωματώνοντας πιεζοηλεκτρικά επιθέματα σε μία κατασκευή, μπορούν να λειτουργήσουν ως αισθητήρες για την παρακολούθηση ή ως ενεργοποιητές για τον έλεγχο της απόκρισης της κατασκευής.

Οι εξισώσεις κίνησης των κατασκευών μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας ισομορφική ανάλυση, ανάλυση Rayleigh - Ritz, ανάλυση υποτιθέμενων ιδιομορφών,

και πεπερασμένων στοιχείων [21, 22]. Για μία κατασκευή με μη ομοιόμορφες δομικές ιδιότητες, μέθοδοι προσέγγισης όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων ίσως είναι αναγκαία για την απόκτηση του προτύπου του συστήματος.

Εναλλακτικά αν η κατασκευή είναι ήδη ορισμένη μπορούμε να αποκτήσουμε το πρότυπο του συστήματός του άμεσα από την κατασκευή μέσω συστήματος αναγνώρισης. Η πληροφορία για τις ιδιομορφικές ιδιότητες του συστήματος μπορεί να αποκτηθεί χρησιμοποιώντας την πειραματική μέθοδο ιδιομορφικής ανάλυσης, π.χ. δοκιμές ιδιομορφών [23]. Τα αποτελέσματα από τις δοκιμές ιδιομορφών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναβάθμιση του πρότυπου πεπερασμένου στοιχείου μίας κατασκευής χρησιμοποιώντας μεθόδους αναβάθμισης. Οι πίνακες μάζας και ακαμψίας του πρότυπου πεπερασμένου στοιχείου μπορούν να αναβαθμιστούν με την ελαχιστοποίηση της νόρμας του λάθους στις ιδιομορφικές ιδιότητες της κατασκευής.

Το θέμα της βέλτιστης τοποθέτησης των ενεργοποιητών και αισθητήρων αποτελεί το δεύτερο σημαντικό πρόβλημα στο πεδίο των έξυπνων κατασκευών. Είναι σημαντικό αισθητήρες και ενεργοποιητές σε μία κατασκευή να τοποθετηθούν σε καθοριστικές θέσεις για τον έλεγχο ή την αίσθηση δομικών ταλαντώσεων. Με βάση το πρόβλημα της βέλτιστης τοποθέτησης, έχουν ασχοληθεί αρκετοί ερευνητές [23, 24]. Όμως η προσέγγιση εξαρτάται από την υπόθεση ότι η απόσβεση συστήματος είναι μικρή, όπου ο έλεγχος και η παρατηρητικότητα Gramians του συστήματος μπορεί να φανούν να είναι διαγωνίως κυρίαρχα. Για πιεζοηλεκτρικούς ενεργοποιητές και αισθητήρες, μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλά μέτρα ιδιομορφικής ευαισθησίας ή ελέγχου για τον καθορισμό της βέλτιστης τοποθέτησης σε μία έξυπνη κατασκευή [25, 26]. Οι βέλτιστες θέσεις είναι γενικά εκείνες όπου υπάρχει υψηλή εντατική κατάσταση [27].

Τέλος, ο έλεγχος κατασκευών έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές όπως:

Ο Culshaw [28] αναφέρθηκε στην έννοια της έξυπνης κατασκευής, τα οφέλη και τις εφαρμογές τους. Οι Rao και Sunar εξήγησαν τη χρήση των πιεζοϋλικών σαν αισθητήρες και ενεργοποιητές στην καταστολή ταλάντωσης των έξυπνων κατασκευών [29]. Οι Hubbard και Baily [30] μελέτησαν την εφαρμογή των πιεζοηλεκτρικών υλικών όπως αισθητήρες/ενεργοποιητές για τις ευέλικτες κατασκευές. Ο Hanagud et al. [31] ανέπτυξε ένα μοντέλο πεπερασμένου στοιχείου για μία δοκό με πολλούς

κατανεμημένους πιεζοηλεκτρικούς αισθητήρες/ενεργοποιητές.

Ο Fanson et al. [32] έκανε αρκετά πειράματα σε μία δοκό με πιεζοηλεκτρικά χρησιμοποιώντας θετική ανατροφοδότηση. Ο Balas [33] εργάστηκε αρκετά στον έλεγχο ανατροφοδότησης ευέλικτων κατασκευών. Πειραματική αξιολόγηση της πιεζοηλεκτρικής ενεργοποίησης για τον έλεγχο των ταλαντώσεων σε μία πρόβολο δοκό παρουσιάστηκε από τους Burdess και Fawcett [34]. Ο Brennan et al. [35] έκανε αρκετά πειράματα στη δοκό για διαφορετικές τεχνολογίες ενεργοποιητών. Οι Yang και Lee [36] μελέτησαν τη βελτιστοποίηση του οφέλους ανατροφοδότησης στο σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου για κατασκευές. Ανέπτυξαν ένα αναλυτικό μοντέλο για δομικό έλεγχο και σε μη-συνδυαστική τοποθέτηση αισθητήρα/ενεργοποιητή και το όφελος ελέγχου ανατροφοδότησης. Οι Crawley και Luis [37] παρουσίασαν την ανάπτυξη του πιεζοηλεκτρικού αισθητήρα/ενεργοποιητή ως στοιχεία μίας έξυπνης κατασκευής.

Οι Hwang και Park [38] παρουσίασαν μία νέα τεχνική προτυποποίησης πεπερασμένου στοιχείου για ευέλικτες δοκούς. Οι αλγόριθμοι συνεχούς χρόνου και ευδιάκριτου χρόνου προτάθηκαν για τον έλεγχο μίας λεπτής πιεζοηλεκτρικής δοκού από τον Bone et al. [39]. Οι Schiehlen και Schonerstedt [40] ανέφεραν το σχεδιασμό βέλτιστου ελέγχου για τις πρώτες ιδιόμορφες ταλάντωσης μίας προβόλου δοκού χρησιμοποιώντας πιεζοηλεκτρικούς αισθητήρες/ενεργοποιητές. Κατανεμημένους ελεγκτές για έξυπνες κατασκευές μπορούμε να βρούμε στον Forouza Pourki [41]. Μία αναβαθμισμένη τεχνική ελέγχου με χρήση ιδιομορφών για την καταστολή ταλαντώσεων σε ευέλικτες κατασκευές παρουσιάστηκε από τους Baidyapadhyay και Axay [42]. Ο Shiang Lee [43] κατασκεύασε μία νέα μορφή ελέγχου για τον έλεγχο ταλαντώσεων σε έξυπνες κατασκευές χρησιμοποιώντας νευρωνικούς αλγόριθμους.

Μία θεωρία παθητικού ελέγχου για τις έξυπνες κατασκευές αναπτύχθηκε από τους Gosavi και Kelkar [44]. Ένα σχέδιο ενεργού ελέγχου ταλαντώσεων που επιχειρεί καταστολή ταλαντώσεων ερευνήθηκε από τους Moita et al. [45]. Οι Gabbert et al. [46] κατασκεύασαν ένα σχέδιο βέλτιστου ελέγχου LQG για την καταστολή των ταλαντώσεων μίας προβόλου δοκού. Η προσομοίωση πεπερασμένου στοιχείου έξυπνων κατασκευών χρησιμοποιώντας έναν ελεγκτή ανατροφοδότησης βέλτιστης εκροής για τον έλεγχο ταλαντώσεων και θορύβου έγινε από τους Lim et al. [47].

Εργασία για την καταστολή ταλαντώσεων των ευέλικτων κατασκευών με ενσωματωμένους πιεζο-μεταδότες χρησιμοποιώντας ελεγκτές απορρόφησης κυμάτων έγινε από τους Vukovich και Koma [48]. Πέρα από τα πιεζοηλεκτρικά ως αισθητήρες και ενεργοποιητές, ο Anjanappa [49] ανέπτυξε ένα ενσωματωμένο μοντέλο για την ανάλυση του ελέγχου ταλαντώσεων προβόλου δοκού χρησιμοποιώντας magnetostrictive μίνι-ενεργοποιητές.

Οι Aldraihem et al. [50] ανέπτυξαν ένα μοντέλο ελασματοποιημένης δοκού, χρησιμοποιώντας δύο θεωρίες, τη θεωρία δοκού Euler-Bernoulli και τη θεωρία δοκού Timoshenko. Ο Abramovich [51] έχει παρουσιάσει μία αναλυτική διατύπωση και λύσεις κλειστής μορφής για σύνθετες δοκούς με πιεζοηλεκτρικούς ενεργοποιητές που βασίστηκε στη θεωρία δοκού Timoshenko. Επίσης μελέτησε τις επιδράσεις του σημείου τοποθέτησης του ενεργοποιητή και του αριθμού των κομματιών και των συνοριακών συνθηκών κάτω από μηχανικά και/ή ηλεκτρικά φορτία. Χρησιμοποιώντας μία υψηλής ανάλυσης θεωρία παραμόρφωσης, οι Chandrashekara και Varadarajan [52] παρουσίασαν ένα μοντέλο πεπερασμένου στοιχείου μίας σύνθετης κατασκευής για να παρουσιάσουν μία επιθυμητή απόκλιση, σε αμφιέριστες και μονόπακτες δοκούς.

Οι Aldraihem και Khedir [53] πρότειναν αναλυτικά μοντέλα και ακριβείς λύσεις για δοκούς με απλούς και εκτεταμένους πιεζοηλεκτρικούς ενεργοποιητές και τα μοντέλα βασίστηκαν στη θεωρία δοκού Timoshenko και θεωρία δοκού υψηλότερης ανάλυσης. Δημιουργήθηκαν ακριβείς λύσεις χρησιμοποιώντας την προσέγγιση στο πεδίο του χώρου κατάστασης. Οι Doschner και Enzmann [54] σχεδίασαν έναν ελεγκτή βασισμένο σε μοντέλο για έξυπνες κατασκευές. Ο πολυμετάβλητος έλεγχος ευρωστίας μίας έξυπνης αμφίπακτης δοκού εφαρμόστηκε από τον Robin Scott et al. [55].

Σε μία πιο πρόσφατη εργασία, οι Zhang και Sun [56] διατύπωσαν ένα αναλυτικό μοντέλο μίας δοκού με διατμητικό πιεζοηλεκτρικό ενεργοποιητή σε όλο το μήκος της δοκού. Το αποτέλεσμα του μοντέλου απλοποιήθηκε υποθέτοντας ότι τα επιφανειακά στρώματα ακολουθούν τη θεωρία δοκού Euler - Bernoulli, ενώ το στρώμα πυρήνα ακολουθεί τη θεωρία δοκού Timoshenko. Επιπλέον, μία λύση κλειστής μορφής για τη στατική μετατόπιση παρουσιάστηκε για μία πρόβολο δοκό. Μία νέα μέθοδος προτυποποίησης και ελέγχου σχήματος των σύνθετων κατασκευών με

περιγραφή τους στο χώρο κατάστασης.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται και συγκρίνονται οι διάφορες στρατηγικές ελέγχου για την καταστολή της ταλάντωσης της δοκού. Αρχικά εξετάζεται το κριτήριο του γραμμικού τετραγωνικού ελεγκτή LQR με χρήση παρατηρητή. Στη συνέχεια εξαιτίας της ιδιομορφίας του συστήματος χρησιμοποιούνται πιο προχωρημένες τεχνικές ελέγχου, όπως η ονομαστική σχεδίαση H_∞ . Ως εξωτερικές διαταραχές χρησιμοποιούνται διάφορα είδη φορτίσεων, τόσο στατικά όσο και δυναμικά, ενώ στου υπολογισμούς λαμβάνεται υπόψη και ο θόρυβος των μετρήσεων. Στη συνέχεια γίνεται μείωση της τάξης του ελεγκτή για τα ίδια είδη των φορτίσεων, χρησιμοποιώντας τον ελεγκτή $HIFOO$.

Στο κεφάλαιο 4 εισάγεται η αβεβαιότητα στην μοντελοποίηση και στις εξισώσεις κίνησης της δοκού και παρουσιάζεται ο εύρωστος έλεγχος. Γίνεται προσπάθεια ανάλυσης και σύνθεσης ενός εύρωστου μ -ελεγκτή. Συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το κριτήριο του ελέγχου H_∞ .

Τέλος στο παράρτημα αρχικά παρουσιάζεται αναλυτικά η φυσική σημασία και η μαθηματική αντιμετώπιση των πιεζοηλεκτρικών. Στη συνέχεια δίνονται οι τιμές των πινάκων και των ελεγκτών που χρησιμοποιήθηκαν στη διατριβή.

2

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΞΥΠΝΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η μοντελοποίηση των έξυπνων κατασκευών. Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων που εφαρμόζεται χρησιμοποιεί τα πολυώνυμα *Hermitte* και αναπτύσσεται για τον έλεγχο ταλάντωσης σύνθετων δοκών, με κατανεμημένους πιεζοηλεκτρικούς αισθητήρες και ενεργοποιητές. Η άμεση πιεζοηλεκτρική εξίσωση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του συνολικού φορτίου που δημιουργείται στα ηλεκτρόδια του αισθητήρα, ενώ οι ενεργοποιητές παρέχουν απόσβεση στη σύνθετη δοκό.

2.1 Μοντελοποίηση

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξαχθεί ένα μαθηματικό πρότυπο μιας έξυπνης δοκού, το οποίο είναι κατάλληλο για την ενσωμάτωσή του σε ένα σύστημα ελέγχου γραμμικών συστημάτων. Όπως είναι γνωστό το κατάλληλο πρότυπο είναι η μορφή χώρου κατάστασης, δηλαδή ένα σύστημα χρονικά αμετάβλητων, συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Η επίτευξη του στόχου αυτού θα γίνει ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1. Εξαγωγή του πλήρους μαθηματικού μοντέλου της καμπτικής κίνησης (ταλάντωσης) της έξυπνης δοκού υπό την επίδραση μηχανικών και ηλεκτρικών δυνάμεων, χρησιμοποιώντας τους σχετικούς φυσικούς νόμους. Στη παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιηθεί η απλούστερη Τεχνική Θεωρία της κάμψεως δοκών και όχι η ακριβέστερη Θεωρία Ελαστικότητας, καθ' όσον αυτό που ενδιαφέρει είναι η εύρεση κατάλληλων στρατηγικών ελέγχου που δεν εξαρτώνται από την ακριβή μοντελοποίηση. Αυτό το μαθηματικό μοντέλο θα είναι της μορφής μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης.
2. Διακριτοποίηση του παραπάνω μοντέλου με τη χρήση ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Η διαδικασία αυτή περιέχει τα εξής επιμέρους βήματα:
 - (α) Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων για τη στοιχειώδη δοκό και τη στοιχειώδη δύναμη.
 - (β) Συνάθροιση των στοιχειωδών μοντέλων για την εξαγωγή του συνολικού μοντέλου της έξυπνης δοκού.
3. Μετασχηματισμός του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων σε πρότυπο χώρου κατάστασης με τη χρήση κατάλληλων μεταβλητών κατάστασης.

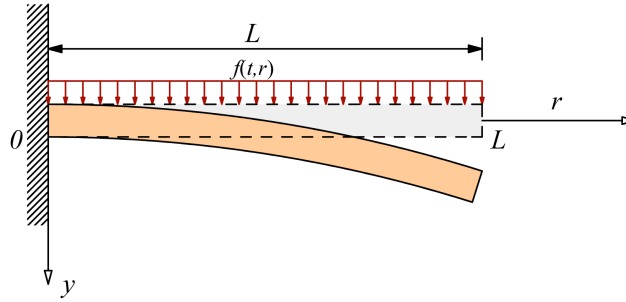
2.2 Εξίσωση κίνησης της δοκού

Η ελαστική ταλάντωση μπορεί να παρατηρηθεί σε πολλές κατασκευές όπως μεταλλικές γέφυρες, κτίρια. Σε κάποιες κατασκευές, οι αξονικές και στροφικές ιδιότητες ίσως είναι πιο σημαντικές από τις ελαστικές τους ιδιότητες. Η ελαστική ταλάντωση μπορεί να προκληθεί από την εφαρμογή κατανεμημένης ή συγκεντρωμένης φόρτισης κάθετης στον άξονα της δοκού. Η φόρτιση αυτή μπορεί να προσομοιώνει τον αέρα, το θόρυβο μετρήσεων, ή τη ροπή κάμψης εξαιτίας των πιεζοηλεκτρικών που μπορούν να ασκούνται σε μία κατασκευή. Έστω μία λεπτή πρόβολος δοκός μήκους L όπως απεικονίζεται στο σχήμα 2.1 της οποίας η πυκνότητα και το μέτρο ελαστικότητας επί τη ροπή αδράνειας στο σημείο r είναι ρ_b και $EI(r)$ αντίστοιχα, ενώ η διατομή της δοκού είναι $A_b(r)$.

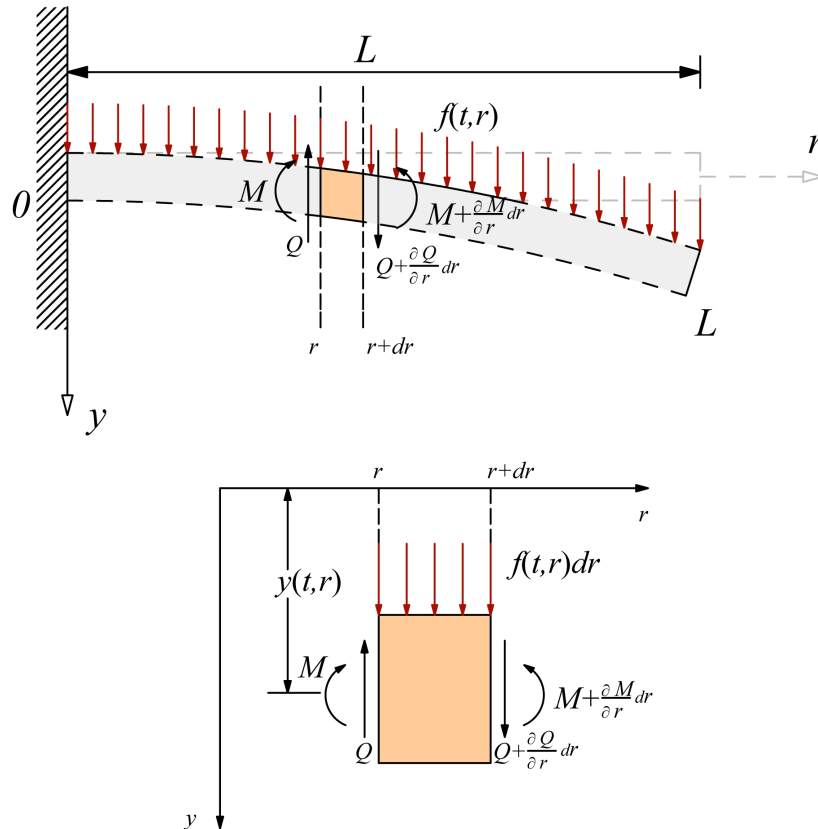
Οι βασικές υποθέσεις είναι:

- i. Το υλικό ακολουθεί το νόμο του Hooke

- ii. Η αξονική παραμόρφωση είναι αμελητέα σε σύγκριση με την παραμόρφωση κάμψης.
- iii. Η περιστροφή του στοιχείου είναι αμελητέα σε σύγκριση με την κάθετη και την πλάγια μετατόπιση.



Σχήμα 2.1: Πρόβολος δοκός σε κάμψη



Σχήμα 2.2: Ένα μικρό στοιχείο της δοκού

Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος ενός στοιχείου dr φαίνεται στο σχήμα 2.2,

όπου Q δηλώνει την τέμνουσα δύναμη και το M την ροπή κάμψης [73]. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα με δύναμη κατά την κατεύθυνση y έχουμε,

$$\left(Q(t, r) + \frac{\partial Q(t, r)}{\partial r}\right) - Q(t, r) + f(t, r)dr = \rho_b A_b(r)dr \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

που ισούται με,

$$\frac{\partial Q(t, r)}{\partial r} + f(t, r) = \rho_b A_b(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη την ροπή γύρω από τον άξονα στα r και y (κατεύθυνση εκτός σελίδας),

$$\left(M(t, r) + \frac{\partial M(t, r)}{\partial r}dr\right) - M(t, r) + \left(Q(t, r) + \frac{\partial Q(t, r)}{\partial r}dr\right)dr + f(t, r)dr \frac{dr}{2} = 0 \quad (2.3)$$

απλοποιώντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε [69],

$$Q(t, r) = -\frac{\partial M(t, r)}{\partial r} \quad (2.4)$$

υποκαθιστώντας την (2.4) στην (2.2) έχουμε,

$$-\frac{\partial^2 M(t, r)}{\partial r^2} + f(t, r) = \rho_b A_b(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial r^2} \quad (2.5)$$

Η ροπή κάμψης μπορεί να συσχετιστεί με την καμπυλότητα $\kappa(x)$ του στοιχείου όπου,

$$\kappa(x) = \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial r^2} \quad (2.6)$$

και,

$$M(t, r) = EI(r)\kappa(x) \quad (2.7)$$

επομένως,

$$M(t, r) = EI(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial r^2} \quad (2.8)$$

Υποκαθιστώντας στην (2.8) στην (2.5) έχουμε,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(EI(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial r^2} \right) + \rho_b A_b(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = f(t, r), \quad 0 \leq r \leq L, \quad (2.9)$$

η γωνία στροφής θ που προκύπτει από την κάμψη της δοκού δίνεται,

$$\theta(t, r) = \frac{\partial y(t, r)}{\partial r} \quad (2.10)$$

Οι εξισώσεις (2.8), (2.9) και (2.10) είναι οι εξισώσεις κίνησης της δοκού Euler-Bernoulli. [5] Όταν η δοκός έχει σχετικά μεγάλο πάχος, οι επιδράσεις της αξονικής παραμόρφωσης και η στροφική αδράνεια πρέπει να ληφθούν υπόψη, για αυτό τον τύπο της δοκού, η εξίσωση δοκού Timoshenko μπορεί να χρησιμοποιηθεί. [5] Υποθέτοντας μία ομοιόμορφη πρόβολο δοκό όπου η διατομή $A_b(r)$ το μέτρο ελαστικότητας E και η ροπή αδράνειας $I(r)$ είναι σταθερές τότε η εξίσωση (2.9) γίνεται,

$$EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = f(t, r), 0 \leq r \leq L \quad (2.11)$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η κατανεμημένη δύναμη παράγεται από μηχανικές και ηλεκτρικές συνιστώσες. Το μηχανικό φορτίο θεωρείται είσοδος διαταραχής στο σύστημα αυτομάτου ελέγχου, και αντιπροσωπεύει π.χ. φορτία εξαιτίας ανέμου, ενώ η ηλεκτρική συνιστώσα είναι το σήμα ελέγχου, κατάλληλα επιλεγμένο για να καταστείλει τις χαμπτικές ταλαντώσεις εξαιτίας της μηχανικής διαταραχής. Με τη σειρά της η τάση εισόδου παράγει διατμητικές δυνάμεις στα πιεζοηλεκτρικά επιθέματα, οι οποίες ανακάμπτουν τη δοκό, (λεπτομέρειες οι οποίες περιγράφουν τη φυσική των υλικών παρατίθενται στο παράρτημα Α). Επομένως η εξίσωση κίνησης της δοκού είναι,

$$EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = f_m(t, r) + f_e(t, r) \quad (2.12)$$

Για την πρόβολο δοκό (σχήμα 2.1) ισχύουν οι παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

- Πακτωμένο άκρο στο $r = 0$. Η μετατόπιση και η κλίση της μετατόπισης είναι μηδέν,

$$y(t, r_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(t, r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.13)$$

- Ελεύθερο άκρο στο $r = L$. Η ροπή κάμψης είναι μηδέν.

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(EI(r) \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial r^2} \right) \right|_{r=L} = 0 \quad (2.14)$$

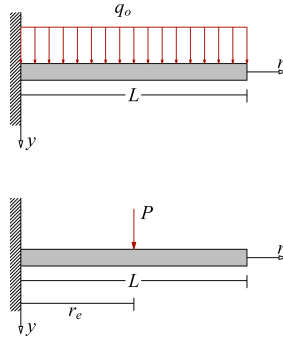
2.2.1 Η μορφή της μηχανικής φόρτισης $f_m(t, r)$

Μηχανικά φορτία διαφόρων μορφών μπορούν ν' αναπαρασταθούν μέσω της $f(t, r)$ (σχήμα 2.3). [87] Για παράδειγμα, ομοιόμορφα κατανεμημένη, χρονικά μεταβαλλόμενη, δύναμη $q_0(t)$ (π.χ. άνεμος), αναπαρίσταται με,

$$f_m(t, r) = q_0(t) \quad (2.15)$$

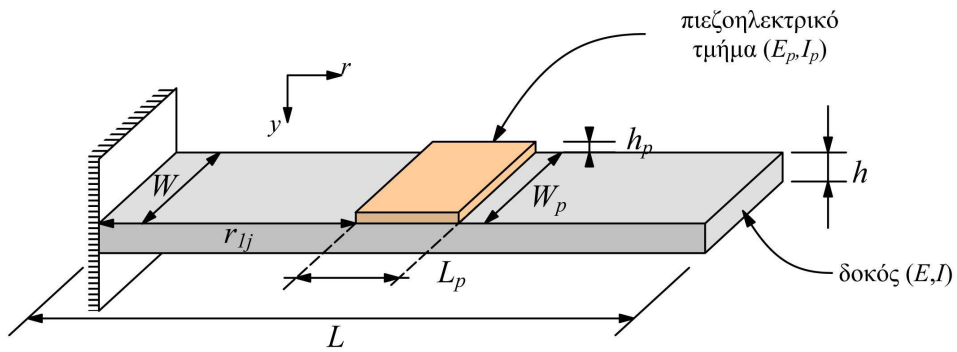
ενώ συγκεντρωμένη δύναμη P_0 στο σημείο r_0 με,

$$f_m(t, r) = P_0 \delta(r - r_0) \quad (2.16)$$



Σχήμα 2.3: Μηχανικά φορτία που ασκούνται στη δοκό

2.2.2 Η μορφή της ηλεκτρικής φόρτισης $f_e(t, r)$



Σχήμα 2.4: Δοκός με προσκολλημένο πιεζοηλεκτρικό τμήμα j

Έστω μία ομοιογενής δοκός Euler-Bernoulli με έναν πιεζοηλεκτρικό ενεργοποιητή προσκολλημένο σε απόσταση r_{1j} από την αρχή των αξόνων. Ο πιεζοηλεκτρικός ενεργοποιητής j έχει διαστάσεις $L_p \times W_p \times h_p$, όπου h_p είναι το πάχος κάθε τμήματος, ενώ η δοκός έχει διαστάσεις $L \times W \times h$ (σχήμα 2.4).

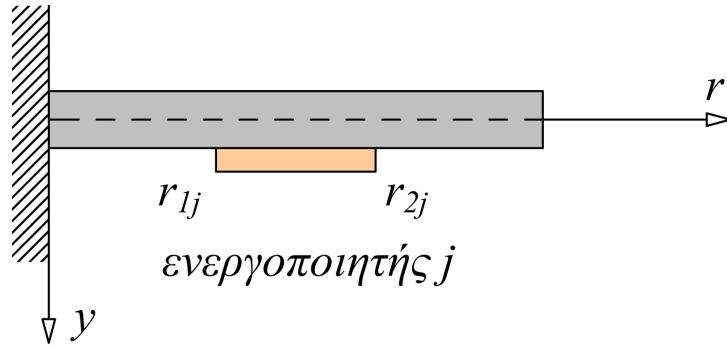
Ο πιεζοηλεκτρικός ενεργοποιητής παράγει μηχανική τάση σαν έξοδο όταν έχει ηλεκτρική τάση σαν είσοδο. Σε ότι αφορά τα πιεζοηλεκτρικά έχειδειχθεί από τους Crawley και de Lewis ότι η επαγόμενη κάμψη μπορεί να αναπαρασταθεί σαν εξωτερικό φορτίο που αποτελείται από ζεύγος αντίθετων ροπών εφαρμοζόμενων στα άκρα του πιεζοηλεκτρικού [96, 97].

Η ηλεκτρική φόρτιση $f_e(t, r)$ εξαιτίας του πιεζοηλεκτρικού ενεργοποιητή ισούται,

$$f_e(t, r) = \frac{\partial^2 M_{pr}(t, r)}{\partial r^2} \quad (2.17)$$

όπου M_{pr} αντιπροσωπεύει την ροπή κάμψης εξ αιτίας του ενεργοποιητή [95].

Έστω ότι τα άκρα του πιεζοηλεκτρικού τμήματος j βρίσκονται στα r_{1j} και r_{2j} κατά μήκος του άξονα r (σχήμα 2.5). [73, 72, 71]



Σχήμα 2.5: Πιεζοηλεκτρικό τμήμα j στην πρόβολο δοκό

Η συνάρτηση $H(\cdot)$ είναι η γνωστή βηματική συνάρτηση που χρησιμοποιείται [69] για να αντιπροσωπεύσει την τοποθέτηση του πιεζοηλεκτρικού τμήματος Pzt πάνω στη δοκό.[95] Η ροπή κάμψης της δοκού $M_{pr}(t, r)$ ορίζεται ως,

$$M_{pr}(t, r) = C_0 e_{pe}(t) [H(r - r_{1j}) - H(r - r_{2j})] u_j(t) \quad (2.18)$$

όπου,

$$C_0 = EI \cdot K_f \quad (2.19)$$

όπου K_f είναι η γεωμετρική σταθερά του υλικού και ισούται με,

$$K_f = \frac{12EE_p h h_p (2h + h_p)}{16E^2 h^4 + EE_p (32h^3 h_p + 24h^2 h_p^2 + 8h h_p^3) + E_p^2 h_p^4} \quad (2.20)$$

όπου E_p είναι το μέτρο ελαστικότητας του πιεζοηλεκτρικού τμήματος και E το μέτρο ελαστικότητας της δοκού.[73, 72]

Η μηχανική ένταση $e_{pe}(t)$ εξ αιτίας του πιεζοηλεκτρικού τμήματος ισούται,

$$e_{pe}(t) = \frac{d_{31}}{h_p} u_j(t) \quad (2.21)$$

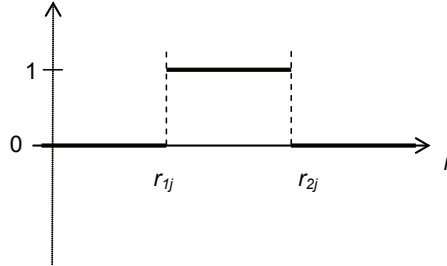
η σταθερά d_{31} συσχετίζει την μηχανική ένταση που δημιουργείται στη δοκό με μια συγκεκριμένη τάση u_j εφαρμόζεται στο πιεζοηλεκτρικό τμήμα.

Η σχέση (2.18) μπορεί να γραφτεί στην πιο συμπαγή μορφή της ως,

$$M_{pr}(t, r) = C_p [H(r - r_{1j}) - H(r - r_{2j})] u_j(t) \quad (2.22)$$

όπου $C_p = EIK_f \frac{d_{31}}{h_p}$.

Η διαφορά των βηματικών συναρτήσεων στη σχέση (2.18) παράγει το σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Διαφορά βηματικών συναρτήσεων

Εκτελώντας την μερική παραγωγή στη σχέση (2.17) και χρησιμοποιώντας την (2.18), η μορφή της ηλεκτρικής φόρτισης εξαιτίας των πιεζοηλεκτρικών γίνεται,

$$f_e(t, r) = C_p u_{aj}(t) \left[\delta'(r - r_{1j}) - \delta'(r - r_{2j}) \right] \quad (2.23)$$

όπου $\delta'(r)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης Dirac ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή της,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - \theta) \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(\theta) \quad (2.24)$$

όπου $\delta^{(n)}$ είναι η n -οστή παράγωγος της συνάρτησης δ και η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής στο θ . [73]

2.2.3 Μερική διαφορική εξίσωση κίνησης λόγω μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης

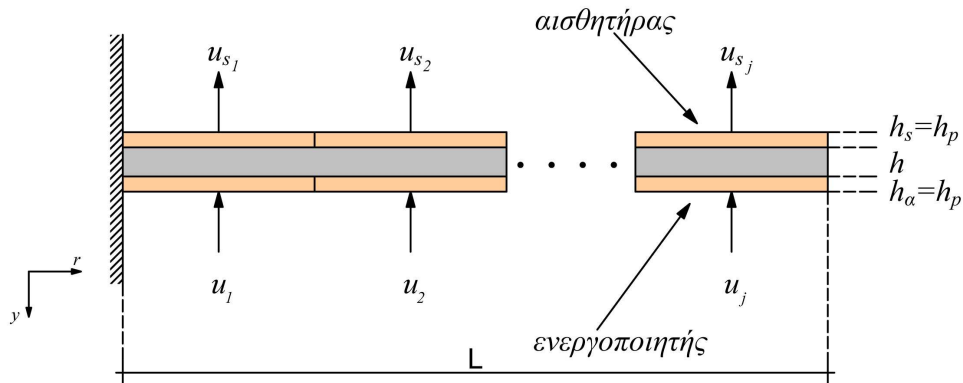
Αντικαθιστώντας την (2.23) και την (2.15) στην (2.12) προκύπτει η εξίσωση κίνησης της έξυπνης δοκού υπό την επίδραση χρονικά μεταβαλλόμενης, ομοιόμορφα κατανεμημένης, κάθετης φόρτισης $q_0(t)$ και πιεζοηλεκτρικής χρονικά μεταβαλλόμενης δύναμης εξαιτίας ενός πιεζοηλεκτρικού, [95]

$$EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = q_0(t) + C_p u_j(t) \left[\delta'(r - r_{1j}) - \delta'(r - r_{2j}) \right] \quad (2.25)$$

Για j όμοια πιεζοηλεκτρικά σχήμα 2.7 η (2.25) γίνεται,

$$EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = q_0(t) + C_p u_j(t) \sum_{i=1}^j \left[\delta'(r - r_{1j}) - \delta'(r - r_{2j}) \right] \quad (2.26)$$

Η εξίσωση (2.26) είναι και η τελική εξίσωση ενδιαφέροντος.



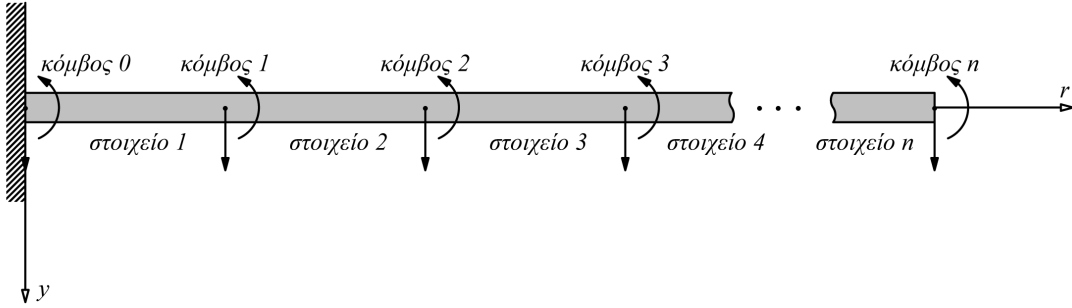
Σχήμα 2.7: Πρόβολος δοκός με συνδυασμένους πιεζοηλεκτρικούς ενεργοποιητές και αισθητήρες

2.3

Πρότυπο πεπερασμένων στοιχείων

Με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μετατρέπεται η μερική διαφορική εξίσωση κίνησης της δοκού σε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η επίλυση των πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνει στην επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης αυξάνοντας το πλήθος των στοιχείων.[94]

Έστω n στοιχεία τα οποία μοντελοποιούν τη δοκό (σχήμα 2.8). Έστω μία ομοιόμορφη στοιχειώδης δοκός μήκους L_e (σχήμα 2.9), όπου ο γενικός άξονας δηλώνεται με r ενώ ο τοπικός με r_e (σχήμα 2.10).



Σχήμα 2.8: Μοντέλο δοκού χωρισμένο σε n αριθμό πεπερασμένων στοιχείων

Κάθε κόμβος έχει δύο βαθμούς ελευθερίας μία στροφή περί τον άξονα r και μία μεταφορική συνιστώσα κατά τον y δηλαδή κάθε στοιχειώδης δοκός έχει 4 βαθμούς ελευθερίας: δύο γωνιακές μετατοπίσεις και δύο κατακόρυφες μετατοπίσεις.

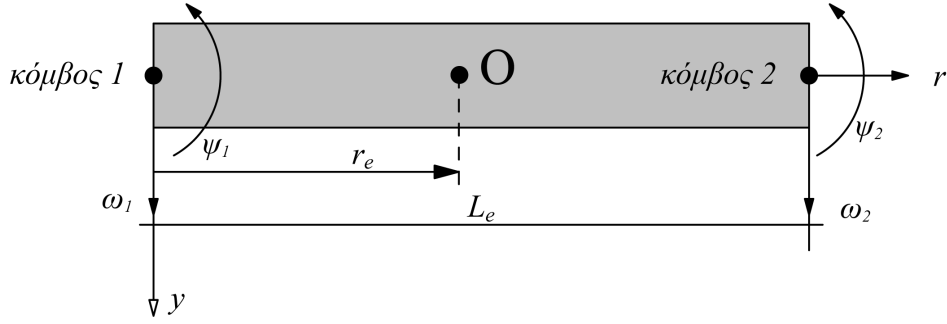
Οι κομβικές μετατοπίσεις της στοιχειώδους δοκού μπορούν να γραφούν (σχήμα 2.9) ως,

$$w_e(t, r) = \begin{bmatrix} \omega_1(t, r) & \psi_1(t, r) & \omega_2(t, r) & \psi_2(t, r) \end{bmatrix}^T \quad (2.27)$$

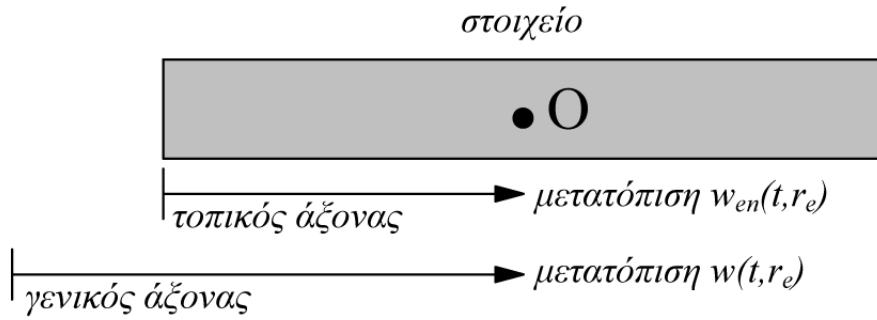
Η θέση ενός συγκεκριμένου σημείου σε αυτή τη στοιχειώδη δοκό δηλώνεται από r_e (σχήμα 2.10).

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων διακριτοποιεί ένα συνεχές σύστημα του οποίου η δομική πληροφορία περιέχεται στους κόμβους. Έτσι η πληροφορία ανάμεσα στους κόμβους πρέπει να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας συναρτήσεις που ονομάζονται επίσης «συναρτήσεις σχήματος». Λαμβάνοντας την εξίσωση κίνησης της δοκού Euler-Bernoulli (2.11) και ολοκληρώνοντας κατά μήκος της δοκού προκύπτει,

$$\int_0^L \left(EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} - f(t, r) \right) w dr = 0 \quad (2.28)$$



Σχήμα 2.9: Μία στοιχειώδης δοκός



Σχήμα 2.10: Τοπικός και γενικός άξονας πρόβολου δοκού

όπου w η συνάρτηση δοκιμασίας [87]. Όταν η δοκός διακριτοποιείται σε n αριθμό πεπερασμένων στοιχείων η εξίσωση γίνεται,

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega^e} EI \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr + \int_{\Omega^e} A_b \rho_b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} w dr - \int_{\Omega^e} f(t, r) w dr \right] + \left[-Vw - M \frac{\partial w}{\partial r} \right]_0^L = 0 \quad (2.29)$$

όπου $V = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial r^3}$ και ισούται με τη διατμητική δύναμη και $M = EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \right)$ και ισούται με τη ροπή κάμψης και Ω^e είναι ο χώρος των στοιχείων.

Από την ολοκλήρωση και με την βοήθεια των συναρτήσεων Galerkin [87] προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος που χρησιμοποιούνται. Για αυτή την περίπτωση ελαστικής δοκού είναι τα κυβικά πολυπαραγωγονικά Hermite,

$$H(r) = \left[H_1(r), H_2(r), H_3(r), H_4(r) \right]^T \quad (2.30)$$

και,

$$\begin{aligned}
 H_1(r) &= 1 - 3\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \\
 H_2(r) &= L_e\left[\left(\frac{r}{L_e}\right) - 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + \left(\frac{r}{L_e}\right)^3\right] \\
 H_3(r) &= 3\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \\
 H_4(r) &= L_e\left[-\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + \left(\frac{r}{L_e}\right)^3\right]
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\left(\frac{dH(r)}{dr}\right) = \begin{bmatrix} H_1'(r) \\ H_2'(r) \\ H_3'(r) \\ H_4'(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6r}{L_e^2} + \frac{6r^2}{L_e^3} \\ 1 - \frac{4r}{L_e} + \frac{3r^2}{L_e^2} \\ \frac{6r}{L_e^2} - \frac{6r^2}{L_e^3} \\ -\frac{2r}{L_e} + \frac{3r^2}{L_e^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ H'(L_e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{2.32}$$

Έτσι η μετατόπιση w_e σε οποιοδήποτε σημείο r_e κατά μήκος της δοκού μπορεί να προσεγγιστεί [14],

$$w_e(t, r_e) = H(r_e)^T w_e(t) \tag{2.33}$$

2.3.1 Στοιχειώδεις πίνακες μάζας και ακαμψίας

Ο στοιχειώδης πίνακας μάζας M_e μπορεί να εξαχθεί εάν μελετηθεί η κινητική ενέργεια $\mathcal{T}_e(t)$ του στοιχείου όπου,

$$\mathcal{T}_e(t) = \frac{1}{2} \dot{w}_e(t)^T M_e \dot{w}_e(t) \tag{2.34}$$

Επίσης η κινητική ενέργεια προκύπτει από το δεύτερο όρο του ολοκληρώματος στη σχέση (2.29),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_e(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho_b A_b \left(\frac{\partial w_e(t, r)}{\partial t} \right)^2 dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho_b A_b \dot{w}_e^T(t) H(r) H^T(r) \dot{w}_e(t) dr
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Από τις σχέσεις (2.34), (2.35) ο πίνακας μάζας του στοιχείου ισούται,

$$M_e = \rho_b A_b \int_0^{L_e} H(r) H^T(r) dr \tag{2.36}$$

Αντικατάθιστώντας τη (2.31) στην (2.36) παίρνουμε,

$$M_e = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L_e & 54 & -13L_e \\ -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & -13L_e & 156 & 22L_e \\ 13L_e & -3L_e^2 & 22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Ο στοιχειώδης πίνακας ακαμψίας K_e μπορεί να εξαχθεί με ανάλογο τρόπο. Η ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου $U_e(t)$ ισούται με,

$$U_e(t) = \frac{1}{2} w_e(t)^T K_e w_e(t) \quad (2.38)$$

Επίσης η ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου προκύπτει απο τον πρώτο όρο του ολοκληρώματος στη σχέση (2.29),

$$\begin{aligned} U_e(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI \left(\frac{\partial^2 w_e(t, r)}{\partial r^2} \right)^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI w_e(t)^T \left(\frac{d^2 H(r)}{dr^2} \right) \left(\frac{d^2 H(r)}{dr^2} \right)^T w_e(t) dr \end{aligned} \quad (2.39)$$

Από τις σχέσεις (2.38), (2.39) ο πίνακας ακαμψίας του στοιχείου ισούται με,

$$K_e = EI \int_0^{L_e} \left(\frac{d^2 H(r)}{dr^2} \right) \left(\frac{d^2 H(r)}{dr^2} \right)^T dr \quad (2.40)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.31) στην (2.40) παίρνουμε,

$$K_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L_e & -12 & -6L_e \\ -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & 6L_e & 12 & 6L_e \\ -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

2.3.2 Στοιχειώδεις μηχανικό φορτίο

Το στοιχειώδες διάνυσμα της δύναμης f_m^e που περιγράφει τις εξωτερικές μηχανικές δυνάμεις που ασκούνται στη στοιχειώδη δοκό λόγω μηχανικής φόρτισης

προκύπτει από τον τρίτο όρο του ολοκληρώματος (2.29) και ισούται με,

$$f_m^e = \int_0^{L_e} q(r) \begin{bmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \\ H_4(r) \end{bmatrix} dr \quad (2.42)$$

Εάν έχουμε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q(r)$ στο στοιχείο της δοκού το διάνυσμα μηχανικής δύναμης του στοιχείου γίνεται,

$$f_m^e = \frac{q(r)}{12} \begin{bmatrix} 6L_e \\ L_e^2 \\ 6L_e \\ -L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Εάν το φορτίο είναι μια συγκεντρωμένη δύναμη το διάνυσμα μηχανικής δύναμης του στοιχείου γίνεται,

$$f_m^e = \int_0^{L_e} P_0 \delta(r - r_0) \begin{bmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \\ H_4(r) \end{bmatrix} dr = P_0 \begin{bmatrix} H_1(r_0) \\ H_2(r_0) \\ H_3(r_0) \\ H_4(r_0) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

όπου P_0 είναι η συγκεντρωμένη δύναμη που ασκείται στο σημείο $r = r_0$ και $\delta(r - r_0)$ είναι η συνάρτηση Dirac.

Εάν το φορτίο μεταβάλλεται με τον χρόνο, όπως στην δυναμική ανάλυση, τότε το διάνυσμα μηχανικής δύναμης του στοιχείου γίνεται,

$$f_m^e(t) = \int_0^{L_e} q(r, t) \begin{bmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \\ H_4(r) \end{bmatrix} dr = \frac{q(r, t)}{12} \begin{bmatrix} 6L_e \\ L_e^2 \\ 6L_e \\ -L_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m(r, t) \\ M_m(r, t) \\ F_m(r, t) \\ -M_m(r, t) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

2.3.3 Στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο

Όπως έχει αναφερθεί η εφαρμογή τάσης $u_j(t)$ σ' ένα πιεζοηλεκτρικό στοιχείο, παράγει ροπές στα άκρα του πιεζοηλεκτρικού, ισοδύναμες με τη σημειακή δύναμη,

$$f_e^e(t, r) = C_p u_j(t) \left[\delta'(r - r_0) - \delta'(r - (r_0 + L_e)) \right] \quad (2.46)$$

εισάγοντας την (2.46) στην (2.42), δίνει για τη στοιχειώδη ηλεκτρική δύναμη,

$$f_e^e(t, r) = C_p u_j(t) \int_0^{L_e} [\delta'(r) - \delta'(r - L_e)] H(r) \delta r \quad (2.47)$$

όπου έχει ληφθεί $r_0 = 0$, καθώς θεωρείται η στοιχειώδης δοκός. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.24).[95]

Επομένως,

$$\begin{aligned} f_e^e(t, r) &= C_p u_j(t) \int_0^{L_e} [\delta'(r) - \delta'(r - L_e)] H(r) \delta r = C_p u(t) [-H'(0) + H'(L_e)] \\ &= C_p u_j(t) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

2.3.4 Ολικοί πίνακες μάζας και ακαμψίας

Για τον υπολογισμό των ολικών πινάκων μάζας και ακαμψίας απαιτείται η «συρραφή» των αντίστοιχων στοιχειωδών πινάκων.[94] Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τέσσερα βήματα :

- i. Μετατροπή των στοιχειωδών πινάκων από το τοπικό στο γενικό σύστημα συντεταγμένων,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_e &= T^T M_e T \\ \tilde{K}_e &= T^T K_e T \end{aligned} \quad (2.49)$$

όπου T ο πίνακας μετασχηματισμού ο οποίος για δύο βαθμούς ελευθερίας σε

κάθε κόμβο ισούται με,

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αφού η γωνία στροφής α από το τοπικό στο γενικό σύστημα είναι μηδέν.

Συνακόλουθα η (2.49) από τις σχέσεις (2.37), (2.41) γίνεται,

$$\tilde{M}_e = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L_e & 54 & -13L_e \\ -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & -13L_e & 156 & 22L_e \\ 13L_e & -3L_e^2 & 22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\tilde{K}_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L_e & -12 & -6L_e \\ -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & 6L_e & 12 & 6L_e \\ -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

- ii. Κατασκευή των εκτεταμένων στοιχειωδών πινάκων. Οι εκτεταμένοι πίνακες μάζας και ακαμψίας προκύπτουν από τους στοιχειώδεις ως,

$$\bar{M}_{e_j} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{M}_e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{2(n+1) \times 2(n+1)} =$$

$$\frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 156 & -22L_e & 54 & -13L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 54 & -13L_e & 156 & 22L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 13L_e & -3L_e^2 & 22L_e & 4L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_{e_j} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{K}_e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{2(n+1) \times 2(n+1)} = \\
 \frac{EI}{L_e^3} &\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 12 & -6L_e & -12 & -6L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -12 & 6L_e & 12 & 6L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

Οι στοιχειώδεις πίνακες $\tilde{M}_{e_j}$, $\tilde{K}_{e_j}$ τοποθετούνται στο στοιχείο $(2j-1), (2j-1)$ για $j = 1 : n$.

iii. Οι γενικοί πίνακες μάζας και ακαμψίας προκύπτουν απο τις,

$$M_G = \sum_{j=1}^n \bar{M}_{e_j} \quad K_G = \sum_{j=1}^n \bar{K}_{e_j} \quad (2.54)$$

όπου $M_G, K_G \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times 2(n+1)}$. Για παράδειγμα εάν $n=4$ που ισχύει στην υπό μελέτη δοκό οι πίνακες ισούνται με,

$$\begin{aligned}
 M_G &= \\
 \frac{\rho_b A_b L_e}{420} &\begin{bmatrix} 156 & -22L_e & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 156 & -22L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

$$K_G = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L_e & -12 & -6L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 12 & 6L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

- iv. Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών που ισχύουν για την πρόβολο δοκό. Εξ αιτίας της πάκτωσης διαγράφονται οι δύο πρώτες γραμμές και στήλες των M_G , K_G και προκύπτουν οι ολικοί πίνακες μάζας M και ακαμψίας K , όπου $M, K \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Για παράδειγμα εάν $n=4$ που ισχύει στην υπό μελέτη δοκό οι πίνακες ισούνται με,

$$M = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 \\ 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e \\ 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 156 & -22L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$K = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 \\ -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e \\ 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 12 & 6L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

2.3.5 Ολικό διάνυσμα μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης

Το ολικό διάνυσμα της εξωτερικής μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης προκύπτει από τη «συρραφή» των αντίστοιχων στοιχειωδών διανυσμάτων. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τρία βήματα [94]:

- i. Κατασκευή των εκτεταμένων στοιχειωδών διανυσμάτων. Τα εκτεταμένα διανύσματα προκύπτουν από τα στοιχειώδη (2.42), (2.48) ως,

$$\bar{f}_j = \begin{bmatrix} 0 \dots & 0 \dots & 0 & \vdots & f^e & \vdots & 0 \dots & 0 \dots & 0 \end{bmatrix}_{2(n+1) \times 1}^T \quad (2.59)$$

όπου το στοιχειώδες διάνυσμα τοποθετείται στη θέση $(2j-1)$. Για παράδειγμα εάν $n = 4$ που ισχύει για την υπό μελέτη δοκό και για ομοιόμορφη φόρτιση $q(t)$, το διάνυσμα ισούται με

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & F(t), & M(t), & F(t), & -M(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 1}^T \quad (2.60)$$

$$\text{όπου } F(t) = \frac{q(t)}{12} 6L_e, \quad M(t) = \frac{q(t)}{12} L_e^2$$

- ii. Το γενικό διάνυσμα προκύπτει από την,

$$f_G = \sum_{j=1}^n \bar{f}_j, \quad f_G \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times 1} \quad (2.61)$$

Για παράδειγμα εάν $n = 4$ και για ομοιόμορφη φόρτιση $q(t)$ το διάνυσμα ισούται με,

$$\begin{bmatrix} F(t) & M(t) & 2F(t) & 0 & 2F(t) & 0 & 2F(t) & 0 & F(t) & -M(t) \end{bmatrix}_{10 \times 1} \quad (2.62)$$

- iii. Το ολικό διάνυσμα της μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης $f(t)$ προκύπτει μετά τη διαγραφή των δύο πρώτων γραμμών εξ αιτίας των συνοριακών συνθηκών που ισχύουν για την πρόβολο δοκό, επιπλέον η ροπή κάμψης στον ακραίο κόμβο ισούται με μηδέν.

$$f(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \quad (2.63)$$

Για $n = 4$ και για ομοιόμορφη φόρτιση $q(r, t)$, το διάνυσμα ισούται με

$$\begin{bmatrix} 2F(t) & 0 & 2F(t) & 0 & 2F(t) & 0 & F(t) & 0 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (2.64)$$

2.4

Γενικές εξισώσεις κίνησης της δοκού

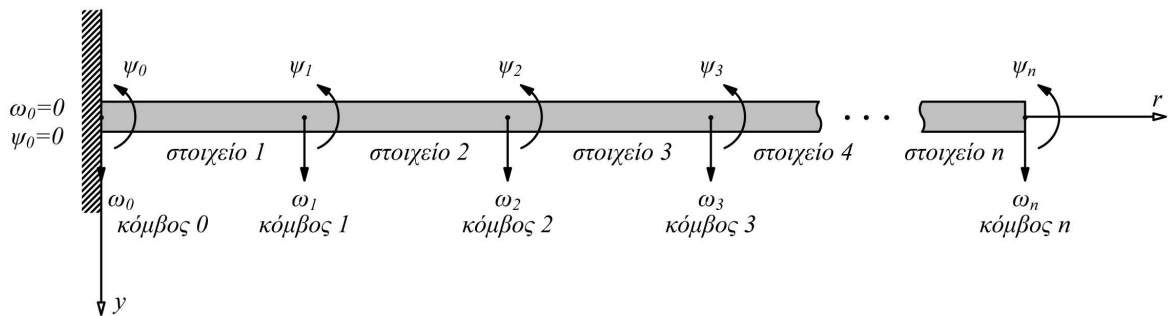
Η εξίσωση Lagrange της στοιχειώδους δοκού είναι,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T_e}{\partial \dot{w}_e} \right] + \left[\frac{\partial U}{\partial w_e} \right] &= f^e \Rightarrow \\ M_e \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + K_e w(t) &= f_m^e + f_e^e \end{aligned} \quad (2.65)$$

επομένως η ολική εξίσωση της στοιχειώδους δοκού είναι,

$$M\ddot{w}(t) + Kw(t) = f_m(t) + f_e(t) \quad (2.66)$$

όπου M και K οι ολικοί πίνακες μάζας και ακαμψίας σχέση (2.58) (2.57) και $f_m(t), f_e(t)$ τα ολικά διανύσματα μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης.[96]



Σχήμα 2.11: Κομβικές μετατοπίσεις και στροφές της δοκού

Η ανεξάρτητη μεταβλητή $w(t)$ είναι ο συνδυασμός της κατακόρυφης μετατόπισης

$\omega_i(t)$ του κόμβου i και της στροφής ψ_i του κόμβου i (σχήμα 2.11).

$$w(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \omega_n(t) \\ \psi_n \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

όπου n είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται στην ανάλυση.

Για να συμπεριλάβουμε τις επιδράσεις απόσβεσης θεωρείται η απόσβεση Rayleigh [87]. Η απόσβεση αυτή δηλώνεται με τον πίνακα ιξώδους απόσβεσης D που είναι συνάρτηση των ολικών πινάκων μάζας και ακαμψίας και ισούται με,

$$D = aM + \beta K \quad (2.68)$$

όπου a και β είναι οι μειωτικοί συντελεστές των πινάκων μάζας και ακαμψίας. Όταν χρησιμοποιείται μόνο η απόσβεση ακαμψίας δηλαδή εάν $a = 0$ ο ιδιομορφικός λόγος απόσβεσης ζ_β ισούται με,

$$\zeta_\beta = \frac{w_r}{2} \beta \quad (2.69)$$

όπου w_r η ιδιοσυχνότητα. Ενώ όταν ληφθεί υπόψη μόνο η απόσβεση μάζας δηλαδή $\beta = 0$ ο ιδιομορφικός λόγος απόσβεσης ζ_a ισούται με,

$$\zeta_a = \frac{a}{2} \frac{l}{w_r} \quad (2.70)$$

Οι συντελεστές a και β μπορούν να υπολογιστούν από πειράματα. Για να αποδειχτεί η αποδοτικότητα του ελεγκτή έχουν ληφθεί πολύ μικρές τιμές για τους συντελεστές a και β .

Η εξίσωση (2.66) μετά την εισαγωγή της απόσβεσης τροποποιείται ως,

$$M\ddot{w}(t) + D\dot{w}(t) + Kw(t) = f_m(t) + f_e(t) \quad (2.71)$$

Η εξίσωση (2.71) είναι η γενική δυναμική εξίσωση της δοκού.[14]

2.5

Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

Χρησιμοποιώντας τη δυναμική εξίσωση του συστήματος (2.71), για τη μετατροπή στο χώρο κατάστασης θεωρούμε τον μετασχηματισμό [97],

$$x(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Η μετατροπή στο χώρο κατάστασης γίνεται ως ακολούθως,

$$\begin{aligned} M\ddot{w}(t) + D\dot{w}(t) + Kw(t) &= f_m(t) + f_e(t) \\ \Rightarrow \ddot{w}(t) &= M^{-1}(f_m(t) + f_e(t)) - M^{-1}D\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ M^{-1}(f_m(t) + f_e(t)) - M^{-1}D\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}(f_m(t) + f_e(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ -M^{-1}D\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}(f_m + f_e)(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{array} \right] \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_e(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{array} \right] \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_e(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{array} \right] \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Το διάνυσμα της ηλεκτρικής φόρτισης $f_e(t)$ προκύπτει από τη διαδικασία της «συρραφής» από το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο. Εάν για παράδειγμα έχουμε τέσσερα στοιχεία, κάτι που ισχύει για την υπο μελέτη δοκό, το διάνυσμα ισούται

με [97],

$$f_e(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_p u_1(t) - c_p u_2(t) \\ 0 \\ -c_p u_3(t) + c_p u_2(t) \\ 0 \\ c_p u_3(t) - c_p u_4(t) \\ 0 \\ c_p u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_p & -c_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_p & -c_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_p & -c_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = F_e^* \cdot u(t) \quad (2.75)$$

Στη γενική περίπτωση ο F_e^* είναι ένας πίνακας διαστάσεων $2n \times n$ και $u(t)$ το διάνυσμα ελέγχου διάστασης $n \times 1$, που αντιπροσωπεύει τις τάσεις $u_j(t)$ των ενεργοποιητών (παράγραφος 2.3.3).[14]

Επομένως η εξίσωση (2.74) με βάση τον μετασχηματισμό (2.72) γίνεται,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}F_e^* \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1} \end{bmatrix} f_m(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) + Gf_m(t) \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} &= Ax(t) + \begin{bmatrix} B & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ f_m(t) \end{bmatrix} \\ &= Ax(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Για τη μέτρηση της κατάστασης του συστήματος χρησιμοποιούνται ως αισθητήρες αντίστοιχα πιεζοηλεκτρικά όπως φαίνεται στο σχήμα 2.12, η δυνατότητα αυτή περιγράφεται απο το ανάστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο που περιγράφεται στην ενότητα Α.5 του Παραρτήματος Α. Η τάση εξόδων αυτών των πιεζοηλεκτρικών αισθητήρων είναι ανάλογη των κομβικών μετακινήσεων των αντίστοιχων στοιχείων.

Επομένως η έξοδος του συστήματος είναι,

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_3(t) & \dots & x_{n-1}(t) \end{bmatrix}^T = Cx(t) \quad (2.78)$$

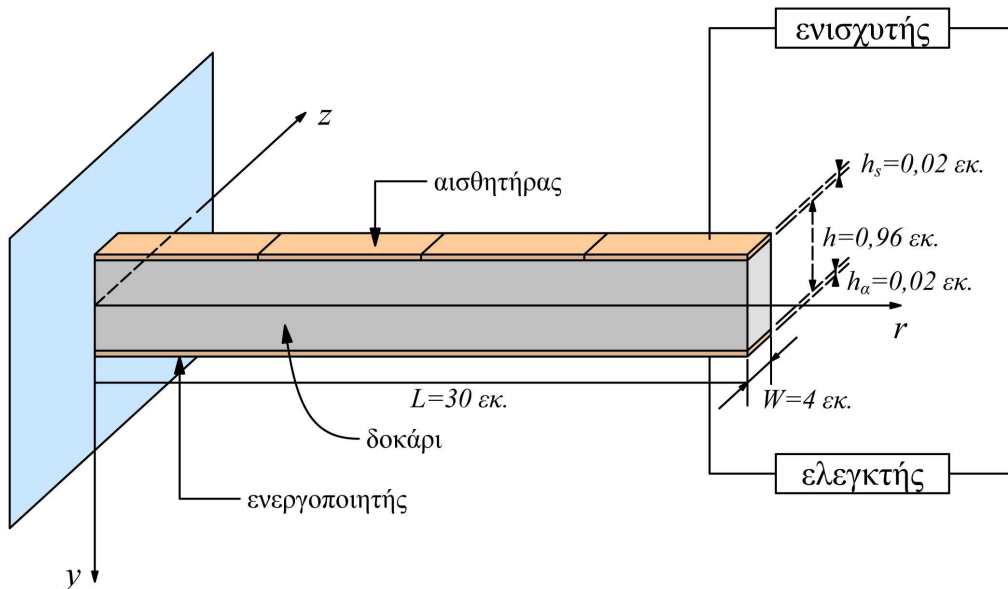
με,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

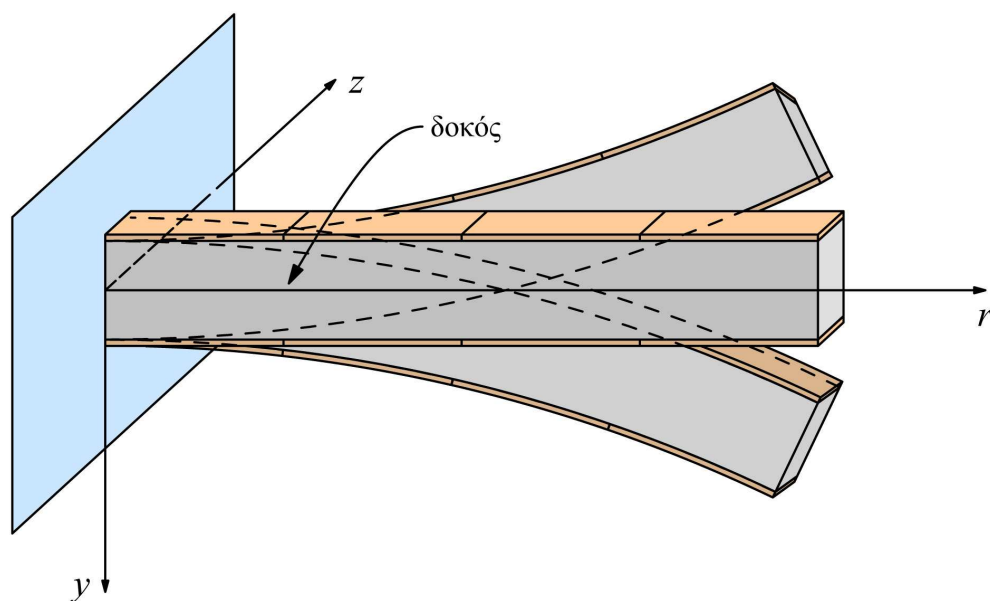
Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται είναι m, rad, sec και N.

2.6 Εξισώσεις κίνησης της υπό μελέτη δοκού

Θεωρείται η πρόβλος δοκός με τέσσερα πεπερασμένα στοιχεία και με ενσωματωμένα και στις δύο (άνω και κάτω) επιφάνειες, συμμετρικά τοποθετημένα πιεζοηλεκτρικά, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.12. Η δοκός γίνεται από σύνθετα γραφίτη / εποξικό T300/976 και το πιεζοηλεκτρικό ανήκει στην κατηγορία PZT G1195N. Οι ιδιότητες της δοκού και οι διαστάσεις των πιεζοηλεκτρικών ενεργοποιητών φαίνονται στον πίνακα 2.1. Το πάχος των πιεζοηλεκτρικών είναι μικρό σε σχέση με το πάχος της δοκού, με συνέπεια η δοκός να θεωρείται ομοιόμορφη. Τα κατώτερα πιεζοηλεκτρικά εξυπηρετούν ως ενεργοποιητές και τα ανώτερα ως αισθητήρες (σχήμα 2.12, 2.13).



Σχήμα 2.12: Σχεδιάγραμμα δοκού με πιεζοηλεκτρικά



Σχήμα 2.13: Η δοκός σε κάμψη

Ιδιότητες	Μονάδες	Δοκός		Πιεζοηλεκτρικός ενεργοποιητής	
Υλικό		γραφίτης / εποξικό T300/976		PZT G1195N	
Μήκος	m	L	0,3	L_p	0,0075
Πλάτος	m	W	0,004	W_p	0,004
Πάχος	m	h	0,0096	h_p	0,0002
Μέτρο ελαστικότητας Young	N/m^2	E	$1,5 \cdot 10^{11}$	E_p	$6,3 \cdot 10^{10}$
Ροπή αδράνειας	m^4	I	$3,33 \cdot 10^{-9}$	I_p	$1,92 \cdot 10^{-10}$
Πυκνότητα	Kg/m^2	ρ_b	1600	ρ	7600
Πιεζοηλεκτρική σταθερά έντασης	m/V	-	-	d_{31}	$254 \cdot 10^{-12}$
Μειωτικοί συντελεστές απόσβεσης	-	α, β	0,0005	-	

Πίνακας 2.1: Ιδιότητες και διαστάσεις δοκού και πιεζοηλεκτρικών ενεργοποιητών

Οι πίνακες μάζας $M_{8 \times 8}$, ακαμψίας $K_{8 \times 8}$, απόσβεσης $D_{8 \times 8}$ και $F_{e 8 \times 4}^*$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.58), (2.57), (2.68), (2.75) και παρατίθενται στο Παράρτημα Β στις σχέσεις (B.1), (B.2), (B.8), (B.6).

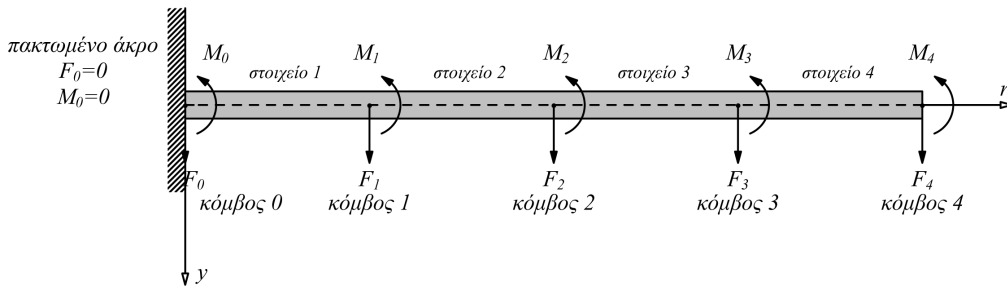
Βάσει των πινάκων αυτών υπολογίζονται και οι πίνακες,

$$A = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 8} & I_{8 \times 8} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix}_{16 \times 16},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 4} \\ M^{-1}F_e^* \end{bmatrix}_{16 \times 4},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 8} \\ M^{-1} \end{bmatrix}_{16 \times 8}$$

που δίνονται στο Παράρτημα Β, στις σχέσεις (B.3), (B.5), (B.7).



Σχήμα 2.14: Μοντέλο έξυπνης δοκού χωρισμένο σε 4 πεπερασμένα στοιχεία

Το διάνυσμα μηχανικής δύναμης f_m είναι,

$$f_m = \begin{bmatrix} F_1 & M_1 & F_2 & M_2 & F_3 & M_3 & F_4 & M_4 \end{bmatrix}_{8 \times 1}^T \quad (2.80)$$

όπου F_i, M_i είναι αντίστοιχα η δύναμη και η ροπή για κάθε κόμβο i (σχήμα 2.14) που προκύπτει μετά τη συρραφή των στοιχειωδών διανυσμάτων. [94]

2.6.1 Μηχανικές είσοδοι στο σύστημα

Στις προσομοιώσεις που ακολουθούν για την εξακρίβωση της αποτελεσματικότητας των ελεγκτών χρησιμοποιούνται τρία είδη μηχανικών δυνάμεων:

- Σταθερή συγκεντρωμένη δύναμη 10N στο ελεύθερο άκρο της δοκού,

$$f_m(t, r) = 10\delta(r - L) \quad (2.81)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.59), (2.60), (2.61), (2.62) η δύναμη μετα-

τρέπεται στο χώρο κατάστασης στην μορφή,

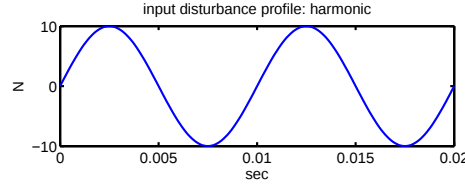
$$f_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.82)$$

- Ημιτονοειδής δυναμική φόρτιση με εύρος ταλάντωσης 10N και περίοδο 0,01 sec σχήμα (2.15),

$$q_0(t) = 10\eta\mu(0,01t) \quad (2.83)$$

Η δύναμη αυτή είναι, ομοιόμορφα κατανεμημένη, χρονικά μεταβαλλόμενη,

$$f_m(t) = q_0(t) \quad (2.84)$$



Σχήμα 2.15: Ημιτονοειδής φόρτιση

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.59), (2.60), (2.61), (2.62) η δύναμη μετατρέπεται στο χώρο κατάστασης στην μορφή,

$$\begin{aligned} f_m(t) &= L_e \begin{bmatrix} 10\eta\mu(t) & 0 & 10\eta\mu(t) & 0 & \cdots & 5\eta\mu(t) & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0.75\eta\mu(t) & 0 & 0.75\eta\mu(t) & 0 & \cdots & 0.375\eta\mu(t) & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.85)$$

- Πραγματική αιολική φόρτιση, σχήμα (2.16)

$$f_m(t) = y(t) \quad (2.86)$$

Η συνάρτηση $y(t)$ προέκυψε από το αρχείο της ταχύτητας του ανέμου μέσω της σχέσης,

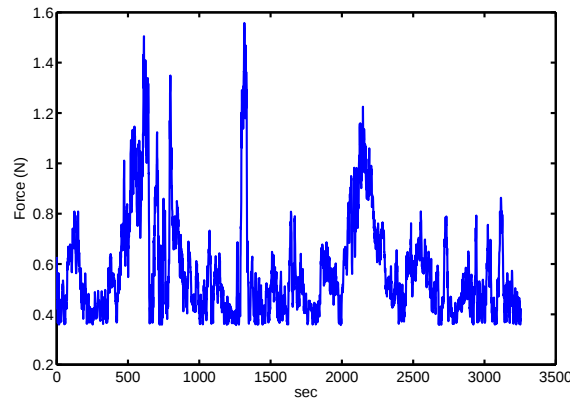
$$y(t) = 0,5\rho v^2(t)c_v E \quad (2.87)$$

όπου $\rho = 1,125\text{kg}/\text{m}^3$ η πυκνότητα του αέρα, c_v συντελεστής που εξαρτάται από τη διατομή της δοκού και για ορθογωνική διατομή είναι $c_v = 1,5$, $v(t)$ η

ταχύτητα του ανέμου και E η επιφάνεια της δοκού που έρχεται σε επαφή με τον αέρα. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.59), (2.60), (2.61), (2.62) η δύναμη μετατρέπεται στο χώρο κατάστασης στην μορφή,

$$f_m(t) = \begin{bmatrix} y(t) & 0 & y(t) & 0 & y(t) & 0 & y(t) & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.88)$$

Το αρχείο της αιολικής ταχύτητας που χρησιμοποιήθηκε παραχωρήθηκε από το εργαστήριο αιολικής ενέργειας του ΑΤΕΙ Κρήτης. Η δειγματοληψία έγινε ανά 1 sec και χρησιμοποιήθηκαν 3257 μετρήσεις από την θέση του Εσταυρωμένου Ηρακλείου Κρήτης τον Μάρτιο του 2006. Για τις εκάστοτε ανάγκες της προσομοίωσης η δειγματοληψία έχει μεταβληθεί έτσι ώστε να προκύπτουν εύλογοι χρόνοι προσομοίωσης.



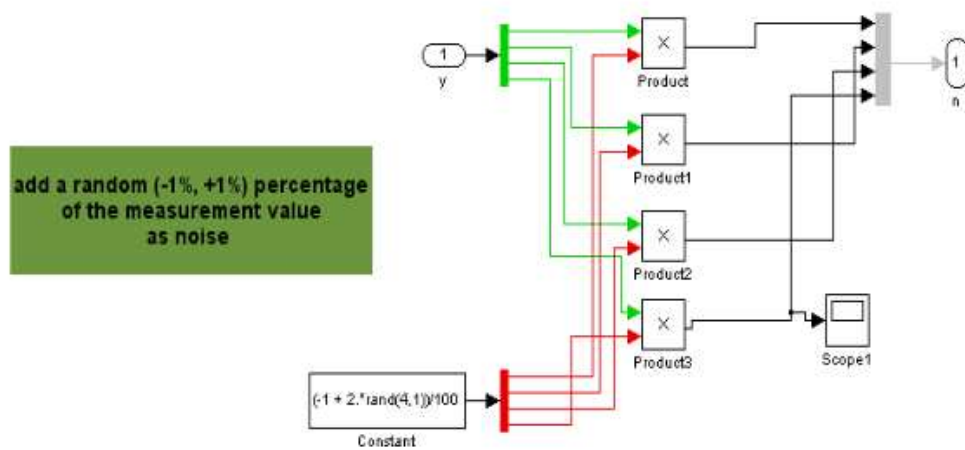
Σχήμα 2.16: Αιολική φόρτιση

2.6.2 Θόρυβος

Επιπλέον για τις προσομοιώσεις έχει εισαχθεί θόρυβος σαν τυχαίο ποσοστό στο διάστημα $(+1\%, -1\%)$, επί των μετρήσεων των εξόδων του συστήματος. Εξ αιτίας των μικρών μετατοπίσεων των κόμβων του συστήματος, το εύρος του θορύβου λαμβάνεται μικρό, της τάξης του 5×10^{-10} , ενώ για κάθε κόμβο της δοκού γίνεται εισαγωγή του σήματος με διαφορετικό ποσοστό με μικρότερο ποσοστό στον πρώτο κόμβο εξ αιτίας του παχτωμένου άκρου της δοκού.

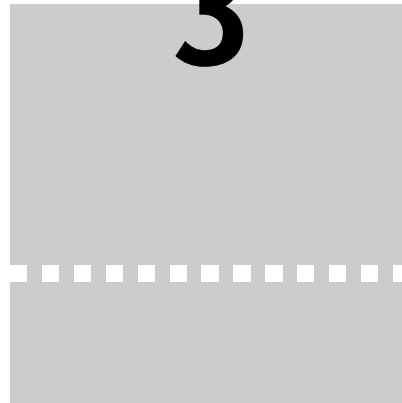
Το σήμα του θορύβου έχει ληφθεί ίδιο σε όλες τις προσομοιώσεις (με χρήση του ελεγκτή LQR, Hinfinity, Hifoo).

Το μοντέλο του θορύβου όπως εισάγεται στο Matlab δίνεται στο σχήμα 2.17



Σχήμα 2.17: Μοντέλο θορύβου όπως έχει ληφθεί στο Simulink

3



ΕΛΕΓΧΟΣ

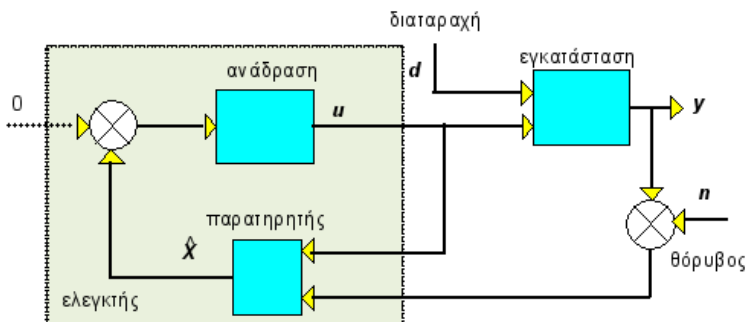
Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται και συγκρίνονται οι διάφορες στρατηγικές ελέγχου για το πρόβλημα της κατακόρυφης ρύθμισης της θέσης της δοκού.

3.1 Ορισμός του προβλήματος ελέγχου

Το πρόβλημα ελέγχου είναι να διατηρηθεί η δοκός σε ισορροπία (κάτι που σημαίνει μηδενικές μετατοπίσεις και στροφές) παρ' όλες τις διαταραχές, το θόρυβο μετρήσεων, και τις ατέλειες του μοντέλου, χρησιμοποιώντας τις διαθέσιμες μετρήσεις και στη συνέχεια τον έλεγχο. Το γενικό διάγραμμα ελέγχου φαίνεται στο σχήμα 3.1.

Στο διάγραμμα παρατηρούμε τα εξής:

- i. Οι διαταραχές θεωρούνται μη μετρήσιμες και απρόβλεπτες.
- ii. Το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι μετρήσιμο στο σύνολο του, γεγονός που καθιστά απαραίτητη τη χρήση παρατηρητή.



Σχήμα 3.1: Γενικό διάγραμμα ελέγχου του συστήματος

- iii. Ο παρατηρητής δεν έχει πληροφορία για τη διαταραχή, με αποτέλεσμα η εκτίμησή του να είναι εσφαλμένη.

Ένας τρόπος παράκαμψης του προβλήματος αυτού θα ήταν η χρήση του παρατηρητή αγνώστου εισόδου (UIO-unknown input observer) [77]. Δυστυχώς, η προσέγγιση αυτή δεν είναι δυνατή καθώς μία εκ των απλών προϋποθέσεων υλοποίησης του $m \geq q$ δεν ισχύει, αφού m είναι η διάσταση της παρατήρησης και q η διάσταση της διαταραχής.

Η κατάσταση αυτή περιπλέκει το πρόβλημα και καθιστά προβληματική τη χρήση κλασικών ελεγκτών όπως ο ελεγκτής LQR καθώς η απόδοση τους εξαρτάται άμεσα από την διαθεσιμότητα του διανύσματος κατάστασης ή στη καλύτερη περίπτωση ενός αξιόπιστου εκτιμητή του. Στη συνέχεια θα δούμε συγκριτικά αποτελέσματα του ελεγκτή LQR και του πιο εξελιγμένου H_∞ , που θα επιβεβαιώσουν τη δυσκολία αυτή.

3.2

Σχεδιασμός και καθορισμός του συστήματος

Η σύγχρονη προσέγγιση για το χαρακτηρισμό της απόδοσης ενός συστήματος κλειστού βρόχου είναι το μέγεθος κάποιων πινάκων συναρτήσεως μεταφοράς του κλειστού βρόχου χρησιμοποιώντας διάφορες νόρμες πινάκων. Οι νόρμες πινάκων δείχνουν πόσο μεγάλο μπορεί να είναι ένα σήμα εξόδου για κάποιες κλάσεις των σημάτων εισόδου. Γι' αυτό το λόγο είναι σημαντικό να χαρακτηριστούν τα σήματα και οι νόρμες των πινάκων.

3.2.1 Σήματα και νόρμες πινάκων

Οι ιδιόμορφες τιμές ενός $n \times n$ πίνακα συνάρτησης μεταφοράς $G(j\omega)$ ορίζεται ως,

$$\sigma_i(\omega) = [\lambda_i(G^*(j\omega)G(j\omega))]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

όπου το $*$ ορίζει το μιγαδικό συζυγή πίνακα, και τα λ είναι οι ιδιοτιμές.

Η νόρμα-2 ενός διανυσματικού σήματος $u(t)$ μπορεί να οριστεί ως,

$$\|u(t)\|_2 = \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^n |u_i(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

και αντιπροσωπεύει την ενέργεια του σήματος.

Η νόρμα H_∞ ενός $n \times n$ πίνακα συνάρτησης μεταφοράς ορίζεται ως,

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[G(j\omega)] \quad (3.3)$$

Γραφικά αυτή η τιμή είναι η κορυφή του διαγράμματος Bode. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- Ελαχιστοποίηση της νόρμας H_∞ αντιστοιχεί σε ελαχιστοποίηση της μέγιστης απολαβής ως προς την ενέργεια του συστήματος.
- Εάν η είσοδος είναι ένα οποιοδήποτε σήμα L_2 τότε η ελαχιστοποίηση της νόρμας H_∞ αντιστοιχεί σε ελαχιστοποίηση της χειρότερης επίδρασής του επί της ενέργειας της εξόδου.

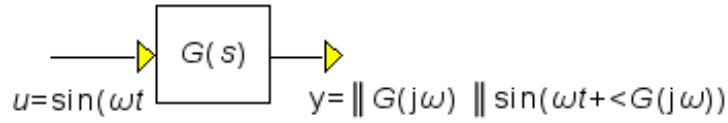
Οι ιδιόμορφες τιμές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση της ευαισθησίας (conditioning) του συστήματος. Ο δείκτης ευαισθησίας c ορίζεται ως,

$$c = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \quad (3.4)$$

Εάν $c \gg 1$ σημαίνει ότι μερικές είσοδοι έχουν ισχυρή επιρροή στις εξόδους, ενώ άλλες όχι.

Χρησιμοποιώντας ιδιόμορφες τιμές και το μετασχηματισμό (SVD ή Karhunen Loeve) μπορούμε να απομονώσουμε τους βασικούς τρόπους ταλάντωσης γραμμικών συστημάτων.

Για να γίνει κατανοητή η έννοια της ιδιόμορφης τιμήςας δούμε το σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Δομικό διάγραμμα εισόδου - εξόδου συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$

Ο πίνακας $G_{m \times n}(s)$ μπορεί να αποσυντεθεί ως,

$$G(j\omega) = U(j\omega)\Sigma(j\omega)V^*(j\omega) \quad (3.5)$$

όπου $U_{m \times m}$ και $V_{n \times n}$ είναι οι μοναδιαίοι πίνακες και,

$$\Sigma(j\omega) = \begin{bmatrix} \sigma_1(j\omega) & & & & & \\ & \sigma_2(j\omega) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_p(j\omega) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

όπου $p = \min\{m, n\}$ και σ_i είναι οι ιδιόμορφες τιμές του G ταξινομημένες κατά αύξουσα σειρά, δηλαδή $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_p$.

Ισχύει,

$$G\nu_i = \sigma_i u_i \quad (3.7)$$

Περαιτέρω εάν οι U και V εκφραστούν σε πολική μορφή,

$$\begin{aligned} U_{ki} &= u_{ki} e^{j\theta_{ki}} \\ V_{li} &= v_{li} e^{j\phi_{li}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

και η είσοδος του συστήματος είναι,

$$r(t) = \nu_{li} \sin(\omega t + \phi_{li}) \quad (3.9)$$

τότε η έξοδος στη μόνιμη κατάσταση θα είναι,

$$y(t) = \sigma_i u_{ki} \sin(\omega t + \theta_{ki}) \quad (3.10)$$

Η (3.10) καταδεικνύει τη χρήση της ιδιόμορφης τιμής σαν ένα μοναδικό μέτρο πολυμεταβλητής απολαβής.

3.2.2 Δομημένη ιδιόμορφη τιμή

Η δομημένη ιδιόμορφη τιμή ενός πίνακα συνάρτησης μεταφοράς M ορίζεται ως,

$$\mu(M) = \begin{cases} \frac{1}{\min_{k_m} \{ \det(I - k_m M \Delta) = 0, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1 \}} \\ 0, \text{ αν δεν υπάρχει } \Delta \text{ τέτοιο ώστε } \det(I - M \Delta) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Δηλαδή η $\mu(M)$ ορίζει το μικρότερο δομημένο Δ (που μετράται με $\bar{\sigma}(\Delta)$) το οποίο καθιστά την ορίζουσα $\det(I - M \Delta) = 0$: τότε $\mu(M) = \frac{1}{\bar{\sigma}(\Delta)}$. Αυτό σημαίνει ότι τιμές του μ μικρότερες της μονάδας είναι επιθυμητές (όσο πιο μικρές τόσο το καλύτερο).

3.2.3 Στόχοι σχεδίασης

Οι στόχοι σχεδίασης κατατάσσονται σε δυο κατηγορίες:

i. Ονομαστική απόδοση

- (α) Ευστάθεια του κλειστού συστήματος (εγκατάσταση και ελεγκτής)
- (β) Εξασθένιση διαταραχής με ικανοποιητική μεταβατική απόκριση.
- (γ) Μικρό μέγεθος ελέγχου.

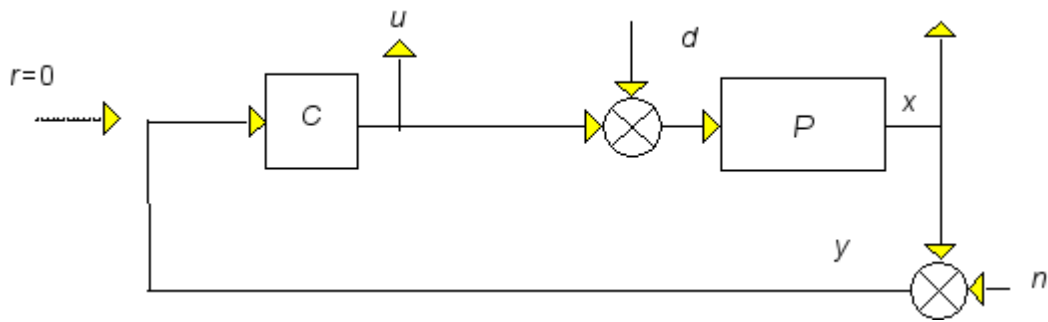
ii. Εύρωστη απόδοση

Τα (α') έως (γ') πρέπει να ισχύουν παρ' όλα τα σφάλματα μοντελοποίησης.

3.2.4 Προδιαγραφές συστήματος

Για να εκφράσουμε τις απαιτήσεις του συστήματος έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι προαναφερθέντες στόχοι (i) - (ii) πρέπει να αναπαραστήσουμε το σύστημά μας στη λεγόμενη δομή $N - \Delta$. Για να το επιτύχουμε αυτό ας ξεκινήσουμε με το απλό διάγραμμα του σχήματος 3.3.

Το σχήμα αυτό είναι παρόμοιο με το σχήμα 3.1, με τη διαφορά ότι αναφέρονται διεξοδικά οι έξοδοι u και x .



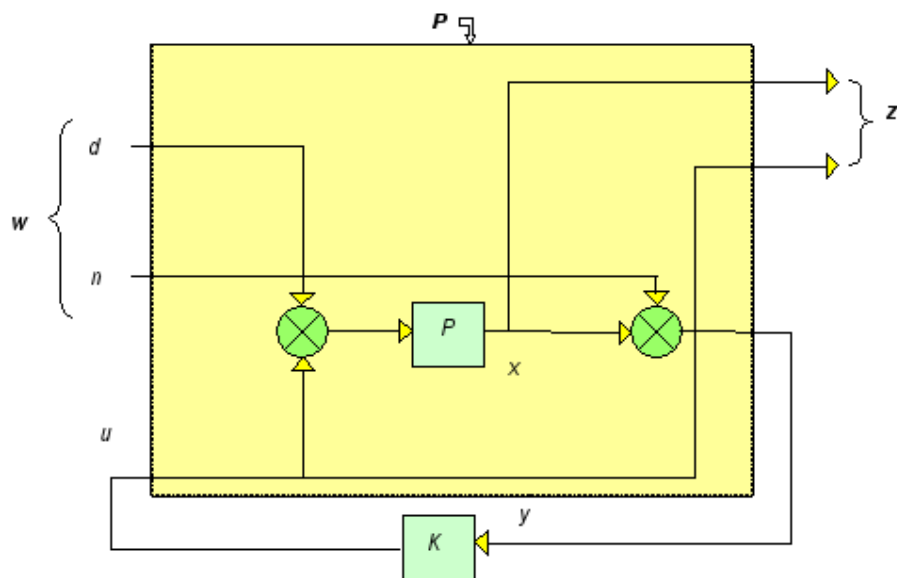
Σχήμα 3.3: Κλασσικό διάγραμμα ελέγχου

Σ' αυτό το διάγραμμα υπάρχουν δύο είσοδοι d και n και δύο έξοδοι u και x . Υποτίθεται ότι,

$$\left\| \begin{matrix} d \\ n \end{matrix} \right\|_2 \leq 1, \quad \left\| \begin{matrix} x \\ u \end{matrix} \right\|_2 \leq 1 \quad (3.12)$$

Εάν η (3.12) δεν ισχύει μπορούν να χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις βαρών έτσι ώστε τα μετασχηματισμένα σήματα να την ικανοποιούν.

Επανασχεδιάζουμε το σχήμα 3.3 στη μορφή του 3.4.

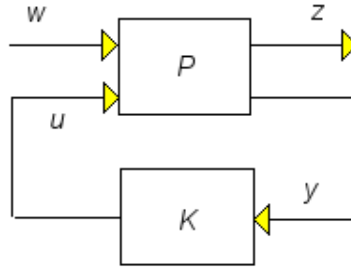


Σχήμα 3.4: Αναλυτικό διάγραμμα δύο θυρών

ή με μικρότερη λεπτομέρεια σαν το 3.5. με,

$$z = \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

όπου z είναι οι έξοδοι που πρέπει να ελεγχθούν και w οι εξωγενείς είσοδοι.



Σχήμα 3.5: Διάγραμμα δύο θυρών

Δεδομένου ότι το P έχει δύο εισόδους και δύο εξόδους το σύστημα μπορεί να γραφτεί ως,

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \stackrel{\text{ορ}}{=} P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

επίσης,

$$u(s) = K(s)y(s) \quad (3.15)$$

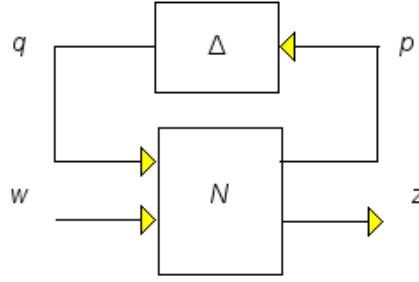
Αντικαθιστώντας την (3.14) στην (3.15), προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς $N_{zw}(s)$,

$$N_{zw}(s) = P_{zw}(s) + P_{zu}(s)K(s)(I - P_{yu}(s)K(s))^{-1}P_{yw}(s) \quad (3.16)$$

Για να εξαχθούν προδιαγραφές ευρωστίας του συστήματος απαιτείται το επιπλέον σχήμα 3.6, όπου το N ορίζεται από τη σχέση (3.16) και η αβεβαιότητα Δ ικανοποιεί την $\|\Delta\|_\infty \leq 1$.

Το σχήμα 3.6 ορίζει τη σχέση,

$$z = \mathcal{F}_u(N, \Delta)w = [N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}]w = Fw \quad (3.17)$$



Σχήμα 3.6: N - Δ δομή για μοντελοποίηση της αβεβαιότητας

Με δεδομένη τη δομή αυτή μπορούν να διατυπωθούν οι παρακάτω ορισμοί,

Ονομαστική ευστάθεια (NS) $\Leftrightarrow N$ ευσταθής

Ονομαστική απόδοση (NP) $\Leftrightarrow \|N_{22}(j\omega)\|_\infty \leq 1 \ \forall \omega$ και NS

Εύρωστη ευστάθεια (RS) $\Leftrightarrow F = \mathcal{F}_u(N, \Delta)$ ευσταθής $\forall \Delta$, $\|\Delta\|_\infty < 1$ και NS

Εύρωστη απόδοση (RP) $\Leftrightarrow \|F\|_\infty < 1$, $\forall \Delta$, $\|\Delta\|_\infty < 1$ και NS (3.18)

Έχει αποδειχτεί ότι ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες, στην περίπτωση μπλοκ διαγώνιων πραγματικών ή μιγαδικών διαταραχών Δ :

- i. Το σύστημα είναι ονομαστικά ευσταθές εάν ο M είναι εσωτερικά ευσταθής.
- ii. Το σύστημα επιδεικνύει ονομαστική απόδοση εάν $\bar{\sigma}(N_{22}(j\omega)) < 1$
- iii. Το σύστημα (M, Δ) είναι εύρωστα ευσταθές αν και μόνο αν,

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_\Delta(N_{11}(j\omega)) < 1 \quad (3.19)$$

όπου μ_Δ είναι η δομημένη ιδιόμορφη τιμή του N δοθείσης της δομημένης αβεβαιότητας Δ . Αυτό το θεώρημα είναι γνωστό σαν το «γενικευμένο θεώρημα μικρής απολαβής».

- iv. Το σύστημα (N, Δ) επιδεικνύει εύρωστη απόδοση αν και μόνο αν,

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta_a}(N(j\omega)) < 1 \quad (3.20)$$

με,

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

όπου Δ_p είναι πλήρως μιγαδικός και έχει την ίδια δομή με τον Δ και διάσταση που αντιστοιχεί στα w και z .

Δυστυχώς, μπορούν να εκτιμηθούν μόνο φράγματα στο μ .

3.3 Σύνθεση ελεγκτών

Όλα τα προαναφερθέντα απαντούν στο πρόβλημα της ανάλυσης και μας δίνουν τη δυνατότητα να ορίσουμε κριτήρια απόδοσης όλων των ελεγκτών και να τους συγκρίνουμε μεταξύ τους.

Επίσης είναι δυνατόν να βρούμε προσεγγιστικά έναν ελεγκτή K με τον οποίο θα επιτυγχάνεται δομημένη απόδοση σε σχέση με τη δομημένη ιδιόμορφη τιμή του μ . Στη μέθοδο αυτή, η οποία είναι γνωστή ως επαναληπτική μέθοδος $(D, G - K)$ το πρόβλημα της εύρεσης ενός μ -βέλτιστου ελεγκτή K τέτοιος ώστε $\mu(\mathcal{F}_u(F(j\omega)), K(j\omega)) \leq \beta$, $\forall \omega$ μετασχηματίζεται στο πρόβλημα εύρεσης πινάκων συναρτήσεων μεταφοράς $D(\omega) \in \mathcal{D}$ και $G(\omega) \in \mathcal{G}$, τέτοιων ώστε,

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma} \left[\left(\frac{D(\omega) \mathcal{F}_u(F(j\omega), K(j\omega)) D^{-1}(\omega)}{\gamma} - jG(\omega) \right) (I + G^2(\omega))^{-\frac{1}{2}} \right] \leq 1, \quad \forall \omega \quad (3.22)$$

Αυτή η μέθοδος δυστυχώς δεν μπορεί να βρει ούτε καν τοπικά μέγιστα. Παρ' όλα αυτά για μιγαδικές διαταραχές υπάρχει η επαναληπτική μέθοδος γνωστή ως $D - K$ την οποία υλοποιεί το Matlab [78]. Συνδυάζει σύνθεση H_{∞} και μ -ανάλυση και συνήθως δίνει καλά αποτελέσματα.

Το σημείο εκκίνησης είναι το άνω φράγμα του μ ,

$$\mu(N) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DND^{-1}) \quad (3.23)$$

Η ιδέα είναι να βρεθεί ένας ελεγκτής ο οποίος να ελαχιστοποιεί την κορυφή του άνω φράγματος στο πεδίο των συχνοτήτων, δηλαδή,

$$\min_K \left(\min_{D \in \mathcal{D}} \|DN(K)D^{-1}\|_{\infty} \right) \quad (3.24)$$

ελαχιστοποιώντας εναλλάξ τη νόρμα $\|DN(K)D^{-1}\|_{\infty}$ σε σχέση με το K ή το D , κρατώντας σταθερό το άλλο.

- i. **K-βήμα.** Σύνθεση ενός ελεγκτή $\mathcal{H}_\infty$ για το πρόβλημα $\min_K \|DN(K)D^{-1}\|_\infty$ με δεδομένο το $D(s)$.
- ii. **D-βήμα.** Εύρεση $D(j\omega)$ που ελαχιστοποιεί σε κάθε συχνότητα την ποσότητα $\bar{\sigma}(DND^{-1}(j\omega))$ με δεδομένο το N .
- iii. Προσαρμογή του $D(j\omega)$ σε έναν ευσταθή πίνακα μετακίνησης ελάχιστης φάσης $D(s)$ και επαναφορά στο βήμα i.

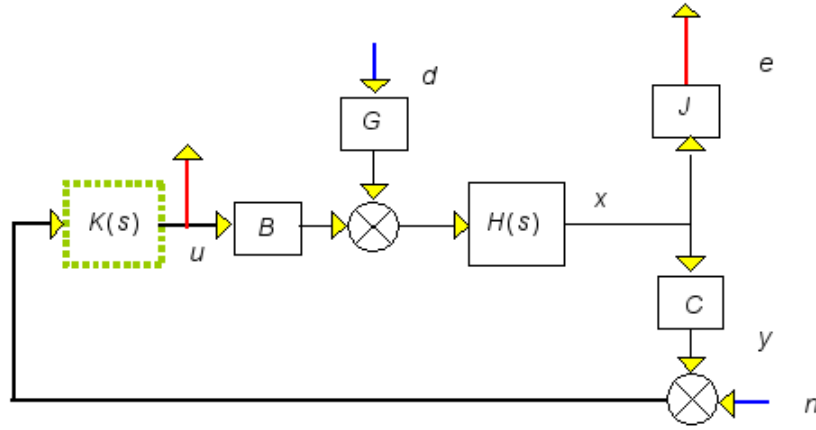
3.4

Σύνδεση με το πρόβλημα ελέγχου της δοκού

Ο σκοπός μας είναι να βρεθεί ένας πίνακας N όπως ορίζεται στην (3.16). Γι' αυτό το σκοπό είναι απαραίτητο να οριστούν οι σχέσεις εισόδου - εξόδου του αρχικού μοντέλου,

$$\begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} = F(s) \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} \Rightarrow z = F(s)w \quad (3.25)$$

το οποίο φαίνεται στο σχήμα 3.7.



Σχήμα 3.7: Δοκός με έλεγχο

Η δοκός περιγράφεται από την,

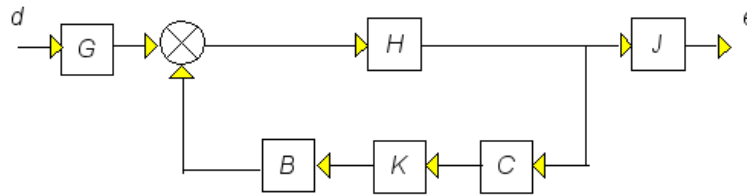
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \begin{bmatrix} B & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ f_m(t) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow H(s) &= (sI - A)^{-1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ο πίνακας J ισούται με,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

και υποδηλώνει την επιθυμία μας να ελέγχουμε την κατακόρυφη μετατόπιση στους κόμβους.

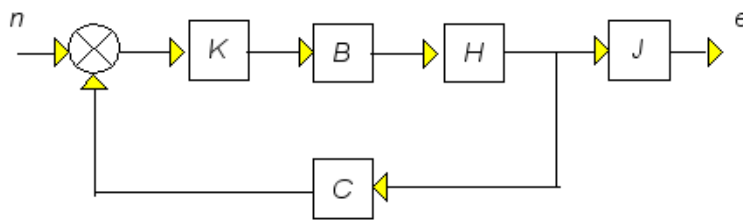
Στη συνέχεια επανασχεδιάζουμε το σχήμα 3.7 βήμα - βήμα.



Σχήμα 3.8: Επιμέρους δομικό διάγραμμα δοκού με είσοδο τη διαταραχή d και έξοδο το σφάλμα e

Από το σχήμα 3.8 είναι εύκολο να φανεί ότι,

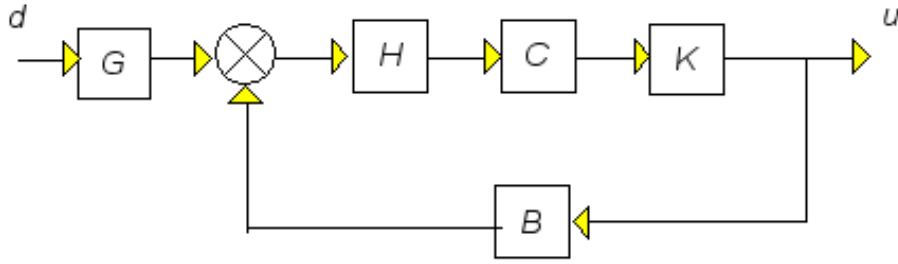
$$T_{de} = J \cdot (I - HBKC)^{-1} H \cdot G \quad (3.28)$$



Σχήμα 3.9: Επιμέρους δομικό διάγραμμα δοκού με είσοδο το θόρυβο n και έξοδο το σφάλμα e

Από το σχήμα 3.9 μπορούμε να δούμε ότι,

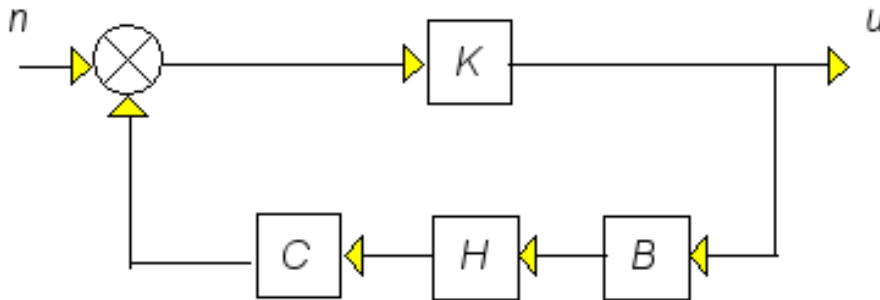
$$T_{ne} = J \cdot (I - HBKC)^{-1} HBK \quad (3.29)$$



Σχήμα 3.10: Επιμέρους δομικό διάγραμμα δοκού με είσοδο τη διαταραχή d και έξοδο τον έλεγχο u

Από το σχήμα 3.10 μπορούμε να δούμε ότι,

$$T_{du} = (I - KCHB)^{-1}KCH \cdot G \quad (3.30)$$



Σχήμα 3.11: Επιμέρους δομικό διάγραμμα δοκού με είσοδο το θόρυβο n και έξοδο τον έλεγχο u

Από το σχήμα 3.11 μπορούμε να δούμε ότι,

$$T_{nu} = (I - KCHB)^{-1}K \quad (3.31)$$

Συνδέοντάς τα όλα έχουμε,

$$e = J \cdot (I - HBKC)^{-1}H \cdot Gd + J \cdot (I - JBKC)^{-1}HBKn \quad (3.32)$$

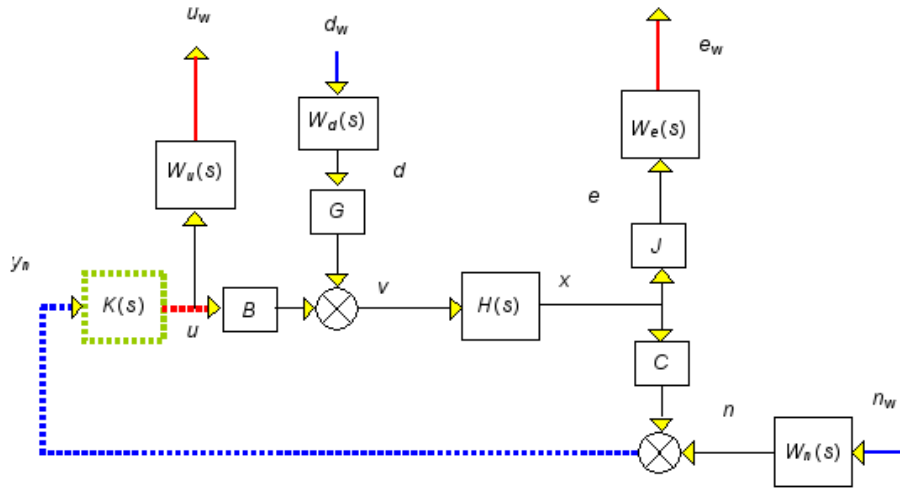
$$u = (I - KCHB)^{-1}KCH \cdot Gd + (I - KCHB)^{-1}Kn \quad (3.33)$$

ή,

$$\begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(I - HBKC)^{-1}HJ & J(I - HBKC)^{-1}HBK \\ (I - KCHB)^{-1}KCHG & (I - KCHB)^{-1}K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{de} & F_{ne} \\ F_{du} & F_{nu} \end{bmatrix} \Rightarrow z = F(s)w \quad (3.35)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούνται κατάλληλα βάρη και ξανασχεδιάζουμε το σχήμα 3.7 στη μορφή του διαγράμματος 3.12.



Σχήμα 3.12: Σταθμισμένο διάγραμμα ελέγχου για το πρόβλημα της δοκού

Στη συνέχεια ξανασχεδιάζεται το σχήμα 3.12 σαν το διάγραμμα δύο θυρών του σχήματος 3.13.

Στο 3.13 τα x και v είναι βοηθητικά σήματα.

Αναζητούμε την,

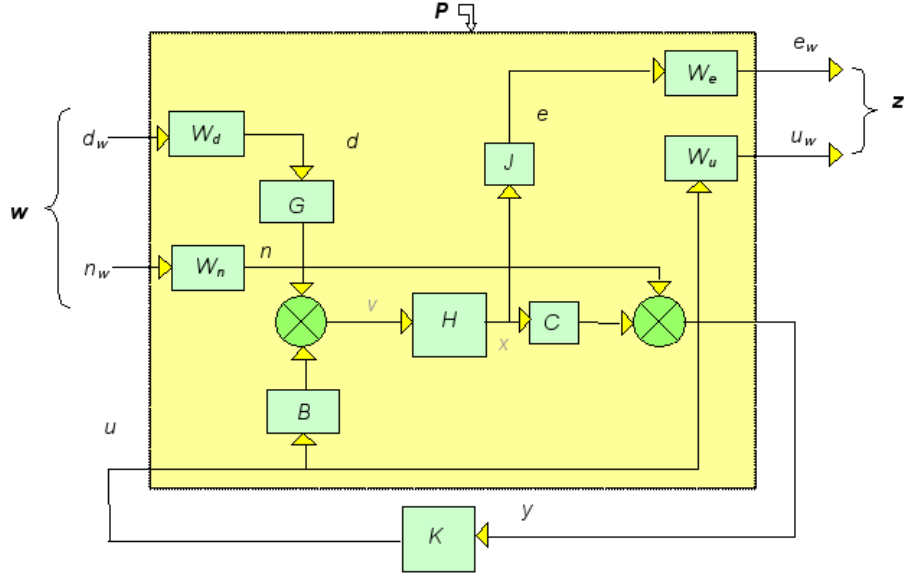
$$Q_{zw}(s) = P_{zw}(s) + P_{zu}(s)K(s)(I - P_{yu}(s)K(s))^{-1}P_{yw}(s) \quad (3.36)$$

ούτως ώστε,

$$z = Q_{zw}w = \mathcal{F}_l(P, K)w \quad (3.37)$$

Πρέπει να βρεθεί ο $P(s)$. Οι απαραίτητες συναρτήσεις μεταφοράς είναι,

$$\begin{aligned} e_w &= W_e J x = W_e J H v = W_e J H (G W_d d_w + B u) \\ &= W_e J H G W_d d_w + W_e J H B u \end{aligned} \quad (3.38)$$



Σχήμα 3.13: Διάγραμμα δύο θυρών για το πρόβλημα της δοκού

$$u_w = W_u u \quad (3.39)$$

$$y_n = Cx + W_n n_w = CH\nu + W_n n_w = CH(GW_d d_w + Bu) + W_n n_w = CHGW_d d_w + CHBu + W_n n_w \quad (3.40)$$

Συνδέοντας τις σχέσεις (3.38), (3.39) και (3.40) παίρνουμε,

$$\begin{bmatrix} u_w \\ e_w \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_u \\ W_e J H G W_d & 0 & W_e J H B \\ CH G W_d & W_n & CH B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_w \\ n_w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

ή,

$$\begin{bmatrix} z \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

όπου,

$$P_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ W_e J H G W_d & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{zu} = \begin{bmatrix} W_u \\ W_e J H B \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$P_{yw} = \begin{bmatrix} CH G W_d & W_n \end{bmatrix}, \quad P_{yu} = CH B$$

Χρειάζεται ένα ακόμα βήμα για να βρούμε αυτά που ανήκουν στο Q_{ij} . Αυτό επι-

τυγχάνεται χρησιμοποιώντας την (3.34) και παρατηρώντας ότι,

$$d = W_d d_w, \quad n = W_n n_w, \quad e_w = W_e e, \quad u_w = W_u u \quad (3.44)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W_e^{-1} e_w \\ W_u^{-1} u_w \end{bmatrix} = F(s) \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = F(s) \begin{bmatrix} W_d d_w \\ W_n n_w \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} e_w \\ u_w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W_e & \\ & W_u \end{bmatrix} F(s) \begin{bmatrix} W_d & \\ & W_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_w \\ n_w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.45)$$

ή,

$$\begin{bmatrix} e_w \\ u_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e J(I - HBKC)^{-1} HGW_d & W_e J(I - HBKC)^{-1} HBKW_n \\ W_u(I - KCHB)^{-1} KCHGW_d & W_u(I - KCHB)^{-1} KW_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_w \\ n_w \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Επομένως οι πίνακες είναι,

$$z = Q_{zw} \dot{y} \quad \begin{bmatrix} u_w \\ y_{fw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε την αβεβαιότητα στους πίνακες M και K στη μορφή,

$$\begin{aligned} K &= K_0(I + k_p I_{2n \times 2n} \delta_K) \\ M &= M_0(I + m_p I_{2n \times 2n} \delta_M) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Δεδομένου ότι υποθέσαμε $D = 0,0005(M + K)$. Απο την 3.48 έχουμε,

$$\begin{aligned} D &= 0,0005[K_0(I + k_p I_{2n \times 2n} \delta_K) + M_0(I + m_p I_{2n \times 2n} \delta_M)] = \\ &D_0 + 0,0005[K_0 k_p I_{2n \times 2n} \delta_K + M_0 m_p I_{2n \times 2n} \delta_M] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Εναλλακτικά επειδή η γενική μορφή του πίνακα απόσβεσης είναι ο πίνακας D μπορεί να γραφεί όπως,

$$D = aK + \beta M \quad (3.50)$$

Ο πίνακας D μπορεί να γραφεί όπως οι πίνακες M και K σαν,

$$D = D_0(I + d_p I_{2n \times 2n} \delta_D) \quad (3.51)$$

Στην παρούσα διατριβή λαμβάνεται στη μορφή της (3.49).

Με αυτόν τον τρόπο παρουσιάζεται η αβεβαιότητα με τη μορφή της ποσοστιαίας διακύμανσης στους σχετικούς πίνακες. Αυτή η έκφραση αβεβαιότητας είναι κατάλληλη στην περίπτωση μας, αφού όπως φαίνεται στις εξισώσεις (2.57), (2.58) η αβεβαιότητα είναι πιθανότερο να εμφανιστεί σε όρους έξω από το κύριο σύστημα (εφόσον το μήκος της δοκού μπορεί να μετρηθεί επαρκώς).

Εδώ υποτίθεται ότι,

$$\|\Delta\|_\infty \stackrel{def}{=} \left\| \begin{bmatrix} I_{n \times n} \delta_K & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} \delta_M \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (3.52)$$

όπου m_p , k_p χρησιμοποιούνται για να ρυθμίσουν τις εκατοστιαίες τιμές και ο μηδενικός δείκτης συμβολίζει τις τιμές ονομαστικής σχεδίασης.

Υπενθυμίζουμε ότι στον πίνακα $A_{n \times n}$, η νόρμα υπολογίζεται ως

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Με αυτούς τους ορισμούς η εξίσωση 2.76 γίνεται:

$$\begin{aligned} & M_0(I + m_p I_{2n \times 2n} \delta_M) \ddot{w}(t) + K_0(I + k_p I_{2n \times 2n} \delta_K) w(t) \\ & + [D_0 + 0.0005[K_0 k_p I_{2n \times 2n} \delta_K + M_0 m_p I_{2n \times 2n} \delta_M]] \dot{w}(t) = f_m(t) + f_e(t) \\ & \Rightarrow M_0 \ddot{w}(t) + D_0 \dot{q}(t) + K_0 w(t) = \\ & -[M_0 m_p I_{2n \times 2n} \delta_M \ddot{w}(t) + 0.0005[K_0 k_p I_{2n \times 2n} \delta_K + M_0 m_p I_{2n \times 2n} \delta_M] \dot{w}(t) + \\ & K_0 k_p I_{2n \times 2n} \delta_K w(t)] \\ & = f_m(t) + f_e(t) \\ & \Rightarrow M_0 \ddot{w}(t) + D_0 \dot{w}(t) + K_0 w(t) = \tilde{D} q_u(t) + f_m(t) + f_e(t) \end{aligned} \quad (3.53)$$

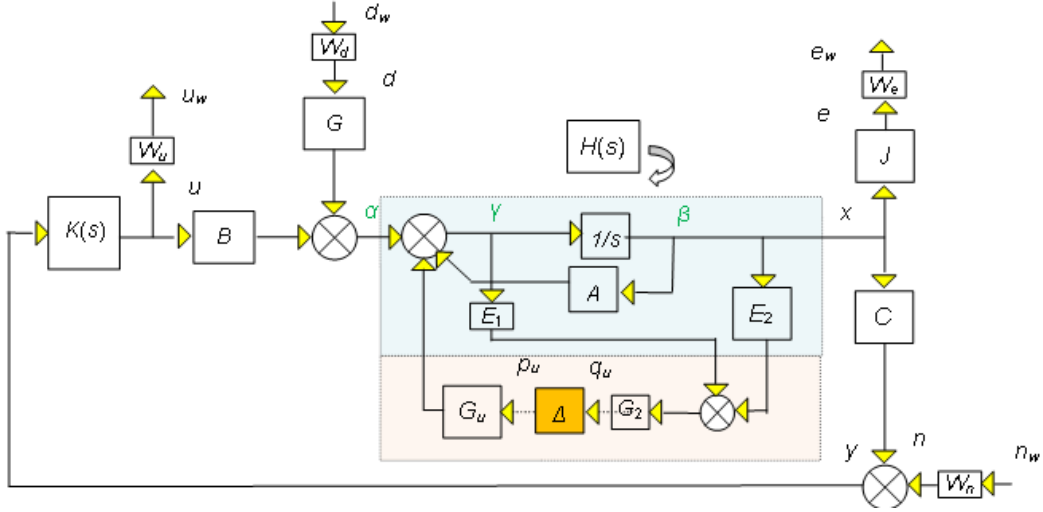
όπου,

$$q_u(t) = \begin{bmatrix} \ddot{w}(t) \\ \dot{w}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= - \begin{bmatrix} M_0 m_p & K_0 k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n \times 2n} \delta_M & 0_{2n \times 2n} \\ 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \delta_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n \times 2n} & 0.0005 I_{2n \times 2n} & 0_{2n \times 2n} \\ 0_{2n \times 2n} & 0.0005 I_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \\ &= G_1 \cdot \Delta \cdot G_2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Γράφοντας την 3.53 στη μορφή του χώρου κατάστασης, έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_e^* \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1} \end{bmatrix} d(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 6n} \\ M^{-1}F_1 \cdot \Delta \cdot G_2 \end{bmatrix} q_u(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) + Gd(t) + G_u G_2 q_u(t)\end{aligned}$$



Σχήμα 3.14: Δομικό διάγραμμα αβεβαιότητας

Μ' αυτόν τον τρόπο χειριζόμαστε την αβεβαιότητα στους αρχικούς πίνακες ως ένα επιπλέον όρο αβεβαιότητας. Για να εκφράσουμε το σύστημά μας στη μορφή του σχήματος 3.6, λαμβάνουμε υπόψη το σχήμα 3.14.

Οι πίνακες E_1 , E_2 χρησιμοποιούνται για να εξάγουμε,

$$q_u(t) \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \ddot{w}(t) \\ \dot{w}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

αφού,

$$\gamma = \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \beta = \int \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

κατάλληλες επιλογές για E_1, E_2 είναι,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} & \vdots & I_{2n \times 2n} \\ \dots & \vdots & \dots \\ I_{2n \times 2n} & \vdots & 0_{2n \times 2n} \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0_{2n \times 2n} & \vdots & 0_{2n \times 2n} \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} & \vdots & 0_{2n \times 2n} \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0_{2n \times 2n} & \vdots & 0_{2n \times 2n} \\ \dots & \vdots & \dots \\ I_{2n \times 2n} & \vdots & 0_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

σκοπός είναι να βρεθεί ένα N , όπως,

$$\begin{bmatrix} q_u \\ \dots \\ e_w \\ u_w \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} p_u \\ \dots \\ d_w \\ n_w \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_{p_u q_u} & \vdots & N_{d_w q_u} & N_{n_w q_u} \\ \dots & \vdots & \dots & \dots \\ N_{p_u e_w} & \vdots & N_{d_w e_w} & N_{n_w e_w} \\ N_{p_u u_w} & \vdots & N_{d_w u_w} & N_{n_w u_w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

ή όπως στο σχήμα 3.6

$$\begin{bmatrix} q_u \\ w \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} p_u \\ z \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Για τα υπόλοιπα θα χρησιμοποιήσουμε τη μεθοδολογία ‘Να βγάλω το Δ ’s’. Στο σημείο αυτό σπάμε το βρόχο στα σημεία p_u, q_u (που θα χρησιμοποιηθούν ως επιπλέον είσοδοι/έξοδοι αντίστοιχα) και χρησιμοποιούμε τα βοηθητικά σήματα a, β, γ .

Για να πάρουμε τη συνάρτηση μεταφορά $N_{d_w q_u}$ (από d_w σε q_u):

$$q_u = G_2(E_2\beta + E_1\gamma) = G_2(E_2\frac{1}{s} + E_1)\gamma \quad (3.61)$$

$$\gamma = GW_d d_w + Bu + A\frac{1}{s}\gamma = GW_d d_w + BKC\frac{1}{s}\gamma + A\frac{1}{s}\gamma \quad (3.62)$$

$$\Rightarrow \gamma = (I - BKC\frac{1}{s} - A\frac{1}{s})^{-1}GW_d d_w \quad (3.63)$$

όπου,

$$N_{d_w q_u} = G_2(E_2\frac{1}{s} + E_1)(I - BKC\frac{1}{s} - A\frac{1}{s})^{-1}GW_d \quad (3.64)$$

Τώρα, τα $N_{p_u q_u}, N_{p_u e_w}, N_{p_u u_w}$, είναι παρόμοια με $N_{d_w q_u}, N_{d_w e_w}, N_{d_w u_w}$, με το

GW_d να αντικαθίσταται με το G_u ,

$$\begin{aligned} N_{p_u q_u} &= G_2(E_2 \frac{1}{s} + E_1)(I - BKC \frac{1}{s} - A \frac{1}{s})^{-1} G_u \\ N_{p_u e_w} &= W_y JH[I + B[K(I - CHBK)^{-1} CH]]G_u \\ M_{p_u u_w} &= W_u K(I - CHBK)^{-1} CHG_u \end{aligned} \quad (3.65)$$

Τέλος για να βρούμε το $N_{n_w q_u}$,

$$q_u = G_2(E_2 \beta + E_1 \gamma) = G_2(E_2 \frac{1}{s} + E_1) \gamma \quad (3.66)$$

$$\gamma = Bu + A \frac{1}{s} \gamma = BK(W_n n_w + y) + A \frac{1}{s} \gamma = BKW_n n_w + BKC \frac{1}{s} \gamma + A \frac{1}{s} \gamma \quad (3.67)$$

$$\Rightarrow \gamma = (I - BKC \frac{1}{s} - A \frac{1}{s})^{-1} BKW_n n_w \quad (3.68)$$

όπου ,

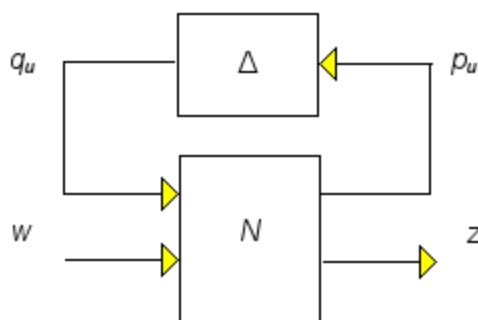
$$N_{n_w q_u} = G_2(E_2 \frac{1}{s} + E_1)(I - BKC \frac{1}{s} - A \frac{1}{s})^{-1} BKW_n \quad (3.69)$$

Συγκεντρώνοντας:

$N =$

$$\begin{bmatrix} G_2(E_2 \frac{1}{s} + E_1)(I - BKC \frac{1}{s} - A \frac{1}{s})^{-1} G_u & G_2(E_2 \frac{1}{s} + E_1)(I - BKC \frac{1}{s} - A \frac{1}{s})^{-1} GW_d & G_2(E_2 \frac{1}{s} + E_1)(I - BKC \frac{1}{s} - A \frac{1}{s})^{-1} BKW_u \\ W_e JH[I + BK(I - CHBK)^{-1} CF]G_u & W_e J(I - HBKC)^{-1} HGW_d & W_e J(I - HBKC)^{-1} HBKW_u \\ W_u K(I - CHBK)^{-1} CFG_u & W_u (I - KCHB)^{-1} KCHGW_d & W_u (I - KCHB)^{-1} KW \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

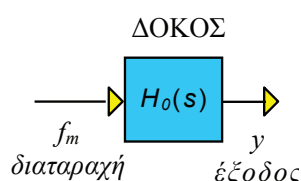
Έχοντας υπολογίσει το N για το πρόβλημα της δοκού που εξετάζεται, όλοι οι ελεγκτές $K(s)$ μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των δομικών ιδιόμορφων τιμών. Με αυτόν τον τρόπο το σχήμα 3.14 μετασχηματίζεται στο σχήμα 3.15.



Σχήμα 3.15: Διάγραμμα αβεβαιότητας

3.5 Το σύστημα ανοικτού βρόχου

Χρησιμοποιώντας τη δοκό που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2 (Παράγραφος 2.11) μελετάμε τις ιδιότητες ανοικτού βρόχου. Το σύστημα ανοικτού βρόχου με είσοδο μηχανική διαταραχή φαίνεται στο σχήμα 3.16.



Σχήμα 3.16: Στοιχειώδες δομικό διάγραμμα του συστήματος ανοικτού βρόχου με είσοδο τη μηχανική φόρτιση

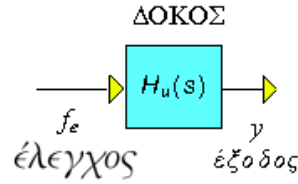
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.79) και (2.78) η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος για μηχανική είσοδο είναι,

$$H_0(s) = C(sI - A)^{-1}G \quad (3.71)$$

Το σύστημα ανοικτού βρόχου με είσοδο ηλεκτρική τάση f_e φαίνεται στο σχήμα 3.17.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.79) και (2.78) για ηλεκτρική είσοδο, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι,

$$H_u(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.72)$$



Σχήμα 3.17: Στοιχειώδες δομικό διάγραμμα του συστήματος ανοικτού βρόχου με είσοδο την ηλεκτρική φόρτιση

Το σύστημα είναι ευσταθές με ιδιοτιμές,

$$\lambda_i = 10^7 \times \begin{bmatrix} -3,4979 & -1,3712 & -0,5466 & -0,2152 & -0,0613 & -0,0159 & -0,0018 & -0,000026+0,00009i \end{bmatrix}^T \quad \text{για } i=1,\dots,8$$

$$+ 10^7 \times \begin{bmatrix} -0,000026-0,00009i & -0,0002 & -0,0002 & -0,0002 & -0,0002 & -0,0002 & -0,0002 & -0,0002 & -0,0002 \end{bmatrix}^T \quad \text{για } i=9,\dots,16$$
(3.73)

Παρατηρείται ότι ο πίνακας A είναι κακά ορισμένος με μέτρο ελεγχσιμότητας πολυμεταβλητών συστημάτων $= 5,6247 \times 10^{-13}$ (Το μέτρο ελεγχσιμότητας είναι ο λόγος της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη ιδιοτιμή του συστήματος, όσο πιο κοντά στη μονάδα τόσο καλύτερα). Αυτό σημαίνει ότι μια κατάλληλη προεπεξεργασία θα είναι ωφέλιμη σε ευαίσθητους υπολογισμούς (όπως η τοποθέτηση πόλων). Μία αντιμετώπιση του προβλήματος είναι να εξισορροπηθούν οι πίνακες του συστήματος χρησιμοποιώντας τη ρουτίνα του MATLAB,

$$[T, S] = \text{balance}(A)$$

η οποία υπολογίζει ένα διαγώνιο πίνακα μετασχηματισμού T του οποίου τα στοιχεία είναι ακέραιες δυνάμεις του 2, και ένα πίνακα S τέτοιοι ώστε,

$$A = TST^{-1} \quad (3.74)$$

Με αυτό τον τρόπο η κακή ρύθμιση του πίνακα A μεταφέρεται εν μέρει στον T . Θέτοντας,

$$z = T^{-1}x \Rightarrow x = Tz \quad (3.75)$$

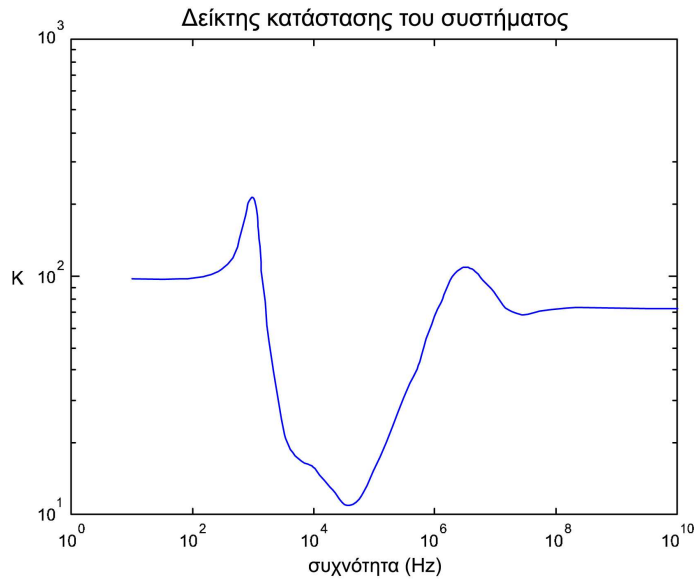
η (3.71) γίνεται,

$$\begin{aligned}
Tz(t) &= ATz(t) + Bu(t) + Gd(t) \Rightarrow \\
z(t) &= T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t) + T^{-1}Gd(t) \\
&= Sz(t) + \hat{B}u(t) + \hat{G}d(t)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Ένα άλλο μέτρο της δυσκολίας ελέγχου του συστήματος είναι ο δείκτης κατάστασης $\kappa(j\omega)$, που είναι ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη ιδιόμορφη τιμή του συστήματος και ορίζεται ως,

$$\kappa(j\omega) = \frac{\bar{\sigma}(H_o(j\omega))}{\underline{\sigma}(H_o(j\omega))} \tag{3.77}$$

Ένας υψηλός δείκτης δηλώνει ότι το σύστημα είναι «κοντά» στο να χάσει τον πλήρη βαθμό του, δηλαδή κοντά στο να μην ικανοποιεί την ιδιότητα της λειτουργικής ελεγχιμότητας (την ικανότητα της εξόδου να ακολουθεί μία οποιαδήποτε προκαθορισμένη τροχιά ενός δεδομένου χρονικού διαστήματος). Τιμές κοντά στο 1 είναι οι επιθυμητές. Το σχήμα 3.18 δείχνει τον δείκτη κατάστασης του συστήματός μας.



Σχήμα 3.18: Λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη ιδιόμορφη τιμή του συστήματος

Όπως προκύπτει από το σχήμα ο δείκτης είναι υψηλός στις χαμηλές συχνότητες, δείχνοντας ότι σε αυτές τις συχνότητες το σύστημα είναι δύσκολο να ελεγχθεί.

Αυτό δείχνει ότι η εξισορρόπηση θα είναι ευεργετική και στον τομέα αυτό.

Ένα άλλο πρόβλημα προκύπτει από το πολύ μικρό μέγεθος της ελάχιστης ιδιοτιμής του συστήματος η οποία ορίζει την μικρότερη χρονική σταθερά. Στη συνέχεια αυτή υπαγορεύει το διάστημα δειγματοληψίας που χρησιμοποιείται στις προσομοιώσεις. Το χρονικό αυτό διάστημα πρέπει να είναι μικρότερο, συνήθως το μισό της μικρότερης αυτής σταθεράς. Αυτό μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα την επιμήκυνση του χρόνου προσομοίωσης.

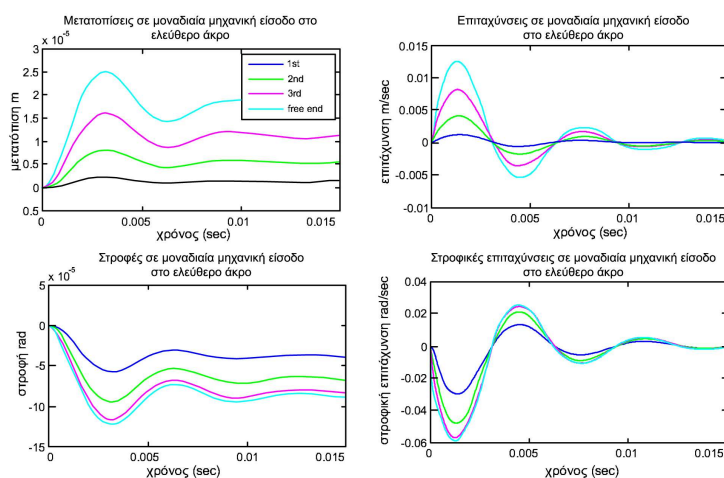
Τέλος, το σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

3.5.1 Απόκριση του συστήματος σε μηχανικές και ηλεκτρικές εισόδους

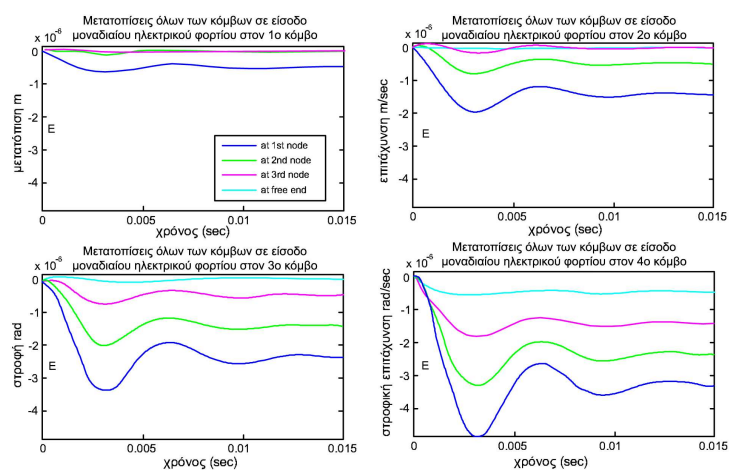
Στο σχήμα 3.19 φαίνονται τα διαγράμματα μετατόπισης, επιτάχυνσης, στροφής, στροφικής επιτάχυνσης για κάθε κόμβο της δοκού σε είσοδο μηχανικής φόρτισης $f_m = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ δηλαδή σε είσοδο μηχανικής φόρτισης $1N$ στον ακραίο κόμβο της δοκού. Θετική μηχανική φόρτιση θεωρείται ότι είναι η δύναμη που έχει την ίδια κατεύθυνση με το θετικό y .

Όπως φαίνεται όλοι οι κόμβοι ισορροπούν σε $0,015sec$ σε σημεία διαφορετικά του μηδενός.

Στο σχήμα 3.20 φαίνονται τα διαγράμματα μετατόπισης σε σχέση με το χρόνο για κάθε κόμβο του συστήματος σε είσοδο ηλεκτρική 1 Volt σε κάθε κόμβο ξεχωριστά.



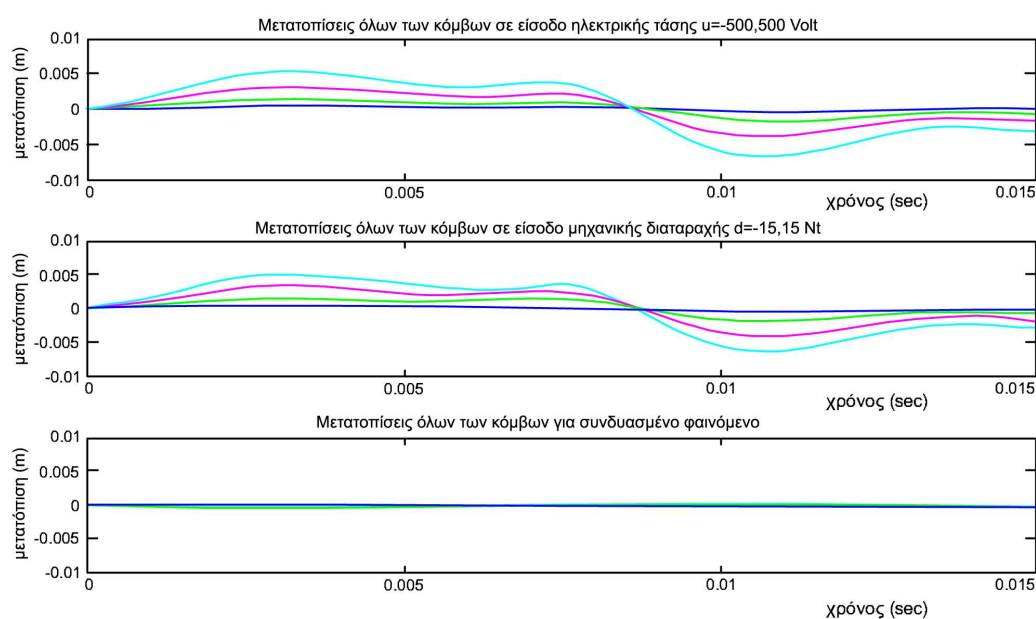
Σχήμα 3.19: Διαγράμματα μετατόπισης, στροφής και επιταχύνσεων του συστήματος για όλους τους κόμβους του σε είσοδο μηχανικού φορτίου $1N$ στον ακραίο κόμβο της δοκού



Σχήμα 3.20: Διαγράμματα μετατόπισης και στροφής για κάθε κόμβο του συστήματος σε είσοδο ηλεκτρικού φορτίου $1V$ σε κάθε κόμβο χωριστά

Από τα διαγράμματα προκύπτει ότι η δοκός ακολουθεί ανοδική κίνηση μετά την εφαρμογή θετικού ηλεκτρικού φορτίου.

Επίσης ενδιαφερόμαστε για την μέγιστη μετατόπιση που μπορεί το σύστημα να αντέξει δίνοντας τα όρια των πιεζοηλεκτρικών. Στο σχήμα 3.21 μπορούμε να δούμε ότι η τάση των 500V (για κάθε κόμβο) αντιστοιχεί σε μια δύναμη 15N (για κάθε κόμβο), επομένως συμπεραίνουμε ότι είναι η δύναμη που το σύστημα μπορεί να αντισταθμίσει.



Σχήμα 3.21: Διαγράμματα μετατοπίσεων κάθε κόμβου του συστήματος σε είσοδο ηλεκτρικής τάσης -500 Volt έως 500 Volt και μηχανικής δύναμης -15N έως +15N και συνδυασμός μηχανικής και ηλεκτρικής εισόδου

Επισημαίνεται ότι όταν η δοκός κινείται προς τα επάνω οι μετατοπίσεις δίνονται με αρνητικό πρόσημο, ενώ όταν κινείται προς τα κάτω οι μετατοπίσεις δίνονται με θετικό πρόσημο.

3.6

Έλεγχος LQR

Για ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα με περιγραφή χώρου κατάστασης,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.78)$$

οι προδιαγραφές των επιδόσεων μπορούν επίσης να διατυπωθούν με τη μορφή ενός ολοκληρώματος τετραγωνικών όρων όπως,

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (3.79)$$

Ο νόμος ελέγχου ανάδρασης που αναζητείται πρέπει να ελαχιστοποιεί το παραπάνω γραμμικό τετραγωνικό κριτήριο (ή δείκτη) επιδόσεων ενώ συγχρόνως να εγγυάται την ευστάθεια του κλειστού συστήματος. Ο νόμος ελέγχου είναι μία υποβέλτιστη λύση στην περίπτωση όπου το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι μετρήσιμο στο σύνολό του όπου,

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \quad (3.80)$$

Ο υπολογισμός του K προκύπτει από τη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati [75],

$$KA - KBR^{-1}B^TK + Q + A^TK = 0 \quad (3.81)$$

Οι πίνακες βάρους Q και R που υπεισέρχονται στο κριτήριο επιδόσεων, παίζουν θεμελιώδη ρόλο στη συμπεριφορά του κλειστού συστήματος. Η κατάλληλη επιλογή τους επιφέρει ένα συμβιβασμό μεταξύ των επιδόσεων του κλειστού συστήματος και της προσπάθειας ελέγχου. Ακόμη, αποτελούν ένα μέσο για την επίτευξη επιθυμητής συμπεριφοράς στη μεταβατική κατάσταση. Αν και ο προσδιορισμός τους δεν υπόκειται σε μια συστηματική μέθοδο, εντούτοις η επιλογή τους αφήνει στο σχεδιαστή πολλούς βαθμούς ελευθερίας και μεταξύ αυτών τη δυνατότητα τοποθέτησης των πόλων του κλειστού συστήματος σε επιθυμητές θέσεις. [75]

Το δομικό διάγραμμα για το πρόβλημα LQR δίνεται στο σχήμα 3.22.

Οι απαραίτητες εξισώσεις είναι:

$$\left[\frac{C}{T} \right]^{-1} = \left[P \mid M \right], T \text{ αυθαίρετο} \quad (3.82)$$

$$\left[\frac{CAP}{TAP} \mid \frac{CAM}{TAM} \right] = \left[\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}} \mid \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{22}} \right] \left[\frac{CB}{TB} \right] = \left[\frac{\hat{B}_1}{\hat{B}_2} \right] \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} F &= \hat{A}_{22} - L \cdot \hat{A}_{12}, H = FL + \hat{A}_{21} - L \cdot \hat{A}_{11}, \\ G &= \hat{B}_2 - L \cdot \hat{B}_1, N = P + ML \end{aligned}$$



$$\dot{w}(t) = Fw(t) + Hy(t) + Gu(t)$$

$$\hat{x}(t) = M w(t) + N y(t) \quad (3.84)$$

$$u(t) = -K_1 \hat{x}(t) - K_2 \int J \hat{x}(t) \delta t \quad (3.85)$$

Ας βρούμε το $\hat{x}(s)$ χρησιμοποιώντας την (3.84),

$$\hat{x}(s) = Mw(s) + Ny_n(s) \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= Fw(t) + Hy(t) + Gu(t) \Rightarrow sw(s) = Fw(s) + Hy_n(s) + Gu(s) \\ &\Rightarrow w(s) = (sI - F)^{-1} [Hy_n(s) + Gu(s)] \end{aligned} \quad (3.87)$$

Αντικαθιστώντας την (3.87), στην (3.86),

$$\begin{aligned}\hat{x}(s) &= Ny_n(s) + M(sI - F)^{-1}[Hy_n(s) + Gu(s)] \\ &= \{N + M(sI - F)^{-1}H\}y_n(s) + M(sI - F)^{-1}Gu(s)\end{aligned}\tag{3.88}$$

Για να πάρουμε τη συνάρτηση εισόδου εξόδου για τον ελεγκτή LQR χρησιμοποιώντας την (3.80) και την (3.88) έχουμε,

$$\begin{aligned} u(s) &= -K\{[N + M(sI - F)^{-1}H]y_n(s) + M(sI - F)^{-1}Gu(s)\} \\ \Rightarrow [I + KM(sI - F)^{-1}G]u(s) &= -K[N + M(sI - F)^{-1}H]y_n(s) \\ \Rightarrow u(s) &= -[I + KM(sI - F)^{-1}G]^{-1}K[N + M(sI - F)^{-1}H]y_n(s) \end{aligned} \quad (3.89)$$

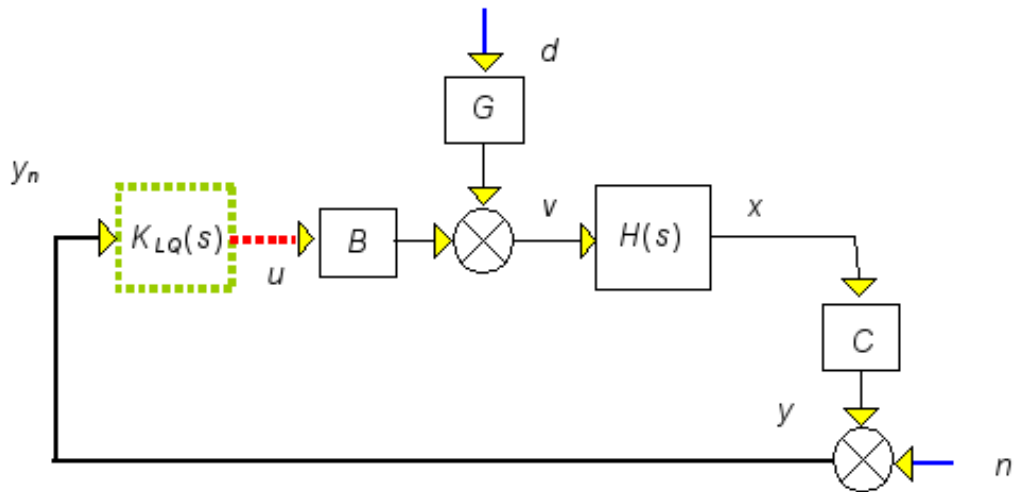
ή,

$$u(s) = K_{LQ}y_n(s) \quad (3.90)$$

όπου,

$$K_{LQ} = -[I + KM(sI - F)^{-1}G]^{-1}K[N + M(sI - F)^{-1}H] \quad (3.91)$$

Με αυτές τις σχέσεις η δομή του ελεγκτή LQR μπορεί να γραφεί στη συμπαγή μορφή της όπως φαίνεται στο σχήμα 3.23, όπου $H(s) = (sI - A)^{-1}$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς της δοκού.



Σχήμα 3.23: Συμπαγής μορφή δομικού διαγράμματος δοκού με ελεγκτή LQR .

3.6.1 Επιλογή των Βαρών

Οι πίνακες βαρών Q και R χρησιμοποιούνται για:

- i. Την κανονικοποίηση των μεγεθών διανυσμάτων κατάστασης και ελέγχου
- ii. Τον καθορισμό της σχετικής επίδρασης που έχει στον καθορισμό του συνολικού κριτηρίου η απόκλιση της κατάστασης από τη θέση ισορροπίας και το μέγεθος ελέγχου. Οι δύο πίνακες Q και R είναι διαγώνιοι και έχουν θετικές διαγώνιες εισόδους ούτως ώστε,

$$\begin{aligned}\sqrt{Q_i} &= \frac{1}{\max(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sqrt{R_i} &= \frac{1}{\max(u_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, k\end{aligned}\tag{3.92}$$

Η τιμή $\max(x_i)$ δηλώνει την μέγιστη επιθυμητή τιμή της εξόδου y . Η τιμή $\max(u_i)$ έχει αντίστοιχη σημασία για την είσοδο u .

Ο πίνακας Q καθορίζει το βάρος κάθε κατάστασης ενώ ο πίνακας R καθορίζει το βάρος κάθε τάσης (Voltage) του ενεργοποιητή. Το πρόβλημα LQR απαιτεί γνώση της κατάστασης. [76]

3.7 Αποτελέσματα από την εφαρμογή του ελέγχου LQR

Για την εκτίμηση της απόδοσης του ελεγκτή LQR όπως και για την εκτίμηση όλων των ελεγκτών που ακολουθούν, όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 2, έγιναν οι τρεις προσομοιώσεις που αναφέρονται στην παράγραφο 2.6:

- i. Σταθερή συγκεντρωμένη δύναμη 10N στο ελεύθερο άκρο της δοκού
- ii. Ημιτονοειδής δυναμική φόρτιση με εύρος ταλάντωσης 10N
- iii. Πραγματική αιολική φόρτιση

Τα Q και R που χρησιμοποιήθηκαν ισούνται με,

$$R = 0,0001 \times I_{4 \times 4}\tag{3.93}$$

$$Q = 100000 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ & & & 0_{9 \times 7} & & & & \vdots \\ & & & & & & & 0_{9 \times 9} \end{bmatrix}_{16 \times 16} \quad (3.94)$$

γιατί $\max(x_i) = 0.00316228$ και $\max(u_i) = 100$ (σχέση (3.92)).

Ο πίνακας L είναι πίνακας σχεδιασμού. Οι ιδιοτιμές του επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε το υποσύστημα του παρατηρητή να είναι περίπου δύο φορές γρηγορότερο από το παρατηρούμενο σύστημα. Για την προσομοίωσή μας έχουν επιλεγεί οι τιμές:

$$\lambda_L = 10^7 \times \begin{bmatrix} 2.7423556 \\ -0.430498 \\ -0.031873 \\ -0.000051 + 0.0001993i \\ -0.000051 - 0.000199i \\ -0.00045 + 0.000053i \\ -0.00045 - 0.000053i \\ -0.00039 + 0.00001i \\ -0.00039 - 0.00001i \\ -0.0004 \\ -0.0004 \\ -0.0004 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Αυτές οι τιμές προέκυψαν με τη μέθοδο δοκιμής και σφάλματος, δεδομένου των κακών αριθμητικών ιδιοτήτων του συστήματος. Για την εύρεση αυτών των τιμών, έχει χρησιμοποιηθεί ένας εύρωστος αλγόριθμος εύρεσης πόλων που έχει ενσωματωθεί στο MATLAB. [79, 80]

Ο ελεγκτής $[Klqr]$, προκύπτει από την σχέση (3.81), που είναι η λύση της εξίσωσης Riccati. Για την εύρεσή του χρησιμοποιείται η ρουτίνα του Matlab:

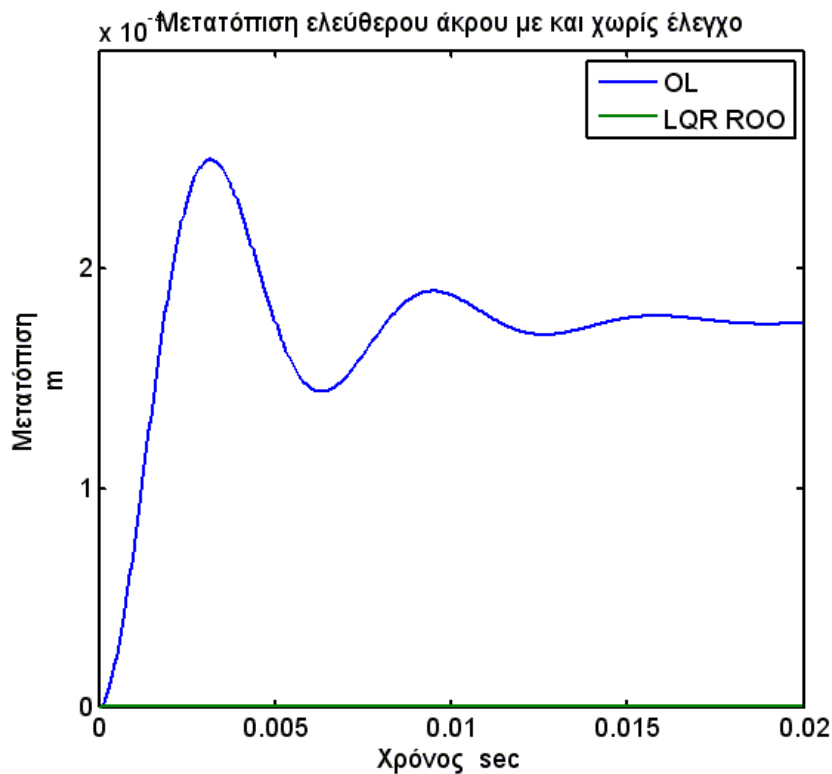
$$[Klqr] = lqr(A, B, Q, R),$$

όπου A και B οι πίνακες κατάστασης και ελέγχου του συστήματος (B.3), (B.4) και R, Q οι πίνακες βαρών του κριτηρίου απόδοσης (3.93), (3.94).

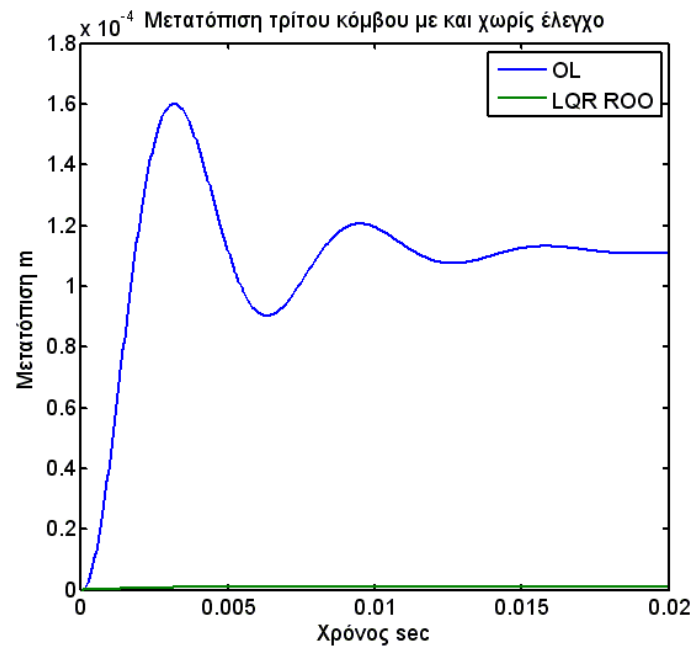
Η δομή του ελεγκτή δίνεται στη σχέση (Δ.1) στο Παράρτημα Δ της διατριβής.

Για την πρώτη προσομοίωση στα σχήματα 3.24, 3.25, 3.26, 3.27 φαίνονται οι μετατοπίσεις των κόμβων της δοκού χωρίς και με έλεγχο, ενώ στο σχήμα 3.28 φαίνονται οι τάσεις των ενεργοποιητών για τον έλεγχο όλων των κόμβων της δοκού.

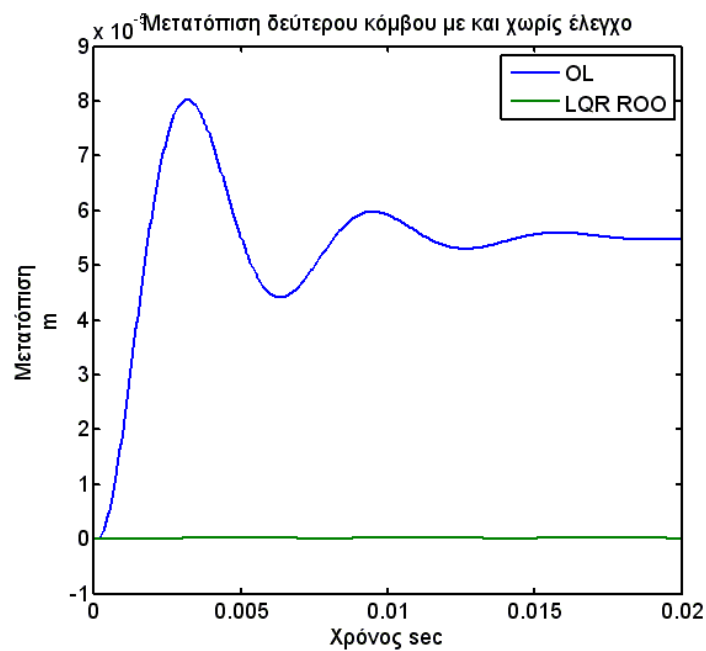
Η δοκός χωρίς την εφαρμογή του ελέγχου ισορροπεί σε 0.02sec και το ελεύθερο άκρο της έχει μετατόπιση $2 \times 10^{-4}\text{m}$ ενώ μετά την εφαρμογή του ελέγχου LQR έχει μετατόπιση 10×10^{-8} .



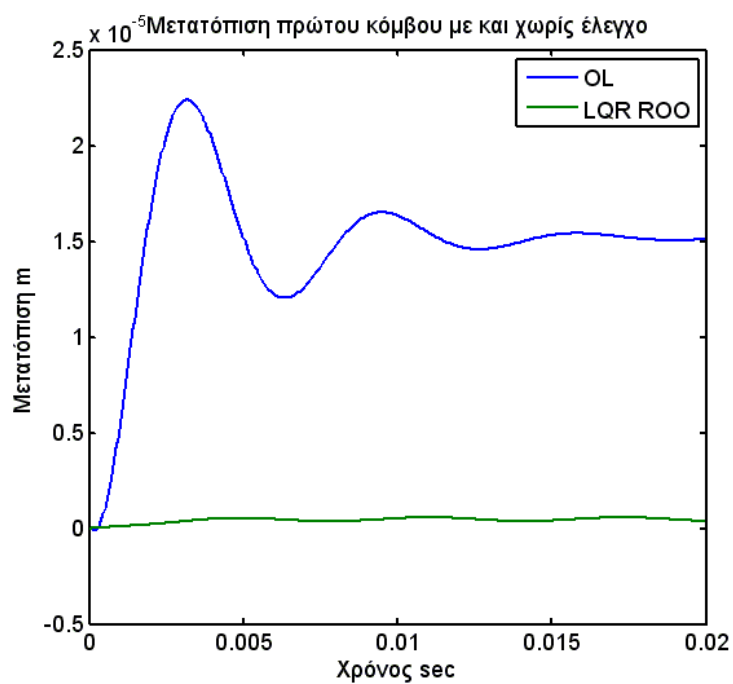
Σχήμα 3.24: Διάγραμμα μετατόπισης του ελεύθερου άκρου χωρίς και με έλεγχο σε μηχανική είσοδο συγκεντρωμένης δύναμης $10N$ στο ελεύθερο άκρο της δοκού.



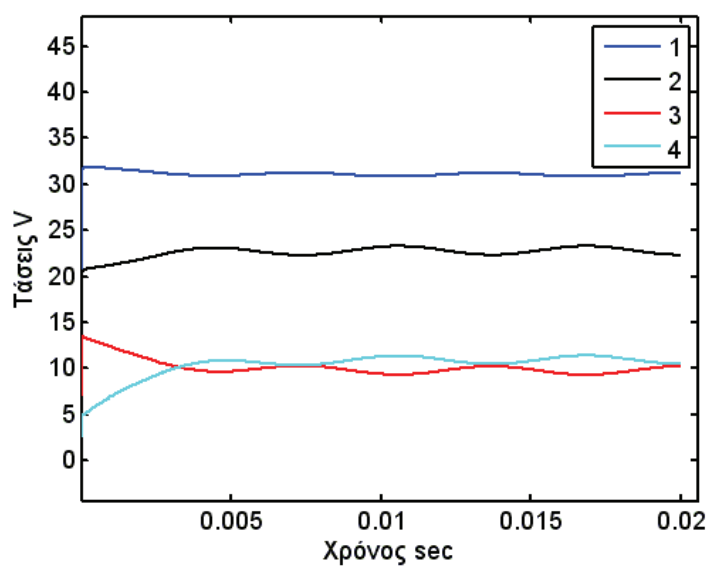
Σχήμα 3.25: Διάγραμμα μετατόπισης του τρίτου κόμβου χωρίς και με έλεγχο σε μηχανική είσοδο συγκεντρωμένης δύναμης $10N$ στο ελεύθερο άκρο της δοκού.



Σχήμα 3.26: Διάγραμμα μετατόπισης του δεύτερου κόμβου χωρίς και με έλεγχο σε μηχανική είσοδο συγκεντρωμένης δύναμης $10N$ στο ελεύθερο άκρο της δοκού.

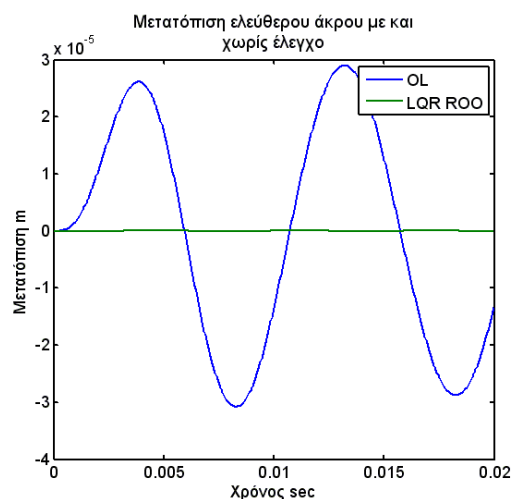


Σχήμα 3.27: Διάγραμμα μετατόπισης του πρώτου κόμβου χωρίς και με έλεγχο σε μηχανική είσοδο συγκεντρωμένης δύναμης $10N$ στο ελεύθερο άκρο της δοκού.

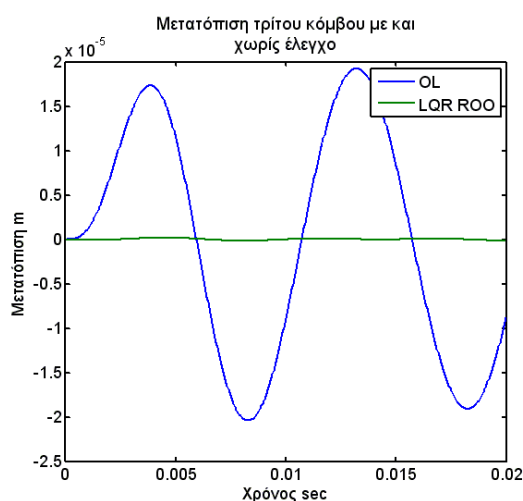


Σχήμα 3.28: Τάσεις ενεργοποιητών για τον έλεγχο όλων των κόμβων

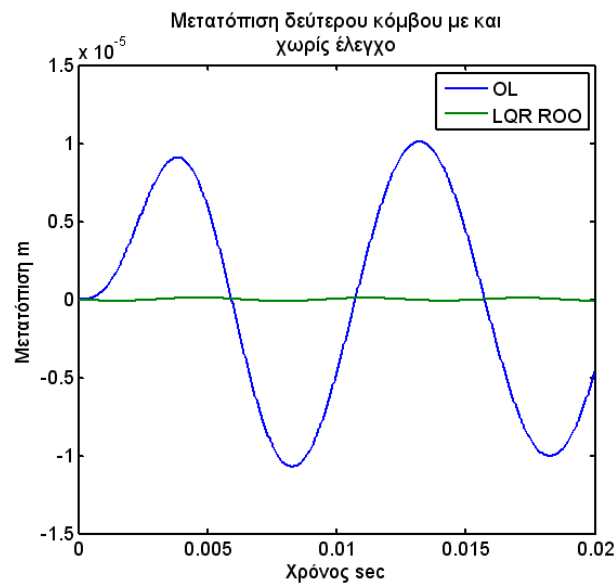
Για τη δεύτερη προσομοίωση, στα σχήματα 3.29, 3.30, 3.31, 3.32 φαίνονται οι μετατοπίσεις όλων των κόμβων της δοκού για την ημιτονοειδή φόρτιση, με και χωρίς έλεγχο, χρησιμοποιώντας τα ίδια Q και R . Η μέγιστη μετατόπιση χωρίς έλεγχο του ακραίου κόμβου είναι $2.5 \times 10^{-5}m$, ενώ με έλεγχο LQR η μετατόπιση τείνει να μηδενιστεί. Στο σχήμα 3.33 φαίνονται οι τάσεις των ενεργοποιητών για τον έλεγχο όλων των κόμβων της δοκού.



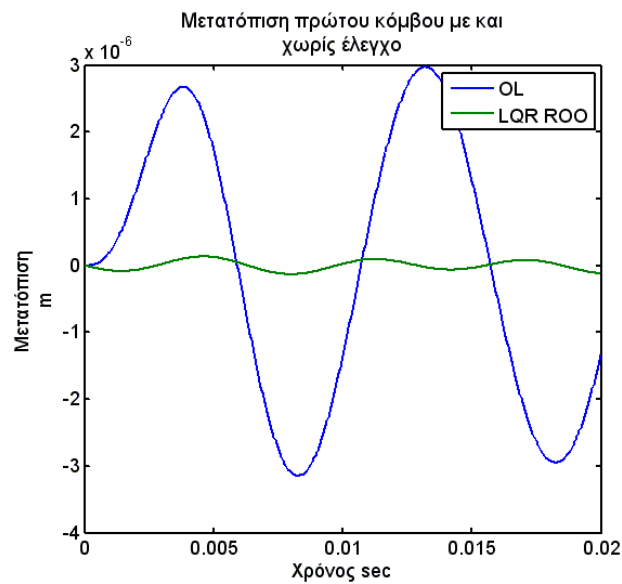
Σχήμα 3.29: Μετατόπιση με και χωρίς έλεγχο ελεύθερου άκρου της δοκού για ημιτονοειδή φόρτιση



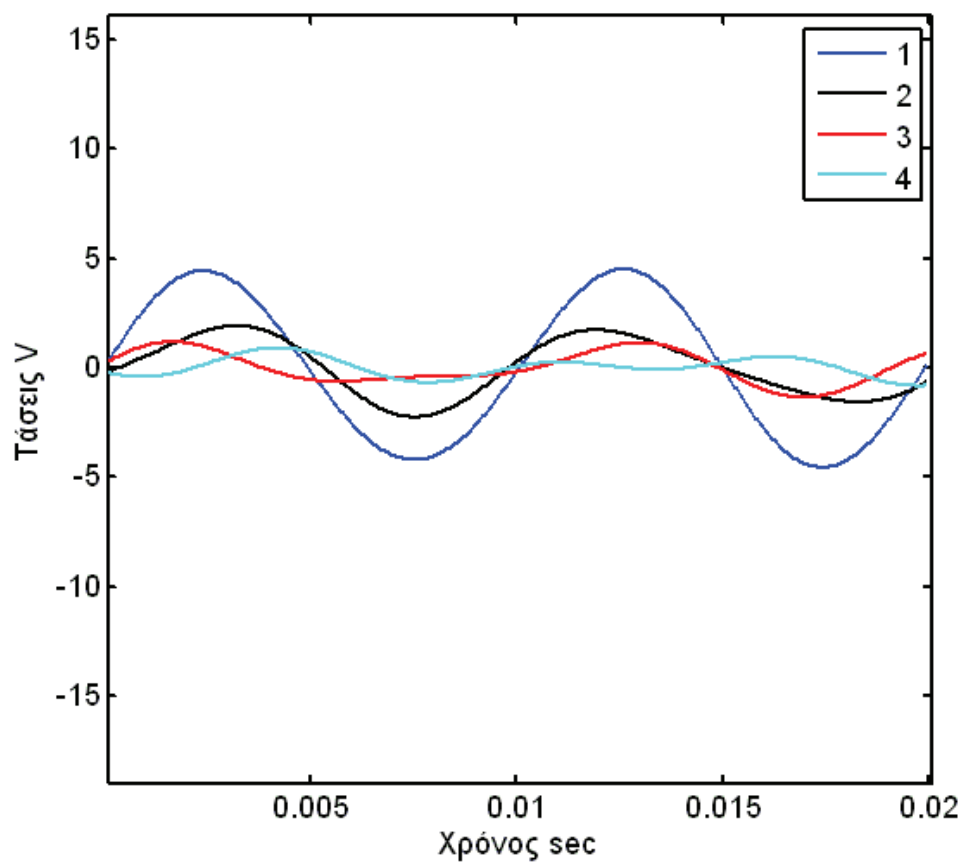
Σχήμα 3.30: Μετατόπιση με και χωρίς έλεγχο του τρίτου κόμβου της δοκού για ημιτονοειδή φόρτιση



Σχήμα 3.31: Μετατόπιση με και χωρίς έλεγχο του δεύτερου κόμβου της δοκού για ημιτονοειδή φόρτιση

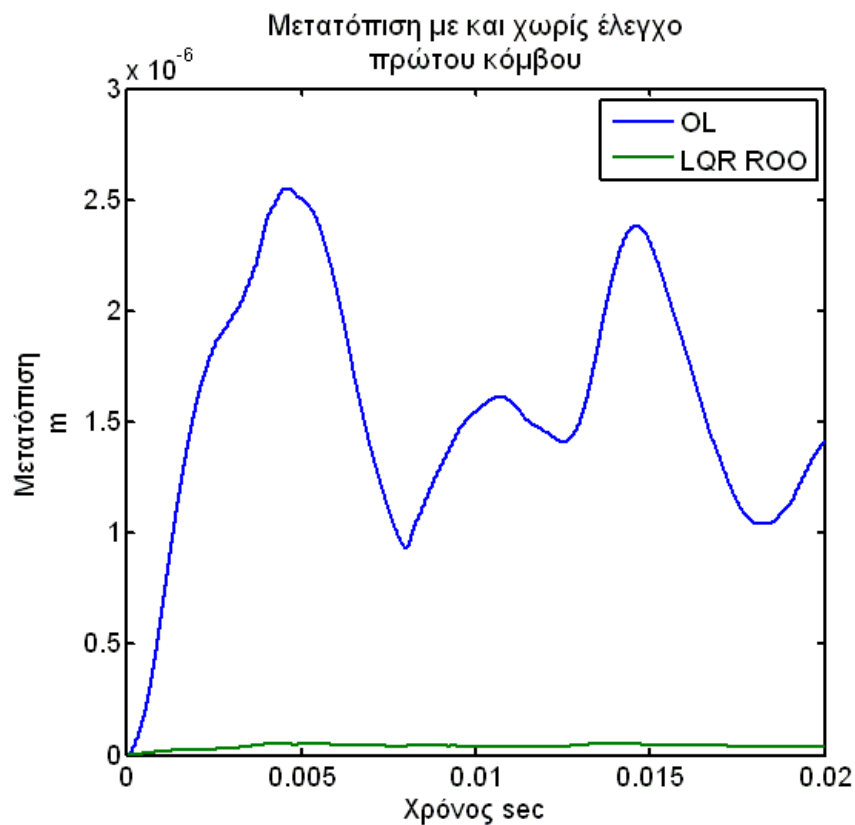


Σχήμα 3.32: Μετατόπιση με και χωρίς έλεγχο του πρώτου κόμβου της δοκού για ημιτονοειδή φόρτιση

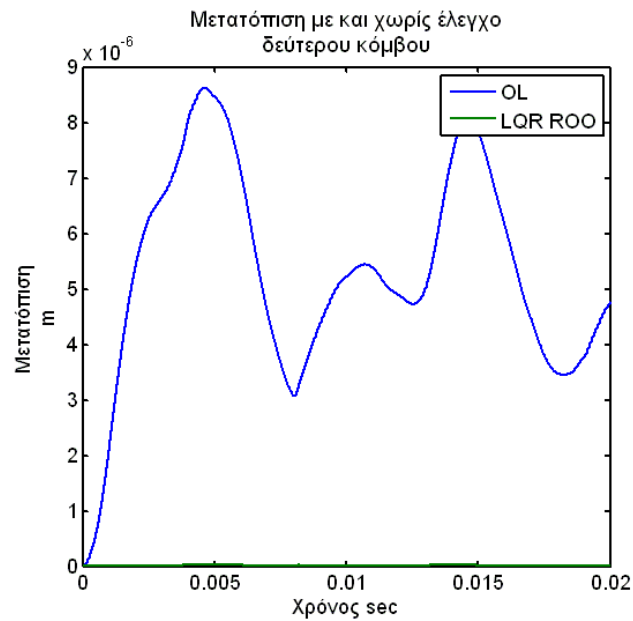


Σχήμα 3.33: Τάσεις ενεργοποιητών για όλους τους κόμβους της δοκού

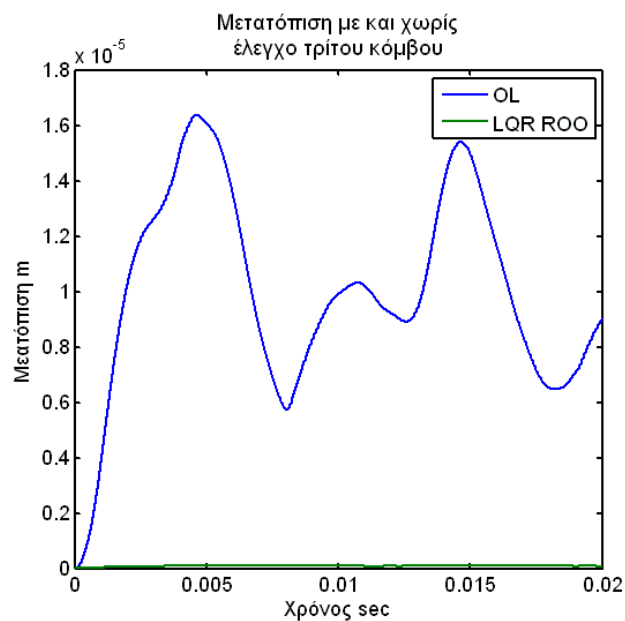
Τέλος για την τρίτη προσομοίωση τα αποτελέσματα των μετατοπίσεων των κόμβων φαίνονται στα σχήματα 3.34, 3.35, 3.36, 3.37 ενώ οι παραγόμενες τάσεις των ενεργοποιητών για όλους τους κόμβους φαίνονται στο σχήμα 3.38. Η μετατόπιση του ελεύθερου άκρου της δοκού τείνει να μηδενιστεί ενώ οι τάσεις βρίσκονται εντός των ορίων αντοχής των πιεζοηλεκτρικών ενεργοποιητών.



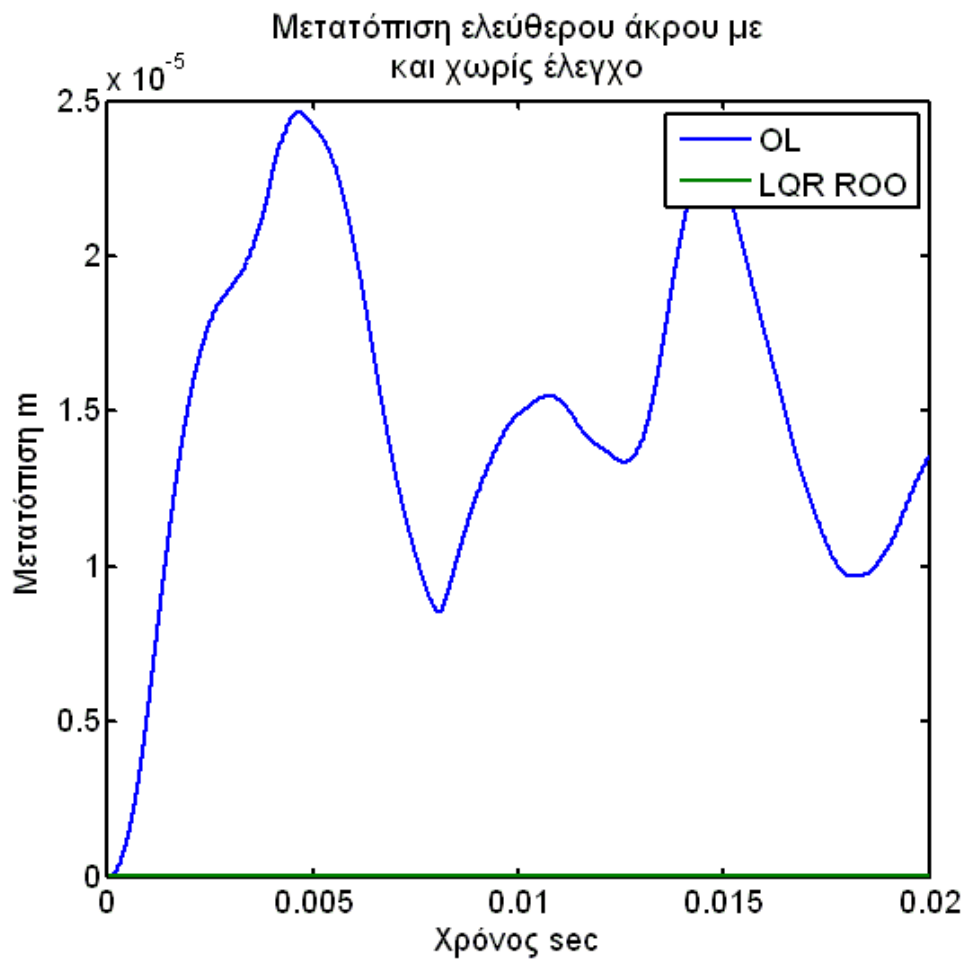
Σχήμα 3.34: Μετατόπιση με και χωρίς έλεγχο πρώτου κόμβου της δοκού για πραγματική αιολική φόρτιση



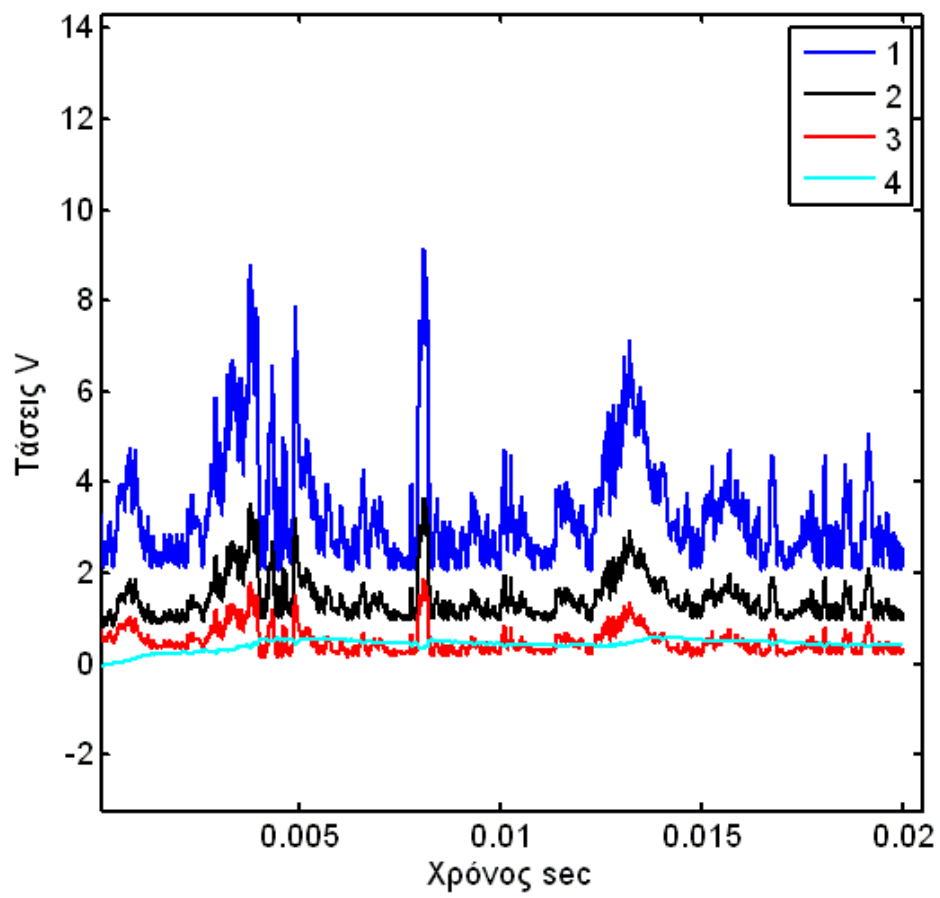
Σχήμα 3.35: Μετατόπιση με και χωρίς έλεγχο δεύτερου κόμβου της δοκού για πραγματική αιολική φόρτιση



Σχήμα 3.36: Μετατόπιση με και χωρίς έλεγχο τρίτου κόμβου της δοκού για πραγματική αιολική φόρτιση



Σχήμα 3.37: Μετατόπιση με και χωρίς έλεγχο ελεύθερου άκρου της δοκού για πραγματική αιολική φόρτιση



Σχήμα 3.38: Τάσεις των ενεργοποιητών για όλους τους κόμβους της δοκού

Παρατηρείται ότι, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του γραμμικό τετραγωνικού ελεγκτή LQR, υπάρχει μείωση της ταλάντωσης της δοκού, σε όλους τους κόμβους της, τόσο για σταθερή και για ημιτονοειδή μηχανική είσοδο αλλά και για πραγματική αιολική φόρτιση. Ο έλεγχος LQR επιτυγχάνει μείωση της ταλάντωσης ενώ συγχρόνως απαιτεί γνώση της κατάστασης του προβλήματος για κάθε χρονική στιγμή καθώς και στην πράξη εκτεταμένη οργάνωση αισθητήρων.

i. Οι διαταραχές είναι συχνά άγνωστες και απρόβλεπτες.

ii. Το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι μετρήσιμο στο σύνολο του, γεγονός που καθιστά απαραίτητη τη χρήση παρατηρητή. Ο συνδυασμός αυτός είναι προβληματικός καθόσον ο παρατηρητής δεν έχει πληροφορία για τη διαταραχή, με αποτέλεσμα η εκτίμηση του να είναι εσφαλμένη. Ένας τρόπος παράκαμψης του προβλήματος αυτού είναι η χρήση του παρατηρητή αγνώστου εισόδου. Δυστυχώς η προσέγγιση αυτή δεν είναι δυνατή καθώς μία εκ των απλών προϋποθέσεων που πρέπει να ισχύει, η $m < q$ δεν ισχύει. Η κατάσταση αυτή περιπλέκει το πρόβλημα και καθιστά προβληματική τη χρήση κλασικών ελεγκτών όπως ο LQR καθώς η απόδοση του εξαρτάται άμεσα από την διαθεσιμότητα του διανύσματος κατάστασης ή στη καλύτερη περίπτωση ενός αξιόπιστου εκτιμητή του.

Για τους λόγους που προαναφέρθηκαν η μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος προχωράει σε πιο προχωρημένες τεχνικές ελέγχου όπως είναι ο έλεγχος H_∞ .

Εξετάζεται αρχικά η ονομαστική σχεδίαση ενώ στη συνέχεια τα αποτελέσματα επεκτείνονται και στην εισαγωγή αβεβαιοτήτων.

$$\begin{aligned}
y_{Fw} &= W_y Jx = W_y JFv = W_y JF(GW_d d + Bu_K) = W_y JFGW_d d + W_y JFBu_K \\
u_w &= W_u u_K \\
y_n &= Cx + W_n n = CFu + W_n n = CF(GW_d d + Bu_K) + W_n n \\
&= CFGW_d d + CFBu_K + W_n n
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Ενώνοντας όλα αυτά έχουμε, [74],

$$\begin{bmatrix} u_w \\ y_{Fw} \\ y_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & W_u \\ W_y JFGW_d & 0 & W_y JFB \\ \hline CFGW_d & W_n & CFB \end{array} \right] \begin{bmatrix} d \\ n \\ u_K \end{bmatrix} \tag{3.97}$$

Σημειώνεται ότι ο πίνακας της συνάρτησης μεταφοράς, $F(s)$, προέκυψε από το μετασχηματισμό της εξίσωσης,

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Iv(t) \\
y(t) &= Ix(t)
\end{aligned} \tag{3.98}$$

όπου $v(t) = Gd + Bu_K$. Έτσι,

$$F(s) = (sI - A)^{-1} \tag{3.99}$$

Επανασχεδιάζουμε το σχήμα 3.39 όπως το σχήμα 3.40 του οποίου μια πιο συμπαγή μορφή φαίνεται στο σχήμα 3.41.

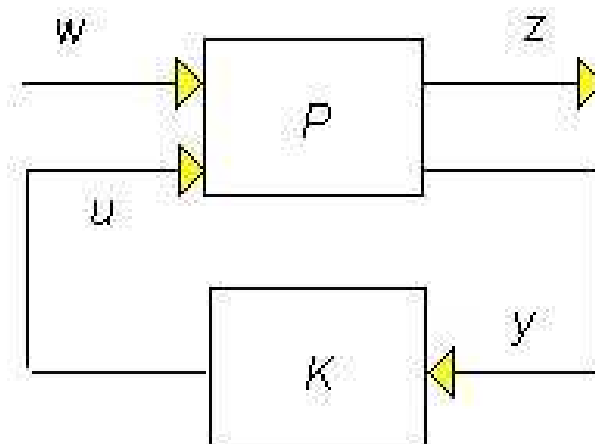
Όπως στα προηγούμενα,

$$z = \begin{bmatrix} u_w \\ y_{Fw} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}, \quad y = y_n, \quad u = u_K \tag{3.100}$$

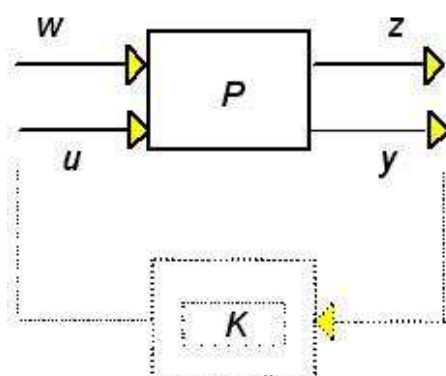
όπου z είναι οι εξωτερικές μεταβλητές που πρέπει να ελεγχθούν και w οι είσοδοι.

Το σχήμα (3.40) μπορεί να αναπαρασταθεί και στο πεδίο των συχνοτήτων και στο πεδίο του χρόνου. Για την αναπαράσταση στο πεδίο του χρόνου και με δεδομένο ότι το P έχει δύο εισόδους και δύο εξόδους έχουμε,

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \tag{3.101}$$



Σχήμα 3.41: Διάγραμμα δύο θυρών



Σχήμα 3.42: Δομή ανοικτού βρόχου

$$\begin{aligned} \dot{x}_F &= Az_F + (Gd_w + Bu), & y_F &= x_F \\ \dot{x}_u &= A_u x_u + B_u u, & u_w &= C_u x_u + D_u u \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_y F &= A_{yF} x_{yF} + B_{yF} J y_F, & y_{Fw} &= C_{yF} x_{yF} + D_{yF} y_F \\ \dot{x}_n &= A_n x_n + B_n n, & n_w &= C_n x_n + D_n n \\ \dot{x}_d &= A_d x_d + Gd, & d_w &= C_d x_d + D_d d \\ y_n &= C y_f + n_w \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_F \\ x_u \\ y_{Fw} \\ x_n \\ x_d \end{bmatrix}, \quad y = y_n, \quad w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} u_w \\ y_{Fw} \end{bmatrix}, \quad u = u_K \quad (3.108)$$

οπότε αντικαθιστώντας τα εσωτερικά σήματα d_w , n_w και y_F από τις (3.106), παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 & 0 & GC_d \\ 0 & A_u & 0 & 0 & 0 \\ BC_F & 0 & A_{yF} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} GD_d & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_n \\ B_d & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B \\ B_u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z &= \begin{bmatrix} 0 & C_u & 0 & 0 & 0 \\ D_{yF}C_F & 0 & C_{yF} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + 0w + \begin{bmatrix} D_u \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_F & 0 & 0 & C_n & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & D_n \end{bmatrix} w + 0u \end{aligned} \quad (3.109)$$

Επομένως οι πίνακες είναι,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} A_F & 0 & 0 & 0 & GC_d \\ 0 & A_u & 0 & 0 & 0 \\ BC_F & 0 & A_{yF} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_d \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} GD_d & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_n \\ B_d & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B \\ B_u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & C_u & 0 & 0 & 0 \\ D_{yF}C_F & 0 & C_{yF} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = 0, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} D_u \\ 0 \end{bmatrix} u \\ C_2 &= \begin{bmatrix} C_F & 0 & 0 & C_n & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & D_n \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0 \end{aligned} \quad (3.110)$$

Οι σχέσεις (3.108) έως (3.110) μπορούν να γραφτούν σε συσχευασμένη μορφή ως,

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Ενώ η αντίστοιχη φόρμα του K είναι, [74],

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] \quad (3.112)$$

Η εξίσωση (3.111) ορίζει τις εξισώσεις,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

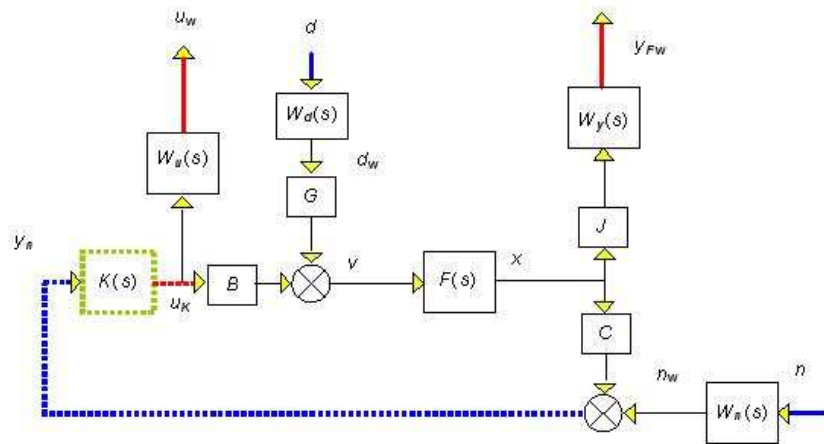
και,

$$\begin{aligned} \dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{aligned} \quad (3.115)$$

3.10

Καθορισμός κριτηρίων απόδοσης

Για να υπολογιστούν τα κριτήρια απόδοσης γυρνάμε στο σχ. 3.43



Σχήμα 3.43: Κλασσικό σύστημα ρύθμισης για το πρόβλημα της θέσης της δοκού

Χρησιμοποιώντας τις (3.97), (3.98) και (3.100),

$$\begin{bmatrix} u_w \\ y_{Fx} \\ y_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & W_u \\ W_y FGW_d & 0 & W_y FB \\ \hline FGW_d & W_n & FB \end{array} \right] \begin{bmatrix} d \\ n \\ u_K \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα y_n , u_K και να πάρουμε την εξίσωση κλειστού βρόχου,

$$\begin{aligned} y_{Fw} &= W_y(I + GK)^{-1}GW_d d + W_y[I + GK]^{-1}GKW_n n \\ u_w &= W_u T_i W_d d + W_u K(I + GK)^{-1}W_n n \end{aligned} \quad (3.117)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.100) έχουμε, [74],

$$y = S_o G d + T_o n \quad (3.118)$$

ενώ η εξ. (3.117) γίνεται,

$$\begin{aligned} y_{Fw} &= W_y S_o G W_d d + W_y T_o W_n n \\ u_w &= W_u T_i W_d d + W_u K S_o W_n n \end{aligned} \quad (3.119)$$

ή,

$$\begin{bmatrix} y_{Fw} \\ u_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_y S_o G W_d & W_y T_o W_n \\ W_u T_i W_d & W_u K S_o W_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

Με αυτό τον τρόπο ο ελεγκτής μπορεί να ελαχιστοποιηθεί,

$$\left\| \begin{bmatrix} W_y S_o G W_d & W_y T_o W_n \\ W_u T_i W_d & W_u K S_o W_n \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_y \\ W_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_o G & T_o \\ T_i & K S_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_d \\ W_n \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (3.121)$$

με,

$$\left\| \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} \right\|_2 \leq 1 \quad (3.122)$$

Αυτό το πρόβλημα είναι πολύ πιο σύνθετο από τα συνηθισμένα που λύνονται με αυτήν τη θεώρηση.

Το πιο δύσκολο κομμάτι είναι η επιλογή των πινάκων βαρών W_y , W_n , W_u και

W_d . Από την (3.121),

$$\begin{aligned} \|T_{zw}\|_{\infty} &= \left\| \begin{bmatrix} W_y & \\ & W_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_o G & T_o \\ T_i & K S_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_d & \\ & W_n \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \Rightarrow \\ &\begin{bmatrix} W_y^{-1} & \\ & W_u^{-1} \end{bmatrix} T_{zw} \begin{bmatrix} W_d^{-1} & \\ & W_n^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_o G & T_o \\ T_i & K S_o \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.123)$$

3.11

Επιλογή συναρτήσεων βαρών

Η επιλογή των βαρών που μορφοποιούν τα σήματα εισόδου και εξόδου στο πεδίο της συχνότητας, είναι η μοναδική σχεδιαστική παράμετρος στην μεθοδολογία εύρεσης ελεγκτών χρησιμοποιώντας ελάχιστες νόρμες. Αν τα πρώτα αποτελέσματα της σχεδίασης δεν κρίνονται ικανοποιητικά, τότε τα αρχικά βάρη μπορούν να τροποποιούνται σταδιακά μέχρι την επίτευξη ικανοποιητικής σχεδίασης αν αυτό βέβαια είναι εφικτό. [76]

Σε πολυμεταβλητά συστήματα τα βάρη είναι συνήθως διαγώνιοι πίνακες. Έτσι, ας θεωρήσουμε το σύστημα του σχήματος 3.44, όπου,

$$W_R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{n_r} \end{bmatrix}, \quad W_L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_{n_y} \end{bmatrix}, \quad (3.124)$$

είναι ευσταθείς πίνακες μεταφοράς.



Σχήμα 3.44: Στοιχειώδες σταθμισμένο δομικό διάγραμμα συνάρτησης μεταφοράς με τα βάρη συστήματος

Τότε,

$$y = W_L \tilde{y} = W_L G \tilde{r} = W_L G W_R r \quad (3.125)$$

Επομένως φραγμός στην ποσότητα $\|W_L G W_R\|_{\infty}$ θα έχει σαν αποτέλεσμα φραγ-

μό στη σταθερή κατάσταση του $\tilde{y}$. Έτσι η έξοδος,

$$\tilde{y}_{ss}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \eta \mu(\bar{\omega}t + \psi_1) \\ \dots \\ \tilde{y}_{n_y} \eta \mu(\bar{\omega}t + \psi_{n_y}) \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

ικανοποιεί την,

$$\sum_{i=1}^{n_y} |W_{L_i}(j\bar{\omega}) \tilde{y}_i|^2 \leq 1 \quad (3.127)$$

για κάθε ημιτονοειδή είσοδο,

$$\tilde{r}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 \eta \mu(\bar{\omega}t + \phi_1) \\ \dots \\ \tilde{r}_{n_r} \eta \mu(\bar{\omega}t + \phi_{n_r}) \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

που ικανοποιεί την,

$$\sum_{i=1}^{n_r} \frac{|\tilde{r}_i|^2}{|W_{R_i}(j\bar{\omega})|^2} \leq 1 \quad (3.129)$$

αν και μόνον αν $\|W_L G W_R\|_\infty \leq 1$.

Αυτό με τη σειρά του προϋποθέτει, αρκετά προσεγγιστικά, ότι $\|W_L G W_R\|_\infty \leq 1$ αν και μόνον αν για κάθε είσοδο $\tilde{r}$ με $|\tilde{r}_i| \leq |W_{R_i}(j\bar{\omega})|$ ισχύει $|\tilde{y}_i| \leq \frac{1}{\|W_{L_i}(j\bar{\omega})\|}$.

Η τελευταία αυτή σχέση μας δίνει μία προσέγγιση επιλογής βαρών: να χρησιμοποιήσουμε τον W_R για να αναπαραστήσουμε τα σχετικά μεγέθη των πιθανών εισόδων και τον $\frac{1}{W_L}$ για να αναπαραστήσουμε τα επιθυμητά άνω φράγματα των εξόδων.

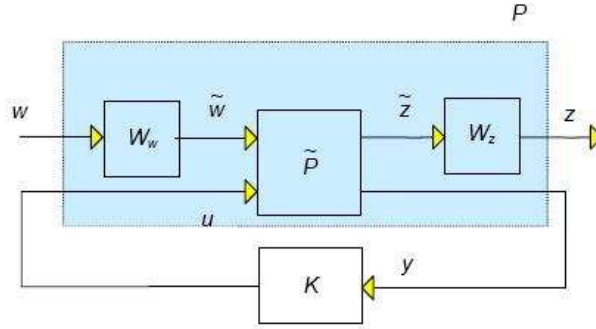
Για να πάρουμε μια γενική ιδέα για την επίδραση των βαρών ας δούμε το Σχ.3.45 όπου $\tilde{P}$ είναι το πραγματικό σύστημα που θέλουμε να ελέγξουμε, $\tilde{z}$ και $\tilde{w}$ τα πραγματικά σήματα εισόδου και εξόδου και $W_w(s)$, $W_z(s)$ πίνακες συναρτήσεων μεταφοράς βαρών στο πεδίο της συχνότητας τέτοιες ώστε τα προκύπτοντα σήματα w και z να ικανοποιούν την προϋπόθεση που τίθεται από τη μεθοδολογία H_∞ , δηλαδή,

$$\|w\|_2 \leq 1, \quad \|z\|_2 \leq 1 \quad (3.130)$$

ή,

$$\left\| W_w^{-1} \tilde{w} \right\|_2 \leq 1, \quad \left\| W_z \tilde{z} \right\|_2 \leq 1 \quad (3.131)$$

αν οι αντίστροφοι υπάρχουν.



Σχήμα 3.45: Σταθμισμένο σύστημα

Επομένως, σαν γενική αρχή μπορούμε να πούμε ότι σημείο εκκίνησης για την επιλογή των βαρών είναι η εκτίμηση της επιθυμητής συμπεριφοράς για τα σήματα εξόδου (σφάλμα, έλεγχος) και της προσδοκώμενης συμπεριφοράς για τα σήματα εισόδου (σήμα αναφοράς, διαταραχές, θόρυβος).

Η (3.131) είναι ένα φράγμα στη νόρμα των εμπλεκόμενων σημάτων δηλαδή στο μέγεθος τους, επομένως αν,

$$W_z^{-1} = \text{χειρότερη επιθυμητή συμπεριφορά του } z$$

$$W_w = \text{χειρότερη προσδοκώμενη συμπεριφορά του } w$$

τότε έχουμε πετύχει το στόχο μας. Τα πράγματα μπερδεύονται όμως λίγο επειδή και οι συναρτήσεις βαρών πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη που επιβάλλει ο έλεγχος H_∞ , δηλαδή οι συναρτήσεις βαρών πρέπει να είναι ευσταθείς συναρτήσεις ελάχιστης φάσης. Έτσι αφού,

$$z = \begin{bmatrix} u_w \\ e_w \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

προκύπτει ότι,

$$W_z = \begin{bmatrix} W_u & 0 \\ 0 & W_e \end{bmatrix}, \quad W_w = \begin{bmatrix} W_d & 0 \\ 0 & W_n \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

Για τον έλεγχο,

$$W_u = \begin{bmatrix} \frac{5,556 \times 10^{-6}s + 0,005556}{s+100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5,556 \times 10^{-6}s + 0,005556}{s+100} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5,556 \times 10^{-6}s + 0,005556}{s+100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5,556 \times 10^{-6}s + 0,005556}{s+100} \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

Για το σφάλμα,

$$W_e = \begin{bmatrix} \frac{2513}{s+31.42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2513}{s+31.42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2513}{s+31.42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2513}{s+31.42} \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

Για τη διαταραχή,

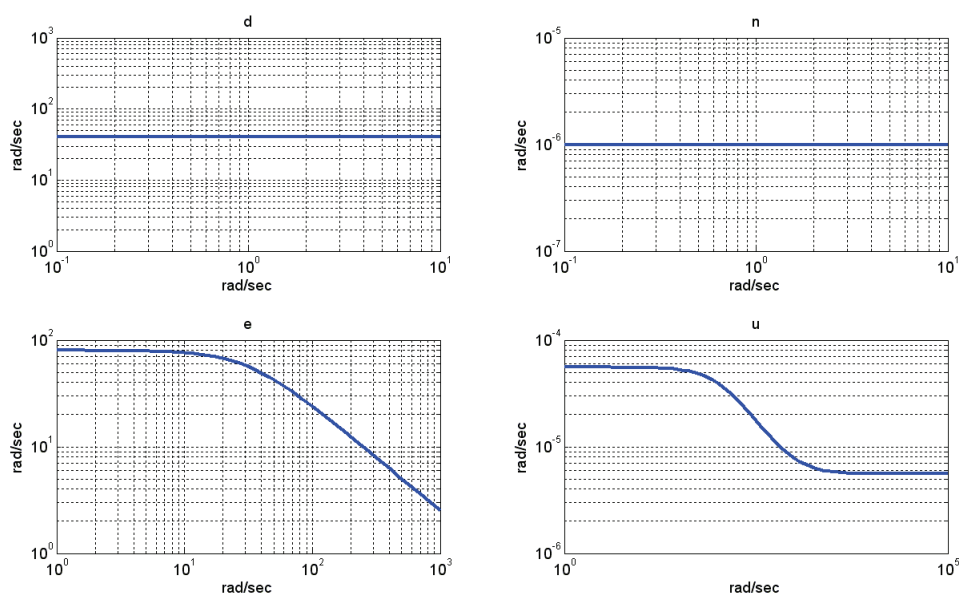
$$W_d = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

Στο σχήμα 3.46 φαίνονται τα γραφήματα Bode των διαγωνίων στοιχείων των παραπάνω πινάκων βαρών. Οι πίνακες αυτοί έχουν προκύψει κατόπιν πολλών δοκιμών έτσι ώστε να καθίσταται εφικτή η εύρεση ενός ελεγκτή H_∞ δηλαδή να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις που αναφέρονται στην ενότητα Γ.3 του Παραρτήματος Γ.

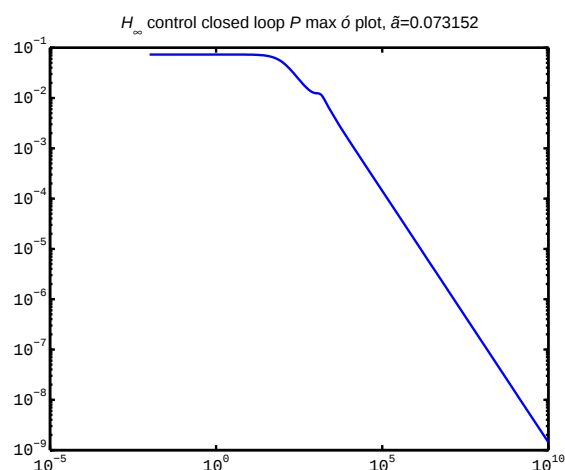
Ο ελεγκτής που προκύπτει είναι τάξης 24 (16 συν 4 συν 4). Η δομή του ελεγκτή δίνεται στο Παράρτημα Δ. Για τον ελεγκτή αυτό $\gamma = 0,074$. Το γράφημα της μέγιστης ιδιόμορφης τιμής του σταθμισμένου συστήματος κλειστού βρόχου (δοκός συν ελεγκτής H_∞) δίνεται στο σχήμα 3.47 από όπου φαίνεται καθαρά ότι η τιμή της παραμένει κάτω από το γ σε όλες τις συχνότητες.

Περαιτέρω στα σχήματα 3.48, 3.49, 3.50 φαίνονται οι μέγιστες ιδιόμορφες τιμές των συναρτήσεων μεταφοράς του αστάθμιτου συστήματος κλειστού βρόχου (δηλαδή του αρχικού) που ενδιαφέρουν.

Απο τα σχήματα αυτά φαίνεται η ικανοποιητική απόδοση του ελεγκτή που υπολογίστηκε αφού:

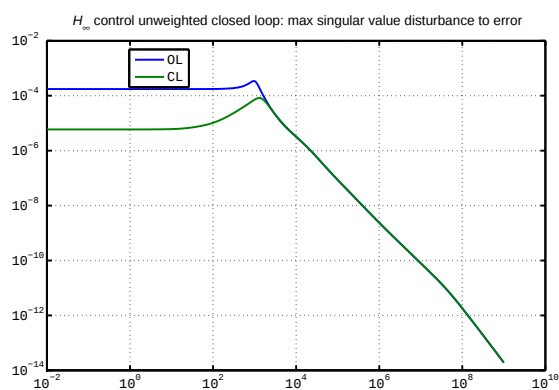


Σχήμα 3.46: Διαγράμματα Bode των διαγωνίων στοιχείων των πινάκων βαρών

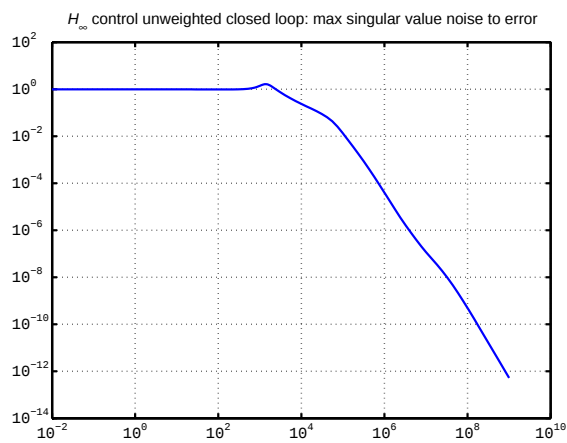


Σχήμα 3.47: Μέγιστη ιδιόμορφη τιμή σταθμισμένου συστήματος κλειστού βρόχου

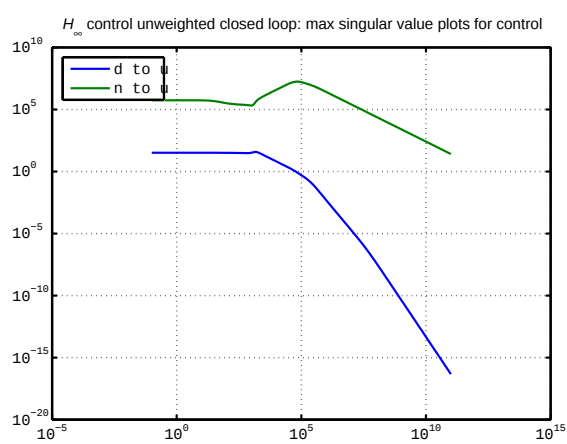
- i. Απο το σχήμα 3.48 φαίνεται να υπάρχει σημαντική βελτίωση της επίδρασης των διαταραχών στο σφάλμα μέχρι τη συχνότητα 1000Hz .
- ii. Σ το σχήμα 3.49 φαίνεται να υπάρχει μικρή επίδραση του θορύβου στο σφάλμα σε συχνότητες πάνω από 1000Hz .
- iii. Στο σχήμα 3.50 φαίνεται ικανοποιητική επίδραση της διαταραχής στο μέγεθος του σχήματος ελέγχου (η σχεδίαση επιδέχεται βελτίωση εάν μειωνόταν η



Σχήμα 3.48: Μέγιστη ιδιόμορφη τιμή διαταραχής σφάλματος



Σχήμα 3.49: Μέγιστη ιδιόμορφη τιμή θορύβου σφάλματος



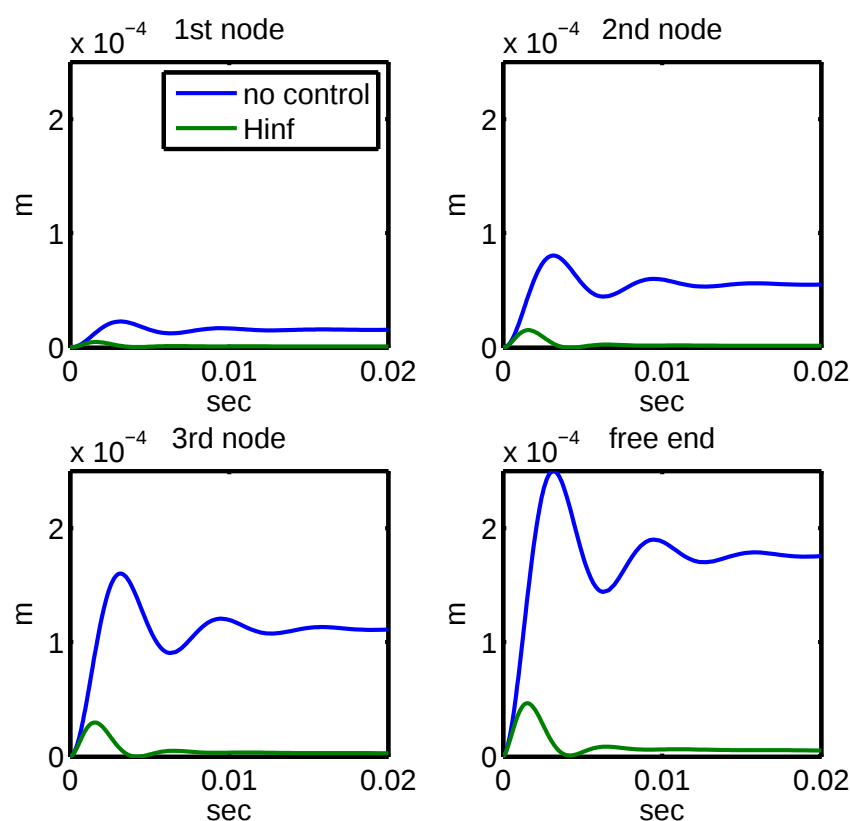
Σχήμα 3.50: Μέγιστες ιδιόμορφες τιμές διαταραχής - ελέγχου, θορύβου - ελέγχου

επίδραση του θορύβου για συχνότητες 1000Hz).

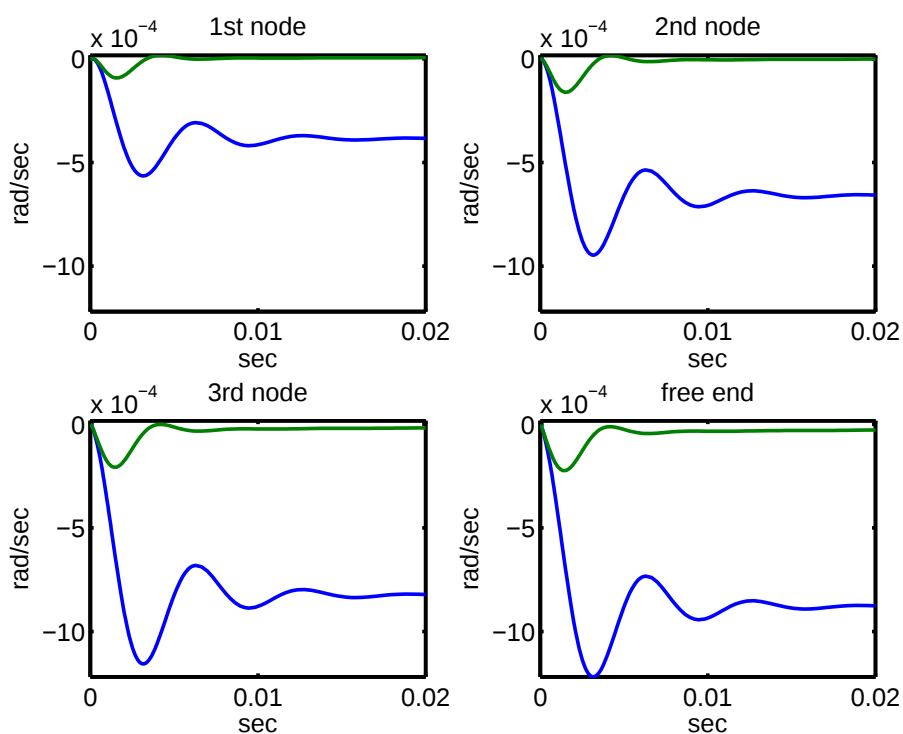
Για επιβεβαίωση των παραπάνω ευρημάτων παρατίθενται στη συνέχεια οι χρονικές αποκρίσεις του συστήματος για τις τρεις εισόδους που αναφέρονται στην ενότητα.

Χρησιμοποιώντας την πρώτη μηχανική είσοδο, έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

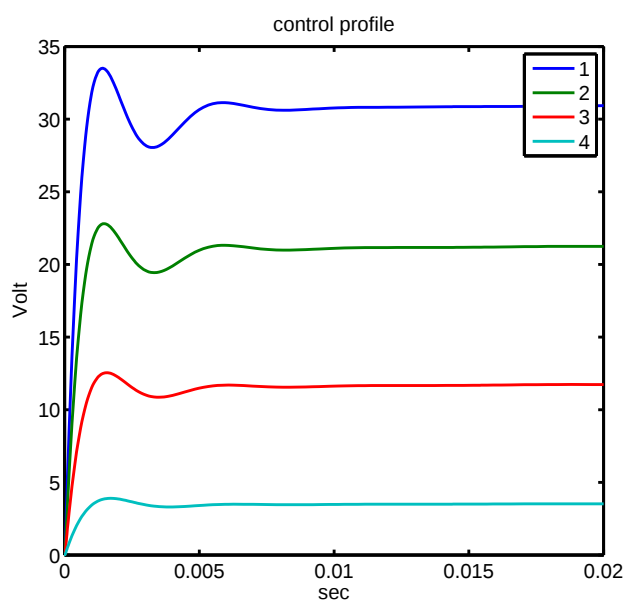
Στο σχήμα 3.51 φαίνονται οι μεταβολές των μετατοπίσεων για όλους τους κόμβους της δοκού, με και χωρίς έλεγχο, ενώ στο σχήμα 3.52 φαίνονται οι μεταβολές των στροφών για όλους τους κόμβους της δοκού, με και χωρίς έλεγχο. Τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά δηλαδή ο χρόνος αποκατάστασης είναι περίπου $0,005\text{ sec}$. Στο σχήμα 3.53 φαίνονται οι τάσεις των ενεργοποιητών για όλους τους κόμβους της δοκού. Η τιμή τους είναι μικρότερη από 500 Volt .



Σχήμα 3.51: Μετατόπιση της δοκού για όλους τους κόμβους της, με και χωρίς έλεγχο για την πρώτη μηχανική φόρτιση



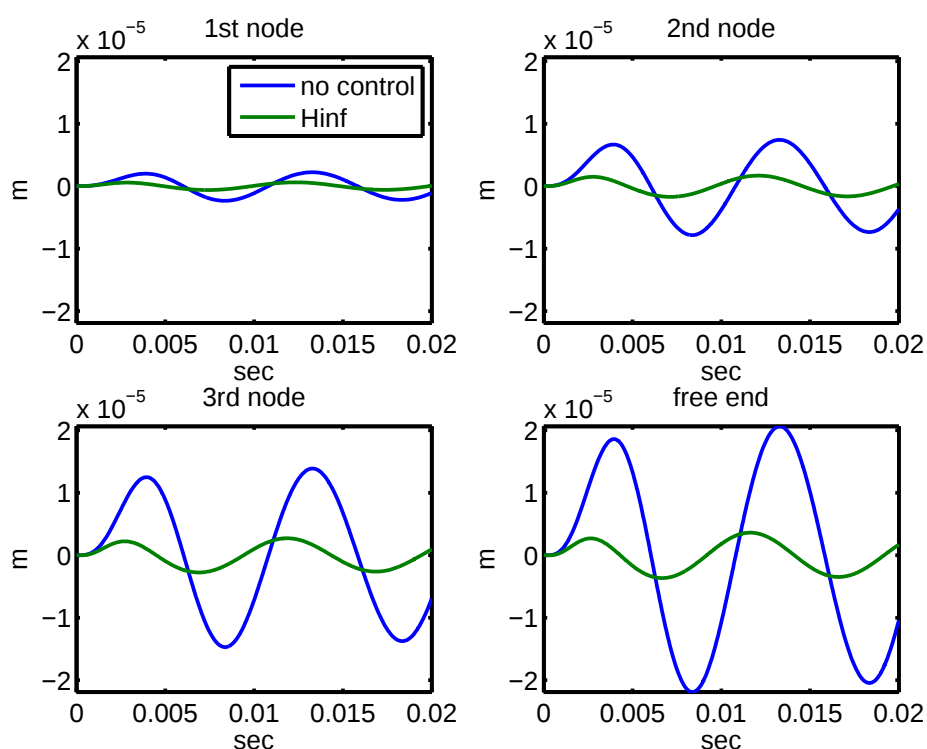
Σχήμα 3.52: Στροπή της δοκού για όλους τους κόμβους της, με και χωρίς έλεγχο για την πρώτη μηχανική φόρτιση



Σχήμα 3.53: Παραγόμενες τάσεις του ελέγχου σε Volt για όλους τους κόμβους της δοκού

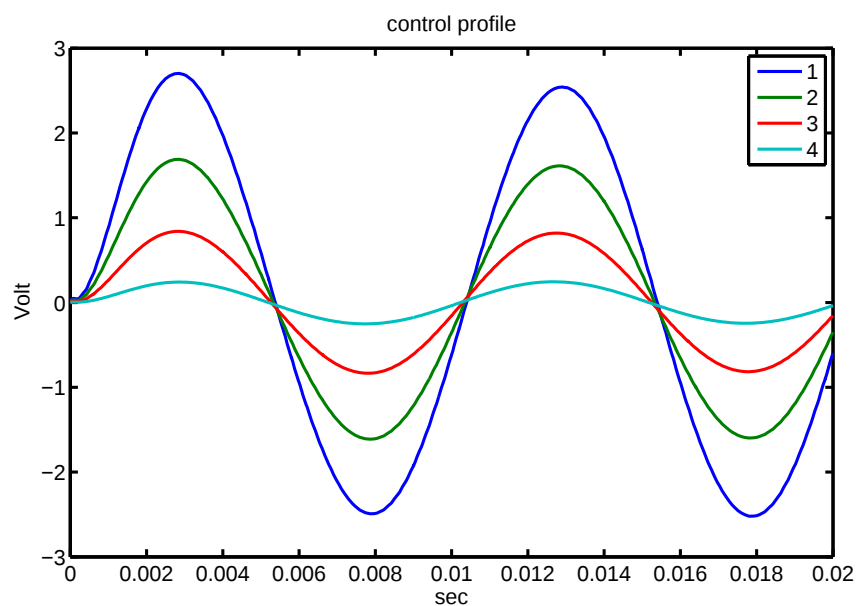
Χρησιμοποιώντας την δεύτερη μηχανική είσοδο, έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

Στο σχήμα 3.54 φαίνεται η μεταβολή της μετατόπισης της δοκού για τους τέσσερις κόμβους της δοκού χωρίς και με έλεγχο. Παρατηρείται καταστολή της ταλάντωσης κατά 90%. Με τη βοήθεια του ελέγχου H_∞ έχουμε καταστολή της ταλάντωσης της δοκού ενώ οι τάσεις που χρησιμοποιούνται είναι πολύ μικρότερες από 500 Volt (σχήμα 3.55).

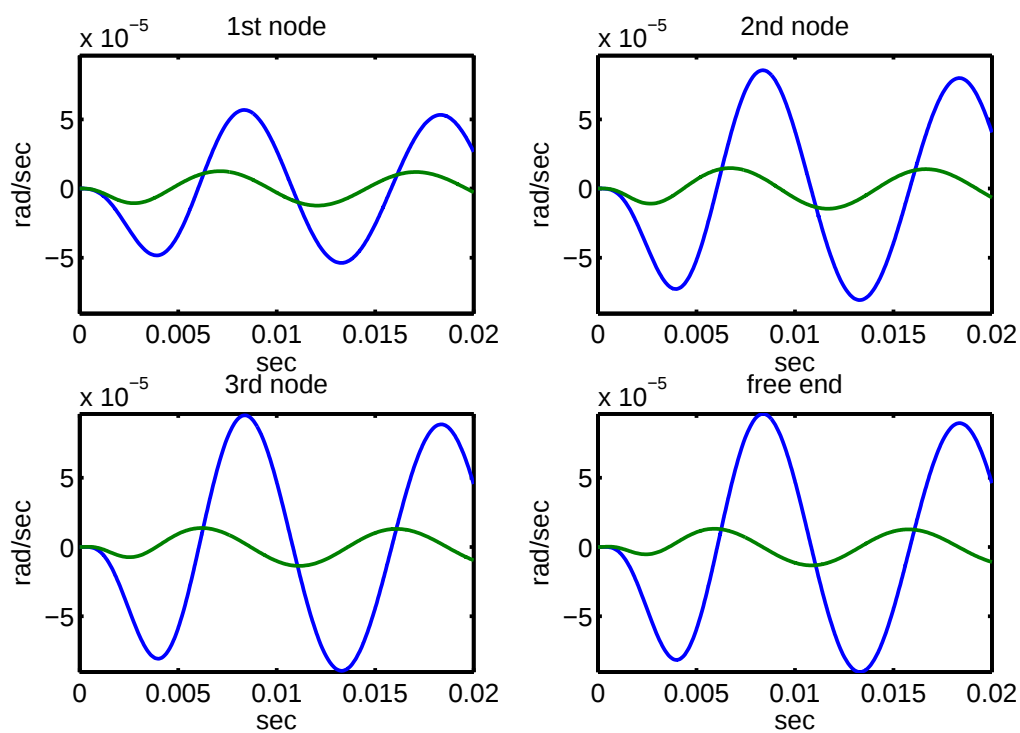


Σχήμα 3.54: Μετατόπιση της δοκού για όλους τους κόμβους, χωρίς και με έλεγχο για τη δεύτερη μηχανική φόρτιση

Στο σχήμα 3.56 φαίνεται η μεταβολή της στροφής για τους τέσσερις κόμβους της δοκού χωρίς και με έλεγχο. Η στροφή με τη βοήθεια του H_∞ τείνει να είναι μηδενική.

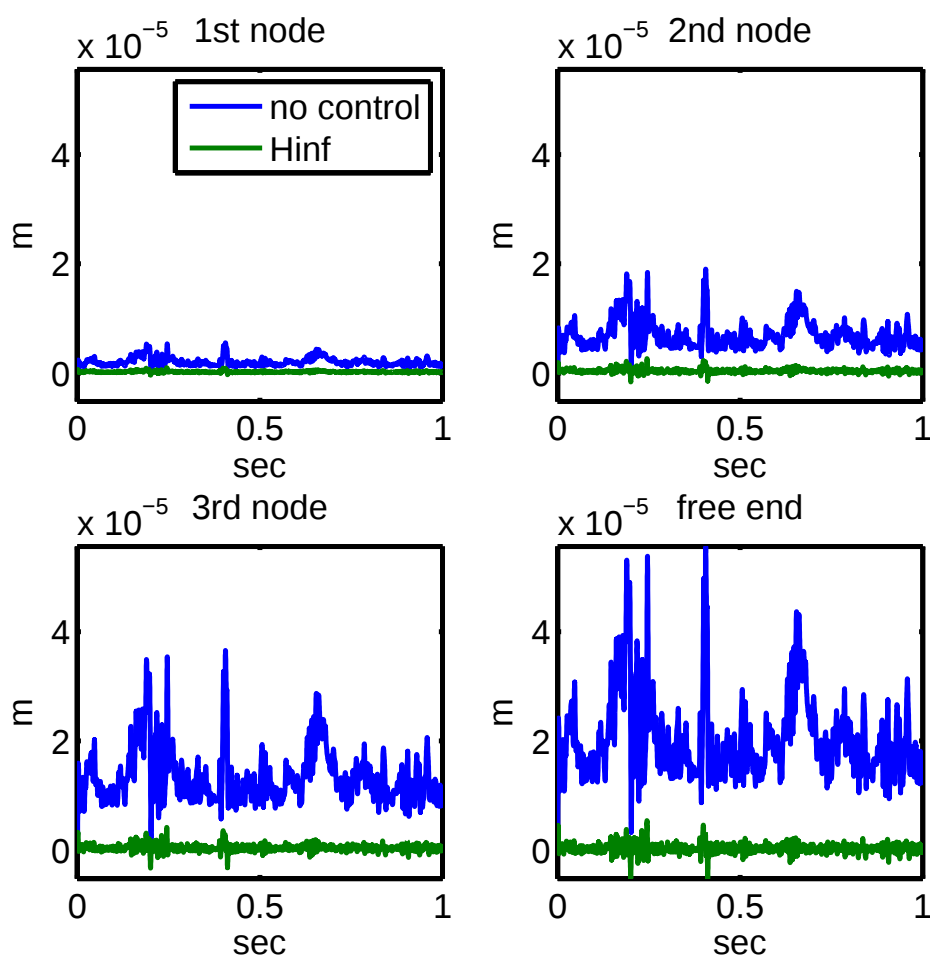


Σχήμα 3.55: Παραγόμενες τάσεις του ελέγχου σε Volt για όλους τους κόμβους της δοκού

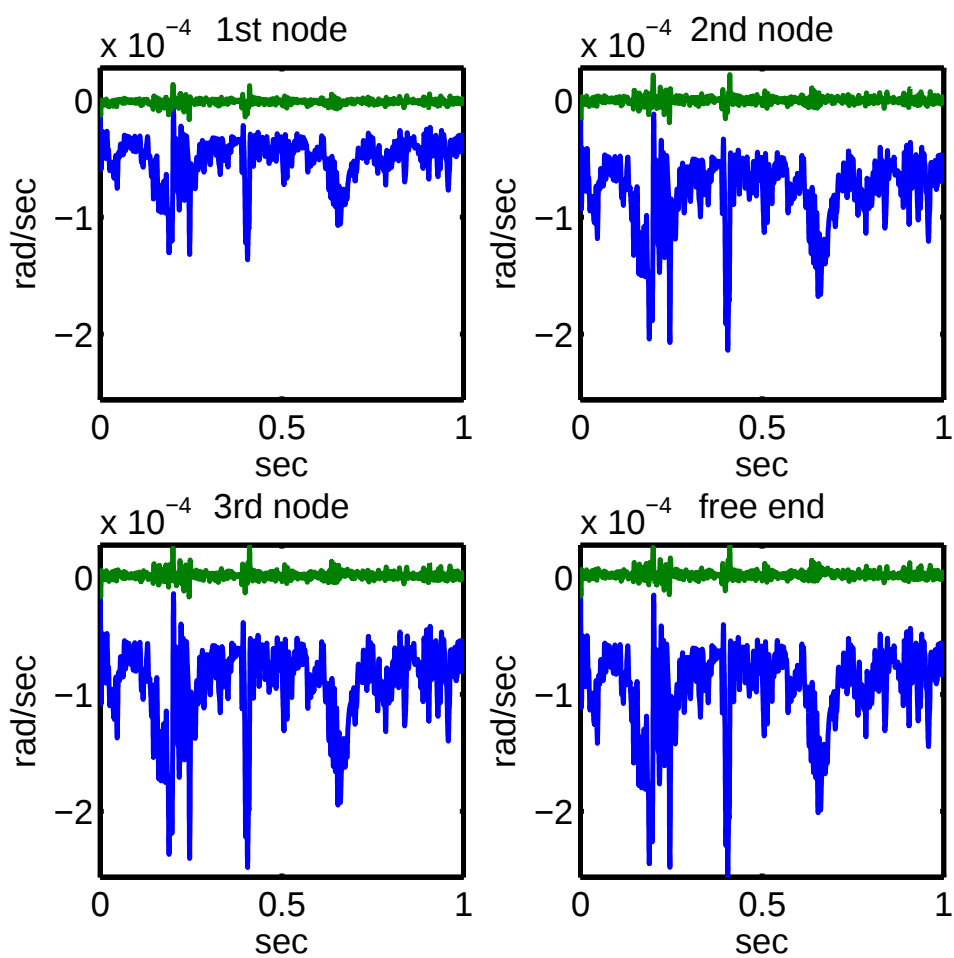


Σχήμα 3.56: Μεταβολή της στροφής για όλους τους κόμβους της δοκού, χωρίς και με έλεγχο για τη δεύτερη μηχανική φόρτιση

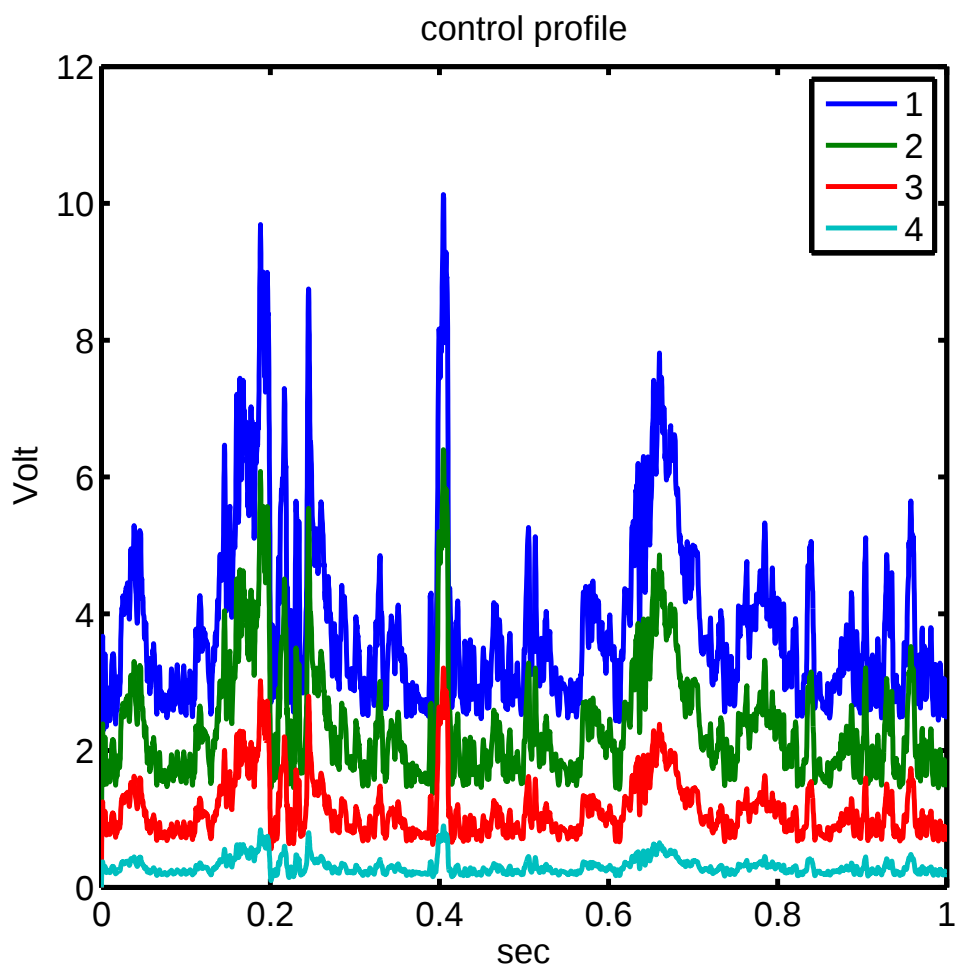
Τέλος για την τρίτη μηχανική είσοδο έχουμε τα εξής αποτελέσματα: Στο σχήμα 3.57 φαίνεται η μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης όλων των κόμβων της δοκού ενώ στο σχήμα 3.58 φαίνεται η μεταβολή της στρώφης για όλους τους κόμβους της δοκού χωρίς και με έλεγχο H_∞ . Στο σχήμα 3.59 έχουμε τις παραγόμενες τάσεις του ενεργοποιητή σε σχέση με το χρόνο που είναι μικρότερος από την τάση αντοχής των πιεζοηλεκτρικών τα 500 Volt. Τα δεδομένα κρίνονται ικανοποιητικά και παρατηρείται καταστολή κατά 95%.



Σχήμα 3.57: Μετατόπιση για όλους τους κόμβους χωρίς και με έλεγχο για πραγματική αιολική φόρτιση



Σχήμα 3.58: Στροφή για όλους τους κόμβους χωρίς και με έλεγχο για πραγματική αιολική φόρτιση



Σχήμα 3.59: Παραγόμενες τάσεις σε Volt για όλους τους κόμβους της δοκού

Ο έλεγχος LQR πραγματοποιεί μείωση της ταλάντωσης ενώ συγχρόνως απαιτεί γνώση της κατάστασης του προβλήματος για κάθε χρονική στιγμή καθώς και στην πράξη εκτεταμένη οργάνωση αισθητήρων. Αυτό συνεπάγεται ότι είναι δεδομένο το ακριβές μοντέλο του συστήματος, κάτι που δεν μπορεί να συμβεί στην πράξη. Επίσης σε ότι αφορά τις διαταραχές συνήθως για αυτές είναι διαθέσιμες ανεπαρκείς πληροφορίες. Για το λόγο αυτό η χρήση παρατηρητή κρίνεται απαραίτητη.

Το πλεονέκτημα του H_∞ ελέγχου οφείλεται στη δυνατότητα να λάβουμε υπόψη στους υπολογισμούς το χειρότερο αποτέλεσμα των αβέβαιων διαταραχών και του θορύβου του συστήματος. Τουλάχιστον στη θεωρία είναι δυνατόν να συνθέσουμε ένα H_∞ ελεγκτή που θα είναι εύρωστος έως ένα προκαθορισμένο ποσοστό σφαλμάτων μοντελοποίησης. Επιπλέον ο ελεγκτής H_∞ μπορεί να ανταπεξέλθει σε μεγαλύτερες δυνάμεις όπως η πραγματική αιολική φόρτιση, ενώ ο σχεδιασμός του γίνεται σε μεγάλο εύρος συχνοτήτων.

Στη συνέχεια, η ευρωστία των σφαλμάτων μοντελοποίησης του ελεγκτή H_∞ που έχει σχεδιαστεί θα αναλυθεί. Επιπλέον θα παρουσιαστεί μια προσπάθεια σύνθεσης ενός μ -ελεγκτή και θα γίνει μια σύγκριση των δύο ελεγκτών.

3.14

Μείωση τάξης ελεγκτή H_∞

Ο ελεγκτής H_∞ που βρέθηκε είναι 24ης τάξης. Το γεγονός ότι η τάξη του ελεγκτή, που είναι ίση με την τάξη του συστήματος, είναι σχετικά μεγαλύτερη από την τάξη των κλασικών ελεγκτών όπως PI και LQR , έχει οδηγήσει πολλούς ερευνητές στην ανάπτυξη αλγορίθμων για την μείωση της τάξης. Ο πλέον διαδεδομένος από τους αλγόριθμους αυτούς, γνωστός ως HIFOO, έχει υλοποιηθεί στο περιβάλλον *Matlab* και είναι αυτός που θα χρησιμοποιηθεί για την παρακάτω διαδικασία [88].

Το γενικό πρόβλημα είναι να υπολογιστεί ένας ελεγκτής μειωμένης τάξης $\hat{n} < 24$ ο οποίος να διατηρεί την απόδοση του κριτηρίου H_∞ και τη συμπεριφορά ενός ελεγκτή πλήρους τάξης του δεδομένου συστήματος [89, 90].

Όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 3 οι εξισώσεις του χώρου κατάστασης του συστήματός μας είναι,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t), \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t)\end{aligned}\tag{3.138}$$

και η εξίσωση του χώρου κατάστασης για τον ελεγκτή K είναι,

$$\begin{aligned}\dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y(t), \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t)\end{aligned}\tag{3.139}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\alpha(X)$ δηλώνει τη φασματική τετμημένη (spectral abscissa) ενός πίνακα X , δηλαδή το μέγιστο των πραγματικών μερών των ιδιοτιμών. Έτσι, όχι μόνο απαιτούμε $\alpha(A_{CL}) < 0$, όπου A_{CL} είναι ο πίνακας συστήματος κλειστού βρόχου, αλλά επίσης απαιτούμε $\alpha(A_k) < 0$. Το δυνατό σύνολο για A_k , δηλαδή το σύνολο των ευσταθών πινάκων, δεν είναι ένα κυρτό σύνολο και έχει ένα όριο που δεν είναι ομαλό [91, 92].

Η διαδικασία HIFOO έχει δύο φάσεις: ευστάθεια και βελτιστοποίηση απόδοσης [88, 93]. Στη φάση ευστάθειας, το HIFOO προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το,

$$\max(\alpha(A_{CL}, \epsilon \alpha(A_{CL})))\tag{3.140}$$

όπου ϵ είναι μια θετική παράμετρος που θα περιγραφεί σύντομα, μέχρι να βρεθεί ένας ελεγκτής K για τον οποίο αυτή η ποσότητα είναι αρνητική, δηλαδή, ο ελεγκτής είναι ευσταθής και καθιστά ευσταθές το σύστημα κλειστού βρόχου. Αν δεν μπορεί να βρει έναν τέτοιο ελεγκτή, το HIFOO τερματίζει ανεπιτυχώς.

Στη φάση βελτιστοποίησης της απόδοσης, το HIFOO ψάχνει για ένα τοπικό ελαχιστοποιητή του,

$$f(K) = \begin{cases} \infty & \text{εάν } \max(\alpha(A_{CL}), \alpha(A_K)) \geq 0 \\ \max(\|T_{zw}\|_\infty, \epsilon\|K\|_\infty) & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.141)$$

όπου,

$$\|K\|_\infty = \sup_{\Re s=0} \|C_K(sI - A_K)^{-1}B_K + D_K\|_2$$

Το κίνητρο για την εισαγωγή του ϵ είναι ότι ο βασικός στόχος σχεδίασης είναι η επίτευξη ευστάθειας του συστήματος κλειστού βρόχου και η ελαχιστοποίηση του $\|T_{zw}\|_\infty$, δείχνοντας ότι το ϵ θα έπρεπε να είναι σχετικά μικρό, αλλά ο όρος $\epsilon\|K\|_\infty$ εμποδίζει τη νόρμα του ελεγκτή H_∞ να γίνει πολύ μεγάλη, όπου ο περιορισμός ευστάθειας από μόνος του δε θα υπάρχει. Λόγω της φάσης ευστάθειας, η φάση βελτιστοποίησης απόδοσης αρχίζει με μια πεπερασμένη τιμή για το $f(K)$. Όταν συναντήσει ως επακόλουθο μια τιμή του K για την οποία $f(K) = \infty$, απορρίπτεται από το ζητούμενο που είναι μια μείωση στο στόχο σε κάθε επανάληψη [88, 93].

3.15

Αποτελέσματα με χρήση ελεγκτή HIFOO

Όπως προαναφέρθηκε ο ελεγκτής HIFOO υλοποιείται στο Matlab μέσω κατάλληλων ρουτινών. Η χρήση του γίνεται ως,

$$K_{foo} = \text{hifoo}(\text{plant}, 2)$$

όπου `plant` είναι η περιγραφή του συστήματος στη μορφή των εξισώσεων (3.138), και $\hat{n} = 2$ η τάξη του ελεγκτή.

Ο ελεγκτής που προκύπτει περιγράφεται στο χώρο κατάστασης παρόμοια με τον H_∞ ως,

$$\begin{aligned}\dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y(t), \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t)\end{aligned}\tag{3.142}$$

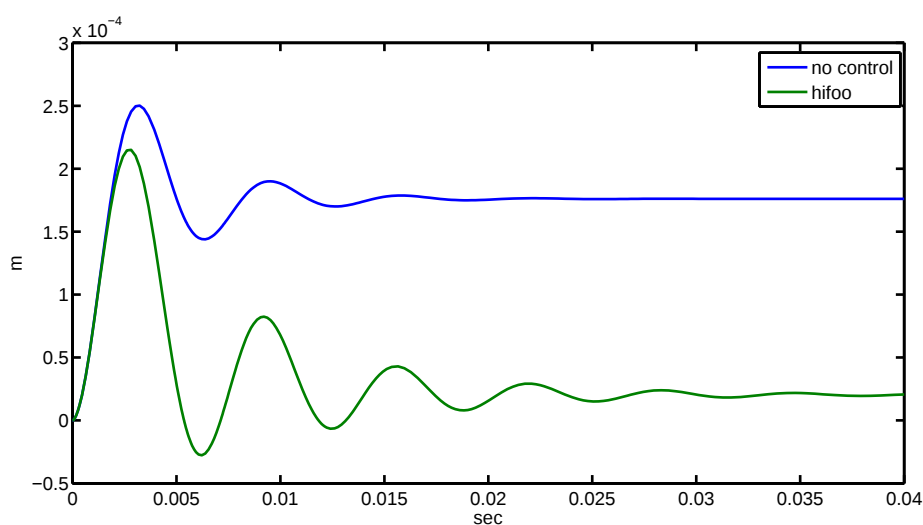
Η εξίσωση του ελεγκτή στο χώρο κατάστασης δίνεται από τη σχέση 3.142, όπου οι πίνακες του ελεγκτή ισούνται,

$$\begin{aligned}A_K &= \begin{bmatrix} 728.1 & -5034 \\ 207.5 & -1408 \end{bmatrix} \\ B_K &= \begin{bmatrix} 212.8 & 811.6 & 1716 & 2810 \\ -164.9 & -637.2 & -1348 & -2207 \end{bmatrix} \\ C_K &= \begin{bmatrix} 1557 & -916.7 \\ 1013 & -592.3 \\ 517 & -297.9 \\ 144.3 & -82.59 \end{bmatrix} \\ D_K &= \begin{bmatrix} 36.1 & 136.6 & 287.1 & 468.3 \\ 23.5 & 87.69 & 186.5 & 303 \\ 12.12 & 44.12 & 93.39 & 154.3 \\ 4.204 & 12.53 & 26.92 & 43.51 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.143}$$

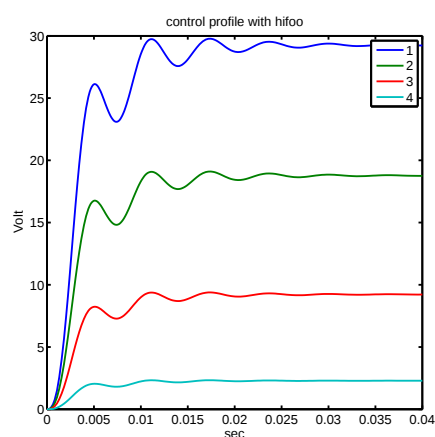
Για τη σύγκριση της απόδοσης του ελεγκτή HIFOO με αυτή του H_∞ παρατίθενται η απόκριση του ελεύθερου άκρου της δοκού, για την πρώτη και για την τρίτη μηχανική είσοδο.

Για την πρώτη μηχανική είσοδο ο χρόνος αποκατάστασης στον οποίο ισορροπεί το ελεύθερο άκρο είναι 0,03 sec όπως φαίνεται στο σχήμα 3.60, η μέγιστη υπερύψωση είναι 2×10^{-4} , ενώ το σφάλμα σταθερής κατάστασης είναι 10^{-7} . Η μέγιστη παραγόμενη τάση για τον έλεγχο του ακραίου κόμβου είναι 30 Volt όπως φαίνεται στο σχήμα 3.61. Με τη χρήση του H_∞ το ελεύθερο άκρο ισορροπεί σε χρόνο 0,02 sec, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.51 η μέγιστη υπερύψωση είναι $0,3 \times 10^{-4}$ ενώ το σφάλμα σταθερής κατάστασης είναι 10^{-9} . Η μέγιστη παραγόμενη τάση είναι 35 Volt, σχήμα 3.53. Δηλαδή ο ελεγκτής HIFOO έχει λίγο χειρότερη τιμή σε όλα τα κριτήρια, μεγαλύτερο σφάλμα σταθερής κατάστασης, μεγαλύτερο χρόνο αποκατάστασης και μεγαλύτερη υπερύψωση, αλλά έχει λιγότερη κατανάλωση ενέργειας και

μικρότερη τάξη.



Σχήμα 3.60: Μετατόπιση ελεύθερου άκρου της δοκού με και χωρίς έλεγχο με τη χρήση του HIFOO για την πρώτη μηχανική είσοδο



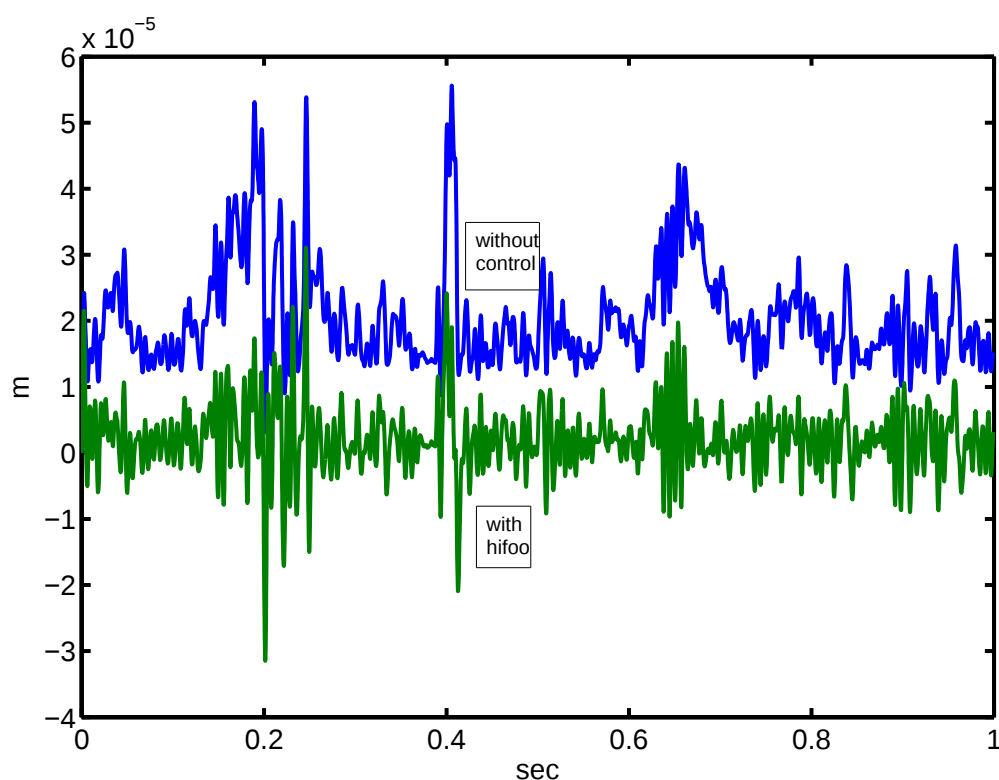
Σχήμα 3.61: Τάσεις των κόμβων της δοκού με χρήση του HIFOO για την πρώτη μηχανική είσοδο

Παρατηρείται ότι χρησιμοποιώντας τον ελεγκτή Matlab HIFOO επιτυγχάνεται μείωση της τάξης του ελεγκτή του συστήματος ενώ γίνεται ρύθμιση της θέσης της δοκού με μετατοπίσεις των κόμβων της τάξης του 10^{-7} . Διατηρείται δηλαδή η απόδοση του κριτηρίου H_{∞} χρησιμοποιώντας χαμηλότερης τάξης ευσταθή ελεγκτή.

Αντίστοιχα για την τρίτη μηχανική είσοδο στο σχήμα 3.62, φαίνεται αρχικά η απόκριση του ελεύθερου άκρου της δοκού με και χωρίς τη χρήση του ελεγκτή HI-

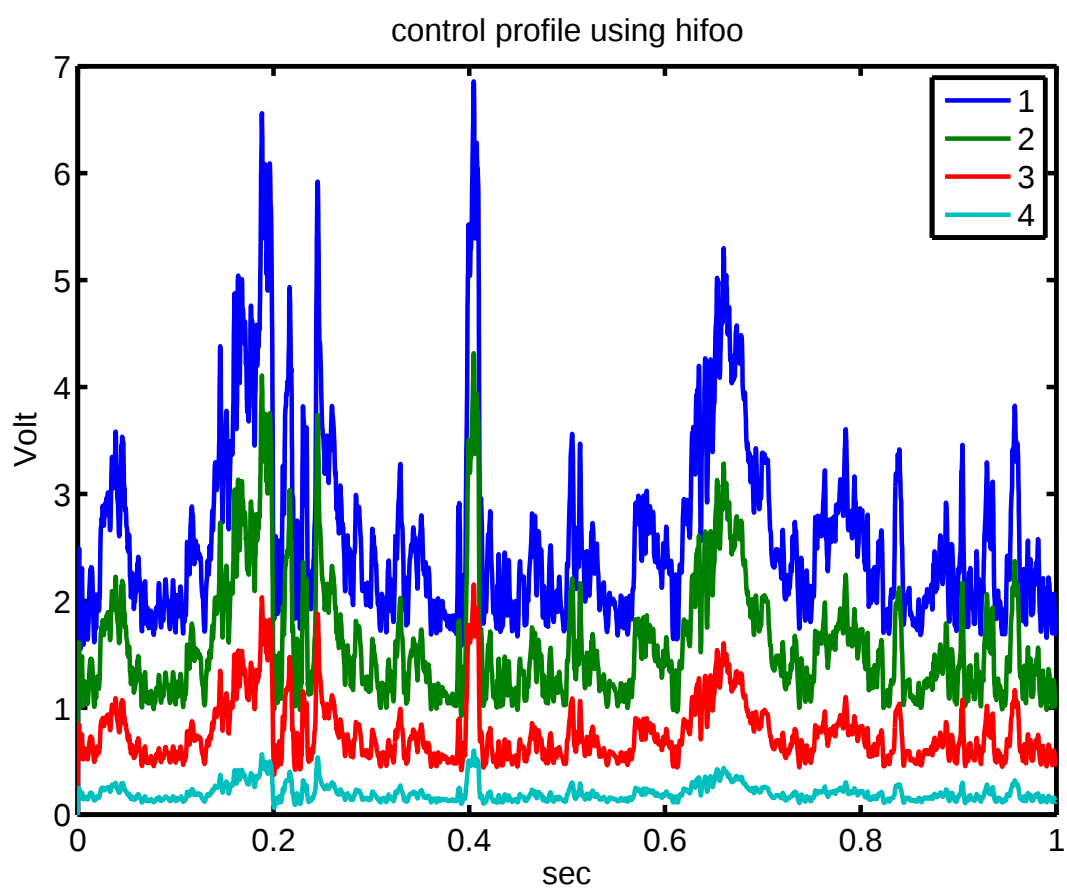
FOO, ενώ στο 3.63 οι τάσεις των ενεργοποιητών που παράγονται χρησιμοποιώντας τον.

Το σφάλμα σταθερής κατάστασης είναι 3×10^{-5} ενώ με τη χρήση του ελεγκτή H_∞ είναι 0.5×10^{-5} (σχήμα 3.59). Η μέγιστη παραγόμενη τάση για τον ελεγκτή HIFOO είναι 30 Volt αν για τον H_∞ είναι 35 Volt. Επιτυγχάνεται δηλαδή ρύθμιση της θέσης της δοκού στη θέση ισορροπίας της με μικρότερης τάξης ελεγκτή, ο οποίος χρησιμοποιεί τάσεις με χαμηλότερες τιμές.



Σχήμα 3.62: Μετατόπιση ελεύθερου άκρου της δοκού με και χωρίς έλεγχο με χρήση του HIFOO, για την τρίτη μηχανική είσοδο.

Χρησιμοποιώντας τον ελεγκτή HIFOO για πραγματική αιολική φόρτιση γίνεται ρύθμιση της θέσης της δοκού με μετατοπίσεις των κόμβων της τάξης του 10^{-5} , ενώ οι παραγόμενες τάσεις είναι χαμηλότερες. Διατηρείται δηλαδή η απόδοση του κριτηρίου H_∞ χρησιμοποιώντας χαμηλότερης τάξης ευσταθή ελεγκτή.



Σχήμα 3.63: Παραγόμενες τάσεις ενεργοποιητών για όλους τους κόμβους της δοκού με χρήση του HIFOO

4

4.1

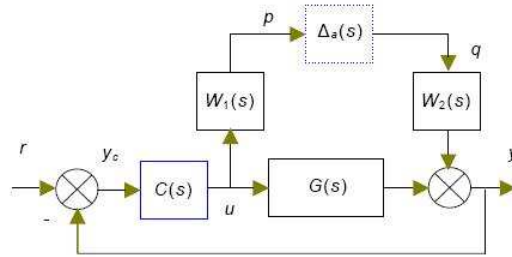
Οι λόγοι για τους οποίους εμφανίζονται οι αβεβαιότητες είναι κυρίως οι εξής:

- 112

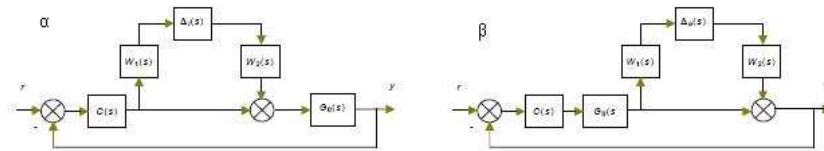
- Επίδραση που προέρχεται από το περιβάλλον του συστήματος με τη μορφή διαταραχών. Γενικά διακρίνονται δύο μεγάλες κατηγορίες αβεβαιοτήτων:
 - i. Τις δομημένες, που η μαθηματική περιγραφή τους είναι τέτοια ώστε να δίνει πληροφορία σχετικά με το πώς αυτές επηρεάζουν το σύστημα. Περιγράφονται κυρίως στο πεδίο του χρόνου.
 - ii. Τις μη δομημένες αβεβαιότητες, για τις οποίες καμία πληροφορία σχετικά με το πώς αυτές επηρεάζουν το σύστημα δεν είναι διαθέσιμη.

Συνήθως περιγράφονται στο πεδίο της συχνότητας. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα που μελετάται σε αυτήν τη διατριβή εξετάζεται η μη δομημένη αβεβαιότητα.

Η μη δομημένη αβεβαιότητα μπορεί να μοντελοποιηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους, την προσθετική αβεβαιότητα και την πολλαπλασιαστική.



Σχήμα 4.1: (Κλασσικό) δομικό διάγραμμα προσθετικής αβεβαιότητας



Σχήμα 4.2: α. Πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα εισόδου β. Πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα εξόδου

- Η προσθετική αβεβαιότητα χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει σφάλματα στις δυναμικές υψηλών συχνοτήτων που έχουν παραμεληθεί είτε λόγω μείωσης του μοντέλου είτε λόγω άγνοιας. (Σχήμα 4.1)
- Η πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει σφάλματα που οφείλονται στις δυναμικές των αισθητήρων και των ενεργοποιητών. (Σχήμα 4.2)

Στην παρούσα διατριβή λαμβάνονται υπόψη σφάλματα μοντελοποίησης που παρουσιάζονται λόγω ατελειών του μοντέλου, όπως πχ είναι μία βλάβη στην κατασκευή και όχι σφάλματα και αβεβαιότητες στις μετρήσεις των αισθητήρων και των ενεργοποιητών. Εξετάζεται δηλαδή η προσθετική μη δομημένη αβεβαιότητα. [82]

4.2

Εύρωστος έλεγχος

Οι μέθοδοι υπολογισμού νόμων εύρωστου ελέγχου που θεωρούν μη παραμετρικές και μη δομημένες αβεβαιότητες, εκμεταλλεύονται τις ιδιότητες της νόρμας H_∞ και αποτελούν τη λεγόμενη προσέγγιση H_∞ . Ένας μεγάλος αριθμός ερευνητικών εργασιών αναφέρονται σ' αυτή ήδη από τις αρχές της δεκαετίας του '80 με πρώτες αυτές του Zames [83], που χρησιμοποιούν την ελαχιστοποίηση της νόρμας H_∞ της συνάρτησης ευαισθησίας ενός γραμμικού κλειστού συστήματος. Με τον τρόπο αυτό επιλύονται προβλήματα εύρωστης ευστάθειας και απόρριψης διαταραχών [85] όσο και στο πεδίο του χρόνου. [84]

Η προσέγγιση H_∞ βασίζεται κυρίως στο θεώρημα του μικρού κέρδους. Στόχος είναι η εύρεση ενός αντισταθμιστή K που σταθεροποιεί το σύστημα P και ικανοποιεί τη συνθήκη μικρού κέρδους, η οποία εκφράζεται ως η τιμή της νόρμας H_∞ της μεταφοράς T_{zw} μεταξύ της εξόδου z και της εξωγενούς εισόδου w .

Το βασικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Να βρεθεί η κλάση των αντισταθμιστών που εξασφαλίζουν την εσωτερική ευστάθεια του κλειστού συστήματος και ικανοποιούν τη συνθήκη $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, όπου γ είναι μια δεδομένη θετική βαθμωτή ποσότητα.

Το πρόβλημα αυτό είναι υποβέλτιστο, επειδή το ζητούμενο δεν είναι να ελαχιστοποιηθεί η νόρμα H_∞ της μεταφοράς T_{zw} , αλλά να γίνει μικρότερη από μια δεδομένη τιμή γ . Η λύση του χρησιμοποιεί συνήθως την παραμετροποίηση της κλάσης των αντισταθμιστών και έχει προταθεί από αρκετές μεθόδους. Μεταξύ αυτών η μέθοδος στο χώρο κατάστασης είναι περισσότερο εφαρμόσιμη από αριθμητική άποψη, επειδή καταλήγει είτε σε εξισώσεις Riccati, είτε σε γραμμικές ανισότητες πινάκων. [86]

Τα επόμενα τρία βήματα λαμβάνονται υπόψη στην εύρωστη ανάλυση:

- i. Ορίζω την αβεβαιότητα σαν μαθηματικό μοντέλο.
- ii. Ελέγχω αν το σύστημα είναι ευσταθές στα όρια της αβεβαιότητας.

- iii. Ελέγχω αν το σύστημα μου έχει την επιθυμητή απόδοση εφόσον είναι ευσταθές.

4.3 Εύρωστος έλεγχος - Ανάλυση

Το πλεονέκτημα του H_∞ ελέγχου οφείλεται στη δυνατότητα να λάβουμε υπόψη στους υπολογισμούς το χειρότερο αποτέλεσμα των αβέβαιων διαταραχών και του θορύβου του συστήματος. Τουλάχιστον στη θεωρία είναι δυνατόν να συνθέσουμε ένα H_∞ ελεγκτή που θα είναι εύρωστος έως ένα προκαθορισμένο ποσοστό σφαλμάτων μοντελοποίησης. Δυστυχώς αυτό σε ορισμένες περιπτώσεις δεν είναι εφικτό, όπως θα φανεί παρακάτω [98, 99, 100].

Στη συνέχεια, η ευρωστία των σφαλμάτων μοντελοποίησης του ελεγκτή H_∞ που έχει σχεδιαστεί θα αναλυθεί. Επιπλέον θα παρουσιαστεί μια προσπάθεια σύνθεσης ενός μ -ελεγκτή και θα γίνει μια σύγκριση των δύο.

Σ' όλες τις προσομοιώσεις χρησιμοποιούνται οι ρουτίνες εύρωστου ελέγχου του Matlab. Συγκεκριμένα:

- i. Για στοιχεία αβεβαιότητας,

```
bw1 = ureal('bw1', 1, 'Percentage', 25)
```

που εκφράζει ένα στοιχείο πραγματικής αβεβαιότητας ονομαστικής τιμής 1 και με απόκλιση $\pm 25\%$, πχ το bw1 παίρνει τιμές από 0.75 μέχρι 1.25.

- ii. Για να υπολογιστούν τα όρια των δομημένων ιδιόμορφων τιμών χρησιμοποιείται η ρουτίνα:

```
bounds = mussv(Spqf, B1);
```

όπου S_{pqf} είναι ένα αντικείμενο frd του Matlab (απόκριση συχνότητας του συστήματος), και το $B1$ ορίζει τον τύπο της αβεβαιότητας.

- iii. Για να υπολογίσουμε ένα μ -ελεγκτή:

```
K = dksyn(qbeam1_u, m, r);
```

όπου $qbeam1_u$ εκφράζει το αβέβαιο σύστημα του σχήματος 3.14 και m, r είναι οι αριθμοί των εισόδων / εξόδων του συστήματος. Σ' αυτήν την περίπτωση

το αβέβαιο σύστημα έχει δημιουργηθεί μέσω της ρουτίνας `iconnect`, εφόσον είναι πιο ευέλικτη από τη ρουτίνα `sysic`.

Τα αριθμητικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται σ' όλες τις προσομοιώσεις υλοποιούνται με τρεις τρόπους:

- i. Μέσω της εξίσωσης 3.48

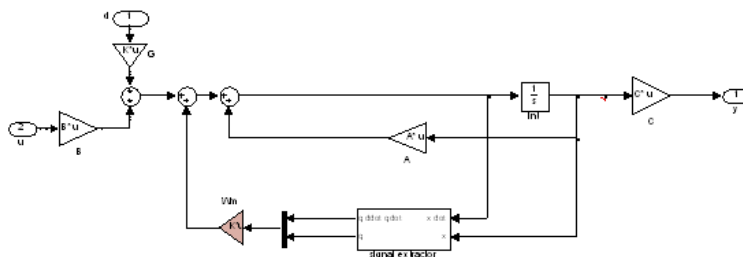
$$K = K_0(I + k_p \delta_K) \quad (4.1)$$

$$M = M_0(I + m_p \delta_M) \quad (4.2)$$

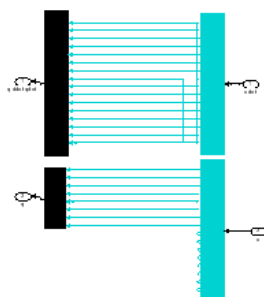
$$D = D_0 + 0.0005[K_0 k_p I_{2n \times 2n} \delta_K + M_0 m_p I_{2n \times 2n} \delta_M] \quad (4.3)$$

και του υπολογισμού του πίνακα N για τις συγκεκριμένες τιμές k_p, m_p .

- ii. Με τη χρήση του uncertain element object Matlab. Η φόρμα αυτή χρειάζεται να δοθεί στον αλγόριθμο εύρωστης σύνθεσης D-K.
- iii. Με το δομικό διάγραμμα του Simulink που φαίνεται στο σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Δομικό διάγραμμα αβεβαιότητας από το Simulink



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα του Simulink για τον εξαγωγέα σήματος

Εύρωστη ανάλυση

Η εύρωστη ανάλυση ελέγχεται μέσω των σχέσεων,

$$\sup_{\omega \in \mathbf{R}} \mu_{\Delta}(N_{11}(j\omega)) < 1 \quad (4.4)$$

(για την εύρωστη σταθερότητα) και,

$$\sup_{\omega \in \mathbf{R}} \mu_{\Delta_{\alpha}}(N(j\omega)) < 1 \quad (4.5)$$

για εύρωστη απόδοση.

Σ' όλες τις προσομοιώσεις που ακολουθούν, η διαταραχή είναι η πρώτη μηχανική φόρτιση, δηλαδή $10N$ στο ελεύθερο άκρο της δοκού.

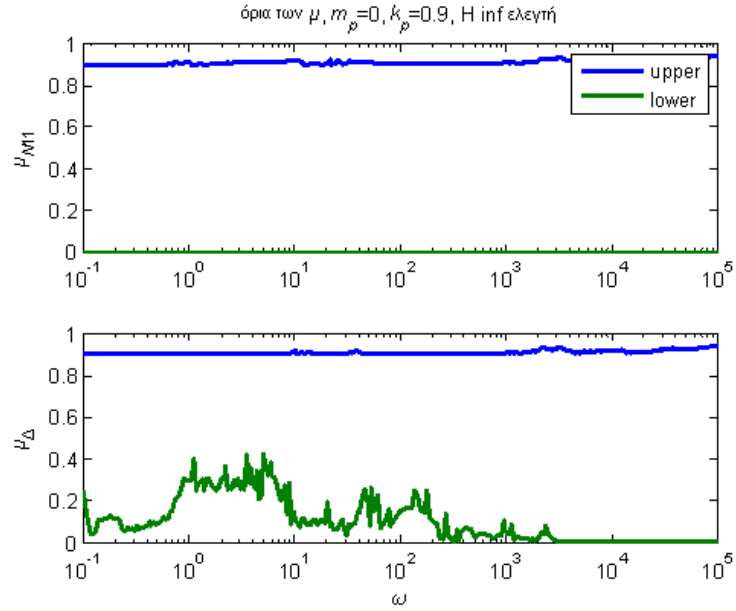
Για τον ευρεθέντα ελεγκτή H_{∞} , αναλύουμε την ευρωστία του για τις ακόλουθες τιμές m_p, k_p :

- i. $m_p = 0, k_p = 0.9$. Αυτό αντιστοιχεί σε μια διακύμανση $\pm 90\%$ από την ονομαστική τιμή του πίνακα ακαμψίας K .

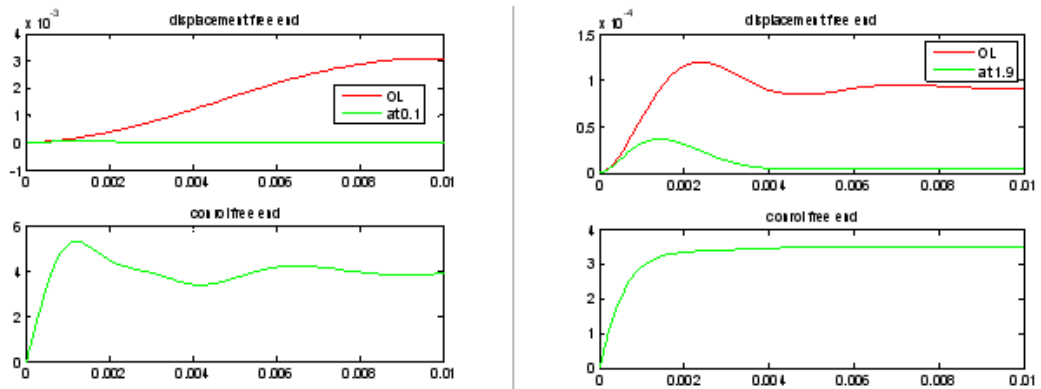
Στο σχήμα 4.5 φαίνονται τα όρια των τιμών του μ . Όπως φαίνεται το σύστημα παραμένει σταθερό και παρουσιάζει εύρωστη απόδοση αφού τα άνω όρια και των δύο τιμών παραμένουν κάτω από 1 για όλες τις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν. Το αποτέλεσμα αυτό εμφανίζεται στο σχήμα 4.6 όπου φαίνεται η μετατόπιση του ελεύθερου άκρου της δοκού και η εφαρμοζόμενη τάση. Η σύγκριση με την απόκριση ανοικτού βρόχου για το ίδιο σύστημα δείχνει την καλή απόδοση του ονομαστικού ελεγκτή.

- ii. $m_p = 0.9, k_p = 0$. Αυτό αντιπροσωπεύει μια διακύμανση $\pm 90\%$ από την ονομαστική τιμή του πίνακα μάζας M .

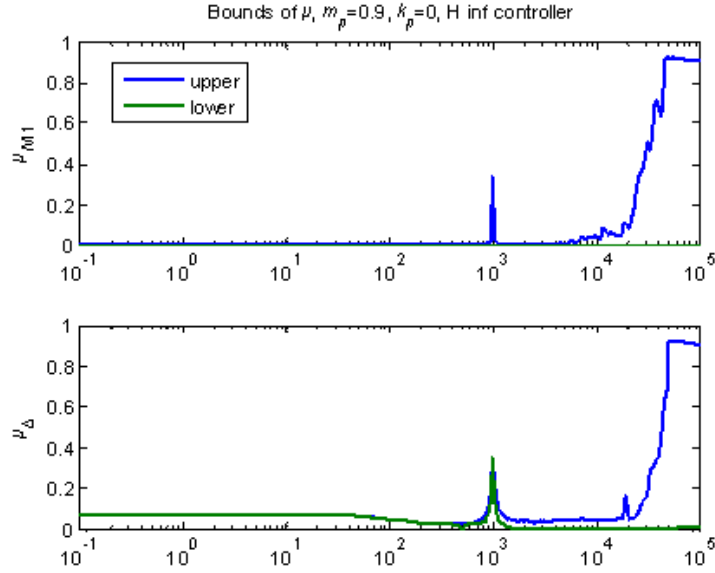
Στο σχήμα 4.7 φαίνονται τα όρια των τιμών μ . Όπως φαίνεται το σύστημα παραμένει ευσταθές και παρουσιάζει εύρωστη απόδοση, αφού τα άνω όρια και των δύο τιμών παραμένουν κάτω από 1 για όλες τις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν [100, 101]. Το αποτέλεσμα αυτό εμφανίζεται στο σχήμα 4.8, όπου φαίνεται η μετατόπιση του ελεύθερου άκρου της δοκού και η εφαρμοζόμενη τάση. Η σύγκριση με την απόκριση ανοικτού βρόχου για το ίδιο σύστημα δείχνει την καλή απόδοση του ονομαστικού ελεγκτή.



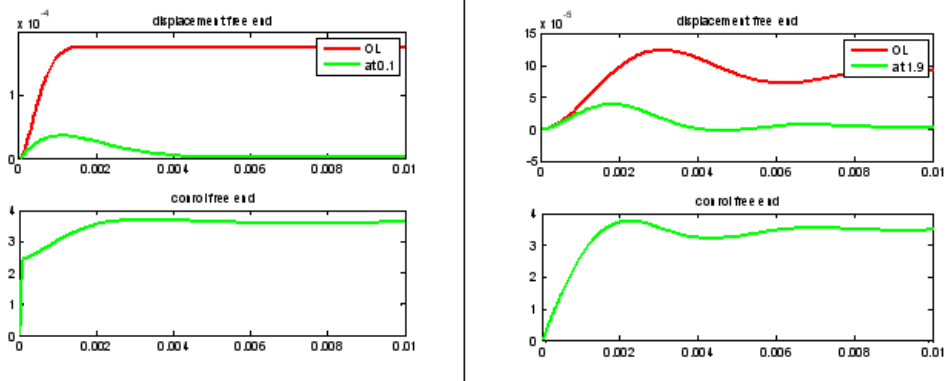
Σχήμα 4.5: μ -όρια του H_{∞} ελεγκτή για $m_p = 0, k_p = 0,9$



Σχήμα 4.6: Μετατόπιση και έλεγχος του ελεύθερου άκρου για H_{∞} ελεγκτή με $m_p = 0, k_p = 0,9$



Σχήμα 4.7: μ -όρια του H_∞ ελεγκτή για $m_p = 0,9$, $k_p = 0$

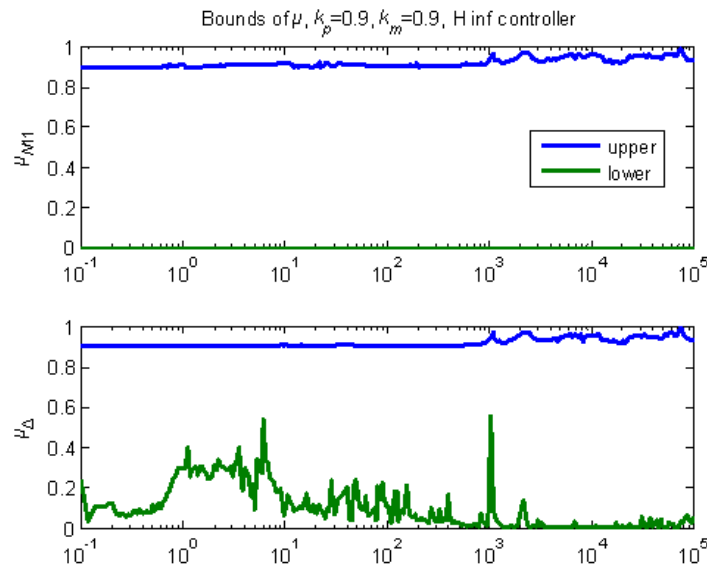


Σχήμα 4.8: Μετατόπιση και έλεγχος του ελεύθερου άκρου για H_∞ ελεγκτή με $m_p = 0$, $k_p = 0$

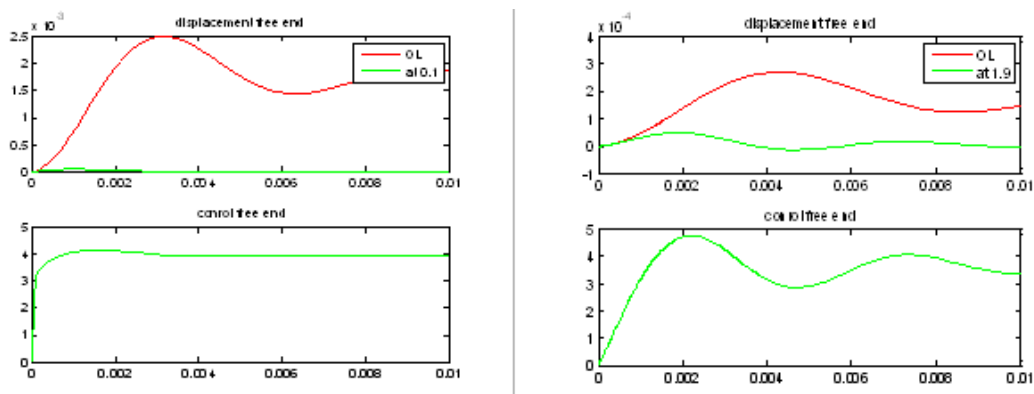
- iii. $m_p = 0.9, k_p = 0.9$. Αυτό αντιπροσωπεύει μια διακύμανση $\pm 90\%$ από την ονομαστική τιμή των πινάκων μάζας και ακαμψίας M και K .

Στο σχήμα 4.9 φαίνονται τα όρια των τιμών μ . Όπως φαίνεται το σύστημα παραμένει ευσταθές και ικανοποιεί τα κριτήρια εύρωστης απόδοσης, αφού το άνω όριο για τις δυο τιμές παραμένει κάτω από 1 για όλες τις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν. Τα αποτελέσματα στο σχήμα 4.10 δείχνουν την απόκριση του ελεύθερου άκρου και την εφαρμοζόμενη τάση.

Η σύγκριση με το σύστημα ανοικτού βρόχου δείχνει την καλή απόδοση της ονομαστικής σχεδίασης.



Σχήμα 4.9: μ -όρια του H_∞ ελεγκτή για $m_p = 0,9, k_p = 0,9$



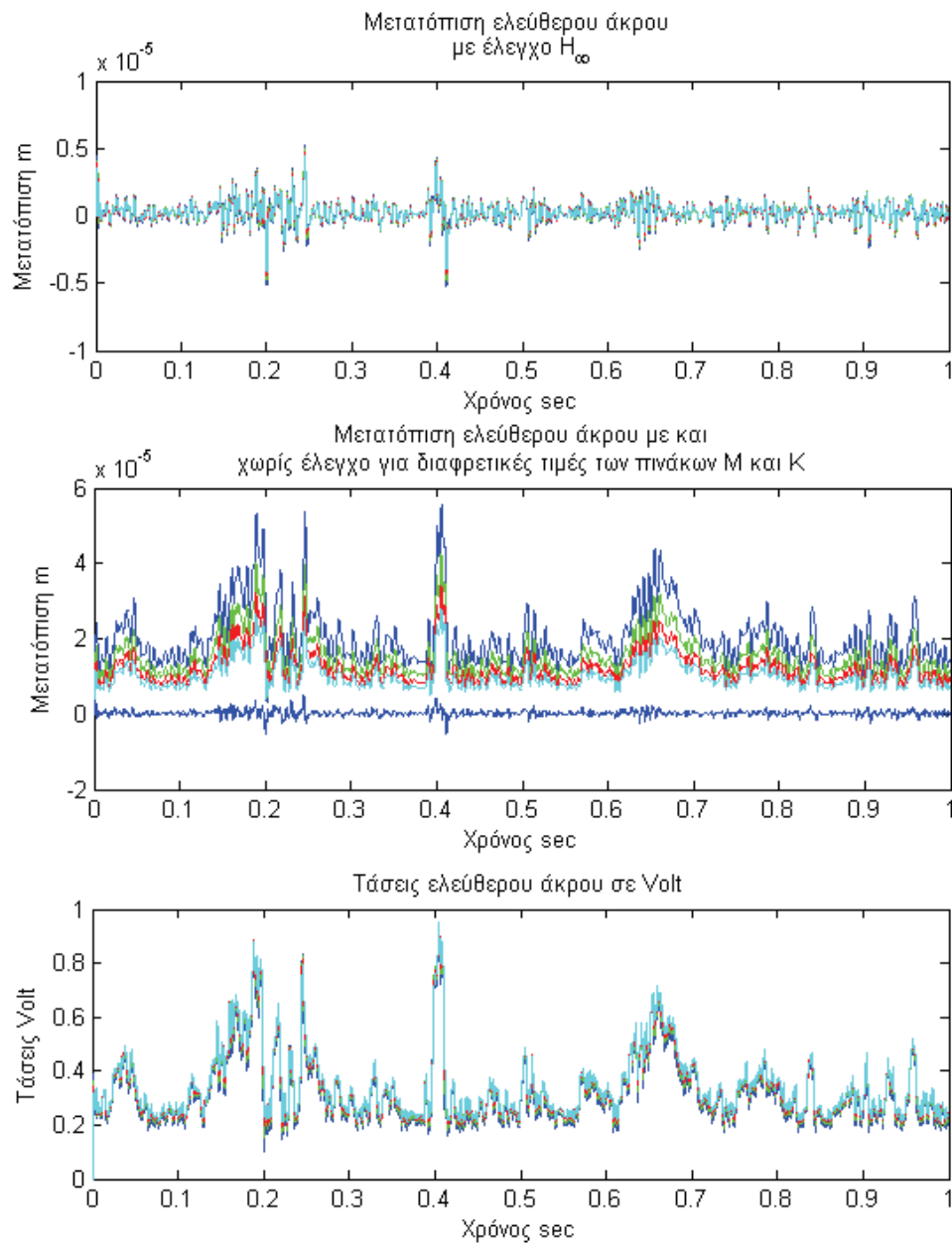
Σχήμα 4.10: Μετατόπιση και έλεγχος του ελεύθερου άκρου για H_∞ ελεγκτή με $m_p = 0,9, k_p = 0,9$

Στη συνέχεια ελέγχουμε τη δοκό μεταβάλλοντας τους πίνακες μάζας M , ακαμψίας K και A, B ασκώντας πραγματική αιολική φόρτιση. Στο σχήμα 4.11 φαίνεται η μετατόπιση του ελεύθερου άκρου με και χωρίς έλεγχο για μεταβολή των πινάκων μάζας και απόσβεσης του συστήματος έως και 50%.

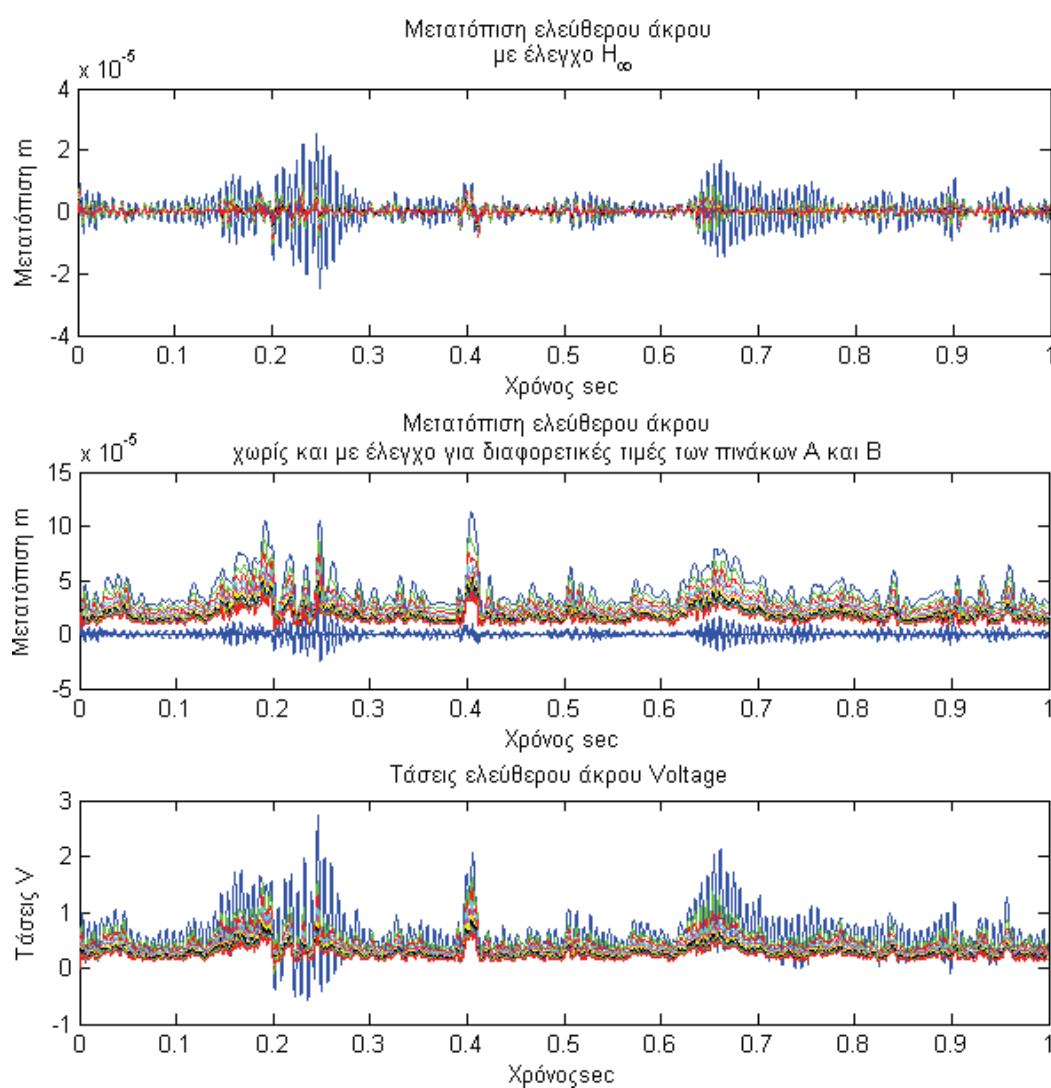
Παρατηρείται ότι με τον εύρωστο έλεγχο H_∞ το ελεύθερο άκρο της δοκού παραμένει σε ισορροπία με μηδενικές μετατοπίσεις, ενώ η τάση των πιεζοηλεκτρικών βρίσκεται εντός των ορίων των 500 *Volt*.

Ανάλογα αποτελέσματα προκύπτουν και στο σχήμα 4.12 για μεταβολή των πινάκων A και B του συστήματος έως και 50%.

Ο ελεγκτής που χρησιμοποιείται πληρεί τα κριτήρια ευστάθειας και απόδοσης και είναι 100% εύρωστος.



Σχήμα 4.11: Μετατόπιση ελεύθερου άκρου με και χωρίς έλεγχο για πραγματική αιολική φόρτιση με μεταβολή των πινάκων M και K έως και 50%



Σχήμα 4.12: Μετατόπιση ελεύθερου άκρου με και χωρίς έλεγχο για πραγματική αιολική φόρτιση με μεταβολή των πινάκων A και B έως και 50%

Συνοψίζοντας, φαίνεται ότι ο ελεγκτής H_∞ που βρέθηκε είναι εξαιρετικά εύρωστος στα σφάλματα μοντελοποίησης.

4.4 Εύρωστη Σύνθεση: μ -ελεγκτής

Ένας μ -ελεγκτής μπορεί να συντεθεί από την επαναληπτική μέθοδο D-K όπως εξηγείται στην παράγραφο 3.3. Για να επιτευχθεί η σύγκριση με τον ελεγκτή H_∞ , ονομαστικής σχεδίασης, θα χρησιμοποιηθούν τα ίδια όρια και στον μ -ελεγκτή για την εισαγωγή αβεβαιοτήτων [101, 102, 103].

I. $m_p = 0$, $k_p = 0.9$. Αυτό αντιστοιχεί σε $\pm 90\%$ μεταβολή από την ονομαστική σχεδίαση του πίνακα K .

Οι εντολές του MATLAB που χρησιμοποιήθηκε είναι,

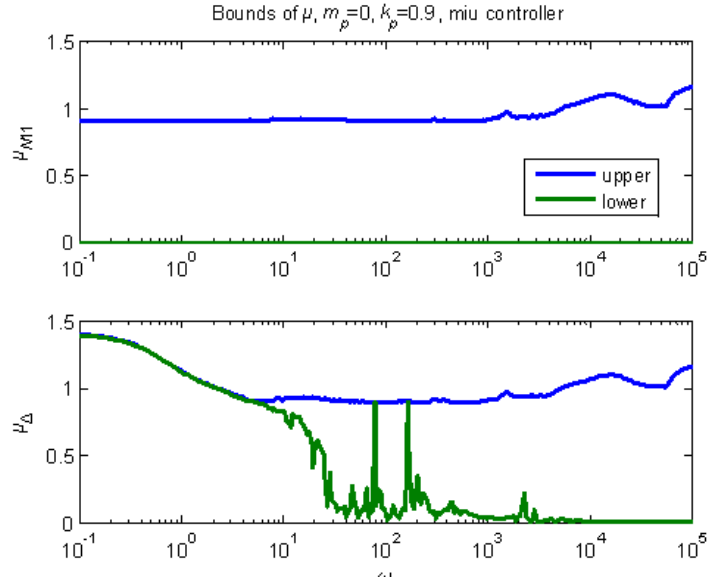
```
beam_u = ss(A0_u, eye(2*nd), C, zeros(nd/2, 2*nd));
M = iconnect;
nn = icsignal(4);
d = icsignal(8);
u = icsignal(4);
y = icsignal(4);
M.Equation{1} = equate(y, beam_u*[B0_u*u + G0_u*Wd*d]);
M.Input = [ d; nn; u ];
M.Output = [ We*y; Wu*u; y+Wn*nn ];
qbeam_w_o = M.System;
[K, qbeam_w_c_m, gam_miu] = dksyn(qbeam_w_o, m, r);
```

Όπου $A0_u$, $B0_u$ και $G0_u$ είναι οι πίνακες όπου έχει εισαχθεί η αβεβαιότητα.

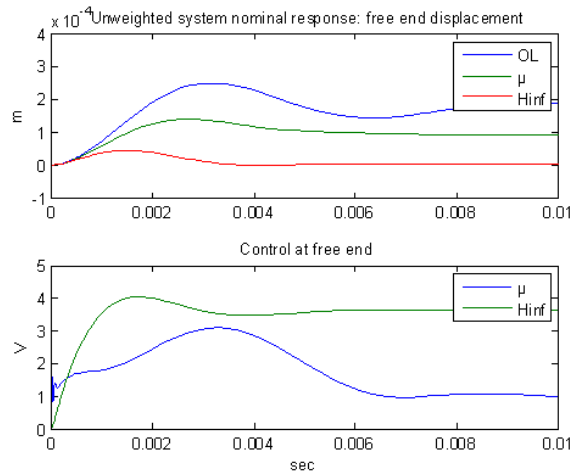
Από τη διαδικασία $D - K$ προκύπτει ένας εύρωστος ελεγκτής τάξης 256. Αυτή είναι μια υπερβολική τιμή που είναι αποτέλεσμα της επαναληπτικής διαδικασίας που χρησιμοποιείται από αυτόν τον αλγόριθμο. Το γεγονός αυτό, αν και αναφέρεται στην βιβλιογραφία, δεν τονίζεται όσο θα έπρεπε.

Στο σχήμα 4.13 φαίνονται οι μ -τιμές που έχουν υπολογιστεί. Ο ελεγκτής είναι εύρωστος σε όλες τις συχνότητες.

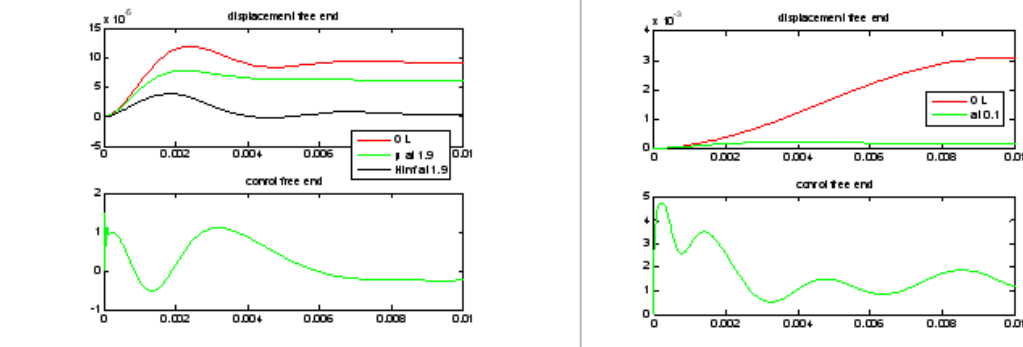
Στο σχήμα 4.14 συγκρίνεται η απόδοση του μ -ελεγκτή και του ελεγκτή H_∞ . Στο σχήμα 4.15 εμφανίζονται τα αποτελέσματα για τις ακραίες τις τιμές της αβεβαιότητας, όπου φαίνεται ότι ο ελεγκτής H_∞ έχει καλύτερα αποτελέσματα.



Σχήμα 4.13: μ -όρια του μ -ελεγκτή για τιμές $m_p = 0$, $k_p = 0.9$.



Σχήμα 4.14: Σύγκριση του ελεύθερου άκρου για την ονομαστική σχεδίαση του μ -ελεγκτή ($m_p = 0$, $k_p = 0.9$) και του H_{∞} .



πιεζοηλεκτρικών αισθητήρων δεν είναι αξιόπιστη.

Στη συνέχεια εφαρμόστηκαν πιο προχωρημένες τεχνικές ελέγχου όπως το κριτήριο H_∞ . Το πλεονέκτημα του ελέγχου H_∞ οφείλεται στη δυνατότητα να λάβουμε υπόψη στους υπολογισμούς το χειρότερο αποτέλεσμα των αβέβαιων διαταραχών και του θορύβου του συστήματος. Επιπλέον ο ελεγκτής H_∞ μπορεί να ανταπεξέλθει σε μεγαλύτερες εισόδους, ενώ ο σχεδιασμός του γίνεται σε μεγάλο εύρος συχνοτήτων. Τα αποτελέσματα είναι αξιοσημείωτα και παρατηρείται καταστολή της ταλάντωσης ακόμα και για πραγματική αιολική φόρτιση με τις τάσεις των πιεζοηλεκτρικών να βρίσκονται εντός των ορίων αντοχής τους.

Θέλοντας να μειωθούν οι υπολογιστικές απαιτήσεις του μοντέλου, μειώθηκε η τάξη του ελεγκτή, με τη βοήθεια μη παραμετρικής και μη κυρτής βελτιστοποίησης, και χρησιμοποιώντας τον ελεγκτή HIFOO. Η καλή απόδοση του ελεγκτή διατηρήθηκε ακόμα και για πολύ μικρότερο βαθμό του συστήματος.

Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη τις μη γραμμικότητες και τις δυναμικές του συστήματος που παραλείπονται κατά την μοντελοποίηση, την ανακριβή γνώση των τιμών και παραμέτρων του μοντέλου, τις αβεβαιότητες των διαταραχών και την επίδραση που προέρχεται από το περιβάλλον του συστήματος με τη μορφή διαταραχών, την μη αξιόπιστη μέτρηση των αισθητήρων του συστήματος, ελέγχθησαν τα εύρωστα χαρακτηριστικά του ελεγκτή H_∞ . Έγινε πλήρη καταστολή της ταλάντωσης ακόμα και για μεταβολή της μάζας και της ακαμψίας της δοκού έως και 90%.

Τέλος έγινε προσπάθεια εύρεσης ενός εύρωστου μ -ελεγκτή, με τη βοήθεια της επαναληπτικής μεθόδου $D - K$, η τάξη του ελεγκτή που προέκυψε ήταν πολύ μεγάλη όπως και οι υπολογιστικές απαιτήσεις που απαιτούνται. Η απόδοση του εύρωστου μ -ελεγκτή δεν ήταν η αναμενόμενη κάτι που πιθανότατα οφείλεται στην αριθμητική κατάσταση των πινάκων του συστήματος. Αντίθετα για τον ελεγκτή H_∞ τα αποτελέσματα είναι πολύ ικανοποιητικά και αποδεικνύουν ότι ο έλεγχος H_∞ μπορεί να καταστείλει την ταλάντωση της έξυπνης δοκού λαμβάνοντας υπόψη τις αβεβαιότητες μοντελοποίησης, τις εξωτερικές διαταραχές και το θόρυβο των μετρήσεων.

Συνοψίζοντας οι επιστημονικές περιοχές που έχει συνεισφέρει η παρούσα διατριβή είναι:

- i. Μοντελοποίηση των έξυπνων κατασκευών αντικειμένου πολιτικού μηχανικού.
- ii. Εφαρμογή του ελέγχου H_∞ σε καταστολή των ταλαντώσεων δομικών μοντέλων.

- iii. Εισαγωγή των αβεβαιοτήτων στο μαθηματικό μοντέλο δομικών στοιχείων.
- iv. Καταστολή των ταλαντώσεων και απόρριψη διαταραχών, λαμβάνοντας υπόψη τα σφάλματα μοντελοποίησης, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του εύρωστου ελέγχου H_∞ .
- v. Μείωση των υπολογιστικών απαιτήσεων του ελέγχου χρησιμοποιώντας αλγορίθμους βελτιστοποίησης.
- vi. Εύρεση ενός εύρωστου μ -ελεγκτή.

Ως φυσική συνέπεια των ερευνητικών καινοτομιών που προτάθηκαν, ήταν η αναγνώριση νέων επιστημονικών προβλημάτων που θα ήταν δυνατή η λειτουργία τους ως βάση για περαιτέρω ερευνητική δραστηριότητα πέρα από τα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Πιο συγκεκριμένα μια πιθανή μελλοντική επιστημονική συνέχεια είναι η πειραματική επιβεβαίωση των πολύ καλών αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τον έλεγχο των έξυπνων κατασκευών αντικειμένου πολιτικού μηχανικού.

Βιβλιογραφία

- [1] Guo B. & Wang J. & Young K. (2007). The stabilization of an Euler-Bernoulli beam under boundary control and noncollocated observation. *Decision and Control, 46th IEEE Conference on Volume, Issue*, 12-14. 4167–4172.
- [2] Burke J. V., Henron D., Kewis A. S. & Overton M. L. (2006). Stabilization via Nonsmooth, Nonconvex Optimization. *Automatic Control IEEE*, 5(11), 1760–1769.
- [3] Halim D. & S. O. Moheimani R. (2002). Spatial H2 Control of Piezoelectric Laminate Beam: Experimental Implementation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(4).
- [4] Sunar M. & Rao S. S. (1999) Recent advances in sensing and control of flexible structures via Piezoelectric materials technology”. *Applied Mechanics*, 52(1).
- [5] Bandyopadhyay B., Manjunath T. C. & Unapathy M. (2007). Modeling, Control, and Implementation of Smart Structures. *Springer ISBN-10 3-540-48393-4*.
- [6] Gandhi M. V. & Thompson B. S. (1992). Smart Materials and Smart Structures”. *Chapman and Hall*, London.
- [7] Inderjit C. (2002). Review of state of art of smart structures and integrated systems. *AIAA Journal*. 40(11), 2145–2187.
- [8] Cady W. G. (1964). Piezoelectricity. *rev. ed. Vols I and II, Dover Publications*, New York.
- [9] Stavroulakis G. E., Foutsitzi G., Hadjigeorgiou E., Marinova D. & Baniotopoulos C.C. (2005). Design and robust optimal control of smart beams with application on vibrations suppression. *Advances in Engineering Software*, 36(11-12), 806–813.
- [10] Tzou H. S. & Tseng C. I. (1990). Distributed piezoelectric sensor/actuator

- design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach. *J. Sound Vib.*, 138, 17–34.
- [11] Lee C. K. (1990). Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators: part I: governing equations and reciprocal relationships. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87, 1144–58.
- [12] Crawley E. & de Luis J. (1987). Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA J.*, 25, 1373–85.
- [13] Lim K. B. (1992). Method for optimal actuator and sensor placement for large flexible structures. *J. Guidance Control Dyn.*, 15, 49–57.
- [14] Foutsitzi G., Marinova D., Hadjigeorgiou E. & Stavroulakis G. (2002). Finite element modelling of optimally controlled smart beams. *28th Summer School: Applications of Mathematics in Engineering and Economics*, Sozopol, Bulgaria.
- [15] Arvanitis K. G., Zacharenakis E. C., Soldatos A. G. & Stavroulakis G. E. (2003). New trends in optimal structural control. Selected Topics in Structronic and Mechatronic System. *World Scientific Publishers* 321–415 {chapter 8}, Belyaev A, Guran A., Singapore.
- [16] Chakravithini M. S., Bandyopadhyay B. & Unbehauen H. (2002). A new algorithm for discrete time sliding mode control using FOS feedback. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 49(3), 518–523.
- [17] Kang Z. & Tong L. (2008). Integrated Optimization of Material Layout and Control Voltage for Piezoelectric Laminated Plates. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 19(8), 889–904.
- [18] Betti M., Drosopoulos G. A. & Stavroulakis G. E. (2008). Two non-linear finite element models developed for the assessment of failure of masonry arches. *Comptes Rendus Mecanique, Special Issue on Duality, inverse problems and nonlinear problems in solid mechanics, dedicated to Prof. H. Bui*, 336/1-2, 42–53, DOI : 10.1016/j.crme,2007.10.014.
- [19] Foutsitzi G., Marinova D., Hadjigeorgiou E. & Stavroulakis G. (2003). Robust H2 vibration control of beams with piezoelectric sensors and actuators. *Proceedings of Physics and Control Conference (PhyCon03)*, I 158–163. St. Petersburg, Russia.
- [20] Miara B., Stavroulakis G. & Valente V. (Eds.) (2007). Topics on mathematics for smart systems. *Proceedings of the European Conference* Rome, Italy, 26–28 October 2006, World Scientific Publishers, Singapore, International.
- [21] Kim J., Varadan V. V. & Varadan V. K. (1997). Finite element modeling

- of structures including piezoelectric active devices. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 40, 817–32.
- [22] Chin L. C., Varadan V. V. & Varadan V. K. (1991). Finite element methods for numerical simulation of the actuator performance of a composite transducer array. *Proc. 1991 Int. Symp. on Active Materials and Adaptive Structures*, 633–7.
- [23] Peng X. Q., Lamk X & Liu G. R. (1998). Active Vibration Control of Composite Beams with Piezoelectrics: A finite Element Model with Third Order Theory. *Journal of Sound and Vibrations*, 209(4), 635–650.
- [24] Wang B. T., Burdisso R. A. & Fuller C. R. (1994). Optimal placement of piezoelectric actuators for active structural acoustic control. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 5, 67–77.
- [25] Igusa T., Xu K. & Warnitchai P. Optimal locations and gains of sensors and actuators for feedback control. *AIAA-93-1660-CP*.
- [26] Hamidi M. & Juang J. N. (1981). Optimal control and controller location for distributed parameter elastic systems. *Proc. 20th IEEE Conf. on Decision and Control* 502–506.
- [27] Clark R. L. & Fuller C. R. (1992). Optimal placement of piezoelectric actuators and polyvinylidene fluoride error sensors in active structural acoustic control approaches. *J. Acoust. Soc. Am.* 92, 1521–33.
- [28] Culshaw B. (1992). Smart structures: A concept or a reality. *Journal of Systems and Control Engg.* 26(206), 1–8.
- [29] Rao S. & Sunar M. (1994). Piezoelectricity and its uses in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey. *Applied Mechanics Rev.* 17(2), 113–119.
- [30] Baily T. & Hubbard J. E. Jr. (1985). Distributed piezoelectric polymer active vibration control of a cantilever beam. *Journal of Guidance, Dynamics and Control* 8(5), 605–611.
- [31] Hanagud S., Obal M. W. & Callise A. J. (1992). Optimal vibration control by the use of piezoelectric sensors and actuators. *J. Contr. Guidance* 15(5), 1199–1206.
- [32] Fanson J. L. & Caughey T. K. (1990). Positive position feedback control for structures. *AIAA J.* 18(4), 717–723.
- [33] Mark Balas J. (1978). Feedback control of flexible structures. *IEEE Trans. Auto. Contr.* AC-23(4), 673–679.
- [34] Burdess J. S. & Fawcett J. N. (1992). Experimental evaluation of piezoe-

- lectric actuator for the control of vibrations in a cantilever beam. *J. Syst. Control. Engg.* 206(12), 99–106.
- [35] Brennan M. J., Bonito J. G., Elliot S. J., David A. & Pinnington R. J. (1999). Experimental investigation of different actuator technologies for active vibration control. *Smart Materials and Structures* 8(3), 145–153.
- [36] Yang S. M. & Lee Y. J. (1993). Optimization of non-collocated sensor / actuator location and feedback gain in control systems *Smart Materials and Structures J.* 8, 96–102.
- [37] Crawley E. F. & Luis J. De. (1987). Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA J.* 25, 1373–1385.
- [38] Woo Seok Hwang & Hyun Chul Park (1993). Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators. *AIAA Journal J.* 31(5) 930–937.
- [39] Bone B., Inri M. & Tornamble A. (1997). Flexible piezoelectric structures approximate motion equations and control algorithms *IEEE Auto. Contr.* AC-42(1), 94–101.
- [40] Schiehlen W. & Schonerstedt H. (1998). Controller design for the active vibration damping of beam structure. *Proc. Smart Mechanical Systems Adaptronics SAE International, USEm* 137–146.
- [41] Pourki F. (1993). Distributed controllers for flexible structures using piezoelectric actuators / sensors. *Proc. 32nd IEEE CDC Conf.* 1367–1369. Texas, USA.
- [42] Bandyopadhyay B. & Axay Mehta (2005). Vibration control of smart structures using second order sliding mode control. *Proc. IEEE-International Conf. Industrial Technology-CCA-2005.* 1691–1696. Toronto, Canada.
- [43] Shiang Lee W. (1996). System identification and control of smart structures using neural networks. *Automatica* 38(4-8), 269–276.
- [44] Gosavi S. V. & Kelkar A. V. (2004). Modeling, identification, and passivity-based robust control of piezo-actuated flexible beam. *Journal of Vibration and Acoustics* 129, 260–271.
- [45] Moita J. S. M., Coreia I. F. P., Soares C. M. M. & Soares C. A. M. (2004). Active control of adaptive laminated structures with bonded piezoelectric sensors and actuators. *Computers and Structures* 82, 1349–1358.
- [46] Gabbert U., Nestorovic Trajkov T. & Kppel H. (2002). Modeling, control and simulation of piezoelectric smart structures using finite element method and optimal lq control. *Facta Universitatis Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics* 12(3), 417–430.

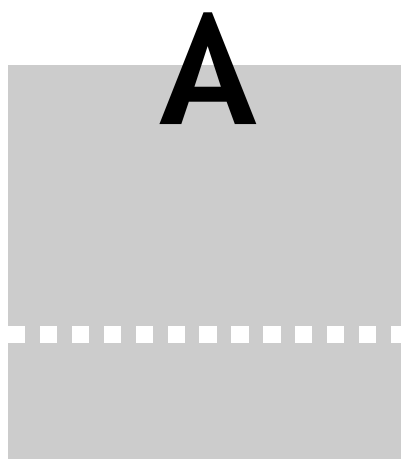
-
- [47] Lim Y. H., Senthil Gopinathan V., Vasundara Varadhan V. & Vijay Varadan K. (1999). Finite element simulation of smart structures using an optimal output feedback controller for vibration and noise control. *Int. Journal of Smart Materials and Structures* 8(8), 324–337.
- [48] Vukovich G. & Koma A. Y. (2000). Vibration suppression of flexible beams with bonded piezo-transducers using wave-absorbing controllers. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 29, 347–354.
- [49] Anjanappa M. & Bi. J. (1994). Magnetostrictive mini actuators for smart structures for smart structure applications. *Int. J. Smart Materials and Structures* 3(4), 383–390.
- [50] Aldraihem O. J., Wetherhold T. & Singh T. (1997). Distributed control of laminated beams: Timoshenko vs. Euler-Bernoulli theory. *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures* 8(5), 149–157.
- [51] Abramovich H. (1998). Deflection control of laminated composite beam with piezoceramic layers-Closed form solutions. *Composite Structures* 43(3), 217–231.
- [52] Chandrashekara K. & Varadarajan S. (1997). Adaptive shape control of composite beams with piezoelectric actuators. *Intelligent Materials Systems and Structures* 8, 112–124.
- [53] Aldraihem O. J. & Khedir Ahmend A. (2000). Smart beams with extension and thickness-shear piezoelectric actuators. *J. Smart Materials and Structures* 9(1), 1–9.
- [54] Doschner C. & Enzmann M. On model based controller design for smart structure *Proc. Smart Mechanical Systems Adaptronics SAE International* 157–166. USA.
- [55] Scott R., Brown M. & Levesley M. (2203). Robust multivariable control of a double beam cantilever smart structure. *J. Smart Materials and Structures* 13, 731–743.
- [56] Zhang X. D. & Sun C. T. (1996). Formulation of an adaptive sandwich beam. *Smart Materials and Structures Journal* 5(6), 814–823.
- [57] Donthireddy P. & Chandrashekara K. (1996). Modeling and shape control of composite beam with embedded piezoelectric actuators. *System and Control Letters* 35(2), 237–244.
- [58] Murali G. & Pajunen G. A. (1995). Model reference control of vibrations in flexible smart structures. *34th IEEE Conference of Decision and Control* 3551–3556. New Orleans, USA.

-
- [59] Thomas J. & Abbas B. A. H. (1975). Finite element methods for dynamic analysis of Timoshenko beam. *J. of Sound and Vibration* 41, 291–299.
 - [60] Benjeddou A., Trindade M. A. & Ohayon R. (1999). New shear actuated smart structure beam finite element *Journal of Guidance, Dynamics and Control* 37, 378–383.
 - [61] Raja S., Prathap G. & Sinha P. K. (2002). Active vibration control of composite sandwich beams with piezoelectric extension-bending and shear actuators. *J. Smart Materials and Structures* 11, 62–71.
 - [62] Friedman Z. & Kosmatika J. B. (1993). An improved two-node Timoshenko beam finite element. *Computers and Structures* 47(3), 473–481.
 - [63] Azulay L. E. & Abramovich H. (2004). Piezoelectric actuation and sensing mechanisms: Closed form solutions. *Composite Structures* 64, 443–453.
 - [64] Waisman H. & Abramovich H. (2002), Active stiffening of laminated composite beams using piezoelectric actuators. *Composite Structures* 58(3), 109–120.
 - [65] Abramovich H. & Lishvits A. (1994). Free vibrations of non-symmetric cross-plylaminated composite beams *Journal of Sound and Vibration* 176(5), 597–612.
 - [66] Warner A. W., Onoe M. & Coquin G. A. (1967). Determination of Elastic and Piezoelectric Constants for Crystals in Class (3m). *J. Acoust. Soc. Am.* 42, 1223.
 - [67] Jin H. Huang & Heng-I-Vu (2000). Dynamic electromechanical response of piezoelectric platy as sensors or actuators. *Materials letter* 46, 70–80.
 - [68] Mindlin R. D. (1961). On the Equations of Motion of Piezoelectric Crystals *Problems of Continuum Mechanics, Society of Industrial and Applied Mathematics* 282–290. Philadelphia.
 - [69] Tiersten H. F. (1969). Linear Piezoelectric Plate Vibrations. *Plenum Press*. NY.
 - [70] Walter G. cady, PhD., Sc.D. (1946). International series in pure and applied physics.
 - [71] Halim D. & Moheiman S. O. R. (2001). Spatial resonant control of flexible structures - application to a piezoelectric laminate beam. *Control Systems Technology* 9(1), 37–53.
 - [72] Moheimanip Reza S. O., Halim D. & Fleming A. J. (2003). Spatial Control of Vibration: Theory and Experiments. *World Scientific Press (U.K.) Ltd* ISBN 981-238-337-9. Singapore.

-
- [73] Halim D. (2002). Vibration Analysis and Control of Smart Structures. *Doctor of Philosophy*.
 - [74] Πουλιέζος Α. (2006). Έλεγχος H_∞ . Σύγγραμμα για μεταπτυχιακό μάθημα στο τμήμα Μ.Π.Δ. Πολυτεχνείου Κρήτης. <http://pouliezos.dpem.tuc.gr>
 - [75] Κοσμίδου Ο. (2005). Εύρωστος έλεγχος. Ξάνθη.
 - [76] Bosgra O. & Kwakernaak H. (2001). Design methods for control systems. *Course notes, Dutch Institute for Systems and Control* 67.
 - [77] Hou M. & Muller P. C. (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control* 37, 871–875.
 - [78] Packard A., Doyle J. & Balas G. (1993). Linear, multivariable robust control with a μ perspective. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 50th Anniversary Issue* 115(2b), 310–319.
 - [79] Tits A. L. & Yang Y. (1996). Globally convergent algorithms for robust pole assignment by state feedback. *IEEE Trans. on Automatic Control* 41, 1432–1452.
 - [80] Ward R. C. (1981). Balancing the generalized eigenvalue problem. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 2, 141–152.
 - [81] Kwakernaak H. (1993). Robust control and H_∞ optimization *Tutorial hyper JFAC. Automatica* 29(2), 255–273.
 - [82] Σολδάτος Ι. (2004). Σθεναρός Έλεγχος. Σημειώσεις μαθήματος του τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Αθήνα.
 - [83] Zames G. (1983). Feedback minimax sensitivity and optimal robustness. *IEEE Trans. Autom. Control* 28, 585–601.
 - [84] Kimura H. (1984). Robust stability for a class of transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control* 29, 788–793.
 - [85] Francis B. A. (1987). A course on H_∞ control theory *Springer - Verlag*.
 - [86] Doyle J. C., Glover K., Khargoneker P. & Francis B. State space solutions to standard h_2 and h_∞ control problems. *IEEE Trans. Automatic Control* 34, 831–847.
 - [87] Kwon Bang. (2000). The Finite Element Method Using MATLAB. ISBN 0-8493-0096-7
 - [88] Burke J., Henrion D., Lewis A. & Overton M. L. (2006). HIFOO a Matlab package for fixed-order controller design and H_∞ optimization.
 - [89] Burke J., Henrion D., Lewis A. & Overton M. L. (2006). Stabilization via nonsmooth, nonconvex optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control* 51, 1760–1769

-
- [90] Burke J., Lewis A. & Overton M. L. (2005). A robust gradient sampling algorithm for nonsmooth nonconvex optimization. *Siam Journal on Optimization* 15, 751–779
 - [91] Burke J. & Overton M. L. (2001). Variational analysis of Non-Lipschitz spectral functions. *Mathematical Programming* 90, 317–352
 - [92] Hinrichsen D. & Pritchard A. J. (2005). Mathematical Systems Theory I: Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness. *Springer*
 - [93] Millston M. (2006). HIFOO 1.5: Structured control of linear systems with a non trivial feedthrough. *M.S. thesis, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University*
 - [94] Σταυρουλάκης Γ. (2006). Σημειώσεις μαθήματος «Υπολογιστικής Μηχανικής». *Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης*. www.eclass.tuc.gr.
 - [95] Preumont A. (2006). Mechatronics. Dynamics of electromechanical and piezoelectric systems. *ULB Active Structures Laboratory, Brussels, Belgium, Springer*.
 - [96] Foutsitzi G., Marinova D., Stavroulakis G. & Hadjigeorgiou E. (2006). Vibration control analysis of smart piezoelectric composite plates. *2nd International Conference “From Scientific Computing to Computational Engineering” 2nd IC-SCCE*. Athens
 - [97] Foutsitzi G., Hadjigeorgiou E., Marinova D. & Stavroulakis G. (2005). Analysis and control of smart viscoelastic beams. *5th GRACM International Congress on Computational Mechanics Limassol*.
 - [98] Hoo M. & Muller P. C. (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 37, 871–875.
 - [99] Packard A., Doyle J. & Balas G. (1993). Linear, multivariable robust control with a μ perspective. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 50th Anniversary Issue* 115(2b), 310–319.
 - [100] Pouliezios A. (2008). MIMO control systems. *class notes*. <http://pouliezios.dpem.tuc.gr>
 - [101] Marinova D., Stavroulakis G. E, Foutsitzi G., Hadjigeorgiou E. & Zacharenakis E. C. (2004). Robust design of smart structures taking into account structural defects. *Summer School Conference Advanced Problems in Mechanics* Russian Academy of Sciences, Editor: D.A. Indeitsev, 288–292.
 - [102] Tits A. L. & Yang Y. (1996). Globally convergent algorithms for robust pole assignment by state feedback. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 41,

- 1432–1452.
- [103] Ward R. C. (1981). Balancing the generalized eigenvalue problem. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 2, 141–152.
 - [104] Young P., Newlin M. & Doyle J. (1992). Practical computation of the mixed problem. *Proceedings of the American Control Conference*. 2190–2194.
 - [105] Zacharenakis E. C. (1996). On the input - output decoupling with simultaneous disturbance attenuation and H-infinity optimization in structural analysis. *Computers and structures*. Vol. 60, 627–633.
 - [106] Zacharenakis E. C. (1997). On the disturbance attenuation and H-infinity optimization in structural analysis. *ZAMM*. Vol. 77, 189–195.
 - [107] Zacharenakis E. C. & Stavroulakis G. E. (2000). On the seismic disturbance rejection of structures. *Journal of Global Optimization*. 17(1-4), 403–410.
 - [108] Baniotopoulos (1995). Optimal control of abovegrounds under dynamic excitation. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 63(2), 211–212.
 - [109] Reinhorn A. M. & Manolis G. D. (1987). Active Control of Inelastic Structures. *Journal of Engineering Mechanics- ASCE*. 113(3), 315–333.
 - [110] Soong T. T. & Manolis G. D. (1987). Active Structures. *Journal of Structural Engineering - ASCE*. 113(11), 2290–2302.
 - [111] Symans M. D. & Konstantinou M. C. (1999). Semi-Active Control system for seismic protection of structure: a state-of-the-art review. *Engineering Structures*. 21(6), 469–487.

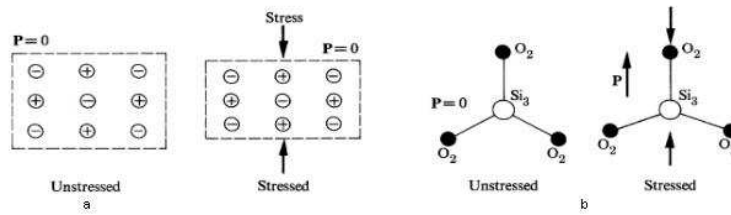


ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

Ο Πιεζοηλεκτρισμός είναι μια σύζευξη μεταξύ μηχανικών και ηλεκτρικών ιδιοτήτων των υλικών. Με απλούς όρους, όταν ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό πιέζεται, τότε μαζεύεται ένα ηλεκτρικό φορτίο στην επιφάνειά του. Αντίθετα, όταν ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό υπόκειται σε πτώση τάσης, τότε παραμορφώνεται μηχανικά. [9]

Σε νανοσκοπική κλίμακα, ο πιεζοηλεκτρισμός προέρχεται από τη συνεισφορά ανομοιόμορφου φορτίου μέσα σε ένα κρύσταλλο. Όταν ένας τέτοιος κρύσταλλος, παραμορφώνεται μηχανικά, τα θετικά και αρνητικά κέντρα των φορτίων μετακινούνται κατά διαφορετικές ποσότητες. Έτσι, όταν ολόκληρος ο κρύσταλλος παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερος, η διαφορά στο εκτόπισμα των κέντρων φορτίων συνεισφέρει σε μια ηλεκτρική πόλωση μέσα στον κρύσταλλο. Η ηλεκτρική πόλωση (ως απόκριση ενός υλικού) εξ αιτίας μηχανικής πίεσης (σήμα εισόδου στο σύστημα του υλικού) ονομάζεται Πιεζοηλεκτρισμός. [69]

Η ποσότητα αυτού του φορτίου είναι γραμμικά ανάλογη της τάσης. Αυτό είναι το άμεσο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο.



Σχήμα Α.1: α. Κρύσταλλοι με κέντρο συμμετρίας δεν έχουν Pzt φαινόμενο β. Κρύσταλλοι quartz χωρίς κέντρο συμμετρίας με Pzt φαινόμενο

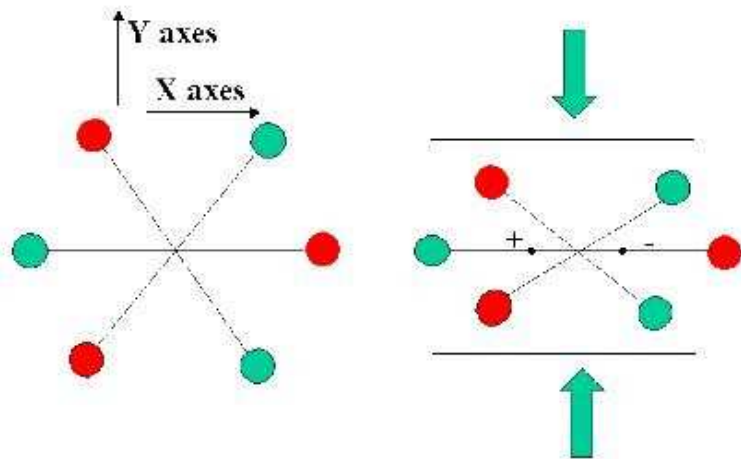
A.1 Φυσική ερμηνεία

Η μικροσκοπική προέλευση του πιεζοηλεκτρισμού είναι η μετατόπιση ηλεκτρικού φορτίου. Σε περίπτωση απουσίας μηχανικής παραμόρφωσης η συνεισφορά των ιοντικών φορτίων είναι συμμετρική, δίδοντας μηδενική πόλωση και μηδενικό πεδίο.

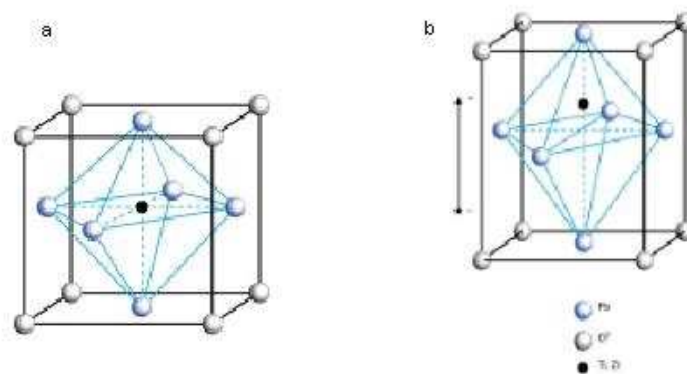
Έτσι, ένα υλικό θα είναι πιεζοηλεκτρικό μόνο όταν δεν έχει κέντρο συμμετρίας. Αυτό φαίνεται στο σχήμα Α.1. Αν υπάρχει κέντρο συμμετρίας, θα συνεχίσει να υπάρχει και μετά την παραμόρφωση, με αποτέλεσμα να μη δημιουργηθεί πόλωση. Με αυτή τη λογική, ένα υλικό που ανήκει στο κυβικό σύστημα δε μπορεί να είναι πιεζοηλεκτρικό. [70]

Το σχήμα Α.2 βοηθά να κατανοηθεί γιατί υπάρχει το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Το παρακάτω διάγραμμα παριστά έξι σημειακά φορτία, θετικά τα κόκκινα και αρνητικά τα πράσινα. Σε κατάσταση ηρεμίας χωρίς την επίδραση δυνάμεων, διατάσσονται στις κορυφές ενός εξαγώνου. Αν το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο κατά μήκος του άξονα x και σε απόσταση από αυτά τα φορτία, κανείς μπορεί να δει τα τρία θετικά φορτία να ενεργοποιούνται στο κέντρο του εξαγώνου όπως και τα τρία αρνητικά. Η θετική και η αρνητική διάταξη των φορτίων αλληλοαναιρείται και το δυναμικό σε μια απόσταση κατά μήκος του άξονα x θα είναι μηδέν. [70]

Αν μια θλιπτική δύναμη εφαρμοστεί στο εξάγωνο κατά μήκος του άξονα y , η διάταξη διαταράσσεται με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε να έρχονται δυο θετικά φορτία κοντύτερα μεταξύ τους σε ένα άκρο, και τα αρνητικά φορτία μαζεμένα στην άλλη. Η παραπάνω κατάσταση διαμορφώνει ένα δίπολο όπου το ένα άκρο της διάταξης είναι θετικό και τα άλλο αρνητικό. Ένα δυναμικό καταμετράται κατά μήκος του άξονα x , που δεν είναι πια μηδενικό.



Σχήμα A.2: Διάγραμμα Πιεζοηλεκτρικού φαινομένου



Σχήμα A.3: Πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι

A.2 Υλικά που εμφανίζουν πιεζοηλεκτρισμό

Από τις 32 κρυσταλλικές τάξεις, 20 είναι μη-κεντροσυμμετρικές. Σε αυτές τις 20 ανήκουν όλοι οι πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι. Όμως για να είναι ένας κρύσταλλος πιεζοηλεκτρικός θα πρέπει να τηρούνται και άλλες βασικές συνθήκες. Έτσι λοιπόν περιορίζεται ο αριθμός των κρυστάλλων που δίδουν πιεζοηλεκτρισμό. Στον πίνακα A.1 φαίνονται οι κρυσταλλικές ομάδες που υποστηρίζουν το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού.

Στην πράξη το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού εμφανίζεται σε πολύ λίγα υλικά. Μονοκρύσταλλοι από $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$, H_2PO_4 , α-χαλαζία (SiO_2), άλας του Rochelle ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6\cdot 4\text{H}_2\text{O}$), και σε μερικές περιπτώσεις πολυκρυσταλλικά κεραμικά όπως τα BaTiO_3 και $\text{Pb}(\text{Zr}_{0,52}\text{Ti}_{0,48})\text{O}_3$. [66]

Σύστημα	Κρυσταλλογραφικές ομάδες που δίνουν πιεζοηλεκτρισμό	Κρυσταλλογραφικές ομάδες που δε δίνουν πιεζοηλεκτρισμό
Τρικλινές	1	$\bar{1}$
Μονοκλινές	2, m	2/m
Ορθορομβικό	222, mm2	Mmm
Τετραγωνικό	4, 4, 422, 4mm, 42m	4/m, 4/mmm
Τριγωνικό	3, 32, 3m	3, 3m
Εξαγωνικό	6, 6, 622, 6mm, 6m2	6/m, 6/mmm
Κυβικό	23, 43m	M 3, 432, m 3m

Πίνακας A.1: Μορφή πιεζοηλεκτρικών υλικών

A.3

Μαθηματική περιγραφή φαινομένου

Ένα από τα χαρακτηριστικά των κρυστάλλων είναι ότι οι φυσικές τους ιδιότητες (θερμική, ηλεκτρική αγωγιμότητα, ελαστικότητα, ηλεκτρική πόλωση) εξαρτώνται από την διεύθυνση στην οποία μετρούνται.

Αυτές οι ιδιότητες ονομάζονται ανισοτροπικές. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη τιμή αυτών των ιδιοτήτων, χρησιμοποιούμε μαθηματικές ποσότητες που ονομάζονται τανυστές.

Αν δηλώσουμε τους άξονες x, y, z ως 1, 2, 3 αντίστοιχα, τότε οι σχέσεις μεταξύ πόλωσης $\vec{P}$ και έντασης εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ είναι οι παρακάτω,

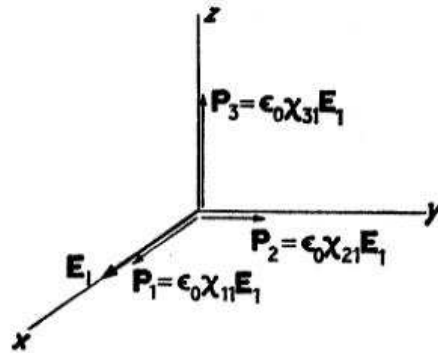
$$\begin{aligned} P_1 &= \epsilon_0 \chi_{11} E_1 + \epsilon_0 \chi_{12} E_2 + \epsilon_0 \chi_{13} E_3 \\ P_2 &= \epsilon_0 \chi_{21} E_1 + \epsilon_0 \chi_{22} E_2 + \epsilon_0 \chi_{23} E_3 \\ P_3 &= \epsilon_0 \chi_{31} E_1 + \epsilon_0 \chi_{32} E_2 + \epsilon_0 \chi_{33} E_3 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Έτσι, ένα πεδίο E_1 θα «γεννήσει» τρεις συνιστώσες πόλωσης R_1, R_2, R_3 που δίδονται από τις σχέσεις,

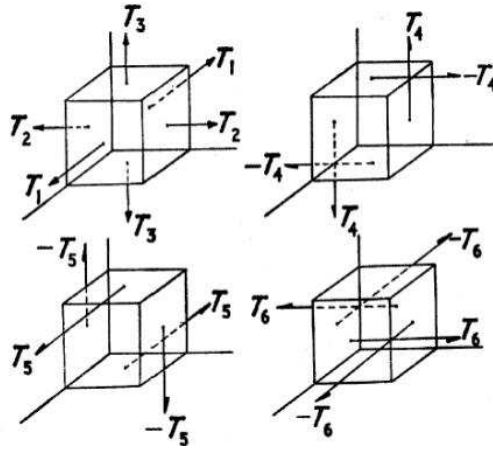
$$\begin{aligned} P_1 &= \epsilon_0 \chi_{11} E_1 \\ P_2 &= \epsilon_0 \chi_{21} E_1 \\ P_3 &= \epsilon_0 \chi_{31} E_1 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Όπου, ϵ_0 είναι η διαπερατότητα του κενού, χ_{ij} η ηλεκτρική επιδεκτικότητα και ως πίνακοστοιχείο δίδει τη συνισταμένη της πόλωσης κατά μήκος της διεύθυνσης - i ως αποτέλεσμα εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διεύθυνση - j . Πρέπει να σημειωθεί ότι σε ένα κρύσταλλο όταν εφαρμοστεί ένα ηλεκτρικό πεδίο p_x στον άξονα -1 θα δημιουργήσει πόλωση κατά μήκος και των τριών αξόνων 1-, 2-, 3-.

Έτσι, η πόλωση δεν είναι παράλληλη προς το εφαρμοζόμενο πεδίο. Αυτό φαίνεται στο σχήμα A.4. [67]



Σχήμα Α.4: Συνιστώσα πιεζοηλεκτρικού associated με δημιουργία ηλεκτρικής τάσης στη διεύθυνση x



Σχήμα Α.5: Αξονικές και διατμητικές συνιστώσες της τάσης

Όπως αναφέρθηκε η ηλεκτρική επιδεκτικότητα μπορεί να γραφεί με τη μορφή τανυστή με δύο δείκτες.

$$\chi_0 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Στους κρυστάλλους η τάση μπορεί να παρασταθεί με ένα τανυστή δευτέρου βαθμού.

$$T_{ij} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Κάτω από συνθήκες ισορροπίας $T_{ij} = T_{ji}$ μπορεί μόνο ένας δείκτης να χρησιμοποιηθεί για να δηλώσει τις συνιστώσες της τάσης.

$$T_k = \begin{vmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Εδώ οι τάσεις T_1, T_2, T_3 υποδηλώνουν τις μονοαξονικές συνιστώσες της τάσης και οι T_4, T_5, T_6 υποδηλώνουν τις διατμητικές συνιστώσες, όπως φαίνεται στο σχήμα A.5.

A.4 Ορθό πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο

Όταν εφαρμόζεται μια τάση σε ένα πιεζοηλεκτρικό κρύσταλλο, οι παραγόμενες συνιστώσες πόλωσης σχετίζονται με κάθε μια από τις συνιστώσες της τάσης T_k με ένα σετ συντελεστών d_{ik} που ονομάζονται σταθερές πιεζοηλεκτρικής παραμόρφωσης. Αυτό είναι το άμεσο ή ορθό πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο που εκφράζεται μαθηματικά με τη παρακάτω σχέση,

$$P_i = d_{ik}T_k, \quad i = 1, 2, 3 \text{ και } k = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{A.6})$$

Η ομάδα συντελεστών μπορεί πιο εύκολα να παρασταθεί με μορφή πίνακα [67],

$$d_{ik} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{vmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Κάθε κρύσταλλος έχει το χαρακτηριστικό του πλήθος πιεζοηλεκτρικών σταθερών d_{ik} που εξαρτάται από τη συμμετρία της γεωμετρίας του κρυστάλλου. Κάποιες σταθερές έχουν τιμή μηδέν και άλλες έχουν ίση τιμή μεταξύ τους. Ισχύει ο εξής κανόνας: «Όσο πιο υψηλή η συμμετρία τόσο λιγότερες ανεξάρτητες σταθερές δικ υπάρχουν». Στη περίπτωση του κεντροσυμμετρικού κρυστάλλου όλα τα d_{ik} είναι μηδέν. Ο πίνακας d_{ik} για το χαλαζία, ο οποίος έχει τριγωνική κρυσταλλική δομή, έχει την παρακάτω μορφή,

$$\begin{vmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & -d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A.5

Ανάστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο

Το ανάστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά με τη παρακάτω σχέση,

$$S_k = d_{ik} E_i, \quad i = 1, 2, 3 \text{ και } k = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{A.9})$$

Όπου S_k είναι ο τανυστής της τάσης (όμοιος με τον T_k) και E_i είναι οι συνιστώσες του εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου. Να σημειωθεί ότι, ο πίνακας d_{ik} που συνδέει τη παραμόρφωση με το εφαρμοζόμενο πεδίο στο ανάστροφο φαινόμενο, είναι πανομοιότυπος με τον d_{ik} που συνδέει τη πόλωση με τη τάση στο άμεσο φαινόμενο. [68]

Ορθό: Πόλωση(P) - Τάση(T) Ανάστροφο: Παραμόρφωση(S) - Ηλεκτρικό Πεδίο(E)

Το παραπάνω είναι μια θερμοδυναμική απαίτηση. Οι μονάδες του αντιστρόφου φαινομένου d_{ik} είναι $(m/m)/(V/m) = mV^{-1}$, που είναι το ίδιο με το C/N .

ΕΥΘΥ	ΑΝΑΣΤΡΟΦΟ
$\mathbf{P} = \mathbf{e} \times \mathbf{X}$	$\mathbf{X} = \mathbf{d} \times \mathbf{E}$
P : πόλωση	X : παραμόρφωση
X : παραμόρφωση	d : συντελεστής πιεζοηλεκτρικής παραμόρφωσης
e : συντελεστής πιεζοηλεκτρικής τάσης	E : ηλεκτρικό πεδίο

Πιεζοηλεκτρικοί Συντελεστές του α-χαλαζία	
$e_{11} : 0,173 \text{ C/m}^2$	$d_{11} : 2,27 \times 10^{-12} \text{ m/V}$
$e_{14} : 0,040 \text{ C/m}^2$	$D_{14} : -0,67 \text{ m/V}$

Πίνακας Α.3: Χαρακτηριστικά μεγέθη πιεζοηλεκτρισμού

A.6 Ενεργειακή αντιμετώπιση

Όταν η μηχανική ενέργεια με τη μορφή της τάσης εφαρμόζεται στο πιεζοηλεκτρικό δείγμα, μόνο ένα μέρος της μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια. (που αποθηκεύεται κατά τη δημιουργία της πόλωσης). Ο παράγοντας ηλεκτρομαγνητικής σύζευξης K ορίζεται ως $K^2 = \text{αποθηκευμένη ηλεκτρική ενέργεια} / \text{«εισερχόμενη» μηχανική ενέργεια}$.

Η μηχανική ενέργεια μετράται ανάλογα με την ενέργεια $0,5 \times kd^2$ που αποθηκεύεται σε ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου k επιμηκυμένο κατά d .

Έτσι,

$$zK^2 = d_{33}^2 / (s_{33}\epsilon_0\epsilon_1) \quad (\text{A.10})$$

Στο ανάστροφο φαινόμενο, $K^2 = \text{αποθηκευμένη μηχανική ενέργεια} / \text{«εισερχόμενη» ηλεκτρική ενέργεια}$. [68]

Από τη θερμοδυναμική αναγκάζομαστε να δεχτούμε ότι το k έχει την ίδια τιμή που έχει και στο ευθύ φαινόμενο.

A.7 Η Γραμμική θεωρία της πιεζοηλεκτρικότητας

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας για καταστάσεις πιεζοηλεκτρικού μέσου που σε οποιοδήποτε όγκο V οριοθετημένο από μια επιφάνεια s με ομαλή εκροή μονάδας

n , το ποσοστό της ενέργειας (κινητικής συν ενέργεια παραμόρφωσης) είναι ίσο με το ποσοστό στο οποίο γίνεται έργο από τις έλξεις της επιφάνειας ενεργώντας στο s μείον την ροή της εκροής της ηλεκτρικής ενέργειας στο s . Έτσι έχουμε [69],

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \rho \dot{u}_j + U \right) dV = \int_S (t_j \dot{u}_j - n \phi \dot{D}) dS \quad (\text{A.11})$$

ως την εξίσωση της αρχής της διατήρησης της ενέργειας.

Βασικά, αυτή η εξίσωση θέτει ως δεδομένο την ύπαρξη συνάρτησης ενέργειας παραμόρφωσης U .

Οι εξισώσεις τάσης της κίνησης,

$$T_{ij-1} + t_j = \rho \ddot{u}_j \quad \text{με} \quad f_j = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\tau_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j \quad \text{όπου} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (\text{A.13})$$

Η εξίσωση φόρτισης των ηλεκτροστατικών,

$$D_{i,i} = 0 \quad (\text{A.14})$$

Οι σχέσεις ηλεκτρικού δυναμικού - ηλεκτρικού πεδίου,

$$\begin{aligned} E_i &= -\phi_i - A_{\dot{j}} \quad \text{με} \quad A_{\dot{c}} \ll |\phi_{ji}| \\ E_k &= -\phi_{,k} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Οι σχέσεις έντασης - μηχανικής μετατόπισης,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A.16})$$

Όλα αυτά θα χρειαστούν σε ότι θα ακολουθήσει. Οι προαναφερθείσες προσεγγίσεις της γραμμικότητας έχουν ήδη συμπεριληφθεί, όπως $\frac{d}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t}$, $v \approx u$, απειροελάχιστη ένταση, η απουσία σώματος δύναμης ηλεκτρικής και σύνδεση, και το ότι δεν μπορούν να διακρίνουν ανάμεσα στις αρχικές και τις τελικές θέσεις.

Επίσης έχουμε την σχέση,

$$dV + dV_0(1 + \Delta) \approx dV_0 \quad (\text{A.17})$$

$$\alpha\phi\acute{o}\ \Delta = u_{k,k} \ll 1 \quad (\text{A.18})$$

$$\kappa\alpha\iota\ \acute{\epsilon}\tau\sigma\iota\ \rho = \rho_0(1 - \Delta) \approx \rho_0 \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}dV \approx \Delta dV_0 \approx \Delta dV \quad (\text{A.20})$$

Υποκαθιστώντας από την $t_j = n_i T_{ij}$ στην (A.11) εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η εξίσωση που προκύπτει ισχύει για έναν αυθαίρετο όγκο V , παίρνουμε,

$$\rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \dot{U} = (\tau_{ij} \dot{u}_j)_{,i} - (\phi \dot{D}_i)_{,i} \quad (\text{A.21})$$

$$\dot{U} = (\tau_{ij,i} - \rho \dot{u}_j) \dot{u}_j + \tau_{ij} \dot{u}_{j,i} - \phi \dot{D}_{i,i} - \phi_{,i} \dot{D}_i \quad (\text{A.22})$$

$$\dot{U} = \tau_{ij} \dot{S}_{ij} + E_i \dot{D}_i \quad (\text{A.23})$$

Η εξίσωση (A.23) ονομάζεται ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής για το πιεζομετρικό μέσο.

A.8 Πιεζοηλεκτρικές θεμελιώδεις εξισώσεις

Ας καθορίσουμε την ηλεκτρική ενθαλπία H από [70],

$$H = U - E_i D_i \quad (\text{A.24})$$

Μετά παραγωγίζοντας την (A.24) ως προς τον χρόνο, παίρνουμε,

$$\dot{U} = \dot{U} - E_i \dot{D}_i - \dot{E}_i D_i \quad (\text{A.25})$$

αντικαθιστώντας στην (A.23) έχουμε,

$$H = t_{ij}\dot{S}_{ij} - \dot{E}_i D_i \quad (\text{A.26})$$

η εξίσωση (A.26) σημαίνει ότι,

$$H = H(S, E) \quad (\text{A.27})$$

και παραγωγίζοντας την (A.27) ως προς τον χρόνο, βρίσκουμε,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}}\dot{S}_{ij} + \frac{\partial H}{\partial E_i}\dot{E}_i \quad (\text{A.28})$$

αντικαθιστώντας στην (A.26),

$$\left(\tau_{ij} - \frac{\partial H}{\partial S_{ij}}\right)\dot{S}_{ij} - \left(D_i + \frac{\partial H}{\partial E_i}\right)\dot{E}_i = 0 \quad (\text{A.29})$$

Καθώς η εξίσωση (A.29) είναι μια ταυτότητα που πρέπει να ισχύει για αυθαίρετα S_{ij} και $\dot{E}_i$ που αντιστοιχούν με τους όρους $S_{ij} = S_{ji}$ βλέπουμε,

$$t_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial S_{ij}} + \frac{\partial H}{\partial S_{ji}}\right) \quad (\text{A.30})$$

$$D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i} \quad (\text{A.31})$$

Αν περαιτέρω συμφωνήσουμε να κατασκευάσουμε H ώστε,

$$\frac{\partial H}{\partial S_{ji}} + \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \quad (\text{A.32})$$

μπορούμε να γράψουμε στην (A.30),

$$T_{ij} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \quad (\text{A.33})$$

Αφού μας ενδιαφέρει μόνο η γραμμική θεωρία, κατασκευάζουμε μια ομοιογενή δευτεροβάθμια φόρμα για το H .

$$H = \frac{1}{2}c_{ijkl}^E S_{ij}S_{kl} - e_{ijk}E_i S_{jk} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^S E_i E_j \quad (\text{A.34})$$

όπου,

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jikl} = c_{klij}, \quad e_{ijk} = e_{ikj}, \quad \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij} \quad (\text{A.35})$$

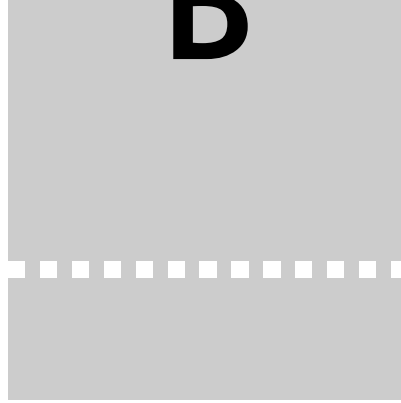
Και εδώ και παρακάτω αφήσαμε την E στις ελαστικές σταθερές και την S στις διηλεκτρικές σταθερές γιατί όλες οι άλλες σταθερές που υπάρχουν σε αυτή τη μονο-γραφή θα καθοριστούν υπό όρους αυτών των σταθερών και του e_{ijk} . Έτσι έχουμε 21 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές, 18 ανεξάρτητες πιεζοηλεκτρικές σταθερές και 6 ανεξάρτητες διηλεκτρικές σταθερές στην πιο γενική περίπτωση (10) (τρικλινικοί κρύσταλλοι χωρίς κέντρο συμμετρίας). Καθώς το e είναι ένας παλιός εντατήρας ακανόνιστης σειράς, δεν μπορεί να υπάρχει σε οποιοδήποτε υλικό που έχει κέντρο συμμετρίας [69]

Από τις (A.31) και (A.34) παίρνουμε τις θεμελιώδεις γραμμικές πιεζοηλεκτρικές εξισώσεις,

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}S_{kl} - e_{kij}E_k \quad (\text{A.36})$$

$$D_i = e_{ijkl}S_{kl} + \varepsilon_{ik}E_k \quad (\text{A.37})$$

B



ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΜΑΖΑΣ M , ΑΚΑΜΨΙΑΣ K , ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ D , A , B ΚΑΙ F_e^* ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

Ο πίνακας μάζας της δοκού $[M]_{8 \times 8}$ ισούται με,

$$M = \begin{bmatrix} 0,041 & 0 & 0,0071 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0071 & -0,0001 & 0,041 & 0 & 0,0071 & 0,0001 & 0 & 0 \\ 0,0001 & 0 & 0 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0071 & -0,0001 & 0,041 & 0 & 0,0071 & 0,0001 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0071 & -0,0001 & 0,0205 & 0,0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0,0002 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

Ο πίνακας ακαμψίας $[K]_{8 \times 8}$ ισούται με,

$$K = \begin{bmatrix} 275082333,2677 & 0 & -13754116,6338 & -515779,3738 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52327,184 & 515779,3738 & 12519,861 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13754116,6338 & 515779,3738 & 27508233,2677 & 0 & -13754116,6338 & -515779,3738 & 0 & 0 \\ -515779,3738 & 12519,861 & 0 & 52327,184 & 515779,3738 & 12519,861 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13754116,6338 & 515779,3738 & 27508233,2677 & 0 & -13754116,6338 & -515779,3738 \\ 0 & 0 & -515779,3738 & 12519,861 & 0 & 52327,184 & 515779,3738 & 12519,861 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13754116,6338 & 515779,3738 & 13754116,6228 & 515779,3738 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -515779,3738 & 12519,861 & 515779,3738 & 26163,592 \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

Ο πίνακας A ισούται με,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

όπου,

$$\begin{aligned}
 [A_{11}]_{8 \times 4} &= 0_{8 \times 4} \\
 [A_{12}]_{8 \times 4} &= 0_{8 \times 4} \\
 [A_{13}]_{8 \times 8} &= I_{8 \times 8} \\
 [A_{21}]_{8 \times 4} &= 10^{12} \times \begin{bmatrix} -0,0013 & 0 & 0,0006 & 0,0001 \\ 0,0813 & -0,0136 & -0,1179 & -0,0097 \\ 0,0005 & 0 & -0,0018 & 0 \\ 0,1833 & -0,0098 & 0,0198 & -0,0203 \\ 0,0003 & 0 & 0,0002 & 0 \\ 0,0771 & -0,0035 & 0,1911 & -0,0134 \\ -0,0003 & 0 & -0,0011 & 0,0001 \\ 0,0692 & -0,0031 & 0,2174 & -0,0127 \end{bmatrix} \\
 [A_{22}]_{8 \times 4} &= 10^{12} \times \begin{bmatrix} 0,0003 & 0 & 0,0003 & 0 \\ -0,0397 & -0,0035 & -0,0333 & -0,0012 \\ 0,0002 & 0,0001 & 0,0008 & 0 \\ -0,1140 & -0,0135 & -0,1352 & -0,0050 \\ -0,0027 & 0 & 0,0021 & 0,0001 \\ 0,1405 & -0,0273 & -0,4243 & -0,0167 \\ -0,0066 & 0,0003 & 0,0082 & 0,0004 \\ 0,8725 & -0,0462 & -1,1728 & -0,0555 \end{bmatrix} \\
 [A_{23}]_{8 \times 8} &= 10^{12} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0001 & 0 & 0 & 0 & -0,0001 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0,0001 & 0 & -0,0002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0,0004 & 0 & -0,0006 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 4} \\ M^{-1} f_e^* \end{bmatrix}_{16 \times 4}$ ισούται με,

$$B = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0004 & -0,0004 & 0,0005 & 0 \\ 0,1940 & -0,0949 & -0,0653 & -0,0038 \\ 0,0006 & -0,0006 & -0,0007 & 0,0001 \\ 0,0990 & 0,1649 & -0,1287 & -0,0130 \\ 0,0001 & 0,0004 & -0,0010 & -0,0023 \\ 0,0337 & 0,1016 & 0,1926 & 0,1031 \\ -0,0002 & -0,0005 & -0,0017 & -0,0138 \\ -0,0003 & 0,0347 & -0,0009 & 0,1419 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Ο πίνακας F_e^* με τις πιεζοηλεκτρικές σταθερές ισούται με,

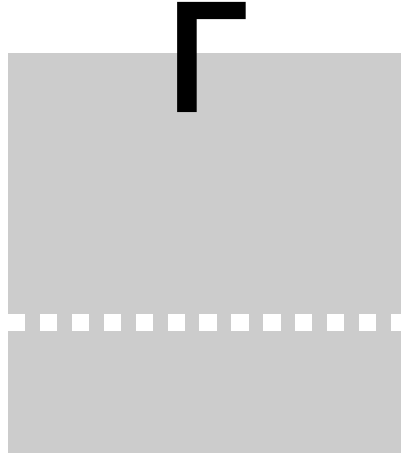
$$F_e^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0862 & -0,0862 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0862 & -0,0862 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0862 & -0,0862 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0862 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Ο πίνακας G όπου $G = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 8} \\ M^{-1} \end{bmatrix}_{16 \times 8}$ προκύπτει από τον $O_{8 \times 8}$ και από,

$$M^{-1} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0 & -0,0005 & 0 & 0 & 0 & -0,0003 & 0 & -0,0003 \\ -0,0005 & 0,2251 & 0,0006 & 0,1149 & 0,0002 & 0,0391 & -0,0002 & 0,0347 \\ 0 & 0,0006 & 0 & -0,0001 & 0 & -0,0009 & 0 & -0,0009 \\ -0,0010 & 0,1149 & -0,0001 & 0,3063 & 0,0007 & 0,1570 & 0 & 0,1419 \\ 0 & 0,0002 & 0 & 0,0007 & 0 & -0,0005 & 0 & -0,0031 \\ -0,0003 & 0,0391 & -0,0009 & 0,1570 & -0,0005 & 0,3805 & -0,0026 & 0,5002 \\ 0 & -0,0002 & 0 & -0,0007 & 0 & -0,0026 & 0,0002 & -0,0186 \\ -0,0003 & 0,0347 & -0,0009 & 0,1419 & -0,0031 & 0,5002 & -0,0186 & 2,1865 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Ο πίνακας απόσβεσης $D = [0,0005 \times (M + K)]$ ισούται με,

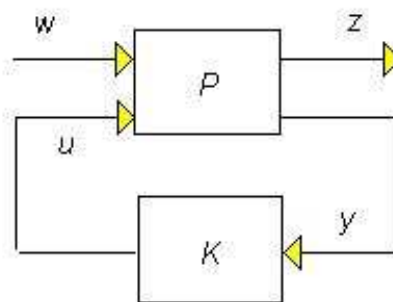
$$[D]_{8 \times 4} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,3754 & 0 & -0,6877 & -0,0258 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0026 & 0,0258 & 0,0006 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6877 & 0,0258 & 1,3754 & 0 & -0,6877 & -0,0258 & 0 & 0 \\ -0,0258 & 0,0006 & 0 & 0,0026 & 0,0258 & 0,0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6877 & 0,0258 & 1,3754 & 0 & -0,6877 & -0,0258 \\ 0 & 0 & -0,0258 & 0,0006 & 0 & 0,0026 & 0,0258 & 0,0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6877 & 0,0258 & 0,6877 & 0,0258 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0258 & 0,0006 & 0,0258 & 0,0013 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$



ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ H_∞

Γ.1 Διατύπωση του προβλήματος - Ανάλυση

Για την επίλυση του προβλήματος του ελέγχου με βάση τη θεωρία H_∞ θεωρείται το δομικό διάγραμμα δύο θυρών του σχήματος Γ.1.



Σχήμα Γ.1: Διάγραμμα δύο θυρών

Αυτό το δεδομένο σύστημα (κλειστού βρόχου) έχει μία εξωτερική είσοδο w , και μία έξοδο z . Το καθένα από τα σήματα αυτά μπορεί να απαρτίζεται από περισσότερους του ενός διαύλους (μπορεί δηλαδή να είναι διανύσματα). Το σήμα (ή συνάρτηση) w , εκφράζει την επίδραση του περιβάλλοντος επί του συστήματος όπως

εξωτερικές διαταραχές, θόρυβος μετρήσεων και εντολές λειτουργίας (στοιχεία που δεν μπορούν να τροποποιηθούν από το σήμα ελέγχου u). Το σήμα z περιέχει όλα τα χαρακτηριστικά του συστήματος που επιθυμούμε να ελέγξουμε (καταστάσεις, σφάλματα ή ενέργεια ελέγχου). Η απεικόνιση P , αναπαριστά ένα γραμμικό, δεδομένο και σταθερό σύστημα με την ονομασία *εγκατάσταση*, ενώ η επίσης γραμμική απεικόνιση K , με την ονομασία *ελεγκτής*, έχει σαν στόχο να εξασφαλίσει ότι η απεικόνιση μεταξύ w και z έχει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά. Αυτό το επιτυγχάνει παράγοντας το σήμα ελέγχου u , χρησιμοποιώντας το σήμα μετρήσεων y . [74]

Τα P και K είναι ευπρεπή συστήματα στο χώρο κατάστασης με αντίστοιχες εξισώσεις,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t)\end{aligned}\tag{Γ.1}$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{Γ.2}$$

και,

$$\begin{aligned}\dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y_K(t) \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t)\end{aligned}\tag{Γ.3}$$

Δεδομένου ότι το P έχει δύο εισόδους και δύο εξόδους, διαμερίζεται φυσικά ως ακολούθως,

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}\tag{Γ.4}$$

(όπου έχει χρησιμοποιηθεί η μορφή του συσκευασμένου πίνακα, ενώ η αντίστοιχη

μορφή για το K είναι,

$$K(s) = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \quad (\Gamma.5)$$

Με λίγη άλγεβρα βρίσκεται και η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου $T_{zw}(s)$, [74],

$$T_{zw}(s) = P_{11} + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \quad (\Gamma.6)$$

$$z = T_{zw}w = \mathcal{F}_l(P, K)w \quad (\Gamma.7)$$

Γ.2 Διατύπωση του προβλήματος - Σύνθεση

Έχοντας μελετήσει την ανάλυση του πρότυπου συστήματος (Σχήμα Γ.1) μπορούμε να στρέψουμε την προσοχή μας στο πρόβλημα της βέλτιστης σύνθεσης. Το πρόβλημα αυτό έχει δύο σκέλη:

- i. Υπάρχει αποδεκτός ελεγκτής χώρου κατάστασης $K(s)$, τέτοιος ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι εσωτερικά ευσταθές:
- ii. (α) (πρόβλημα βέλτιστου H_∞). Να βρεθούν όλοι οι αποδεκτοί ελεγκτές $K(s)$ που να ελαχιστοποιούν την $\|T_{zw}\|_\infty$.
(β) (πρόβλημα υποβέλτιστου H_∞). Δοθέντος $\gamma > \gamma_{min}$ να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ελεγκτές $K(s)$ που να καθιστούν την $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

Ο βέλτιστος ελεγκτής, όπως φαίνεται από τη διατύπωση του προβλήματος δεν είναι μοναδικός. Επιπλέον μπορεί να είναι πολύ δύσκολη η εύρεσή του. Σε κάποια δε προβλήματα μπορεί να μην είναι επιθυμητή η εύρεσή του (λόγω του ότι ένας υποβέλτιστος ελεγκτής ίσως έχει μικρότερο εύρος ζώνης).

Γ.3 Λύση προβλήματος

Υποθέτουμε ότι,

- i. $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$. Η πρώτη προϋπόθεση δεν είναι ουσιαστική, η δεύτερη όμως απλουστεύει κατά πολύ τις εξισώσεις της λύσης. Υπονοεί ότι οι συναρ-

τήσεις μεταφοράς από το w στο z και από το u στο y φθίνουν στις υψηλές συχνότητες. [76]

Ακόμη, για να έχει το πρόβλημα λύση πρέπει να ικανοποιούνται οι επιπλέον συνθήκες:

- i. Το ζεύγος (A, B_2) να είναι σταθεροποιήσιμο και το (C_2, A) εντοπίσιμο. Η προϋπόθεση αυτή εξασφαλίζει ότι ο ελεγκτής θα μπορεί να επηρεάσει όλες τις ασταθείς καταστάσεις και ότι αυτές οι καταστάσεις εμφανίζονται στις μετρήσεις.
- ii. βαθμός(D_{12}) = m_2 , βαθμός(D_{21}) = p_2 . Οι προϋποθέσεις αυτές εξασφαλίζουν ότι οι ελεγκτές είναι πρόποντες. Επίσης υπονοεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς από το w στο y είναι μη μηδενική στις υψηλές συχνότητες. Η προϋπόθεση αυτή συνήθως δεν ικανοποιείται εκτός εάν ληφθεί ιδιαίτερη μέριμνα στη φάση διατύπωσης του προβλήματος.
- iii. βαθμός $\left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = n + m_2$ σε όλες τις συχνότητες.
- iv. βαθμός $\left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = n + p_2$ σε όλες τις συχνότητες.

Για το απλοποιημένο αυτό πρόβλημα ένας (υποβέλτιστος) ελεγκτής δίνεται από τη σχέση, [76],

$$u = -K_c \hat{x} \quad (\Gamma.8)$$

όπου ο εκτιμητής κατάστασης υπολογίζεται από την,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + B_1 \hat{w} + Z_\infty K_e (y - \hat{y}) \quad (\Gamma.9)$$

και,

$$\begin{aligned} \hat{w} &= \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x} \\ \hat{y} &= C_2 \hat{x} + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty \hat{x} \end{aligned} \quad (\Gamma.10)$$

Ο όρος $\hat{w}$ είναι η εκτίμηση της χειρότερης δυνατής διαταραχής εισόδου του συστήματος και ο $\hat{y}$ είναι η έξοδος του εκτιμητή. Οι πίνακες απολαβής K_c, K_e

δίνονται από τους τύπους,

$$\begin{aligned} K_c &= \tilde{D}_{12}(B_2^T X_\infty + D_{12}^T C_1), & \tilde{D}_{12} &= (D_{12}^T D_{12})^{-1} \\ K_e &= (Y_\infty C_2^T + B_1 D_{21}^T) \tilde{D}_{21}, & \tilde{D}_{21} &= (D_{21} D_{21}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (\Gamma.11)$$

Ο όρος Z_∞ υπολογίζεται μέσω της,

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (\Gamma.12)$$

Οι όροι X_∞ , Y_∞ είναι οι λύσεις των εξισώσεων Ricatti για τον ελεγκτή και εκτιμητή αντίστοιχα,

$$X_\infty = Ric \begin{bmatrix} A - B_2 \tilde{D}_{12} D_{12}^T C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 \tilde{D}_{12} B_2^T \\ -\tilde{C}_1^T C_1 & -(A - B_1 \tilde{D}_{12} D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \quad (\Gamma.13)$$

$$Y_\infty = Ric \begin{bmatrix} -(A - B_1 D_{21}^T \tilde{D}_{21} C_2)^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T \tilde{D}_{21} C_2 \\ -\tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T \tilde{D}_{21} C_2)^T \end{bmatrix} \quad (\Gamma.14)$$

όπου,

$$\tilde{C}_1 = (I - D_{12} \tilde{D}_{12} D_{12}^T) C_1, \quad \tilde{B}_1 = B_1 (I - D_{21}^T \tilde{D}_{21} D_{21}) \quad (\Gamma.15)$$

Συλλέγοντας όλες τις παραπάνω εκφράσεις μπορούμε να γράψουμε το κλειστό σύστημα ως εξής:

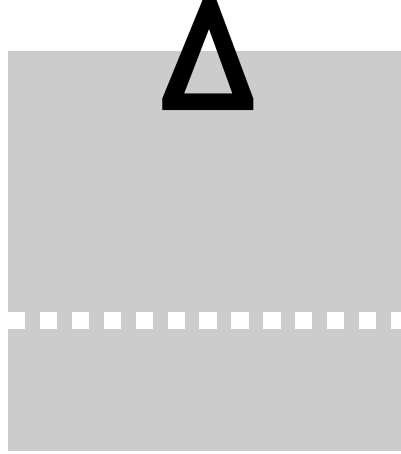
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B_2 K_c \\ Z_\infty K_e C_2 & A - B_2 K_c + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - Z_\infty K_e (C_2 + \gamma^{-1} D_{21} B_1^T X_\infty) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} B_1 \\ Z_\infty K_e D_{21} \end{bmatrix} w \quad (\Gamma.16) \end{aligned}$$

Τέλος μπορεί να αποδειχθεί ότι ο σταθεροποιητικός ελεγκτής υπάρχει αν και μόνον αν οι εξισώσεις Riccati (3.81) έχουν θετικά ημιορισμένες λύσεις και,

$$\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \quad (\Gamma.17)$$

(όπου ρ : φασματική ακτίνα).

Για τον ελεγκτή αυτόν φυσικά $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ [81].



ΤΙΜΕΣ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ LQR ΚΑΙ H_∞

Ο ελεγκτής για το κριτήριο του γραμμικού τετραγωνικού ελέγχου είναι:

$$\left[K l q r \right]_{4 \times 16} = 10^{10} \times \left[K l q r_1 \quad K l q r_2 \right] \quad (\Delta.1)$$

όπου,

$$\left[K l q r_1 \right]_{4 \times 8} = \begin{bmatrix} -3.51 & 0.0001 & -5.7377 & 0.0 & -6.5338 & 0.0 & -1.4005 & -0.0002 \\ 3.7784 & -0.0 & 5.4889 & 0.0001 & -6.35 & 0.0001 & -2.2551 & -0.0002 \\ -7.9442 & -0.0 & 5.1211 & -0.0001 & -0.0862 & 0.0001 & -0.5324 & -0.0001 \\ 0.0696 & 0.0 & -0.7816 & -0.0 & 2.5831 & -0.0 & -9.0945 & -0.0 \end{bmatrix}$$

$$\left[K l q r_2 \right]_{4 \times 8} = \begin{bmatrix} -0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 \\ 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 \\ -0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 \\ -0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 \end{bmatrix}$$

Ο ελεγκτής για την ονομαστική σχεδίαση του κριτηρίου H_∞ δίνεται από την εξίσωση,

$$\begin{aligned} \dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{aligned} \quad (\Delta.2)$$

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k11} & A_{k12} & A_{k13} \\ A_{k21} & A_{k22} & A_{k23} \end{bmatrix} \quad (\Delta.3)$$

όπου,

$$A_{k_{11}} = \begin{bmatrix} -5.185 \cdot 10^4 & 0 & -2.639 \cdot 10^4 & 0 & 1.937 \cdot 10^4 & 0 & 2718 \\ 1.569 \cdot 10^6 & 0 & 1.786 \cdot 10^6 & 0 & 2.936 \cdot 10^5 & 0 & 2.284 \cdot 10^4 \\ -2.639 \cdot 10^4 & 0 & -7.997 \cdot 10^4 & 0 & -1.391 \cdot 10^4 & 0 & 2.374 \cdot 10^4 \\ -2.372 \cdot 10^6 & 0 & 2.776 \cdot 10^5 & 0 & 1.56 \cdot 10^6 & 0 & -3.707 \cdot 10^5 \\ 1.937 \cdot 10^4 & 0 & -1.391 \cdot 10^4 & 0 & -8.621 \cdot 10^4 & 0 & 2.505 \cdot 10^4 \\ 8.347 \cdot 10^5 & 0 & -2.114 \cdot 10^6 & 0 & 9.856 \cdot 10^5 & 0 & 1.57 \cdot 10^6 \\ 2718 & 0 & 2.374 \cdot 10^4 & 0 & 2.505 \cdot 10^4 & 0 & -2.475 \cdot 10^5 \\ -5.088 \cdot 10^5 & 0 & 8.862 \cdot 10^5 & 0 & -4.022 \cdot 10^6 & 0 & 7.488 \cdot 10^6 \\ -3.233 \cdot 10^9 & 3.975 \cdot 10^7 & -1.612 \cdot 10^9 & 7.597 \cdot 10^7 & 1.39 \cdot 10^9 & 2.994 \cdot 10^7 & 4.535 \cdot 10^8 \\ 1.012 \cdot 10^{11} & -1.355 \cdot 10^{10} & -7.623 \cdot 10^{10} & -9.661 \cdot 10^9 & -3.89 \cdot 10^{10} & -3.499 \cdot 10^9 & -5.627 \cdot 10^{10} \\ -5.568 \cdot 10^8 & -4.878 \cdot 10^7 & -5.712 \cdot 10^9 & 7.292 \cdot 10^6 & -1.449 \cdot 10^9 & 7.548 \cdot 10^7 & 5.699 \cdot 10^9 \\ 1.526 \cdot 10^{11} & -9.809 \cdot 10^9 & 1.118 \cdot 10^{10} & -2.027 \cdot 10^{10} & -4.683 \cdot 10^{10} & -1.35 \cdot 10^{10} & -2.191 \cdot 10^{11} \end{bmatrix}$$

$$A_{k_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.04 \cdot 10^7 & -6.756 \cdot 10^5 & 1.989 \cdot 10^4 & 2.864 \cdot 10^5 & 3.8 \cdot 10^4 & 1.555 \cdot 10^5 & 1.499 \cdot 10^4 \\ -1.203 \cdot 10^9 & 4.11 \cdot 10^7 & -6.779 \cdot 10^6 & -5.76 \cdot 10^7 & -4.834 \cdot 10^6 & -1.733 \cdot 10^7 & -1.753 \cdot 10^6 \\ 3.093 \cdot 10^7 & 2.627 \cdot 10^5 & -2.439 \cdot 10^4 & -8.984 \cdot 10^5 & 3649 & 8.409 \cdot 10^4 & 3.774 \cdot 10^4 \\ -4.947 \cdot 10^9 & 9.224 \cdot 10^7 & -4.908 \cdot 10^6 & 1.18 \cdot 10^7 & -1.014 \cdot 10^7 & -5.334 \cdot 10^7 & -6.758 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$A_{k_{13}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.729 \cdot 10^{-5} & 5.351 \cdot 10^{-7} & -2.07 \cdot 10^{-7} & 3.883 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0004355 & -2.723 \cdot 10^{-5} & 1.181 \cdot 10^{-5} & -2.95 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.539 \cdot 10^{-7} & 1.774 \cdot 10^{-5} & 2.732 \cdot 10^{-7} & -6.842 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0009003 & -0.0004387 & -1.98 \cdot 10^{-5} & 4.031 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.936 \cdot 10^{-7} & 3.017 \cdot 10^{-7} & 1.793 \cdot 10^{-5} & 8.315 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0008714 & 0.0008939 & -0.0004441 & -1.027 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2.524 \cdot 10^{-8} & -1.358 \cdot 10^{-8} & 5.032 \cdot 10^{-8} & 1.815 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.0008711 & -0.0008908 & 0.0009236 & -0.0004721 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.352 \cdot 10^5 & 5139 & -3.039 \cdot 10^7 & -1.752 \cdot 10^8 & -2.358 \cdot 10^8 & -1.239 \cdot 10^8 & 1.478 \cdot 10^5 & 3.529 \cdot 10^5 & -8.692 \cdot 10^5 & -6.596 \cdot 10^4 \\ -1.495 \cdot 10^7 & -5.883 \cdot 10^5 & 3.455 \cdot 10^{10} & 6.865 \cdot 10^{10} & 4.993 \cdot 10^{10} & 1.387 \cdot 10^{10} & -1.732 \cdot 10^8 & 1.796 \cdot 10^8 & 1.021 \cdot 10^8 & 5.935 \cdot 10^6 \\ 4.166 \cdot 10^5 & 1.545 \cdot 10^4 & 1.477 \cdot 10^8 & 2.871 \cdot 10^8 & 8.753 \cdot 10^7 & -2.667 \cdot 10^8 & -7.956 \cdot 10^5 & 7.426 \cdot 10^5 & 8.917 \cdot 10^5 & -1.496 \cdot 10^5 \\ -6.511 \cdot 10^7 & -2.454 \cdot 10^6 & 1.481 \cdot 10^9 & 3.929 \cdot 10^{10} & 6.919 \cdot 10^{10} & 5.34 \cdot 10^{10} & -2.978 \cdot 10^6 & -1.512 \cdot 10^8 & 2.24 \cdot 10^8 & 2.884 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

$$A_{k_{21}} = \begin{bmatrix} 1.502 \cdot 10^9 & -1.553 \cdot 10^7 & -5.517 \cdot 10^8 & -4.927 \cdot 10^7 & -7 \cdot 10^9 & 4.437 \cdot 10^7 & 7.622 \cdot 10^9 \\ 6.386 \cdot 10^{10} & -3.524 \cdot 10^9 & 1.374 \cdot 10^{11} & -1.34 \cdot 10^{10} & 1.089 \cdot 10^{11} & -2.727 \cdot 10^{10} & -2.507 \cdot 10^{11} \\ 4.296 \cdot 10^8 & 1.578 \cdot 10^7 & 2.194 \cdot 10^9 & 6.429 \cdot 10^7 & -3.55 \cdot 10^9 & 2.69 \cdot 10^8 & -2.315 \cdot 10^{10} \\ 8.292 \cdot 10^{10} & -3.139 \cdot 10^9 & 1.633 \cdot 10^{11} & -1.267 \cdot 10^{10} & 7.573 \cdot 10^{11} & -4.62 \cdot 10^{10} & -4.588 \cdot 10^{11} \\ 3.118 & 0 & -1.246 & 0 & 1.034 & 0 & 0.08886 \\ -1.884 & 0 & 1.529 & 0 & -1.062 & 0 & 0.04782 \\ 0.729 & 0 & -0.9619 & 0 & 0.8626 & 0 & -0.1772 \\ -0.1367 & 0 & 0.2409 & 0 & -0.2928 & 0 & 0.09769 \\ 3842 & -13.16 & 1.029 \cdot 10^4 & -21.26 & 1.587 \cdot 10^4 & -24.94 & 1.341 \cdot 10^4 \\ -702.4 & -8.151 & 2339 & -13.57 & 9555 & -16.27 & 1.101 \cdot 10^4 \\ -106.3 & -3.883 & -1031 & -6.696 & 2415 & -8.312 & 8031 \\ 21.9 & -1 & -126.6 & -1.782 & -720.3 & -2.302 & 3184 \end{bmatrix}$$

$$A_{k_{22}} = \begin{bmatrix} 9.607 \cdot 10^7 & 1.666 \cdot 10^5 & -7766 & 1.068 \cdot 10^5 & -2.463 \cdot 10^4 & -1.349 \cdot 10^6 & 2.219 \cdot 10^4 \\ -1.671 \cdot 10^{10} & 3.911 \cdot 10^7 & -1.765 \cdot 10^6 & 9.742 \cdot 10^7 & -6.707 \cdot 10^6 & 7.402 \cdot 10^7 & -1.364 \cdot 10^7 \\ 4.153 \cdot 10^8 & -1.802 \cdot 10^5 & 7925 & -5.876 \cdot 10^5 & 3.222 \cdot 10^4 & -3.362 \cdot 10^6 & 1.346 \cdot 10^5 \\ -5.545 \cdot 10^{10} & 3.551 \cdot 10^7 & -1.575 \cdot 10^6 & 1.119 \cdot 10^8 & -6.346 \cdot 10^6 & 4.431 \cdot 10^8 & -2.311 \cdot 10^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 78.52 & 2.264 & -0.01916 & 7.286 & -0.0309 & 13.99 & -0.03644 \\ 50.22 & 1.319 & -0.01146 & 4.464 & -0.02003 & 8.944 & -0.02494 \\ 24.97 & 0.587 & -0.005221 & 2.094 & -0.009985 & 4.428 & -0.01348 \\ 6.724 & 0.1395 & -0.001268 & 0.5215 & -0.002615 & 1.162 & -0.003845 \end{bmatrix}$$

$$A_{k_{23}} = \begin{bmatrix} 1.037 \cdot 10^6 & 4.802 \cdot 10^4 & 2.212 \cdot 10^7 & 2.215 \cdot 10^8 & 3.391 \cdot 10^8 & -4.474 \cdot 10^8 & -2.12 \cdot 10^5 & -7.686 \cdot 10^5 & 1.16 \cdot 10^6 & 3.177 \cdot 10^6 \\ -2.095 \cdot 10^8 & -8.332 \cdot 10^6 & -1.132 \cdot 10^{10} & -2.391 \cdot 10^{10} & 1.685 \cdot 10^{10} & 1.286 \cdot 10^{11} & 7.982 \cdot 10^7 & -3.06 \cdot 10^7 & -1.934 \cdot 10^8 & -1.167 \cdot 10^8 \\ 4.054 \cdot 10^6 & 2.074 \cdot 10^5 & 1.432 \cdot 10^8 & 5.822 \cdot 10^8 & 9.973 \cdot 10^8 & -2.803 \cdot 10^9 & -1.248 \cdot 10^6 & -1.037 \cdot 10^6 & 7.793 \cdot 10^5 & 1.907 \cdot 10^7 \\ -5.815 \cdot 10^8 & -2.768 \cdot 10^7 & -2.131 \cdot 10^{10} & -7.755 \cdot 10^{10} & -9.628 \cdot 10^{10} & 3.61 \cdot 10^{11} & 1.749 \cdot 10^8 & 1.059 \cdot 10^8 & -2.308 \cdot 10^8 & -1.999 \cdot 10^9 \\ 0 & 0 & -31.42 & 4.011 \cdot 10^{-8} & -1.965 \cdot 10^{-8} & 4.608 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.011 \cdot 10^{-8} & -31.42 & 1.704 \cdot 10^{-8} & -4.256 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.965 \cdot 10^{-8} & 1.703 \cdot 10^{-8} & -31.42 & 2.717 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.614 \cdot 10^{-9} & -4.255 \cdot 10^{-9} & 2.719 \cdot 10^{-9} & -31.42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.56 & 0.1145 & 7.744 \cdot 10^4 & 1.79 \cdot 10^5 & 2.114 \cdot 10^5 & 2.294 \cdot 10^5 & -457.3 & 319.8 & 151.5 & 46.41 \\ 6.244 & 0.07455 & -5.601 \cdot 10^4 & -2.67 \cdot 10^4 & 1.175 \cdot 10^5 & 2.323 \cdot 10^5 & 313.7 & -738.9 & 163.5 & 54.16 \\ 3.186 & 0.03788 & -1.906 \cdot 10^4 & -8.561 \cdot 10^4 & -1.78 \cdot 10^4 & 2.055 \cdot 10^5 & 138.2 & 156.9 & -867 & 53.19 \\ 0.8639 & 0.01022 & -3148 & -1.715 \cdot 10^4 & -4.945 \cdot 10^4 & 9.214 \cdot 10^4 & 33.26 & 46.28 & 50.15 & -975.5 \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 281.1 & 143.1 & -105 & -14.74 \\ -8504 & -9682 & -1591 & -123.8 \\ 143.1 & 433.5 & 75.4 & -128.7 \\ 1.286 \cdot 10^4 & -1505 & -8455 & 2010 \\ -105 & 75.4 & 467.4 & -135.8 \\ -4525 & 1.146 \cdot 10^4 & -5343 & -8509 \\ -14.74 & -128.7 & -135.8 & 1342 \\ 2758 & -4804 & 2.181 \cdot 10^4 & -4.059 \cdot 10^4 \\ 1.021 \cdot 10^7 & 1.186 \cdot 10^7 & -5.808 \cdot 10^6 & -9.584 \cdot 10^5 \\ -1.008 \cdot 10^8 & -2.1 \cdot 10^8 & 1.331 \cdot 10^7 & 1.336 \cdot 10^8 \\ 5.89 \cdot 10^6 & 2.127 \cdot 10^7 & 8.797 \cdot 10^6 & -2.641 \cdot 10^7 \\ 1.688 \cdot 10^8 & 6.017 \cdot 10^7 & -3.393 \cdot 10^8 & 4.729 \cdot 10^8 \\ -6.332 \cdot 10^6 & 4.187 \cdot 10^6 & 2.339 \cdot 10^7 & -3.013 \cdot 10^7 \\ 7.232 \cdot 10^7 & 2.944 \cdot 10^8 & 1.877 \cdot 10^8 & -9.113 \cdot 10^8 \\ -4.219 \cdot 10^6 & -1.802 \cdot 10^7 & -1.67 \cdot 10^7 & 1.693 \cdot 10^8 \\ -7.407 \cdot 10^7 & 2.932 \cdot 10^8 & 6.339 \cdot 10^8 & -3.797 \cdot 10^9 \\ 0.33 & 0.006754 & -0.005604 & -0.0004817 \\ 0.01021 & 0.3387 & 0.005759 & -0.0002593 \\ -0.003952 & 0.005214 & 0.3423 & 0.0009606 \\ 0.0007412 & -0.001306 & 0.001587 & 0.3464 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\Delta.4)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{k11} & C_{k21} & C_{k31} \end{bmatrix} \quad (\Delta.5)$$

$$C_{k11} = \begin{bmatrix} 1.134 \cdot 10^7 & -3.883 \cdot 10^4 & 3.037 \cdot 10^7 & -6.275 \cdot 10^4 & 4.685 \cdot 10^7 & -7.361 \cdot 10^4 & 3.959 \cdot 10^7 \\ -2.073 \cdot 10^6 & -2.406 \cdot 10^4 & 6.903 \cdot 10^6 & -4.005 \cdot 10^4 & 2.82 \cdot 10^7 & -4.803 \cdot 10^4 & 3.249 \cdot 10^7 \\ -3.138 \cdot 10^5 & -1.146 \cdot 10^4 & -3.042 \cdot 10^6 & -1.976 \cdot 10^4 & 7.128 \cdot 10^6 & -2.453 \cdot 10^4 & 2.37 \cdot 10^7 \\ 6.464 \cdot 10^4 & -2952 & -3.737 \cdot 10^5 & -5261 & -2.126 \cdot 10^6 & -6796 & 9.396 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$C_{k21} = \begin{bmatrix} 2.317 \cdot 10^5 & 6681 & -56.54 & 2.151 \cdot 10^4 & -91.21 & 4.128 \cdot 10^4 & -107.6 \\ 1.482 \cdot 10^5 & 3893 & -33.83 & 1.318 \cdot 10^4 & -59.13 & 2.64 \cdot 10^4 & -73.62 \\ 7.369 \cdot 10^4 & 1732 & -15.41 & 6179 & -29.47 & 1.307 \cdot 10^4 & -39.78 \\ 1.984 \cdot 10^4 & 411.7 & -3.742 & 1539 & -7.718 & 3429 & -11.35 \end{bmatrix}$$

$$C_{k13} = \begin{bmatrix} 2.821 \cdot 10^4 & 337.9 & 2.286 \cdot 10^8 & 5.282 \cdot 10^8 & 6.241 \cdot 10^8 & 6.771 \cdot 10^8 & -1.055 \cdot 10^6 & 9.44 \cdot 10^5 & 4.472 \cdot 10^5 & 1.37 \cdot 10^5 \\ 1.843 \cdot 10^4 & 220 & -1.653 \cdot 10^8 & -7.881 \cdot 10^7 & 3.469 \cdot 10^8 & 6.855 \cdot 10^8 & 9.259 \cdot 10^5 & -1.886 \cdot 10^6 & 4.824 \cdot 10^5 & 1.598 \cdot 10^5 \\ 9404 & 111.8 & -5.625 \cdot 10^7 & -2.527 \cdot 10^8 & -5.253 \cdot 10^7 & 6.066 \cdot 10^8 & 4.079 \cdot 10^5 & 4.63 \cdot 10^5 & -2.264 \cdot 10^6 & 1.57 \cdot 10^5 \\ 2550 & 30.16 & -9.291 \cdot 10^6 & -5.062 \cdot 10^7 & -1.46 \cdot 10^8 & 2.72 \cdot 10^8 & 9.817 \cdot 10^4 & 1.366 \cdot 10^5 & 1.48 \cdot 10^5 & -2.584 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\Delta.6)$$

Ε

ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

$A_1, B_1, B_2, B_3, C_1, D_{11}, D_{22}, D_{12}$ ΚΑΙ D_{21}
ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ H_∞

Οι πίνακες $A_1, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{22}, D_{12}$ και D_{21} που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο H_∞ ισούνται με,

$$\begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix}_{24 \times 24} = 10^{12} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

όπου

$$\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{12} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,00002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,00003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,00002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,00002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{13} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,00002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00002 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{14} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{21} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0013 & 0 & 0,0006 & 0,0001 & 0,0003 & 0 \\ 0,0813 & -0,0136 & -0,1179 & -0,0097 & -0,0397 & -0,0035 \\ 0,0005 & 0 & -0,0018 & 0 & 0,0002 & 0,0001 \\ 0,183 & -0,0098 & 0,0198 & -0,0203 & -0,1140 & -0,0135 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{22} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,00002 \\ -0,0333 & -0,0012 & 0 & 0 & -0,0001 & -0,00002 \\ 0,0008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,00002 \\ -0,1352 & -0,0050 & 0,0001 & 0 & 0 & -0,00003 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{23} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,00002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,00003 & 0,00002 & 0,00002 & 0,00003 & 0 & 0 \\ -0,00002 & 0 & -0,00002 & -0,00002 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00003 & 0,00002 & 0,00003 & 0 & 0 \\ -0,00001 & -0,00002 & -0,00001 & -0,00003 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{24} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{31} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0,0003 & 0 & 0,0002 & 0 & -0,0027 & 0 \\ 0,0771 & -0,0035 & 0,1911 & -0,0134 & 0,1405 & -0,0273 \\ -0,0003 & 0 & -0,0011 & 0,0001 & -0,0066 & 0,0003 \\ 0,0692 & -0,0031 & 0,2174 & -0,0127 & 0,8725 & -0,0462 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{32} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0,0021 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4243 & -0,0167 & 0 & 0 & 0,0001 & -0,00002 \\ 0,0082 & 0,0004 & 0 & 0 & 0 & 0,00002 \\ -1,1728 & -0,0555 & 0,00002 & -0,00001 & 0,0001 & -0,00002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{33} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} -0,00002 & 0,00002 & 0,00002 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0001 & -0,00002 & -0,0002 & -0,00003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,00002 & 0 & 0 \\ 0,0004 & -0,00003 & -0,0006 & -0,00002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,00002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,00002 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{34} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{41} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,00003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,00003 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,00003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{42} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,00003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{43} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{44} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,00003 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,00003 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,00002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,00002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,00002 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \end{bmatrix}_{24 \times 12} = 10^5 \times \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

όπου

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \end{bmatrix}_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \beta_{12} \end{bmatrix}_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \beta_{13} \end{bmatrix}_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{14} \end{bmatrix}_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \beta_{21} \end{bmatrix}_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\beta_{22}]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00002 & -0,0003 \\ 0 & -0,0003 & 0,1244 \\ 0 & -0,00003 & 0,0004 \\ 0 & -0,0005 & 0,0635 \end{bmatrix}$$

$$[\beta_{23}]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,00002 & -0,0005 & -0,00002 \\ 0,0004 & 0,0635 & -0,00002 \\ 0,00003 & 0 & -0,00003 \\ -0,00003 & 0,1693 & 0,0004 \end{bmatrix}$$

$$[\beta_{24}]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,0002 & 0,00002 & -0,0002 \\ 0,0216 & -0,0001 & 0,0192 \\ -0,0005 & 0,00002 & -0,0005 \\ 0,0868 & -0,0004 & 0,0785 \end{bmatrix}$$

$$[\beta_{31}]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\beta_{32}]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -0,00003 & 0,0001 \\ 0 & -0,0002 & 0,0216 \\ 0 & 0,00003 & -0,0001 \\ 0 & -0,0002 & 0,0192 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\beta_{33}]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} -0,00003 & 0,0004 & 0,00003 \\ -0,0005 & 0,0868 & -0,0003 \\ 0,00003 & -0,0004 & 0,00003 \\ -0,0005 & 0,0785 & -0,0017 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \beta_{34} \end{bmatrix}_{6 \times 3} &= \begin{bmatrix} -0,0003 & 0,00002 & -0,0017 \\ 0,2104 & -0,0015 & 0,2765 \\ -0,0015 & 0,0001 & -0,0103 \\ 0,2765 & -0,0103 & 1,2088 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta_{41} \end{bmatrix}_{6 \times 3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \beta_{42} \end{bmatrix}_{6 \times 3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta_{43} \end{bmatrix}_{6 \times 3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta_{44} \end{bmatrix}_{6 \times 3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\left[B_2 \right]_{24 \times 4} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0,0570 & -0,0576 & 0,0746 & 0,0045 \\
 26,8077 & -13,1229 & -9,0307 & -0,5250 \\
 0,0769 & -0,0867 & -0,1032 & 0,0072 \\
 13,6848 & 22,7905 & -17,7840 & -1,7907 \\
 0,0207 & 0,0582 & -0,1348 & -0,3169 \\
 4,6541 & 14,0372 & 26,6260 & 14,2467 \\
 -0,0207 & -0,0644 & -0,2299 & -1,9011 \\
 4,1291 & 12,7715 & 42,6633 & 200,8257 \\
 0,0014 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0,0014 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0,0014 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0,0014 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (E.3)$$

$$\left[C_1 \right]_{8 \times 24} = 10^5 \times \begin{bmatrix} c_{111} & c_{112} & c_{113} & c_{114} \end{bmatrix} \quad (E.4)$$

όπου

$$\begin{bmatrix} c_{111} \end{bmatrix}_{8 \times 6} = \begin{bmatrix} c_{112} \end{bmatrix}_{8 \times 6} = \begin{bmatrix} c_{113} \end{bmatrix}_{8 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{114} \end{bmatrix}_{8 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,5982 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5982 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5982 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5982 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_2 \end{bmatrix}_{4 \times 24} = \begin{bmatrix} c_{211} & c_{212} & c_{213} & c_{214} \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

όπου

$$\begin{bmatrix} c_{211} \end{bmatrix}_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 723,5251 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 723,5251 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 723,5251 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{212} \end{bmatrix}_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 723,5251 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{213} \end{bmatrix}_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_{214} \end{bmatrix}_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[D_{11} \right]_{8 \times 12} = 0_{8 \times 12} \quad (\text{E.6})$$

$$\left[D_{22} \right]_{4 \times 4} = 0_{4 \times 4} \quad (\text{E.7})$$

$$\left[D_{12} \right]_{8 \times 4} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5556 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5556 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5556 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5556 \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

$$\left[D_{21} \right]_{4 \times 12} = 10^{12} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

$$\left[d_{11} \right]_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[d_{12} \right]_{4 \times 6} = 0_{4 \times 6}$$