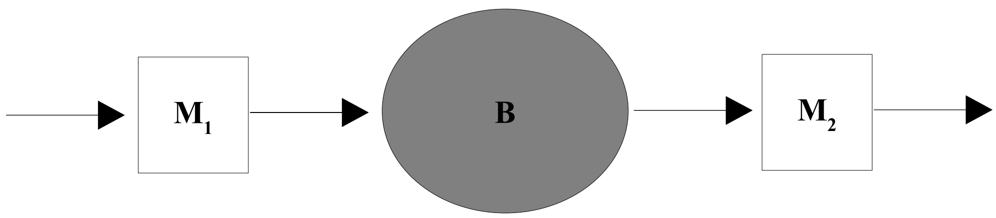
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Διπλωματική εργασία: Ανάλυση γραμμής παραγωγής δύο μηχανών με διακοπτόμενη τροφοδοσία και αποκλεισμό (μπλοκάρισμα) σε κάθε στάδιο



Γκορτζάς Παναγιώτης
Α.Μ. : 2003010098

Τριμελής εξεταστική επιτροπή
Βασίλειος Κουϊκόγλου, επιβλέπων, Καθηγητής
Ευάγγελος Γρηγορούδης, Επίκουρος Καθηγητής
Ευστράτιος Ιωαννίδης, Επίκουρος Καθηγητής

Χανιά 2010

Περιεχόμενα:

1. Εισαγωγή 3

1.1. Αντικείμενο και συνεισφορά της διπλωματικής εργασίας 3

1.2. Εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση 4

2. Περιγραφή του συστήματος 11

3. Επίλυση του μοντέλου 13

3.1. Εύρεση όλων των X_j, Y_{1j} και Y_{2j} 13

3.2. Υπολογισμός των σταθερών c_j 19

3.3. Υπολογισμός μεταβλητών απόδοσης του συστήματος 31

4. Αριθμητικά αποτελέσματα 32

5. Σύνοψη 41

6. Βιβλιογραφία 42

Παράρτημα Α: Πρόγραμμα αναλυτικού μοντέλου σε C 43

Παράρτημα Β: Πρόγραμμα προσομοίωσης σε C 54

1. Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο και συνεισφορά της διπλωματικής εργασίας

Στην εργασία αυτή αναλύεται μια γραμμή παραγωγής που αποτελείται από 2 μηχανές και μια ενδιάμεση αποθήκη συνδεδεμένες σε σειρά. Πρώτες ύλες υπόκεινται μια κατεργασία στη μηχανή M_1. Αφού ολοκληρωθεί η κατεργασία τους στη μηχανή M_1 τα κομμάτια οδηγούνται στην αποθήκη B και μετά στη μηχανή M_2 για μια νέα κατεργασία. Μετά τη μηχανή M_2 τα κομμάτια εξέρχονται από το σύστημα. Σκοπός της εργασίας είναι ο υπολογισμός διαφόρων δεικτών απόδοσης της γραμμής, όπως ο μέσος ρυθμός παραγωγής (throughput) του συστήματος και ο μέσος αριθμός κομματιών στο σύστημα.

Οι γραμμές παραγωγής με δύο μηχανές είναι οι απλούστερες διατάξεις που μπορεί κανείς να συναντήσει σε συστήματα παραγωγής. Για την μελέτη τους εφαρμόζεται η θεωρία των αλυσίδων Markov (βλέπε π.χ. [1]-[3]) η οποία βασίζεται στην παραδοχή ότι οι χρόνοι εμφάνισης γεγονότων όπως η παραγωγή, βλάβη ή επισκευή μιας μηχανής είναι τυχαίοι και εκθετικά κατανεμημένοι.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται η ακόλουθη παραλλαγή: Οι μηχανές έχουν τυχαίους (εκθετικούς) χρόνους παραγωγής και δεν υφίστανται βλάβες, όμως η πρώτη μηχανή (M_1) μπορεί να έχει ελλιπή τροφοδοσία και αποστερείται (πεινάει) ενώ η δεύτερη μηχανή (M_2) να αποκλείεται, δηλαδή να μένει μπλοκαρισμένη για τυχαία χρονικά διαστήματα.

Τέτοια φαινόμενα λαμβάνουν χώρα σε γραμμές δύο μηχανών όταν αυτές είναι τμήματα μεγαλύτερων γραμμών ή δικτύων παραγωγής. Αυτή ακριβώς είναι η συνεισφορά της παρούσας εργασίας.

Για την επίλυση του προβλήματος υπολογίστηκαν όλες οι πιθανότητες της μορφής $P(n,a_1a_2)$ κάθε μια από τις οποίες εκφράζει την πιθανότητα να έχουμε n κομμάτια στο σύστημα, η κατάσταση της μηχανής M_1 να είναι a_1 (όπου a_1 μπορεί να είναι 0, δηλαδή η M_1 πεινάει, ή 1, δηλαδή η M_1 δουλεύει κανονικά) και η κατάσταση της μηχανής M_2 να είναι a_2 (το οποίο μπορεί να είναι 0, δηλαδή η M_2 δεν μπορεί να δώσει το κομμάτι που έχει κατεργαστεί-μπλοκάρει, ή 1, δηλαδή η M_2 δουλεύει κανονικά). Κατόπιν αυτές οι πιθανότητες χρησιμοποιήθηκαν για να βρεθούν οι μεταβλητές του συστήματος. Λεπτομέρειες θα δωθούν στη συνέχεια.

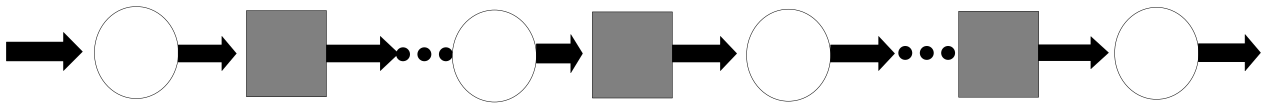
Αξίζει να σημειωθεί ότι η γραμμή παραγωγής αυτή μπορεί να είναι κομμάτι μιας μεγαλύτερης γραμμής παραγωγής, αρκεί να είναι γνωστοί οι ρυθμοί με τους οποίους πεινάει η M_1, δηλαδή δεν παίρνει κομμάτια για κατεργασία από το κομμάτι της γραμμής παραγωγής πριν από αυτή, και ο ρυθμός με τον οποίο μλοκάρει η M_2, δηλαδή δεν μπορεί να δώσει τα κομμάτια που έχει επεξεργαστεί.

Επίσης, οι μηχανές που μελετώνται μπορεί να είναι ολόκληρα δίκτυα παραγωγής για τα οποία είναι γνωστές όλες οι παράμετροι λειτουργίας. Αν είναι γνωστοί οι μέσοι ρυθμοί με τους οποίους ένα σύστημα παραγωγής παράγει, χαλάει (δεν παράγει), επιδιορθώνεται όταν χαλάσει κτλ τότε αυτό μπορεί να αποτελέσει σε μια μελέτη μια και μόνο μηχανή με τα ίδια χαρακτηριστικά. Ακολουθεί μια ανασκόπηση σε μελέτες που έχουν γίνει κατά το παρελθόν για αντίστοιχα συστήματα.

1.2 Εκτενής βιβλιογραφική ανασκόπηση

Σε αυτό το σημείο θα γίνει μια αναφορά σε παλαιότερες εργασίες πάνω σε αντίστοιχα συστήματα.

1.Το μοντέλο που είναι υπό μελέτη στην εργασία [1] παρουσιάζεται σχηματικά ως εξής:



Σχήμα 1. Γραμμή παραγωγής με k μηχανές

Στο σύστημα αυτό η κάθε μηχανή i παράγει σε διακριτούς χρόνους (1,2,...) και χαρακτηρίζεται από την κατάσταση a_i που μπορεί να είναι "0" αν η μηχανή είναι υπό επισκευή ή "1" αν η μηχανή είναι έτοιμη να λειτουργήσει (σε αυτό περιλαμβάνονται οι περιπτώσεις που η μηχανή είναι "πεινασμένη" ή μπλοκαρισμένη καθώς η μηχανή μπορεί να λειτουργήσει – δε σημαίνει ότι λειτουργεί σίγουρα). Επίσης κάθε αποθήκη j χαρακτηρίζεται από τον αριθμό n_j που δείχνει το επίπεδο πληρότητας της αποθήκης j και από ένα αριθμό N_j που δείχνει τη χωρητικότητα της αποθήκης j (έτσι ισχύει $0 <= n_j <= N_j$, j = 1,2,...,k-1). Αυτό είναι ένα πρόβλημα διακριτού χρόνου, δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή το σύστημα περιγράφεται από μια και μόνο κατάσταση στην οποία κάθε μηχανή μπορεί είτε να είναι υπό επισκευή είτε διαθέσιμη.

Έτσι οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος με k μηχανές που φαίνεται παραπάνω είναι της μορφής : $p[s] = p[n_1, \dots , n_{k-1}, a_1, \dots , a_k]$. Ο ρυθμός με τον οποίο παράγει αυτό το σύστημα υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση του αθροίσματος κάποιων από αυτές τις πιθανότητες.

Η έρευνα αυτή δίνει αναλυτικά τις πιθανότητες για k = 2 και k = 3, δηλαδή για συστήματα με 2 και 3 μηχανές αντίστοιχα, ενώ έχει και κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα γραμμών παραγωγής. Μια λειτουργική μηχανή i παράγει πάντα ένα κομμάτι σε 1 μονάδα χρόνου, εφ' όσον αυτή δεν είναι αποστερημένη ή αποκλεισμένη. Στο τέλος του κύκλου παραγωγής υφίσταται βλάβη με πιθανότητα p_i ή συνεχίζει να λειτουργεί με πιθανότητα $(1-p_i)$. Αν η i είναι χαλασμένη, τότε επισκευάζεται σε μια μονάδα χρόνου με πιθανότητα r_i ή συνεχίζεται η επισκευή της με πιθανότητα $(1-r_i)$. Οι πιθανότητες για k = 2 δίνονται αναλυτικά παρακάτω ενώ και για k = 3 δίνονται κάποιες από τις πιθανότητες στους παρακάτω πίνακες, Πίνακας 1: Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης για k = 2 [1]

$p[0,0,0] = 0$
$p[0,0,1] = CX(r_1 + r_2 - r_1r_2 - p_2r_1) / p_2r_1$
$p[0,1,0] = 0$
$p[0,1,1] = 0$
$p[1,0,0] = CX$
$p[1,0,1] = CXY_2$
$p[1,1,0] = 0$
$p[1,1,1] = (CX/p_2)(r_1 + r_2 - r_1r_2 - p_2r_1) / (p_1 + p_2 - p_1p_2 - p_2r_1)$
$p[n,a_1,a_2] = CX^n Y_1^{a1} Y_2^{a2}$, $2 <= n <= N-2$
$p[N-1,0,0] = CX^{N-1}$
$p[N-1,0,1] = 0$
$p[N-1,1,0] = CX^{N-1}Y_1$
$p[N-1,1,1] = (CX^{N-1}/p_1)(r_1 + r_2 - r_1r_2 - p_1r_2) / (p_1 + p_2 - p_1p_2 - p_1r_2)$
$p[N,0,0] = 0$
$p[N,0,1] = 0$
$p[N,1,0] = (CX^{N-1})(r_1 + r_2 - r_1r_2 - p_1r_2) / (p_1r_2)$
$p[N,1,1] = 0$

Στις παραπάνω ισότητες είναι:

$Y_1 = (r_1 + r_2 - r_1r_2 - p_2r_1) / (p_1 + p_2 - p_1p_2 - p_2r_1)$

$Y_2 = (r_1 + r_2 - r_1r_2 - p_1r_2) / (p_1 + p_2 - p_1p_2 - p_2r_1)$

$X = Y_2/Y_1$

Το C προκύπτει από τη λύση του συστήματος εξισώσεων $\Sigma p[s] = 1$ για όλα τα $s=[n_1,...,n_{k-1},a_1,..., a_k]$.

Για μια γραμμή παραγωγής με k μηχανές οι οριακές πιθανότητες δίνονται από τον τύπο:

$$p[s] = \sum_{j=1}^{l} c_j \xi[s, X_{1j},..., X_{k-1,j}, Y_{1j},..., Y_{kj}]$$

Σημειώνεται ότι η εξίσωση αυτή ισχύει για όλες τις καταστάσεις και παίρνει τη μορφή των εσωτερικών εξισώσεων όταν:

$$\xi[(n_1,...,n_{k-1},a_1,...,a_k), X_{1j},..., X_{k-1,j}, Y_{1j},..., Y_{kj}] = X_{1j}^{n_1}...X_{k-1,j}^{n_{k-1}} Y_{i1}^{a_1}...Y_{kj}^{a_k}$$

Επίσης ισχύει :

$$u_j = \{X_{1j}, ..., X_{k-1,j}, Y_{1j}, ..., Y_{kj}\}$$

Έτσι,το διάνυσμα των πιθανοτήτων $\underline{p}$ δίνεται σαν:

$$\underline{p} = \sum_{j=1}^{l} c_j \xi[u_j]$$

όπου

$$\underline{\xi}[u_j] = \begin{pmatrix} \xi[s_1, u_j] \\ \xi[s_2, u_j] \\ \vdots \\ \xi[s_m, u_j] \end{pmatrix}$$

Κάποιες από τις οριακές πιθανότητες παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 2: Οριακές πιθανότητες για k = 3 [1]

$\xi[1,n_2,0,0,0] = X_1X_2^{n2}$, n_2 εσωτερικό
$\xi[1,n_2,0,0,1] = X_1X_2^{n2}Y_3$
$\xi[1,n_2,0,1,0] = X_1X_2^{n2}Y_2$
$\xi[1,n_2,0,1,1] = X_1X_2^{n2}Y_2Y_3$
$\xi[1,n_2,1,1,1] = X_1X_2^{n2}Y_1Y_3(1 - r_2 + p_2Y_2)/p_2$
$\xi[n_1,1,0,0,0] = X_1^{n1}X_2$,n_1 εσωτερικό
$\xi[n_1,1,0,0,1] = X_1^{n1}X_2Y_3$
$\xi[n_1,1,0,1,0] = 0$
$\xi[n_1,1,0,1,1] = X_1^{n1}X_2Y_2(1 - r_3 + p_3Y_3)/p_3$
$\xi[n_1,1,1,1,1] = X_1^{n1}X_2Y_1Y_2(1 - r_3 + p_3Y_3)/p_3$
$\Xi[1,1,0,0,0] = X_1X_2$,γωνιακές συνθήκες
$\Xi[1,1,0,0,1] = X_1X_2Y_3$
$\Xi[1,1,0,1,0] = 0$
$\Xi[1,1,0,1,1] = X_1X_2Y_2(1 - r_3 + p_3Y_3)/p_3$
$\Xi[1,1,1,1,0] = X_1X_2Y_1Y_2$

Αντίστοιχα για ένα ροϊκό μοντέλο (για υγρό) οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης δίνονται παρακάτω για μια γραμμή παραγωγής με 2 μηχανές και μια αποθήκη (x είναι το επίπεδο του υγρού στην αποθήκη).

Πίνακας 3: Πιθανότητες για ροϊκό μοντέλο 2 μηχανών [1]

$f(x,0,0) = [(p_1+p_2)/(r_1+r_2)]K_2e^{-\lambda x}$
$f(x,0,1) = K_2\ e^{-\lambda x}$
$f(x,1,0) = K_2\ e^{-\lambda x}$
$f(x,1,1) = [(r_1 + r_2)/(p_1 + p_2)]K_2\ e^{-\lambda x}$
$p[0,0,0] = 0$
$p[0,0,1] = [(p_1 + p_2)/r_1p_2]K_2$
$p[0,1,0] = 0$
$p[0,1,1] = K_2/p_2$
$p[N,0,0] = 0$
$p[N,0,1] = 0$
$p[N,1,0] = [(p_1 + p_2)/r_2p_1]\ K_2\ e^{-\lambda N}$
$p[N,1,1] = K_2\ e^{-\lambda N}/p_1$

Όπου η f είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, το λ προκύπτει από τη σχέση:

$$-\frac{d}{dx}f(x,0,1) = \lambda\, f(x,0,1)$$

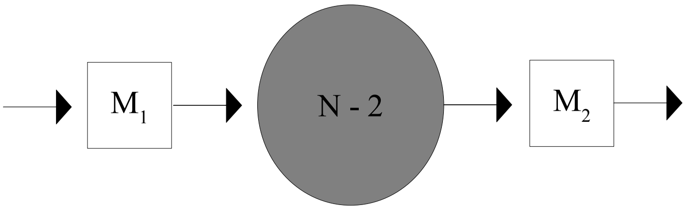
και το K_2 προκύπτει από το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων που θα πρέπει να είναι 1.

2. Στην εργασία [2] αναλύονται γραμμές παραγωγής δύο μηχανών με ενδιάμεση αποθήκη πεπερασμένης χωρητικότητας. Το χρονικό διάστημα από την είσοδο ενός κομματιού σε μια μηχανή μέχρι το πέρας της κατεργασίας του είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Cox δύο βαθμίδων (C_2). Συνεπώς η γραμμή παραγωγής ισοδυναμεί με ένα σύστημα αναμονής τύπου $C_2|C_2|1|N$.

Για την εκτίμηση των μέτρων απόδοσης της γραμμής αυτής υπολογίζονται οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος. Στην εργασία αυτή ευρίσκονται λύσεις κλειστής μορφής που περιλαμβάνουν βαθμωτές ποσότητες αντί πίνακες όπως είδαμε στην εργασία παραπάνω και σε άλλες εργασίες.

Η γραμμή παραγωγής μοιάζει με αυτή που μελετάται στη διπλωματική εργασία που παρουσιάζεται με βασικές όμως διαφορές που την καθιστούν πλήρως διαφορετική. Από αυτή την εργασία (όπως και από άλλες σε μικρότερο βαθμό) χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία για την ανάπτυξη της διπλωματικής εργασίας.

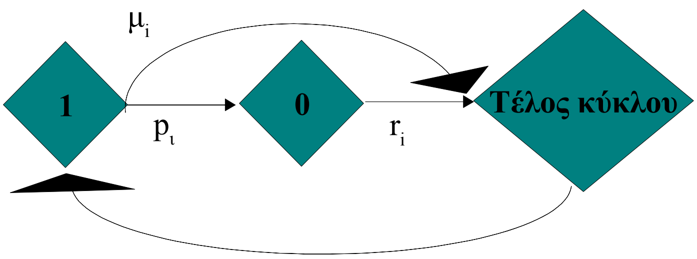
Για να επανέλθουμε, το σύστημα που μελετάται στην εργασία αυτή παρουσιάζεται σχηματικά ως εξής:



Σχήμα 2. Δύο μηχανές με ενδιάμεση αποθήκη χωρητικότητας N-2.

Στη γραμμή αυτή η μηχανή M_1 δεν αποστερείται ποτέ, αντίθετα μπορεί να είναι αποκλεισμένη αν η αποθήκη είναι γεμάτη. Η μηχανή M_2 μπορεί πάντα να δώσει τα κομμάτια που έχει επεξεργαστεί, δηλαδή δεν μένει ποτέ αποκλεισμένη, αλλά αντίθετα μπορεί να μένει αποστερημένη αν η αποθήκη συμβεί να είναι άδεια.

Η κατανομή Cox C_2 για τη μηχανή M_i (i = 1,2) παρουσιάζεται σχηματικά ως εξής:



Σχήμα 3. Η κατανομή Cox δύο βαθμίδων ή καταστάσεων.

Στην αρχή ενός κύκλου παραγωγής η μηχανή M_i είναι πάντα στην κατάσταση 1. Σε ένα απειροστικά μικρό χρονικό διάστημα dt της λειτουργίας σε αυτή την κατάσταση, η μηχανή περατώνει την κατεργασία του κομματιού με πιθανότητα μ_i dt, μεταβαίνει στην κατάσταση 0 με πιθανότητα $p_i$dt, ή συνεχίζει κατεργασία στην κατάσταση 1 με τη συμπληρωματική πιθανότητα.

Για να είναι η μηχανή στην κατάσταση 0 πρέπει οπωσδήποτε να κατεργάζεται ένα κομμάτι. Σε ένα απειροστικά μικρό χρονικό διάστημα dt της λειτουργίας σε αυτή την κατάσταση, η μηχανή περατώνει την κατεργασία του κομματιού με πιθανότητα r_i dt ή συνεχίζει κατεργασία στην κατάσταση 0 με τη συμπληρωματική πιθανότητα. Μετά το τέλος της κατεργασίας η μηχανή πηγαίνει στην κατάσταση 1 ακαριαία και είναι έτοιμη για τον επόμενο κύκλο παραγωγής.

Η μελέτη αυτή καταλήγει στο ότι οι πιθανότητες $P(n,a_1a_2)$ έχουν τη μορφή

$$P(n,a_1a_2) = \sum_{j=0}^{3} c_j X_j^n Y_{1j}^{a_1} Y_{2j}^{a_2}, 1 \le n \le N-1$$

όπου τα Y_{1j}, Y_{2j}, X_j υπολογίζονται από τις εξισώσεις Chapman – Kolmogorov για τις εσωτερικές πιθανότητες και τα c_j υπολογίζονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις για τις οριακές πιθανότητες και από το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων που είναι 1.

Αφού υπολογιστούν τα παραπάνω, υπολογίζουμε το ρυθμό παραγωγής του συστήματος και το μέσο αριθμό κομματιών στο σύστημα από τις εξής εξισώσεις:

$$TH = \sum_{j=1}^{3} c_j (Y_{1j}+1)(Y_{2j}\mu_2 + r_2)(\sum_{n=1}^{N-1} X_j^n) + P(N,11)\mu_2 + P(N,10)r_2$$

για το μέσο ρυθμό παραγωγής και

$$NS = \sum_{j=1}^{3} c_j (Y_{1j}+1)(Y_{2j}+1)(\sum_{n=1}^{N-1} nX_j^n) + N\left[P(N,11) + P(N,10)\right]$$

για το μέσο αριθμό κομματιών στο σύστημα.

3. Στο άρθρο [3] η κάθε μηχανή i έχει δύο πιθανές καταστάσεις a_i, 1 όταν η μηχανή είναι σε κατάσταση που μπορεί να λειτουργήσει και 0 όταν είναι υπό επισκευή. Όταν μια μηχανή είναι σε κατάσταση που μπορεί να λειτουργήσει, αν δεν έχει κομμάτι να επεξεργαστεί, τότε αυτή μένει αποστερημένη, ενώ αν δε μπορεί να δώσει το κομμάτι που έχει επεξεργαστεί, τότε μένει αποκλεισμένη. Στην μελέτη αυτή η μηχανή 1 δε γίνεται να μείνει αποστερημένη και η μηχανή 2 δε γίνεται να μείνει αποκλεισμένη. Σχηματικά η γραμμή παραγωγής αυτή είναι ίδια με την προηγούμενη, μόνο που εδώ δεν έχουμε κατανομή Cox (αναφέρεται ότι οι χρόνοι κατεργασίας είναι εκθετικές τυχαίες μεταβλητες).

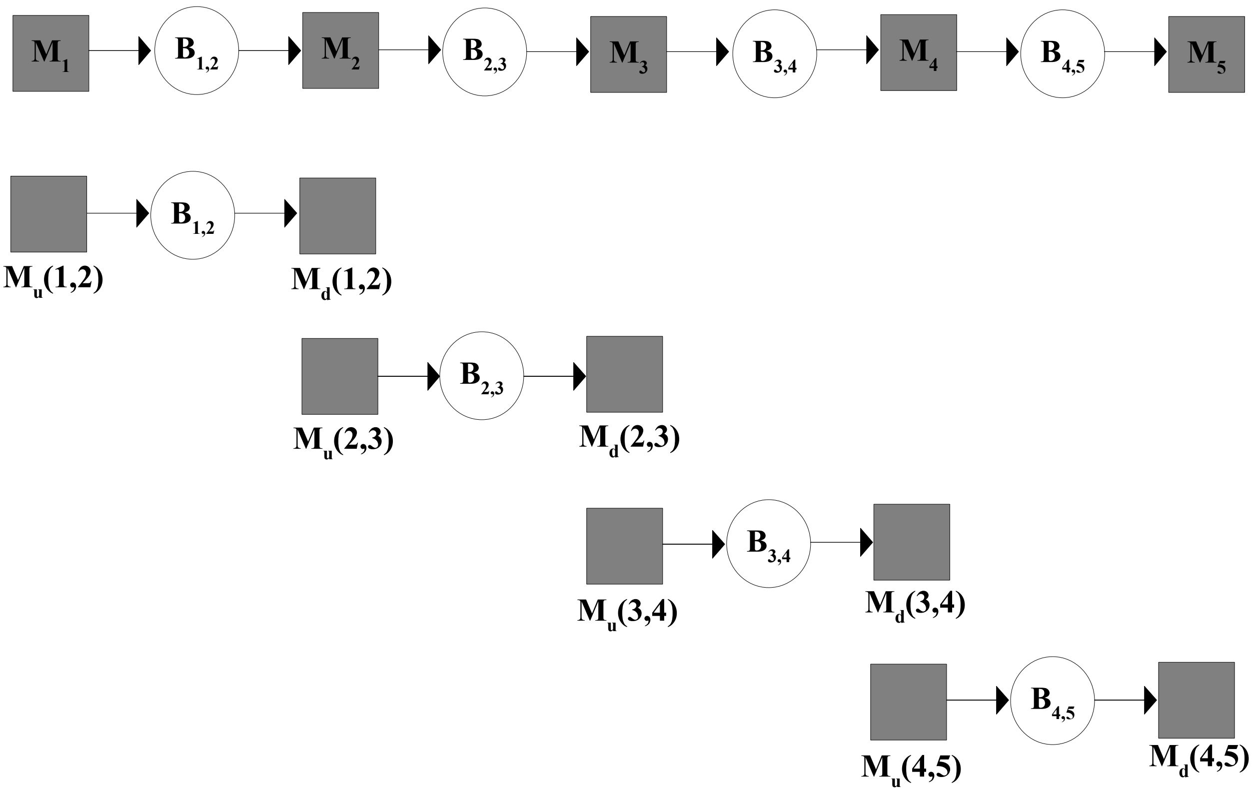
Εδώ οι λύσεις που βρίσκονται είναι της μορφής

$$p(n,a_1,a_2) = \sum_{j=1}^{4} c_j X_j^n Y_{1j}^{a_1} Y_{2j}^{a_2}, 1 \le n \le N-1$$

Στη μελέτη αυτή βρίσκονται τα c_1,X_1,Y_{11},Y_{21} και κατόπιν δίνονται οι εξισώσεις που πρέπει να λυθούν για να βρεθούν τα υπόλοιπα c_j,X_j,Y_{1j},Y_{2j} οι οποίες είναι κάποιες από τις εσωτερικές εξισώσεις, κάποιες από τις εξισώσεις που δίνουν πιθανότητες σε οριακές καταστάσεις και το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων που είναι 1.

4. Ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση μεγαλύτερων γραμμών παραγωγής είναι η μέθοδος αποσύνθεσης γραμμής παραγωγής [4].

Η μέθοδος αποσύνθεσης παρίσταται σχηματικά ως εξής (για μια γραμμή παραγωγής με 5 μηχανές και 4 ενδιάμεσες αποθήκες) :



Σχήμα 4. Σχηματική αναπαράσταση της μεθόδου αποσύνθεσης μεγάλων γραμμών σε υποσυστήματα δύο μηχανών.

Όταν θέλουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της αποσύνθεσης σε μια γραμμή παραγωγής K μηχανών δημιουργούμε K – 1 γραμμές παραγωγής που αποτελούνται καθεμία από δύο ισοδύναμες μηχανές και την αντίστοιχη αποθήκη της κανονικής γραμμής παραγωγής που είναι ανάμεσά τους. Η κάθε μηχανή $M_u(i,i+1)$ είναι η ισοδύναμη μηχανή με τη γραμμή παραγωγής πριν την αποθήκη $B_{i,i+1}$. Έτσι, για παράδειγμα, η μηχανή $M_u(1,2)$ είναι ουσιαστικά η μηχανή M_1, η μηχανή $M_u(2,3)$ είναι το τμήμα $M_1 – B_{1,2} – M_2$ κ.οκ. Αντίστοιχα κάθε μηχανή $M_d(i,i+1)$ είναι η ισοδύναμη μηχανή με τη γραμμή παραγωγής μετά την αποθήκη $B_{i,i+1}$.

Θεωρούμε ότι οι αποθήκες στα συστήματα 2 μηχανών μετά την εφαρμογή της μεθόδου αποσύνθεσης έχουν τα ίδια δεδομένα εισόδου και εξόδου με την κανονική γραμμή παραγωγής οπότε, μετά την απλοποίηση, έχουμε να μελετήσουμε K – 1 “μικρές” γραμμές παραγωγής, αντί μιας μεγάλης. Αφού λυθούν οι K – 1 γραμμές παραγωγής με την αντίστροφη ακριβώς μέθοδο κάνουμε σύνθεση της αρχικής γραμμής παραγωγής, η οποία βασίζεται στην αρχή διατήρησης της ύλης, και έτσι λύνουμε, με αρκετά καλή προσέγγιση, ένα πολύπλοκο πρόβλημα με ένα πιο απλό τρόπο.

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση, αφού έχουν παρουσιασθεί οι πλέον χαρακτηριστικές ερευνητικές προσπάθειες για την ανάλυση γραμμών παραγωγής από εκείνες που βασίζονται σε ακριβή μοντέλα Markov μικρών διαστάσεων.

2. Περιγραφή του συστήματος

Το σύστημα που αναλύεται σε αυτή την εργασία παρουσιάζεται σχηματικά ως εξής:

Στο σύστημα αυτό συνολικής χωρητικότητας N (χωρητικότητα αποθήκης N – 2 + δύο θέσεις στις μηχανές) οι μηχανές μπορούν να βρίσκονται σε δύο καταστάσεις:

Η μηχανή M_1 μπορεί είτε να είναι αποστερημένη (κατάσταση 0) είτε να είναι σε κατάσταση λειτουργίας (κατάσταση 1).

Τα χαρακτηριστικά λειτουργίας της M_1 είναι οι αριθμοί μ_1, p_1, r_1 καθένας από τους οποίους εκφράζει τα εξής:

$\mu_1 \delta$ = πιθανότητα η M_1 να παράγει 1 κομμάτι και να μη μένει αποστερημένη σε δ μονάδες χρόνου

$p_1 \delta$ = πιθανότητα η M_1 να παράγει 1 κομμάτι και να μένει αποστερημένη σε δ μονάδες χρόνου

$r_1 \delta$ = πιθανότητα η M_1 να τροφοδοτηθεί σε δ μονάδες χρόνου αν είναι αποστερημένη

Η συνολική πιθανότητα να παράγει η M_1 είναι $(\mu_1 + p_1)\delta$.

Η μηχανή M_2 μπορεί είτε να είναι αποκλεισμένη, δηλαδή να μην μπορεί να δώσει το κομμάτι που έχει επεξεργαστεί (κατάσταση 0), είτε να βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας (κατάσταση 1).

Τα χαρακτηριστικά λειτουργίας της M_2 είναι οι αριθμοί μ_2, p_2, r_2 καθένας από τους οποίους εκφράζει τα εξής:

$\mu_2 \delta$ = πιθανότητα η M_2 να παράγει 1 κομμάτι και να μη μένει αποκλεισμένη σε δ μονάδες χρόνου

$p_2 \delta$ = πιθανότητα η M_2 να παράγει 1 κομμάτι και να μένει αποκλεισμένη σε δ μονάδες χρόνου.

$r_2 \delta$ = πιθανότητα η M_2 να ξεμπλοκάρει σε δ μονάδες χρόνου αν είναι αποκλεισμένη.

Η συνολική πιθανότητα να παράγει η M_2 είναι $(\mu_2 + p_2)\delta$.

Το σύστημα μας περιγράφεται από συνολικά 16 εσωτερικές και οριακές εξισώσεις πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης της μορφής Chapman – Kolmogorov η γενική μορφή των οποίων είναι η εξής:

P(i) x (ρυθμός μετάβασης έξω από την i) = Σ_j P(j) x (ρυθμός μετάβασης από την κατάσταση j στην i)

Οι καταστάσεις i θα συμβολίζονται ως (n,a_1a_2), όπου n είναι τα κομμάτια στο σύστημά, η κατάσταση της M_1 είναι a_1 και η κατάσταση της M_2 είναι a_2 (όπου $a_1 = 0$ ή 1 και $a_2 = 0$ ή 1).

Οι εσωτερικές εξισώσεις του συστήματος είναι οι

(1) : $P(n,11)(\mu_1 + p_1 + \mu_2 + p_2) = P(n,01)r_1 + P(n,10)r_2 + P(n-1,11)\mu_1 + P(n+1,11)\mu_2$

(2) : $P(n,01)(r_1 + \mu_2 + p_2) = P(n,00)r_2 + P(n-1,11)p_1 + P(n+1,01)\mu_2$

(3) : $P(n,10)(\mu_1 + p_1 + r_2) = P(n,00)r_1 + P(n+1,11)p_2 + P(n-1,10)\mu_1$

(4) : $P(n,00)(r_1 + r_2) = P(n-1,10)p_1 + P(n+1,01)p_2$

Για παράδειγμα στην εξ. (1), στο αριστερό μέλος έχουμε το ρυθμό παραγωγής της M_1 (μ_1+p_1) και της M_2 (μ_2+p_2). Το άθροισμά τους είναι ο ρυθμός μετάβασης έξω από την κατάσταση (n,11). Στο δεξί μέλος έχουμε ρυθμούς μετάβασης πρός την κατάσταση (n,11). Για παράδειγμα, ο όρος $P(n,01)r_1$ είναι ο ρυθμός με τον οποίο τροφοδοτείται η αποστερημένη μηχανή M_1 $(a_1=0)$ και αλλάζει κατάσταση $(a_1=1)$, οπότε η νέα κατάσταση του συστήματος είναι η (n,11).

Οι εξισώσεις για την οριακή κατάσταση όπου n = 0 κομμάτια στο σύστημα είναι οι

(5) : $P(0,11)(\mu_1 + p_1) = P(0,01)r_1 + P(0,10)r_2 + P(1,11)\mu_2$

(6) : $P(0,01)r_1 = P(0,00)r_2 + P(1,01)\mu_2$

(7) : $P(0,10)(\mu_1 + p_1 + r_2) = P(0,00)r_1 + P(1,11)p_2$

(8) : $P(0,00)(r_1 + r_2) = P(1,01)p_2$

Για παράδειγμα, η εξ. (5) είναι η αντίστοιχη της (1) μόνο που, επειδή δεν υπάρχει απόθεμα η μηχανή M_2 δεν παράγει. Επομένως από την εξ. (5) λείπει από το αριστερό μέλος ο όρος (μ_2+p_2). Από το δεξί μέλος λείπει ο όρος $P(n-1,11)\mu_1$ γιατί για n=0 δεν υπάρχει κατάσταση n-1= -1.

Για την οριακή κατάσταση που έχουμε n = N κομμάτια στο σύστημα η M_2 δεν μπορεί να είναι αποκλεισμένη καθώς τότε ο μεγαλύτερος αριθμός κομματιών που μπορούν να υπάρχουν στο σύστημα ειναι N-1.Οι εξισώσεις είναι οι

(9) : $P(N,11)(\mu_2 + p_2) = P(N,01)r_1 + P(N-1,11)\mu_1$

(10) : $P(N,01)(r_1 + \mu_2 + p_2) = P(N,00)r_2 + P(N-1,11)p_1$

(11) : $P(N,10) = 0$

(12) : $P(N,00) = 0$

Για παράδειγμα, η εξ. (9) είναι αντίστοιχη της (1) μόνο που, επειδή το σύστημα είναι γεμάτο, η μηχανή M_1 δεν παράγει γιατί δεν μπορεί να εισέλθει άλλο κομμάτι στο σύστημα. Επομένως από το αριστερό μέλος λείπει ο όρος (μ_1+p_1). Από το δεξί μέλος λείπει ο όρος $P(n,10)r_2$ διότι η M_2, όπως αναφέρθηκε, δεν μπορεί να μπλοκάρει και ο όρος $P(n+1,11)\mu_2$ διότι δεν υπάρχει κατάσταση $n+1 = N+1$ (χωρητικότητα συστήματος = N).

Τέλος, οι εξισώσεις για την οριακή κατάσταση που υπάρχουν $n = N-1$ κομμάτια στο σύστημα είναι οι

(13) : $P(N\text{-}1,11)(\mu_1 + p_1 + \mu_2 + p_2) = P(N\text{-}1,01)r_1 + P(N\text{-}1,10)r_2 + P(N\text{-}2,11)\mu_1 + P(N,11)\mu_2$

(14) : $P(N\text{-}1,01)(r_1 + \mu_2 + p_2) = P(N\text{-}1,00)r_2 + P(N\text{-}2,11)p_1 + P(N,01)\mu_2$

(15) : $P(N\text{-}1,10)r_2 = P(N\text{-}1,00)r_1 + P(N\text{-}2,10)\mu_1 + P(N,11)p_2$

(16) : $P(N\text{-}1,00)(r_1 + r_2) = P(N\text{-}2,10)p_1 + P(N,01)p_2$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μεγαλύτερες ομοιότητες με τις εσωτερικές εξισώσεις. Για παράδειγμα η εξ. (15) είναι αντίστοιχη της (3) μόνο που η M_1 δεν μπορεί να παράγει διότι τότε το σύστημα θα οδηγηθεί στην κατάσταση (N,10), κατάσταση που, όπως εξηγήθηκε παραπάνω, δε μπορεί να υπάρξει (N κομμάτια στο σύστημα και μπλοκαρισμένη η M_2). Επομένως από την εξ. (15) λείπει από το αριστερό μέλος ο όρος (μ_1+p_1). Το δεξί μέλος είναι πλήρως αντίστοιχο με αυτό της εξ. (3).

3. Επίλυση του μοντέλου

Υποθέτουμε ότι οι πιθανότητες είναι συναρτήσεις χωριζομένων μεταβλητων ως προς n, a_1 και a_2 και δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής:

$$P(n,a_1a_2) = \sum_j c_j X_j^n Y_{1j}^{a_1} Y_{2j}^{a_2} \qquad (17)$$

3.1 Έυρεση όλων των X_j, Y_{1j} και Y_{2j}

Παίρνουμε ένα j και θέτουμε στην παραπάνω εξίσωση $c = c_j$, $X = X_j$, $Y_1 = Y_{1j}$ και $Y_2 = Y_{2j}$

Τώρα είναι:

$$P(n,a_1a_2) = cX^n Y_1^{a_1} Y_2^{a_2}$$

Αντικαθιστώ αυτή τη σχέση στις εσωτερικές εξισώσεις (1)-(4) και θα έχουμε:

$$(1) \Rightarrow \; cX^nY_1Y_2(\mu_1+p_1+\mu_2+p_2) = cX^nY_1^0Y_2r_1 + cX^nY_1Y_2^0r_2 + cX^{(n-1)}Y_1Y_2\mu_1 + cX^{(n+1)}Y_1Y_2\mu_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; XY_1Y_2(\mu_1+p_1+\mu_2+p_2) = XY_2r_1 + XY_1r_2 + Y_1Y_2\mu_1 + X^2Y_1Y_2\mu_2 \qquad (18)$$

$$(2) \Rightarrow \; cX^nY_1^0Y_2(r_1+\mu_2+p_2) = cX^nY_1^0Y_2^0r_2 + cX^{(n-1)}Y_1Y_2p_1 + cX^{(n+1)}Y_1^0Y_2\mu_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; XY_2(r_1+\mu_2+p_2) = Xr_2 + Y_1Y_2p_1 + X^2Y_2\mu_2 \qquad (19)$$

$$(3) \Rightarrow \; cX^nY_1Y_2^0(\mu_1+p_1+r_2) = cX^nY_1^0Y_2^0r_1 + cX^{(n+1)}Y_1Y_2p_2 + cX^{(n-1)}Y_1Y_2^0\mu_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; XY_1(\mu_1+p_1+r_2) = Xr_1 + Y_1\mu_1 + X^2Y_1Y_2p_2 \qquad (20)$$

$$(4) \Rightarrow \; cX^nY_1^0Y_2^0(r_1+r_2) = cX^{(n-1)}Y_1Y_2^0p_1 + cX^{(n+1)}Y_1^0Y_2p_2 \Rightarrow \; X(r_1+r_2) = Y_1p_1 + X^2Y_2p_2 \qquad (21)$$

Τώρα έχουμε ουσιαστικά 4 εξισώσεις [(18),(19),(20) και (21)] με 3 αγνώστους (X, Y_1 και Y_2). Θα αποδειχθεί ότι η εξίσωση (18) προκύπτει από τις (19), (20) και (21). Αναλύοντας το γινόμενο $XY_1Y_2(\mu_1+p_1+\mu_2+p_2)$ παίρνουμε

$$XY_1Y_2(\mu_1+p_1+\mu_2+p_2) = XY_1Y_2(\mu_1+p_1) + XY_1Y_2(\mu_2+p_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; XY_1Y_2(\mu_1+p_1+\mu_2+p_2) = XY_1(\mu_1+p_1)Y_2 + XY_2(\mu_2+p_2)Y_1 \qquad (22)$$

Αναλύοντας το γινόμενο $XY_2(r_1+\mu_2+p_2)$ παίρνουμε

$$XY_2(r_1+\mu_2+p_2) = XY_2(\mu_2+p_2) + XY_2r_1 \Rightarrow \; XY_2(\mu_2+p_2) = XY_2(r_1+\mu_2+p_2) - XY_2r_1 \Rightarrow \; \text{από } (19)$$

$$\Rightarrow \; XY_2(\mu_2+p_2) = Xr_2 + Y_1Y_2p_1 + X^2Y_2\mu_2 - XY_2r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; XY_2(\mu_2+p_2)Y_1 = XY_1r_2 + Y_1^2Y_2p_1 + X^2Y_1Y_2\mu_2 - XY_1Y_2r_1 \qquad (23)$$

Αναλύοντας το γινόμενο $XY_1(\mu_1+p_1+r_2)$ παίρνουμε

$$XY_1(\mu_1+p_1+r_2) = XY_1(\mu_1+p_1) + XY_1r_2 \Rightarrow \; XY_1(\mu_1+p_1) = XY_1(\mu_1+p_1+r_2) - XY_1r_2 \Rightarrow \; \text{από } (20)$$

$$\Rightarrow \; XY_1(\mu_1+p_1) = Xr_1 + Y_1\mu_1 + X^2Y_1Y_2p_2 - XY_1r_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; XY_1(\mu_1+p_1)Y_2 = XY_2r_1 + Y_1Y_2\mu_1 + X^2Y_1Y_2^2p_2 - XY_1Y_2r_2 \qquad (24)$$

Η (22) λόγω των (23) και (24) δίνει

$$XY_1Y_2(\mu_1+p_1+\mu_2+p_2) = XY_2r_1 + Y_1Y_2\mu_1 + X^2Y_1Y_2^2p_2 - XY_1Y_2r_2 + XY_1r_2 + Y_1^2Y_2p_1 + X^2Y_1Y_2\mu_2 - XY_1Y_2r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; XY_1Y_2(\mu_1+p_1+\mu_2+p_2) = (XY_2r_1 + XY_1r_2 + Y_1Y_2\mu_1 + X^2Y_1Y_2\mu_2) + (X^2Y_1Y_2^2p_2 - XY_1Y_2r_2 + Y_1^2Y_2p_1 - XY_1Y_2r_1) \qquad (25)$$

Όμως

$$(21) \Rightarrow X(r_1 + r_2) = Y_1p_1 + X^2Y_2p_2 \Rightarrow Xr_1 + Xr_2 = Y_1p_1 + X^2Y_2p_2 \Rightarrow XY_1Y_2r_1 + XY_1Y_2r_2 = Y_1^2Y_2p_1 + X^2Y_1Y_2^2p_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^2Y_1Y_2^2p_2 - XY_1Y_2r_2 + Y_1^2Y_2p_1 - XY_1Y_2r_1 = 0$$

Η (25) αν λάβουμε υπόψη μας την παραπάνω σχέση δίνει:

$$XY_1Y_2(\mu_1 + p_1 + \mu_2 + p_2) = XY_2r_1 + XY_1r_2 + Y_1Y_2\mu_1 + X^2Y_1Y_2\mu_2$$

Που είναι η εξ. (18). Άρα αποδείξαμε ότι η εξίσωση (18) προκύπτει από τις εξισώσεις (19), (20) και (21). Άρα για τον υπολογισμό των X, Y_1 και Y_2 θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (19), (20) και (21).

Για να λυθεί πιο εύκολα το σύστημα εξισώσεων, θέτουμε στις εξ. (19),(20) και (21) όπου $Y_1=T_1X$ και όπου $Y_2=T_2/X$. Οι εξισώσεις μας τώρα γίνονται:

$$(19) \Rightarrow X\frac{T_2}{X}(r_1 + \mu_2 + p_2) = Xr_2 + T_1X\frac{T_2}{X}p_1 + X^2\frac{T_2}{X}\mu_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2(r_1 + \mu_2 + p_2) = T_1T_2p_1 + XT_2\mu_2 + Xr_2 \quad (26)$$

$$(20) \Rightarrow XT_1X(\mu_1 + p_1 + r_2) = Xr_1 + T_1X\mu_1 + X^2T_1X\frac{T_2}{X}p_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XT_1(\mu_1 + p_1 + r_2) = T_1\mu_1 + r_1 + XT_1T_2p_2 \quad (27)$$

$$(21) \Rightarrow X(r_1 + r_2) = T_1Xp_1 + X^2\frac{T_2}{X}p_2 \Rightarrow r_1 + r_2 = T_1p_1 + T_2p_2 \quad (28)$$

Από την εξ. (28) προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις:

$$T_2 = \frac{r_1 + r_2 - T_1p_1}{p_2} \quad (29)$$

$$T_1 = \frac{r_1 + r_2 - T_2p_2}{p_1} \quad (30)$$

Αντικαθιστώντας την (29) στην (27) προκύπτει:

$$X = \frac{T_1\mu_1 + r_1}{T_1(\mu_1 + p_1 - r_1 + T_1p_1)} \quad (31)$$

Ενώ η (26) με τις (29) και (30) δίνουν

$$X = \frac{T_2(\mu_2 + p_2 - r_2 + T_2p_2)}{T_2\mu_2 + r_2} = \frac{(r_1 - T_1p_1)^2 + (r_1 - T_1p_1)(\mu_2 + p_2 + r_2) + r_2(\mu_2 + p_2)}{(r_1 - T_1p_1)\mu_2 + r_2(\mu_2 + p_2)}$$

Εξισώνοντας την τελευταία με την (31) προκύπτει μια εξίσωση ως προς T_1. Μια λύση της είναι η (βλ. [2])

$$T_{10} = \frac{r_1}{p_1} \quad (32)$$

Από (28) και (32) είναι

$$r_1 + r_2 = \frac{r_1}{p_1}p_1 + T_{20}p_2 \Rightarrow \; T_{20} = \frac{r_2}{p_2} \quad (33)$$

Η (27) με τις (32) και (33) δίνουν

$$X_0\frac{r_1}{p_1}(\mu_1 + p_1 + r_2) = \frac{r_1}{p_1}\mu_1 + r_1 + X_0\frac{r_1}{p_1}\frac{r_2}{p_2}p_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; X_0\frac{r_1}{p_1}(\mu_1 + p_1 + r_2 - r_2) = \frac{r_1}{p_1}\mu_1 + r_1 \Rightarrow \; X_0(\frac{r_1}{p_1}\mu_1 + r_1) = \frac{r_1}{p_1}\mu_1 + r_1 \Rightarrow \; X_0 = 1 \quad (34)$$

Άρα είναι:

$$Y_{10} = T_{10}X_0 \Rightarrow \; Y_{10} = T_{10} \Rightarrow \; Y_{10} = \frac{r_1}{p_1} \quad (35)$$

και

$$Y_{20} = \frac{T_{20}}{X_0} \Rightarrow \; Y_{20} = T_{20} \Rightarrow \; Y_{20} = \frac{r_2}{p_2} \quad (36)$$

Αυτή είναι μια λύση του συστήματος των (19), (20) και (21)

Με άλγεβρα προκύπτει (βλ. [2]) ότι οι υπόλοιπες λύσεις του συστήματος ικανοποιούν την κυβική εξίσωση:

$$T_1^3 + sT_1^2 + tT_1 + u = 0$$

όπου

$$s = \frac{a - 2r_1}{p_1} \quad , \quad t = \frac{r_1^2 - ar_1 - b}{p_1^2} \quad , \quad u = \frac{c}{p_1^2}$$

και

$a = \mu_1 + p_1 – (\mu_2+p_2+r_2)$, $b = \mu_1(p_2+r_2) + p_1(\mu_2+p_2+r_2) – r_2(\mu_2+p_2)$, $c = r_1\mu_2 + r_2(\mu_2+p_2)$

Οι λύσεις T_{1j} της κυβικής εξίσωσης είναι:

$$T_{1j} = 2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3} + (j-1)\frac{2\pi}{3}\right] - \frac{s}{3}, j = 1,2,3 \quad (37)$$

όπου

$$\left\{\begin{array}{lll} A = t - \dfrac{s^2}{3}, & C = \arccos\left[\dfrac{-B}{2\sqrt{\left(-A/3\right)^3}}\right], & B = \dfrac{2s^3 - 9st + 27u}{27} \\ s = \dfrac{a - 2r_1}{p_1}, & t = \dfrac{r_1^2 - ar_1 - b}{p_1^2}, & u = \dfrac{c}{p_1^2} \\ a = \mu_1 + p_1 - (\mu_2 + p_2 + r_2), & b = \mu_1(p_2 + r_2) + p_1(\mu_2 + p_2 + r_2) - r_2(\mu_2 + p_2), & c = r_1\mu_2 + r_2(\mu_2 + p_2) \end{array}\right\}$$

Όσες σχέσεις περιέχονται στην παραπάνω αγκύλη αποτελούν τις παραμέτρους (Π).

Από την εξ. (29) και την (37) έχουμε:

$$T_{2j} = \frac{r_1 + r_2 - p_1\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3} + (j-1)\frac{2\pi}{3}\right] - \frac{s}{3}\right]}{p_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{2j} = \frac{r_1 + r_2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3} + (j-1)\frac{2\pi}{3}\right] - \frac{s}{3}\right], j = 1,2,3 \quad (38)$$

Στην εξ. (38) ισχύουν οι παράμετροι (Π).

Από τις εξ. (31) και (37) έχουμε:

$$X_j = \frac{\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3}+(j-1)\frac{2\pi}{3}\right]-\frac{s}{3}\right]\mu_1 + r_1}{\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3}+(j-1)\frac{2\pi}{3}\right]-\frac{s}{3}\right]\left[\mu_1 + p_1 - r_1 + p_1\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3}+(j-1)\frac{2\pi}{3}\right]-\frac{s}{3}\right]\right]}, j = 1,2,3$$

Η παραπάνω είναι η εξ. (39).

Όμως έχουμε θέσει $Y_1 = T_1X$ άρα από (31) είναι:

$$Y_{1j} = T_{1j}\frac{T_{1j}\mu_1 + r_1}{T_{1j}(\mu_1 + p_1 - r_1 + T_{1j}p_1)} \Rightarrow Y_{1j} = \frac{T_{1j}\mu_1 + r_1}{\mu_1 + p_1 - r_1 + T_{1j}p_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{1j} = \frac{\mu_1\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3}+(j-1)\frac{2\pi}{3}\right]-\frac{s}{3}\right]+r_1}{\mu_1 + p_1 - r_1 + p_1\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3}+(j-1)\frac{2\pi}{3}\right]-\frac{s}{3}\right]}, j = 1,2,3 \quad (40)$$

Επίσης είναι $Y_2 = T_2 / X$ άρα $Y_{2j} = T_{2j} / X_j$ άρα (από (38) και (39)) έχουμε :

$$Y_{2j} = \frac{\left[\frac{r_1 + r_2}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3}+(j-1)\frac{2\pi}{3}\right]-\frac{s}{3}\right]\right]\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3}+(j-1)\frac{2\pi}{3}\right]-\frac{s}{3}\right]\left[\mu_1 + p_1 - r_1 + p_1\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3}+(j-1)\frac{2\pi}{3}\right]-\frac{s}{3}\right]\right]}{\left[2\sqrt{-\frac{A}{3}}\cos\left[\frac{C}{3}+(j-1)\frac{2\pi}{3}\right]-\frac{s}{3}\right]\mu_1 + r_1}$$

, $j = 1,2,3$. (41)

Στις εξισώσεις (39), (40) και (41) ισχύουν οι παράμετροι (Π).

Επομένως, όλα τα X_j, Y_{1j} και Y_{2j} που χρειάζονται δίνονται από τις εξισώσεις (34), (35), (36) και (39), (40), (41). Τώρα πρέπει να βρεθούν οι σταθερές c_j. Οι σταθερές αυτές θα υπολογιστούν στην επόμενη παράγραφο (3.2).

3.2 Υπολογισμός των σταθερών c_j

Για τον υπολογισμό των σταθερών c_j θα χρειαστούμε τρεις εξισώσεις διότι $c_0=0$ (βλ.[2]). Η πρώτη εξίσωση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η :

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(n,a_1a_2)=1$$

που ισχύει προφανώς διότι το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των πιθανών καταστάσεων πρέπει είναι μονάδα. Αναπτύσσοντας το παραπάνω άθροισμα έχουμε:

$$\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(0,a_1a_2)+\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(N-1,a_1a_2)+\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(N,a_1a_2)+\sum_{n=1}^{N-2}\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(n,a_1a_2)=1 \quad (42)$$

Θέλουμε να πάρουμε και από τις οριακές πιθανότητες λύσεις της μορφής των εσωτερικών (βλ. Παράγραφο 3.1) ώστε (εφ' όσον βρέθηκαν όλα τα X_j, Y_{1j} και Y_{2j}) να καταλήξουμε σε σχέσεις στις οποίες οι μόνοι άγνωστοι θα είναι τα c_j, j=1,2,3.

Είναι:

$$\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(0,a_1a_2)=P(0,00)+P(0,01)+P(0,10)+P(0,11) \quad (43)$$

Υπολογίζουμε την P(0,00) από την εξ. (8):

$$P(0,00)(r_1+r_2)=P(1,01)p_2 \Rightarrow P(0,00)=\frac{p_2}{r_1+r_2}P(1,01) \quad (44)$$

Η P(1,01) είναι εσωτερική εξίσωση.

Από εξ. (6) έχουμε: $P(0,01)r_1 = P(0,00)r_2 + P(1,01)\mu_2$. Η P(0,00) έχει λύση της μορφής των εσωτερικών από την εξ. (44). Άρα έχουμε:

$$(6)\Rightarrow P(0,01)r_1=\frac{p_2r_2}{r_1+r_2}P(1,01)+\mu_2P(1,01)\Rightarrow P(0,01)=\frac{p_2r_2+\mu_2(r_1+r_2)}{r_1(r_1+r_2)}P(1,01) \quad (45)$$

Από (7) έχουμε: $P(0,10)(\mu_1+p_1+r_2) = P(0,00)r_1 + P(1,11)p_2$. Παίρνουμε και πάλι τη λύση της P(0,00) από την εξ. (44) ενώ η P(1,11) είναι εσωτερική οπότε η P(0,10) έχει λύση της μορφής των εσωτερικών με τον εξής τρόπο:

$$(7)\Rightarrow P(0,10)=\frac{r_1}{\mu_1+p_1+r_2}\frac{p_2}{r_1+r_2}P(1,01)+\frac{p_2}{\mu_1+p_1+r_2}P(1,11)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P(0,10)=\frac{r_1p_2}{(\mu_1+p_1+r_2)(r_1+r_2)}P(1,01)+\frac{p_2}{\mu_1+p_1+r_2}P(1,11)\ \ (46)$$

Από (5) έχουμε: $P(0,11)(\mu_1+p_1)=P(0,01)r_1+P(0,10)r_2+P(1,11)\mu_2$. Για τις P(0,01) και P(0,10) παίρνουμε λύσεις από τις εξ. (45) και (46) αντίστοιχα, ενώ η P(1,11) είναι εσωτερική. Οπότε έχουμε

$$P(0,11)(\mu_1+p_1)=r_1\frac{r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)}{r_1(r_1+r_2)}P(1,01)+r_2\frac{r_1p_2}{(\mu_1+p_1+r_2)(r_1+r_2)}P(1,01)+r_2\frac{p_2}{\mu_1+p_1+r_2}P(1,11)+\mu_2P(1,11)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P(0,11)=\left(\frac{r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)}{(\mu_1+p_1)(r_1+r_2)}+\frac{r_1r_2p_2}{(r_1+r_2)(\mu_1+p_1+r_2)(\mu_1+p_1)}\right)P(1,01)+\left(\frac{r_2p_2}{(\mu_1+p_1+r_2)(\mu_1+p_1)}+\frac{\mu_2}{\mu_1+p_1}\right)P(1,11)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P(0,11)=\frac{[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)](\mu_1+p_1+r_2)+r_1r_2p_2}{(r_1+r_2)(\mu_1+p_1)(\mu_1+p_1+r_2)}P(1,01)+\frac{r_2p_2+\mu_2(\mu_1+p_1+r_2)}{(\mu_1+p_1+r_2)(\mu_1+p_1)}P(1,11)\ (47)$$

Άρα η εξ. (43) λόγω των (44), (45), (46) και (47) γίνεται

$$\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}P(0,a_1a_2)=\frac{p_2}{r_1+r_2}P(1,01)+\frac{r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)}{r_1(r_1+r_2)}P(1,01)+\frac{r_1p_2}{(r_1+r_2)(\mu_1+p_1+r_2)}P(1,01)+$$

$$+\frac{p_2}{\mu_1+p_1+r_2}P(1,11)+\frac{[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)](\mu_1+p_1+r_2)+r_1r_2p_2}{(r_1+r_2)(\mu_1+p_1)(\mu_1+p_1+r_2)}P(1,01)+\frac{r_2p_2+\mu_2(\mu_1+p_1+r_2)}{(\mu_1+p_1+r_2)(\mu_1+p_1)}P(1,11)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}P(0,a_1a_2)=\left(\frac{p_2}{r_1+r_2}+\frac{r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)}{r_1(r_1+r_2)}+\frac{r_1p_2}{(r_1+r_2)(\mu_1+p_1+r_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)](\mu_1+p_1+r_2)+r_1r_2p_2}{(r_1+r_2)(\mu_1+p_1)(\mu_1+p_1+r_2)}\right)P(1,01)+\left(\frac{p_2}{\mu_1+p_1+r_2}+\frac{r_2p_2+\mu_2(\mu_1+p_1+r_2)}{(\mu_1+p_1+r_2)(\mu_1+p_1)}\right)P(1,11)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}P(0,a_1a_2)=\frac{p_2(\mu_1+p_1)+r_2p_2+\mu_2(\mu_1+p_1+r_2)}{(\mu_1+p_1+r_2)(\mu_1+p_1)}P(1,11)+$$

$$+\frac{p_2r_1(\mu_1+p_1)(\mu_1+p_1+r_2)+[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)](\mu_1+p_1)(\mu_1+p_1+r_2)+r_1^2p_2(\mu_1+p_1)+}{r_1(r_1+r_2)(\mu_1+p_1)(\mu_1+p_1+r_2)}$$

$$\frac{+[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)]r_1(\mu_1+p_1+r_2)+r_1^2r_2p_2}{}P(1,01)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(0,a_1a_2) = \frac{p_2(\mu_1+p_1+r_2)+\mu_2(\mu_1+p_1+r_2)}{(\mu_1+p_1)(\mu_1+p_1+r_2)}P(1,11)+$$

$$+\frac{(p_2+\mu_2)(r_1+r_2)(\mu_1+p_1+r_2)(\mu_1+p_1)+r_1(\mu_1+p_1+r_2)[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)]+r_1^2p_2(\mu_1+p_1+r_2)}{r_1(r_1+r_2)(\mu_1+p_1)(\mu_1+p_1+r_2)}P(1,01)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(0,a_1a_2) = \frac{\mu_2+p_2}{\mu_1+p_1}P(1,11)+\frac{(\mu_2+p_2)(r_1+r_2)(\mu_1+p_1)+r_1r_2p_2+r_1\mu_2(r_1+r_2)+r_1^2p_2}{r_1(r_1+r_2)(\mu_1+p_1)}P(1,01)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(0,a_1a_2) = \frac{\mu_2+p_2}{\mu_1+p_1}P(1,11)+\frac{(\mu_2+p_2)(r_1+r_2)(\mu_1+p_1)+r_1\mu_2(r_1+r_2)+r_1p_2(r_1+r_2)}{r_1(r_1+r_2)(\mu_1+p_1)}P(1,01)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(0,a_1a_2) = \frac{\mu_2+p_2}{\mu_1+p_1}P(1,11)+\frac{(\mu_2+p_2)(\mu_1+p_1)+r_1(\mu_2+p_2)}{r_1(\mu_1+p_1)}P(1,01)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(0,a_1a_2) = \frac{\mu_2+p_2}{\mu_1+p_1}P(1,11)+\frac{(\mu_2+p_2)(\mu_1+p_1+r_1)}{r_1(\mu_1+p_1)}P(1,01)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(0,a_1a_2) = \frac{\mu_2+p_2}{\mu_1+p_1}\sum_{j=1}^{3} c_jX_jY_{1j}Y_{2j}+\frac{(\mu_2+p_2)(\mu_1+p_1+r_1)}{r_1(\mu_1+p_1)}\sum_{j=1}^{3} c_jX_jY_{2j} \quad (43)$$

Ο επόμενος όρος που θα υπολογιστεί είναι:

$$\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(N,a_1a_2) = P(N,00)+P(N,01)+P(N,10)+P(N,11) \quad (48)$$

Η $P(N,00) = 0$ (βλ. Παράγραφος 2, εξ.(11))

Η $P(N,10) = 0$ (βλ. Παράγραφος 2, εξ. (12))

Είναι:

$$(10) \Rightarrow \; P(N,01)(r_1 + \mu_2 + p_2) = P(N,00)r_2 + P(N-1,11)p_1 \Rightarrow \; P(N,01) = \frac{p_1}{r_1 + \mu_2 + p_2} P(N-1,11)$$

Η κατάσταση στην οποία έχουμε N–1 κομμάτια στο σύστημα και δουλεύουν και οι δύο μηχανές μπορεί να θεωρηθεί εσωτερική και όχι οριακή διότι χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των εσωτερικών εξισώσεων για τις πιθανότητες όπου n = N–2 (εξ. (1)-(4) για n = N–2 όπου n+1 = N–1). Άρα:

$$P(N-1,11) = \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \quad (49)$$

Άρα:

$$P(N,01) = \frac{p_1}{r_1 + \mu_2 + p_2} \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \quad (50)$$

Η εξ. (9) λόγω των (49) και (50) γίνεται:

$$P(N,11)(\mu_2 + p_2) = \frac{p_1 r_1}{r_1 + \mu_2 + p_2} \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} + \mu_1 \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; P(N,11)(\mu_2 + p_2) = \frac{p_1 r_1 + \mu_1 (r_1 + \mu_2 + p_2)}{r_1 + \mu_2 + p_2} \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; P(N,11) = \frac{p_1 r_1 + \mu_1 (r_1 + \mu_2 + p_2)}{(\mu_2 + p_2)(r_1 + \mu_2 + p_2)} \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \quad (51)$$

Άρα η (48) λόγω των (11), (12), (50) και (51) γίνεται:

$$\sum_{a_1=0}^{1} \sum_{a_2=0}^{1} P(N, a_1 a_2) = \left(\frac{p_1}{r_1 + \mu_2 + p_2} + \frac{p_1 r_1 + \mu_1 (r_1 + \mu_2 + p_2)}{(\mu_2 + p_2)(r_1 + \mu_2 + p_2)} \right) \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \sum_{a_1=0}^{1} \sum_{a_2=0}^{1} P(N, a_1 a_2) = \frac{p_1(\mu_2 + p_2) + p_1 r_1 + \mu_1 (r_1 + \mu_2 + p_2)}{(\mu_2 + p_2)(r_1 + \mu_2 + p_2)} \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(N,a_1a_2) = \frac{p_1(r_1+\mu_2+p_2)+\mu_1(r_1+\mu_2+p_2)}{(\mu_2+p_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(N,a_1a_2) = \frac{\mu_1+p_1}{\mu_2+p_2}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \quad (48)$$

Για τον επόμενο όρο που πρέπει να υπολογιστεί έχουμε:

$$\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(N-1,a_1a_2) = P(N-1,00)+P(N-1,01)+P(N-1,10)+P(N-1,11) \quad (52)$$

Από την εξ. (16) έχουμε:

$$P(N-1,00)(r_1+r_2) = P(N-2,10)p_1 + P(N,01)p_2$$

Η $P(N–2,10)$ είναι εσωτερική, ενώ η $P(N,01)$ έχει λύσεις της μορφής των εσωτερικών εξισώσεων από την εξ. (50). Άρα :

$$P(N-1,00)(r_1+r_2) = p_1\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-2)} Y_{1j} + p_2\frac{p_1}{r_1+\mu_2+p_2}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N-1,00) = \frac{p_1}{r_1+r_2}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-2)} Y_{1j} + \frac{p_1p_2}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \quad (53)$$

Από την εξ. (15) έχουμε:

$$P(N-1,10)r_2 = P(N-1,00)r_1 + P(N-2,10)\mu_1 + P(N,11)p_2$$

Η $P(N–1,00)$ έχει λύσεις της μορφής των εσωτερικών από την εξ. (53), η $P(N–2,10)$ είναι εσωτερική, ενώ η $P(N,11)$ έχει λύσεις της μορφής των εσωτερικών από την εξ. (51). Άρα:

$$P(N-1,10) = \frac{r_1p_1}{r_2(r_1+r_2)}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-2)} Y_{1j} + \frac{r_1p_1p_2}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} + \frac{\mu_1}{r_2}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-2)} Y_{1j} +$$

$$+\frac{p_2\mu_1(r_1+\mu_2+p_2)+p_1p_2r_1}{r_2(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j} \Rightarrow P(N-1,10)=\left[\frac{r_1p_1}{r_2(r_1+r_2)}+\frac{\mu_1}{r_2}\right]\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+$$

$$+\left[\frac{r_1p_1p_2}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}+\frac{p_2\mu_1(r_1+\mu_2+p_2)+p_1p_2r_1}{r_2(r_1+\mu_2+p_2)}\right]\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N-1,10)=\frac{r_1p_1+\mu_1(r_1+r_2)}{r_2(r_1+r_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+\frac{r_1p_1p_2+p_2\mu_1(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)+p_1p_2r_1(r_1+r_2)}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j} \quad (54)$$

Είναι:

$$(14)\Rightarrow P(N-1,01)(r_1+\mu_2+p_2)=P(N-1,00)r_2+P(N-2,11)p_1+P(N,01)\mu_2$$

Η P(N–1,00) έχει λύσεις της μορφής των εσωτερικών από την εξ. (53), η P(N–2,11) είναι εσωτερική, ενώ η P(N,01) έχει λύσεις της μορφής των εσωτερικών από την εξ. (50). Άρα:

$$P(N-1,01)(r_1+\mu_2+p_2)=\frac{r_2p_1}{r_1+r_2}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+\frac{p_1p_2r_2}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}+p_1\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}Y_{2j}+$$

$$+\frac{\mu_2p_1}{r_1+\mu_2+p_2}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j} \Rightarrow P(N-1,01)(r_1+\mu_2+p_2)=\frac{p_1p_2r_2+\mu_2p_1(r_1+r_2)}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}+$$

$$+\frac{r_2p_1}{r_1+r_2}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+p_1\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}Y_{2j} \Rightarrow P(N-1,01)=\frac{p_1p_2r_2+\mu_2p_1(r_1+r_2)}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}+$$

$$+\frac{r_2p_1}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+\frac{p_1}{(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}Y_{2j} \quad (55)$$

Άρα η (52) λόγω των εξ. (53), (54), (55) και (49) γίνεται:

$$\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}P(N-1,a_1a_2)=\frac{p_1}{r_1+r_2}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+\frac{p_1p_2}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}+$$

$$+\frac{p_1p_2r_2+\mu_2p_1(r_1+r_2)}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}+\frac{r_2p_1}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+\frac{p_1}{(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}Y_{2j}+$$

$$+\frac{r_1p_1+\mu_1(r_1+r_2)}{r_2(r_1+r_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+\frac{r_1p_1p_2(\mu_2+p_2)+p_2\mu_1(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)+p_1p_2r_1(r_1+r_2)}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)(\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}\Rightarrow\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}P(N-1,a_1a_2)=\left[\frac{p_1}{r_1+r_2}+\frac{r_2p_1}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}+\frac{r_1p_1+\mu_1(r_1+r_2)}{r_2(r_1+r_2)}\right]\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+$$

$$+\frac{p_1}{(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}Y_{2j}+\left[\frac{p_1p_2}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}+\frac{p_1p_2r_2+\mu_2p_1(r_1+r_2)}{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{r_1p_1p_2(\mu_2+p_2)+p_2\mu_1(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)+p_1p_2r_1(r_1+r_2)}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)(\mu_2+p_2)}+1\right]\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}P(N-1,a_1a_2)=\frac{p_1r_2(r_1+\mu_2+p_2)+r_2^2p_1+r_1p_1(r_1+\mu_2+p_2)+\mu_1(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+$$

$$+\frac{p_1}{(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}Y_{2j}+\frac{r_2p_1p_2(\mu_2+p_2)(r_1+\mu_2+p_2)+(r_1+\mu_2+p_2)[r_1p_1p_2(\mu_2+p_2)+p_2\mu_1(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)+p_1p_2r_1(r_1+r_2)]+r_2^2p_1p_2(\mu_2+p_2)+r_2\mu_2p_1(r_1+r_2)(\mu_2+p_2)+r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2(\mu_2+p_2)}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2(\mu_2+p_2)}$$

$$\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}\Rightarrow\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}P(N-1,a_1a_2)=\frac{(r_1+\mu_2+p_2)[p_1r_2+r_1p_1+\mu_1(r_1+r_2)]+r_2^2p_1}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+$$

$$+\frac{p_1}{(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}Y_{2j}+\frac{(r_1+\mu_2+p_2)[r_2p_1p_2(\mu_2+p_2)+r_1p_1p_2(\mu_2+p_2)+p_2\mu_1(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)+p_1p_2r_1(r_1+r_2)+r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)(\mu_2+p_2)]+r_2p_1(\mu_2+p_2)[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)]}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2(\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}P(N-1,a_1a_2)=\frac{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)(p_1+\mu_1)+r_2^2p_1}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+\frac{p_1}{(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}Y_{2j}+$$

$$+\frac{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)[p_1p_2(\mu_2+p_2)+p_2\mu_1(r_1+\mu_2+p_2)+p_1p_2r_1+r_2(r_1+\mu_2+p_2)(\mu_2+p_2)]+r_2p_1(\mu_2+p_2)[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)]}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2(\mu_2+p_2)}$$

$$\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} \Rightarrow \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(N-1,a_1a_2) = \frac{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2[p_2(\mu_1+p_1)+r_2(\mu_2+p_2)]+}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2(\mu_2+p_2)}$$

$$\frac{+r_2p_1(\mu_2+p_2)[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)]}{}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} + \frac{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)(p_1+\mu_1)+r_2^2p_1}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-2)} Y_{1j} +$$

$$+\frac{p_1}{(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-2)} Y_{1j} Y_{2j} \quad (52)$$

Είναι:

$$\sum_{n=1}^{N-2}\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(n,a_1a_2) = \sum_{n=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} c_j X_j^n Y_{1j}^{a_1} Y_{2j}^{a_2} = \sum_{n=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{3}[c_j X_j^n Y_{1j}^0 Y_{2j}^0 + c_j X_j^n Y_{1j}^0 Y_{2j}^1 + c_j X_j^n Y_{1j}^1 Y_{2j}^0$$

$$+c_j X_j^n Y_{1j}^1 Y_{2j}^1] = \sum_{n=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{3}[c_j X_j^n (1+Y_{2j}+Y_{1j}+Y_{1j}Y_{2j})] = \sum_{n=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{3}[c_j X_j^n (1+Y_{1j})(1+Y_{2j})] \quad (56)$$

Άρα η (42) λόγω των (43), (48), (52) και (56) γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1} P(n,a_1a_2) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{3}[c_j X_j^n (1+Y_{1j})(1+Y_{2j})] + \frac{\mu_2+p_2}{\mu_1+p_1}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j Y_{1j} Y_{2j} +$$

$$+\frac{(\mu_2+p_2)(\mu_1+p_1+r_1)}{r_1(\mu_1+p_1)}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j Y_{2j} + \frac{\mu_1+p_1}{\mu_2+p_2}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} +$$

$$+\frac{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2[p_2(\mu_1+p_1)+r_2(\mu_2+p_2)]+r_2p_1(\mu_2+p_2)[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)]}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2(\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} +$$

$$+\frac{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)(p_1+\mu_1)+r_2^2p_1}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-2)} Y_{1j} + \frac{p_1}{r_1+\mu_2+p_2}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-2)} Y_{1j} Y_{2j} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{3}[c_j X_j^n (1+Y_{1j})(1+Y_{2j})] + \frac{\mu_2+p_2}{\mu_1+p_1}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j Y_{1j} Y_{2j} + \frac{(\mu_2+p_2)(\mu_1+p_1+r_1)}{r_1(\mu_1+p_1)}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j Y_{2j} +$$

$$+\left[\frac{\mu_1+p_1}{\mu_2+p_2}+\frac{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2[p_2(\mu_1+p_1)+r_2(\mu_2+p_2)]+r_2p_1(\mu_2+p_2)[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)]}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2(\mu_2+p_2)}\right]$$

$$\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-1)}Y_{1j}Y_{2j}+\frac{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)(p_1+\mu_1)+r_2^2p_1}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}+\frac{p_1}{r_1+\mu_2+p_2}\sum_{j=1}^{3}c_jX_j^{(N-2)}Y_{1j}Y_{2j}=1$$

Θέτουμε:

$$K_1=\frac{\mu_2+p_2}{\mu_1+p_1}$$

$$K_2=\frac{(\mu_2+p_2)(\mu_1+p_1+r_1)}{r_1(\mu_1+p_1)}$$

$$K_3=\frac{\mu_1+p_1}{\mu_2+p_2}+\frac{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2[p_2(\mu_1+p_1)+r_2(\mu_2+p_2)]+r_2p_1(\mu_2+p_2)[r_2p_2+\mu_2(r_1+r_2)]}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)^2(\mu_2+p_2)}$$

$$K_4=\frac{(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)(p_1+\mu_1)+r_2^2p_1}{r_2(r_1+r_2)(r_1+\mu_2+p_2)}$$

$$K_5=\frac{p_1}{r_1+\mu_2+p_2}$$

Οπότε η (42) γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{N-2}[c_1X_1^n(1+Y_{11})(1+Y_{21})+c_2X_2^n(1+Y_{12})(1+Y_{22})+c_3X_3^n(1+Y_{13})(1+Y_{23})]+K_1(c_1X_1Y_{11}Y_{21}+c_2X_2Y_{12}Y_{22}+$$

$$+c_3X_3Y_{13}Y_{23})+K_2(c_1X_1Y_{21}+c_2X_2Y_{22}+c_3X_3Y_{23})+K_3(c_1X_1^{(N-1)}Y_{11}Y_{21}+c_2X_2^{(N-1)}Y_{12}Y_{22}+c_3X_3^{(N-1)}Y_{13}Y_{23})+$$

$$+K_4(c_1X_1^{(N-2)}Y_{11}+c_2X_2^{(N-2)}Y_{12}+c_3X_3^{(N-2)}Y_{13})+K_5(c_1X_1^{(N-2)}Y_{11}Y_{21}+c_2X_2^{(N-2)}Y_{12}Y_{22}+c_3X_3^{(N-2)}Y_{13}Y_{23})=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1\left[(1+Y_{11})(1+Y_{21})\sum_{n=1}^{N-2}X_1^n+K_1X_1Y_{11}Y_{21}+K_2X_1Y_{21}+K_3X_1^{(N-1)}Y_{11}Y_{21}+K_4X_1^{(N-2)}Y_{11}+K_5X_1^{(N-2)}Y_{11}Y_{21}\right]+$$

$$+c_2\left[(1+Y_{12})(1+Y_{22})\sum_{n=1}^{N-2}X_2^n+K_1X_2Y_{12}Y_{22}+K_2X_2Y_{22}+K_3X_2^{(N-1)}Y_{12}Y_{22}+K_4X_2^{(N-2)}Y_{12}+K_5X_2^{(N-2)}Y_{12}Y_{22}\right]+$$

$$+c_3\left[(1+Y_{13})(1+Y_{23})\sum_{n=1}^{N-2}X_3^n+K_1X_3Y_{13}Y_{23}+K_2X_3Y_{23}+K_3X_3^{(N-1)}Y_{13}Y_{23}+K_4X_3^{(N-2)}Y_{13}+K_5X_3^{(N-2)}Y_{13}Y_{23}\right]=1$$

Αυτή είναι η 1η εξίσωση που θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τα c_1, c_2 και c_3.

Υπ' όψιν έχουμε ότι:

Για $\quad X_j \neq 1: \sum_{n=1}^{N-2} X_j^n = X_j \dfrac{1 - X_j^{(N-2)}}{1 - X_j}$

Για $\quad X_j = 1: \sum_{n=1}^{N-2} X_j^n = N - 2$

Για την οριακή κατάσταση όπου n = 0 έχουμε 4 εξισώσεις [(5) – (8)].
Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξ. (5) και (7) έχουμε:

$$P(0,11)(\mu_1 + p_1) + P(0,10)(\mu_1 + p_1 + r_2) = P(0,01)r_1 + P(0,10)r_2 + P(1,11)\mu_2 + P(0,00)r_1 + P(1,11)p_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [P(0,11) + P(0,10)](\mu_1 + p_1) = P(0,01)r_1 + P(0,00)r_1 + P(1,11)(\mu_2 + p_2)$$

Και λόγω της (6) η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$[P(0,11) + P(0,10)](\mu_1 + p_1) = P(0,00)r_2 + P(1,01)\mu_2 + P(0,00)r_1 + P(1,11)(\mu_2 + p_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [P(0,11) + P(0,10)](\mu_1 + p_1) = P(0,00)(r_1 + r_2) + P(1,01)\mu_2 + P(1,11)(\mu_2 + p_2)$$

Λόγω της εξ. (8) η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$[P(0,11) + P(0,10)](\mu_1 + p_1) = P(1,01)p_2 + P(1,01)\mu_2 + P(1,11)(\mu_2 + p_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [P(0,11) + P(0,10)](\mu_1 + p_1) = [P(1,01) + P(1,11)](\mu_2 + p_2)$$

Άρα οι P(0,11) και P(0,10) πρέπει να έχουν τη μορφή εσωτερικής εξίσωσης.
Από την εξ. (8) έχουμε:

$$P(0,00) = \frac{p_2}{r_1 + r_2} P(1,01)$$

Άρα από την εξ. (7) λόγω των παραπάνω παίρνουμε:

$$P(0,10)(\mu_1 + p_1 + r_2) = P(0,00)r_1 + P(1,11)p_2 \Rightarrow P(0,10)(\mu_1 + p_1 + r_2) = \frac{p_2 r_1}{r_1 + r_2}P(1,01) + p_2 P(1,11) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mu_1 + p_1 + r_2)\sum_{j=1}^{3} c_j Y_{1j} = \frac{p_2 r_1}{r_1 + r_2}\sum_{j=1}^{3} c_j X_j Y_{2j} + p_2 \sum_{j=1}^{3} c_j X_j Y_{1j} Y_{2j} \Rightarrow (\mu_1 + p_1 + r_2)\left(c_1 Y_{11} + c_2 Y_{12} + c_3 Y_{13}\right) -$$

$$- \frac{p_2 r_1}{r_1 + r_2}\left(c_1 X_1 Y_{21} + c_2 X_2 Y_{22} + c_3 X_3 Y_{23}\right) - p_2\left(c_1 X_1 Y_{11} Y_{21} + c_2 X_2 Y_{12} Y_{22} + c_3 X_3 Y_{13} Y_{23}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1\left[(\mu_1 + p_1 + r_2)Y_{11} - \frac{p_2 r_1}{r_1 + r_2}X_1 Y_{21} - p_2 X_1 Y_{11} Y_{21}\right] + c_2\left[(\mu_1 + p_1 + r_2)Y_{12} - \frac{p_2 r_1}{r_1 + r_2}X_2 Y_{22} - p_2 X_2 Y_{12} Y_{22}\right] +$$

$$+ c_3\left[(\mu_1 + p_1 + r_2)Y_{13} - \frac{p_2 r_1}{r_1 + r_2}X_3 Y_{23} - p_2 X_3 Y_{13} Y_{23}\right] = 0 \quad (57)$$

Αυτή είναι η $2^η$ εξίσωση που θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τα c_1, c_2 και c_3.

Πλέον θέλουμε άλλη μια εξίσωση για τον υπολογισμό των σταθερών. Αυτή θα προκύψει από τις εξίσώσεις που έχουν απομείνει (επίπεδα n=N και n=N–1) ως εξής:

Από την εξ. (16) παίρνουμε:

$$P(N-1,00) = \frac{p_1}{r_1 + r_2}P(N-2,10) + \frac{p_2}{r_1 + r_2}P(N,01)$$

Άρα η εξ. (14) γίνεται:

$$P(N-1,01)(r_1 + \mu_2 + p_2) = \frac{p_1 r_2}{r_1 + r_2}P(N-2,10) + \frac{p_2 r_2}{r_1 + r_2}P(N,01) + p_1 P(N-2,11) + \mu_2 (P(N,01) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N-1,01)(r_1 + \mu_2 + p_2) = \frac{p_2 r_2 + \mu_2 (r_1 + r_2)}{r_1 + r_2}P(N,01) + \frac{p_1 r_2}{r_1 + r_2}P(N-2,10) + p_1 P(N-2,11) \quad (58)$$

Από την εξ. (10) παίρνουμε:

$$P(N,01) = \frac{p_1}{r_1 + \mu_2 + p_2} P(N-1,11)$$

Άρα, επειδή P(N–1,01), P(N–1,11) εσωτερικές (εξηγήθηκε προηγουμένως) και επειδή P(N–2,10) και P(N–2,11) εσωτερικές (n = N–2), θα έχουμε:

$$P(N-1,01)(r_1 + \mu_2 + p_2) = \frac{p_2 r_2 + \mu_2(r_1 + r_2)}{r_1 + r_2} \frac{p_1}{r_1 + \mu_2 + p_2} P(N-1,11) + \frac{p_1 r_2}{r_1 + r_2} P(N-2,10) + p_1 P(N-2,11) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r_1 + \mu_2 + p_2)\sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{2j} = \frac{p_1 p_2 r_2 + p_1 \mu_2 (r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)(r_1 + \mu_2 + p_2)} \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-1)} Y_{1j} Y_{2j} + \frac{p_1 r_2}{r_1 + r_2} \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-2)} Y_{1j} +$$

$$+ p_1 \sum_{j=1}^{3} c_j X_j^{(N-2)} Y_{1j} Y_{2j} \Rightarrow (r_1 + \mu_2 + p_2)\left(c_1 X_1^{(N-1)} Y_{21} + c_2 X_2^{(N-1)} Y_{22} + c_3 X_3^{(N-1)} Y_{23} \right) -$$

$$- \frac{p_1 p_2 r_2 + p_1 \mu_2 (r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)(r_1 + \mu_2 + p_2)} \left(c_1 X_1^{(N-1)} Y_{11} Y_{21} + c_2 X_2^{(N-1)} Y_{12} Y_{22} + c_3 X_3^{(N-1)} Y_{13} Y_{23} \right) -$$

$$- \frac{p_1 r_2}{r_1 + r_2} \left(c_1 X_1^{(N-2)} Y_{11} + c_2 X_2^{(N-2)} Y_{12} + c_3 X_3^{(N-2)} Y_{13} \right) - p_1 \left(c_1 X_1^{(N-2)} Y_{11} Y_{21} + c_2 X_2^{(N-2)} Y_{12} Y_{22} + c_3 X_3^{(N-2)} Y_{13} Y_{23} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 \left[(r_1 + \mu_2 + p_2) X_1^{(N-1)} Y_{21} - \frac{p_1 p_2 r_2 + p_1 \mu_2 (r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)(r_1 + \mu_2 + p_2)} X_1^{(N-1)} Y_{11} Y_{21} - \frac{p_1 r_2}{r_1 + r_2} X_1^{(N-2)} Y_{11} - p_1 X_1^{(N-2)} Y_{11} Y_{21} \right] +$$

$$+ c_2 \left[(r_1 + \mu_2 + p_2) X_2^{(N-1)} Y_{22} - \frac{p_1 p_2 r_2 + p_1 \mu_2 (r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)(r_1 + \mu_2 + p_2)} X_2^{(N-1)} Y_{12} Y_{22} - \frac{p_1 r_2}{r_1 + r_2} X_2^{(N-2)} Y_{12} - p_1 X_2^{(N-2)} Y_{12} Y_{22} \right] +$$

$$+ c_3 \left[(r_1 + \mu_2 + p_2) X_3^{(N-1)} Y_{23} - \frac{p_1 p_2 r_2 + p_1 \mu_2 (r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)(r_1 + \mu_2 + p_2)} X_3^{(N-1)} Y_{13} Y_{23} - \frac{p_1 r_2}{r_1 + r_2} X_3^{(N-2)} Y_{13} - p_1 X_3^{(N-2)} Y_{13} Y_{23} \right] = 0$$

και αυτή είναι η 3^{η} εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση των c_1, c_2 και c_3.

3.3 Υπολογισμός μεταβλητών απόδοσης του συστήματος

Για τη λύση των εξισώσεων που παρουσιάστηκαν στις παραγράφους 3.1 και 3.2 αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος στη C (παράρτημα 1) ο οποίος :

(1) δέχεται σαν είσοδο τη χωρητικότητα του συστήματος N και τα χαρακτηριστικά λειτουργίας των μηχανών (μ_1, p_1, r_1, μ_2, p_2, r_2),

(2) υπολογίζει τις ποσότητες X_j, Y_{1j} και Y_{2j} για j=0,1,2,3 από τις εξισώσεις της παραγράφου (3.1),

(3) υπολογίζει τις σταθερές c_j για j=1,2,3 (c_0=0) από τις εξισώσεις της παραγράφου (3.2),

(4) υπολογίζει όλες τις πιθανότητες $P(n,a_1a_2)$ από την εξίσωση (17) και τις αποθηκεύει σε ένα πίνακα $PR(i,a_1,a_2)$.

(5) από τον πίνακα αυτό υπολογίζει το μέσο ρυθμό παραγωγής (TH) και το μέσο αριθμό κομματιών στο σύστημα ($\overline{N}$) με βάση τις σχέσεις :

$$TH = \sum_{n=1}^{N} \sum_{a_1=0}^{1} (\mu_2 + p_2) P(n, a_1 1)$$

και

$$\overline{N} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{a_1=0}^{1} \sum_{a_2=0}^{1} n P(n, a_1 a_2)$$

Ακολουθεί παρουσίαση και σχολιασμός των αριθμητικών αποτελεσμάτων που δίνει ο αλγόριθμος.

4. Αριθμητικά αποτελέσματα

Για τον έλεγχο του αναλυτικού μοντέλου αναπτύχθηκε και ένας αλγόριθμος προσομοίωσης για την ίδια γραμμή παραγωγής. Ο αλγόριθμος της προσομοίωσης δέχεται επίσης σαν είσοδο τις παραμέτρους μ_1, p_1, r_1, μ_2, p_2 και r_2 και τη χωρητικότητα του συστήματος N, καθώς και το πλήθος των γεγονότων που θα εκτελούνται από το πρόγραμμα και δίνει σαν αποτελέσματα το μέσο ρυθμό παραγωγής (TH) και το μέσο αριθμό κομματιών στο σύστημα ($\overline{N}$).

Μετά από σύγκριση των αποτελεσμάτων που πάρθηκαν από τα δύο προγράμματα μπορεί να θεωρηθεί ότι η απόκλιση που υπάρχει ανάμεσα στις 2 μεθόδους είναι πολύ μικρή, ειδικά για το μέσο ρυθμό παραγωγής. Ο τρόπος που θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα είναι ο εξής:

Θεωρούμε ένα σύστημα με χωρητικότητα N=10 και παράμετρους λειτουργίας $(\mu_1,p_1,r_1,\mu_2,p_2,r_2) = (1, 0.1, 1.1, 0.9, 0.2, 1)$. Σε κάθε πίνακα και γράφημα που θα παρουσιάζεται θα κρατάμε σταθερές τις τιμές αυτές και θα αλλάζει μια και μόνο εκ των μ_1, p_1, r_1, μ_2, p_2 και r_2 και για κάθε έναν από τους συνδυασμούς που θα προκύψουν παίρνουμε αποτελέσματα από τον αλγόριθμο του αναλυτικού μοντέλου και από τον αλγόριθμο της προσομοίωσης. Έτσι θα φτιάξουμε γραφήματα για το πως μεταβάλλονται τα TH και $\overline{N}$ με κάθε ένα από τα μ_1, p_1, r_1, μ_2, p_2 και r_2.

Στην πρώτη περίπτωση κρατάμε σταθερά τα p_1, r_1, μ_2, p_2 και r_2 και τρέχουμε τους δύο αλγόριθμους για διάφορες τιμές του μ_1. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι τα εξής:

	Αλγόριθμος αναλυτικού μοντέλου		Αλγόριθμος προσομοίωσης	
	$\overline{N}$	**TH**	**$\overline{N}$**	**TH**
μ_1=0.5	1.321941	0.550238	1.305688	0.548867
μ_1=1	6.169386	0.894137	5.825474	0.868826
μ_1=1.5	9.128444	0.980288	8.273672	0.913565
μ_1=2	10.174838	1.012247	8.950982	0.916207

Πίνακας 4.1. Αποτελέσματα από τους 2 αλγόριθμους για διάφορες τιμές του μ_1

Στη δεύτερη περίπτωση κρατάμε σταθερά τα μ_1, r_1, μ_2, p_2 και r_2 και τρέχουμε τους δύο αλγόριθμους για διάφορες τιμές του p_1. Τα απότελέσματα που πήραμε είναι τα εξής:

	Αλγόριθμος αναλυτικού μοντέλου		Αλγόριθμος προσομοίωσης	
	$\overline{N}$	**TH**	**$\overline{N}$**	**TH**
p_1=0.001	7.610595	0.908023	5.713460	0.865694
p_1=0.01	6.041479	0.889608	5.734055	0.865901
p_1=0.1	6.169386	0.894137	5.825474	0.868826
p_1=1	6.934698	0.920583	6.411959	0.882531

Πίνακας 4.2. Αποτελέσματα από τους 2 αλγόριθμους για διάφορες τιμές του p_1

Στην επόμενη περίπτωση κρατάμε σταθερά τα μ_1, p_1, μ_2, p_2 και r_2 και τρέχουμε τους δύο αλγόριθμους για διάφορες τιμές του r_1. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι τα εξής:

	Αλγόριθμος αναλυτικού μοντέλου		Αλγόριθμος προσομοίωσης	
	$\overline{\mathbf{N}}$	**TH**	$\overline{\mathbf{N}}$	**TH**
r_1=0.011	0.437354	0.109335	0.424967	0.108417
r_1=0.11	2.605969	0.564101	2.514372	0.557436
r_1=1.1	6.169386	0.894137	5.825474	0.868826
r_1=11	7.058013	0.924538	6.494568	0.887203

Πίνακας 4.3. Αποτελέσματα από τους 2 αλγόριθμους για διάφορες τιμές του r_1

Στην επόμενη περίπτωση κρατάμε σταθερά τα μ_1, p_1, r_1, p_2 και r_2 και τρέχουμε τους δύο αλγόριθμους για διάφορες τιμές του μ_2. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι τα εξής:

	Αλγόριθμος αναλυτικού μοντέλου		Αλγόριθμος προσομοίωσης	
	$\overline{\mathbf{N}}$	**TH**	$\overline{\mathbf{N}}$	**TH**
μ_2=0.4	11.330399	0.574348	8.953793	0.500178
μ_2=0.9	6.169386	0.894137	5.825474	0.868826
μ_2=1.4	2.525922	0.996434	2.472444	0.989973
μ_2=1.9	1.317219	1.007663	1.301542	1.004564

Πίνακας 4.4. Αποτελέσματα από τους 2 αλγόριθμους για διάφορες τιμές του μ_2

Στην επόμενη περίπτωση κρατάμε σταθερά τα μ_1, p_1, r_1, μ_2 και r_2 και τρέχουμε τους δύο αλγόριθμους για διάφορες τιμές του p_2. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι τα εξής:

	Αλγόριθμος αναλυτικού μοντέλου		Αλγόριθμος προσομοίωσης	
	$\overline{\mathbf{N}}$	**TH**	$\overline{\mathbf{N}}$	**TH**
p_2=0.002	6.191530	0.859575	6.131610	0.858103
p_2=0.02	6.191494	0.863369	6.100530	0.859184
p_2=0.2	6.169386	0.894137	5.825474	0.868826
p_2=2	5.836009	0.984058	4.831176	0.899298

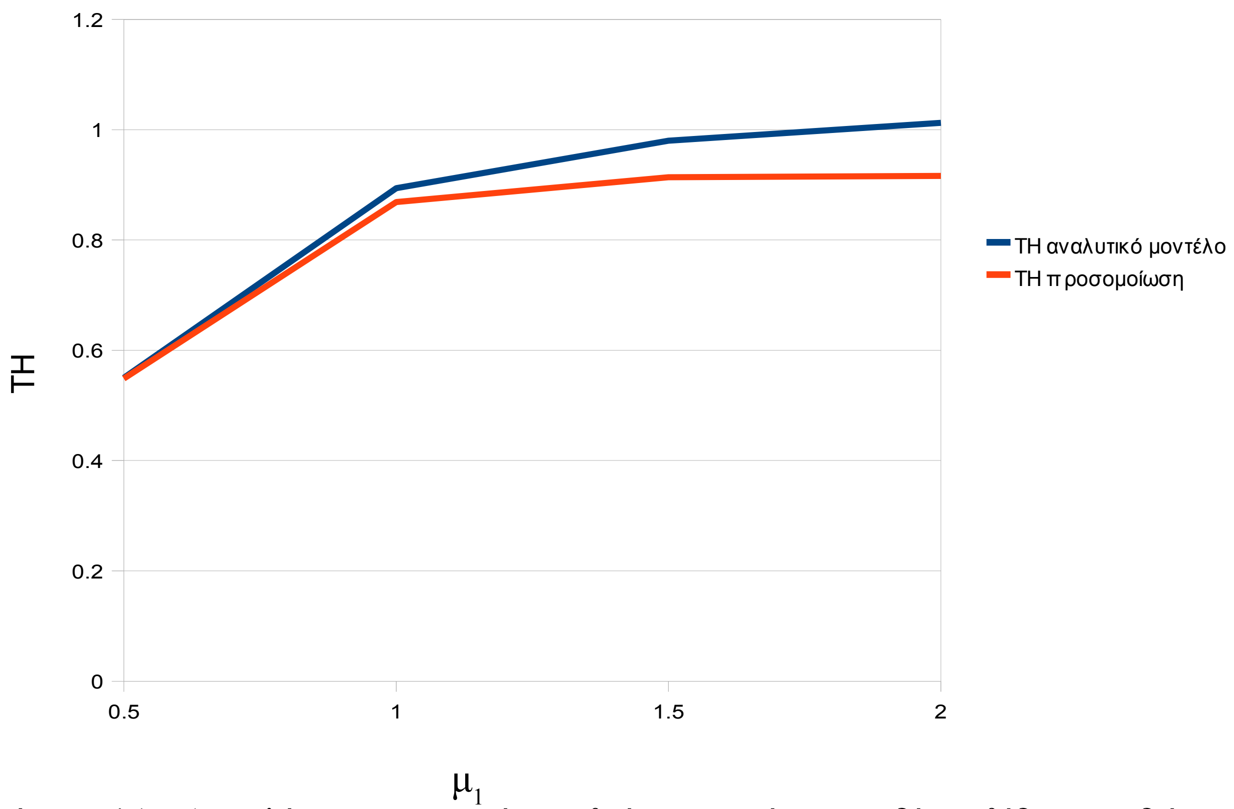
Πίνακας 4.5. Αποτελέσματα από τους 2 αλγόριθμους για διάφορες τιμές του p_2

Στην τελευταία περίπτωση κρατάμε σταθερά τα μ_1, p_1, r_1, μ_2 και p_2 και τρέχουμε τους δύο αλγόριθμους για διάφορες τιμές του r_2. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι τα εξής:

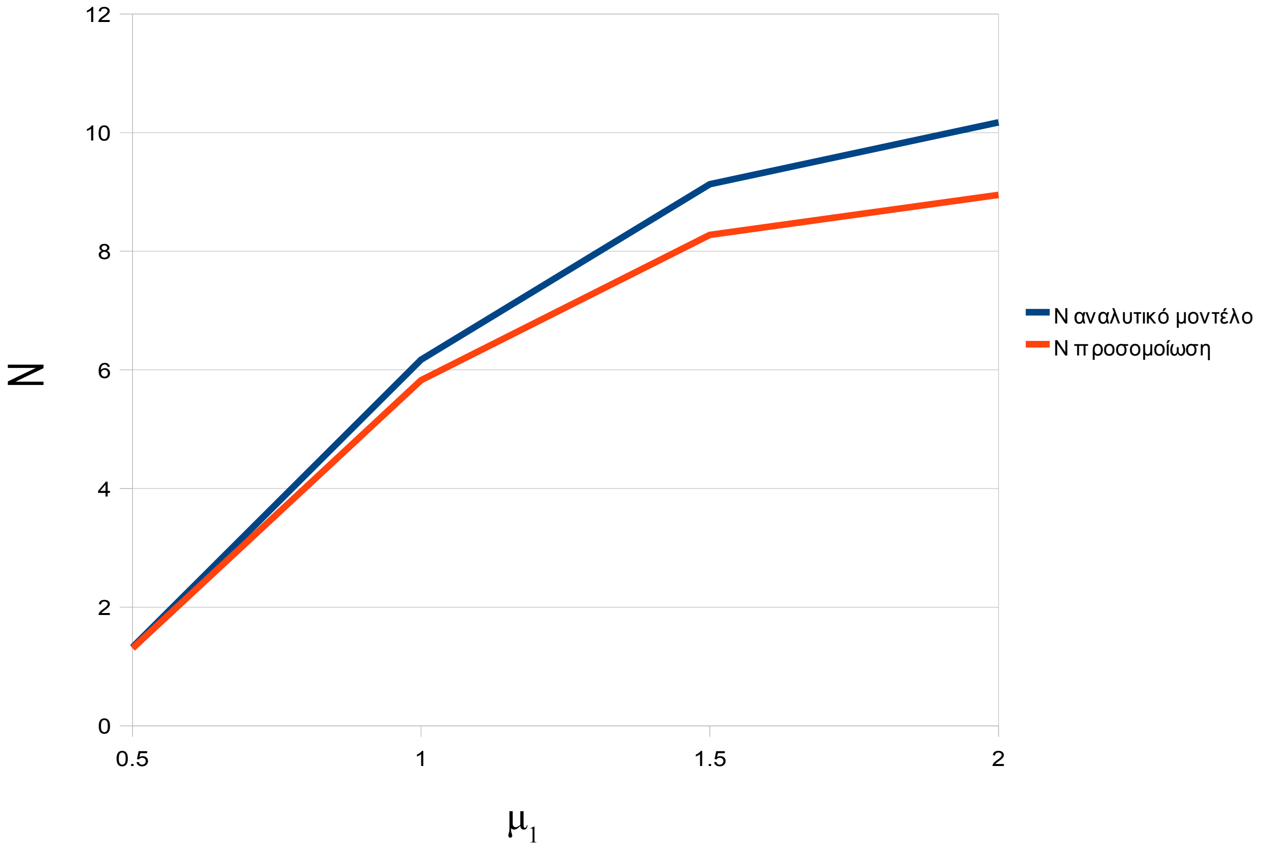
	Αλγόριθμος αναλυτικού μοντέλου		Αλγόριθμος προσομοίωσης	
	$\overline{\mathbf{N}}$	**TH**	$\overline{\mathbf{N}}$	**TH**
r_2=0.1	5.366399	0.428061	8.372970	0.364994
r_2=0.5	7.203782	0.816157	6.841115	0.766308
r_2=1	6.169386	0.894137	5.825474	0.868826
r_2=10	4.526075	0.958827	4.324099	0.946459

Πίνακας 4.6. Αποτελέσματα από τους 2 αλγόριθμους για διάφορες τιμές του r_2

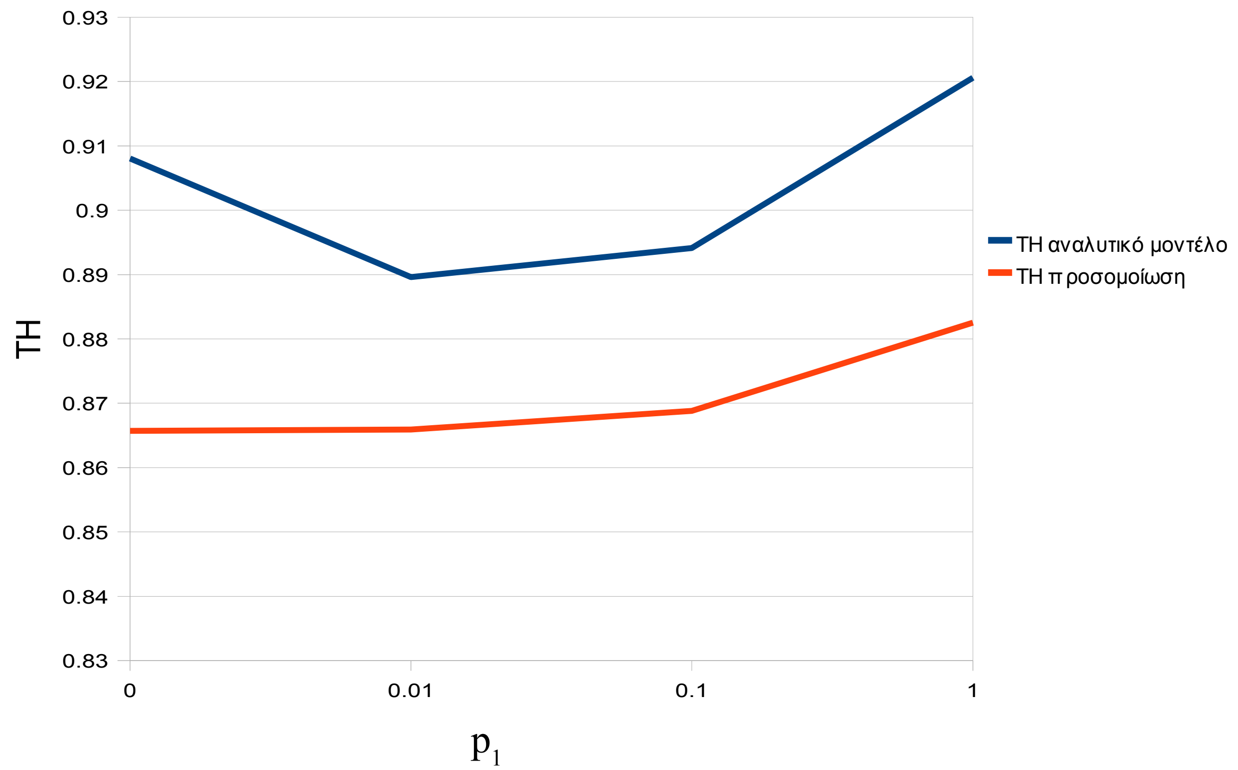
Και γραφικά τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζονται ως εξής:



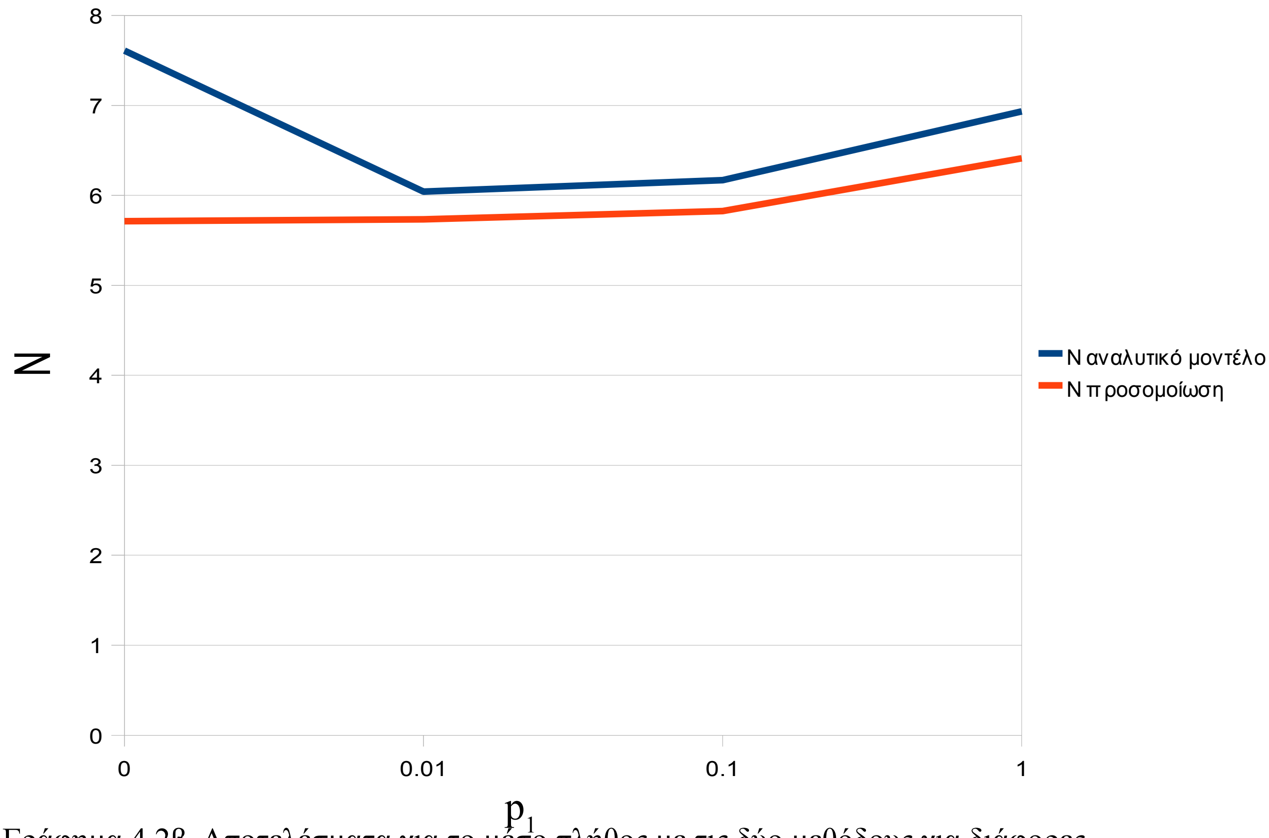
Γράφημα 4.1α. Αποτελέσματα για το μέσο ρυθμό παραγωγής με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του μ_1



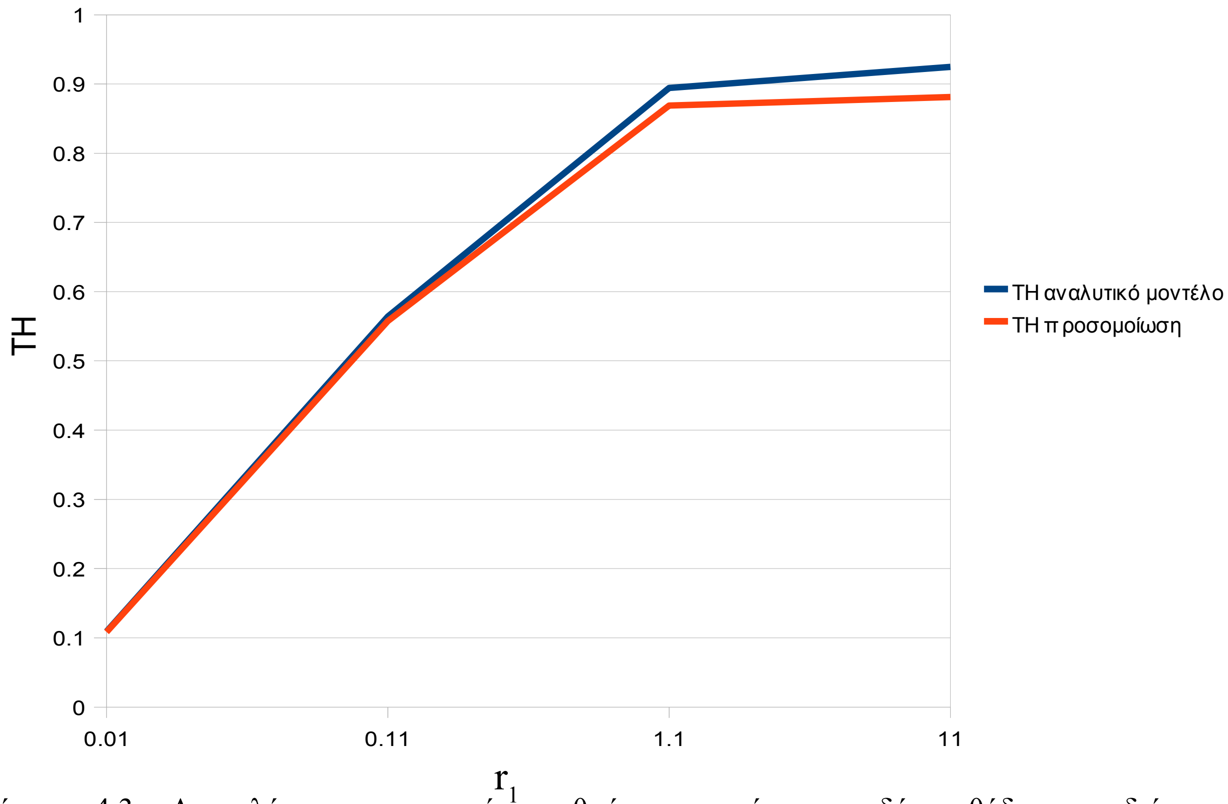
Γράφημα 4.1β. Αποτελέσματα για το μέσο πλήθος με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του μ_1



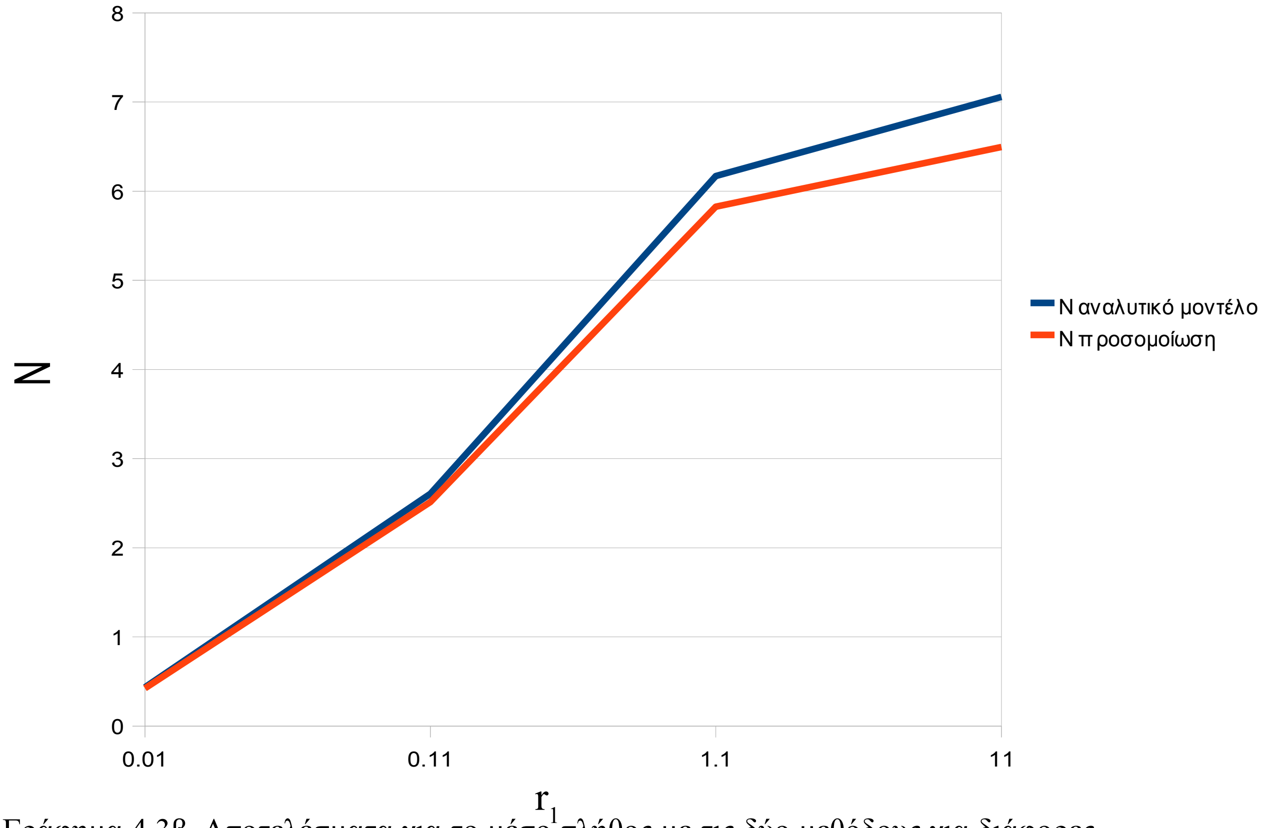
Γράφημα 4.2α. Αποτελέσματα για το μέσο ρυθμό παραγωγής με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του p_1



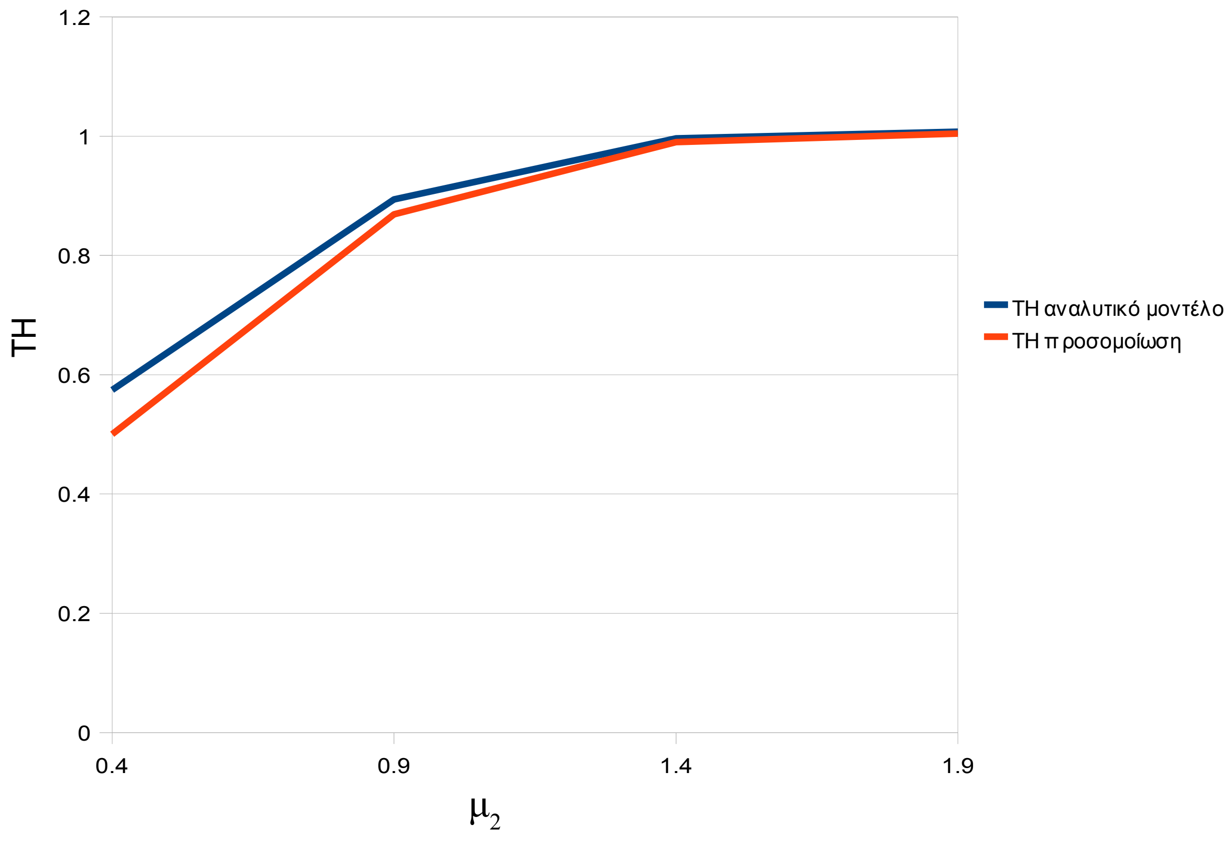
Γράφημα 4.2β. Αποτελέσματα για το μέσο πλήθος με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του p_1



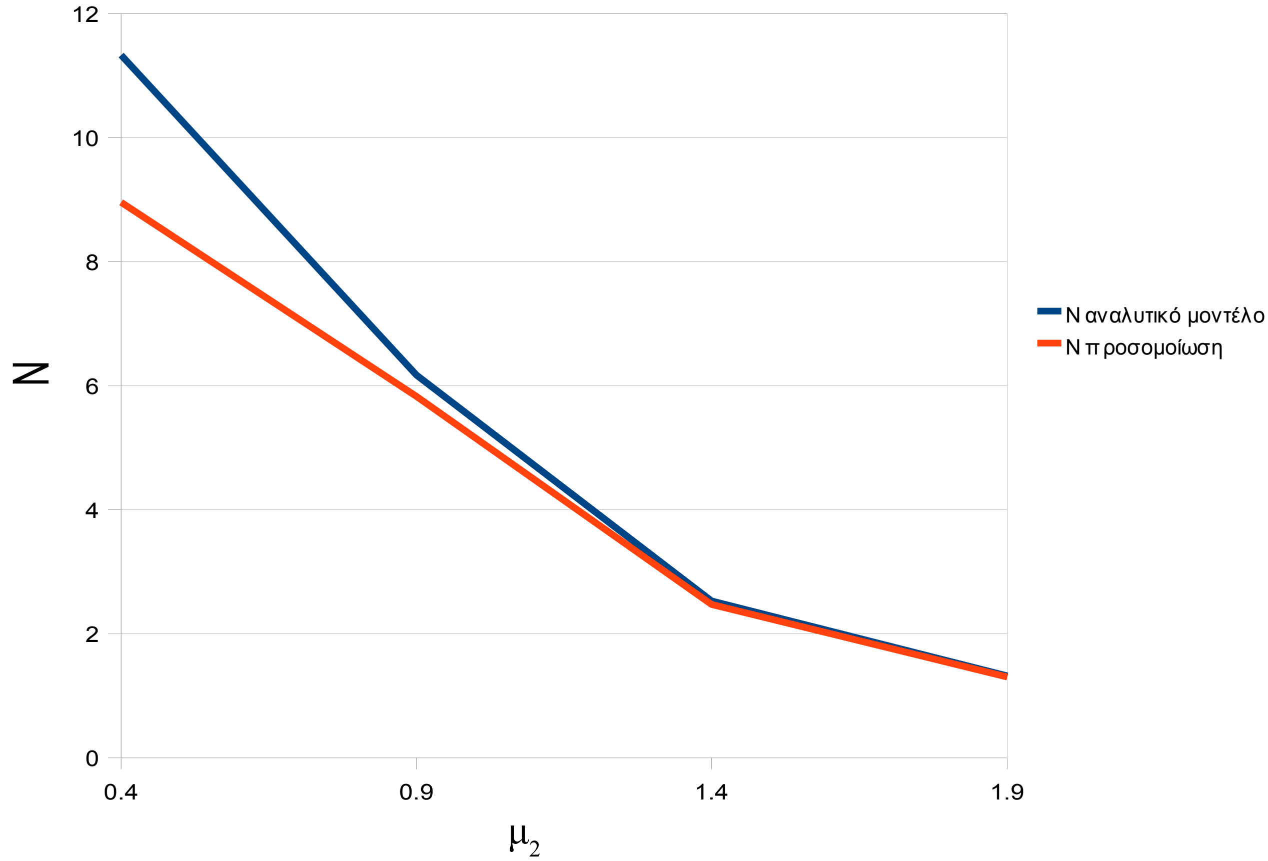
Γράφημα 4.3α. Αποτελέσματα για το μέσο ρυθμό παραγωγής με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του r_1



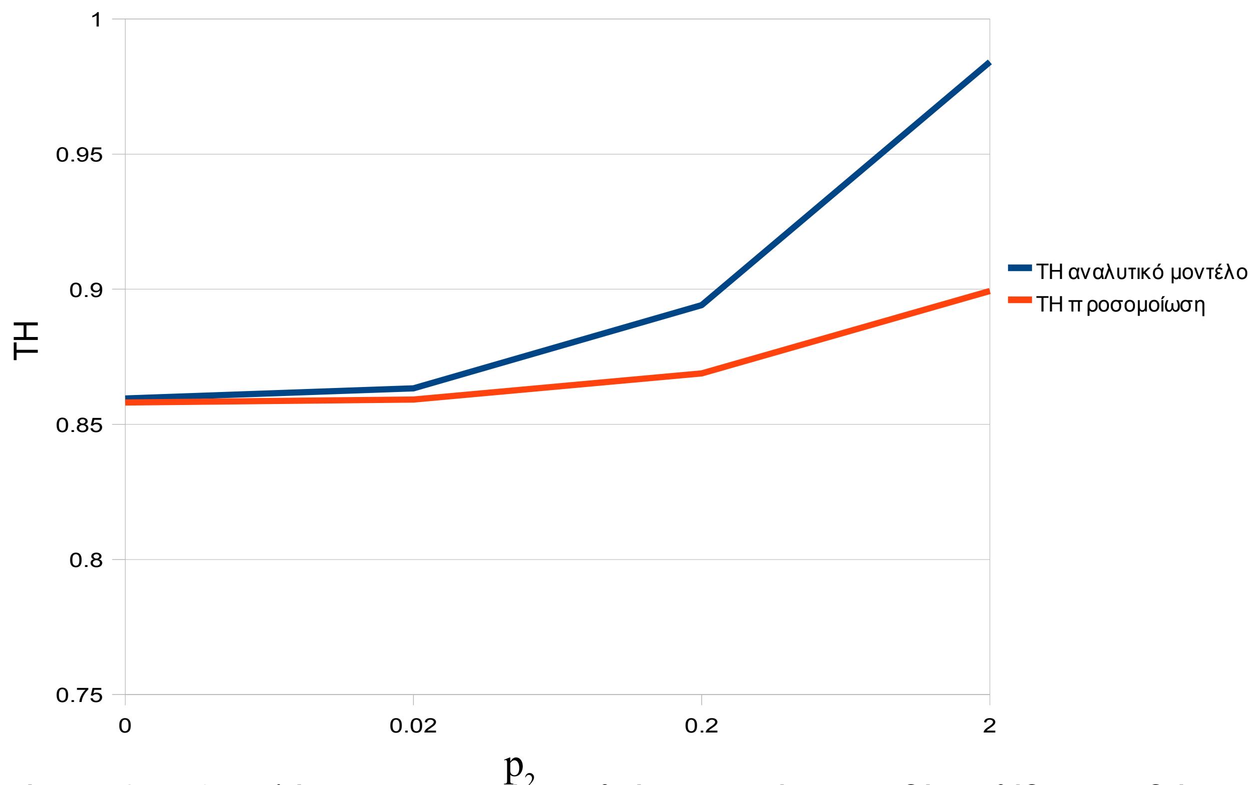
Γράφημα 4.3β. Αποτελέσματα για το μέσο πλήθος με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του r_1



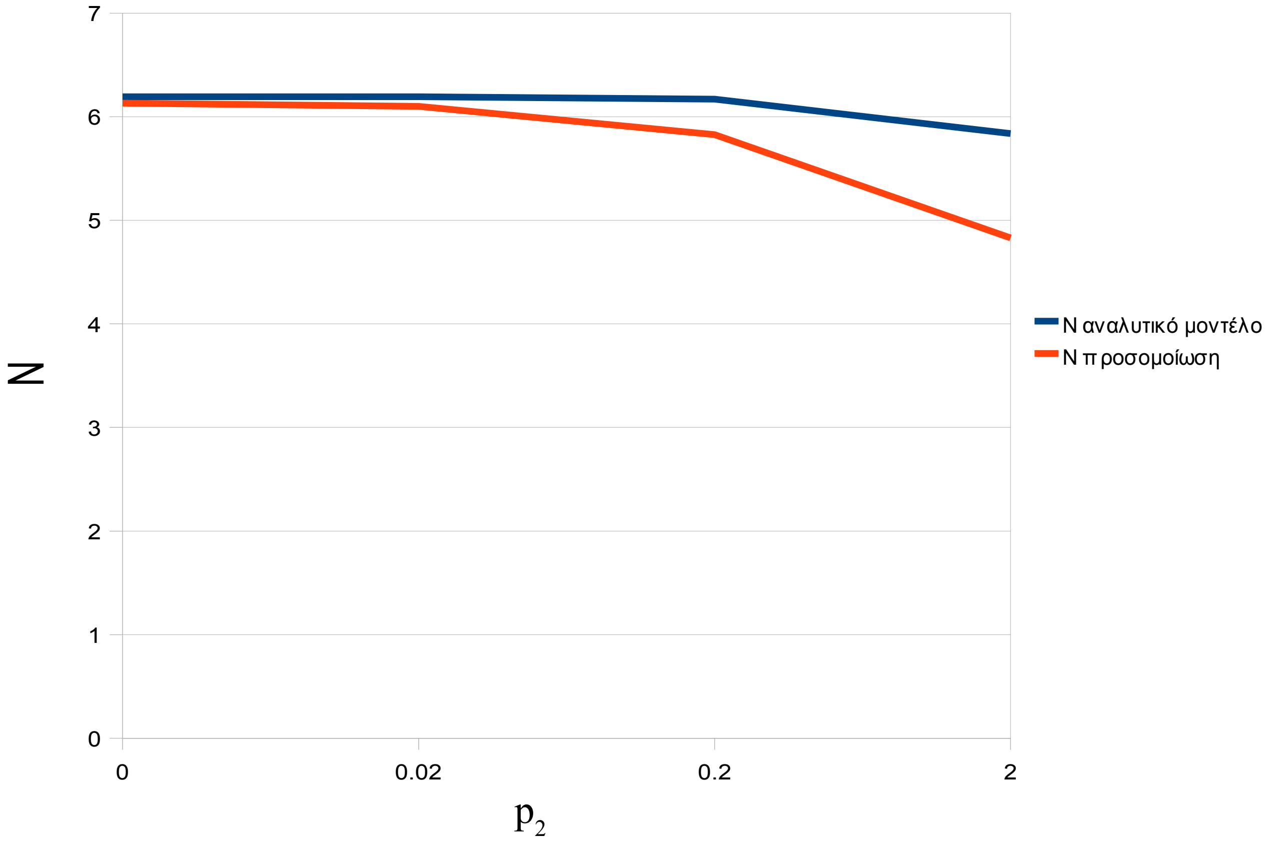
Γράφημα 4.4α. Αποτελέσματα για το μέσο ρυθμό παραγωγής με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του μ_2



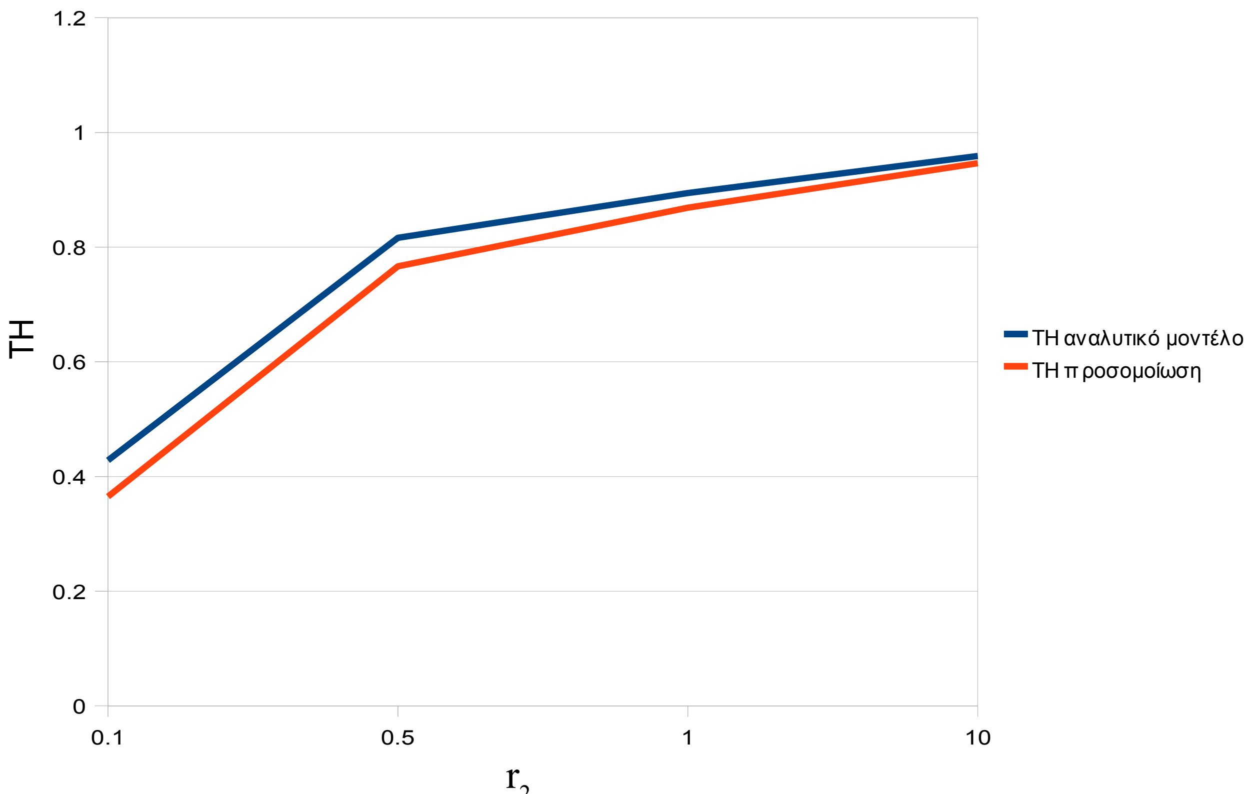
Γράφημα 4.4β. Αποτελέσματα για το μέσο πλήθος με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του μ_2



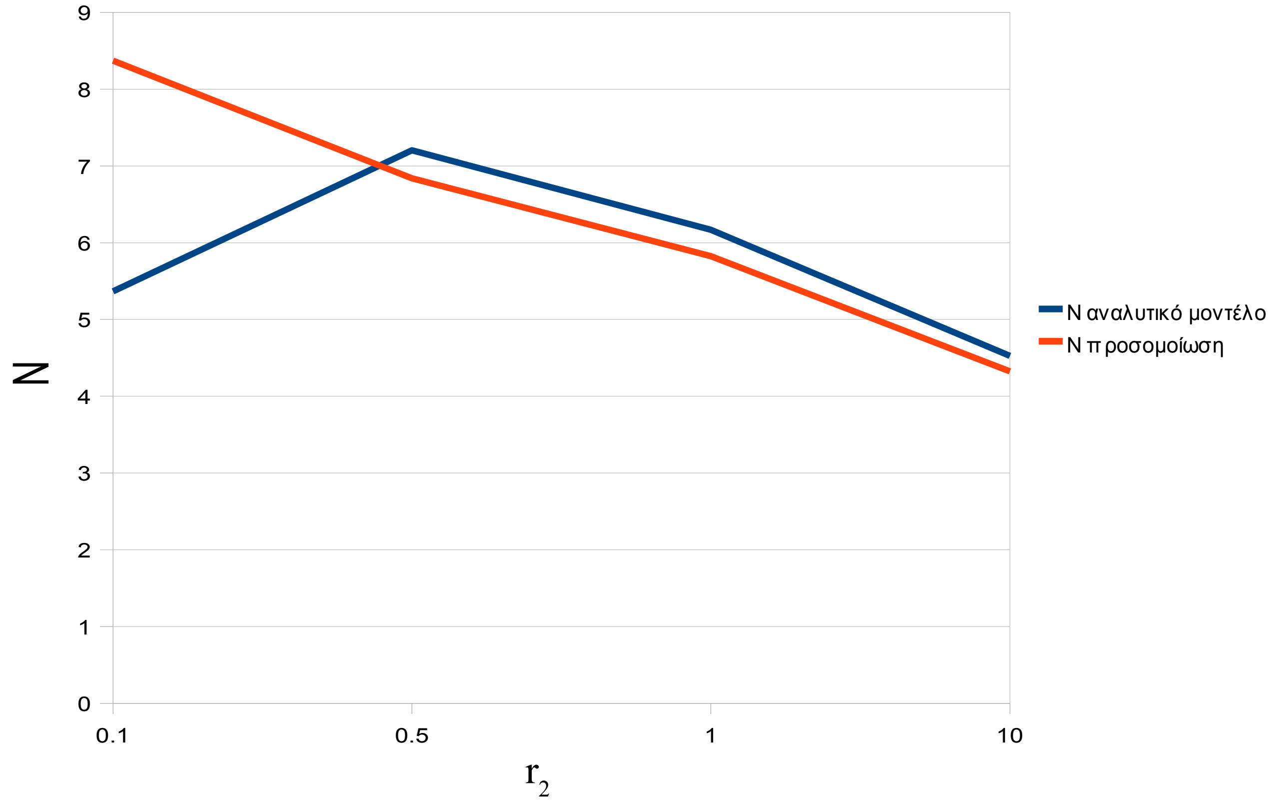
Γράφημα 4.5α. Αποτελέσματα για το μέσο ρυθμό παραγωγής με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του p_2



Γράφημα 4.5β. Αποτελέσματα για το μέσο πλήθος με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του p_2



Γράφημα 4.6α. Αποτελέσματα για το μέσο ρυθμό παραγωγής με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του r_2



Γράφημα 4.6β. Αποτελέσματα για το μέσο πλήθος με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές του r_2

Τα αποτελέσματα που πήραμε από τους δύο αλγόριθμους φαίνονται να έχουν αρκετά μικρές διαφορές μεταξύ τους πράγμα που επιβεβαιώνει και την ορθότητα του αναλυτικού μοντέλου. Κάποιες αποκλίσεις υπήρχαν κυρίως στο μέσο πλήθος ($\overline{N}$) ενώ όσον αφορά το μέσο ρυθμό παραγωγής (TH) οι διαφορές είναι ελάχιστες. Αξίζει σε αυτό το σημείο να σχολιαστεί το κατά πόσο κάθε ένα από τα χαρακτηριστικά των μηχανών (μ_1, p_1, r_1, μ_2, p_2, r_2) επηρεάζει τα αποτελέσματα για το μέσο πλήθος και το μέσο ρυθμό παραγωγής.

Αναμενόμενο ήταν τα μ_1 και μ_2 να επηρεάζουν πιο πολύ τις μεταβλητές του συστήματος. Έτσι, όπως βλέπουμε και στα αποτελέσματα παραπάνω, η αύξηση του μ_1 αυξάνει κατά πολύ το μέσο πλήθος ενώ αντίστοιχη αύξηση του μ_2 μειώνει κατά πολύ το μέσο πλήθος. Αυτό συμβαίνει διότι όταν αυξάνεται το μ_1 η μηχανή M_1 παράγει και μετά δε μένει αποστερημένη με μεγαλύτερη πιθανότητα οπότε εισέρχονται περισσότερα κομμάτια στο σύστημα με αποτέλεσμα (αφού τα χαρακτηριστικά της M_2 παραμένουν σταθερά) να αυξάνεται το μέσο πλήθος. Αντίστοιχα, όταν αυξάνεται το μ_2 η M_2 παράγει και μετά δε μένει αποκλεισμένη με μεγαλύτερη πιθανότητα οπότε, αφού τα χαρακτηριστικά της M_1 παραμένουν σταθερά, εξέρχονται κομμάτια από το σύστημα με μεγαλύτερο ρυθμό, οπότε μειώνεται το μέσο πλήθος κομματιών στο σύστημα. Η αύξηση των μ_1 και μ_2 όπως είναι φυσικό αυξάνουν και το μέσο ρυθμό παραγωγής του συστήματος (TH), το μ_1 διότι εισχωρεί κομμάτια στο σύστημα τα οποία στη συνέχεια περνούν στη M_2 και εξέρχονται σαν παραγωγή, ενω το μ_2 επειδή η αύξησή του αυξάνει το ρυθμό με τον οποίο παράγει η M_2 δηλαδή το ρυθμό με τον οποίο εξέρχονται κομμάτια από το σύστημα.

Τα p_1 και p_2 επηρεάζουν λιγότερο τις μεταβλητές απόδοσης του συστήματος, καθώς είναι σε άμεση συσχέτιση με τα r_1 και r_2. Αυτό συμβαίνει διότι, όπως αναφέρθηκε και στην περιγραφή του συστήματος $p_i\delta$ είναι η πιθανότητα η μηχανή M_i να παράγει και μετά να μένει αποστερημένη/αποκλεισμένη για δ μονάδες χρόνου ενώ $r_i\delta$ είναι η πιθανότητα η μηχανή M_i να τροφοδοτηθεί/ξεμπλοκάρει σε δ μονάδες χρόνου αν αυτή είναι αποστερημένη/αποκλεισμένη.

Επομένως, αύξηση του r_1 ενώ τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά των μηχανών είναι ίδια, επιφέρει αύξηση του μέσου πλήθους και του μέσου ρυθμού παραγωγής, διότι αν η M_1 είναι αποστερημένη (πιθανότητα p_1) τροφοδοτείται με μεγαλύτερη πιθανότητα, οπότε εισέρχονται κομμάτια στο σύστημα με μεγαλύτερο ρυθμό, ενώ αντίστοιχα για το r_2, αύξησή του προκαλεί μείωση του μέσου πλήθους (αν εξαιρέσουμε την τιμή $r_2=0.1$ που δίνει μεγαλύτερο μέσο πλήθος από το αναμενόμενο) και προκαλεί αύξηση του μέσου ρυθμού παραγωγής καθώς αν η M_2 είναι μπλοκαρισμένη (πιθανότητα p_2) ξεμπλοκάρεται με μεγαλύτερη πιθανότητα.

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι τα αποτελέσματα που δίνει ο αλγόριθμος του αναλυτικού μοντέλου που αναπτύχθηκε σε αυτή την εργασία στις περισσότερες των περιπτώσεων είναι αναμενόμενα και, με βάση τα αποτελέσματα του αλγόριθμου της προσομοίωσης, μπορεί να θεωρηθεί ότι η προσέγγιση στις πραγματικές τιμές των μεταβλητών ενός αντίστοιχου συστήματος είναι αρκετά καλή.

5. Σύνοψη

Συνοψίζοντας, σε αυτή τη διπλωματική εργασία αναλύθηκε μια γραμμή παραγωγής που αποτελείται από δύο μηχανές και μια ενδιάμεση αποθήκη με σκοπό την εύρεση των μεταβλητών απόδοσης του συστήματος και τη σύγκρισή τους με τα αποτελέσματα που δίνει για το ίδιο σύστημα η μέθοδος της προσομοίωσης.

Ωστόσο στα αποτελέσματα τα οποία δίνουν οι αλγόριθμοι της εργασίας αυτής υπάρχουν κάποιες αποκλίσεις ενώ για μεγάλες τιμές των δεδομένων εισόδου παρατηρήθηκαν κάποια αποτελέσματα τα οποία είχαν σημαντικές αποκλίσεις μεταξύ τους καθώς και αποτελέσματα που δεν είναι λογικά(περίπτωση όπου $(\mu_1, p_1, r_1, \mu_2, p_2, r_2)=(2,0.1,1.1,0.9,0.2,1)$ όπου βρίσκουμε ρυθμό παραγωγής μεγαλύτερο από αυτόν της μηχανής M2 πράγμα μη λογικό αφού η M_2 είναι η τελευταία μηχανή και από αυτή εξέρχονται τα κομμάτια από το σύστημα) . Αυτό ακριβώς μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο για μια μελέτη στο μέλλον, η εύρεση δηλαδή κάποιας μεθόδου με την οποία ο αλγόριθμος αυτός θα βελτιωθεί ώστε να είναι απόλυτα αξιόπιστος στα αποτελέσματά του.

6. Βιβλιογραφία

[1] I. C. Schick and S. B. Gershwin, "*Modelling and analysis of unreliable transfer lines with finite interstage buffers*", Massachusetts Institute Of Technology, 1979

[2] Β. Σ. Κουϊκόγλου, "Ανάλυση γραμμής παραγωγής με δύο μηχανές, πεπερασμένη αποθήκη και βλάβες", 12^{o} Εθνικό Συνέδριο ΕΕΕΕ, Σάμος, 6-8 Σεπτεμβρίου 1998

[3] S.B. Gershwin and O. Berman, "Analysis of transfer lines consisting of two unreliable machines with random processing times and finite storage buffers", *AIIE Transactions*, vol. 13. pp. 1-11, 1981

[4] Y. Dallery and S. B. Gershwin, "Manufacturing flow line systems: a review of models and analytical results", *Queuing systems theory and applications*, vol. 12. pp. 3-94, 1992

Παράρτημα Α: Πρόγραμμα αναλυτικού μοντέλου σε C

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define pi 3.14;
#define SWAP_DOUBLE( x, y ){double t; t = x; x = y; y = t;}
#define MAX 31
typedef struct
	{
		double array[2][2];
	}node;

node * findProbability(double m1,double p1,double r1,double m2,double p2,double r2,int N);
int readArray2(double [][MAX+1], const int);
void gauss(double [][MAX+1], double [], const int);
double agkili (double m1, double p1, double r1, double m2, double p2, double r2, int j);



double X[4];
double Y1[4];
double Y2[4];
double C[4];           //oi syntelestes C stin teliki eksiswsi
double M[4];           // pinakas pou krataei to athroisma twn X[j]^n gia n=1 ews n=N-2
double a[MAX][MAX+1];  //oi a[3][4] kai x[3] einai oi metavlites gia ti synartisi gauss-i teleytaia
                         stili tou pinaka a einai ta deytera meli twn eksiswsewn
double x[MAX];
```

```
int main(void)
{
	double  P=0;
	int j=0;
	int i=0;
	double  m1=0;
	double p1=0;
	double r1=0;
	double m2=0;
	double p2=0;
	double r2=0;
	double  N=0;			//i xwritikotita tou systimatos
	int  a1=0;			// einai i katastasi tis mixanis 1: a1=0 i mixani 1 peinaei,a1=1
					   douleuei kanonika
	int  a2=0;			// einai i katastasi tis mixanis 2: a2=0 i mixani 2
					   mplokarei,a2=1 douleuei kanonika.ta a1 kai a2 tha
					   diavazontai apo to pliktrologio
	double meso_plithos=0;
	double TH=0;

	for(j=0;j<4;j++)		//arxikopoiisi metavlitwn
	{
		X[j]=0;
		Y1[j]=0;
		Y2[j]=0;
		M[j]=0;
		C[j]=0;
	}
	for(j=0;j<4;j++)
	{
		x[j]=0;
		for(i=0;i<3;i++)
		{
			a[i][j]=0;
		}
	}
```

```
x[0]=0;
x[1]=0;
x[2]=0;

printf ("dwste tin xwrhtikothta toy systhmatos N:   ");
scanf  ("%lf", &N);
printf ("\n dwste tin m1:   ");
scanf ("%lf", &m1);
printf ("\n dwste tin p1:   ");
scanf ("%lf", &p1);
printf ("\n dwste tin r1:   ");
scanf ("%lf", &r1);
printf ("\n dwste tin m2:   ");
scanf ("%lf", &m2);
printf ("\n dwste tin p2:   ");
scanf ("%lf", &p2);
printf ("\n dwste tin r2:   ");

scanf ("%lf", &r2);

X[0] = 1;
Y1[0] = r1/p1;
Y2[0] = r2/p2;

node *PR=(node*)malloc(sizeof(node)*(N+1));



PR=findProbability(m1,p1,r1,m2,p2,r2,N);

for (i=1;i<=N;i++)
                {

                        for (a1=0;a1<=1;a1++)
                                {
                                        for (a2=0;a2<=1;a2++)
                                                {
```

```
                                        meso_plithos = meso_plithos + i*(PR[i].array[a1][a2]);


                                             }
                                   }
                         }

     for (i=1;i<=N;i++)
                         {

                              for (a1=0;a1<=1;a1++)

                                   {

                                        TH = TH + (m2 + p2)*PR[i].array[a1][1];
                                   }
                         }




               printf("\n\nto meso plithos einai   %lf", meso_plithos);


               printf("\n\nTH =  %lf", TH);



return 0;
}



node * findProbability(double m1,double p1,double r1,double m2,double p2,double r2,int N)
{
     int j=0;
     int i=0;
     double tmp1=0;
```

```
	double tmp2=0;
	double tmp3=0;
	double tmp4=0;
	double tmp5=0;
	double tmp6=0;
	double tmp7=0;
	double tmp8=0;
	double tmp9=0;
	double tmp10=0;
	double tmp11=0;
	double tmp12=0;
	double tmp13=0;
	double tmp14=0;
	double tmp15=0;
	double tmp16=0;
	double tmp17=0;
	double tmp18=0;
	double tmp19=0;
	double tmp20=0;
	double tmp21=0;
	double tmp22=0;
	double tmp23=0;
	double tmp24=0;
	int j1=0;
	int j2=0;
	int a1=0;
	int a2=0;


	node *PR=(node *)malloc(sizeof(node)*(N+1));

//ARXIKOPOIHSH TOY PR
	for(i=0;i<N;i++)
		{
			for(j1=0;j1<2;j1++)
				{
```

```
                    for(j2=0;j2<2;j2++)
                    {
                              PR[i].array[j1][j2]=0;
                    }
          }
}

for (j=1; j<4; j++)                // ayto to for ypologizei ta X[1],X[2],X[3],Y1[1],Y1[2],
                                      Y1[3],Y2[1],Y2[2],Y2[3]
{
          tmp1 = agkili (m1,p1,r1,m2,p2,r2,j);

          tmp2 = r1 + m1*tmp1;

          tmp3 = m1+p1-r1+p1*tmp1;

          tmp4 = tmp3*tmp1;

          X[j] = tmp2/tmp4;

          Y1[j] = tmp1*X[j];

          tmp5 = (r1+r2-tmp1*p1)/p2;

          Y2[j]  = tmp5/X[j];
}

for (j=1; j<4; j++)                              // ayto to for tha vriskei ta M[j] diladi to
                                                   athroisma twn X[j]^n gia n=1 ews N-2
{
          if (X[j]==1)
          {
                    M[j] = N-2;
```

```
		}

		else
		{
			M[j] = X[j]*(1-pow(X[j],N-2))/(1-X[j]);
		}
	}

	for (j=1;j<4;j++)		//edw vriskoume ton pinaka a[3][3] pou xreiazetai gia ti
					  synartisi gauss pou tha mas dwsei ta C[1],C[2] kai C[3]
		{
			tmp6=(m2+p2)/(m1+p1);

			tmp7=(m2+p2)*(m1+p1+r1);

			tmp8=r1*(m1+p1);

			tmp9=tmp7/tmp8;

			tmp10= (m1+p1)/(m2+p2);

			tmp11=r1+m2+p2;

			tmp12=(r1+r2)*pow(tmp11,2);

			tmp13=p2*(m1+p1)+r2*(m2+p2);

			tmp14=r2*p1*(m2+p2)*(r2*p2 + m2*(r1+r2));

			tmp15=r2*(r1+r2)*pow(tmp11,2)*(m2+p2);

			tmp16=(tmp12*tmp13 + tmp14)/tmp15;

			tmp17=tmp10 + tmp16;

			tmp18=(r1+r2)*tmp11*(p1+m1) + p1*pow(r2,2);
```

```
			tmp19=r2*(r1+r2)*tmp11;

			tmp20=tmp18/tmp19;

			tmp21=p1/tmp11;

			tmp22=p1*p2*r2 + p1*m2*(r1+r2);

			tmp23=(r1+r2)*tmp11;

			tmp24=tmp22/tmp23;



			a[1][j] = (1+Y1[j])*(1+Y2[j])*M[j] + tmp6*X[j]*Y1[j]*Y2[j] +
tmp9*X[j]*Y2[j] + tmp17*pow(X[j],N-1)*Y1[j]*Y2[j] + tmp20*pow(X[j],N-2)*Y1[j] +
tmp21*pow(X[j],N-2)*Y1[j]*Y2[j];


			a[2][j] = (m1+p1+r2)*Y1[j]-((p2*r1)/(r1+r2))*X[j]*Y2[j]-
p2*X[j]*Y1[j]*Y2[j];


			a[3][j] = tmp11*pow(X[j],N-1)*Y2[j]-tmp24*pow(X[j],N-1)*Y1[j]*Y2[j]-
((p1*r2)/(r1+r2))*pow(X[j],N-2)*Y1[j]-p1*pow(X[j],N-2)*Y1[j]*Y2[j];

		}


		a[1][4]=1;
		a[2][4]=0;
		a[3][4]=0;


		gauss(a,x,3);
```

```
//edw ypologizetai h pithanotita
double p_1=0,p_2=0,p_3=0;

    for (i=1;i<=N;i++)
        {
            for (a1=0;a1<=1;a1++)
                {
                    for (a2=0;a2<=1;a2++)
                        {

                            p_1 = x[1] * ( pow(X[1],i) *
pow(Y1[1],a1) * pow(Y2[1],a2) );


                            p_2=  x[2] * ( pow(X[2],i) *
pow(Y1[2],a1) * pow(Y2[2],a2) );


                            p_3=  x[3] *( pow(X[3],i) *
pow(Y1[3],a1) * pow(Y2[3],a2) );


                            PR[i].array[a1][a2] = p_1+p_2+p_3;
                        }
                }
        }








    return PR;
```

```
}

double agkili (double m1, double p1, double r1, double m2, double p2, double r2, int j)
{
        double a=0;
        double b=0;
        double c=0;
        double s=0 ;
        double t=0;
        double u=0;
        double A=0;
        double B=0;
        double C=0;
        double Z=0;

        double tmp1=0;
        double tmp2=0;
        double tmp3=0;
        double tmp4=0;

        a = m1+p1-(m2+p2+r2);
        b = m1*(p2+r2)+p1*(m2+p2+r2)-r2*(m2+p2);
        c = r1*m2+r2*(m2+p2);

        s = (a-2*r1)/p1;
        t =  (pow(r1,2)-a*r1-b)/pow(p1,2);
        u =       c/pow(p1,2);


        A =     t- (pow(s,2)/3);
                      //t-(s^2/3);
        B = (2*pow(s,3) - 9*s*t+27*u )/27;
        C = acos((-B)/(2*sqrt(pow(-A/3,3))));

        tmp1= -A/3;
        tmp2= (C/3) + ((j-1)*(2.0/3.0)) * pi;
```

```
        tmp3=-s/3;

        Z=(2* sqrt(tmp1))*(cos(tmp2))+tmp3;
        return Z;
}


void gauss(double a[][MAX+1], double x[MAX], const int n)
{
  int i,j,k,largest;
  double t;
  for(i = 1; i < n; i++){
    for(largest = i, j = i+1; j <= n; j++)
      if(abs( a[i][j] ) > abs( a[largest][i] ))
        largest = j;
    for(k = i; k <= n+1; k++)
      SWAP_DOUBLE( a[largest][k], a[i][k]);
    for( j = i+1; j <= n; j++)
      for( k = n+1; k >= i; k--)
        a[j][k] = a[j][k]-a[i][k]*a[j][i]/a[i][i];
  }
  for(i = n; i >= 1; i--){
    for(t = 0, j=i+1; j <= n; j++)
      t = t + a[i][j]*x[j];
    x[i] = (a[i][n+1] - t)/a[i][i];
  }
}
```

Παράρτημα Β: Πρόγραμμα προσομοίωσης σε C

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define MODLUS 2147483647
#define MULT1     24112
#define MULT2     26143

long zinext(long zi);

int main(void)


{

        int n=0;                        // trexwn arithmos kommatiwn sto systima
        int a1=1;
        int a2=1;
        double m1=0;
        double p1=0;
        double r1=0;
        double m2=0;
        double p2=0;
        double r2=0;
        double x1=0;
        double x2=0;
        double re=0;
        double TH=0;
        double N1=0;            // xwritikotita systimatos
        double N=0;                     // meso apothema
```

```
	double t=0;
	int SE=0;				// plithos gegonotwn
	int max_SE=0;
	double RA=0;
	double RB=0;

	long zi=0, zinew=0;
double u=0;



	zi = 12345678;

	printf ("dwste tin xwrhtikothta toy systhmatos N:   ");
	scanf  ("%lf", &N1);
	printf ("\n dwste tin m1:   ");
	scanf ("%lf", &m1);
	printf ("\n dwste tin p1:   ");
	scanf ("%lf", &p1);
	printf ("\n dwste tin r1:   ");
	scanf ("%lf", &r1);
	printf ("\n dwste tin m2:   ");
	scanf ("%lf", &m2);
	printf ("\n dwste tin p2:   ");
	scanf ("%lf", &p2);
	printf ("\n dwste tin r2:   ");
	scanf ("%lf", &r2);
	printf ("\ndwste to plithos twn gegonotwn:    ");
	scanf ("%d", &max_SE);

	do{

		x1 = 0;
		x2 = 0;

		if (a1==0)
```

```
        {
                x1=r1;
        }

else if ( ((a1==1) && (n<N1-1)) || ((a1==1) && (n==N1-1) && (a2==1)) )
                {
                        x1 = m1 + p1;
                }

if (a2==0)
                {
                        x2 = r2;
                }

else if ((a2==1) && (n>0))
                {
                        x2 = m2 + p2;
                }


re = x1 + x2;

N = N + ((1/re) * n);

t = t + (1/re);

SE = SE + 1;


zinew = zinext(zi);


u = ((zinew >> 7 | 1) + 1)/ 16777216.0;

zi = zinew;
```

```
RA = u;

if (RA <= (x1/re))
    {
        if (a1==0)
            {
                a1 = 1;
            }
        else if ( ((a1==1) && (n<N1-1)) || ((a1==1) && (n==N1-1) &&
(a2==1)) )          //M1 paragei
            {
                n = n +1;

                zinew = zinext(zi);

                u = ((zinew >> 7 | 1) + 1)/ 16777216.0;

                RB = u;

                zi = zinew;

                if (RB <= (m1/x1))
                    {
                        a1 = 1;
                    }
                else
                    {
                        a1 = 0;
                    }
            }
    }

else
    {
        if (a2==0)
            {
```

```
                    a2 = 1;
                }

            else if ((a2==1) && (n>0))          //M2 paragei
                {

                        n = n-1;

                        TH = TH +1;

                        zinew = zinext(zi);

                        u = ((zinew >> 7 | 1) + 1)/ 16777216.0;

                        RB = u;

                        zi = zinew;


                        if (RB <= (m2/x2))
                            {
                                a2 = 1;
                            }

                        else
                            {
                                a2 = 0;
                            }

                }

        }


}while(SE <= max_SE);
```

```
        N = N/t;

        TH = TH/t;

        printf ("\n\n\nN =  %lf", N);
        printf ("\n\n\nTH =  %lf", TH);

return 0;
}

long zinext(long zi)
{
   long lowprd, hi31;

   lowprd = (zi & 65535) * MULT1;
   hi31   = (zi >> 16) * MULT1 + (lowprd >> 16);
   zi     = ((lowprd & 65535) - MODLUS) +
            ((hi31 & 32767) << 16) + (hi31 >> 15);
   if (zi < 0) zi += MODLUS;
   lowprd = (zi & 65535) * MULT2;
   hi31   = (zi >> 16) * MULT2 + (lowprd >> 16);
   zi     = ((lowprd & 65535) - MODLUS) +
            ((hi31 & 32767) << 16) + (hi31 >> 15);
   if (zi < 0) zi += MODLUS;
   return zi;
}
```

Ευχαριστώ την οικογένειά μου, τους φίλους μου και τους καθηγητές που με βοήθησαν όλα αυτά τα χρόνια.