ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΙΚΡΟΚΟΠΗΣ & ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΣΧΕΔΙΟΜΕΛΕΤΗ & ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΙΝΑΚΑ ΤΥΧΑΙΟΤΗΤΑΣ GALTON



ΚΑΣΙΩΤΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΡΙΣΤΟΜΕΝΗΣ ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΡ. ΔΙΠΛ. : 23

ΧΑΝΙΑ 2012

"Some people hate the very name of Statistics, but I find them full of beauty and interest. Whenever they are not brutalized, but delicately handled by the higher methods, and are warily interpreted, their power of dealing with complicated phenomena is extraordinary. They are the only tools by which an opening can be cut through the formidable thicket of difficulties that bars the path of those who pursue the Science of Man"

Francis Galton, "The master builder of the modern theory of Statistics"

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την άνευ ορίων υποστήριξη και βοήθεια που μου προσέφεραν και τους φίλους μου που δεν έπαψαν στιγμή να με ενθαρρύνουν. Ιδιαίτερες ευχαριστίες στον καθηγητή και επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας κ. Αριστομένη Αντωνιάδη, που μου έδειξε ότι υπάρχει πιθανότητα για το απίθανο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 5

2. ΣΤΑΘΜΗ ΓΝΩΣΕΩΝ 6
   2.1 Βιογραφία και έργο του Francis Galton 6
   2.2 Ο πρωτότυπος πίνακας του Galton 6
   2.3 Μεταγενέστερες εκδοχές του πίνακα του Galton 7

3. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ 11
   3.1 Η ρίψη νομίσματος 11
   3.2 Ο πίνακας του Galton 11
   3.3 Εισαγωγή στο τρίγωνο του Pascal 13
   3.4 Κατανομή 15
   3.5 68-95-99.7 18

4. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ 21
   4.1 Η κατασκευή της IFA 21
   4.2 Σχεδιασμός του μοντέλου της κατασκευής 24
   4.3 Η κατασκευή του μοντέλου 26

5. ΣΥΝΟΨΗ 37

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 38

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Sir Francis Galton, εφηύρε μια μηχανή που την ονόμασε ο πίνακας του Galton. Ο πίνακας αυτός ήταν ένα κουτί, με γυάλινη πρόσοψη, το οποίο περιείχε αρκετές σειρές εμποδίων. Τα εμπόδια ήταν τοποθετημένα σε ένα τριγωνικό μοτίβο. Μέσω μίας οπής στην κορυφή έπεφταν μολύβδινες σφαίρες μέσα στην κατασκευή. Οι σφαίρες, περνούσαν μέσα από τις σειρές των εμποδίων και κατέληγαν σε κάποιες θήκες στο πάτωμα του κουτιού. Οι σφαίρες αφού προσέκρουαν σε κάθε εμπόδιο αναπηδούσαν είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά. Το αν θα συνέχιζαν αριστερά ή δεξιά είχε την ίδια πιθανότητα Η κατανομή που δημιουργούταν στο τέλος προσέγγιζε την κανονική (κωδωνοειδής) καμπύλη.

Η κανονική καμπύλη περιγράφει την κατανομή αρκετών διαφορετικών πραγμάτων και καταστάσεων στον πραγματικό κόσμο. Από το μήκος των φύλλων σε ένα δέντρο, μέχρι τους βαθμούς των φοιτητών σε μία εξέταση. Για αυτό το λόγο ο Galton έψαχνε ένα απλό και οπτικά ελκυστικό τρόπο να επιδείξει το θεώρημα κεντρικού ορίου και πως μπορεί να συσχετιστεί με τη μελέτη της γενετικής και της κληρονομικότητας. Οπότε κατέληξε στην παραπάνω πειραματική κατασκευή.

Από τότε έγιναν πολλές και διαφορετικές υλοποιήσεις, με περισσότερες σειρές εμποδίων ή με μεγαλύτερες διαστάσεις, με πλαστικές σφαίρες ή με πολύπλοκα συστήματα ανατροφοδότησης. Όλες όμως είχαν σκοπό να παρουσιάσουν, ότι τυχαίες μεταβλητές μπορούν να προσεγγιστούν από την κανονική κατανομή.

Επειδή όμως δεν είχε γίνει καμία κατασκευή μεγάλης κλίμακας στην Ελλάδα, αποφασίστηκε στο Εργαστήριο Μικροκοπής και Κατασκευαστικής Προσομοίωσης, να κατασκευαστεί μια υλοποίηση του πίνακα του Galton.

Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας, γίνεται μια ιστορική αναδρομή όσον αφορά την πρωτότυπη κατασκευή και τις μεταγενέστερες εκδόσεις. Ακολουθεί η μαθηματική ανάλυση του πειράματος, και η θεωρία πιθανοτήτων και στατιστικής πάνω στην οποία στηρίζεται. Και τέλος παρουσιάζεται αναλυτικά η κατασκευή η οποία σχεδιάστηκε, μελετήθηκε και τελικά υλοποιήθηκε στο εργαστήριο.

Σκοπός είναι να αποδείξουμε ότι η δυαδική κατανομή, όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός πειραμάτων μπορεί να προσεγγιστεί με την κανονική κατανομή.

2. ΣΤΑΘΜΗ ΓΝΩΣΕΩΝ

2.1 Βιογραφία και έργο του Francis Galton

Ο Francis Galton (16 Φεβρουαρίου 1822 – 17 Ιανουαρίου 1911), γεννήθηκε στο Μπίρμινχαμ της Αγγλίας. Πατέρας του ήταν ο Samuel Galton, πετυχημένος επιχειρηματίας της εποχής.

Ο Francis Galton ήταν ξάδερφος του Κάρολου Δαρβίνου, ο οποίος ήταν θεμελιωτής της θεωρία της εξέλιξης και εισηγητής του μηχανισμού της φυσικής επιλογής. Όπως ο ξάδελφος του έτσι και ο Galton ήταν πολυμαθής, και ασχολήθηκε με διάφορους τομείς της επιστήμης, όπως: ανθρωπολογία, βιομετρία, γεωγραφία, μετεωρολογία, μαθηματικά και στατιστική. Προώθησε την επιστημονική μετεωρολογία, συνέταξε τον πρώτο μετεωρολογικό χάρτη εισάγοντας τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα και προσδιόρισε τους αντικυκλώνες. Εισήγαγε, μεταξύ άλλων, την επιστήμη της βιομετρίας, τις στατιστικές έννοιες της συσχέτισης και της παλινδρόμησης, τις μεθόδους της ιστοριομετρίας, της ψυχομετρίας και της διαφορικής ψυχολογίας, όπως και μια τεχνική για την εξέταση των δακτυλικών αποτυπωμάτων που διαρκεί ως τις ημέρες μας. Ο πιο αμφισβητούμενος και αντισυμβατικός τομέας που ασχολήθηκε, παρότι ήταν πρωτοπόρος, ήταν η ευγονική.

Γενικότερα τα αποτελέσματα του και τα συμπεράσματα από τις μελέτες του αμφισβητήθηκαν εντόνως και πολλές φορές απορρίφθηκαν. Η μεγάλη συμβολή του έγκειται στα «εργαλεία» που προσέφεραν στις επόμενες γενιές οι μέθοδοι που επινόησε για τις έρευνές του, οι παρατηρήσεις που έκανε και τα στοιχεία που συγκέντρωσε. Ο Galton ήταν εξαιρετικός παρατηρητής. Ένα ενδιαφέρον πείραμα στατιστικής που διεξήγαγε ήταν το εξής. Το 1906, επισκέφθηκε ένα παζάρι, και συνάντησε έναν ενδιαφέρον διαγωνισμό. Ένα βόδι ήταν στην εξέδρα, και ζητούταν από τους χωρικούς να μαντέψουν το βάρος του ζώου. Σχεδόν οχτακόσια άτομα συμμετείχαν, αλλά κανείς δεν πέτυχε το ακριβές βάρος: 543,3 κιλά. Ο Galton παρατήρησε ότι οι περισσότερες απαντήσεις ήταν είτε πολύ παραπάνω είτε πολύ παρακάτω. Αλλά όταν υπολόγισε τη μέση τιμή προς έκπληξη του ήταν 547,5 κιλά, πολύ κοντά δηλαδή στο βάρος που ανακοίνωσαν οι κριτές.

Οι έρευνες του Galton στους τομείς της κληρονομικότητας και της καταγωγής, τον οδήγησαν να γράψει για την «παλινδρόμηση προς τον μέσο», ένα στατιστικό φαινόμενο οπού αν η αρχική μέτρηση μιας μεταβλητής ήταν ακραία, τότε μια δεύτερη μέτρηση κατά μέσο όρο θα ήταν πιο κοντά στον πραγματικό μέσο. Ο Galton μελέτησε την κανονική κατανομή κατά τις δεκαετίες του 1870 και του 1880, και ακολούθως εφηύρε τον πίνακα του Galton, για να αποδείξει το Θεώρημα του Κεντρικού Ορίου, ότι ο μέσος όρος ενός μεγάλου δείγματος ανεξάρτητων μετρήσεων μιας μεταβλητής (π.χ. ύψος ή βάρος), θα κατανέμεται κανονικά ή ότι η διωνυμική κατανομή μπορεί να προσεγγιστεί από την κανονική. Στον Galton επίσης πιστώνεται η ανακάλυψη της τυπικής απόκλισης, η οποία του επέτρεψε να καταλάβει την μεταβλητότητα μιας σειράς χαρακτηριστικών μέσα σε ένα πληθυσμό.

2.2 Ο πρωτότυπος πίνακας του Galton

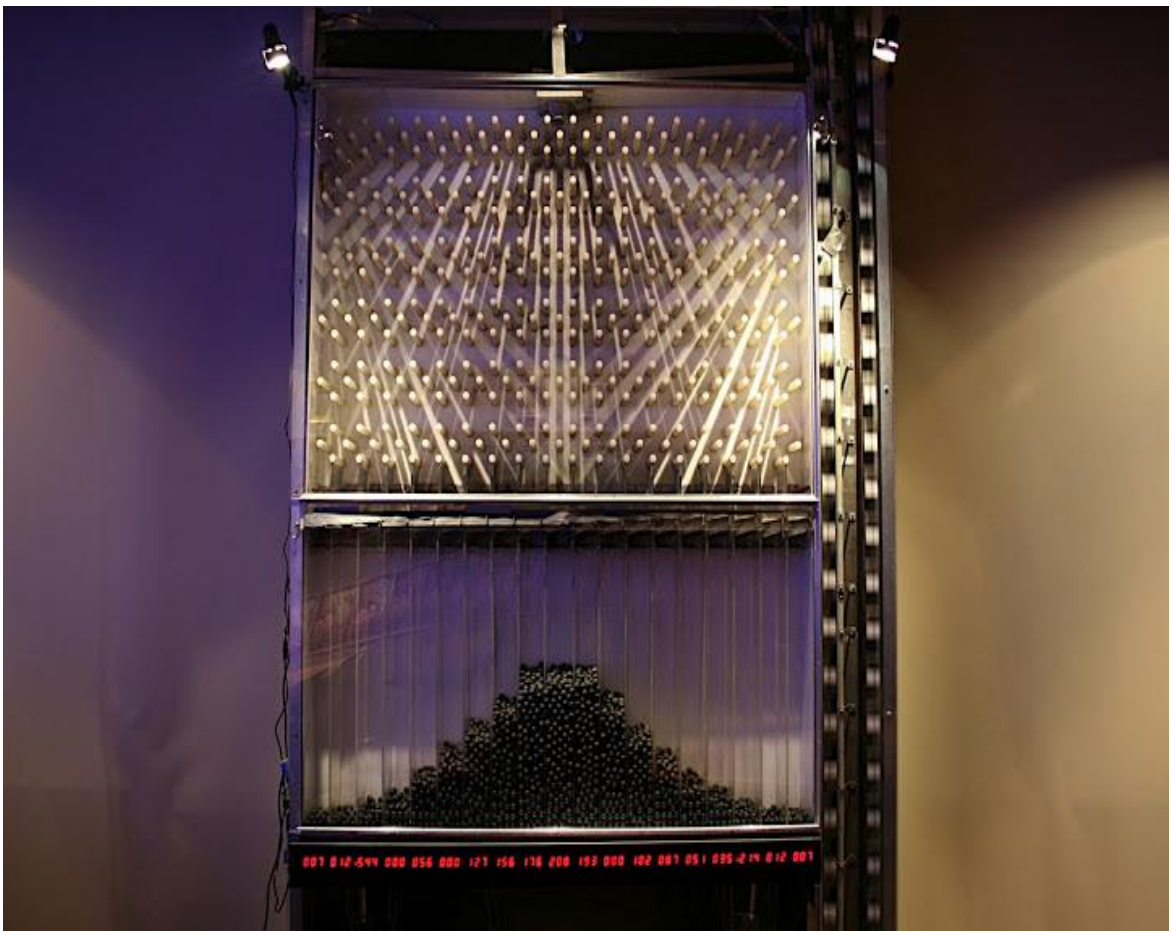
Στο σχήμα 1.1 είναι μια φωτογραφία του αυθεντικού πίνακα του Galton, που κατασκευάστηκε το 1873. Αυτή τη στιγμή εκτίθεται στο London University College.



Σχήμα 1.1 : Ο αυθεντικό πίνακας Galton.

2.3 Μεταγενέστερες εκδοχές του πίνακα του Galton

Το πανεπιστήμιο του Princeton είχε επίσης κατασκευάσει ένα πίνακα του Galton, το 1981. Το μέγεθος του οποίου είναι 3048mm x 1829mm. Περιέχει εννέα χιλιάδες μπίλιες διαμέτρου 19 χιλιοστών, οι οποίες διατρέχουν ένα σύμπλεγμα τριακοσίων τριάντα εμποδίων ιδίας διαμέτρου. Οι οποίες καταλήγουν σε δεκαεννιά κάδους σχηματίζοντας τελικά την κανονική κατανομή. Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης κατασκευής είναι ότι υπάρχουν μετρητές για το πόσες μπίλιες καταλήγουν σε κάθε κάδο. Στο σχήμα 1.2 υπάρχει μια φωτογραφία της παραπάνω κατασκευής.



Σχήμα 1.2 : Η κατασκευή του πανεπιστημίου του Princeton.

Ακόμη ένα μοντέλο έχει κατασκευαστεί από τους Charles and Ray Eames. Και εκτίθεται στο επιστημονικό μουσείο της Βοστώνης, στη Μασαχουσέτη. Στο πλάι της κατασκευής αναγράφεται μια διάσημη φράση του Laplace, « Η θεωρία των πιθανοτήτων, δεν είναι τίποτα άλλο από μία καλή αίσθηση επιβεβαιωμένη από υπολογισμούς». Στο σχήμα 1.3 βρίσκεται μια φωτογραφία της παραπάνω κατασκευής.



Σχήμα 1.3 : Το μοντέλο που εκτίθεται στο μουσείο επιστημών της Βοστώνης.

Μια πιο σύγχρονη, υλοποίηση του πίνακα του Galton, είναι αυτή που έγινε από το Index Funds Advisors (IFA). Η IFA είναι μια αμερικάνικη εταιρεία με τομέα δράσης τα χρηματοοικονομικά. Σκοπός της είναι να παρέχει υπηρεσίες συμβουλευτικής επενδύσεων, και υπολογισμού ρίσκου. Στα πλαίσια των παραπάνω κατασκεύασε ένα πίνακα του Galton, και απέδειξε ότι η απόδοση ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου σε μια περίοδο πενήντα χρόνων ακολουθεί την κανονική κατανομή. Την μελέτη και την κατασκεύη, την ανέλαβε το Oregon Museum of Science and Industry (OMSI).

Στο σχήμα 1.4 παρουσιάζεται μια φωτογραφία του μοντέλου.



Σχήμα 1.4 : Ο πίνακας που κατασκεύασε το OMSI για λογαριάσμο της IFA.

3. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

3.1 Η ρίψη νομίσματος

- Απλή πιθανότητα είναι ο λόγος των θετικών αποτελεσμάτων προς το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων.

Η θεωρία πιθανοτήτων μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά για να χαρακτηρίσουμε και να προβλέψουμε τη συμπεριφορά τυχαίων γεγονότων. Με τη λέξη «τυχαίο» εννοούμε «απρόβλεπτο», με την έννοια ότι σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, η γνώση των δεδομένων συνθηκών δεν μας επιτρέπει να πούμε τι θα συμβεί μετά. Ίσως φαίνεται ανούσιο να προσπαθούμε να προβλέψουμε την συμπεριφορά από κάτι που θεμελιωδώς το χαρακτηρίζουμε ως απρόβλεπτο, αλλά αυτό ακριβώς είναι που κάνει τα μαθηματικά των πιθανοτήτων τόσο ισχυρά. Ας σκεφτούμε τη ρίψη ενός νομίσματος. Δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να προβλέψουμε το αποτέλεσμα μίας μόνο ρίψης νομίσματος. Υπό αυτή την έννοια είναι ένα τυχαίο γεγονός. (Πρέπει όμως να είμαστε λίγο προσεχτικοί σε αυτό το σημείο επειδή η ρίψη ενός νομίσματος δεν θα ήταν τυχαία αν γνωρίζαμε όλες τις αρχικές συνθήκες, αλλά από τι στιγμή που δεν μπορούμε να γνωρίζουμε όλες τις συνθήκες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα, μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε τυχαίο.) Αλλά μπορούμε να πούμε κάποια πράγματα στα σίγουρα.

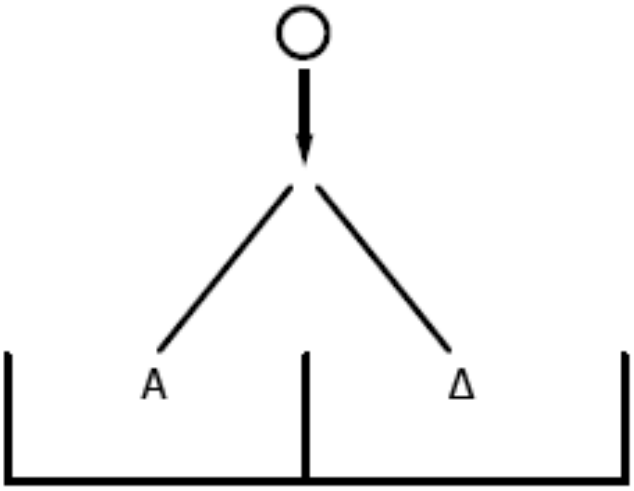
Το πρώτο πράγμα που μπορούμε να πούμε είναι ότι το αποτέλεσμα θα είναι σίγουρα είτε κορώνα είτε γράμματα. Αν το διατυπώσουμε με μαθηματικούς όρους, θα λέγαμε ότι η πιθανότητα το νόμισμα να έρθει κορώνα ή γράμματα είναι 1, ή απόλυτα βέβαιο. Ένα γεγονός με μηδενική πιθανότητα είναι ουσιαστικά αδύνατο. Στην περίπτωση ισοπίθανων ενδεχόμενων, όπως στο παράδειγμα του νομίσματος, ο καθορισμός της πιθανότητας να συμβεί ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο είναι θέμα μέτρησης. Οπότε συγκρίνουμε τον αριθμό των τρόπων που ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο μπορεί να συμβεί με τον αριθμό όλων των πιθανών ενδεχόμενων. Συνεπώς η πιθανότητα το νόμισμα να έρθει κορώνα είναι 1 στις 2 ή ½. Φυσικά την ίδια πιθανότητα έχει να έρθει γράμματα. Για να το επιβεβαιώσουμε, μπορούμε να ξεκινήσουμε με την πιθανότητα ότι το νόμισμα θα είναι κορώνα ή γράμματα, δηλ. 1, και να αφαιρέσουμε την πιθανότητα να είναι κορώνα, δηλ $\frac{1}{2}$. Αυτό μας δίνει $\frac{1}{2}$ σαν πιθανότητα το νόμισμα να μην έρθει κορώνα, δηλαδή την πιθανότητα να έρθει γράμματα.

Το να καθορίσουμε την πιθανότητα των ενδεχόμενων μίας μόνο ρίψης νομίσματος, ίσως να μην φαίνεται πολύ ενδιαφέρον, αλλά είναι η αρχή για την κατανόηση των πιθανοτήτων που συνδέονται με κάθε γεγονός που έχει μόνο δυαδικά ενδεχόμενα.

3.2 Ο πίνακας του Galton

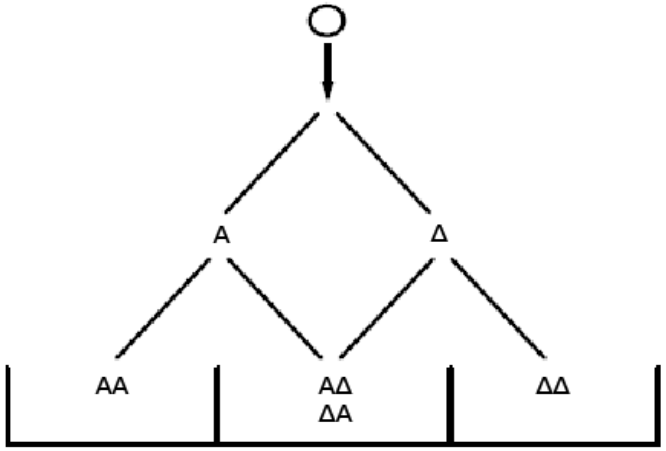
- Ο πίνακας του Galton είναι ένα μοντέλο μιας σειράς τυχαίων γεγονότων.
- Κάθε μπίλια που περνάει από το σύστημα, αντιπροσωπεύει ένα πείραμα που αποτελείται από τόσα τυχαία γεγονότα όσες οι σειρές του συστήματος.

Φανταστείτε ένα κυλινδρικό εμπόδιο στη μέση ενός επικλινή πίνακα, με τη βάση του πίνακα χωρισμένη σε δύο κάδους ίσου μεγέθους. Αν ρίξουμε μια μπίλια στο εμπόδιο, θα το χτυπήσει και θα εκτραπεί είτε στο δεξιό κάδο είτε στον αριστερό. Με όρους πιθανοτήτων, αυτό είναι ακριβώς το ίδιο με τη ρίψη του νομίσματος από πριν.



Σχήμα 3.1 : Προσομοίωση μίας ρίψης νομίσματος

Οι δύο κάδοι αντιπροσωπεύουν τα πιθανά ενδεχόμενα για τη μπίλια που πέφτει, και επειδή υπάρχει μόνο ένας τρόπος να μπει σε κάθε κάδο, η πιθανότητα μιας μπίλιας να καταλήξει σε ένα συγκεκριμένο κάδο είναι $\frac{1}{2}$. Το πλεονέκτημα του να αναλύουμε δυαδικά συστήματα με αυτόν τον τρόπο είναι ότι είναι πολύ εύκολο να κάνουμε πιο πολύπλοκα τα πειράματα προσθέτοντας σειρές εμποδίων. Ας προσθέσουμε μια σειρά δύο εμποδίων κάτω από το αρχικό, ένα στα δεξιά και ένα στα αριστερά.

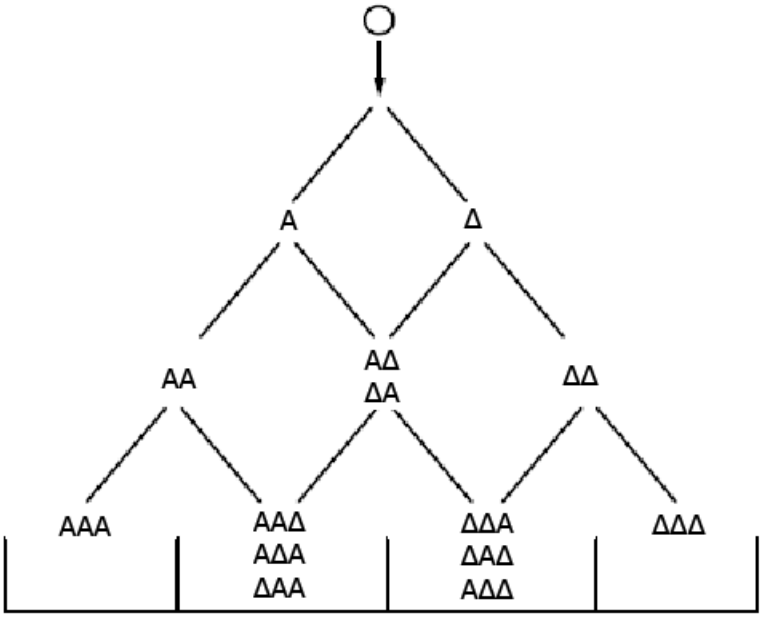


Σχήμα 3.2 : Προσθέτοντας μία ακόμη σειρά εμποδίων

Παρατηρούμε ότι τώρα υπάρχουν τρεις κάδοι στη βάση. Μπορούμε όπως και προηγουμένως να υπολογίσουμε την πιθανότητα η μπίλια να καταλήξει σε κάθε ένα κάδο. Ίσως να παρασυρθούμε και να σκεφτούμε ότι οι τρείς κάδοι είναι ισοπίθανοι προορισμοί, οπότε κάθε κάδος θα είχε πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Με αυτό τον τρόπο όμως θα αγνοούσαμε το γεγονός ότι η μπίλια μπορεί να ακολουθήσει δύο μονοπάτια για να καταλήξει στο μεσαίο κάδο, και μόνο ένα για τους δύο ακριανούς. Αυτό μας υποδεικνύει ότι χρειάζεται να μετρήσουμε τα μονοπάτια που οδηγούν στους κάδους αντί για τους κάδους αυτούς καθαυτούς. Με ένα τόσο απλό σύστημα, η αρίθμηση των μονοπατιών είναι άμεση: ΑΑ, ΑΔ, ΔΑ, ΔΔ. Με τέσσερα πιθανά μονοπάτια, δύο από τα οποία καταλήγουν στον μεσαίο

κάδο, η πιθανότητα η μπίλια να καταλήξει στο μεσαίο κάδο είναι 2 στις 4, ή $\frac{1}{2}$. Επειδή κάθε ακριανός κάδος έχει μόνο ένα μονοπάτι που οδηγεί σε αυτόν, η πιθανότητα η μπίλια να καταλήξει σε ένα ακριανό κάδο είναι 1 στις 4, ή $\frac{1}{4}$. Αν προσθέσουμε όλες τις πιθανότητες μαζί, έχουμε την πιθανότητα η μπίλια να καταλήξει σε ένα από τους τρείς κάδους: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$

Αυτό είναι αναμενόμενο, λόγω του ότι η μπίλια είναι αδύνατο να εξαφανιστεί, και πρέπει να καταλήξει σε ένα από τους κάδους. Για να παρουσιάσουμε πιο περίπλοκα δυαδικά συστήματα, μπορούμε να συνεχίσουμε να προσθέτουμε σειρές στην κατασκευή.



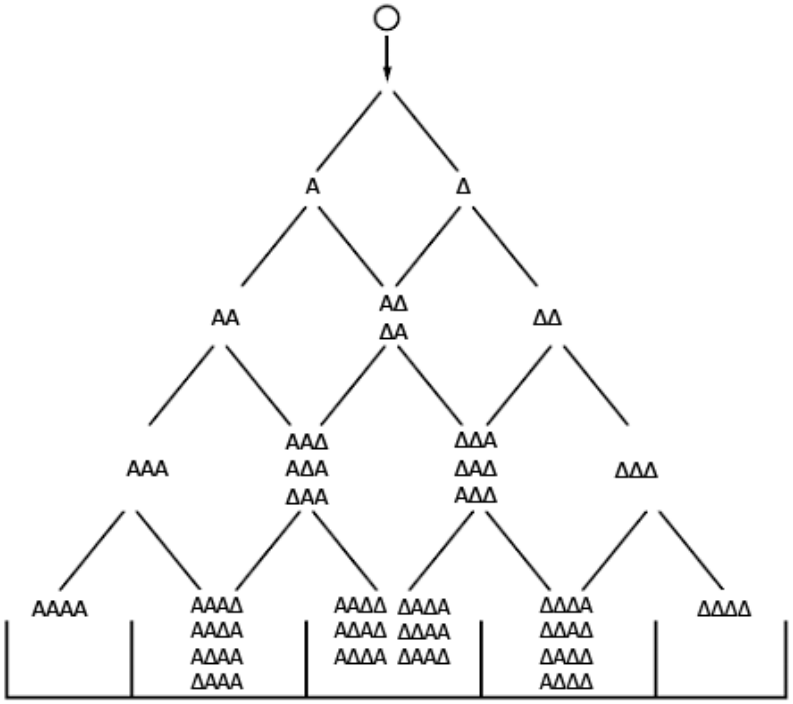
Σχήμα 3.3 : Σύστημα με τρείς σειρές εμποδίων

Με το παραπάνω δείξαμε όλους τους πιθανούς τρόπους, που η μπίλια μπορεί να διασχίσει τις τρεις σειρές εμποδίων. Σε κάθε σειρά η μπίλια χτυπάει ένα μόνο εμπόδιο και πηγαίνει είτε δεξιά είτε αριστερά. Το παραπάνω μοντέλο είναι καλό για κάθε πρόβλημα τριών δυαδικών αποφάσεων, όπως το δικός μας πρόβλημα συλλογής πόντων. Αν αντί για αριστερά και δεξιά, το κάθε εμπόδιο αντιπροσώπευε νίκη ή ήττα, έχουμε ένα μοντέλο, για τους τρεις γύρους που δύο παίχτες θα παίξουν για να τελειώσουν το υποθετικό παιχνίδι τους.

3.3 Εισαγωγή στο τρίγωνο του Pascal

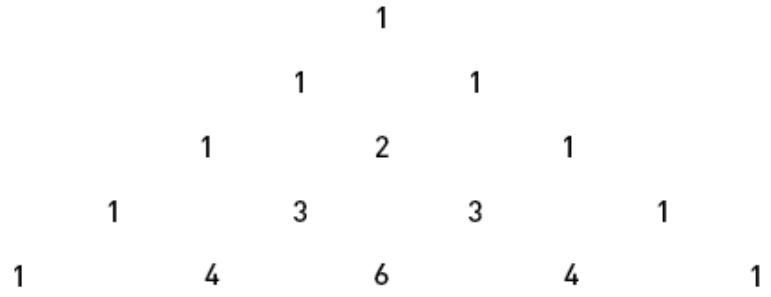
- Για πίνακες του Galton με πολλές σειρές εμποδίων, η καταμέτρηση των μονοπατιών διευκολύνεται πολύ από τη χρήση του τρίγωνου του Pascal.

Επιστρέφοντας στον πίνακα του Galton και προσθέτοντας σειρές εμποδίων προκύπτει η παρακάτω διάταξη:



Σχήμα 3.4 : Πολύπλοκο σύστημα τεσσάρων σειρών εμποδίων

Παρατηρούμε ότι γίνεται δύσκολο να απαριθμηθεί κάθε μονοπάτι. Συνεπώς πρέπει να βρούμε έναν εύκολο τρόπο να υπολογίσουμε τον αριθμό των μονοπατιών που οδηγούν σε κάθε κάδο, σε σχέση με το πόσες σειρές εμποδίων, ή γύροι παιχνιδιού υπάρχουν. Μπορούμε λοιπόν να μοντελοποιήσουμε το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal.



Σχήμα 3.5 : Το τρίγωνο του Pascal

Γενικεύοντας, ο αριθμός των μονοπατιών, από την κορυφή του τριγώνου στον k κάδο στην n σειρά υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{N!}{k!(n-k)!}$$

Ας επιβεβαιώσουμε ότι όντως υπάρχουν έξι μονοπάτια στον μεσαίο κάδο (k=2) της πέμπτης σειράς(n=4).

$$\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{(4\times 3\times 2\times 1)}{(2\times 1)(2\times 1)} = \frac{24}{4} = 6$$

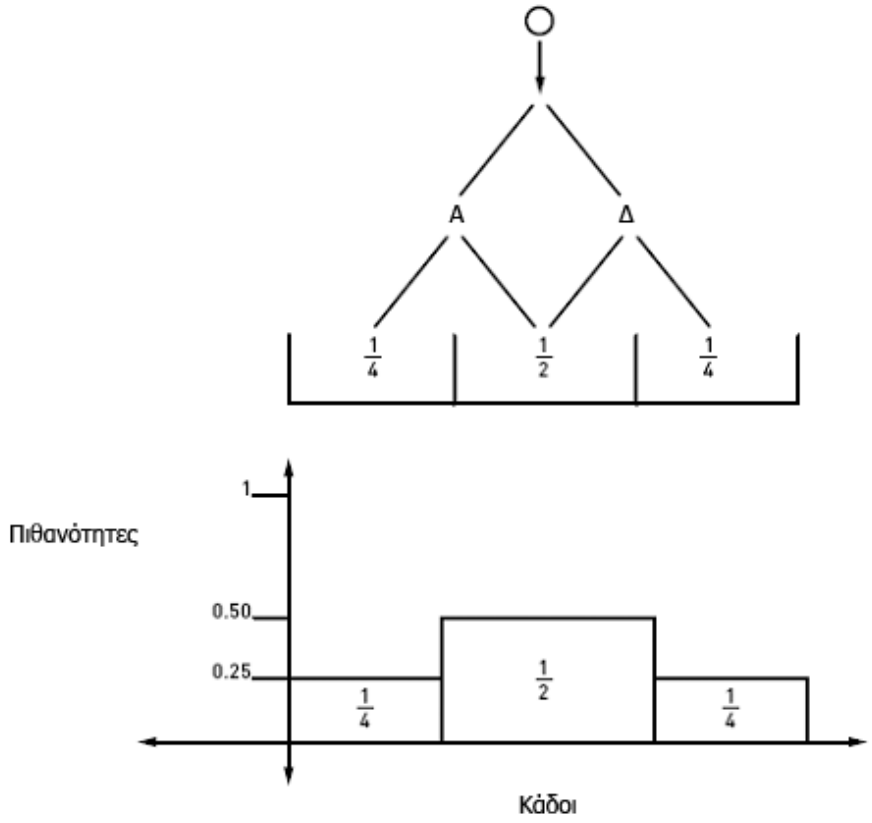
Αθροίζοντας τα σύνολα των μονοπατιών για κάθε κάδο στην n σειρά, μας δίνει τον συνολικό αριθμό των διαθέσιμων μονοπατιών για τη μπίλια, δηλαδή 16. Η πιθανότητα η μπίλια να καταλήξει στον μεσαίο κάδο λοιπόν είναι $\frac{6}{16}$ ή $\frac{3}{8}$.

3.4 Κατανομή

- Κάθε κάδος του πίνακα του Galton έχει μια αντίστοιχη πιθανότητα, κοιτάζοντας όλους τους κάδους ταυτόχρονα παίρνουμε μια κατανομή.
- Επειδή κάθε εμπόδιο αντιπροσωπεύει, το δεξιά ή αριστερά, ή μια δυαδική απόφαση, ή κατανομή των πιθανοτήτων καλείται διωνυμική κατανομή.

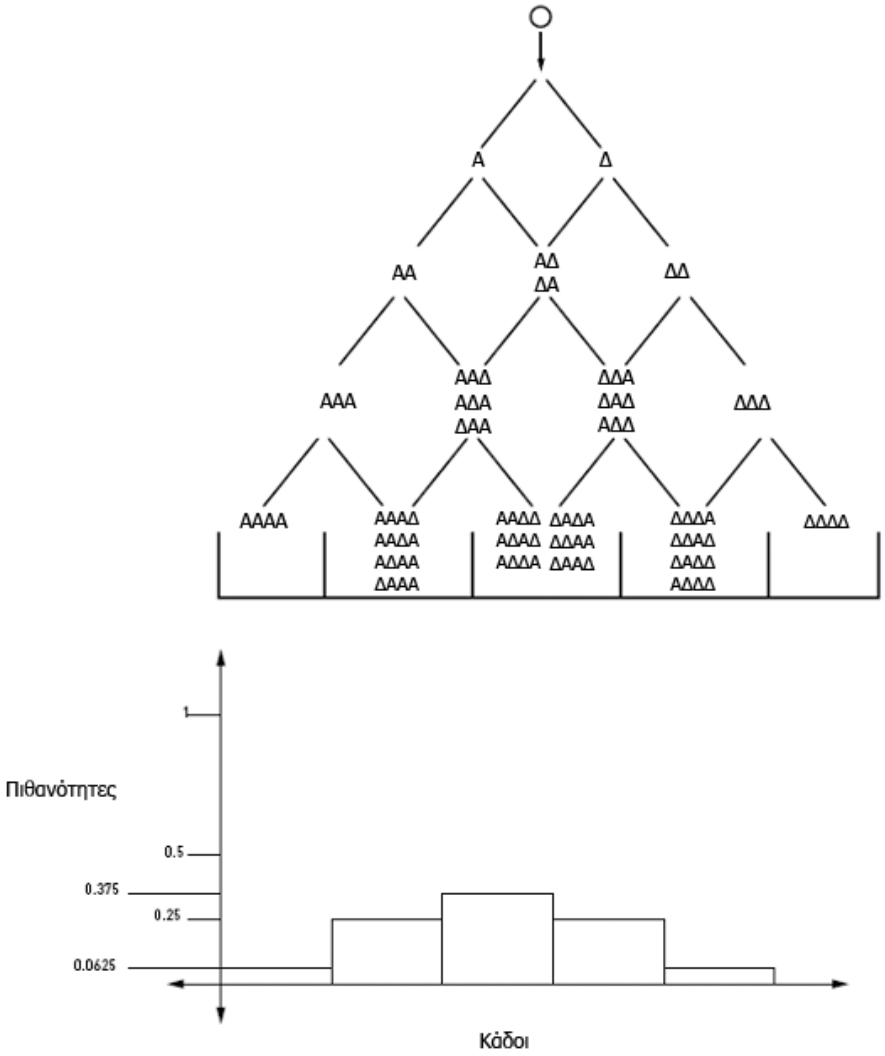
Ας επιστρέψουμε στον πίνακα του Galton για περαιτέρω διερεύνηση. Θα επιστρέψουμε στο κομμάτι των θεωρητικών πιθανοτήτων, και θα εξετάσουμε πως διανέμονται κατά μήκος όλων των κάδων.

Είδαμε προηγουμένως ότι οι κάδοι στη μέση είχαν μεγαλύτερες πιθανότητες από τους κάδους στα πλάγια. Αυτό συνέβαινε επειδή υπήρχαν περισσότερα μονοπάτια που καταλήγουν στη μέση από ότι στα πλάγια. Παρακάτω στο σχήμα 3.6 βλέπουμε ένα ιστόγραμμα που συσχετίζεται με τους κάδους και τις πιθανότητες τους.



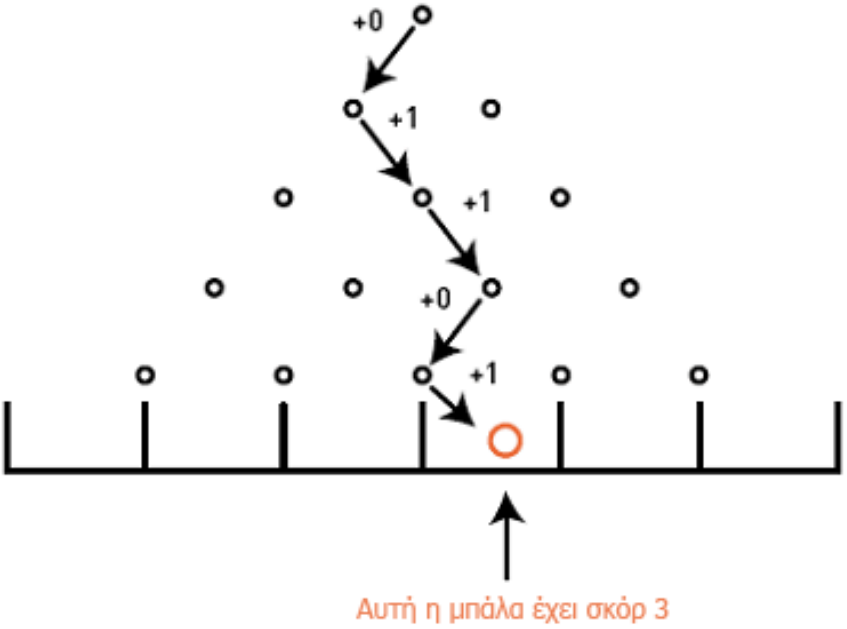
Σχήμα 3.6 : Μια απλή διάταξη δύο σειρών εμποδίων

Παρατηρούμε ότι η κατανομή είναι συμμετρική. Οι πιθανότητες για τον τέρμα δεξιά και τον τέρμα αριστερά κάδο είναι ίσες. Ας δούμε τώρα στο σχήμα 3.7 ένα ιστόγραμμα για ένα πίνακα με τέσσερεις σειρές εμποδίων.



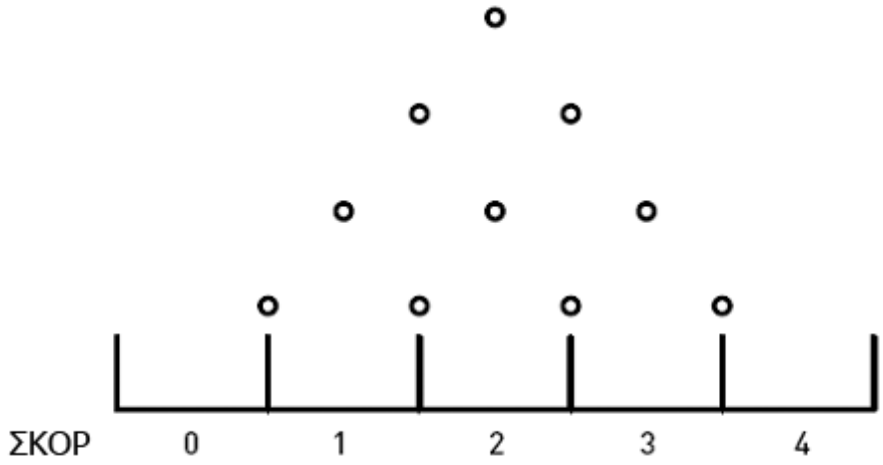
Σχήμα 3.7 : Σύστημα με τέσσερις σειρές εμποδίων

Παρατηρούμε ότι για κάθε έκδοση του συστήματος οι πιθανότητες κατανέμονται κατά μήκος όλων των κάδων, και παρόλο που οι μεμονωμένες πιθανότητες αλλάζουν όσο προσθέτουμε περισσότερους κάδους, πάντα μας δίνουν άθροισμα ένα. Αυτό ήταν αναμενόμενο καθώς κάθε μπίλια πρέπει να καταλήξει σε ένα κάδο. Σε αυτό το σημείο θα επισημάνουμε κάθε κάδο με ένα αριθμό ώστε να αναλύσουμε τα αποτελέσματα.
Η διαδικασία είναι η εξής. Κάθε μπίλια καθώς περνάει από το σύστημα, κερδίζει ένα βαθμό για κάθε κίνηση στα δεξιά, και μηδέν βαθμούς για κάθε κίνηση στα αριστερά. Συνεπώς κάθε κάδος μπορεί να αντιπροσωπευτεί από το αθροιστικό σκορ της μπίλιας που καταλήγει εκεί.



Σχήμα 3.8 : Αθροίζοντας τους βαθμούς της μπίλιας σε σύστημα πέντε σειρών εμποδίων

Για παράδειγμα, μια μπίλια που περνάει από ένα σύστημα τεσσάρων σειρών, μπορεί να έχει μέγιστο σκορ τέσσερα, το οποίο αντιστοιχεί στον τέρμα δεξιά κάδο, και ελάχιστο σκορ μηδέν, που αντιστοιχεί στον τέρμα αριστερά κάδο. Οι υπόλοιποι κάδοι έχουν τα παρακάτω σκορ που φαίνονται στο σχήμα 3.9.



Σχήμα 3.9 : Ονοματίζοντας κάθε κάδο με το σκορ της μπίλιας που καταλήγει σε αυτόν

Το μέσο αποτέλεσμα, το αναμενόμενο σκορ για μια τυχαία μπίλια, υπολογίζεται όπως πριν πολλαπλασιάζοντας το σκορ κάθε κάδου με την πιθανότητα η μπίλια να καταλήξει εκεί, και αθροίζοντας τα αποτελέσματα. Οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{1}{16}\times 0\right)+\left(\frac{4}{16}\times 1\right)+\left(\frac{6}{16}\times 2\right)+\left(\frac{4}{16}\times 3\right)+\left(\frac{1}{16}\times 4\right)=\frac{32}{16}=2$$

Στο παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε επίσης να καταλήξουμε, αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό των σειρών με την πιθανότητα να πάει η μπίλια δεξιά. Δηλαδή 4 σειρές επί την

πιθανότητα $\frac{1}{2}$ που ισούται με 2. Είδαμε ότι ο αριθμός των σειρών αντιστοιχεί στο μέγιστο σκορ που μπορεί να πετύχει μια μπίλια. Πολλαπλασιάζοντας αυτό το σκορ με την μέση πιθανότητα σε κάθε εμπόδιο μας δίνει μια αναμενόμενη μέση τιμή. Επίσης θέλουμε να περιγράψουμε μαθηματικά πως οι τιμές των σκορ κάθε μπίλιας απλώνονται γύρω από την μέση τιμή. Δηλαδή, θέλουμε ένα τρόπο να περιγράψουμε πως τυχαία αποτελέσματα διαφέρουν από την αναμενόμενη τιμή τους.

Μπορούμε να ξεκινήσουμε από τη διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης τιμής κάθε μπίλιας και της μέσης τιμής. Οπότε αφαιρούμε τις δύο ποσότητες: x – m , όπου x = αναμενόμενη τιμή και m = μέση τιμή.

Επειδή αυτή η τιμή είναι κατά μία έννοια απόσταση, θα την υψώσουμε στο τετράγωνο, για να μην μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. $(x - m)^2$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την πιθανότητα να καταλήξει στο συγκεκριμένο κάδο. $P(x - m)^2$

Τελικά αν προσθέσουμε όλους αυτούς τους όρους, θα πάρουμε ένα αριθμό που περιγράφει πως οι αναμενόμενες τιμές των κάδων κατανέμονται γύρω από τη μέση τιμή.

Το παραπάνω είναι γνωστό και ως διακύμανση:

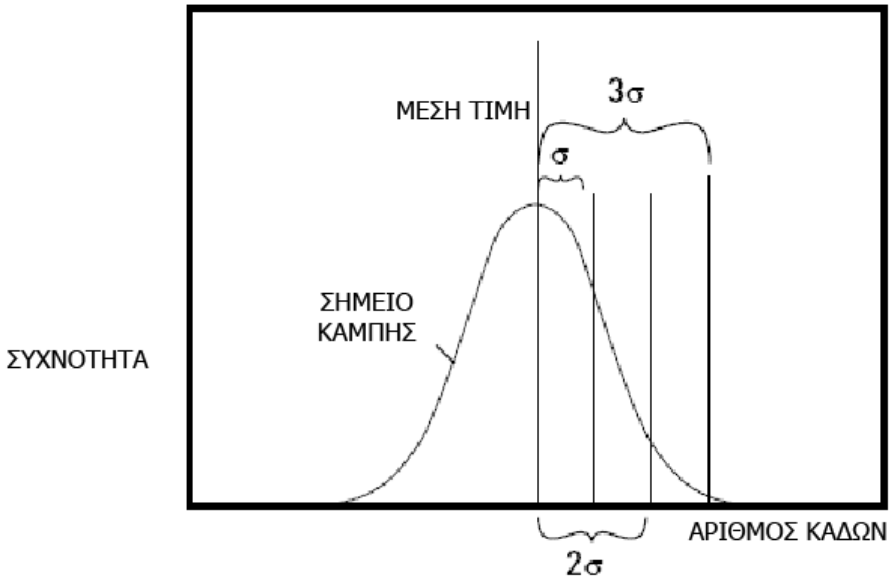
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 P_i$$

Επειδή η διακύμανση βασίζεται σε μια τετραγωνική διαφορά, κλιμακώνεται απότομα. Για παράδειγμα, αν η διαφορά είναι 3 τότε η διακύμανση θα αλλάξει κατά 9. Για να το μετριάσουμε αυτό, ώστε να κλιμακώνεται πιο ομαλά, μπορούμε να πάρουμε την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Αυτή ή ποσότητα είναι γνωστή και ως τυπική απόκλιση, και εκφράζει τη μέση διαφορά μεταξύ της τιμής μιας μπίλιας και της μέσης τιμής.

3.5 68-95-99.7

Η κανονική κατανομή είναι μια ιδανική κατανομή, που καθορίζεται μόνο από τη μέση τιμή και από την τυπική απόκλιση.

Η διωνυμική κατανομή είναι χρήσιμη, αλλά χρονοβόρα στο να υπολογιστεί, ειδικά όταν το n, ο αριθμός των γεγονότων ή ο αριθμός των σειρών στο σύστημα , είναι μεγάλος. Υπάρχει μια προσέγγιση σε αυτή την κατανομή, που είναι ευκολότερο να υπολογιστεί, και παρέχει ένα καλό μοντέλο για την κατανομή των πιθανοτήτων. Μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας μόνο τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, και είναι γνωστή ως κανονική κατανομή, ή κωδωνοειδής καμπύλη.

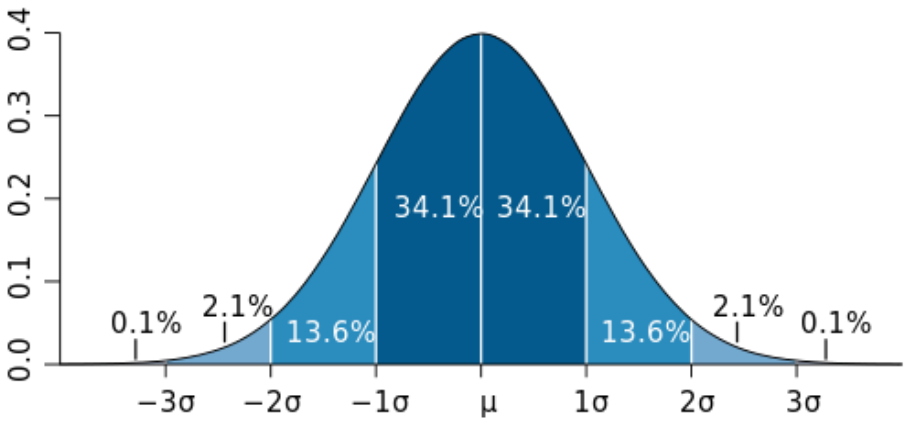


Σχήμα 3.10 : Παρούσίαση της καμπύλης της κανονικής κατανομής

Η κανονική κατανομή σχετίζεται με ένα μοντέλο της κατανομής των πιθανοτήτων, ενδεχόμενων από επαναλαμβανόμενα ανεξάρτητα γεγονότα, επίσης γνωστά σαν δοκιμές Bernoulli. Όπως βλέπουμε, είναι μια κωδωνοειδής καμπύλη, και αποδεικνύεται ότι χαρακτηρίζεται από δύο ιδιότητες. Ένα διακριτικό χαρακτηριστικό είναι η μέση τιμή, η οποία συμπίπτει με το κέντρο την καμπάνας, γύρω από το οποίο είναι συμμετρική.

Το άλλο χαρακτηριστικό είναι η τυπική απόκλιση. Στη γραφική παράσταση παραπάνω αντιστοιχεί στο σημείο που υπάρχει κλίση (υπάρχει μία σε κάθε πλευρά της μέσης τιμής). Μια τυπική απόκλιση είναι η μέση διαφορά μεταξύ ενός ενδεχόμενου και της μέσης τιμής.

Αν το εξετάσουμε ποσοστικά, η τυπική απόκλιση, σημειωμένη σε κάθε πλευρά αριστερά και δεξιά της μέσης τιμής, ορίζει το εύρος μέσα στο οποίο θα βρίσκονται το 68% των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, αν η μέση τιμή του βαθμού σε ένα διαγώνισμα είναι 65 και η τυπική απόκλιση 7, τότε το 68% των φοιτητών θα είχαν βαθμό μεταξύ 58 και 72. Επιπλέον, το 95% των φοιτητών θα είχαν βαθμούς σε εύρος δύο τυπικών αποκλίσεων γύρω από τη μέση τιμή, δηλαδή μεταξύ 51 και 79. Ενώ το 99.7% των φοιτητών θα είχαν βαθμό διαγωνίσματος από 44 έως 86, δηλαδή εύρος τριών τυπικών αποκλίσεων. Το οποίο είναι ευρέως γνωστό ως κανόνας 68-95-99.7 της κανονικής κατανομής.



Σχήμα 3.11 : Γραφίκη αναπαράσταση του κανόνα 68-95-99.7

Η προσέγγιση της κανονικής κατανομής μας παρέχει ένα ισχυρό εργαλείο για να προβλέψουμε το πως τα αποτελέσματα, επαναλαμβανόμενων ανεξάρτητων πειραμάτων, θα κατανέμονται. Επιπλέον όσο περισσότερα συνεχόμενα γεγονότα εξετάζουμε τόσο καλύτερα περιγράφει η κανονική κατανομή τα αποτελέσματα μας. Φυσικά θα υπάρξουν φόρες, που θα έχουμε πειράματα με ακραία αποτελέσματα, για παράδειγμα συνεχόμενες ρίψεις νομίσματος με αποτέλεσμα «κορώνα», τα οποία θα αποκλίνουν από την κανονική κατανομή. Παρ'όλαυτα, κατά μέσο όρο, η κανονική κατανομή αντιπροσωπεύει αρκετά τον πραγματικό κόσμο. Όσον αφορά τον πίνακα του Galton, που είναι 50-50 οι πιθανότητες, ο όποιος μπορεί να μοντελοποιήσει διάφορες δυαδικές καταστάσεις σημαίνει ότι όσες περισσότερες σειρές έχουμε τόσο περισσότερο θα προσεγγίζει την κανονική κατανομή.

4. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

4.1 Η κατασκευή της IFA

Ως πρότυπο χρησιμοποιήθηκε η κατασκευή που έγινε από το IFA (Index Funds Advisors). Οι διαστάσεις της κατασκευής ήταν 2400 χιλιοστά ύψος, 1320 χιλιοστά πλάτος, και 700 χιλιοστά βάθος.



Σχήμα 4.1 : Η κατασκευή του IFA.

Όλη η κατασκευή στηρίχτηκε σε ένα μεταλλικό σκελετό, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2 : Ο μετάλικος σκελέτος γύρω από τον οποίο χτίστηκε όλη η κατασκευή.

Όπως παρατηρούμε η μεταφορά των μπιλιών από τον κάδο συλλογής στο πάνω μέρος πραγματοποιείται με ένα σύστημα γραναζιών. Ένα ηλεκτρικό μοτέρ δίνει κίνηση, μέσω αλυσίδας σε μια σειρά γραναζιών. Πάνω στην αλυσίδα είναι προσαρμοσμένα «κουβαδάκια» τα οποία περισυλλέγουν τις μπίλιες. Παρακάτω στο σχήμα 4.3 εως το σχήμα 4.5 είναι μια σειρά εστιασμένων φωτογραφίων στο παραπάνω σύστημα.



Σχήμα 4.3 : Ο ηλεκτροκινητήρας και το σύστημα μετάδοσης κίνησης

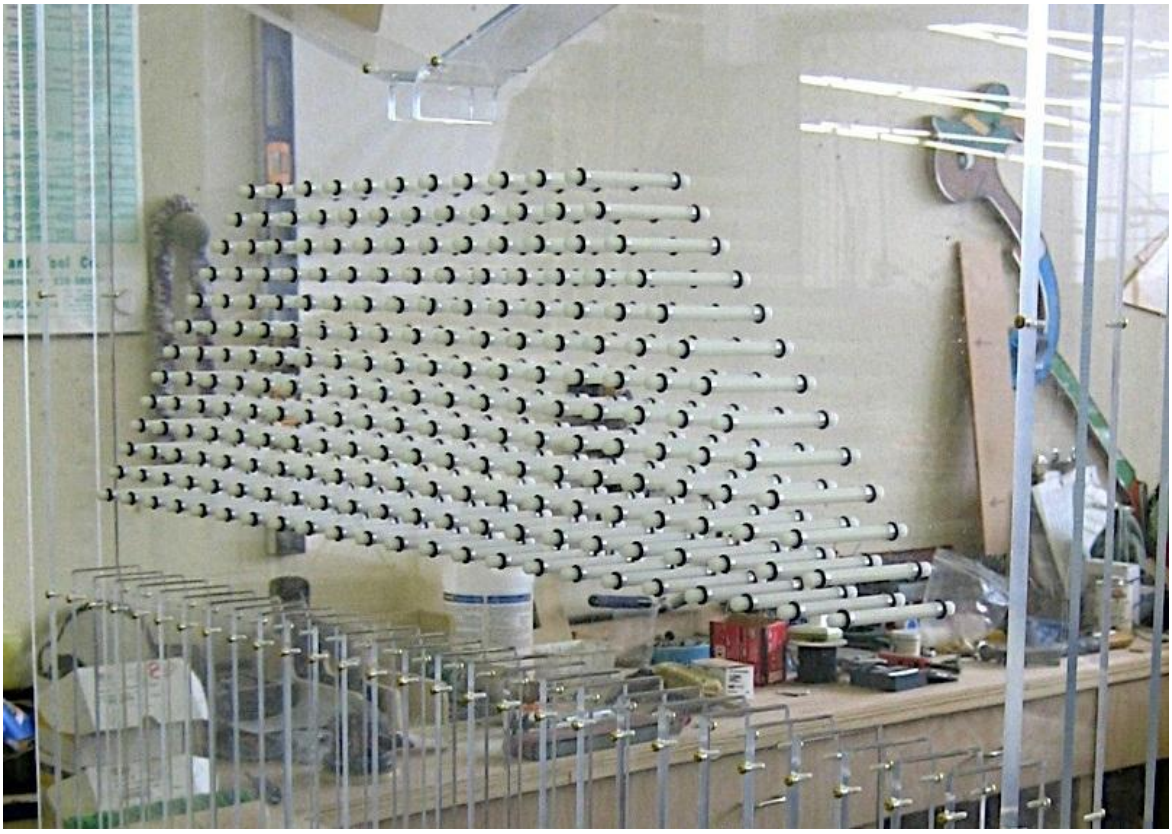


Σχήμα 4.4 : Τα «κουβαδάκια» προσαρμοσμένα πάνω στην αλυσίδα



Σχήμα 4.5 : Το σημείο από οπού συλλέγονται οι μπίλιες

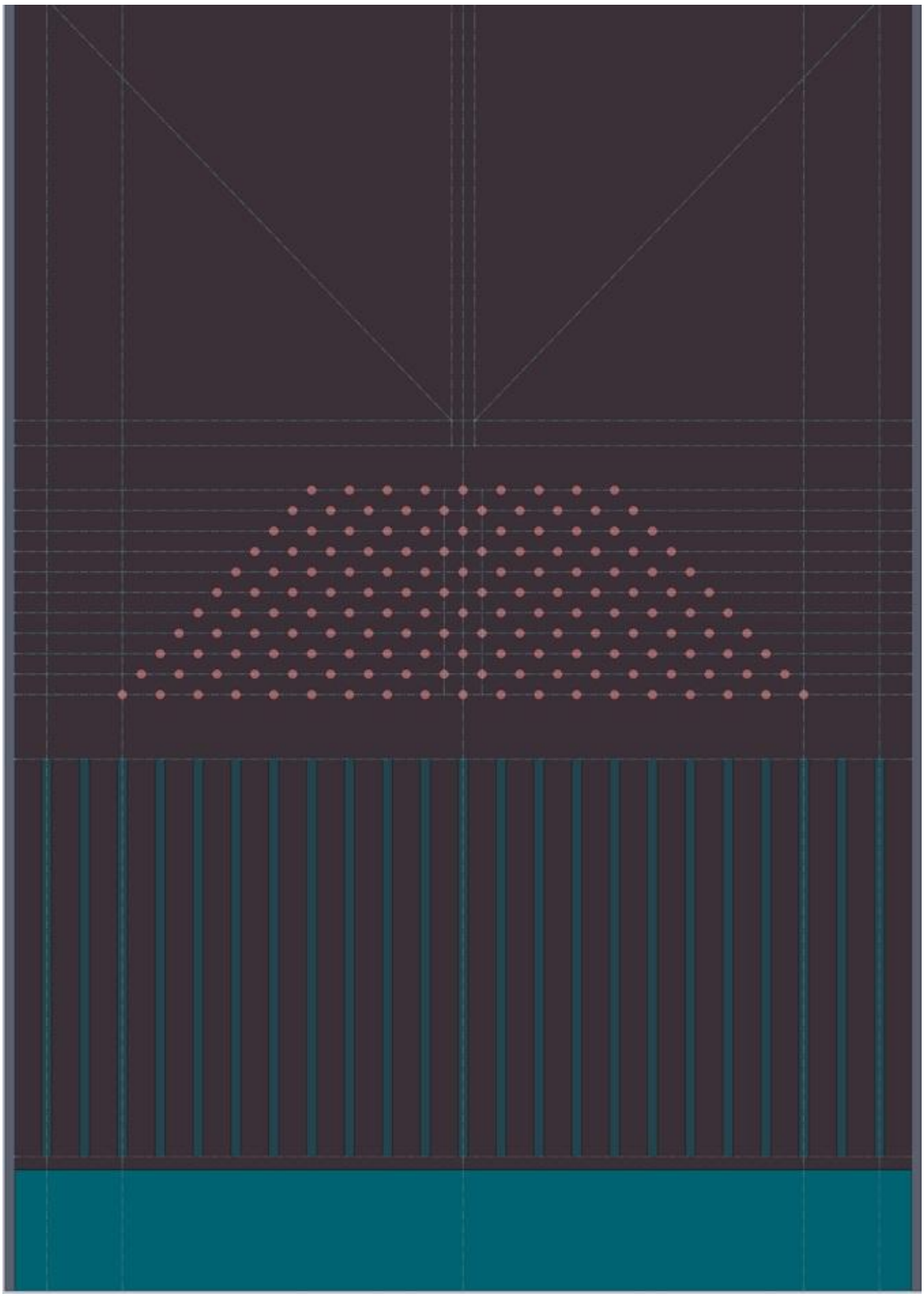
Το κομμάτι της κατασκευής στο οποίο σχηματίζεται η καμπύλη είναι κατασκευασμένο από πλεξιγκλάς. Ακόμη παρατηρούμε τα εμπόδια τα οποία είναι κατασκευασμένα από πολυοξυμεθυλαίνιο, γνωστό και σαν ακετάλη, ένα υλικό παρόμοιο με το τεφλόν. Κάθε εμπόδιο παραμένει στερεωμένο στη θέση του με δύο ελαστικούς δακτύλιους (o-ring) σε κάθε άκρη.



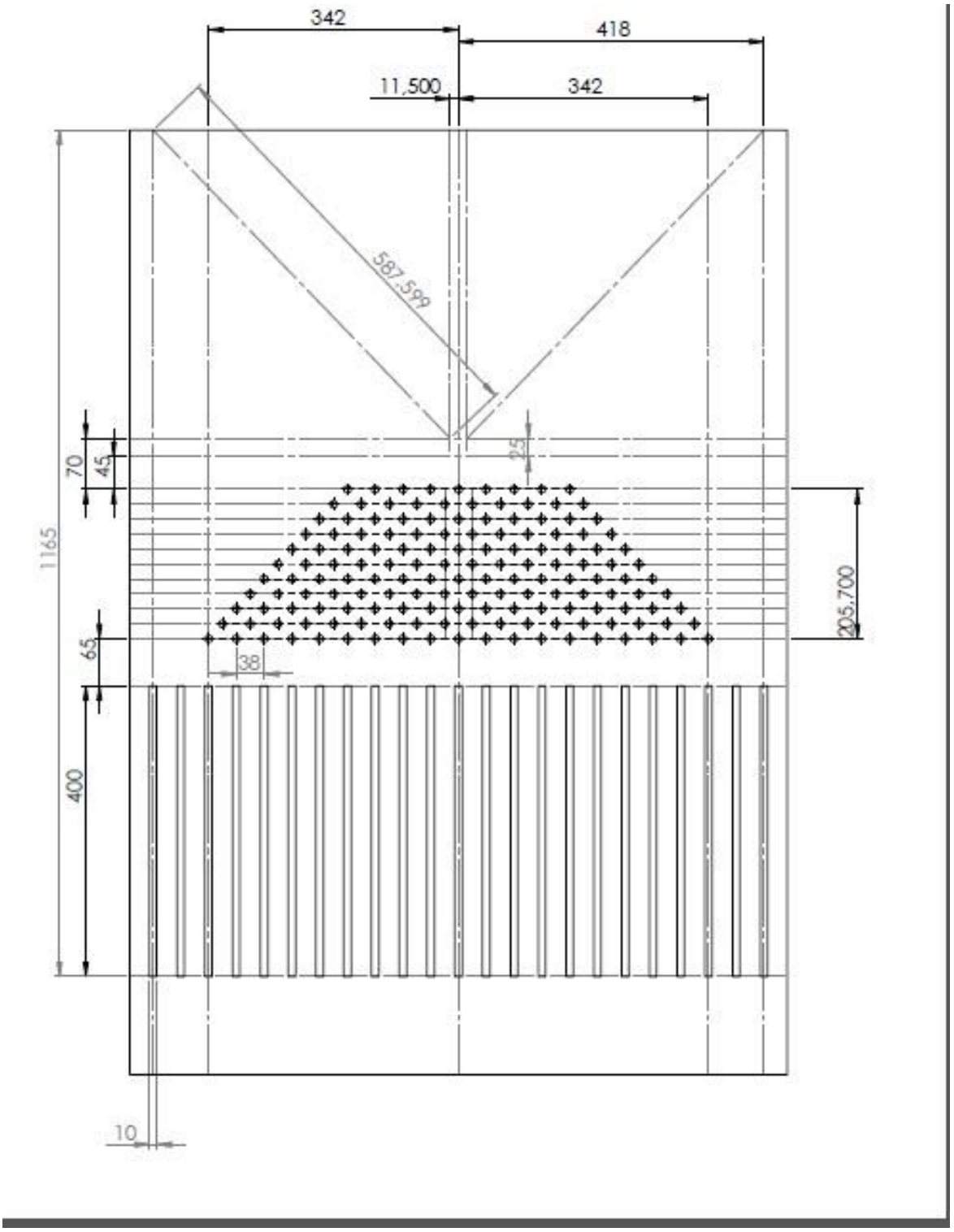
Σχήμα 4.6 : Το τμήμα όπου υπάρχουν τα εμπόδια

4.2 Σχεδιασμός του μοντέλου της κατασκευής

Με βάση το παραπάνω μοντέλο σχεδιάστηκε στον υπολογιστή ένα τρισδιάστατο μοντέλο, που χρησίμευσε σαν οδηγός για την τελική κατασκευή. Το σχεδιαστικό πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε ήταν το Solidworks.



Σχημά 4.7 : Η τρισδιάστατη απεικόνιση της κατασκεύης.

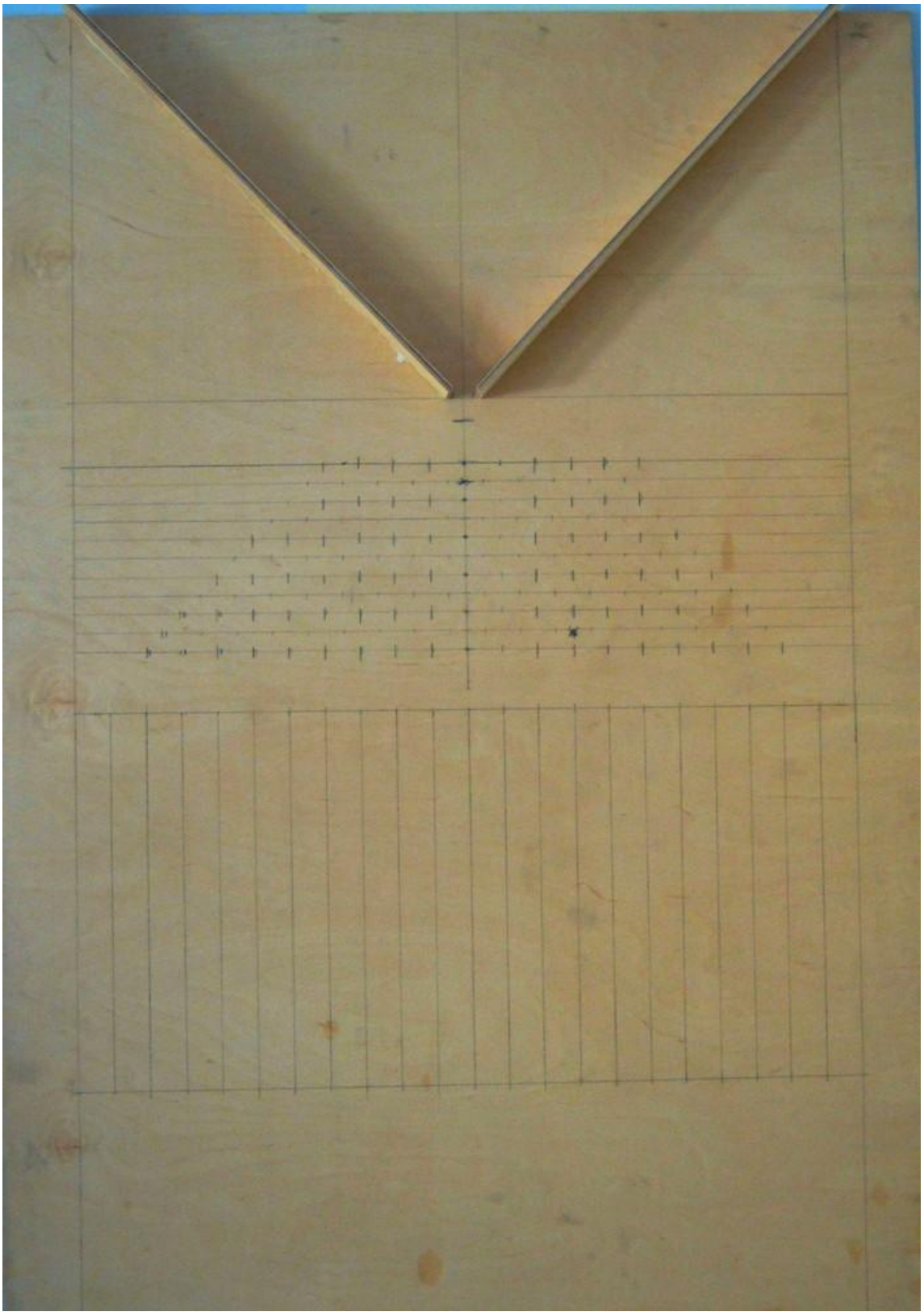


Σχήμα 4.8 : Η διαστασιολόγηση του μοντέλου.

4.3 Κατασκευή του μοντέλου

Η κατασκευή που πραγματοποιήθηκε με βάση το παραπάνω μοντέλο, έχει τις εξής διαστάσεις: 1500 χιλιοστά ύψος, 1015 χιλιοστά πλάτος και 75 χιλιοστά βάθος. Ως βάση της κατασκευής χρησιμοποιήθηκε ένα κομμάτι ξύλου(κόντρα πλακέ), διαστάσεων 1500mm x 1000mm. Πάνω σε αυτό προσαρμόστηκαν όλα τα υπόλοιπα κομμάτια. Ως

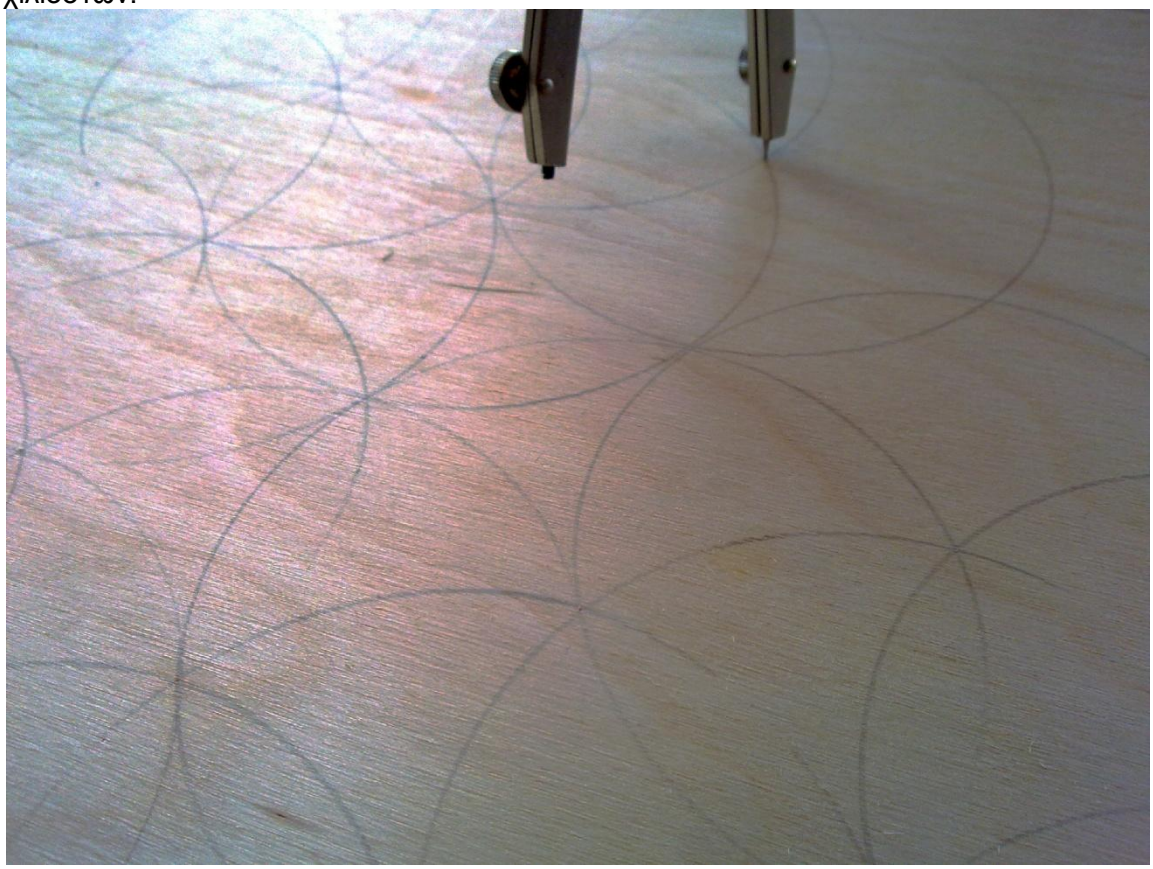
οδηγός-σιφόνι για τις μπίλιες χρησιμοποιήθηκαν δύο κομμάτια ξύλου διαστάσεων 590mm x 50mm.



Σχήμα 4.9 : Η κατασκευή στην αρχική της φάση

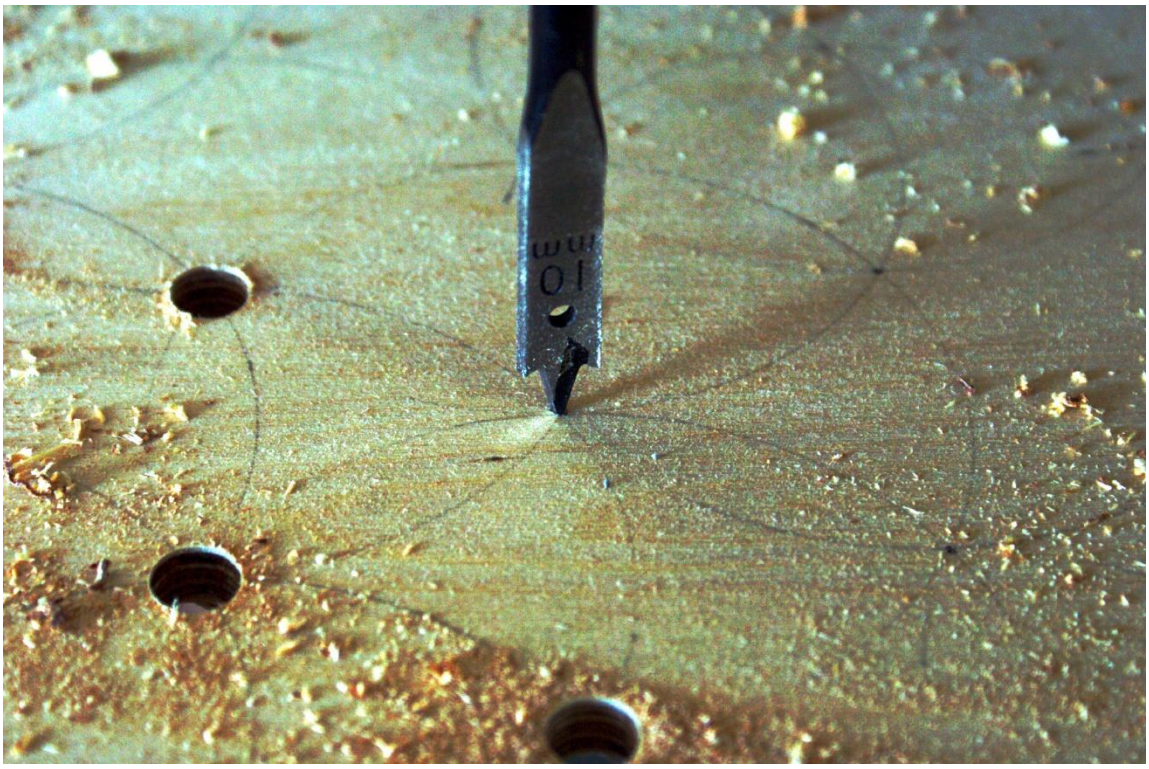
Στη συνέχεια σχεδιάστηκαν ευθείες γραμμές που χρησιμευσαν ως «οδηγοί» για τις υπόλοιπες διαστάσεις. Σειρά είχε η χάραξη των σημείων οπού θα τοποθετούνταν τα εμπόδια. Με συνδυασμό κανόνα και διαβήτη σημαδεύτηκαν όλα τα σημεία. Τα εμπόδια

είναι κυλινδρικά κομμάτια ακετάλης, διαμέτρου δέκα χιλιοστών και μήκους εβδομήντα χιλιοστών.

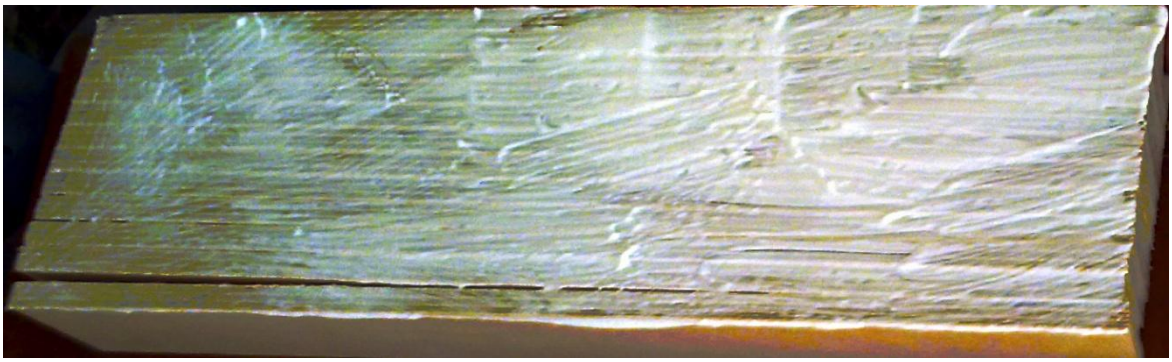


Σχήμα 4.10 : Υπολογισμός αποστάσεων για τα σημεία διάτρησης

Στη συνέχεια τρυπήθηκε η «πλάτη» της κατασκευής, ώστε να τοποθετηθούν τα εμπόδια. Για την διάτρηση χρησιμοποιήθηκε τρυπάνι διαμέτρου δέκα χιλιοστών.



Σχήμα 4.11 : Φωτογραφία από τη στιγμή της διάτρησης
Οι θήκες όπου θα κατέληγαν οι μπίλιες ή αλλιώς «κάδοι», φτιάχτηκαν τοποθετώντας παράλληλα είκοσι τρία ξύλα διαστάσεων 400mm x 50mm. Τα οποία αρχικά κολλήθηκαν και στη συνέχεια βιδώθηκαν πάνω στη βάση.



Σχήμα 4.12 : Τα ξύλα λίγο πρίν κολληθούν στην κατασκεύη

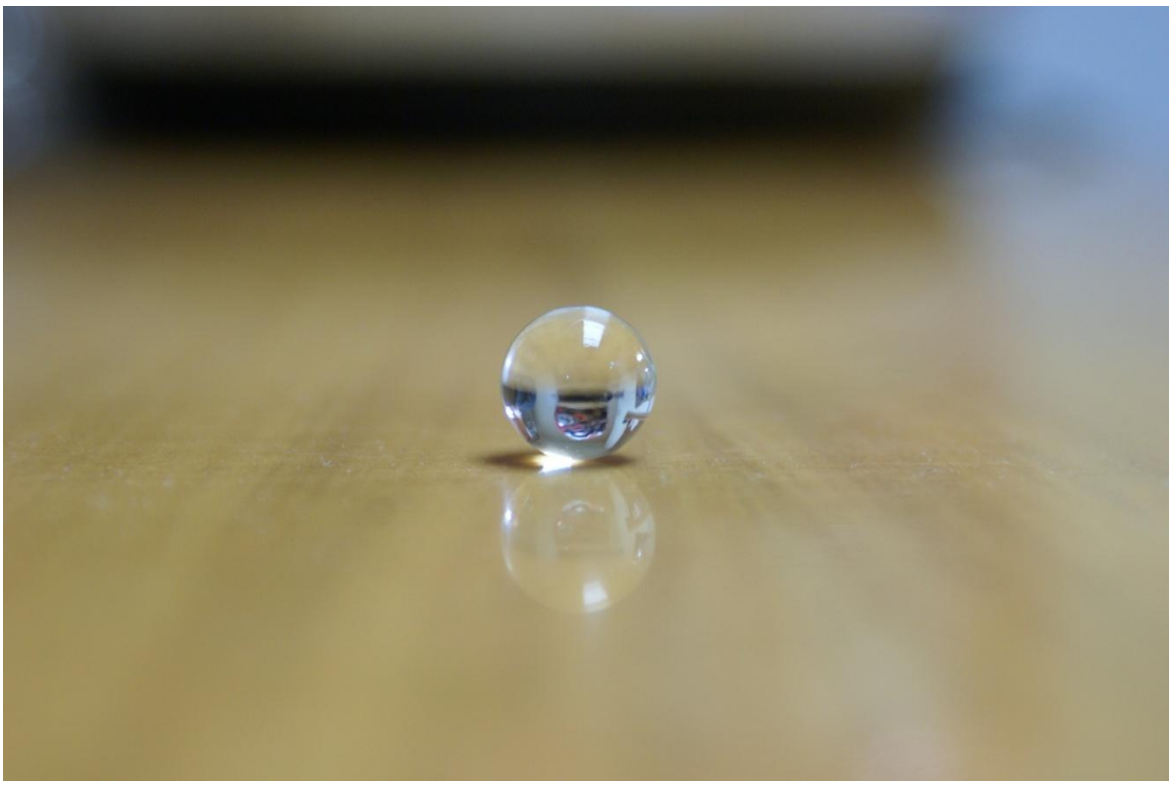
Έπειτα τοποθετήθηκαν τα πλαϊνά τοιχώματα καθώς και το πάτωμα της κατασκευής. Προηγούμενος είχε ανοιχτεί ένας αρμός ή «κινησιά» μέσα στην οποία θα στερεωνόταν η πρόσοψη της κατασκευής.



Σχήμα 4.13 : Η κατασκευή στο τελικό στάδιο συναρμολόγησης

Λόγω του ότι οι μπίλιες θα έπρεπε με κάποιο τρόπο να φεύγουν από τους κάδους που θα κατέληγαν, ο πάτος των κάδων ήταν ένα ενιαίο ξύλο διαστάσεων 1100mm x 50mm. Για να μπορεί να κινείται ανοίχτηκε μια οπή στο δεξί πλαϊνό τοίχωμα της κατασκευής. Ακόμη τοποθετήθηκαν κάθετα κομμάτια ξύλου, τα οποία είχαν διπλή ιδιότητα, αφενός να στηρίζουν το ξύλο όταν είχε το βάρος από τις μπίλιες και αφετέρου να το οδηγάνε όταν επέστρεφε στη θέση του αφού είχε τραβηχτεί έξω.

Οι μπίλιες που χρησιμοποιήθηκαν είναι γυάλινες, διαμέτρου έντεκα χιλιοστών και βάρους 2 γραμμάριων. Ο αριθμός τους είναι περίπου τέσσερις χιλιάδες.



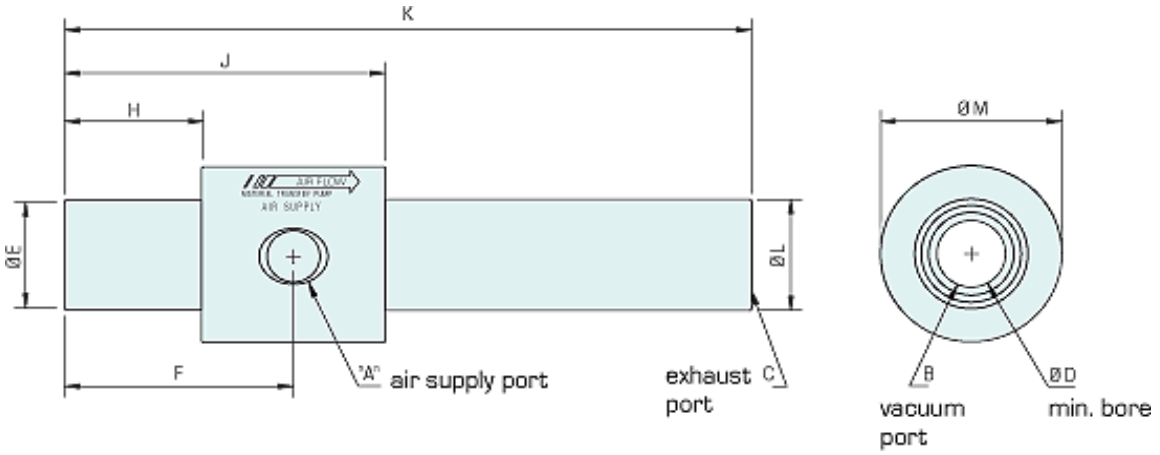
Σχήμα 4.14 : Φωτογραφία της μπίλιας

Το επόμενο πρόβλημα που έπρεπε να λυθεί ήταν ο τρόπος που θα μεταφερόταν οι μπίλιες μετά το τέλος του πειράματος πάλι στην κορυφή. Αφού απορρίψαμε τον τρόπο που έχει επιλέξει η IFA, λόγω πολυπλοκότητας και κόστους, καταλήξαμε σε μια λύση που χρησιμοποιεί πεπιεσμένο αέρα. Μετά από έρευνα, καταλήξαμε στην εταιρεία Sommer-Technik. Αφού εξηγήσαμε την ιδέα και τις απαιτήσεις της κατασκευής καταλήξαμε στο μοντέλο DF10-3.



Σχήμα 4.15 : Η συσκευή μεταφόρας

Η συσκευή βασίζεται στη δύναμη της υποπίεσης που δημιουργείται παρέχοντας αέρα υψηλής πίεσης. Οι διαστάσεις του μοντέλου που χρησιμοποιήσαμε αναλύονται στο σχήμα 4.16.



Σχήμα 4.16 : Οι διαστάσεις του μεταφορέα DF 10-3

A = 9.53mm , η είσοδος της παροχής του αέρα
B = 25.40mm, η εσωτερική διάμετρος της εισαγωγής
C = 25.40mm, η εσωτερική διάμετρος της εξαγωγής
D = 25.40mm , η ελάχιστη εσωτερική διάμετρος
E = 37.10mm, η εξωτερική διάμετρος
F = 63.50mm, η απόσταση από την αρχή μέχρι το κέντρο της εισόδου του αέρα
H = 38.10mm, J = 88.90mm, K = 190.50mm, L = 37.60mm, M = 56.60mm

Η κανονική κατανάλωση αέρα είναι 680 λίτρα/λεπτό, και η κανονική πίεση λειτουργίας τα 5.5 bar.

Κάτω από τους κάδους δημιουργήθηκε ένας χώρος όπου συγκεντρώνονται οι μπίλιες, μετά το τέλος του πειράματος. Σε αυτό τον χώρο ανοίχτηκε κάτω δεξιά γωνία μια τρύπα. Για να είναι βέβαιο ότι όλες οι μπίλιες θα καταλήξουν μέσα στην τρύπα, τοποθετήθηκε ένα ξύλο υπό κλίση. Στο πίσω μέρος της κατασκευής προσαρμόστηκε στην τρύπα μια γωνία ενενήντα μοιρών, κατασκευασμένη από χαλκοσωλήνα. Στο σχήμα 4.17 και στο σχήμα 4.18, φαίνεται ο παραπάνω χώρος. Παρατηρεί κάνεις την επικλινή επιφάνεια, η οποία οδηγεί όλες τις μπίλιες στην οπή αναρρόφησης.

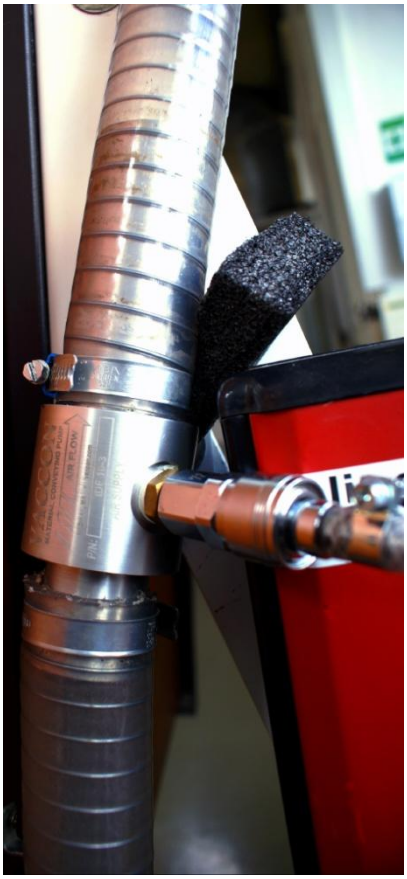


Σχήμα 4.17 : Ο χώρος που καταλήγουν οι μπίλιες μετά το τέλος του πειράματος



Σχήμα 4.18 : Η οπή αναρρόφησης, από όπου οι μπίλιες οδηγούνται στη συσκευή μεταφοράς

Στη συνέχεια προσαρμόστηκε ένας διαφανής πλαστικός σωλήνας, ενισχυμένος με μεταλλικό σκελετό. Πάνω σε αυτό το σωλήνα τοποθετήθηκε ο μεταφορέας κενού (vacuum conveyor). Στην είσοδο αέρα του εξαρτήματος τοποθετήθηκε ένας ταχυσύνδεσμος, για την εύκολη σύνδεση-αποσύνδεση στο δίκτυο παροχής αέρα. Στη συνέχεια συνδέθηκε ένα λάστιχο υψηλής πίεσης, μαζί με μια βάνα για να ρυθμίζεται η πίεση.



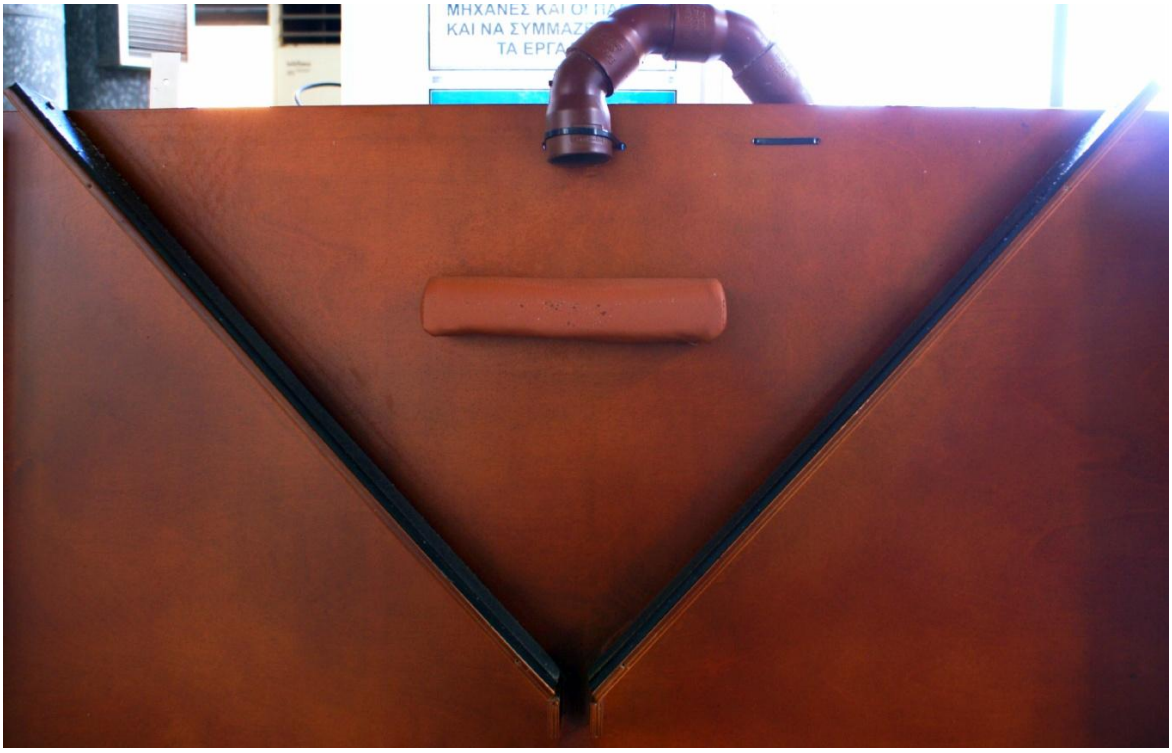
Σχήμα 4.19 : Το τμήμα σύνδεσης του DF 10-3 πάνω στο σωλήνα μεταφοράς

Το τελευταίο κομμάτι όσον αφορά τη μεταφορά των μπιλιών, είναι μια σειρά συνεχόμενων γωνιών σαράντα πέντε μοιρών ονομαστικής διαμέτρου σαράντα χιλιοστών, κατασκευασμένων από πλαστικό σωλήνα. Αρχικά είχε επιλέγει η ίδια γωνία που υπάρχει και στην αρχή, αλλά υπήρχε έντονη παραμόρφωση των τοιχωμάτων λόγω της απότομης αλλαγής κατεύθυνσης. Παρακάτω στο σχήμα 4.20 φαίνεται το σύμπλεγμα των γωνιών.



Σχήμα 4.20 : Συνεχόμενες γωνίες 45^{o}

Το επόμενο πρόβλημα που παρουσιάστηκε ήταν η διατάραξη της ρίψης των μπιλιών, λόγω της πίεσης του αέρα. Στην περιοχή που βγαίνανε δημιουργούταν ρεύμα αέρα το οποίο επηρέαζε την πτώση των μπιλιών και κατά συνέπεια την τελική κατανομή τους. Το παραπάνω αντιμετωπίστηκε τοποθετώντας ένα εμπόδιο, πάνω στο οποίο προσκρούουν αρχικά οι μπίλιες και έπειτα συνεχίζουν κανονικά μέσω του οδηγού-σιφονιού, στο τμήμα με τα εμπόδια.



Σχήμα 4.21 : Άποψη της εξόδου των μπιλιών και του εμποδίου που ομαλοποιεί την πτώση τους

Αφού συναρμολογήθηκε πλήρως και δοκιμάστηκε, η κατασκευή βάφτηκε και ενισχύθηκε με ένα στρώμα λούστρου ανθεκτικού στα χτυπήματα και στη φθορά. Στο σχήμα 4.22 υπάρχει μια φωτογραφία όπου φαίνεται η κατασκευή ολοκληρωμένη, αν και απουσιάζει η πρόσοψη. Η πρόσοψη είναι κατασκευασμένη από πλεξιγκλάς πάχους έξι χιλιοστών.



Σχημά 4.22 : Η κατασκευή πλήρης

Περνώντας οι μπίλιες λοιπόν από τη διάταξη των εμποδίων και καταλήγοντας στους κάδους στο τέλος, σχηματίζουν μια κατανομή. Της οποίας το σχήμα μπορεί να προσεγγιστεί με την καμπύλη της κανονικής κατανομής.



Σχήμα 4.23 : Η κατανομή των μπιλιών όπως φαίνεται στο τέλος του πειράματος

5. ΣΥΝΟΨΗ

Πραγματοποιώντας λοιπόν αρκετές δοκιμές, αποδεικνύεται ότι πάντα σχηματίζεται η καμπύλη της κανονικής κατανομής. Όποτε συμπεραίνουμε ότι για μεγάλο πλήθος δυαδικών αποφάσεων ή πειραμάτων, η κατανομή τους μπορεί να προσεγγιστεί και εντέλει να μελετηθεί, με την κανονική κατανομή.

Όπως ήταν αναμενόμενο, η καμπύλη δεν προκύπτει πάντα ίδια, καθώς υπάρχουν παράγοντες που δεν μπορούν να είναι σταθεροί κάθε φορά. Για παράδειγμα η πορεία των μπιλίων κάποιες φορές επηρεάζεται περισσότερο από το ρεύμα αέρα, ή από τις μεταξύ τους συγκρούσεις. Ακόμη η κλίση του πίνακα γύρω από τον οριζόντιο άξονα του επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Όσον αφορά τις δυνατότητες για περαιτέρω διερεύνηση, υπάρχουν πάρα πολλές. Για παράδειγμα τι θα συνέβαινε αν θέλαμε να προσομοιώσουμε τις ρίψεις ενός «πειραγμένου» νομίσματος, ή το παιχνίδι μεταξύ δύο άνισων αντιπάλων. Η κλίση του πίνακα γύρω από τον κάθετο άξονα θα επηρέαζε το αποτέλεσμα υπέρ τους ενός ή του άλλου. Αν μετατοπίζαμε την οπή ρίψης των μπιλιών προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά, πως αυτό θα επηρέαζε την κατανομή.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- The normal curve and Galton's board, 2007, Paul Trow
- Galton Board, AIMS Education Foundation 2002, Jim Wilson
- Galton Board, Department of Mechanics and Mathematics Moscow State University 2003, V. V. Kozlov & M. Yu. Mitrofanova
- The Galton board revisited, Making sense of Randomness, Mathematics Illuminated
- Bean machine, Wikipedia – The free encyclopedia
- Galton Board – The probability machine, Index Fund Advisors
- Experiments with a Galton board, New Jersey Institute of Technology 2002, Christopher Oshman
- Πιθανότητες Τυχαίες Μεταβλητές & Στοχαστικές Διαδικασίες, εκδόσεις Τζιολα 2007, Athanasios Papoulis & A. Unnikrishna Pillai