

**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**  
**ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ**



**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»**

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**  
**ΡΟΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΣΕ ΜΗ ΔΟΜΗΜΕΝΑ**  
**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ**

**ΓΕΩΡΓΙΟΣ Μ. ΑΝΕΖΑΚΗΣ**

Επιβλέπων : Επίκουρος Καθηγητής **Ανάργυρος Ι. Δελής**

**ΧΑΝΙΑ , 2009**



---

Η διατριβή αυτή εξετάστηκε με επιτυχία από την παρακάτω Τριμελή Επιτροπή :

- Επίκουρο Καθηγητή Ανάργυρο Ι. Δελή ως Επιβλέπων
- Επίκουρο Καθηγητή Νικόλαο Ζωγραφόπουλο
- Επίκουρο Καθηγητή Εμμανουήλ Μαθιουδάκη

η οποία ορίστηκε κατά την 24<sup>η</sup>/22.3.2007 συνεδρίαση της Γενικής Συνέλευσης Ειδικής Σύνοδου του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης.





# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Μαθηματικό Μοντέλο</b>	<b>13</b>
2.1	Νόμοι διατήρησης μάζας-ορμής . . . . .	13
2.2	Εξισώσεις ρηχών υδάτων στη μία διάσταση . . . . .	15
2.3	Πρόβλημα Riemann . . . . .	17
2.4	Εξισώσεις ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις . . . . .	19
2.5	Υπερβολικός Χαρακτήρας των Εξισώσεων . . . . .	22
2.6	Δυσκολίες εύρεσης αναλυτικής λύσης . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Αριθμητικό Σχήμα</b>	<b>25</b>
3.1	Επιλογή αριθμητικής μεθόδου . . . . .	25
3.2	Διακριτοποίηση ομογενούς συστήματος . . . . .	27
3.3	Γεωμετρικές παρατηρήσεις . . . . .	33
3.4	Η συνθήκη CFL . . . . .	35
3.5	Διακριτοποίηση του πηγαίου όρου . . . . .	36
3.6	Στάσιμη κατάσταση και C-ιδιότητα . . . . .	38
3.7	Αρχικές και συνοριακές συνθήκες . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Κατασκευή Υπολογιστικού Πλέγματος</b>	<b>43</b>
4.1	Καρτεσιανά ή μη καρτεσιανά χωρία . . . . .	43
4.2	Μη δομημένα υπολογιστικά πλέγματα . . . . .	45
4.2.1	Συνδεσιμότητα κελιών-τριγώνων . . . . .	47
4.2.2	Συνδεσιμότητα πλευρών . . . . .	48
4.2.3	Συνδεσιμότητα κόμβων και γεωμετρικοί υπολογισμοί . . . . .	49
4.3	Λειτουργία του EasyMesh . . . . .	50
4.3.1	Αρχείο εισόδου . . . . .	51
4.3.2	Αρχεία εξόδου . . . . .	58

<b>5 Προβλήματα</b>	<b>61</b>
5.1 Πρόβλημα 1 : Μερική κατάρρευση φράγματος . . . . .	61
5.2 Πρόβλημα 2 : Κατάρρευση κυκλικού φράγματος . . . . .	73
5.3 Πρόβλημα 3 : Διάδοση κύματος σε τοπογραφία . . . . .	82
<b>6 Συμπεράσματα</b>	<b>93</b>
<b>Α΄ Πηγαίος Κώδικας</b>	<b>101</b>

# Ευχαριστίες

Στην δημιουργία της παρούσας εργασίας πολλοί είναι αυτοί που συνέβαλλαν, ο καθένας με τον δικό του τρόπο. Πρώτα απ' όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον σύμβουλο και καθοδηγητή μου καθόλη τη διάρκεια της εργασίας αυτής Επίκουρο Καθηγητή Ανάργυρο Δελή, η συμβολή του οποίου ήταν καθοριστική στην ολοκλήρωση αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής. Επίσης ευχαριστώ θερμά και τους Επίκουρους Καθηγητές Εμμανουήλ Μαθιουδάκη και Νικόλαο Ζωγραφόπουλο για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή. Όλους τους καθηγητές του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης καθώς και τους συναδέλφους μου μεταπτυχιακούς και διδακτορικούς φοιτητές για την άριστη συνεργασία μας. Τον διευθυντή του Εργαστηρίου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Ηλεκτρονικών Υπολογιστών Καθηγητή Ιωάννη Σαριδάκη για την παραχώρηση των απαραίτητων υπολογιστικών μέσων του εργαστηρίου. Τέλος ευχαριστώ την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την σημαντική ηθική συμπαράσταση και υποστήριξη που μου παρείχαν καθόλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Οι μόνιμες ή μη ροές νερού ελεύθερης επιφάνειας και οι ροές σε ανοιχτούς αγωγούς, κάτω από την επίδραση της βαρύτητας, καλύπτουν μία μεγάλη οικογένεια φυσικών προβλημάτων με αξιοσημείωτο επιστημονικό και πρακτικό ενδιαφέρον, ιδιαίτερα για τη μηχανική, την υδραυλική και το περιβάλλον. Τα σημαντικότερα από αυτά τα φυσικά προβλήματα είναι η κατάρρευση φραγμάτων, οι πλημμύρες, η ροή ποταμών, η μεταφορά ρύπων και η διάδοση υδάτινων κυμάτων, τα οποία έχουν συγκεντρώσει το ενδιαφέρον του επιστημονικού κόσμου για αρκετά χρόνια. Το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τα φυσικά φαινόμενα υπό εξέταση, αποτελείται από συστήματα μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων με αρχικές και συνοριακές συνθήκες και μάλιστα οι εξισώσεις αυτές είναι υπερβολικού τύπου. Η μη γραμμικότητα των εξισώσεων καθώς και η δυσκολία εφαρμογής των οριακών συνθηκών, λόγω της περίπλοκης γεωμετρίας του πυθμένα και της ελεύθερης επιφάνειας, αποτελούν ανασταλτικούς παράγοντες στην εύρεση αναλυτικών λύσεων. Οι αναλυτικές λύσεις είναι εφικτό να βρεθούν μόνο σε λίγες εξιδανικευμένες περιπτώσεις, οι οποίες σαφώς και δεν ικανοποιούν την επιστημονική έρευνα. Η ραγδαία όμως ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών ήρθε να εκτοξεύσει την επιστημονική έρευνα με την ανάπτυξη ενός μεγάλου αριθμού αριθμητικών-υπολογιστικών μεθόδων. Οι αρχικές λύσεις όμως των μεθόδων αυτών λάμβαναν τόπο μόνο σε ένα αριθμό διακεκριμένων σημείων επί του συνόλου του υπολογιστικού χώρου. Με κατάλληλες όμως επιλογές και τροποποιήσεις των αριθμητικών σχημάτων ο ηλεκτρονικός υπολογιστής παρέχει ανάλογες δυνατότητες με τη λύση της φυσικής προσομοίωσης του πεδίου ροής σε κατάλληλα εργαστήρια. Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την μελέτη κατάλληλων αξιόπιστων αριθμητικών σχημάτων που θα επιλύουν αριθμητικά το μαθηματικό μοντέλο με ικανοποιητική ακρίβεια και θα προσομοιώνουν ανάλογα τα φυσικά φαινόμενα που μας ενδιαφέρουν.

Οι εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν το μαθηματικό μοντέλο είναι οι εξισώσεις ρηχών

υδάτων (SWE). Αυτές προέρχονται από τις εξισώσεις Navier-Stokes [36, 52] με την παραδοχή ότι η καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας του νερού είναι μεγάλη σχετικά με το βάθος του νερού. Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων αντιπροσωπεύουν συστήματα μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου. Είναι διατυπωμένες στην συντηρητική τους μορφή (hyperbolic conservation laws), με αποτέλεσμα να περιγράφουν ασυνέχειες (κρουστικά κύματα - shocks waves) όπως υδραυλικά άλματα και απότομες μεταβολές του πεδίου ροής. Οι εξισώσεις των ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial y} = \mathbf{R}, \quad (1.1)$$

όπου

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} vh \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{bmatrix},$$

με  $h(x, y, t)$  το ύψος του νερού,  $u(x, y, t)$  και  $v(x, y, t)$  οι (κατά μέσο όρο ύψους του ρευστού) ταχύτητες ως προς την  $x$  και  $y$  κατεύθυνση αντίστοιχα,  $\mathbf{u} = (u, v)$  και  $b(x, y)$  το ύψος της τοπογραφίας του πυθμένα. Οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι οι ταχύτητες καθώς και το ύψος του νερού, σε κάθε σημείο του πεδίου ροής, υπολογισμένες σαν μέσες τιμές των φυσικών ποσοτήτων κατά το ύψος.

Τα αριθμητικά σχήματα που έχουν δημιουργηθεί μέχρι σήμερα, για την επίλυση του παραπάνω μαθηματικού μοντέλου, βασίζονται κυρίως στις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων όγκων. Επίσης γνωστές μέθοδοι είναι αυτές των πεπερασμένων στοιχείων [47, 19, 4, 48] καθώς και κάποιες που χρησιμοποιούνται σε συνδιασμό με τις προαναφερθείσες μεθόδους, όπως είναι η μέθοδος Runge-Kutta [17, 18]. Οι μέθοδοι των πεπερασμένων διαφορών είναι περισσότερο διαδιδόμενοι εξαιτίας της απλότητάς τους και της ευκολίας εφαρμογής και κατασκευής νέων μεθόδων. Η εφαρμογή τους γίνεται συνήθως σε δομημένα καρτεσιανά πλέγματα αλλά έτσι δεν μπορούν να περιγράψουν ικανοποιητικά πολύπλοκες γεωμετρίες του πυθμένα. Σε αντίθεση οι μέθοδοι των πεπερασμένων όγκων μπορούν να εφαρμοστούν και σε μη δομημένα καρτεσιανά ή μη καρτεσιανά πλέγματα, με αποτέλεσμα να είναι περισσότερο ευέλικτες και αποδοτικές όσον αφορά τη περιγραφή της γεωμετρίας του πυθμένα. Μεγάλο όμως πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι ότι λύνουν την ολοκληρωτική μορφή των μη γραμμικών εξισώσεων ρηχών υδάτων. Αυτό έχει ως συνέπεια να εγγυείται (a priori) η διατηρησιμότητα ποσοτήτων όπως η μάζα, η ορμή και η ενέργεια. Τέτοιες μέθοδοι

λέγονται συντηρητικές και έχουν την ιδιότητα να υπολογίζουν ορθά τις τυχόν ασυνέχειες στη λύση (shock waves) και να τις μεταδίδουν με την σωστή ταχύτητα.

Οι πρώτες αναφορές στις μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών άρχισαν να εμφανίζονται το 1979 από τους Abbot [1] και Chaudhry [12]. Στη συνέχεια οι Garcia και Kahawitha παρουσίασαν ένα MacCormack σχήμα πεπερασμένων διαφορών [23]. Οι Fennema και Chaudhry ανέλυσαν ένα άμεσο σχήμα ροής ελεύθερης επιφάνειας δύο διαστάσεων [21]. Ακολούθησαν οι Molls και Chaudhry [41], ο Liu και άλλοι [37] καθώς και οι Titon και Synolakis [51]. Οι μέθοδοι των πεπερασμένων διαφορών παρουσιάζουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε ομαλές περιοχές της λύσης των εξισώσεων ρηχών υδάτων όπου δεν εμφανίζονται ασυνέχειες. Η ύπαρξη ασυνεχειών στη λύση προκαλεί αριθμητικές ταλαντώσεις κατά την επίλυση από το αριθμητικό σχήμα.

Οι μέθοδοι των πεπερασμένων όγκων λόγω της συντηρητικής τους μορφής περιγράφουν τις ασυνέχειες με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Αυτό έχει ως συνέπεια να βρίσκονται σήμερα στην πρώτη γραμμή του ενδιαφέροντος και της έρευνας των επιστημών για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ρηχών υδάτων. Οι Alcruo και Garcia-Navarro [5] παρουσίασαν το 1993 ένα σχήμα πεπερασμένων όγκων τύπου Godunov δύο διαστάσεων με τον επιλυτή Riemann του Roe [45]. Ο Dodd [20] χρησιμοποίησε επίσης τον ίδιο επιλυτή Riemann στη μία διάσταση, η οποία επεκτάθηκε στη συνέχεια στις δύο διαστάσεις από τους Hubbard και Dodd [30]. Επίσης υπάρχουν στη βιβλιογραφία [28, 40, 56, 22, 62] αριθμητικά σχήματα πεπερασμένων όγκων κάνοντας χρήση και άλλων επιλυτών όπως τον HLL, τον Osher και τον HLLC. Ιδιαίτερη έμφαση δώθηκε από πολλούς ερευνητές στην τροποποίηση των σχημάτων για να συμπεριληφθούν και οι πηγαίοι όροι [8, 44, 34, 55]. Εφαρμογή σε μη δομημένα υπολογιστικά πλέγματα έκαναν αρχικά ο Zhao και άλλοι [61], πρώτης τάξης χωρικής ακρίβειας, ενώ οι Anastasiou και Chan [7] το 1997 με χρήση του επιλυτή Riemann του Roe και ο Sleight και άλλοι [46] το 1998 προχώρησαν σε δεύτερης τάξης ακρίβεια. Το 2000 οι Brufau και Garcia-Navarro [9] παρουσίασαν επίσης εφαρμογές σε μη δομημένα υπολογιστικά πλέγματα, ενώ στη συνέχεια μαζί με τον Vázquez-Cendón επικεντρώθηκαν σε πιο πολύπλοκες τοπογραφίες και ιδιαίτερα στην συμπεριφορά των στεγανών περιοχών [10, 11]. Περισσότερα αριθμητικά σχήματα πάνω σε μη δομημέναν υπολογιστικά πλέγματα υπάρχουν επίσης στις αναφορές [49, 59, 29, 57, 38].

Βασικός στόχος της εργασίας είναι η κατασκευή, υπολογιστική υλοποίηση και μελέτη της συμπεριφοράς της μεθόδου πεπερασμένων όγκων σε μη δομημένα υπολογιστικά πλέγματα και συγκεκριμένα σε πλέγματα με τριγωνισμούς. Το αριθμητικό σχήμα που θα μελετηθεί είναι τύπου upwind, βασίζεται στη μέθοδο Godunov, και χρησιμοποιεί τον προσεγγιστικό επιλυτή Riemann του Roe [45]. Είναι πρώτης τάξης ακρίβειας και περιγράφει με ικανοποιητικό τρόπο τις ασυνέχειες (shocks) στη λύση (shock capturing method). Η χρήση ενός τριγ-

ωνικού υπολογιστικού πλέγματος, που προκύπτει με κάποιο mesh generator, είναι ευέλικτη για οποιοδήποτε χωρίο, καρτεσιανό ή μη, περιγράφει με ακρίβεια πολύπλοκες γεωμετρίες του πυθμένα και επίσης μας δίνει τη δυνατότητα της τοπικής πύκνωσης του υπολογιστικού πλέγματος σε περιοχές με ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η έμφαση που δίνεται στη παρούσα εργασία είναι στην κατασκευή τέτοιων τριγωνικών υπολογιστικών πλεγμάτων και στον τρόπο σύνδεσης μεταξύ της γεωμετρικής πληροφορίας των υπολογιστικών κελιών, που παράγει ο mesh generator, και του αριθμητικού σχήματος των πεπερασμένων όγκων, κάτι που μέχρι σήμερα είναι ελλιπές στην επιστημονική βιβλιογραφία. Ο mesh generator που θα χρησιμοποιηθεί είναι αυτός του EasyMesh και προτιμήθηκε από άλλους λόγω της απλότητας στη χρήση του και των αξιόπιστων γεωμετρικών πληροφοριών του υπολογιστικού πλέγματος που παράγει.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής: Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύονται οι θεωρητικές λεπτομέρειες του μαθηματικού μοντέλου των εξισώσεων ρηχών υδάτων. Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται με όλα τα χαρακτηριστικά του. Ακολουθεί το τέταρτο κεφάλαιο με τις λεπτομέρειες της κατασκευής του υπολογιστικού πλέγματος, λειτουργία του EasyMesh και τρόπος σύνδεσης της γεωμετρικής πληροφορίας με το αριθμητικό σχήμα. Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται χαρακτηριστικά προβλήματα, στα οποία εφαρμόζεται το αριθμητικό σχήμα και ελέγχεται η ορθότητα, η αξιοπιστία και η συνέπειά του.



## Κεφάλαιο 2

### Μαθηματικό Μοντέλο

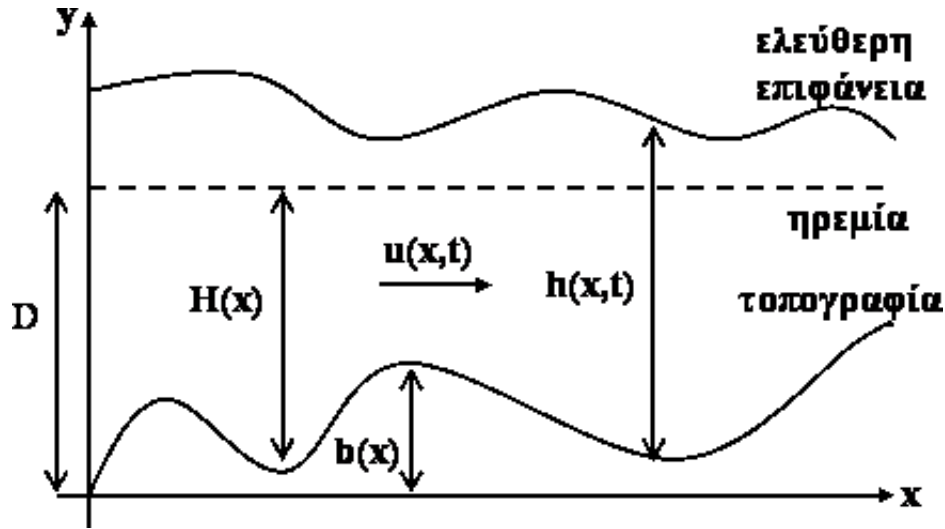
Όπως έγινε σαφές στην εισαγωγή, προβλήματα που σχετίζονται για παράδειγμα με την κατάρρευση φραγμάτων, τη διόδευση πλημμύρας, τη ροή ποταμών, την μεταφορά ρύπων και τα υδάτινα κύματα απαιτούν ένα αποδεκτό μαθηματικό μοντέλο που να τα περιγράφει. Το κατάλληλο αυτό μαθηματικό μοντέλο είναι οι εξισώσεις ρηχών υδάτων (SWE), συνοδευόμενες με κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Αυτές προέρχονται από τις εξισώσεις Navier-Stokes [36, 52] και ουσιαστικά αποτελούν ένα σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου, προερχόμενο από τους νόμους διατήρησης της μάζας και της ορμής [15]. Επίσης, είναι εκφρασμένες σε συντηρητική μορφή και με αυτόν τον τρόπο έχουν την δυνατότητα να περιγράφουν καλά τις τυχόν ασυνέχειες (shocks) που παρατηρούνται, για παράδειγμα υδραυλικά άλματα και απότομες μεταβολές του πεδίου ροής. Περισσότερες θεωρητικές λεπτομέρειες των εξισώσεων ρηχών υδάτων περιέχονται στη βιβλιογραφία [58, 36, 13, 1, 2].

#### 2.1 Νόμοι διατήρησης μάζας-ορμής

Ας κάνουμε όμως μία σύντομη περιγραφή των νόμων διατήρησης της μάζας και της ορμής, ώστε να καταλήξουμε στην παραγωγή των εξισώσεων ρηχών υδάτων πρώτης διάστασης (1D) και εν τέλει αυτών της δεύτερης διάστασης (2D), όπου θα βασιστούμε για την περαιτέρω μελέτη μας.

Για να συμβεί αυτό, θεωρούμε το μονοδιάστατο κανάλι με πλάτος ένα του σχήματος 2.1, στο οποίο υπάρχει ροή ρευστού, βάθους  $h(x, t)$ , με οριζόντια ταχύτητα  $u(x, t)$  σταθερή σε κάθε σημείο του καναλιού και τοπογραφία πυθμένα ύψους  $b(x)$ . Είναι αναγκαίο να τονίσουμε ότι η κατακόρυφη ταχύτητα του ρευστού θεωρείται ασήμαντη. Η πυκνότητα  $\rho$  του ρευστού θεωρείται σταθερή (ασυμπίεστο ρευστό). Οι εξαρτώμενες μεταβλητές είναι η οριζόντια ταχύτητα

$u(x, t)$  και το βάθος  $h(x, t)$  του ρευστού.



Σχήμα 2.1: Ροή ρευστού σε μονοδιάστατο κανάλι ελεύθερης επιφάνειας

Σύμφωνα με τον νόμο διατήρησης της μάζας στην περιοχή  $[x_1, x_2]$  πρέπει:

Καθαρή ποσότητα όγκου ροής που διέρχεται απο την περιοχή  $[x_1, x_2]$  = ρυθμός μεταβολής μάζας.

Ο ρυθμός μεταβολής μάζας στην περιοχή  $[x_1, x_2]$  του σχήματος 2.1 είναι:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h(x, t) dx. \quad (2.1)$$

Το καθαρό ποσό όγκου της ροής δίνεται με κατάλληλη ολοκλήρωση της πυκνότητας της ορμής :

$$\int_b^{h+b} \rho u(x, t) dy = \rho u(x, t) \int_b^{h+b} dy = \rho u(x, t)(h(x, t) + b(x) - b(x)) = \rho u(x, t)h(x, t).$$

Άρα, το καθαρό ποσό του όγκου της ροής διερχόμενο απο την περιοχή  $[x_1, x_2]$  είναι:

$$\rho u(x_1, t)h(x_1, t) - \rho u(x_2, t)h(x_2, t). \quad (2.2)$$

Εξισώνοντας όμως τις εκφράσεις (2.1) και (2.2) και κατόπιν ολοκληρώνοντας την ισότητα που προκύπτει ως προς το χρόνο, θεωρώντας τις συναρτήσεις  $h(x, t), u(x, t)$  παραγωγίσιμες, καταλήγουμε στην διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

Όσον αφορά τον νόμο διατήρησης της ορμής, που αποτελεί συνέπεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, στην περιοχή  $[x_1, x_2]$  αυτός εκφράζεται ως εξής:

Ρυθμός μεταβολής της ορμής στην  $x$  κατεύθυνση = Συνολική ασκούμενη δύναμη στην  $x$  κατεύθυνση.

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής δίνεται μέσω της ολικής παραγώγου της ταχύτητας:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_h^{h+b} \rho u \, dy \, dx = \\ \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_h^{h+b} \rho u \, dy \, dx + \int_{x_1}^{x_2} \int_h^{h+b} \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} \, dy \, dx = \\ \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h u \, dx + (\rho h u^2)_{x_2} - (\rho h u^2)_{x_1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Η συνολική ασκούμενη δύναμη στην  $x$  κατεύθυνση είναι το άθροισμα δύο δυνάμεων, της δύναμης που οφείλεται στην πίεση στα άκρα και της δύναμης της πίεσης από τον πυθμένα. Έτσι, η συνολική ασκούμενη δύναμη εκφράζεται ως εξής:

$$\left[ -\frac{1}{2} g \rho h^2 \right]_{x_1}^{x_2} - g \int_{x_1}^{x_2} \rho h \frac{db}{dx} \, dx, \quad (2.5)$$

όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας. Οι δύο προσθεταίοι αποτελούν αντίστοιχα τις δυνάμεις που περιγράψαμε παραπάνω.

Επομένως, ενεργώντας όπως και προηγουμένως, δηλαδή εξισώνοντας τις (2.4), (2.5) και ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο, θεωρώντας  $h(x, t)$  και  $u(x, t)$  παραγωγίσιμες, προκύπτει η διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της ορμής:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} = -ghb_x. \quad (2.6)$$

## 2.2 Εξισώσεις ρηχών υδάτων στη μία διάσταση

Στην παρούσα φάση είμαστε έτοιμοι να εξάγουμε τις εξισώσεις ρηχών υδάτων στη μία διάσταση. Αυτές προκύπτουν απλά γράφοντας τις σχέσεις (2.3) και (2.6) που δημιουργήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα ως σύστημα δύο εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}_x = 0, \quad (2.7)$$

ή πιο συνοπτικά:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{q})_x = 0, \quad (2.8)$$

όπου

$$\mathbf{q}(x, t) = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}.$$

Το  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  λέγεται συνάρτηση ροής (flux function). Στις (2.7) και (2.8) θεωρούμε ότι στον πυθμένα του καναλιού δεν υπάρχει κάποιου είδους τοπογραφία, γι' αυτό και το δεύτερο μέλος είναι μηδέν (ομογενής περίπτωση). Στη γενική περίπτωση όμως η τοπογραφία υπάρχει, επομένως αυτή πρέπει να προστεθεί στις εξισώσεις. Αυτό συμβαίνει με την προσθήκη του πηγαιού όρου (source term) τοπογραφίας στο δεξί μελος. Άρα, η (2.8) μετατρέπεται στην:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R}, \quad (2.9)$$

όπου

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \end{bmatrix}.$$

Στο διάνυσμα  $\mathbf{R}$  μπορούμε να συμπεριλάβουμε όρους τριβής, δυνάμεις Coriolis, επιδράσεις του ανέμου κ.λ.π. αλλά δεν είναι στα σχέδια της συγκεκριμένης μελέτης.

Την δεδομένη στιγμή ας ορίσουμε τον Ιακωβιανό πίνακα του  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  και τα χαρακτηριστικά του, στοιχεία που θα μας φανούν χρήσιμα στην μελέτη των αριθμητικών σχημάτων αργότερα. Επομένως, ο Ιακωβιανός πίνακας του  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  ορίζεται ως:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{bmatrix},$$

με ιδιοτιμές :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u + c,$$

όπου  $c = \sqrt{gh}$  είναι η σχετική ταχύτητα κύματος-ρευστού.

Τα αντίστοιχα ιδιονύσματα είναι:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα της σχέσης (2.9) είναι υπερβολικού τύπου αν ο Ιακωβιανός πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος και έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση του μαθηματικού μοντέλου των εξισώσεων ρηχών υδάτων μίας διάστασης θα ορίσουμε τον αριθμό Froude, ο οποίος περιγράφει τη ροή. Ο **αριθμός**

**Froude** ορίζεται ως ο λόγος της ταχύτητας της ροής  $u$  προς την σχετική ταχύτητα κύματος-ρευστού  $c$ , δηλαδή :

$$Fr = \frac{|u|}{c}.$$

Όπως εύκολα παρατηρείται είναι ένας αδιάστατος αριθμός και ανάλογα την τιμή του οι ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$  λαμβάνουν συγκεκριμένο πρόσημο. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις :

- Αν  $Fr > 1$ , τότε η ροή ονομάζεται υπερκρίσιμη. Οι δυνάμεις αδράνειας υπερσχύουν αυτών της βαρύτητας, οι ιδιοτιμές έχουν πάντα το ίδιο πρόσημο και κατά συνέπεια η φυσική πληροφορία διαδίδεται προς μία κατεύθυνση.
- Αν  $Fr < 1$ , τότε η ροή ονομάζεται υποκρίσιμη. Οι δυνάμεις αδράνειας υπολείπονται αυτών της βαρύτητας, η πρώτη ιδιοτιμή είναι αρνητική και η δεύτερη λαμβάνει οποιοδήποτε πρόσημο με αποτέλεσμα η φυσική πληροφορία διαδίδεται και προς τις δύο κατευθύνσεις.

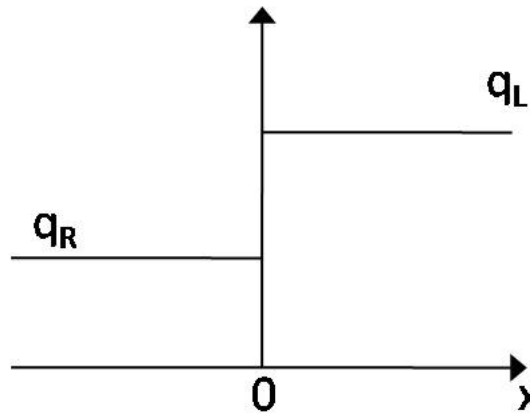
## 2.3 Πρόβλημα Riemann

Το αριθμητικό σχήμα που θα περιγραφεί στο επόμενο κεφάλαιο χρησιμοποιεί τη λύση ενός προβλήματος για να επιλύσει αριθμητικά τα συστήματα υπερβολικού τύπου των εξισώσεων ρηχών υδάτων. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται πρόβλημα Riemann και είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που αποτελείται από την εξίσωση (2.8) και από συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες :

$$\begin{aligned} & \mathbf{q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{q})_x = 0, \\ \mathbf{q}(x, 0) = & \begin{cases} \mathbf{q}_L, & \text{αν } x < 0 \\ \mathbf{q}_R, & \text{αν } x > 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

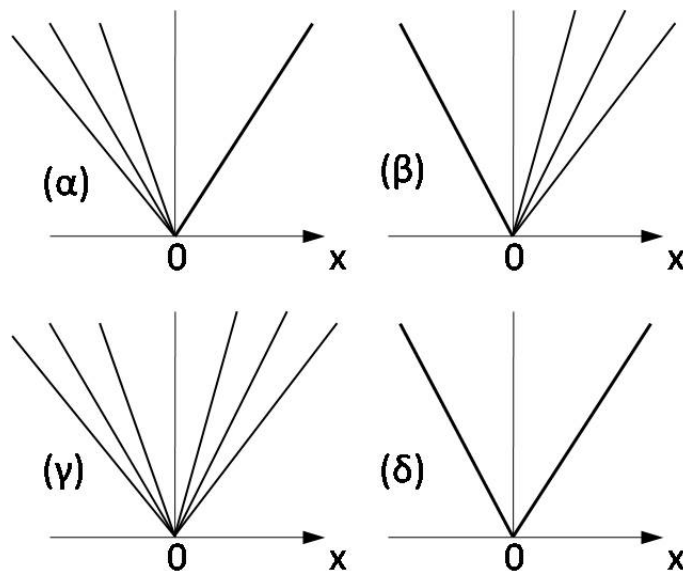
όπου

$$\mathbf{q}_L = \begin{bmatrix} h_L \\ u_L h_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_R = \begin{bmatrix} h_R \\ u_R h_R \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 2.1: Αρχικές συνθήκες του προβλήματος Riemann

Όπως δείχνει και οι αρχικές συνθήκες που ορίζονται από τα  $q_L$ ,  $q_R$  είναι κατά τμήματα σταθερές και χωρίζονται από την ασυνέχεια που παρουσιάζεται στο σημείο  $x = 0$ . Το πρόβλημα Riemann έχει τέσσερις πιθανές λύσεις [52, 35] οι οποίες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.2: Οι πιθανές λύσεις του προβλήματος Riemann για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων μίας διάστασης. (α) κύμα αραιώσης - κρουστικό κύμα (shock), (β) κρουστικό κύμα (shock) - κύμα αραιώσης, (γ) κύμα αραιώσης - κύμα αραιώσης, (δ) κρουστικό κύμα (shock) - κρουστικό κύμα (shock)

Η αναλυτική λύση του προβλήματος Riemann για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων της μίας διάστασης όπως βέβαια και των δύο διαστάσεων είναι πολύ δύσκολο ή αδύνατο να βρεθεί. Γι' αυτό στην πράξη το αριθμητικό μας σχήμα χρησιμοποιεί προσεγγιστικούς επιλυτές Riemann όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

## 2.4 Εξισώσεις ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφέρουμε τις βασικές εξισώσεις τις οποίες θα ακολουθήσουμε για την μελέτη μας. Εδώ θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας ότι στις δύο διαστάσεις υπάρχει ροή ως προς τις δύο κατευθύνσεις  $x$  και  $y$ . Έτσι επεκτείνουμε τις εξισώσεις ρηχών υδάτων μίας διάστασης σε αυτές των δύο διαστάσεων και προκύπτει η παρακάτω σημαντική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix} vh \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Η μεταβλητή  $h(x, y, t)$  εκφράζει πάλι το ύψος του ρευστού πάνω από τον πυθμένα του καναλιού, οι μεταβλητές  $u(x, y, t)$  και  $v(x, y, t)$  είναι οι (κατά μέσο όρο ύψους του ρευστού) ταχύτητες ως προς την  $x$  και  $y$  κατεύθυνση αντίστοιχα και η  $b(x, y)$  αντιπροσωπεύει το ύψος της τοπογραφίας του πυθμένα. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι δύο είναι οι περιπτώσεις με πρακτικό ενδιαφέρον: η περίπτωση να έχουμε υγρό πυθμένα ( $h(x, y, t) > 0$ ) και η περίπτωση όπου τμήματα του πυθμένα είναι στεγανά ( $h(x, y, t) = 0$ ). Στη παρούσα φάση θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση του υγρού πυθμένα. Η εξίσωση (2.11) πιο συνοπτικά γράφεται:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial y} = \mathbf{R}, \quad (2.12)$$

όπου

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} vh \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{bmatrix}.$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  και  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  ορίζουν τις συναρτήσεις ροής (flux functions) ως προς την  $x$  και  $y$  κατεύθυνση αντίστοιχα. Ένας ακόμα διαφορετικός τρόπος γραφής της (2.12) είναι:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \mathbf{E}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}, \quad (2.13)$$

όπου  $\mathbf{E} = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$ . Τέλος, ένας επιπλέον βολικός τρόπος παρουσίασης των SWE στις δύο διαστάσεις είναι:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{q})_x + \mathbf{G}(\mathbf{q})_y = \mathbf{R}. \quad (2.14)$$

Οι εξισώσεις (2.11), (2.12), (2.13) και (2.14) είναι ισοδύναμες και θα χρησιμοποιούνται ανάλογα με τους μετασχηματισμούς ή τις τροποποιήσεις που επιδέχονται στη συνέχεια. Το διάνυσμα

$\mathbf{R}$  είναι ο πηγαίος όρος (source term) και περιγράφει την συμμετοχή της τοπογραφίας του πυθμένα στις εξισώσεις. Τονίζεται εδώ, ότι στη παρούσα εργασία, όροι που σχετίζονται με την τριβή, τις δυνάμεις του αέρα, τις δυνάμεις Coriolis κ.λ.π. θεωρούνται αμελητέοι. Το διάνυσμα  $\mathbf{R}$  εναλλακτικά γράφεται:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$$

με

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -ghb_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει πηγαίος όρος, δηλαδή όταν ο πυθμένας θεωρείται 'καθαρός' από τοπογραφία σε όλο το χωρίο, τότε η εξίσωση (2.12) παίρνει την παρακάτω μορφή (ομογενής περίπτωση):

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial y} = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας στην εξίσωση (2.14) αυτή μπορεί να γραφτεί σε ημι-γραμμική μορφή ως εξής:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}_x + \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{q}_y = \mathbf{R}, \quad (2.16)$$

όπου  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  και  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  είναι οι Ιακωβιανοί πίνακες:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_1} & \frac{\partial f_3}{\partial q_2} & \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \frac{\partial g_1}{\partial q_2} & \frac{\partial g_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial q_1} & \frac{\partial g_2}{\partial q_2} & \frac{\partial g_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial q_1} & \frac{\partial g_3}{\partial q_2} & \frac{\partial g_3}{\partial q_3} \end{bmatrix},$$

με

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_2^2/q_1 + \frac{1}{2}gq_1^2 \\ q_2q_3/q_1 \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vh \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_2q_3/q_1 \\ q_3^2/q_1 + \frac{1}{2}gq_1^2 \end{bmatrix}.$$

Να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι παρότι στην ημι-γραμμική μορφή της (2.16) οι μεταβλητές είναι συντηρητικές, η φόρμουλα των εξισώσεων αυτών δεν είναι συντηρητική. Σε αντίθεση η εξίσωση (2.13) είναι εκφρασμένη σε συντηρητική μορφή. Στη συνέχεια όπως αποδεικνύεται [52], οι Ιακωβιανοί πίνακες καθώς και οι ιδιοτιμές με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους παίρνουν τις παρακάτω μορφές. Ξεκινώντας από τους Ιακωβιανούς πίνακες:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$  είναι:

$$\lambda_1^{\mathbf{F}} = u - c, \quad \lambda_2^{\mathbf{F}} = u, \quad \lambda_3^{\mathbf{F}} = u + c,$$

και οι ιδιοτιμές του  $\mathbf{B}$  έχουν ως εξής:

$$\lambda_1^{\mathbf{G}} = v - c, \quad \lambda_2^{\mathbf{G}} = v, \quad \lambda_3^{\mathbf{G}} = v + c.$$

Τα ιδιόνυμα που αντιστοιχούν στον πίνακα  $\mathbf{A}$  είναι:

$$\mathbf{e}_1^{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2^{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3^{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ v \end{bmatrix},$$

ενώ αυτά του πίνακα  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{e}_1^{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v - c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2^{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3^{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v + c \end{bmatrix}.$$

## 2.5 Υπερβολικός Χαρακτήρας των Εξισώσεων

Θεωρώντας έναν πίνακα  $C$  ως γραμμικό συνδυασμό των Ιακωβιανών πινάκων  $A$  και  $B$  της προηγούμενης παραγράφου, ορίζεται:

$$C = \omega_1 A + \omega_2 B, \quad (2.17)$$

όπου οι συντελεστές  $\omega_1$  και  $\omega_2$  είναι πραγματικοί αριθμοί και συνθέτουν ένα μη μηδενικό διάνυσμα  $\omega = [\omega_1, \omega_2]$ , έτσι ώστε:

$$|\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} > 0.$$

Ο πίνακας  $C$  δίνεται ως:

$$C(q) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ (c^2 - u^2)\omega_1 - uv\omega_2 & 2u\omega_1 v\omega_2 & u\omega_2 \\ -uv\omega_1 + (c^2 - v^2)\omega_2 & v\omega_1 & u\omega_1 + 2v\omega_2 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $C$  μαζί με τα αντίστοιχα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα του αναφέρονται αναλυτικά από τον Toro [52]. Τώρα είμαστε έτοιμοι για να ορίσουμε την υπερβολικότητα των εξισώσεων.

**Ορισμός 2.5.1** Ένα σύστημα  $m$  νόμων διατήρησης (2.15) με Ιακωβιανούς πίνακες  $A$  και  $B$  λέγεται υπερβολικό αν ο πίνακας  $C$  που παράγεται από τον γραμμικό συνδυασμό των Ιακωβιανών πινάκων  $A$  και  $B$  (2.17), έχει  $m$  πραγματικές ιδιοτιμές για κάθε διάνυσμα  $q$  συντηρητικών μεταβλητών και για κάθε διάνυσμα  $\omega = [\omega_1, \omega_2]$ , έτσι ώστε  $\omega \neq 0$ . Το σύστημα ονομάζεται αυστηρώς υπερβολικό αν επιπρόσθετα οι ιδιοτιμές είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους.

**Πρόταση 2.5.1** Οι χρονικά εξαρτημένες εξισώσεις ρηχών υδάτων δύο διαστάσεων (2.11), (2.12), (2.13) και (2.14) είναι υπερβολικού τύπου. Στην περίπτωση υγρού πυθμένα ( $h(x, y, t) > 0$ ) αυτές είναι αυστηρώς υπερβολικές.

## 2.6 Δυσκολίες εύρεσης αναλυτικής λύσης

Η εύρεση αναλυτικών λύσεων των εξισώσεων ρηχών υδάτων (2.11) αποτελεί πολύπλοκη διαδικασία και τις περισσότερες φορές είναι αδύνατη. Αυτό οφείλεται καταρχήν στην υπερβολικότητα των εξισώσεων. Η υπερβολικότητα και η μη γραμμικότητα των εξισώσεων επιτρέπει

ομαλές αλλά και ασυνεχείς λύσεις. Επίσης, η δυσκολία εφαρμογής των οριακών συνθηκών (αρχικών και συνοριακών συνθηκών) που παρουσιάζεται εξαιτίας της ασύμμετρης, πολύπλοκης γεωμετρίας του πυθμένα και της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού αποτελεί έναν επιπλέον ανασταλτικό παράγοντα εύρεσης αναλυτικής λύσης. Επιπρόσθετα, καταστάσεις όπως κρουστικά κύματα, ασυνέχεις επαφής, δίνες, στεγανά-υγρά μέτωπα κ.ά. που ενδέχεται να εμφανιστούν κατά την επίλυση, περιπλέκουν ακόμη περισσότερο το πρόβλημα. Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό, ότι η εύρεση αναλυτικών λύσεων περιορίζεται σε πολύ ειδικές απλουστευμένες περιπτώσεις. Λόγω των παραπάνω δυσκολιών και με την ταυτόχρονη ανάπτυξη των ηλεκτρικών υπολογιστών, δόθηκε χώρος να αναπτυχθεί ένας μεγάλος αριθμός υπολογιστικών-αριθμητικών μεθόδων. Οι αριθμητικές μέθοδοι επιλύουν μόνο σε έναν αριθμό διακεκριμένων σημείων επί του υπολογιστικού χώρου και μόνο σε συγκεκριμένα διαστήματα. Παρόλα αυτά με κατάλληλη επιλογή της αριθμητικής μεθόδου και των διαφορικών εξισώσεων, ο ηλεκτρονικός υπολογιστής παρουσιάζει παρόμοιες δυνατότητες με την φυσική λύση του πεδίου ροής σε κατάλληλα επισημονικά εργαστήρια.



## Κεφάλαιο 3

### Αριθμητικό Σχήμα

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε και θα πειραματιστούμε με τις εξισώσεις ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις. Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράψαμε το μαθηματικό μοντέλο αυτών των εξισώσεων. Για να επιτευχθεί η αριθμητική επίλυση των συγκεκριμένων εξισώσεων απαιτούνται ακόμη δύο βασικά στοιχεία. Πρώτον, έναν τρόπο κατασκευής του υπολογιστικού πλέγματος, δηλαδή του προσδιορισμού των κατάλληλων κελιών (ή όγκων) στο εσωτερικό του χωρίου, όπου πάνω σε αυτό θα επιλύσουμε αριθμητικά τις εξισώσεις μας. Δεύτερον, κατάλληλα αριθμητικά σχήματα, τα οποία θα επιλύουν ικανοποιητικά το μαθηματικό μοντέλο πάνω στο συγκεκριμένο πλέγμα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στη δεύτερη περίπτωση, δηλαδή σε κατάλληλα αριθμητικά σχήματα ανάλογα με τις δυσκολίες που θα αντιμετωπίσουμε στην επίλυση. Τα αριθμητικά σχήματα που θα μελετήσουμε πρέπει να είναι συντηρητικά, να υπολογίζουν σωστά τις τυχών ασυνέχειες, να προσεγγίζουν σωστά τη θέση και την ταχύτητα σε υγρά-στεγανά μέτωπα καθώς και να παράγουν ακριβείς προσεγγιστικές λύσεις κόντρα σε οποιαδήποτε δυσκολία παρουσιάζεται κατά την αριθμητική επίλυση.

#### 3.1 Επιλογή αριθμητικής μεθόδου

Οι πιο διαδομένες αριθμητικές τεχνικές, που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση και πρόβλεψη φυσικών καταστάσεων, είναι βασισμένες στις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων [47, 19, 4, 48], πεπερασμένων διαφορών [1, 12, 23] και πεπερασμένων όγκων [60, 5, 10, 11, 61, 46, 9, 49, 7, 59, 29, 57, 38]. Οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών λόγω της απλότητάς τους, στην εφαρμογή αλλά και στην κατασκευή νέων μεθόδων, είναι οι περισσότερο διαδομένες. Η εφαρμογή τους περιορίζεται συνήθως σε δομημένα καρτεσιανά πλέγματα που όμως δεν μπορούν να περιγράψουν ικανοποιητικά πολύπλοκες γεωμετρίες. Επίσης, η χρήση των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζει αριθμητικά

σφάλματα όπως ταλαντώσεις κοντά στις ασυνέχειες. Επομένως, αναζητούνται μέθοδοι που να υπολογίζουν σωστά τις ασυνέχειες (shock-capturing). Οι μέθοδοι πεπερασμένων όγκων είναι οι κατάλληλες για τον σωστό υπολογισμό των ασυνεχειών, διότι χρησιμοποιούν τη συντηρητική μορφή των εξισώσεων ρηχών υδάτων [60]. Επιπροσθέτως, η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων έχει το πλεονέκτημα έναντι της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών ότι μπορεί να εκτελεστεί σε οποιοδήποτε πλέγμα, δομημένο ή μη [40], και το πλεονέκτημα έναντι της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων ότι απαιτεί σημαντικά λιγότερο υπολογιστικό χρόνο [61].

Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων βασίζεται στη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου σε μικρότερα υποχωρία (κελιά), όπου οι εξισώσεις ολοκληρώνονται. Οι shock-capturing δυνατότητες παράγονται από τη λύση μίας σειράς από προβλήματα Riemann στο σύνορο κάθε κελιού. Αυτός ο τρόπος λύσης, δηλαδή της λύσης μίας σειράς από τοπικά προβλήματα Riemann στα μέτωπα κάθε κελιού, προτάθηκε από τον Godunov [25], και έτσι τα παραγόμενα σχήματα ονομάζονται τύπου Godunov. Όταν χρησιμοποιήθηκαν αρχικά τα προαναφερθέντα σχήματα χρησιμοποιούσαν την ακριβή λύση του προβλήματος Riemann. Σήμερα όμως η ακριβής αυτή λύση έχει αντικατασταθεί με μία προσεγγιστική λύση με σκοπό τη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Τα τελευταία χρόνια έγιναν πολλές έρευνες στον πεδίο των προσεγγιστικών Riemann επιλυτών. Οι πιο διαδομένοι επιλυτές αναπτύχθηκαν από τους Roe [45], Harten [27, 26], Van Leer [32, 33], Osher και Solomon [43], και στη συνέχεια επεκτάθηκαν σε υδροδυναμική ελεύθερης επιφάνειας από διάφορους ερευνητές [24, 6, 5, 42, 54]. Στη παρούσα εργασία θα αναφερθούμε στους προσεγγιστικούς επιλυτές Riemann του Roe και HLL, από τους οποίους θα εφαρμόσουμε κατά κύριο λόγο τον πρώτο. Τα τελευταία χρόνια παρουσιάστηκαν διάφορα επιτυχημένα σχήματα που επιλύουν τις εξισώσεις ρηχών υδάτων σε μη δομημένα υπολογιστικά πλέγματα κάνοντας χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων. Σχήματα πρώτης [46] και δεύτερης τάξης [61] με πολλές αξιόλογες εφαρμογές, όπως ο ποταμός Kissimmee στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής [61] και το δέλτα του ποταμού Αχε στο Ηνωμένο Βασίλειο [46].

Εν κατακλείδι, η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία είναι μία upwind μέθοδος πεπερασμένων όγκων πρώτης τάξης ακρίβειας πάνω σε μη δομημένα τριγωνικά πλέγματα, στην οποία οι τιμές σε κάθε κελί-τρίγωνο λαμβάνονται στο κέντρο βάρους κάθε τριγώνου. Λέγοντας upwind εννοούμε ένα σχήμα που χρησιμοποιεί επιλυτές Riemann και κάνει άμεση χρήση της πληροφορίας που παρέχεται από την διάδοση του κύματος. Με αυτόν τον τρόπο η αίσθηση της διάδοσης υποδηλώνεται και τέτοιου είδους τεχνικές ταιριάζουν σε προβλήματα με κυρίαρχη έννοια την μεταφορά. Όταν υπάρχουν και πηγαίοι όροι, οι παραγόμενες αριθμητικές ροές (numerical fluxes) και οι πηγαίοι όροι πρέπει να διακριτοποιηθούν με παρεμφερή τρόπο. Ο προσεγγιστικός επιλυτής Riemann που θα χρησιμοποιηθεί

είναι αυτός του Roe και θα δωθεί έμφαση στην σωστή εφαρμογή των οριακών συνθηκών καθώς και στην εφαρμογή της CFL συνθήκης που είναι αναγκαία για την ευστάθεια της μεθόδου.

## 3.2 Διακριτοποίηση ομογενούς συστήματος

Σε αυτήν την παράγραφο θα περιγραφεί με λεπτομέρειες το αριθμητικό σχήμα που θα χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση απουσίας των πηγαίων όρων, δηλαδή όταν ο πυθμένας είναι 'καθαρός' από τοπογραφία, που αποτελεί και την ομογενή περίπτωση. Η εξίσωση (2.13) στην περίπτωση μηδενικού όρου πηγής μετατρέπεται στην:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \mathbf{E}(\mathbf{q}) = 0, \quad (3.1)$$

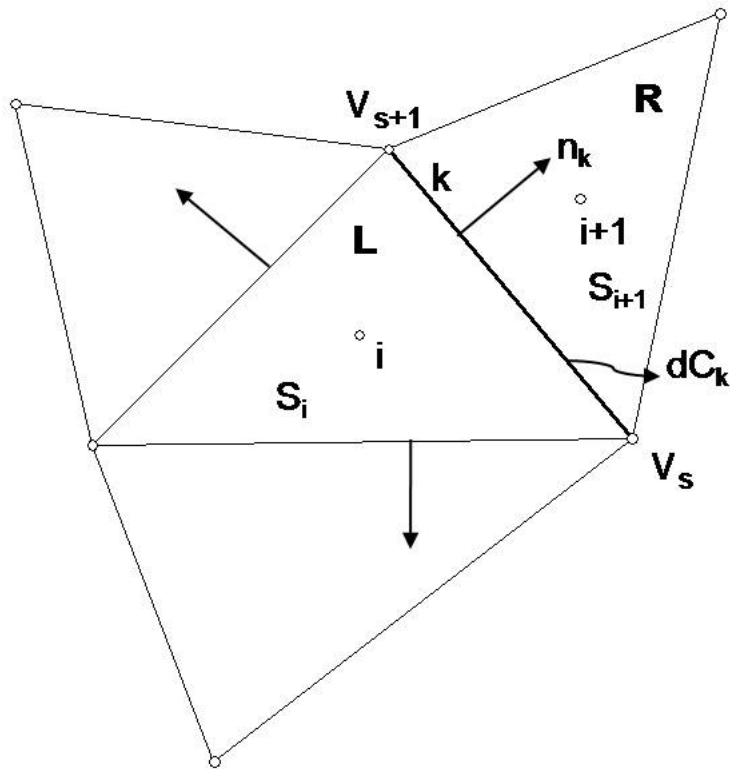
όπου  $\mathbf{E} = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$ . Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση πάνω σε δοσμένο σταθερό όγκο  $S$  αυτή γίνεται:

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dS + \iint_S \nabla(\mathbf{F}, \mathbf{G}) dS = 0. \quad (3.2)$$

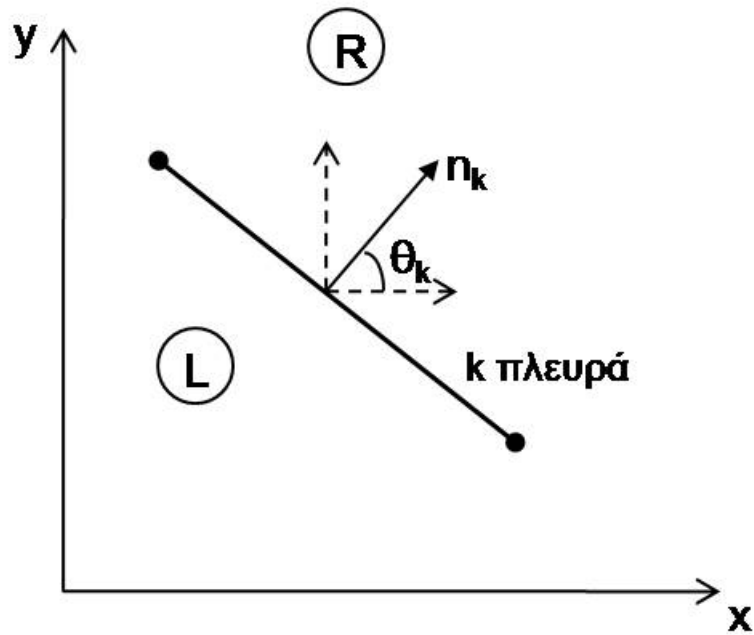
Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης του Gauss στο δεύτερο ολοκλήρωμα οδηγούμαστε για κάθε κελί στην εξίσωση:

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dS + \oint_C (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} dC = 0, \quad (3.3)$$

όπου  $C$  είναι το σύνορο του  $S$  ( $C = \partial S$ ) και το  $\mathbf{n}$  είναι το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα. Στα σχήματα 3.1 και 3.2 φαίνεται η εφαρμογή τέτοιων κάθετων διανυσμάτων στις πλευρές κάθε κελιού.



Σχήμα 3.1: Λεπτομέρειες γειτονικών κελιών  $i$  και  $i + 1$



Σχήμα 3.2:  $k$  πλευρά ενός τυχαίου πεπερασμένου όγκου δύο διαστάσεων στο  $x - y$  επίπεδο

Το εσωτερικό γινόμενο  $(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n}$ , το οποίο εκφράζει την προβολή της ροής  $\mathbf{E} = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$  στην κανονική διεύθυνση, μπορεί να γραφτεί σε όρους βάσης των καρτεσιανών συντεταγμένων



ως εξής :

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}n_x + \mathbf{G}n_y.$$

Η (3.3) είναι λοιπόν η εξίσωση που πρέπει να διακριτοποιηθεί. Ένα πρώτο ερώτημα που γεννάται είναι σε ποιο πλέγμα θα διακριτοποιηθεί η εξίσωση. Με έναν συγκεκριμένο τρόπο, που εξηγείται αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο, παράγεται ένα διδιάστατο χωρικό πλέγμα, το οποίο αποτελείται από πολλά τριγωνικά κελιά-όγκους. Τα τριγωνικά κελιά δεν είναι απαραίτητα ευθυγραμμισμένα με τις συντεταγμένες διεύθυνσης και το σχήμα όπως και το μέγεθος των κελιών μπορεί να είναι ανομοιόμορφο. Επιπροσθέτως, σε κάθε κελί οι ανεξάρτητες μεταβλητές του συστήματος αντιπροσωπεύονται ως τμηματικά σταθερές και τα επιφανειακά ολοκληρώματα αντιπροσωπεύουν τη συνολική ροή που περνά από το σύνορο του κελιού. Θεωρώντας δεδομένο ένα υπολογιστικό πλέγμα ορισμένο από κελιά εμβαδού  $S_i$ , όπου  $i$  είναι ο δείκτης στο κέντρο του κελιού και  $\mathbf{q}_i$  η μέση τιμή των συντηρητικών μεταβλητών στο  $i$  κελί (στο κέντρο του) σε δεδομένο χρόνο :

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{S_i} \iint_{S_i} \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) dS_i. \quad (3.4)$$

Η εξίσωση (3.3) συνεπάγεται :

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} + \frac{1}{S_i} \oint_{C_i} (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} dC = 0, \quad (3.5)$$

όπου  $S_i$  και  $C_i$  είναι το εμβαδόν και το σύνορο του του κελιού  $i$  αντίστοιχα , βλ. σχήμα 3.1. Ο Ιακωβιανός πίνακας,  $\mathbf{J}_n$  , της προβολής της ροής στην κανονική διεύθυνση  $(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n}$  υπολογίζεται :

$$\mathbf{J}_n = \frac{\partial(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} n_x + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}} n_y \quad (3.6)$$

Η (3.6) μέσω των σχέσεων που δίνονται για τα  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}$  και  $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}}$  στην παράγραφο 2.3 μετατρέπεται στην :

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uv n_y & 2un_x - vn_y & un_y \\ -uv n_x + (c^2 - v^2)n_y & vn_x & un_x + 2vn_y \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και οι υπόλοιπες ιδιότητες του Ιακωβιανού πίνακα ορίζονται και προκύπτουν με ανάλογο τρόπο με αυτόν που παρουσιάζεται στην παράγραφο 2.3 [10]. Οι ιδιοτιμές λοιπόν είναι :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= un_x + vn_y + c, \\ \lambda_2 &= un_x + vn_y, \\ \lambda_3 &= un_x + vn_y - c. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + cn_x \\ v + cn_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -cn_y \\ cn_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - cn_x \\ v - cn_y \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Από αυτά τα ιδιοδιανύσματα μπορούν να κατασκευαστούν δύο πίνακες  $\mathbf{P}$  και  $\mathbf{P}^{-1}$  έτσι ώστε να διαγωνοποιούν τον Ιακωβιανό πίνακα  $\mathbf{J}_n$ :

$$\mathbf{J}_n = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1},$$

όπου  $\mathbf{\Lambda}$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές στην κύρια διαγώνιο:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} un_x + vn_y + c & 0 & 0 \\ 0 & un_x + vn_y & 0 \\ 0 & 0 & un_x + vn_y - c \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες που διαγωνοποιούν τον Ιακωβιανό έχουν τη μορφή:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u + cn_x & -cn_y & u - cn_x \\ v + cn_y & cn_x & v - cn_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} \omega \cdot \mathbf{n} + c & n_x & n_y \\ 2(un_y - vn_x) & -2n_y & 2n_x \\ \omega \cdot \mathbf{n} + c & -n_x & v - n_y \end{bmatrix},$$

όπου  $\omega = (u, v)$  και:

$$\Delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{J}_n \Delta \mathbf{q} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{P} (\mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^-) \mathbf{P}^{-1} \Delta \mathbf{q}$$

είναι η σχέση που θα βασιστεί η upwind μέθοδος με  $\mathbf{\Lambda}^\pm = (\mathbf{\Lambda} \pm |\mathbf{\Lambda}|)/2$  και  $\Delta(\cdot) = (\cdot)_R - (\cdot)_L$ . Θα δειχτεί όμως στη συνέχεια, ότι θα χρησιμοποιηθεί ένας προσεγγιστικός Ιακωβιανός πίνακας, ανάλογος του πραγματικού. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (β' είδους) της (3.5) προσεγγίζεται μέσω ενός κανόνα κεντρικού σημείου (midpoint rule) και πιο συγκεκριμένα έναν κανόνα, που ορίζει την αριθμητική ροή (numerical flux) στο κεντρικό σημείο κάθε πλευράς:

$$\oint_{C_i} (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} dC = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{F}, \mathbf{G})_k^* \cdot \mathbf{n}_k dC_k, \quad (3.10)$$

όπου  $k$  είναι μία πλευρά του  $i$  τριγώνου-κελιού,  $\mathbf{n}_k$  είναι το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην  $k$  πλευρά και  $dC_k$  είναι το μήκος της  $k$  πλευράς, όπως φαίνονται στο σχήμα 3.1. Ζητείται τώρα ένας τρόπος να υπολογιστεί η αριθμητική ροή  $(\mathbf{F}, \mathbf{G})^*$ . Χρησιμοποιώντας την τεχνική της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων και του προβλήματος Riemann, όπου οι υπολογισμοί γίνονται σύμφωνα με τις συνθήκες του αριστερού και του δεξιού μετώπου των

πλευρών για κάθε κελί, ο υπολογισμός αυτός είναι εφικτός. Έτσι, η προβολή της αριθμητικής ροής  $(\mathbf{F}, \mathbf{G})^*$  στην κανονική διεύθυνση  $\mathbf{n}$  δίνεται από την εξής σχέση :

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G})^* \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2}[(\mathbf{F}, \mathbf{G})_R \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{F}, \mathbf{G})_L \cdot \mathbf{n} - |\tilde{\mathbf{J}}_{RL}|(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L)], \quad (3.11)$$

όπου  $\mathbf{n} = (n_x, n_y) = (\cos \theta_k, \sin \theta_k)$ . Ο προσεγγιστικός επιλυτής που θα χρησιμοποιηθεί είναι αυτός του Roe [45] και ορίζει τον προσεγγιστικό Ιακωβιανό πίνακα  $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}$ , ο οποίος έχει την ίδια μορφή με τον πραγματικό Ιακωβιανό  $\mathbf{J}_n$ , αλλά υπολογίζεται σε μία "μέση" κατάσταση. Αυτή η κατάσταση δίνεται από τις ποσότητες  $\tilde{\omega} = (\tilde{u}, \tilde{v})$  και  $\tilde{c}$ , οι οποίες πρέπει να υπολογίζονται σύμφωνα με τις ιδιότητες του πίνακα [46] :

1.  $\tilde{\mathbf{J}}_{RL} = \tilde{\mathbf{J}}_{RL}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_L)$ .
2.  $\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = \tilde{\mathbf{J}}_{RL}(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L)$ .
3. ο  $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}$  έχει πραγματικές και διακριτές ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.
4.  $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_L) = \mathbf{J}_n(\mathbf{q}_L)$ .

Επιβάλλοντας την δεύτερη συνθήκη [46] του πίνακα  $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}$  οι ακόλουθες εκφράσεις για τις μέσες τιμές  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}$  και  $\tilde{c}$  προκύπτουν:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_R}u_R + \sqrt{h_L}u_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \tilde{v} = \frac{\sqrt{h_R}v_R + \sqrt{h_L}v_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \tilde{c} = \sqrt{g\tilde{h}} \quad (3.12)$$

$$\tilde{h} = \frac{h_R + h_L}{2} \quad \text{ή} \quad \tilde{h} = \sqrt{h_R h_L}, \quad (3.13)$$

όπου για την μέση τιμή  $\tilde{h}$  προτιμάται η πρώτη επιλογή.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}$  σύμφωνα με τον Roe και σε αντιστοιχία με αυτές του πραγματικού Ιακωβιανού  $\mathbf{J}_n$  (3.8) είναι :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + c \\ \tilde{\lambda}_2 &= \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y \\ \tilde{\lambda}_3 &= \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - c. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Με όμοιο τρόπο τα ιδιοδιανύσματα του  $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}$  δίνονται :

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{c}n_y \\ \tilde{c}n_x \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Ο προσεγγιστικός Ιακωβιανός πίνακας δεν χρησιμοποιείται απευθείας στην αριθμητική μέθοδο. Η διαφορά του διανύσματος  $\mathbf{q}$  δια μέσου της πλευράς, που ορίζεται από το υπολογιστικό πλέγμα, αναλύεται με βάση τα ιδιοδιανύσματα του σε:

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \mathbf{e}_k, \quad (3.16)$$

όπου η έκφραση των συντελεστών  $\alpha_k$  από την λύση των (3.16) είναι [46]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\Delta h}{2} + \frac{1}{2\tilde{c}} [\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - \omega \cdot \mathbf{n} \Delta h] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\tilde{c}} [\Delta(hv) - \tilde{v} \Delta h] n_x - [\Delta(hu) - \tilde{u} \Delta h] n_y \\ \alpha_3 &= \frac{\Delta h}{2} - \frac{1}{2\tilde{c}} [\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - \omega \cdot \mathbf{n} \Delta h] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ο πίνακας  $|\tilde{\mathbf{J}}_{RL}|$  αντικαθίσταται από τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του και το γινόμενο  $|\tilde{\mathbf{J}}_{RL}|(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L)$  παίρνει την μορφή:

$$|\tilde{\mathbf{J}}_{RL}|(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L) = \sum_{k=1}^3 |\tilde{\lambda}_k| \alpha_k \tilde{\mathbf{e}}_k. \quad (3.18)$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση (3.2) στην σχέση (3.11) συνεπάγεται:

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G})^* \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}, \mathbf{G})_R \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{F}, \mathbf{G})_L \cdot \mathbf{n} - \sum_{k=1}^3 |\tilde{\lambda}_k| \alpha_k \tilde{\mathbf{e}}_k]. \quad (3.19)$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (3.5), (3.10) και έχοντας υπόψιν την (3.19) καθώς και τη μεθόδο των πεπερασμένων όγκων (προς τα εμπρός, χρονικά διαδικασία) τελικά προκύπτει:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{S_i} \left( \sum_{k=1}^3 (\mathbf{F}, \mathbf{G})_k^* \cdot \mathbf{n}_k dC_k \right)_i^n. \quad (3.20)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την βασική σχέση του αριθμητικού μας σχήματος. Το σχήμα αυτό χαρακτηρίζεται ως άμεσο (explicit) γιατί, όπως φαίνεται από την (3.20), οι τιμές του διανύσματος  $\mathbf{q}_i$  στο καινούριο χρονικό βήμα υπολογίζονται μέσω διαφόρων όρων, με γνωστές τις τιμές τους από το προηγούμενο χρονικό βήμα, χωρίς να είναι απαραίτητος ο υπολογισμός κάποιων ενδιάμεσων βοηθητικών όρων, όπως στα έμμεσα σχήματα (implicit). Το  $(\mathbf{F}, \mathbf{G})_k^*$

δίνεται από την σχέση (3.19), όπου  $k$  η πλευρά του  $i$  εξεταζόμενου κελιού. Το  $S_i$  συμβολίζει το εμβαδόν  $i$  του κελιού και το  $dC_k$  συμβολίζει το μήκος της  $k$  πλευράς. Οι εκθέτες  $n+1$  και  $n$  δηλώνουν χρονικά βήματα και όπως φαίνεται αυτό που υπολογίζεται κάθε φορά είναι οι τιμές του διανύσματος  $\mathbf{q}$ , λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές αυτού καθώς και άλλων μεταβλητών στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Ο λόγος που το  $k$  παίρνει τιμές από 1 έως 3 είναι ότι τα κελιά που παράγονται από την κατασκευή του υπολογιστικού πλέγματος είναι τρίγωνα, όπως θα δειχθεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

### 3.3 Γεωμετρικές παρατηρήσεις

Αυτό που μένει να απαντηθεί, προς το παρόν, είναι πώς υπολογίζονται οι όποιες γεωμετρικές μεταβλητές έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί, κατά την διάρκεια της διακριτοποίησης. Παρατηρώντας το σχήμα 3.1 θεωρούμε ότι δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών  $V_s(x_s, y_s)$  και  $V_{s+1}(x_{s+1}, y_{s+1})$  της πλευράς  $k$ . Οι κορυφές αυτές έχουν φορά αντίθετη με αυτήν του ρολογιού ως προς το κελί  $i$ , το οποίο εξετάζεται. Έτσι, ορίζουμε αρχικά:

$$\Delta x_s \equiv x_{s+1} - x_s, \quad \Delta y_s \equiv y_{s+1} - y_s. \quad (3.21)$$

Επομένως, το μήκος της  $k$  πλευράς δίνεται από:

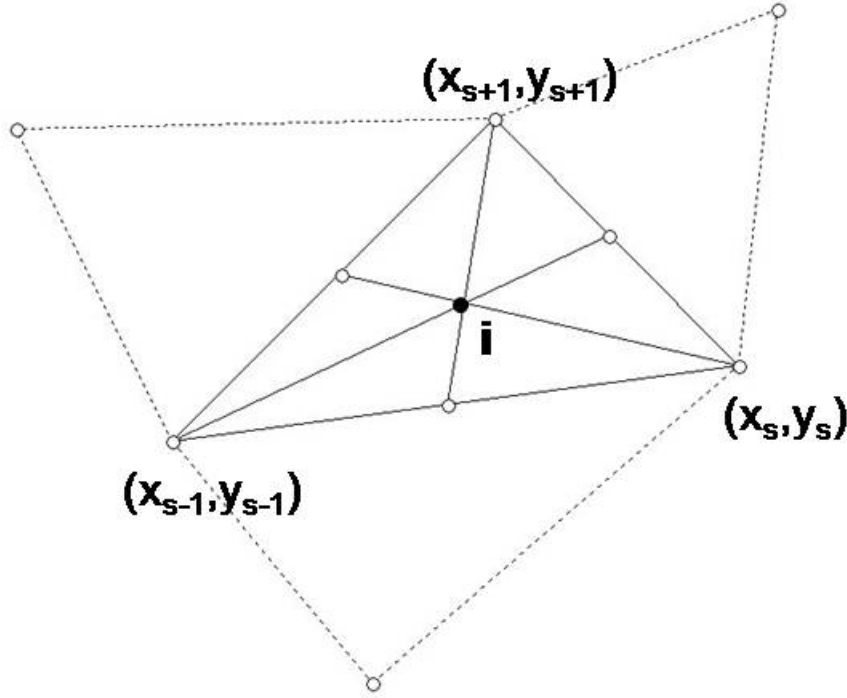
$$dC_k = \sqrt{\Delta^2 x_s + \Delta^2 y_s}. \quad (3.22)$$

Οι συνιστώσες του εξωτερικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}_k$ , θεωρώντας το κελί το οποίο εξετάζεται σωστά προσανατολισμένο (σύμφωνα με την αντίθετη φορά του ρολογιού), ορίζονται:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x^k &= \cos \theta_k = \frac{\Delta y_s}{dC_k} \\ \mathbf{n}_y^k &= \sin \theta_k = -\frac{\Delta x_s}{dC_k}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Η γεωμετρία μας δίνει και τον ορισμό για το εμβαδόν του τριγώνου-κελιού  $i$ , δεδομένου των συντεταγμένων των κορυφών του τριγώνου:

$$\begin{aligned}
S_i &= \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2).
\end{aligned} \tag{3.24}$$



Σχήμα 3.3: Βαρύκεντρο  $i$  ενός τυχαίου κελιού-τριγώνου

Μέχρι στιγμής, η μεταβλητή  $i$  συμβολίζει το κάθε κελί-τρίγωνο, το οποίο εξετάζεται. Στην ουσία όμως η μεταβλητή  $i$  δηλώνει ένα συγκεκριμένο κεντρικό σημείο του κάθε τριγώνου, όπου εφαρμόζονται όλες οι τιμές των μεταβλητών ώστε να παραχθεί η αριθμητική μέθοδος. Στην παρούσα εργασία το κεντρικό αυτό σημείο του κάθε τριγώνου είναι το βαρύκεντρο. Παρατηρώντας το σχήμα 3.3 φαίνεται το βαρύκεντρο ενός τυχαίου κελιού και οι συντεταγμένες του δίνονται :

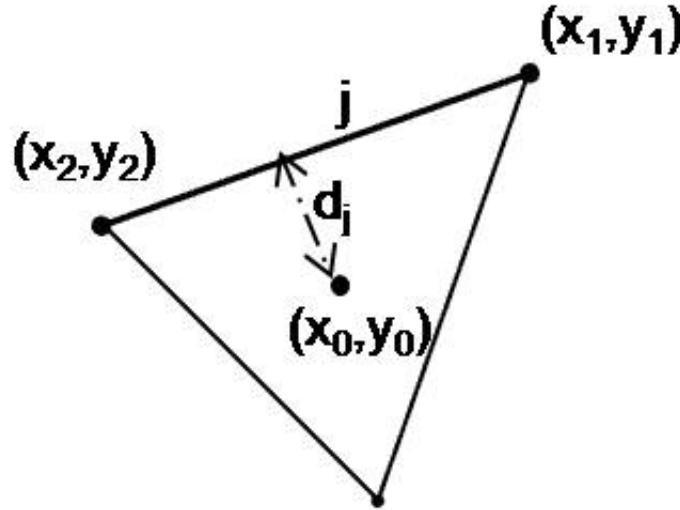
$$\left( \frac{1}{3}(x_s + x_{s-1} + x_{s+1}), \frac{1}{3}(y_s + y_{s-1} + y_{s+1}) \right).$$

### 3.4 Η συνθήκη CFL

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιαστεί μία αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια του ρητού αριθμητικού σχήματος, που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες παραγράφους. Από το 1928 οι Courant, Friedrichs και Lewy [14], κάνοντας χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, διαπίστωσαν την αναγκαιότητα μίας συνθήκης ικανής να εξασφαλίζει την ευστάθεια της μεθόδου. Γι' αυτό το λόγο ορίστηκε ο αριθμός Courant ή αριθμός CFL, όπως διαφορετικά ονομάζεται, και συμβολίζεται με την μεταβλητή  $\nu$  ή την  $CFL$  εναλλακτικά και είναι ένας αδιάστατος αριθμός. Η συνθήκη αυτή ορίζει ότι για να είναι ευσταθής η αριθμητική μέθοδος πρέπει  $CFL < 1$ . Με το πέρασμα των χρόνων δώθηκαν πολλοί ορισμοί για τον αριθμό Courant ανάλογα με την μέθοδο και και τα προβλήματα που εξετάζονταν. Στην παρούσα εργασία, λαμβάνοντας υπόψιν τις αναφορές [39, 5, 9] χρησιμοποιούμε ως ορισμό τον εξής:

$$CFL = \Delta t \frac{\max_i (\sqrt{gh_i} + \sqrt{u_i^2 + v_i^2})}{\min_j d_j}, \quad (3.25)$$

όπου  $\Delta t$  είναι το χρονικό βήμα της αριθμητικής μεθόδου,  $g, h_i, u_i, v_i$ , είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, το ύψος του νερού, η οριζόντια και η κατακόρυφη ταχύτητα του νερού αντίστοιχα για το εξεταζόμενο κελί  $i$ . Η μεταβλητή  $d_j$  εκφράζει την απόσταση από το κέντρο του κελιού-τριγώνου  $i$  στην πλευρά  $j$  του τριγώνου.



Σχήμα 3.4: Η απόσταση  $d_j$  του βαρύκεντρου ενός κελιού από την  $j$  πλευρά του

Αν συμβολίσουμε με  $(x_0, y_0)$  τις συντεταγμένες του κέντρου του κελιού  $i$  και με  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  τις συντεταγμένες των άκρων της πλευράς  $j$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4, η απόσταση αυτή

δίνεται από :

$$d_j = \frac{|(x_2 - x_1)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y_2 - y_1)|}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \quad (3.26)$$

Λύνοντας την (3.25) ως προς  $\Delta t$  προκύπτει :

$$\Delta t = CFL \frac{\min_j d_j}{\max_i (\sqrt{gh_i} + \sqrt{u_i^2 + v_i^2})}, \quad (3.27)$$

που παράγει σε κάθε επανάληψη το χρονικό βήμα της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων. Δεν πρέπει να παραληφθεί όμως ότι η συνθήκη CFL αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια της μεθόδου και κατά συνέπεια για την σύγκλιση, αλλά όχι ικανή.

### 3.5 Διακριτοποίηση του πηγαίου όρου

Κατά την διακριτοποίηση των εξισώσεων ρηχών υδάτων της παραγράφου 3.2, θεωρήθηκε ότι ο πηγαίος όρος είναι αμελητέος και εξισώθηκε με το μηδέν (ομογενής περίπτωση). Στην πραγματικότητα όμως ο πηγαίος όρος υπάρχει και εκφράζεται μέσω των όρων της τριβής, καθώς και των όρων που περιγράφουν την τοπογραφία του πυθμένα. Στην παρούσα εργασία οι όροι της τριβής θεωρούνται αμελητέοι και επομένως θα χρειαστεί να διακριτοποιήσουμε μόνον τους όρους της τοπογραφίας. Η εξίσωση (2.12) περιέχει πηγαίο όρο :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \mathbf{E}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}.$$

Εκτελώντας μία σειρά από ενέργειες σε αυτή την εξίσωση, κατά αναλογία με την διακριτοποίηση στην ομογενή περίπτωση, προκύπτει η βασική επαναληπτική σχέση του αριθμητικού σχήματος, συμπεριλαμβανομένου του πηγαίου όρου. Έτσι, κατά σειρά, ολοκληρώνοντας σε δοσμένο σταθερό εμβαδόν  $S$ , εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης του Gauss και διακριτοποιώντας πάνω σε δοσμένο υπολογιστικό πλέγμα προκύπτει βήμα προς βήμα :

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dS + \iint_S \nabla(\mathbf{F}, \mathbf{G}) dS = \iint_S \mathbf{R} dS \Rightarrow \quad (3.28)$$

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dS + \oint_C (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} dC = \iint_S \mathbf{R} dS \Rightarrow \quad (3.29)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} + \frac{1}{S_i} \oint_{C_i} (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} dC = \frac{1}{S_i} \iint_{S_i} \mathbf{R} dS. \quad (3.30)$$

Η (3.30) μέσω της (3.10) και την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων, όμοια με την (3.19) (ομογενής περίπτωση), μας παράγει την βασική αριθμητική σχέση :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{S_i} \left( \sum_{k=1}^3 (\mathbf{F}, \mathbf{G})_k^* \cdot \mathbf{n}_k dC_k \right)_i^n + \frac{\Delta t}{S_i} \mathbf{R}^{*n}. \quad (3.31)$$



Για τον όρο της αριθμητικής πηγής,  $\mathbf{R}^*$ , πρέπει να βρεθεί μία προσέγγιση του ολοκληρώματος του πηγαίου όρου  $\mathbf{R}$  πάνω στο δεδομένο κελί  $i$  [11, 10]. Για κάθε πλευρά  $k$  του  $i$  κελιού ο διακριτοποιημένος πηγαίος όρος αναλύεται στην εσωτερική και εξωτερική συνεισφορά κελιού :

$$\tilde{\mathbf{R}}_k = \tilde{\mathbf{R}}_k^+ + \tilde{\mathbf{R}}_k^-,$$

όπου :

$$\tilde{\mathbf{R}}_k^\pm = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{I} \pm | \tilde{\mathbf{L}} | \tilde{\mathbf{L}}^{-1}) \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_k = \sum_{m=1}^3 \beta^{m\pm} \tilde{\mathbf{e}}^m. \quad (3.32)$$

Για κάθε  $i$  κελί η συνολική συνεισφορά, εν διαμέσω των πλευρών, στο συνολικό πηγαίο όρο του κελιού,  $\mathbf{R}^*$ , λαμβάνεται από το άθροισμα των όρων που σχετίζονται με την εσωτερική κάθετη ταχύτητα σε κάθε πλευρά  $k$  [11]:

$$\mathbf{R}^* = \iint_{S_i} R dS = \sum_{k=1}^3 \tilde{\mathbf{R}}_k^- dC_k. \quad (3.33)$$

Οι εκφράσεις των συντελεστών  $\beta^-$  είναι :

$$\begin{aligned} \beta^{1-} &= \frac{1}{4\tilde{c}} \left(1 - \frac{|\tilde{\lambda}_1|}{\tilde{\lambda}_1}\right) (\bar{\mathbf{S}}_2 n_x + \bar{\mathbf{S}}_3 n_y) \\ \beta^{2-} &= \frac{1}{2\tilde{c}} \left(1 - \frac{|\tilde{\lambda}_2|}{\tilde{\lambda}_2}\right) (-\bar{\mathbf{S}}_2 n_y + \bar{\mathbf{S}}_3 n_x) \\ \beta^{3-} &= -\frac{1}{4\tilde{c}} \left(1 - \frac{|\tilde{\lambda}_3|}{\tilde{\lambda}_3}\right) (\bar{\mathbf{S}}_2 n_x + \bar{\mathbf{S}}_3 n_y), \end{aligned} \quad (3.34)$$

όπου  $\bar{\mathbf{S}}_{2,3}$  είναι η δεύτερη και η τρίτη συνιστώσα των πηγαίων όρων  $\bar{\mathbf{S}}$  :

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1 \\ \bar{\mathbf{S}}_2 \\ \bar{\mathbf{S}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g\tilde{h}\Delta z_x \\ g\tilde{h}\Delta z_y \end{pmatrix}_k, \quad (3.35)$$

όπου το  $\tilde{h}$  δίνεται από την σχέση (3.13) και οι προσαυξημένοι όροι του πυθμένα  $\Delta z_{x,y}$  σε κάθε κατεύθυνση είναι της μορφής :

$$\Delta z_x = -(z_R - z_L)n_x, \quad \Delta z_y = -(z_R - z_L)n_y. \quad (3.36)$$

Η μέση τιμή της σχέσης (3.35) σύμφωνα με τον Bermúdez [53] εξασφαλίζει μία συντηρητική διακριτοποίηση του πηγαίου όρου.

### 3.6 Στάσιμη κατάσταση και C-ιδιότητα

Ας θεωρήσουμε τις εξισώσεις ρηχών υδάτων στη πρώτη διάσταση με  $\mathbf{q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R}$ . Όταν  $\mathbf{q}_t = 0$ , τότε το υγρό βρίσκεται σε ισορροπία και οι ταχύτητες των εξισώσεων είτε είναι μηδέν είτε έχουν σταθερή τιμή. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το υγρό βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση και πιο συγκεκριμένα :

$$u(x, t) \equiv 0 \text{ και } h(x, t) \equiv D - b(x) \forall (x, t)$$

ή

$$(u(x, t))_x \equiv 0 \text{ και } h(x, t) \equiv D - b(x) \forall (x, t),$$

με  $D$  σταθερά. Όταν λοιπόν  $\mathbf{q}_t = 0$  τότε

$$\mathbf{F}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R}.$$

Αυτό σημαίνει για το αριθμητικό σχήμα ότι θα πρέπει να επιτυγχάνεται η ισορροπία της αριθμητικής ροής με την προσέγγιση του πηγαίου όρου,

$$\mathbf{F}_R^* - \mathbf{F}_L^* = \mathbf{R}^*.$$

Κατά όμοιο τρόπο ορίζεται και η στάσιμη κατάσταση του υγρού για τις εξισώσεις ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις :

$$u(x, y, t) \equiv 0, v(x, y, t) \equiv 0, \text{ και } h(x, y, t) \equiv D - b(x, y) \forall (x, y, t)$$

ή

$$(u(x, y, t))_x \equiv 0, (v(x, y, t))_y \equiv 0 \text{ και } h(x, y, t) \equiv D - b(x, y) \forall (x, y, t).$$

Αν στην (2.14) θέσουμε  $\mathbf{q}_t = 0$  προκύπτει :

$$\mathbf{F}(\mathbf{q})_x + \mathbf{G}(\mathbf{q})_y = \mathbf{R}.$$

Γράφοντας τώρα τον πηγαίο όρο  $\mathbf{R}$  εναλλακτικά ως  $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ , όπως στην παράγραφο (2.4) έχουμε :

$$\mathbf{F}(\mathbf{q})_x + \mathbf{G}(\mathbf{q})_y = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2,$$

την οποία διασπάμε σε δύο εξισώσεις :

$$\mathbf{F}(\mathbf{q})_x = \mathbf{R}_1 \text{ και } \mathbf{G}(\mathbf{q})_y = \mathbf{R}_2,$$

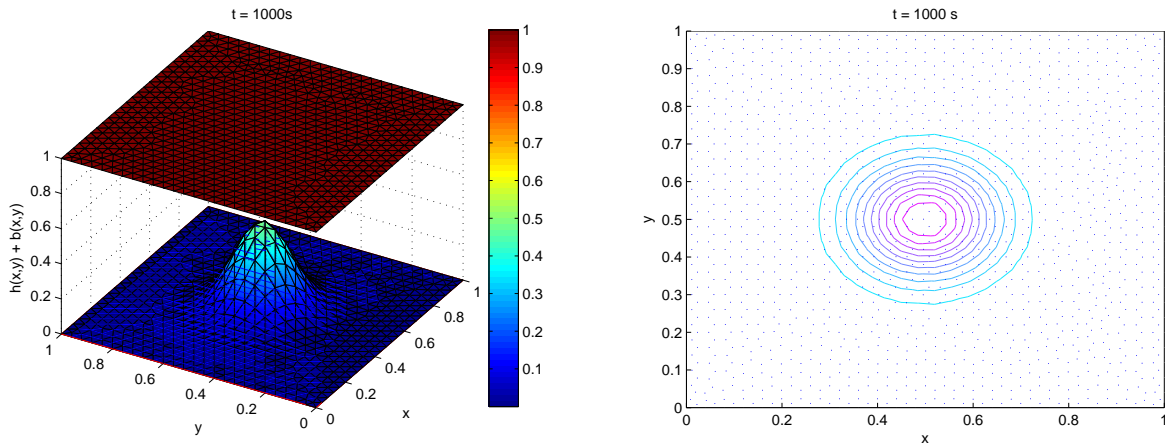
Όπως και στη μία διάσταση έτσι και εδώ θα πρέπει να υπάρχει ισορροπία των αριθμητικών ροών και της προσέγγισης του πηγαίου όρου :

$$\mathbf{F}_R^* - \mathbf{F}_L^* = \mathbf{R}_1^* \text{ και } \mathbf{G}_R^* - \mathbf{G}_L^* = \mathbf{R}_2^*.$$

Όταν διατηρείται αυτή η ισορροπία των αριθμητικών ροών με την προσέγγιση του πηγαίου όρου το αριθμητικό μας σχήμα ικανοποιεί την C-ιδιότητα και πιο συγκεκριμένα ικανοποιεί :

- την ακριβή C-ιδιότητα, όταν έχει ακριβή αποτελέσματα ενώ το υγρό βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση.
- την προσεγγιστική C-ιδιότητα, όταν έχει ακρίβεια τάξης  $O(\Delta x^2)$  ενώ το υγρό βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση.

Όταν δεν ικανοποιείται η C-ιδιότητα τότε είναι πολύ πιθανόν να εμφανιστούν μη φυσικές αριθμητικές ταλαντώσεις στην αριθμητική λύση, οι οποίες κάνουν το αριθμητικό σχήμα προβληματικό. Στο σχήμα 3.5 παριστάνεται ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα στο οποίο δείχνεται ότι το αριθμητικό σχήμα ικανοποιεί την C-ιδιότητα. Σε ένα μικρό τετράγωνο κανάλι διαστάσεων  $1\text{ m} \times 1\text{ m}$  τοποθετείται η τοπογραφία η οποία περιγράφεται στο πρόβλημα 3 του κεφαλαίου 5. Το βάθος του νερού είναι παντού  $1\text{ m}$  και έχει μηδενική ταχύτητα. Όπως γίνεται αντιληπτό από το παρακάτω σχήμα το νερό παραμένει ακίνητο καθώς  $t \rightarrow \infty$  και συνεπώς το αριθμητικό σχήμα ικανοποιεί την C-ιδιότητα.



Σχήμα 3.5: Αριθμητική λύση σε ισορροπία, για χρόνο  $t = 1000\text{ s}$ . Το βάθος του νερού παρίσταται αριστερά και το πεδίο των ταχυτήτων δεξιά

### 3.7 Αρχικές και συνοριακές συνθήκες

Για την ολοκλήρωση της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων ρηχών υδάτων απαιτείται ένα συνεπές σύνολο από αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Καταρχήν, για να ξεκινήσει η χρονική εξέλιξη του αριθμητικού σχήματος χρειάζεται πληροφορία, που παράγεται από τον καθορισμό των τιμών των τριών εξαρτημένων μεταβλητών  $h, u, v$  σε κάθε κελί την χρονική στιγμή  $t = 0$ . Η παραπάνω πληροφορία συνθέτει τις αρχικές συνθήκες.

Όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες, η ιδέα της χρήσης κάποιου Riemann επιλυτή για τον υπολογισμό των αριθμητικών ροών στις πλευρές του κελιού μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση που κάποια πλευρά βρίσκεται πάνω στο σύνορο του υπολογιστικού πλέγματος. Οι μεταβλητές αποθηκεύονται στο κέντρο κάθε κελιού και οι συνοριακές συνθήκες εφαρμόζονται μέσα από τις αριθμητικές ροές των πλευρών του κάθε κελιού. Για τις πλευρές όμως που εφάπτονται στο σύνορο, ο υπολογισμός των αριθμητικών ροών τους απαιτεί τις τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών των κελιών που βρίσκονται έξω από το υπολογιστικό πλέγμα. Η πληροφορία από αυτά τα φανταστικά κελιά (ghost cells) δίνεται ανάλογα με το είδος του συνόρου και είναι προκαθορισμένη από την αρχή κάθε χρονικού βήματος. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις συνόρων: το κλειστό σύνορο (στερεός τοίχος) και το ανοιχτό ή ελεύθερο σύνορο.

Στην περίπτωση του κλειστού συνόρου πρέπει να εφαρμοστεί η συνθήκη ελεύθερης ολίσθησης (free-slip). Αυτό σημαίνει ότι το βάθος  $h$  στο φανταστικό κελί έχει την ίδια τιμή με αυτήν του κελιού που βρίσκεται στο σύνορο και οι αντίστοιχες ταχύτητες  $u, v$  έχουν αντίθετες τιμές. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τη γνωστή κατά τον Roe διαδικασία υπολογίζονται οι νέες τιμές για τις εξαρτημένες μεταβλητές στα κελιά που εφάπτονται στο σύνορο, πιο συγκεκριμένα για τις πλευρές των κελιών που βρίσκονται στο σύνορο. Αν θέσουμε ως  $i + 1$  το αντίστοιχο φανταστικό κελί για το κελί  $i$ , τότε οι τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών σε κάθε χρονικό βήμα καθορίζονται ως εξής:

$$h_{i+1} = h_i, \quad (\mathbf{un})_{i+1} = -(\mathbf{un})_i, \quad (\mathbf{us})_{i+1} = (\mathbf{us})_i,$$

όπου  $\mathbf{un}$  και  $\mathbf{us}$  εκφράζουν την κάθετη και εφαπτομενική στο σύνορο συνιστώσα της ταχύτητας.

Στο ανοιχτό ή ελεύθερο σύνορο, η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη και χρειάζεται να αναφερθούν περισσότερες λεπτομέρειες. Σύμφωνα με την θεωρία των χαρακτηριστικών, ο αριθμός των συνθηκών που πρέπει να επιβληθούν στο σύνορο εξαρτάται από τον τοπικό αριθμό του Froude,  $Fr = (\omega \cdot \mathbf{n}/c)$ , και την κατεύθυνση της ροής. Υπάρχουν τέσσερις περιπτώσεις στο ανοιχτό σύνορο που πρέπει να ληφτούν υπόψιν [50]:

- Υπερκρίσιμη εισροή

Όλες οι χαρακτηριστικές εισέρχονται στο υπολογιστικό πεδίο, έτσι τρεις συνθήκες

πρέπει να επιβληθούν (το βάθος του νερού και οι δυο συνιστώσες της ταχύτητας).

- Υπερκρίσιμη εκροή  
Όλες οι χαρακτηριστικές βγαίνουν έξω από το υπολογιστικό πεδίο, έτσι δεν χρειάζεται καμμία συνθήκη.
- Υποκρίσιμη εισροή  
Δύο χαρακτηριστικές εισέρχονται στο υπολογιστικό πεδίο, έτσι δύο συνθήκες πρέπει να επιβληθούν.
- Υποκρίσιμη εκροή  
Μία μόνο χαρακτηριστική εισέρχεται στο υπολογιστικό πεδίο, έτσι μία μόνο συνθήκη απαιτείται στο σύνορο.

Οι παραπάνω συνθήκες του ελεύθερου συνόρου μπορούν να επιβληθούν με παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση του κλειστού συνόρου. Στις περιπτώσεις που χρειάζεται να οριστεί ακόμα μία εξαρτημένη μεταβλητή, κυρίως στις υποκρίσιμες ροές, χρησιμοποιείται η σταθερά του Riemann [50, 49].



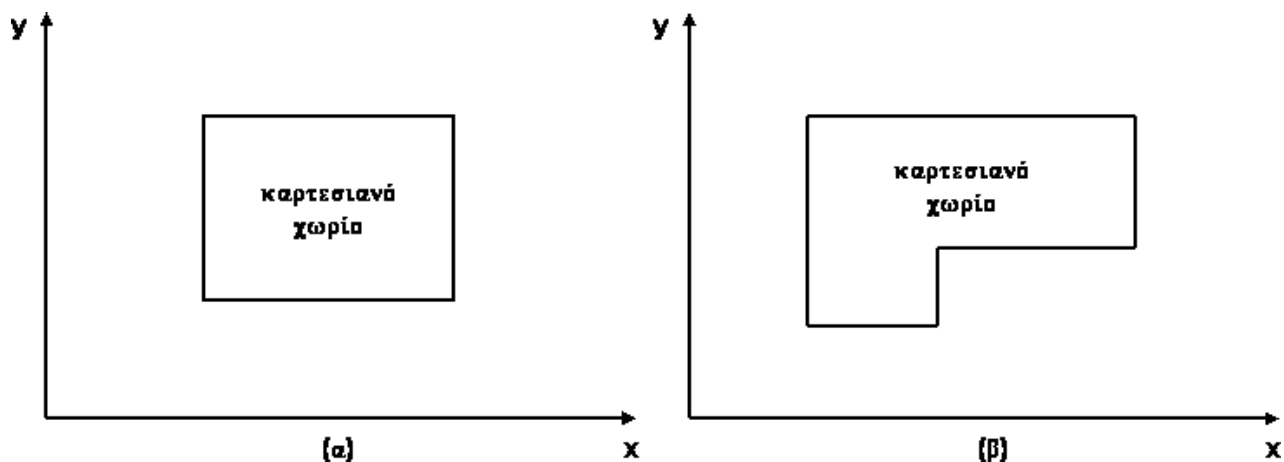
## Κεφάλαιο 4

# Κατασκευή Υπολογιστικού Πλέγματος

Σε αυτήν την ενότητα θα γίνει η παρουσίαση της κατασκευής του υπολογιστικού πλέγματος, που στο προηγούμενο κεφάλαιο θεωρήθηκε δεδομένο ώστε να διευκολυνθεί η παραγωγή της αριθμητικής μεθόδου. Οι περισσότερες μελέτες πάνω στην επίλυση των εξισώσεων των ρηχών υδάτων χρησιμοποιούν χωρία με δομημένα καρτεσιανά πλέγματα, που όμως δεν μπορούν να περιγράψουν ικανοποιητικά πολύπλοκες γεωμετρίες. Η εργασία αυτή μελετάει χωρία με μη δομημένα πλέγματα και ειδικά πλέγματα που προκύπτουν με διακριτοποίηση μέσω τριγωνισμών. Επομένως, θεωρείται αναγκαία η εύρεση ενός κατάλληλου προγραμματιστικού περιβάλλοντος (mesh generator), το οποίο θα δημιουργεί το υπολογιστικό πλέγμα παράγοντας τους συγκεκριμένους τριγωνισμούς, με μεγαλύτερη ή μικρότερη πυκνότητα ανάλογα τις απαιτήσεις μας. Τα προγραμματιστικά πακέτα που εξετάστηκαν είναι το *Triangle* και το *EasyMesh*. Από αυτά επιλέχθηκε το δεύτερο (*Easymesh*) λόγω της ευκολίας στη χρήση του και του σωστού προσδιορισμού των παραγόμενων δεδομένων, που χρειάζονται τα αριθμητικά σχήματα, όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

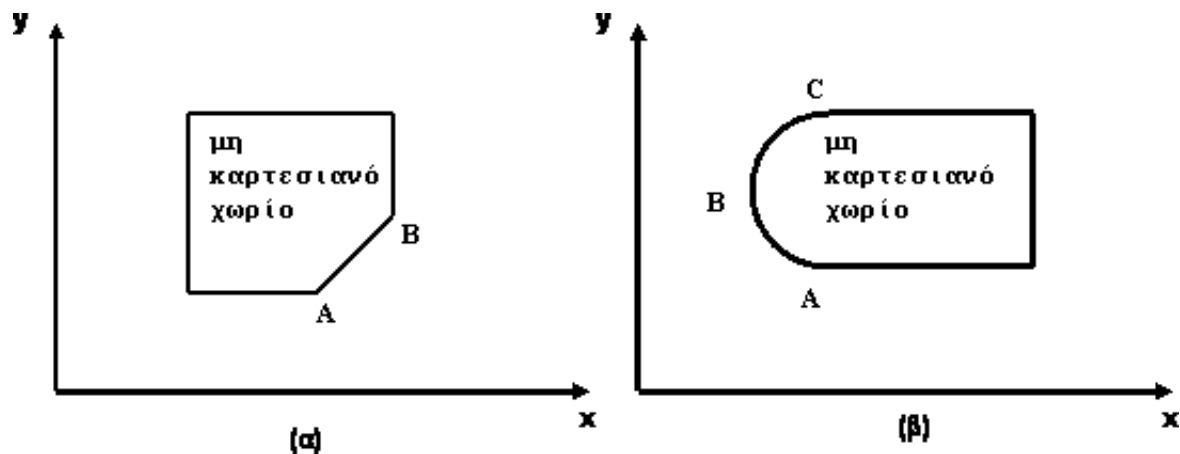
### 4.1 Καρτεσιανά ή μη καρτεσιανά χωρία

Τα χωρία στα οποία θα εφαρμόσουμε τα αριθμητικά μας σχήματα χωρίζονται σε καρτεσιανά και μη καρτεσιανά χωρία. Καρτεσιανά είναι αυτά τα χωρία που τα σύνορά τους ευθυγραμμίζονται τέλεια με τις καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y, z$ . Τέτοιου είδους χωρία είναι εύκολο να καλυφθούν με δομημένους όγκους-κελιά χωρίς ιδιαίτερες απώλειες στην ακρίβεια της λύσης, που παράγεται από το αριθμητικό σχήμα. Δύο τέτοια καρτεσιανά χωρία φαίνονται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Παραδείγματα δύο καρτεσιανών χωρίων στο  $x - y$  επίπεδο

Μη καρτεσιανά χωρία είναι αυτά που τα σύνορά τους δεν ευθυγραμμίζονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y, z$ . Για τα μη καρτεσιανά χωρία, των οποίων δύο παραδείγματα φαίνονται στο σχήμα 4.2, η κατασκευή ενός υπολογιστικού πλέγματος καθώς και η διακρίτοποίηση των εξισώσεων ρηχών υδάτων της σχέσης (2.11) είναι μία πολύπλοκη διαδικασία. Το υπολογιστικό πλέγμα για να καλυφτεί σωστά πρέπει να χρησιμοποιηθούν μη δομημένοι όγκοι.



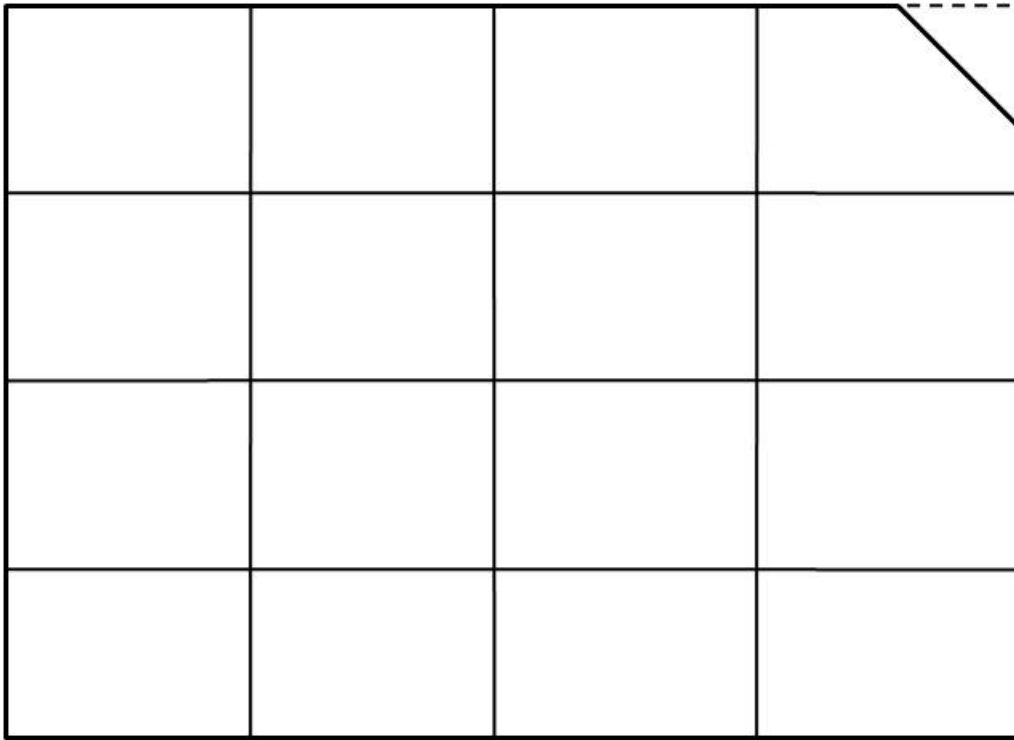
Σχήμα 4.2: Παραδείγματα δύο μη καρτεσιανών χωρίων στο  $x - y$  επίπεδο (α) το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  δεν είναι ευθυγραμμισμένο με καμμία διεύθυνση των καρτεσιανών συντεταγμένων (β) το τόξο  $\widehat{ABC}$  δεν είναι ευθυγραμμισμένο με καμμία διεύθυνση των καρτεσιανών συντεταγμένων



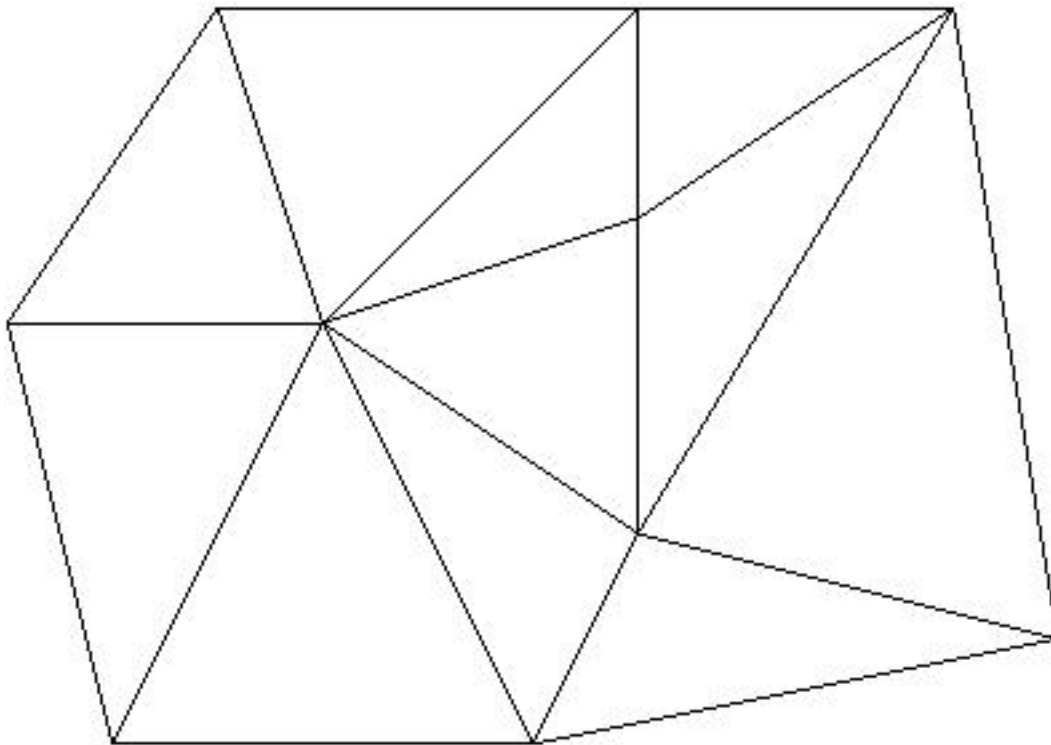
## 4.2 Μη δομημένα υπολογιστικά πλέγματα

Η χρήση των μη δομημένων υπολογιστικών πλεγμάτων σε συνδιασμό με την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων χειρίζεται με επιτυχία πολύπλοκες γεωμετρίες καρτεσιανών ή μη καρτεσιανών χωρίων, σε αντίθεση με τα δομημένα υπολογιστικά πλέγματα, που δεν αντιμετωπίζουν με ακρίβεια τέτοιες γεωμετρίες. Παραδείγματα δομημένου και μη δομημένου υπολογιστικού πλέγματος υπάρχουν στα σχήματα 4.3 και 4.4 αντίστοιχα, όπου και φαίνεται η δυσκολία των δομημένων όγκων να διακριτοποιήσουν ένα μη καρτεσιανό χωρίο. Ένα επιπρόσθετο πλεονέκτημα των μη δομημένων υπολογιστικών πλεγμάτων είναι ότι μπορεί να επιτευχθεί καλύτερη υπολογιστική αποδοτικότητα απλά με την πύκνωση του πλέγματος σε συγκεκριμένες περιοχές που μας ενδιαφέρουν περισσότερο, όπως θα περιγραφεί στη συνέχεια.

Στα δομημένα πλέγματα η αρίθμηση των κόμβων και των κελιών είναι ταξινομημένη. Για παράδειγμα, σε ένα διδιάστατο ορθογώνιο πλέγμα εύκολα καταλαβαίνει κανείς ότι οι γειτονικοί κόμβοι του κόμβου  $(i, j)$  είναι οι :  $(i - 1, j)$ ,  $(i + 1, j)$ ,  $(i, j - 1)$  και  $(i, j + 1)$ . Σε ένα μη δομημένο υπολογιστικό πλέγμα όμως, η αρίθμηση δεν είναι σε γνωστή σειρά και γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο οποιαδήποτε πληροφορία σύνδεσης απαιτείται να αποθηκεύεται σε δομές δεδομένων, δηλαδή πίνακες. Επιπρόσθετα, σε μη δομημένα τριγωνικά υπολογιστικά πλέγματα πληροφορίες σχετικά με την σύνδεση των κελιών-τριγώνων, των πλευρών τους, των κόμβων, του σωστού προσανατολισμού κάθε κελιού καθώς και το συνδιασμό όλων αυτών πρέπει να είναι γνωστές. Επακόλουθο αυτού είναι η δημιουργία κατάλληλων πινάκων που να συγκρατούν σωστά τις προαναφερθείσες πληροφορίες. Βέβαια, αυτή η έμμεση πρόσβαση στα δεδομένα, σε αντίθεση με τα δομημένα υπολογιστικά πλέγματα, επιφέρει ένα πρόσθετο υπολογιστικό κόστος. Αυτό όμως μπορεί να ελαχιστοποιηθεί αρκεί να επιλεγούν οι κατάλληλες δομές δεδομένων. Μία αναλυτικότερη παρουσίαση τέτοιων δομών δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία γίνεται ευθύς αμέσως [3]. Να σημειωθεί εδώ ότι η πληροφορία που αποθηκεύεται στις δομές δεδομένων παρέχεται από τα αρχεία εξόδου του Easymesh, όπως θα δειχθεί αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο.



Σχήμα 4.3: Δομημένο υπολογιστικό πλέγμα σε μη καρτεσιανό χωρίο



Σχήμα 4.4: Μη δομημένο υπολογιστικό πλέγμα σε μη καρτεσιανό χωρίο

#### 4.2.1 Συνδεσιμότητα κελιών-τριγώνων

Ο πίνακας **cell** συγκρατεί την πληροφορία σύνδεσης για κάθε κελί του μη δομημένου υπολογιστικού πλέγματος. Η πληροφορία αυτή περιέχει την αρίθμηση των κόμβων (**iv1**, **iv2** και **iv3**) και την αρίθμηση των πλευρών (**ie1**, **ie2** και **ie3**) για κάθε κελί. Η αρίθμηση αυτή που εφαρμόζεται σε κάθε κελί είναι σύμφωνα με την αντίθετη φορά του ρολογιού (σχήμα 4.5).

$cell(ic, 1) = iv1$ : διακριτή τιμή του κόμβου 1 του κελιού  $ic$

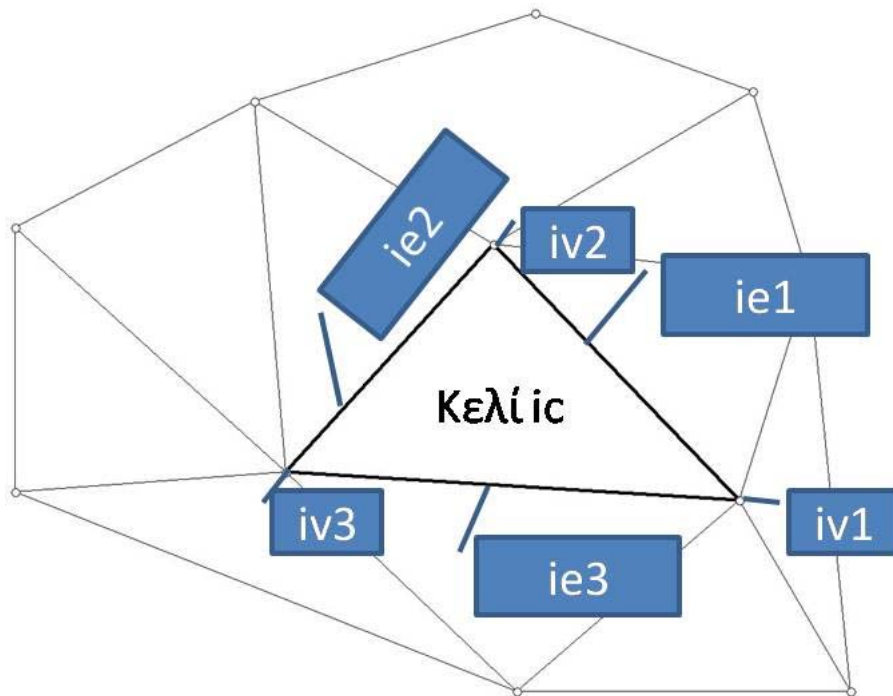
$cell(ic, 2) = iv2$ : διακριτή τιμή του κόμβου 2 του κελιού  $ic$

$cell(ic, 3) = iv3$ : διακριτή τιμή του κόμβου 3 του κελιού  $ic$

$cell(ic, 4) = ie1$ : διακριτή τιμή της πλευράς 1 του κελιού  $ic$

$cell(ic, 5) = ie2$ : διακριτή τιμή της πλευράς 2 του κελιού  $ic$

$cell(ic, 6) = ie3$ : διακριτή τιμή της πλευράς 3 του κελιού  $ic$



Σχήμα 4.5: Συνδεσιμότητα κελιών-τριγώνων. Οι πλευρές και οι κορυφές του κελιού **ic** φαίνονται στο σχήμα

#### 4.2.2 Συνδεσιμότητα πλευρών

Ο πίνακας **edge** συγκρατεί την πληροφορία σύνδεσης για κάθε πλευρά του μη δομημένου υπολογιστικού πλέγματος. Η πληροφορία αυτή περιέχει την αρίθμηση των κόμβων (**iv1**, **iv2**) που βρίσκονται στα άκρα κάθε πλευράς και τα κελιά που βρίσκονται αριστερά και δεξιά από κάθε πλευρά (**ic1** και **ic2**), όπως δείχνει το σχήμα 4.6.

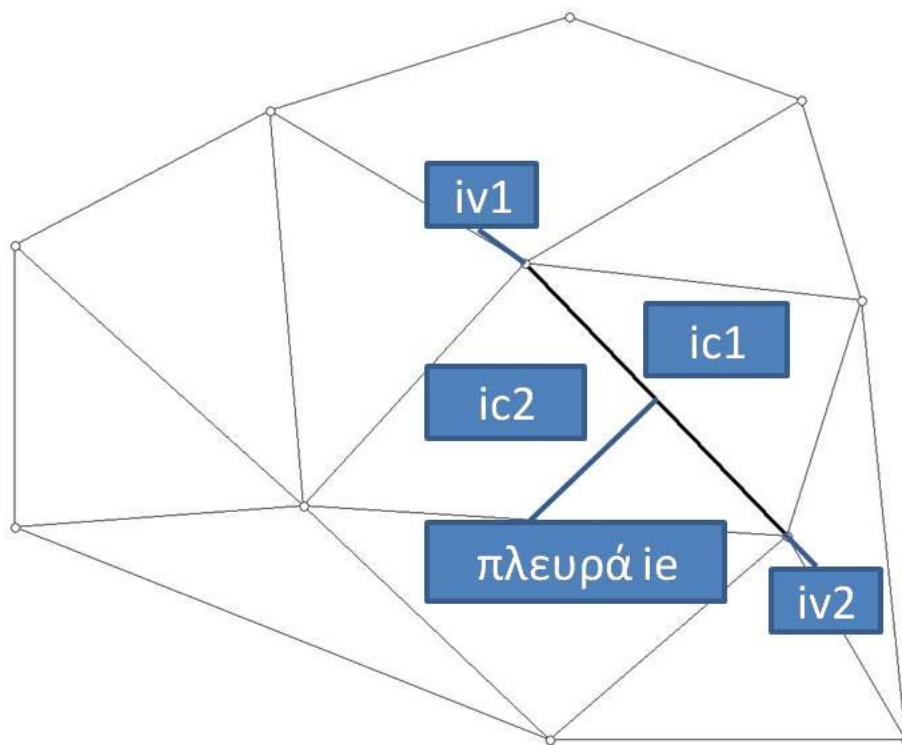
$edge(i_e, 1) = iv1$ : κόμβος 1, αρχικό σημείο της πλευράς  $i_e$

$edge(i_e, 2) = iv2$ : κόμβος 2, τελικό σημείο της πλευράς  $i_e$

$edge(i_e, 3) = ic1$ : κελί στα αριστερά της πλευράς  $i_e$

$edge(i_e, 4) = ic2$ : κελί στα δεξιά της πλευράς  $i_e$

$edge(i_e, 5) = n$ : διακριτή τιμή του συνόρου



Σχήμα 4.6: Συνδεσιμότητα πλευρών. Τα κελιά (**ic1** και **ic2**) είναι στις δύο μεριές της πλευράς **ie** της οποίας ο αρχικός και τελικός κόμβός (**iv1** και **iv2**) φαίνονται στο σχήμα

Ορίζοντας αρχικό και τελικό σημείο για μία πλευρά δίνεται η αίσθηση ότι η πλευρά αποκτά κατεύθυνση. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.6, η πλευρά **ie** είναι κοινή για τα

κελιά **ic1** και **ic2**. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι για την σύνδεση των αριθμημένων κόμβων κάθε κελιού ακολουθείται η αντίθετη φορά από αυτή του ρολογιού, τότε για ένα από τα δύο κελιά η κατεύθυνση της πλευράς από τον κόμβο **iv1** προς τον **iv2** θα είναι σύμφωνα με την σωστή φορά (το κελί βρίσκεται στα αριστερά). Το κελί στα δεξιά είναι αυτό που η αρίθμηση των ακραίων κόμβων του είναι αντίθετη με τη κατεύθυνση της πλευράς.

Αυτό που πρέπει να προσεχθεί σε αυτό το σημείο είναι ότι ανά πάσα στιγμή πρέπει να γνωρίζουμε τον σωστό **προσανατολισμό** για κάθε κελί. Κατά την διάρκεια της υλοποίησης της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων λύνουμε για κάθε κελί πάνω στις τρεις πλευρές του και πρέπει να έχουμε τον σωστό προσανατολισμό για το κελί, δηλαδή να εφαρμόζονται τα σωστά εξωτερικά κάθετα διανύσματα για κάθε πλευρά. Εδώ όμως μπορεί να εμφανιστεί πρόβλημα και να εφαρμοστούν τα αντίθετα κάθετα διανύσματα από αυτά που πρέπει στη λύση. Αυτό μπορεί όμως να αποφευχθεί αν κάθε φορά που λύνουμε ως προς ένα κελί, πάνω στις πλευρές του, ελέγχουμε αν αυτό το κελί είναι στα αριστερά της πλευράς (δηλαδή στη θέση  $edge(ie, 3)$ ), οπότε έχουμε τον σωστό προσανατολισμό και άρα το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα είναι σωστά υπολογισμένο, ή αν το κελί που εξετάζουμε βρίσκεται δεξιά της πλευράς (δηλαδή στη θέση  $edge(ie, 4)$ ), οπότε έχουμε λάθος προσανατολισμό και πρέπει να πάρουμε το αντίθετο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα από αυτό που υπολογίζει η σχέση (3.23). Το Easymesh, όπως θα δούμε στη συνέχεια, μας παρέχει την πληροφορία αν η πλευρά που εξετάζουμε βρίσκεται στο σύνορο, οπότε και πρέπει να ληφθούν υπόψιν οι συνοριακές συνθήκες, τοποθετώντας στη θέση που βρίσκεται το δεξιό κελί, ως προς την πλευρά, την τιμή  $-1$ . Σε ένα πρόβλημα όμως είναι πολύ πιθανόν να εφαρμόζονται περισσότερες από μία διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Γι' αυτό το λόγο χρειαζόμαστε την πέμπτη στήλη του πίνακα,  $edge(ie, 5)$ ), όπου καταχωρείται η διακριτή τιμή  $n$  του συνόρου στο οποίο βρίσκεται η πλευρά  $ie$ . Αν η πλευρά δεν είναι τμήμα του συνόρου τότε η τιμή  $n$  δέχεται την τιμή μηδέν.

### 4.2.3 Συνδεσιμότητα κόμβων και γεωμετρικοί υπολογισμοί

Τελευταίος πίνακας, που πρέπει να δημιουργηθεί, είναι ο **node** ο οποίος θα ορίζει τις συντεταγμένες **ix** και **iy** για κάθε κόμβο **iv**.

$node(iv, 1) = ix$ : συντεταγμένη  $ix$  του κόμβου  $iv$

$node(iv, 2) = iy$ : συντεταγμένη  $iy$  του κόμβου  $iv$

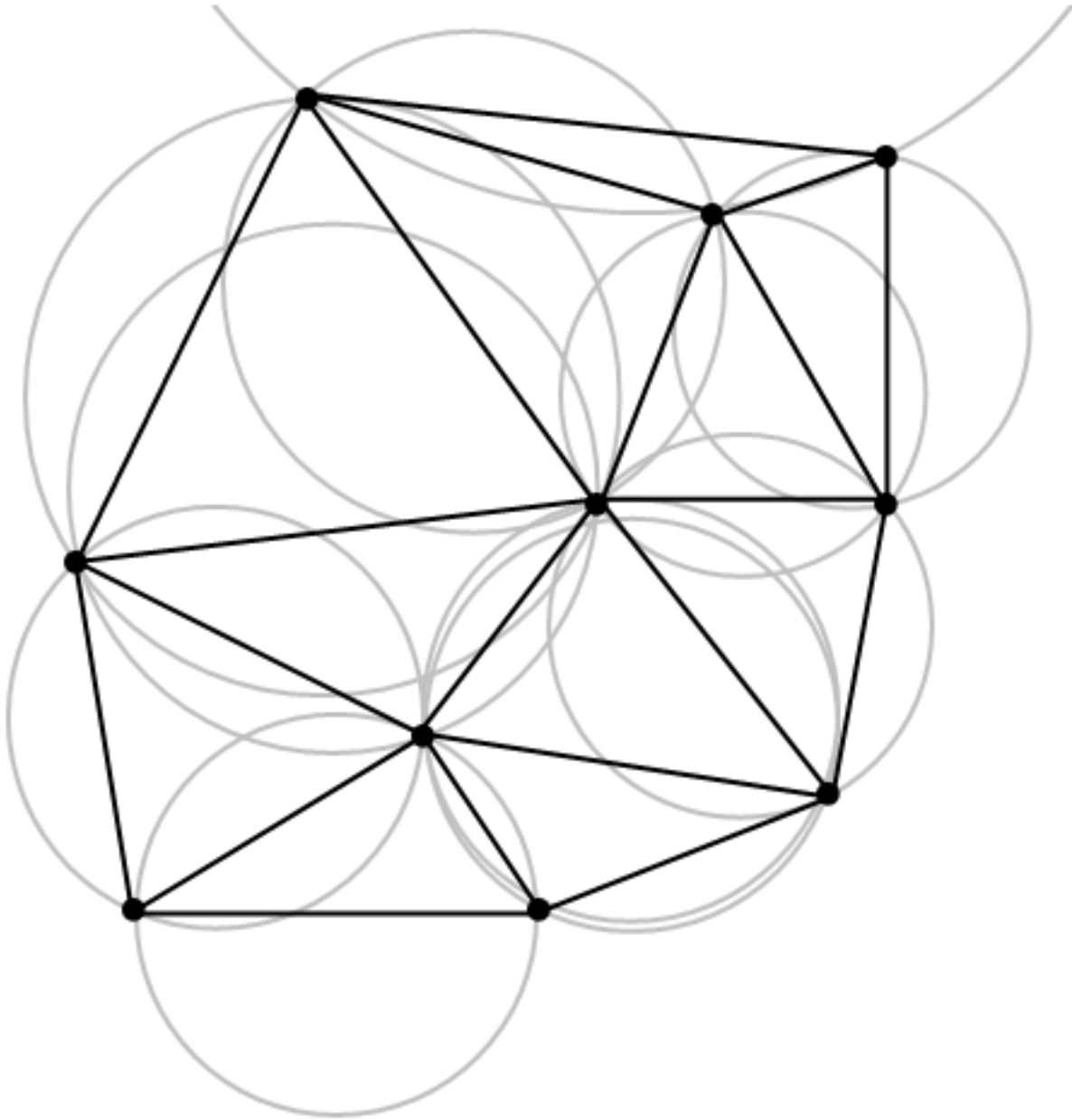
Πλέον, έχοντας αποθηκευμένη την απαιτούμενη πληροφορία στους πίνακες που μόλις ορίσαμε, είναι εφικτό να υπολογιστούν διάφορες γεωμετρικές μεταβλητές, ώστε να παραχθεί η

επαναληπτική μέθοδος που χρησιμοποιούμε. Το εμβαδόν (3.24) του εξεταζόμενου κελιού, το μήκος (3.22) της εξεταζόμενης πλευράς, οι συντεταγμένες (3.23) του κατάλληλου εξωτερικού κάθετου διανύσματος, το βαρύκεντρο του κάθε κελιού καθώς και η ελάχιστη απόσταση (3.26) κατά των υπολογισμό του αριθμού CFL, υπολογίζονται με τη χρήση των δομών δεδομένων με σχετική ευκολία. Αφού, έγινε μία εκτενής ανάλυση του τρόπου με τον οποίο αποθηκεύεται η γεωμετρική πληροφορία για κάθε μη δομημένο υπολογιστικό πλέγμα, αυτό που μένει να εξηγηθεί είναι ο τρόπος με τον οποίο παράγεται αυτή η πληροφορία από το επιλεγμένο προγραμματιστικό περιβάλλον του Easymesh.

### 4.3 Λειτουργία του EasyMesh

Το Easymesh μας δίνει μία πληθώρα επιλογών όσον αφορά την διακριτοποίηση του υπολογιστικού πλέγματος μέσω τριγωνισμών. Παράγει ένα διδιάστατο μη δομημένο πλέγμα με Delaunay τριγωνισμούς. Η τριγωνοποίηση κατα Delaunay παράγει ένα σύνολο σημείων, έτσι ώστε κανένα τέτοιο σημείο να μην βρίσκεται εσωτερικά σε κάποιον περιγεγραμμένο κύκλο οποιουδήποτε τριγώνου [16], όπως φαίνεται στο σχήμα 4.7. Εκτός από την τριγωνοποίηση Delaunay, στα περισσότερα σχήματα που θα παρουσιαστούν, θα απεικονίζονται και τα πολύγωνα Voronoi, που δημιουργούνται με βάση τα βαρύκεντρα των τριγώνων που παράγει η τριγωνοποίηση Delaunay.

Το εξεταζόμενο προγραμματιστικό περιβάλλον, εκτός των άλλων, μπορεί και χειρίζεται με επιτυχία 'τύρες' σε χωρία, επιτυγχάνει τοπική πυκνότητα και αραιώση του πλέγματος με κατάλληλες τεχνικές, κατασκευάζει πλέγματα και σε χωρία που είναι φτιαγμένα με παραπάνω από ένα υλικό. Για τη κατασκευή κάθε πλέγματος απαιτείται η δημιουργία ενός απλού αρχείου εισόδου και η εκτέλεσή του από το Easymesh παράγει τρία διαφορετικά αρχεία εξόδου, που μας δίνουν την αναγκαία γεωμετρική πληροφορία η οποία χρειάζεται για την ολοκλήρωση του αριθμητικού σχήματος.



Σχήμα 4.7: Η τριγωνοποίηση Delaunay μαζί με τους περιγεγραμμένους κύκλους των σχηματιζόμενων τριγώνων

#### 4.3.1 Αρχείο εισόδου

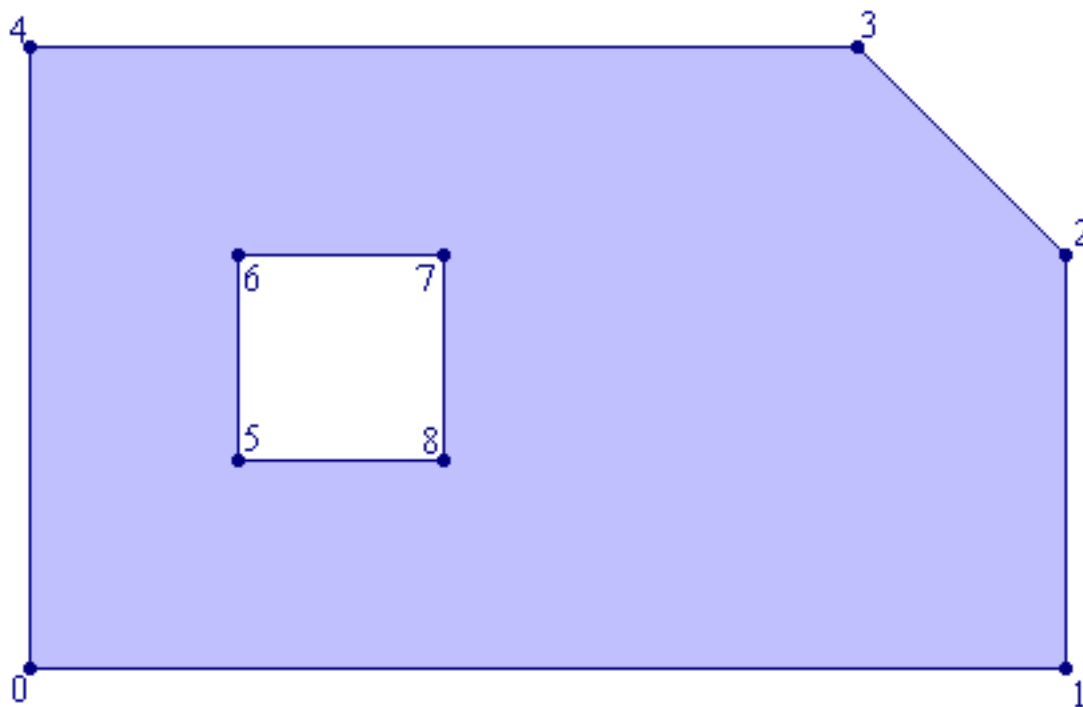
Το αρχείο εισόδου για κάθε πλέγμα θα πρέπει να έχει την εξής μορφοποίηση:

- πρώτη γραμμή: <αριθμός κόμβων >

- ακόλουθες γραμμές: <νούμερο κόμβου:> < $x$ > < $y$ > <μήκος πλευράς τριγώνου> <ετικέτα συνόρου>
- επόμενη γραμμή: <αριθμός ευθύγραμμων τμημάτων>
- ακόλουθες γραμμές: <νούμερο ευθύγραμμου τμήματος:> <αρχικό σημείο> <τελικό σημείο> <ετικέτα συνόρου>

Το πεδίο <μήκος πλευράς τριγώνου> αντιπροσωπεύει το επιθυμητό μήκος των πλευρών των τριγώνων, που περιλαμβάνουν τον συγκεκριμένο κόμβο στην τελική τριγωνοποίηση. Όσο μικρότερη τιμή δίνεται σε αυτό το μήκος τόσο πυκνότερο θα είναι το πλέγμα γύρω από αυτό το σημείο και γενικότερα σε ολόκληρο το χωρίο. Στο πεδίο <ετικέτα συνόρου> δίνεται μία διακριτή τιμή για να είναι ξεκάθαρο ποιοι κόμβοι και ποια ευθύγραμμα τμήματα είναι σχετιζόμενες με ποια συνοριακή συνθήκη. Τα σχόλια ξεκινούν και ολοκληρώνονται με τον χαρακτήρα # και κάθε τέτοιο αρχείο εισόδου πρέπει να έχει την κατάληξη .d. Για την καλύτερη κατανόηση της δομής και της χρήσης τέτοιων αρχείων θα δοθούν δύο ξεχωριστά παραδείγματα.

Για το πρώτο παράδειγμα θεωρούμε το εξής χωρίο:



Σχήμα 4.8: Χωρίο προς τριγωνοποίηση

Τα σημεία 0-1-2-3-4 ορίζουν το σύνορο του χωρίου και αντιπροσωπεύουν την συνοριακή αλυσίδα. Τα υπόλοιπα σημεία, 5-6-7-8, ορίζουν την τρύπα και αντιπροσωπεύουν την



αλυσίδα της τρύπας. Για την κατασκευή του πλέγματος με τριγωνισμούς του συγκεκριμένου χωρίου πρέπει να δημιουργηθεί το ακόλουθο αρχείο εισόδου :

# ----- #

# Παράδειγμα 1 #

# ----- #

# =====

| Κόμβοι |

===== #

9 # αριθμός των κόμβων #

# Κόμβοι που ορίζουν το σύνορο #

0: 0.0 0.0 0.25 1

1: 5.0 0.0 0.25 2

2: 5.0 2.0 0.25 2

3: 4.0 3.0 0.25 3

4: 0.0 3.0 0.25 3

# Κόμβοι που ορίζουν την τρύπα #

5: 1.0 1.0 0.1 4

6: 1.0 2.0 0.1 4

7: 2.0 2.0 0.1 4

8: 2.0 1.0 0.1 4

# =====

| Ευθύγραμμα τμήματα |

===== #

9 # Αριθμός των ευθύγραμμων τμημάτων #

# Ευθύγραμμα τμήματα συνόρου #

0: 0 1 1

1: 1 2 2

2: 2 3 2

3: 3 4 3

4: 4 0 3

# Ευθύγραμμα τμήματα τρύπας #

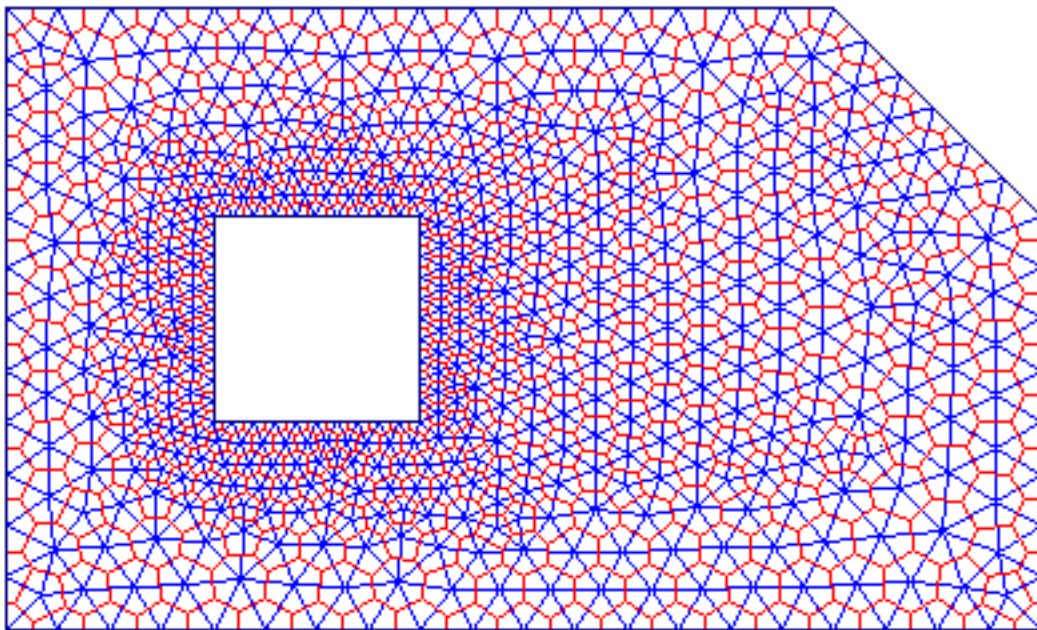
5: 5 6 4

6: 6 7 4

7: 7 8 4

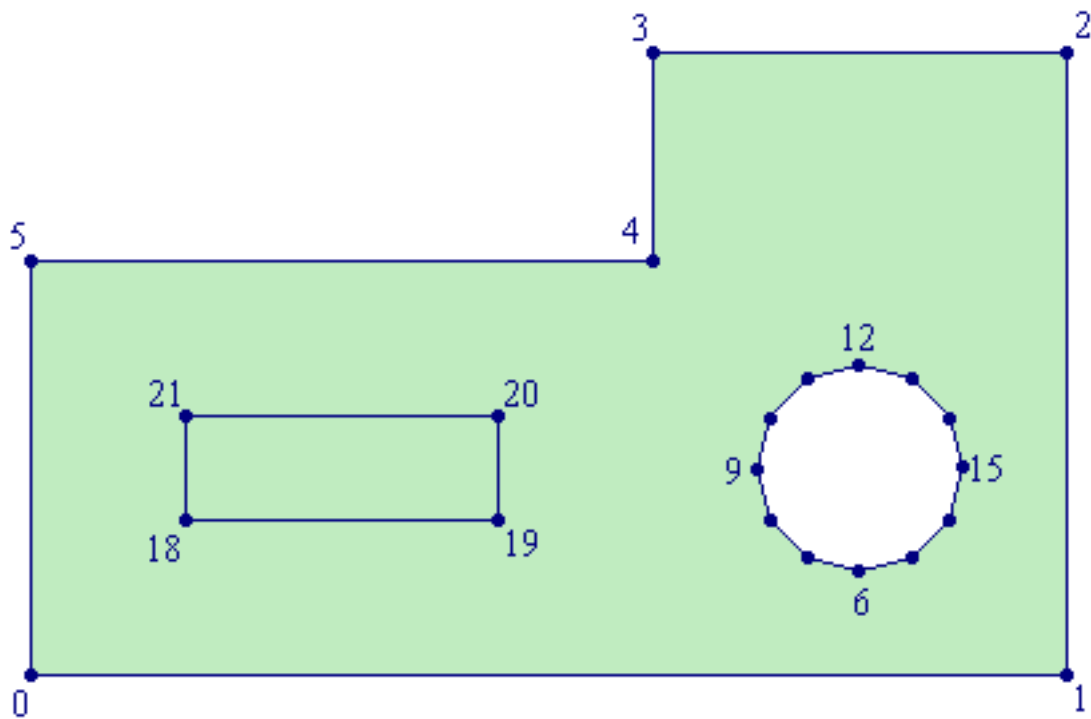
8: 8 5 4

Σημαντική σημείωση είναι ότι οι κόμβοι που ορίζουν την συνοριακή αλυσίδα (0-1-2-3-4) εισάγονται σύμφωνα με την αντίθετη φορά από αυτή του ρολογιού, ενώ οι κόμβοι που ορίζουν την αλυσίδα της τρύπας (5-6-7 8) εισάγονται σύμφωνα με την φορά του ρολογιού. Επίσης, όλες οι ετικέτες για το σύνορο πρέπει να έχουν τιμές μεγαλύτερες του μηδενός. Στη συνέχεια, αφού εκτελέσουμε την εντολή που δημιουργεί το πλέγμα, παράγεται το εξής αποτέλεσμα :



Σχήμα 4.9: Παράδειγμα 1, τριγωνοποιημένο χωρίο με τριγωνισμούς Delaunay (μπλε) και πολύγωνα Voronoi (κόκκινο)

Στο δεύτερο παράδειγμα δείχνεται πώς δημιουργείται τοπικά πυκνότερο πλέγμα σε περιοχή της αρεσκείας μας, καθώς και πώς χειριζόμαστε πολύπλοκα σχήματα όπως μία κυκλική τρύπα. Στα δεξιά του χωρίου, που φαίνεται στο σχήμα 4.10, υπάρχει μία κυκλική τρύπα ορισμένη από 12 σημεία (6- ... -17) και στα αριστερά του χωρίου (18- ... -21) ορίζεται μία περιοχή, όπου το πλέγμα θα είναι πυκνότερο.



Σχήμα 4.10: Χωρίο προς τριγωνοποίηση

Το αρχείο εισόδου που απαιτείται για να τριγωνοποιηθεί το παραπάνω χωρίο είναι το εξής :

```
# ----- #
# Παράδειγμα 2 #
# ----- #

# =====
| Κόμβοι |
# ===== #
22 # αριθμός κόμβων #

# Κόμβοι που ορίζουν το σύνορο #
0: 0 0 0.2 1
1: 5 0 0.2 1
2: 5 3 0.2 1
3: 3 3 0.2 1
4: 3 2 0.2 1
5: 0 2 0.2 1
```

# Κυκλική τρύπα #

6: 4.00 0.50 10.0 2

7: 3.75 0.567 10.0 2

8: 3.567 0.75 10.0 2

9: 3.50 1.00 10.0 2

10: 3.567 1.25 10.0 2

11: 3.75 1.433 10.0 2

12: 4.00 1.50 10.0 2

13: 4.25 1.433 10.0 2

14: 4.433 1.25 10.0 2

15: 4.50 1.00 10.0 2

16: 4.433 0.75 10.0 2

17: 4.25 0.567 10.0 2

# Κόμβοι που ορίζουν την πυκνότερη περιοχή #

18: 0.75 0.75 0.1 0

19: 2.25 0.75 0.1 0

20: 2.25 1.25 0.1 0

21: 0.75 1.25 0.1 0

# =====

| Ευθύγραμμα τμήματα |

===== #

22 # Αριθμός ευθύγραμμων τμημάτων #

# Ευθύγραμμα τμήματα συνόρου #

0: 0 1 1

1: 1 2 1

2: 2 3 1

3: 3 4 1

4: 4 5 1

5: 5 0 1

# Ευθύγραμμα τμήματα τρύπας #

6: 6 7 2

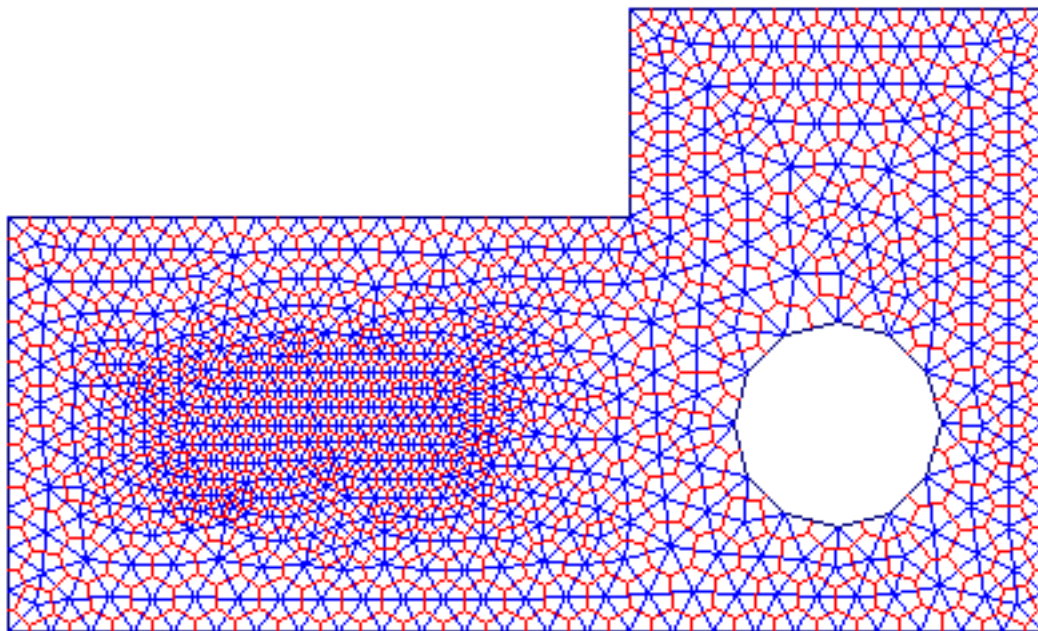
7: 7 8 2

8: 8 9 2  
9: 9 10 2  
10: 10 11 2  
11: 11 12 2  
12: 12 13 2  
13: 13 14 2  
14: 14 15 2  
15: 15 16 2  
16: 16 17 2  
17: 17 6 2

# Ευθύγραμμα τμήματα πυκνότερης περιοχής #

18: 18 19 0  
19: 19 20 0  
20: 20 21 0  
21: 21 18 0

Τα σημεία που ορίζουν την πυκνότερη περιοχή (18-21) εισάγονται σύμφωνα με την αντίθετη φορά του ρολογιού, ακριβώς όπως το εξωτερικό σύνορο του χωρίου (0-5). Το μήκος της πλευράς στην πυκνότερη περιοχή είναι μικρότερο από τις υπόλοιπες περιοχές. Επίσης, στην πυκνότερη περιοχή στο πεδίο ετικέτα συνόρου τοποθετείται η τιμή μηδέν. Εκτελώντας την κατάλληλη εντολή για τη δημιουργία πλέγματος του δεύτερου παραδείγματος παράγεται το εξής αποτέλεσμα :



Σχήμα 4.11: Παράδειγμα 2, τριγωνοποιημένο χωρίο με τριγωνισμούς Delaunay (μπλε) και πολύγωνα Voronoi (κόκκινο)

### 4.3.2 Αρχεία εξόδου

Αφού αναλύθηκαν όσο χρειαζόταν τα αρχεία εισόδου, έτσι ώστε να είναι κατανοητός ο τρόπος κατασκευής του υπολογιστικού πλέγματος, είναι αναγκαίο να γίνει ανάλυση των αρχείων εξόδου. Αυτά παρέχουν όλη την γεωμετρική πληροφορία που απαιτείται για να ολοκληρωθεί το αριθμητικό σχήμα των πεπερασμένων όγκων, που εξετάζεται στην παρούσα εργασία. Κατά την εκτέλεση του αρχείου εισόδου από το Easymesh δημιουργούνται τρία αρχεία εξόδου με το ίδιο όνομα με αυτό του αρχείου εισόδου, αλλά διαφορετική κατάληξη. Ένα αρχείο για τους κόμβους με κατάληξη .n, ένα για τα κελιά με κατάληξη .e και ένα για τις πλευρές των κελιών με κατάληξη .s.

Το αρχείο των κόμβων έχει την εξής μορφοποίηση:

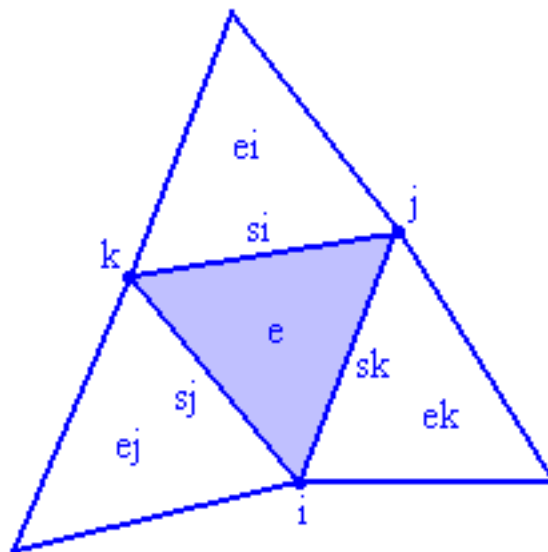
- Πρώτη γραμμή: <συνολικός αριθμός κόμβων>
- Επόμενες γραμμές: <διακριτός αριθμός κόμβου:><x> <y> <ετικέτα>
- Οι δύο τελευταίες γραμμές αποτελούνται από σχόλια για την καλύτερη ανάγνωση του αρχείου εξόδου

Στην παραπάνω μορφοποίηση όπου x, y είναι οι συντεταγμένες του κόμβου και η ετικέτα χρειάζεται όταν το εξεταζόμενο πρόβλημα περιέχει περισσότερα από ένα ρευστά.

Το αρχείο των κελιών έχει την εξής μορφοποίηση :

- Πρώτη γραμμή: <συνολικός αριθμός κελιών>
- Επόμενες γραμμές: <διακριτός αριθμός κελιού:><i> <j> <k> <ei> <ej> <ek> <si> <sj> <sk> <xV> <yV> <ετικέτα>
- Οι δύο τελευταίες γραμμές αποτελούνται από σχόλια για την καλύτερη ανάγνωση του αρχείου εξόδου

Τα i, j, k είναι οι κόμβοι που ανήκουν στο κελί, τα ei, ej, ek είναι τα γειτονικά κελιά, ενώ τα si, sj, sk είναι οι πλευρές του κελιού. Τα xV, yV αποτελούν τις συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου του κελιού, δηλαδή του βαρύκεντρου του τριγώνου. Αν κάποιο από τα ei, ej, ek ισούται με  $-1$ , τότε το κελί βρίσκεται στο σύνορο. Μία εικόνα ενός τέτοιου κελιού είναι η παρακάτω.

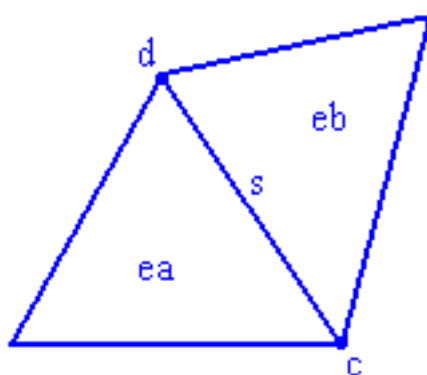


Σχήμα 4.12: Απεικόνιση του κελιού e μαζί με την γεωμετρική πληροφορία που περιέχει

Το αρχείο των πλευρών του κελιού έχει την εξής μορφοποίηση :

- Πρώτη γραμμή: <συνολικός αριθμός πλευρών>
- Επόμενες γραμμές: <διακριτός αριθμός πλευράς:><c> <d> <ea> <eb> <ετικέτα>
- Οι δύο τελευταίες γραμμές αποτελούνται από σχόλια για την καλύτερη ανάγνωση του αρχείου εξόδου

Τα  $c$ ,  $d$  είναι ο αρχικός και τελικός κόμβος της πλευράς αντίστοιχα και τα  $ea$ ,  $eb$  είναι τα κελιά στα αριστερά και στα δεξιά της πλευράς αντίστοιχα. Αν το  $eb$  ισούται με  $-1$ , αυτό σημαίνει ότι το κελί στα δεξιά δεν υπάρχει και συνεπώς η πλευρά βρίσκεται στο σύνορο. Σε αυτό το σημείο πρέπει να γίνει αναφορά πάλι στη γνώση του σωστού προσανατολισμού για κάθε κελί και κατά συνέπεια για κάθε πλευρά του κελιού. Αυτό εξασφαλίζεται αν κατά την εκτέλεση του αριθμητικού σχήματος ελέγχουμε αν το κελί που εξετάζουμε κάθε φορά βρίσκεται στα αριστερά των πλευρών του και άρα θα έχουμε τον σωστό προσανατολισμό ή αν βρίσκεται στα δεξιά αυτών και θα έχουμε λάθος προσανατολισμό. Ο λανθασμένος προσανατολισμός διορθώνεται απλά αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του εξωτερικού μοναδιαίου κάθετου διανύσματος της πλευράς με τις αντίθετες τιμές τους. Όλες οι αναγκαίες πληροφορίες που παράγουν τα αρχεία εξόδου του Easymeh αποθηκεύονται στους πίνακες, που ορίστηκαν στην παράγραφο 4.2 και με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται η επεξήγηση του αριθμητικού σχήματος των πεπερασμένων όγκων, που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.



Σχήμα 4.13: Απεικόνιση της πλευράς  $s$  μαζί με την γεωμετρική πληροφορία που περιέχει



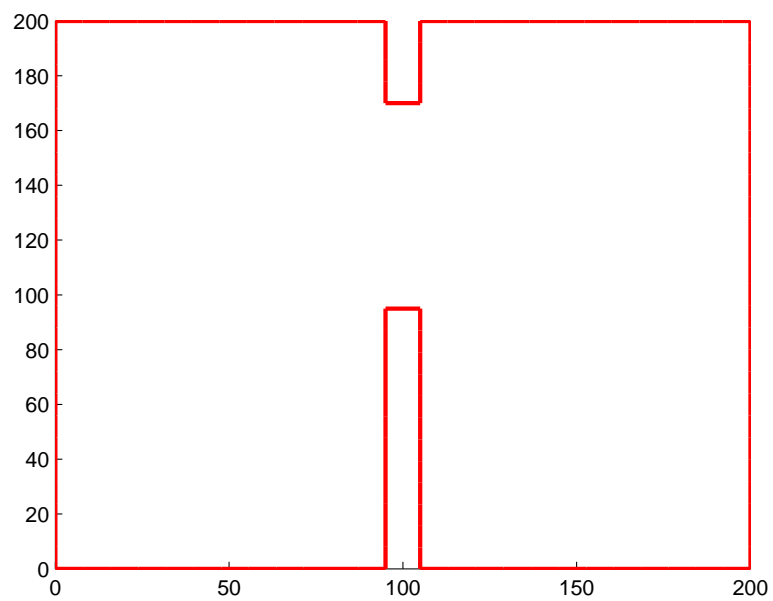
# Κεφάλαιο 5

## Προβλήματα

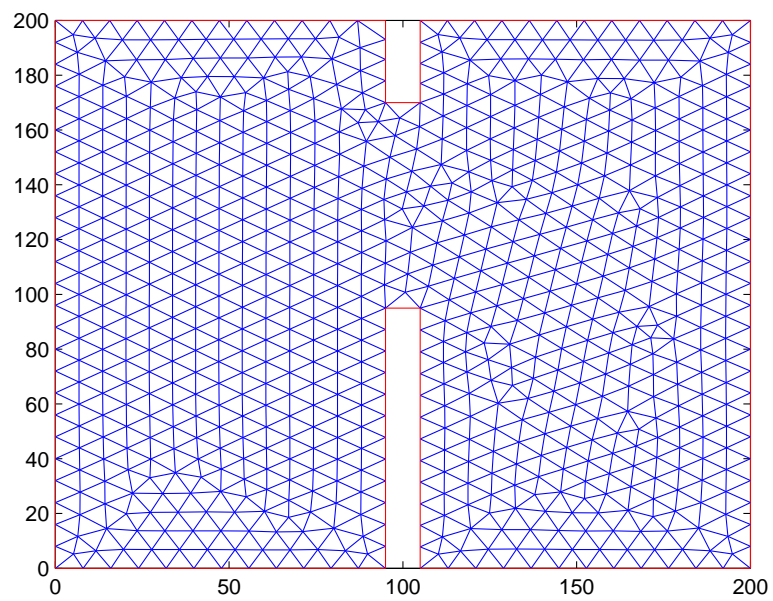
Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τρία δοκιμαστικά προβλήματα μέσω των οποίων θα εφαρμοστεί το αριθμητικό σχήμα των πεπερασμένων όγκων με χρήση του προσεγγιστικού επιλυτή του Roe στις δύο διαστάσεις. Για κάθε πρόβλημα θα χρησιμοποιηθούν δύο διαφορετικά υπολογιστικά πλέγματα μέσω τριγωνισμών, ένα αραιό και ένα πυκνό, ανάλογες αρχικές και συνοριακές συνθήκες, καθώς και κατάλληλος αριθμός CFL.

### 5.1 Πρόβλημα 1 : Μερική κατάρρευση φράγματος

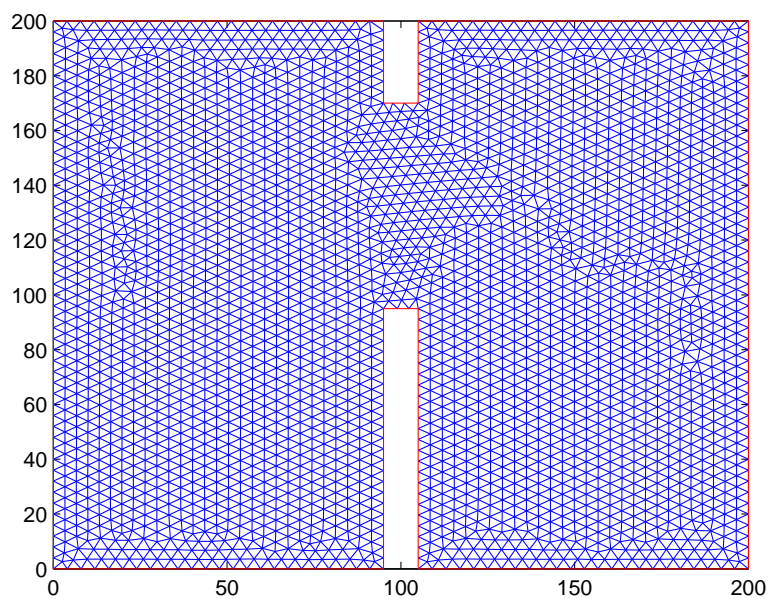
Το πρόβλημα της μερικής κατάρρευσης φράγματος αναλύθηκε πρώτα από τους Fennema και Chaudhry [21]. Το υπολογιστικό χωρίο είναι μία τετράγωνη περιοχή  $200\text{ m} \times 200\text{ m}$ . Θεωρούμε ότι στο σύνορο έχουμε στερεό τοίχο, οπότε εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες ανάκλασης. Στο κέντρο  $x = 100\text{ m}$  υπάρχει τοίχος  $200\text{ m}$  παράλληλος στον άξονα των  $y$  με αμελητέο πάχος, που αποτελεί το φράγμα του προβλήματος. Στο σχήμα 5.1.1 φαίνεται το χωρίο εφαρμογής του προβλήματος. Για την διακριτοποίηση μέσω τριγωνισμών αυτού του χωρίου παράχθηκαν δύο διαφορετικά υπολογιστικά πλέγματα, ένα αραιό (1444 κελιά, 789 κόμβοι, 2232 πλευρές) σχήμα 5.1.2 και ένα πυκνό (5812 κελιά, 3040 κόμβοι, 8851 πλευρές) σχήμα 5.1.3



Σχήμα 5.1.1: Χωρίο εφαρμογής του προβλήματος



Σχήμα 5.1.2: Αραιό πλέγμα

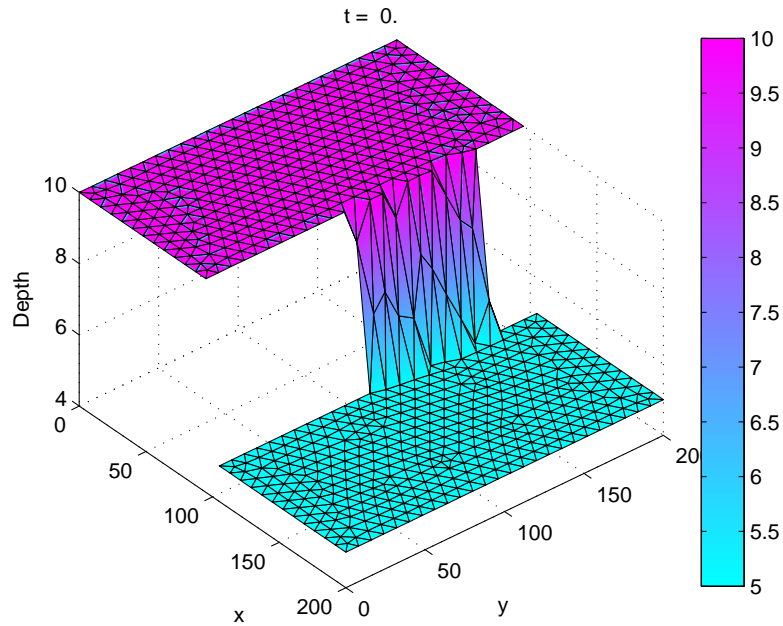


Σχήμα 5.1.3: Πυκνό πλέγμα

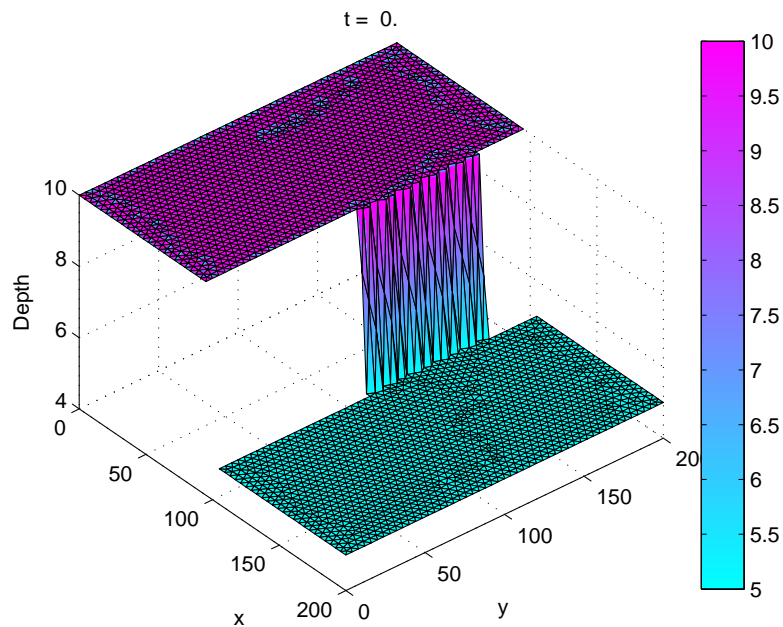
Αρχικά στον χρόνο  $t = 0$  s, αριστερά του φράγματος το νερό έχει ύψος 10 m και δεξιά αυτού 5 m. Οι αρχικές ταχύτητες είναι μηδέν και επομένως οι αρχικές συνθήκες ορίζονται μαθηματικά ως εξής:

$$h(x, y, 0) = \begin{cases} 10, & \text{αν } x \in [0, 100], \quad y \in [0, 200] \\ 5, & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

$$u(x, y, 0) \equiv 0, \quad v(x, y, 0) \equiv 0.$$



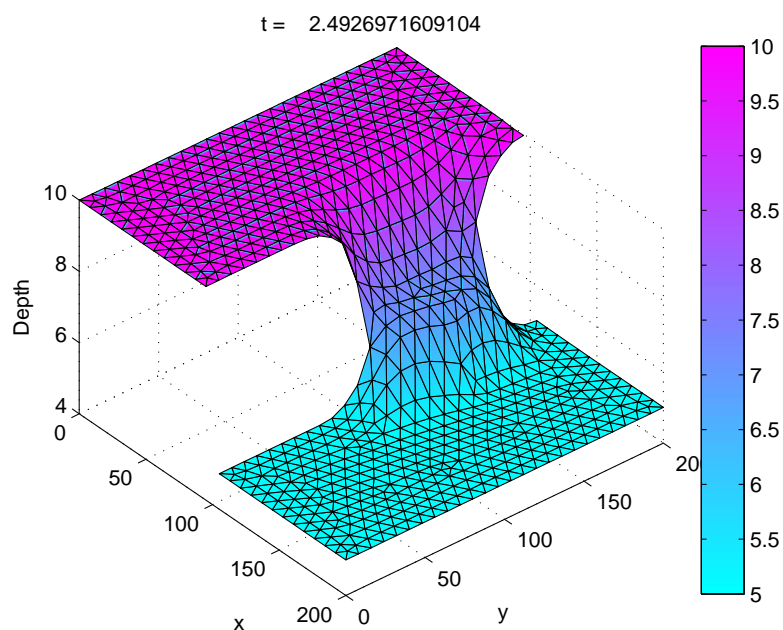
Σχήμα 5.1.4: Αρχικές συνθήκες για το αραιό πλέγμα



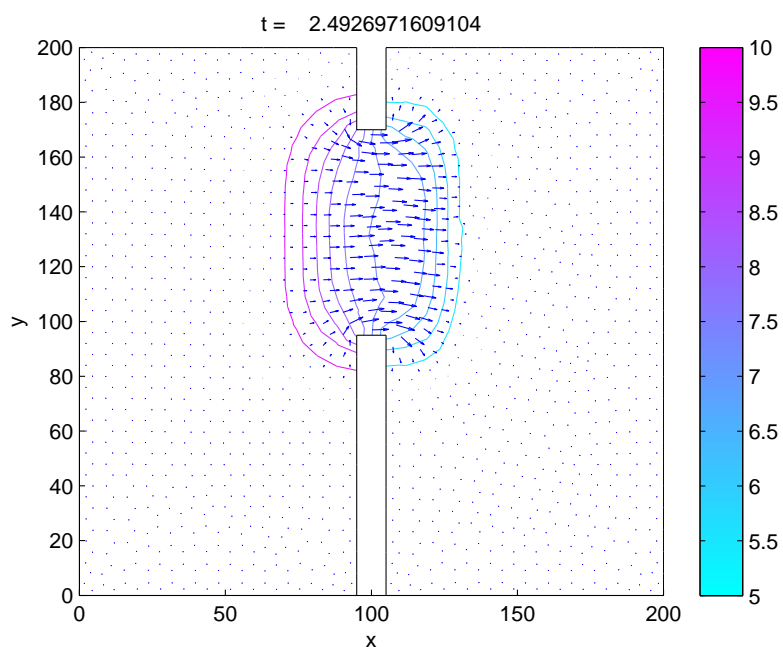
Σχήμα 5.1.5: Αρχικές συνθήκες για το πυκνό πλέγμα

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος για κάθε πλέγμα φαίνονται παραπάνω στα σχήματα 5.1.4 και 5.1.5. Στο σημείο από  $y = 95 \text{ m}$  έως  $y = 170 \text{ m}$  το φράγμα ακαριαία καταρρέει. Ο αριθμός CFL που χρησιμοποιείται έχει τιμή 0.8. Την χρονική στιγμή  $t = 15 \text{ s}$  ολοκληρώνεται η εκτέλεση του προβλήματος. Για το αραιό πλέγμα απαιτούνται 166 χρονικά επαναληπτικά βήματα ενώ για το πυκνό 368. Σταδιακά και μέχρι την ολοκλήρωση της χρονικής

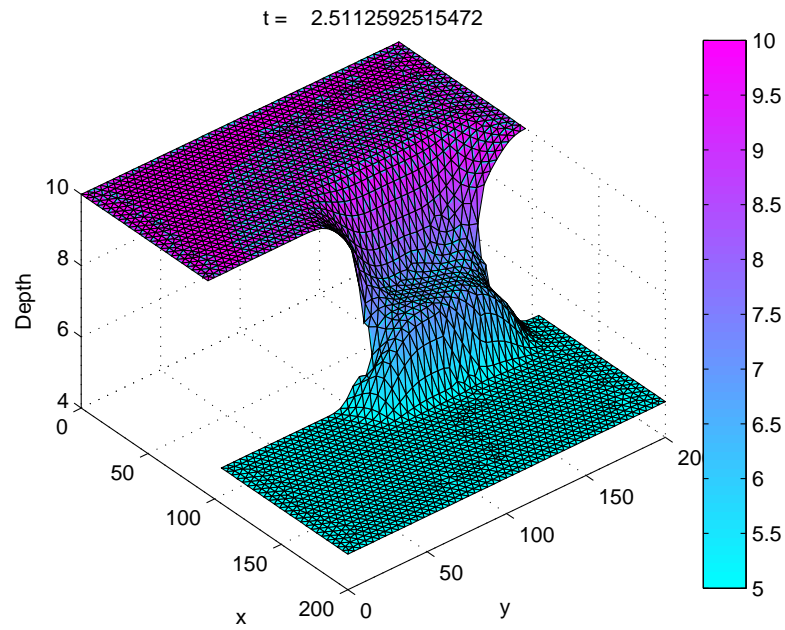
διάρκειας του προβλήματος παράγονται τα εξής διαγράμματα (σχήματα 5.1.6 έως 5.1.21) της αριθμητικής λύσης για τα δυο υπολογιστικά πλέγματα που εξετάζονται:



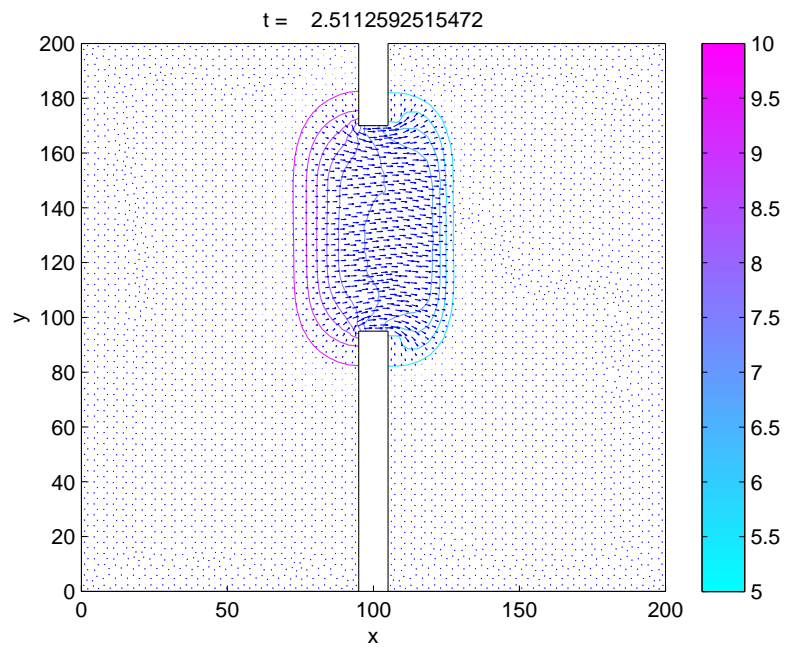
Σχήμα 5.1.6: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 2.5$  s για το αραιό πλέγμα



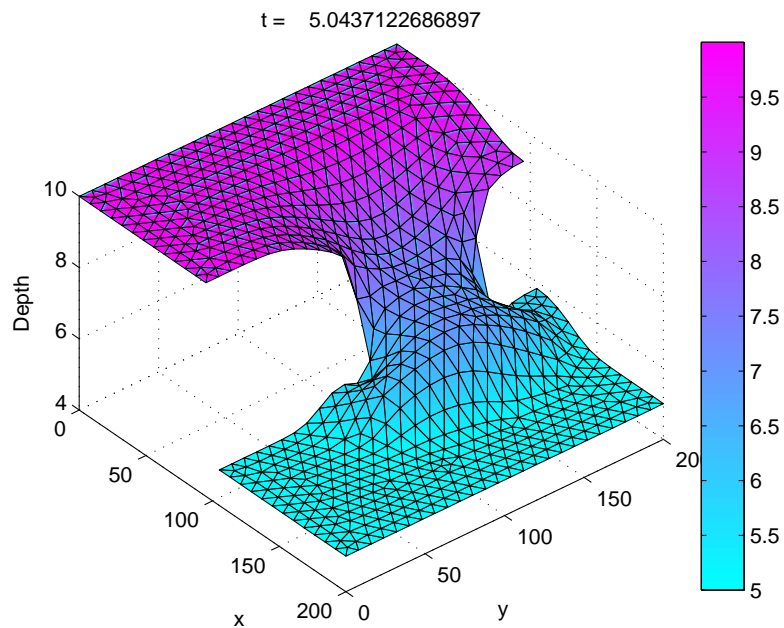
Σχήμα 5.1.7: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 2.5$  s για το αραιό πλέγμα



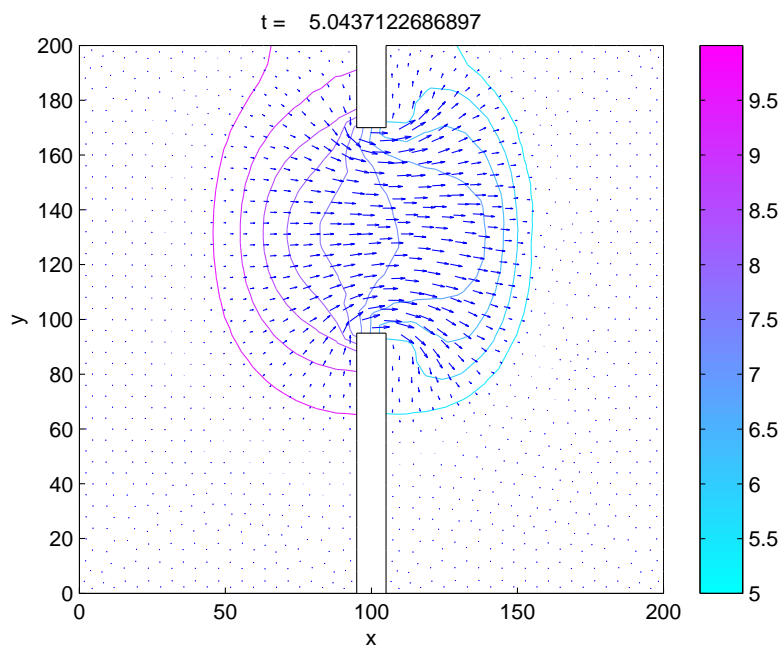
Σχήμα 5.1.8: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 2.5$  s για το πυκνό πλέγμα



Σχήμα 5.1.9: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 2.5$  s για το πυκνό πλέγμα

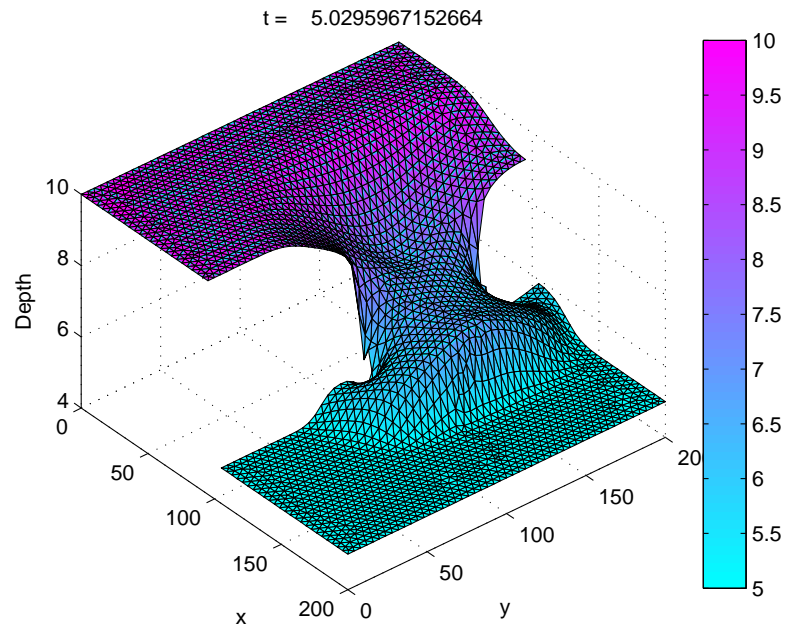


Σχήμα 5.1.10: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 5.0$  s για το αραιό πλέγμα

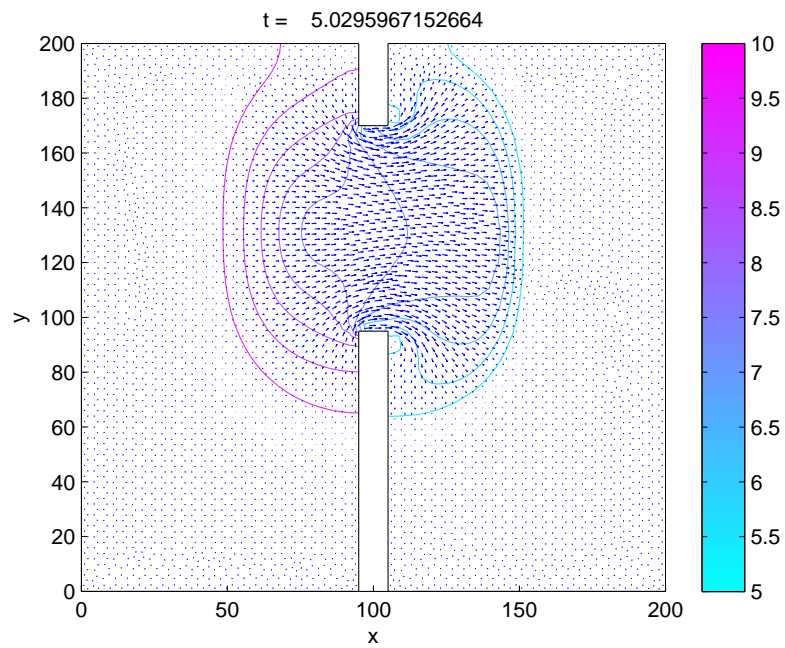


Σχήμα 5.1.11: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 5.0$  s για το αραιό πλέγμα



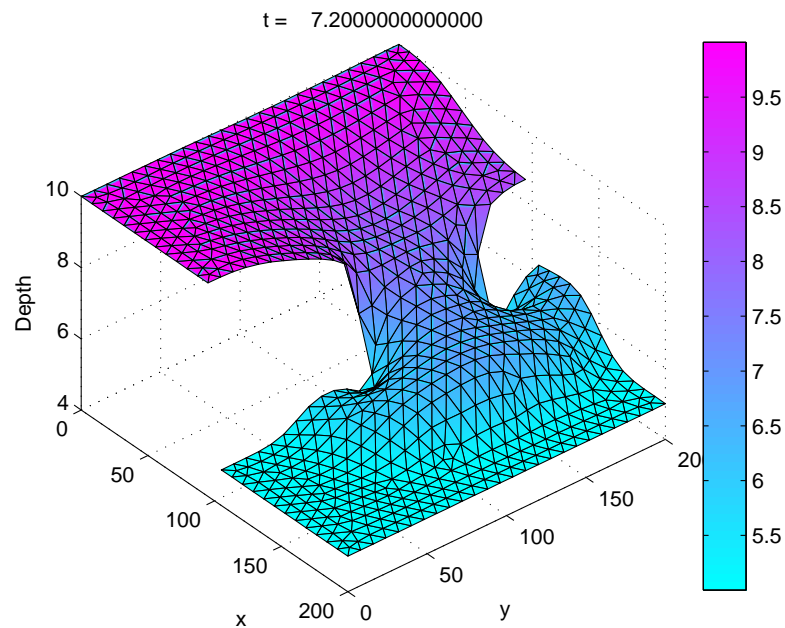


Σχήμα 5.1.12: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 5.0$  s για το πυκνό πλέγμα

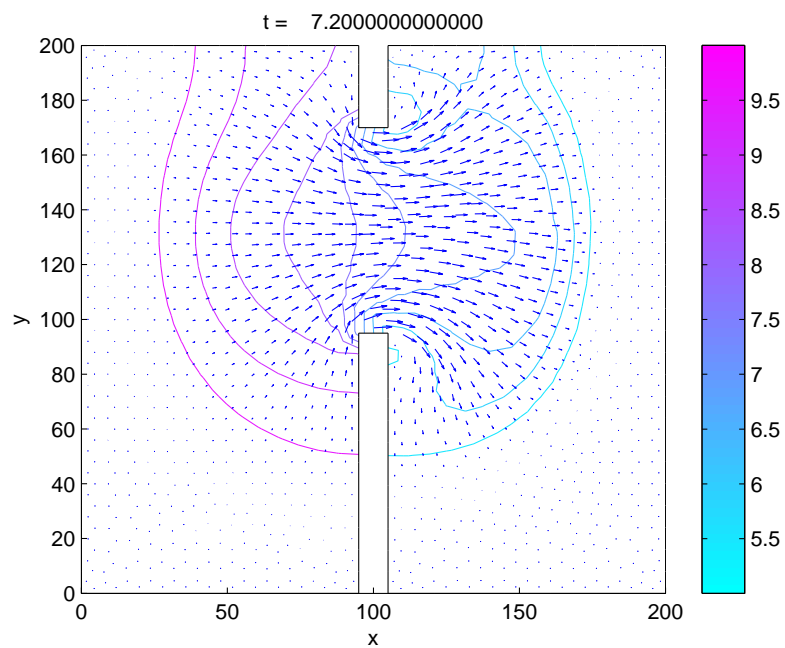


Σχήμα 5.1.13: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 5.0$  s για το πυκνό πλέγμα

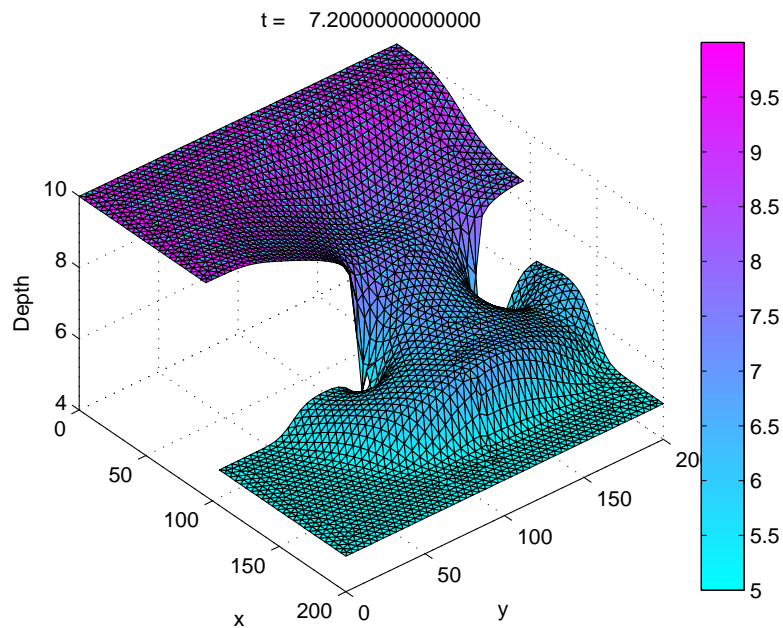




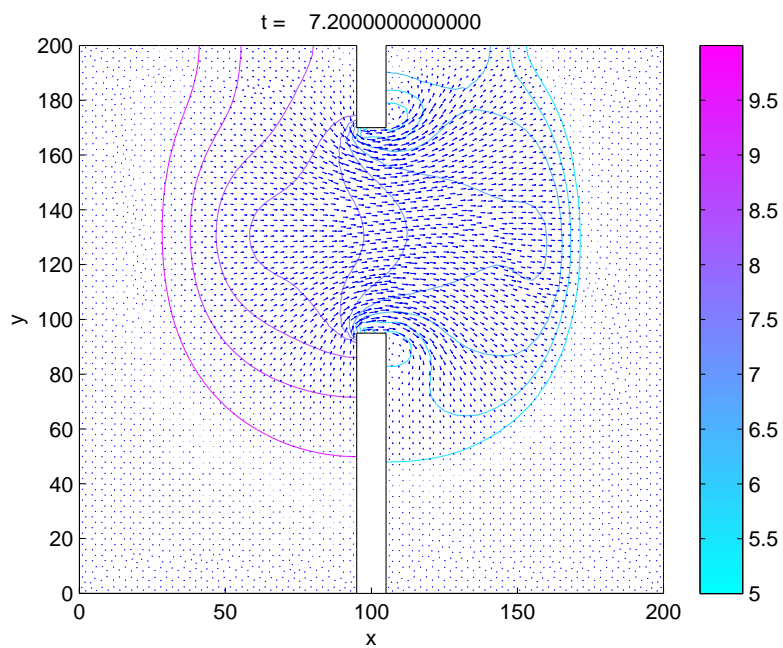
Σχήμα 5.1.14: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 7.2 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα



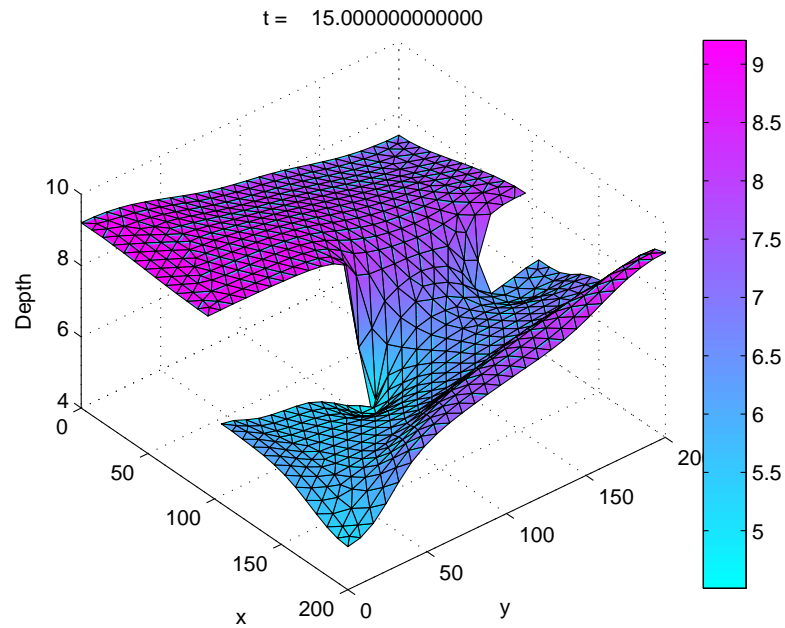
Σχήμα 5.1.15: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t = 7.2 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα



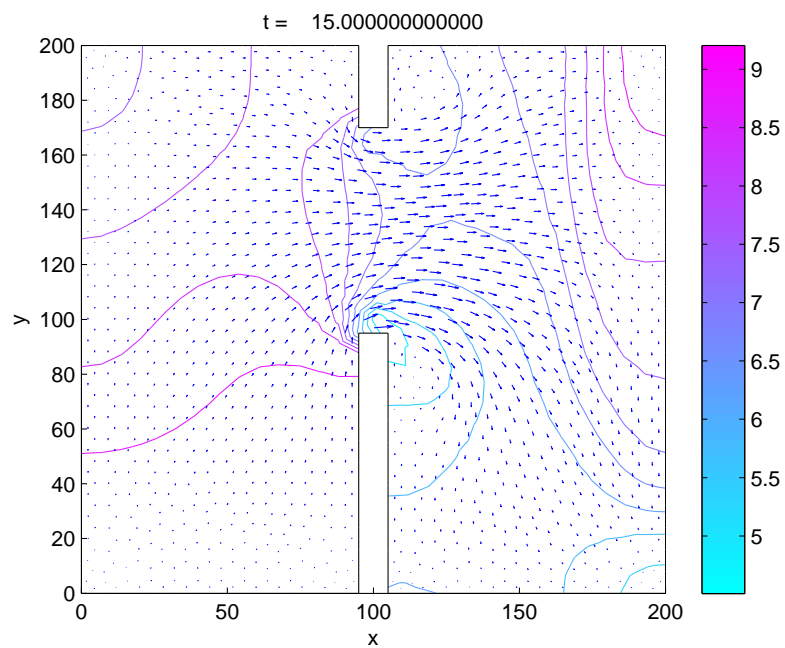
Σχήμα 5.1.16: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 7.2 \text{ s}$  για το πυκνό πλέγμα



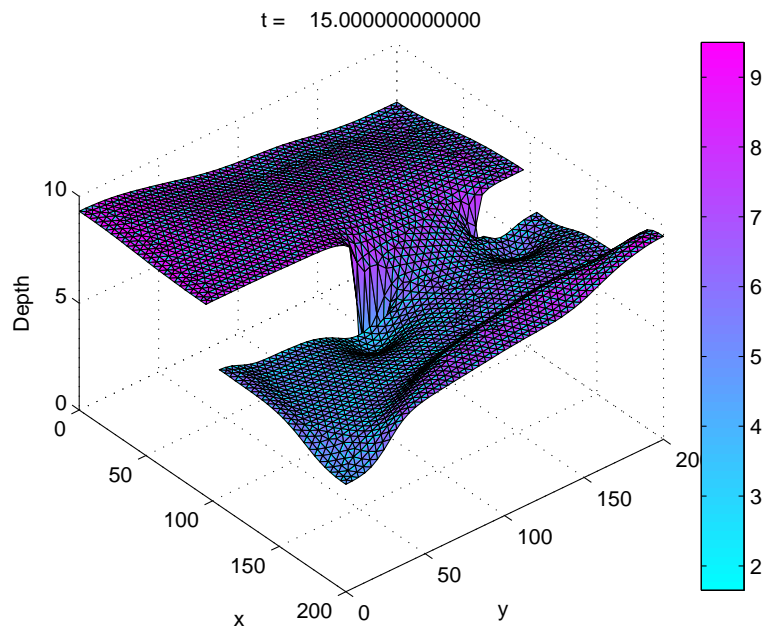
Σχήμα 5.1.17: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t = 7.2 \text{ s}$  για το πυκνό πλέγμα



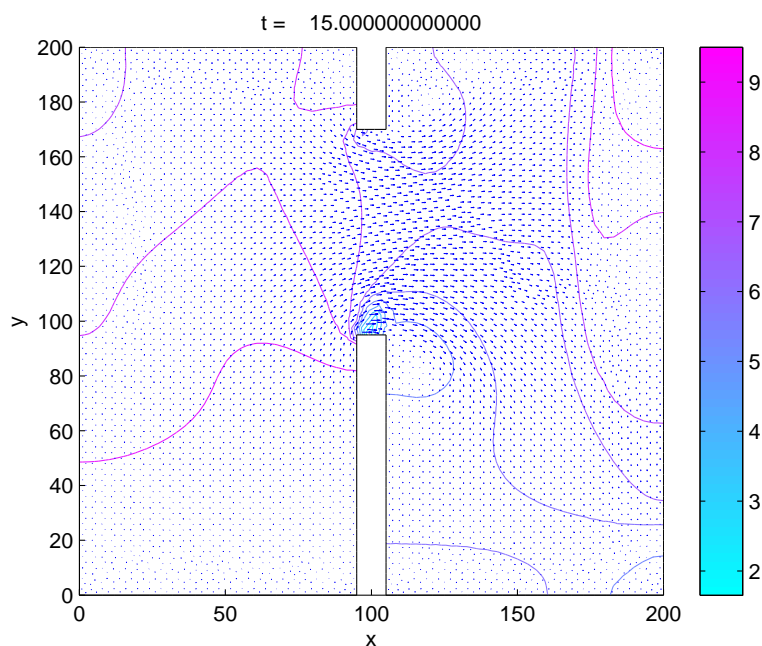
Σχήμα 5.1.18: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 15 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα



Σχήμα 5.1.19: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t = 15 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα



Σχήμα 5.1.20: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 15$  s για το πυκνό πλέγμα



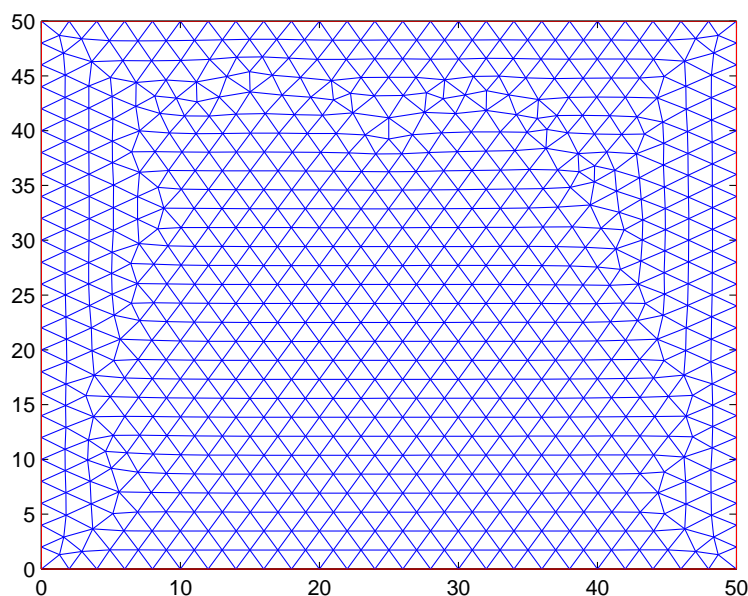
Σχήμα 5.1.21: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t = 15$  s για το πυκνό πλέγμα

Όπως φαίνεται μετά την κατάρρευση του φράγματος το νερό κινείται προς την περιοχή με το μικρότερο ύψος νερού και ολοκληρώνει την πορεία του στον χρόνο  $t = 15$  s όπου το κύμα, που έχει παραχθεί, έχει ήδη έρθει σε επαφή με τον τοίχο που υπάρχει στο σύνορο.

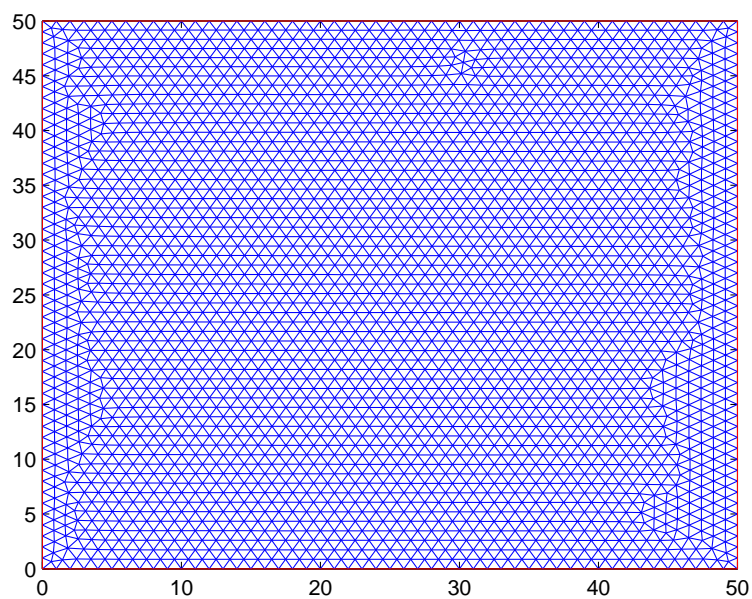
Τα αποτελέσματα δεν έχουν αφύσικες αριθμητικές ταλαντώσεις και συμφωνούν με αυτά των Fennema και Chaudhry [21]. Επίσης, το πυκνό υπολογιστικό πλέγμα αφομοιώνει καλύτερα τις αρχικές συνθήκες με συνέπεια να έχουμε ακριβέστερη συμπεριφορά της λύσης σε σχέση με το αραιό.

## 5.2 Πρόβλημα 2 : Κατάρρευση κυκλικού φράγματος

Η παρουσίαση ενός τέτοιου προβλήματος έγινε αρχικά από τους Alcrudo και Garcia-Navarro [5]. Η εφαρμογή του ουσιαστικά ελέγχει την συμμετρικότητα του αριθμητικού σχήματος που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία. Το χωρίο εφαρμογής του προβλήματος είναι μία τετράγωνη περιοχή διαστάσεων  $50\text{ m} \times 50\text{ m}$ . Για την διακριτοποίηση μέσω τριγωνισμών αυτού του χωρίου παράχθηκαν δύο διαφορετικά υπολογιστικά πλέγματα, ένα αραιό (1460 κελιά, 781 κόμβοι, 2240 πλευρές) σχήμα 5.2.1 και ένα πυκνό (5812 κελιά, 3007 κόμβοι, 8818 πλευρές) σχήμα 5.2.2.



Σχήμα 5.2.1: Αραιό πλέγμα

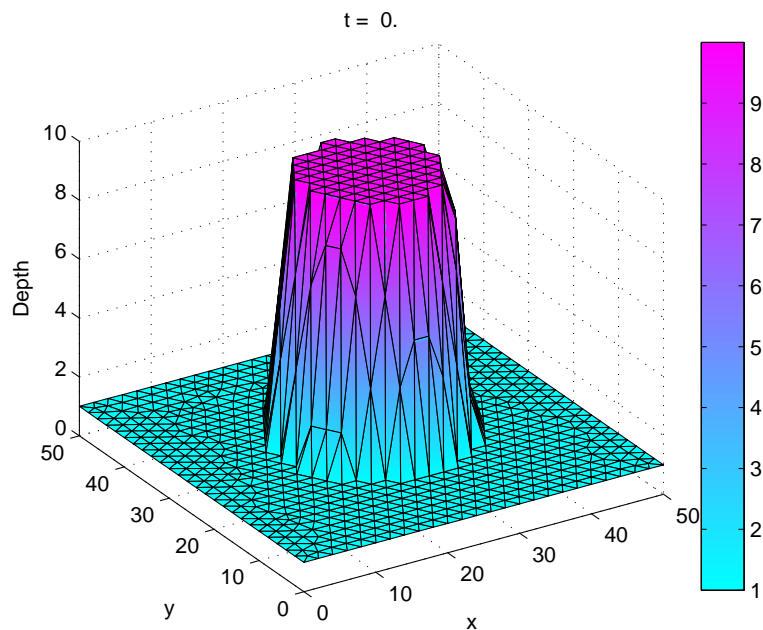


Σχήμα 5.2.2: Πυκνό πλέγμα

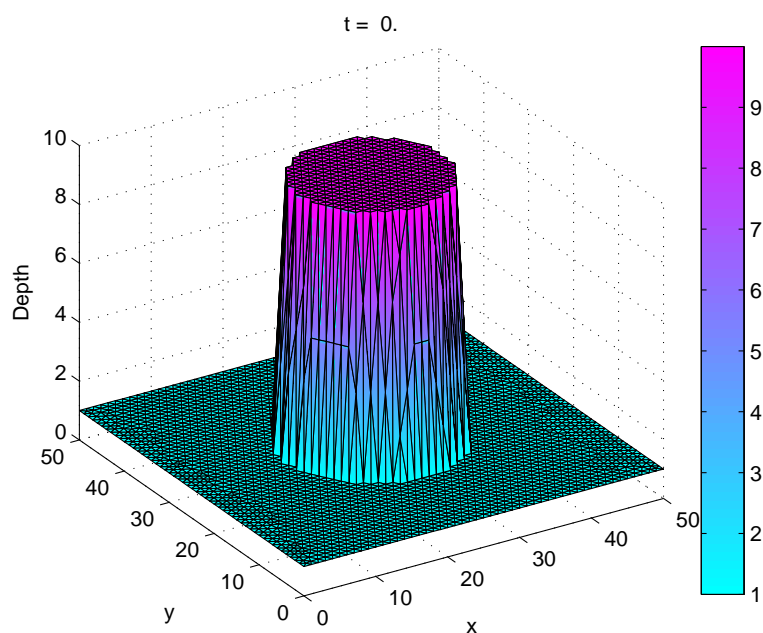
Στο κέντρο της περιοχής υπάρχει κυλινδρικό φράγμα ακτίνας  $11 \text{ m}$ . Το νερό τη χρονική στιγμή  $t = 0 \text{ s}$  εσωτερικά του φράγματος έχει ύψος  $10 \text{ m}$  και εξωτερικά αυτού έχει ύψος  $1 \text{ m}$  και το νερό βρίσκεται σε ακινησία :

$$h(x, y, 0) = \begin{cases} 10, & \text{αν } (x - 5)^2 + (y - 5)^2 \leq 11^2 \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

$$u(x, y, 0) \equiv 0, \quad v(x, y, 0) \equiv 0.$$



Σχήμα 5.2.3: Αρχικές συνθήκες για το αραιό πλέγμα

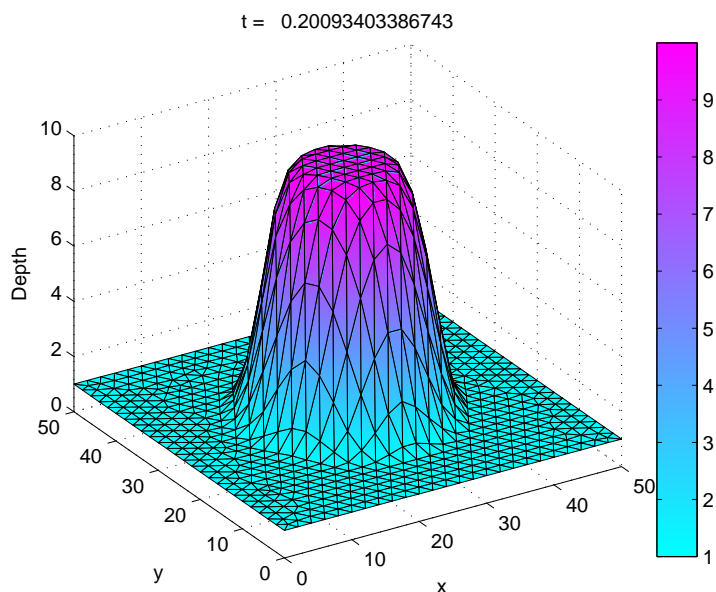


Σχήμα 5.2.4: Αρχικές συνθήκες για το πυκνό πλέγμα

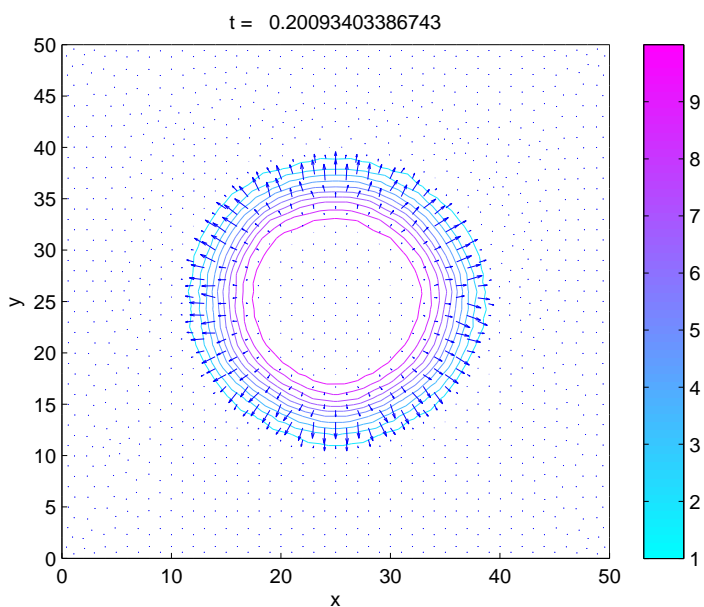
Στα σχήματα 5.2.3 και 5.2.4 φαίνονται οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Οι αρχικές ταχύτητες είναι μηδενικές και στο σύνορο θεωρούμε ότι υπάρχει στερεός τοίχος, οπότε εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες ανάκλασης. Το κυλινδρικό τοίχος αφήνεται ακαριαία να καταρρεύσει και το νερό αρχίζει να κινείται. Ο αριθμός CFL που χρησιμοποιείται έχει



τιμή 0.8. Την χρονική στιγμή  $t = 0.69 \text{ s}$  ολοκληρώνεται η εκτέλεση του προβλήματος. Για το αραιό πλέγμα απαιτούνται 32 χρονικά επαναληπτικά βήματα ενώ για το πυκνό 61. Σταδιακά και μέχρι την ολοκλήρωση της χρονικής διάρκειας του προβλήματος παράγονται τα εξής διαγράμματα (σχήματα 5.2.5 έως 5.2.16) της αριθμητικής λύσης για τα δυο υπολογιστικά πλέγματα που εξετάζονται:

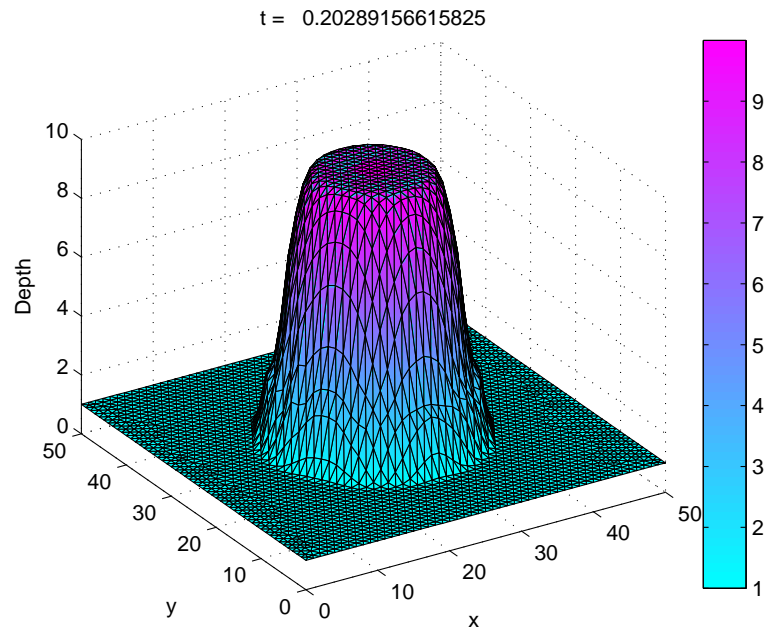


Σχήμα 5.2.5: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 0.2 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα

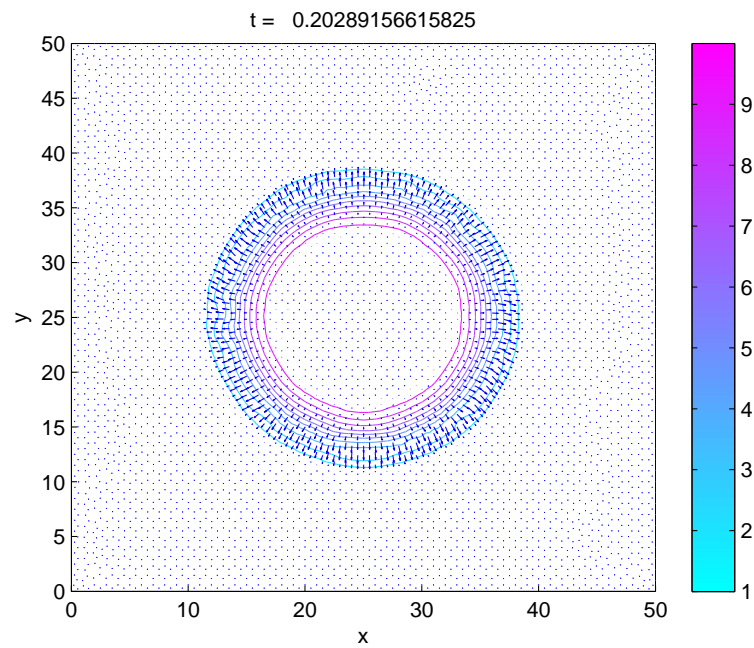


Σχήμα 5.2.6: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 0.2 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα

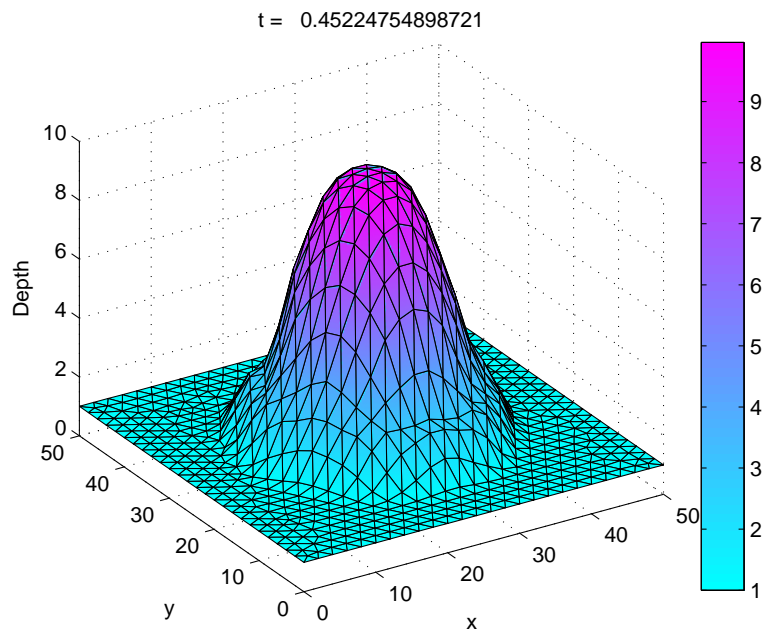




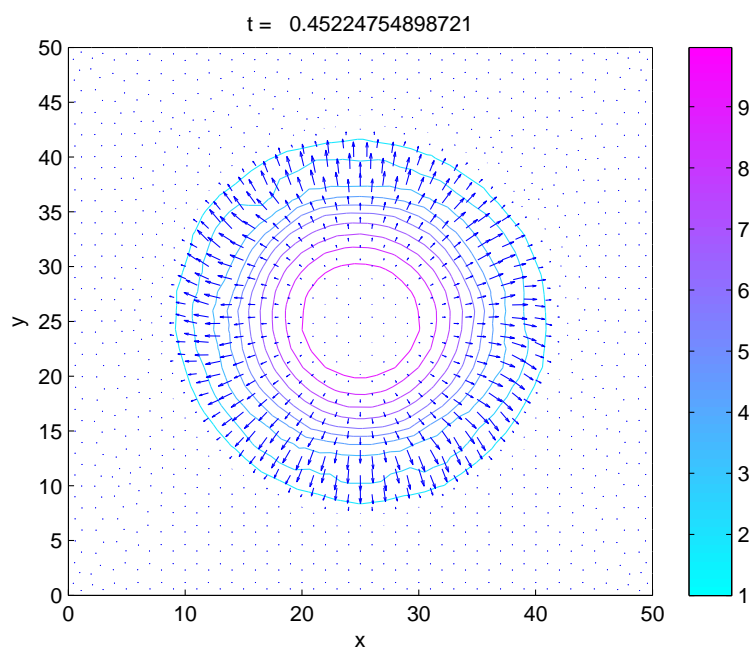
Σχήμα 5.2.7: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 0.2 \text{ s}$  για το πυκνό πλέγμα



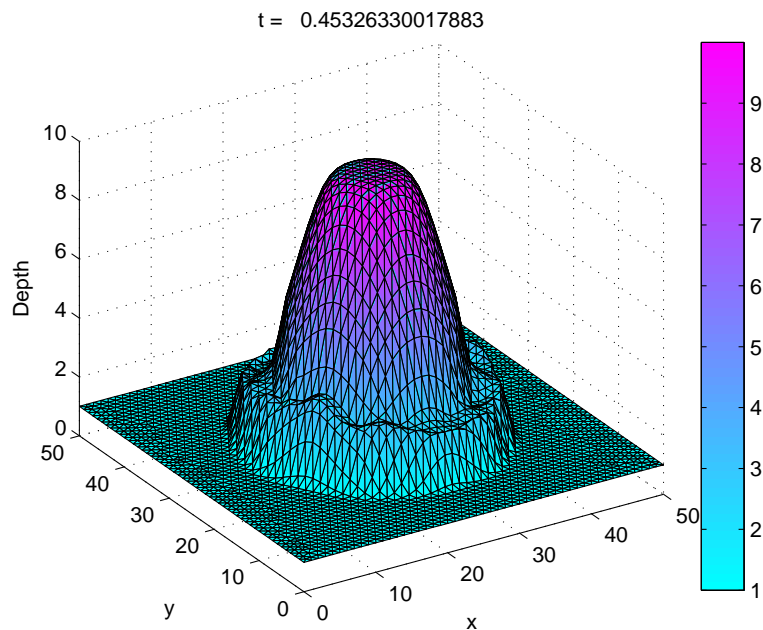
Σχήμα 5.2.8: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 0.2 \text{ s}$  για το πυκνό πλέγμα



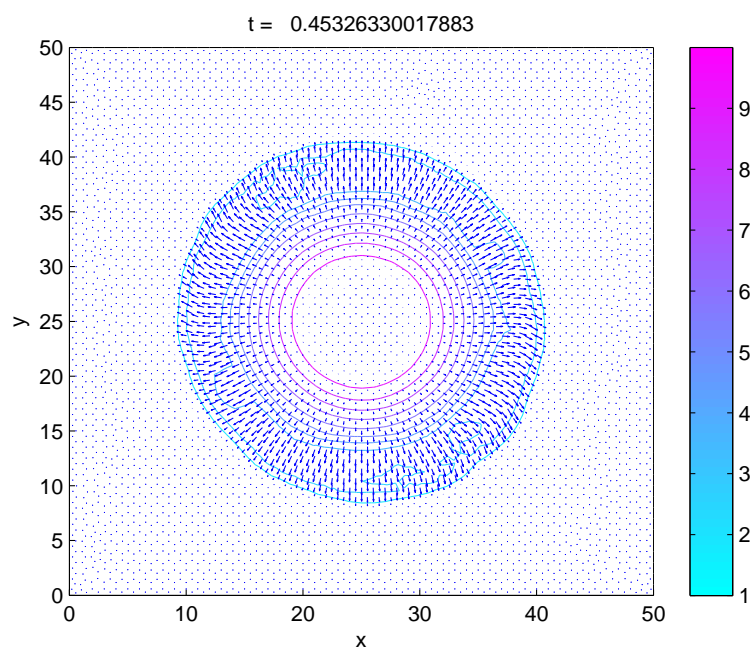
Σχήμα 5.2.9: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 0.45 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα



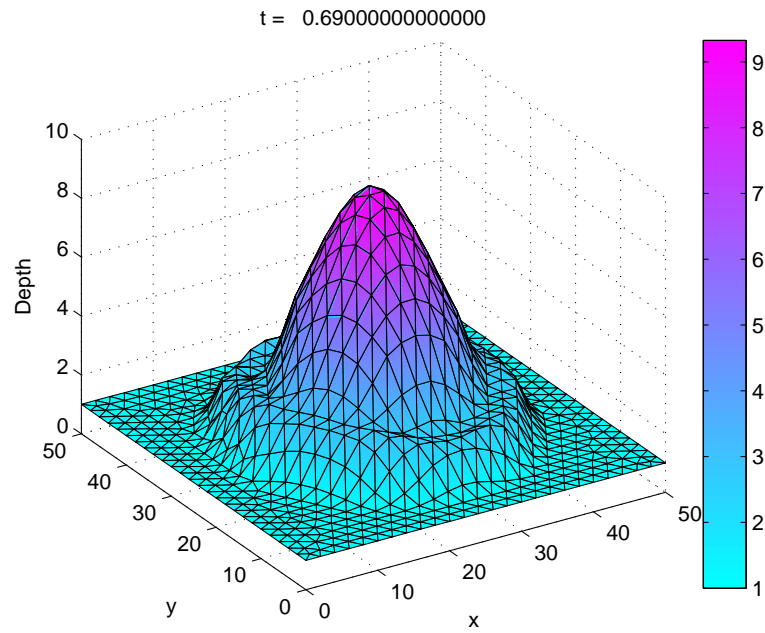
Σχήμα 5.2.10: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 0.45 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα



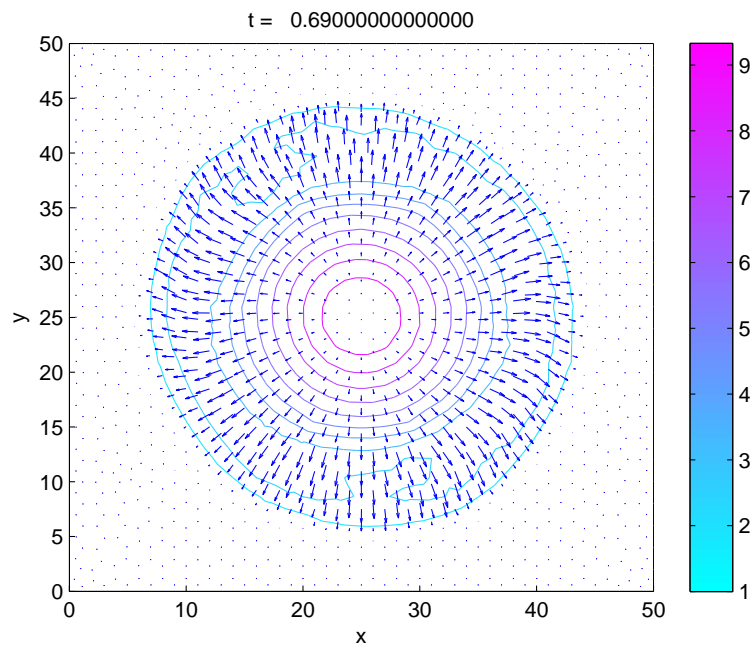
Σχήμα 5.2.11: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 0.45$  s για το πυκνό πλέγμα



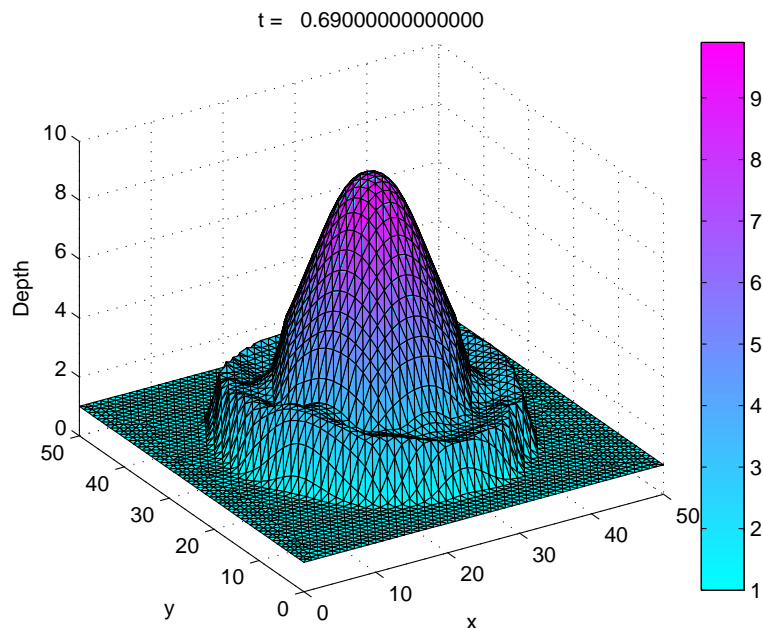
Σχήμα 5.2.12: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 0.45$  s για το πυκνό πλέγμα



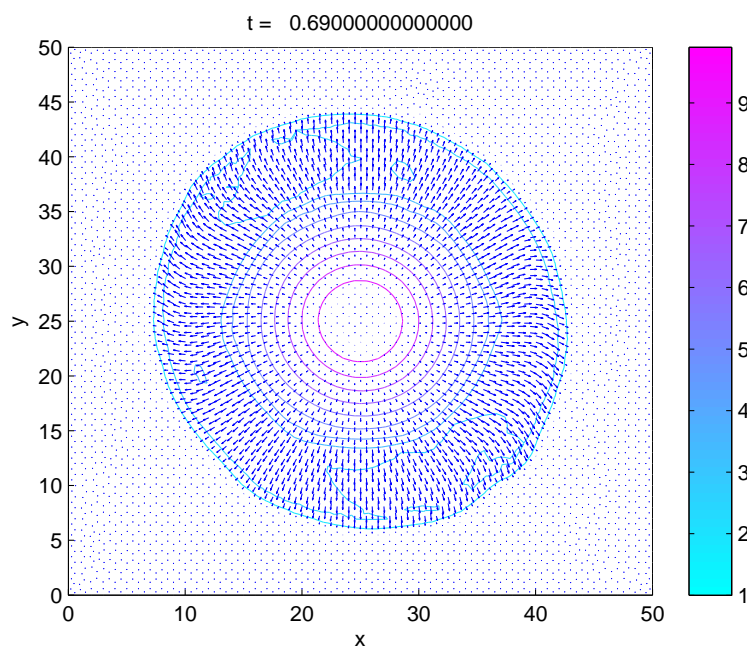
Σχήμα 5.2.13: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 0.69 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα



Σχήμα 5.2.14: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t = 0.69 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα



Σχήμα 5.2.15: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 0.69 \text{ s}$  για το πυκνό πλέγμα



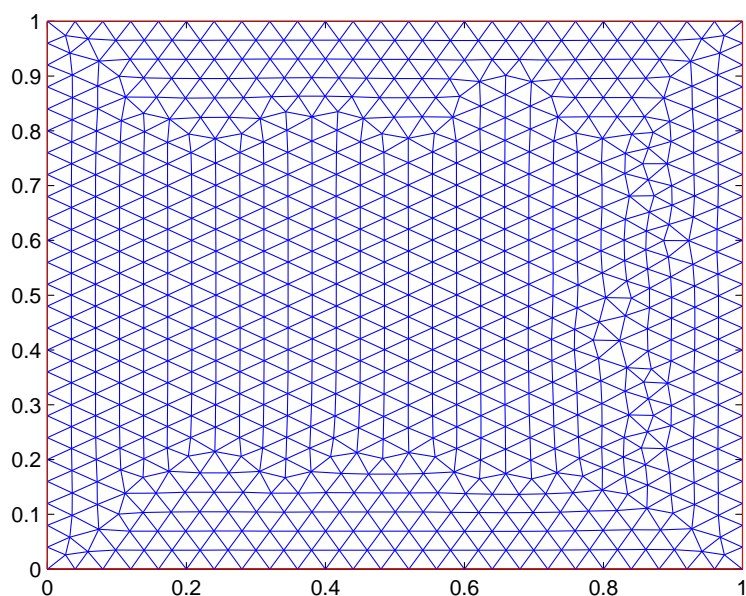
Σχήμα 5.2.16: Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t = 0.69 \text{ s}$  για το πυκνό πλέγμα

Από την κατάρρευση του κυκλικού φράγματος μέχρι και την ολοκλήρωση του προβλήματος φαίνεται το νερό να κινείται ομομοιόμορφα και συμμετρικά, αυτό επιδεικνύεται παραστατικότερα στα διαγράμματα των ισοϋψών καμπυλών του βάθους και του πεδίου ταχυτήτων,

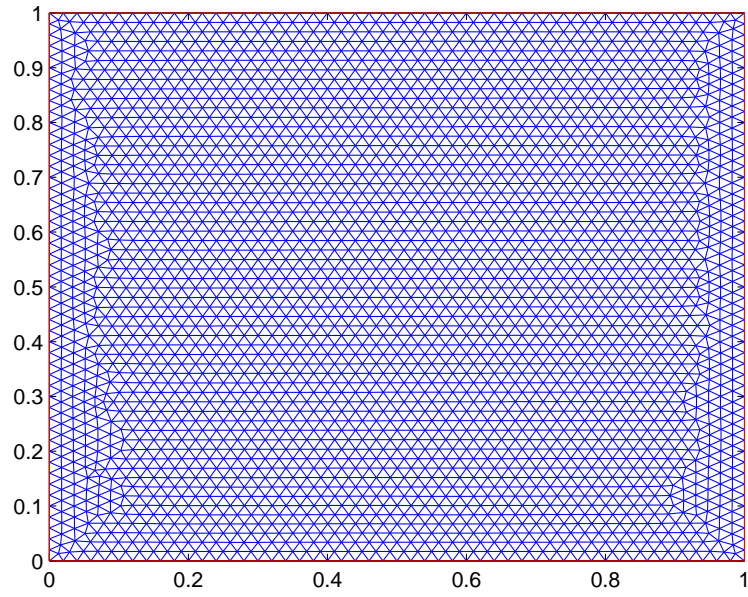
χωρίς να παρουσιάζονται αφύσικες αριθμητικές ταλαντώσεις στα αποτελέσματα. Επιπρόσθετα, όπως και στο πρόβλημα 1, το πυκνό υπολογιστικό πλέγμα αφομοιώνει καλύτερα τις αρχικές συνθήκες με συνέπεια να έχουμε ακριβέστερη συμπεριφορά της λύσης σε σχέση με το αραιό.

### 5.3 Πρόβλημα 3 : Διάδοση κύματος σε τοπογραφία

Το τρίτο κατά σειρά πρόβλημα που εξετάζεται μελετάει τη διάδοση κύματος σε τοπογραφία. Παρουσιάστηκε αρχικά από τον LeVeque [34] και τους Hubbard και Garcia-Navarro [31]. Στόχος μας είναι, μέσω του συγκεκριμένου προβλήματος, να δοκιμαστεί το αριθμητικό σχήμα όσον αφορά την ακρίβειά του σε πολύ μικρές μεταβολές. Το χωρίο εφαρμογής του προβλήματος είναι ένα μικρό τετράγωνο κανάλι διαστάσεων  $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ . Για την διακριτοποίηση μέσω τριγωνισμών αυτού του χωρίου παράχθηκαν δύο διαφορετικά υπολογιστικά πλέγματα, ένα αραιό (1460 κελιά, 781 κόμβοι, 2240 πλευρές) σχήμα 5.3.1 και ένα πυκνό (5816 κελιά, 3009 κόμβοι, 8824 πλευρές) σχήμα 5.3.2.



Σχήμα 5.3.1: Αραιό πλέγμα



Σχήμα 5.3.2: Πυκνό πλέγμα

Η εισροή και η εκροή στο κανάλι είναι ελεύθερη, δηλαδή εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες ελεύθερης ροής. Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι :

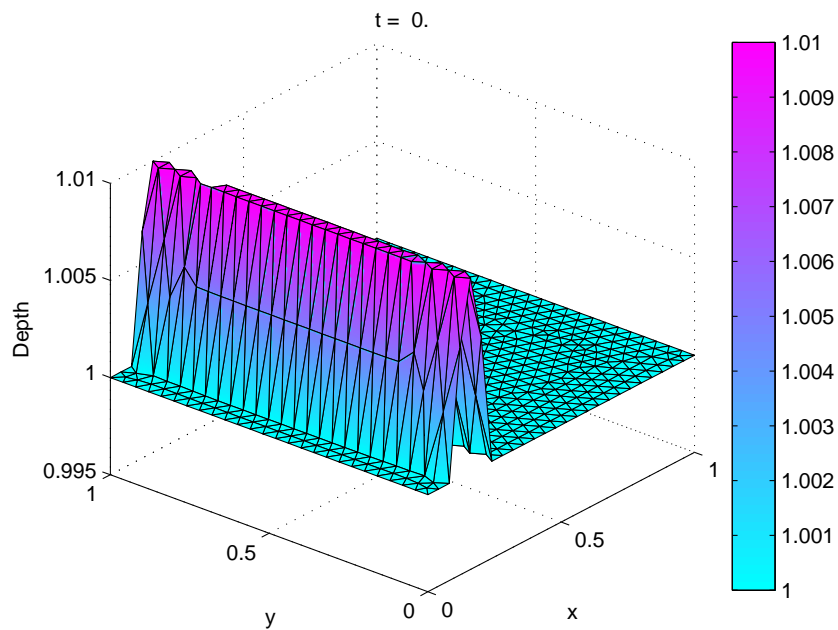
$$h(x, y, 0) = \begin{cases} 1.01 - B(x, y), & \text{αν } x \in (0.1, 0.2), \quad y \in [0, 1] \\ 1 - B(x, y), & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

$$u(x, y, 0) \equiv 0, \quad v(x, y, 0) \equiv 0.$$

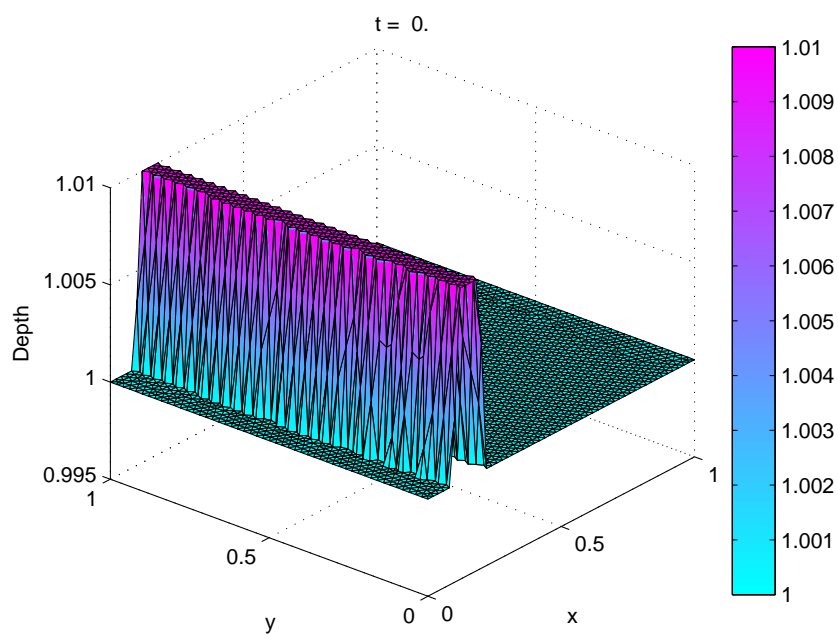
Η συνάρτηση  $B(x, y)$  περιγράφει την τοπογραφία του πυθμένα και δίνεται από τη σχέση :

$$B(x, y) = 0.5 \exp(-50((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2))$$



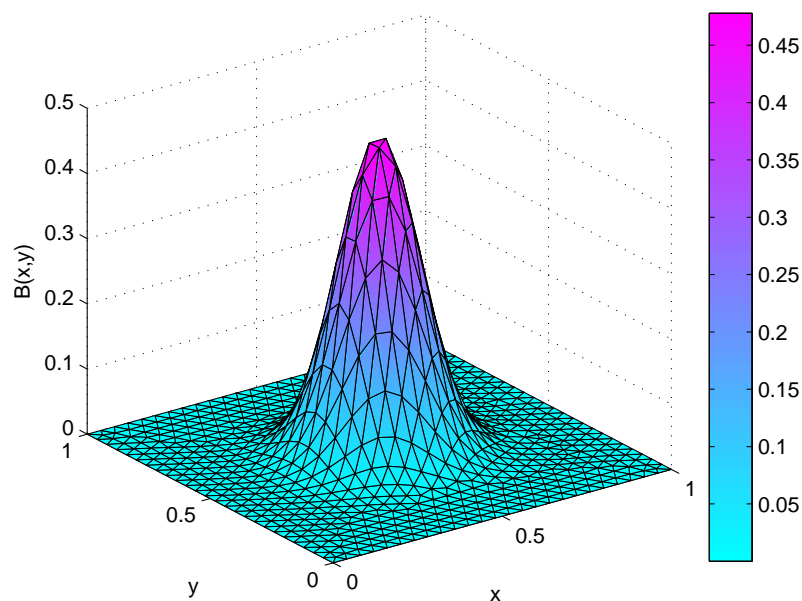


Σχήμα 5.3.3: Αρχικές συνθήκες για το αραιό πλέγμα

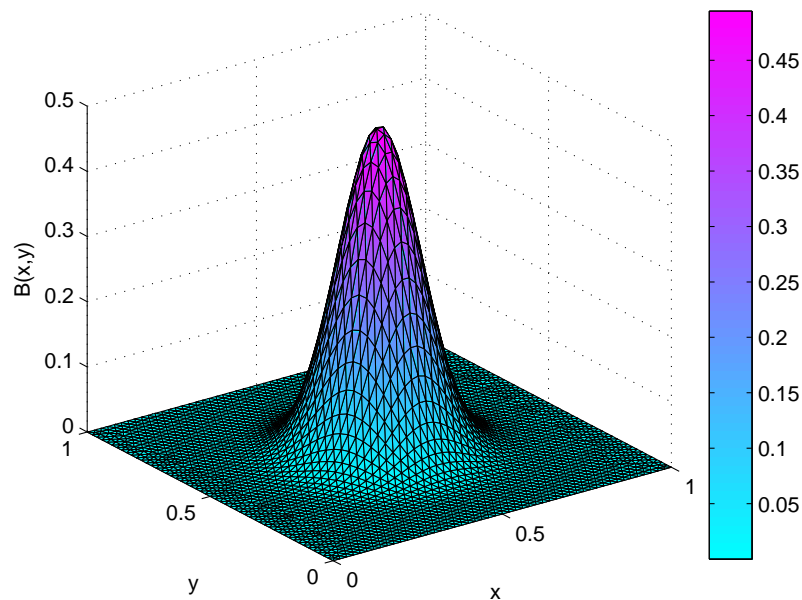


Σχήμα 5.3.4: Αρχικές συνθήκες για το πυκνό πλέγμα





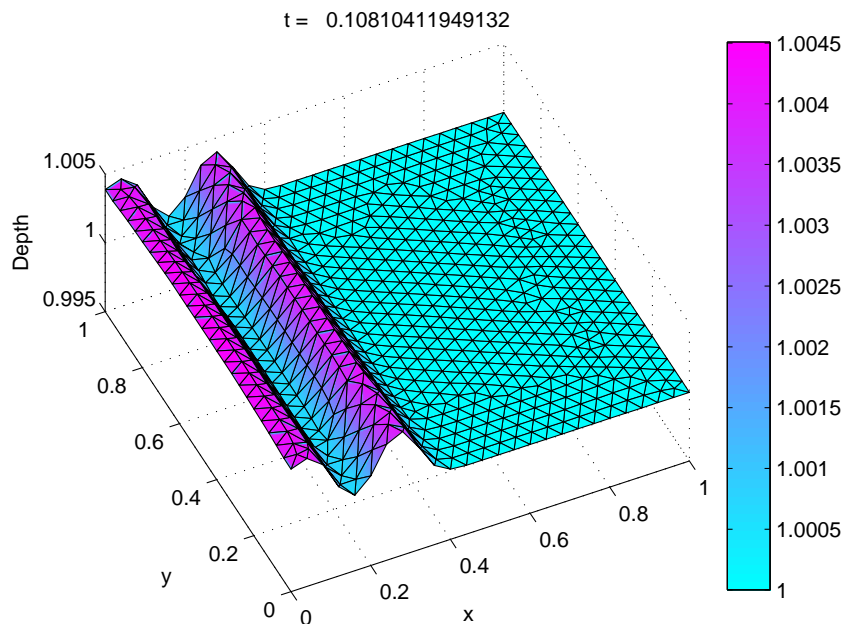
Σχήμα 5.3.5: Τοπογραφία του πυθμένα για το αραιό πλέγμα



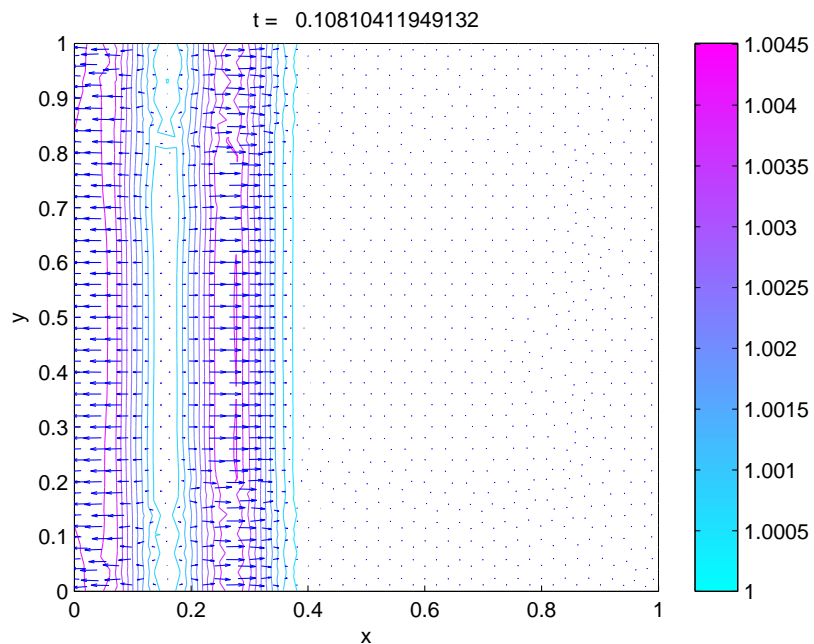
Σχήμα 5.3.6: Τοπογραφία του πυθμένα για το πυκνό πλέγμα

Στα σχήματα 5.3.3, 5.3.4 και 5.3.5, 5.3.6 φαίνονται οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος και η τοπογραφία του πυθμένα για κάθε πλέγμα. Ειδικά για το πρόβλημα αυτό η επιτάχυνση της βαρύτητας ορίζεται  $g = 1 \text{ m/s}^2$ . Ο αριθμός CFL που χρησιμοποιείται έχει τιμή 0.8. Την χρονική στιγμή  $t = 0.7 \text{ s}$  ολοκληρώνεται η εκτέλεση του προβλήματος. Για το

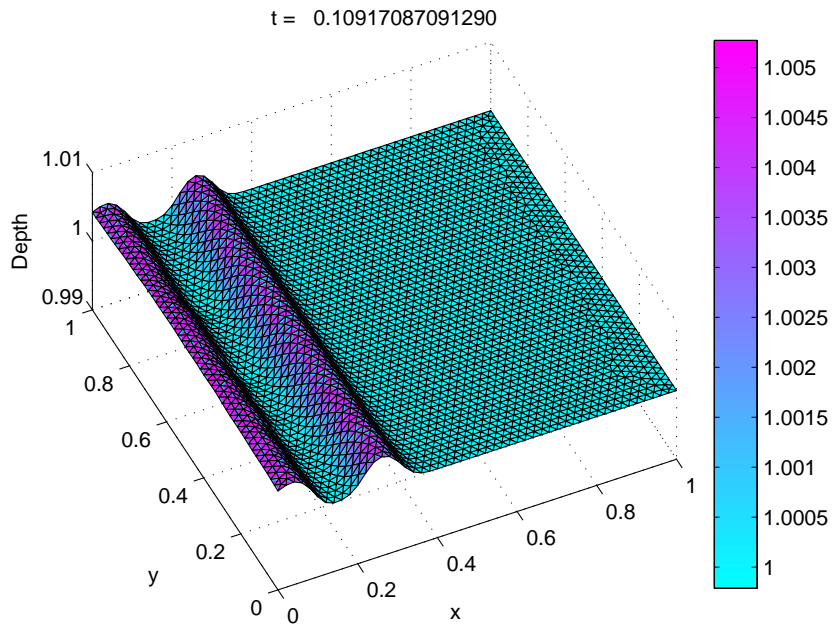
αραιό πλέγμα απαιτούνται 110 χρονικά επαναληπτικά βήματα ενώ για το πυκνό 231. Σταδιακά και μέχρι την ολοκλήρωση της χρονικής διάρκειας του προβλήματος παράγονται τα εξής διαγράμματα (σχήματα 5.3.7 έως 5.3.18) της αριθμητικής λύσης για τα δυο υπολογιστικά πλέγματα που εξετάζονται



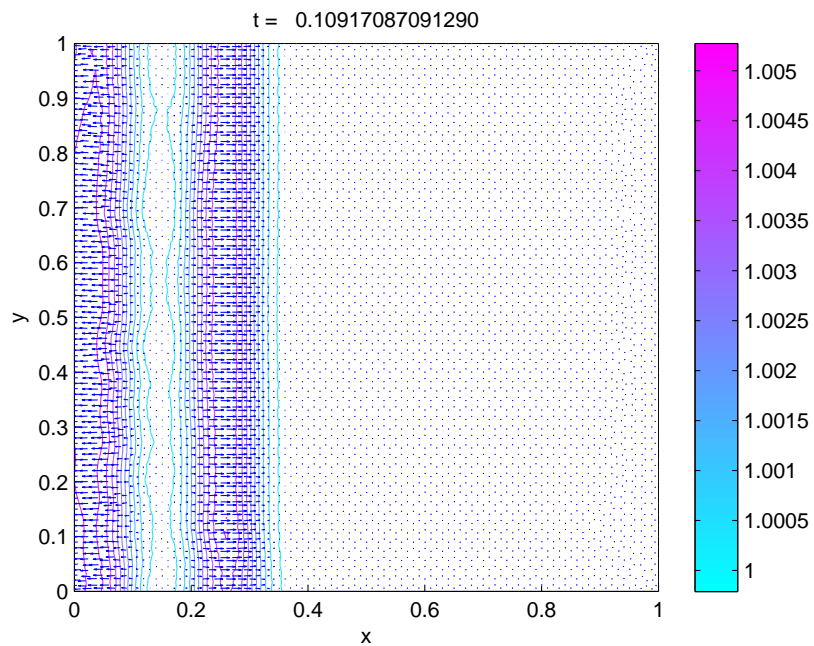
Σχήμα 5.3.7: Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 0.11 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα



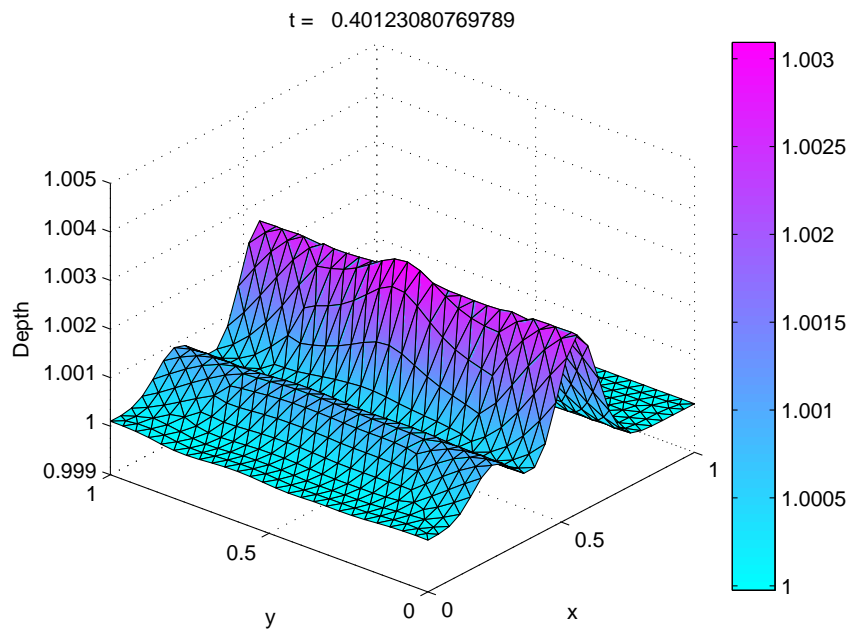
Σχήμα 5.3.8 : Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 0.11 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα



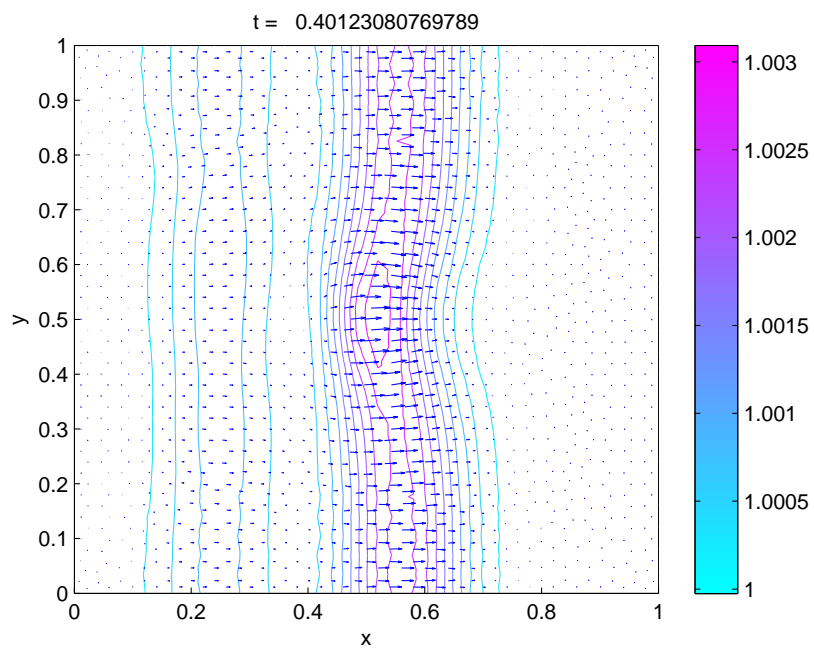
Σχήμα 5.3.9 : Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 0.11$  s για το πυκνό πλέγμα



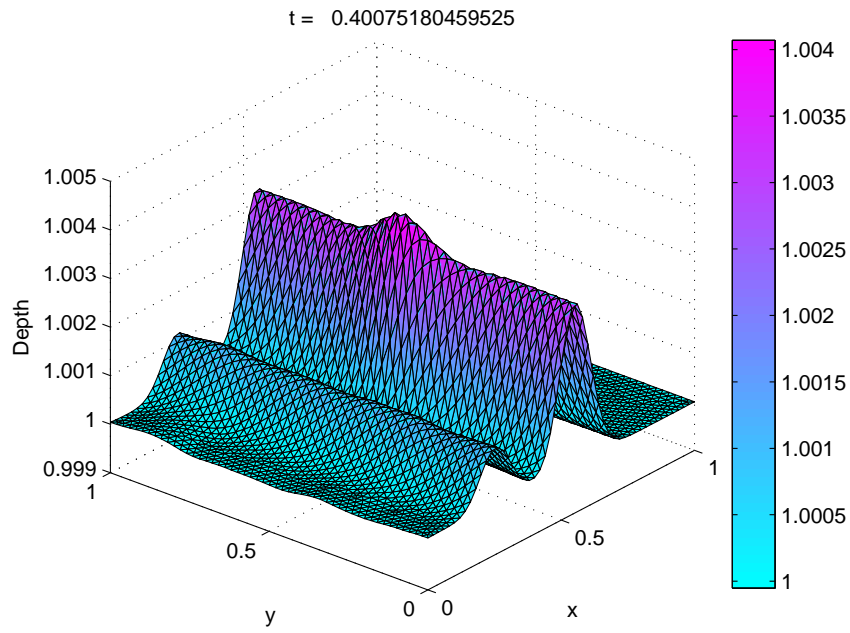
Σχήμα 5.3.10 : Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 0.11$  s για το πυκνό πλέγμα



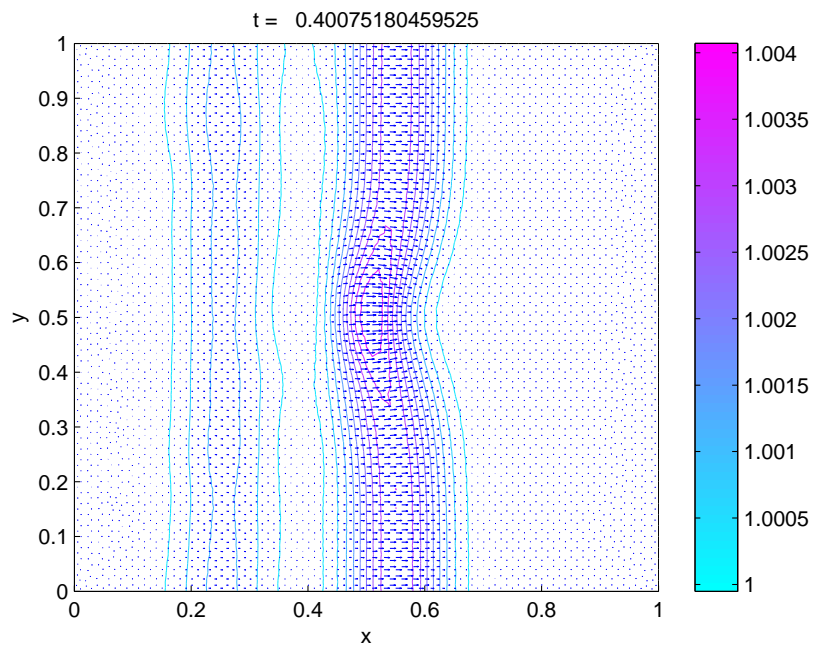
Σχήμα 5.3.11 : Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 0.4$  s για το αραιό πλέγμα



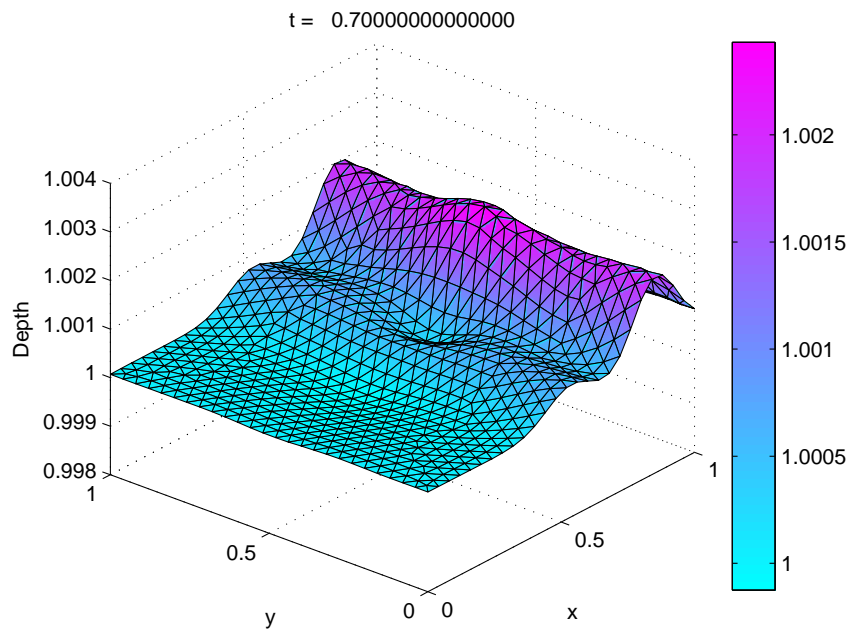
Σχήμα 5.3.12 : Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 0.4$  s για το αραιό πλέγμα



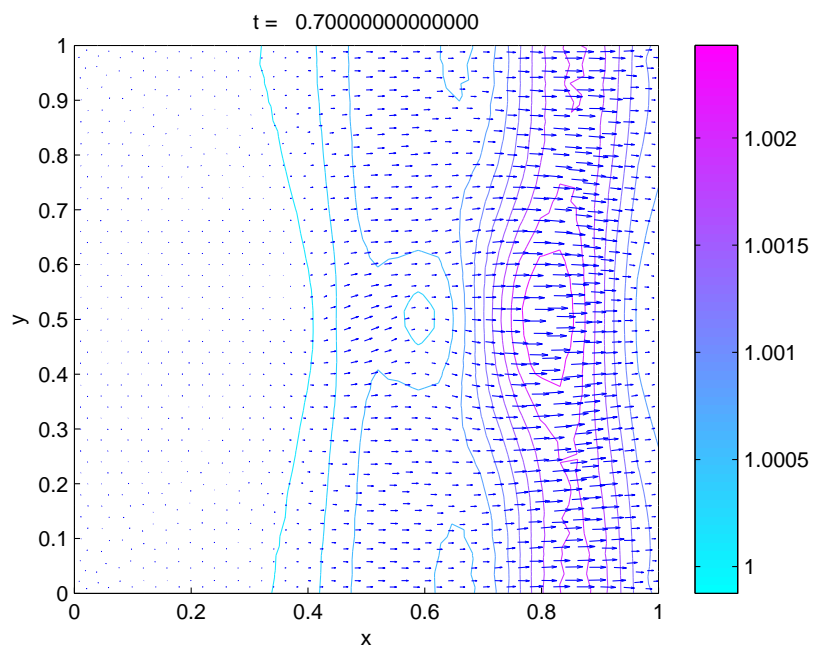
Σχήμα 5.3.13 : Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t \simeq 0.4 \text{ s}$  για το πυκνό πλέγμα



Σχήμα 5.3.14 : Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t \simeq 0.4 \text{ s}$  για το πυκνό πλέγμα

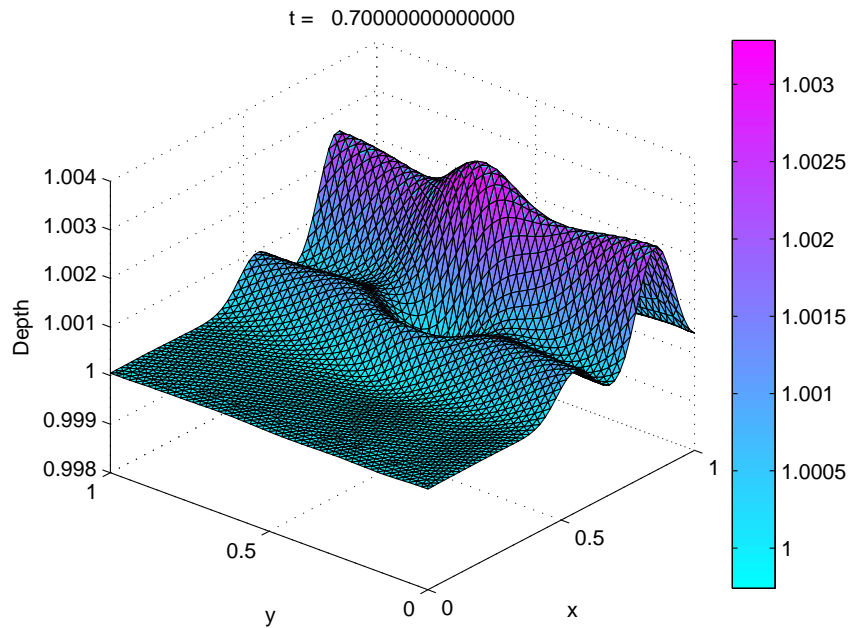


Σχήμα 5.3.15 : Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 0.7 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα

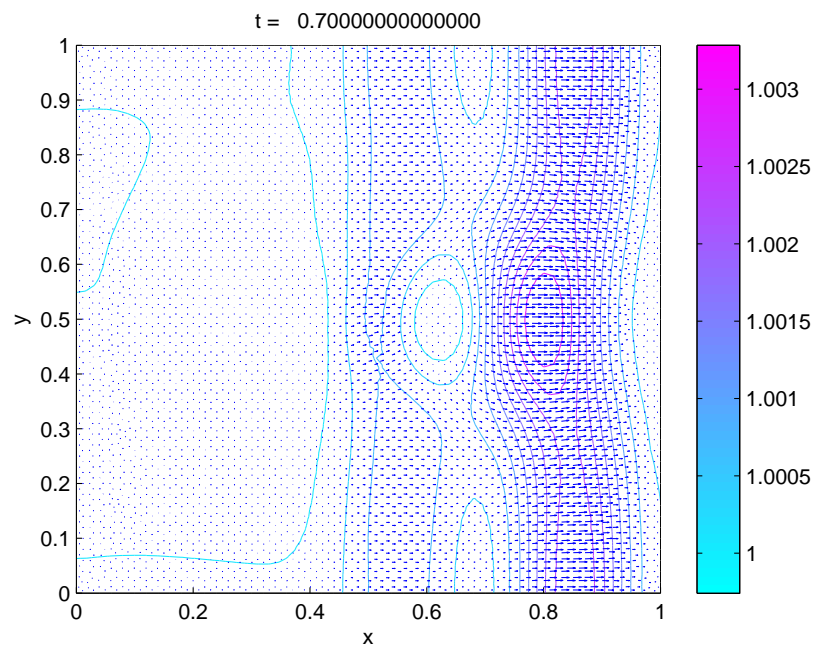


Σχήμα 5.3.16 : Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t = 0.7 \text{ s}$  για το αραιό πλέγμα





Σχήμα 5.3.17 : Εξέλιξη του βάθους του νερού σε χρόνο  $t = 0.7 \text{ s}$  για το πυκνό πλέγμα



Σχήμα 5.3.18 : Διάγραμμα ισοϋψών καμπυλών του βάθους μαζί με το πεδίο ταχυτήτων στο χρόνο  $t = 0.7 \text{ s}$  για το πυκνό πλέγμα

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η μικρή αρχική διαταραχή του νερού αρχικά σπάει σε δύο κύματα με αντίθετη κατεύθυνση (σχήματα 5.3.7-5.3.10) και διαδίδεται πάνω στον μεταβλητό όρο της τοπογραφίας χωρίς οποιαδήποτε αριθμητική ταλάντωση και μάλιστα συμφωνεί με τα

αποτελέσματα που παρουσιάζονται από τον LeVeque [31]. Τέλος, φαίνεται το πυκνό πλέγμα να αφομοιώνει καλύτερα τις αρχικές συνθήκες αλλά και τους όρους της τοπογραφίας με συνέπεια να έχουμε ακριβέστερη συμπεριφορά της λύσης σε σχέση με το αραιό.



# Κεφάλαιο 6

## Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε και μελετήθηκε κατάλληλη υπολογιστική μέθοδος με σκοπό την προσομοίωση φυσικών φαινομένων που προκύπτουν από τις εξισώσεις ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις. Το αριθμητικό σχήμα που κατασκευάστηκε βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων και εφαρμόστηκε σε μη δομημένα υπολογιστικά πλέγματα και ειδικότερα σε πλέγματα με τριγωνισμούς. Το αριθμητικό σχήμα είναι τύπου upwind, άμεσο (explicit) και περιγράφει με ακρίβεια τη συμπεριφορά της λύσης σε ασυνέχειες (shocks). Αυτό το shock capturing σχήμα είναι πρώτης τάξης ακρίβειας και χρησιμοποιεί, κατά την εκτέλεσή του, τη βοήθεια του προβλήματος Riemann και πιο συγκεκριμένα τον προσεγγιστικό επιλυτή Riemann του Roe. Παρουσιάστηκε η διακριτοποίηση των πηγαίων όρων, η εφαρμογή της συνθήκης ευστάθειας CFL, κατάλληλες συνοριακές συνθήκες και η διατήρηση των στάσιμων καταστάσεων που εξασφαλίζει το αριθμητικό σχήμα. Ιδιαίτερη έμφαση δώθηκε στον τρόπο κατασκευής του υπολογιστικού πλέγματος με τη χρήση ως mesh generator του EasyMesh. Η σύνδεση των γεωμετρικών πληροφοριών για τα τριγωνικά κελιά, που παράγει το EasyMesh, με το αριθμητικό σχήμα έγινε με τη βοήθεια κατάλληλων πινάκων που εξηγήθηκαν με σαφήνεια, ώστε η πρόσβαση των απαραίτητων δεδομένων συνδεσιμότητας μεταξύ των κελιών να είναι εύκολη και άμεση ανά πάσα στιγμή. Τέλος παρουσιάστηκαν τα χαρακτηριστικά παραδείγματα της μερικής κατάρρευσης φράγματος, της κατάρρευσης κυκλικού φράγματος και της διάδοσης κύματος σε τοπογραφία. Σε αυτά εφαρμόστηκε το αριθμητικό σχήμα της παρούσας εργασίας και βγήκαν σαφή συμπεράσματα για την αξιοπιστία, τη συνέπεια και την ευστάθειά του.

Η συνεχώς αναπτυσσόμενη επιστημονική έρευνα πάνω στις μεθόδους των πεπερασμένων όγκων σε μη δομημένα υπολογιστικά πλέγματα στερούσε βιβλιογραφίας στην ανάλυση όσον αφορά την συνδεσιμότητα των γεωμετρικών πληροφοριών των τριγωνικών κελιών με το αριθμητικό σχήμα. Η παρούσα εργασία αναλύει και εξηγεί με λεπτομέρειες τον τρόπο που

παράγονται οι πληροφορίες αυτές από το mesh generator, τον τρόπο αποθήκευσης αυτών και τη μέθοδο χρησιμοποίησής τους στο αριθμητικό σχήμα. Συμπερασματικά μπορεί να υποστηριχθεί ότι είναι εξαιρετικά απλό να πυκνώσουμε ή να αραιώσουμε το υπολογιστικό πλέγμα και ιδιαιτέρως να πυκνώσουμε το πλέγμα σε περιοχές που παρουσιάζουν ξεχωριστό ενδιαφέρον. Με την εφαρμογή των προβλημάτων φανερώνεται η ορθή λειτουργία του σχήματος και η επιτυχής ανταπόκρισή του στις ασυνέχειες που παρουσιάζονται λόγω της υπερβολικότητας των εξισώσεων. Επίσης δεν εμφανίζονται μη φυσικές αριθμητικές ταλαντώσεις, οι οποίες θα οδηγούσαν σταδιακά στην καταστροφή της αριθμητικής λύσης. Επιπροσθέτως φαίνεται ότι η χρήση του τριγωνικού υπολογιστικού πλέγματος οδηγεί σε ακριβή προσομοίωση των πηγαίων όρων, ακόμα και σε πολύπλοκες γεωμετρίες.

Η ύπαρξη της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής μπορεί να αποτελέσει το εύνασμα για την δημιουργία περισσότερων αριθμητικών σχημάτων με βάση τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, έχοντας ως δεδομένη την ασφάλεια της απόλυτα ορθής σύνδεσης του υπολογιστικού πλέγματος με την υπολογιστική μέθοδο. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν με απλή τροποποίηση του παρόντος αριθμητικού σχήματος διαφορετικοί προσεγγιστικοί επιλυτές Riemann, όπως ο HLL, ο HLLC και άλλοι. Επίσης είναι εφικτό να δημιουργηθούν σχήματα δεύτερης τάξης ακρίβειας με τη χρήση κάποιων οριοθετών για τις αριθμητικές ροές (flux limiters) ή με οποιοδήποτε άλλον τρόπο. Εκτός από άμεσα (explicit) αριθμητικά σχήματα είναι δυνατόν να παραχθούν και έμμεσα (implicit). Μελλοντική έρευνα μπορεί να γίνει και σε προβλήματα όπου παρουσιάζονται στεγανές περιοχές και απαιτείται κατάλληλη διόρθωση του αριθμητικού σχήματος. Ακόμα η χρήση παράλληλων υπολογισμών είναι δυνατόν να μειώσει σημαντικά τον χρόνο εκτέλεσης του αριθμητικού σχήματος και να κάνει ταχύτερη την εφαρμογή του σε πολύ πυκνά υπολογιστικά πλέγματα.

# Bibliography

- [1] M.B. Abbot. *Computational Hydraulics: Elements of the Theory of Free-Surface Flows*. Pitman, London, 1979.
- [2] M.B. Abbot. *Computational Hydraulics*. Ashgate Pub. Comp., 1992.
- [3] N. Ahmad, Z. Boybeyi, R. Löhner, and A. Sarma. A godunov-type scheme for atmospheric flows on unstructured grids: Scalar transport.
- [4] A.A. Akanbi and N.D. Katapodes. Model for flood propogation on initiallu dry land. *American Society of Civil Engineers, Journal of Hydraulic Engineering* 114(7), 689-706, 1988.
- [5] F. Alcrudo and P. Garcia-Navarro. A high-resolution godunov-type scheme in finite volumes for the 2d shallow-water equations. *Internatinal Journal For Numerical Methods In Fluids* 16, 489-505, 1993.
- [6] F. Alcrudo, P. Garcia-Navvaro, and J.M. Saviron. Flux difference splitting for 1d open channel flow equations. *Int. J. Num. Methods in Fluids*, 14: 1009-1018, 1993.
- [7] K. Anastasiou and C.T. Chan. Solution of the 2d shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 24: 1225-1245, 1997.
- [8] A. Bermúdez and M.E. Vázquez. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computers Fluids*, 23(8): 1049-1071, 1994.
- [9] P. Brufau and P. Garcia-Navarro. Two-dimensional dam break flow simulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 33, 35-57, 2000.
- [10] P. Brufau, P. García-Navarro, and M. E. Vázquez-Cendón. Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow water flows over dry irregular topography. *Internatinal Journal For Numerical Methods In Fluids* 45, 1047-1082, 2004.

- [11] P. Brufau, M. E. Vázquez-Cendón, and P. García-Navarro. A numerical model for flooding and drying of irregular domains. *Internatinal Journal For Numerical Methods In Fluids* 39, 247-275, 2002.
- [12] M.H. Chaudhry. *Applied Hydraulic Transient*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1979.
- [13] M.H. Chaudhry. *Open-Channel Flow*. Inc Prentice Hall, 1993.
- [14] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Uber die partiellen differenze-gleichungen der mathematisches physik. *Math. Ann.*, 100: 32-74, 1928.
- [15] J.A. Cunge, F.M. Holly, and A. Verwey. *Practical Aspects of Cumputational River Hydraulics*. Pitman, 1980.
- [16] B. Delaunay. Sur la sphère vide. *Izvestia Akademii NAuk SSSR, Otdelenie Matem- aticheskikh i Estestvennykh Nauk*, 7: 793-800, 1934.
- [17] A.I. Delis and Th. Katsaounis. Relaxation schemes for the shallow water equations. *Int. J. for Numerical Meth. in Fluids* 41, 695-719, 2003.
- [18] A.I. Delis and Th. Katsaounis. Numerical solution of the twodimensional shallow water equations by the application of relaxation methods. *Applied Mathematical Mod- elling* 29(8), 754-783, 2005.
- [19] G. Dhatt, A. Soulaïmani, Y. Ouellet, and M. Fortin. Development of new triangular elements for free surface flows. *Internatinal Journal For Numerical Methods In Fluids* 6, 895-911, 1986.
- [20] N. Dodd. Numerical model of wave run-up, overtoping and regeneration. *J. Waterw. Port, Coastal, Ocean Eng.*, 124, 1998.
- [21] R.J. Fennema and M.H. Chaudhry. Explicit methods for 2-d transient free-surface flows. *American Society of Civil Engineers, Journal of Hydraulic Engineering*, 116: 1013-1034, 1990.
- [22] L. Fraccarollo and E.F. Toro. Expirimental and numerical assessment of the shal- low water model for two-dimensional dam-break problems. *Journal of Hydraulic Research*, 33: 843-864, 1995.

- [23] R. Garcia and R. Kahawitha. Numerical solution of the st. venant equations with the maccormack finite difference scheme. *Internatinal Journal For Numerical Methods In Fluids* 6, 507-527, 1986.
- [24] P. Glaister. Approximate riemann solutions of the shallow water equations. *JHR*, 49: 293-306, 1988.
- [25] S. Godunov. A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Math. Sbornik*, 43: 271-306, 1959.
- [26] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Physics*, 49: 357-393, 1983.
- [27] A. Harten and P.H. Lax and. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.*, 25(1): 35-61, 1983.
- [28] K. Hu, C.G. Mingham, and D.M. Causon. Numerical simulation of wave overtopping of coastal structures using the non-linear shallow water equations. *Ocean Eng.*, 41, 2000.
- [29] M.E. Hubbard. Multidimensional slope limiters for muscl-type finite volume schemes on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 155: 54-74, 1999.
- [30] M.E. Hubbard and N. Dodd. A 2d numerical model of wave runup and overtopping. *Coastal Eng.*, 47: 1-26, 2002.
- [31] M.E. Hubbard and P. Garcia-Navarro. Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients. *J. Comput. Phys.* 165, 89, 2000.
- [32] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme 1,. *Lecture notes in Phys.*, 18: 163-168, 1973.
- [33] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme 3,. *J. Comp. Physics*, 23: 263-275, 1977.
- [34] R.J. LeVeque. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm. *J. Comput, Phys.*, 146: 346-365, 1998.
- [35] R.J LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.

- [36] J.A. Liggett. *Fluid Mechanics*. Inc McGrawHill, 1994.
- [37] P.L-F. Liu, Y.S. Chao, M.J. Briggs, U. Kanoglu, and C.E. Synolakis. Runup of solitary wave on a circular island. *J. Fluid Mech.*, 302, 1995.
- [38] Y. Loukili and A. Soulaïmani. Numerical tracking of shallow water waves by the unstructured finite volume waf approximation. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics* 8, 1-14, 2007.
- [39] Y. Loukili and A. Soulaïmani. Numerical tracking of shallow water waves by the unstrured finite volume waf approximation. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 8: 75-88, 2007.
- [40] C.G. Mingham and D.M. Causon. High -resolution finite-volume method for shallow water flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(6): 605-614, 1998.
- [41] T. Molls and M.H. Chaudhry. Depth-averaged open channel flow model. *J. Hydraul. Eng.*, 121(6): 453-465, 1995.
- [42] M. Nujic. Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free surface flow. *JHR*, 33(1): 101-111, 1995.
- [43] S. Osher and F. Solomon. Upwind difference schemes for hyperbolic conservation laws. *Math. Comp.*, 38(158): 339-374, 1982.
- [44] P.Glaister. Prediction of supercritical flow in open channels. *Comput. Math. Applic.*, 24(7): 69-75, 1992.
- [45] P.L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comp. Physics* 43, 1981.
- [46] P.A. Sleigh, P.H. Gaskell, M. Berzins, and N.G. Wright. An unstructured finite-volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries. *Comput. Fluids*, 27(4): 479-508, 1998.
- [47] A. Soulaïmani. Nouveaux aspects de l'application de la méthode des Éléments finis en hydrodynamique. Master's thesis, Department of Civil Engineering, Laval University, Quebec, 1983.
- [48] A. Soulaïmani and N.E. Elkadri. Sur une méthode de décentrage de schémas d'éléments finis résolvant les équations de naviers-stokes et de saint-venant. *Revue Européenne des Eléments Finis* 1(3), 279-307, 1992.

- [49] M. Szydlowski. Two-dimensional shallow water model for rapidly and gradually varied flow. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics* 48, 3-29, 1996.
- [50] W. Tan. *Shallow water hydrodynamics*. Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [51] V.V. Titov and C.E. Synolakis. Modelling of breaking and nonbreaking long-wave evolution and runoff using vtcs-2. *J. Waterw. Port, Coastal, Ocean Eng.*, 121, 1995.
- [52] E.F. Toro. *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. John Wiley and Sons Ltd, 2001.
- [53] A. Bermúdez, A. Dervieux, J.A. Desideri, and M.E. Vázquez. Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, 155: 49-72, 1998.
- [54] A. Valiani, V. Caleffi, and A. Zanni. Malpasset dam-break simulation using a 2d finite volume method. *JHE*, 128(5): 460-472, 2002.
- [55] M.E. Vázquez-Cendón. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. *J. Comput. Phys.*, 148(2): 497-526, 1999.
- [56] Q. Wan, W. Hongtao, C. Zhou, and Y.Wu. Simulating the hydraulic characteristics of the lower yellow river by the finite-volume technique. *Hydrological Processes*, 16: 2767-2779, 2002.
- [57] J.W. Wang and R.X. Liu. A comparative study of finite volume methods on unstructured meshes for simulation of 2d shallow water wave problems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 53: 171-184, 2000.
- [58] G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. J. Wiley and Sons, 1974.
- [59] T.H. Yoon and S.K. Kang. Finite volume model for two-dimensional shallow water flows on unstructured grids. *J. Hydr. Engrg.*, 130(7): 678-688, 2004.
- [60] D. Zhao, H. Shen, J. Lai, and G. Tabios. Approximate riemann solvers in fvm for 2d hydraulic shock wave modelling. *Journal of Hydraulic Engineering ASCE* 122(12), 692-702, 1996.
- [61] D. Zhao, H. Shen, J. Lai, G. Tabios, and W. Tan. Finite-volume two-dimensional unsteady-flow model for river basins. *Journal of Hydraulic Engineering*, 120: 863-882, 1994.

- [62] C. Zoppou and S. Roberrts. Catastrophic collapse of water supply reservoirs in urban areas. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125: 686-695, 1999.



# Παράρτημα Α΄

## Πηγαίος Κώδικας

Ο παρακάτω κώδικας είναι η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων σε μη δομημένα υπολογιστικά πλέγματα τριγωνισμών με χρήση του προσεγγιστικού επιλυτή του Roe στο πρόβλημα 2 (ενδεικτικά), που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 5. Να τονιστεί ότι στο κώδικα περιέχεται και ο τρόπος της δημιουργίας και προβολής στο προγραμματιστικό περιβάλλον της Matlab των σχεδιαγραμμάτων για την χρονική εξέλιξη του βάθους του νερού, των ισοϋψών καμπυλών του βάθους, καθώς και του πεδίου ταχυτήτων της λύσης.

```
program SW2DtriangularROE

implicit none
integer nodes, cells, edges, i, j, k, out, p, q, sel, n, see
integer edge(0:10000,0:4), cell(0:10000,0:5)
double precision node(0:10000,0:1)
double precision centroid(0:10000,0:1)
double precision cellarea(0:10000)
double precision dx, dy, dc(0:10000), ns(0:10000,0:1)
double precision U1(0:10000), U2(0:10000), U3(0:10000)
double precision U1n(0:10000), U2n(0:10000), U3n(0:10000)
double precision distmin, d, d1, d2, CFL
double precision t, tfinal, dt
double precision riza, h0, h1, H, u0, v0
double precision hL, uL, vL, hR, uR, vR
double precision nx, ny, FGn1, FGn2, FGn3
double precision summax, sum
```

```

double precision fluxdc1, fluxdc2, fluxdc3
double precision rx, ry, g
double precision zh1a(0:10000), z, zL, zR
double precision Source1, Source2, Source3
double precision sourcedc1, sourcedc2, sourcedc3

```

```

g = 9.8d0

```

```

c*****...Anagnwsi tw n arxeiwn pou paragei to EasyMesh...*****

```

```

open (unit = 500, file = 'node.dat')
open (unit = 11, file = 'grid5.n')
read (11, *) nodes

```

```

do i = 0, nodes - 1
    read (11, 100) node(i,0), node(i,1)
100    format (T6, F23.15, F22.15)
    write (500, *) node(i,0), node(i,1)
enddo

```

```

close(11)
close(500)

```

```

open (unit = 501, file = 'cell.dat')
open (unit = 12, file = 'grid5.e')
read (12, *) cells

```

```

do i = 0, cells - 1
    read (12, 200) cell(i,0), cell(i,1),
    *    cell(i,2), cell(i,3), cell(i,4), cell(i,5)
200    format (T6, I5, I5, I5, T38, I5, I5, I5)
    write (501, *) cell(i,0), cell(i,1), cell(i,2), cell(i,3),
    *    cell(i,4), cell(i,5)
enddo

close(12)

```

```

close(501)

open (unit = 502, file = 'side.dat')
open (unit = 13, file = 'grid5.s')
read (13, *) edges

do i = 0, edges - 1
    read (13, 300) edge(i,0), edge(i,1),
*       edge(i,2), edge(i,3), edge(i,4)
300     format (T7, I5, I5, I5, I5, I5)
        write (502, *) edge(i,0), edge(i,1), edge(i,2), edge(i,3), edge(i,4)
enddo

close(13)
close(502)

c*****...Apo8ikeusi twn gewmetrikwn mege8wn pou...*****
c*****.....apaitountai se Pinakes.....*****

open (600, file = 'centercellarea.dat')

do i = 0, cells - 1
    call centerpoint(node(cell(i,0),0), node(cell(i,1),0),
*       node(cell(i,2),0), node(cell(i,0),1), node(cell(i,1),1),
*       node(cell(i,2),1), centroid(i,0),centroid(i,1))
    call area(node(cell(i,0),0), node(cell(i,1),0), node(cell(i,2),0),
*       node(cell(i,0),1), node(cell(i,1),1),
*       node(cell(i,2),1), cellarea(i))
    write (600, *) centroid(i,0), centroid(i,1), cellarea(i)
enddo

close (600)

open (601, file = 'dc.dat')

do i = 0, edges - 1

```

```

        call length(node(edge(i,0),0), node(edge(i,1),0), node(edge(i,0),1),
*         node(edge(i,1),1), dx, dy, dc(i))
        write(601,*) dc(i)
        call normal(dx, dy, dc(i), ns(i,0), ns(i,1))
    enddo

    close(601)

c*****...Eksagwgi arxeiou me pliroforia gia sinoro...*****

    open (608, file = 'gridb.b')

    do i = 0, edges - 1
        if (edge(i,2).eq.-1.or.edge(i,3).eq.-1) then
            write (608, *) i, '\t', edge(i,0),'\t', edge(i,1)
        endif
    enddo

    close(608)

c*****

    print *, 'Number of CELLS =', cells
    print *, 'Number of NODES =', nodes
    print *, 'Number of EDGES =', edges

c*****...Diavase arxika dedomena apo ekswteriko arxeio...*****

    open (21, file = 'input5.dat')
        read (21, *) h0, h1, u0, v0
        read (21, *) CFL, tfinal
    close(21)

c*****...Arxikes sin8ikes...*****

    t = 0.0d0

```

```

open (602, file = 'xdat.m')
open (603, file = 'ydat.m')
open( 604, file = 'depth_init.m')
open (605, file = 'velocity_u_init.m')
open (606, file = 'velocity_v_init.m')
open( 607, file = 'zhta.m')

write (602, *) 'x = ['
write (603, *) 'y = ['
write( 604, *) 'h_init = ['
write (605, *) 'u = ['
write (606, *) 'v = ['
write (607, *) 'z = ['

do i = 0, cells - 1
    zhta(i) = z(centroid(i,0), centroid(i,1))
    riza = dsqrt((centroid(i,0)-25.0d0)*(centroid(i,0)-25.0d0)
*      + (centroid(i,1)-25.0d0)*(centroid(i,1)-25.0d0))
    if (riza.le.11.0d0) then
        U1(i) = h0 - zhta(i)
        U2(i) = (h0 - zhta(i))*u0
        U3(i) =( h0 - zhta(i))*v0
    else
        U1(i) = h1 - zhta(i)
        U2(i) = (h1 - zhta(i))*u0
        U3(i) = (h1 - zhta(i))*v0
    endif
    write(602, *) centroid(i,0)
    write(603, *) centroid(i,1)
    write(604, *) U1(i)+zhta(i)
    write(605, *) U2(i)/U1(i)
    write(606, *) U3(i)/U1(i)
    write(607, *) zhta(i)
enddo

```

```

write(602, *) '];'
write(603, *) '];'
write(604, *) '];'
write(605, *) '];'
write(606, *) '];'
write(607, *) '];'

```

c\*\*\*...Kwdikas gia dimourgia sxediagrammatwn sti Matlab (arxikes sinthikes kai topografi-  
a...\*\*\*

```

write (604, *) "load 'node.dat'"
write (604, *) "p = [node(:,1) node(:,2)]';"
write (604, *) "load 'cell.dat'"
write (604, *) "t = [cell(:,1)+1 cell(:,2)+1 cell(:,3)+1
*      ones(length(cell(:,3)),1)]';"
write (604, *) "load 'gridb.b'"
write (604, *) "e = [gridb(:,2)+1 gridb(:,3)+1
*      zeros(length(gridb(:,3)),5)]';"
write (604, *) 'pdemesh(p, e, t);'
write (604, *) 'figure;'
write (604,*) "pdeplot(p, e, t, 'xydata', h_ init, 'zdata',
*      h_ init, 'mesh', 'on', 'colorbar', 'off');"
write (604, *) 'grid on'
write (604, *) 'view(-32, 32)'
write (604, *) "xlabel('x')"
write (604, *) "ylabel('y')"
write (604, *) "zlabel('Depth')"
write (604, *) "title('t = ", t, "')"

write (607, *) "load 'node.dat'"
write (607, *) "p = [node(:,1) node(:,2)]';"
write (607, *) "load 'cell.dat'"
write (607, *) "t = [cell(:,1)+1 cell(:,2)+1 cell(:,3)+1
*      ones(length(cell(:,3)),1)]';"
write (607, *) "load 'gridb.b'"
write (607, *) "e = [gridb(:,2)+1 gridb(:,3)+1

```

```

*      zeros(length(gridb(:,3)),5)];"
write (607, *) 'pdemesh(p, e, t);'
write (607, *) 'figure;'
write (607, *) "pdeplot(p, e, t, 'xydata', z, 'zdata', z, 'mesh',
*      'on', 'colorbar', 'off');"
write (607, *) 'grid on'
write (607, *) 'view(-32, 32)'
write (607, *) "xlabel('x')"
write (607, *) "ylabel('y')"
write (607, *) "zlabel('B(x,y)')"

```

c\*\*\*\*\*

```

close(602)
close(603)
close(604)
close(605)
close(606)
close(607)

```

c\*\*\*\*\*...Ypologismos distmin...\*\*\*\*\*

```

distmin = 10000000000.0d0
do p = 0, cells - 1
  do q = 3,5
    d1 = node(edge(cell(p,q),1),0)
*      - node(edge(cell(p,q),0),0)
    d2 = node(edge(cell(p,q),1),1)
*      - node(edge(cell(p,q),0),1)
    d = dabs(d1*(node(edge(cell(p,q),0),1)
*      - centroid(p,1))
*      - (node(edge(cell(p,q),0),0)
*      - centroid(p,0))*d2)
*      / dsqrt(d1*d1 + d2*d2)
    distmin = min(distmin,d)
  enddo

```

```
enddo
```

```
c*****
```

```
print *, 'Dwse akeraia timi isi i megaliteri tou 1 gia'  
print *, 'metavliti emfanisis twn plots'  
print *, '(oso mikroteri i timi toso perissotera ta stigmiotipa'  
print *, 'mexri tin olokirwsi tou xronou ektelesis)'  
print *, 'DWSE TWRA THN TIMH ...'  
see = 1  
read *, see
```

```
c*****...Vasikos kormos - Xronikes epanalipseis...*****
```

```
t = 0.0d0  
k = 0  
n = 1  
out = 0
```

```
open (15, file = 'depth.m')  
open (16, file = 'velocities.m')
```

```
77      if (t.lt.tfinal) then  
         k = k + 1
```

```
c*****...Ypologismos dt...*****
```

```
      if (out.eq.0) then  
         summax = 0.0d0  
  
         do i = 0, cells - 1  
            sum = dsqrt(g*U1(i)) + dsqrt((U2(i)/U1(i))*(U2(i)/U1(i))  
*            + (U3(i)/U1(i))*(U3(i)/U1(i)))  
            summax = max(summax, sum)  
         enddo
```



```

    dt = (CFL * distmin) / summax
endif

```

```

t = t + dt

```

```

if (t.gt.tfinal) then
    dt = t - tfinal
    t = tfinal
endif

```

```

if (k.eq.sec*n.or.t.eq.tfinal) then
    write (15,*) 'h = ['
    write (16,*) 'vel = ['
endif

```

```

c*****

```

```

do i = 0, cells - 1
    fluxdc1 = 0.0d0
    fluxdc2 = 0.0d0
    fluxdc3 = 0.0d0

```

```

    sourcedc1 = 0.0d0
    sourcedc2 = 0.0d0
    sourcedc3 = 0.0d0

```

```

    hL = U1(i)
    uL = U2(i) / U1(i)
    vL = U3(i) / U1(i)
    zL = zhta(i)

```

```

    do j = 3,5
        if (edge(cell(i,j),2).eq.i) then

```

c... (1) swstos prosanatolismos

$nx = ns(cell(i,j),0)$

$ny = ns(cell(i,j),1)$

if (edge(cell(i,j),3).eq.-1) then

c... (1a) sinoro (eleu8eres sinoriakes sin8ikes)

$hR = hL$

$uR = uL$

$vR = vL$

$zR = zL$

else

c... (1b) eswterika tou xwriou

$hR = U1(edge(cell(i,j),3))$

$uR = U2(edge(cell(i,j),3)) / U1(edge(cell(i,j),3))$

$vR = U3(edge(cell(i,j),3)) / U1(edge(cell(i,j),3))$

$zR = zhta(edge(cell(i,j),3))$

endif

else

c... (2) la8os prosanatolismos

$nx = - ns(cell(i,j),0)$

$ny = - ns(cell(i,j),1)$

if (edge(cell(i,j),2).eq.-1) then

c... (2a) sinoro

$hR = hL$

$uR = uL$

$vR = vL$

zR = zL

else

c... (2b) eswterika tou pediou

hR = U1(edge(cell(i,j),2))

uR = U2(edge(cell(i,j),2)) / U1(edge(cell(i,j),2))

vR = U3(edge(cell(i,j),2)) / U1(edge(cell(i,j),2))

zR = zhta(edge(cell(i,j),2))

endif

endif

C-----

call Roe\_solver(hL, hR, uL, uR, vL, vR, zL, zR, nx, ny,

\* FGn1, FGn2, FGn3, Source1, Source2, Source3)

C-----

fluxdc1 = fluxdc1 + dc(cell(i,j))\*FGn1

fluxdc2 = fluxdc2 + dc(cell(i,j))\*FGn2

fluxdc3 = fluxdc3 + dc(cell(i,j))\*FGn3

sourcedc1 = sourcedc1 + dc(cell(i,j)) \* Source1

sourcedc2 = sourcedc2 + dc(cell(i,j)) \* Source2

sourcedc3 = sourcedc3 + dc(cell(i,j)) \* Source3

enddo

U1n(i) = U1(i) - (dt / cellarea(i))\*(fluxdc1 - sourcedc1)

U2n(i) = U2(i) - (dt / cellarea(i))\*(fluxdc2 - sourcedc2)

U3n(i) = U3(i) - (dt / cellarea(i))\* fluxdc3 - sourcedc3)

if (k.eq.see\*n.or.t.eq.tfinal) then

write (15, \*) U1n(i) + zhta(i)

write (16, \*) U2n(i) / U1n(i), U3n(i) / U1n(i)

endif

enddo

c\*\*\*\*\*Kwdikas gia dimourgia sxediagrammatwn sti Matlab...\*\*\*\*\*

```
if (k.eq.sec*n.or.t.eq.tfinal) then
    write (15, *) '];'
    write (16, *) '];'
    write (16, *) 'u = vel(:,1); v = vel(:,2);'
    write (15, *) "load 'node.dat'"
    write (15, *) "p = [node(:,1) node(:,2)]';"
    write (15, *) "load 'cell.dat'"
    write (15, *) "t = [cell(:,1)+1 cell(:,2)+1 cell(:,3)+1
*      ones(length(cell(:,3)),1)]';"
    write (15, *) "load 'gridb.b'"
    write (15, *) "e = [gridb(:,2)+1 gridb(:,3)+1
*      zeros(length(gridb(:,3)),5)]';"
    write (15, *) 'figure(1);'
    write (15, *) 'pdemesh(p, e, t);'
    write (15, *) 'figure(2);'
    write (15, *) "pdeplot(p, e, t, 'xydata', h, 'zdata', h, 'mesh',
*      'on', 'colorbar', 'off');"
    write (15, *) 'grid on'
    write (15, *) 'view(-32,32)'
    write (15, *) "xlabel('x')"
    write (15, *) "ylabel('y')"
    write (15, *) "zlabel('Depth')"
    write (15, *) "title('t = ", t, "')"
    write (15, *) 'figure(3);'
    write (15, *) "pdeplot(p, e, t, 'xydata', h, 'xystyle', 'off',
*      'contour', 'on', 'levels', 10, 'colorbar', 'off');"
    write (15, *) "xlabel('x')"
    write (15, *) "ylabel('y')"
    write (15, *) "title('t = ", t, "')"
    write (15, *) 'pause'

    write (16, *) 'xdat; ydat;'
    write (16, *) 'quiver(x, y, u, v)'
```

```

write (16, *) "xlabel('x')"
write (16, *) "ylabel('y')"
write (16, *) "title('t = ", t, "')"
write (16, *) 'pause'

```

```

n = n + 1
endif

```

```

c*****

```

```

do i = 0, cells - 1
  U1(i) = U1n(i)
  U2(i) = U2n(i)
  U3(i) = U3n(i)
enddo

```

```

if (t.eq.tfinal) then
  print *, 'Calculation complete'
  print *, 'tfinal = ', tfinal
  out = 1
endif

```

```

goto 77
endif

```

```

print *, 'Number of iterations = ',k

```

```

close(15)
close(16)

```

```

stop
end

```

```

c*****

```

```

c*****...Yporoutines ypologismou gewmetrikwn mege8wn...*****

```

```
subroutine centerpoint(x1, x2, x3, y1, y2, y3, Xcenter, Ycenter)
```

```
implicit none
```

```
double precision x1, x2, x3, y1, y2, y3, Xcenter, Ycenter
```

```
Xcenter = (x1 + x2 + x3) / 3.0d0
```

```
Ycenter = (y1 + y2 + y3) / 3.0d0
```

```
return
```

```
end
```

```
subroutine area(x1, x2, x3, y1, y2, y3, ar)
```

```
implicit none
```

```
double precision x1, x2, x3, y1, y2, y3, ar
```

```
ar = 0.5d0*( x1*y2 + x2*y3 + x3*y1 - x1*y3 - x2*y1 - x3*y2)
```

```
return
```

```
end
```

```
subroutine length(xs1, xs2, ys1, ys2, dsx, dsy, len)
```

```
implicit none
```

```
double precision xs1, xs2, ys1, ys2, dsx, dsy, len
```

```
dsx = xs2 - xs1
```

```
dsy = ys2 - ys1
```

```
len = dsqrt(dsx*dsx + dsy*dsy)
```

```
return
```

```
end
```

```
subroutine normal(dsx, dsy, len, nsx, nsy)
```

```
implicit none
double precision dsx, dsy, len, nsx, nsy
```

```
nsx = dsy / len
nsy = - dsx / len
```

```
return
end
```

```
c*****
```

```
c*****...Yporoutina ypologismou flux, source terms...*****
```

```
subroutine Roe_solver(hL, hR, uL, uR, vL, vR, zL, zR,
*      nx, ny, fgn1, fgn2, fgn3, S1, S2, S3)
```

```
implicit none
double precision hL, hR, uL, uR, vL, vR, nx, ny, fgn1, fgn2, fgn3
double precision g, u, v, h, c, l1, l2, l3
double precision dh, dhu, dhv, alpha, a1, a2, a3
double precision zL, zR, dzx, dzy, b1, b2, b3, S1, S2, S3
```

```
g = 9.8d0
```

```
u = (uR*dsqrt(hR) + uL*dsqrt(hL))
*      /( dsqrt(hR) + dsqrt(hL))
v = (vR*dsqrt(hR) + vL*dsqrt(hL))
*      / (dsqrt(hR) + dsqrt(hL))
h = 0.5d0*(hL + hR)
c = dsqrt(g*h)
```

```
l1 = u*nx + v*ny + c
l2 = u*nx + v*ny
l3 = u*nx + v*ny - c
```

```
dh = hR - hL
```

$$dhu = hR*uR - hL*uL$$

$$dhv = hR*vR - hL*vL$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.5d0 * (dhu*nx + dhv*ny - \\ * & \quad (u*nx + v*ny)*dh) / c \\ a1 &= 0.5d0*dh + \alpha \\ a2 &= ((dhv - v*dh)*nx - (dhu - u*dh)*ny) / c \\ a3 &= 0.5d0*dh - \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fgn1 &= 0.5d0*(hR*uR*nx + hR*vR*ny \\ * & \quad + hL*uL*nx + hL*vL*ny - (dabs(l1)*a1 \\ * & \quad + dabs(l3)*a3)) \\ fgn2 &= 0.5d0*((hR*uR*uR + 0.5d0*g*hR*hR)*nx \\ * & \quad + hR*uR*vR*ny + (hL*uL*uL + 0.5d0*g*hL*hL) \\ * & \quad *nx + hL*uL*vL*ny - (dabs(l1)*a1*(u + c*nx) \\ * & \quad - dabs(l2)*a2*c*ny + dabs(l3)*a3*(u - c*nx))) \\ fgn3 &= 0.5d0*(hR*uR*vR*nx + (hR*vR*vR + 0.5d0* \\ * & \quad g*hR*hR)*ny + hL*uL*vL*nx + (hL*vL*vL + 0.5d0 \\ * & \quad *g*hL*hL)*ny - (dabs(l1)*a1*(u + c*ny) \\ * & \quad + dabs(l2)*a2*c*nx + dabs(l3)*a3* \\ * & \quad (v - c*ny))) \end{aligned}$$

$$d zx = - (zR - zL)*nx$$

$$d zy = - (zR - zL)*ny$$

$$\begin{aligned} b1 &= 0.25d0*(1.0d0 - \text{sign}(1,l1))* \\ * & \quad (g*h*d zx*nx + g*h*d zy*ny) / c \\ b2 &= 0.5d0*(1.0d0 - \text{sign}(1,l2))* \\ * & \quad (- g*h*d zx*ny + g*h*d zy*nx) / c \\ b3 &= - 0.25d0*(1.0d0 - \text{sign}(1,l3))* \\ * & \quad (g*h*d zx*nx + g*h*d zy*ny) / c \end{aligned}$$

$$S1 = b1 + b3$$

$$S2 = b1*(u + c*nx) - b2*c*ny + b3*(u - c*nx)$$

$$S3 = b1*(v + c*ny) + b2*c*nx + b3*(v - c*ny)$$



return

end

c\*\*\*\*\*

c\*\*\*\*\*...Sinartisi topografias...\*\*\*\*\*

double precision function z(x, y)

double precision x, y

z = 0.0d0

return

end

c\*\*\*\*\*