Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο   Κ Ρ Η Τ Η Σ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Διαδικασίες Εκτίμησης της Βαρύτητας των Κριτηρίων στην Πολυκριτήρια Ανάλυση: Μια Υπολογιστική Αξιολόγηση

Υπό
ΚΑΛΛΙΒΡΕΤΑΚΗ ΑΡΓΥΡΩ
Επιβλέπων Καθηγητής: **ΔΟΥΜΠΟΣ ΜΙΧΑΛΗΣ**

Χανιά, 2009

Περιεχόμενα

ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ

Η συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιήθηκε στη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, στον τομέα της Επιχειρησιακής Έρευνας .

Η φοιτήτρια που ολοκλήρωσε την εργασία ονομάζεται Καλλιβρετάκη Αργυρώ, η οποία γεννήθηκε στις 29 Αυγούστου του 1983 στην Παλαιόχωρα Χανίων όπου και μεγάλωσε εκεί. Το 2001 αποφοίτησε από το 3ο Ενιαίο Λύκειο Χανιών όπου και την ίδια χρονιά εισήχθη στο Πανεπιστήμιο Κρήτης(Ηράκλειο) στο Τμήμα Θετικών Επιστημών στη Σχολή Επιστήμη Υπολογιστών. Αποφοίτησε το Σεπτέμβρη του 2005 και από τον Ιανουάριο του 2006 έως τώρα εργάζεται ως εκπαιδευτικός πληροφορικής. Το ακαδημαϊκό έτος 2006-2007 έγινε δεκτή στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης, στον τομέα Επιχειρησιακή Έρευνα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείο Κρήτης στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Επιχειρησιακή Έρευνα.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να γίνει μία πειραματική μελέτη πάνω σε γνωστές μεθόδους εκτίμησης βαρών για να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητά τους στη λήψη αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια. Αρχικά παρουσιάζονται και επεξήγονται βασικές έννοιες της πολυκριτήριας αποφάσεων. Στη συνέχεια περιγράφεται η πειραματική διαδικασία και τα αποτελέσματα αυτής και τέλος θα παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την παραπάνω πειραματική αξιολόγηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα σημαντικότερα θέματα στη λήψη αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια αφορά τον προσδιορισμό της σημαντικότητας των κριτηρίων αξιολόγησης. Αντικείμενο λοιπόν, της συγκεκριμένης εργασίας αποτελούν οι διαδικασίες εκτίμησης της βαρύτητας των κριτηρίων στην Πολυκριτήρια Ανάλυση μέσω μίας πειραματικής αξιολόγησης. Δηλαδή γίνεται μία πειραματική μελέτη πάνω σε γνωστές μεθόδους εκτίμησης βαρών για να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητά τους στη λήψη αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η καταγραφή και ανάλυση των μεθοδολογιών αυτών καθώς και η αξιολόγηση της αποτελεσματικότητάς τους. Η αξιολόγηση θα πραγματοποιηθεί μέσω μιας κατάλληλης πειραματικής διαδικασίας (προσομοίωση Monte Carlo). Στην ανάλυση θα ληφθούν υπόψη, μεθοδολογίες που βασίζονται στην κατάταξη των κριτηρίων (βάρη ROC και RS), καθώς και τεχνικές εντροπίας που αξιολογούν την πληροφοριακή ισχύ των κριτηρίων, καθώς και διαδικασίες που βασίζονται στην ανάλυση δεδομένων. Η αξιολόγηση θα πραγματοποιηθεί για διάφορες μεθόδους πολυκριτήριας λήψης αποφάσεων, λαμβάνοντας υπόψη τόσο μοντέλα που βασίζονται στη θεωρία πολυκριτήριας αξίας, όσο και μεθόδους από το χώρο των σχέσεων υπεροχής.

Η γενική μεθοδολογία που θα ακολουθηθεί στην παρακάτω εργασία είναι να γίνει εκτίμηση των βαρών με την χρήση ορισμένων μεθόδων, στο πρόγραμμα MATLAB και η σύγκριση των μεταξύ τους αποτελεσμάτων έτσι ώστε να εξαχθούν κάποια σημαντικά αποτελέσματα. Η δομή της εργασίας ξεκινά με την παρουσίαση της λήψης αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια, όπου παρουσιάζεται η πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων, αναφέρονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν και γίνεται μία εκτίμηση των βαρών από προηγούμενες μεθόδους. Στη συνέχεια ακολουθεί η πειραματική αξιολόγηση διαδικασιών εκτίμησης βαρών, όπου και αναφέρεται διεξοδικά οι στόχοι της πειραματικής ανάλυσης, ο ίδιος ο πειραματικός σχεδιασμός και τα αποτελέσματα που εξάγονται από αυτόν. Τέλος παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την συγκεκριμένη μελέτη όπως προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ

Η λήψη αποφάσεων είναι μια από τις σημαντικότερες λειτουργίες στη διοίκηση μιας επιχείρησης ή ενός οργανισμού. Στο σημερινό επιχειρηματικό περιβάλλον αλλά και στην καθημερινή ζωή, που χαρακτηρίζονται από συχνές αλλαγές, έντονο ανταγωνισμό, πληθώρα δεδομένων και μεγάλη διείσδυση της τεχνολογίας της πληροφορικής και των επικοινωνιών, η λήψη αποφάσεων βασίζεται όλο και περισσότερο σε "δεδομένα" (στοιχεία) τα οποία καθίστανται αντικείμενο επεξεργασίας με τη χρησιμοποίηση συγκεκριμένων μοντέλων, τεχνικών και την αξιοποίηση της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η λήψη αποφάσεων είναι, δηλαδή μια γνωστική διαδικασία κατά την οποία επιλέγονται μια σειρά από ενέργειες μεταξύ πολλαπλών εναλλακτικών. Κάθε διαδικασία λήψης αποφάσεων εισάγει μια τελική επιλογή. Αυτή μπορεί να αποτελεί μια δράση ή ακόμα και μια άποψη.

Η λήψη αποφάσεων όμως στη περίπτωση που έχουμε πολλαπλά κριτήρια αποτελεί ένα δύσκολο έργο, το οποίο δεν μπορεί να αναλυθεί μονόπλευρα και μονοδιάστατα και απαιτεί περαιτέρω ανάλυση.

2.1 Μεθοδολογικό Πλαίσιο της Πολυκριτήριας Ανάλυσης

Μία ιδιαιτερότητα της λήψης αποφάσεων παρουσιάζεται όταν υπάρχουν πολλοί παράμετροι-εναλλακτικές και πολλά κριτήρια που πρέπει να εξεταστούν. Στην συγκεκριμένη περίπτωση εντοπίζεται πρόβλημα στον τρόπο με τον οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί η σύνθεση όλων των παραμέτρων ώστε να επιτευχθεί η λήψη ορθολογικών αποφάσεων. Η αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος αποτελεί το βασικό αντικείμενο της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων (multicriteria decision aid, MCDA multicriteria decision making, MCDM).

Η κύρια διαφορά όμως της πολυκριτήριας ανάλυσης από άλλες μεθοδολογίες, δεν είναι η απλή σύνθεση όλων των πολλαπλών διαστάσεων ενός προβλήματος, αλλά η πραγματοποίηση της σύνθεσης αυτής υπό το πρίσμα της πολιτικής λήψης των αποφάσεων και του συστήματος προτίμησης και αξιών, το οποίο συνειδητά ή ασυνείδητα χρησιμοποιεί ο αποφασίζοντας. Το παραπάνω χαρακτηριστικό της, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη λήψη αποφάσεων αφού τελικός αποδέκτης είναι ο αποφασίζοντας μίας και δεν καθιστά την πολυκριτήρια λήψη αποφάσεων μία προσεγγιστική μέθοδο που δεν είναι σε θέση να ενσωματώσει τον αποφασίζονται και τις προτιμήσεις του στην διαδικασία ανάπτυξης των υποδειγμάτων και δεν τον περιορίζει στην παρακολούθηση και εφαρμογή των μαθηματικών αποτελεσμάτων.

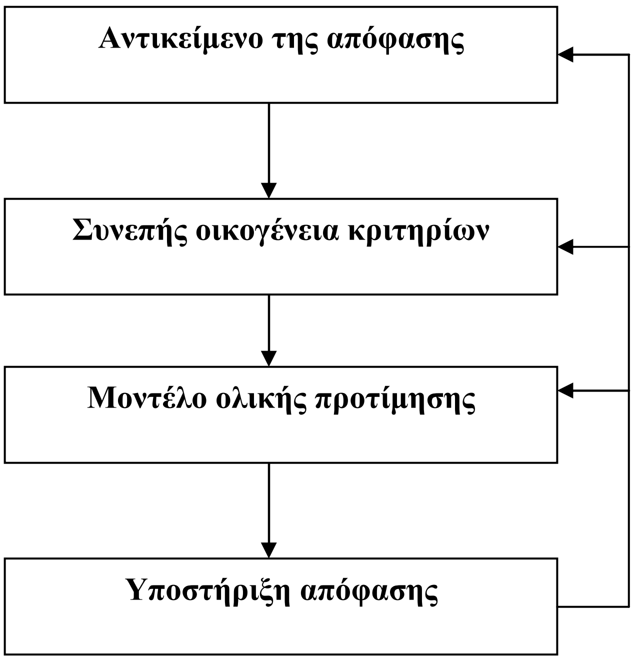
Τα βασικά χαρακτηριστικά της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων είναι:

1. Η ύπαρξη πολλαπλών κριτηρίων που οδηγεί σε αντικρουόμενα αποτελέσματα, καθώς η επιλογή που εντοπίζεται ως βέλτιστη σύμφωνα με ένα κριτήριο δεν είναι απαραίτητα βέλτιστη και ως προς τα υπόλοιπα κριτήρια (στόχους) της ανάλυσης.
2. Δεδομένης της αντικρουόμενης φύσης των κριτηρίων δεν είναι δυνατός ο εντοπισμός μιας βέλτιστης λύσης.
3. Η επιλογή της κατάλληλης λύσης είναι υποκειμενική και βασίζεται στην πολιτική λήψης αποφάσεων που ακολουθεί ο αποφασίζοντας.

Βάσει λοιπόν των παραπάνω ιδιαιτεροτήτων, η λήψη αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια έχει τους ακόλουθους στόχους:

1. Την ανάλυση της ανταγωνιστικής φύσης των κριτηρίων.
2. Τη μοντελοποίηση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα.
3. Τον εντοπισμό ικανοποιητικών λύσεων.

Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων, ο Roy (1996) πρότεινε ένα γενικό μεθοδολογικό πλαίσιο το οποίο περιγράφει μία γενική διαδικασία αντιμετώπισης πολυκριτήριων προβλημάτων. Το συγκεκριμένο πλαίσιο παρουσιάζεται παρακάτω στο σχήμα 1 και αποτελείται από τέσσερα στάδια.



Σχήμα 1: Το μεθοδολογικό πλαίσιο της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων

Αναλυτικότερα, ο Roy σημείωσε ότι για το πρώτο στάδιο πρέπει να πραγματοποιηθεί η διαμόρφωση του προβλήματος, δηλαδή το συγκεκριμένο στάδιο αφορά:

1. Τον καθορισμό των μεταβλητών απόφασης(decision variables). Οι μεταβλητές απόφασης αφορούν το σύνολο των παραγόντων οι τιμές των οποίων πρέπει να προσδιοριστούν προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα διαχείρισης παραγωγής, οι μεταβλητές μπορούν να αφορούν το επίπεδο παραγωγής διαφόρων προϊόντων, το είδος και τον όγκο των χρησιμοποιημένων πρώτων υλών, κλπ.
2. Τον προσδιορισμό του στόχου του προβλήματος (objective). Ο στόχος προσδιορίζει το κριτήριο αξιολόγησης της ποιότητας των πιθανών λύσεων του προβλήματος. Παράδειγμα στόχων είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους, η ελαχιστοποίηση του κινδύνου, κλπ.
3. Τον προσδιορισμό του χώρου των εφικτών λύσεων (feasible solutions). Στην πλειοψηφία των προβλημάτων λήψης αποφάσεων, οι πιθανές λύσεις του προβλήματος προσδιορίζονται από ένα σύνολο περιορισμών. Οι περιορισμοί αυτοί αφορούν τα διαθέσιμα μέσα(υλικά, κεφάλαια, ανθρώπινοι πόροι) καθώς και το περιβάλλον στο οποίο λαμβάνεται η απόφαση(νομικοί περιορισμοί).

Στο ίδιο στάδιο καθορίζονται επίσης το σύνολο των εναλλακτικών δραστηριοτήτων και η προβληματική της ανάλυσης. Συγκεκριμένα ως «εναλλακτική δραστηριότητα» ή απλά «εναλλακτική» ορίζεται κάθε επιλογή η οποία αποτελεί λύση του εξεταζόμενου προβλήματος και η οποία πρέπει να αξιολογηθεί ως προς την καταλληλότητα της. Όσο αφορά τον καθορισμό της προβληματικής της ανάλυσης, υπάρχουν τέσσερις προβληματικές που καλύπτουν το σύνολο των πρακτικών περιπτώσεων:

1. Προβληματική α (επιλογή): Η προβληματική τύπου α αναφέρεται στην επιλογή μίας ή περισσότερων εναλλακτικών οι οποίες θεωρούνται ως οι πλέον κατάλληλες.
2. Προβληματική β (ταξινόμηση):Η προβληματική τύπου β αναφέρεται στην ταξινόμηση των εναλλακτικών δραστηριοτήτων σε προκαθορισμένες ομοιογενείς κατηγορίες.
3. Προβληματική γ (κατάταξη): Η προβληματική τύπου γ αναφέρεται στην κατάταξη των εναλλακτικών δραστηριοτήτων από τις καλύτερες προς τις χειρότερες.
4. Προβληματική δ (περιγραφή): Η προβληματική τύπου δ αναφέρεται στην περιγραφή των εναλλακτικών δραστηριοτήτων βάσει των επιδόσεων τους στα επιμέρους κριτήρια αξιολόγησης.

Βάσει λοιπόν των παραπάνω, το δεύτερο στάδιο αφορά την κατασκευή του κατάλληλου μοντέλου που περιγράφει το πρόβλημα. Ως μοντέλο ορίζεται η μαθηματική αναπαράσταση του προβλήματος στην οποία αποτυπώνονται όλες οι μεταβλητές απόφασης, στόχοι και περιορισμοί. Βέβαια, στις περισσότερες περιπτώσεις η πραγματικότητα είναι πολύ πολύπλοκη ώστε να αναπαρασταθεί με πληρότητα σε ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων. Για το λόγο αυτό, η κατασκευή του μοντέλου βασίζεται πάντα σε κάποιες υποθέσεις, ώστε να είναι δυνατή η ποσοτική ανάλυση του προβλήματος. Όσο πιο ρεαλιστικές είναι οι υποθέσεις στις οποίες βασίζεται το μοντέλο, τόσο αυξάνεται η πιθανότητα το μοντέλο να συμβάλει με επιτυχία στην αντιμετώπιση του εξεταζόμενου προβλήματος. Επίσης στο δεύτερο στάδιο της διαδικασίας, το οποίο καθορίζει μία συνεπής οικογένεια κριτηρίων πρέπει να αναφερθεί ότι ένα σύνολο θεωρείται ότι διαμορφώνει μια συνεπή οικογένεια κριτηρίων εάν και μόνο εάν διαθέτει τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

1. Μονοτονία.
2. Επάρκεια.
3. Μη πλεονασμός.

Το τρίτο στάδιο της ανάλυσης αφορά την επίλυση του μοντέλου με την κατάλληλη μαθηματική διαδικασία(μέθοδο, αλγόριθμο) έτσι ώστε να προσδιοριστούν οι τιμές των μεταβλητών απόφασης οι οποίες αντιστοιχούν σε μια εφικτή λύση που βελτιστοποιεί τον στόχο του προβλήματος. Συγκεκριμένα το τρίτο στάδιο της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων, το μοντέλο ολικής προτίμησης θεωρείται η σύνθεση όλων των κριτηρίων έτσι ώστε να επιτευχθεί ο στόχος της ανάλυσης ανάλογα με την προβληματική που έχει καθοριστεί. Το μοντέλο ολικής προτίμησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για:

1. Τον προσδιορισμό μιας συνολικής αξιολόγησης κάθε εναλλακτικής.
2. Την πραγματοποίηση διμερών συγκρίσεων μεταξύ των εναλλακτικών.
3. Τη διερεύνηση του συνόλου των εναλλακτικών λύσεων, όταν αυτό είναι συνεχές.

Τέλος το τελευταίο στάδιο της ανάλυσης αφορά την υλοποίηση της λύσης και την υποστήριξη της σε περίπτωση όπου κριθεί απαραίτητο.

Από τα παραπάνω λοιπόν προκύπτουν οι βασικές διαφορές και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των προβλημάτων λήψης αποφάσεων σε σχέση με το «παραδοσιακό» μεθοδολογικό πλαίσιο της επιχειρησιακής έρευνας, τα οποία είναι:

1. Η ύπαρξη πολλαπλών κριτηρίων οδηγεί σε αντικρουόμενα αποτελέσματα, καθώς η επιλογή που εντοπίζεται ως βέλτιστη σύμφωνα

με ένα κριτήριο δεν είναι απαραίτητα βέλτιστη και ως προς τα υπόλοιπα κριτήρια (στόχους) της ανάλυσης.

2. Δεδομένης της αντικρουόμενης φύσης των κριτηρίων δεν είναι δυνατός ο εντοπισμός μιας βέλτιστης λύσης.

Η επιλογή της κατάλληλης λύσης είναι υποκειμενική, και βασίζεται στην πολιτική λήψης αποφάσεων που ακολουθεί ο αποφασίζοντας.

2.2 Διάφορες Πολυκριτήριες Μέθοδοι

Στην συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζονται οι πολυκριτήριες μέθοδοι οι οποίες αποτέλεσαν αντικείμενο έρευνας της παρούσας εργασίας. Συγκεκριμένα θα περιγραφούν οι παρακάτω μέθοδοι:

1. Ο σταθμισμένος μέσος όρος.
2. Η πολλαπλασιαστική συνάρτηση αξίας.
3. Η μέθοδος PROMETHEE.

2.2.1 Σταθμισμένος Μέσος Όρος

Μία από τις απλούστερες μορφές που μπορεί να λάβει μία συνάρτηση χρησιμότητας είναι η συνάρτηση του σταθμισμένου μέσου όρου, η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$V(\mathbf{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n$$

Τα $w_1, w_2, ..., w_n$ είναι μη αρνητικοί συντελεστές στάθμισης των κριτηρίων αξιολόγησης και $x_1, x_2, ..., x_n$ τα κριτήρια. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι οι συντελεστές στάθμισης των κριτηρίων σε ένα μοντέλο σταθμισμένου μέσου όρου ουσιαστικά περιγράφουν τις παραχωρήσεις (trade-offs) που ο αποφασίζοντας είναι διατεθειμένος να κάνει στα κριτήρια. Δηλαδή οι παραχωρήσεις αυτές θεωρούνται σταθερές και δεν επηρεάζονται από τις επιδόσεις των εναλλακτικών στα εξεταζόμενα κριτήρια. Στο πλαίσιο αυτό ένα κριτήριο με υψηλό συντελεστή στάθμισης μπορεί να θεωρηθεί ως σημαντικό, υπό την έννοια ότι μία χαμηλή επίδοση στο συγκεκριμένο κριτήριο είναι δύσκολο να αντισταθμιστεί από υψηλή επίδοση σε κάποιο άλλο. Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι οι συντελεστές στάθμισης δεν είναι απαραίτητο να αθροίζουν στην μονάδα αλλά παρόλα αυτά, το συγκεκριμένο δεν είναι δύσκολο να επιτευχθεί κανονικοποιώντας τους συντελεστές με τον παρακάτω τρόπο:

$$w'_j = \frac{w_j}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

τέτοιοι ώστε $w'_1 + w'_2 + \ldots + w'_n = 1$.

2.2.2 Πολλαπλασιαστική Συνάρτηση Αξιών

Όλα όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα για τον σταθμισμένο μέσο όρο ισχύουν και για την πολλαπλασιαστική συνάρτηση, ο τύπος της οποίας είναι:

$$V'(x) = \prod_{j=1}^{n} u'_j(x_j)^{w_j}$$

Θεωρώντας ότι $u'_j(x_j) > 0$, τότε λογαριθμίζοντας την πολλαπλασιαστική συνάρτηση προκύπτει η ακόλουθη προσθετική μορφή:

$$V(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j u_j(x_j)$$

όπου: $V(x) = \ln[V'(x)]$ και $u_j(x_j) = \ln[u'_j(x_j)]$. Η συνάρτηση V(x) είναι ένας μονότονος μετασχηματισμός της $V'(x)$, άρα η κατάταξη των εναλλακτικών μέσω των δύο συναρτήσεων ταυτίζεται.

Η μόνη διαφορά της προσθετικής και της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης εντοπίζεται στην πληροφορία που παρέχουν οι αντίστοιχες συναρτήσεις μερικών αξιών. Ειδικότερα, σε μία προσθετική συνάρτηση μόνο οι διαφορές μεταξύ μερικών αξιών έχουν νόημα αλλά όχι οι λόγοι τους. Για παράδειγμα, το σημείο μέσης αξίας (α) του διαστήματος $[x_{j*}, x_j^*]$ έχει αξία:

$$u_j(a) = \frac{u_j(x_{j*}) + u_j(x_j^*)}{2}$$

Αντίστοιχα , το σημείο μέσης αξίας (b) του διαστήματος $[x_{j*}, a]$ έχει αξία:

$$u_j(b) = \frac{u_j(x_{j*}) + u_j(a)}{2}$$

Αν θεωρηθεί ότι $u_j(x_{j*}) = 0$ και $u_j(x_j^*) = 1$, τότε $u_j(a) = 0.5$ και $u_j(b) = 0.25$. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι η επίδοση του α είναι δύο φορές «καλύτερη» από την επίδοση του b, γιατί εάν αλλάξει η κλίμακα θέτοντας $u_j(x_{j*}) = -1$ και $u_j(x_j^*) = 1$, τότε $u_j(a) = 0$ και $u_j(b) = 0.25$.

2.2.3 Μέθοδος PROMETHEE

Μία από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους στο χώρο της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων είναι η PROMETHEE. Συγκεκριμένα υπάρχουν οι μέθοδοι PROMETHEE I (partial ranking) και PROMETHEE II (completing ranking), οι οποίες αναπτύχθηκαν το 1980 αρχικά από τον Brans και ολοκληρώθηκαν από τους Nadeau και Landry (1982), βασίζονται στην ίδια ακριβώς μεθοδολογία για την ανάπτυξη της σχέσης υπεροχής και διαφοροποιούνται μόνο στην φάση της εκμετάλλευσης της σχέσης που αναπτύσσεται.

Σύμφωνα με τον Roy(1991,1996), ως σχέση υπεροχής S ορίζεται μία διμερής σχέση στο σύνολο των εναλλακτικών δραστηριοτήτων, τέτοια ώστε:

$$x'Sx'' \Leftrightarrow \text{η εναλλακτική } x' \text{ είναι τουλάχιστον εξίσου καλή όσο η } x''$$

Η γενική ιδέα της σχέσης υπεροχής είναι ότι η σύγκριση δύο εναλλακτικών x' και x'' βασίζεται στην ισχύ των ενδείξεων που υποστηρίζουν τον ισχυρισμό «η εναλλακτική x' είναι τουλάχιστον εξίσου καλή όσο η x''»(θετικές ενδείξεις) καθώς και την ισχύ των ενδείξεων κατά του ισχυρισμού(αρνητικές ενδείξεις). Εφόσον η ισχύς των θετικών ενδείξεων είναι υψηλή και ταυτόχρονα η ισχύς των αρνητικών ενδείξεων είναι περιορισμένη, τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει η σχέση $x'Sx''$.

Στη μέθοδο PROMETHEE, η φάση της ανάπτυξης της σχέσης υπεροχής βασίζεται στον προσδιορισμό του δείκτη προτίμησης (preference index) $\pi(x_i,x_j)$ για κάθε ζεύγος εναλλακτικών δραστηριοτήτων x_i και x_j. Ο δείκτης προτίμησης υπολογίζεται ως εξής:

$$\pi(x_i, x_j) = \sum_{k=1}^{n} w_k p_k (x_{ik}, x_{jk})$$

όπου $p_k(x_{ik}, x_{jk})$ είναι ο μερικός δείκτης προτίμησης για το κριτήριο x_k, ο οποίος ορίζεται συναρτήσει της διαφοράς $x_{ik} - x_{jk}$ μεταξύ των επιδόσεων των δύο εναλλακτικών στο κριτήριο x_k. Δηλαδή:

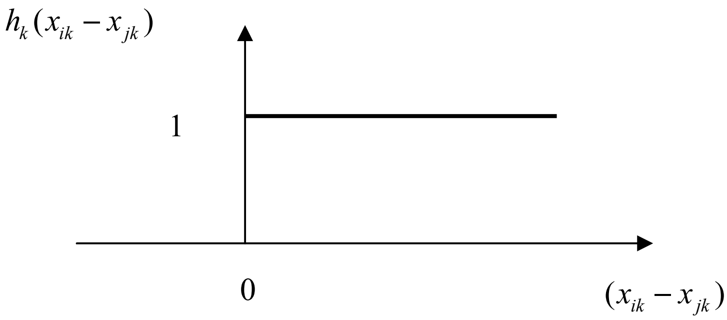
$$p_k(x_{ik}, x_{jk}) = \begin{cases} 0 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad x_{ik} < x_{jk} \\ h_k(x_{ik} - x_{jk}) \, \varepsilon\acute{\alpha}\nu & x_{ik} \geq x_{jk} \end{cases}$$

Για τη μορφή της συνάρτησης h_k έχουν προταθεί έξι περιπτώσεις (γενικευμένα κριτήρια) αλλά στην συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιείται το τελευταίο, το κριτήριο Gauss. Συνοπτικά όλα τα κριτήρια είναι τα παρακάτω:

1. Σύνηθες κριτήριο (usual criterion): Στην συγκεκριμένη περίπτωση θεωρείται ότι υπάρχει αδιαφορία μεταξύ δύο εναλλακτικών x_i και x_j στο κριτήριο x_k εάν και μόνο εάν $x_{ik} = x_{jk}$. Διαφορετικά, εάν $x_{ik} > x_{jk}$, τότε θεωρείται ότι υπάρχει σαφής προτίμηση της x_i έναντι της x_j. Η συνάρτηση h_k έχει την παρακάτω μορφή:

$$h_k(x_{ik} - x_{jk}) = \begin{cases} 0 \, \varepsilon\acute{\alpha}\nu \, x_{ik} = x_{jk} \\ 1 \, \varepsilon\acute{\alpha}\nu \, x_{ik} > x_{jk} \end{cases}$$

Δηλαδή γραφικά παριστάνεται στο σχήμα 2:

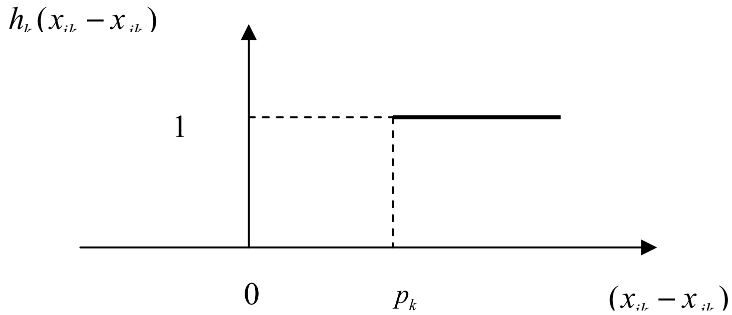


Σχήμα 2: Γραφική παράσταση σύνηθες κριτηρίου

2. Σχεδόν κριτήριο: Σύμφωνα με το γενικευμένο αυτό κριτήριο, θεωρείται ότι υπάρχει αδιαφορία μεταξύ δύο εναλλακτικών x_i και x_j στο κριτήριο x_k, όταν η διαφορά τους $x_{ik}-x_{jk}$ δεν υπερβαίνει το κατώφλι αδιαφορίας q_k. Διαφορετικά, υπάρχει σαφής προτίμηση. Η συνάρτηση h_k έχει την παρακάτω μορφή στην συγκεκριμένη περίπτωση:

$$h_k(x_{ik}-x_{jk}) = \begin{cases} 0 \; \varepsilon \acute{\alpha} \nu \; x_{ik}-x_{jk} \leq q_k \\ 1 \; \varepsilon \acute{\alpha} \nu \; x_{ik}-x_{jk} > q_k \end{cases}$$

και η γραφική της παράσταση απεικονίζεται στο σχήμα 3:



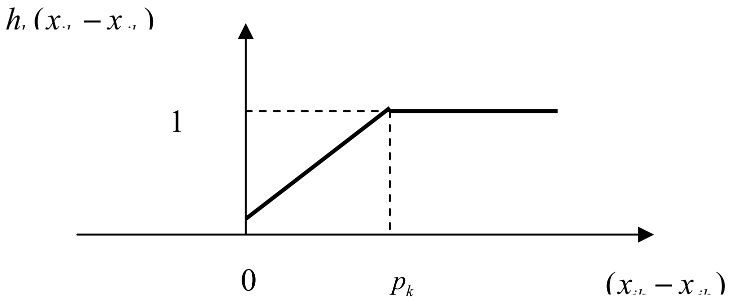
Σχήμα 3: Γραφική παράσταση σχεδόν κριτηρίου

3. Κριτήριο γραμμικής προτίμησης. Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι εφόσον η διαφορά $x_{ik}-x_{jk}$ δεν υπερβαίνει ένα κατώφλι προτίμησης p_k, τότε ο βαθμός προτίμησης για την εναλλακτική x_i αυξάνει γραμμικά συναρτήσει της

διαφοράς $x_{ik} - x_{jk}$. Όταν η διαφορά υπερβεί το κατώφλι προτίμησης p_k, τότε υπάρχει σαφής προτίμηση. Η συνάρτηση h_k έχει την παρακάτω μορφή:

$$h_k(x_{ik} - x_{jk}) = \begin{cases} \dfrac{x_{ik} - x_{jk}}{p_k} & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\; x_{ik} - x_{jk} \leq p_k \\ 1 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\; x_{ik} - x_{jk} > p_k \end{cases}$$

Στο σχήμα 4 παρουσιάζεται η γραφική της παράσταση:

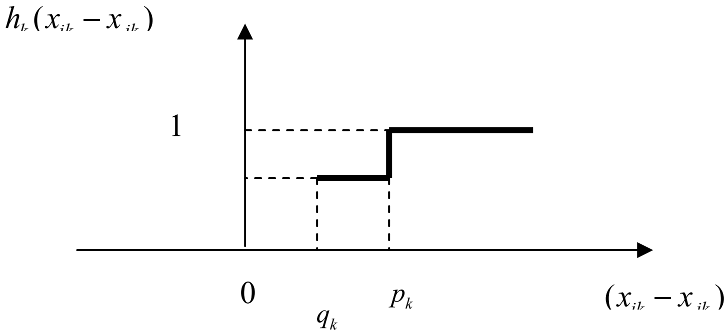


Σχήμα 4: Γραφική παράσταση κριτηρίου γραμμικής προτίμησης

4. Κριτήριο επιπέδου: Στο γενικευμένο αυτό κριτήριο χρησιμοποιείται τόσο το κατώφλι αδιαφορίας, όσο και το κατώφλι προτίμησης. Εάν $q_k < x_{ik} - x_{jk} \leq p_k$ τότε υπάρχει μία ελαφρά προτίμηση για την εναλλακτική x_i. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις ισχύουν οι παρατηρήσεις που έγιναν στα προηγούμενα δύο γενικευμένα κριτήρια. Δηλαδή:

$$h_k(x_{ik} - x_{jk}) = \begin{cases} 0 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad x_{ik} - x_{jk} \leq q_k \\ \dfrac{x_{ik} - x_{jk} - q_k}{p_k - q_k} & \varepsilon\acute{\alpha}\nu\; x_{ik} - x_{jk} \in (q_k, p_k] \\ 1 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad x_{ik} - x_{jk} > p_k \end{cases}$$

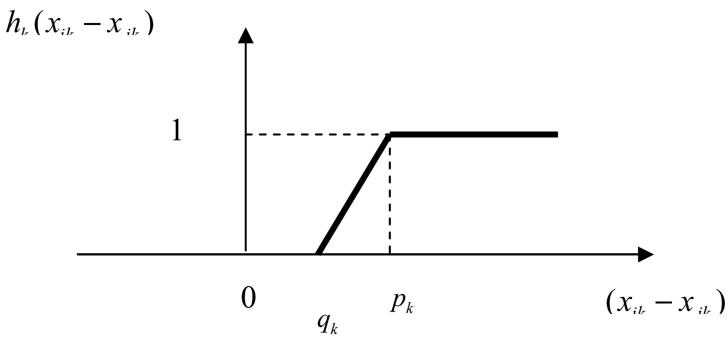
Παρακάτω παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της h_k:



Σχήμα 5: Γραφική παράσταση κριτηρίου επιπέδου

5. Κριτήριο γραμμικής προτίμησης και περιοχής αδιαφορίας: Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι ο βαθμός προτίμησης αυξάνει γραμμικά από το μηδέν στο ένα, όταν η διαφορά $x_{ik}-x_{jk}$ βρίσκεται μεταξύ του ορίου αδιαφορίας και του ορίου προτίμησης. Η συνάρτηση h_k έχει την εξής μορφή (σχήμα 6):

$$h_k(x_{ik}-x_{jk}) = \begin{cases} 0 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad x_{ik}-x_{jk} \le q_k \\ \dfrac{x_{ik}-x_{jk}-q_k}{p_k-q_k} & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \; x_{ik}-x_{jk} \in (q_k, p_k] \\ 1 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad x_{ik}-x_{jk} > p_k \end{cases}$$

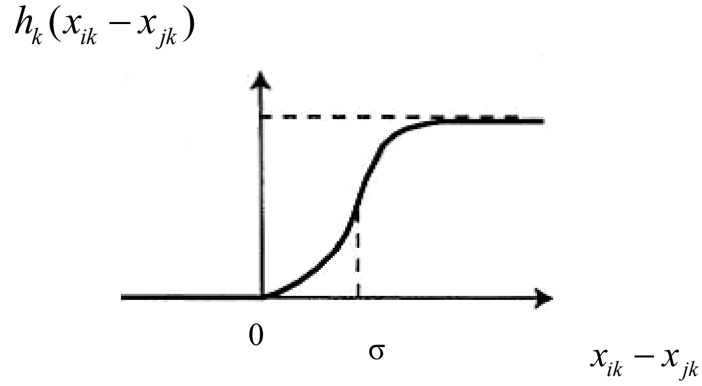


Σχήμα 6: Γραφική παράσταση κριτηρίου γραμμικής προτίμησης και περιοχής αδιαφορίας

6. Το τελευταίο κριτήριο, είναι το κριτήριο Gauss: Στην περίπτωση αυτή, ο βαθμός προτίμησης περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση της ακόλουθης μορφής (ως σ συμβολίζεται η παράμετρος που καθορίζει το σημείο αλλαγής στην καμπή της συνάρτησης):

$$h_k(x_{ik}-x_{jk}) = 1-\exp\left[-\frac{(x_{ik}-x_{jk})^2}{2\sigma^2}\right]$$

Η γραφική παράσταση της παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί:



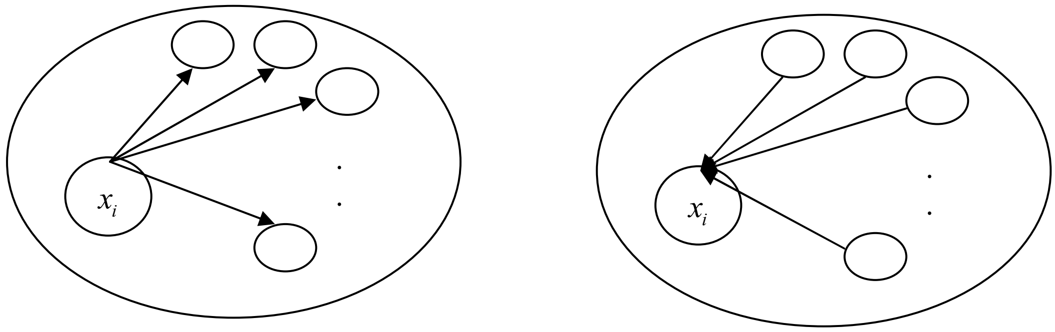
Σχήμα 7: Γραφική παράσταση κριτηρίου Gauss

Με τον καθορισμό λοιπόν της συνάρτησης h_k με βάση τις παραπάνω επιλογές υπολογίζεται ο δείκτης προτίμησης $\pi(x_i,x_j)$ για κάθε ζεύγος των εναλλακτικών. Ο δείκτης προτίμησης παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1], έτσι ώστε:

- $\pi(x_i,x_j)\approx 0 \Rightarrow$ «οριακή» υπεροχή της x_i έναντι της x_j.
- $\pi(x_i,x_j)\approx 1 \Rightarrow$ «ισχυρή» υπεροχή της x_i έναντι της x_j.

Για την εκμετάλλευση της σχέσης υπεροχής που αναπτύσσεται υπολογίζονται τα ακόλουθα μεγέθη για κάθε εναλλακτική x_i:

1. Ροή εισόδου(entering flow): $\varphi^-(x_i)=\sum_j \pi(x_j,x_i)$,
2. Ροή εξόδου(leaving flow): $\varphi^+(x_i)=\sum_j \pi(x_i,x_j)$, με τα διαγράμματα ροής εισόδου και εξόδου να ακολουθούν στο παρακάτω σχήμα.
3. Καθαρή ροή (net flow): $\varphi\ (x_i)=\varphi^+(x_i)-\varphi^-(x_i)$



Σχήμα 8: Διάγραμμα ροής εισόδου και εξόδου αντίστοιχα

Έτσι λοιπόν η ροή εξόδου $\varphi^+(x_i)$ δείχνει την υπεροχή της εναλλακτικής x_i έναντι των υπολοίπων εναλλακτικών, ενώ η ροή εισόδου $\varphi^-(x_i)$ αναπαριστά την υπεροχή όλων των υπολοίπων εναλλακτικών έναντι της x_i. Η καθαρή ροή αποτελεί ένα συνολικό μέγεθος αξιολόγησης της εναλλακτικής x_i έναντι των υπολοίπων εξεταζόμενων εναλλακτικών. Βάση λοιπόν των παραπάνω ροών, στη μέθοδο PROMETHEE I αναπτύσσονται δύο κατατάξεις. Η πρώτη κατάταξη Z_1 αναπτύσσεται βάσει των ροών εισόδου έτσι ώστε:

$$x_i \ \mathrm{f}_1 \ x_j \Leftrightarrow \varphi^-(x_i) < \varphi^-(x_j)$$
$$x_i \ \mathrm{f}_1 \ x_j \Leftrightarrow \varphi^-(x_i) = \varphi^-(x_j)$$

Η δεύτερη κατάταξη Z_2 αναπτύσσεται βάσει των ροών εξόδου έτσι ώστε

$$x_i \ \mathrm{f}_1 \ x_j \Leftrightarrow \varphi^-(x_i) < \varphi^-(x_j)$$
$$x_i \ \mathrm{f}_1 \ x_j \Leftrightarrow \varphi^-(x_i) = \varphi^-(x_j)$$

Αντίθετα με τη μέθοδο PROMETHEE I, στην PROMETHEE II, υπάρχει μια κατάταξη των εναλλακτικών με βάση τις καθαρές τους ροές. Η κατάταξη αυτή είναι πλήρης(δεν λαμβάνεται υπόψη η σχέση ασυγκριτικότητας) και προσδιορίζεται απλά ως εξής:

$$x_i \ \mathrm{f}_2 \ x_j \Leftrightarrow \varphi\ (x_i) < \varphi\ (x_j)$$
$$x_i \ \mathrm{f}_2 \ x_j \Leftrightarrow \varphi\ (x_i) = \varphi\ (x_j)$$

2.3 Προσεγγιστικές Εκτιμήσεις Βαρών

Στα περισσότερα προβλήματα λήψης αποφάσεων, οι παραχωρήσεις που είναι διατεθειμένος να κάνει ο αποφασίζοντας θα πρέπει αναπαριστώνται με συντελεστές στάθμισης-βάρη. Επειδή όμως ο ακριβής προσδιορισμός των βαρών είναι ιδιαίτερα δύσκολος έχουν αναπτυχθεί διαδικασίες για την προσεγγιστική εκτίμηση των βαρών, μερικές από αυτές είναι τα βάρη rank-order centroid (Stillwell et al., 1981,Barron και Barrett, 1996), τα βάρη rank sum (Stillwell et al., 1981, Jia et al., 1981), τα βάρη rank order distribution (Roberts και Goodwin, 2002). Μία εναλλακτική διαδικασία είναι να ληφθεί υπόψη η εντροπία στον υπολογισμό των βαρών, δηλαδή η πληροφορία που παρέχουν τα κριτήρια στην περιγραφή ενός συνόλου εναλλακτικών. Όλα τα παραπάνω αναλύονται στις ενότητες που ακολουθούν.

2.3.1 Πιθανοθεωρητικές Διαδικασίες Βάσει της Κατάταξης των Κριτήριων

Επειδή μερικές φορές ο αποφασίζοντας δεν είναι σε θέση να προσδιορίζει επακριβώς τη σημαντικότητα των κριτηρίων, τα βάρη μπορούν να θεωρηθούν ότι προκύπτουν από κάποια κατανομή. Η αναμενόμενη τιμή που μπορεί να προκύψει από μια τέτοια κατανομή μπορεί να θεωρηθεί ότι παρέχει μια ικανοποιητική εκτίμηση για τη σημαντικότητα των κριτηρίων. Στις παρακάτω ενότητες παρουσιάζονται ορισμένες διαδικασίες που έχουν αναπτυχθεί για την προσεγγιστική εκτίμηση των βαρών, ακολουθώντας των παραπάνω αρχή.

2.3.1.1 Βάρη ROC (Rank Order Centroid)

Οι Barron και Barrett (1996) προσδιόρισαν τα βάρη ROC (Rank-Order Centoid-center of mass) θεωρώντας ότι υπάρχουν R κλάσεις ισοδυναμίας στην κατάταξη των κριτηρίων, ορισμένες έτσι ώστε κάθε κλάση να περιλαμβάνει κριτήρια ίδιας σημαντικότητας, με την πρώτη κλάση να περιλαμβάνει τα κριτήρια με την υψηλότερη σημαντικότητα και την τελευταία τα λιγότερα σημαντικά κριτήρια. Συμβολίζοντας λοιπόν ως n_i το πλήθος των κριτηρίων στην κλάση ισοδυναμίας i με ($n_1 + n_2 + ... + n_n = n$) και ως $r_i = r_{i-1} + n_i$ τη σχετική θέση της κλάσης i στην κατάταξη ($r_0 = 0$), η σημαντικότητα των κριτηρίων στην κλάση αυτή προσδιορίζεται ως εξής:

$$w_{(i)} = \frac{1}{R}\sum_{k=i}^{R}\frac{1}{r_k}$$

Εάν θεωρηθεί ότι είναι γνωστή η κατάταξη των κριτηρίων με βάση τη σημαντικότητά τους, χωρίς όμως να υπάρχει καμία επιπλέον πληροφορία για τα ακριβή τους βάρη, τότε αυτά μπορούν να θεωρηθούν ότι προκύπτουν από την ομοιόμορφη κατανομή έτσι ώστε $w_1, w_2, ..., w_n \geq 0$ και $\sum_i w_{(i)} = 1$, όπου ως $w_{(i)}$ συμβολίζεται το βάρος του i-οστού κατά σειρά σημαντικότητας κριτηρίου. Έτσι λοιπόν με δύο κριτήρια και χωρίς πληροφορία το πολύτοπο των βαρών βρίσκεται μεταξύ των σημείων (1,0) και (0,1). Όλα τα σημεία αυτής της γραμμής έχουν συντεταγμένες που αθροίζουν στη μονάδα – π.χ (1/3,2/3). Στην περίπτωση που υπάρχουν δύο κριτήρια (n=2), η κατάταξη τους $w_{(1)} \geq w_{(2)}$ σημαίνει ότι $0.5 \leq w_{(1)} \leq 1$. Επομένως αφού δεν υπάρχει καμία άλλη πληροφορία για τη σημαντικότητα των κριτηρίων εκτός από την κατάταξη τους, μπορεί να θεωρηθεί ότι ο συντελεστής στάθμισης του πρώτου κατά σειρά προτίμησης κριτηρίου ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0.5,1]. Οπότε η αναμενόμενη σημαντικότητα του κριτηρίου αυτού είναι $w_{(1)} = 0.75$ και επομένως $w_{(2)} = 0.25$. Αντίστοιχα, στην περίπτωση τριών κριτηρίων, η κατάταξη $w_{(1)} \geq w_{(2)} \geq w_{(3)}$ σημαίνει ότι το σύνολο των αποδεκτών (εφικτών) συντελεστών στάθμισης διαμορφώνεται από το πολύτοπο που οριοθετείται από τρία σημεία τα οποία είναι τα (1,0,0),(0.5,0.5,0),(1/3,1/3,1/3). Το κεντροειδές του πολύτοπου αυτού είναι ($w_{(1)}, w_{(2)}, w_{(3)}$)=(0.6111,0.2778,0.1111) και προσδιορίζει την αναμενόμενη σημαντικότητα των κριτηρίων, θεωρώντας ότι οι συντελεστές στάθμισης των κριτηρίων κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στο πολύτοπο.

Δύο σημεία που θα πρέπει να τονιστούν ιδιαίτερα στην περίπτωση των ROC βαρών είναι:

- Η συγκεκριμένη διαδικασία αποδίδει υψηλή βαρύτητα στα κριτήρια που κατατάσσονται στις πρώτες θέσεις σημαντικότητας.
- Τα βάρη ROC εξαρτώνται μόνο από την κατάταξη των κριτηρίων όταν δεν υπάρχει κάποια ακριβή πληροφορία για τις τιμές τους.

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα βάρη ROC για τις διάφορες κλάσεις n.

Πίνακας 1: Βάρη ROC για διάφορα n

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w(1)	0.7500	0.6111	0.5208	0.4567	0.4083	0.3704	0.3397	0.3143	0.2929
w(2)	0.2500	0.2778	0.2708	0.2567	0.2417	0.2276	0.2147	0.2032	0.1929
w(3)		0.1111	0.1458	0.1567	0.1583	0.1561	0.1522	0.1477	0.1429
w(4)			0.0625	0.0900	0.1028	0.1085	0.1106	0.1106	0.1096
w(5)				0.0400	0.0611	0.0728	0.0793	0.0828	0.0846
w(6)					0.0278	0.0442	0.0543	0.0606	0.0646
w(7)						0.0204	0.0335	0.0421	0.0476
w(8)							0.0156	0.0262	0.0336
w(9)								0.0123	0.0211
w(10)									0.0100

2.3.1.2 Βάρη RS (Rank Sum)

Οι Einhorn και McCoach (1977) και οι Stillwell et al (1981) ανέπτυξαν μία άλλη διαδικασία εκτίμησης της σημαντικότητας των κριτηρίων η οποία οδηγεί στον υπολογισμό των βαρών rank-sum (RS). Η συγκεκριμένη διαδικασία προσέγγισης των βαρών έχει προέλθει από μία παραλλαγή των βαρών ROC. Στη συγκεκριμένη διαδικασία ο καθορισμός της σημαντικότητας των κριτηρίων γίνεται ανάλογα με τη σχετική τους θέση στην κατάταξη. Έστω λοιπόν ότι οι συντελεστές σημαντικότητας $w_1, w_2, ..., w_n$ κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα $[a,b]$ όπου $b > a \geq 0$. Εάν γίνει η κατάταξη των κριτηρίων με βάση τη σημαντικότητά τους, τότε θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν κριτήρια ίδιας σημαντικότητας, το αναμενόμενο βάρος του i-οστού κατά σειρά σημαντικότητας κριτηρίου είναι:

$$E[w_{(i)}] = \frac{n+1-i}{n+1}(b-a)$$

και το αναμενόμενο άθροισμα των βαρών είναι:

$$\sum_{k=1}^{n} E[w_{(k)}] = \frac{n}{2}(b-a)$$

Κανονικοποιώντας λοιπόν τα βάρη έτσι ώστε να αθροίζουν στη μονάδα, προκύπτει ότι το βάρος του i-οστού κατά σειρά σημαντικότητας κριτηρίου είναι:

$$w_{(i)} = \frac{E[w_{(i)}]}{\sum_{k=1}^{n} E[w_{(i)}]} = \frac{n+1-i}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}$$

Ο παρανομαστής στην παραπάνω σχέση είναι το άθροισμα των κατατάξεων, ενώ ο αριθμητής προσδιορίζει τη θέση του i-οστού κατά σειρά σημαντικότητας κριτηρίου στην κατάταξη. Στην περίπτωση όπου η κατάταξη διαμορφώνεται από R κλάσεις ισοδυναμίας, το αναμενόμενο βάρος των κριτηρίων στην κλάση ισοδυναμίας i είναι :

$$w_{(i)} = \frac{R+1-i}{\sum_{i=1}^{R}(R+1-i)n_i}$$

Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας με τα RS βάρη.

Πίνακας 2: Βάρη RS για διάφορα n

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$w_{(1)}$	0.6667	0.5000	0.4000	0.3333	0.2857	0.2500	0.2222	0.2000	0.1818
$w_{(2)}$	0.3333	0.3333	0.3000	0.2667	0.2381	0.2143	0.1944	0.1778	0.1636
$w_{(3)}$		0.1667	0.2000	0.2000	0.1905	0.1786	0.1667	0.1556	0.1455
$w_{(4)}$			0.1000	0.1333	0.1429	0.1429	0.1389	0.1333	0.1273
$w_{(5)}$				0.0667	0.0952	0.1071	0.1111	0.1111	0.1091
$w_{(6)}$					0.0476	0.0714	0.0833	0.0889	0.0909
$w_{(7)}$						0.0357	0.0556	0.0667	0.0727
$w_{(8)}$							0.0278	0.0444	0.0545
$w_{(9)}$								0.0222	0.0364
$w_{(10)}$									0.0182

Θα πρέπει να τονιστεί ότι τα βάρη RS όπως προκύπτει από τους παραπάνω πίνακες είναι πιο ισορροπημένα σε σχέση με τα βάρη ROC. Για παράδειγμα στα 3 κριτήρια τα ROC βάρη είναι τα (0.6111,0.2778,0.1111) και τα αντίστοιχα βάρη RS είναι (0.5000,0.3333,0.1667). Μία επιλογή λοιπόν μεταξύ RS και ROC βαρών εξαρτάται σε ένα μέρος από τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα στα πραγματικά και όσο μεγαλύτερη αξία δίνεται στα πρώτα κριτήρια τόσο πιο ελκυστικά γίνονται τα ROC βάρη.

2.3.1.3 Βάρη RR (Reciprocal Rank)

Μία ακόμη διαδικασία εκτίμησης της σημαντικότητας των κριτηρίων είναι και τα βάρη Reciprocal Rank (RR) σύμφωνα με τους Roberts και Goodwin (2002). Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιεί αμοιβαίες κατατάξεις οι οποίες κανονικοποιούνται διαιρώντας κάθε μία με το άθροισμα των επιλογών. Ο τύπος δηλαδή των βαρών είναι:

$$w_{(i)}(RR) = \frac{\frac{1}{i}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}}$$

Ο πίνακας 3 παρουσιάζει με τις τιμές που λαμβάνουν τα βάρη RR ανάλογα με το πλήθος των κριτηρίων.

Πίνακας 3: Βάρη RR για διάφορα n

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$w_{(1)}$	0.6667	0.5455	0.4800	0.4379	0.4082	0.3857	0.3679	0.3535	0.3414
$w_{(2)}$	0.3333	0.2727	0.2400	0.2190	0.2041	0.1928	0.1840	0.1767	0.1707
$w_{(3)}$		0.1818	0.1600	0.1460	0.1361	0.1286	0.1226	0.1178	0.1138
$w_{(4)}$			0.1200	0.1095	0.1020	0.0964	0.0920	0.0884	0.0854
$w_{(5)}$				0.0876	0.0816	0.0771	0.0736	0.0707	0.0682
$w_{(6)}$					0.0680	0.0643	0.0613	0.0589	0.0569
$w_{(7)}$						0.0551	0.0525	0.0505	0.0488
$w_{(8)}$							0.0460	0.0442	0.0427
$w_{(9)}$								0.0393	0.0379
$w_{(10)}$									0.0341

2.3.1.4 Βάρη ROD (Rank Order Distribution)

Τα βάρη Rank Order Distribution προτάθηκαν από τους Roberts και Goodwin (2002). Για να υπολογιστούν τα συγκεκριμένα βάρη θα πρέπει να γίνει η υπόθεση ότι όλα τα κριτήρια έχουν κάποια σημαντικότητα, κάτι το οποίο σημαίνει ότι για τα βάρη θα ισχύει $w_1^* = 100$, $0 < w_2^* \leq 100$, $0 < w_3^* \leq w_2^*$ και γενικά $0 < w_i^* \leq w_{i-1}^*$. Συγκεκριμένα στην περίπτωση δύο κριτηρίων γίνεται η υπόθεση $w_1^* = 100$ και επιπλέον $w_2^* : U(0,100)$. Στη συνέχεια κανονικοποιούνται τα βάρη και ισχύουν τα εξής:

$w_1^* = 100/(100 + w_2^*)$ και $w_2^* = w_2^*/(100 + w_2^*)$ τα οποία δίνουν την παρακάτω κατάταξη:

$E(w_1) = \int_0^{100} 1/(100 + w_2^*)dw_2^* = [\log_e(100 + w_2^*)]_0^{100} = 0.693$ και παρόμοια για το w_2^* προκύπτει $E(w_2) = 0.307$. Η συγκεκριμένη διαδικασία εύρεση των βαρών ROD, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο υπολογισμός τους στην περίπτωση πολλών κριτηρίων είναι επίπονος λόγω της πολυπλοκότητας και της δυσκολίας υπολογισμού των πράξεων.

Ανάλογα προκύπτουν και τα υπόλοιπα βάρη που παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4: Βάρη ROD για διάφορα n

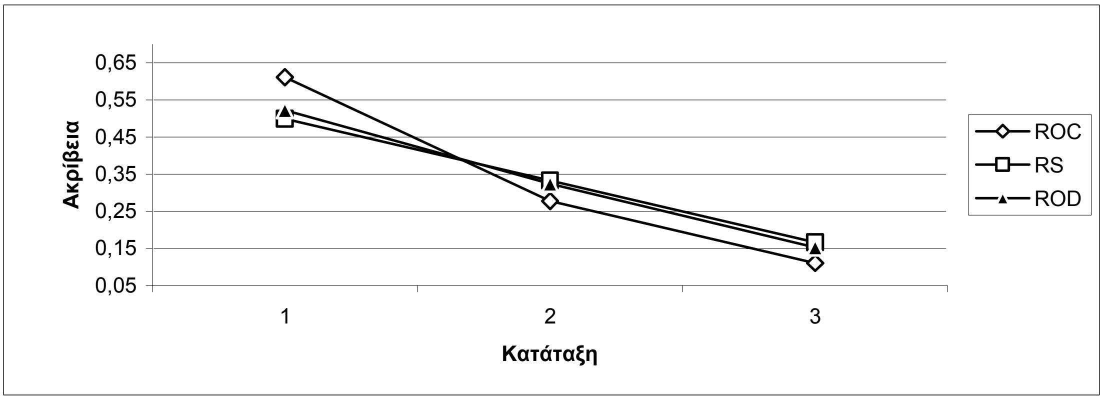
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W(1)	0.6932	0.5232	0.4180	0.3471	0.2966	0.2590	0.2292	0.2058	0.1867
W(2)	0.3068	0.3240	0.2986	0.2686	0.2410	0.2174	0.1977	0.1808	0.1667
W(3)		0.1528	0.1912	0.1955	0.1884	0.1781	0.1672	0.1565	0.1466
W(4)			0.0922	0.1269	0.1387	0.1406	0.1375	0.1332	0.1271
W(5)				0.0619	0.0908	0.1038	0.1084	0.1095	0.1081
W(6)					0.0445	0.0674	0.0805	0.0867	0.0893
W(7)						0.0334	0.0531	0.0644	0.0709
W(8)							0.0263	0.0425	0.0527
W(9)								0.0211	0.0349
W(10)									0.0173

2.3.2 Συγκρίσεις Βαρών

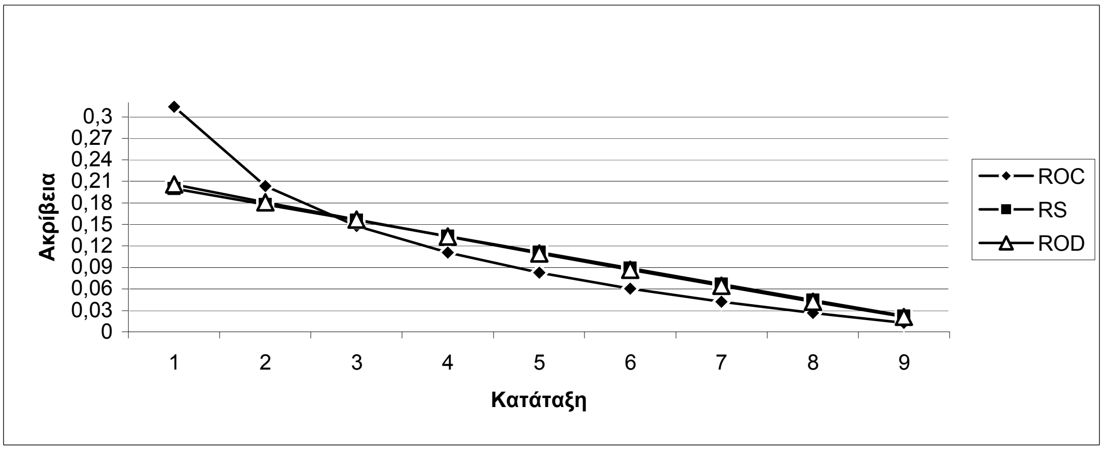
Στην συγκεκριμένη ενότητα γίνεται μία σύγκριση των βαρών που παρουσιάστηκαν παραπάνω, και καταγράφονται ορισμένες έρευνες που έχουν γίνει στο συγκεκριμένο αντικείμενο.

Η έρευνα των Roberts και Goodwin (2002), οι οποίοι πραγματοποίησαν προσομοίωση, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα βάρη ROC είναι τα πιο ακριβή.

Συγκεκριμένα στο σχήμα 9 που ακολουθεί παρουσιάζεται μία σύγκριση των βαρών ROC,RS και ROD για την περίπτωση που υπάρχουν 3 κριτήρια, ενώ στο σχήμα 10 για 9 κριτήρια.



Σχήμα 9: Σύγκριση βαρών για τρία κριτήρια



Σχήμα 10: Σύγκριση βαρών για εννέα κριτήρια

Οι Roberts και Goodwin (2002) κατέληξαν στα συμπεράσματα που ακολουθούν, τα οποία επιβεβαιώνονται από τα σχήματα 9 και 10.

- Μεταξύ των βαρών ROD και ROC υπάρχει μία στενή αντιστοιχία αφού οι τιμές τους είναι σχετικά ίδιες.
- Τα βάρη ROD τείνουν προς τα RS καθώς ο αριθμός των κριτηρίων αυξάνει.

- Τα βάρη ROD είναι δύσκολο να υπολογιστούν για πολλά κριτήρια, επομένως μία λύση είναι σε αυτές τις περιπτώσεις να χρησιμοποιούνται βάρη RS. Αντίθετα τα βάρη ROC απομακρύνονται από τα RS και τα ROD.
- Τα βάρη ROC είναι πιο «ακραία» διότι η αναλογία των υψηλότερων βαρών σε σχέση με τα χαμηλότερα είναι τόσο μεγάλη ώστε τα λιγότερα σημαντικά κριτήρια έχουν μόνο μία οριακή επιρροή στην απόφαση. Το συγκεκριμένο πρόβλημα λύνεται με τη χρήση των βαρών ROD. Για παράδειγμα στην περίπτωση των 3 κριτηρίων η αναλογία βαρών w_1 με w_2 είναι 3.4 στην περίπτωση των ROD και όχι 5.5 όπως είναι στα ROC βάρη. Στην περίπτωση των πέντε κριτηρίων η αναλογία w_1 με w_5 είναι 5.6 έναντι 11.6 για τα βάρη ROC.

Οι Belton και Stewart (2002) τόνισαν ότι όποια αναλογία είναι πάνω από 5 τότε τα λιγότερο σημαντικά κριτήρια σχεδόν πάντα καθορίζονται από τα άλλα κριτήρια. Από τα παραπάνω λοιπόν προκύπτει ότι γενικά τα βάρη ROC είναι τα καλύτερα συμπληρωματικά βάρη για χρήση point allocation μεθόδων ενώ τα ROD είναι τα καλύτερα για μεθόδους direct rating.

Οι Jia et al (1998) κατέληξαν στα εξής αποτελέσματα όσον αφορά τη σύγκριση των βαρών:

- Τα βάρη ROC δεν είναι πάντα καλύτερα από τα RS. Οι δύο παράγοντες που καθορίζουν ποια μέθοδος είναι καλύτερη κάθε φορά είναι οι εξής:
  - Αν η πληροφορία για τα βάρη είναι αρκετά περιορισμένη, τότε τα RS είναι καλύτερα.
  - Η επιλογή της διαδικασίας εκτίμησης βαρών εξαρτάται από τις τιμές των πραγματικών βαρών. Όσο πιο ανομοιόμορφα είναι τα πραγματικά βάρη

τότε τα ROC δίνουν καλύτερες τιμές στα πιο σημαντικά κριτήρια σε σχέση με τα βάρη RS.

2.4 Εντροπία ως Μέτρο Σημαντικότητας

Μία εναλλακτική διαδικασία σε σχέση με τις προηγούμενες δύο πιθανοθεωρηρικές μεθοδολογίες είναι ο προσδιορισμός της σημαντικότητας των κριτηρίων λαμβάνοντας υπόψη την πληροφορία που παρέχει στην περιγραφή ενός συνόλου εναλλακτικών. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα λήψης αποφάσεων, η σημαντικότητα ενός κριτηρίου είναι συνάρτηση, τόσο των προτιμήσεων του αποφασίζοντα όσο και της πληροφορίας που παρέχει στην αξιολόγηση. Παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση στην οποία, ένα κριτήριο ο αποφασίζοντας θεωρεί σημαντικό, μπορεί να μην είναι χρήσιμο σε μία συγκεκριμένη αξιολόγηση εάν όλες οι εναλλακτικές έχουν περίπου ταυτόσημες επιδόσεις σε αυτό. Αντίθετα ένα κριτήριο που ο αποφασίζοντας θεωρεί λιγότερο σημαντικό μπορεί να είναι ιδιαίτερα ουσιαστικό για την αξιολόγηση εάν οι εναλλακτικές παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές ως προς τις επιδόσεις τους στο κριτήριο.

Ένα από τα σημαντικότερα μέτρα πληροφορίας είναι η εντροπία. Θεωρώντας μία τυχαία μεταβλητή X οι τιμές της οποίας ανήκουν στο σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, η εντροπία ορίζεται ως εξής:

$$H(X) = -K\sum_{i=1}^{m} p(x_i)\ln p(x_i)$$

όπου K>0 είναι μία σταθερά που προσδιορίζει την κλίμακα της μέτρησης και $p(x_i)=\Pr(X=x_i)$ είναι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει την τιμή x_i. Στην παραπάνω σχέση παρουσιάζεται το $H(X)_{\max} = \ln(m)$ όταν όλες οι πιθανότητες έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή όταν $p_i = 1/m$ και το $H(X)_{\min} = 0$ όταν μία πιθανότητα έχει τιμή ίση με τη μονάδα. Σημαντικό είναι ότι όσο μεγαλύτερη είναι η εντροπία, τόσο θεωρείται ότι αυξάνει η αβεβαιότητα για την τυχαία μεταβλητή X.

Η εντροπία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη μέτρηση της πληροφορίας που παρέχει κάθε κριτήριο σε μια διαδικασία αξιολόγησης ενός συνόλου εναλλακτικών. Έστω λοιπόν ένα σύνολο m εναλλακτικών δραστηριοτήτων, οι επιδόσεις των οποίων σε κάποιο κριτήριο x_j είναι x_{1j}, x_{2j},…,x_{mj},με $0 \le x_{ij} \le 1$. Η εντροπία του κριτηρίου x_j, σύμφωνα με τον Zeleny (1982) είναι :

$$H(x_j) = -\frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{D_j} \ln \frac{x_{ij}}{D_j}$$

με το άθροισμα των επιδόσεων να είναι ίσο με $D_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$. Όσο μεγαλύτερη είναι η εντροπία του κριτηρίου x_j τόσο μικρότερη πληροφορία παρέχει στην περιγραφή και αξιολόγηση των εναλλακτικών. Βάσει του συγκεκριμένου μέτρου εντροπίας, η σημαντικότητα ενός κριτηρίου x_j ανάλογα με την πληροφορία που παρέχει μπορεί να υπολογιστεί από τον παρακάτω τύπο:

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{n-h}[1 - H(x_j)]$$

όπου $h = \sum_{j=1}^{n} H(x_j)$ είναι η συνολική εντροπία των κριτηρίων. Όταν δεν υπάρχει καμία άλλη πληροφορία για τη σημαντικότητα των κριτηρίων, το παραπάνω μέτρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια εκτίμηση των βαρών. Εάν αντίθετα υπάρχει κάποια επιπλέον εκτίμηση για τα βάρη των κριτηρίων (χρησιμοποίηση των μεθόδων ROC, RS, ROD κ.τ.λ), μπορεί να γίνει μια συνολική εκτίμηση λ_j για τη σημαντικότητα κάθε κριτηρίου x_j λαμβάνοντας υπόψη τόσο το βάρος w_j που αποδίδει σε αυτό ο αποφασίζοντας $(w_1, w_2, ..., w_n \geq 0, w_1 + w_2 + ... + w_n = 1)$, όσο και την παρακάτω εκτίμηση που παρέχει :

$$\lambda_j = \frac{\tilde{\lambda}_j w_j}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j w_j}$$

Έχουν διατυπωθεί διάφορες απόψεις για την εντροπία. Συγκεκριμένα έχει αναφερθεί ότι αποτελεί ένα μέτρο της ανομοιογένειας της κατανομής (Jessop,1999). Υπάρχουν διάφορα τέτοια μέτρα αλλά η εντροπία βασίζεται σε αξιωματικές αρχές. Σύμφωνα με τον Shannon (1948) υπάρχουν τρία αξιώματα τα οποία είναι βασικά:

- Η εντροπία αλλάζει ομαλά όπως αλλάζουν οι τιμές των βαρών και των πιθανοτήτων.
- Για ομοιόμορφες κατανομές η εντροπία αυξάνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των όρων.
- Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$H(p_1, p_{2,} p_3) = H[p_1, (p_2 + p_3)] = (p_2 + p_3) H[p_2 / (p_2 + p_3), p_3 / (p_2 + p_3)]$$

Η σχέση αυτή περιγράφει την ιεραρχική ανάπτυξη των κριτηρίων και των αντίστοιχων βαρών (Yoon και Hwang, 1995 και τον Suh, 1990).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΒΑΡΩΝ

Στόχος της συγκεκριμένης εργασίας είναι να γίνει μία αξιολόγηση των διαδικασιών εκτίμησης βαρών. Δηλαδή να παρουσιαστούν και να συγκριθούν διάφορες μέθοδοι εκτίμησης βαρών στηριζόμενες στον εντοπισμό βαρών όπως τα ROC, RS αλλά και το μέτρο πληροφορίας εντροπία. Η ανάλυση βασίζεται σε μία προσομοίωση Monte Carlo, η οποία βοηθά στην εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για την αποτελεσματικότητα των μεθόδων. Στην ανάλυση εξετάζονται διάφορα μοντέλα πολυκριτήριας ανάλυσης, όπως το μοντέλο του σταθμισμένου μέσου όρου, η πολλαπλασιαστική συνάρτηση αξιών και η μέθοδος PROMETHEE.

3.1 Πειραματικός Σχεδιασμός

Η πειραματική διαδικασία χωρίζεται σε δύο βασικά πειράματα. Το πρώτο πείραμα αφορά τις περιπτώσεις στις οποίες ο αποφασίζοντας έχει μία σαφή εικόνα για την κατάταξη των κριτηρίων ως προς τη σημαντικότητά τους, δηλαδή δεν συμπεριλαμβάνεται ο παράγοντας λάθους. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη πληροφορία και με διαδικασίες που αναλύονται παρακάτω αξιολογείται ποια μέθοδος είναι πιο αξιόπιστη στην επιλογή της καλύτερης εναλλακτικής. Το δεύτερο πείραμα αφορά τις περιπτώσεις στις οποίες ο αποφασίζοντας δεν είναι σίγουρος για την κατάταξη των κριτηρίων ως προς την σημαντικότητα. Η παραπάνω διαδικασία πραγματοποιείται 1000 φορές για κάθε μία από τις περιπτώσεις που υπάρχουν 3, 6, 9 κριτήρια και 5, 10, 15, 20 εναλλακτικές και σε όλους τους συνδυασμούς μεταξύ τους.

Τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την πραγματοποίηση των συγκεκριμένων πειραμάτων σε κάθε μία από τις 1000 επαναλήψεις σύμφωνα και με τους Jia et al. (1998), είναι τα ακόλουθα:

Βήμα 1^{o}: Παραγωγή δεδομένων.

Παράγεται ένας πίνακας με τις επιδόσεις των εναλλακτικών στα κριτήρια, χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1]. Οι επιδόσεις των εναλλακτικών προσαρμόζονται στη συνέχεια χρησιμοποιώντας μία γραμμική κανονικοποίηση:

$$v_i(x_i) = (x_i - x_{i,\min}) / (x_{i,\max} - x_{i,\min})$$

όπου $x_{i,\min}$ και $x_{i,\max}$ είναι η μικρότερη και η μέγιστη τιμή στο κριτήριο i, αντίστοιχα.

Εκτός αυτής της γραμμικής κανονικοποίησης, εξετάζεται και μια μη γραμμική κανονικοποίηση της μορφής:

$$v_i(x_i) = \frac{1 - \exp(x_i a_i)}{1 - \exp(a_i)}$$

όπου a_i είναι μια τυχαία παράμετρος η απόλυτη τιμή της οποίας κυμαίνεται στο διάστημα [3, 7]. Θετικές τιμές της παραμέτρου οδηγούν σε ένα κυρτό μετασχηματισμό των δεδομένων, ενώ αρνητικές τιμές αντιστοιχούν σε ένα κοίλο μετασχηματισμό. Με το μετασχηματισμό αυτό, οι επιδόσεις των εναλλακτικών στα κριτήρια δεν κατανέμονται πλέον ομοιόμορφα στο διάστημα [0, 1]. Συγκεκριμένα, για $a_i > 0$ η κατανομή των επιδόσεων των εναλλακτικών στο κριτήριο i παρουσιάζει ασυμμετρία προς χαμηλότερες τιμές (δηλαδή οι περισσότερες εναλλακτικές έχουν χαμηλή επίδοση), ενώ για $a_i < 0$ η κατανομή των επιδόσεων των εναλλακτικών στο κριτήριο i παρουσιάζει ασυμμετρία προς υψηλότερες τιμές (δηλαδή οι περισσότερες εναλλακτικές έχουν υψηλή επίδοση). Όσο υψηλότερη (κατά απόλυτη τιμή) είναι η τιμή της παραμέτρου a_i τόσο μεγαλύτερη είναι η ασυμμετρία της κατανομής των επιδόσεων των εναλλακτικών στο κριτήριο i.

Βήμα 2^o: Παραγωγή πραγματικών βαρών.

Τα πραγματικά βάρη ακολουθούν μία ομοιόμορφη κατανομή στον πολύτοπο των βαρών και αυτό για τους επόμενους δύο λόγους:

- Στην ουσία τα πραγματικά βάρη είναι σπάνια γνωστά.
- Στο συγκεκριμένο πείραμα θεωρείται ως πραγματικό βάρος οποιοδήποτε πιθανό βάρος για να προκύψουν πιο αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα .

Για την παραγωγή των πραγματικών βαρών δημιουργούνται n-1 αριθμοί από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1], όπου n είναι τα κριτήρια. Στη συνέχεια κατατάσσονται οι παραπάνω αριθμοί για να χωρίσουν το διάστημα [0,1] σε υποδιαστήματα όσα είναι τα κριτήρια. Τα μήκη των συγκεκριμένων υποδιαστημάτων κατανέμονται ομοιόμορφα ώστε να αποτελέσουν τα πραγματικά βάρη $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ και να αθροίζουν στη μονάδα.

Βήμα 3^o: Εκτίμηση βαρών.

Παράγονται τα βάρη ROC, RS σύμφωνα με τους τύπους του 2^{ου} Κεφαλαίου, χρησιμοποιώντας την κατάταξη των βαρών που προέκυψαν στο προηγούμενο βήμα.

Βήμα 4^{ο}: Αξιολόγηση εναλλακτικών.

Στο τελευταίο βήμα πραγματοποιείται η αξιολόγηση των εναλλακτικών με τη χρήση των μεθόδων που προαναφέρθηκαν στο 2^{ο} Κεφάλαιο, δηλαδή του σταθμισμένου μέσου όρου, της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης και της PROMETHEE. Με βάση την αξιολόγηση κάθε μεθόδου οι εναλλακτικές κατατάσσονται από τις καλύτερες προς τις χειρότερες.

Τα ίδια βήματα ακολουθούνται και στο δεύτερο πείραμα, με τη διαφορά ότι η εκτίμηση των βαρών στο βήμα 3 προκύπτει από τα πραγματικά βάρη του 2^{ου} βήματος αλλά μετά την εισαγωγή κάποιου «θορύβου», ο οποίος αναπαριστά την αβεβαιότητα του αποφασίζοντα στην ιεράρχηση των κριτηρίων ως προς τη σημαντικότητά τους. Στόχος του δεύτερου αυτού πειράματος είναι να εξεταστούν περιπτώσεις όπου ο αποφασίζοντας δεν μπορεί να μεταφέρει με ακρίβεια την πληροφορία που απαιτείται στον αναλυτή για τον καθορισμό της σημαντικότητας των κριτηρίων. Θεωρείται λοιπόν ότι ο αποφασίζοντας έχει διαμορφώσει (ασυνείδητα) ένα διάνυσμα βαρών $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, αλλά οι πληροφορίες που παρέχει στον αναλυτή οδηγούν σε ένα διαφορετικό σύνολο βαρών $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \neq \boldsymbol{\omega}$, με βάση το οποίο ο αναλυτής διαμορφώνει την πρότασή του προς τον αποφασίζοντα. Η διαφοροποίηση αυτή, όπως είναι φυσικό, θα οδηγήσει σε μια αξιολόγηση η οποία δεν θα συμβαδίζει απόλυτα με το σύστημα προτιμήσεων και αξιών του αποφασίζοντα.

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία των Jia et al. (1998), για τη μοντελοποίηση της αβεβαιότητας του αποφασίζοντα στον καθορισμό της πραγματικής σημαντικότητας των κριτηρίων, θεωρείται ότι τα βάρη των κριτηρίων ακολουθούν την πολυδιάστατη κατανομή Dirichlet. Σύμφωνα με τους Jia et al. (1998) η υιοθέτηση της μοντελοποίησης αυτής παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα:

1. Η οριακή συνάρτηση πυκνότητας του βάρους κάθε κριτηρίου ακολουθεί την κατανομή Beta με μέσο όρο ίσο με το πραγματικό βάρος του κριτηρίου. Έτσι είναι δυνατή η ανάλυση της επίδρασης που έχει η εισαγωγή κάποιου σφάλματος κατά τον προσδιορισμό των βαρών, χρησιμοποιώντας όμως μια αμερόληπτική εκτίμηση των βαρών.
2. Δεδομένου ότι η κατανομή Beta ορίζεται στο διάστημα (0, 1), τα βάρη παράγονται έτσι ώστε $0 \leq w_i \leq 1$. Επιπλέον, η χρήση της κατανομής Dirichlet διασφαλίζει ότι τα παραγόμενα βάρη των κριτηρίων αθροίζουν στη μονάδα.
3. Η κατανομή Beta επιτρέπει την ικανοποιητική μοντελοποίηση της αβεβαιότητας κατά τον καθορισμό των βαρών. Στην περίπτωση κριτηρίων χαμηλής σημαντικότητας, η κατανομή Beta παρουσιάζει ασυμμετρία προς χαμηλές τιμές, δηλαδή υπάρχει ένα ευρύ πεδίο υψηλών τιμών (σημαντική απόκλιση από τα πραγματικά βάρη) που εξετάζονται με μικρή συχνότητα. Αντίθετα, για κριτήρια υψηλής σημαντικότητας υπάρχει ασυμμετρία προς υψηλές τιμές, δηλαδή υπάρχει ένα ευρύ πεδίο χαμηλών τιμών (σημαντική απόκλιση από τα πραγματικά βάρη) που εξετάζονται με μικρή συχνότητα.
4. Τέλος, το άθροισμα των παραμέτρων της κατανομής Dirichlet συνδέεται με το μέγεθος του σφάλματος κατά τον καθορισμό της σημαντικότητας των κριτηρίων. Όσο μεγαλύτερο είναι το άθροισμα αυτό, τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα.

Για την παραγωγή των τυχαίων βαρών από την πολυδιάστατη κατανομή Dirichlet ακολουθείται η ακόλουθη διαδικασία: Αρχικά παράγονται *n* τυχαίοι αριθμοί από την κατανομή γάμα $r_i \sim \Gamma(\omega_i, \lambda)$, όπου ω_i είναι το πραγματικό βάρος του κριτηρίου i και λ είναι η παράμετρος που καθορίζει την ακρίβεια των παραγόμενων βαρών (άθροισμα των παραμέτρων της κατανομής Dirichlet). Όσο υψηλότερη είναι η τιμή της παραμέτρου αυτής, τόσο μικρότερη είναι η διακύμανση γύρω από την αναμενόμενη τιμή $E(r_i) = \lambda\omega_i$. Έχοντας παράγει τους τυχαίους αριθμούς $r_1, r_2,, \ldots, r_n$, τα τυχαία βάρη προκύπτουν από κανονικοποίηση, ώστε να αθροίζουν στη μονάδα, δηλαδή $w_i = r_i / (r_1 + \cdots + r_n)$. Το διάνυσμα των βαρών που διαμορφώνεται με τον τρόπο αυτό ακολουθεί την πολυδιάστατη κατανομή Dirichlet με μέση τιμή $E(w_i) = \omega_i$.

3.2 Αποτελέσματα

Στη συγκεκριμένη παράγραφο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εκτέλεση των πειραμάτων. Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων πραγματοποιείται βάσει της ακρίβειας στην επιλογή της καλύτερης εναλλακτικής. Όπως προαναφέρθηκε, αρχικά γίνεται η αξιολόγηση των εναλλακτικών μέσω ενός μοντέλου σύνθεσης των κριτηρίων (σταθμισμένος μέσος, πολλαπλασιαστική συνάρτηση, PROMETHEE), αποδίδοντας στα κριτήρια τα πραγματικά τους βάρη $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ και καταγράφεται η εναλλακτική η οποία θεωρείται καλύτερη με βάση το σύστημα προτιμήσεων και αξιών του αποφασίζοντα. Στη συνέχεια η αξιολόγηση επαναλαμβάνεται χρησιμοποιώντας τα εκτιμώμενα βάρη $w_1, w_2, \ldots, w_n$ και ελέγχεται εάν οι δύο αξιολογήσεις ταυτίζονται ως προς την καλύτερη εναλλακτική. Τελικά, η ακρίβεια ορίζεται ως ποσοστό των επαναλήψεων του πειράματος (1000 επαναλήψεις), στις οποίες παρατηρείται συμφωνία μεταξύ της πραγματικής και της εκτιμώμενης αξιολόγησης. Σύμφωνα με τους Jia et al. (1998) το κριτήριο αυτό παρουσιάζει υψηλή συσχέτιση με το δείκτη τ του Kendall.

3.2.1 Ακριβής Προσδιορισμός της Σημαντικότητας των Κριτηρίων

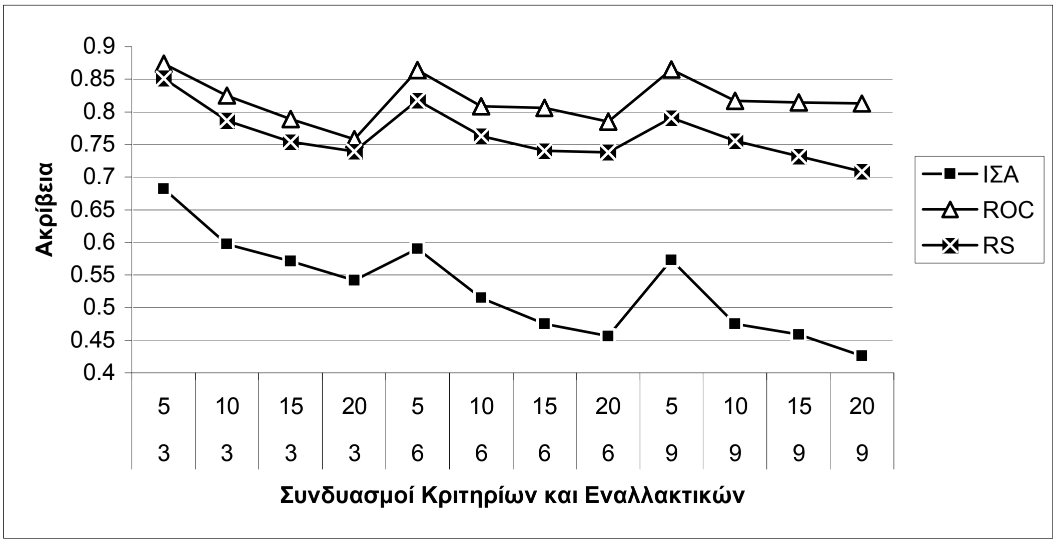
3.2.1.1 Σταθμισμένος Μέσος Όρος

Στη συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του πρώτου πειράματος στην περίπτωση εφαρμογής του σταθμισμένου μέσου όρου. Εκτός των αποτελεσμάτων για τα εκτιμώμενα βάρη που προκύπτουν από τις διαδικασίες ROC και RS, καταγράφονται επιπλέον τα αποτελέσματα (ακρίβεια επιλογής της καλύτερης εναλλακτικής) στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούνται τα πραγματικά βάρη, στην περίπτωση όπου τα κριτήρια θεωρούνται ισοβαρή, καθώς και στην περίπτωση όπου οι εκτιμήσεις των διαδικασιών ROC και RS βασίζονται σε τυχαία βάρη τα οποία δεν παρουσιάζουν καμία συσχέτιση με τα πραγματικά. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 5.

Πίνακας 5: Αποτελέσματα 1ου πειράματος - σταθμισμένος μέσος όρος

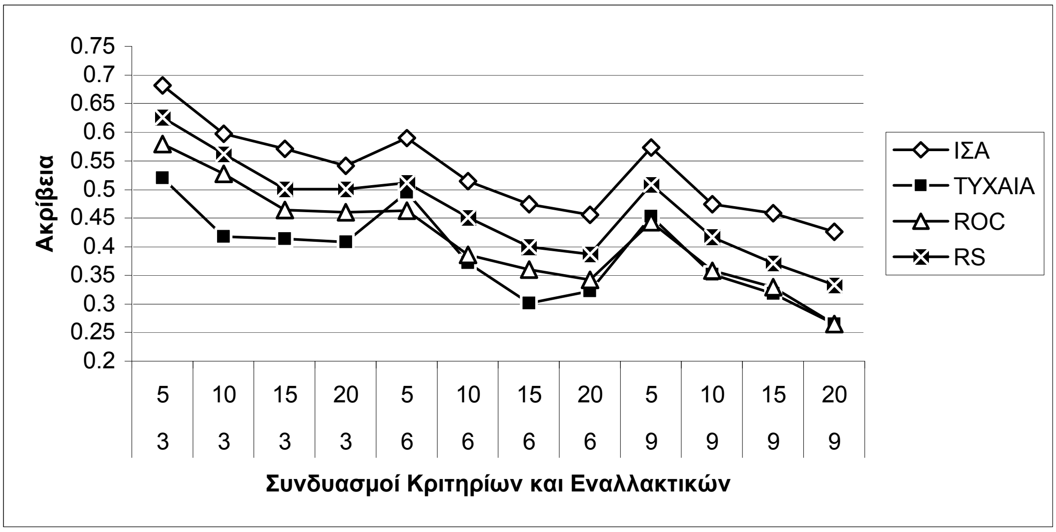
Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Πραγματικά βάρη	Ίσα βάρη	ROC βάρη	RS βάρη	Τυχαία Βάρη	ROC-τυχαία βάρη	RS-τυχαία βάρη
3	5	1	0,682	0,874	0,851	0,52	0,58	0,626
3	10	1	0,597	0,825	0,787	0,418	0,528	0,562
3	15	1	0,571	0,789	0,754	0,414	0,464	0,501
3	20	1	0,542	0,758	0,739	0,408	0,461	0,501
6	5	1	0,59	0,864	0,818	0,495	0,463	0,512
6	10	1	0,515	0,809	0,763	0,372	0,386	0,451
6	15	1	0,475	0,806	0,74	0,301	0,36	0,4
6	20	1	0,456	0,785	0,738	0,323	0,342	0,387
9	5	1	0,573	0,865	0,791	0,453	0,443	0,509
9	10	1	0,475	0,817	0,756	0,352	0,358	0,417
9	15	1	0,459	0,814	0,732	0,318	0,329	0,371
9	20	1	0,426	0,813	0,708	0,265	0,265	0,333

Στις στήλες 3 μέχρι 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα όταν τα πραγματικά βάρη είναι γνωστά με ακρίβεια, γιαυτό και η στήλη «Πραγματικά βάρη» είναι ίση με τη μονάδα. Από τις 3 επόμενες στήλες παρατηρείται ότι τα βάρη ROC δίνουν τα καλύτερα αποτελέσματα, ενώ τα ίσα βάρη δίνουν τα χειρότερα αποτελέσματα. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 11:



Σχήμα 11: Αποτελέσματα 1ου πειράματος σταθμισμένου μέσου όρου για γνωστά πραγματικά βάρη

Από τον παραπάνω πίνακα και το σχήμα παρατηρείται το πλεονέκτημα των βαρών ROC εντοπίζεται κυρίως στις περιπτώσεις που ο αριθμός των κριτηρίων είναι μεγάλος. Στις υπόλοιπες στήλες του πίνακα (στήλες 7, 8 και 9) παρουσιάζονται τα Τυχαία βάρη, τα βάρη ROC και RS στην περίπτωση που τα τελευταία, προκύπτουν από εντελώς τυχαία βάρη τα οποία δεν παρουσιάζουν καμία σχέση με τα πραγματικά βάρη βάσει των οποίων έγινε η αξιολόγηση των εναλλακτικών.



Σχήμα 12: Αποτελέσματα 1ου πειράματος σταθμισμένου μέσου όρου για τυχαία ανάλογα βάρη

Στο σχήμα 12 παρατηρείται ότι τα ίσα βάρη δίνουν τα καλύτερα αποτελέσματα κάτι που είναι προφανές καθώς δεν υπάρχει καμία πληροφορία για την κατάταξη των εναλλακτικών. Επίσης τα βάρη RS δίνουν καλύτερα αποτελέσματα από τα ROC.

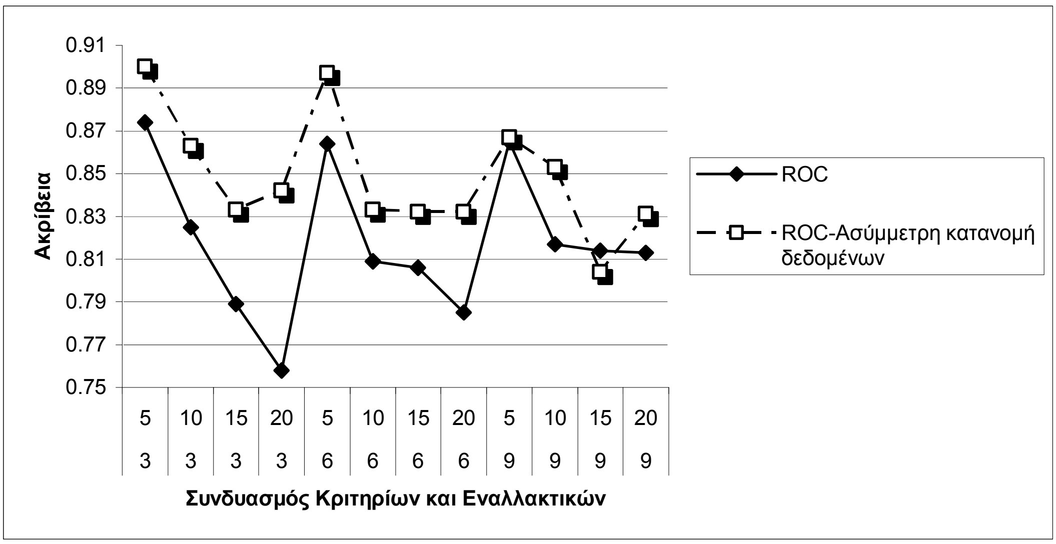
Από όλα τα παραπάνω προκύπτει επίσης ότι στην περίπτωση των τυχαίων βαρών, με την αύξηση των εναλλακτικών και των κριτηρίων, τα αποτελέσματα γίνονται χειρότερα.

Στη συνέχεια του πειράματος, στη περίπτωση όπου υπάρχει ασυμμετρία στην κατανομή των επιδόσεων των εναλλακτικών στα κριτήρια, προκύπτουν τα αποτελέσματα του πίνακα 6.

Πίνακας 6: Αποτελέσματα 1ου πειράματος - σταθμισμένος μέσος όρος –ασύμμετρη κατανομή δεδομένων

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Πραγματικά βάρη	Ίσα βάρη	ROC βάρη	RS βάρη	Τυχαία Βάρη	ROC-τυχαία βάρη	RS-τυχαία βάρη
3	5	1	0,702	0,9	0,881	0,627	0,644	0,67
3	10	1	0,682	0,863	0,852	0,579	0,6	0,629
3	15	1	0,629	0,833	0,833	0,534	0,544	0,583
3	20	1	0,633	0,842	0,82	0,531	0,547	0,59
6	5	1	0,585	0,897	0,821	0,456	0,477	0,507
6	10	1	0,553	0,833	0,8	0,423	0,414	0,468
6	15	1	0,514	0,832	0,773	0,359	0,365	0,416
6	20	1	0,484	0,832	0,765	0,343	0,354	0,394
9	5	1	0,598	0,867	0,813	0,474	0,469	0,546
9	10	1	0,496	0,853	0,773	0,361	0,353	0,415
9	15	1	0,449	0,804	0,728	0,347	0,345	0,407
9	20	1	0,408	0,831	0,748	0,292	0,295	0,344

Όπως φαίνεται συνεχίζεται το πλεονέκτημα των βαρών ROC έναντι των υπολοίπων στην περίπτωση των πραγματικών βαρών, ενώ στην περίπτωση των τυχαίων η κατάταξη παραμένει ίδια, με τα ίσα βάρη να είναι πρώτα και να ακολουθούν τα RS τα ROC. Επίσης οι τιμές όλων των βαρών, σχεδόν πάντα, αυξάνονται σε σχέση με το αντίστοιχο προηγούμενο πείραμα. Ακολουθεί γράφημα σύγκρισης για τα βάρη ROC το οποίο επιβεβαιώνει την παραπάνω διαπίστωση:



Σχήμα 13: Σύγκριση βαρών ROC μεταξύ των ομοιόμορφων και των ασύμμετρων δεδομένων

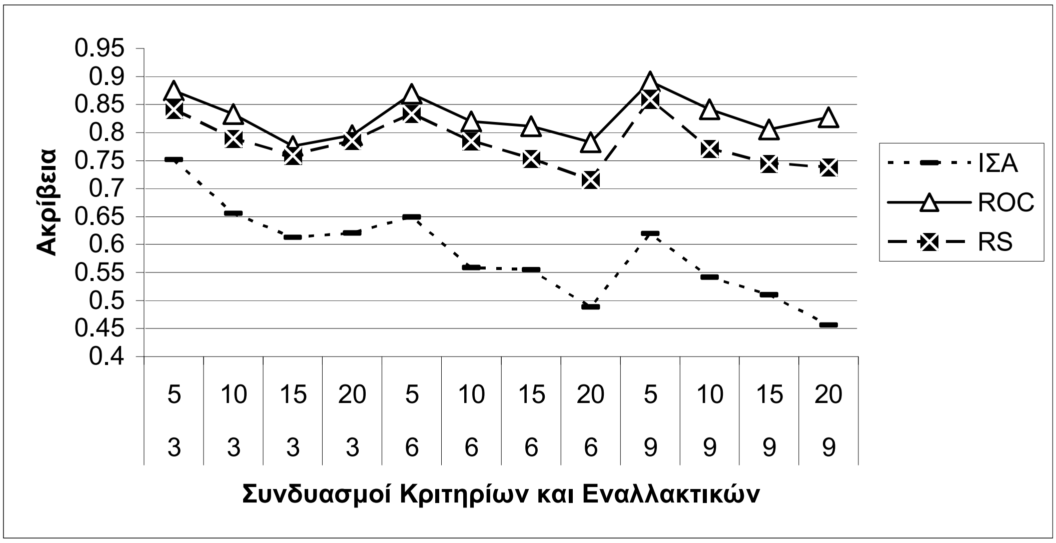
3.2.1.2 Πολλαπλασιαστική Συνάρτηση Αξιών

Στην συγκεκριμένη ενότητα πραγματοποιείται το πρώτο πείραμα αλλά οι επιδόσεις των βαρών προέρχονται μέσω του τύπου της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης όπως έχει αναφερθεί στην ενότητα 2.3.2. Πραγματοποιώντας λοιπόν το συγκεκριμένο πείραμα προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Πίνακας 7: Αποτελέσματα 1ου πειράματος - πολλαπλασιαστική συνάρτηση αξιών

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Πραγματικά βάρη	Ίσα βάρη	ROC βάρη	RS βάρη	Τυχαία Βάρη	ROC-τυχαία βάρη	RS-τυχαία βάρη
3	5	1	0,751	0,875	0,841	0,648	0,686	0,713
3	10	1	0,656	0,833	0,789	0,559	0,571	0,616
3	15	1	0,613	0,776	0,759	0,492	0,528	0,561
3	20	1	0,62	0,795	0,786	0,512	0,525	0,583
6	5	1	0,649	0,869	0,833	0,543	0,567	0,6
6	10	1	0,559	0,82	0,785	0,434	0,451	0,484
6	15	1	0,555	0,811	0,753	0,403	0,422	0,471
6	20	1	0,488	0,783	0,715	0,405	0,413	0,47
9	5	1	0,619	0,891	0,859	0,49	0,501	0,546
9	10	1	0,542	0,842	0,771	0,424	0,432	0,483
9	15	1	0,51	0,806	0,745	0,383	0,398	0,445
9	20	1	0,456	0,827	0,738	0,349	0,356	0,427

Όπως παρατηρείται και στη συγκεκριμένη μέθοδο, τα βάρη ROC είναι πιο κοντά στα πραγματικά βάρη στην περίπτωση που τα τελευταία είναι γνωστά. Στη συνέχεια ακολουθούν τα βάρη RS και τα ίσα. Το αντίστοιχο γράφημα παρουσιάζεται στο σχήμα 14:



Σχήμα 14: Αποτελέσματα 1ου πειράματος - πολλαπλασιαστικής συνάρτησης για γνωστά βάρη

Όσο αφορά τα τυχαία βάρη, η κατάταξη των βαρών που είχε διαπιστωθεί στον σταθμισμένο μέσο όρο επιβεβαιώνεται και στην πολλαπλασιαστική συνάρτηση με τα βάρη RS να προηγούνται, τα ROC να ακολουθούν και τελευταία με μικρή διαφορά από τα δεύτερα, τα τυχαία.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι και με τη μέθοδο πολλαπλασιαστικής συνάρτησης όσο αυξάνονται οι εναλλακτικές και τα κριτήρια η πιθανότητα προσδιορισμού με επιτυχία της σωστής επιλογής ελαττώνεται.

Στη συνέχεια ακολουθεί η τροποποίηση των δεδομένων για την μέθοδο της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζονται στον πίνακα 8. Παρατηρείται ότι η κατάταξη των βαρών διατηρείται και στη περίπτωση των πραγματικών και των τυχαίων βαρών.

Πίνακας 8: Αποτελέσματα 1ου πειράματος - πολλαπλασιαστικής συνάρτησης αξιών - ασύμμετρη κατανομή δεδομένων

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Πραγματικά βάρη	Ίσα βάρη	ROC βάρη	RS βάρη	Τυχαία βάρη	ROC-Τυχαία βάρη	RS-τυχαία βάρη
3	5	1	0,756	0,894	0,885	0,687	0,721	0,752
3	10	1	0,734	0,869	0,848	0,639	0,677	0,713
3	15	1	0,678	0,847	0,816	0,583	0,599	0,641
3	20	1	0,68	0,837	0,812	0,596	0,623	0,657
6	5	1	0,62	0,894	0,839	0,535	0,544	0,575
6	10	1	0,584	0,852	0,817	0,501	0,503	0,564
6	15	1	0,557	0,833	0,789	0,43	0,443	0,49
6	20	1	0,537	0,809	0,784	0,418	0,444	0,503
9	5	1	0,608	0,869	0,837	0,49	0,511	0,568
9	10	1	0,534	0,851	0,805	0,4	0,413	0,461
9	15	1	0,488	0,814	0,752	0,357	0,376	0,423
9	20	1	0,462	0,816	0,717	0,324	0,335	0,37

Από τη σύγκριση των πινάκων 7 και 8 διαπιστώνεται, όπως και στο σταθμισμένο μέσο όρο, ότι όταν οι επιδόσεις των εναλλακτικών στα κριτήρια παρουσιάζουν ασυμμετρία , η πιθανότητα σωστής επιλογής της καλύτερης εναλλακτικής αυξάνεται.

Η σύγκριση όμως των δύο παραπάνω μεθόδων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η πολλαπλασιαστική συνάρτηση, παρουσιάζει (γενικά) καλύτερη συμπεριφορά σε σχέση με τον σταθμισμένο μέσο όρο. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής το πλεονέκτημα της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης στους διάφορους τύπους βαρών κυμαίνεται από 0.3%-14% ενώ στην ασύμμετρη κατανομή, κυμαίνεται από 0.01%-18%. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην δεύτερη κατανομή και συγκεκριμένα σε ορισμένες περιπτώσεις με μεγάλο αριθμό κριτηρίων, υπερτερεί ο σταθμισμένος μέσος όρος με μικρό ποσοστό, το οποίο κυμαίνεται από 0.02%-2.3%.

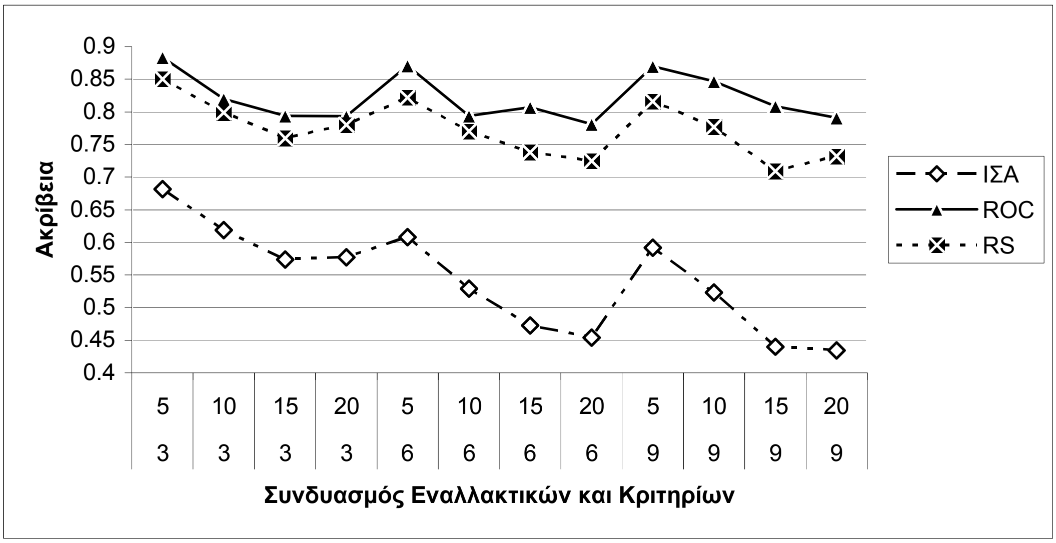
3.2.1.3 Μέθοδος PROMETHEE

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του πρώτου πειράματος με την εφαρμογή της μεθόδου PROMETHEE. Παρακάτω ακολουθεί ο πίνακας των αποτελεσμάτων και γράφημα για την περίπτωση των γνωστών βαρών.

Πίνακας 9: Αποτελέσματα 1ου πειράματος με τη μέθοδο PROMETHEE

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Πραγματικά βάρη	Ίσα βάρη	ROC βάρη	RS βάρη	Τυχαία βάρη	ROC-τυχαία βάρη	RS-τυχαία βάρη
3	5	1	0,681	0,884	0,85	0,598	0,589	0,607
3	10	1	0,619	0,82	0,799	0,534	0,523	0,569
3	15	1	0,574	0,794	0,76	0,443	0,457	0,506
3	20	1	0,577	0,793	0,78	0,48	0,477	0,536
6	5	1	0,608	0,871	0,822	0,481	0,483	0,532
6	10	1	0,529	0,794	0,77	0,379	0,379	0,438
6	15	1	0,473	0,807	0,738	0,357	0,37	0,418
6	20	1	0,454	0,781	0,725	0,337	0,341	0,397
9	5	1	0,592	0,87	0,816	0,486	0,479	0,529
9	10	1	0,523	0,847	0,777	0,383	0,383	0,449
9	15	1	0,44	0,809	0,709	0,309	0,318	0,364
9	20	1	0,434	0,791	0,732	0,308	0,303	0,366

Το σχήμα 15 επιβεβαιώνει τη μέχρι τώρα κατάταξη των βαρών που έχει διαπιστωθεί (δηλαδή ROC, RS, ίσα).



Σχήμα 15: Αποτελέσματα 1ου πειράματος PROMETHEE για γνωστά βάρη

Παρατηρείται επίσης ότι η ακρίβεια στην επιλογή της καλύτερης εναλλακτικής με τη μέθοδο PROMETHEE είναι γενικά υψηλότερη σε σχέση με το μοντέλο του σταθμισμένου μέσου, αλλά ελαφρά χαμηλότερη σε σχέση με την πολλαπλασιαστική συνάρτηση.

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα στην περίπτωση όπου τα δεδομένα είναι ασύμμετρα κατανεμημένα παρουσιάζονται στον πίνακα 10.

Πίνακας 10:Αποτελέσματα 1ου πειράματος - μέθοδος PROMETHEE - ασύμμετρη κατανομή δεδομένων

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Πραγματικά βάρη	Ίσα βάρη	ROC βάρη	RS βάρη	Τυχαία βάρη	ROC-τυχαία βάρη	RS-τυχαία βάρη
3	5	1	0,714	0,918	0,897	0,652	0,655	0,655
3	10	1	0,694	0,888	0,863	0,64	0,646	0,646
3	15	1	0,653	0,86	0,85	0,565	0,608	0,608
3	20	1	0,667	0,858	0,851	0,584	0,585	0,585
6	5	1	0,591	0,888	0,821	0,511	0,488	0,488
6	10	1	0,56	0,847	0,807	0,436	0,444	0,444
6	15	1	0,513	0,847	0,794	0,4	0,393	0,393
6	20	1	0,506	0,831	0,772	0,367	0,379	0,379
9	5	1	0,597	0,868	0,808	0,481	0,473	0,473
9	10	1	0,493	0,85	0,786	0,411	0,395	0,395
9	15	1	0,45	0,829	0,747	0,331	0,321	0,321
9	20	1	0,409	0,825	0,744	0,306	0,314	0,314

Όπως παρατηρείται η τροποποίηση δεν επέφερε καμία αλλαγή στην κατάταξη των βαρών που είχε ήδη διαπιστωθεί από την μέθοδο PROMETHEE αν και γενικά η ακρίβεια στην επιλογή της καλύτερης εναλλακτικής είναι αυξημένη.

3.2.2 Ακριβής προσδιορισμός της σημαντικότητας των κριτηρίων –Ενσωμάτωση Εντροπίας

Στην συγκεκριμένη παράγραφο ολοκληρώνεται η εκτέλεση των πειραμάτων τροποποιώντας τα βάρη ROC,RS, τα ίσα και τα πραγματικά σύμφωνα με τους τύπους της εντροπίας που αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.4. Η ανάλυση πραγματοποιείται μόνο για την περίπτωση όπου οι επιδόσεις των εναλλακτικών στα κριτήρια παρουσιάζουν ασυμμετρία. Στην περίπτωση αυτή κάθε κριτήριο έχει διαφορετική «πληροφοριακή» αξία. Αντίθετα, όταν οι επιδόσεις ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή η χρήση της εντροπίας δεν έχει νόημα, δεδομένου ότι στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν διαφοροποιήσεις ως προς τον τρόπο που κατανέμονται οι επιδόσεις των εναλλακτικών στα διάφορα κριτήρια. Τα αποτελέσματα για κάθε μία από τις μεθόδους αναφέρονται παρακάτω.

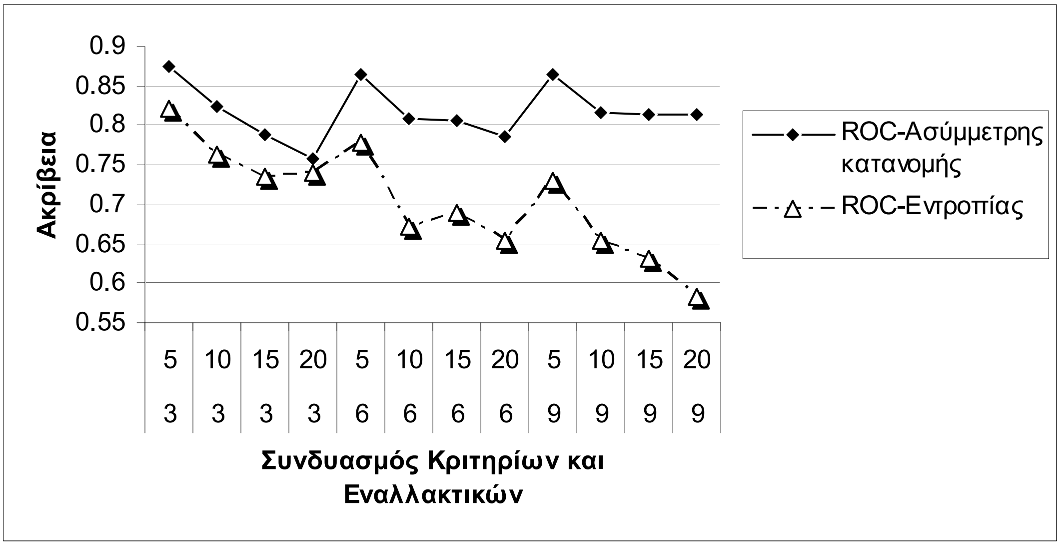
3.2.2.1 Σταθμισμένος Μέσου Όρος

Στη μέθοδο του σταθμισμένου μέσου όρου τα αποτελέσματα του πειράματος παρουσιάζονται στον πίνακα 11.

Πίνακας 11: Ενσωμάτωση Εντροπίας, αποτελέσματα 1ου πείραμα – σταθμισμένος μέσος όρος

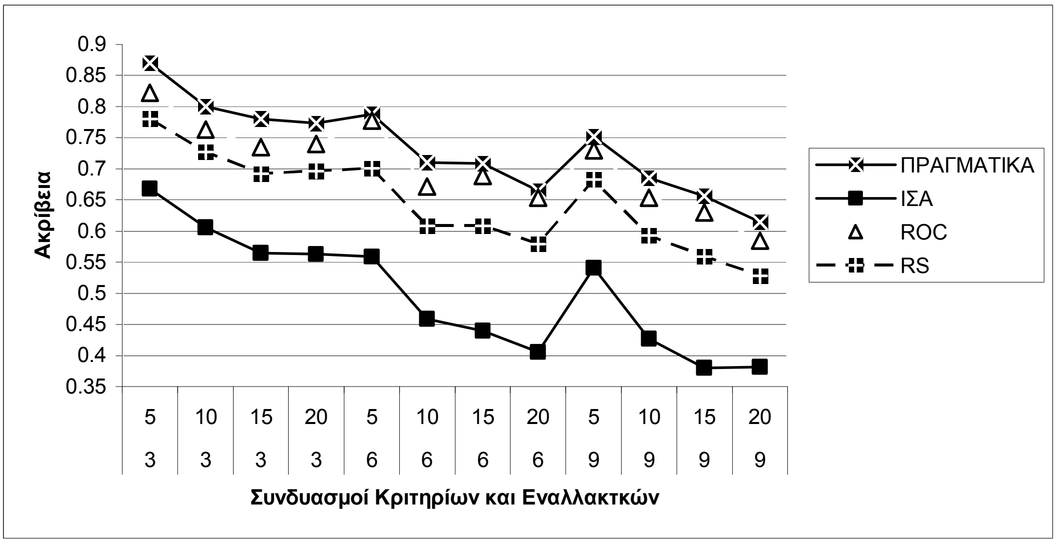
Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Πραγματικά βάρη	Ίσα βάρη	ROC βάρη	RS βάρη	Τυχαία βάρη	ROC-τυχαία βάρη	RS-τυχαία βάρη
3	5	0,87	0,668	0,822	0,78	0,641	0,652	0,658
3	10	0,8	0,606	0,763	0,727	0,566	0,597	0,606
3	15	0,78	0,565	0,735	0,692	0,543	0,558	0,561
3	20	0,773	0,563	0,74	0,696	0,53	0,536	0,542
6	5	0,788	0,559	0,778	0,701	0,457	0,47	0,497
6	10	0,71	0,459	0,672	0,608	0,418	0,425	0,443
6	15	0,708	0,44	0,689	0,608	0,358	0,36	0,39
6	20	0,665	0,406	0,654	0,579	0,321	0,321	0,36
9	5	0,752	0,541	0,73	0,683	0,454	0,457	0,487
9	10	0,685	0,427	0,654	0,593	0,371	0,363	0,392
9	15	0,656	0,38	0,63	0,559	0,294	0,298	0,337
9	20	0,614	0,382	0,584	0,528	0,301	0,308	0,34

Όπως παρατηρείται από τη σύγκριση με τον πίνακα 6 η προσαρμογή των βαρών έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της ακρίβειας των πραγματικών βαρών. Η συγκεκριμένη μείωση παρατηρείται σε όλους τους τύπους βαρών, στην περίπτωση των πραγματικών και κυμαίνεται από 0,2% μέχρι 39%. Αντίθετα στη περίπτωση των τυχαίων βαρών γενικά παρατηρείται μείωση εκτός από ελάχιστες περιπτώσεις όπου η ακρίβεια αυξάνεται στα βάρη ROC και τα τυχαία βάρη . Το σχήμα 17 αναπαριστά αυτές τις αυξομειώσεις στην περίπτωση των βαρών ROC.



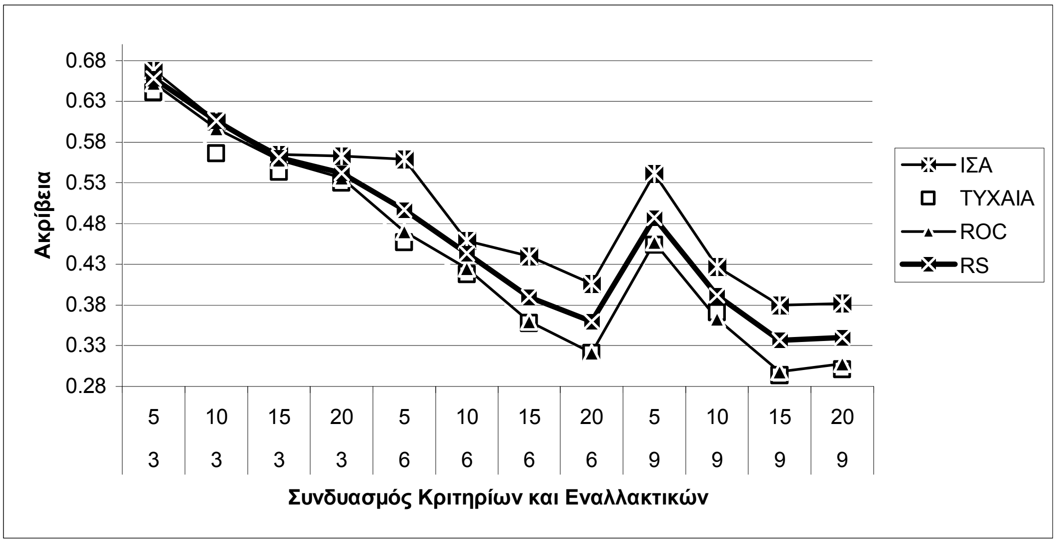
Σχήμα 16: Σύγκριση αποτελεσματικότητας βαρών ROC

Παρόλα αυτά όμως διατηρείται η κατάταξη των κριτηρίων δίνοντας πλεονέκτημα στα ROC ακολουθούμενα από τα RS και τα ίσα. Όλα τα παραπάνω παρουσιάζονται στο σχήμα 17.



Σχήμα 17: Ενσωμάτωση εντροπίας, αποτελέσματα 1ου πειράματος -σταθμισμένος μέσος όρος - πραγματικά βάρη

Στην περίπτωση που τα βάρη είναι τυχαία το αντίστοιχο σχήμα είναι το εξής:



Σχήμα 18: Ενσωμάτωση εντροπίας, αποτελέσματα 1ου πειράματος - σταθμισμένος μέσος όρος- τυχαία βάρη

Στη συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρείται ότι η αποτελεσματικότητα διαφόρων διαδικασιών εκτίμησης των βαρών δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες διαφορές και μάλιστα τα τυχαία βάρη, σε πολλούς συνδυασμούς κριτηρίων και εναλλακτικών, σχεδόν ταυτίζονται με τα ROC.

3.2.2.2 Πολλαπλασιαστικής Συνάρτησης Αξιών

Συνεχίζοντας τις τροποποιήσεις που είναι απαραίτητες για την εισαγωγή της εντροπίας στη μέθοδο της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης, προκύπτει ο πίνακας 12.

Πίνακας 12: Ενσωμάτωση εντροπίας - αποτελέσματα 1ου πειράματος - πολλαπλασιαστική συνάρτηση αξιών

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Πραγματικά βάρη	Ίσα βάρη	ROC βάρη	RS βάρη	Τυχαία βάρη	ROC-τυχαία βάρη	RS-τυχαία βάρη
3	5	0,876	0,724	0,849	0,819	0,669	0,69	0,703
3	10	0,856	0,684	0,795	0,781	0,627	0,647	0,667
3	15	0,829	0,646	0,76	0,736	0,589	0,606	0,635
3	20	0,832	0,653	0,76	0,735	0,598	0,623	0,653
6	5	0,797	0,594	0,779	0,732	0,515	0,519	0,547
6	10	0,764	0,549	0,722	0,69	0,487	0,498	0,509
6	15	0,724	0,515	0,685	0,652	0,418	0,424	0,466
6	20	0,714	0,46	0,669	0,627	0,41	0,439	0,448
9	5	0,768	0,569	0,743	0,704	0,466	0,475	0,506
9	10	0,726	0,476	0,677	0,645	0,372	0,374	0,419
9	15	0,69	0,428	0,647	0,605	0,338	0,339	0,389
9	20	0,656	0,367	0,608	0,55	0,312	0,32	0,335

Ο πίνακας 12 αποτελεί μία επιπλέον απόδειξη ότι στην περίπτωση των πραγματικών βαρών τα βάρη ROC είναι τα ανώτερα ενώ στην περίπτωση των τυχαίων, πλεονέκτημα δίνεται στα βάρη RS. Όσον αφορά τη σύγκριση με το σταθμισμένο μέσο όρο, η μόνη αξιοσημείωτη διαφορά είναι η αύξηση των τιμών κάτι το οποίο ίσχυε και πριν την εισαγωγή της εντροπίας. Επιπλέον η σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά του πίνακα 8, αποδεικνύει ότι η εισαγωγή της εντροπίας μειώνει τις ακρίβειες των διαφόρων βαρών.

3.2.2.3 Μέθοδος PROMETHEE

Το πρώτο πείραμα ολοκληρώνεται με την εκτέλεση της μεθόδου PROMETHEE αφού γίνει εισαγωγή της εντροπίας. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 13.

Πίνακας 13: Ενσωμάτωση εντροπίας -αποτελέσματα 1ου πειράματος – μέθοδος PROMETHEE

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Πραγματικά βάρη	Ίσα βάρη	ROC βάρη	RS βάρη	Τυχαία βάρη	ROC-τυχαία βάρη	RS-τυχαία βάρη
3	5	0,888	0,689	0,852	0,808	0,65	0,649	0,652
3	10	0,839	0,656	0,819	0,789	0,64	0,656	0,665
3	15	0,813	0,612	0,769	0,733	0,596	0,604	0,618
3	20	0,796	0,605	0,763	0,738	0,571	0,568	0,585
6	5	0,79	0,551	0,772	0,703	0,493	0,492	0,505
6	10	0,717	0,504	0,705	0,647	0,41	0,416	0,454
6	15	0,714	0,448	0,679	0,613	0,398	0,407	0,42
6	20	0,692	0,429	0,661	0,601	0,36	0,364	0,381
9	5	0,758	0,532	0,733	0,681	0,456	0,456	0,48
9	10	0,702	0,439	0,671	0,613	0,379	0,365	0,392
9	15	0,667	0,379	0,638	0,565	0,297	0,298	0,333
9	20	0,614	0,356	0,59	0,533	0,256	0,261	0,303

Στην περίπτωση των γνωστών πραγματικών βαρών η κατάταξη των βαρών είναι πραγματικά, ROC, RS και ακολουθούν τελευταία τα ίσα. Συνεχίζοντας στα τυχαία βάρη η κατάταξη παραμένει ίδια με αυτές των προηγούμενων μεθόδων. Δηλαδή ίσα βάρη , τυχαία, RS και ROC. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα βάρη ROC και τα τυχαία έχουν πολύ μικρές αποκλίσεις μεταξύ τους. Επιπλέον η εισαγωγή της εντροπίας και στη συγκεκριμένη μέθοδο μειώνει την αποτελεσματικότητα των διαδικασιών εκτίμησης των βαρών (σχέση με τα αποτελέσματα του πίνακα 10).

3.2.3 Μη Ακριβής Προσδιορισμός της Σημαντικότητας των Κριτηρίων

Στην συγκεκριμένη ενότητα πραγματοποιείται το δεύτερο πείραμα της παρούσας εργασίας για όλες τις μεθόδους που έχουν προαναφερθεί όπως και για την προσαρμογή των βαρών μέσω της εντροπίας. Το δεύτερο πείραμα αφορά τις περιπτώσεις για τις οποίες ο αποφασίζοντας δεν είναι σίγουρος για την κατάταξη των κριτηρίων καθώς έχει γίνει προσθήκη θορύβου. Ο συγκεκριμένος παράγοντας λειτουργεί σαν το άθροισμα των παραμέτρων του Dirichlet, το οποίο έχει επεξηγηθεί σε προηγούμενη παράγραφο. Συγκεκριμένα για τα κριτήρια υποθέτονται 2 επίπεδα θορύβου (low, high), σύμφωνα πάντα με τη έρευνα των Jia et al. (1998). Στην περίπτωση των 3 κριτηρίων θεωρούνται οι εξής 2 τιμές. Η υψηλή τιμή του θορύβου ($\lambda=3$) και η χαμηλή τιμή ($\lambda=6$). Αντίστοιχα στην περίπτωση των 6 κριτηρίων η παράμετρος λ παίρνει τις τιμές 12 (υψηλό σφάλμα) και 24 (χαμηλό σφάλμα).Τέλος στην περίπτωση των 9 κριτηρίων, οι περιπτώσεις χαμηλού και υψηλού σφάλματος μοντελοποιούνται θέτοντας $\lambda=36$ και $\lambda=18$ αντίστοιχα.

3.2.3.1 Σταθμισμένος Μέσος Όρος

Στην συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του δεύτερου πειράματος κάνοντας χρήση της μεθόδου του σταθμισμένου μέσου όρου για την ομοιόμορφη και ασύμμετρη κατανομή. Τα αναλυτικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 14.

Πίνακας 14: Αποτελέσματα 2ου πειράματος – σταθμισμένος μέσος όρος

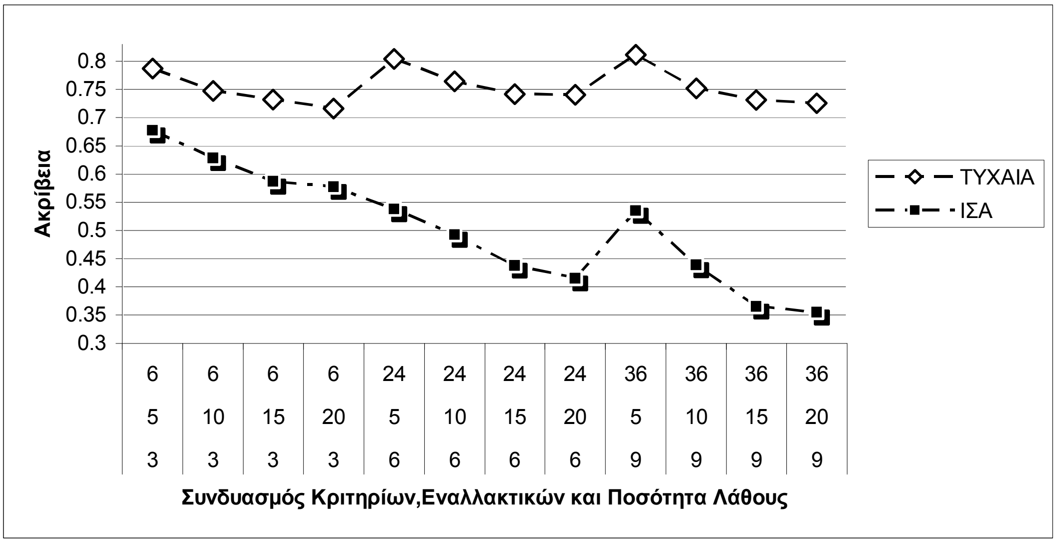
Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Παράμετρος Θορύβου	Τυχαία βάρη	Βάρη ROC	Βάρη RS	ΙΣΑ Βάρη
Περίπτωση χαμηλού σφάλματος						
3	5	6	0,787	0,802	0,78	0,682
3	10	6	0,747	0,735	0,712	0,597
3	15	6	0,732	0,704	0,68	0,571
3	20	6	0,716	0,682	0,677	0,542
6	5	24	0,804	0,767	0,745	0,59
6	10	24	0,764	0,724	0,705	0,515
6	15	24	0,741	0,703	0,673	0,475
6	20	24	0,74	0,694	0,67	0,456
9	5	36	0,811	0,794	0,751	0,573
9	10	36	0,752	0,719	0,685	0,475
9	15	36	0,731	0,697	0,663	0,459
9	20	36	0,725	0,681	0,652	0,426
Περίπτωση υψηλού σφάλματος						
3	5	3	0,738	0,76	0,774	0,682
3	10	3	0,719	0,737	0,716	0,597
3	15	3	0,657	0,689	0,673	0,571
3	20	3	0,629	0,634	0,657	0,542
6	5	12	0,773	0,741	0,734	0,59
6	10	12	0,695	0,669	0,672	0,515
6	15	12	0,673	0,661	0,649	0,475
6	20	12	0,639	0,639	0,637	0,456
9	5	18	0,747	0,747	0,747	0,573
9	10	18	0,681	0,678	0,671	0,475
9	15	18	0,648	0,649	0,624	0,459
9	20	18	0,614	0,617	0,613	0,426

Τα αποτελέσματα που μπορούν να εξαχθούν στην περίπτωση της χαμηλού σφάλματος, είναι τα εξής:

1) Για περισσότερους τους συνδυασμούς των εναλλακτικών και των κριτηρίων, τα τυχαία βάρη έχουν την μεγαλύτερη ακρίβεια από όλα τα υπόλοιπα, με τα βάρη ROC να έρχονται δεύτερα και τα RS τρίτα στην κατάταξη.
2) Το πλεονέκτημα των τυχαίων βαρών έναντι των βαρών ROC και RS κυμαίνεται στην περίπτωση των τριών κριτηρίων στο 1-5% ενώ με μεγαλύτερο αριθμό κριτηρίων ανέρχεται στο 5-7.3%. Το σχήμα 19 επιβεβαιώνει τον συγκεκριμένο ισχυρισμό.

Σχήμα 19: Αποτελέσματα 2ου πειράματος, περίπτωση χαμηλού σφάλματος

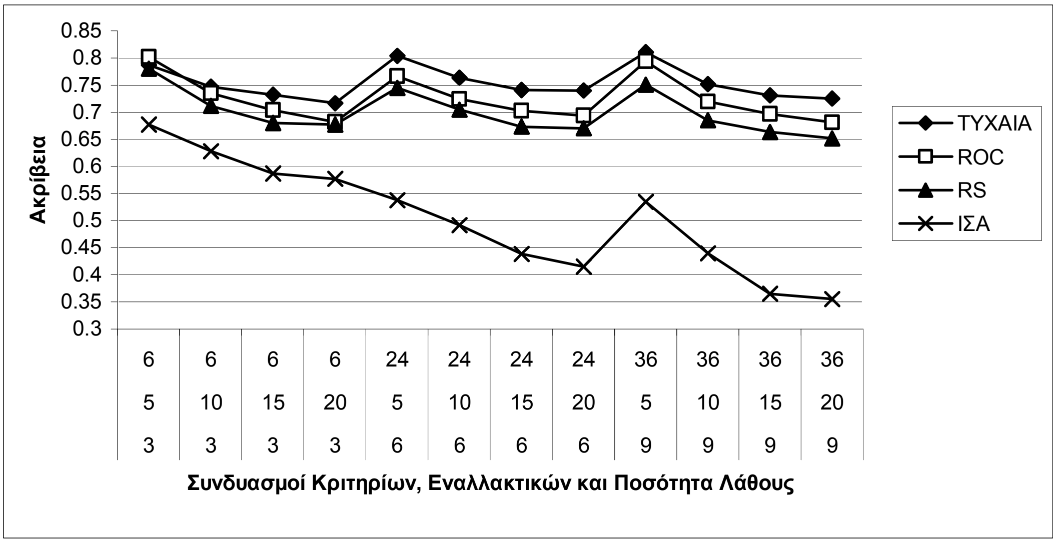
3) Από τη σύγκριση των τυχαίων βαρών με των ίσων διαπιστώνεται ότι στις περιπτώσεις που οι τιμές των κριτηρίων και των εναλλακτικών είναι μεγάλες τα πρώτα αξιολογούνται με μεγαλύτερο βαθμό ως καλύτερα. Το σχήμα 20 που ακολουθεί επιβεβαιώνει τα παραπάνω:



Σχήμα 20: Σύγκριση τυχαίων και ίσων βαρών 2ου πειράματος, περίπτωση χαμηλού σφάλματος

Η ανάλυση του πίνακα 14, σε συνδυασμό με το σχήμα 21 οδηγεί στις παρατηρήσεις που ακολουθούν, για την περίπτωση υψηλού σφάλματος:

1) Τα ίσα βάρη είναι κατώτερα όλων των υπολοίπων.
2) Στην περίπτωση των τριών κριτηρίων δε γίνεται να δοθεί με σιγουριά μία απάντηση για το ποια βάρη είναι τα καλύτερα καθώς οι διαφορές μεταξύ τους είναι μικρές και ο «νικητής» είναι διαφορετικός σε κάθε περίπτωση.
3) Στις περιπτώσεις με κριτήρια πάνω των τριών τα τυχαία βάρη είναι τα καλύτερα αλλά με μικρό πλεονέκτημα, το οποίο κυμαίνεται έναντι των βαρών ROC στο 1-2%, ενώ έναντι των βαρών RS στο 4%.
4) Τα βάρη ROC υπερέχουν έναντι των RS αλλά με μικρή διαφορά.



Σχήμα 21: Σύγκριση όλων των αποτελεσμάτων 2ου πειράματος, περίπτωση υψηλού σφάλματος

Από τις δύο διαφορετικές εκτελέσεις του δεύτερου πειράματος μπορούν να εξαχθούν τα παρακάτω συμπεράσματα:

1) Η εισαγωγή του σφάλματος στο πρόβλημα το κάνει πιο πολύπλοκο στο να εντοπιστεί η καλύτερη επιλογή βαρών. Γενικά όμως τα τυχαία βάρη έχουν καλύτερες επιδόσεις, με μικρές διαφορές από τα υπόλοιπα.
2) Η ακρίβεια επιλογής της καλύτερης εναλλακτικής μειώνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των εναλλακτικών.

3) Τα ίσα βάρη είναι τα μόνα που δεν επηρεάζονται από τον παράγοντα σφάλματος, καθώς εξαρτώνται μόνο από τον αριθμό των κριτηρίων.

Τα αποτελέσματα για την περίπτωση όπου τα δεδομένα κατανέμονται ασύμμετρα παρουσιάζονται στον πίνακα 15.

Πίνακας 15: Αποτελέσματα 2ου πειράματος –ασύμμετρη κατανομή δεδομένων - σταθμισμένου μέσου όρου

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Παράμετρος Θορύβου	Τυχαία βάρη	Βάρη ROC	Βάρη RS	ΙΣΑ Βάρη
Περίπτωση χαμηλού σφάλματος						
3	5	6	0,824	0,81	0,78	0,702
3	10	6	0,8	0,789	0,712	0,682
3	15	6	0,793	0,764	0,68	0,629
3	20	6	0,763	0,756	0,677	0,633
6	5	24	0,826	0,78	0,745	0,585
6	10	24	0,785	0,703	0,705	0,553
6	15	24	0,772	0,709	0,673	0,514
6	20	24	0,774	0,7	0,67	0,484
9	5	36	0,794	0,754	0,751	0,598
9	10	36	0,755	0,717	0,685	0,496
9	15	36	0,727	0,655	0,663	0,449
9	20	36	0,723	0,644	0,652	0,408
Περίπτωση υψηλού σφάλματος						
3	5	3	0,785	0,799	0,801	0,702
3	10	3	0,741	0,776	0,782	0,682
3	15	3	0,705	0,741	0,742	0,629
3	20	3	0,677	0,731	0,736	0,633
6	5	12	0,765	0,75	0,741	0,585
6	10	12	0,719	0,701	0,69	0,553
6	15	12	0,721	0,699	0,689	0,514
6	20	12	0,703	0,689	0,678	0,484
9	5	18	0,751	0,754	0,731	0,598
9	10	18	0,688	0,683	0,688	0,496
9	15	18	0,663	0,653	0,639	0,449
9	20	18	0,671	0,65	0,623	0,408

Όπως παρατηρείται, και στην περίπτωση αυτή διατηρείται η κατάταξη των βαρών, παρόλο που η αποτελεσματικότητα των διαφόρων διαδικασιών κυμαίνεται σε υψηλότερα επίπεδα. Όσον αφορά την περίπτωση χαμηλού σφάλματος παραμένουν στην πρώτη θέση τα τυχαία βάρη, στην τελευταία τα ίσα βάρη και στις ενδιάμεσες τα

ROC και RS με μία ελάχιστη μεταξύ τους διαφορά. Αντίθετα στην περίπτωση υψηλού σφάλματος δεν μπορεί να δοθεί με σαφήνεια ποία είναι τα καλύτερα βάρη.

3.2.3.2 Πολλαπλασιαστικής Συνάρτησης Αξιών

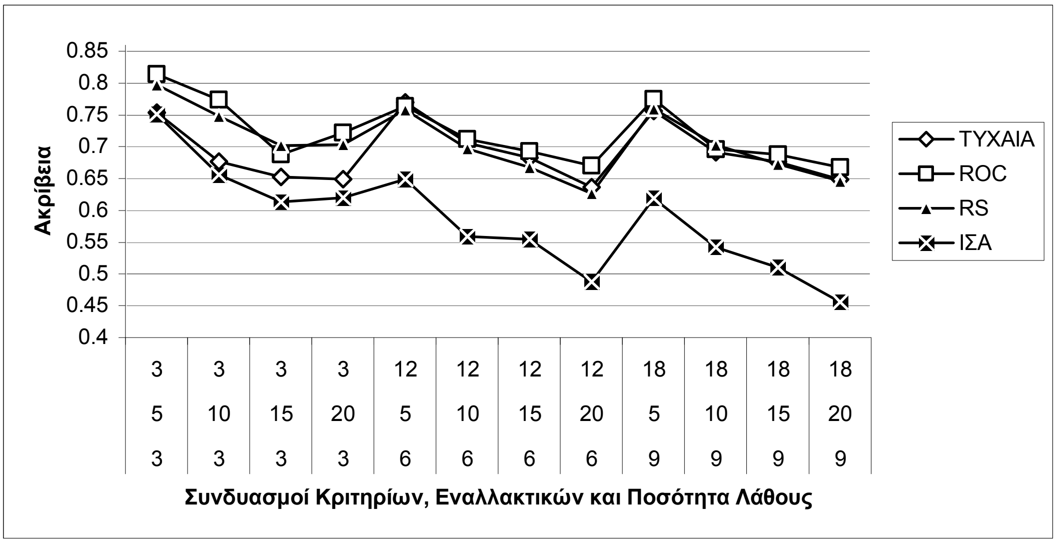
Η εκτέλεση του δεύτερου πειράματος για τη μέθοδο της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης δίνει τα εξής αποτελέσματα:

Πίνακας 16: Αποτελέσματα 2ου πειράματος -πολλαπλασιαστική συνάρτηση αξιών

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Παράμετρος Θορύβου	Τυχαία βάρη	Βάρη ROC	Βάρη RS	ΙΣΑ Βάρη
Περίπτωση χαμηλού σφάλματος						
3	5	6	0,822	0,844	0,819	0,751
3	10	6	0,771	0,773	0,746	0,656
3	15	6	0,737	0,705	0,712	0,613
3	20	6	0,735	0,746	0,733	0,62
6	5	24	0,843	0,819	0,793	0,649
6	10	24	0,754	0,727	0,711	0,559
6	15	24	0,734	0,717	0,696	0,555
6	20	24	0,754	0,714	0,662	0,488
9	5	36	0,799	0,787	0,763	0,619
9	10	36	0,78	0,748	0,715	0,542
9	15	36	0,725	0,718	0,704	0,51
9	20	36	0,726	0,701	0,663	0,456
Περίπτωση υψηλού σφάλματος						
3	5	3	0,754	0,814	0,797	0,751
3	10	3	0,677	0,774	0,748	0,656
3	15	3	0,653	0,688	0,702	0,613
3	20	3	0,649	0,722	0,704	0,62
6	5	12	0,77	0,764	0,758	0,649
6	10	12	0,706	0,712	0,697	0,559
6	15	12	0,683	0,693	0,668	0,555
6	20	12	0,637	0,67	0,627	0,488
9	5	18	0,756	0,775	0,76	0,619
9	10	18	0,691	0,696	0,703	0,542
9	15	18	0,676	0,688	0,673	0,51
9	20	18	0,648	0,668	0,646	0,456

Όπως στο σταθμισμένο μέσο όρο έτσι και στην πολλαπλασιαστική συνάρτηση ο πίνακας χωρίζεται σε δύο τμήματα. Όσον αφορά τα συμπεράσματα του χαμηλού σφάλματος, παρατηρείται ότι είναι σε μεγάλο βαθμό ίδια με τα αντίστοιχα της προηγούμενης μεθόδου, καταλήγοντας στην κατάταξη, τυχαία, ROC, RS και ίσα, με το πλεονέκτημα των πρώτων να αυξάνεται όσο αυξάνονται τα κριτήρια.

Αντίστοιχα στην περίπτωση υψηλού σφάλματος, τα αποτελέσματα της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης συμφωνούν με αυτά του σταθμισμένου μέσου όρου καθώς τα ίσα βάρη εμφανίζονται ως τα χειρότερα, ενώ οι διαφορές μεταξύ των άλλων διαδικασιών είναι περιορισμένες παρόλο που υπάρχει ένα μικρό πλεονέκτημα των βαρών ROC όπως φαίνεται και στο σχήμα 22.



Σχήμα 22: Σύγκριση όλων των αποτελεσμάτων 2^{ου} πειράματος-πολλαπλασιαστική συνάρτηση αξιών περίπτωση υψηλού σφάλματος

Αξίζει να σημειωθεί ότι και στο συγκεκριμένο πείραμα η αποτελεσματικότητα όλων των διαδικασιών εκτίμησης των βαρών είναι υψηλότερη σε σχέση με τα αποτελέσματα για το σταθμισμένο μέσο όρο.

Στη συνέχεια η χρήση των ασύμμετρα κατανεμημένων δεδομένων δίνει αποτελέσματα αρκετά χαμηλότερα και αλλάζει την κατάταξη των βαρών.

Συγκεκριμένα και στις δύο περιπτώσεις σφάλματος όταν ο αριθμός των κριτηρίων είναι 3, τα ίσα βάρη έχουν τις καλύτερες αποδόσεις, ενώ για αριθμό κριτηρίων 6 και 9 δεν υπάρχει κάποιο σημαντικό πλεονέκτημα ώστε κάποια από τα βάρη τα θεωρηθούν τα καλύτερα. Τα παραπάνω διαπιστώνονται από τον πίνακα 17:

Πίνακας 17: Αποτελέσματα 2^{ου} πειράματος - ασύμμετρη κατανομή δεδομένων - πολλαπλασιαστική συνάρτηση αξιών

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Παράμετρος Θορύβου	Τυχαία βάρη	Βάρη ROC	Βάρη RS	ΙΣΑ Βάρη
Περίπτωση χαμηλού σφάλματος						
3	5	6	0,645	0,638	0,635	0,729
3	10	6	0,587	0,597	0,589	0,682
3	15	6	0,523	0,536	0,537	0,631
3	20	6	0,526	0,54	0,546	0,636
6	5	24	0,638	0,613	0,597	0,589
6	10	24	0,562	0,556	0,558	0,524
6	15	24	0,56	0,557	0,55	0,521
6	20	24	0,526	0,526	0,529	0,481
9	5	36	0,565	0,561	0,556	0,555
9	10	36	0,529	0,532	0,518	0,458
9	15	36	0,51	0,51	0,494	0,429
9	20	36	0,515	0,511	0,492	0,414
Περίπτωση υψηλού σφάλματος						
3	5	3	0,676	0,673	0,666	0,729
3	10	3	0,628	0,616	0,597	0,682
3	15	3	0,556	0,544	0,544	0,631
3	20	3	0,537	0,538	0,543	0,636
6	5	12	0,628	0,61	0,591	0,589
6	10	12	0,589	0,576	0,566	0,524
6	15	12	0,585	0,589	0,567	0,521
6	20	12	0,571	0,558	0,55	0,481
9	5	18	0,568	0,574	0,556	0,555
9	10	18	0,559	0,555	0,533	0,458
9	15	18	0,552	0,533	0,517	0,429
9	20	18	0,537	0,515	0,494	0,414

3.2.3.3 Μέθοδος PROMETHEE

Εκτελώντας το δεύτερο πείραμα για τη μέθοδο PROMETHEE προκύπτει ο πίνακας 18 του οποίου τα αποτελέσματα είναι χειρότερα σε σχέση με αυτά της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης και καλύτερα από του σταθμισμένου μέσου όρου. Δηλαδή όταν ο αποφασίζοντας δεν είναι σίγουρος για την κατάταξη των βαρών η πιο αποτελεσματική μέθοδος για να επιλεχθεί η καλύτερη εναλλακτική είναι η πολλαπλασιαστική συνάρτηση.

Πίνακας 18: Αποτελέσματα 2ου πειράματος –μέθοδος PROMETHEE

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Παράμετρος Θορύβου	Τυχαία βάρη	Βάρη ROC	Βάρη RS	ΙΣΑ Βάρη
Περίπτωση χαμηλού σφάλματος						
3	5	6	0,813	0,803	0,784	0,681
3	10	6	0,786	0,753	0,741	0,619
3	15	6	0,724	0,716	0,694	0,574
3	20	6	0,754	0,737	0,714	0,577
6	5	24	0,803	0,781	0,742	0,608
6	10	24	0,768	0,697	0,698	0,529
6	15	24	0,746	0,705	0,671	0,473
6	20	24	0,725	0,683	0,648	0,454
9	5	36	0,8	0,785	0,77	0,592
9	10	36	0,754	0,728	0,688	0,523
9	15	36	0,702	0,692	0,646	0,44
9	20	36	0,712	0,688	0,656	0,434
Περίπτωση υψηλού σφάλματος						
3	5	3	0,76	0,777	0,76	0,681
3	10	3	0,679	0,728	0,731	0,619
3	15	3	0,665	0,707	0,689	0,574
3	20	3	0,631	0,674	0,692	0,577
6	5	12	0,771	0,74	0,745	0,608
6	10	12	0,693	0,676	0,684	0,529
6	15	12	0,665	0,654	0,639	0,473
6	20	12	0,639	0,63	0,605	0,454
9	5	18	0,758	0,755	0,737	0,592
9	10	18	0,682	0,68	0,675	0,523
9	15	18	0,641	0,647	0,616	0,44
9	20	18	0,641	0,621	0,614	0,434

Παρά τις συγκεκριμένες αυξομειώσεις, η σειρά κατάταξης δε μεταβάλλεται, δηλαδή στη περίπτωση χαμηλού σφάλματος πρώτα έρχονται τα τυχαία βάρη και ακολουθούν με τη σειρά ROC,RS και ίσα. Όσον αφορά την περίπτωση υψηλού σφάλματος πάλι δε μπορεί να αποφασιστεί με σαφήνεια ποια είναι τα καλύτερα βάρη σε αντίθεση με τα χειρότερα που είναι τα ίσα.

Όσον αφορά τη μεταβολή των αποτελεσμάτων στην περίπτωση των ασύμμετρα κατανεμημένων δεδομένων, αξίζει να σημειωθεί ότι δεν μεταβάλλει την κατάταξη σε καμία από τις περιπτώσεις σφάλματος απλά παρουσιάζεται μία αύξηση στην αποτελεσματικότητα όλων των διαδικασιών εκτίμησης των βαρών που κυμαίνεται από 0,8% μέχρι και 10%. Ο πίνακας 19 παρουσιάζει τα αποτελέσματα.

Πίνακας 19: Αποτελέσματα 2ου πειράματος –ασύμμετρη κατανομή δεδομένων - μέθοδος PROMETHEE

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Παράμετρος Θορύβου	Τυχαία βάρη	Βάρη ROC	Βάρη RS	ΙΣΑ Βάρη
Περίπτωση χαμηλού σφάλματος						
3	5	6	0,847	0,841	0,835	0,714
3	10	6	0,805	0,824	0,822	0,694
3	15	6	0,791	0,788	0,795	0,653
3	20	6	0,774	0,778	0,785	0,667
6	5	24	0,816	0,796	0,775	0,591
6	10	24	0,79	0,757	0,712	0,56
6	15	24	0,764	0,749	0,715	0,513
6	20	24	0,728	0,711	0,685	0,506
9	5	36	0,816	0,807	0,77	0,597
9	10	36	0,774	0,749	0,716	0,493
9	15	36	0,725	0,707	0,664	0,45
9	20	36	0,739	0,7	0,65	0,409
Περίπτωση υψηλού σφάλματος						
3	5	3	0,785	0,811	0,809	0,714
3	10	3	0,746	0,798	0,799	0,694
3	15	3	0,701	0,761	0,765	0,653
3	20	3	0,696	0,773	0,768	0,667
6	5	12	0,779	0,762	0,74	0,591
6	10	12	0,724	0,722	0,712	0,56
6	15	12	0,721	0,708	0,683	0,513
6	20	12	0,678	0,702	0,676	0,506
9	5	18	0,745	0,752	0,738	0,597
9	10	18	0,682	0,68	0,686	0,493
9	15	18	0,655	0,672	0,631	0,45

9	20	18	0,655	0,635	0,623	0,409

3.2.4 Μη ακριβής προσδιορισμός της σημαντικότητας των κριτηρίων-Εντροπία

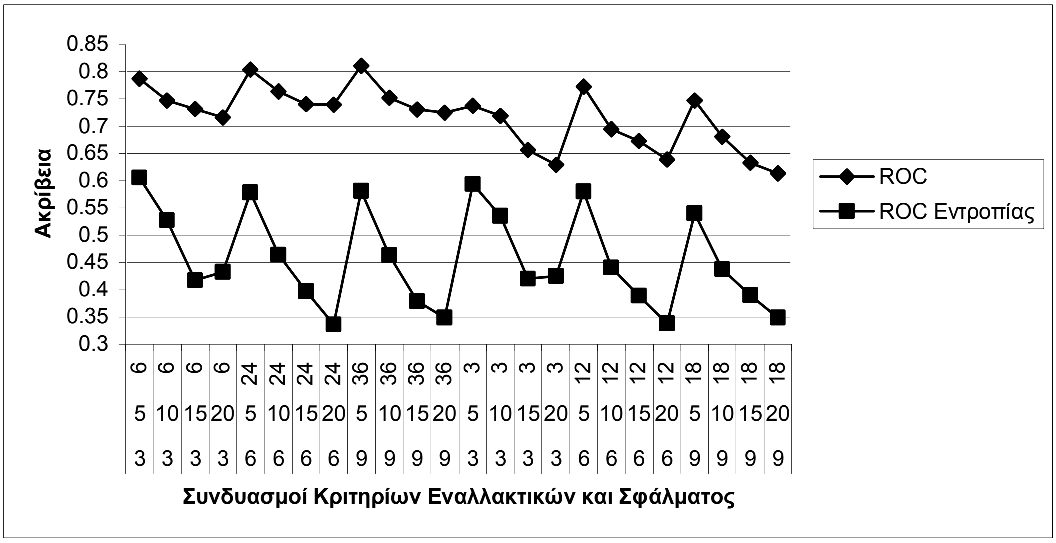
Στη συγκεκριμένη τελευταία ενότητα του 3^{ου} Κεφαλαίου αναφέρονται τα αποτελέσματα του δεύτερου πειράματος μετά την εισαγωγή του τύπου της εντροπίας στα βάρη, αφού πρώτα έχουν υποστεί τα δεδομένα την τροποποίηση της ενότητα 3.2.3.

3.2.4.1 Σταθμισμένος Μέσος Όρος

Τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του συγκεκριμένου πειράματος για την μέθοδο του Σταθμισμένου Μέσου Όρου παρουσιάζονται στον πίνακα 20. Η γενική διαπίστωση είναι ότι η εισαγωγή της εντροπίας επηρεάζει αρνητικά την ακρίβεια επιλογής της καλύτερης εναλλακτικής σε ποσοστό μάλιστα που ξεκινά από 14% και σε πολλές περιπτώσεις αγγίζει το 54%. Η συγκεκριμένη παρατήρηση ισχύει και στα δύο επίπεδα σφάλματος. Επίσης η εντροπία μεταβάλει την κατάταξη των βαρών και στις δύο περιπτώσεις σφάλματος, τοποθετώντας τα ίσα βάρη πρώτα ακολουθούμενα από τα τυχαία, τα ROC, και τα RS. Στο σχήμα 23 παρουσιάζεται ένα γράφημα σύγκρισης των βαρών ROC με και χωρίς χρήση της εντροπίας.

Πίνακας 20: Ενσωμάτωση εντροπίας - αποτελέσματα 2ου πειράματος - σταθμισμένος μέσος όρος

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Παράμετρος Θορύβου	Τυχαία βάρη	Βάρη ROC	Βάρη RS	ΙΣΑ Βάρη
Περίπτωση χαμηλού σφάλματος						
3	5	6	0,639	0,606	0,603	0,677
3	10	6	0,541	0,528	0,529	0,628
3	15	6	0,433	0,417	0,416	0,587
3	20	6	0,448	0,433	0,429	0,577
6	5	24	0,588	0,578	0,566	0,538
6	10	24	0,467	0,464	0,435	0,492
6	15	24	0,404	0,398	0,384	0,438
6	20	24	0,353	0,336	0,346	0,415
9	5	36	0,584	0,581	0,547	0,535
9	10	36	0,471	0,463	0,433	0,439
9	15	36	0,401	0,379	0,375	0,365
9	20	36	0,349	0,349	0,33	0,355
Περίπτωση υψηλού σφάλματος						
3	5	3	0,623	0,594	0,573	0,677
3	10	3	0,549	0,535	0,519	0,628
3	15	3	0,442	0,42	0,422	0,587
3	20	3	0,431	0,425	0,423	0,577
6	5	12	0,595	0,58	0,555	0,538
6	10	12	0,465	0,441	0,424	0,492
6	15	12	0,393	0,389	0,367	0,438
6	20	12	0,35	0,338	0,342	0,415
9	5	18	0,546	0,54	0,53	0,535
9	10	18	0,433	0,438	0,424	0,439
9	15	18	0,399	0,39	0,364	0,365
9	20	18	0,341	0,349	0,348	0,355



Σχήμα 23: Σύγκριση βαρών ROC με και χωρίς ενσωμάτωση εντροπίας -2ο πείραμα

3.2.4.2 Πολλαπλασιαστική Συνάρτηση Αξιών

Η εκτέλεση του πειράματος με τη μέθοδο της πολλαπλασιαστικής συνάρτησης δίνει τα αποτελέσματα του πίνακα 21.

Πίνακας 21: Ενσωμάτωση εντροπίας - αποτελέσματα 2ου πειράματος - πολλαπλασιαστική συνάρτηση αξιών

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Παράμετρος Θορύβου	Τυχαία βάρη	Βάρη ROC	Βάρη RS	ΙΣΑ Βάρη
Περίπτωση χαμηλού σφάλματος						
3	5	6	0,68	0,665	0,669	0,729
3	10	6	0,615	0,595	0,59	0,682
3	15	6	0,546	0,538	0,534	0,631
3	20	6	0,535	0,549	0,545	0,636
6	5	24	0,621	0,618	0,597	0,589
6	10	24	0,582	0,568	0,559	0,524
6	15	24	0,589	0,574	0,556	0,521
6	20	24	0,569	0,561	0,557	0,481
9	5	36	0,6	0,578	0,564	0,555
9	10	36	0,558	0,547	0,505	0,458
9	15	36	0,546	0,538	0,508	0,429
9	20	36	0,512	0,509	0,483	0,414
Περίπτωση υψηλού σφάλματος						
3	5	3	0,652	0,657	0,66	0,729
3	10	3	0,611	0,609	0,598	0,682
3	15	3	0,524	0,535	0,542	0,631
3	20	3	0,534	0,547	0,549	0,636
6	5	12	0,599	0,604	0,581	0,589
6	10	12	0,563	0,557	0,554	0,524
6	15	12	0,561	0,54	0,543	0,521
6	20	12	0,522	0,518	0,511	0,481
9	5	18	0,557	0,557	0,537	0,555
9	10	18	0,542	0,53	0,503	0,458
9	15	18	0,516	0,515	0,486	0,429
9	20	18	0,499	0,495	0,49	0,414

Η επιρροή που προσφέρει η εντροπία στα αποτελέσματα εστιάζεται και πάλι όπως και στη προηγούμενη μέθοδο στη μείωση της ακρίβειας ανεξάρτητα την τιμή σφάλματος. Οι τιμές όμως σε σύγκριση με αυτές του σταθμισμένου μέσου όρου είναι καλύτερες με αποτέλεσμα η πολλαπλασιαστική συνάρτηση να θεωρηθεί αποδοτικότερη μέθοδος. Όσο αφορά την κατάταξη των βαρών τα συμπεράσματα που προκύπτουν, εστιάζονται πρώτον στα βάρη ROC, τα οποία σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις υπερτερούν των αντίστοιχων RS και δεύτερον στο ποια βάρη είναι τα καλύτερα, κάτι το οποίο δε μπορεί αποφασιστεί καθώς οι διαφορές μεταξύ των βαρών είναι μικρές και ο «νικητής» είναι διαφορετικός σε κάθε περίπτωση.

3.2.4.3 Μέθοδος PROMETHEE

Η τελευταία εκτέλεση των πειραμάτων αφορά τη μέθοδο PROMETHEE. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα είναι τα παρακάτω:

Πίνακας 22: Ενσωμάτωση εντροπίας - αποτελέσματα 2ου πειράματος - μέθοδος PROMETHEE

Αριθμός κριτηρίων	Αριθμός εναλλακτικών	Παράμετρος Θορύβου	Τυχαία βάρη	Βάρη ROC	Βάρη RS	ΙΣΑ Βάρη
Περίπτωση χαμηλού σφάλματος						
3	5	6	0,809	0,794	0,763	0,693
3	10	6	0,79	0,762	0,738	0,636
3	15	6	0,741	0,711	0,689	0,591
3	20	6	0,717	0,703	0,673	0,59
6	5	24	0,754	0,74	0,688	0,559
6	10	24	0,671	0,661	0,593	0,464
6	15	24	0,683	0,655	0,608	0,458
6	20	24	0,662	0,636	0,586	0,441
9	5	36	0,709	0,695	0,659	0,544
9	10	36	0,627	0,635	0,575	0,424
9	15	36	0,625	0,596	0,547	0,397
9	20	36	0,563	0,548	0,525	0,404
Περίπτωση υψηλού σφάλματος						
3	5	3	0,801	0,778	0,756	0,693
3	10	3	0,745	0,728	0,707	0,636
3	15	3	0,695	0,703	0,693	0,591
3	20	3	0,684	0,67	0,664	0,59
6	5	12	0,729	0,708	0,665	0,559
6	10	12	0,658	0,613	0,584	0,464
6	15	12	0,646	0,634	0,61	0,458
6	20	12	0,616	0,603	0,552	0,441
9	5	18	0,687	0,677	0,65	0,544
9	10	18	0,633	0,624	0,578	0,424
9	15	18	0,576	0,567	0,538	0,397
9	20	18	0,561	0,557	0,526	0,404

Η παρατήρηση των αποτελεσμάτων οδηγεί στη διαπίστωση ότι οι τιμές που προσφέρει η PROMETHEE είναι οι καλύτερες από τις προηγούμενες μεθόδους. Η κατάταξη των κριτηρίων όμως διαφέρει από τη πολλαπλασιαστική συνάρτηση και συμφωνεί με αυτή του σταθμισμένου μέσου όρου, καθώς πρώτα είναι τα τυχαία βάρη και ακολουθούν με τη σειρά τα ROC,RS και τα ίσα, ανεξάρτητα ποσοστού σφάλματος.

3.3 Σύνοψη Αποτελεσμάτων

Από την πειραματική διαδικασία που πραγματοποιήθηκε στην ενότητα 3.2 και από τα αποτελέσματα που προέκυψαν, διαμορφώνονται κάποιες γενικές παρατηρήσεις τόσο για τις μεθόδους, όσο και για τις διαδικασίες εκτίμησης των βαρών που μελετήθηκαν.

Η πρώτη παρατήρηση που αξίζει να σχολιαστεί είναι το γεγονός, της διατήρησης των διαφορών των ποσοστών ακρίβειας μεταξύ των μεθόδων. Δηλαδή στην περίπτωση που ο αποφασίζοντας είναι σίγουρος για την κατάταξη των κριτηρίων αλλά και σε αυτήν που δεν είναι σίγουρος ($1^{ο}$ και $2^{ο}$ πείραμα αντίστοιχα) η πολλαπλασιαστική συνάρτηση δίνει τα καλύτερα ποσοστά ακρίβειας, στη συνέχεια η μέθοδος PROMETHEE και τελευταία έρχονται τα αποτελέσματα του σταθμισμένου μέσου όρου.

Η δεύτερη παρατήρηση, αφορά την επίδραση της μη ομοιόμορφης κατανομής των δεδομένων στα αποτελέσματα. Όπως διαπιστώθηκε, όταν οι επιδόσεις των εναλλακτικών στα κριτήρια παρουσιάζουν ασυμμετρία η πιθανότητα επιλογής της καλύτερης εναλλακτικής αυξάνεται, χωρίς να αλλάζει η κατάταξη των βαρών (ROC, RS, ίσα) στο πρώτο πείραμα. Αντίθετα στο δεύτερο, οι επιδόσεις βελτιώνονται μόνο στην μέθοδο του σταθμισμένου μέσου όρου και της PROMETHEE.

Η τρίτη παρατήρηση αφορά την επιρροή της εντροπίας στα αποτελέσματα των μεθόδων. Συγκεκριμένα στην περίπτωση του ακριβή προσδιορισμού της κατάταξης των κριτηρίων, στη μέθοδο του σταθμισμένου μέσου όρου η εντροπία βελτιώνει τα αποτελέσματα, σε αντίθεση με την πολλαπλασιαστική συνάρτηση και τη μέθοδο PROMETHEE όπου η συγκεκριμένη βελτίωση παρουσιάζεται μόνο στην περίπτωση των τυχαίων βαρών. Ακόμη πιο περιορισμένη είναι η συμβολή της εντροπίας στην περίπτωση του 2ου πειράματος καθώς, σε όλες τις μεθόδους τα ποσοστά ακρίβειας που προκύπτουν είναι χαμηλότερα των αντίστοιχων, που επιτυγχάνονται χωρίς την εντροπία.

Όσον αφορά τις διαφορές ως προς τη σχετική αποτελεσματικότητα των βαρών για τις μεθόδους που μελετήθηκαν παρατηρήθηκαν τα εξής:

1) Στην περίπτωση του ακριβή προσδιορισμού της σημαντικότητας των κριτηρίων, τα βάρη ROC διατηρούν το πλεονέκτημα τους, έχοντας τα καλύτερα ποσοστά ακρίβειας ανεξάρτητα της μεθόδου που χρησιμοποιείται.
2) Αντίθετα στην περίπτωση του μη ακριβή προσδιορισμού των κριτηρίων τα τυχαία βάρη είναι αυτά που δίνουν τα καλύτερα αποτελέσματα, ακολουθούμενα από τα ROC, τα RS και τα ίσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια σύγκρισης διαφόρων μεθόδων εκτίμησης βαρών των κριτηρίων σε προβλήματα πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων. Πραγματοποιήθηκαν δύο βασικά πειράματα, όπου το πρώτο στηρίχθηκε στην υπόθεση ότι ο αποφασίζοντας είναι σίγουρος για την κατάταξη των κριτηρίων και το δεύτερο στην υπόθεση ότι δεν υπάρχει κάποια πληροφορία για την παραπάνω κατάταξη.

Τα βάρη που μελετήθηκαν ήταν τα ROC, τα RS, τα τυχαία, τα πραγματικά και τα ίσα. Οι μέθοδοι εκτίμησης βαρών που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ο σταθμισμένος μέσος όρος, η πολλαπλασιαστική συνάρτηση αξιών και η PROMETHEE. Για κάθε ένα από τα πειράματα, μελετήθηκαν οι παραπάνω μέθοδοι ώστε να συγκριθούν τα μεταξύ τους αποτελέσματα, της ομοιόμορφης και μη ομοιόμορφης κατανομής. Ταυτόχρονα εξετάστηκε η επίδραση που έχει η χρησιμοποίηση της εντροπίας ως μέτρου «πληροφοριακής» αξίας των κριτηρίων. Το γενικό συμπέρασμα που προέκυψε ήταν ότι τα βάρη ROC είναι αποδοτικότερα όλων καθώς δίνουν τη μεγαλύτερη ακρίβεια με οποιαδήποτε μέθοδο αναλυθούν. Αντίθετα η αποδοτικότερη μέθοδος φαίνεται να είναι η πολλαπλασιαστική συνάρτηση καθώς αποδίδει τις μεγαλύτερες αποδόσεις σε όλους τους τύπους βαρών.

Η χρησιμότητα που προσφέρεται από την ανάλυσης και τα αποτελέσματα επικεντρώνεται κυρίως στα εξής σημεία:

- Πραγματοποιήθηκε επέκταση προηγούμενων μεθόδων, εξετάζοντας διάφορα μοντέλα σύνθεσης των κριτηρίων και ένα ευρύτερο σύνολο δεδομένων.

- Σε πρακτικό επίπεδο η ανάλυση αυτή οδηγεί σε χρήσιμα συμπεράσματα όσον αφορά τον καθορισμό της σημαντικότητας των κριτηρίων σε προβλήματα πολυκριτήριας αξιολόγησης.

Η παρούσα εργασία έχει περιθώρια επέκτασης, κάνοντας χρήση των βαρών ROD και RR όπως έχουν αναλυθεί στο 2^{ο} Κεφάλαιο, ώστε να διαπιστωθεί το εύρος της ισχύς των συμπερασμάτων που προέκυψαν, αλλά και το πώς αντιδρούν οι διάφορες μέθοδοι εκτίμησης στη παρουσία των συγκεκριμένων βαρών. Μία ακόμη επέκταση για επιπλέον μελέτη αποτελεί η εξέταση και άλλων πολυκριτήριων μεθόδων (ELECTRE, AHP, TOPSIS, κ.α) καθώς και η σύγκριση με διαδικασίες που βασίζονται στην περιβάλλοντα ανάλυση δεδομένων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alan, J. (1999), “Entropy in Multiattribute Problems” *Journal of Multi-criteria Decision Analysis 8,* 61-70.

Barron, F. and Barrett, M. (1996), “Decision quality using ranked attribute weights”. *Management Science 42,* 1515-1525.

Belton ,V. and Stewart, T. J. (2002). *Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach*. Kluwer Academic Publishers: Norwell, MA.

Brans, J. and Vincke, P. (1985), “A preference ranking organization method”, *Management Science 31(6),* 647-656.

Nadeau, R and Landry, M. (1982), “*L’aide á La Decision.Nature, Instruments et Perspectives d’Avenir”*, Quibec, Canada, Presses de l’Universite Laval.

Einhorn, H. and McCoach, W. (1977), “A simple multiattribute utility procedure for evaluation”, in Zionts, S. (ed.), *Multiple Criteria Problem Solving, Proceedings of a Conference*, Buffalo, NY.

Jia, J., Fischer G.W. and Dyer J. S. (1998), “Attribute Weighting Methods and Decision Quality in the Presence of Response Error: A Simulation Study ”, *Journal of Behavioral Decision Making, 11,* 85-105.

Jessop, A., (1995), *Informed Assessments*: *An Introduction to Information*, *Entropy and Statistics*, Hemel Hempstead: Ellis Horwood.

Roberts, R. and Goodwin, P. (2002), “Weight Approximations in Multi-attribute Decision Models”, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis 11: 291-303.*

Roy, B. (1996), *Multicriteria Methodology for Decision Aiding.* Dordrecht: Kluwer Academic.

Shannon, C. E. (1948), "A mathematical theory of communication", *Bell Syst. Tech. J.*, **27**, 379–423, 623–656 [Reprinted in Shannon, C.E. and Weaver, W., 1949, *The Mathematical Theory of Communication*, Urbana: University of Illinois Press].

Stillwell, W., D. Seaver, and W. Edwards (1981) "A comparison of weight approximation techniques in multiattribute decision making". *Organizational Behavior and Human Performance 28,* 62-77.

Suh, N. P., (1990), *The Principles of Design*, New York: OxfordUniversity Press.

Yoon, K. P. and Hwang, C-L., (1995), *Multiple Attribute Decision Making: An Introduction*, Thousand Oaks, CA: Sage.

Zeleny, M. (1982) *Multiple Criteria Decision Making*. New York: McGraw-Hill.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Δούμπος, Μ. (2007), "Πολυκριτήρια Συστήματα Αποφάσεων", Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης.