



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΠΟΥ ΥΠΕΒΛΗΘΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΡΙΚΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ
ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Υπό
Δήμητρα Παπαδάκη

Χανιά, Μάρτιος 2009

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εγκρίνεται από τους:

1. Επίκουρο Καθηγητή Ηλία Κοσματόπουλο (Επιβλέπων)
2. Καθηγητή Μάρκο Παπαγεωργίου
3. Λέκτορα Ιωάννη Παπαμιχαήλ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου, Κύριο Ηλία Κοσματόπουλο, για την απεριόριστη βοήθεια και καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την μητέρα μου, τους συγγενείς μου και τους φίλους μου για την στήριξη που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια και που συνεχίζουν αμείωτα να μου προσφέρουν.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	<u>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>	4
2	<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΕΤΑΙ ΣΕ SOS ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ</u>	7
	2.1 <u>Εισαγωγή</u>	7
	2.2 <u>Προκαταρκτικά</u>	8
	2.3 <u>Διατύπωση του προβλήματος και μία συνοπτική επισκόπηση των υπαρχουσών προσεγγίσεων</u>	11
	2.4 <u>Παρουσίαση της μεθοδολογίας</u>	16
3	<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΚΥΡΤΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ</u>	24
	3.1 <u>Εισαγωγή</u>	24
	3.2 <u>Σημειώσεις και προκαταρκτικά</u>	26
	3.3 <u>Η προτεινόμενη μεθοδολογία</u>	28
4	<u>ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ</u>	37
5	<u>ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ</u>	40
6	<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</u>	58
	<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>	61

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρά την πρόσφατη πρόοδο στον τομέα των συστημάτων ελέγχου, το πρόβλημα του σχεδιασμού αποδοτικών ελεγκτών για μη-γραμμικά συστήματα ελέγχου πολλαπλών εισόδων (Non-Linear Multi-Input Systems) παραμένει ένα αρκετά πολύπλοκο ζήτημα. Επιπλέον, στην περίπτωση των μη-γραμμικών συστημάτων με μερικώς ή πλήρως άγνωστη δυναμική, η πλειοψηφία των υπαρχουσών προσεγγίσεων ελέγχου εγγυάται ικανοποιητική απόδοση των συστημάτων κλειστού βρόγχου υπό την προϋπόθεση ότι το σύστημα ικανοποιεί ένα αυστηρό σύνολο υποθέσεων το οποίο δεν πληρείται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές. Κάποιες προσεγγίσεις που πέτυχαν την αφαίρεση των προαναφερθέντων αυστηρών υποθέσεων μπορεί να επιδεικνύουν εξαιρετικά φτωχή μεταβατική συμπεριφορά, γεγονός που αποτρέπει την ευρεία εφαρμογή τους σε πραγματικά προβλήματα ελέγχου, π.χ. [9,10,15].

Μια προσέγγιση η οποία έχει την δυνατότητα να εφαρμοστεί σε γενικά μη-γραμμικά συστήματα είναι η State-Dependent Riccati Equation (SDRE) [1]. Η εξαρτώμενη από το διάνυσμα κατάστασης (state-dependent) εξίσωση Riccati (SDRE) αναφέρεται στην χρήση των SDREs για την κατασκευή μη-γραμμικών νόμων ελέγχου με ανατροφοδότηση για μη-γραμμικά συστήματα [2]-[4]. Η βασική ιδέα είναι η αναπαράσταση του μη-γραμμικού συστήματος:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (1.1)$$

στην μορφή

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (1.2)$$

και η χρήση της ανατροφοδότησης

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x$$

όπου το $P(x)$ υπολογίζεται από την SDRE

$$P(x)A(x) + A^T(x)P(x) + Q(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) = 0$$

και τα $Q(\cdot)$ και $R(\cdot)$ είναι πίνακες σχεδίασης που ικανοποιούν την κατά τόπους συνθήκη θετικής ορισιμότητας

$$Q(x) > 0 \quad R(x) > 0.$$

Οι δυναμικές κλειστού βρόχου που προκύπτουν έχουν μία ημι-γραμμική δομή της μορφής

$$\dot{x} = \left(A(x) - R^{-1}(x)B(x)B^T(x)P(x) \right) x$$

όπου ο πίνακας κλειστού βρόχου ικανοποιεί την συνθήκη Hurwitz

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left(A(x) - R^{-1}(x)B(x)B^T(x)P(x) \right) < 0.$$

Παρά το γεγονός ότι η συνθήκη αυτή δεν είναι επαρκής για την εξασφάλιση της ευστάθειας των δυναμικών κλειστού βρόχου, προσομοιώσεις σε διάφορα παραδείγματα έχουν δείξει ότι αυτή η διαδικασία είναι ικανή να παράξει αποτελεσματικούς νόμους ελέγχου. Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε η εφαρμογή της προαναφερθείσας μεθόδου σε ένα σύστημα ελέγχου των γωνιακών ταχυτήτων μίας ιπτάμενης μάζας χωρίς ωστόσο επιτυχία.

Η ανεπιτυχής εφαρμογή της μεθόδου SDRE στο υπό εξέταση σύστημά μας, οδήγησε στην διερεύνηση και εφαρμογή δύο διαφορετικών επεκτάσεων της μεθόδου αυτής. Η πρώτη εκ των δύο αυτών προσεγγίσεων που μελετήθηκε, είναι μία μεθοδολογία η οποία κάνει χρήση της συνάρτησης ελέγχου Lyapunov (Control Lyapunov Function, CLF) καθώς και κανόνων που εισάγονται από την θεωρία της Διάσπασης σε Αθροίσματα Τετραγώνων (Sum Of Squares Decomposition, SOSD) [5], η οποία βασίζεται σε τεχνικές διάσπασης σε αθροίσματα τετραγώνων

πολυωνύμων με πολλές μεταβλητές που μπορούν να εφαρμοστούν ικανοποιητικά με την χρήση ημιορισμένου (semidefinite) προγραμματισμού.

Παρά όμως το γεγονός ότι θεωρητικά η προσέγγιση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία σε ένα απλό μη-γραμμικό σύστημα, όπως αυτό που μελετάται στην παρούσα διατριβή, στην πράξη κατά την διαδικασία της επίλυσης προκύπτει ένα τεράστιο πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο να λυθεί.

Η δεύτερη μεθοδολογία, επέκταση της μεθόδου SDRE που εξετάστηκε, είναι μία νέα μεθοδολογία που βασίζεται σε μεθοδολογίες προσέγγισης της συνάρτησης ελέγχου Lyapunov (CLF) κάνοντας χρήση της θεωρίας κυρτής βελτιστοποίησης. Αυτή είναι και η μόνη προσέγγιση που εφαρμόστηκε επιτυχώς στο σύστημα μας. Όπως ήταν αναμενόμενο η αποδοτικότητα της προσεγγίσεως αυτής εξαρτάται άμεσα από την επιλογή των κατάλληλων σχεδιαστικών παραμέτρων του αλγορίθμου που υλοποιεί την μέθοδο αυτή. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την ανάγκη της εφαρμογής ανάλυσης ευαισθησίας για τον εντοπισμό του βέλτιστου συνόλου σχεδιαστικών παραμέτρων. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι αυτές οι σχεδιαστικές παράμετροι είναι αντίστοιχες με τις παραμέτρους που απαντώνται στον έλεγχο μη-γραμμικών συστημάτων.

Στα πλαίσια της εργασίας αυτής θα αξιολογηθεί μία νέα μεθοδολογία αυτομάτου ελέγχου σε μη-γραμμικά συστήματα με πολυωνυμικούς όρους. Σύμφωνα με θεωρητική ανάλυση που έχει γίνει, η μεθοδολογία αυτή εγγυάται αποτελεσματική απόκριση του συστήματος ελέγχου τόσο όσον αφορά στο σφάλμα σταθερής κατάστασης όσο και στην μεταβατική συμπεριφορά του συστήματος. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής θα διερευνηθεί η ισχύς των προαναφερθέντων θεωρητικών αποτελεσμάτων μέσω πειραμάτων προσομοίωσης.

Στα δύο κεφάλαια που ακολουθούν γίνεται μια εκτενέστερη ανάλυση των δύο άνωθεν μεθοδολογιών (επεκτάσεων της μεθόδου SDRE).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΕΤΑΙ ΣΕ SOS

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζεται μία μεθοδολογία ελέγχου μη-γραμμικών συστημάτων που έχει προταθεί στο [6]. Τα κύρια χαρακτηριστικά της μεθοδολογίας αυτής μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- 1) Η μεθοδολογία αυτή χρησιμοποιεί συναρτήσεις προσεγγιστών (συγκεκριμένα, πολυώνυμα).
- 2) Με βάση τις εκτιμήσεις των διανυσματικών πεδίων του συστήματος, υπολογίζεται στη μεθοδολογία αυτή μία προσέγγιση αθροίσματος τετραγώνων (Sum of Squares (SOS)) της CLF του συστήματος. Μια τέτοια προσέγγιση χρησιμοποιείται προκειμένου να ληφθεί μια εκτίμηση της χρονικής παραγώγου της CLF του συστήματος. Η κατασκευή της προαναφερθείσας προσέγγισης SOS είναι βασισμένη σε μια πρόσφατα εισαχθείσα προσέγγιση σχεδιασμού ελέγχου [18] για μη-γραμμικά συστήματα με γνωστά πολυωνυμικά διανυσματικά πεδία.

Η μεθοδολογία αυτή υιοθετεί την προσέγγιση των Prajna και λοιποί [18] για τον online υπολογισμό της εκτίμησης της CLF του συστήματος. Σύμφωνα με την προσέγγιση [18], η κατασκευή της CLF για μια κατηγορία μη-γραμμικών συστημάτων με γνωστά πολυωνυμικά διανυσματικά πεδία είναι ισοδύναμη με τη λύση ενός συνόλου γραμμικών μητρών ανισοτήτων εξαρτώμενων από την κατάσταση (LMIs) που μπορούν να χαλαρωθούν περαιτέρω σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης SOS του οποίου η λύση είναι υπολογιστικά απλή (σε αντιδιαστολή με τη λύση γραμμικών μητρών ανισοτήτων εξαρτώμενων από την κατάσταση (LMIs) που είναι ένα πρόβλημα απείρων διαστάσεων). Όπως θα φανεί στην ανάλυση της μεθοδολογίας αυτής, η χρήση της, υπολογιστικά απλής, προσεγγιστικής λύσης SOS είναι

ικανοποιητική έτσι ώστε η μεθοδολογία αυτή να παρέχει ευστάθεια κλειστού βρόγχου και καλή μεταβατική απόδοση.

2.2 Προκαταρκτικά

Τα \mathbb{Z}, \mathbb{R} δείχνουν τα σύνολα των μη αρνητικών ακέραιων και πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα.

Για ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, το $|x|$ δηλώνει την Ευκλείδεια νόρμα του x (π.χ., $|x| = \sqrt{x^T x}$), ενώ για ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n^2}$, το $|A|$ δηλώνει την νόρμα κατά Frobenius του πίνακα A .

Μια συνάρτηση f λέγεται ότι είναι C^m , όπου το m είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, εάν είναι ομοιόμορφα συνεχής και οι m πρώτες παράγωγοι της είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

Το I_n δηλώνει τον μοναδιαίο πίνακα διάστασης n .

Λέμε ότι μία συνάρτηση $\chi: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ είναι της κλάσης K (συμβολικά, $\chi \in K$) όταν η χ είναι συνεχής, αυστηρά αύξουσα, και $\chi(0) = 0$. Λέμε επίσης, ότι μία συνάρτηση $\chi: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ είναι της κλάσης K_∞ (συμβολικά, $\chi \in K_\infty$) εάν είναι της κλάσης K και, επιπλέον, $\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r) = \infty$.

Για έναν συμμετρικό πίνακα A , η σημείωση $A \succ 0$ ($A \geq 0$) χρησιμοποιείται για να δείξει ότι ο A είναι ένας θετικά ορισμένος (αντίστοιχα θετικά ημι-ορισμένος) πίνακας.

Το γινόμενο Hadamard (ή Schur) δύο διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως $x \circ y = [x_1 y_1, \dots, x_n y_n]^T$.

Προκειμένου να αποφευχθεί η χρήση πάρα πολλών μεταβλητών και σταθερών, θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την ακόλουθη σημείωση: θεωρούμε ένα υποσύνολο $X \subseteq \mathfrak{R}^n$ και έστω $f_c : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^m$ είναι μια συνάρτηση παραμετροποιήσιμη από μία θετική σταθερά c . Ο συμβολισμός $f_c(x) = O_\chi(c)$ θα χρησιμοποιηθεί σε όλη την εργασία - μερικές φορές με μια μικρή κατάχρηση του συμβολισμού αυτού, εάν υπάρχει συνάρτηση $\chi \in K$ τέτοια ώστε $|f_c(x)| \leq \chi(c), \forall x \in X$.

Τέλος, η σημείωση μ.π.1 χρησιμοποιείται για να δηλώσει «με πιθανότητα 1».

Επίσης, στην ανάλυση των ιδιοτήτων του αλγορίθμου αυτού θα χρησιμοποιήσουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 2.1: Θεωρούμε ένα υποσύνολο $A \subset \mathfrak{R}^n$ μη μηδενικού μέτρου Lebesgue (που δεν απαραίτητα συνδεδεμένο) και υποθέτουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $x \in \mathfrak{R}^n$ παράγεται σύμφωνα με μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f . Λέμε ότι η f είναι μια αυστηρά θετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στο υποσύνολο A εάν $\int_A f(x) dx = 1, f(x) > 0$ για όλα τα $x \in A$.

Ορισμός 2.2: Η μητρική συνάρτηση $f : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^{L \times m}$ λέγεται ότι είναι ένα μονώνυμο διάστασης $L \times m$ (συμβολικά, $f \in M_n^{L \times m}$) εάν τα στοιχεία της f είναι της μορφής $f_{ij}(x) = x_1^{a_{1,ij}} x_2^{a_{2,ij}} \dots x_n^{a_{n,ij}}, i \in \{1, \dots, L\}, j \in \{1, \dots, m\}$ για κάποιους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς $a_{1,ij}, a_{2,ij}, \dots, a_{n,ij}$ έτσι ώστε για κάθε $i, \iota \in \{1, \dots, L\}, i \neq \iota$, έχουμε ότι $[a_{1,ij}, a_{2,ij}, \dots, a_{n,ij}] \neq [a_{1,i\iota}, a_{2,i\iota}, \dots, a_{n,i\iota}]$.

Ορισμός 2.3: Έστω $X \subset \mathfrak{R}^n$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο και $g : X \mapsto \mathfrak{R}^{k \times m}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Έστω επίσης ότι $f \in M_n^{L \times m}$ έχουμε ότι

$$\Theta(g, f, X) \equiv \arg \min_{\theta \in \mathfrak{R}^{k \times L}} \sup_{x \in X} |g(x) - \theta f(x)|$$

και

$$N(g, f, X) \equiv g(x) - \Theta(g, f, X)f(x)$$

Με βάση τυποποιημένα αποτελέσματα για τα όρια της προσέγγισης χρησιμοποιώντας πολυωνυμική προσέγγιση, βλέπε π.χ. [14], μπορεί να προκύψει το ακόλουθο λήμμα που θα αποδειχθεί χρήσιμο στην ανάλυση του αλγορίθμου αυτού:

Λήμμα 2.1: Για κάθε συμπαγές υποσύνολο $X \subset \mathfrak{R}^n$, οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $g : X \mapsto \mathfrak{R}^{k \times m}$ και οποιαδήποτε $f \in M_n^{L \times m}$ ισχύει το ακόλουθο:

$$\sup_{x \in X} |N(g, f, X)| \equiv O_\chi(1/L)$$

Κλείνουμε αυτήν την υποενότητα με την εισαγωγή της έννοιας των πολυωνύμων SOS και μερικών αποτελεσμάτων σχετικά με τις ιδιότητές τους.

Ορισμός 2.4: Μια μητρική συνάρτηση $p : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^{k \times m}$ λέγεται ότι είναι ένα πολυώνυμο (συμβολικά $p \in P_n^{k \times m}$) εάν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός L έτσι ώστε

$$p(x) = \theta^f(x)$$

για κάποια $f \in M_n^{L \times m}$ και έναν σταθερό πίνακα $\theta \in \mathfrak{R}^{k \times L}$. Έστω επίσης ότι X είναι ένα υποσύνολο του \mathfrak{R}^n . Μία πολυωνυμική μητρική συνάρτηση $p \in P_n^1$ λέγεται ότι είναι ένα πολυώνυμο SOS στο X (συμβολικά $p \in SOS_n(X)$) εάν υπάρχουν $p_1, p_2, \dots, p_k \in P_n^1$ έτσι ώστε

$$p(x) = \sum_{i=1}^k p_i^2(x), \forall x \in X$$

Τέλος, μία πολυωνυμική μητρική συνάρτηση $p \in P_n^1$ λέγεται ότι είναι ένα θετικά ορισμένο (PD) πολυώνυμο στο X (συμβολικά $p \in PD_n(X)$) εάν

$$p(x) \geq 0, \forall x \in X \quad \text{και} \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Το επόμενο λήμμα είναι ένα άμεσο πόρισμα του κύριου αποτελέσματος του [13]:

Λήμμα 2.2 [13]: Έστω X είναι ένα υποσύνολο του \mathfrak{R}^n . Για κάθε $p \in PD_n(X)$ και κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός $r^* > 0$ έτσι ώστε

$$p(x) + \delta \sum_{k=0}^r \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{2k}}{k!} \in SOS_n(X), \forall r \geq r^* \quad (2.1)$$

2.3 Διατύπωση του προβλήματος και μία συνοπτική επισκόπηση των υπαρχουσών προσεγγίσεων

Θεωρούμε ένα μη-γραμμικό σύστημα πολλαπλών εισόδων που έχει την ακόλουθη μορφή

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u, \quad x(0) = x_0 \quad (2.2)$$

όπου τα $x, x(0) \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}^m$ δηλώνουν τα διανύσματα των καταστάσεων του συστήματος, την αρχική κατάσταση του συστήματος και τις εισόδους ελέγχου, αντίστοιχα, τα F, G είναι συνεχή διανυσματικά πεδία κατάλληλων διαστάσεων και υποθέτουμε ότι επιθυμείται να κατασκευαστεί ένας ελεγκτής για το (2.2). Προκειμένου να έχουμε ένα καλώς ορισμένο πρόβλημα θα υποθέσουμε ότι το σύστημα (2.2) είναι ελέγξιμο, δηλαδή θα υποθέσουμε ότι

(A1) υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $k: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^m$ έτσι ώστε οι λύσεις $x(t)$ του συστήματος κλειστού βρόγχου $\dot{x} = F(x) + G(x)k(x)$ συγκλίνουν στο μηδέν ασυμπτωτικά, για όλα τα $x(0) \in \mathfrak{R}^n$.

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές ελέγχου η ακριβής μορφή των διανυσματικών πεδίων F, G είναι μερικώς ή πλήρως άγνωστη. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα της κατασκευής ελεγκτών για συστήματα της μορφής (2.2) στην περίπτωση όπου τα διανυσματικά τους πεδία F, G είναι μερικώς ή πλήρως άγνωστα είναι μεγάλης θεωρητικής καθώς και πρακτικής σημασίας.

Μια σημαντική ερευνητική προσπάθεια έχει αφιερωθεί τις τελευταίες δεκαετίες για την ανάπτυξη και την εφαρμογή σχεδίων ελέγχου για μη-γραμμικά συστήματα με μερικώς ή πλήρως άγνωστη δυναμική. Η πλειοψηφία αυτών των προσεγγίσεων χρησιμοποιεί κάποιο τύπο συναρτήσεων προσεγγιστών (π.χ. πολυώνυμα, νευρωνικά δίκτυα, ασαφή συστήματα, κ.λπ.) προκειμένου να προσεγγιστούν τα άγνωστα διανυσματικά πεδία F, G ως γραμμικός συνδυασμός σταθερών άγνωστων παραμέτρων και γνωστών συναρτήσεων παλινδρόμησης, δηλ.

$$F(x) = \theta_1 f(x) + v_1(x), \quad G(x) = \theta_2 g(x) + v_2(x) \quad (2.3)$$

όπου τα θ_1, θ_2 είναι άγνωστοι σταθεροί πίνακες κατάλληλων διαστάσεων, τα f, g δηλώνουν τα διανύσματα παλινδρόμησης και τα $v_i, i = 1, 2$ δηλώνουν τους όρους σφάλματος του μοντέλου. Τυπικά αποτελέσματα από τη θεωρία της προσέγγισης συναρτήσεων, βλέπε π.χ. [14] και τις αναφορές σε αυτό, ορίζουν ότι το μέγεθος των όρων του σφάλματος του μοντέλου v_i μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό υπό τον όρο ότι τα διανύσματα παλινδρόμησης f, g επιλέγονται κατάλληλα και το x βρίσκεται μέσα σε ένα συμπαγές σύνολο. Χρησιμοποιώντας την (2.3), το πρόβλημα της σταθεροποίησης¹ του (2.2) μετατρέπεται σε ένα τυπικό εύρωστο πρόβλημα σταθεροποίησης, όπου ο στόχος είναι να σχεδιαστεί ένας σταθεροποιητής για το μη-γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = \theta_1 f(x) + \theta_2 g(x)u + \bar{v}(x, u) \quad (2.4)$$

¹ Για να είμαστε πιο ακριβής, υπό την προσέγγιση (2.4) το πρόβλημα της ημι-απόλυτης αντί της απόλυτης σταθεροποίησης μπορεί μόνο να εξεταστεί, δηλαδή το πρόβλημα κατασκευής ενός ελεγκτή για το σύστημα (2.2) δεδομένου ότι η αρχική του κατάσταση $x(0)$ βρίσκεται μέσα σε ένα προκαθορισμένο φραγμένο υποσύνολο του \mathfrak{R}^n .

όπου τα f, g είναι γνωστές διανυσματικές συναρτήσεις, τα θ_1, θ_2 είναι άγνωστοι σταθεροί πίνακες και το \bar{v} αντιστοιχεί στον όρο «διαταραχής» $v_1(x) + v_2(x)u$. Δυστυχώς, τα προσαρμοστικά σχέδια εύρωστου ελέγχου για μη-γραμμικά συστήματα παρέχουν αποδοτικές λύσεις μόνο κάτω από ένα αυστηρό σύνολο υποθέσεων όπως όταν το πρόσημο του διανυσματικού πεδίου εισόδου (που αντιστοιχεί στο πρόσημο του κέρδους υψηλής συχνότητας στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων SISO) είναι γνωστό (βλέπε π.χ. [12], [19], [9]). Η απαίτηση της γνώσης του πρόσημου του διανυσματικού πεδίου εισόδου για συστήματα πολλαπλών εισόδων είναι ένα πολύ περίπλοκο ζήτημα ακόμη και στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων (δείτε π.χ. [22], [23] και παράγραφος 9.7 στο [8]).

Αφ' ετέρου, μερικά σχέδια ελέγχου που δεν απαιτούν ακριβείς υποθέσεις όπως οι προαναφερθείσες, κατέχουν το σοβαρό μειονέκτημα της μη εγγύησης ικανοποιητικής μεταβατικής απόδοσης σε συστήματα κλειστού βρόγχου. Στην πραγματικότητα, οι περισσότερες από αυτές τις προσεγγίσεις υιοθετούν σχέδια βασισμένα σε CLF προκειμένου να υπερνικηθεί το πρόβλημα της επιβολής αυστηρών υποθέσεων στη δυναμική του συστήματος. Ακριβέστερα, σύμφωνα με τα τυπικά αποτελέσματα από τη θεωρία του μη-γραμμικού ελέγχου, βλέπε π.χ. [20], [21], η υπόθεση (A1) υπονοεί την ύπαρξη μίας, τουλάχιστον C^1 , θετικά ορισμένης, με απεριόριστη ακτίνα CLF $V : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}_+$ η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$\inf_u \left\{ \frac{\partial V^T}{\partial x} (F(x) + G(x)u) \right\} < 0, \forall x \neq 0 \quad (2.5)$$

Η ιδιότητα της CLF στην σχέση (2.5) συνδυαζόμενη με προσαρμοστικές μεθοδολογίες ή άλλες μεθοδολογίες ελεγκτών έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς συγγραφείς προκειμένου να παραχθούν απόλυτα ή ημι-απόλυτα σχέδια ελέγχου σταθεροποίησης για το (2.2). Ο Pomet [17] ήταν ο πρώτος συγγραφέας ο οποίος βρήκε ένα σχέδιο το οποίο εγγυάται απόλυτη σταθεροποίηση μιας γενικής κατηγορίας άγνωστων μη-γραμμικών συστημάτων. Η μεθοδολογία του Pomet απευθυνόταν κυρίως στην θεωρητική ερώτηση «για ένα γενικό μη-γραμμικό σταθεροποιήσιμο σύστημα, υπάρχει ένας ελεγκτής ο οποίος σταθεροποιεί ασυμπτωτικά την κατάσταση του συστήματος;» και οι ιδιότητες μεταβατικής

απόδοσης της μεθοδολογίας του είναι πολύ δύσκολο να χαρακτηριστούν. Μια διαφορετική προσέγγιση χρησιμοποιεί μία προσεγγιστική συνάρτηση για την CLF συνάρτηση V :

$$V(x) = \psi^T u(x) + v_3(x) \quad (2.6)$$

όπου, όπως στην περίπτωση (2.3), το ψ είναι ένα διάνυσμα σταθερών άγνωστων παραμέτρων, το v είναι ένα διάνυσμα γνωστών όρων παλινδρόμησης και το v_3 είναι ο όρος του σφάλματος του μοντέλου το οποίο μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό σε ένα συμπαγές σύνολο, υπό τον όρο ότι το v επιλέγεται κατάλληλα. Ο συνδυασμός της σχέσης (2.3) με την (2.6) οδηγεί στην ακόλουθη σχέση για την χρονική παράγωγο της CLF συνάρτησης V

$$\dot{V}(x) = \mathcal{G}_1^T f_v(x) + \mathcal{G}_2^T g_v(x)u + \bar{v}(x,u) \quad (2.7)$$

όπου τα άγνωστα σταθερά διανύσματα $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ και οι γνωστές συναρτήσεις f_v, f_u αντιστοιχούν στα διανύσματα (πίνακες) με στοιχεία $\psi_i \theta_{1,j}, \psi_i \theta_{2,j}$ και $\nabla u_{ij}(x) f_k(x), \nabla u_{ij}(x) g_k(x)$, αντίστοιχα, ενώ ο όρος \bar{v} είναι «ανάλογος» προς το $v_3(x)$ και το $\bar{v}(x,u)$. Η εξίσωση (2.7) είναι μία τυπική γραμμική, ως προς τις άγνωστες παραμέτρους, μορφή ελέγχου. Ένας έλεγχος με ανατροφοδότηση της μορφής $u = -\frac{\hat{\mathcal{G}}_1^T f_v(x) + \kappa(x)}{\hat{\mathcal{G}}_2^T g_v(x)}$, όπου $\hat{\mathcal{G}}_1, \hat{\mathcal{G}}_2$ είναι εκτιμήσεις των $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ και $\kappa(x)$ είναι

μια κατάλληλα ορισμένη από τον χρήστη θετικά ορισμένη συνάρτηση. Έτσι η εξίσωση (2.7) μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή παραμέτρων σφάλματος:

$$\dot{V}(x) = -\kappa(x) + \tilde{\mathcal{G}}_1^T f_v(x) + \tilde{\mathcal{G}}_2^T g_v(x)u + \bar{v}(x,u) \quad (2.8)$$

όπου τα $\tilde{\mathcal{G}}_i = \mathcal{G}_i - \hat{\mathcal{G}}_i, i = 1,2$ δηλώνουν τα σφάλματα της εκτίμησης των παραμέτρων. Κλασσικοί προσαρμοστικοί νόμοι για την ρύθμιση των $\hat{\mathcal{G}}_i$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να δοθεί η χρονική παράγωγος \dot{W} της παρόμοιας με

την Lyapunov συνάρτησης (εδώ το c είναι μια κατάλληλα ορισμένη σχεδιαστική σταθερά)

$$W = V(x) + c|\tilde{\theta}_1|^2 + c|\tilde{\theta}_2|^2$$

αρνητικά ορισμένη έξω από ένα υποσύνολο κεντροποιημένο στο $x = 0$.

Δυστυχώς, ο ανωτέρω συλλογισμός λειτουργεί καλώς εφ' όσον το $\hat{\theta}_2^T(t)g_v(x(t))$ δεν διασχίζει το μηδέν. Στην περίπτωση όπου το $\hat{\theta}_2^T(t)g_v(x(t))$ γίνεται μηδέν ή βρίσκεται πολύ κοντά στο μηδέν η είσοδος ελέγχου $u = -\frac{\hat{\theta}_1^T f_v(x) + \kappa(x)}{\hat{\theta}_2^T g_v(x)}$

γίνεται άπειρη (ή πολύ μεγάλη) γεγονός που οδηγεί σε αστάθεια. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα ένα πιθανός τρόπος είναι να τροποποιηθούν οι εκτιμήσεις $\hat{\theta}_i(t)$ όταν το $|\hat{\theta}_2^T(t)g_v(x(t))|$ φθάνει σε έναν χαμηλό όριο [15]. Μια τέτοια

λογική εντούτοις, μπορεί να αποδειχθεί προβληματική. Στις χρονικές στιγμές t_s όπου το $\hat{\theta}_i(t)$ τροποποιείται, η συνάρτηση W μπορεί να αυξηθεί (π.χ., $W(t_s^+) > W(t_s^-)$) το οποίο, στη συνέχεια, μπορεί να οδηγήσει σε φτωχή απόδοση ή ακόμη και σε αστάθεια κλειστού βρόγχου. Μια εναλλακτική λογική έχει προταθεί από τον Κοσματόπουλο

και τους συνεργάτες του [10], εναλλάσσοντας τον ελεγκτή $u = -\frac{\hat{\theta}_1^T f_v(x) + \kappa(x)}{\hat{\theta}_2^T g_v(x)}$ με

έναν «derivative-like feedback» ελεγκτή στα χρονικά διαστήματα όπου το $|\hat{\theta}_2^T(t)g_v(x(t))|$ γίνεται μικρό. Εκτός από το γεγονός ότι ο ελεγκτής που περιγράφεται στο [10] απαιτεί μία αρκετά περίπλοκη εφαρμογή, η μεταβατική απόδοσή του μπορεί να είναι ιδιαίτερα κακή όπως έχει φανεί σε διάφορα πειράματα.

Όπως αναφέρεται ήδη στην εισαγωγή, σε αυτή την εργασία περιγράφεται μία μεθοδολογία ελέγχου που υπερνικά τις προαναφερθείσες ανεπάρκειες των υπάρχουσών προσεγγίσεων. Έπειτα περιγράφουμε και αναλύουμε τη μεθοδολογία αυτή.

2.4 Παρουσίαση της μεθοδολογίας

Αυτό το σχέδιο ελέγχου υιοθετεί την προσέγγιση της προσεγγιστικής συνάρτησης που περιγράφεται στην (2.3). Όπως συνηθίζεται στις προσεγγίσεις σχεδιασμού ελέγχου που χρησιμοποιούν συναρτήσεις προσεγγιστών, βλέπε π.χ. [11], [15], [23] και τις αναφορές σε αυτά, εξετάζουμε το πρόβλημα ημι-απόλυτης σταθεροποίησης του (2.2), δηλαδή, θα υποθέσουμε ότι το αρχικό διάνυσμα κατάστασης x_0 βρίσκεται σε ένα προκαθορισμένο φραγμένο υποσύνολο $X \subset \mathfrak{R}^n$. Επιπλέον, θα υποθέσουμε ότι τα διανυσματικά πεδία F, G είναι φραγμένα για φραγμένο x . Με άλλα λόγια, θα υποθέσουμε ότι

(A2) Το $x_0 \in X \subset \mathfrak{R}^n$ όπου X είναι ένα φραγμένο υποσύνολο. Επιπλέον, τα F, G είναι φραγμένα για φραγμένο x . Όσον αφορά το υποσύνολο αρχικής κατάστασης X θα ορίσουμε ένα αρκούντως μεγάλο συμπαγές υποσύνολο \bar{X} που περιέχει το X . Χωρίς απώλεια της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι το υποσύνολο \bar{X} λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\bar{X} = \{x \in \mathfrak{R}^n : |x| \leq \Omega\}$$

όπου το Ω είναι μία αρκούντως μεγάλη θετική σταθερά τέτοια ώστε το X να βρίσκεται στο εσωτερικό του \bar{X} και, επιπλέον, η απόσταση μεταξύ των ορίων του X και του \bar{X} να είναι αρκετά μεγάλη. Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.1 εύκολα εξάγεται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 2.3: Καθορίζουμε το συμπαγές υποσύνολο $\bar{X} \subset \mathfrak{R}^n$ και έναν θετικό ακέραιο αριθμό L και επιλέγουμε οποιαδήποτε $f \in M_n^L, g \in M_n^{L \times m}$. Κατόπιν, υπάρχουν σταθεροί πίνακες $\theta_1, \theta_2 \in \mathfrak{R}^{n \times L}$ έτσι ώστε να ισχύει το ακόλουθο:

$$F(x) = \theta_1 f(x) + v_1(x), \quad G(x) = \theta_2 g(x) + v_2(x) \quad (2.9)$$

όπου $v_i(x) = O_{\chi}^-(1/L)$, $i = 1, 2$.

Έχοντας υπόψη μας το λήμμα 2.3, στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στο σύστημα CLF, που καθορίζεται σύμφωνα με την σχέση (2.5). Στην ανάπτυξη και την ανάλυση της μεθοδολογίας αυτής θα χρειαστούμε τρία λήμματα σχετικά με την προαναφερθείσα CLF. Το πρώτο αυτών των λημμάτων σχετίζει την CLF με την ανεξέλεγκτη περιοχή του συστήματος (2.2).

Λήμμα 2.4: Η υπόθεση (A1) υπονοεί ότι υπάρχουν θετικές σταθερές ε_i , $i = 1, 2, 3$ έτσι ώστε η ακόλουθη συνθήκη να ισχύει, για όλα τα $x \in \bar{X}$,

$$\left| \frac{\partial V^T}{\partial x}(x)G(x) \right| < \varepsilon_1 \text{ και } |x| > \varepsilon_3 \Rightarrow \frac{\partial V^T}{\partial x}(x)F(x) < -\varepsilon_2 \quad (2.10)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεσο πόρισμα του λήμματος 2.1 [10]. Έστω ότι η ανεξέλεγκτη περιοχή του (2.2) είναι ένα υποσύνολο U το οποίο ορίζεται ως ακολούθως

$$U = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : |x| > \varepsilon_3 \text{ και } \left| \frac{\partial V^T}{\partial x}(x)G(x) \right| < \varepsilon_1 \right\}$$

Από την συνθήκη (2.10) έχουμε ότι όσο ισχύει ότι $x(t) \in U$ η επιλογή $u(t) = 0$ εγγυάται ότι το $V(t)$ θα μειώνεται.

Το δεύτερο λήμμα σχετίζει την CLF (2.5) με μία οικογένεια πολυωνύμων SOS που μπορεί να προσεγγίσει την CLF (2.5) αυθαίρετα κοντά.

Λήμμα 2.5: Υποθέτουμε ότι ο οριζόμενος από το χρήστη θετικός ακέραιος αριθμός L είναι αρκετά μεγάλος και καθορίζουμε ένα μονώνυμο $z \in M_n^{\bar{L}}$ με

$\bar{L} = \bar{L}(L)$ να είναι² ένας θετικός ακέραιος αριθμός που ικανοποιεί το $\bar{L} < L$ το οποίο με την σειρά του ικανοποιεί τα

$$(α) \ z(x) = 0 \text{ αν και μόνο αν } x = 0 \quad (2.11)$$

και

(β) το \bar{f} είναι ένας πίνακας μονώνυμων κατάλληλων διαστάσεων, όπου το $\bar{f}(x)$ ορίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$f(x) = \bar{f}(x)z(x) \quad (2.12)$$

Έπειτα, για κάθε $x \in \bar{X}$ υπάρχει ένα $P \succ 0$ έτσι ώστε

$$V(x) = z^T(x)P^{-1}z(x) + v_3(x) \quad (2.13)$$

όπου $v_3(x) = O_{\bar{X}}(1/L)$.

Επιπλέον, θεωρούμε ένα μονώνυμο $\pi \in M_n^{L \times \bar{L}}$ και εξετάζουμε το ακόλουθο SOS πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\bar{P}^*, \bar{g}^* \mapsto \arg \min_{P, g} (\varepsilon + \delta) \quad (2.14)$$

υπό τους περιορισμούς

² Χωρίς απώλεια της γενικότητας και για να αποφευχθούν εκτενείς τεχνικότητες θα υποθέσουμε ότι το \bar{L} είναι μία αύξουσα συνάρτηση του ακεραίου L που ορίζεται από τον χρήστη.

$$\begin{aligned}
& \bar{P} \succ 0 \\
& \delta \sum_{k=0}^{\bar{L}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_j^{2k}}{k!} + \sum_{j=1}^{\bar{L}} \frac{u_j^{2k}}{k!} \right) \\
& + \nu^T \{ -\bar{P} (\theta_1 \bar{f}(x))^T M^T(x) - M(x) \theta_1 \bar{f}(x) \bar{P} \\
& - M(x) \theta_2 g(x) \bar{g}\pi(x) - (\theta_2 g(x) \bar{g}\pi(x))^T M^T(x) \\
& + \varepsilon I_{\bar{L}} \} \nu \in SOS_{n+\bar{L}}(\bar{X} \cup \mathfrak{R}^{\bar{L}})
\end{aligned}$$

όπου το $M(x)$ δηλώνει τον $\bar{L} \times n$ πολωνυμικό πίνακα του οποίου το στοιχείο (i, j) δίδεται από την σχέση

$$M_{ij}(x) = \frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x)$$

Έπειτα έχουμε

$$\bar{P}^* = P + O_{\chi}(1/L) \quad (2.15)$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με το [7] τα πολυώνυμα SOS είναι πυκνά στο χώρο των θετικά ορισμένων πολωνύμων που, με την σειρά τους, είναι πυκνά στο χώρο των θετικά ορισμένων συναρτήσεων όπως η CLF $V(x)$. Αυτό άμεσα ορίζει ότι η οικογένεια των SOS πολωνύμων $z(x)^T Qz(x)$ μπορεί να προσεγγίσει με αυθαίρετη ακρίβεια την θετικά ορισμένη CLF συνάρτηση $V(x)$ ή, ισοδύναμα, ότι το μέγεθος του όρου $v_3(x)$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό - με κατάλληλη αύξηση του L στο \bar{X} . Το γεγονός ότι $v_3(x) = O_{\chi}(1/L)$ μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως αυτά στο [14].

Όσον αφορά την απόδειξη της (2.15), αρχικά παρατηρούμε ότι με τη χρησιμοποίηση των σχέσεων (2.13), (2.2), (2.9) και (2.12) η χρονική παράγωγος της συνάρτησης V μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{z}^T(x)P^{-1}z(x) + z^T(x)P^{-1}\dot{z}(x) + \dot{v}_3(x) \\
&= \dot{x}^T(x)M^T(x)P^{-1}z(x) + z^T(x)P^{-1}M(x)\dot{x} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\dot{x} \\
&= (F(x) + G(x)u)^T M^T(x)P^{-1}z(x) \\
&\quad + z^T(x)P^{-1}M(x)(F(x) + G(x)u) \\
&\quad + \frac{\partial v_3}{\partial x}(F(x) + G(x)u) \\
&= (\theta_1 \bar{f}(x)z(x) + \theta_2 g(x)u)^T M^T(x)P^{-1}z(x) \\
&\quad + z^T(x)P^{-1}M(x)(\theta_1 \bar{f}(x)z(x) + \theta_2 g(x)u) \\
&\quad + N(x, u)
\end{aligned}$$

όπου

$$N(x, u) = (v_1(x) + v_2(x)u)^T M^T(x)P^{-1}z(x) + z^T(x)P^{-1}M(x)(v_1(x) + v_2(x)u) + \frac{\partial v_3}{\partial x}(F(x) + G(x)u).$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (A1) εύκολα αποδεικνύεται, βλέπε π.χ. [11] για περισσότερες λεπτομέρειες, ότι η είσοδος ελέγχου $u = k(x)$ μπορεί να προσεγγιστεί (στο \bar{X}) με ακρίβεια ανάλογη του $1/L$ από τον ελεγκτή $u = K(x)P^{-1}z(x)$ με $K(x) = \mathcal{G}\pi(x)$ για κάποιο σταθερό πίνακα \mathcal{G} . Αυτό, στη συνέχεια, υπονοεί ότι

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x)(F(x) + G(x)K(x)P^{-1}z(x)) \leq -\kappa(|x|) + v_4(x)$$

για κάποιο $\kappa \in \mathbf{K}_\infty$ και $v_4(x) = O_x(1/L)$. Συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο εκφράσεις, εύκολα λαμβάνουμε ότι (εδώ αφαιρούμε το όρισμα x για απλότητα)

$$-\kappa(|x|) + v_4 \geq N + z^T \left\{ (\theta_1 \bar{f} + \theta_2 gKP^{-1})^T M^T P^{-1} + P^{-1}M(\theta_1 \bar{f} + \theta_2 gKP^{-1}) \right\} z$$

Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω ανισότητα εύκολα βλέπουμε ότι εάν

$$\mathbf{P}(x) = -(\theta_1 \bar{f} + \theta_2 gKP^{-1})^T M^T P^{-1} - P^{-1}M(\theta_1 \bar{f} + \theta_2 gKP^{-1}) + \tilde{\varepsilon}I_L$$

έχουμε

$$v^T \mathbf{P}(x)v \in PD_n(\tilde{X} \cup \mathcal{R}^{\bar{L}})$$

για κάποια θετική σταθερά $\tilde{\varepsilon} = O_{\tilde{\chi}}(1/L)$. Πολλαπλασιάζοντας τον \mathbf{P} από τα αριστερά και από τα δεξιά με τον P και χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.2 μπορούμε να ορίσουμε ότι για κάθε $\tilde{\delta} > 0$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός r^* , έτσι ώστε για όλα τα $L \geq r^*$ να ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} & v^T \{-P(\theta_1 \bar{f}(x))^T M^T(x) - M(x)\theta_1 \bar{f}(x)P \\ & - M\theta_2 g(x)K(x) - (\theta_2 g(x)K(x))^T M^T(x) + \varepsilon I_{\bar{L}}\}u \\ & + \tilde{\delta} \sum_{k=0}^L \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_j^{2k}}{k!} + \sum_{j=1}^{\bar{L}} \frac{u_j^{2k}}{k!} \right) \in SOS_n(\tilde{X} \cup \mathcal{R}^{\bar{L}}) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω σχέση και το γεγονός ότι $P \succ 0$ έχουμε ότι το ζεύγος P, \mathcal{G} είναι μια εφικτή λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης (2.14), δηλαδή το ζεύγος P, \mathcal{G} ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του (2.14). Επομένως, εάν τα ε^*, δ^* δηλώνουν τις τιμές ε, δ που αντιστοιχούν στη βέλτιστη λύση $\bar{P}^*, \bar{\mathcal{G}}^*$ του (2.14), έχουμε ότι

$$\varepsilon^* + \delta^* \leq \tilde{\varepsilon} + \tilde{\delta}$$

από το οποίο λαμβάνουμε άμεσα την (2.15), δεδομένου ότι το $\tilde{\delta}$ είναι μια αυθαίρετα μικρή θετική σταθερά και $\tilde{\varepsilon} = O_{\tilde{\chi}}(1/L)$.

Το λήμμα 2.5, που βασίζεται στην τεχνική των Prajna και λοιποί [18], που προτείνεται για την κατασκευή των CLF συστημάτων με γνωστά πολυωνμικά διανυσματικά πεδία δηλώνει ότι μία προσέγγιση CLF για το σύστημα (2.2) μπορεί να κατασκευαστεί ως μία λύση του SOS προβλήματος βελτιστοποίησης (2.14). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα SOS προβλήματα βελτιστοποίησης όπως το (2.14) μπορούν να μετατραπούν σε κυρτά προβλήματα ημι-ορισμένου προγραμματισμού (SDP), βλέπε π.χ. [16], [18], για τα οποία είναι διαθέσιμοι υπολογιστικά αποδοτικοί αλγόριθμοι. Το

επόμενο λήμμα εισάγει μια επιπρόσθετη ιδιότητα της λύσης του (2.14) που θα αποδειχθεί αρκετά χρήσιμη στην ανάπτυξη και ανάλυση του αλγορίθμου αυτού.

Λήμμα 2.6: Θεωρούμε όλες τις ποσότητες που έχουν οριστεί στο λήμμα 2.5, $\theta = [\theta_1, \theta_2]$ και έστω

$$\bar{P}^* = \mathbf{V}(\theta)$$

δηλώνει την λύση \bar{P}^* του (2.14) ως μία συνάρτηση του θ . Έπειτα, έχουμε ότι

$$\mathbf{V}(\theta + \Delta) = P + O_{\chi^-}(|\Delta|) + O_{\chi^-}(1/L), \forall \Delta \in \mathfrak{R}^{n \times 2L}$$

Απόδειξη: Αρχικά, παρατηρούμε ότι εφόσον ισχύει η (2.15), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbf{V}(\theta + \Delta) = \bar{P}^* + O_{\chi^-}(|\Delta|)$$

Χρησιμοποιώντας το (A2) και το γεγονός ότι το (2.14) είναι ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης εύκολα προκύπτει η ανωτέρω σχέση.

Κλείνουμε αυτήν την υποενότητα με την εισαγωγή μιας τελικής υπόθεσης για το σύστημα (2.2):

(A3) Επιλέγουμε οποιοδήποτε $i \in \mathfrak{R}^n$ και θεωρούμε ότι το L είναι οποιοδήποτε υποσύνολο $\mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}$ που έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue. Εάν το $u(t)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα που παράγεται σύμφωνα με μία αυστηρά θετική κατανομή πιθανότητας σε ένα υποσύνολο του \mathfrak{R}^m το οποίο έχει μη μηδενικό μέτρο Lebesgue, τότε

$$\Pr\{x_i(t) \in L\} = 0, \forall t \in \mathfrak{R}_+$$

Η υπόθεση (A3) αν και μπορεί να φαίνεται πολύ τεχνική, μπορεί ναδειχθεί ότι ικανοποιείται σε έναν μεγάλο αριθμό εφαρμογών ελέγχου. Γενικά μιλώντας, η υπόθεση (A3) απαιτεί ότι μια τυχαία διέγερση στις εισόδους του συστήματος παράγει τυχαίες διεγέρσεις (οι οποίες δεν περιορίζονται σε ένα υποσύνολο με μηδενικό μέτρο Lebesgue) σε κάθε είσοδο του διανύσματος κατάστασης. Για να γίνει καλύτερα αντιληπτή η υπόθεση (A3) θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1, a_1 > 0$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 + a_3 x_2 + u$$

Σαφώς, το ανωτέρω σύστημα, που ικανοποιεί την υπόθεση (A1), δεν ικανοποιεί την (A3), δεδομένου ότι η λύση $x_1(t)$ ανήκει στο υποσύνολο $L = \{x(t) = x_{10} \exp^{-a_1 t}\}$ το οποίο έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue ανεξαρτήτως της επιλογής του $u(t)$. Πρέπει να υπογραμμιστεί ότι τα συστήματα που δεν ικανοποιούν την υπόθεση (A3) όπως αυτό που παρουσιάζεται ανωτέρω, αντιστοιχούν στις μη-γενικές καταστάσεις. Επίσης, δεν είναι δύσκολο για κάποιον να δει ότι κάθε ισχυρά ελέγξιμο³ σύστημα ικανοποιεί την υπόθεση (A3).

Η υπόθεση (A3) είναι κρίσιμη για την επιτυχία της μεθοδολογίας ελέγχου, αφού εγγυάται ότι μία συνθήκη PE θα ισχύει υπό αυτή την μεθοδολογία ελέγχου. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ικανοποίηση μίας συνθήκης PE είναι απαραίτητη, έτσι ώστε η διαφορά ανάμεσα στις πραγματικές δυναμικές του συστήματος και των εκτιμήσεών τους, όπως παρήχθησαν από τον προσαρμοστικό εκτιμητή που χρησιμοποιείται στη μεθοδολογία αυτή, δεν θα αποσταθεροποιήσει τη δυναμική του συστήματος κλειστού βρόγχου.

³ Εδώ η έκφραση «ισχυρά ελέγξιμο σύστημα» αναφέρεται σε συστήματα για τα οποία υπάρχει ελεγκτής με ανατροφοδότηση που μπορεί να ανιχνεύσει με ακρίβεια κάθε αποδεκτή ομαλή τροχιά κατάστασης αναφοράς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΚΥΡΤΗ

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε το πρόβλημα κατασκευής ημι-απόλυτων ελεγκτών [24] για γενικά μη-γραμμικά συστήματα της μορφής:

$$\dot{x} = F(x) + g(x)u, \quad x(0) \in X \quad (3.1)$$

όπου τα $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^m$ δηλώνουν τα διανύσματα των καταστάσεων του συστήματος και των εισόδων ελέγχου, αντίστοιχα. Τα F, g είναι συνεχή μη-γραμμικά διανυσματικά πεδία κατάλληλων διαστάσεων και το X είναι ένα κλειστό υποσύνολο του \mathcal{R}^n που περιέχει την περιοχή.

Αποδοτικά απόλυτα ή ημι-απόλυτα σχέδια σταθεροποίησης έχουν προταθεί για ειδικές περιπτώσεις συστημάτων της μορφής (3.1) όπως γραμμικοποιήσιμα συστήματα με ανατροφοδότηση, βλέπε π.χ. [25], συστήματα που επιδέχονται μια γνωστή συνάρτηση ελέγχου Lyapunov (CLF), βλέπε π.χ. [20],[21], συστήματα που επιδέχονται έναν backstepping ελεγκτή, βλέπε π.χ. [12], κ.λπ. Εντούτοις, μέχρι τώρα, δεν υπάρχει καμία συνεπής και υπολογιστικά ανιχνεύσιμη μεθοδολογία που μπορεί να παρέχει απόλυτα ή ημι-απόλυτα σχέδια σταθεροποίησης για κάθε σταθεροποιήσιμο σύστημα της γενικής μορφής (3.1).

Μια αρκετά υποσχόμενη, υπολογιστικά ανιχνεύσιμη προσέγγιση έχει προταθεί πρόσφατα [18] για την παροχή απόλυτων σχεδίων σταθεροποίησης για μη-γραμμικά συστήματα της μορφής (3.1) με πολυωνυμικά διανυσματικά πεδία. Η προσέγγιση [18], η οποία βασίζεται σε τεχνικές βελτιστοποίησης αθροίσματος τετραγώνων (SOS), συνοδεύεται με αρκετές συνθήκες και κατά συνέπεια μπορεί να μην είναι εφαρμόσιμη σε πολλά συστήματα της μορφής (3.1).

Στο σημείο αυτό, πρέπει να δείξουμε ότι το πρόβλημα της ημι-απόλυτης σταθεροποίησης οποιουδήποτε σταθεροποιήσιμου συστήματος της μορφής (3.1) μπορεί να διατυπωθεί ως ένα υπολογιστικά ανιχνεύσιμο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Η προτεινόμενη προσέγγιση μοιράζεται πολλά κοινά στοιχεία με την προσέγγιση [18]. Ακριβέστερα, όπως στην [18], αρχίζουμε με επαναδιατύπωση της δυναμικής του συστήματος (3.1) στην ακόλουθη σχεδόν γραμμική μορφή

$$\dot{x} = f(x)z(x) + g(x)u \quad (3.2)$$

όπου $f(x)z(x) \equiv F(x)$ και $z(x)$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση μονώνυμων του x . Επιπλέον, ομοίως με το [18], εξετάζουμε μία CLF της μορφής $z^T(x)Pz(x)$ για το σύστημα (3.2), όπου ο P είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας. Αντίθετα εντούτοις με το [18], όπου ο P είναι ένας πίνακας που εξαρτάται από την κατάσταση που λαμβάνεται μέσω μιας SOS Riccati ανισότητας και το $z^T(x)Pz(x)$ είναι μία ακριβής CLF για το σύστημα (3.2), στην προσέγγισή μας εξετάζουμε την περίπτωση όπου ο P είναι ένας σταθερός πίνακας και το $z^T(x)Pz(x)$ είναι μία προσεγγιστική CLF για το σύστημα (3.2). Χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα πυκνότητας για τα πολυώνυμα SOS, βλέπε [7],[13], ορίζουμε ότι το $z^T(x)Pz(x)$ μπορεί να προσεγγίσει με αυθαίρετη ακρίβεια (σε οποιοδήποτε κλειστό υποσύνολο του \mathcal{R}^n) μία CLF του συστήματος (3.2) υπό τον όρο ότι το μέγεθος του μονώνυμου $z(x)$ είναι αρκούντως μεγάλο. Ομοίως, ορίζουμε ότι ένας σταθεροποιητής για το σύστημα (3.2) μπορεί να προσεγγιστεί με αυθαίρετη ακρίβεια (σε οποιοδήποτε κλειστό υποσύνολο του \mathcal{R}^n) από το σταθεροποιητή ανατροφοδότησης $u = Kz(x)$ όπου το K είναι ένας σταθερός πίνακας. Χρησιμοποιώντας αυτά τα δύο αποτελέσματα προσέγγισης και εφαρμόζοντας στοιχειώδεις υπολογισμούς στην χρονική παράγωγο του προσεγγιστή της CLF $z^T(x)Pz(x)$ καταλήγουμε σε ένα σύστημα ανισοτήτων που είναι κυρτές στο P και στο K και πρέπει να ικανοποιούνται σε κάθε σημείο του κλειστού διαστήματος που ισχύουν οι προαναφερθείσες προσεγγίσεις. Για αυτόν τον λόγο, δείχνουμε ότι χρησιμοποιώντας το προαναφερθέν κυρτό σύστημα ανισοτήτων, το πρόβλημα υπολογισμού του P και του K μπορεί να διατυπωθεί ως ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης ελαχίστων τετραγώνων με κυρτούς (ημι-ορισμένους)

περιορισμούς. Ο αριθμός των μεταβλητών απόφασης σε αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης ισούται με $\dim(z)(\dim(z) + m + 1)$.

Κλείνουμε αυτό το τμήμα με την αναφορά ότι τα αριθμητικά πειράματα που διεξήχθησαν σε ένα δύσκολο μη-γραμμικό πρόβλημα σταθεροποίησης επιδεικνύουν την αποδοτικότητα της προτεινόμενης προσέγγισης.

3.2 Σημειώσεις και προκαταρκτικά

Το I_n δηλώνει τον μοναδιαίο πίνακα n διάστασης.

Για ένα διάνυσμα $x \in \mathfrak{R}^n$, το $|x|$ δηλώνει την Ευκλείδεια νόρμα του x (π.χ., $|x| = \sqrt{x^T x}$), ενώ για ένα πίνακα $A \in \mathfrak{R}^{n^2}$, το $|A|$ δηλώνει την Frobenius νόρμα του A .

Μια συνάρτηση f λέγεται ότι είναι C^m , όπου το m είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, εάν είναι ομοιόμορφα συνεχής και οι πρώτες m παράγωγοι της είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

Ο συμβολισμός $\text{vec}(A, B, C, \dots)$, όπου A, B, C, \dots είναι βαθμωτά, διανύσματα ή πίνακες, χρησιμοποιείται για να δηλώσει ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι οι είσοδοι των A, B, C, \dots (ληφθέντα κατά στήλη).

Για ένα συμμετρικό πίνακα A , ο συμβολισμός $A \succ 0$ ($A \geq 0$) χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι ο A είναι ένας θετικά ορισμένος (αντίστοιχα θετικά ημι-ορισμένος) πίνακας.

Λέμε ότι μια συνάρτηση $\chi: \mathfrak{R}_+ \mapsto \mathfrak{R}_+$ είναι κλάσης K (συμβολικά, $\chi \in K$) όταν η χ είναι συνεχής, αυστηρά αύξουσα, και ισχύει $\chi(0) = 0$. Λέμε ότι μια

συνάρτηση $\chi: \mathcal{R}_+ \mapsto \mathcal{R}_+$ είναι κλάσης K_∞ (συμβολικά, $\chi \in K_\infty$) εάν είναι κλάσης K και επιπλέον, $\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r) = \infty$.

Προκειμένου να αποφευχθεί η χρήση πάρα πολλών μεταβλητών και σταθερών, θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τον ακόλουθο συμβολισμό. Θεωρούμε ένα υποσύνολο $X \subseteq \mathcal{R}^n$ και έστω $f_c: \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^m$ είναι μια συνάρτηση παραμετροποιήσιμη από μία θετική σταθερά c . Ο συμβολισμός $f_c(x) = O_\chi(c)$ θα χρησιμοποιηθεί στην εργασία αυτή μερικές φορές, με μία ελαφριά κατάχρηση του συμβολισμού, εάν υπάρχει συνάρτηση $\chi \in K$ τέτοια ώστε $|f_c(x)| \leq \chi(c)$, $\forall x \in X$.

Κλείνουμε αυτό το τμήμα με την παροχή μερικών ορισμών και ενός λήμματος που θα αποδειχθούν χρήσιμα στην ανάλυση των κύριων αποτελεσμάτων της εργασίας μας.

Ορισμός 3.1: Η μητρική συνάρτηση $f: \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^{L \times m}$ λέγεται ότι είναι ένα μονώνυμο διάστασης $L \times m$ (συμβολικά, $f \in M_n^{L \times m}$) εάν τα στοιχεία της f είναι της μορφής $f_{ij}(x) = x_1^{a_{1,ij}} x_2^{a_{2,ij}} \dots x_n^{a_{n,ij}}$, $i \in \{1, \dots, L\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ για κάποιους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς $a_{1,ij}, a_{2,ij}, \dots, a_{n,ij}$ έτσι ώστε για κάθε $i, l \in \{1, \dots, L\}$, $i \neq l$, έχουμε ότι $[a_{1,ij}, a_{2,ij}, \dots, a_{n,ij}] \neq [a_{l,ij}, a_{2,ij}, \dots, a_{n,ij}]$.

Ορισμός 3.2: Μια μητρική συνάρτηση $p: \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^{k \times m}$ λέγεται ότι είναι ένα πολυώνυμο (συμβολικά $p \in P_n^{k \times m}$) εάν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός L έτσι ώστε

$$p(x) = \theta^L(x)$$

για κάποια $f \in M_n^{L \times m}$ και έναν σταθερό πίνακα $\theta \in \mathcal{R}^{k \times L}$. Έστω επίσης ότι X είναι ένα υποσύνολο του \mathcal{R}^n . Μία πολυωνυμική μητρική συνάρτηση $p \in P_n^L$ λέγεται ότι

είναι ένα πολυώνυμο SOS στο X (συμβολικά $p \in SOS_n(X)$) εάν υπάρχει $p_1, p_2, \dots, p_k \in P_n^1$ έτσι ώστε

$$p(x) = \sum_{i=1}^k p_i^2(x), \forall x \in X$$

Τέλος, μία πολυωνυμική μητρική συνάρτηση $p \in P_n^1$ λέγεται ότι είναι ένα θετικά ορισμένο (PD) πολυώνυμο στο X (συμβολικά $p \in PD_n(X)$) εάν

$$p(x) \geq 0, \forall x \in X \quad \text{και} \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Λήμμα 3.1 [7,13]: Τα πολυώνυμα SOS είναι πυκνά στο χώρο των θετικά ορισμένων πολυωνύμων.

3.3 Η προτεινόμενη μεθοδολογία

Προκειμένου να έχουμε ένα καλώς ορισμένο πρόβλημα θα υποθέσουμε ότι το σύστημα (3.1) είναι σταθεροποιήσιμο, δηλαδή θα υποθέσουμε ότι

(A1) Υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $k: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^m$ έτσι ώστε οι λύσεις $x(t)$ του συστήματος κλειστού βρόγχου $\dot{x} = F(x) + G(x)k(x)$ να συγκλίνουν στο μηδέν ασυμπτωτικά, για όλα τα $x(0) \in \mathfrak{R}^n$.

Για τους σκοπούς της ανάλυσής μας, θα ορίσουμε επίσης ένα αρκούντως μεγάλο κλειστό υποσύνολο \bar{X} (που συνδέεται με το υποσύνολο X των αποδεκτών αρχικών συνθηκών) που περιέχει το X και είναι τέτοιο ώστε (α) όλες οι τροχιές που παράγονται από το $\dot{x} = F(x) + g(x)k(x)$, $x(0) \in X$ βρίσκονται μέσα στο \bar{X} και (β) η απόσταση μεταξύ των προαναφερθεισών τροχιών και του ορίου του \bar{X} είναι

αρκούντως μεγάλη. Χωρίς απώλεια της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι το υποσύνολο \bar{X} λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \Omega\}$$

όπου Ω είναι μια αρκετά μεγάλη θετική σταθερά έτσι ώστε το X να βρίσκεται στο εσωτερικό του \bar{X} και, επιπλέον, η απόσταση μεταξύ των ορίων του X και του \bar{X} να είναι αρκούντως μεγάλη.

Σύμφωνα με τυπικά αποτελέσματα από τη θεωρία του μη-γραμμικού ελέγχου, βλέπε π.χ. [20],[21], η υπόθεση (A1) υπονοεί την ύπαρξη μίας C^1 , θετικά ορισμένης, ακτινικά απεριορίστης CLF συνάρτησης, $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί το

$$\inf_u \left\{ \frac{\partial V^T}{\partial x} (F(x) + G(x)u) \right\} < 0, \forall x \neq 0 \quad (3.3)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.3) και ξαναγράφοντας τη δυναμική του συστήματος (3.1) σε «περίπου γραμμική» μορφή (3.2) μπορούμε να ορίσουμε το πρώτο κύριο αποτέλεσμα μας.

Θεώρημα 3.1: Έστω L ένας θετικός ακέραιος αριθμός που ορίζεται από τον χρήστη ο οποίος θεωρείται αρκετά μεγάλος. Καθορίζουμε ένα μονώνυμο $z \in M_n^L$ που ικανοποιεί το

$$z(x) = 0 \text{ αν και μόνο αν } x = 0 \quad (3.4)$$

και, επιπλέον,

$$F(x) = f(x)z(x) \quad (3.5)$$

για κάποια κατάλληλα ορισμένη συνάρτηση $f(\cdot)$. Κατόπιν, για όλο το $x \in \bar{X}$, υπάρχει σταθερός πίνακας $P \succ 0, P \in \mathbb{R}^{L \times L}$ έτσι ώστε

$$V(x) = z^T(x)Pz(x) + v_1(x) \quad (3.6)$$

όπου $v_1(x) = O_\chi(1/L)$. Επιπλέον, υπάρχουν σταθεροί πίνακες $Q \succ 0, Q \in \mathfrak{R}^{L \times L}$ και $K \in \mathfrak{R}^{m \times L}$ έτσι ώστε το σύστημα κλειστού βρόγχου (3.2) υπό το νόμο ελέγχου με ανατροφοδότηση

$$u = Kz(x) \quad (3.7)$$

να ικανοποιεί την σχέση

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z^T(x)Pz(x) &\equiv z^T(x)(f(x) + g(x)K)^T M^T(x)Pz(x) \\ &\quad + z^T(x)PM(x)(f(x) + G(x)K)z(x) \\ &= z^T(x)Qz(x) + v_2(x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

όπου $v_2(x) = O_\chi(1/L)$ και $M(x)$ δηλώνει τον $L \times n$ πολυωνυμικό πίνακα του οποίου το (i, j) -στοιχείο δίδεται από

$$M_{ij}(x) = \frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x)$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με το λήμμα 3.1, τα πολυώνυμα SOS είναι πυκνά στο χώρο των θετικά ορισμένων πολυωνύμων που, με την σειρά τους, είναι πυκνά στο χώρο των θετικά ορισμένων συναρτήσεων όπως η CLF $V(x)$. Αυτό άμεσα ορίζει ότι η οικογένεια SOS των πολυωνύμων $z^T(x)Pz(x)$ μπορεί να προσεγγίσει με αυθαίρετη ακρίβεια την θετικά ορισμένη CLF συνάρτηση $V(x)$ ή, ισοδύναμα, ότι το μέγεθος του όρου $v_1(x)$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό με κατάλληλη αύξηση του L . Το $v_1(x) = O_\chi(1/L)$ μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στο [14].

Όσον αφορά την απόδειξη της (3.8), αρχίζουμε σημειώνοντας ότι από την υπόθεση (A1), έχουμε ότι υπάρχει μία C^0 , θετικά ορισμένη, ακτινικά απεριόριστη

συνάρτηση $W : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}_+$ τέτοια ώστε η χρονική παράγωγος της CLF V υπό το $u = k(x)$ ικανοποιεί την

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(F(x) + g(x)k(x)) = W(x) \quad (3.9)$$

Σημειώνουμε ότι τυπικά επιχειρήματα της προσέγγισης συναρτήσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουν ότι ο απόλυτος σταθεροποιητής $u = k(x)$ μπορεί να προσεγγιστεί με αυθαίρετη ακρίβεια στο \bar{X} από τον σταθεροποιητή $u = Kz(x)$. Με άλλα λόγια, έχουμε ότι υπάρχει ένας σταθερός πίνακας $K \in \mathfrak{R}^{m \times L}$ έτσι ώστε $k(x) = Kz(x) + \bar{v}_1(x)$ όπου $\bar{v}_1(x) = O_\chi(1/L)$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την (3.9) και (3.6) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} -W(x) &= \left(\frac{\partial(z^T Pz)}{\partial x}(x) + \frac{\partial v_1}{\partial x}(x) \right) (F(x) + g(x)k(x)) \\ &= \left(\frac{\partial(z^T Pz)}{\partial x}(x) + \bar{v}_1(x) \right) \times (F(x) + g(x)(Kz(x) - \bar{v}_1(x))) \\ &= \frac{\partial(z^T Pz)}{\partial x}(x)(F(x) + g(x)Kz(x)) + \tilde{v}_1(x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου $\bar{v}_1(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x)$ και

$$\tilde{v}_1(x) = -\frac{\partial(z^T Pz)}{\partial x}(x)g(x)\bar{v}_1(x) + \bar{v}_1(x)(F(x) + g(x)(Kz(x) - \bar{v}_1(x))).$$

Με παρόμοιο τρόπο όπως στην απόδειξη της (3.6) μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει θετικά ορισμένος πίνακας Q έτσι ώστε

$$W(x) = z^T(x)Qz(x) + \tilde{v}_2(x) \quad (3.11)$$

Άμεσοι υπολογισμοί χρησιμοποιώντας τις (3.10) και (3.11) μπορούν να πραγματοποιηθούν για να εδραιώσουν την (3.8) με $v_2(x) = \tilde{v}_1(x) - \tilde{v}_2(x)$. Όπως στην περίπτωση της απόδειξης του (3.6), το γεγονός ότι ισχύει $v_2(x) = O_\chi(1/L)$ μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στο [14].

Είμαστε τώρα έτοιμοι να ορίσουμε το δεύτερο αποτέλεσμά μας που δηλώνει ότι ο σταθεροποιητής $u = Kz(x)$ (με το K όπως ορίζεται στο θεώρημα 3.1) επιλύει το πρόβλημα ημι-απόλυτης σταθεροποίησης για το σύστημα (3.1).

Θεώρημα 3.2: Θεωρούμε ότι ισχύουν οι ίδιες υποθέσεις όπως στο θεώρημα 3.1. Οι τροχιές κατάστασης $x(t)$ του συστήματος (3.1) υπό τον $u = Kz(x)$, όπου το K ορίζεται στο θεώρημα 3.1, είναι φραγμένες και, επιπλέον, ικανοποιούν την σχέση

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = O_{\chi}(1/L)$$

υπό τον όρο ότι οι αρχικές καταστάσεις ικανοποιούν το $x(0) \in X$.

Απόδειξη: Η απόδειξη ακολουθεί τυπικά επιχειρήματα ευστάθειας Lyapunov στην (3.8).

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στην απόδειξη ότι το πρόβλημα της εύρεσης των P και K , που ορίζονται στο θεώρημα 3.1, μπορεί να διατυπωθεί ως ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Για να φανεί αυτό, αρχικά σημειώνουμε ότι από την (3.8) προκύπτει άμεσα ότι για οποιοδήποτε σημείο $x \in X$, ισχύει η ακόλουθη έκφραση

$$\begin{aligned} & (f(x) + g(x)K)^T M^T(x)P \\ & + PM(x)(f(x) + g(x)K) = -Q + v_3(x) \end{aligned} \tag{3.12}$$

όπου $v_3(x) = O_{\chi}(1/L)$. Έστω K είναι ένας σταθερός πίνακας τέτοιος ώστε

$$K = \bar{K}P$$

(σημειώνουμε ότι ο P είναι αντιστρέψιμος αφού $P \succ 0$). Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω έκφραση έχουμε ότι η (3.12) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως

$$\begin{aligned}
& \left(f(x) + g(x)\bar{K}P \right)^T M^T(x)P \\
& + PM(x)\left(f(x) + g(x)\bar{K}P \right) = -Q + v_3(x) \Rightarrow \\
& f^T(x)M^T(x)P + P^T\left(g(x)\bar{K} \right)^T M^T(x)P \\
& + PM(x)f(x) + PM(x)g(x)\bar{K}P = -Q + v_3(x)
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την ανωτέρω έκφραση από τα αριστερά και από τα δεξιά με τον P^{-1} έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& P^{-1}f^T(x)M^T(x) + \left(g(x)\bar{K} \right)^T M^T(x) \\
& + M(x)f(x)P^{-1} + M(x)g(x)\bar{K} = -P^{-1}QP^{-1} + \bar{v}_3(x)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

όπου, προφανώς, $\bar{v}_3(x) = O_\chi(1/L)$. Ορίζουμε δύο πίνακες \bar{P}, \bar{Q} σύμφωνα με την σχέση $\bar{P} \equiv P^{-1}, \bar{Q} \equiv P^{-1}QP^{-1}$ και έστω

$$\begin{aligned}
J(\bar{P}, \bar{Q}, K, x) = & z^T(x) \left(\bar{P}f^T(x)M^T(x) + \left(g(x)\bar{K} \right)^T M^T(x) \right) z(x) \\
& + z^T(x) \left(M(x)f(x)\bar{P} + M(x)g(x)\bar{K} + \bar{Q} \right) z(x)
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι το $J(\cdot)$ είναι γραμμικό ως προς τα \bar{P}, \bar{Q} και K . Επίσης, σημειώνουμε ότι από την (3.13) έχουμε ότι ισχύει η ακόλουθη έκφραση:

$$J(\bar{P}, \bar{Q}, K, x) = O_\chi(1/L), \quad \forall x \in X \tag{3.14}$$

Η ανωτέρω έκφραση σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\bar{P} \succ 0, \bar{Q} \succ 0$ μας βοηθά στο να προτείνουμε το ακόλουθο κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης για να λάβουμε τα \bar{P}, \bar{Q}, K :

$$\min_{\hat{P}, \hat{Q}, \hat{K}} \mathfrak{S} = \sum_{i=1}^N \left| J\left(\hat{P}, \hat{Q}, \hat{K}, x_i \right) \right|^2 \tag{3.15}$$

Υπό τους περιορισμούς

$$\hat{P} \succ \varepsilon_1 I_L, \quad \hat{Q} \succ \varepsilon_2 I_L$$

όπου $x_i, i=1, \dots, N$ είναι N σημεία στο \bar{X} και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι δύο θετικές σταθερές οριζόμενες από τον χρήστη.

Θεώρημα 3.3: Θεωρούμε ότι ισχύουν οι ίδιες υποθέσεις όπως στο θεώρημα 3.1. Έστω ότι τα σημεία $x_i, i=1, \dots, N$ επιλέγονται τυχαία σύμφωνα με μία ομοιόμορφη κατανομή στο \bar{X} . Κατόπιν, υπάρχουν δύο θετικές σταθερές $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*$ έτσι ώστε εάν $N \geq L(L+m+1)$ η λύση $\hat{P}, \hat{K}, \hat{Q}$ του προβλήματος βελτιστοποίησης (3.15) ικανοποιεί την σχέση

$$\left[\hat{P}, \hat{Q}, \hat{K} \right] = \left[\bar{P}, \bar{Q}, K \right] + O_x(1/L) \quad (3.16)$$

για οποιαδήποτε $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$, $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{P} = \text{vec}(\bar{P}, \bar{Q}, K)$ και $\hat{\mathcal{P}} = \text{vec}(\hat{P}, \hat{Q}, \hat{K})$. Λόγω της συμμετρικής φύσης των \bar{P}, \bar{Q} έχουμε ότι η διάσταση των \mathcal{P} και $\hat{\mathcal{P}}$ είναι ίση με $\frac{1}{2}L(L+1) + mL + \frac{1}{2}L(L+1) = L(L+m+1)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $\hat{\mathcal{P}}$ έχουμε ότι το $J\left(\hat{P}, \hat{Q}, \hat{K}, x_i\right)$ μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής

$$J\left(\hat{P}, \hat{Q}, \hat{K}, x_i\right) = \tilde{\mathcal{P}}^T \phi(x_i)$$

για κάποια κατάλληλα ορισμένη συνάρτηση $\phi: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^{L(L+m+1)}$. Εργαζόμενοι παρόμοια με το [28], διαμορφώνουμε την Λαγκρανζιανή συνάρτηση για την (3.15) ως εξής

$$L(\hat{\mathcal{P}}, \Lambda_1, \Lambda_2) = \sum_{i=1}^N \left| \hat{\mathcal{P}}^T \phi(x_i) \right|^2 + \Lambda_1 \circ \left(\hat{P} - \varepsilon_1 I_L \right) + \Lambda_2 \circ \left(\hat{Q} - \varepsilon_2 I_L \right)$$

όπου $A \circ B = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L A_{ij} B_{ij}$, $A, B \in \mathcal{R}^{L \times L}$ και Λ_1, Λ_2 είναι οι πίνακες πολλαπλασιαστών Lagrange για την (3.15). Θέτοντας την κλίση του L (ως προς $(\hat{\mathcal{G}}, \Lambda_1, \Lambda_2)$) ίση με μηδέν και χρησιμοποιώντας τις γνωστές συνθήκες Karush-Kuhn Tucker (KKT), βλέπε π.χ. [29], εύκολα προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση $\hat{\mathcal{G}}$ του (3.15) ικανοποιεί την

$$\Phi \hat{\mathcal{G}} = \lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (3.17)$$

όπου

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \phi(x_i) \phi^T(x_i)$$

και $\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ είναι ένα διάνυσμα που εξαρτάται από τους πολλαπλασιαστές Lagrange Λ_1, Λ_2 και τις σταθερές $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Σημειώνουμε, επίσης, ότι εάν ο πίνακας Φ είναι πλήρους τάξης, περίπτωση στην οποία το $\hat{\mathcal{G}}$ στην (3.17) ορίζεται μοναδικά, τότε η (3.14) υπονοεί ότι ισχύει $\mathcal{G} = \hat{\mathcal{G}} + O_{\chi}(1/L)$ δεδομένου ότι τα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ικανοποιούν την σχέση $\bar{P} \succ \varepsilon_1 I_L$, $\bar{Q} \succ \varepsilon_2 I_L$. Με άλλα λόγια, εάν ο Φ είναι πλήρους τάξης τότε ισχύει ότι $[\hat{\bar{P}}, \hat{\bar{Q}}, \hat{K}] = [\bar{P}, \bar{Q}, K] + O_{\chi}(1/L)$ για οποιαδήποτε $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^*]$, $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_2^*]$ με $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*$ να είναι οι μικρότερες ιδιοτιμές των \bar{P} και \bar{Q} , αντίστοιχα. Επομένως, προκειμένου να εδραιώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι ο Φ είναι πλήρους τάξης με πιθανότητα 1. Η απόδειξη της τελευταίας αξίωσης μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στο λήμμα 3 του [11] ή στην Πρόταση 1 του [27]: Εάν ο Φ δεν είναι πλήρους τάξης τότε υπάρχει ένα σταθερό μη μηδενικό διάνυσμα b έτσι ώστε

$$b_i^T \phi(x_i) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.18)$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με ένα σύνολο ενός μη-γραμμικού συστήματος εξισώσεων του x_i . Το σύνολο λύσεων σε αυτό το σύστημα εξισώσεων έχει μηδενικό μέτρο

Lebesgue, βλέπε π.χ. [11],[27], και κατά συνέπεια κάτω από μια τυχαία επιλογή των x_i η πιθανότητα να ισχύει η (3.18) είναι μηδέν. Με άλλα λόγια, μια τυχαία επιλογή για τα x_i εγγυάται ότι ο Φ είναι πλήρους τάξης με πιθανότητα 1, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Προκειμένου να αξιολογηθεί η αποδοτικότητα της προτεινόμενης μεθοδολογίας ελέγχου, την εφαρμόσαμε και την εξετάσαμε, με τη βοήθεια προσομοιώσεων, στο πρόβλημα της σταθεροποίησης του διανύσματος γωνιακής ταχύτητας ενός άκαμπτου σώματος με δύο ροπές, που περιγράφεται μετά την εφαρμογή προκαταρκτικής ανατροφοδότησης, βλέπε [26], από το ακόλουθο σύνολο διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \zeta_1 x_2 x_3 + \zeta_2 u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\zeta_3 x_1 x_3 + \zeta_4 u_2 \\ \dot{x}_3 &= \zeta_5 x_1 x_2\end{aligned}\tag{4.1}$$

όπου το x_i δηλώνει τις τρεις γωνιακές ταχύτητες του άκαμπτου σώματος, το u_i τις δύο εισαγόμενες ροπές και το ζ_i είναι θετικές σταθερές. Πρέπει να υπογραμμιστεί, ότι το πρόβλημα του σχεδιασμού αποδοτικών ελεγκτών για τη σταθεροποίηση του (4.1) παραμένει μια πρόκληση, βλέπε π.χ. [26], [11]. Στην πραγματικότητα, παρά την απλή πολυωνυμική φύση των διανυσματικών πεδίων του συστήματος (4.1), οι CLFs για αυτό το σύστημα είναι αρκετά περίπλοκες. Δείτε, για παράδειγμα το [26], όπου αποδεικνύεται ότι η (4.1) αντιστοιχεί σε μία αρκετά περίπλοκη CLF που είναι μια λογική συνάρτηση του διανύσματος κατάστασης του συστήματος (4.1).

Προκειμένου να εξεταστεί και να αξιολογηθεί η προτεινόμενη μεθοδολογία, επικεντρωθήκαμε στην περίπτωση όπου το κλειστό υποσύνολο X , στο οποίο επιθυμείται ημι-απόλυτη σταθεροποίηση, και το σχετικό υποσύνολο \bar{X} παίρνουν την μορφή

$$X = \{x \in \mathfrak{R}^3 : |x| \leq 2.0\}, \bar{X} = \{x \in \mathfrak{R}^3 : |x| \leq 4.0\}\tag{4.2}$$

Επίσης, για απλότητα, έχουμε υποθέσει ότι όλες οι παράμετροι $\zeta_i, i = 1, \dots, 5$ του συστήματος είναι ίσες με ένα. Η συνάρτηση μονώνυμων $z(x)$ επιλέχτηκε να είναι το ακόλουθο 4^{ου} βαθμού πολυώνυμο

$$z(x) = [x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3, x_1^2x_3, x_1x_2x_3, x_2^2x_3, x_1x_3^2, x_2x_3^2, x_3^3, x_1^4, x_1^3x_2, x_1^2x_2^2, x_1x_2^3, x_2^4, x_1^3x_3, x_1^2x_2x_3, x_1x_2^2x_3, x_2^3x_3, x_1^2x_3^2, x_1x_2x_3^2, x_2^2x_3^2, x_1x_3^3, x_2x_3^3, x_3^4]^T$$

καταλήγοντας σε μία 8^{ου} βαθμού πολυωνυμική προσέγγιση $z^T(x)Pz(x)$ για το σύστημα (4.1). Πρέπει να υπογραμμίσουμε σε αυτό το σημείο ότι μία 8^{ου} βαθμού πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής $z^T(x)Pz(x)$ μπορεί να προσεγγίσει, πέρα του X που ορίζεται στην (4.2), με υψηλή ακρίβεια τη λογική CLF συνάρτηση του [26]. Σημειώστε επίσης ότι χρησιμοποιώντας την ανωτέρω επιλογή για το $z(x)$, μια πιθανή επιλογή της συνάρτησης $f(x)$ στην (3.2) είναι ο ακόλουθος σταθερός πίνακας

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(3 \times 34)}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τις ανωτέρω επιλογές για τα $z(x)$ και $f(x)$ στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (3.15) προκειμένου να κατασκευαστούν οι πίνακες $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{K}$. Ο αριθμός N τυχαίων σημείων x_i τέθηκε ίσος με $N = L(L + m + 1) = 34(34 + 2 + 1) = 1258$. Η συνάρτηση της Matlab, `fmincon`, κατάλληλα προσαρμοσμένη για να είναι εφαρμόσιμη στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (3.15), χρησιμοποιήθηκε για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης (3.15).

Οι περιορισμοί θετικής ορισμότητας της συνάρτησης (3.15) ($\hat{P} \succ \varepsilon_1 I_L, \hat{Q} \succ \varepsilon_2 I_L$) μετατράπηκαν σε περιορισμούς ελάχιστης ιδιοτιμής ($\min(\text{eig}(\hat{P})) \succ \varepsilon_1, \min(\text{eig}(\hat{Q})) \succ \varepsilon_2$).

Η μέθοδος όμως, στο υπό εξέταση σύστημα, παρουσίασε ορισμένα αριθμητικά προβλήματα τα οποία οφείλονταν στην χρήση της συνάρτησης `fmincon`. Για τον λόγο αυτό η αντικειμενική συνάρτηση \mathfrak{J} , που περιγράφεται στην εξίσωση (3.15), μετασχηματίστηκε, κάνοντας χρήση μίας συνάρτησης τιμωρίας, στην ακόλουθη μορφή:

$$\tilde{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J} + a_1 + a_2 \quad (4.3)$$

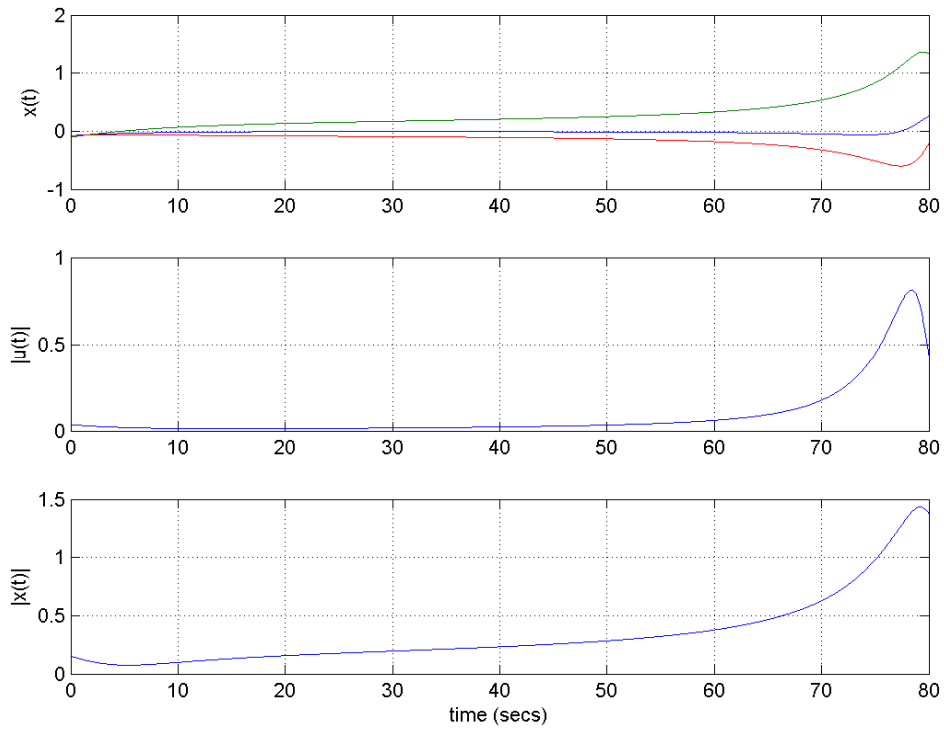
όπου

$$a_1 = \begin{cases} 0 & \text{αν } \min(\text{eig}(\hat{P})) \succ \text{con}_1 \\ 10 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \text{και} \quad a_2 = \begin{cases} 0 & \text{αν } \min(\text{eig}(\hat{Q})) \succ \text{con}_2 \\ 10 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

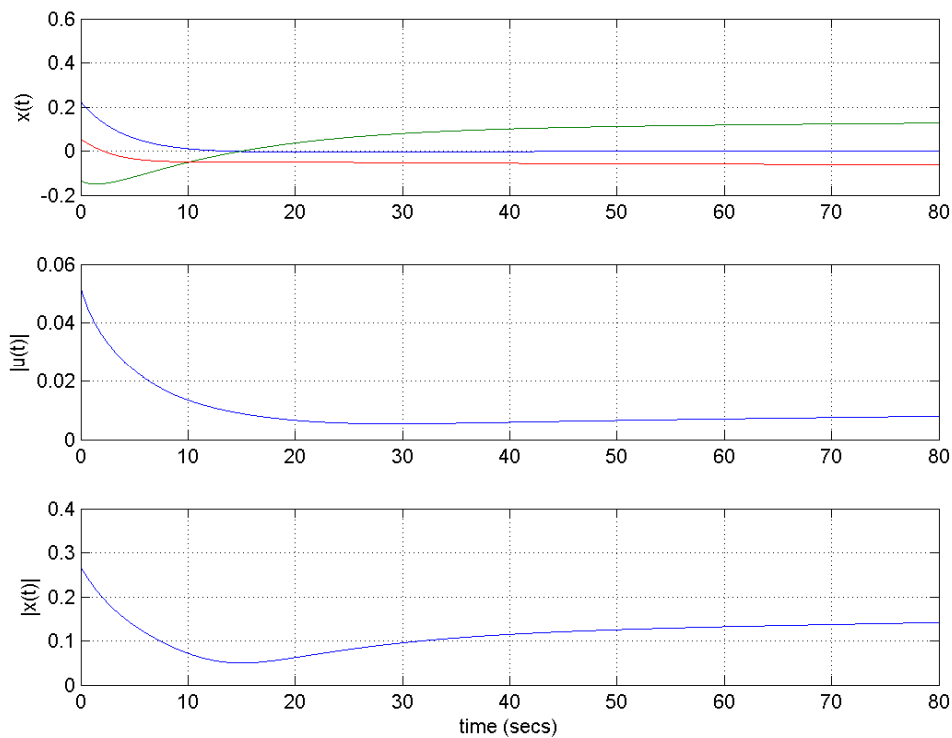
Τα $\text{con}_1, \text{con}_2$ είναι θετικές σταθερές, οι οποίες ορίζονται από τον χρήστη.

Τα παρακάτω γραφήματα δείχνουν τα αποτελέσματα προσομοιώσεων για τέσσερις διαφορετικές αρχικές τιμές του διανύσματος κατάστασης $x(0)$ και για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\text{con}_1, \text{con}_2$.

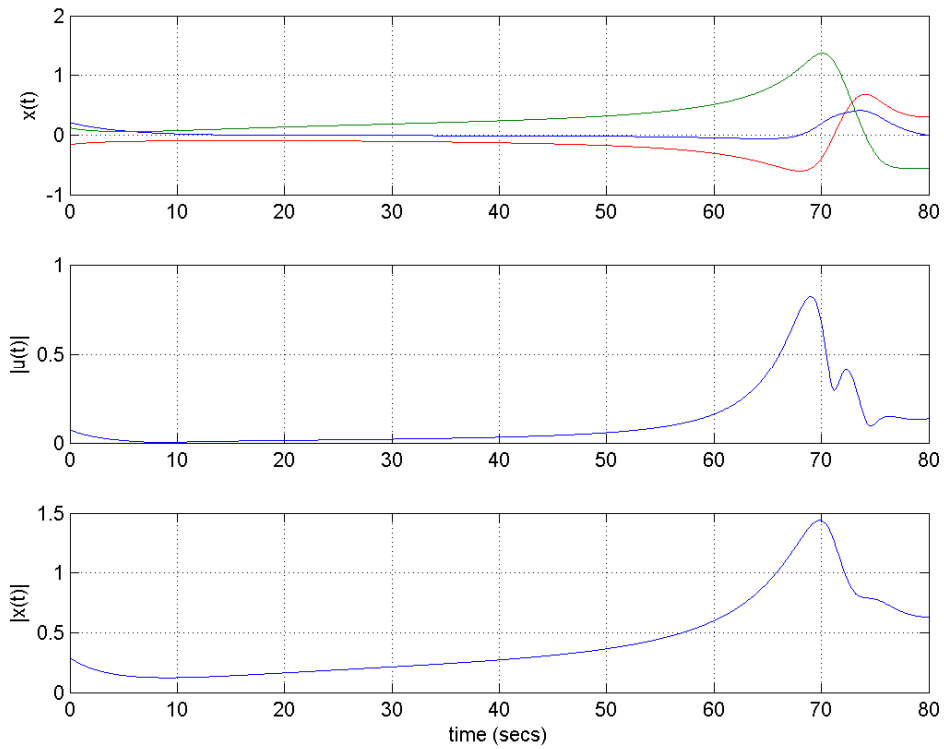
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ



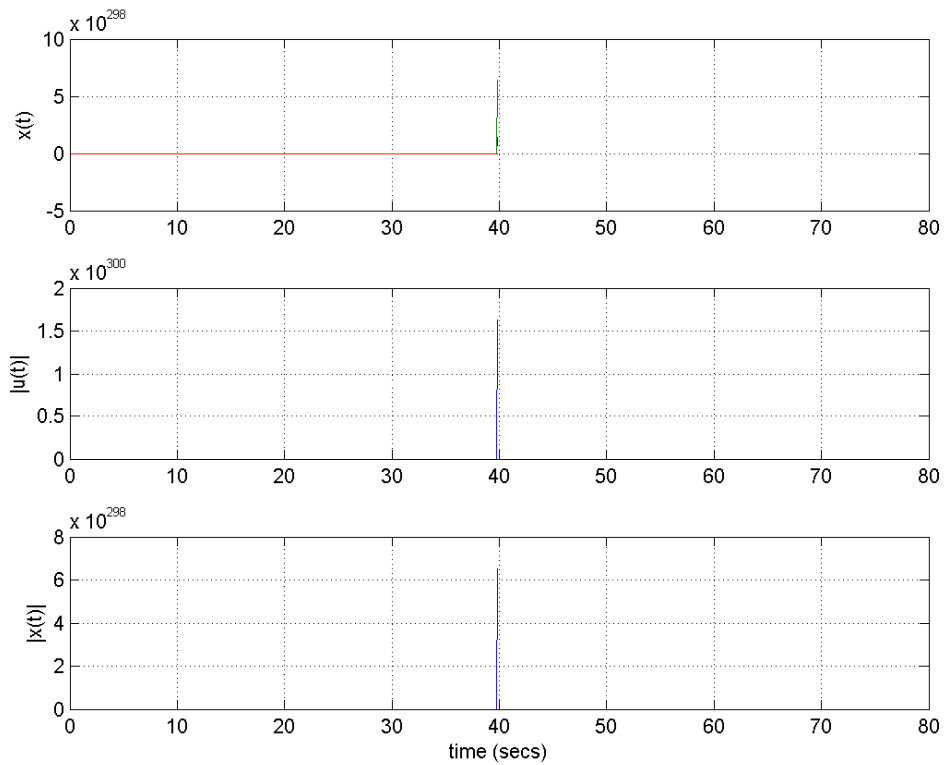
Γράφημα 5.1: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 1 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.1$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



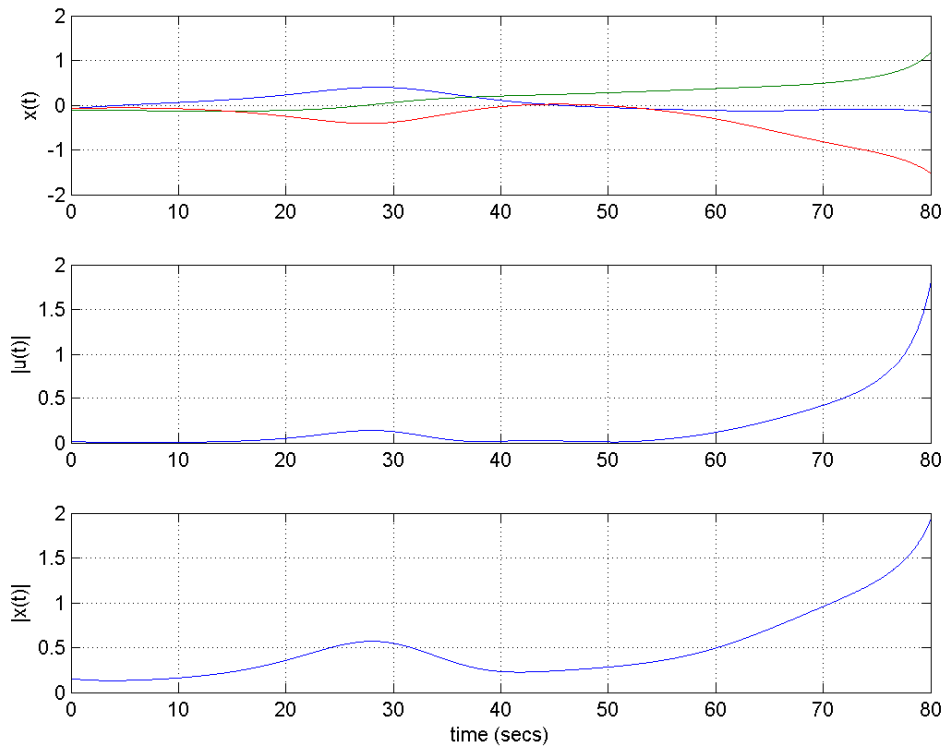
Γράφημα 5.2: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 2 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.1$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



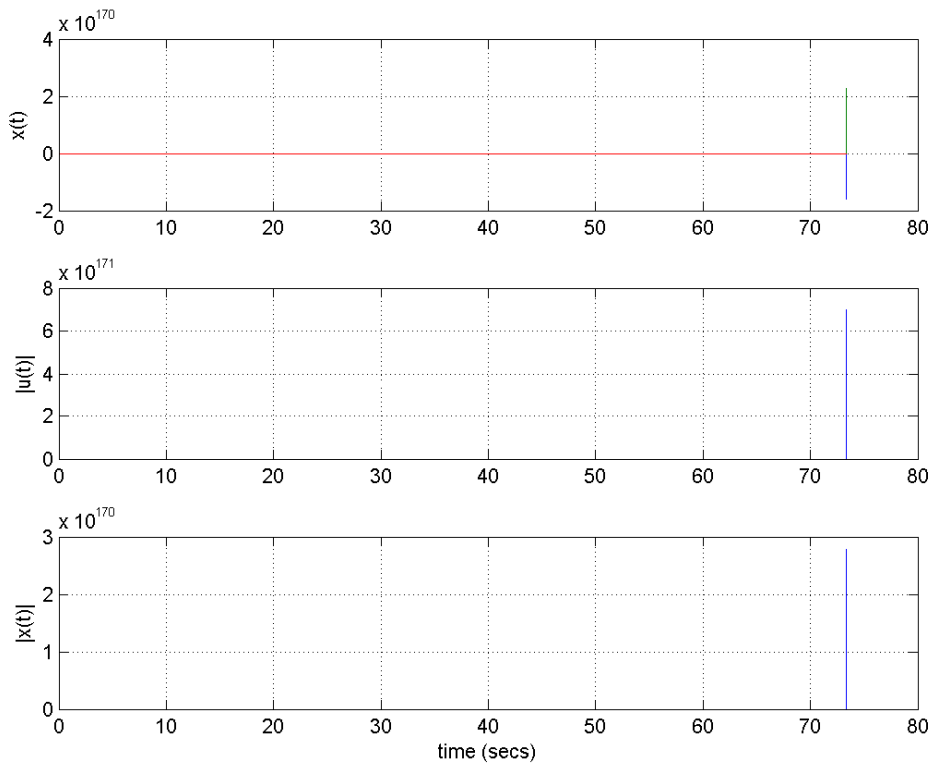
Γράφημα 5.3: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 3 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.1$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



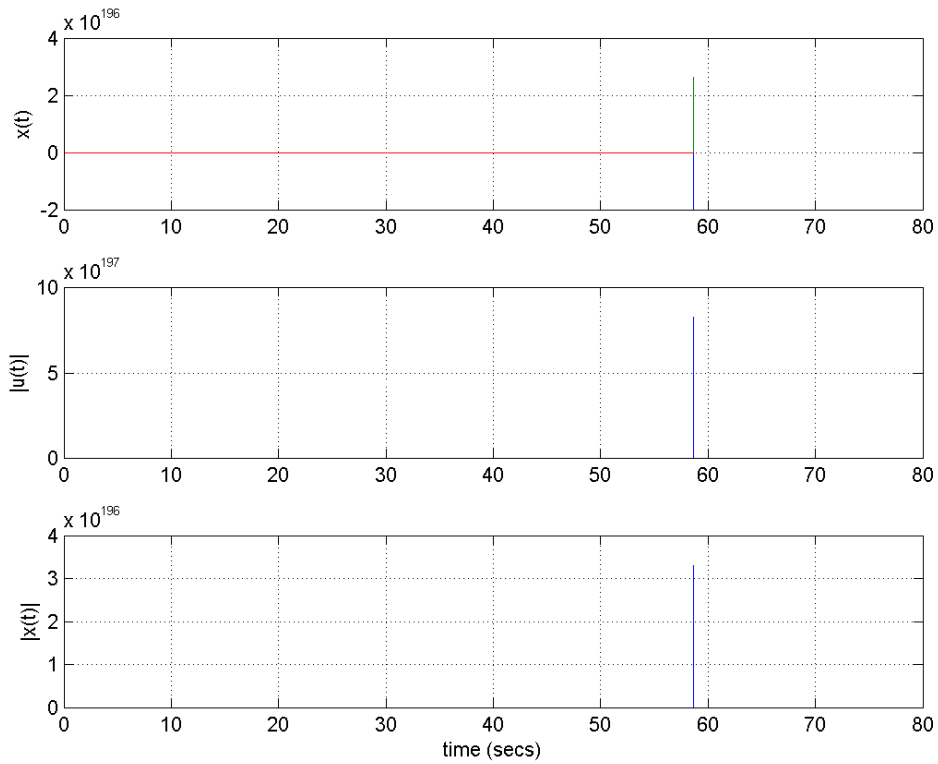
Γράφημα 5.4: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 4 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.1$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



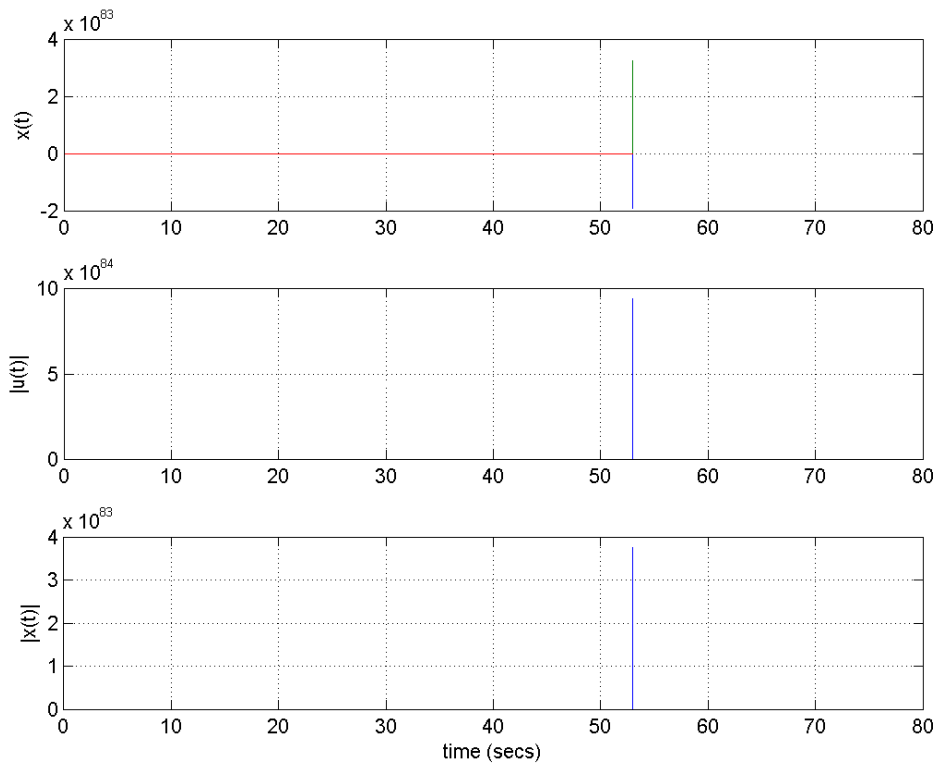
Γράφημα 5.5: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 1 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



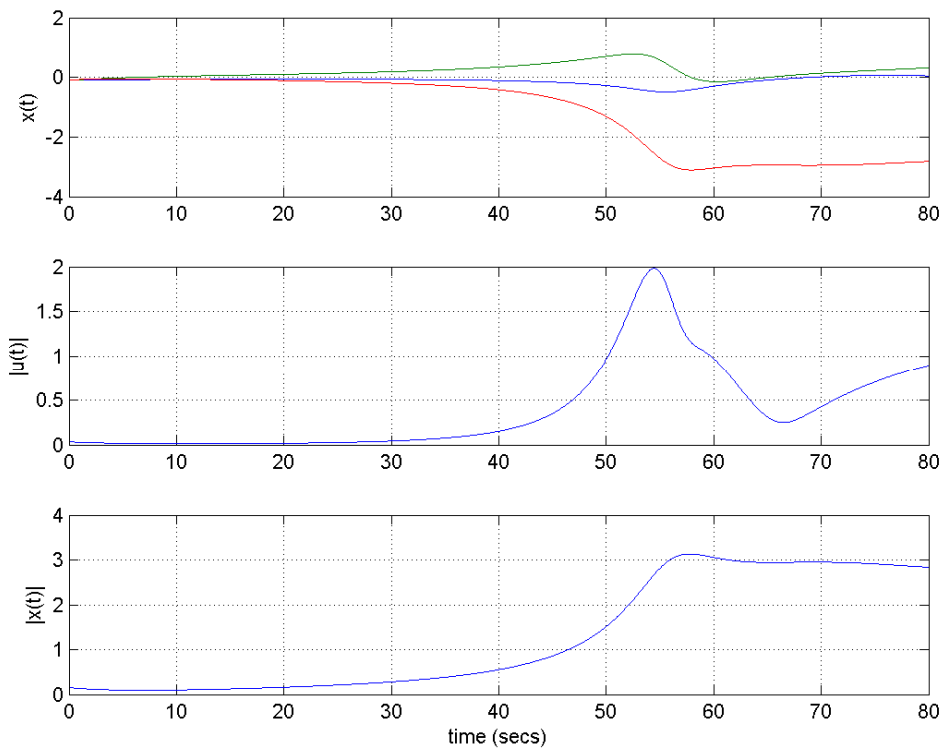
Γράφημα 5.6: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 2 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



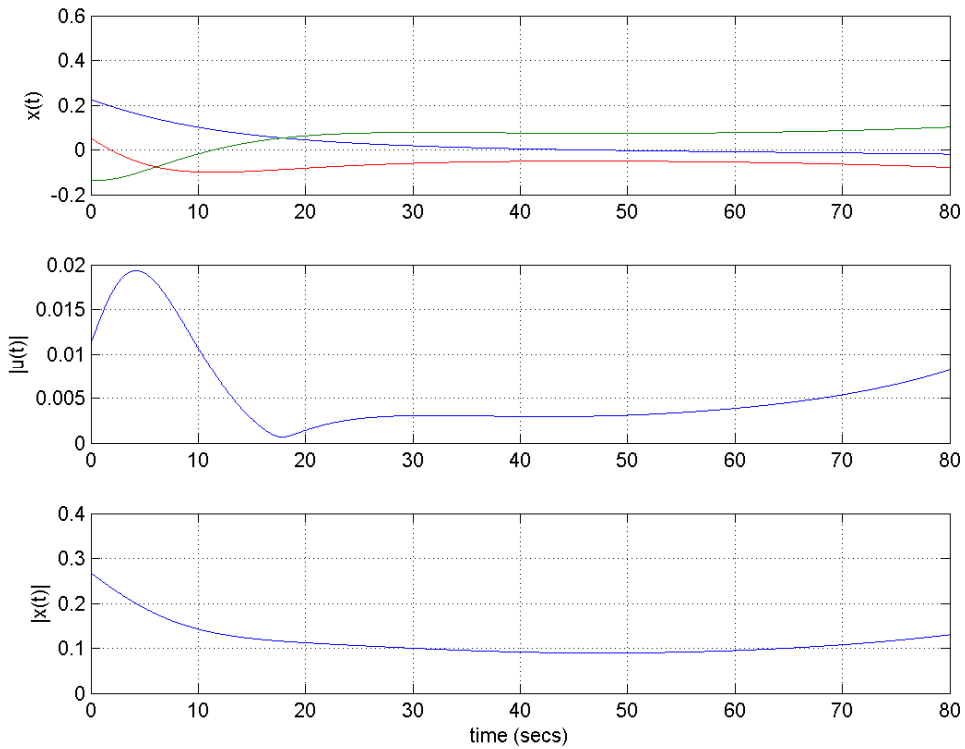
Γράφημα 5.7: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 3 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



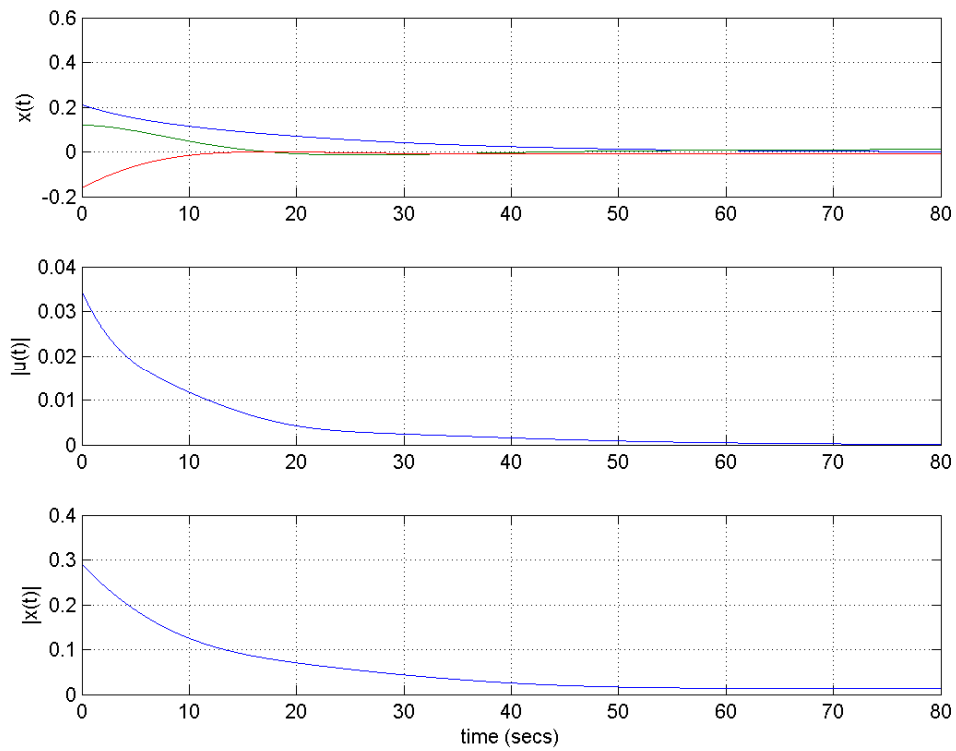
Γράφημα 5.8: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 4 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



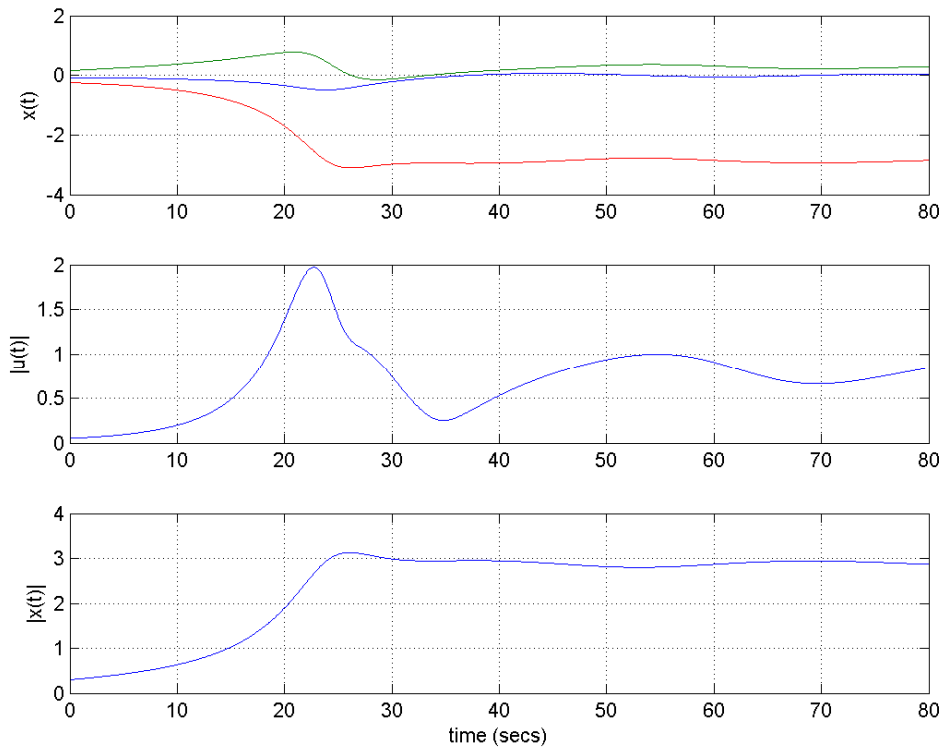
Γράφημα 5.9: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 1 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.5$



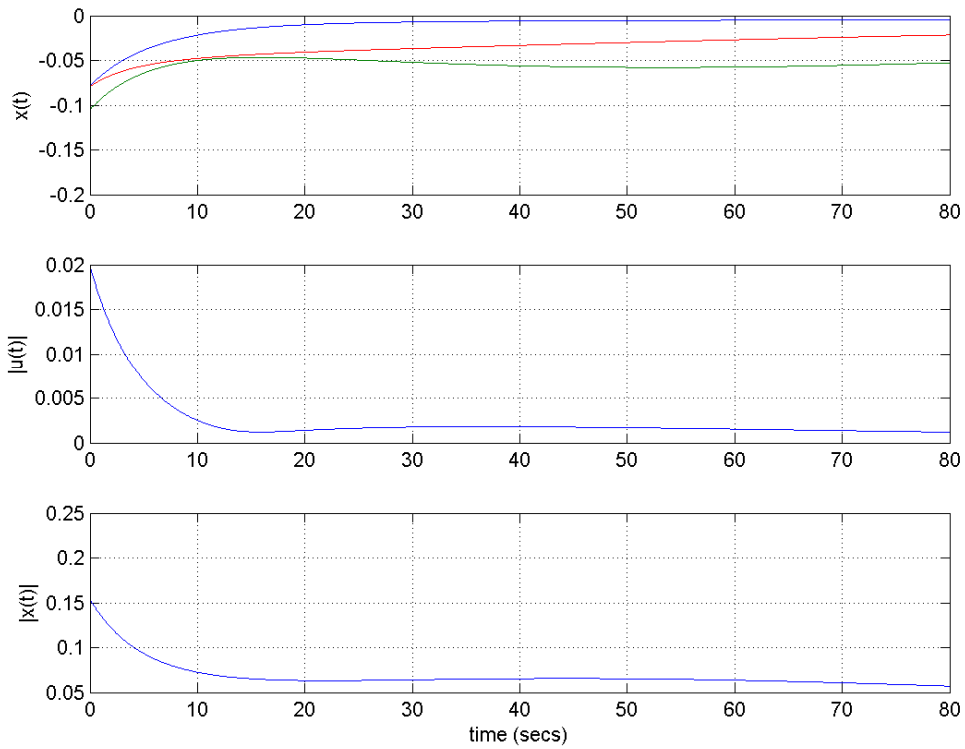
Γράφημα 5.10: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 2 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.5$



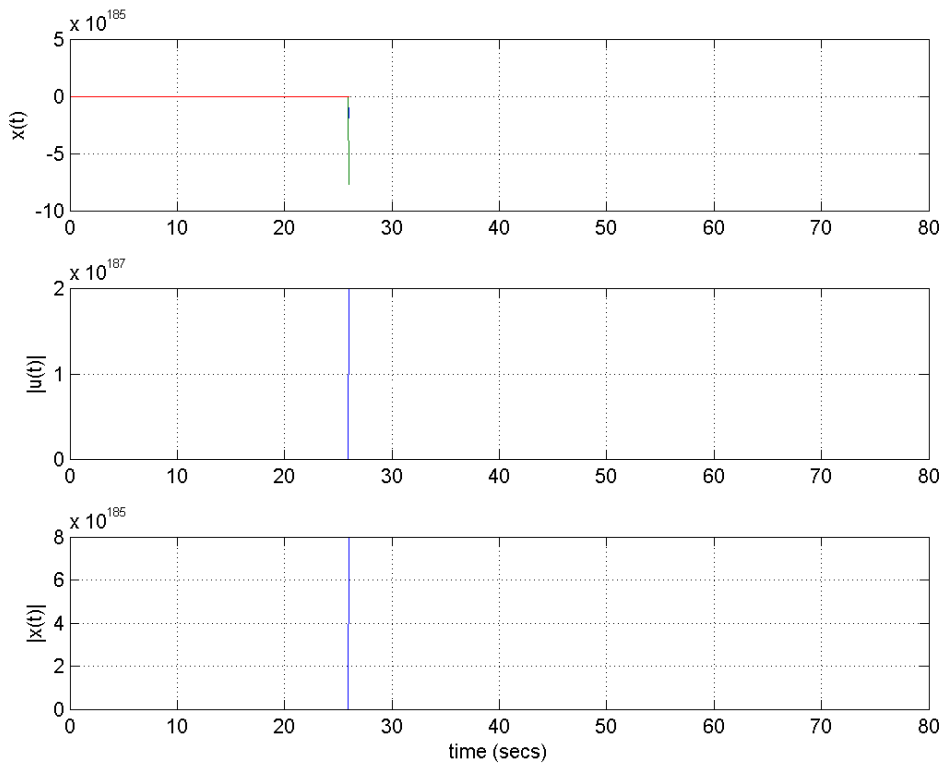
Γράφημα 5.11: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 3 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.5$



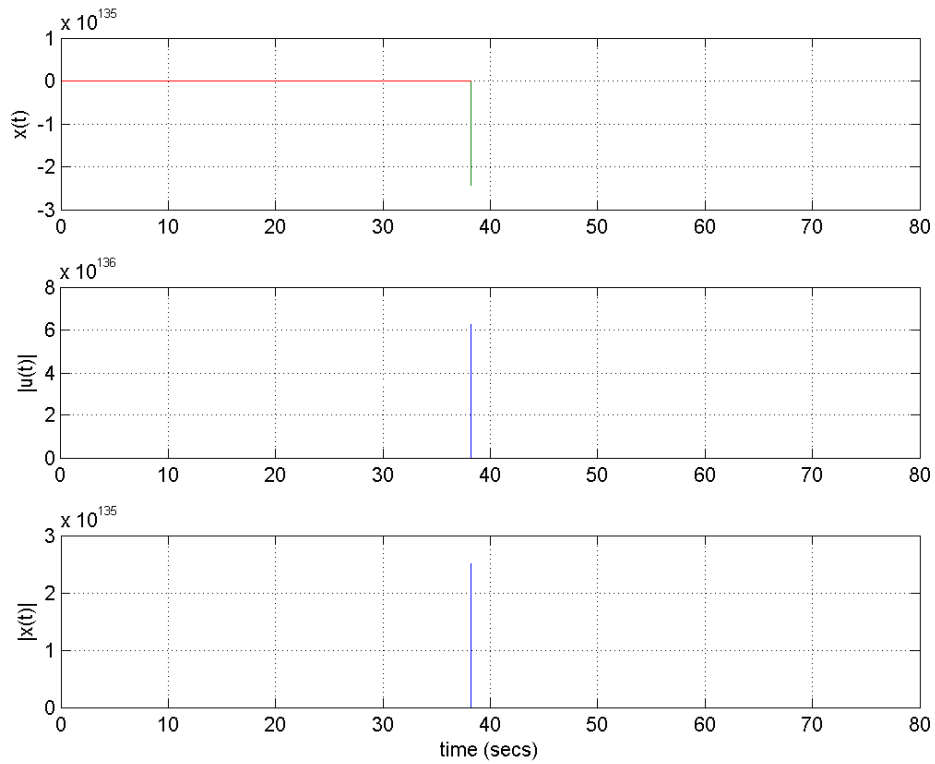
Γράφημα 5.12: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 4 με $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.5$



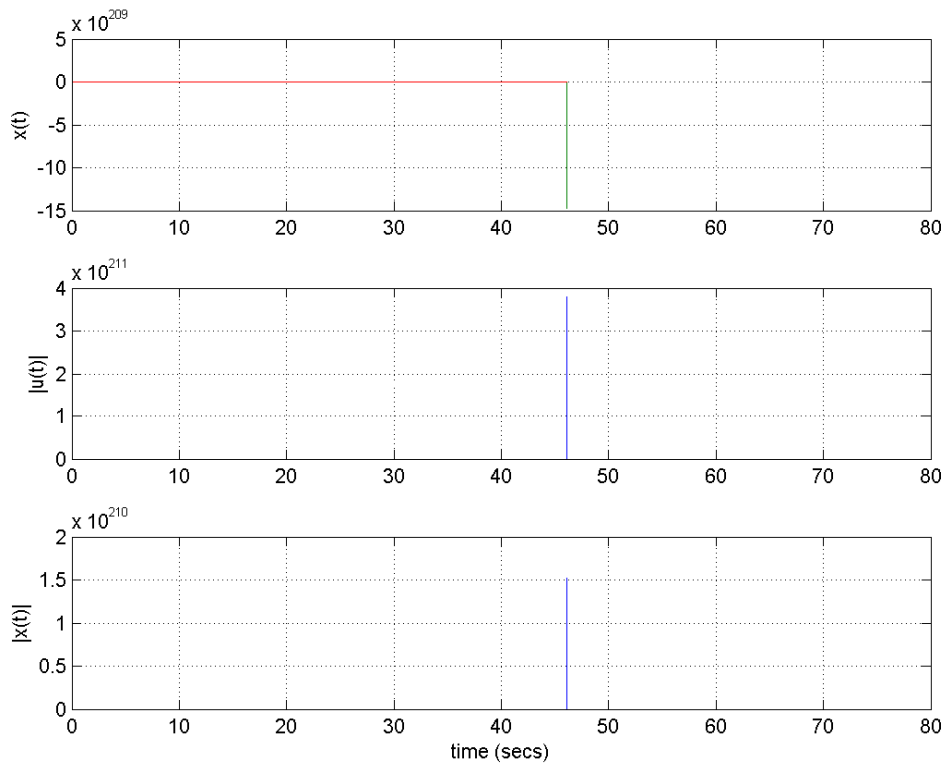
Γράφημα 5.13: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 1 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.1$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.1$



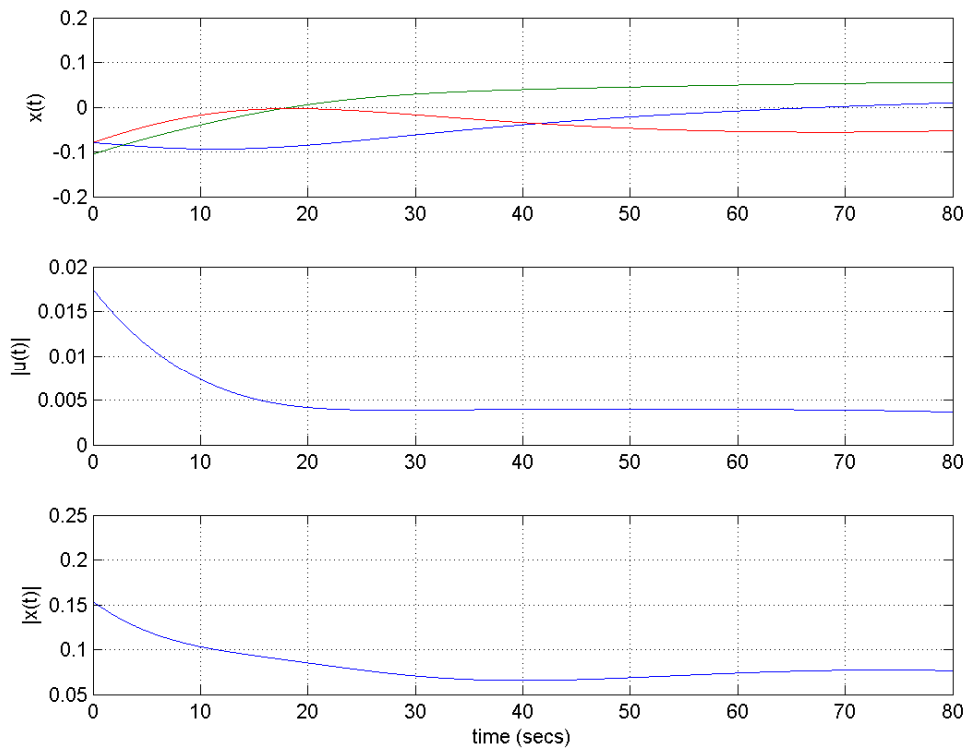
Γράφημα 5.14: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 2 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.1$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.1$



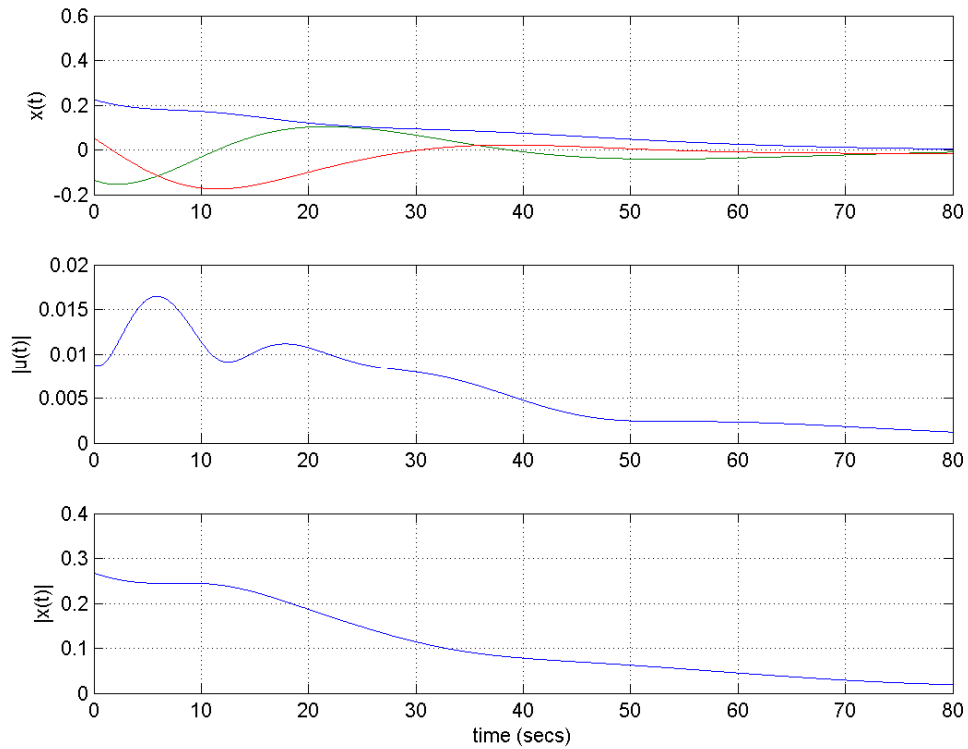
Γράφημα 5.15: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 3 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.1$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.1$



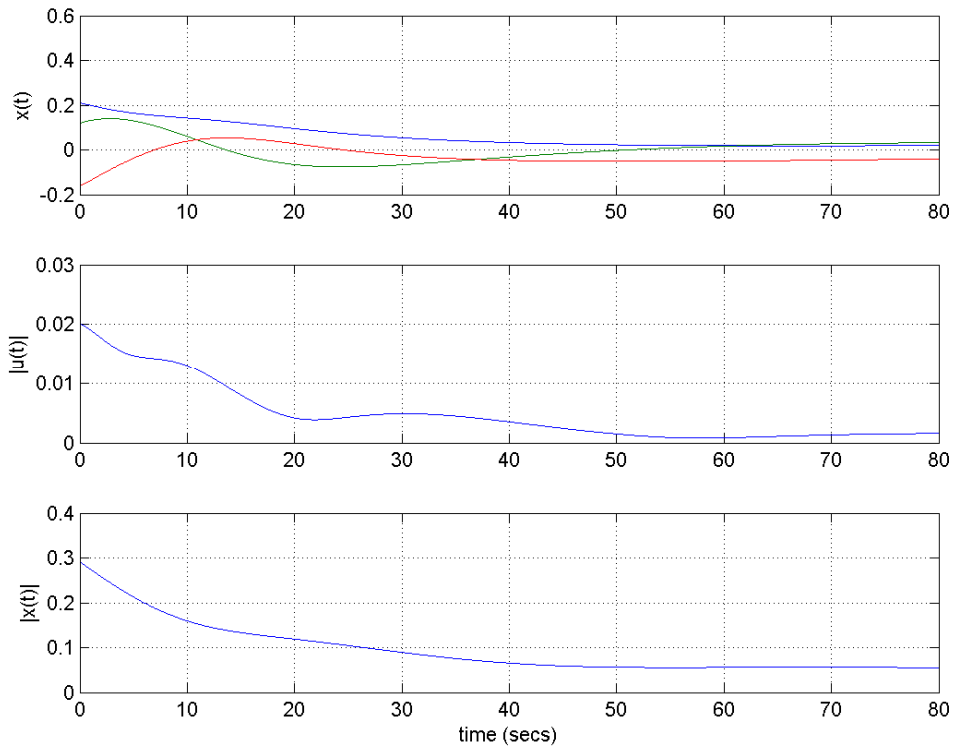
Γράφημα 5.16: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 4 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.1$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.1$



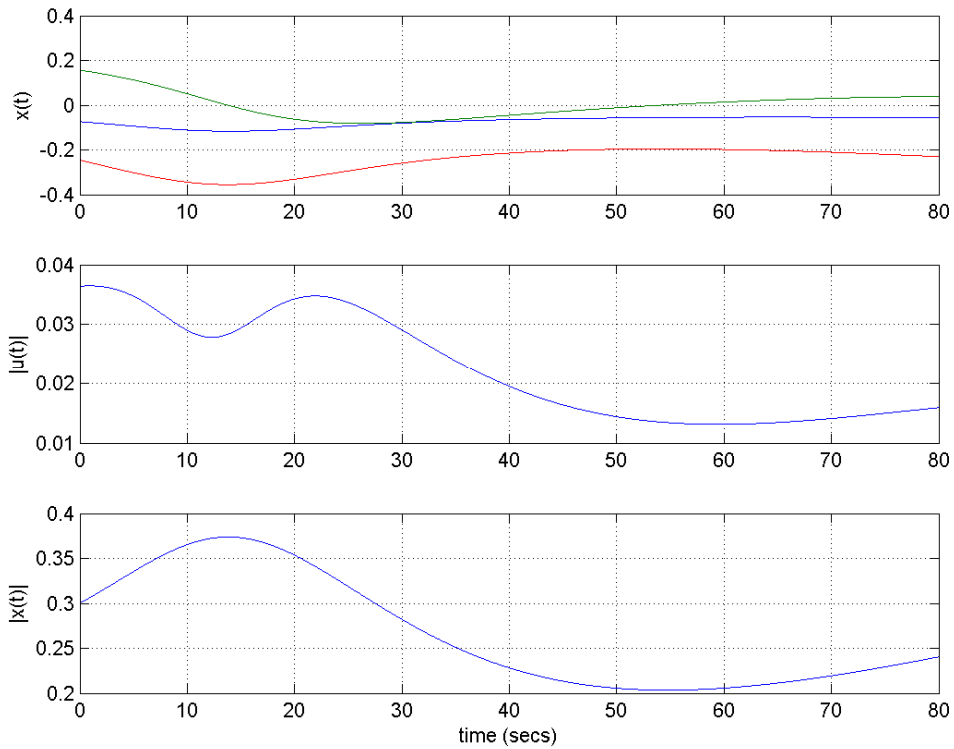
Γράφημα 5.17: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 1 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



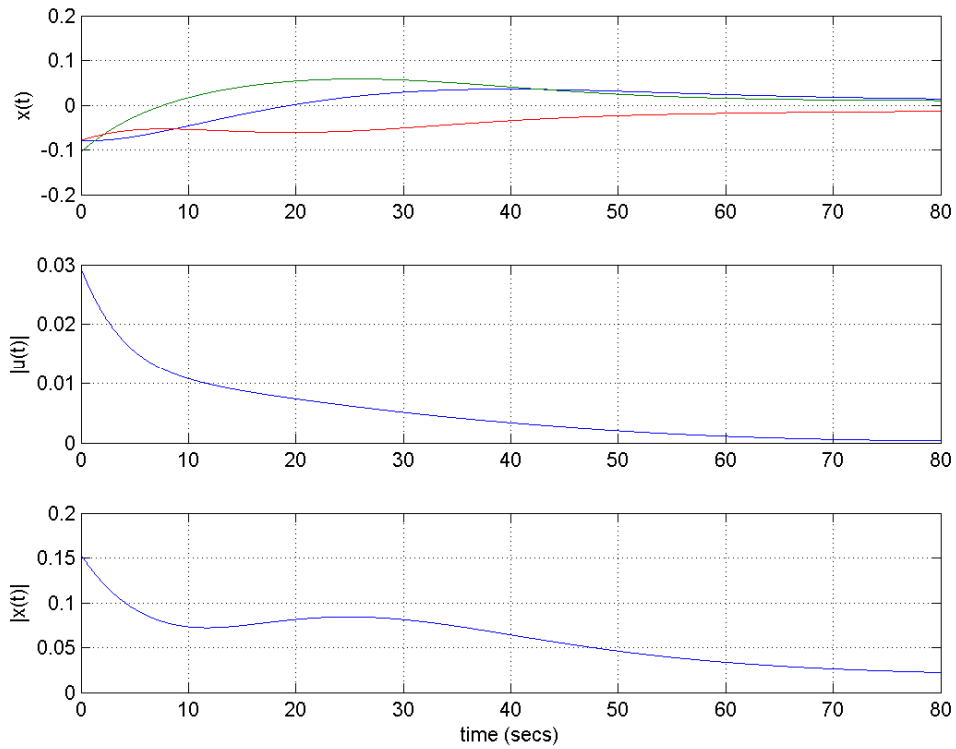
Γράφημα 5.18: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 2 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



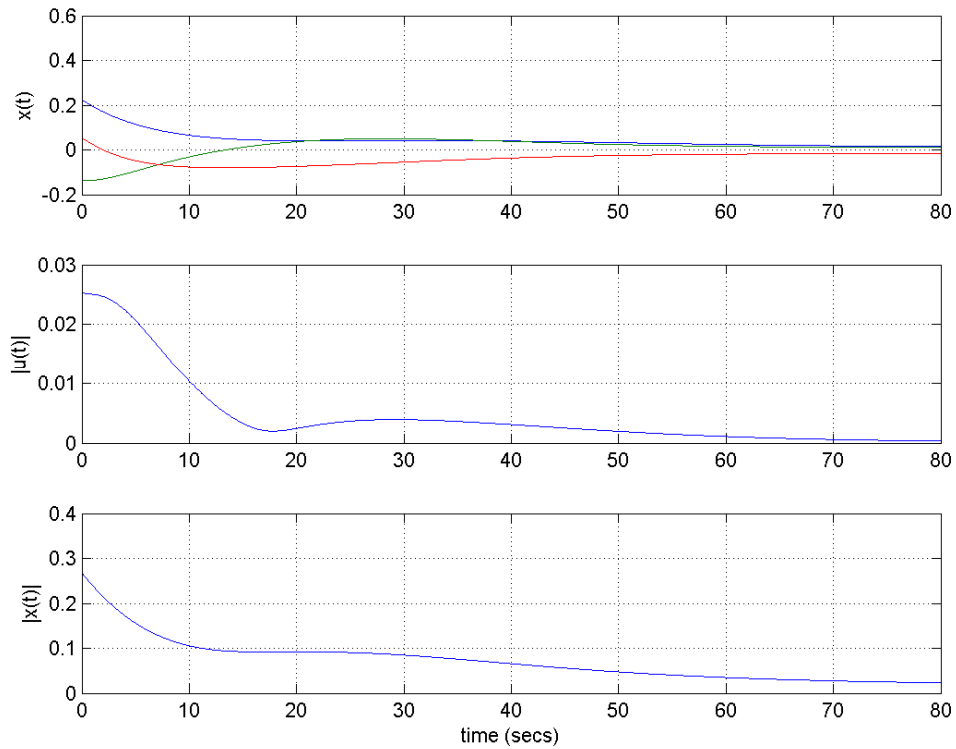
Γράφημα 5.19: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 3 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



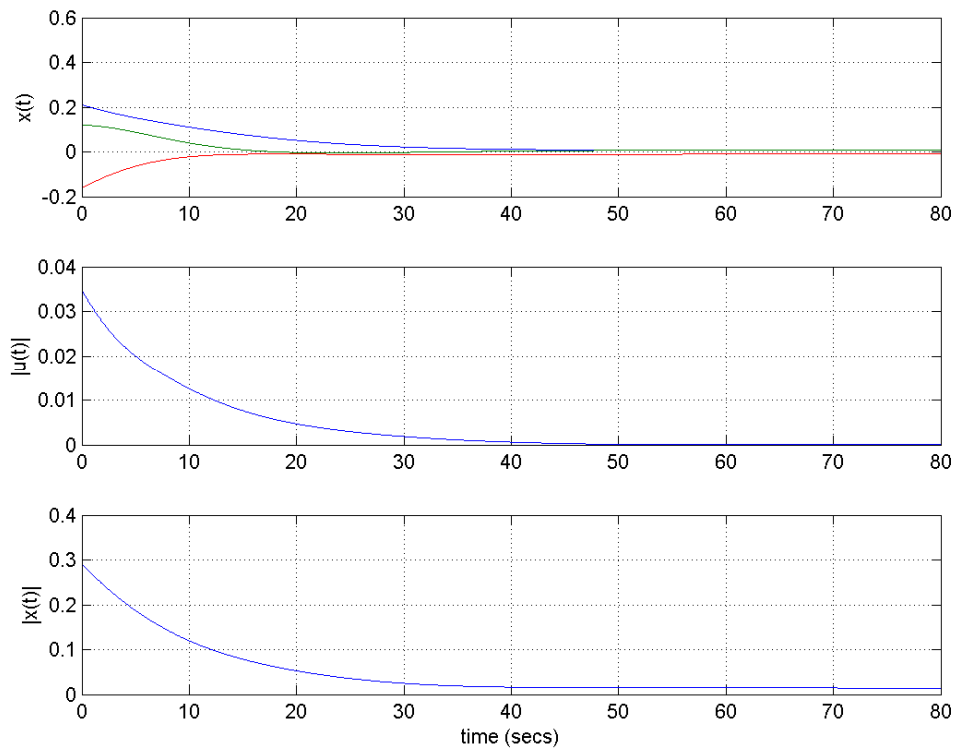
Γράφημα 5.20: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 4 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.1$, $con_2 = 0.1$



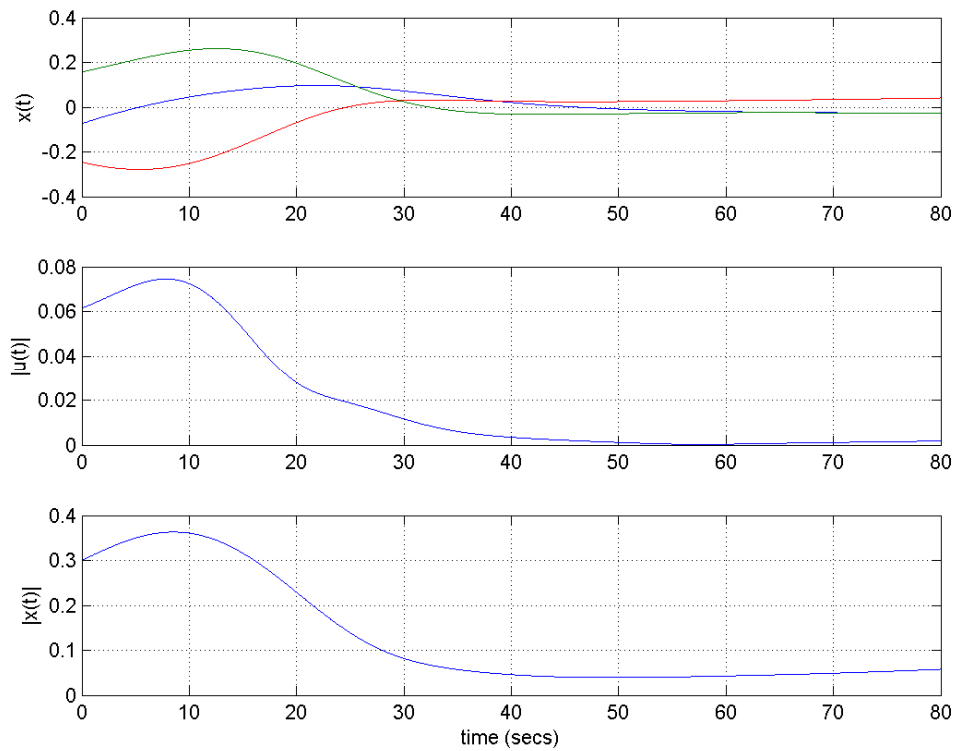
Γράφημα 5.21: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 1 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.5$



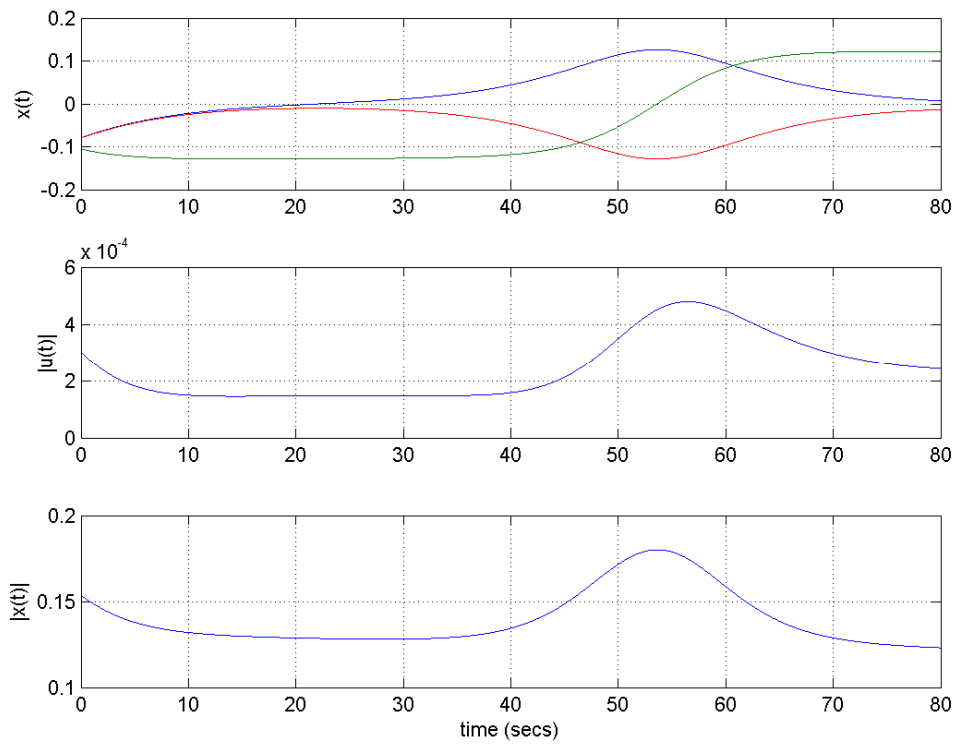
Γράφημα 5.22: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 2 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.5$



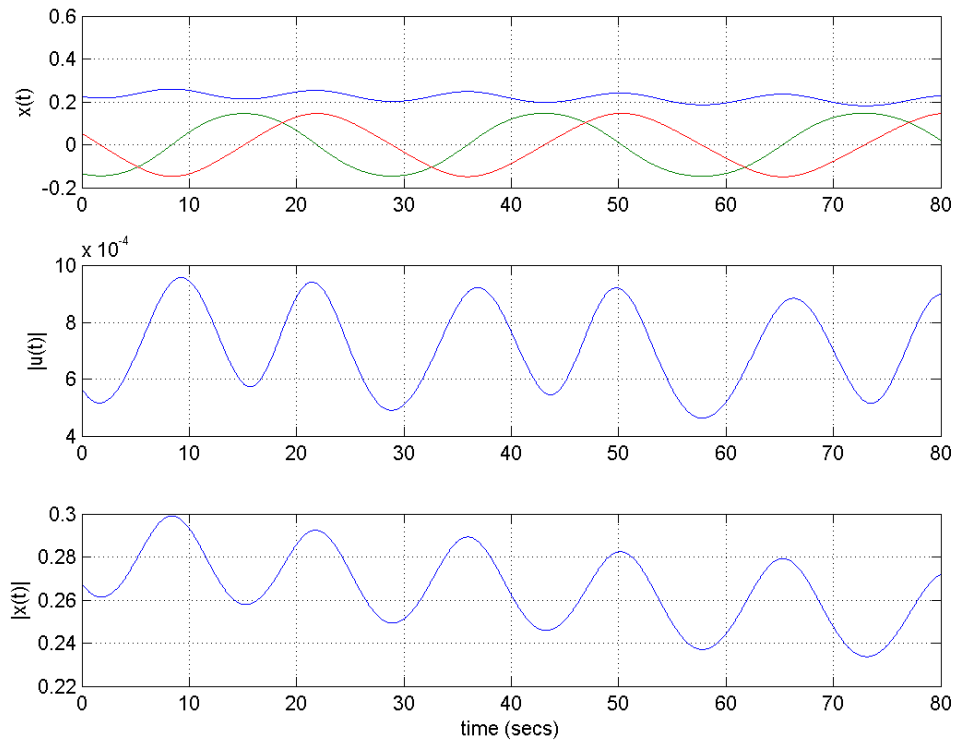
Γράφημα 5.23: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 3 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.5$



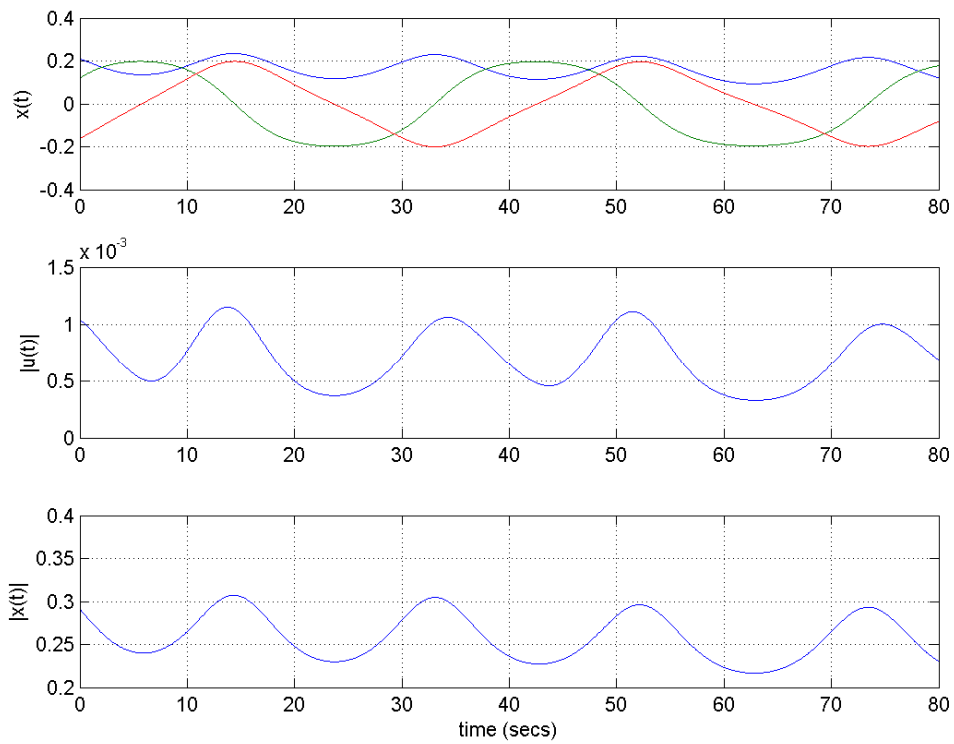
Γράφημα 5.24: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 4 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.5$



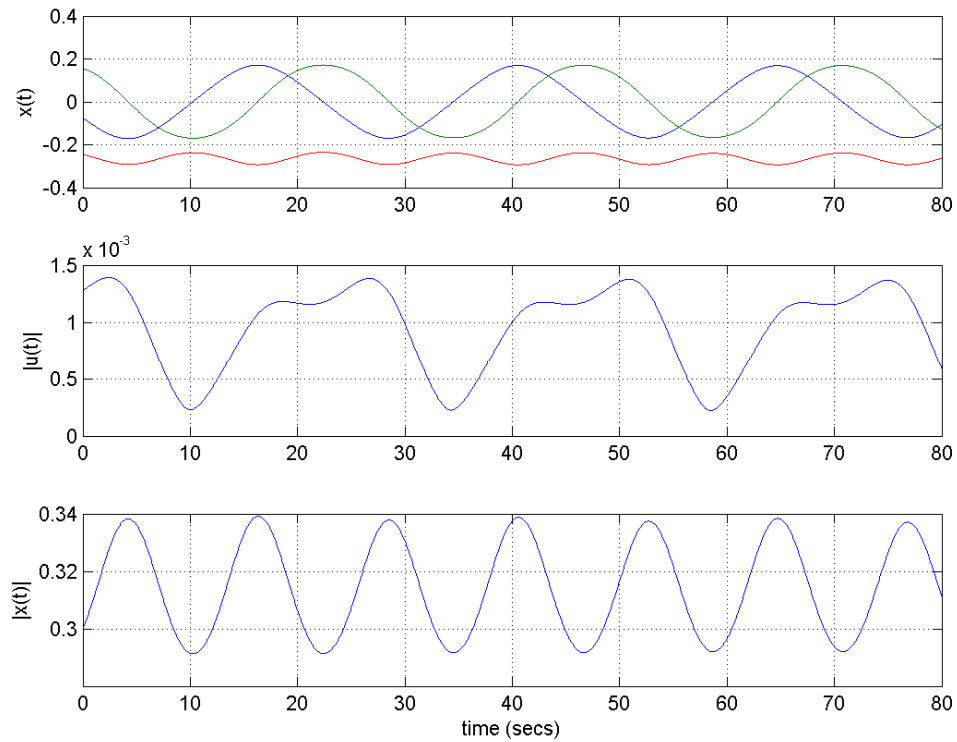
Γράφημα 5.25: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 1 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.99$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.99$



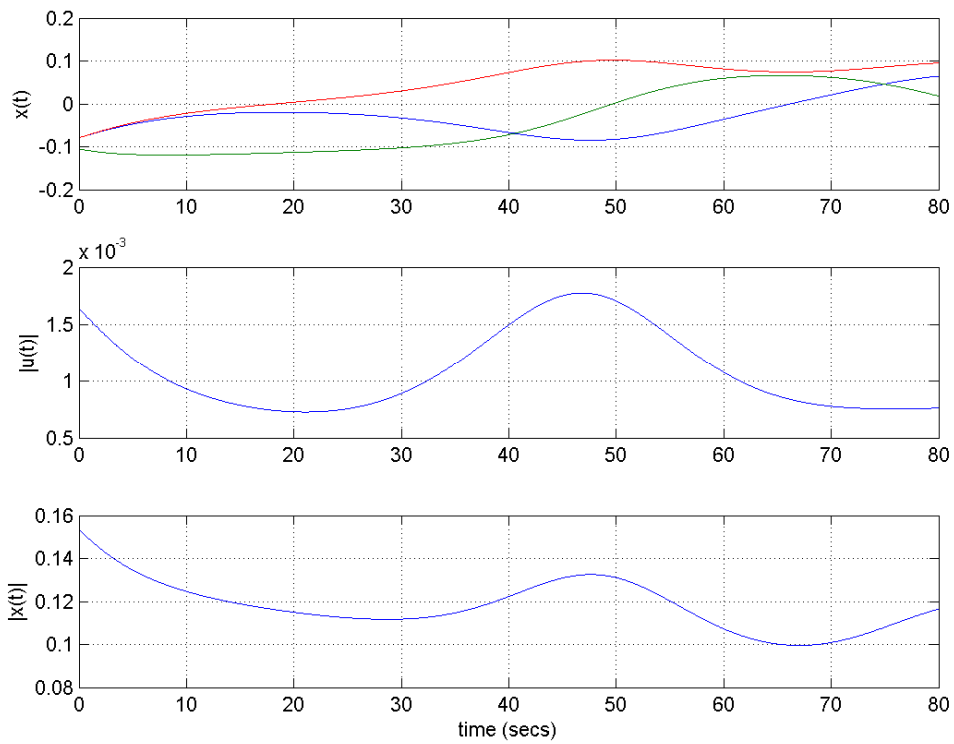
Γράφημα 5.26: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 2 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.99$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.99$



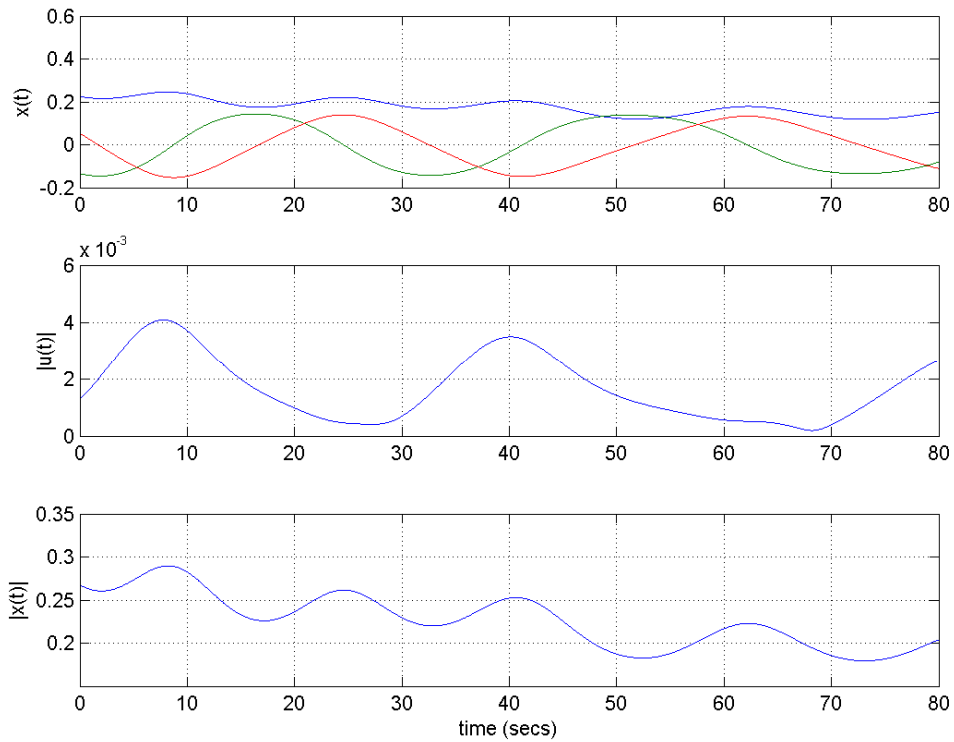
Γράφημα 5.27: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 3 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.99$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.99$



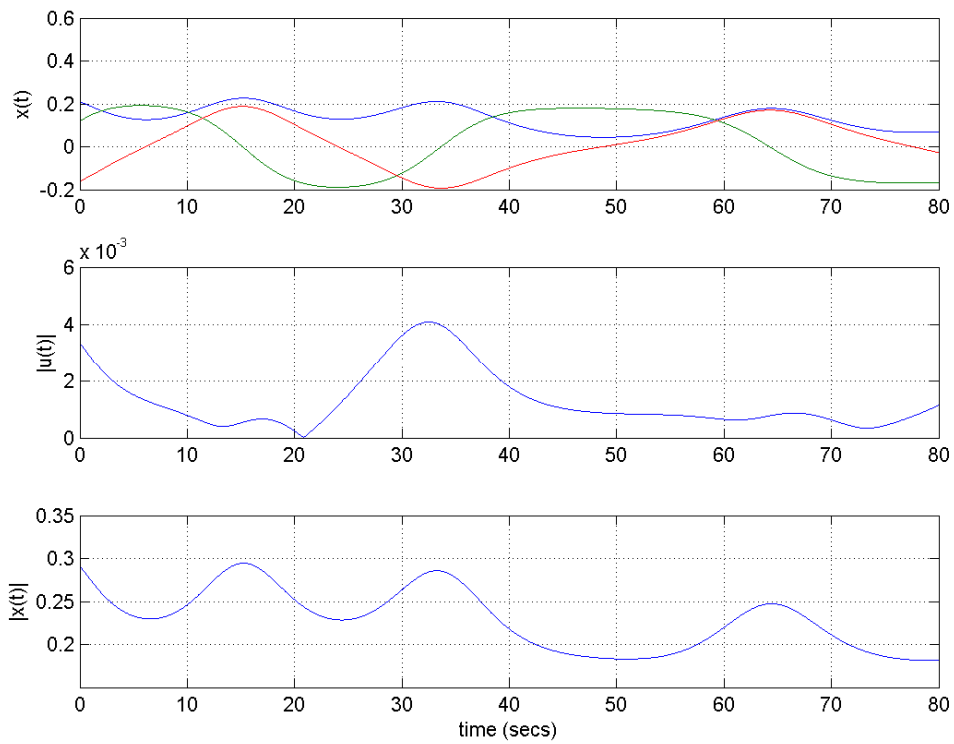
Γράφημα 5.28: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 4 με $\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.99$, $con_1 = 0.5$, $con_2 = 0.99$



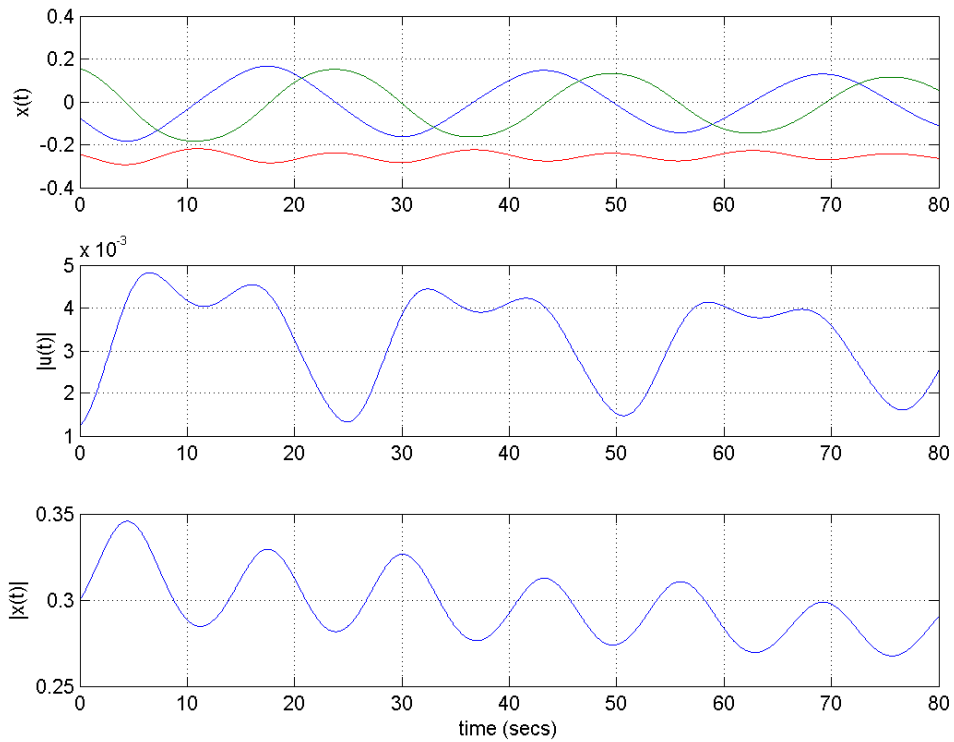
Γράφημα 5.29: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 1 με $\varepsilon_1 = 0.99$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.99$, $con_2 = 0.5$



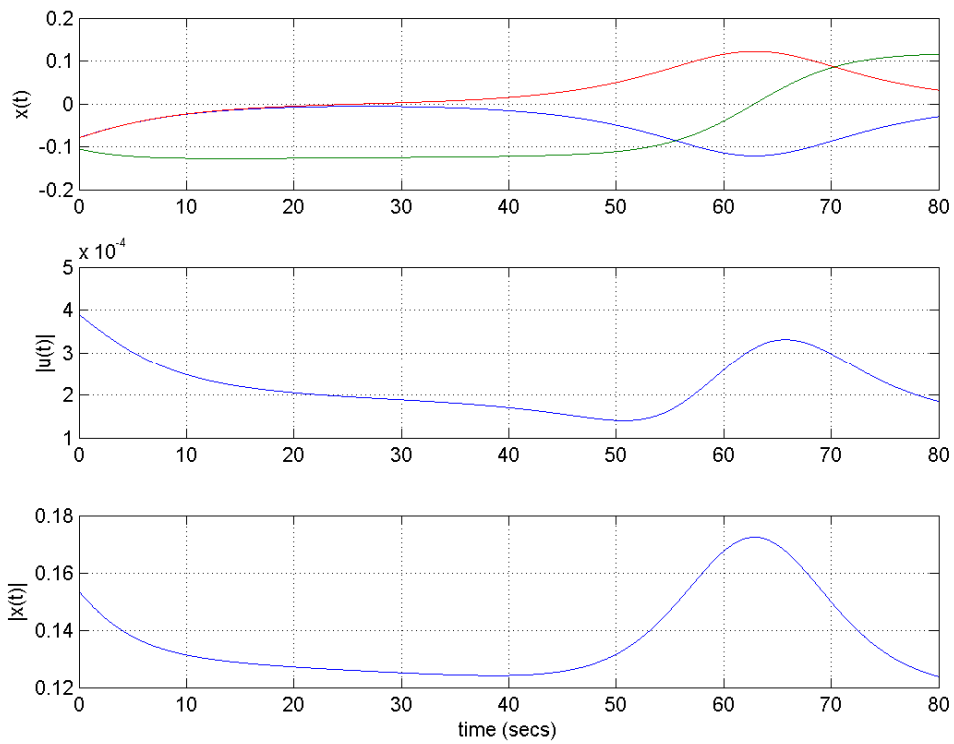
Γράφημα 5.30: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 2 με $\varepsilon_1 = 0.99$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.99$, $con_2 = 0.5$



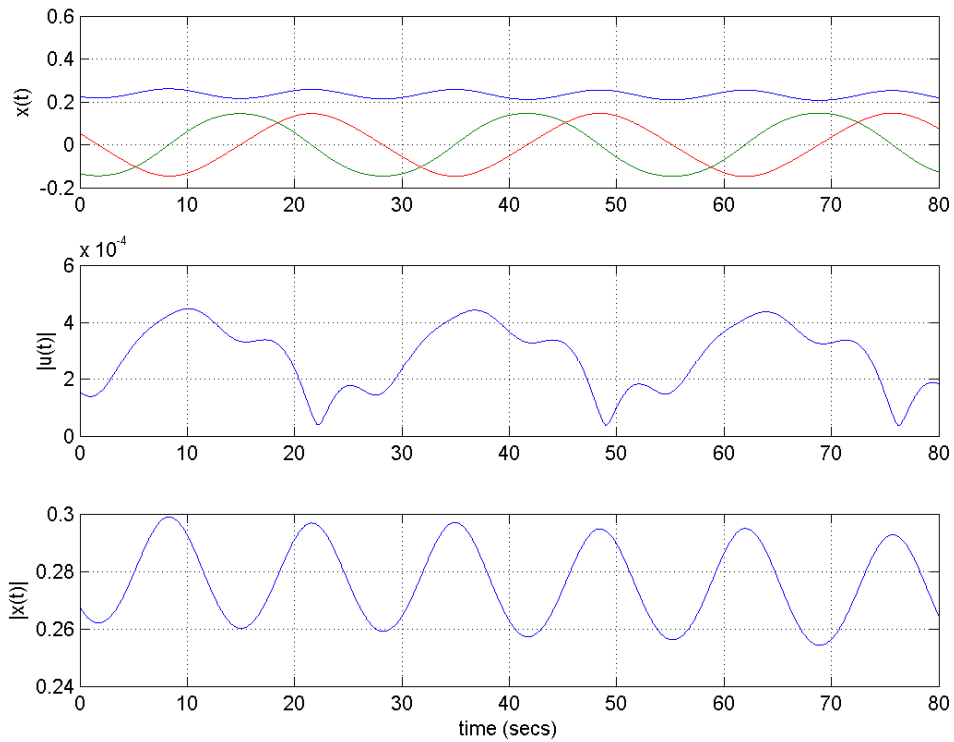
Γράφημα 5.31: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 3 με $\varepsilon_1 = 0.99$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.99$, $con_2 = 0.5$



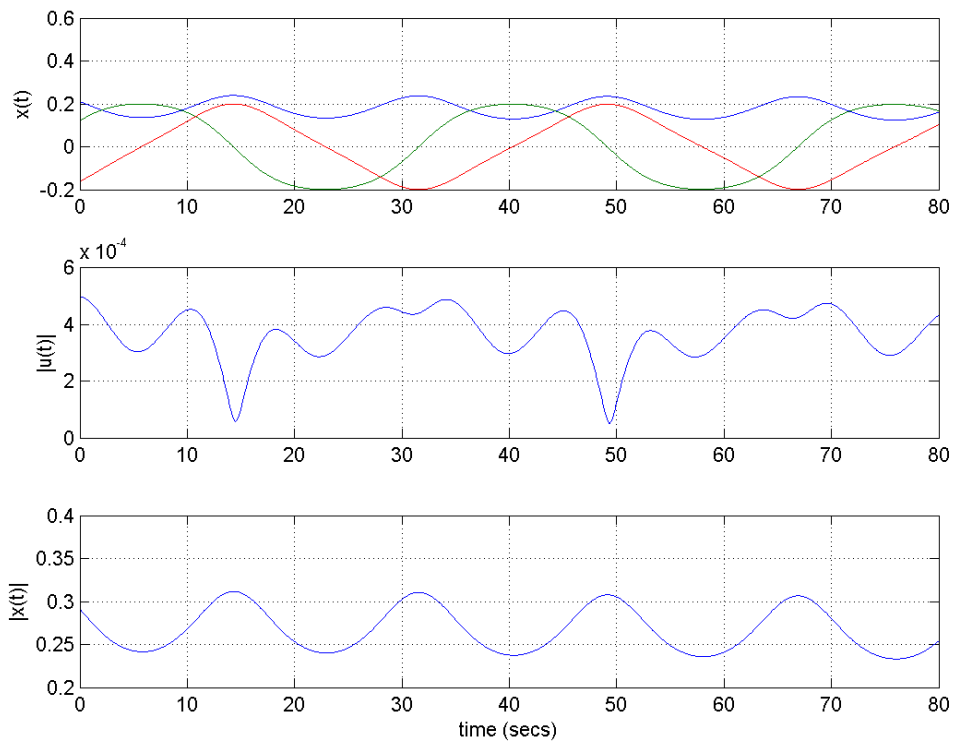
Γράφημα 5.32: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 4 με $\varepsilon_1 = 0.99$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $con_1 = 0.99$, $con_2 = 0.5$



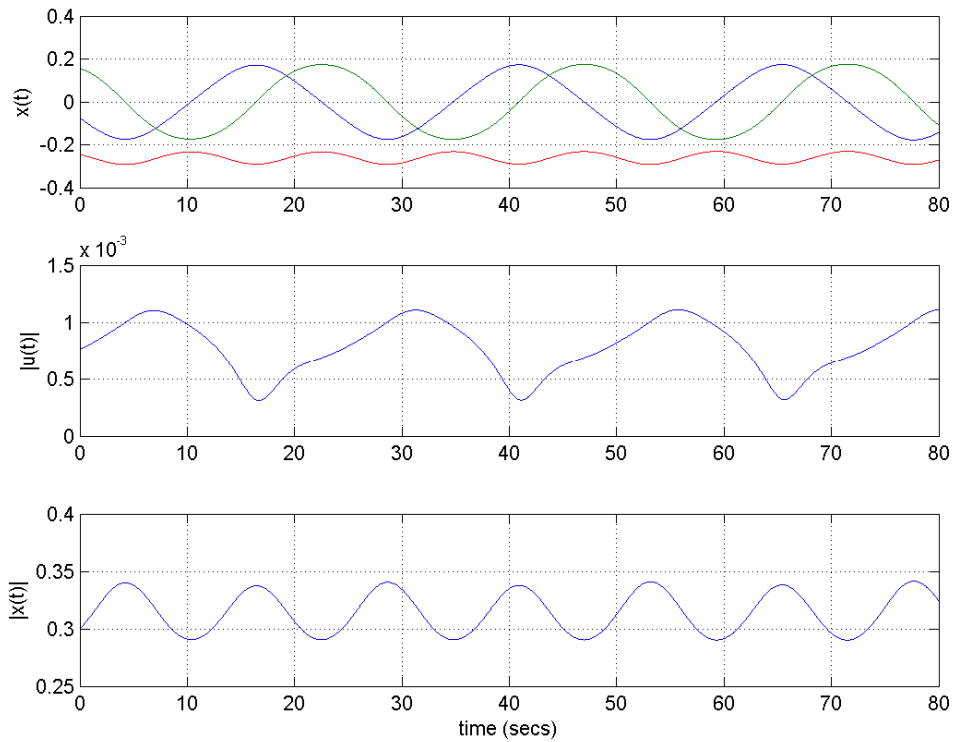
Γράφημα 5.33: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 1 με $\varepsilon_1 = 0.99$, $\varepsilon_2 = 0.99$, $con_1 = 0.99$, $con_2 = 0.99$



Γράφημα 5.34: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 2 με $\varepsilon_1 = 0.99$, $\varepsilon_2 = 0.99$, $con_1 = 0.99$, $con_2 = 0.99$



Γράφημα 5.35: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 3 με $\varepsilon_1 = 0.99$, $\varepsilon_2 = 0.99$, $con_1 = 0.99$, $con_2 = 0.99$



Γράφημα 5.36: Αποτελέσματα προσομοιώσεων για το πείραμα test 4 με $\varepsilon_1 = 0.99$, $\varepsilon_2 = 0.99$, $con_1 = 0.99$, $con_2 = 0.99$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εξετάστηκαν τρεις μέθοδοι με σκοπό την σταθεροποίηση του διανύσματος γωνιακής ταχύτητας ενός άκαμπτου σώματος με δύο ροπές. Η εξέταση των μεθοδολογιών αυτών μας οδήγησε στα εξής γενικά συμπεράσματα:

- Η μέθοδος SDRE επέδειξε ασταθείς λύσεις για όλες τις επιλογές των πινάκων $Q(\cdot)$ και $R(\cdot)$ καθιστώντας την ακατάλληλη για την επίλυση του προβλήματος μας.
- Η μέθοδος η οποία βασίζεται σε βελτιστοποίηση SOS απαιτεί επίλυση ενός μεγάλου προβλήματος βελτιστοποίησης γεγονός το οποίο την καθιστά πρακτικά μη-εφαρμόσιμη. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αριθμός των περιορισμών, στο υπό εξέταση σύστημα, ανήλθε περίπου στις 40.000.
- Η μέθοδος η οποία βασίζεται σε κυρτή βελτιστοποίηση ήταν η μόνη μέθοδος που επέδειξε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η επίλυση της μεθόδου αυτής πραγματοποιήθηκε με την χρήση της συνάρτησης `fmincon` του λογισμικού MATLAB. Όσον αφορά την μεθοδολογία αυτή αξίζει να αναφερθεί ότι:
 - Οι περιορισμοί θετικής ορισμότητας ($\hat{P} \succ \varepsilon_1 I_L$, $\hat{Q} \succ \varepsilon_2 I_L$) μετατράπηκαν σε περιορισμούς ελάχιστης ιδιοτιμής ($\min(\text{eig}(\hat{P})) \succ \varepsilon_1$, $\min(\text{eig}(\hat{Q})) \succ \varepsilon_2$).
 - Η μέθοδος, στο υπό εξέταση σύστημα, παρουσίασε ορισμένα αριθμητικά προβλήματα τα οποία οφείλονταν στην χρήση της συνάρτησης `fmincon`. Για τον λόγο αυτό η αντικειμενική συνάρτηση \mathfrak{J} που περιγράφεται στην εξίσωση (3.15) μετασχηματίστηκε, κάνοντας χρήση μίας συνάρτησης τιμωρίας, στην ακόλουθη μορφή:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I} + a_1 + a_2$$

όπου

$$a_1 = \begin{cases} 0 & \text{αν } \min(\text{eig}(\hat{P})) > \text{con}_1 \\ 10 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \text{και} \quad a_2 = \begin{cases} 0 & \text{αν } \min(\text{eig}(\hat{Q})) > \text{con}_2 \\ 10 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Όπως αναφέρεται και στο Κεφάλαιο 4, η προτεινόμενη μεθοδολογία εξετάστηκε για τέσσερις διαφορετικές αρχικές τιμές του διανύσματος κατάστασης $x(0)$ και για εννέα διαφορετικά σετ παραμέτρων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\text{con}_1, \text{con}_2$.

Με την προσεκτική εξέταση των ανωτέρω γραφημάτων οδηγούμαστε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Η καλύτερη συμπεριφορά του αλγορίθμου εμφανίζεται για το σετ των παραμέτρων $\varepsilon_1 = 0.5, \varepsilon_2 = 0.5, \text{con}_1 = 0.5, \text{con}_2 = 0.5$. Όπως είναι εμφανές από τα Γραφήματα 5.21-5.24, ο αλγόριθμος δουλεύει ικανοποιητικά ανεξαρτήτως του αρχικού διανύσματος κατάστασης. Επιτυγχάνεται σύγκλιση των τιμών του διανύσματος κατάστασης πολύ κοντά στο μηδέν, γεγονός το οποίο μεταφράζεται σε σταθεροποίηση του συστήματος μας.
- Ένα ακόμη σετ παραμέτρων που επιδεικνύει σχετικά καλή συμπεριφορά είναι το σετ $\varepsilon_1 = 0.5, \varepsilon_2 = 0.5, \text{con}_1 = 0.1, \text{con}_2 = 0.1$. Το σετ αυτό, Γραφήματα 5.16-5.20, παρουσίασε αργή σύγκλιση στα πρώτα τρία αρχικά διανύσματα κατάστασης που εξετάστηκαν, ενώ στο τελευταίο παρουσίασε απόκλιση.
- Παρατηρήθηκε ότι για τιμές των παραμέτρων άνω του 0.5 εμφανίζεται είτε περιοδικότητα, είτε πολύ αργή σύγκλιση στις τιμές του διανύσματος κατάστασης, γεγονός που καθιστά αυτές τις τιμές των παραμέτρων μη-ικανοποιητικές για την σταθεροποίηση του συστήματος.
- Όσον αφορά τα σετ των παραμέτρων των οποίων οι τιμές είναι μικρότερες του 0.5 παρατηρείται ότι σε αρκετές περιπτώσεις οι τιμές του διανύσματος

κατάστασης απειρίζονται (αστάθεια του συστήματος), κάτι που οδηγεί σε αποτυχία της μεθόδου. Επίσης, για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων (τιμές μικρότερες του 0.5) και ανάλογα με το αρχικό διάνυσμα κατάστασης εμφανίζονται περιπτώσεις όπου οι τιμές του διανύσματος κατάστασης αποκλίνουν από το μηδέν. Στα συγκεκριμένα σετ η σύγκλιση του συστήματος είναι σπάνια και όταν αυτή εμφανίζεται είναι πολύ αργή.

- Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τιμές του αρχικού διανύσματος κατάστασης λήφθηκαν τυχαία και όπως παρατηρείται από τα γραφήματα του Κεφαλαίου 5 δεν επηρεάζουν την επιτυχή ή μη εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας.
- Η μεθοδολογία που εφαρμόστηκε και αναλύθηκε στην παρούσα διατριβή είναι μία γενική και εύρωστη μεθοδολογία, που έχει την δυνατότητα να εφαρμοστεί σε γενικά μη-γραμμικά προβλήματα με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Το πλεονέκτημα της συγκεκριμένης μεθόδου έναντι άλλων είναι το ότι το μόνο που απαιτείται να προσδιορίσουμε είναι οι τιμές των παραμέτρων, οι οποίες μεταβάλλονται μεταξύ διαφορετικών συστημάτων, χωρίς την παραμικρή μεταβολή της μορφής του προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] J. S. Shamma and J. R. Cloutier, "Existence of SDRE Stabilizing Feedback", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 48, No 3, March 2003.
- [2] J. R. Cloutier, "State-dependent Riccati equation techniques: An overview," presented at the American Control Conf., Albuquerque, NM, June 1997.
- [3] J. R. Cloutier, C. P. Mracek, D. B. Ridgely, and K. D. Hammett, "State dependent Riccati equation techniques: Theory and applications," presented at the Workshop Notes: Amer. Control Conf., Philadelphia, PA, June 1998.
- [4] J. R. Cloutier, D. T. Stansbery, and M. Sznaier, "On the recoverability of nonlinear state feedback laws by extended linearization control techniques," in Amer. Control Conf., San Diego, CA, Dec. 1999.
- [5] P. A. Parrilo, S. Prajna, A. Papachristodoulou and P. Seiler, "SOSTOOLS Software," <http://www.cds.caltech.edu/sostools/>
- [6] E. B. Kosmatopoulos "CLF-based Control Design for Unknown Multi-Input Nonlinear Systems with Good Transient Performance", (submitted).
- [7] C. Berg, J.P.R. Christensen and P. Ressel, "Positive definite functions on Abelian groups," Math. Ann., vol. 223, pp. 253-274, 1976.
- [8] P. A. Ioannou and J. Sun, "Stable and Robust Adaptive Control," Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.
- [9] E. B. Kosmatopoulos and P. A. Ioannou, "A switching adaptive controller for feedback linearizable systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, pp. 742-750, 1999.

- [10] E. B. Kosmatopoulos and P. A. Ioannou, "Robust switching adaptive control of multi-input nonlinear systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, pp. 610-624, 2002.
- [11] E. B. Kosmatopoulos, "Adaptive control design based on adaptive optimization principles," IEEE Transactions on Automatic Control, in press, 2008; preliminary version available at Proc. 17th IFAC World Congress, pp. 5065-5070, Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
- [12] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotovic, "Nonlinear and Adaptive Control Design," New York: Wiley, 1995.
- [13] J.B. Lasserre, "A sum of squares approximation of nonnegative polynomials," SIAM Review, vol. 49, no. 4, pp. 651-669, 2007.
- [14] V. Maiorov and R.S. Meir, "Approximation bounds for smooth functions in $C(\mathcal{R}^d)$ by neural networks and mixture networks," IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 9, pp. 969-978, 1998.
- [15] S.P. Moustakidis, G.A. Rovithakis and J.B. Theocharis, "An adaptive neuro-fuzzy tracking control for multi-input nonlinear dynamic systems," Automatica, vol. 44, no. 5, pp. 1418-1425, 2008.
- [16] P. A. Parrilo, "Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization," Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, U.S.A., 2000.
- [17] J.-B. Pomet, "Remarks on sufficient information for adaptive nonlinear regulation," 31st IEEE Conf. on Decision and Control, Tucson, pp. 1737- 1741, 1992.
- [18] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and F. Wu, " Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach," Proceedings of the Asian Control Conference, pp. 157-165, 2004.

- [19] S. S. Sastry and A. Isidori, "Adaptive control of linearizable systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, pp. 405-412, 1989.
- [20] E. D. Sontag, "A universal construction of Arstein's theorem on nonlinear stabilization," Systems & Control Letters, vol. 13, pp. 117-123, 1989.
- [21] J. Tsinias, "Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization," Math. Contr., Sign., Syst., vol. 2, pp. 343-357, 1989.
- [22] S. R. Weller and G. C. Goodwin, "Hysteresis switching adaptive control of linear multivariable systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, pp. 1360-1357, 1994.
- [23] T.P. Zhang and S. S. Ge, "Adaptive neural control of MIMO nonlinear state time-varying delay systems with unknown dead-zones and gain signs," Automatica, vol. 43, pp. 1021-1033, 2007.
- [24] E.B. Kosmatopoulos, "Convex Control Design for Nonlinear Systems", (submitted).
- [25] Isidori, A. (1995). "Nonlinear Control Systems," Third edition. Springer-Verlag, Berlin.
- [26] Faubourg, L. & Pomet, J.-B. (2000). "Control Lyapunov functions for homogeneous "Jurdjevic-Quinn" systems," ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations, 5, 293-311.
- [27] Kosmatopoulos, E. B. (in press). "An adaptive optimization scheme with satisfactory transient performance," Automatica; for a preliminary version, see also 17th IFAC World Congress'08, pp. 5071-5076, Seoul. Korea, July 6-11 2008.
- [28] Krislock N., Lang J., Varah J., Pai D.K., Seidel H.-P. (2004). "Local compliance estimation via positive semidefinite constrained least squares," IEEE Transactions on Robotics, 6, 1007-1011.

[29] Nocedal, J. & Wright, S.J. (2000). "Numerical Optimization," New York: Springer-Verlag.