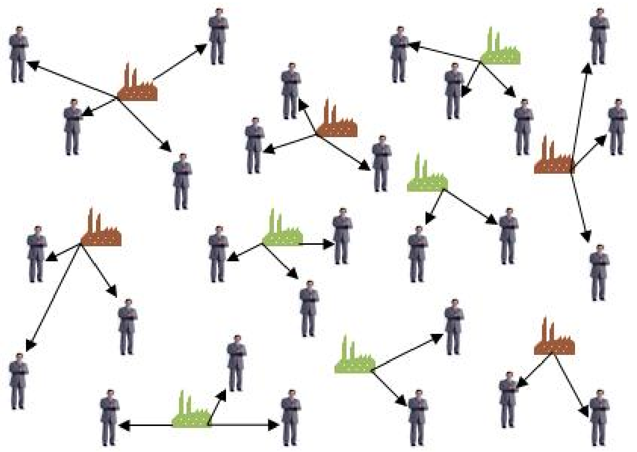
Πολυτεχνείο Κρήτης

Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Τομέας Συστημάτων Παραγωγής

Επιβλέπων καθηγητής: Βασίλειος Κουϊκόγλου

Ανάπτυξη εξελικτικού αλγορίθμου για την επίλυση προβλημάτων διεπίπεδης βελτιστοποίησης

Μεταπτυχιακή Διατριβή



Βλάσση Αντωνία

Χανιά, Φεβρουάριος 2010

Πολυτεχνείο Κρήτης

Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Τομέας Συστημάτων Παραγωγής

Επιβλέπων: Βασίλειος Κουϊκόγλου (καθηγητής)
Εξεταστής: Ιωάννης Μαρινάκης (λέκτορας),
Εξεταστής: Ιωάννης Νικολός (επίκουρος καθηγητής)

Ανάπτυξη εξελικτικού αλγορίθμου για την επίλυση προβλημάτων διεπίπεδης βελτιστοποίησης

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Βλάσση Αντωνία

Μεταπτυχιακή διατριβή η οποία υποβλήθηκε τον Φεβρουάριο του 2010
για την απόκτηση του μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης στον τομέα συστημάτων
παραγωγής του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης

στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Η παρούσα διατριβή δεν θα μπορούσε να εκπονηθεί χωρίς την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του κ. Ιωάννη Μαρινάκη, λέκτορα του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την υπομονή που επέδειξε όλο αυτό το διάστημα. Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους κ.κ. Βασίλειο Κουικόγλου, καθηγητή του τμήματος, και Ιωάννη Νικολό, επίκουρο καθηγητή του τμήματος, για την βοήθεια και την συνολική τους προσφορά όλα αυτά τα χρόνια. Ακόμη, ευχαριστώ θερμά την οικογένειά μου για την ηθική και υλική υποστήριξη που μου παρείχε καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου, καθώς και όλους τους φίλους και συναδέλφους που με στήριξαν τη περίοδο αυτή. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους και φίλους Γιώργο Ταϊρίδη και Θάλεια Στημαδωράκη για την πολύτιμη βοήθειά τους.

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή

Η παρούσα διατριβή έχει στόχο την επίλυση προβλημάτων διεπίπεδης βελτιστοποίησης με χρήση γενετικού αλγορίθμου που δημιουργήθηκε αποκλειστικά για τον σκοπό αυτό. Πιο συγκεκριμένα, επιλύεται πρόβλημα χωροθέτησης εγκαταστάσεων δύο ανταγωνιστών. Στο πρώτο επίπεδο, ο πρώτος ανταγωνιστής επιλέγει τις κινήσεις του. Ο δεύτερος ανταγωνιστής κάνει τις δικές του επιλογές γνωρίζοντας τις επιλογές του πρώτου. Ουσιαστικά πρόκειται για την επίλυση ενός παιγνίου Stackelberg.

Εφόσον αναφερόμαστε σε πρόβλημα χωροθέτησης είναι αυτονόητη η αναφορά στην έννοια των logistics. Το πρώτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο θεωρητικό υπόβαθρο των logistics.

Το επόμενο κεφάλαιο ασχολείται με τη χωροθέτηση εγκαταστάσεων σε θεωρητικό, μεθοδολογικό και πρακτικό επίπεδο, ενώ παρουσιάζονται και κάποιοι αλγόριθμοι επίλυσης προβλημάτων χωροθέτησης που απαντώνται στη βιβλιογραφία.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στη θεωρία παιγνίων. Βασικά χαρακτηριστικά, μοντέλο Cournot και ισορροπίες Nash και Stackelberg είναι κάποια από τα θέματα που καλύπτονται.

Στη συνέχεια, πραγματοποιείται μια εισαγωγή στα προβλήματα διεπίπεδης βελτιστοποίησης, η συσχέτιση τους με τα παίγνια Stackelberg καθώς και παρουσίαση αλγορίθμων που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων. Το κεφάλαιο κλείνει με μια σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση μερίδας εργασιών και δημοσιεύσεων σχετικά με προβλήματα διεπίπεδης βελτιστοποίησης

Κατόπιν, αναφερόμαστε στα εργαλεία βελτιστοποίησης που επιλέξαμε για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, τους εξελικτικούς αλγορίθμους. Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται ένας απλός γενετικός αλγόριθμος και παρουσιάζονται επιγραμματικά οι γενετικοί τελεστές της διασταύρωσης, της μετάλλαξης και της επιλογής.

Στο επόμενο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια των ανταγωνιστικών προβλημάτων χωροθέτησης εγκαταστάσεων, παρουσιάζεται το στατικό μοντέλο ηγέτη – ακολούθου και καταγράφονται κάποιες παραδοχές και προσεγγίσεις που απαντώνται στην βιβλιογραφία.

Εν συνεχεία, διατυπώνεται το προς επίλυση διεπίπεδο πρόβλημα ανταγωνιστικής χωροθέτησης και παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την επίλυση του.

Τέλος, παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την επίλυση του υπό εξέταση διεπίπεδου προβλήματος χωροθέτησης.

1 Logistics

1.1 Ορισμός – στόχοι

Ο όρος logistics αποτελεί μια πολυσύνθετη έννοια, η οποία καλύπτει ένα τεράστιο εύρος διαδικασιών σχεδιασμού, υλοποίησης και ελέγχου της ροής αλλά και της αποθήκευσης πρώτων υλών, ημιτελών καθώς και τελικών προϊόντων. Ουσιαστικά, πρόκειται για μια διαδικασία που περιλαμβάνει το σχεδιασμό, την εφαρμογή, και τον έλεγχο της αποτελεσματικής και αποδοτικής μεταφοράς και αποθήκευσης πρώτων υλών, ενδιάμεσων και τελικών προϊόντων, καθώς και τη διαχείριση πληροφοριών που σχετίζονται με τη διακίνηση των προϊόντων από τους τόπους παραγωγής στους τόπους κατανάλωσης. Θεωρητικά, τα logistics εξυπηρετούν την κερδοφορία μιας επιχείρησης, εξασφαλίζοντας τη συνεχή διαθεσιμότητα των προϊόντων και των λοιπών πόρων της, επιτρέποντας παράλληλα την ομαλή ροή επιτέλεσης των διαδικασιών που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Στόχος των logistics είναι η παράδοση κατάλληλου τελικού προϊόντος ή υπηρεσίας στο κατάλληλο χώρο, στον σωστό χρόνο και στην κατάλληλη κατάσταση, με παράλληλη μεγιστοποίηση των κερδών. Αυτό επιτυγχάνεται με μείωση του κόστους παραγωγής, με πλήρη αξιοποίηση των υλικών μέσων καθώς και με την μείωση του κόστους μεταφοράς αλλά και αποθήκευσης μειώνοντας τις καθυστερήσεις παράδοσης. Οι κινήσεις αυτές έχουν ως αποτέλεσμα την επίτευξη οικονομίας κλίμακας για την επιχείρηση, και συνεπώς την επίτευξη κερδοφορίας.

1.2 Σύντομη ιστορική αναδρομή

Η ανάγκη για την ανάπτυξη των logistics προέκυψε από την ανάγκη για χωρικό και χρονικό διαχωρισμό μεταξύ των θέσεων παραγωγής των πρώτων υλών και των προϊόντων καθώς και μεταξύ των θέσεων παραγωγής και κατανάλωσης των προϊόντων.

Αν επιχειρήσει κανείς μια σύντομη ιστορική αναδρομή των logistics στην πάροδο του χρόνου παρατηρεί ότι αρχικά οι άνθρωποι κατανάλωναν μόνο ό,τι παρήγαγαν στην περιοχή τους λόγω της παντελούς έλλειψης μεταφορικών και αποθηκευτικών μέσων. Αργότερα, και με την εξέλιξη των μεταφορών παρατηρήθηκε γεωγραφική διασπορά της παραγωγής. Αυτή εξειδικεύτηκε ανά περιοχή και ξεκίνησε η μεταφορά προϊόντων σε άλλες αγορές. Τα τελευταία χρόνια κυριαρχεί η τάση για παγκοσμιοποίηση των αγορών. Η ηλεκτρονική εξέλιξη και η ταχύτητα των μεταφορών καθιστά το διεθνές εμπόριο εξαιρετικά περίπλοκο. Σε πολλές περιπτώσεις, πλέον, οι θέσεις της παραγωγής, του πωλητή και του αγοραστή διαφέρουν δραματικά. Η τάση αυτή είναι ιδιαίτερα αυξητική κυρίως λόγω της εξέλιξης των πολυεθνικών αλλά και της διεθνοποίησης των μικρότερων επιχειρήσεων (μέσω των εξαγωγών) η οποία έχει ως αποτέλεσμα τον επαναπροσδιορισμό του τόπου παραγωγής (φθηνότερα εργατικά) και επέκταση του δικτύου διανομής. Επιπρόσθετα, η εξέλιξη της τεχνολογίας διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό την διαχείριση παραγγελιών, αποθήκευσης και αποστολής. Πολλές φορές, τέλος, η παραγωγή καθίσταται πιο συμφέρουσα οικονομικά εάν μεταφερθεί πλησιέστερα στην αγορά στην οποία απευθύνεται (λόγω της μείωσης των μεταφορικών) ή εάν το κόστος της είναι φθηνότερο σε άλλες περιοχές (λόγω π.χ. ειδικών διατάξεων για επενδύσεις).

1.3 Πεδίο εφαρμογών των logistics

Το εύρος εφαρμογών των logistics είναι τόσο μεγάλο όπου θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε είδος επιχειρήσεις.

Ενδεικτικά κάποιες περιπτώσεις όπου η διαχείριση των logistics είναι κρίσιμης σημασίας περιλαμβάνουν:

- Ασθενοφόρα (Χωροθέτηση και δρομολόγια)
- Υπηρεσίες εκτάκτου ανάγκης (Άμεση Δράση, Πυροσβεστική)
- Δρομολόγια απορριμματοφόρων
- Δρομολόγια μέσων μαζικής μεταφοράς
- Χωροθέτηση και χωροταξία νοσοκομείων
- Οργάνωση Ολυμπιακών Αγώνων
- Στρατιωτικές επιχειρήσεις

Σε μικροοικονομική κλίμακα (λ.χ. σε μια εταιρία) τα logistics έχουν ιδιαίτερα μεγάλη σημασία γιατί αποτελούν το 15% – 25% του συνολικού κόστους (κόστη αποθήκευσης, διακίνησης κλπ.). Επιπρόσθετα, αποτελούν βασικότατο στοιχείο για την ανταγωνιστικότητα της εταιρίας. Αν, για παράδειγμα, η τιμή πώλησης του ίδιου τελικού προϊόντος, μεταξύ δύο εταιριών, είναι η ίδια, τότε η εταιρία που θα καταφέρει να επιτύχει συνεχή ροή προς τον πελάτη αποκτά συγκριτικό πλεονέκτημα

Αν και, όπως αναφέραμε παραπάνω, τα logistics μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε είδους επιχείρηση, το μεγαλύτερο μέρος αφορά επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στην εφοδιαστική αλυσίδα (εμπορικές, μεταφορικές, εταιρίες αποθήκευσης κλπ.), ανεξαρτήτως του οικονομικού τομέα στον οποίο ανήκουν. Ο όρος εφοδιαστική αλυσίδα περιγράφει το πλέγμα διαδικασιών που απαιτούνται ώστε ένα προϊόν να περάσει από τη φάση της παραγωγής στη φάση της κατανάλωσης [1]. Μεταξύ των διαδικασιών αυτών ξεχωρίζει η παραγωγή, η τυποποίηση, η αποθήκευση, η διακίνηση και η διάθεση του προϊόντος.

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, logistics και εφοδιαστική αλυσίδα συνδέονται άρρηκτα. Για το λόγο αυτό πολλές φορές οι δύο έννοιες συγχέονται ή ακόμη χειρότερα θεωρούνται συνώνυμες.

Στην πραγματικότητα, η εφοδιαστική αλυσίδα είναι το βασικότερο πεδίο εφαρμογής των logistics, τα οποία αποτελούν το βασικότερο ζητούμενο για την επιτυχία των διαδικασιών της. Τα logistics παρέχουν όλες εκείνες τις απαντήσεις στο πώς πρέπει να οργανωθούν οι διαδικασίες της εφοδιαστικής αλυσίδας (τρόπος διακίνησης, συχνότητα παραδόσεων, δρομολόγια κλπ.) [1].

1.4 Διαχείριση των logistics

Η διαχείριση των logistics αφορά τρεις μεγάλους τομείς [2]:

- Τομέας σχεδιασμού
- Τομέας ελέγχου
- Τομέας εκτέλεσης

Τα θέματα που καλύπτονται στον τομέα του σχεδιασμού είναι τα ακόλουθα:

- Στρατηγική
- Χρονικός ορίζοντας
- Μονάδα διακίνησης
- Συσκευασία
- Κανάλια διανομής και μεταφοράς
- Αριθμός φορτηγών και κέντρων διανομής
- Τοποθεσία κέντρων διανομής
- Τεχνολογία
- Ανακύκλωση

Οι σημαντικότερες στρατηγικές αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν κατά τον σχεδιασμό είναι μεταξύ άλλων ο καθορισμός του αριθμού, της θέσης και του μεγέθους των αποθηκών, το σύστημα αποθήκευσης που θα υιοθετηθεί, η πολιτική που θα ακολουθηθεί (αποθήκευση πρώτων υλών ή/και τελικών προϊόντων), το επίπεδο του αυτοματισμού καθώς και οι μέθοδοι μεταφοράς των πρώτων υλών και διανομής των τελικών προϊόντων. Κάποιες αποφάσεις τακτικής αφορούν στις λήψεις αποφάσεων για θέματα όπως η ενοικίαση ή η αγορά αποθηκών και φορτηγών αποστολών, ο εξοπλισμός και η διάταξη των αποθηκών κλπ. Αντίστοιχα πρέπει να ληφθούν και κάποιες δυναμικές αποφάσεις όπως, για παράδειγμα, ο καθορισμός του αριθμού των εργαζομένων και των εργατοωρών, οι ώρες λειτουργίας των αποθηκών, τα δρομολόγια φορτηγών, οι παραγγελίες πρώτων υλών, το ύψος των αποθεμάτων, ο καθορισμός αποδεκτής στάθμης ποιότητας τελικού προϊόντος, καθορισμός προγραμμάτων συντήρησης εξοπλισμού κλπ.

Όπως γίνεται αντιληπτό ο σχεδιασμός του συστήματος οδηγεί στη λήψη ιδιαίτερα σοβαρών αποφάσεων οι οποίες έχουν ισχυρό αντίκτυπο στη λειτουργικότητα του συστήματος και συνεπώς του τελικού κόστους και άρα και του συνολικού κέρδους. Στη φάση του σχεδιασμού πολλές φορές κρίνεται τελεσίδικα η βιωσιμότητα μιας επιχείρησης. Ο στρατηγικός σχεδιασμός είναι η σημαντικότερη εργασία μέσα σε μια επιχείρηση. Είναι αδύνατον να υπάρξει πετυχημένη επιχείρηση χωρίς στρατηγικό σχεδιασμό. Πετυχημένες επιχειρήσεις, με υψηλή κερδοφορία, οι οποίες αγνοούν την έννοια του στρατηγικού σχεδιασμού, στην πραγματικότητα τον έχουν εφαρμόσει πιθανότατα διαισθητικά.

Αντίστοιχα, τα θέματα που μελετώνται στον τομέα του ελέγχου είναι:

- Έλεγχος εφαρμογής και αποτελεσμάτων
- Παραγωγικότητα
- Κόστη και κέρδη
- Εξυπηρέτηση πελατών
- Ποιοτικός και ποσοτικός έλεγχος
- Διαρκής απογραφή
- Λόγοι αστοχίας
- Αξιολόγηση ανταγωνισμού
- Αξιολόγηση προσωπικού και εξοπλισμού
- Έλεγχος αποθεμάτων

Ο έλεγχος του συστήματος γίνεται για δύο λόγους. Αρχικά ελέγχεται κατά πόσο οι εντολές της επιχείρησης εφαρμόστηκαν σωστά. Ο έλεγχος αυτός είναι ποσοτικός και ποιοτικός. Ο δεύτερος και σημαντικότερος σκοπός του ελέγχου αφορά στην επιτυχία του συστήματος που σχεδιάστηκε στο προηγούμενο στάδιο. Ως κριτήρια απόδοσης, εκτός από το κέρδος, μπορεί να είναι ποιοτικά κριτήρια που διαμορφώνουν την εικόνα της επιχείρησης διαχρονικά. Ο έλεγχος του συστήματος πρέπει να είναι συνεχής και να αφορά σε όλες τις φάσεις αποθήκευσης και διακίνησης. Ουσιαστικά, ο έλεγχος έχει στόχο την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, ώστε να γίνουν οι απαραίτητες διορθωτικές επεμβάσεις στο σύστημα.

Τέλος, οι καθημερινές εργασίες, οι οποίες στην πραγματικότητα ταυτίζονται με τα στοιχεία της διαχείρισης των logistics, είναι οι εξής:

- Οι αγορές (είδος πρώτων υλών, προμηθευτές)
- Οι μεταφορές (κόστος μεταφοράς πρώτων υλών)
- Η αποθήκευση (πρόβλεψη χώρου και κόστος αποθήκευσης έτοιμου προϊόντος)
- Τα αποθέματα (ποσότητα και χρόνος αγοράς πρώτων υλών)
- Οι διανομές (κόστος και χρόνος μεταφοράς του τελικού προϊόντος στον καταναλωτή)

Η εκτέλεση των εργασιών των logistics αφορά, ουσιαστικά, την εκτέλεση των εργασιών που απαιτούνται σε καθημερινή βάση ώστε το τελικό προϊόν να φτάσει από τον προμηθευτή στον τελικό χρήστη. Το τελικό αποτέλεσμα εξαρτάται από την σωστή εκτέλεση των εργασιών. Επιπλέον κατά το στάδιο αυτό αντιμετωπίζονται όλα εκείνα τα θέματα τα οποία δεν είχαν προβλεφθεί σωστά κατά το στάδιο του σχεδιασμού. Κατά κάποιο τρόπο στο στάδιο αυτό γίνονται οι τελευταίες διορθωτικές κινήσεις, μέσα από τις καθημερινές εργασίες και αποδεικνύεται αφενός ο βαθμός κατά τον οποίο οι αρχικοί στόχοι της επιχείρησης είναι ρεαλιστικοί και αφετέρου εάν το κόστος υλοποίησης των στόχων αυτών είναι αυτό το οποίο είχε εκτιμηθεί αρχικά.

1.5 Λειτουργίες ενός συστήματος logistics

Εάν επιχειρήσει κανείς μια αδρή κατηγοριοποίηση των λειτουργιών ενός ολοκληρωμένου συστήματος logistics μπορεί να διακρίνει δύο κατηγορίες. Τις κύριες και τις συμπληρωματικές λειτουργίες [2].

Οι κύριες λειτουργίες ενός συστήματος logistics συνοψίζονται στις παρακάτω:

- Η μεταφορά και η διανομή προϊόντων
- Η διαχείριση των αποθεμάτων
- Η επεξεργασία των παραγγελιών

Οι συμπληρωματικές λειτουργίες:

- Η αποθήκευση
- Η διακίνηση υλικών
- Η προστατευτική συσκευασία
- Οι προμήθειες
- Η πληροφοριακή υποστήριξη

Η διαχείριση των logistics (logistics management) είναι μείζονος σημασίας. Στην πραγματικότητα πρόκειται για μια διαδικασία με στόχο την ικανοποίηση των επιχειρησιακών στόχων με το μικρότερο δυνατό κόστος [3]. Πολύ επιγραμματικά, φροντίζει ώστε να βρίσκεται το σωστό προϊόν, στη σωστή ποιότητα στο σωστό τόπο και χρόνο με το μικρότερο κόστος. Με την έννοια «μικρότερο κόστος» δεν εννοείται το μικρότερο δυνατό (ολικό βέλτιστο) κόστος που μπορεί να επιτευχθεί, αλλά στο ελάχιστο (τοπικό βέλτιστο) κόστος για μια, αρχικά ορισμένη, αποδεκτή στάθμη ποιότητας.

Τα κυριότερα ποιοτικά στοιχεία της διαχείρισης των logistics είναι μεταξύ άλλων, η διαθεσιμότητα, η δυναμικότητα και η συνέπεια. Με την έννοια διαθεσιμότητα εννοούμε την ικανότητα του συστήματος να διαθέτει σε κάθε χρονική στιγμή ικανό απόθεμα πρώτων υλών και τελικού προϊόντος ώστε να εξυπηρετούνται τόσο ο τομέας παραγωγής όσο και ο τελικός χρήστης. Η δυναμικότητα αφορά στην επίτευξη ικανοποιητικής ταχύτητας εκτέλεσης των παραγγελιών σε καθημερινή βάση. Τέλος η συνέπεια αναφέρεται στην δυνατότητα του συστήματος να παρέχει τελικά προϊόντα εγκαίρως και στη σωστή ποιότητα στον τελικό χρήστη.

Τα logistics συχνά σχετίζονται με:

- Προβλήματα χωροθέτησης:
    - Εγκαταστάσεων (Facility location problems)
    - Αποθηκευτικών χώρων
    - Κέντρων διανομής
- Προβλήματα επιλογής διαδρομής οχημάτων (Vehicle routing problems)
- Προβλήματα σχεδιασμού δρομολογίων οχημάτων (Vehicle scheduling problems)
- Προβλήματα ταυτόχρονης επιλογής διαδρομής και σχεδιασμού δρομολογίων οχημάτων (Vehicle routing and scheduling problems)

Στην παρούσα διατριβή μελετάται ένα πρόβλημα χωροθέτησης εγκαταστάσεων. Ένας σημαντικός παράγοντας βελτιστοποίησης των διαδικασιών μίας επιχείρησης έγκειται στην βελτιστοποίηση της χωροθέτησης των εγκαταστάσεων της. Αρμόδιο για την διαδικασία αυτή είναι το τμήμα logistics.

Τα τελευταία χρόνια έχει δημιουργηθεί πλήθος εμπορικών προγραμμάτων λογισμικού για την επίλυση προβλημάτων χωροθέτησης. Με τον τρόπο αυτό αξιοποιούνται καλύτερα οι τεχνικές βελτιστοποίησης [4]. Τα προβλήματα χωροθέτησης αναπτύσσονται εκτενέστερα σε επόμενο κεφάλαιο.

2 Χωροθέτηση εγκαταστάσεων

2.1 Εισαγωγή

Η χωροθέτηση εγκαταστάσεων (facility location), γνωστή και ως ανάλυση χωροθέτησης (location analysis), αποτελεί ένα κλάδο της επιχειρησιακής έρευνας που άπτεται της μαθηματικής μοντελοποίησης και της επίλυσης προβλημάτων σχετικά με την τοποθέτηση εγκαταστάσεων. Η χωροθέτηση των εγκαταστάσεων γίνεται με τρόπο ώστε να ελαχιστοποιούνται πιθανά μεταφορικά κόστη, να αποφεύγεται η τοποθέτηση επικίνδυνων υλικών κοντά σε κατοικημένες περιοχές, να επιτυγχάνεται συγκριτικό πλεονέκτημα έναντι του ανταγωνισμού κλπ.

Ένα απλό πρόβλημα χωροθέτησης εγκαταστάσεων είναι το πρόβλημα Fermat – Weber στο οποίο κάθε μια εγκατάσταση τοποθετείται με μοναδικό κριτήριο την ελαχιστοποίηση των αποστάσεων από ένα δεδομένο σύνολο σημείων. Πιο πολύπλοκα προβλήματα περιλαμβάνουν την τοποθέτηση πολλαπλών εγκαταστάσεων, με περιορισμούς στις τοποθεσίες εγκατάστασης καθώς και πιο σύνθετα κριτήρια βελτιστοποίησης.

Το πρόβλημα της χωροθέτησης εγκαταστάσεων στη βασική του διατύπωση, αποτελείται από ένα σύνολο πιθανών θέσεων όπου μπορεί να λειτουργήσει μια νέα εγκατάσταση καθώς και από ένα σύνολο σημείων ζήτησης τα οποία πρέπει να εξυπηρετηθούν. Στόχος της χωροθέτησης είναι η επιλογή ενός υποσυνόλου εγκαταστάσεων προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το σύνολο των αποστάσεων κάθε σημείου ζήτησης από την πλησιέστερη εγκατάσταση με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του κόστους εγκατάστασης.

Σε γενικές γραμμές, ένα πρόβλημα χωροθέτησης αποτελεί πρόβλημα κατανομής πόρων. Σε περίπτωση που μία ή περισσότερες εγκαταστάσεις εξυπηρετούν έναν αριθμό πελατών κρίνεται σκόπιμο η χωροθέτηση τους να γίνει με τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται η κατά το δυνατόν καλύτερη και ταχύτερη διανομή των τελικών προϊόντων. Εάν υπάρχουν ήδη κάποιες υποδομές το πρόβλημα έγκειται ουσιαστικά στη λήψη αποφάσεων σχετικά με την τοποθέτηση νέων εγκαταστάσεων, με τρόπο ώστε το δίκτυο εξυπηρέτησης να λειτουργεί ικανοποιητικά. Εάν αυτό δεν είναι δυνατόν απαιτείται πλήρης επανασχεδιασμός του δικτύου.

Πιο συγκεκριμένα, αυτό που εξετάζουν τα προβλήματα χωροθέτησης είναι η εύρεση της καλύτερης θέσης για μία ή περισσότερες εγκαταστάσεις που βελτιστοποιούν κάποιο στόχο. Αυτές οι εγκαταστάσεις μπορούν να παρέχουν την υπηρεσία τους σε ένα δεδομένο σύνολο πελατών, ή μπορούν να ανταγωνιστούν με άλλες επιχειρήσεις για να προσελκύσουν πελάτες κλπ.

Τα προβλήματα χωροθέτησης δεν είναι όλα ίδια. Διαφοροποιούνται ανάλογα με την φύση και τον αριθμό των εγκαταστάσεων, τον τρόπο με τον οποίο μετριέται η απόσταση, την ύπαρξη περιορισμών για τις τοποθεσίες και την φύση των παραμέτρων. Για την επίλυση των προβλημάτων αυτών χρησιμοποιείται ένα μεγάλο εύρος τεχνικών, από συνδυαστικές μεθόδους έως διάφορες αναλυτικές, ακόμη και ευρετικές τεχνικές.

2.2 Σύντομη ιστορική αναδρομή

Εάν επιχειρήσουμε μία σύντομη ιστορική διαδρομή η πρώτη εφαρμογή προβλημάτων χωροθέτησης σε βιομηχανικό επίπεδο υλοποιήθηκε από τον Alferd Weber το 1909. Ο Weber μελέτησε την δημιουργία μίας αποθήκης με σκοπό την ελαχιστοποίηση της απόστασης της από ένα σύνολο πελατών. Λίγα χρόνια αργότερα, το 1929, ο Hotelling ασχολήθηκε με την χωροθέτηση δύο ανταγωνιστικών μεταξύ τους αποθηκών οι οποίες θα τοποθετούνταν στον κεντρικό δρόμο μίας πόλης [5].

Τα τελευταία χρόνια, ως ένα βαθμό και ως επακόλουθο της παγκοσμιοποίησης, η επιλογή των τοποθεσιών για την χωροθέτηση εγκαταστάσεων γίνεται ολοένα και πιο περίπλοκη διαδικασία. Επιπλέον, η επιλογή μιας υποβέλτιστης θέσης μπορεί να αποδειχθεί ιδιαίτερα κοστοβόρος. Τα προβλήματα χωροθέτησης ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία των NP-hard συνδυαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης, γεγονός που συχνά καθιστά την επίλυση τους αρκετά δύσκολη διαδικασία.. Για το λόγο αυτό έχει δημιουργηθεί πλήθος προσεγγιστικών αλγορίθμων για την επίλυση τους, ενώ υπάρχει αρκετά πλούσια βιβλιογραφία στον τομέα της επιχειρησιακής έρευνας.

2.3 Παραδείγματα εφαρμογών των προβλημάτων χωροθέτησης

Κάποια παραδείγματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων αποτελούν μεταξύ άλλων η χωροθέτηση τραπεζών, σχολείων, σταθμών οχημάτων έκτακτης ανάγκης, αεροδρομίων, νοσοκομείων. Σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις μοναδικός σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση της διαδρομής μεταξύ των εγκαταστάσεων και των πελατών που αυτές εξυπηρετούν.

Τα προβλήματα χωροθέτησης βρίσκουν εφαρμογή και σε ανταγωνιστικές αγορές, όπως βενζινάδικα, σούπερ μάρκετ κλπ. Τέλος, ορισμένες φορές εισάγονται και άλλοι περιορισμοί όπως για παράδειγμα το γεγονός ότι κάποιες εγκαταστάσεις ενδέχεται να θεωρούνται ανεπιθύμητες. Παραδείγματα τέτοιων εγκαταστάσεων είναι οι χώροι υγειονομικής ταφής απορριμμάτων, οι φυλακές, οι κεραίες κινητής τηλεφωνίας κ.ά.

2.4 Θεωρητική προσέγγιση

Η δημιουργία ενός αποτελεσματικού συστήματος διαχείρισης προϋποθέτει την επιλογή του κατάλληλου χώρου στον οποίο θα δημιουργηθούν μία ή περισσότερες εγκαταστάσεις ώστε να εξυπηρετηθεί μία συγκεκριμένη κατανομή πελατών. Αυτό πραγματοποιείται κατά τον στρατηγικό σχεδιασμό. Η επιλογή τοποθεσίας για την δημιουργία μίας εγκατάστασης, όπως ένα εμπορικό κατάστημα ή ένας αποθηκευτικός χώρος, καθορίζει σημαντικά την επιτυχημένη παροχή των υπηρεσιών για τις οποίες σχεδιάστηκε η εγκατάσταση αυτή. Επίσης, εξαιτίας του κόστους απόκτησης ιδιοκτησίας και των υψηλών κατασκευαστικών εξόδων, η χωροθέτηση εγκαταστάσεων αντιπροσωπεύει μακροχρόνιες επενδύσεις. Επομένως, για να είναι επιτυχημένη η λειτουργία της εγκατάστασης και η επένδυση παραγωγική, είναι απαραίτητη η διαμόρφωση μίας ορθολογικής διαδικασίας λήψης αποφάσεων η οποία θα εστιάζει στους σημαντικούς παράγοντες και τα χαρακτηριστικά που επηρεάζουν την αποδοτικότητα της εγκατάστασης.

Η ανάλυση χωροθέτησης αφορά την ανάπτυξη μαθηματικών προτύπων και αλγορίθμων τοποθέτησης εγκαταστάσεων κάθε τύπου σε χωρικό ή γεωγραφικό περιβάλλον. Η χωροθέτηση των εγκαταστάσεων γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούν την ζήτηση, την κάλυψη περιοχών, τον ανεφοδιασμό, ή ακόμη και να συσχετίζονται με την ύπαρξη άλλων εγκαταστάσεων. Σε τέτοιου είδους προβλήματα, η θέση της εγκατάστασης σπάνια εξετάζεται μεμονωμένα ως προς τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης εγκατάστασης (facility layout). Συνήθως, η θέση της εγκατάστασης σχετίζεται με την ανάπτυξη και το σχεδιασμό ευρύτερων συστημάτων με βάση την κατανομή των πόρων του συστήματος που εξυπηρετεί. Αναλυτικότερα, οι πόροι του συστήματος είναι τα σταθερά σημεία του συστήματος τα οποία, ανάλογα με το πρόβλημα, αντιπροσωπεύουν άλλες εγκαταστάσεις, αγορές ή καταναλωτές, αφετηρίες ή προορισμούς, με τους οποίους αλληλεπιδρά η μία ή περισσότερες εγκαταστάσεις που πρόκειται να χωροθετηθούν [6]. Ο γενικευμένος όρος που περιγράφει αυτή την διαδικασία αναζήτησης θέσεων για εγκαταστάσεις μέσα σε δίκτυα εξυπηρέτησης είναι γνωστός ως προβλήματα χωροθέτησης – κατανομών (location – allocation problems). Στα παραπάνω προβλήματα ζητείται η χωροθέτηση κέντρων εξυπηρέτησης σε δοσμένο χώρο, έτσι ώστε να καλύπτεται η ζήτηση στον χώρο αυτό με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Τα προβλήματα χωροθέτησης – κατανομών στην κλασική τους μορφή διατυπώνονται σαν προβλήματα γραμμικού ακέραιου προγραμματισμού. Τα παραπάνω μαθηματικά πρότυπα έχουν ευρύτατη χρήση σε θέματα πρακτικών εφαρμογών οι οποίες συνδυάζουν έρευνα από διαφορετικές ακαδημαϊκές περιοχές, όπως η γεωγραφία, η επιχειρησιακή έρευνα, ο αστικός και ο περιφερειακός προγραμματισμός.

2.5 Μεθοδολογική προσέγγιση

Η χωροθέτηση εγκαταστάσεων αποτελεί ένα πολυδιάστατο πρόβλημα, το οποίο απαιτεί διαφορετική προσέγγιση για την επίτευξη των επιθυμητών στόχων ανάλογα με την πολυπλοκότητα του επιχειρησιακού περιβάλλοντος και την απαραίτητη προσαρμογή στις συγκεκριμένες ανάγκες του προβλήματος. Η μεθοδολογία που εφαρμόζεται, αρχικά προϋποθέτει τον προσδιορισμό ενός συνόλου τοποθεσιών για τις μονάδες εξυπηρέτησης με βάση χωρικά κατανεμημένες προϋποθέσεις, ενώ τη συνέχεια βελτιστοποιούνται κάποια συγκεκριμένα μετρήσιμα κριτήρια.

Το μεθοδολογικό πλαίσιο που προτείνεται για την προσέγγιση των προβλημάτων χωροθέτησης συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα [7]:

1. Κατανόηση και καθορισμός του προβλήματος

2. Ανάπτυξη του αντίστοιχου μοντέλου (εννοιολογική και ποσοτική)
3. Ανάλυση του μοντέλου
4. Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων
5. Εκτέλεση των αποτελεσμάτων

Το πιο σημαντικό σημείο στην διαδικασία επίλυσης μοντέλων χωροθέτησης είναι η επιλογή των κατάλληλων κριτηρίων και της αντικειμενικής συνάρτησης που θα βελτιστοποιεί τα κριτήρια αυτά. Η φύση του οργανισμού που θα ασχοληθεί με το πρόβλημα, καθώς και η φύση των μονάδων εξυπηρέτησης συμβάλλουν σημαντικά στον σχηματισμό της αντικειμενικής συνάρτησης. Η διάκριση ανάμεσα στην εξυπηρέτηση ιδιωτικών ή δημόσιων αναγκών καθιστά έναν πρώτο διαχωρισμό σε αυτό το πρόβλημα [8].

Η χωροθέτηση των μονάδων εξυπηρέτησης στον ιδιωτικό τομέα, όπως ένα κατάστημα, μία αποθήκη ή ένας σταθμός εξυπηρέτησης πελατών, γίνεται συνήθως με τέτοιο τρόπο ώστε να εκπληρώνει στόχους όπως η ελαχιστοποίηση του κόστους ή η μεγιστοποίηση του κέρδους, τα οποία μπορούν να υπολογιστούν σε χρήμα, χρόνο ή απόσταση.

Αντίθετα, στον δημόσιο τομέα η χωροθέτηση εγκαταστάσεων είναι πιο πολύπλοκη επειδή σχετίζεται με προβληματικές καταστάσεις κοινωνικοοικονομικού και πολιτικού χαρακτήρα, στις οποίες είναι δύσκολο ή αδύνατον να υπολογιστούν μονοσήμαντα οι συνέπειες τους. Συχνά στις αποφάσεις αυτές υπάρχει αυξημένη αβεβαιότητα, η οποία προκύπτει είτε από την έλλειψη διαθέσιμων στοιχείων και σαφώς καθορισμένων συνεπειών, είτε εμπίπτουν σε φιλοσοφικές αναζητήσεις συχνά αντικρουόμενες (αποτίμηση κόστους μιας οικολογικής καταστροφής ή ενός θανάτου από ατύχημα).

Παραδείγματα εγκαταστάσεων του δημοσίου τομέα είναι τα αστυνομικά τμήματα, οι βιβλιοθήκες, οι σταθμοί παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας κ.α. Η ύπαρξη διαφορετικών αντιλήψεων για την επίτευξη των στόχων στα προβλήματα της χωροθέτησης οδηγεί στην μεταβολή αντίστοιχα των πιθανών μαθηματικών προτύπων χωροθέτησης – κατανομής που εφαρμόζονται.

Η κατηγορία προβλημάτων του ιδιωτικού τομέα συνήθως χρησιμοποιεί την τυπική συνάρτηση αποδοτικότητας minsum, όπως υποστηρίζουν οι Eiselt και Laporte [9]. Στις περιπτώσεις αυτές οι εγκαταστάσεις τοποθετούνται έτσι ώστε να ελαχιστοποιούν το άθροισμα του συνολικού κόστους μεταφοράς. Από την άλλη πλευρά, στις δραστηριότητες του δημοσίου τομέα εφαρμόζεται ευρέως η τυπική συνάρτηση ισότητας minmax, όπως για παράδειγμα στη χωροθέτηση των μονάδων υγείας, ώστε να μειώνεται ο χρόνος πρόσβασης των πολιτών στις μονάδες εξυπηρέτησης ακόμα και των πιο απομακρυσμένων περιοχών.

2.6 Τύποι προβλημάτων χωροθέτησης εγκαταστάσεων

Στη σχετική βιβλιογραφία, τα προβλήματα ανάλυσης χωροθέτησης διακρίνονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

- Προβλήματα p-μέσων (p-median problems)
- Προβλήματα p-κέντρων (p-center problems)
- Προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας (Uncapacitated facility location problems - UFLP)
- Προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων με περιορισμούς χωρητικότητας (Capacitated facility location problems - CFLP)
- Τετραγωνικό πρόβλημα εκχώρησης (Quadratic assignment problem - QAP)

Παρακάτω θα δούμε χωριστά κάθε μια από τις κατηγορίες αυτές

2.6.1 Προβλήματα p-μέσων

Τα προβλήματα p-μέσων αποτελούν ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο στην μοντελοποίηση αρκετών πραγματικών προβλημάτων όπως για παράδειγμα η χωροθέτηση βιομηχανικών εγκαταστάσεων, αποθηκών κλπ. Τα προβλήματα p-μέσων διαφέρουν από τα προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας (UFLP) σε δύο σημεία. Αφενός δεν υπάρχει κάποιο κόστος εγκατάστασης, αφετέρου υπάρχει άνω όριο στον αριθμό των εγκαταστάσεων που μπορούν να λειτουργήσουν. Στην πραγματικότητα πρόκειται για την μοντελοποίηση του προβλήματος εύρεσης ενός ελάχιστου συνολικού κόστους και ανήκει στο σύνολο των NP-hard προβλημάτων.

Θεωρούμε ένα σύνολο πιθανών θέσεων εγκατάστασης $I = \{1,\ldots,n\}$ για p εγκαταστάσεις, ένα σύνολο πελατών $J = \{1,\ldots,m\}$ και έναν $n \times m$ πίνακα g_{ij} με τα κόστη μεταφοράς που προκύπτουν προκειμένου να ικανοποιηθεί η ζήτηση. Το πρόβλημα p-μέσων έγκειται στην τοποθέτηση p εγκαταστάσεων σε θέσεις του συνόλου I προκειμένου να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς. Κάθε πελάτης εξυπηρετείται από την πλησιέστερη ανοιχτή εγκατάσταση. Το πρόβλημα αυτό αποτελεί πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού το οποίο μοντελοποιείται ως εξής:

$$Z = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g_{ij} \tag{2.1}$$

2.6.2 Προβλήματα p-κέντρων

Η επόμενη κατηγορία προβλημάτων περιλαμβάνει τα προβλήματα p-κέντρων. Στη περίπτωση αυτή, αντικειμενικός σκοπός είναι η τοποθέτηση εγκαταστάσεων προκειμένου να εξυπηρετηθούν τα σημεία ζήτησης με τρόπο ώστε η μέγιστη τιμή ενός μετρούμενου κριτηρίου, όπως η απόσταση ή ο χρόνος, να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη ή μεταξύ κάποιων ορίων. Αυτό είναι γνωστό και ως κριτήριο minimax. Μια πιθανή εφαρμογή των προβλημάτων αυτών μπορεί να είναι η χωροθέτηση των εγκαταστάσεων των υπηρεσιών έκτακτης ανάγκης οι οποίες αποκρίνονται σε κάθε επείγουσα κλήση εντός ενός καθορισμένου χρονικού ορίου. Οι πιθανές θέσεις τοποθέτησης νέων εγκαταστάσεων ενδέχεται να έχουν προεπιλεγεί με βάση την διαθεσιμότητα σημείων εγκατάστασης. Συνεπώς, η ανάλυση μπορεί να περιλαμβάνει p συγκεκριμένες θέσεις από αυτές, ή εναλλακτικά, οποιαδήποτε θέση η οποία θα επιλέγεται με ελεύθερο ή πολλές φορές ακόμη και με τυχαίο τρόπο.

Για να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα ας θεωρήσουμε ένα σύνολο πιθανών θέσεων εγκατάστασης $I = \{1,\ldots,n\}$ για p εγκαταστάσεις, ένα σύνολο πελατών $J = \{1,\ldots,m\}$ και έναν $n \times m$ πίνακα g_{ij} με τα κόστη μεταφοράς που προκύπτουν προκειμένου να ικανοποιηθεί η ζήτηση. Το πρόβλημα p-κέντρων έγκειται στην τοποθέτηση p εγκαταστάσεων σε θέσεις του συνόλου I ώστε η μέγιστη τιμή του κόστους μεταφοράς να είναι η μικρότερη δυνατή. Κάθε πελάτης εξυπηρετείται από την πλησιέστερη ανοιχτή εγκατάσταση. Το πρόβλημα αυτό μοντελοποιείται ως εξής:

$$Z = \min_{i \in I} \max_{j \in J} g_{ij} \tag{2.2}$$

Μια άλλη χαρακτηριστική περίπτωση προβλήματος p-κέντρων έγκειται στην τοποθέτηση *p* εγκαταστάσεων μεταξύ των πιθανών θέσεων εγκατάστασης του συνόλου *I* εξυπηρετώντας το σύνολο πελατών *J* προκειμένου να ελαχιστοποιείται η μέγιστη απόσταση μεταξύ κάθε πελάτη και της εγκατάστασης η οποία τον εξυπηρετεί.

2.6.3 Προβλήματα χωροθέτησης χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας

Στα προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας (UFLP) το κόστος ικανοποίησης των αναγκών του πελάτη αποτελείται από δύο συνιστώσες. Από ένα σταθερό κόστος εγκατάστασης σε μια δοσμένη θέση και από ένα μεταφορικό κόστος. Οι χωρητικότητες όλων των εγκαταστάσεων θεωρούνται άπειρες στα προβλήματα αυτά.

Τα προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας εμφανίζονται στην βιβλιογραφία μεταξύ άλλων και ως «απλά προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων» (simple facility location problems), «απλά (ή χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας) προβλήματα χωροθέτησης αποθηκών / εξοπλισμού», (simple - or uncapacitated - warehouse / plant location problems).

Αξίζει να σημειωθεί ότι πολλά πραγματικά προβλήματα χωρίς εγκαταστάσεις προς χωροθέτηση μπορούν επίσης να μοντελοποιηθούν ως προβλήματα UFL. Κάποια από αυτά τα προβλήματα είναι μεταξύ άλλων:

- τοποθέτηση τραπεζικών λογαριασμών
- σχεδιασμός δικτύων
- δρομολόγηση οχημάτων
- σχεδιασμός δικτύων ηλεκτρονικών υπολογιστών
- ανάλυση δέσμης (cluster analysis)
- προγραμματισμός μηχανημάτων
- διαχείριση χαρτοφυλακίου

Σε ένα πρόβλημα χωροθέτησης εγκαταστάσεων χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας υπάρχει ένας αριθμός θέσεων n και ένας αριθμός πελατών m. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα σύνολο $I = \{1,\ldots,m\}$ με τις πιθανές θέσεις εγκατάστασης. Ο αριθμός $f_{c_i} \geq 0$ αποτελεί το κόστος αρχικής εγκατάστασης σε μια πιθανή θέση του συνόλου *I*.

Ακόμη, $v_i \geq 0$ είναι η μέγιστη τιμή για την παραγωγή σε κάθε θέση. Θεωρούμε, επίσης, ένα σύνολο πελατών $J = \{1,\ldots,n\}$ προς εξυπηρέτηση. Για κάθε ζεύγος (ij) έχουμε $c_{ij} \geq 0$ τα κόστη παραγωγής και μεταφοράς από κάθε θέση i σε κάθε πελάτη j. Δεν υπάρχει όριο χωρητικότητας για κάθε υποψήφια θέση και η συνολική ζήτηση κάθε πελάτη πρέπει να καλύπτεται από μία μόνο θέση. Το ζητούμενο είναι η εύρεση του αριθμού των εγκαταστάσεων προς χωροθέτηση καθώς και ο καθορισμός των θέσεων όπου το συνολικό κόστος ελαχιστοποιείται.

Ας θεωρήσουμε ότι:

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ εάν η εγκατάσταση είναι ανοιχτή,} \\ 0 \text{ αλλιώς} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ εάν ο πελάτης } j \text{ εξυπηρετείται από την εγκατάσταση } i, \\ 0 \text{ αλλιώς} \end{cases} \tag{2.4}$$

Η μαθηματική μόρφωση του προβλήματος χωροθέτησης χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας έχει ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} & Z = \min\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} fc_i y_j \right) \\ & \text{υ.π.:} \\ & \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \text{ , } j \in J \\ & x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \; i \in I, \; j \in J \end{aligned} \tag{2.5}$$

όπου:

x_{ij} αναπαριστά την ποσότητα που παρέχεται από την εγκατάσταση j στον πελάτη i

y_j υποδεικνύει εάν η εγκατάσταση j είναι ανοιχτή (y_j = 1) ή όχι (y_j = 0)

Ο πρώτος περιορισμός εισάγεται για να εγγυηθεί ότι το σύνολο της ζήτησης καλύπτεται από τις ανοιχτές εγκαταστάσεις και ο δεύτερος για να εξασφαλιστεί η ακεραιότητα. Δεδομένου ότι θεωρείται πως δεν υπάρχει όριο χωρητικότητας για καμία εγκατάσταση, το μέγεθος της ζήτησης κάθε πελάτη αγνοείται. Για το λόγο αυτό ο πρώτος περιορισμός δεν λαμβάνει υπόψη την μεταβλητή της ζήτησης.

2.6.4 Προβλήματα χωροθέτησης με περιορισμούς χωρητικότητας

Τα προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων με περιορισμούς χωρητικότητας (CFLP) αποτελούν στην ουσία μια γενίκευση των προβλημάτων χωρίς περιορισμούς

(UFLP). Σε αντίθεση με ότι θεωρούσαμε μέχρι τώρα, κάθε εγκατάσταση δύναται να παράγει περιορισμένη ποσότητα σε σχέση με την συνολική παραγωγή. Και παρόλο που τα μαθηματικά μοντέλα των προβλημάτων αυτών δεν διαφέρουν πολύ, ωστόσο οι μέθοδοι επίλυσης είναι δυσκολότερες. Οι πιο αποτελεσματικές μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων με περιορισμούς είναι η μέθοδος χαλάρωσης Lagrange και η μέθοδος δημιουργίας στηλών πίνακα (matrix column generation method).

Το μαθηματικό μοντέλο μπορεί να περιγραφεί ως πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού ως εξής. Θεωρούμε ένα σύνολο $I = \{1,\ldots,m\}$ με τις πιθανές θέσεις εγκατάστασης. Ο αριθμός $f_{c_i} \geq 0$ αποτελεί το κόστος αρχικής εγκατάστασης σε μια πιθανή θέση του συνόλου I. Ακόμη, $v_i \geq 0$ είναι η μέγιστη τιμή για την παραγωγή σε κάθε θέση. Θεωρούμε, επίσης, ένα σύνολο πελατών $J = \{1,\ldots,n\}$ προς εξυπηρέτηση. Για κάθε ζεύγος (ij) έχουμε $c_{ij} \geq 0$ τα κόστη παραγωγής και μεταφοράς και $p_{ij} \geq 0$ την ποσότητα προϊόντος από την εγκατάσταση i για τον πελάτη j.

Ας θεωρήσουμε ότι:

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ εάν η εγκατάσταση είναι ανοιχτή,} \\ 0 \text{ αλλιώς} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ εάν ο πελάτης } j \text{ εξυπηρετείται από την εγκατάσταση } i, \\ 0 \text{ αλλιώς} \end{cases} \tag{2.7}$$

Το πρόβλημα χωροθέτησης εγκαταστάσεων με περιορισμούς χωρητικότητας (CFLP) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} & Z = \min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_{c_j} y_j\right\} \\ & \text{υ.π.:} \\ & \sum_{j\in J} p_{ij}x_{ij} \leq v_i y_i \ , \ i \in I \\ & \sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \ , \ j \in J \\ & x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \ i \in I, \ j \in J \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.6.5 Τετραγωνικό πρόβλημα εκχώρησης

Το τετραγωνικό πρόβλημα εκχώρησης (QAP) ορίζει ένα πρόβλημα στο οποίο *n* εγκαταστάσεις, όπως *n* μηχανές οι οποίες έχουν ροή μεταξύ τους, τοποθετούνται σε *n* θέσεις ταυτόχρονα με σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους, το οποίο μετράται ως το γινόμενο ροής απόστασης. Εάν, για παράδειγμα, έχουμε τέσσερις μηχανές προς χωροθέτηση, προκύπτουν 4! συνδυασμοί πιθανών λύσεων. Αντίστοιχα, για ένα πρόβλημα είκοσι μηχανών, 20! πιθανές λύσεις απαιτούν περίπου 2×10^{18} αξιολογήσεις. Μια τέτοια εργασία είναι αδύνατον να εκπονηθεί ακόμη και από έναν ταχύτατο ηλεκτρονικό υπολογιστή τελευταίας τεχνολογίας σε ένα εύλογο χρονικό διάστημα (μικρότερο του ενός έτους).

2.7 Αλγόριθμοι που έχουν χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων χωροθέτησης χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας

Τα προβλήματα χωροθέτησης χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας έχουν εξεταστεί εκτενώς [10] και έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες επίλυσης και προσέγγισης.

Οι σημαντικότερες εξ αυτών μπορούν να χωριστούν σε δυο κύριες κατηγορίες.

- Ακριβείς αλγόριθμοι (διακλάδωση και φράγμα, γραμμικός προγραματισμός, απλή και διπλή μέθοδος αναρρίχησης, μέθοδος χαλάρωσης Lagrange κλπ.)
- Μεθευρετικές μέθοδοι

Ο Erlenkotter [11] ανέπτυξε μια διπλή προσέγγιση για το πρόβλημα UFL. Παρά το γεγονός ότι η διπλή αυτή προσέγγιση αποτελεί στην ουσία έναν ακριβή αλγόριθμο, μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί ως ευρετική προκειμένου να βρει «καλές» λύσεις. Οι Kratica et al. έχουν αποδείξει ότι οι γενετικοί αλγόριθμοι βρίσκουν βέλτιστες λύσεις σε δεδομένα από την Operational Research Library με πολύ ικανοποιητική απόδοση. Επίσης προτάθηκαν κάποιοι ευρετικοί αλγόριθμοι, χωρίς ωστόσο επιτυχία. Οι Alves και Almeida [12] παρουσίασαν κάποιους αλγορίθμους προσομοιωμένης ανόπτησης οι οποίοι παράγουν λύσεις υψηλής ποιότητας, αλλά με μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Οι Aydin και Fogarty [13] παρουσίασαν μια εφαρμογή κατανεμημένου εξελικτικού αλγορίθμου προσομοιωμένης ανόπτησης ο οποίος παράγει καλύτερης ποιότητας λύσεις σε συντομότερο χρονικό διάστημα.

Οι Al-Sultan και Al-Fawsan [14] παρουσίασαν έναν αλγόριθμο tabu search ο οποίος παράγει πολύ καλές λύσεις, αλλά απαιτεί σημαντικό υπολογιστικό χρόνο και περιορίζει τις δυνατότητες εφαρμογής του αλγορίθμου. Οι Michel και Van Hentenryck [15] πρότειναν έναν αλγόριθμο tabu search παράγοντας ιδιαίτερα εύρωστες λύσεις. Ο Sun [16] παρουσίασε ακόμη μια μέθοδο tabu search η οποία συγκρίθηκε με την μέθοδο Lagrange καθώς και με ευρετικές μεθόδους που πρότειναν ο Ghosh [17] και οι Resende και Wemeck [18]. Τέλος προτάθηκαν κάποιες προσεγγίσεις τεχνητών νευρωνικών δικτύων για την επίλυση προβλημάτων χωροθέτησης χωρίς περιορισμούς.

2.8 Χαρακτηριστικά των προβλημάτων χωροθέτησης

Η μεθοδολογία χωροθέτησης εξαρτάται από τον τρόπο καθορισμού του αριθμού των πόρων *p* που χρειάζεται να τοποθετηθούν. Τα προβλήματα αυτά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1. Πρόβλημα χωρίς συγκεκριμένο αριθμό πόρων. Σε αυτή την περίπτωση, στη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος το *p* αναφέρεται ως μεταβλητή.
2. Πρόβλημα με καθορισμένο εκ των προτέρων αριθμό πόρων που θα τοποθετηθούν στο χώρο μελέτης.

Αν p=1, ένας μόνο πόρος χρειάζεται να τοποθετηθεί. Αυτή είναι η απλούστερη περίπτωση. Αν όμως p>1, τότε ενδεχομένως να χρειάζεται υπολογισμός του καταμερισμού των πελατών στους πόρους, των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των πόρων ή ακόμα και των αλληλεπιδράσεων μεταξύ πελατών και πόρων. Σε άλλες περιπτώσεις υπάρχει ήδη ένας αριθμός πόρων και χρειάζεται να προσθέσουμε επιπλέον πόρους, ίδιους ή ανταγωνιστικούς. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι μία εταιρεία όταν ανοίγει νέα υποκαταστήματα. Αυτό αναφέρεται ως υπό όρους πρόβλημα χωροθέτησης (conditional location problem).

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, το πρόβλημα που μελετάμε στην παρούσα διατριβή εντάσσεται στα προβλήματα της πρώτης κατηγορίας δεδομένου ότι δεν γνωρίζουμε τον ακριβή αριθμό των εγκαταστάσεων προς χωροθέτηση, παρά μόνο κάποιες πιθανές θέσεις εγκατάστασης.

Κάποια μοντέλα επιβάλλουν περιορισμούς στην επιλογή της τοποθεσίας μίας εγκατάστασης. Οι δύο βασικές ομάδες στις οποίες έχουν ταξινομηθεί τα προβλήματα χωροθέτησης αναφορικά με την εφικτή περιοχή στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν οι εγκαταστάσεις είναι οι εξής:

1. Συνεχή: Η εφικτή αυτή περιοχή είναι διάστημα, υποσύνολο του R^n (όταν n=2 τότε το πρόβλημα αναφέρεται στο επίπεδο). Σε αυτά τα προβλήματα η ζήτηση μπορεί να εμφανίζεται σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται συνήθως για την επίλυση του προβλήματος είναι η γεωμετρική προσέγγιση, η κυρτή ανάλυση και ο μη γραμμικός προγραμματισμός.
2. Διακριτά: Η εφικτή περιοχή είναι ένας περιορισμένος αριθμός εναλλακτικών θέσεων (σημείων). Αυτά τα προβλήματα αναζητούν διακριτές λύσεις σχετικά με τον προσδιορισμό των θέσεων αλλά και τον καθορισμό της περιοχής ευθύνης την οποία θα εξυπηρετούν οι συγκεκριμένες εγκαταστάσεις. Η λύση υπολογίζεται συνήθως με ακέραιο προγραμματισμό. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα περισσότερα πραγματικά προβλήματα, καθώς τις περισσότερες φορές η επιλογή γίνεται μεταξύ συγκεκριμένων θέσεων εξαιτίας οικονομικών, τεχνικών, φυσικών περιορισμών και εμποδίων στο χώρο.

Εν γένει, λοιπόν, τα διακριτά μοντέλα αναζητούν την καλύτερη τοποθεσία μεταξύ συγκεκριμένων μόνο θέσεων. Αντίθετα, τα συνεχή μοντέλα επεκτείνουν την αναζήτηση τους στο σύνολο του χώρου. Στην παρούσα εργασία θα περιοριστούμε στη μελέτη διακριτών μοντέλων.

Ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα που καλούνται να επιλύσουν τα προβλήματα χωροθέτησης είναι η κατανομή της ζήτησης. Για το λόγο αυτό η υπό εξέταση περιοχή χωρίζεται σε μικρότερες υποπεριοχές στις οποίες υπολογίζεται η ζήτηση. Με τον τρόπο αυτό απλουστεύεται αρκετά το δίκτυο διανομής

Επιπλέον, η εφικτή περιοχή χωροθέτησης ενδέχεται να είναι ένα δίκτυο. Σε αυτή την περίπτωση οι κόμβοι ή τα σημεία κατά μήκος μίας πλευράς ενός δοσμένου γραφήματος είναι πιθανή θέση. Ωστόσο, αυτό είναι ένα κοινό πρόβλημα στην πρακτική της χωροθέτησης εγκαταστάσεων επειδή οι περισσότερες από τις θέσεις εξαρτώνται άμεσα από την ύπαρξη κάποιου δικτύου (μεταφοράς, παροχής ενέργειας), του οποίου η επέκταση μπορεί να είναι αδύνατη ή οικονομικά ασύμφορη. Τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα η μελέτη και η αναζήτηση υποψήφιων θέσεων χωροθέτησης να γίνεται στα εσωτερικά σημεία ενός ή περισσότερων δικτύων παροχής υπηρεσιών. Η μελέτη και η επίλυση αυτών των προβλημάτων σχετίζεται με την θεωρία γραφημάτων. Σε διαφορετικές περιπτώσεις, περιορίζοντας τις πιθανές θέσεις εγκατάστασης σε ένα πεπερασμένο αριθμό τοποθεσιών, τα προβλήματα δικτύων εξετάζονται σαν απλά διακριτού τύπου προβλήματα.

Εάν εξεταστεί το πρόβλημα σχετικά με τις αλληλεπιδράσεις που προκαλούνται στον περιβάλλοντα χώρο από μία απόφαση χωροθέτησης και, πιο συγκεκριμένα, σε σχέση με τους πολίτες που δέχονται τις επιδράσεις της εγκατάστασης, τότε υπάρχουν τέσσερις επιλογές ως προς τον χαρακτηρισμό τους [9]:

1. Επιθυμητές εγκαταστάσεις είναι αυτές για τις οποίες οι ενδιαφερόμενοι καταβάλουν προσπάθεια να “τραβήξουν” αυτή την εγκατάσταση κοντά τους, όπως ένα πάρκο ή ένας σταθμός του μετρό.
2. Ανεπιθύμητες εγκαταστάσεις είναι αυτές για τις οποίες οι πολίτες ασκούν πιέσεις για την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη απομάκρυνση τους, όπως ένας χώρος υγειονομικής ταφής απορριμμάτων.
3. Μερικώς επιθυμητές και μερικώς ανεπιθύμητες εγκαταστάσεις είναι αυτές που θεωρούνται χρήσιμες αλλά αποφέρουν ενόχληση όταν βρίσκονται πολύ κοντά σε κατοικίες. Τέτοιες εγκαταστάσεις μπορεί να είναι ένα νοσοκομείο ή ένα αεροδρόμιο. Οι εγκαταστάσεις αυτές θεωρούνται αναγκαίες και χρήσιμες αλλά ταυτόχρονα συνδέονται με αύξηση του θορύβου και κυκλοφοριακά προβλήματα. Σε αυτή την περίπτωση επιδιώκεται η μεγιστοποίηση της απόστασης τους από τον κοντινότερο στην εγκατάσταση πολίτη, για λόγους ενόχλησης, και η ελαχιστοποίηση της απόστασης τους από τους πιο απομακρυσμένους πολίτες για λόγους προσβασιμότητας.
4. Αδιάφορες εγκαταστάσεις είναι αυτές για τις οποίες δεν ασκείται καμία πίεση από τους πολίτες.

Με βάση τα χαρακτηριστικά τις εγκατάστασης καθορίζονται οι στόχοι του προβλήματος και κατά συνέπεια καθορίζεται το μαθηματικό πρότυπο επίλυσης.

2.9 Η σημασία της επιλογής των θέσεων εγκατάστασης

Η επιλογή της θέσης εγκατάστασης είναι μείζονος σημασίας για μια επιχείρηση. Η εγκατάσταση τόσο μιας εταιρίας όσο και μιας αποθήκης σε μια συγκεκριμένη θέση προϋποθέτει τη δέσμευση σημαντικών πόρων και αποτελεί μακροχρόνια επένδυση για την επιχείρηση. Η επιλογή της θέσης επιδρά σε σημαντικό βαθμό τόσο στα στοιχεία κόστους όσο και στα ποιοτικά χαρακτηριστικά της εταιρίας, όπως η ποιότητα παραγωγής, η τήρηση των προθεσμιών παράδοσης, και η εξυπηρέτηση των πελατών γενικότερα.

Μία λανθασμένη επιλογή της θέσης εγκατάστασης μπορεί να έχει σαν συνέπεια την μειωμένη ανταγωνιστικότητα της εταιρίας και, ουσιαστικά, να επηρεάσει την βιωσιμότητα της. Αντίθετα, μία σωστή επιλογή θέσης μπορεί να συμβάλει στην αξιοποίηση των συγκριτικών πλεονεκτημάτων που προσφέρει η συγκεκριμένη θέση και κατά συνέπεια να έχει θετικά αποτελέσματα στη διαμόρφωση του κόστους, ακόμη και στην επιβίωση της εταιρίας.

Το πρόβλημα της επιλογής της θέσης εγκατάστασης ορίζεται ως πρόβλημα επιλογής μεταξύ ενός πλήθους υποψήφιων θέσεων έτσι ώστε να ικανοποιείται ένα σύνολο περιορισμών (τεχνολογικών, οικονομικών, κλπ) και να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση του κόστους εγκατάστασης και λειτουργίας του συστήματος. Εμφανίζεται κατά το στάδιο του αρχικού σχεδιασμού, σε περίπτωση μετεγκατάστασης καθώς και σε περίπτωση επέκτασης ενός ήδη εγκατεστημένου συστήματος όταν η υπάρχουσα δυναμικότητα δεν επαρκεί για την κάλυψη της προβλεπόμενης ζήτησης.

Το πρόβλημα της θέσης εγκατάστασης είναι δύσκολο να επιλυθεί λόγω του μεγάλου αριθμού και της ποικιλίας των στοιχείων που συνθέτουν την συνάρτηση κόστους. Ο βαθμός δυσκολίας αυξάνεται εξαιτίας της αβεβαιότητας και της υποκειμενικότητας που περιλαμβάνεται στην εκτίμηση των παραπάνω στοιχείων, καθώς και εξαιτίας της πολυπλοκότητας του προβλήματος. Συνεπώς, η δυσκολία αναζήτησης μίας βέλτιστης θέσης αυξάνεται όταν ο αριθμός των υποψήφιων θέσεων για εγκατάσταση ενός συστήματος αυξάνεται και ο αριθμός των πελατών που θα εξυπηρετεί το σύστημα αυτό είναι πολύ μεγάλος. Ένα ακόμα σημαντικό αίτιο δυσκολίας επίλυσης του προβλήματος είναι η σύνδεση του με το πρόβλημα της δυναμικότητας. Συχνά εμφανίζεται και στην πράξη το πρόβλημα κατανομής στο χώρο της δυναμικότητας που απαιτείται για την κάλυψη της κατανεμημένης στο χώρο ζήτησης. Γενικά, για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούνται τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας, όπως γραμμικός προγραμματισμός, πολυκριτηριακή ανάλυση, προσομοίωση, προγραμματισμός στόχων, ευρετικές μέθοδοι κλπ, οι οποίες καταλήγουν στην εύρεση μίας συνήθως υποβέλτιστης λύσης.

2.10 Διαδικασία επιλογής και σχεδιασμού εγκαταστάσεων

Ο σχεδιασμός των εγκαταστάσεων είναι μία πολυσύνθετη διαδικασία. Οι δύο πιο δημοφιλείς τρόποι επιλογής του χώρου των εγκαταστάσεων βασίζονται στη μεγιστοποίηση των κριτηρίων της γρηγορότερης εξυπηρέτησης και του μεριδίου αγοράς αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση η εγκατάσταση τοποθετείται όσο το δυνατόν εγγύτερα στους πελάτες, ενώ στη δεύτερη η τοποθέτηση γίνεται με βάση τον χώρο δράσης του ανταγωνισμού. Στην τελευταία περίπτωση η αύξηση του μεριδίου αγοράς έναντι του ανταγωνισμού έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του κέρδους.

Το πλήθος των εγκαταστάσεων αποτελεί από μόνο του παράγοντα πολυπλοκότητας. Η μοντελοποίηση ενός προβλήματος χωροθέτησης εγκαταστάσεων αυξάνει σε πολυπλοκότητα καθώς αυξάνεται ο αριθμός των εγκαταστάσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ακόμα και στην σχετικά σπάνια περίπτωση μελέτης προβλημάτων μίας εγκατάστασης, συνήθως το πρόβλημα μετατρέπεται σε μελέτη πολλαπλών εγκαταστάσεων.

Ένας άλλος κρίσιμος παράγοντας για την επιλογή τοποθεσίας αποτελεί το φυσικό περιβάλλον, το οποίο καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την απόσταση από τους πελάτες.

Μπορούμε να διακρίνουμε δύο είδη προβλημάτων. Εκείνα όπου οι εγκαταστάσεις και τα σημεία ζήτησης βρίσκονται στο επίπεδο και εκείνα στα οποία οι αποστάσεις είναι πολύ μεγάλες και απαιτείται συνδυασμός και άλλων μεθόδων μεταφοράς (αεροπλάνα, πλοία κλπ).

Οι περισσότερες μελέτες επικεντρώνονται στην πρώτη περίπτωση, όπου ο υπολογισμός της απόστασης γίνεται με τους ακόλουθους τρόπους:

- Ευκλείδεια απόσταση: όταν δύο σημεία ζήτησης βρίσκονται πάνω σε ευθεία.

- Ευθύγραμμη απόσταση (απόσταση Manhattan): όταν η μετακίνηση μεταξύ δύο σημείων επιτρέπεται μόνο κατά μήκος των αξόνων βορρά- νότου ή ανατολής- δύσης.
- Γενική απόσταση: προσεγγίζει τις οδικές αποστάσεις με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Στην δεύτερη περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι κόμβοι δικτύου μεταφοράς βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια σφαίρας, εν προκειμένω, της γης. Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας ουσιαστικά αποτελούν μια επέκταση των προηγούμενων προβλημάτων.

2.11 Αλγόριθμοι επίλυσης των προβλημάτων χωροθέτησης

Τα πιο απλά προβλήματα χωροθέτησης μπορούν να επιλυθούν με χρήση απλών μαθηματικών λογισμικών, όπως το Excel, ενώ τα πιο πολύπλοκα απαιτούν τη χρήση κάποιας ανώτερης γλώσσας προγραμματισμού με μεγάλες δυνατότητες, όπως η C++.

Οι πιο γνωστές μέθοδοι υπολογισμού της απόστασης είναι μεταξύ άλλων:

- Ευκλείδεια απόσταση: $d_i(x,y) = \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}$
- Ευθύγραμμη απόσταση: $d_i(x,y) = |x-a_i| + |y-b_i|$
- Γενική απόσταση: $d_i(x,y) = \sqrt[p]{|x-a_i|^p + |y-b_i|^p}$
- Απόσταση Chebyshev: $d_i(x,y) = \max\{|x-a_i|, |y-b_i|\}$

όπου, (a_i, b_i) οι συντεταγμένες του σημείου ζήτησης

(x, y) οι συντεταγμένες της υπό αναζήτηση τοποθεσίας και

$d_i(x, y)$ η απόσταση του σημείου ζήτησης i από την τοποθεσία (x,y)

Η πιο απλή περίπτωση προβλημάτων χωροθέτησης αναφέρεται στη χωροθέτηση μίας μόνο εγκατάστασης. Η επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων γίνεται με χρήση της Ευκλείδειας απόστασης, του γενικευμένου αλγόριθμου Weiszfeld, με χρήση της ορθογώνιας απόστασης κ.ά. Τα ρεαλιστικά προβλήματα χωροθέτησης αναφέρονται συνήθως σε περισσότερες της μίας εγκαταστάσεις. Στην παρούσα διατριβή μελετάται ένα πρόβλημα πολλαπλών εγκαταστάσεων με χρήση ευκλείδειας απόστασης.

2.12 Προβλήματα χωροθέτησης πολλαπλών εγκαταστάσεων

Η πιο απλή περίπτωση προβλήματος χωροθέτησης εγκαταστάσεων είναι αυτή στην οποία μία και μοναδική εγκατάσταση σχεδιάζεται με τρόπο ώστε να εξυπηρετεί όλους τους πελάτες. Στην πραγματικότητα, τόσο απλά συστήματα απαντώνται σπάνια, ίσως και καθόλου.

Συνεπώς, τα προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων τις περισσότερες φορές αφορούν προβλήματα πολλαπλών εγκαταστάσεων. Στα προβλήματα αυτά κάθε πελάτης μπορεί να εξυπηρετείται είτε από όλες είτε από μία μόνο εγκατάσταση, την πλησιέστερη σε αυτόν. Τα προβλήματα αυτά είναι γνωστά και ως προβλήματα θέσης – κατανομής, δεν είναι κυρτά και συνήθως παρουσιάζουν πολλά τοπικά βέλτιστα. Για το λόγο αυτό απαιτείται ο έλεγχος όλων των πιθανών τοπικών βέλτιστων ώστε να βρεθεί το ολικό βέλτιστο.

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η εύρεση της βέλτιστης θέσης για κάθε εγκατάσταση, από ένα σύνολο εγκαταστάσεων, με σκοπό να εξυπηρετούν τους πελάτες κατά τον ίδιο ή και κατά διαφορετικούς τρόπους. Προβλήματα αυτού του είδους είναι γνωστά ως προβλήματα χωροθέτησης πολλαπλών εγκαταστάσεων και διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες.

- Εγκαταστάσεις ιδίου τύπου: όλες οι εγκαταστάσεις εξυπηρετούν τον ίδιο σκοπό. Οι πελάτες διαχωρίζονται με τρόπο ώστε κάθε ένας να εξυπηρετείται από μία μόνο νέα εγκατάσταση.
- Εγκαταστάσεις διαφορετικού τύπου: κάθε είδος εγκατάστασης ικανοποιεί τη ζήτηση της ήδη υπάρχουσας μερίδας πελατών. Επιπλέον, είναι ορατό το ενδεχόμενο ύπαρξης ζήτησης μεταξύ των νέων εγκαταστάσεων.

Στην παρούσα διατριβή θα ασχοληθούμε με την πρώτη κατηγορία, δηλαδή όλες οι πιθανές εγκαταστάσεις θα είναι ίδιου τύπου και κάθε πελάτης θα εξυπηρετείται από μια και μόνο εγκατάσταση.

Σε κάθε περίπτωση, το κόστος μετακίνησης μεταξύ των εγκαταστάσεων και των πελατών, καθώς και των εγκαταστάσεων μεταξύ τους, αποτελεί τον ισχυρότερο παράγοντα για τη λήψη αποφάσεων στα προβλήματα χωροθέτησης.

2.13 Δίκτυο χωροθέτησης εγκαταστάσεων

Η γραφική αναπαράσταση με τη μορφή δικτύου αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο παρουσίασης πληθώρας προβλημάτων. Στην βιβλιογραφία συχνά απαντώνται, μεταξύ άλλων, απεικονίσεις με μορφή δικτύου για προβλήματα μεταφορών, παραγωγής και προγραμματισμού. Συνήθως, οι κόμβοι σε ένα δίκτυο αναπαριστούν είτε σημεία ζήτησης είτε πελάτες, ή ακόμα και πιθανές θέσεις εγκατάστασης, ενώ οι διακλαδώσεις που συνδέουν τους κόμβους αυτούς συμβολίζουν τις διαθέσιμες διαδρομές. Νέες εγκαταστάσεις μπορούν να τοποθετηθούν οπουδήποτε στο δίκτυο, σε διακλάδωση ή σε κόμβο. Τέτοιου είδους προβλήματα αναφέρονται ως μοντέλα δικτύων χωροθέτησης εγκαταστάσεων. Οι κόμβοι ενός δικτύου ενδέχεται να αναπαριστούν πόλεις ή σημεία μεγάλης συγκέντρωσης πληθυσμών, δηλαδή ουσιαστικά παρέχουν πιο ρεαλιστικές θέσεις για την τοποθέτηση νέων εγκαταστάσεων εξυπηρέτησης.

Η ανάλυση ενός δικτύου μπορεί να εφαρμοστεί για την εύρεση ενός βέλτιστου αριθμού εγκαταστάσεων ώστε, υπό κάποιους περιορισμούς, να ελαχιστοποιείται το κόστος και ταυτόχρονα να εξυπηρετούνται όλοι οι πελάτες. Ας υποθέσουμε ότι μία μεγάλη επιχείρηση έχει υποκαταστήματα σε διάφορες πόλεις και επιθυμεί να δημιουργήσει επιπλέον σημεία εξυπηρέτησης. Κάθε τέτοιο νέο σημείο συνεπάγεται πρόσθετο κόστος, αλλά αποφέρει σημαντικά οφέλη λόγω της βελτίωσης της εξυπηρέτησης των πελατών. Για τον λόγο αυτό η επιχείρηση αποσκοπεί στη δημιουργία ενός ελάχιστου αριθμού τέτοιων σημείων εξυπηρέτησης στις υπάρχουσες πόλεις, με τρόπο ώστε η απόσταση κάθε κέντρου από τις πόλεις αυτές να μην υπερβαίνει μία ορισμένη απόσταση αναφοράς. Σε ένα διάγραμμα δικτύου οι διακλαδώσεις απεικονίζουν τις αποστάσεις ανάμεσα στους κόμβους.

3 Θεωρία Παιγνίων

3.1 Εισαγωγή

Η θεωρία παιγνίων (game theory) ξεκίνησε σαν κλάδος των οικονομικών. Το κύριο αντικείμενο της είναι η ανάλυση των αποφάσεων σε καταστάσεις (παιχνίδια) στρατηγικής αλληλεπίδρασης. Τα τελευταία χρόνια η θεωρία παιγνίων έχει ευρύτατη εφαρμογή στα οικονομικά (π.χ. βιομηχανική οργάνωση), αλλά και στην Πολιτική Οικονομία, την εξελικτική βιολογία, την ψυχολογία, την κοινωνιολογία, κ.α.

Η θεωρία παιγνίων ασχολείται με τη λήψη αποφάσεων, συνήθως υπό αβεβαιότητα, όπου εμπλέκονται δύο ή και περισσότεροι νοήμονες «αντίπαλοι», και όπου ο καθένας τους φιλοδοξεί να βελτιστοποιήσει την δική του απόφαση εις βάρος των άλλων ή σε συνεργασία με άλλους, διαμορφώνοντας ίσως συνασπισμούς. Εφόσον συμμετέχουν τουλάχιστον δύο παίκτες, με τουλάχιστον δύο στρατηγικές ο καθένας, με αντίθετα συμφέροντα, το αποτέλεσμα για κάθε παίκτη καθορίζεται από τις συνδυασμένες επιλογές όλων των παικτών και δίνεται από τον πίνακα αποτελεσμάτων του παιγνίου [19]. Σε αυτή την περίπτωση μπορούν να χρησιμοποιηθούν εργαλεία από την θεωρία παιγνίων για την ανάλυση της συγκεκριμένης κατάστασης και την εύρεση ισορροπίας ή λογικής λύσης.

Για την εξέταση παιγνίων είναι απαραίτητο να λαμβάνεται υπόψη πώς συμπεριφέρνονται οι άλλοι (άτομα, εταιρείες) όταν παίρνουν τις αποφάσεις τους, αφού η ισορροπία εξαρτάται από τις αποφάσεις όλων μαζί (ατόμων, εταιριών). Χρειάζεται, λοιπόν, γνώση του πώς αντιδρούν αυτά τα άτομα και τι θα βγει από την αλληλεπίδραση τους. Ονομάζεται λοιπόν παίγνιο η κατάσταση σύγκρουσης ή ανταγωνισμού ή και συνεργασίας μεταξύ των αντιπάλων ή μεταξύ των ομάδων των αντιπάλων.

3.2 Ιστορική αναδρομή

Στον John von Neumann αποδίδεται η αρχική ανάπτυξη της θεωρίας παιγνίων (1928), ο οποίος μελετώντας το αντικείμενο αυτό ανακάλυψε και όρισε την σχέση της θεωρίας παιγνίων με τον γραμμικό προγραμματισμό. Αργότερα ο George B. Dantzig ανέπτυξε την θεωρία Simplex του γραμμικού προγραμματισμού και έτσι δόθηκε η δυνατότητα να επιλυθούν πολλά προβλήματα της θεωρίας παιγνίων. Στην συνέχεια με την πολύτιμη προσφορά του Αμερικανού μαθηματικού Nash αναπτύχθηκε πιο πολύ η θεωρία παιγνίων. Για την εργασία του αυτή ο Αμερικανός μαθηματικός τιμήθηκε με το βραβείο Nobel οικονομίας. Σε μια ειδική κατηγορία της θεωρίας παιγνίων, τα παίγνια με συνεργασία, πολύτιμη ήταν η προσφορά του Shapley. Τέλος ο Lemke, με την ανάπτυξη του ομώνυμου αλγόριθμου, έκανε το πρώτο βήμα στην ανακάλυψη αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση παιγνίων.

3.3 Βασικά χαρακτηριστικά

Ο όρος «Θεωρία παιγνίων» παραπέμπει σε επιτραπέζια παίγνια. Ο όρος αυτός χρησιμοποιήθηκε επειδή από μαθηματικής άποψης η μελέτη αυτών των παιγνίων μοιάζει με την μελέτη των περιστάσεων όπου λαμβάνονται σοβαρές οικονομικές, πολιτικές, στρατιωτικές ή άλλες αποφάσεις από περισσότερους του ενός αποφασίζοντες. Πιο αναλυτικά, σε κάθε παίγνιο ο κάθε αντίπαλος αναφέρεται ως παίκτης . Κάθε παίκτης έχει στην διάθεση του έναν αριθμό, πεπερασμένο ή άπειρο, επιλογών, οι οποίες αναφέρονται ως στρατηγικές. Τα αποτελέσματα ενός παιγνίου διατυπώνονται ως συναρτήσεις απώλειας ή συναρτήσεις κέρδους ή αμοιβής, μια για κάθε παίκτη, που όμως επηρεάζονται από τις αποφάσεις των άλλων παικτών. Ένα παίγνιο χαρακτηρίζεται από μια συλλογή κανόνων που το διέπουν και που είναι γνωστοί σε όλους τους παίκτες. Οι κανόνες αυτοί ορίζουν τι μπορεί και τι δεν μπορεί να κάνει ένας παίκτης. Οι ίδιοι κανόνες ορίζουν επίσης και τις αμοιβές ή απώλειες που απορρέουν από τις επιλογές των παικτών. Μία κίνηση είναι ένα σημείο του παιγνίου στο οποίο οι παίκτες πρέπει να διαλέξουν ανάμεσα στις διαθέσιμες επιλογές κάθε φορά. Ένα σύνολο κινήσεων και επιλογών αποτελεί ένα «παίξιμο» του παιγνίου. Οι στρατηγικές είναι κεντρική έννοια στα παίγνια, τα οποία συχνά αναφέρονται ως παίγνια στρατηγικής. Μια στρατηγική μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα σύνολο αποφάσεων που διατυπώνεται πριν το «παίξιμο» και που ορίζει λεπτομερώς τις επιλογές που γίνονται σε κάθε δυνατή περίπτωση [19].

3.4 Ταξινόμηση παιγνίων

Η ταξινόμηση των παιγνίων γίνεται συχνά σε διάφορα είδη μέσω ποικίλων κριτηρίων. Αρχικά ένα βασικό κριτήριο, βάσει του οποίου μπορούμε να ταξινομήσουμε ένα παίγνιο είναι ο αριθμός των παικτών που συμμετέχουν. Αν λοιπόν συμμετέχουν δύο παίκτες τα παίγνια ονομάζονται «παίγνια δύο παικτών», ενώ εάν συμμετέχουν *n* παίκτες έχουμε τα «παίγνια *n* παικτών» , όπου $n > 2$. Η παρουσία δύο παικτών είναι η ελάχιστη απαίτηση για να έχουμε φαινόμενα ανταγωνισμού και συνεργασίας. Η παρουσία τριών ή περισσοτέρων παικτών οδηγεί περαιτέρω και στην δυνατότητα σχηματισμού συνασπισμών, όπου μια ομάδα από δύο ή περισσότερους παίκτες ενώνουν τα ενδιαφέροντα τους και συναρμονίζουν τις στρατηγικές τους. Έτσι υπάρχουν «παίγνια με ή άνευ συνεργασίας», μια ταξινόμηση που βασίζεται στο κατά πόσο οι παίκτες πριν παίξουν το παίγνιο μπορούν να μορφώσουν συνασπισμούς και να επιτύχουν δεσμευτικές συμφωνίες για τις στρατηγικές.

Τα παίγνια μπορούν επίσης να ταξινομηθούν σύμφωνα με το εάν η σειρά που λαμβάνονται οι αποφάσεις παίζει ρόλο ή όχι. Έτσι έχουμε τα «δυναμικά» παίγνια όπου η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις παίζει ρόλο και τα «στατικά» παίγνια, στα οποία η σειρά με την οποία ο παίκτης παίρνει τις αποφάσεις, δεν έχει σημασία.

Επιπλέον, ο αριθμός στρατηγικών ταξινομεί τα παίγνια σε «πεπερασμένα» και σε «μη πεπερασμένα » ή σε απειροπαίγνια. Επειδή οι αμοιβές ή οι απώλειες δύο παικτών, με πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών, μπορούν να διαταχθούν σε πίνακες ή μήτρες, τα παίγνια αυτά είναι γνωστά ως μητρικά ή πινακοπαίγνια.

Ένας ακόμη τρόπος ταξινόμησης των παιγνίων είναι αυτός που αφορά τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων αμοιβής ή απώλειας. Έτσι σε παίγνια δύο παικτών, όπου η αμοιβή του ενός είναι ίση με και προέρχεται από την απώλεια του άλλου, οι παίκτες βρίσκονται σε σύγκρουση και οποιαδήποτε συνεργασία είναι ανέφικτη. Τα παίγνια αυτά ονομάζονται παίγνια «μηδενικού αθροίσματος» αφού το άθροισμα των αμοιβών είναι μηδενικό.

Στα παίγνια γενικού μη μηδενικού αθροίσματος μπορούν να υπάρχουν συνήθως στοιχεία τόσο ανταγωνισμού όσο και συνεργασίας. Έχουμε δύο ακραίες περιπτώσεις. Στην ειδική περίπτωση παιγνίων μη μηδενικού αθροίσματος οι παίκτες βρίσκονται σε σύγκρουση και η αμοιβή του ενός σημαίνει απώλεια για τον άλλον, ενώ στην ειδική περίπτωση παιγνίων σταθερής διαφοράς, οι παίκτες πρέπει να συνεργασθούν διότι είτε κερδίζουν είτε χάνουν μαζί.

Τέλος, υπάρχει και μια ακόμη κατηγορία παιγνίων η οποία καθορίζεται από το εάν ο κάθε παίκτης επιλέγει διακριτές στρατηγικές [20]. Πιο συγκεκριμένα, εάν ο παίκτης επιλέγει διακριτές στρατηγικές (π.χ. ή την 1 ή την 2,…) λέμε ότι ο παίκτης παίζει με καθαρή στρατηγική, οπότε και αυτού του είδους τα παίγνια ονομάζονται παίγνια «καθαρής στρατηγικής». Στην αντίθετη περίπτωση, οπού ο κάθε παίκτης είναι δυνατόν να επιλέξει έναν συνδυασμό στρατηγικών, λέμε ότι έχουμε παίγνια «μικτής στρατηγικής».

3.5 Τρόποι περιγραφής και ανάλυσης των παιγνίων

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι περιγραφής και ανάλυσης των παιγνίων. Ένα παίγνιο είναι σε εκτεταμένη μορφή όταν οι κανόνες που το διέπουν περιγράφονται μέσω ενός δένδρου, του δένδρου παιγνίου, όπου οι κινήσεις δηλώνονται ως κλάδοι και ο κάθε παίκτης που έχει σειρά για να κάνει μια κίνηση ως κορυφή ή κόμβος. Παριστάνονται επίσης οι πληροφορίες και οι επιλογές που είναι στην διάθεση των παικτών, όπως και οι τελικές αμοιβές ή απώλειες όλων των παικτών στο τέλος του «παιξίματος».

Όταν σε ένα παίγνιο δεν γίνονται ταυτόχρονες κινήσεις και για κάθε κίνηση όλοι οι παίκτες γνωρίζουν τις επιλογές που έγιναν σε όλες τις προηγούμενες κινήσεις, ακόμα και αν οι κινήσεις ήταν τυχαίες, τότε το παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή είναι τέλειας πληροφόρησης. Το σκάκι είναι παράδειγμα παιγνίου τέλειας πληροφόρησης, ενώ το πόκερ δεν είναι [20].

Ένας δεύτερος τρόπος περιγραφής παιγνίου απαιτεί την θεώρηση όλων των δυνατών στρατηγικών κάθε παίκτη και γίνεται μέσω της δήλωσης των αμοιβών ή απωλειών των παικτών, οι οποίες είναι αποτέλεσμα όλων των εναλλακτικών συνδυασμών των στρατηγικών που επιλέγουν. Έτσι, π.χ. τα πεπερασμένα παίγνια δύο παικτών περιγράφονται συνήθως με την βοήθεια δύο μητρών (πινάκων) και τότε μιλάμε για τα διμητρικά παίγνια ή διπινακοπαίγνια. Οι μήτρες αυτές παρουσιάζουν μέσω των στοιχείων τους την αμοιβή ή την απώλεια των παικτών κάθε ζεύγους στρατηγικών, όπου οι στρατηγικές του ενός αντιστοιχούν στις γραμμές των πινάκων, ενώ οι στρατηγικές του άλλου στις στήλες.

Η περιγραφή ενός παιγνίου δεν γίνεται απαραίτητα με την βοήθεια μητρών. Εάν, λ.χ. ο αριθμός των στρατηγικών του κάθε παίκτη δεν είναι πεπερασμένος, τότε οι στρατηγικές αυτές θα μπορούσαν να περιγραφούν σαν στοιχεία κάποιου συνόλου, ενώ οι αμοιβές ή οι απώλειες των παικτών θα μπορούσαν να εκφρασθούν σαν πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων των στρατηγικών. Όταν η περιγραφή ενός παιγνίου γίνεται με αυτό τον τρόπο λέμε ότι το παίγνιο είναι σε κανονική μορφή. Σε αυτή την μορφή, ο δυναμικός χαρακτήρας των παιγνίων υποβαθμίζεται. Υπάρχουν δηλαδή παίγνια ενός «παιξίματος», όπου οι παίκτες ενεργούν μόνο μια φορά και χωρίς κάποια εξαρτωμένη σειρά αποφάσεων. Τα παίγνια με αυτή την μορφή είναι στατικά. Τα παίγνια σε κανονική μορφή είναι συνήθως πιο κατάλληλα για την περιγραφή περίπλοκων πραγματικών εφαρμογών της αγοράς, της οικονομίας κ.α. Είναι επίσης πιο κατάλληλα για την θεωρητική και αλγοριθμική μελέτη, ιδίως στην περίπτωση που τα σύνολα των στρατηγικών δεν είναι πεπερασμένα.

3.6 Σημείο ισορροπίας Nash (Nash Equilibrium)

Το σημείο Nash, σε ένα παίγνιο με δύο παίκτες, είναι ένα ζευγάρι στρατηγικών (μία για κάθε παίκτη) που η μία είναι η καλύτερη απάντηση στην άλλη και αντίστροφα. Γενικεύεται για παίγνια με $n>2$ παίκτες. Σε κάθε παίγνιο υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας, αυτό ορίζει το θεώρημα Nash. Ουσιαστικά, ισορροπία Nash ονομάζεται η ισορροπία όπου κάθε παίκτης επιλέγει την άριστη στρατηγική με δεδομένη τη στρατηγική των άλλων παικτών.

Μια ισορροπία κατά Nash είναι:

- ένα διάνυσμα από στρατηγικές, έτσι ώστε δεδομένων των υπολοίπων στρατηγικών, ο παίκτης που εξετάζεται κάνει το καλύτερο δυνατό, όταν ακολουθήσει την στρατηγική που υπάρχει στο διάνυσμα.

- ένα διάνυσμα στρατηγικών, τέτοιο ώστε κανείς από τους παίκτες δεν έχει κίνητρο να αλλάξει την συμπεριφορά του, δεδομένου ότι οι υπόλοιποι παίκτες ακολουθούν τις στρατηγικές που υπαγορεύει το μερίδιο τους.

Μια ισορροπία σε αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές είναι και ισορροπία κατά Nash. Παρόλα αυτά, η ισορροπία σε αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές είναι πολύ πιο απαιτητική σαν ισορροπία από ότι η ισορροπία κατά Nash. Ορισμένες φορές, ο αριθμός των ισορροπιών κατά Nash, είναι μεγαλύτερος από ένα. Στα παίγνια συντονισμού η επιλογή της ισορροπίας είναι πιο εύκολη, ενώ στα παίγνια ανταγωνισμού η επιλογή μεταξύ των ισορροπιών είναι πιο δύσκολη. Στην ισορροπία κατά Nash, οι παίκτες σκέφτονται τι σκέφτεται ο άλλος και πριν παίξουν, έχουν κάνει μια ολόκληρη δυναμική προσαρμογή στην ισορροπία. Δηλαδή ουσιαστικά πριν παιχτεί το παιγνίδι, υπάρχει μια ολόκληρη λογική που οδηγεί και συγκλίνει στην ισορροπία. Το πρόβλημα με την ισορροπία κατά Nash, είναι ότι απαιτεί οι παίκτες να είναι πολύ ορθολογικοί. Να μπορούν δηλαδή, να κάνουν όλες τις σκέψεις πριν πάρουν την τελική τους απόφαση και να ξέρουν λίγο πολύ πως σκέφτεται ο άλλος. Όταν υπάρχουν πολλές ισορροπίες κατά Nash, πρέπει να βρεθούν στοιχεία εκτός παιγνίου τα οποία θα μας βοηθήσουν στην επιλογή μεταξύ των ισορροπιών.

Όταν παρουσιάζονται περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας κατά Nash πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποιος τρόπος διάταξης τους, έτσι ώστε να βρεθεί το καλύτερο δυνατό σημείο από αυτά, δηλαδή το σημείο ισορροπίας που θα επιφέρει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα στους παίκτες. Υπάρχουν περιπτώσεις παιγνίων που είναι εμφανές πιο είναι το καλύτερο σημείο ισορροπίας, όμως υπάρχουν και παίγνια που δεν είναι άμεσα εντοπίσημο το καλύτερο σημείο ισορροπίας κατά Nash ανάμεσα στο σύνολο όλων των σημείων ισορροπίας. Στην δεύτερη περίπτωση απαιτείται διάταξη των σημείων αυτών και έπειτα επιλογή του καλύτερου από αυτά. Παρόλα αυτά υπάρχει το ενδεχόμενο να μην είναι εφικτή μια ολική διάταξη πολυδιάστατων σημείων και έτσι καταφεύγουμε σε μερική διάταξη του συνόλου και σύμφωνα με κάποιες συνθήκες που έχουνε οριστεί στο υπό εξέταση παίγνιο, επιλέγεται τελικά εκείνο το σημείο ισορροπίας που επιφέρει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα σε όλους τους παίκτες ή στην πλειοψηφία αυτών.

Ένα ζεύγος στρατηγικών (*k*,*l*) καλείται «ατομικώς ευσταθές» αν είναι μη συνεργατικό σημείο ισορροπίας και «συλλογικά ευσταθές» εάν δεν κυριαρχείται από κάποιο άλλο ζεύγος στρατηγικών. Τα συλλογικά ευσταθή ζεύγη στρατηγικών είναι «Pareto βέλτιστα» ή «Pareto αποτελεσματικά σημεία». Επίσης, ένα σημείο ισορροπίας Nash (*p*,*q*) είναι «προτιμότερο» από ένα δεύτερο σημείο ισορροπίας Nash (*k*,*l*), αν το σημείο (*p*,*q*) κυριαρχεί. Ένα σημείο ισορροπίας Nash το οποίο ταυτόχρονα είναι και Pareto ελάχιστο ονομάζεται «αποδεκτό» [21].

3.7 Μοντέλο Cournot

Το μοντέλο του παιγνίου με δύο τουλάχιστον παίκτες, όταν οι παίκτες αποφασίζουν ταυτόχρονα την στρατηγική που θα ακολουθήσουν, αποτελεί το μοντέλο Cournot. Στο μοντέλο Cournot η ταυτόχρονη επιλογή συνεπάγεται μη ύπαρξη πλήρους πληροφόρησης. Συγκεκριμένα, όταν εξετάζεται ένα παίγνιο με δύο επιχειρήσεις κάθε μία από αυτές καλείται να αποφασίσει χωρίς να γνωρίζει τι πρόκειται να αποφασίσει η άλλη επιχείρηση.

3.8 Ισορροπία Stackelberg

Το υπόδειγμα Stackelberg περιγράφει την περίπτωση ύπαρξης δύο επιχειρήσεων όπου η μία εκ αυτών έχει κάποιο πλεονέκτημα (μεγέθους ή οποιοδήποτε άλλο) και λαμβάνει τις αποφάσεις της πρώτη. Αυτή είναι η ηγετική επιχείρηση ή ο Ηγέτης (leader). Η ηγετική επιχείρηση παίρνει σαν δεδομένη την συνάρτηση αντίδρασης της άλλης επιχείρησης (ακολούθου – follower) όταν λύνει το πρόβλημα μεγιστοποίησης των κερδών της. Η ύπαρξη αυτού του ζευγαριού δεν είναι τεχνητή εφόσον με την επέμβαση του χρόνου αλλάζει και η θέση της ισορροπίας.

Η λύση του Stackelberg είναι διαφορετική από τη συμμετρική ισορροπία που προέρχεται από τη μη πρόσβαση στην πληροφορία. Μέσω της μεθοδολογίας αυτής μπορεί ο χρόνος να ερμηνευθεί ως μέσο πληροφόρησης και μάλιστα πλήρους πληροφόρησης στη συγκεκριμένη περίπτωση. Δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο ένα πλαίσιο ενδιάμεσο σε σχέση με τα παίγνια συνεργασίας και τα παίγνια μη συνεργασίας. Συνεπώς, η προσέγγιση του Stackelberg εξετάζει και ερμηνεύει διαπραγματευτικές περιπτώσεις όπου ο χρόνος, μέσω της διάταξης των επεμβάσεων, είναι σημαντικός.

Όταν ο ηγέτης έχει να επιλέξει από ένα σετ ενεργειών A_1 και ο ακόλουθος, εφόσον γνωρίζει την επιλογή του ηγέτη, επιλέγει από ένα σετ ενεργειών A_2, τότε η λύση του παιγνίου συνήθως δίνεται από το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
&\max_{(a_1,a_2)\in A_1\times A_2} u_1(a_1,a_2) \\
&\text{υ.π.:} \\
&a_2 \in \underset{a_2'\in A_2}{\operatorname{argmax}}\ u_2(a_1,a_2')
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Όπου u_i είναι η συνάρτηση απόδοσης που δείχνει τις προτιμήσεις του παίκτη i. Εάν το σετ ενεργειών A_i του παίκτη i είναι συμπαγές και οι συναρτήσεις απόδοσης u_i είναι συνεχείς , τότε το πρόβλημα μεγιστοποίησης έχει λύση [22].

3.9 Σύγκριση Cournot και Stackelberg

Στα μοντέλα Cournot και Stackelberg, η επιχείρηση η οποία διαλέγει πρώτη την ποσότητα της (ηγέτης) έχει συνήθως το πλεονέκτημα και πετυχαίνει μεγαλύτερα κέρδη. Αυτό όμως δεν αποτελεί κανόνα. Πολλές φορές ο νικητής εξαρτάται από το παιγνίδι, δηλαδή από τις μεταβλητές. Αυτό σημαίνει ότι ορισμένες φορές το πλεονέκτημα ενδέχεται να το έχει ο ακόλουθος.

Στα μοντέλα Cournot οι επιχειρήσεις διαλέγουν ταυτόχρονα πόσο θα παράξουν. Η τιμή στην οποία θα πουλήσουν καθορίζεται στη συνέχεια από την συνάρτηση ζήτησης. Τα ολιγοπώλια Cournot με n επιχειρήσεις καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα πιθανοτήτων, από την περίπτωση του μονοπωλίου όπου n=1 έως τον τέλειο ανταγωνισμό όπου $n\to\infty$. Καθώς το n αυξάνεται, οι καταναλωτές επωφελούνται από την μείωση της τιμής πώλησης. Τα μοντέλα Stackelberg διαφοροποιούνται μόνο στο γεγονός ότι οι επιχειρήσεις κάνουν τις επιλογές παραγωγής τους διαδοχικά [21].

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε ένα παίγνιο τύπου Stackelberg όπου ο ηγέτης και ο ακόλουθος είναι δύο ανταγωνιστές οι οποίοι προσπαθούν να «κερδίσουν» την αγορά. Ξεκινάει πρώτος ο ηγέτης επιλέγοντας πόσες και ποιες εγκαταστάσεις θα λειτουργήσει. Στην συνέχεια απαντάει ο ακόλουθος ο οποίος επιλέγει με τη σειρά του τις δικές του εγκαταστάσεις λαμβάνοντας, όμως, υπόψη του την επιλογή του ηγέτη. Και οι δύο ανταγωνιστές στοχεύουν στην ελαχιστοποίηση του κόστους προσπαθώντας παράλληλα να μεγιστοποιήσουν το μερίδιο αγοράς τους, λαμβάνοντας υπόψη και την ζήτηση. Για την ακρίβεια ο ηγέτης επιλέγει τις θέσεις εκείνες που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος ενώ ο ακόλουθος προσπαθεί να επιλέξει, μεταξύ των ελεύθερων θέσεων, εκείνες που αυξάνουν το μερίδιο αγοράς του.

4 Διεπίπεδη βελτιστοποίηση

4.1 Εισαγωγή

Οι τεχνικές πολυεπίπεδου προγραμματισμού αναπτύχθηκαν με σκοπό την αποκέντρωση των προβλημάτων σχεδιασμού με πολλαπλούς αποφασίζοντες σε έναν ιεραρχικό οργανισμό. Τα προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού (ΠΔΠ) αποτελούν ειδική περίπτωση των προβλημάτων πολυεπίπεδου προγραμματισμού. Συγκεκριμένα πρόκειται για προβλήματα πολυεπίπεδου προγραμματισμού με δύο μόνο επίπεδα. Τα προβλήματα αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά στην μη κυρτή βελτιστοποίηση και αποτελούν παίγνια ηγέτη-ακολούθων στα οποία το παιχνίδι είναι σειριακό και χωρίς συνεργασίες [23].

Τα περισσότερα μαθηματικά μοντέλα προγραμματισμού ασχολούνται με έναν μόνο αποφασίζοντα και μία μόνο αντικειμενική συνάρτηση και χρησιμοποιούνται για συγκεντρωμένα συστήματα σχεδιασμού. Αντίθετα, τα προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού ασχολούνται με αποκεντρωμένα συστήματα σχεδιασμού στα οποία το ανώτερο επίπεδο ονομάζεται ηγέτης, ενώ το κατώτερο αναφέρεται στην αντικειμενική συνάρτηση του ακολούθου. Στα διεπίπεδα προβλήματα κάθε αποφασίζοντας προσπαθεί να βελτιστοποιήσει τη δική του αντικειμενική συνάρτηση χωρίς, ωστόσο, να λαμβάνει υπόψη του τις αντικειμενικές συναρτήσεις των υπολοίπων μερών. Αντίθετα, η απόφαση του κάθε μέρους επηρεάζει την τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων των υπολοίπων μερών καθώς και τον χώρο απόφασης.

Συνεπώς, ένα διεπίπεδο πρόγραμμα μπορεί να διατυπωθεί για ένα πρόβλημα στο οποίο δύο αποφασίζοντες λαμβάνουν αποφάσεις διαδοχικά. Για παράδειγμα, σε μια αποκεντρωμένη εταιρία, η ανώτερη διοίκηση ή το διοικητικό συμβούλιο λαμβάνουν μια απόφαση, όπως λόγου χάρη τον προϋπολογισμό της εταιρίας, και στη συνέχεια κάθε τμήμα της εταιρίας καθορίζει ένα σχέδιο παραγωγής έχοντας πλήρη γνώση του προϋπολογισμού [24]. Μπορούμε ακόμα να παραθέσουμε και το δυοπώλειο κατά Stackelberg όπου δύο εταιρίες προμηθεύουν ομοιογενή προϊόντα στην αγορά. Ας υποθέσουμε ότι η μια εταιρία κυριαρχεί έναντι της άλλης στην αγορά. Συνεπώς, η πρώτη αποφασίζει το επίπεδο προμήθειας της και στη συνέχεια η άλλη εταιρία καθορίζει το δικό της αφού έχει λάβει υπόψη της τις αποφάσεις της πρώτης.

Η μέθοδος που ανέπτυξε ο Stackelberg έχει χρησιμοποιηθεί ως αρχή επίλυσης διεπίπεδων προβλημάτων, ενώ έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αλγόριθμοι βασιζόμενοι στη λογική αυτή [25]. Στην παρούσα διατριβή αναπτύσσουμε έναν ακόμα τέτοιο αλγόριθμο με σκοπό την εύρεση βέλτιστης στρατηγικής για την εταιρία που κυριαρχεί.

4.2 Ορισμός προβλήματος διεπίπεδου προγραμματισμού

Η γενική μορφή ενός προβλήματος διεπίπεδου προγραμματισμού είναι:

$$\begin{aligned}
&\min_{x\in X,y} F(x,y)\\
&\text{υ.π.:}\\
&G(x,y)\le 0\\
&\\
&\min_{y} f(x,y)\\
&\text{υ.π.:}\\
&g(x,y)\le 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου $x\in\mathbb{R}^{n_1}$ και $y\in\mathbb{R}^{n_2}$.

Οι μεταβλητές του παραπάνω προβλήματος χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, σε αυτές του ανωτέρου επιπέδου $x\in\mathbb{R}^{n_1}$ και σε αυτές του κατωτέρου επιπέδου $y\in\mathbb{R}^{n_2}$. Ομοίως, οι συναρτήσεις $F:\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}$ και $f:\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}$ αποτελούν τις αντικειμενικές συναρτήσεις ανωτέρου και κατωτέρου επιπέδου αντίστοιχα, ενώ οι διανυσματικές συναρτήσεις $G:\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^{m_1}$ και $g:\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^{m_2}$ ονομάζονται περιορισμοί ανωτέρου και κατωτέρου επιπέδου αντίστοιχα. Οι περιορισμοί ανωτέρου επιπέδου εμπεριέχουν μεταβλητές και από τα δύο επίπεδα (σε αντίθεση με αυτούς που προσδιορίζονται από το σύνολο *X*) και έχουν πολύ συγκεκριμένο ρόλο. Συγκεκριμένα, πρέπει να επιβληθούν έμμεσα, καθώς δε δεσμεύουν τον αποφασίζοντα του κατωτέρου επιπέδου.

4.3 Συσχέτιση προβλημάτων διεπίπεδης βελτιστοποίησης και Stackelberg

Η πολυεπίπεδη βελτιστοποίηση, η οποία λόγω πολυπλοκότητας, καθίσταται πολύ δύσκολο να μελετηθεί, σχετίζεται άμεσα με το οικονομικό πρόβλημα του Stackelberg στον τομέα της θεωρίας παιγνίων όπως έχει ήδη αναφερθεί. Για να διαπιστωθεί καλύτερα αυτό, ας θεωρήσουμε μια διαδικασία οικονομικού σχεδιασμού στην οποία εμπλέκονται διαδραστικοί πράκτορες σε δύο διακριτά επίπεδα. Ο ηγέτης (leader) δίνει οδηγίες στους υπόλοιπους, τους επονομαζόμενους ακόλουθους (followers). Στο συγκεκριμένο πλαίσιο των παιγνίων Stackelberg ο ηγέτης θεωρείται ότι περιμένει τις αντιδράσεις των ακολούθων. Με τον τρόπο αυτό, ο ηγέτης μπορεί να επιλέγει την βέλτιστη για αυτόν στρατηγική. Πιο συγκεκριμένα, ο ηγέτης επιλέγει μια στρατηγική x από ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}^n$, και κάθε ακόλουθος i έχει ένα σύνολο στρατηγικών $Y_i(x) \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ οι οποίες αντιστοιχούν σε κάθε $x \in X$. Τα σύνολα $Y_i(x)$ θεωρούνται κλειστά και κυρτά. Κάθε ακόλουθος i έχει παράλληλα και μία συνάρτηση κόστους η οποία εξαρτάται από τις στρατηγικές τόσο του ηγέτη όσο και των υπόλοιπων ακολούθων. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

$$\theta_i(x, \cdot) : \prod_{j=1}^{M} \mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R} \tag{4.2}$$

όπου M είναι ο αριθμός των ακολούθων. Επιπλέον θεωρείται ότι για σταθερές τιμές των $x \in X$ και $y_j (j \neq i)$ η συνάρτηση θ_i είναι κυρτή και συνεχώς παραγωγίσιμη στο $y_i \in Y_i(x)$. Οι ακόλουθοι συμπεριφέρονται συλλογικά σύμφωνα με την Αρχή της μη Συνεργασίας του Nash [26] σύμφωνα με την οποία για κάθε $x \in X$, θα επιλέξουν μια κοινή απόκριση

$$y^{opt} \equiv (y_i^{opt})_{i=1}^{M} \in C(x) \tag{4.3}$$

όπου $C(x) = \prod_{i=1}^{M} Y_i(x)$, έτσι ώστε, για κάθε $i = 1, \ldots, M$ ισχύει:

$$y_i^{opt} \in \arg\min \left\{ \theta_i(x, y_i, y_{j \neq i}^{opt}) : y_i \in Y_i(x) \right\} \tag{4.4}$$

Η ιεραρχική δομή των προβλημάτων Stackelberg είναι παρόμοια με αυτή των προβλημάτων διεπίπεδης βελτιστοποίησης, με μόνη διαφορά ότι το πρόβλημα κατωτέρου επιπέδου είναι πρόβλημα ισορροπίας και όχι βελτιστοποίησης.

4.4 Μικρή ιστορική αναδρομή

Τα διεπίπεδα προγράμματα εισήχθησαν από τους Bracken και McGrill [27] σε μια σειρά εργασιών οι οποίες σχετίζονταν με στρατιωτικές εφαρμογές καθώς και εφαρμογές στη λήψη αποφάσεων στους τομείς παραγωγής και μάρκετινγκ. Μέχρι τότε, τέτοια προβλήματα ήταν γνωστά ως μαθηματικά προγράμματα με προβλήματα βελτιστοποίησης στους περιορισμούς. Οι όροι διεπίπεδος και πολυεπίπεδος προγραμματισμός εισήχθησαν λίγο αργότερα από τους Candler και Norton [28]. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα προβλήματα που μελετήθηκαν στην τελευταία εργασία δεν περιείχαν περιορισμούς ανωτέρου επιπέδου που να εξαρτώνται τόσο από τις μεταβλητές x όσο και από τις y. Η γενική διατύπωση περιορισμών ανωτέρου επιπέδου ως $G(x, y) \leq 0$ εμφανίστηκε για πρώτη φορά από τους Aiyoshi και Shimizu [29].

4.5 Περίπτωση πολλαπλών βέλτιστων λύσεων κατώτερου επιπέδου

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η διατύπωση του προβλήματος είναι αμφίβολη. Αυτό συμβαίνει όταν υπάρχουν πολλαπλές βέλτιστες λύσεις στο πρόβλημα κατώτερου επιπέδου για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων. Στις περιπτώσεις αυτές ο ηγέτης δεν μπορεί να εκβιάσει τον ακόλουθο να επιλέξει μια από τις βέλτιστες λύσεις που διαθέτει. Συνεπώς, ο ηγέτης δεν μπορεί να προβλέψει την πραγματική τιμή της δικής του αντικειμενικής συνάρτησης έως ότου ο ακόλουθος κάνει την επιλογή του και την γνωστοποιήσει στον ηγέτη. Με σκοπό την αποφυγή αυτής της δυσκολίας, έχουν προταθεί δύο προσεγγίσεις, η αισιόδοξη και η απαισιόδοξη [30].

Η διαφορά μεταξύ των δύο προσεγγίσεων μπορεί να εξηγηθεί από την συμπεριφορά των ακολούθων. Φιλική ή συνεργατική συμπεριφορά έχει ως αποτέλεσμα αισιόδοξη λύση. Αντίθετα, επιθετικοί ακόλουθοι οδηγούν σε απαισιόδοξη λύση. Παρακάτω παρουσιάζουμε αναλυτικότερα τις δύο προσεγγίσεις [31].

Στην αισιόδοξη προσέγγιση ο ηγέτης εμπιστεύεται τον ακόλουθο υπό την έννοια ότι θα τον βοηθήσει να πετύχει την καλύτερη αντικειμενική συνάρτηση. Από μαθηματικής απόψεως, υποθέτοντας ότι τόσο ο ηγέτης όσο και ο ακόλουθος θέλουν να ελαχιστοποιήσουν τις αντικειμενικές τους συναρτήσεις, το αισιόδοξο διεπίπεδο πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y} f(x,y) \\
&\text{υ.π.:} \\
&(x,y) \in \Omega \\
&y \in \arg\min_{w} g(x,w) \\
&\text{υ.π.:} \\
&(x,w) \in \Psi
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

όπου f και Ω είναι αντίστοιχα η αντικειμενική συνάρτηση και το σύνολο των εφικτών λύσεων για τον ηγέτη, ενώ g και Ψ είναι οι αντίστοιχες μεταβλητές για τον ακόλουθο. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς ο ακόλουθος αποφασίζει μόνο το $y(w)$, ενώ το x αποτελεί μια παράμετρο που επιβάλλεται από τον ηγέτη.

Η αισιόδοξη προσέγγιση φαίνεται να μην είναι εφικτή χωρίς δυσκολίες στις περιπτώσεις όπου η συνεργασία δεν επιτρέπεται (για παράδειγμα όταν έχουμε ανταγωνισμό), ή όταν η συνεργασία δεν είναι εφικτή, ή τέλος όταν δεν είμαστε σίγουροι ότι ο ακόλουθος θα τηρήσει την συμφωνία. Μια λύση στην παραπάνω δυσάρεστη για τον ηγέτη κατάσταση έρχεται να δώσει ο περιορισμός της ζημίας που είναι αποτέλεσμα μιας ανεπιθύμητης επιλογής του ακολούθου.

Συνεπώς, σε αντίθεση με την προηγούμενη προσέγγιση, εδώ ο ηγέτης στοχεύει στη μείωση του κόστους που έχει προκληθεί από τον ακόλουθο εάν ο δεύτερος επιλέξει τη βέλτιστη (λιγότερο επωφελή για τον ηγέτη) λύση.

Το απαισιόδοξο διεπίπεδο πρόβλημα βελτιστοποίησης μοντελοποιείται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y} \max f(x,y) \\
&\text{υ.π.:} \\
&(x,y) \in \Omega \\
&y \in \arg\min_{w} g(x,w) \\
&\text{υ.π.:} \\
&(x,w) \in \Psi
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

4.6 Πεδίο εφαρμογών

Αρκετά προβλήματα μεταφορών μπορούν να μοντελοποιηθούν με χρήση διεπίπεδων προγραμμάτων. Γενικότερα, ο διεπίπεδος προγραμματισμός εφαρμόζεται σε πραγματικά προβλήματα που αφορούν μία ιεραρχική σχέση ανάμεσα σε δύο επίπεδα αποφάσεων. Τέτοιου είδους προβλήματα απαντώνται σε διάφορα επιστημονικά πεδία όπως το μάνατζμεντ (τοποθεσία εγκατάστασης, περιβαλλοντικοί κανονισμοί, κατανομή πιστώσεων, ενεργειακή πολιτική, επικίνδυνα υλικά), ο οικονομικός σχεδιασμός (κοινωνικές και γεωργικές πολιτικές, τιμολόγηση της ηλεκτρικής ενέργειας, παραγωγή πετρελαίου), η επιστήμη του μηχανικού (βέλτιστη σχεδίαση, κατασκευές), η χημεία, οι περιβαλλοντικές επιστήμες, ο βέλτιστος έλεγχος, κλπ.

Μπορεί να θεωρηθεί ότι οι περισσότερες διοικητικές αποφάσεις είναι διεπίπεδης φύσης, με την έννοια ότι επιδρούν σε συστήματα με κάποιο βαθμό αυτονομίας και συγκρουόμενους αντικειμενικούς στόχους. Ωστόσο, οι έρευνες που υιοθετούν το παραπάνω παράδειγμα και βασίζονται σε πραγματικά προβλήματα είναι σχετικά λίγες. Παρακάτω, παρέχεται ένα δείγμα πεδίων εφαρμογής που εξετάζεται στην βιβλιογραφία.

4.6.1 Διαχείριση κερδοφορίας

Ο όρος διαχείριση κερδοφορίας καλύπτει ένα φάσμα διαδικασιών βελτιστοποίησης που στοχεύουν στην μεγιστοποίηση της κερδοφορίας των επιχειρήσεων που χαρακτηρίζονται από υψηλό κόστος επένδυσης, χαμηλό λειτουργικό κόστος και ευπαθή αποθέματα. Η πρώτη εφαρμογή έγινε στον τομέα των αερομεταφορών με το όνομα “yield management” και αφορούσε τέσσερα θέματα: την κοστολόγηση εισιτηρίων, την κατανομή θέσεων, την πρόβλεψη της ζήτησης και την υπερκράτηση (overbooking). Το μοντέλο που περιλαμβάνει πολιτικές κοστολόγησης και κατανομής θέσεων περιγράφτηκε από τους Cote et al. [32].

4.6.2 Διαχείριση κυκλοφορίας

Περιφερειακά αστικών περιοχών μπορούν να χρησιμοποιηθούν διόδια για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κυκλοφοριακού προβλήματος. Εάν τεθούν διόδια σε ορισμένους μόνο περιφερειακούς δρόμους, τότε το τελικό σχέδιο δεν είναι εφαρμόσιμο και εμφανίζεται το πρόβλημα της δεύτερης καλύτερης λύσης, το οποίο είναι διεπίπεδης φύσης. Περισσότερες λεπτομέρειες στο θέμα αυτό υπάρχουν στις εργασίες των Hearn και Ramana [33] και των Larsson και Patriksson [34].

4.6.3 Εκτίμηση πίνακα προέλευσης – προορισμού

Ένα κλασσικό πρόβλημα των αστικών μελετών συνίσταται στην εκτίμηση της ζήτησης για μεταφορικά μέσα ανάμεσα στους κόμβους ενός κυκλοφοριακού δικτύου, η οποία συνήθως εκμαιεύεται από στατιστικές έρευνες, και χρησιμοποιείται ως είσοδος της διαδικασίας καθορισμού ισορροπίας. Εάν οι πιο πρόσφατες ροές απόδοσης διαφοροποιούνται από τις ροές που έχουν παρατηρηθεί (αξιόπιστες), τότε μπορεί κάποιος να θέσει ένα διεπίπεδο πρόβλημα όπου θα εξετάζεται ο πίνακας ζήτησης (το ανώτερο μέρος του) ο οποίος ταυτίζεται όσο το δυνατό καλύτερα με τις φέρουσες ροές ισορροπίας (πρόβλημα καθορισμού χαμηλού επίπεδου κυκλοφορίας). Florian και Chen [35].

4.6.4 Διαχείριση επικίνδυνων υλικών

Κατά τη σχεδίαση ενός υπο-δικτύου που προορίζεται για μεταφορείς επικίνδυνων υλικών, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η συμπεριφορά των μεταφορέων, οι οποίοι είναι πιθανό να προτιμούν τις πιο σύντομες διαδρομές έναντι των πιο ασφαλών δρομολογίων. Μία διεπίπεδη διατύπωση που ανταποκρίνεται σε αυτή την κατάσταση αναλύεται από τους Kara και Verter [36].

4.6.5 Προβλήματα σχεδίασης δικτύων

Τα προβλήματα σχεδίασης, στα οποία εμπλέκονται αυτόνομοι πράκτορες, αποτελούν πλούσια πηγή διεπίπεδων μοντέλων. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η βελτίωση της χωρητικότητας ενός οδικού δικτύου, όπου απαιτείται εξισορρόπηση μεταξύ του κόστους επένδυσης και της μείωσης της συμφόρησης, σε ένα δίκτυο όπου οι ροές κυκλοφορίας και οι σχεδιαστικές παράμετροι βρίσκονται σε ισορροπία. Το μοντέλο αυτό εισήχθη αρχικά από τον LeBlanc [37] και αναλύθηκε περισσότερο από τον Marcotte [38], ο οποίος πρότεινε κάποια όρια υπό χείριστες συνθήκες (worst-case bounds) στην απόδοση εύκολα εφαρμόσιμων ευρετικών διαδικασιών. Τέλος, οι Constantin και Florian [39] πρότειναν ένα άλλο παράδειγμα, αυτό της βελτίωσης των συχνοτήτων σε ένα δίκτυο μεταφορών όπου οι χρήστες ελαχιστοποιούν τον ατομικό χρόνο ταξιδίου τους.

4.6.6 Ενεργειακός τομέας

Ο ενεργειακός τομέας, και πιο συγκεκριμένα ο τομέας ισχύος, έχει υπάρξει στο παρελθόν αντικείμενο έρευνας διεπίπεδου προγραμματισμού. Οι Hobbs και Nelson

[40] μελέτησαν την ηλεκτρική χρησιμότητα, η οποία επιχειρεί να ελαχιστοποιήσει τα κόστη ή να μεγιστοποιήσει τα οφέλη, ελέγχοντας την αξία και επιχορηγώντας προγράμματα διατήρησης ενέργειας. Στο μοντέλο των Haurie et al. [41], η αλληλεπίδραση μεταξύ της χρησιμότητας ενέργειας και των γεννητριών ηλεκτρικής παραγωγής τίθεται σε ένα πλαίσιο παιγνίου "ηγέτη – ακολούθου", όπου η πλευρά της ζήτησης μοντελοποιείται ως ένα τεχνο-οικονομικό πρόβλημα μεγάλης κλίμακας. Σε κοινό ενεργειακό - αγροτικό υπόβαθρο, οι Bard et al. [42] ανέλυσαν το πρόβλημα που αντιμετωπίζει μία κυβέρνηση (ο ηγέτης) που επιθυμεί να επηρεάσει τη μετατροπή του υλικού ανάπτυξης σε καλλιέργειες βιοκαύσιμων. Το μοντέλο αυτό, που περιλαμβάνει διγραμμικές συναρτήσεις και στα δύο επίπεδα της διαδικασίας απόφασης, θυμίζει πολύ το μοντέλο τοποθέτησης διοδίων που τέθηκε παραπάνω.

4.6.7 Προβλήματα μηχανικού

Προβλήματα βελτιστοποίησης στα οποία εμπλέκονται χημικές ή φυσικές ισορροπίες (equilibria) μπορούν να μοντελοποιηθούν ως μαθηματικά προγράμματα με περιορισμούς ισορροπίας. Τέτοιου είδους προγράμματα είναι στενά συνδεδεμένα με την διεπίπεδη βελτιστοποίηση. Πρόσφατα, διάφοροι ερευνητές ονόμασαν αυτά τα προγράμματα MPEC (Mathematical Programs with Equilibrium Constraints). Μεταξύ άλλων ξεχωρίζουν, η εργασία των Pang και Trinkle [43] στη Ρομποτική και αυτή των Outrata και Kocvara [44] σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού στήριξης με τη βοήθεια υποστηριγμάτων (truss design problem).

4.6.8 Πρόβλημα αρχής πρακτόρων

Το παράδειγμα της αρχής των πρακτόρων εντάσσεται στην ευρύτερη θεωρία του διεπίπεδου προγραμματισμού. Πρόκειται για ένα κλασικό οικονομικό πρόβλημα στο οποίο ο ηγέτης (αρχή) αναθέτει μια εργασία σε έναν ακόλουθο (πράκτορας). Ο πράκτορας ανταμείβεται από την αρχή σύμφωνα με την ποιότητα ορισμένων τυχαίων οικονομικών αποτελεσμάτων που καθορίζουν το εισόδημα του ηγέτη. Στο κατώτερο επίπεδο, ο πράκτορας μεγιστοποιεί μια αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή μια συνάρτηση της ανταμοιβής και του επιπέδου της προσπάθειάς του. Όπως γίνεται αντιληπτό, όσο μεγαλύτερο είναι το επίπεδο της προσπάθειας, τόσο μεγαλύτερο είναι και το προσδοκώμενο εισόδημα που σχετίζεται με τα οικονομικά αποτελέσματα. Όταν το σύνολο των οικονομικών αποτελεσμάτων είναι συνεχές, το πρόβλημα κατώτερου επιπέδου που προκύπτει, είναι απειροδιάστατο. Το πρόβλημα αυτό αναλύεται εκτενώς στην εργασία του Van Ackere [45].

4.6.9 Παίγνιο Stackelberg – Nash

Σε ένα ολιγοπώλιο όπου μια εταιρία δρα ως ηγέτης, οι υπόλοιπες επιτυγχάνουν μια ισορροπία Cournot – Nash παραμετροποιημένης από τα επίπεδα παραγωγής του ηγέτη (Sherali et al. [46]). Η ανάλυση αυτή μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε να συμπεριλάβει περισσότερους ηγέτες, ή ακόμη και περισσότερα επίπεδα ιεραρχίας, ωστόσο κάτι τέτοιο ξεφεύγει από το αντικείμενο της διεπίπεδης βελτιστοποίησης.

4.7 Έρευνα υπαρχόντων μεθόδων επίλυσης προβλημάτων διεπίπεδης βελτιστοποίησης

Οι πρώτες μελέτες πάνω στον διεπίπεδο προγραμματισμό χρονολογούνται λίγο μετά το 1970. Εντούτοις, έπρεπε να περάσουν αρκετά χρόνια, ώστε, λίγο μετά το 1980, η χρησιμότητα αυτών των μαθηματικών προγραμμάτων στην μοντελοποίηση ιεραρχικών διαδικασιών λήψης αποφάσεων και προβλημάτων μηχανολογικού σχεδιασμού να ωθήσει ερευνητές σε περισσότερο ενδελεχή εξέταση των διεπίπεδων προγραμμάτων. Η πρώτη βιβλιογραφική έρευνα στο αντικείμενο γράφτηκε από τον Kolstad [47]. Καθώς τα προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού παρουσιάζουν εγγενείς δυσκολίες, είναι λογικό ότι το μεγαλύτερο μέρος της αλγοριθμικής έρευνας μέχρι σήμερα έχει επικεντρωθεί στις απλούστερες περιπτώσεις των διεπίπεδων προγραμμάτων, δηλαδή σε αυτά που έχουν συγκεκριμένες «καλές» ιδιότητες, όπως γραμμικές, τετραγωνικές ή κυρτές αντικειμενικές συναρτήσεις ή συναρτήσεις περιορισμών. Πολλοί ερευνητές, όπως οι Hsu και Wen [48] καθώς και ο Ben-Ayed [49], επιχείρησαν να προσεγγίσουν γραμμικά μοντέλα διεπίπεδου προγραμματισμού (BLPP ή ΠΓΔΠ) όπου όλες οι συναρτήσεις είναι γραμμικές. Αυτή η μορφή μοντέλων είναι και αυτή που έχει μελετηθεί περισσότερο. Με την πάροδο του χρόνου μελετήθηκαν πιο περίπλοκα διεπίπεδα προγράμματα, ενώ εξετάστηκαν ακόμα και προβλήματα με διακριτές μεταβλητές. Ο Colson [50] ασχολήθηκε τόσο με μη γραμμικά προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού όσο και με μαθηματικά προγράμματα με περιορισμούς ισορροπίας. Τέλος, οι Marcotte και Savard [51] επανεξέτασαν την συνδυαστική φύση του διεπίπεδου προγραμματισμού.

Εκτός από τις προαναφερθείσες μελέτες, αξίζει να σημειωθεί ότι τα τελευταία χρόνια έχουν εκδοθεί και ορισμένα βιβλία. Μεταξύ αυτών των συγγραμμάτων ξεχωρίζουν αυτά των Shimizu [52] και Bard [53] τα οποία έχουν γραφτεί από πρωτεργάτες στον τομέα της πολυεπίπεδης βελτιστοποίησης. Αξίζει, επίσης, να αναφερθεί και μια μονογραφία των Migdalas et al. [54] στην οποία εξετάστηκε η πιο ευρεία περίπτωση, αυτή του πολυεπίπεδου προγραμματισμού.

4.8 Ιδιότητες διεπίπεδων προγραμμάτων

Δεδομένου ότι τα διεπίπεδα προγράμματα στην πλειοψηφία τους είναι μη κυρτά και μη παραγωγίσιμα, είναι λογικό να είναι εξαιρετικά πολύπλοκα. Ακόμα και η πιο απλή περίπτωση, το γραμμικό διεπίπεδο πρόβλημα, αποδείχθηκε από τον Jeroslow [55] ότι είναι δύσκολο μη ντετερμινιστικό πρόβλημα πολυωνυμικού χρόνου (NP-hard). Πολλά συνδυαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούν να αναχθούν σε διεπίπεδα προγράμματα, όπως για παράδειγμα αυτό του δυαδικού ακεραίου μικτού προγραμματισμού.

Επίσης, έχουν μελετηθεί και άλλες αντιστοιχίες μεταξύ κλασικών συνδυαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης (π.χ. η γενικευμένη γραμμική συμπληρωματικότητα, το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή, ο μη κυρτός τετραγωνικός προγραμματισμός, η πολυκριτήρια βελτιστοποίηση) και διεπίπεδου προγραμματισμού. Το ενδιαφέρον σε αυτές τις αναγωγές δεν έγκειται μόνο σε θέματα πολυπλοκότητας, αλλά έχει παίξει καταλυτικό ρόλο στην ανάπτυξη αποτελεσματικών αλγορίθμων βασισμένων στη λογική των αλγορίθμων ενσωμάτωσης. Σε όλες αυτές τις κατηγορίες προβλημάτων η δυαδική μορφή συμπεριλαμβάνει ένα κατώτερο επίπεδο το οποίο δέχεται εξωτερικές λύσεις, μια ιδιότητα που επιτρέπει την ανάπτυξη μεθόδων που να εγγυώνται ολικό βέλτιστο. Αντίθετα, οι μη γραμμικές περιπτώσεις διεπίπεδου προγραμματισμού έχουν κυρίως ερευνηθεί ως προς τα τοπικά βέλτιστα που δίνουν. Αρκετοί συγγραφείς έχουν εξάγει τις αναγκαίες συνθήκες βελτιστότητας για τα προβλήματα του διεπίπεδου προγραμματισμού. Συγκεκριμένα, οι Savard και Gauvin [56] καθώς και οι Vicente και Calamai [57] ανέπτυξαν συνθήκες βελτιστότητας βασιζόμενοι στη γεωμετρία της επηρεαζόμενης περιοχής. Κάποιοι από τους συγγραφείς υιοθέτησαν τη θεωρία της απότομης κατάβασης (steepest descent) στην περίπτωση των διεπίπεδων προγραμμάτων, ενώ άλλοι γενίκευσαν τις συνθήκες βελτιστότητας πρώτης και δευτέρης τάξης χρησιμοποιώντας τετραγωνικά και αυστηρά κυρτά προβλήματα στο κατώτερο επίπεδο του διεπίπεδου προγράμματος. Παρόλη την προαναφερθείσα έρευνα, τα παραπάνω δεν εφαρμόστηκαν πρακτικά ποτέ σε πραγματικά προβλήματα, λόγω της εγγενούς δυσκολίας στη διαχείριση των μαθηματικών αντικειμένων που εμπλέκονται στις συνθήκες βελτιστότητας.

4.9 Αλγόριθμοι που εφαρμόστηκαν για την επίλυση προβλημάτων διεπίπεδης βελτιστοποίησης

4.9.1 Προσεγγίσεις ακραίου σημείου για την περίπτωση γραμμικού προβλήματος

Μια σημαντική ιδιότητα του γραμμικού διεπίπεδου προγραμματισμού είναι ότι στο σύνολο λύσεων, όταν φυσικά αυτό δεν είναι το κενό, υπάρχει τουλάχιστον μια λύση η οποία αντιστοιχεί σε μια από τις κορυφές του παρακάτω πολυέδρου:

$$\Omega = \left\{(x,y) : x \in X, G(x,y) \le 0 \wedge g(x,y) \le 0\right\} \tag{4.7}$$

Συνεπώς, υπάρχουν αρκετές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών προβλημάτων διεπίπεδου προγραμματισμού που βασίζονται στην απαρίθμηση κορυφών.

4.9.2 Μέθοδος διακλάδωσης και φράγματος

Όταν το πρόβλημα κατώτερου επιπέδου είναι κυρτό και ομαλό, τότε μπορεί να αντικατασταθεί από τις συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT) που προκύπτουν από αυτό. Η μετατροπή αυτή αν εφαρμοστεί στη γενική μορφή του προβλήματος (4.1) δίνει το παρακάτω πρόβλημα ενός επιπέδου:

$$\begin{aligned}
&\min_{x \in X, y, \lambda} F(x,y) \\
&\text{υ.π.:} \\
&G(x,y) \le 0 \\
&g(x,y) \le 0 \\
&\lambda_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m_2 \\
&\lambda_i g_i(x,y) = 0, \quad i = 1,\dots,m_2 \\
&\nabla_y L(x,y,\lambda) = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

όπου L είναι η Λαγκρανζιανή συνάρτηση του προβλήματος κατωτέρου επιπέδου, η οποία δίδεται ως:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{m_2} \lambda_i g_i(x,y) \tag{4.9}$$

Ακόμα και αν θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις F, G και το σύνολο X του προβλήματος (4.8) είναι κυρτά, το μαθηματικό αυτό πρόβλημα είναι αρκετά δύσκολο να επιλυθεί, κυρίως λόγω της μη κυρτότητας της Λαγκρανζιανής συνάρτησης. Για το λόγο αυτό αρκετές φορές επιβάλλεται η χρήση αλγορίθμων, όπως η μέθοδος διακλάδωσης και φράγματος, στο παραπάνω πρόβλημα. Επιπλέον, ο συνδυασμός αυτής της μεθόδου με αρχές μονοτονίας και συναρτήσεις ποινής έχει αναπτύξει έναν αλγόριθμο ικανό να επιλύσει μεσαίου μεγέθους γραμμικά προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού, δηλαδή της τάξης των διακοσίων μεταβλητών και διακοσίων περιορισμών (Hansen et al. [58]).

4.9.3 Αλγόριθμος συμπληρωματικής θέσης-κλειδί

Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε για πρώτη φορά για επίλυση γραμμικού προβλήματος διεπίπεδου προγραμματισμού το 1980 [59]. Ο αλγόριθμος στον οποίο βασίστηκε η επίλυση ονομάζεται παραμετρικός αλγόριθμος συμπληρωματικής θέσης-κλειδί και βασίζεται στην τροποποίηση του γραμμικού διεπίπεδου προγράμματος με τη χρήση των συνθηκών KKT για το πρόβλημα κατωτέρου επιπέδου. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου υπολογίζεται ένα σημείο, το οποίο αναπαριστά μια εφικτή λύση (x, y) για το αρχικό πρόβλημα, τέτοιο ώστε αφενός η συνάρτηση ανωτέρου επιπέδου $F(x, y)$ να παίρνει τιμή το πολύ ίση με α και αφετέρου να μεταβληθεί ο περιορισμός (4.8) προσθέτοντας έναν όρο εHy, όπου το H είναι ένας αρνητικά ορισμένος πίνακας ενώ το ε είναι τόσο μικρό έτσι ώστε η λύση του αρχικού προβλήματος να μην μεταβάλλεται. Η παράμετρος α ενημερώνεται σε κάθε επανάληψη και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου να μην υπάρχει εφικτό (x, y). Μετά από έρευνα των Ben-Ayed και Blair [60] αποδείχθηκε ότι αυτός ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει πάντα σε βέλτιστη λύση.

4.9.4 Μέθοδοι κατάβασης

Αν υποθέσουμε ότι για κάθε x η βέλτιστη λύση του προβλήματος κατωτέρου επιπέδου είναι μοναδική και ότι ορίζει το y ως μια πεπλεγμένη συνάρτηση του x, δηλαδή $y(x)$, τότε το πρόβλημα (4.1) είναι δυνατό να εξεταστεί λαμβάνοντας μόνο υπόψη τις μεταβλητές $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ του ανωτέρου επιπέδου. Δεδομένου ενός εφικτού σημείου x, γίνεται μια προσπάθεια να υπολογιστεί μια εφικτή διεύθυνση $d \in \mathbb{R}^{n_1}$ με παράλληλη μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης του ανωτέρου επιπέδου. Για να πετύχουμε μια ικανοποιητική μείωση στη συνάρτηση F υπολογίζεται ένα νέο σημείο

$x+ad$ $(a>0)$, ενώ το διεπίπεδο πρόβλημα παραμένει εφικτό. Ένα σημαντικό όμως θέμα παραμένει η διαθεσιμότητα της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης του ανωτέρου επιπέδου σε ένα εφικτό σημείο, για την οποία ισχύει:

$$\Delta_x F\left(x, y(x)\right) = \Delta_x F(x,y) + \Delta_y F(x,y)\Delta_x y(x) \tag{4.10}$$

όπου οι συναρτήσεις αξιολογούνται στην τρέχουσα επανάληψη. Η παραπάνω μέθοδος προτάθηκε από τους Kolstad και Lasdon [61] με σκοπό την προσέγγιση της κλίσης.

Επίσης, προτάθηκε μια μέθοδος κατάβασης για επίλυση κυρτών τετραγωνικών διεπίπεδων προβλημάτων, δηλαδή προβλημάτων στα οποία και οι δύο αντικειμενικές συναρτήσεις είναι τετραγωνικές αλλά οι περιορισμοί είναι κυρτοί [62]. Τέλος, οι Falk και Liu [63] παρουσίασαν μια μέθοδο στην οποία η μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης ανωτέρου επιπέδου προκύπτει βάσει υπο-διαφορικών πληροφοριών που αποκτώνται από το πρόβλημα του κατώτερου επιπέδου.

4.9.5 Μέθοδοι με συναρτήσεις ποινής

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν συναρτήσεις ποινής αποτελούν άλλη μια σημαντική κατηγορία αλγορίθμων για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων διεπίπεδης βελτιστοποίησης. Πρέπει ωστόσο να σημειωθεί ότι οι μέθοδοι αυτές πολλές φορές υπολογίζουν μόνο τοπικά βέλτιστα και στάσιμα σημεία.

Αρχικά οι Aiyoshi και Shimizu [29] προσέγγισαν το ζήτημα αντικαθιστώντας το πρόβλημα κατώτερου επιπέδου του γενικού προβλήματος (4.1) με το πρόβλημα ποινής:

$$\min_{y} \; p(x,y,r) = f(x,y) + r\phi(g(x,y)) \tag{4.11}$$

όπου r είναι μια θετική σταθερά και ϕ μια συνεχής συνάρτηση ποινής η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} &\phi(g(x,y)) > 0 \quad \text{εάν} \;\; y \in \operatorname{int} S(x) \\ &\phi(g(x,y)) \to +\infty \quad \text{εάν} \;\; y \to bd\, S(x) \end{aligned} \tag{4.12}$$

όπου $\operatorname{int} S(x)$ και $bd\, S(x)$ δηλώνουν αντιστοίχως το εσωτερικό τμήμα και τα όρια του συνόλου $S(x) = \left\{ y : g(x,y) \le 0 \right\}$. Έτσι το πρόβλημα (4.1) διαμορφώνεται ως:

$$\begin{aligned}
&\min_{x\in X,y} F(x, y^*(x,r)) \\
&\text{υ.π.:} \\
&G(x, y^*(x,r)) \le 0 \\
&p(x, y^*(x,r), r) = \min_{y} p(x,y,r)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Οι Aiyoshi και Shimizu [29] απέδειξαν ότι η ακολουθία των μεταβλητών $\left\{(x^k, y^*(x^k, r^k))\right\}$, οι οποίες αποτελούν βέλτιστες λύσεις του προβλήματος (4.13), συγκλίνει στη βέλτιστη λύση του προβλήματος (4.1). Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι, για να επιλυθεί το πρόβλημα (4.13) για σταθερές τιμές του r, απαιτείται η γενική λύση σε κάθε ενημέρωση των μεταβλητών του ανωτέρου επιπέδου. Κάθε υποπρόβλημα δεν είναι, ωστόσο, πολύ πιο εύκολο να επιλυθεί από ότι το αρχικό διεπίπεδο πρόβλημα.

Οι Ishizuku και Aiyoshi [64] πρότειναν μια διπλή μέθοδο ποινής στην οποία έχουν ποινή και οι δύο αντικειμενικές συναρτήσεις (4.1). Και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση του κατωτέρου επιπέδου (4.11) ενώ η συνάρτηση ποινής ϕ προσεγγίζεται από την (4.12). Το πρόβλημα κατωτέρου επιπέδου αντικαθίσταται από τη συνθήκη στασιμότητας $\Delta_y p\left(x,y,r\right) = 0$.

Συνεπώς, το διεπίπεδο πρόβλημα (4.1) μετατρέπεται στο ακόλουθο πρόβλημα ενός επιπέδου:

$$\begin{aligned}
&\min_{x\in X,y} F(x,y) \\
&\text{υ.π.:} \\
&G(x,y) \le 0 \\
&\Delta_y p\left(x,y,r\right) = 0 \\
&g(x,y) \le 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Για δεδομένο r το πρόβλημα (4.14) μπορεί να επιλυθεί με χρήση μιας δεύτερης συνάρτησης ποινής που εφαρμόζεται στους περιορισμούς.

Μεταγενέστερα, ο Case [65] ανέπτυξε μια τεχνική για γραμμικά διεπίπεδα προβλήματα βασισμένα στην (4.8), δηλαδή γραμμικά προγράμματα στα οποία το πρόβλημα κατώτερου επιπέδου έχει αντικατασταθεί από τις συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker. Η μέθοδος αυτή συμπεριλαμβάνει συνάρτηση ποινής της μορφής:

$$p(x, y, \lambda, \mu) = F(x, y) + \mu\nu(x, y, \lambda) \tag{4.15}$$

Όπου μ είναι μια θετική παράμετρος ποινής και η αντικειμενική συνάρτηση ανώτερου επιπέδου $F(x,y)$ είναι επαυξημένη με μια αρνητική σταθμισμένη συνάρτηση ποινής σχετική με την τρέχουσα επανάληψη. Ο αλγόριθμος που προέκυψε από την παραπάνω διαδικασία εμπεριέχει την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης ποινής $p(x,y,\lambda,\mu)$ για δεδομένη και σταθερή τιμή του μ. Λόγω της πολυπλοκότητας της δομής της παραπάνω συνάρτησης, οι συγγραφείς ανέπτυξαν μια μέθοδο στην οποία η μοντελοποίηση της p γίνεται αντικαθιστώντας κάθε περιεχόμενη συνάρτηση της $p(x,y,\lambda,\mu)$ με τα αναπτύγματα Taylor δεύτερης τάξης σε κάθε επανάληψη.

4.9.6 Μέθοδοι περιοχής εμπιστοσύνης

Οι αλγόριθμοι περιοχής εμπιστοσύνης είναι επαναληπτικές μέθοδοι που βασίζονται στην προσέγγιση του αρχικού προβλήματος με ένα μοντέλο γύρω από την τρέχουσα επανάληψη. Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε το παρακάτω πρόβλημα χωρίς περιορισμούς:

$$\min_x f(x) \tag{4.16}$$

Δεδομένης της μεταβλητής x_k στην επανάληψη k, κατασκευάζεται ένα μοντέλο m_k το οποίο προσεγγίζει την αντικειμενική συνάρτηση εντός μιας περιοχής εμπιστοσύνης η οποία ορίζεται συνήθως από μια σφαίρα (βάσει κάποιας νόρμας) ακτίνας Δ_k με κέντρο το x_k. Στην συνέχεια υπολογίζεται η λύση s_k στο υποπρόβλημα της περιοχής εμπιστοσύνης:

$$\begin{aligned} &\min_s \quad m_k(x_k + s) \\ &\text{υ.π.:} \\ &\|s\| \le \Delta_k \end{aligned} \tag{4.17}$$

Η παραπάνω μέθοδος μελετήθηκε από τους Conn et al [66]. Μεταγενέστερα οι Colson et al. [67] ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο περιοχής εμπιστοσύνης για επίλυση μη γραμμικών διεπίπεδων προγραμμάτων όπου η συνάρτηση G εξαρτάται μόνο από το διάνυσμα x ανώτερου επιπέδου. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι μια επαναληπτική μέθοδος η οποία, δεδομένης της τρέχουσας λύσης $(\bar{x}, \bar{y})$, βασίζεται στο εξής γραμμικό τετραγωνικό διεπίπεδο μοντέλο του προβλήματος (4.1):

$$\begin{aligned}
&\min_{x\in X,y} F_m(x,y)\\
&\text{υ.π.:}\\
&G_m(x)\le 0\\
&\min_{y} f_m(x,y)\\
&\text{υ.π.:}\\
&g_m(x,y)\le 0
\end{aligned}\tag{4.18}$$

Όπου F_m, G_m και g_m είναι γραμμικά μοντέλα των *F*, *G* και *g* στο $(\overline{x},\overline{y})$ αντίστοιχα, ενώ η f_m είναι το τετραγωνικό μοντέλο της *f* στο $(\overline{x},\overline{y})$. Συνεπώς, το παραπάνω διεπίπεδο πρόβλημα ορίζει το υποπρόβλημα της περιοχής εμπιστοσύνης. Το υποπρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί με σκοπό να βρεθεί η ολική λύση του, είτε με χρήση ενός εξειδικευμένου αλγορίθμου, είτε μορφοποιώντας το σε ένα πρόβλημα μικτού ακέραιου προγραμματισμού. Έστω (x^m, y^m) η λύση του υποπροβλήματος, η οποία, όμως, δεν φαίνεται να είναι λογική. Συνεπώς, για να υπολογιστεί η πραγματική αξία της παραπάνω λύσης, πρέπει να υπολογιστεί η αντίδραση του κατώτερου επιπέδου στο x^m, δηλαδή η βέλτιστη λύση y^* του προβλήματος:

$$\begin{aligned}
&\min_{y} f(x^m,y)\\
&\text{υ.π.:}\\
&g(x^m,y)\le 0
\end{aligned}\tag{4.19}$$

Ο αλγόριθμος αυτός έχει δοκιμαστεί σε αρκετά προβλήματα και φαίνεται ότι λόγω της ακρίβειας προσέγγισης του μοντέλου, έχει καλές επιδόσεις όσον αφορά στην ποιότητα της λύσης, δηλαδή πολύ συχνά επιτυγχάνεται ολικό βέλτιστο.

4.10 Μαθηματικά προγράμματα με περιορισμούς ισορροπίας

Τα μαθηματικά προγράμματα με περιορισμούς ισορροπίας (ΜΠΠΙ) αποτελούν μια ακόμα σημαντική κατηγορία σχετικών προβλημάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι, λόγω της πολύ στενής σχέσης μεταξύ προβλημάτων διεπίπεδου προγραμματισμού και ΜΠΠΙ, πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν κοινή ορολογία και για τις δύο κατηγορίες προβλημάτων, κάτι που συχνά οδηγεί σε σύγχυση.

Τα μαθηματικά προγράμματα με περιορισμούς ισορροπίας μπορούν να θεωρηθούν ως διεπίπεδα προγράμματα στα οποία το πρόβλημα κατώτερου επιπέδου αποτελείται από μια «παρεκκλίνουσα» ανισότητα. Για μια δεδομένη συνάρτηση $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ και ενός κυρτού συνόλου $C \subseteq \mathbb{R}^n$, το διάνυσμα $x^* \in C$ θεωρείται λύση της παρεκκλίνουσας ανισότητας *VI(ψ, C)*, όταν αυτή ικανοποιεί την σχέση:

$$(x - x^*)^T \psi(x^*) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in C \tag{4.20}$$

Οι παρεκκλίνουσες ανισότητες είναι μαθηματικά προγράμματα τα οποία επιτρέπουν την μοντελοποίηση πολλών φαινομένων ισορροπίας που απαντώνται σε τομείς όπως η φυσική, η χημεία, τα οικονομικά και η επιστήμη των μηχανικών.

Η γενική μορφή ενός μαθηματικού προγράμματος με περιορισμούς ισορροπίας είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} \; F(x, y) \\ &\text{υ.π.:} \\ &(x, y) \in Z \\ &y \in S(x) \end{aligned} \tag{4.21}$$

όπου $Z \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ είναι ένα μη κενό κλειστό σύνολο και *S(x)* το σύνολο λύσεων της ακόλουθης παραμετροποιημένης παρεκκλίνουσας ανισότητας

$$y \in S(x) \;\Leftrightarrow\; y \in C(x) \text{ και } (\upsilon - y)^T \psi(x, y) \geq 0 \text{ για κάθε } \upsilon \in C(x) \tag{4.22}$$

που ορίζεται βάσει του κλειστού κυρτού συνόλου $C(x) \subset \mathbb{R}^{n_2}$. Η μορφοποίηση αυτή διαφοροποιείται από εκείνη των διεπίπεδων προγραμμάτων καθώς οι μεταβλητές ανώτερης και κατώτερης τάξης χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των *x* και *y*.

Η σχέση μεταξύ προβλημάτων διεπίπεδου προγραμματισμού και μαθηματικών προγραμμάτων με περιορισμούς ισορροπίας μπορεί να απεικονιστεί θεωρώντας δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις. Έστω ότι η αναπαράσταση $\psi(x, \cdot)$ είναι η μερική κλίση μιας συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}$ με πραγματικές τιμές:

$$\psi(x, y) = \Delta_y f(x, y) \tag{4.23}$$

Στη συνέχεια, για κάθε σταθερό *x*, η παρεκκλίνουσα ανισότητα (4.22) χαρακτηρίζει το σύνολο των περιορισμών στασιμότητας του προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
&\min_{y} \; f(x,y) \\
&\text{υ.π.:} \\
&y \in C(x)
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Επιπλέον, αν το παραμετροποιημένο *C(x)* λάβει τη μορφή $C(x) = \{ y : g(x,y) \leq 0 \}$, τότε το πρόβλημα (4.24) δεν είναι άλλο από το πρόβλημα κατώτερου επιπέδου του διεπίπεδου προγράμματος (4.1). Η παραπάνω διαπίστωση δείχνει ότι τα διεπίπεδα προγράμματα εντάσσονται στα ΜΠΠΙ, με την προϋπόθεση ότι τα πρώτα εμπεριέχουν ένα κυρτό και διαφορίσιμο πρόβλημα κατώτερου επιπέδου. Αντίστοιχα, ένα ΜΠΠΙ μπορεί να μορφοποιηθεί ως ένα διεπίπεδο πρόγραμμα αντικαθιστώντας την παρεκκλίνουσα ανισότητα κατώτερου επιπέδου με ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης.

4.11 Βιβλιογραφική ανασκόπηση προβλημάτων εφοδιαστικής αλυσίδας

Οι Y. Marinakis και M. Marinaki [68] ανέπτυξαν έναν γρήγορο, εύρωστο και αποτελεσματικό αλγόριθμο για την επίλυση ενός προβλήματος χωροθέτησης διαδρομών (LRP). Ο αλγόριθμος αυτός αναπτύχθηκε για λογαριασμό μίας από τις μεγαλύτερες εταιρείες διανομής ξυλείας στην Ελλάδα. Για την επίλυση προτάθηκε μια μόρφωση του προβλήματος με χρήση διεπίπεδου προγραμματισμού. Δεδομένου ότι στα προβλήματα LRP οι αποφάσεις λαμβάνονται τόσο σε στρατηγικό όσο και σε λειτουργικό επίπεδο, το πρόβλημα διατυπώθηκε με τρόπο ώστε στο πρώτο επίπεδο να λαμβάνονται οι στρατηγικές αποφάσεις (βέλτιστη χωροθέτηση) ενώ στο δεύτερο επίπεδο οι λειτουργικές αποφάσεις (βέλτιστη διαδρομή). Για το πρόβλημα αυτό εισήχθη ένας γενετικός αλγόριθμος διεπίπεδης βελτιστοποίησης, ο οποίος παρείχε πρακτικές λύσεις και σημαντικά οικονομικά οφέλη για την εταιρεία.

Οι H. Sun et al. [69] πρότειναν ένα μοντέλο διεπίπεδου προγραμματισμού για την εύρεση των βέλτιστων θέσεων των κέντρων διανομής των logistics λαμβάνοντας υπόψη τα οφέλη τόσο των πελατών όσο και των τμημάτων σχεδιασμού των logistics. Το μοντέλο του πρώτου επιπέδου αφορά στον καθορισμό της βέλτιστης τοποθεσίας ελαχιστοποιώντας το κόστος σχεδιασμού, ενώ στο δεύτερο επίπεδο δίδεται η κατανομή ζήτησης ελαχιστοποιώντας το κόστος των πελατών. Για τον σκοπό αυτό εισήχθη ένας απλός ευρετικός αλγόριθμος, βάσει της ειδικής μορφής των περιορισμών.

Ο διεπίπεδος προγραμματισμός περιλαμβάνει δύο προβλήματα βελτιστοποίησης όπου η περιοχή των περιορισμών του πρώτου επιπέδου μπορεί να καθοριστεί από ένα άλλο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Οι Calvete et al. [70] ανέπτυξαν ένα γενετικό αλγόριθμο για το γραμμικό διεπίπεδο πρόβλημα στο οποίο και οι δύο αντικειμενικές συναρτήσεις είναι γραμμικές και η κοινή περιοχή περιορισμών είναι ένα πολύεδρο. Λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη ενός ακραίου σημείου του πολυέδρου, το οποίο αποτελεί λύση στο πρόβλημα, ο αλγόριθμος αποσκοπεί στον συνδυασμό κλασικών τεχνικών απαρίθμησης ακραίου σημείου με γενετικές μεθόδους αναζήτησης, συσχετίζοντας χρωμοσώματα με ακραία σημεία του πολυέδρου. Επιπρόσθετα, αυτός ο γενετικός αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση ημι-κοίλων διεπίπεδων προβλημάτων, των οποίων η αντικειμενική συνάρτηση του δευτέρου επιπέδου είναι γραμμική.

Τα τελευταία πενήντα χρόνια έχουν προταθεί πολλοί διαφορετικοί αλγόριθμοι για την επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων (VRP). Οι Marinakis et al. [71] εισήγαγαν ένα πρόβλημα δύο επιπέδων απόφασης. Στο πρώτο επίπεδο ο αποφασίζων εκχωρεί πελάτες στα οχήματα ελέγχοντας παράλληλα την εφικτότητα των διαδρομών (περιορισμοί χωρητικότητας οχημάτων) χωρίς να λαμβάνει υπόψη του τη σειρά με τη οποία τα οχήματα επισκέπτονται τους πελάτες. Στο δεύτερο επίπεδο βρίσκει τη βέλτιστη διαδρομή των εκχωρήσεων αυτών. Ο αποφασίζων του πρώτου επιπέδου επιλέγει την καλύτερη εκχώρηση αφού υπολογιστεί το κόστος κάθε διαδρομής στο δεύτερο επίπεδο. Βάσει αυτής της διατύπωσης οι Marinakis et al. πρότειναν έναν γενετικό αλγόριθμο διεπίπεδης βελτιστοποίησης. Στο πρώτο επίπεδο υπολογίζεται ο πληθυσμός των καλύτερων λύσεων με χρήση ενός γενετικού αλγορίθμου. Στο δεύτερο επίπεδο επιλύεται ένα πρόβλημα περιπλανώμενου πωλητή (TSP) για κάθε μέλος του πληθυσμού χωριστά. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο υπολογιστικός χρόνος του αλγορίθμου είναι εξαιρετικά μειωμένος σε σχέση με άλλους ευρετικούς και μετα-ευρετικούς αλγορίθμους εξαιτίας της χρήσης της στρατηγικής της εκτεταμένης γειτονικής αναζήτησης.

Οι Osman et al. [72] μελέτησαν ένα πρόβλημα στο οποίο δύο αποφασίζοντες λαμβάνουν αποφάσεις διαδοχικά. Για τον σκοπό αυτό σχεδίασαν και μελέτησαν ένα γενετικό αλγόριθμο διεπίπεδου προγραμματισμού, με την κατασκευή της συνάρτησης προσαρμογής του ανώτερου επιπέδου, με βάση τον ορισμό του βαθμού εφικτότητας.

Ο αλγόριθμος αυτός αποφεύγει τη χρήση συναρτήσεων ποινής για να ενσωματώσει τους περιορισμούς. Αντίθετα, η ικανότητα διαχείρισης των περιορισμών από τον αλγόριθμο επιτυγχάνεται αλλάζοντας τον τυχαίο αρχικό πληθυσμό σε έναν νέο ο οποίος θα ικανοποιεί τους περιορισμούς. Οι Osman et al. εκτός από τον αλγόριθμο ανέπτυξαν παράλληλα και λογισμικό για την επίλυση του προβλήματος αυτού.

Στα ανταγωνιστικά προβλήματα *p*-μέσων δύο αποφασίζοντες, ο ηγέτης και ο ακόλουθος, συναγωνίζονται στο να προσελκύσουν πελάτες από μία δοσμένη αγορά. Ο ηγέτης ανοίγει τις εγκαταστάσεις του προσμένοντας ότι ο ακόλουθος θα αντιδράσει σε αυτή του την απόφαση ανοίγοντας τις δικές του εγκαταστάσεις. Τόσο ο ηγέτης όσο και ο ακόλουθος προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους. Αυτό αποτελεί ένα παίγνιο Stackelberg. Οι Alekseeva et al. [73] το παρουσιάζουν ως ένα γραμμικό διεπίπεδο 0-1 πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, ανέπτυξαν έναν υβριδικό μιμητικό αλγόριθμο όπου το πρόβλημα του ακολούθου επιλύεται από κάποιο εμπορικό λογισμικό. Προκειμένου να επιτευχθεί ένα άνω όριο για αυτό το πρόβλημα μεγιστοποίησης οι Alekseeva et al. αναδιατύπωσαν το διεπίπεδο πρόβλημα ως πρόβλημα μικτού ακέραιου προγραμματισμού μονού επιπέδου με εκθετικό αριθμό περιορισμών και μεταβλητών. Το επιθυμητό άνω όριο λαμβάνεται με την απομάκρυνση μερικών από αυτών. Για την εύρεση κατάλληλου συνόλου περιορισμών και μεταβλητών γίνεται χρήση μεθευρετικών αλγορίθμων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εύρεση σχεδόν βέλτιστων λύσεων για το διεπίπεδο πρόβλημα με ένα εκ των υστέρων όριο απόκλισης από το ολικό βέλτιστο.

Ο διεπίπεδος γραμμικός προγραμματισμός, ο οποίος αποτελείται από τις αντικειμενικές συναρτήσεις του ανώτερου και κατώτερου επιπέδου, είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την μοντελοποίηση αποκεντρωμένων προβλημάτων αποφάσεων. Έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι για την επίλυση αυτών των προβλημάτων, ωστόσο, μόνο οι γενετικοί αλγόριθμοι αποτελούν εναλλακτική λύση στις συμβατικές προσεγγίσεις. Οι Wang et al. [74] περιέγραψαν έναν προσαρμοστικό γενετικό αλγόριθμο για την επίλυση προβλημάτων διεπίπεδου προγραμματισμού για να ξεπεράσουν τις δυσκολίες του καθορισμού των πιθανοτήτων του επιχιασμού και της μετάλλαξης. Επιπρόσθετα, χρησιμοποίησαν κάποιες τεχνικές, τόσο για να αντιμετωπίσουν τη δυσκολία του γεγονότος ότι τα χρωμοσώματα μπορεί να βρίσκονται εκτός του χώρου των εφικτών λύσεων λόγω περιορισμών, όσο και για να βελτιώσουν την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου.

Οι Yanh et al. [75] κατασκεύασαν ένα στατικό μοντέλο διεπίπεδου προγραμματισμού για τη διερεύνηση του τρόπου βελτιστοποίησης της στρατηγικής χωροθέτησης εγκαταστάσεων. Για την επίλυση του προβλήματος σχεδιάστηκε ένας ευρετικός αλγόριθμος πλεονάζουσας αναζήτησης (greedy search). Επιπρόσθετα, προτάθηκε ένα διεπίπεδο μοντέλο με περιορισμούς τυχαιότητας στοχαστικής ροής και ασαφούς οριακού κόστους διαδρομής. Για την αποτελεσματική επίλυση αυτού του αβέβαιου μοντέλου οι Yanh et al. σχεδίασαν έναν ευφυή υβριδικό αλγόριθμο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο simplex σε συνδυασμό με γενετικούς αλγορίθμους, στοχαστική και ασαφή προσομοίωση.

Οι Mathieu et al. [76] χρησιμοποίησαν μία τεχνική (GABBA) βασισμένη στους γενετικούς αλγόριθμους για την επίλυση προβλημάτων διεπίπεδου γραμμικού προγραμματισμού. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται για την παραγωγή του διανύσματος απόφασης του ηγέτη, ενώ η αντίδραση του ακολούθου λαμβάνεται από την επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος. Η τεχνική GABBA διαφέρει από τους συνηθισμένους γενετικούς αλγόριθμους διότι χρησιμοποιεί μόνο τον τελεστή της μετάλλαξης, αλληλόμορφα βάσης - 10 και μία στρατηγική επιβίωσης που ταιριάζει στα προβλήματα διεπίπεδης χωροθέτησης. Μάλιστα, η τεχνική αυτή πλησιάζει περισσότερο το ολικό βέλτιστο, σε σχέση με άλλες τεχνικές, για τα περισσότερα είδη προβλημάτων.

Οι Wang et al. [77] πρότειναν μία μέθοδο επίλυσης κυρτών τετραγωνικών διεπίπεδων προβλημάτων με χρήση γενετικών αλγορίθμων. Προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού εμφανίζονται όταν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, το ανώτερο, βρίσκεται υπό τον περιορισμό ενός άλλου προβλήματος βελτιστοποίησης, του κατώτερου. Πιο συγκεκριμένα, το κυρτό τετραγωνικό διεπίπεδο πρόβλημα μετασχηματίζεται σε πρόβλημα μονού επιπέδου με εφαρμογή των συνθηκών Kuhn-Tucker και στη συνέχεια προτείνεται μία αποτελεσματική μέθοδος, βασισμένη στους γενετικούς αλγορίθμους, για την επίλυση του μετασχηματισμένου προβλήματος. Με χρήση κάποιου κανόνα το μετασχηματιζόμενο πρόβλημα απλοποιείται ώστε να είναι δυνατή η αναζήτηση βέλτιστης λύσης στην περιοχή των εφικτών λύσεων, μειώνοντας έτσι σημαντικά τον χώρο αναζήτησης.

Οι Jaramillo et al. [78] προσπάθησαν να αξιολογήσουν την απόδοση των γενετικών αλγορίθμων ως μία εναλλακτική μέθοδο εύρεσης βέλτιστων ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων για προβλήματα χωροθέτησης. Συγκεκριμένα, μελέτησαν προβλήματα σταθερού κόστους με και χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας, το πρόβλημα μέγιστης κάλυψης, καθώς και ανταγωνιστικά μοντέλα χωροθέτησης. Τέλος, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από αυτόν τον ευρετικό αλγόριθμο (βασισμένο στους γενετικούς) με γνωστές ευρετικές μεθόδους της βιβλιογραφίας. Οι γενετικοί αλγόριθμοι αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης μεγάλης κλίμακας.

Ένα ανταγωνιστικό διεπίπεδο πρόβλημα χωροθέτησης εγκαταστάσεων (BFLP) στο επίπεδο με δύο τύπους αποφασιζόντων, ανώτερου και κατώτερου επιπέδου, έχει συνήθως ως λύση μια βέλτιστη τοποθεσία, η οποία αναπαρίσταται ως λύση Stacklberg. Στο πρόβλημα αυτό οι πελάτες επιλέγουν την εγκατάσταση που θα χρησιμοποιήσουν λαμβάνοντας υπόψη μόνο την μεταξύ τους απόσταση. Οι Uno et al. [79] θεώρησαν ένα πρόβλημα BFL με ποιότητα εγκαταστάσεων. Προκειμένου να επιλύσουν αποτελεσματικά το BFLP πρότειναν μία μέθοδο σμήνους σωματιδίων.

5 Εξελικτικοί αλγόριθμοι

5.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι εμφανίζονται σε τρεις διαφορετικές μορφές, οι οποίες ακολουθούν διακριτή πορεία, αλλά με ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους. Οι μορφές αυτές είναι οι γενετικοί αλγόριθμοι (Genetic Algorithms ή GA), ο εξελικτικός προγραμματισμός (Evolutionary Programming ή EP) και οι εξελικτικές στρατηγικές (Evolutionary Strategies ή ES). Ως παρακλάδι των γενετικών αλγορίθμων εξελίχθηκε πρόσφατα ο γενετικός προγραμματισμός (Genetic Programming ή GP).

Τα εξελικτικά συστήματα μελετήθηκαν στη δεκαετία του '50 και τη δεκαετία του '60 από διάφορους επιστήμονες υπολογιστών με την ιδέα ότι η «εξέλιξη» θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο βελτιστοποίησης στα προβλήματα εφαρμοσμένης μηχανικής. Η ιδέα σε όλα αυτά τα συστήματα ήταν να εξελιχθεί ένας πληθυσμός από υποψήφιες λύσεις σε ένα δεδομένο πρόβλημα, που θα χρησιμοποιεί τελεστές εμπνευσμένους από τη φυσική γενετική μεταβλητότητα (natural genetic variation) και τη φυσική επιλογή (natural selection).

Οι γενετικοί αλγόριθμοι [80], [81], με τους οποίους θα ασχοληθούμε στην παρούσα διατριβή, αποτελούν μια από τις πιο πολλά υποσχόμενες εφαρμογές των εξελικτικών αλγορίθμων.

Οι γενετικοί αλγόριθμοι εφευρέθηκαν από τον John Holland [82] κατά τη δεκαετία του ’60 και αναπτύχθηκαν στην αρχή από τον ίδιο και τους φοιτητές του στο πανεπιστήμιο του Michigan ανάμεσα στο 1960 και το 1970. Οι περισσότερες εργασίες σε θεωρητικό επίπεδο για τους γενετικούς αλγορίθμους αναφέρονται σε αυτόν τον αρχικό γενετικό αλγόριθμο που εισήγαγε ο Holland. Ωστόσο υπήρξε μια αφθονία παραλλαγών του αλγορίθμου από άλλους ερευνητές που προσάρμοσαν τον αρχικό γενετικό αλγόριθμο στα προβλήματά τους. Σε αντίθεση με τις υπόλοιπες τεχνικές, ο Holland είχε ως στόχο όχι το σχεδιασμό αλγορίθμων που να επιλύουν συγκεκριμένα προβλήματα, αλλά περισσότερο να εξετάσει κατά τρόπο γενικό το φαινόμενο της προσαρμογής, όπως αυτό παρατηρείται στη φύση και να αναπτύξει τρόπους, έτσι ώστε οι μηχανισμοί της φυσικής προσαρμογής να προσαρμοσθούν σε υπολογιστικά συστήματα. Ο Holland [83], [84] παρουσιάζει τους γενετικούς αλγορίθμους ως μια αφηρημένη έννοια, που πηγάζει από τη βιολογική εξέλιξη και εκθέτει το θεωρητικό περίγραμμα της προσαρμογής κάτω από τους γενετικούς αλγορίθμους. Τελικά όμως η κύρια εφαρμογή τους αποδείχθηκε η βελτιστοποίηση προβλημάτων και με αυτή τους την εφαρμογή θα ασχοληθούμε στη συνέχεια. Λόγω του αρχικού σκοπού για τον οποίο αναπτύχθηκαν, προσομοιάζουν περισσότερο από τις υπόλοιπες τεχνικές στη φυσική γενετική διαδικασία.

Ο Holland με την εργασία του πρώτος εισήγαγε έναν αλγόριθμο, ο οποίος βασίζεται σε πληθυσμό πιθανών λύσεων, οι οποίες υπόκεινται σε τελεστές που αντιστοιχούν σε φυσικές διεργασίες όπως η μετάλλαξη και η διασταύρωση ή επιχιασμός.

Οι γενετικοί αλγόριθμοι κωδικοποιούν μια πιθανή λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος σε μια δομή χρωμοσώματος και εφαρμόζουν τους τελεστές γενετικής διασταύρωσης (crossover) και μετάλλαξης (mutation) σε αυτή την δομή. Η βασική ιδέα είναι η αρχή της επιβίωσης του καταλληλότερου, που σημαίνει ότι οι πιθανές λύσεις ανταγωνίζονται η μια την άλλη με τέτοιο τρόπο ώστε τα χρωμοσώματα που αντιπροσωπεύουν τις καλύτερες λύσεις στο δεδομένο πρόβλημα να έχουν περισσότερες πιθανότητες για αναπαραγωγή.

5.2 Εξελικτικοί αλγόριθμοι και βιολογία

Για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εξελικτικοί αλγόριθμοι για την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης θα πρέπει αρχικά οι λύσεις του προβλήματος να περιγραφούν σε παραμετρική μορφή. Για αυτό το λόγο έχουν εφαρμοστεί αρχές και ορολογία από τη βιολογία. Οι παράμετροι του προβλήματος μπορεί να βρίσκονται σε δυαδική μορφή (κλασικοί γενετικοί αλγόριθμοι), σε συμβολική μορφή, σε μορφή ακεραίου ή πραγματικού αριθμού (υβριδικοί εξελικτικοί αλγόριθμοι και εξελικτικά προγράμματα).

Μία υποψήφια λύση περιγράφεται από ένα χρωμόσωμα, το οποίο είναι ουσιαστικά η ακολουθία των παραμέτρων του προβλήματος. Στους εξελικτικούς αλγορίθμους χρησιμοποιούνται «οργανισμοί» ενός χρωμοσώματος (απλοειδή άτομα), σε αντίθεση με τη φύση.

Η διασταύρωση συμβαίνει όταν ανταλλάσσεται γενετικό υλικό ανάμεσα σε δύο απλοειδείς γονείς. Η μετάλλαξη λαμβάνει χώρα με αντικατάσταση ενός τυχαία επιλεγμένου ψηφίου σε μια τυχαία επιλεγμένη θέση, με ένα επίσης τυχαία επιλεγμένο ψηφίο.

Γονότυπος ενός ατόμου είναι η αλληλουχία των ψηφίων στο χρωμόσωμα του ατόμου αυτού (π.χ. 0110-0101-0010-1000-1010-1000-0110-1111, όπου με – χωρίζονται τα γονίδια μεταξύ τους). Φαινότυπος είναι η υλοποίηση της λύσης στο συγκεκριμένο πρόβλημα με βάση τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του γονότυπου. Ο φαινότυπος είναι που αξιολογείται (με κάποια κριτήρια ανάλογα με το πρόβλημα) και σε αυτόν δίδεται η τιμή της συνάρτησης προσαρμογής (fitness function) η οποία πρέπει να βελτιστοποιηθεί. [85]

5.3 Γιατί εξελικτικοί αλγόριθμοι

Κατά τη βελτιστοποίηση αναζητείται να κατευθυνθεί μια προσπάθεια προς κάποιο βέλτιστο σημείο ή σημεία. Τίθενται έτσι δύο όροι κατά τη βελτιστοποίηση: η διαδικασία βελτίωσης και η κατεύθυνση στην οποία πρέπει να αναζητηθεί το βέλτιστο.

Στη βιβλιογραφία αναφέρονται κατά κύριο λόγο τρεις κύριοι τύποι μεθόδων αναζήτησης: οι συμβατικές παραδοσιακές τεχνικές, δηλαδή αυτές που βασίζονται στην μαθηματική ανάλυση (calculus-based), οι απαριθμητικές (enumerative) και οι βασισμένες σε τυχαία αναζήτηση (random search).

Οι παραδοσιακές τεχνικές βελτιστοποίησης όπως η κάθοδος κλίσης (gradient descent) έχουν τοπικό πεδίο. Τα βέλτιστα που επιδιώκουν αυτές οι τεχνικές είναι εκείνα τα σημεία που είναι τα καλύτερα σε μια τοπική μόνο περιοχή γύρω από το τρέχον σημείο. Αυτό δημιουργεί προβλήματα, εάν η συνάρτηση έχει πολλά τοπικά βέλτιστα ή, ακόμα χειρότερα, εάν η κλίση δεν είναι υπολογίσιμη. Οι απαριθμητικές μέθοδοι αναζήτησης από την άλλη, είναι εφαρμόσιμες μόνο εάν το διάστημα αναζήτησης είναι διακριτό και όχι πάρα πολύ μεγάλο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι δύο πρώτες κατηγορίες μεθόδων δεν είναι ιδιαίτερα δυνατές, χωρίς βέβαια αυτό να σημαίνει ότι δεν είναι χρήσιμες. Πολλές από τις υπάρχουσες μεθόδους, αλλά και ακόμα περισσότεροι υβριδικοί συνδυασμοί αυτών, φαίνονται να ανταποκρίνονται εκπληκτικά καλά σε πολλές εφαρμογές. Παρόλα αυτά οι μέθοδοι αποδεικνύονται κατώτερες των περιστάσεων σε προβλήματα περισσότερο πολύπλοκα, αποδεικνύοντας ότι λειτουργούν πολύ καλά μόνο σε ένα στενό σχετικά φάσμα προβλημάτων.

Οι αλγόριθμοι που περιλαμβάνουν τυχαία αναζήτηση (random search) έχουν αρχίσει να γίνονται ιδιαίτερα δημοφιλείς σε προβλήματα όπου ο χρόνος λύσης δεν είναι πολυωνυμικός (NP-hard problems). Έχει αρχίσει λοιπόν να στρέφεται το ενδιαφέρον προς τυχαίους περιπάτους, κατά τους οποίους αναζητείται και αποθηκεύεται η καλύτερη λύση, η οποία συναντάται κατά τον περίπατο αυτό. Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι είναι ένα λαμπρό παράδειγμα μιας διαδικασίας αναζήτησης, κατά την οποία χρησιμοποιείται η τυχαία επιλογή σαν εργαλείο, προκειμένου να καθοδηγήσει την έρευνα μέσα σε ένα χώρο λύσεων. Ίσως να φαίνεται περίεργο να χρησιμοποιείται η τυχαία επιλογή σαν εργαλείο σε μια κατευθυνόμενη αναζήτηση, αλλά δεν πρέπει να λησμονείται ότι η φύση περιέχει πολλά τέτοια παραδείγματα. Άλλη δημοφιλής τεχνική αναζήτησης, εκτός των εξελικτικών αλγορίθμων, είναι και η προσομοιωμένη ανόπτηση (simulated annealing), η οποία επίσης χρησιμοποιεί μια τυχαία διαδικασία για να οδηγήσει την αναζήτησή της σε περιοχές ελάχιστης ενέργειας.

Το πλεονέκτημα των εξελικτικών αλγορίθμων έναντι των συμβατικών μεθόδων είναι ότι δεν χρειάζονται πολλές πληροφορίες για τη συνάρτηση που βελτιστοποιούν και επιπλέον αποδίδουν ακόμα κι αν το διάστημα αναζήτησης είναι πολύ μεγάλο. Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούν την τυχαία επιλογή ως εργαλείο για να οδηγήσουν μια ιδιαίτερα εξονυχιστική αναζήτηση μέσα από μια διακριτή κωδικοποίηση του διαστήματος αναζήτησης. Επομένως, η μετάβαση από μια κατάσταση στο διάστημα αναζήτησης σε μια άλλη είναι πιθανοκρατική και όχι αιτιοκρατική. Ένα άλλο χαρακτηριστικό των εξελικτικών αλγορίθμων είναι, ότι δεν ψάχνουν από ένα μόνο σημείο, αλλά από έναν πληθυσμό σημείων ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι εκτελούν μια σφαιρική διαδικασία αναζήτησης, εφόσον ερευνούν το διάστημα αναζήτησης από πολλά σημεία παράλληλα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να αποφύγουν πιθανό εγκλωβισμό σε τοπικά βέλτιστα.

Συγκεκριμένα, μπορούμε να πούμε ότι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι διαφέρουν από τις συμβατικές διαδικασίες αναζήτησης σε τέσσερα βασικά σημεία σύμφωνα με τον Goldberg [81]:

- Δουλεύουν με κωδικοποίηση κάποιων παραμέτρων και όχι με αυτές καθαυτές τις παραμέτρους (στους γενετικούς αλγορίθμους).
- Αναζητούν λύση μέσα από ένα πληθυσμό σημείων και όχι από ένα μοναδικό σημείο.
- Χρησιμοποιούν πληροφορίες που προέρχονται από την αντικειμενική συνάρτηση (την οποία και προσπαθούν να βελτιστοποιήσουν) και όχι από παραγώγους και άλλα βοηθήματα.
- Χρησιμοποιούν κανόνες μετάβασης μη αιτιοκρατικούς, βασισμένους σε πιθανότητες.

Οι κύριοι λόγοι της μεγάλης επιτυχίας των εξελικτικών αλγορίθμων συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- Παρουσιάζουν μία πρωτοφανή ισορροπία (σε σχέση με του υπόλοιπους τυχαίους αλγορίθμους) μεταξύ της ικανότητας εξερεύνησης του πεδίου λύσεων (exploration) και της πίεσης για εύρεση της βέλτιστης λύσης (exploitation). Το χαρακτηριστικό αυτό τους δίνει μεγάλη ευστάθεια.
- Είναι από τη φύση τους παράλληλοι αλγόριθμοι, κάτι που τους δίνει τη δυνατότητα μεγάλης επιτάχυνσης με χρήση τεχνικών παράλληλης επεξεργασίας.
- Έχουν μεγάλη προσαρμοστικότητα στα διαφορετικά προβλήματα που καλούνται να λύσουν. Αυτό σημαίνει πως με ελάχιστες αλλαγές μπορούν να αντιμετωπίσουν πολύ διαφορετικά προβλήματα.
- Είναι πολύ εύκολο να τροποποιηθούν οι τελεστές διαφοροποίησης των χρωμοσωμάτων, και να προσαρμοσθούν στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του εκάστοτε προβλήματος.

5.4 Περιγραφή ενός απλού γενετικού αλγορίθμου

Τα βήματα του απλού γενετικού αλγόριθμου σύμφωνα με τον Goldberg [81] είναι:

(α) Αρχικά, παράγουμε τυχαία έναν αριθμό χρωμοσωμάτων N από το χώρο λύσεων προκειμένου να αρχικοποιήσουμε έναν πληθυσμό λύσεων. Η διαδικασία αυτή γίνεται με γεννήτριες τυχαίων αριθμών και ονομάζεται αρχικοποίηση (initialization). Όσο μεγαλύτερη είναι η ποικιλομορφία των πιθανών λύσεων τόσο πιο αποδοτική θα είναι και η λειτουργία του αλγορίθμου.

(β) Υπολογίζουμε την συνάρτηση προσαρμογής (fitness function) F_i κάθε χρωμοσώματος i στον πληθυσμό, κάτι που είναι γνωστό ως αξιολόγηση (evaluation).

(γ) Επαναλαμβάνουμε τα ακόλουθα βήματα έως ότου δημιουργηθούν N απόγονοι.

i. Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό χρωμοσωμάτων από τον τρέχοντα πληθυσμό που θα λάβει μέρος και από αυτά επιλέγεται ένα μόνο, το καλύτερο, το οποίο αντικαθιστά ένα χειρότερο του στον πληθυσμό.

ii. Διασταυρώνουμε ένα ζεύγος χρωμοσωμάτων, με πιθανότητα P_c (πιθανότητα διασταύρωσης), σε ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο ώστε να διαμορφωθούν δύο νέοι απόγονοι. Εάν δεν πραγματοποιηθεί διασταύρωση, οι νέοι απόγονοι είναι ακριβή αντίγραφα των γονέων.

iii. Μεταλλάσουμε κάθε σημείο των δύο απογόνων με πιθανότητα P_m (πιθανότητα μετάλλαξης), και τοποθετούμε τα προκύπτοντα χρωμοσώματα στο νέο πληθυσμό.

(δ) Αντικαθιστούμε τον τρέχοντα πληθυσμό με το νέο πληθυσμό που δημιουργήθηκε.

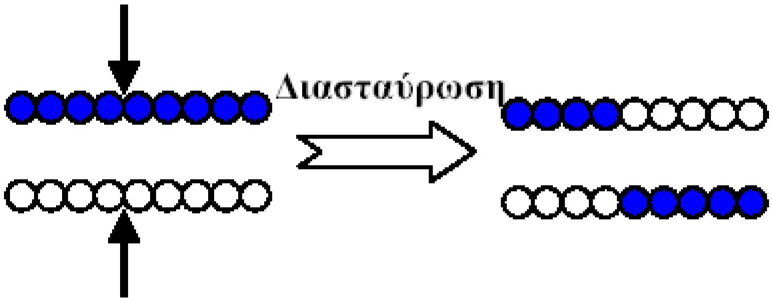
(ε) Επαναλαμβάνουμε τα βήματα (β) έως (ε) μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού.

5.5 Γενετικοί τελεστές

Αξίζει να αναφερθούμε αναλυτικότερα στους τελεστές της διασταύρωσης και της μετάλλαξης καθώς και στη διαδικασία της επιλογής. Γενικά $P_c > P_m$. Μεγάλες τιμές της πιθανότητας μετάλλαξης οδηγούν τον αλγόριθμο σε αστάθεια. Η διασταύρωση (μαζί με την επιλογή) κυρίως ωθεί τις λύσεις προς το βέλτιστο (exploitation), ενώ η μετάλλαξη κυρίως δίνει τη δυνατότητα εξερεύνησης του χώρου των λύσεων (exploration). Παρακάτω θα δούμε κάπως ειδικότερα καθεμία από τις δύο περιπτώσεις καθώς και την διαδικασία της επιλογής.

5.5.1 Διασταύρωση ή επιχιασμός (crossover)

Για κάθε χρωμόσωμα του νέου πληθυσμού, παράγουμε έναν αριθμό τυχαία, ακολουθώντας και πάλι την ομοιόμορφη κατανομή. Ο αριθμός αυτός θα βρίσκεται στο διάστημα [0, 1]. Αν ο αριθμός αυτός είναι μικρότερος του P_c, τότε το συγκεκριμένο χρωμόσωμα επιλέγεται για διασταύρωση, διαφορετικά η διαδικασία επαναλαμβάνεται για το επόμενο χρωμόσωμα. Η διαδικασία τερματίζεται όταν για κάθε χρωμόσωμα έχει παραχθεί ένας τυχαίος ο οποίος και φανερώνει αν το αντίστοιχο χρωμόσωμα θα υποστεί ή όχι το φαινόμενο. Παραστατικά έχουμε :



Σχήμα 5.1: Αναπαράσταση διασταύρωσης δύο χρωμοσωμάτων

Η διασταύρωση συμβαίνει ανάμεσα σε δύο χρωμοσώματα (όταν πρόκειται για απλοειδείς οργανισμούς) με τρόπο ώστε μέσα από την αμοιβαία ανταλλαγή γονιδίων να παράγονται δύο απόγονοι οι οποίοι θα εμπεριέχουν γενετικό υλικό και από τους δύο γονείς.

Έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετές διαφορετικές τεχνικές επιχιασμού. Οι σημαντικότερες από αυτές επιγραμματικά είναι: ο ευρετικός επιχιασμός, ο τυχαίος επιχιασμός Α, ο τυχαίος επιχιασμός Β, ο αριθμητικός επιχιασμός και ο επιχιασμός γραμμής.

5.5.2 Μετάλλαξη (mutation)

Κατά τη μετάλλαξη, επιλέγεται τυχαία ένα γονίδιο ενός χρωμοσώματος και αλλάζει την τιμή του μέσα στο επιτρεπτό φάσμα τιμών του, που καθορίζεται από τα αλληλόμορφά του. Για κάθε χρωμόσωμα και κάθε γονίδιο του χρωμοσώματος, παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό μεταξύ 0 και 1 . Αν ο αριθμός αυτός είναι μικρότερος του P_m, τότε το συγκεκριμένο γονίδιο αλλάζει την τιμή του, διαφορετικά η διαδικασία συνεχίζεται για το επόμενο γονίδιο, μέχρι να έχει παρθεί απόφαση για το μέλλον όλων των γονιδίων όλων των χρωμοσωμάτων σχετικά με το αν θα υποστούν ή όχι τη μετάλλαξη. Η διαδικασία της μετάλλαξης φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 5.2

Η μετάλλαξη είναι ο μηχανισμός αυτός που εξασφαλίζει την διαφοροποίηση του πεδίου των πιθανών λύσεων, απαραίτητη προϋπόθεση για την διαφυγή από τοπικά βέλτιστα.

Σχήμα 5.2: Αναπαράσταση μετάλλαξης ενός χρωμοσώματος

Ενδεικτικά αναφέρουμε κάποιες από τις σημαντικότερες τεχνικές μετάλλαξης που απαντώνται στη βιβλιογραφία. Αυτές είναι η τυχαία μη-ομοιόμορφη μετάλλαξη Ι, η τυχαία μη-ομοιόμορφη μετάλλαξη ΙΙ και η μετάλλαξη απληστίας (greedy mutation).

5.5.3 Επιλογή (Selection)

Σε αντίθεση με τις δύο άλλες κατηγορίες τελεστών, ο τελεστής της επιλογής είναι ανεξάρτητος τύπου εξελικτικού αλγορίθμου ή κωδικοποίησης και μπορεί να μεταφερθεί εύκολα από κώδικα σε κώδικα.

Ο όρος που εκφράζει την υπερίσχυση της exploitation σε βάρος της exploration ιδιότητας, ονομάζεται «πίεση επιλογής» (selective pressure). Με αύξηση της πίεσης αυτής αυξάνεται η ταχύτητα σύγκλισης του εξελικτικού αλγορίθμου, αλλά μερικές φορές αυξάνεται και η πιθανότητα εγκλωβισμού σε τοπικά βέλτιστα.

Οι μέθοδοι επιλογής, για να μπορούν να ελέγχουν τα χαρακτηριστικά της έρευνας του χώρου των λύσεων, θα πρέπει να διαθέτουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Η επίδραση των παραμέτρων ελέγχου στην «πίεση επιλογής» θα πρέπει να είναι απλή και προβλέψιμη.
- Είναι επιθυμητή η ύπαρξη μοναδικής παραμέτρου ελέγχου της «πίεσης επιλογής».
- Το εύρος της «πίεσης επιλογής» που μπορεί να εφαρμοστεί θα πρέπει να είναι το μέγιστο δυνατό.

Στη βιβλιογραφία απαντά κανείς αρκετές μεθόδους επιλογής, οι βασικότερες των οποίων είναι οι ακόλουθες:

Proportional selection: Έχει προταθεί από τον Holland και ονομάζεται και μέθοδος της ρουλέτας (roulette procedure). Οι πιθανότητες επιλογής κάθε ατόμου είναι ίσες με την σχετική συνάρτηση προσαρμογής τους (relative fitness):

$$p_i = \frac{\Phi(a_i)}{\sum_{j=1}^{\lambda} \Phi(a_j)} \tag{5.1}$$

Όπου Φ είναι η συνάρτηση προσαρμογής και f η αντικειμενική συνάρτηση, ενώ η πιο φυσική επιλογή για την Φ είναι $\Phi = f$. Η μέθοδος μπορεί να διαχειρίζεται μόνο θετικές τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης και προβλήματα μεγιστοποίησης. Για αρνητικές τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης απαιτείται τροποποίηση της συνάρτησης προσαρμογής, γνωστή ως scaling.

Tournament selection: Μπορεί να λειτουργήσει με μίγμα θετικών – αρνητικών τιμών της συνάρτησης προσαρμογής, ενώ αντιμετωπίζει τόσο προβλήματα μεγιστοποίησης όσο και ελαχιστοποίησης. Η ευελιξία της αυτή είναι και ο βασικός λόγος που προτιμήθηκε στην παρούσα διατριβή. Για να επιλέξουμε ένα νέο μέλος του ενδιάμεσου πληθυσμού, με ομοιόμορφη πιθανότητα επιλέγουμε q μέλη του πληθυσμού, με $q \geq 1$. Στην παρούσα εργασία επιλέξαμε $q = 3$. Από τα q αυτά μέλη επιλέγουμε το καλύτερο για να πάει στον ενδιάμεσο πληθυσμό. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να συμπληρωθεί ο αριθμός των ατόμων του ενδιάμεσου πληθυσμού. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη μέθοδος επιλογής επιβάλει μεγαλύτερη πίεση για βελτίωση στον πληθυσμό, σε σχέση με την απλή αναλογική μέθοδο επιλογής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ταχύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου. Τέλος, η πίεση επιλογής ρυθμίζεται εύκολα μεταβάλλοντας το μέγεθος της παραμέτρου q.

Linear ranking selection: Τα άτομα του πληθυσμού κατατάσσονται σύμφωνα με την αντικειμενική τους συνάρτηση (i=1 για το καλύτερο). Στη συνέχεια χρησιμοποιείται μία γραμμική συνάρτηση για να αποδώσει μία τιμή πιθανότητας επιλογής P_i κάθε i. Η πιθανότητα επιλογής δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$p_i = \left(\eta^+ - \left(\eta^+ - \eta^- \right) \cdot \frac{i-1}{\lambda - 1} \right) / \lambda \tag{5.2}$$

Επειδή θα πρέπει η συνολική πιθανότητα να είναι μονάδα, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις αντίστοιχες σταθερές:

$$1 \le \eta^{+} \le 2, \quad \eta^{-} = 2 - \eta^{+} \tag{5.3}$$

Nonlinear ranking selection: Τα άτομα του πληθυσμού κατατάσσονται σύμφωνα με την αντικειμενική τους συνάρτηση ($i = 1$ για το καλύτερο). Στη συνέχεια χρησιμοποιείται μία μη γραμμική συνάρτηση για να αποδώσει μία τιμή πιθανότητας επιλογής p_i για κάθε *i*. Η πιθανότητα επιλογής δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$p_i = c \cdot (1 - c)^{i-1} \tag{5.4}$$

Η σταθερά *c* δηλώνει την πιθανότητα επιλογής του καλύτερου ατόμου του πληθυσμού ($i = 1$). Το άθροισμα των πιθανοτήτων δεν δίνει 1. Η μέθοδος είναι στην ουσία ίδια με την tournament selection, εάν επιλεγεί $c = 1 - (1 - 1/\lambda)^q$, οπότε δεν εισάγεται νέος μηχανισμός επιλογής. Για $\lambda = 100$ και $c = 0.04$ οι πιθανότητες επιλογής αντιστοιχούν σε tournament selection με $q = 4$. Επιπλέον, είναι αλγοριθμικά χειρότερη της tournament selection, διότι απαιτεί κατάταξη των λύσεων με βάση την αντικειμενική συνάρτηση.

6 Ανταγωνιστικά προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων

6.1 Γενικά

Τα ανταγωνιστικά προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων (competitive facility location problem) αποτελούν συνηθισμένα, πλέον, προβλήματα στα οποία συμμετέχουν ανταγωνιστικές εγκαταστάσεις όπως, για παράδειγμα, εμπορικά καταστήματα, supermarkets κλπ. Στα ανταγωνιστικά προβλήματα χωροθέτησης έχουμε να αντιμετωπίσουμε δύο ανταγωνιστές οι οποίοι θέλουν να εισέλθουν στην αγορά ταυτόχρονα (δυοπώλειο) και στοχεύουν στην μεγιστοποίηση του μεριδίου αγοράς τους ή του κέρδους τους γενικότερα.

Κάθε αποφασίζων έχει στη διάθεση του ένα πλήθος σημείων στο χώρο στα οποία μπορεί να τοποθετήσει τις εγκαταστάσεις του. Στο σημείο αυτό τίθεται το θέμα της βέλτιστης επιλογής τόσο των κατάλληλων σημείων όσο και του πλήθους των εγκαταστάσεων που θα ανοιχθούν. Όσο περισσότερες εγκαταστάσεις λειτουργήσουν τόσο μεγαλύτερο το μερίδιο αγοράς αλλά και τόσο μεγαλύτερο το κόστος εγκατάστασης. Κάθε αποφασίζων – ανταγωνιστής αναζητά, λοιπόν, τη χρυσή τομή. Αυτό είναι και το θέμα που θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία.

Τα ανταγωνιστικά προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων εξετάστηκαν από τον Hotelling [5] υπό τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

1. Οι πελάτες κατανέμονται ομοιόμορφα πάνω σε μια ευθεία γραμμή.
2. Κάθε αποφασίζων μπορεί να τοποθετήσει και να μετακινήσει τις εγκαταστάσεις του όσες φορές επιθυμεί.
3. Όλοι οι πελάτες χρησιμοποιούν μόνο την πλησιέστερη εγκατάσταση

Στην προσέγγιση του Hotelling, η βέλτιστη τοποθέτηση όλων των εγκαταστάσεων παρουσιάζεται σαν μια λύση Nash. Οι Wendell και McKelvey [86] πρότειναν κάποια ανταγωνιστικά προβλήματα χωροθέτησης όπου οι πελάτες κατανέμονται σε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων, γνωστά ως σημεία ζήτησης. Τα σημεία αυτά αποτελούν τους κόμβους ενός δικτύου στο οποίο τοποθετούν τις εγκαταστάσεις τους οι αποφασίζοντες.

Με βάση τα προβλήματα αυτά, ο Hakimi [87] εξέτασε διεπίπεδα προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων υπό τις παρακάτω προϋποθέσεις:

1. Υπάρχουν δύο τύποι αποφασιζόντων, υψηλού και χαμηλού επιπέδου
2. Ο αποφασίζων υψηλού επιπέδου επιλέγει πρώτος τις θέσεις των εγκαταστάσεών που ανοίγει
3. Οι αποφασίζοντες (ανεξαρτήτως τύπου) δεν μπορούν να μετακινήσουν τις εγκαταστάσεις τους

Στην προσέγγιση αυτή, η βέλτιστη τοποθέτηση όλων των εγκαταστάσεων παρουσιάζεται σαν μια λύση Stackelberg. Επίσης, ο Hakimi απέδειξε ότι τα διεπίπεδα αυτά προβλήματα είναι NP-hard. O Drezner [88] μελέτησε διεπίπεδα προβλήματα χωροθέτησης με σημεία ζήτησης και πρότεινε μια αποτελεσματική μέθοδο επίλυσης με χρήση γραμμικού προγραμματισμού και της μεθόδου διχοτόμησης για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες κάθε αποφασίζων τοποθετεί μια μόνο εγκατάσταση.

Στα παραπάνω προβλήματα θεωρήθηκε ότι οι πελάτες εξυπηρετούνται μόνο από την πλησιέστερη σε αυτούς εγκατάσταση. Παρόλα αυτά, αν υπάρχει διαφορά ποιότητας μεταξύ των εγκαταστάσεων, όπως για παράδειγμα καλύτερη εξυπηρέτηση, μεγαλύτερη ποικιλία προϊόντων κλπ, οι πελάτες δεν χρησιμοποιούν πάντα την πλησιέστερη εγκατάσταση. O Karkazis [89] θεώρησε διεπίπεδα προβλήματα χωροθέτησης εγκαταστάσεων σε δίκτυο λαμβάνοντας υπόψη την ποιότητα των εγκαταστάσεων. Παρά το γεγονός ότι πρότεινε μια μεθοδολογία επίλυσης για την εύρεση βέλτιστης λύσης του αποφασίζοντα του κατώτερου επιπέδου, εντούτοις τα προβλήματα αυτά εντάσσονται στην κατηγορία των NP-hard προβλημάτων.

6.2 Το μοντέλο χωροθέτησης ηγέτη – ακολούθου

Με βάση το οικονομικό μοντέλο του Stackelberg [90], το πρόβλημα χωροθέτησης ηγέτη – ακολούθου αποτελείται από τον καθορισμό μιας βέλτιστης στρατηγικής για δύο ανταγωνιστές οι οποίοι λαμβάνουν αποφάσεις διαδοχικά. Ο πρώτος ανταγωνιστής F_x, ο ηγέτης, λαμβάνει αποφάσεις αναμένοντας τις ενέργειες του ανταγωνιστή F_y, του ακολούθου. Ο ηγέτης γνωρίζει ότι όταν ο ακόλουθος δει τις θέσεις τις οποίες αυτός επέλεξε, θα προσπαθήσει με την σειρά του να τοποθετήσει τις δικές του εγκαταστάσεις με τρόπο ώστε να μεγιστοποιήσει το μερίδιο αγοράς του ή το κέρδος. Ο ηγέτης, με την σειρά του, προσπαθεί να καθορίσει την στρατηγική που θα μεγιστοποιήσει το δικό του μερίδιο αγοράς, λαμβάνοντας υπόψη την αντίδραση του ακολούθου. Το πρόβλημα αυτό ηγέτη – ακολούθου είναι ένα παίγνιο Stackelberg. Άλλα μοντέλα Stackelberg προκύπτουν από τους διαφορετικούς στόχους των παιχτών. Συνεπώς, το πρόβλημα $(r|p)$-κέντρων που μελετήθηκε από τον Hakimi [87] αποτελεί την βέλτιστη στρατηγική για τον ηγέτη του οποίου ο αντικειμενικός στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του μέγιστου μεριδίου αγοράς του ακολούθου. Το πρόβλημα $(r|X_p)$-μέσων είναι η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα του ακολούθου του οποίου στόχος είναι η μεγιστοποίηση του μεριδίου αγοράς του. Μια λύση Stackelberg, συνήθως προκύπτει μέσω μιας περιοδικά επαναλαμβανόμενης διαδικασίας. Αρχικά υπολογίζεται η συνάρτηση του ακολούθου, η οποία ενσωματώνεται στη συνέχεια στην αντικειμενική συνάρτηση του ηγέτη, η οποία πρέπει να βελτιστοποιηθεί [91].

6.3 Μοντελοποίηση παιγνίου ηγέτη – ακολούθου

Θεωρούμε ένα σύνολο F με τις υποψήφιες θέσεις εγκατάστασης. Για $X, Y \subset F$, το $W(X \mid Y)$ δείχνει την ζήτηση που καλύπτεται από μια επιχείρηση με εγκαταστάσεις που βρίσκονται σε σημεία του συνόλου X, δεδομένου ενός ανταγωνιστή του οποίου οι εγκαταστάσεις βρίσκονται σε σημεία του συνόλου Y. Το μοντέλο ηγέτη-ακολούθου έχει ως εξής:

- Το πρόβλημα του ακολούθου

  Η επιχείρηση F_x λειτουργεί στην αγορά με p εγκαταστάσεις οι οποίες βρίσκονται στα σημεία $X_p = \{x_1, \ldots, x_p\} \subset F$. Η F_y θέλει κι αυτή με την σειρά της να μπει στην αγορά ανοίγοντας r εγκαταστάσεις στα σημεία $Y_r = \{x_{p+1}, \ldots, x_{p+r}\} \subset F$ τα οποία μεγιστοποιούν το μερίδιο αγοράς της. Το πρόβλημα έγκειται στον καθορισμό του συνόλου $Y_r^* = \{x_{p+1}^*, \ldots, x_{p+r}^*\} \subset F$ για το οποίο:

$$W(Y_r^* \mid X_p) = \max_{Y_r \subset F} W(Y_r \mid X_p) \qquad (6.1)$$

- Το πρόβλημα του ηγέτη

  Δεν υπάρχουν εγκαταστάσεις στην αγορά. Η επιχείρηση F_x θέλει να μπει στην αγορά τοποθετώντας p εγκαταστάσεις στα σημεία $X_p = \{x_1,...,x_p\} \subset F$ τα οποία μεγιστοποιούν το μερίδιο αγοράς της, λαμβάνοντας υπόψη μια ανταγωνίστρια επιχείρηση F_y η οποία θα λάβει αποφάσεις ως ακόλουθος. Το πρόβλημα του ηγέτη είναι να βρει ένα σύνολο $X_p^* = \{x_1^*,...,x_p^*\} \subset F$ ώστε:

$$W(X_p^* \mid Y_r^*(X_p^*)) = \max_{X_p \subset F} W(X_p \mid Y_r^*(X_p)) \tag{6.2}$$

  όπου $Y_r^*(X_p)$ είναι η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα του ακολούθου δεδομένου ότι οι εγκαταστάσεις του ανταγωνιστή βρίσκονται στα σημεία X_p. Το ζεύγος $\left(X_{p,}^*, Y_r^*(X_{p,}^*)\right)$είναι μια λύση ηγέτη-ακολούθου ή λύση Stackelberg.

Στην παρούσα διατριβή έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα παίγνιο ηγέτη – ακολούθου όπως αυτό που μόλις αναφέραμε με τη μόνη διαφορά ότι σκοπός των δύο αποφασιζόντων – ανταγωνιστών δεν είναι η μόνο η μεγιστοποίηση του μεριδίου αγοράς αλλά και η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους.

6.4 Κανόνας δυικότητας, μερικής δυικότητας και αναλογικός κανόνας

O Hakimi [92] μελέτησε τα προβλήματα $(r|X_p)$-μέσων και $(r|p)$-κέντρων σε έξι σενάρια τα οποία προέκυψαν από τον συνδυασμό ανελαστικής και ελαστικής ζήτησης με τρεις διαφορετικούς κανόνες επιλογής: τον δυικό, τον μερικώς δυικό και τον αναλογικό.

Η ανελαστική και η ελαστική ζήτηση αναφέρονται στα ουσιώδη και επουσιώδη αγαθά, αντίστοιχα. Σε αντίθεση με την ανελαστική ζήτηση, για την οποία οι πελάτες εξαντλούν την αγοραστική τους δύναμη, στην ελαστική ζήτηση οι δαπάνες εξαρτώνται από την απόσταση μεταξύ πελατών και εγκαταστάσεων. Για ανελαστική ζήτηση το πρόβλημα $(r|p)$-κέντρων και το πρόβλημα του ηγέτη ταυτίζονται. Συνεπώς, μια βέλτιστη στρατηγική για τον ηγέτη του προβλήματος ηγέτη-ακολούθου που μελετάμε είναι η προσέγγιση $(r|p)$-κέντρων.

Σύμφωνα με τον κανόνα της δυικότητας, ο πελάτης εξυπηρετείται από την πλησιέστερη εγκατάσταση. Εάν η απόσταση του σημείου ζήτησης από την πλησιέστερη εγκατάσταση της επιχείρησης F_x είναι ίδια με την απόσταση του σημείου αυτού με την πλησιέστερη εγκατάσταση της επιχείρησης F_y, η ζήτηση στο σημείο αυτό καλύπτεται από την επιχείρηση F_x. Η παραδοχή αυτή εγείρει κάποια ερωτηματικά και τελικά ίσως θα ήταν πιο σωστό να πούμε ότι στις περιπτώσεις αυτές η αγοραστική δύναμη του πελάτη (και συνεπώς η ζήτηση) μοιράζονται ή ότι ο πελάτης επιλέγει μια νέα εγκατάσταση.

Σύμφωνα με τον κανόνα της μερικής δυικότητας, ο πελάτης χρησιμοποιεί την πλησιέστερη εγκατάσταση κάθε επιχείρησης. Τέλος, υπό τον αναλογικό κανόνα επιλογής, ο πελάτης κατανέμει την αγοραστική του δύναμη μεταξύ των εγκαταστάσεων που λειτουργούν στην αγορά. Στις περιπτώσεις αυτές, το μερίδιο της αγοραστικής δύναμης ενός σημείου ζήτησης το οποίο εκχωρείται σε μια εγκατάσταση εξαρτάται από την μεταξύ τους απόσταση.

Εάν όλα τα προϊόντα και οι εγκαταστάσεις είναι ομογενείς, η μεταφορά είναι δύσκολη ή οι πελάτες χρησιμοποιούν μια εγκατάσταση μόνο για αγορές συγκεκριμένων προϊόντων, λόγου χάρη μια εφημερίδα, ο δυικός κανόνας επιλογής περιγράφει την συμπεριφορά ενός τυχαίου πελάτη [93]. Ωστόσο, η ερμηνεία του κανόνα μερικής δυικότητας είναι λιγότερο προφανής. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η πλησιέστερη εγκατάσταση σε ένα πελάτη ανήκει στην επιχείρηση F_x και επίσης κάποιες ακόμη εγκαταστάσεις της ίδιας επιχείρησης βρίσκονται πιο κοντά από την πλησιέστερη εγκατάσταση της επιχείρησης F_y. Εάν δεν υπάρχει καμία διαφοροποίηση στα προϊόντα ή στις εγκαταστάσεις ο πελάτης δεν έχει κίνητρο για να επισκεφτεί καμία εγκατάσταση της επιχείρησης F_y. Ο αναλογικός κανόνας είναι πιο ρεαλιστικός.

7 Διατύπωση του προβλήματος και παρουσίαση αλγορίθμου επίλυσης

7.1 Εισαγωγή

Στόχος της παρούσας διατριβής αποτελεί η επίλυση ενός προβλήματος ανταγωνιστικής χωροθέτησης δυο ανταγωνιστών, που έχει εκληφθεί ως πρόβλημα διεπίπεδου προγραμματισμού, με χρήση γενετικού αλγόριθμου.

Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε ένα σύνολο F με τις υποψήφιες θέσεις εγκατάστασης τόσο για τον ηγέτη F_x όσο και για τον ακόλουθο F_y. Για $X, Y \subset F$, το $C(X \mid Y)$ δείχνει το συνολικό κόστος που προκύπτει για μια επένδυση με εγκαταστάσεις που βρίσκονται σε σημεία του συνόλου X, δεδομένου ενός ανταγωνιστή του οποίου οι εγκαταστάσεις βρίσκονται σε σημεία του συνόλου Y. Συγκεκριμένα, ο ηγέτης έχει στη διάθεση του τα σημεία $X = \{x_1, ..., x_m\} \subset F$ ως υποψήφιες θέσεις εγκατάστασης ενώ ο ακόλουθος τα σημεία $Y = \{x_{m+1}, ..., x_n\} \subset F$.

7.2 Μοντέλο ηγέτη-ακολούθου

Το μοντέλο ηγέτη-ακολούθου για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει ως εξής:

- Το πρόβλημα του ακολούθου

  Η επιχείρηση F_x (ηγέτης) εισέρχεται στην αγορά με p εγκαταστάσεις οι οποίες βρίσκονται στα σημεία $X_p = \{x_1, ..., x_p\} \subseteq X$. Η επιχείρηση F_y (ακόλουθος) θέλει κι αυτή με την σειρά της να μπει στην αγορά τοποθετώντας r εγκαταστάσεις στα σημεία $Y_r = \{x_{p+1}, ..., x_{p+r}\} \subseteq Y$ τα οποία ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος της ενώ παράλληλα δίνουν ένα ικανοποιητικό μερίδιο αγοράς. Το πρόβλημα έγκειται στον καθορισμό του συνόλου $Y_r^* = \{x_{p+1}^*, ..., x_{p+r}^*\} \subseteq Y$ για το οποίο:

$$C(Y_r^* \mid X_p) = \min_{Y_r \subseteq Y} C(Y_r \mid X_p) \tag{7.1}$$

- Το πρόβλημα του ηγέτη

  Δεν υπάρχουν εγκαταστάσεις στην αγορά. Η επιχείρηση F_x θέλει να μπει στην αγορά τοποθετώντας p εγκαταστάσεις στα σημεία $X_p = \{x_1,...,x_p\} \subseteq X$ τα οποία ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος της, ενώ παράλληλα δίνουν ένα ικανοποιητικό μερίδιο αγοράς, λαμβάνοντας υπόψη μια ανταγωνίστρια επιχείρηση F_y η οποία θα λάβει αποφάσεις ως ακόλουθος. Το πρόβλημα του ηγέτη είναι να βρει ένα σύνολο $X_p^* = \{x_1^*,...,x_p^*\} \subseteq X$ ώστε:

$$C(X_p^* \mid Y_r^*(X_p^*)) = \min_{X_p \subseteq X} C(X_p \mid Y_r^*(X_p)) \tag{7.2}$$

  όπου $Y_r^*(X_p)$ είναι η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα του ακολούθου δεδομένου ότι οι εγκαταστάσεις του ανταγωνιστή βρίσκονται στα σημεία X_p. Το ζεύγος $\left(X_{p,}^*, Y_r^*(X_{p,}^*)\right)$είναι μια λύση ηγέτη-ακολούθου γνωστή και ως λύση Stackelberg.

Θεωρούμε τις υποψήφιες θέσεις εγκατάστασης ως σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο (x, y). Κάνουμε αυτή την παραδοχή για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις μεταξύ τους αποστάσεις βάσει του τύπου της Ευκλείδειας απόστασης

$$d(a,b) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \tag{7.3}$$

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι σκοπός του αλγορίθμου επίλυσης που θα παρουσιάσουμε παρακάτω είναι η επίτευξη βέλτιστης λύσης για τον ηγέτη. Μπορούμε να πούμε απλά ότι «βλέπουμε» το πρόβλημα από την οπτική του ηγέτη (πρώτος ανταγωνιστής) και θέλουμε να «κερδίσει» αυτός στο παραπάνω παίγνιο.

7.3 Ανάλυση αντικειμενικής συνάρτησης κόστους

Το κόστος ίδρυσης μιας εγκατάστασης μπορεί να αποτελείται από πολλά επιμέρους κόστη όπως το κόστος λειτουργίας, το κόστος εγκατάστασης, τα κόστη μεταφοράς των προϊόντων από προμηθευτές και προς τους πελάτες, το κόστος που προκύπτει από την μη ικανοποίηση της ζήτησης, το κόστος που σχετίζεται με την ποιότητα των διεργασιών – προϊόντων κλπ.

Στην παρούσα διατριβή η αντικειμενική συνάρτηση, που δηλώνει το συνολικό κόστος για κάθε ανταγωνιστή, συμπεριλαμβάνει τα εξής κόστη:

- Κόστος εγκατάστασης: Κάθε εγκατάσταση βρίσκεται σε διαφορετική περιοχή στην ίδια πόλη, ή σε διαφορετικές πόλεις της ίδιας χώρας ή ακόμα και σε διαφορετικές χώρες. Είναι λοιπόν λογική συνέπεια αυτού, τα κόστη ίδρυσης εγκαταστάσεων να διαφέρουν σε κάθε περίπτωση. Το συνολικό κόστος εγκατάστασης προκύπτει αν αθροίσουμε τα κόστη όλων των εν λειτουργία εγκαταστάσεων για κάθε ανταγωνιστή χωριστά.
- Κόστος μεταφοράς: Αυτό το σημείο απασχολεί κυρίως επιχειρήσεις που ανήκουν στον τομέα των logistics καθώς και αυτές που χρήζουν συχνής τροφοδοσίας, καθώς μεγάλες αποστάσεις σημαίνουν μεγάλα κόστη μεταφοράς. Από την άλλη, μια οποιαδήποτε εγκατάσταση, ακόμα και ένα μικρό εμπορικό κατάστημα, έχει διαφορά αν ανοίξει στο κέντρο μιας πόλης, κάτι που το καθιστά εύκολα προσιτό, ή σε κάποιο προάστιο. Έτσι, σε κάθε περίπτωση υπάρχει κόστος μεταφοράς είτε αυτό επιβαρύνει άμεσα την επιχείρηση (τροφοδοσία ή αποστολή προϊόντων σε πελάτες) είτε έμμεσα προσελκύοντας λιγότερους ή περισσότερους πελάτες. Κάθε υποψήφια θέση εγκατάστασης όπως και κάθε σημείο ζήτησης (πελάτες) βρίσκονται στο επίπεδο (x, y). Συνεπώς το συνολικό κόστος μεταφοράς προκύπτει αν αθροίσουμε τα επιμέρους κόστη, δηλαδή τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων εγκατάστασης και των σημείων ζήτησης.
- Κόστος ζήτησης: Κάθε σημείο πελατών έχει μια δεδομένη ζήτηση. Εδώ και πάλι παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο όπως και στο κόστος μεταφοράς. Όσο κεντρικότερη ή πιο κομβική είναι η θέση εγκατάστασης τόσο αυξημένη παρουσιάζεται η ζήτηση στη θέση αυτή. Με δεδομένη τη ζήτηση σε κάθε σημείο μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος που προκύπτει αν δεν επιλεχθεί το συγκεκριμένο σημείο για ίδρυση εγκατάστασης ή αν δεν μπορέσει να τροφοδοτηθεί από μια άλλη κοντινή εγκατάσταση του ίδιου ανταγωνιστή. Οπότε, όσο μεγαλύτερη είναι η ζήτηση σε ένα σημείο, τόσο περισσότερο «χάνει» ο εκάστοτε ανταγωνιστής αν δεν μπορέσει να το τροφοδοτήσει. Το συνολικό κόστος ζήτησης προκύπτει αν αθροίσουμε το κόστος ζήτησης κάθε σημείου που δεν τροφοδοτείται από τις εγκαταστάσεις του εκάστοτε ανταγωνιστή.

Ο υπολογισμός του συνολικού κόστους, που αποτελεί την προς ελαχιστοποίηση αντικειμενική συνάρτηση, δεν προκύπτει από το άθροισμα των τριών επιμέρους κοστών. Συγκεκριμένα, κάθε επιμέρους κόστος έχει διαφορετική βαρύτητα στην αντικειμενική συνάρτηση. Αυτό συμβαίνει αφενός για λόγους κλίμακας (εξαρτάται από τα δεδομένα) και αφετέρου γιατί είναι στην κρίση του αποφασίζοντα αν θέλει να δώσει βαρύτητα σε κάποιο συγκεκριμένο κόστος. Για παράδειγμα, αν θέλει κάποιος βραχυπρόθεσμο έστω και μικρό κέρδος δίνει μεγάλη βαρύτητα στο κόστος εγκατάστασης που ως αρχική επένδυση είναι συνήθως αρκετά δαπανηρή. Αντίθετα, μια επιλογή κομβικής θέσης με μεγάλο κόστος εγκατάστασης αλλά με σίγουρη και μεγάλη ζήτηση και με μειωμένο συνολικό κόστος μεταφοράς θα αργήσει να δώσει καθαρό κέρδος αλλά μακροπρόθεσμα θα αποζημιώσει τον ανταγωνιστή δεδομένου ότι θα έχει μεγιστοποιήσει το μερίδιο αγοράς του.

7.4 Μοντελοποίηση του προβλήματος

Βάσει των παραπάνω, στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε η εξής αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση για τον πρώτο ανταγωνιστή (ηγέτης):

$$\min C_1 = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i + 5\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m+n} a_k y_j d_{kj} + 10\sum_{j=1}^{m+n} z_j D_j \tag{7.4}$$

όπου:

C_1 το συνολικό κόστος του πρώτου ανταγωνιστή που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε

m το πλήθος των υποψήφιων θέσεων εγκατάστασης για τον πρώτο ανταγωνιστή

n το πλήθος των υποψήφιων θέσεων εγκατάστασης για τον δεύτερο ανταγωνιστή

x_i ακέραιος που παίρνει τιμές 0 ή 1 (0 αν η συγκεκριμένη εγκατάσταση i είναι κλειστή και 1 αν λειτουργεί)

f_i το κόστος εγκατάστασης στο σημείο i

p το πλήθος των εγκαταστάσεων που επέλεξε ο πρώτος ανταγωνιστής

y_j ακέραιος που παίρνει τιμές 0 ή 1 (1 αν το σημείο ζήτησης j εξυπηρετείται από την εγκατάσταση i και 0 σε αντίθετη περίπτωση)

a_k μοναδιαίο κόστος μεταφοράς από την εγκατάσταση k σε κάθε σημείο ζήτησης που εξυπηρετεί

d_{kj} ευκλείδεια απόσταση από την εγκατάσταση k στο σημείο ζήτησης j

z_j ακέραιος που παίρνει τιμές 0 ή 1 (1 αν το σημείο ζήτησης j εξυπηρετείται από τον πρώτο ανταγωνιστή και 0 σε αντίθετη περίπτωση)

D_j κόστος ζήτησης σημείου ζήτησης j

Παρατηρούμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση αποτελείται από άθροισμα τριών όρων. Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο συνολικό κόστος εγκατάστασης που είναι το άθροισμα των κοστών εγκατάστασης όλων των σημείων τα οποία έχει επιλέξει ο πρώτος ανταγωνιστής για να ανοίξει τις εγκαταστάσεις του. Ο δεύτερος όρος αποτελεί το συνολικό κόστος μεταφοράς όλων των σημείων ζήτησης που εξυπηρετεί ο πρώτος ανταγωνιστής από τις αντίστοιχες εγκαταστάσεις. Τέλος, ο τρίτος όρος υπολογίζει το συνολικό κόστος ζήτησης που προκύπτει ως άθροισμα των επιμέρους κοστών ζήτησης από τα σημεία που τροφοδοτεί τελικά ο πρώτος ανταγωνιστής.

Αντίστοιχα, η αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση για τον δεύτερο ανταγωνιστή (ακόλουθος):

$$\min C_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i + 5 \sum_{k=p+1}^{p+r} \sum_{j=1}^{m+n} a_k y_j d_{kj} + 10 \sum_{j=1}^{m+n} z_j D_j \qquad (7.5)$$

όπου:

C_2 το συνολικό, προς ελαχιστοποίηση, κόστος του δεύτερου ανταγωνιστή

m το πλήθος των υποψήφιων θέσεων εγκατάστασης για τον πρώτο ανταγωνιστή

n το πλήθος των υποψήφιων θέσεων εγκατάστασης για τον δεύτερο ανταγωνιστή

x_i ακέραιος που παίρνει τιμές 0 ή 1 (0 αν η συγκεκριμένη εγκατάσταση i είναι κλειστή και 1 αν λειτουργεί)

f_i το κόστος εγκατάστασης στο σημείο i

p το πλήθος των εγκαταστάσεων που επέλεξε ο πρώτος ανταγωνιστής

r το πλήθος των εγκαταστάσεων που επέλεξε ο δεύτερος ανταγωνιστής

y_j ακέραιος που παίρνει τιμές 0 ή 1 (1 αν το σημείο ζήτησης j εξυπηρετείται από την εγκατάσταση i και 0 σε αντίθετη περίπτωση)

a_k μοναδιαίο κόστος μεταφοράς από την εγκατάσταση k σε κάθε σημείο ζήτησης που εξυπηρετεί

d_{kj} ευκλείδεια απόσταση από την εγκατάσταση k στο σημείο ζήτησης j

z_j ακέραιος που παίρνει τιμές 0 ή 1 (1 αν το σημείο ζήτησης j εξυπηρετείται από τον πρώτο ανταγωνιστή και 0 σε αντίθετη περίπτωση)

D_j κόστος ζήτησης σημείου ζήτησης j

Η αντικειμενική συνάρτηση αποτελείται από τους ίδιους τρεις όρους και ισχύουν τα ίδια όπως και στην περίπτωση του πρώτου ανταγωνιστή.

Οι παραδοχές του προβλήματος συνοψίζονται ως εξής:

- Οι θέσεις υποψήφιων εγκαταστάσεων και τα σημεία ζήτησης συμπίπτουν. Όταν γίνει τελικά η επιλογή των θέσεων εγκατάστασης, τότε αφενός τα σημεία αυτά εξυπηρετούν εξ ορισμού τον εαυτό τους και αφετέρου τα υπόλοιπα σημεία του αρχικού συνόλου αποτελούν πλέον σημεία ζήτησης.
- Κάθε σημείο ζήτησης εξυπηρετείται υποχρεωτικά από ένα και μόνο ένα σημείο εγκατάστασης ενός εκ των δύο ανταγωνιστών.
- Κάθε εγκατάσταση μπορεί να εξυπηρετήσει ένα σημείο ζήτησης (τον εαυτό της υποχρεωτικά) ή και περισσότερα. Δεν υπάρχει άνω όριο πέρα από αυτό που ορίζει ο αριθμός σημείων ζήτησης που υπάρχουν στο δίκτυο.
- Αν μια εγκατάσταση εξυπηρετεί μόνο τον εαυτό της, τότε ελέγχεται αν συμφέρει αυτό τον συγκεκριμένο ανταγωνιστή. Στην περίπτωση που δεν τον συμφέρει, κλείνει την εγκατάσταση και τροφοδοτεί το σημείο ζήτησης από την κοντινότερη σε αυτό, σε λειτουργία, εγκατάσταση που ανήκει στον ίδιο ανταγωνιστή. Η παραδοχή αυτή έγινε γιατί αφού αρχικά είχε «κερδίσει» το σημείο ζήτησης ο ένας ανταγωνιστής θεωρήσαμε δίκαιο να συνεχίσει να το τροφοδοτεί ο ίδιος ακόμα και αν κλείσει η αρχική εγκατάσταση.
- Κάθε σημείο ζήτησης επιλέγει από ποια εγκατάσταση θα τροφοδοτηθεί βάσει της ευκλείδειας απόστασης τους. Εξαίρεση αποτελεί μόνο η περίπτωση η οποία αναφέρθηκε στην προηγούμενη παρατήρηση. Στην περίπτωση αυτή ένα σημείο ζήτησης μπορεί να τροφοδοτείται από εγκατάσταση ενός ανταγωνιστή ακόμη και αν υπάρχουν εγκαταστάσεις του άλλου ανταγωνιστή πλησιέστερα.
- Για λόγους απλοποίησης, το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς α_i ισούται με μονάδα α_i=1 για όλες τις εγκαταστάσεις και όλες τις αποστάσεις.
- Κριτήριο επίτευξης στόχου αποτελεί η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους του πρώτου ανταγωνιστή, δηλαδή του ηγέτη. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι $C_1 < C_2$ ενώ παράλληλα το μερίδιο αγοράς (ΜΑ) του ηγέτη να είναι ικανοποιητικό έναντι αυτού του ακολούθου. Αυτό μεταφράζεται ως $\text{ΜΑ}_{\text{ηγέτη}} \geq 70\%\text{ΜΑ}_{\text{ακολούθου}}$.
- Οι δύο συμμετέχοντες στο παίγνιο (ηγέτη - ακολούθου) επιλέγουν τις στρατηγικές τους εναλλάξ, ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι παίζουν με τους ίδιους όρους.

Μετά από την παραπάνω ανάλυση είμαστε, πλέον, σε θέση να μοντελοποιήσουμε το διεπίπεδο ανταγωνιστικό πρόβλημα χωροθέτησης εγκαταστάσεων ως ακολούθως:

$$
\left.\begin{aligned}
&\min C_1 = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i + 5\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m+n} a_k y_j d_{kj} + 10\sum_{j=1}^{m+n} z_j D_j \\
&\upsilon.\pi. \\
&\qquad x_i, y_j, z_j \in \{0,1\},\ i \in 1,...,m,\ j \in 1,...,m+n \\
&\qquad f_i, d_{kj}, D_j \geq 0,\ i \in 1,...,m,\ j \in 1,...,m+n,\ k \in 1,...,p \\
&\qquad a_k = 1,\ k \in 1,...,p \\
&\qquad \min C_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i + 5\sum_{k=p+1}^{p+r}\sum_{j=1}^{m+n} a_k y_j d_{kj} + 10\sum_{j=1}^{m+n} z_j D_j \\
&\qquad \upsilon.\pi. \\
&\qquad\qquad x_i, y_j, z_j \in \{0,1\},\ i \in 1,...,n,\ j \in 1,...,m+n \\
&\qquad\qquad f_i, d_{kj}, D_j \geq 0,\ i \in 1,...,m,\ j \in 1,...,m+n,\ k \in p+1,...,p+r \\
&\qquad\qquad a_k = 1\ ,\ k \in p+1,...,p+r
\end{aligned}\right\} \quad (7.6)
$$

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με την περιγραφή του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε για την επίλυση του διεπίπεδου προβλήματος.

7.5 Αλγόριθμος επίλυσης διεπίπεδου προβλήματος ανταγωνιστικής χωροθέτησης εγκαταστάσεων

Θέλουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα (7.6) το οποίο ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία προβλημάτων διεπίπεδης βελτιστοποίησης. Για τον σκοπό αυτό επιλέχθηκε η χρήση ευρετικών αλγορίθμων και συγκεκριμένα ενός γενετικού αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος αυτός, ο οποίος συντάχθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού C, δέχεται ως δεδομένα από τον χρήστη (σε αρχεία κειμένου), και για τους δυο ανταγωνιστές, τις καρτεσιανές συντεταγμένες και το πλήθος των υποψήφιων θέσεων λειτουργίας εγκαταστάσεων, τα κόστη εγκατάστασης σε κάθε θέση και τέλος τη ζήτηση κάθε σημείου, που εκτός από πιθανό σημείο εγκατάστασης είναι και σημείο ζήτησης (πελάτης).

Τα παραπάνω δεδομένα αποθηκεύονται και το πρόγραμμα είναι έτοιμο να τα επεξεργαστεί. Να σημειωθεί εδώ ότι το πλήθος των υποψήφιων θέσεων εγκατάστασης για κάθε ανταγωνιστή μπορεί να είναι ίδιο ή διαφορετικό.

Η λογική του αλγορίθμου είναι ουσιαστικά η επίλυση ενός παιγνίου ηγέτη – ακολούθου σύμφωνα με το οποίο ο ηγέτης κάνει την πρώτη κίνηση επιλέγοντας ένα πλήθος εγκαταστάσεων και τροφοδοτεί από αυτές όλα τα σημεία ζήτησης. Εν συνεχεία, ο ακόλουθος, γνωρίζοντας τις επιλογές του ηγέτη, «απαντάει» επιλέγοντας το δικό του σύνολο εγκαταστάσεων, οι οποίες λόγω της φύσης του προβλήματος δεν μπορεί να είναι σε καμία περίπτωση κοινές με αυτές του ηγέτη. Ακολούθως, κατανέμονται όλα τα σημεία ζήτησης στις διαθέσιμες εγκαταστάσεις τόσο του ηγέτη όσο και του ακολούθου. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται με διαδοχικές κινήσεις ηγέτη και ακολούθου. Κάθε κίνηση αναπαρίσταται με έναν γενετικό αλγόριθμο ο οποίος βελτιστοποιεί την τακτική του ηγέτη ή του ακολούθου ελαχιστοποιώντας το κόστος της συνολικής του επένδυσης. Με το πέρας κάθε επανάληψης (δηλαδή αφού «τρέξουν» και οι δύο γενετικοί αλγόριθμοι) υπολογίζεται το συνολικό κόστος και των δύο ανταγωνιστών βάσει της αντικειμενικής συνάρτησης κόστους. Το παίγνιο τερματίζεται όταν το συνολικό του κόστος του ηγέτη γίνει μικρότερο από το κόστος του ακολούθου και παράλληλα ικανοποιείται η συνθήκη τερματισμού που αφορά στο μερίδιο αγοράς σύμφωνα με την σχέση $MA_{\eta\gamma\acute{\varepsilon}\tau\eta} \geq 70\% MA_{\alpha\kappa o\lambda o\acute{\upsilon}\theta o\upsilon}$. Τέλος, αν δεν επιτευχθούν ταυτόχρονα οι δύο αυτές συνθήκες περάτωσης, ο αλγόριθμος θα σταματήσει μετά την εκατοστή επανάληψη χωρίς φυσικά να έχει βρει τη βέλτιστη λύση.

Όταν ολοκληρωθεί η παραπάνω διαδικασία τυπώνονται τα αποτελέσματα σε αρχεία κειμένου τα οποία είναι στη διάθεση του χρήστη να τα μελετήσει και να εφαρμόσει τη βέλτιστη λύση που προτείνεται. Τα αρχεία των αποτελεσμάτων περιλαμβάνουν όλα τα στάδια της αλγοριθμικής διαδικασίας, δηλαδή εμπεριέχουν τη λύση μετά από κάθε επανάληψη του αλγορίθμου έτσι ώστε ο χρήστης να είναι σε θέση να γνωρίζει πόσες επαναλήψεις χρειάστηκε ο γενετικός αλγόριθμος για να συγκλίνει και τι συμβαίνει σε κάθε επανάληψη. Οι πληροφορίες που παρέχονται περιλαμβάνουν το συνολικό κόστος κάθε ανταγωνιστή σε κάθε επανάληψη, τις θέσεις των εγκαταστάσεων τόσο του ηγέτη όσο και του ακολούθου καθώς και τα σημεία που τροφοδοτούν οι εγκαταστάσεις αυτές.

7.6 Ανάλυση γενετικού αλγορίθμου – μεταβλητές και τελεστές

Οι δύο γενετικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν, ένας για τον ηγέτη και ένας για τον ακόλουθο, έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά, χρησιμοποιούν τους ίδιους τελεστές όπως και τις ίδιες πιθανότητες διασταύρωσης και μετάλλαξης.

Παρακάτω παραθέτουμε τα βασικά χαρακτηριστικά των δύο γενετικών αλγορίθμων:

- Πιθανότητα διασταύρωσης P_c=0.6

- Πιθανότητα μετάλλαξης P_m=0.20
- Πληθυσμός 100 χρωμοσωμάτων (Popsize)
- Αριθμός γενεών (επαναλήψεις γενετικού) = 500
- Αριθμός μεταβλητών προβλήματος (γονίδια) = αριθμός υποψήφιων θέσεων εγκαταστάσεων (διαφορετικός για κάθε ανταγωνιστή)

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των πιθανοτήτων διασταύρωσης και μετάλλαξης είναι αρκετά μικρές. Αυτό προέκυψε από πρακτικές εφαρμογές αλλά εξηγείται και θεωρητικά. Συγκεκριμένα, αυτό που κάνουν, ουσιαστικά, οι δύο τελεστές στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι να παράγουν διαφορετικές λύσεις (χρωμοσώματα) όσον αφορά στο ποιες εγκαταστάσεις είναι ανοιχτές ή κλειστές. Συνεπώς, υπάρχουν μόνο δύο καταστάσεις, ανοιχτή και κλειστή εγκατάσταση (1 και 0 αντίστοιχα). Έτσι, κάθε φορά που γίνεται η διαδικασία της διασταύρωσης ή της μετάλλαξης είναι πολύ πιθανό να ανοίξουν πολλές νέες εγκαταστάσεις (η τιμή του γονιδίου από 0 γίνεται 1), ενώ οι ήδη ανοιχτές ίσως να μην κλείσουν (εάν τα γονίδια με τιμή 1 δεν επιλεχθούν να μεταλλαχθούν). Αυτό ενδέχεται να έχει ως αποτέλεσμα στην τελική λύση να υπάρχουν πάρα πολλές ανοιχτές εγκαταστάσεις, κάτι που, γενικά, δεν είναι επιθυμητό καθώς αυξάνεται κατά πολύ το συνολικό κόστος. Εξάλλου, ισχύει γενικότερα ότι μεγάλες τιμές της πιθανότητας μετάλλαξης οδηγούν τον αλγόριθμο σε αστάθεια.

Για τη διασταύρωση, τη μετάλλαξη και την επιλογή χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι γενετικοί τελεστές αντιστοίχως:

- *Διασταύρωση ή επιχιασμός μονού σημείου (single-point crossover)*: Σε αυτόν τον τύπο διασταύρωσης, αν ο τυχαίος αριθμός που γεννάται είναι μικρότερος από την πιθανότητα διασταύρωσης, τότε οι συμβολοσειρές των χρωμοσωμάτων των δύο γονιών, τέμνονται σε ένα σημείο. Κατόπιν τα χρωμοσώματα ανταλλάσσουν το κοινό τους τμήμα.
- *Τυχαία ομοιόμορφη μετάλλαξη (random uniform mutation)*: Σε αυτόν τον τύπο μετάλλαξης, αν ο τυχαίος αριθμός που γεννάται είναι μικρότερος από την πιθανότητα μετάλλαξης, τότε το επιλεγμένο προς μετάλλαξη γονίδιο αλλάζει τιμή από 0 σε 1 και αντίστροφα.
- *Tournament selection*: Επιλέχθηκε ως κατάλληλη να αντιμετωπίσει προβλήματα ελαχιστοποίησης. Για να επιλέξουμε ένα νέο μέλος του ενδιάμεσου πληθυσμού,

με ομοιόμορφη πιθανότητα επιλέγουμε q μέλη του πληθυσμού, με $q \geq 1$. Στην παρούσα εργασία επιλέξαμε $q = 3$. Από τα q αυτά μέλη επιλέγουμε το καλύτερο για να πάει στον ενδιάμεσο πληθυσμό. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να συμπληρωθεί ο αριθμός των ατόμων του ενδιάμεσου πληθυσμού. Η συγκεκριμένη μέθοδος επιλογής επιβάλει μεγαλύτερη πίεση για βελτίωση στον πληθυσμό, σε σχέση με την απλή αναλογική μέθοδο επιλογής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ταχύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου. Τέλος, η πίεση επιλογής ρυθμίζεται εύκολα μεταβάλλοντας το μέγεθος της παραμέτρου q.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε γενετικός αλγόριθμος κάνει ένα πλήθος επαναλήψεων έως ότου συγκλίνει (αριθμός γενεών). Σε κάθε μια από αυτές τις επαναλήψεις αποθηκεύει την καλύτερη λύση που έχει βρει ως την τρέχουσα επανάληψη. Έτσι, όταν περατωθεί ο αλγόριθμος υπάρχει αποθηκευμένη η καλύτερη λύση (αυτή με το μικρότερο κόστος) και χρησιμοποιείται ως η βέλτιστη λύση του αλγορίθμου. Παρακάτω παρατίθεται αναλυτικά ο ψευδοκώδικας του προγράμματος.

7.7 Ψευδοκώδικας αλγορίθμου

- Διάβασε τα δεδομένα (τετμημένη σημείου *x*, τεταγμένη σημείου *y*, κόστος εγκατάστασης κάθε πιθανής θέσης εγκατάστασης *f* και ζήτηση πελατών κάθε σημείου *D*) από τα αρχεία εισόδου.
- Κάνε τις απαραίτητες δεσμεύσεις μνήμης και αρχικοποίηση δομών και πινάκων και αποθήκευσε τα δεδομένα στους αντίστοιχους πίνακες.
- Υπολόγισε τις αποστάσεις μεταξύ όλων των σημείων που έχεις ως δεδομένα στο καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων με χρήση της ευκλείδειας απόστασης.
- Μετέτρεψε τη ζήτηση που έχεις από τα δεδομένα σε κόστος ζήτησης κάθε σημείου πελατών βάσει της λογικής ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ζήτηση ενός σημείου τόσο μεγαλύτερο κόστος έχει ένας ανταγωνιστής αν δεν εξυπηρετεί το συγκεκριμένο σημείο.
- Ξεκίνα την επαναληπτική διαδικασία
    - Τύπωσε σε αρχείο εξόδου τον αριθμό της επανάληψης.
    - Ξεκίνα τον γενετικό αλγόριθμο για τον πρώτο ανταγωνιστή (ηγέτη).
        - Δώσε τυχαίες αρχικές τιμές στα γονίδια και μια μεγάλη ακέραια τιμή στην συνάρτηση προσαρμογής (αντικειμενική

συνάρτηση κόστους) για κάθε μέλος του πληθυσμού (χρωμόσωμα).

- Υπολόγισε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κάθε χρωμοσώματος (λύσης) βάσει των τιμών των γονιδίων του προηγούμενου βήματος.
- Κράτα για μελλοντική χρήση τη λύση με την καλύτερη συνάρτηση προσαρμογής, δηλαδή το ελάχιστο συνολικό κόστος , ως βέλτιστη λύση.
- Ξεκίνα τις επαναλήψεις του γενετικού αλγόριθμο για τον πρώτο ανταγωνιστή έως ότου φτάσεις στην τελευταία γενιά (max generation=500).
    - Για κάθε ένα από τα εκατό μέλη του πληθυσμού επέλεξε τυχαία τα τρία χρωμοσώματα που θα λάβουν μέρος στην επιλογή (tournament selection) και εν συνεχεία αντικατέστησε το εκάστοτε μέλος του πληθυσμού με το ένα από τα τρία επιλεχθέντα (αυτό με την μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης).
    - Γέννα ένα τυχαίο αριθμό από 0 έως 1. Αν είναι μικρότερος από την τιμή P_c, τότε διασταύρωσε δύο χρωμοσώματα και αντικατέστησε τα στον πληθυσμό με αυτά που θα προκύψουν από τη διασταύρωση.
    - Γέννα ένα τυχαίο αριθμό από 0 έως 1. Αν είναι μικρότερος από την τιμή P_m, τότε άλλαξε την τιμή του γονιδίου (υποψήφια θέση εγκατάστασης) από 0 σε 1 και αντίστροφα.
    - Υπολόγισε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κάθε χρωμοσώματος (λύσης) του πληθυσμού βάσει των τιμών των γονιδίων όπως έχουν διαμορφωθεί μετά από τους τελεστές επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης.
    - Σύγκρινε την καλύτερη λύση της εκάστοτε γενιάς με την προηγούμενη «βέλτιστη» λύση και αποθήκευσε την καλύτερη των δύο ως νέα βέλτιστη λύση.

        - Προχώρα σε επόμενη επανάληψη του γενετικού αλγορίθμου για τον πρώτο ανταγωνιστή (έως ότου φτάσεις στην πεντακοσιοστή γενιά).
    - Λήξε τις επαναλήψεις του γενετικού αλγορίθμου για τον πρώτο ανταγωνιστή (ηγέτη).
- Λήξε τον γενετικό αλγόριθμο για τον πρώτο ανταγωνιστή (ηγέτη)
- Ξεκίνα τον γενετικό αλγόριθμο για τον δεύτερο ανταγωνιστή (ακόλουθο).
    - Δώσε τυχαίες αρχικές τιμές στα γονίδια και μια μεγάλη ακέραια τιμή στην συνάρτηση προσαρμογής (αντικειμενική συνάρτηση κόστους) για κάθε μέλος του πληθυσμού (χρωμόσωμα).
    - Υπολόγισε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κάθε χρωμοσώματος (λύσης) βάσει των τιμών των γονιδίων του προηγούμενου βήματος.
    - Κράτα για μελλοντική χρήση τη λύση με την καλύτερη συνάρτηση προσαρμογής, δηλαδή το ελάχιστο συνολικό κόστος , ως βέλτιστη λύση.
    - Ξεκίνα τις επαναλήψεις του γενετικού αλγόριθμο για τον δεύτερο ανταγωνιστή έως ότου φτάσεις στην τελευταία γενιά (max generation=500).
        - Για κάθε ένα από τα εκατό μέλη του πληθυσμού επέλεξε τυχαία τα τρία χρωμοσώματα που θα λάβουν μέρος στην επιλογή (tournament selection) και εν συνεχεία αντικατέστησε το εκάστοτε μέλος του πληθυσμού με το ένα από τα τρία επιλεχθέντα (αυτό με την μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης).
        - Γέννα ένα τυχαίο αριθμό από 0 έως 1. Αν είναι μικρότερος από την τιμή P_c, τότε διασταύρωσε δύο χρωμοσώματα και αντικατέστησε τα στον πληθυσμό με αυτά που θα προκύψουν από τη διασταύρωση.
        - Γέννα ένα τυχαίο αριθμό από 0 έως 1. Αν είναι μικρότερος από την τιμή P_m, τότε άλλαξε την τιμή του

γονιδίου (υποψήφια θέση εγκατάστασης) από 0 σε 1 και αντίστροφα.

        - Υπολόγισε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κάθε χρωμοσώματος (λύσης) του πληθυσμού βάσει των τιμών των γονιδίων όπως έχουν διαμορφωθεί μετά από τους τελεστές επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης.
        - Σύγκρινε την καλύτερη λύση της εκάστοτε γενιάς με την προηγούμενη «βέλτιστη» λύση και αποθήκευσε την καλύτερη ως νέα βέλτιστη λύση.
        - Προχώρα σε επόμενη επανάληψη του γενετικού αλγορίθμου για τον δεύτερο ανταγωνιστή (έως ότου φτάσεις στην πεντακοσιοστή γενιά).
    - Λήξε τις επαναλήψεις του γενετικού αλγορίθμου για τον δεύτερο ανταγωνιστή (ακόλουθο).
- Λήξε τον γενετικό αλγόριθμο για τον δεύτερο ανταγωνιστή (ακόλουθο)
- Για κάθε ανταγωνιστή έλεγξε αν στην βέλτιστη λύση υπάρχει η περίπτωση μιας εγκατάστασης που είναι ανοιχτή αλλά τροφοδοτεί μόνο τον εαυτό της και έλεγξε αν συμφέρει τον συγκεκριμένο ανταγωνιστή.
    - Αν δεν τον συμφέρει, δηλαδή αν υπάρχει μια άλλη ανοιχτή εγκατάσταση κοντά στην θέση της πρώτης εγκατάστασης και μπορεί να εξυπηρετήσει η δεύτερη τη θέση αυτή, τότε κλείσε την πρώτη εγκατάσταση και άλλαξε τα αποτελέσματα τροφοδοτώντας πλέον το σημείο στο οποίο υπήρχε η πρώτη εγκατάσταση από την πλησιέστερη του ανοιχτή εγκατάσταση του ίδιου ανταγωνιστή.
    - Αν τον συμφέρει, μην αλλάξεις τίποτα.
- Υπολόγισε αναλυτικά το συνολικό κόστος καθώς και τα επιμέρους κόστη της βέλτιστης λύσης για κάθε ανταγωνιστή.
- Τύπωσε στα αρχεία εξόδου τα παραπάνω κόστη καθώς και ποια σημεία ζήτησης εξυπηρετεί κάθε ανοιχτή εγκατάσταση χωριστά για κάθε ανταγωνιστή.

- Κριτήριο τερματισμού αλγορίθμου: Σύγκρινε τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο ανταγωνιστών μεταξύ τους καθώς και τα σημεία ζήτησης που εξυπηρετεί ο κάθε ανταγωνιστής.
    - Αν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρώτου ανταγωνιστή (ηγέτη) είναι μικρότερη ή ίση με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δεύτερου ανταγωνιστή (ακολούθου)

      ΚΑΙ

      Ο αριθμός των σημείων ζήτησης (ΣΖ) που εξυπηρετεί ο πρώτος ανταγωνιστής δεν είναι πολύ μικρότερος από τον αριθμό αντίστοιχα σημεία ζήτησης που εξυπηρετεί ο δεύτερος, δηλ $ΣΖ_{ηγέτη} \geq 70\%ΣΖ_{ακολούθου}$

      Ή

      Έχεις φτάσει στην εκατοστή επανάληψη
        - Τερμάτισε την επαναληπτική διαδικασία
    - Αν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρώτου ανταγωνιστή (ηγέτη) είναι μεγαλύτερη από την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δεύτερου ανταγωνιστή (ακολούθου)

      Ή

      Ισχύει για τον αριθμό των σημείων ζήτησης (ΣΖ) που εξυπηρετούν οι δύο ανταγωνιστές $ΣΖ_{ηγέτη} < 70\%ΣΖ_{ακολούθου}$.
        - Συνέχισε σε επόμενη επανάληψη

- Αποδέσμευσε όλες τις θέσεις μνήμης που αρχικά κράτησες και τερμάτισε τον αλγόριθμο.

Στο επόμενο κεφάλαιο ακολουθεί παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων μετά την εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου. Παρουσιάζονται επιγραμματικά όλα τα αποτελέσματα στο σύνολο των είκοσι σετ δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν. Τα αποτελέσματα του πρώτου σετ παρουσιάζονται εκτενέστερα.

8 Αποτελέσματα

Για τις ανάγκες του προβλήματος κατασκευάσαμε είκοσι σετ δεδομένων. Στους πίνακες 8.1 και 8.2 φαίνονται επιγραμματικά τα αποτελέσματα για τα δεδομένα αυτά για τον πρώτο και τον δεύτερο ανταγωνιστή αντιστοίχως.

α/α	*Πλήθος επαναλήψεων*	*Πιθανά σημεία εγκατάστασης*	*Πλήθος εγκαταστάσεων*	*Πλήθος πελατών*	*Συνολικό Κόστος*
1	12	25	7	25	21328.26
2	35	50	15	45	39806.91
3	19	50	15	45	36640.64
4	9	50	16	46	34675.19
5	19	100	24	78	64759.61
6	9	200	48	160	111876.95
7	6	250	63	220	135756.48
8	7	20	6	22	23319.79
9	11	40	10	42	39795.05
10	8	60	13	44	36348.46
11	40	50	10	47	37984.80
12	20	75	18	85	70452.91
13	11	230	61	199	121887.12
14	8	200	52	193	145879.44
15	11	25	5	23	23363.20
16	42	50	10	46	38365.34
17	13	50	13	45	36271.49
18	47	30	10	43	44002.13
19	25	120	30	92	63913.07
20	8	180	45	171	126535.07

Πίνακας 8.1: Αποτελέσματα του πρώτου ανταγωνιστή για το σύνολο των σετ δεδομένων

α/α	*Πλήθος επαναλήψεων*	*Πιθανά σημεία εγκατάστασης*	*Πλήθος εγκαταστάσεων*	*Πλήθος πελατών*	*Συνάρτηση κόστους*
1	12	25	5	25	26660.57
2	35	50	14	55	40063.31
3	19	50	13	55	40358.19
4	9	50	13	54	47964.20
5	19	100	28	122	71393.55
6	9	200	62	240	133114.72
7	6	250	64	280	141771.51
8	7	30	8	28	26566.57
9	11	60	14	58	45205.90
10	8	40	14	56	43564.53
11	40	50	15	53	39830.96
12	20	125	35	115	74792.66
13	11	170	46	201	125234.03
14	8	300	75	307	168711.20
15	11	25	7	27	24494.02
16	42	50	14	54	38618.50
17	13	50	13	55	39454.40
18	47	70	15	57	46366.52
19	25	80	25	108	73420.42
20	8	220	59	229	133672.44

Πίνακας 8.2: Αποτελέσματα του δεύτερου ανταγωνιστή για το σύνολο των σετ δεδομένων

Κάθε ανταγωνιστής επιλέγει, μέσα από ένα πλήθος πιθανών σημείων εγκατάστασης, τις θέσεις στις οποίες θα «ανοίξει» εγκαταστάσεις. Η επιλογή αυτή προκύπτει μέσα από τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Τα υπόλοιπα σημεία αποτελούν πλέον πελάτες οι οποίοι μπορούν να εξυπηρετηθούν από οποιαδήποτε εγκατάσταση. Οι πελάτες κατανέμονται στις αντίστοιχες εγκαταστάσεις βάσει του συνολικού κόστους το οποίο περιλαμβάνει τα κόστη εγκατάστασης, μεταφοράς και ζήτησης,.

Τα σετ δεδομένων αποτελούν ένα σύνολο των πιθανών σημείων εγκατάστασης το οποίο μπορεί να διαφέρει για κάθε ανταγωνιστή. Κάθε αρχείο εισόδου περιλαμβάνει τις συντεταγμένες (x, y) κάθε σημείου, την ζήτηση καθώς και το κόστος εγκατάστασης που θα προκύψει εάν «ανοίξει» εγκατάσταση στο σημείο αυτό.

Ανταγωνιστής 1					*Ανταγωνιστής 2*				
α/α	*x*	*Y*	*Ζήτηση*	*Κόστος*	*α/α*	*x*	*y*	*Ζήτηση*	*Κόστος*
1	765	104	18	1054	**26**	**722**	**4**	**31**	**1154**
2	**791**	**515**	**26**	**1206**	27	437	701	20	1306
3	1	797	20	1271	28	84	548	21	1371
4	491	91	27	843	29	963	63	29	943
5	**137**	**430**	**13**	**735**	30	97	311	23	835
6	37	390	20	1073	31	443	475	18	1173
7	608	876	9	813	32	210	100	20	913
8	**131**	**983**	**17**	**688**	33	305	768	25	788
9	**180**	**788**	**27**	**1155**	**34**	**392**	**941**	**26**	**1255**
10	**749**	**744**	**21**	**1038**	**35**	**550**	**941**	**11**	**1138**
11	732	782	34	1089	36	88	983	9	1189
12	950	254	9	698	37	748	77	13	798
13	453	481	11	1076	38	547	369	26	1176
14	366	413	6	707	39	531	206	12	807
15	325	864	26	848	40	135	971	18	948
16	961	605	33	1317	**41**	**724**	**865**	**9**	**1417**
17	834	776	24	938	42	44	491	29	1038
18	446	203	5	1114	**43**	**683**	**283**	**29**	**1214**
19	812	244	23	997	44	602	658	14	1097
20	**57**	**396**	**25**	**1332**	45	498	742	11	1432
21	**233**	**806**	**21**	**699**	46	142	918	27	799
22	746	333	12	472	47	162	570	25	572
23	183	106	12	808	48	364	953	9	908
24	762	991	23	918	49	449	765	33	1018
25	215	964	26	1058	50	151	364	31	1158

Πίνακας 8.3: Δεδομένα εισόδου πρώτου σετ για κάθε ανταγωνιστή (αριστερά για τον πρώτο)

Στον πίνακα 8.3 παρουσιάζονται τα δεδομένα εισόδου που αναφέραμε παραπάνω για το πρώτο σετ δεδομένων. Στα πρώτα εικοσιπέντε σημεία (αριστερά) μπορεί να ανοίξει εγκαταστάσεις ο πρώτος ανταγωνιστής, ενώ στα υπόλοιπα (δεξιά) ο δεύτερος.

Μετά την είσοδο των δεδομένων στον αλγόριθμο επιλέγονται οι θέσεις εγκατάστασης και υπολογίζονται τα κόστη μεταφοράς και ζήτησης, τα οποία σε συνδυασμό με το κόστος εγκατάστασης καθορίζουν το συνολικό κόστος. Με έντονους χαρακτήρες σημειώνονται οι τελικές θέσεις εγκατάστασης κάθε ανταγωνιστή.

Τα αναλυτικά αποτελέσματα κάθε επανάληψης του αλγορίθμου για το πρώτο σετ δεδομένων (πλήθος εγκαταστάσεων κάθε ανταγωνιστή, αριθμός πελατών, κόστη εγκατάστασης, μεταφοράς και ζήτησης καθώς και συνολικό προκύπτον κόστος) των δύο ανταγωνιστών παρατίθενται στους πίνακες 8.4 και 8.5 αντίστοιχα.

α/α	*Πλήθος εγκαταστάσεων*	*Πλήθος πελατών*	*Κόστος εγκατάστασης*	*Κόστος μεταφοράς*	*Κόστος ζήτησης*	*Συνολικό κόστος*
1	8	36	6380.00	5169.64	342.00	35648.21
2	7	34	6832.00	4372.60	365.00	32345.04
3	8	32	7635.00	2761.50	343.00	24872.52
4	7	27	5669.00	2194.78	323.00	19872.91
5	7	36	6656.00	8132.49	388.00	51198.45
6	6	28	5831.00	3742.74	317.00	27714.72
7	8	39	8640.00	6076.57	412.00	43142.00
8	10	31	9500.00	2819.31	341.00	27006.59
9	6	27	5625.00	6515.58	252.00	40722.94
10	6	22	5356.00	5286.02	281.00	34596.12
11	6	30	6033.00	6599.24	340.00	42429.21
12	7	25	6853.00	2435.05	230.00	21328.26

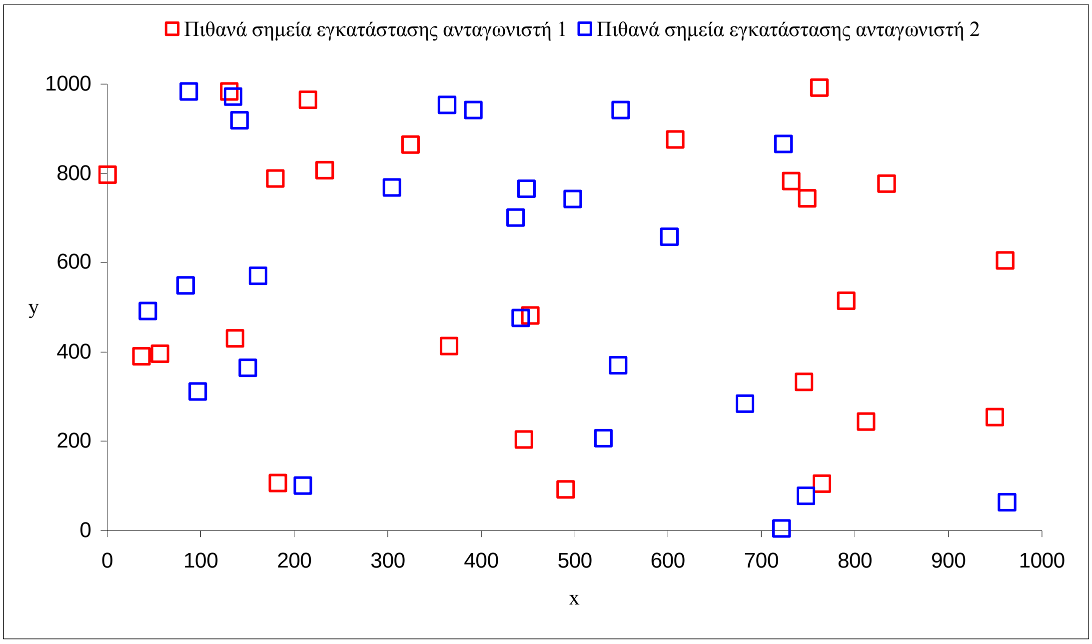
Πίνακας 8.4: Αναλυτικά αποτελέσματα του πρώτου ανταγωνιστή για το πρώτο σετ δεδομένων

α/α	*Πλήθος εγκαταστάσεων*	*Πλήθος πελατών*	*Κόστος εγκατάστασης*	*Κόστος μεταφοράς*	*Κόστος ζήτησης*	*Συνολικό Κόστος*
1	5	14	5072.00	1045.04	153.00	11827.22
2	6	16	6206.00	1115.59	194.00	13723.96
3	5	18	4705.00	1558.95	155.00	14049.76
4	6	23	6061.00	2035.95	261.00	18850.78
5	4	14	3811.00	1749.06	188.00	14436.31
6	6	22	6175.00	2108.55	247.00	19187.76
7	4	11	4123.00	885.35	140.00	9949.79
8	5	19	5868.00	1803.64	273.00	17616.22
9	6	23	6694.00	2572.66	288.00	22437.31
10	7	28	6993.00	3256.76	310.00	26376.81
11	4	20	4541.00	2685.29	236.00	20327.45
12	5	25	6178.00	3594.51	251.00	26660.57

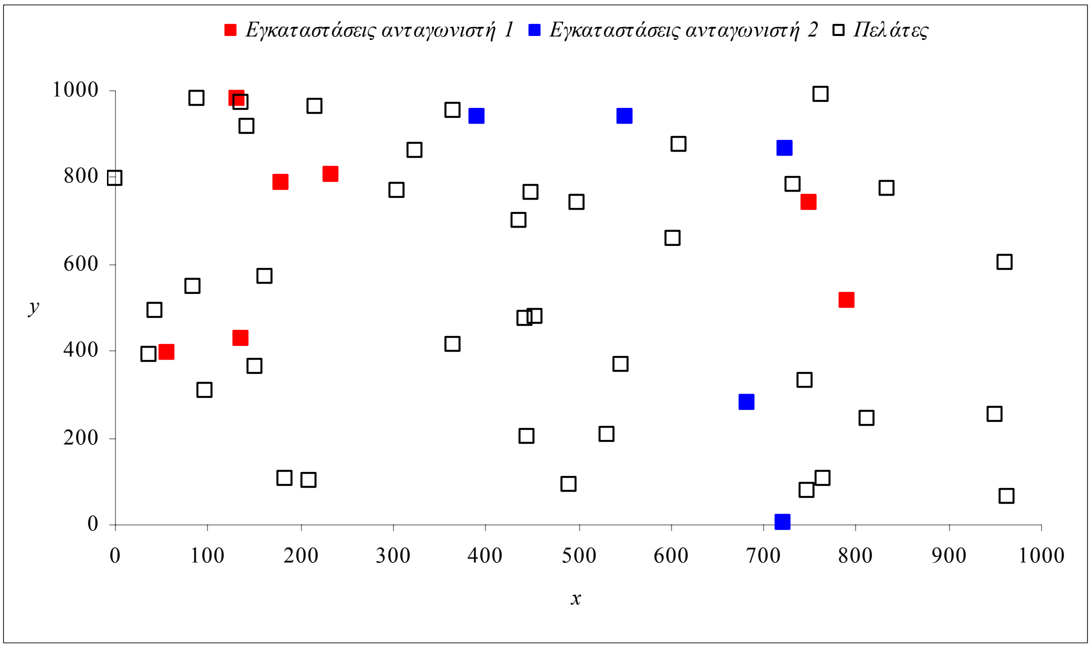
Πίνακας 8.5: Αναλυτικά αποτελέσματα του δεύτερου ανταγωνιστή για το πρώτο σετ δεδομένων

Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν το συνολικό κόστος του πρώτου ανταγωνιστή γίνει μικρότερο από αυτό του δεύτερου. Ταυτόχρονα, ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετεί ο πρώτος ανταγωνιστής δεν μπορεί να είναι μικρότερος από 60% ως 80% του αριθμού των πελατών που εξυπηρετεί ο δεύτερος. Το ποσοστό αυτό εξαρτάται από το πλήθος των πιθανών θέσεων εγκατάστασης κάθε ανταγωνιστή. Οι παραδοχές αυτές λαμβάνονται διότι, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, στόχος είναι η επικράτηση του πρώτου ανταγωνιστή. Σε κάθε περίπτωση ο αριθμός των επαναλήψεων δεν μπορεί να υπερβαίνει τις εκατό. Στο πρόβλημα που παρουσιάζουμε χρειάστηκαν μόλις δώδεκα επαναλήψεις.

Στα διαγράμματα 8.1 και 8.2 φαίνονται οι πιθανές θέσεις εγκατάστασης των δύο ανταγωνιστών καθώς και οι εγκαταστάσεις τις οποίες «ανοίγει» τελικά ο κάθε ανταγωνιστής. Τα εναπομείναντα σημεία αποτελούν πλέον απλούς πελάτες.

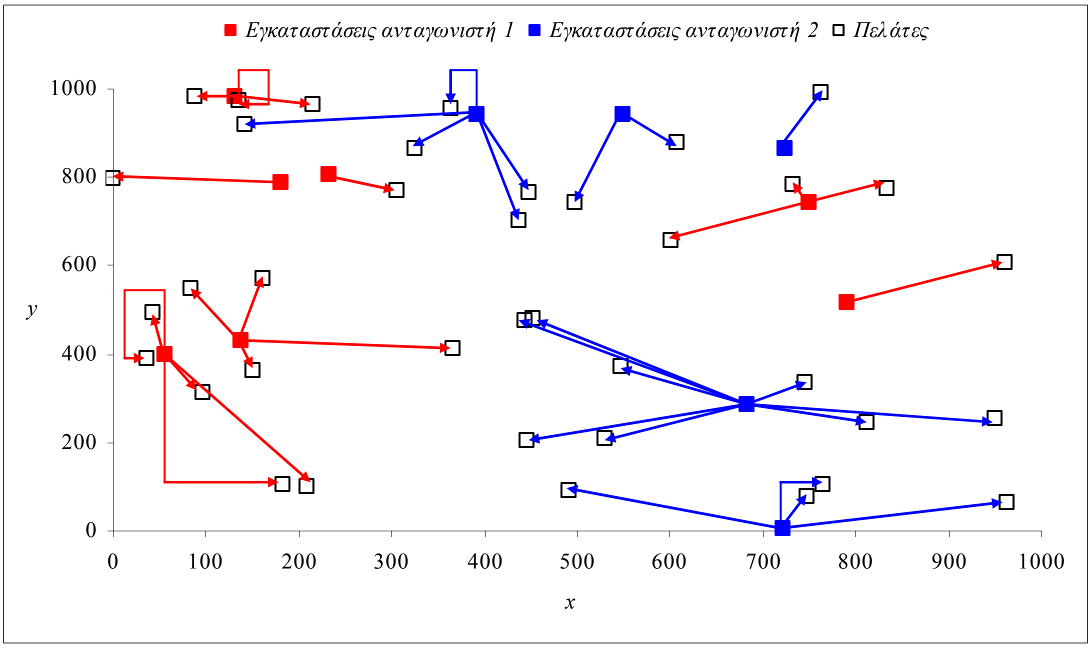


Σχήμα 8.1: Πιθανά σημεία εγκατάστασης των δύο ανταγωνιστών



Σχήμα 8.2: Εγκαταστάσεις των δύο ανταγωνιστών και πελάτες προς εξυπηρέτηση

Το διάγραμμα 8.3 αποτελεί γραφική απεικόνιση της εξυπηρέτησης των πελατών από τις εγκαταστάσεις. Να σημειωθεί ότι τα τόξα δεν υποδεικνύουν την διαδρομή από κάθε εγκατάσταση προς κάθε πελάτη παρά μόνο την μεταξύ τους συσχέτιση. Όπως έχει προαναφερθεί, άλλωστε, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων υπολογίζεται με βάση τον τύπο της ευκλείδειας απόστασης. Να σημειωθεί, ακόμη, ότι οι εγκαταστάσεις αποτελούν επίσης πελάτες οι οποίοι μάλιστα, εξ' ορισμού, αυτοεξυπηρετούνται.



Σχήμα 8.3: Εξυπηρέτηση πελατών από τις εγκαταστάσεις των δύο ανταγωνιστών

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα 8.3 ο πρώτος ανταγωνιστής θα «ανοίξει» επτά εγκαταστάσεις οι οποίες εξυπηρετούν συνολικά εικοσιπέντε πελάτες. Αντίστοιχα, ο δεύτερος ανταγωνιστής λειτουργεί πέντε εγκαταστάσεις εξυπηρετώντας επίσης εικοσιπέντε πελάτες. Η κατανομή αυτή προέκυψε έπειτα από δώδεκα συνολικά επαναλήψεις του αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, στόχος μας είναι η υπερίσχυση του πρώτου ανταγωνιστή έναντι του δεύτερου. Αυτό, πράγματι συμβαίνει στη δωδέκατη επανάληψη όπου το συνολικό κόστος του εμφανίζεται μικρότερο από αυτό του δεύτερου. Επίσης, το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούν οι δυο ανταγωνιστές τυγχάνει να είναι το ίδιο ικανοποιώντας, την παραδοχή που κάναμε παραπάνω για το πλήθος των πελατών που μπορούν να εξυπηρετούν οι δυο ανταγωνιστές. Να σημειωθεί, επίσης, ότι η ισομερής κατανομή των πελατών στους δυο ανταγωνιστές οφείλεται σε τυχαίο γεγονός.

Στο σχήμα 8.3 παρατηρούμε επίσης ότι η κατανομή των πελατών στις εγκαταστάσεις γίνεται με ικανοποιητικό τρόπο, χωρίς να παρατηρούνται σημαντικά φαινόμενα λογικής ασυνέπειας. Οι εγκαταστάσεις που επιλέχθηκαν να ανοίξουν παρουσιάζουν ικανοποιητική διασπορά στο χώρο και επιπρόσθετα, εξυπηρετούν κυρίως γειτονικούς πελάτες. Επίσης, όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω, κάθε εγκατάσταση αποτελεί ταυτόχρονα και πελάτη ο οποίος αυτοεξυπηρετείται. Δεδομένου, μάλιστα, ότι αυτό ισχύει εξ' ορισμού δεν κρίθηκε σκόπιμο να καταδειχθεί στο παραπάνω διάγραμμα.

Κλείνοντας το κεφάλαιο των αποτελεσμάτων, κρίνεται σκόπιμο να γίνουν ορισμένες χρήσιμες παρατηρήσεις.

- Η πρώτη παρατήρηση αφορά στο βαθμό εξάρτησης των αποτελεσμάτων από τα δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα, στις περιπτώσεις όπου τα πιθανά σημεία εγκατάστασης απέχουν αρκετά μεταξύ τους «ανοίγουν» αισθητά περισσότερες εγκαταστάσεις οι οποίες εξυπηρετούν λίγους πελάτες. Από την άλλη, στις περιπτώσεις όπου τα σημεία εμφανίζονται πιο συγκεντρωμένα παρατηρείται το ακριβώς αντίθετο φαινόμενο, δηλαδή μικρός αριθμός εγκαταστάσεων εξυπηρετεί μεγάλο αριθμό πελατών. Σε αυτό, βέβαια, πρέπει να λαμβάνεται, κάθε φορά, υπόψη και το κόστος εγκατάστασης κάθε σημείου.
- Επίσης, παρατηρούμε ότι η επανάληψη στην οποία περατώνεται ο αλγόριθμος ποικίλει σε κάθε σετ δεδομένων. Αξίζει να σημειωθεί πως σε κάθε περίπτωση, η περάτωση του αλγορίθμου έγινε πριν το όριο των εκατό επαναλήψεων. Επομένως, για την περάτωση του αλγορίθμου λήφθηκαν υπόψη μόνο οι άλλες δύο συνθήκες τερματισμού (που αφορούν το κόστος και το πλήθος των πελατών).
- Όσον αφορά στις άλλες δύο συνθήκες περάτωσης είναι σαφές ότι η δεύτερη, που αφορά στο πλήθος των πελατών που εξυπηρετεί κάθε ανταγωνιστής, εμφανίζει αισθητά αυξημένη πολυπλοκότητα καθώς μεταβάλλεται κάθε φορά που αλλάζουν τα δεδομένα. Η συνθήκη τερματισμού για ίδιο πλήθος πιθανών θέσεων εγκατάστασης των δύο ανταγωνιστών υποχρεώνει τον αλγόριθμο να συνεχίζει να εκτελείται έως ότου το συνολικό κόστος του πρώτου ανταγωνιστή να γίνει μικρότερο από αυτό του δεύτερου. Παράλληλα το πλήθος των σημείων που εξυπηρετεί ο πρώτος ανταγωνιστής πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το 70% του πλήθους των σημείων που εξυπηρετεί ο δεύτερος. Σε περίπτωση όπου οι δύο ανταγωνιστές έχουν διαφορετικό πλήθος πιθανών σημείων εγκατάστασης, το ποσοστό αυτό μεταβάλλεται. Να σημειωθεί ότι για τα συγκεκριμένα σετ δεδομένων το ποσοστό αυτό κυμάνθηκε από 60% έως 80%.

9 Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα

Η ποιότητα των δεδομένων παίζει καθοριστικό ρόλο στη εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, μεγάλο εύρος αποστάσεων, δηλαδή συντεταγμένες (x, y) με μεγάλη διασπορά και μεγάλο εύρος τιμών, σε συνδυασμό με μικρά κόστη εγκατάστασης έχει ως αποτέλεσμα τη λειτουργία πολλών εγκαταστάσεων κάθε μία από τις οποίες εξυπηρετεί μικρό αριθμό πελατών. Αντίθετα, μικρές αποστάσεις σε συνδυασμό με μεγάλα κόστη εγκατάστασης οδηγούν στη λειτουργία μικρού αριθμού εγκαταστάσεων κάθε μια από τις οποίες εξυπηρετεί μεγάλο πλήθος πελατών.

Η ζήτηση παίζει επίσης ρόλο, αλλά όχι τόσο καθοριστικό. Σημεία αυξημένης ζήτησης προτιμώνται και υπάρχει περίπτωση να επιλεγούν ως εγκαταστάσεις παρά το ενδεχόμενο υψηλό κόστος εγκατάστασης. Συνεπώς, όπου παρατηρείται δημιουργία πολλών εγκαταστάσεων, συνήθως οφείλεται στις παραπάνω παρατηρήσεις.

Όταν ο αριθμός υποψήφιων θέσεων εγκατάστασης των δύο ανταγωνιστών διαφέρει, τότε αυτός που έχει στη διάθεσή του περισσότερες επιλογές είναι πιθανότερο να επιλέξει «καλύτερα», πιο αποδοτικά, σημεία και να «ανοίξει» εν τέλει περισσότερες εγκαταστάσεις από τον άλλο. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να προσεγγίσει μεγαλύτερο πλήθος πελατών γεγονός που καθιστά τη συνολική του επένδυση πιο αποδοτική.

Τα κόστη εγκατάστασης, ζήτησης και μεταφοράς εισάγονται σταθμισμένα στην αντικειμενική συνάρτηση. Με μεταβολή του συντελεστή (βάρους) κάθε κόστους μπορούμε να εστιάσουμε όπου επιθυμούμε. Για παράδειγμα, αν είμαστε βέβαιοι ότι η επένδυση θα είναι κερδοφόρα μακροπρόθεσμα και δεν μας ενδιαφέρει το βραχυπρόθεσμο κέρδος τότε δεν θα πρέπει να μας απασχολεί ιδιαίτερα το κόστος εγκατάστασης, του οποίου η απόσβεση θα ολοκληρωθεί σε κάποιο ορισμένο χρονικό διάστημα. Στη περίπτωση αυτή, απλά μειώνουμε τον συντελεστή του στη συνάρτηση.

Η ύπαρξη αντικρουόμενων κριτηρίων βελτιστοποίησης καθιστά το ανταγωνιστικό πρόβλημα χωροθέτησης πολυκριτήριο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, ζητούμενο αποτελεί η ελαχιστοποίηση του κόστους με ταυτόχρονη μεγιστοποίηση του μεριδίου αγοράς κάθε ανταγωνιστή. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η επικράτηση του πρώτου ανταγωνιστή στο παίγνιο που επιλύεται. Τούτο συμβαίνει στην περίπτωση όπου ο πρώτος ανταγωνιστής καταφέρει να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος που προκύπτει από τα κόστη εγκατάστασης, ζήτησης και μεταφοράς και παράλληλα «κερδίσει» όσους περισσότερους πελάτες μπορεί.

Η συγκεκριμένη επίλυση με χρήση διεπίπεδου προγραμματισμού βασισμένου σε γενετικούς αλγορίθμους δεν μπορεί να προσεγγίσει το παραπάνω πολυκριτήριο πρόβλημα επακριβώς. Αντικείμενο μελλοντικής έρευνας θα μπορούσε, κάλλιστα, να αποτελέσει η προσέγγιση του θέματος με μια μέθοδο πολυκριτήριας βελτιστοποίησης με χρήση γενετικών αλγορίθμων και να εξαχθεί το διάγραμμα Pareto από το οποίο θα μπορεί ο εκάστοτε ανταγωνιστής να επιλέξει την βέλτιστη λύση, ανάλογα με την βαρύτητα που δίνει στο κόστος και το πλήθος των πελατών που θέλει να «κερδίσει».

Στην παρούσα εργασία η απόπειρα προσέγγισης του πολυκριτήριου αυτού προβλήματος έγινε θέτοντας βάρη στην αντικειμενική συνάρτηση. Έτσι, θεωρήσαμε ότι το κόστος εγκατάστασης παραμένει ως έχει, ενώ τα κόστη μεταφοράς και ζήτησης θα πρέπει να αυξηθούν (ήτοι να πολλαπλασιαστούν με κάποιον θετικό ακέραιο). Ωστόσο, η τελική μορφή της συνάρτησης εξαρτάται και από τα εκάστοτε δεδομένα.

Ως αντικείμενο μελλοντικής έρευνας θα μπορούσε κανείς να προσθέσει περιορισμούς σχετικά με την ικανοποίηση της ζήτησης των πελατών ή την ποιότητα των τελικών προϊόντων. Τέλος θα μπορούσε να συμπεριληφθεί και η «ευκολία πρόσβασης» σε κάθε σημείο εξυπηρέτησης (απομακρυσμένες περιοχές, νησιά, κλπ).

Ο ανταγωνισμός, και ειδικά το δυοπώλειο είναι πολύ έντονο στη σύγχρονη εποχή και βρίθει περεταίρω μελέτης και έρευνας. Η χρήση διεπίπεδου προγραμματισμού με την μορφή παιγνίου είναι ιδανική για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων. Κάθε ανταγωνιστής μπορεί να αποκτήσει συγκριτικό πλεονέκτημα έναντι του «αντιπάλου» του αν καταφέρει να προβλέψει τις κινήσεις του.

Βιβλιογραφία

[1] Taylor, D.A.,: Supply Chains: A Manager's Guide, Addison – Wesley (2004)

[2] Σιφνιώτης, Κ.Χ.,: Logistics management: Θεωρία και Πράξη, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα (1997)

[3] Ballou, R.H.,: Business Logistics Management, 5th Edition, Prentice Hall (2004)

[4] Sule, D.R.,: Logistics of Facility Location and Allocation, Louisiana Tech University, Marcel Dekker, Inc. (2001)

[5] Hotelling, H. (1929). Stability in competition, *The Economic Journal,* 30(39), 41-57.

[6] Plastria F.: Continuous location problems In: Drezner Z. (Ed.) Facility Location: A survey of applications and methods, Springer-Verlag, New York (1995)

[7] Rahman, S.,U., Smith, D.,K.,: Use of location-allocation models in health service development planning in developing nations, Vol.123, European Journal of Operational Research (2000) 437-452

[8] Cohon J.L.: Multiobjective programming and planning, Academic Press, New York (1978)

[9] Eiselt, H., Laport, G.,: Objectives in facility location, In: Drezner Z.(Ed) Facility Location: A survey of applications and methods, Springer-Verlag, New York (1995)

[10] Kratica, J., Tosic, D., Filipovic, V., Ljubic, I.: Solving the simple plant location problems by genetic algorithm, Vol. 35, RAIRO Operations Research (2001) 127–142

[11] Erlenkotter, D.: A dual-based procedure for uncapacitated facility location, Vol. 26, Operations Research (1978) 992–1009

[12] Alves, M.L., Almeida, M.T.,: Simulated annealing algorithm for simple plant location problems, Vol. 12, Revista Investigacao Operacional (1992)

[13] Aydin, M.E., Fogarty, T.C.: A Distributed Evolutionary Simulated Annealing Algorithm for Combinatorial Optimization Problems, Vol. 10, Journal of Heuristics (2004) 269–292

[14] Al-Sultan, K.S., Al-Fawzan, M.A.,: A tabu search approach to the uncapacitated facility location problem, Vol. 86, Annals of Operations Research (1999) 91–103

[15] Michel, L., Van Hentenryck, P.,: A simple tabu search for warehouse location, Vol. 157, European Journal of Operational Research (2004) 576–591

[16] Sun, M.,: Solving the uncapacitated facility location problem using tabu search, Computers & Operations Research, Corrected Proof, in press (2005)

[17] Ghosh, D.,: Neighborhood Search Heuristics for the Uncapacitated Facility Location Problem, European Journal of Operation Research, (2002) 150-162

[18] Resende, M.G.C., Werneck, R.F.: A hybrid multistart heuristic for the uncapacitated facility location problem, Research Technical Report TD-SRELRR, AT&T Labs (2003)

[19] Πετράκης Ε., καθηγητής στο τμήμα Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Υλικό από τις σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος “Θεωρία αποφάσεων και θεωρία παιγνίων” (2009)

[20] Binmore, K,: Playing for real: a text on game theory, New York: Oxford University Press, Inc. (2007)

[21] Stuart, H.W. Jr.,: Cooperative Games and Business Strategy, in "Game theory and business applications", ed. Chatterjee, K., Samuelson, F.W., Kluwer Academic Publishers (2002) 189-213

[22] Chatterjee, K.,: Game Theory and the Practice of Bargaining, in "Game theory and business applications", ed. Chatterjee, K., Samuelson, F.W., Kluwer Academic Publishers (2002) 273-295

[23] Langham, A.E., Grant P.W.,: A multilevel k-way portioning algorithm for finite element meshes using competing ant colonies. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, July 13-17, San Francisco, CA., USA (1999) 1602-1608

[24] Bialas, W.F., Karwan, M.H.,: Two-level linear programming, Vol. 30, Manage. Sci. (1984) 1004-1020

[25] Sakawa, M., Nishizaki, I., Oka, Y.,: Interactive fuzzy programming for multiobjective two-level linear programming problems with partial information of preference, Vol. 2, Int. J. Fuzzy Syst., (2000) 79-86

[26] Nash, J.: Non-cooperative games, Vol. 54, Annals of Mathematics (1951) 286–295

[27] Bracken, J., McGill, J.: Mathematical programs with optimization problems in the constraints, Vol. 21, Operations Research (1973) 37–44

[28] Candler, W., Norton, R.,: Multilevel programming. Technical Report 20, World Bank Development Research Center, Washington D.C., USA (1977)

[29] Aiyoshi, E., Shimizu, K.,: Hierarchical decentralized systems and its new solution by a barrier method, Vol. 11, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (1981) 444–449

[30] Dempe, S.,: Foundations of Bilevel Programming, Kluwer Academie Publishers, Dordrecht (2002)

[31] Dempe, S.,: Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programming with equilibrium constraints, Vol.52, Optimization (2003) 333-359

[32] Cote, J.P., Marcotte, P., Savard, G.,: A bilevel modeling approach to pricing and fare optimization in the airline industry, Vol. 2, Journal of Revenue and Pricing Management (2003) 23–36

[33] Hearn, D.W., Ramana, M.V.,: Solving congestion toll pricing models. In P. Marcotte (Ed.), Equilibrium and advanced transportation modelling (1998) 109–124, Dordrecht: Kluwer Academic

[34] Larsson, T., Patriksson, M.,: Side constrained traffic equilibrium models–traffic management through link tolls, In P. Marcotte, S. Nguyen (Eds.), Equilibrium and advanced transportation modelling (1998) 125–151, Dordrecht: Kluwer Academic.

[35] Florian, M., Chen, Y.,: A coordinate descent method for the bi-level o-d matrix adjustment problem, Vol. 2, International Transactions in Operational Research (1995) 165–179

[36] Kara, B.Y., Verter, V.,: Designing a road network for hazardous materials transportation, Vol. 38, TransportationScience (2004) 188–196

[37] LeBlanc, L.J.,: Meathematical programming algorithms for large scale network equilibrium and network design problems, PhD thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois (1973)

[38] Marcotte, P.,: Network design problem with congestion effects: a case of bilevel programming, Vol. 34, Mathematical Programming (1986) 23–36

[39] Constantin, I., Florian, M.,: Optimizing frequencies in a transit network: a nonlinear bi-level programming approach, Vol. 2, International Transactions in Operational Research (1995) 149–164

[40] Hobbs, B.F., Nelson, S.K.,: A nonlinear bilevel model for analysis of electric utility demand-side planning issues, Vol. 34, Annals of Operations Research (1992) 255–274

[41] Haurie, A., Loulou, R., Savard, G.,: A two player game model of power cogeneration in new England, Vol. 37, IEEE Transactions on Automatic Control (1992) 1451–1456

[42] Bard, J.F., Plummer, J., Sourie, J.C.,: A bilevel programming approach to determining tax credits for biofuel production, Vol. 120, European Journal of Operational Research (2000) 30–46

[43] Pang, J.S., Trinkle, J.C.: Complementarity formulations and existence of solutions of dynamic multi-rigid-body contact problems with coulomb friction, Vol. 73, Mathematical Programming (1996) 199–226

[44] Outrata, J., Kocvara, M.,: Effective reformulations of the truss topology design problem, Vol. 7, Optimization and Engineering (2006) 201–219

[45] Van Ackere, A.,: The principal/agent paradigm: characterizations and computations, Vol. 70, European Journal of Operations Research (1993) 83–103

[46] Sherali, H.D., Soyster, A.L., Murphy, F.H.,: Stackelberg-Nash-Cournot equilibria: characterizations and computations, Vol. 31, Operations Research (1983) 253–276

[47] Kolstad, C.D.,: A review of the literature on bi-level mathematical programming. Technical Report LA-10284-MS, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico, USA (1985)

[48] Hsu, S., Wen, U.,: A review of linear bilevel programming problems, Vol. 13, Proceedings of the National Science Council, Republic of China, Part A: Physical Science and Engineering (1989) 53–61

[49] Ben-Ayed, O.,: Bilevel linear programming, Vol. 20, Computers and Operations Research (1993) 485–501

[50] Colson, B.,: Mathematical programs with equilibrium constraints and nonlinear bilevel programming problems, Master's thesis, Department of Mathematics, FUNDP, Namur, Belgium (1999)

[51] Marcotte, P., Savard, G.,: Bilevel programming: a combinatorial perspective, In: D. Avis, A. Hertz, & O. Marcotte (Eds.), Graph theory and combinatorial optimization, Boston: Kluwer Academic (2005)

[52] Shimizu, K., Ishizuka, Y., Bard, J. F.: Nondifferentiable and two-level mathematical programming, Dordrecht: Kluwer Academic (1997)

[53] Bard, J.F.,: Practical bilevel optimization, Vol. 30, Nonconvex optimization and its applications, Dordrecht: Kluwer Academic (1998)

[54] Migdalas, A., Pardalos, P.M., Värbrand, P.: Multilevel optimization: algorithms and applications, nonconvex optimization and its applications, Vol. 20, Dordrecht: Kluwer Academic (1997)

[55] Jeroslow, R.G.,: The polynomial hierarchy and a simple model for competitive analysis, Vol. 32, Mathematical Programming (1985) 146–164.

[56] Savard, G., Gauvin, J.,: The steepest descent direction for the nonlinear bilevel programming problem, Vol. 15, Operations Research Letters (1994) 265–272

[57] Vicente, L.N., Calamai, P.H.: Geometry and local optimality conditions for bilevel programs with quadratic strictly convex lower levels, In: D. Du, & M. Pardalos (Eds.), Minimax and applications. Nonconvex optimization and its applications, Vol. 4, Dordrecht: Kluwer Academic (1995) 141-151

[58] Hansen, P., Jaumard, B., Savard, G.,: New branch-and-bound rules for linear bilevel programming, Vol. 13, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing (1992) 1194–1217

[59] Bialas, W., Karwan, M., Shaw, J.,: A parametric complementarity pivot approach for two-level linear programming. Technical Report 80-2, State University of New York at Buffalo, Operations Research Program (1980)

[60] Ben-Ayed, O., Blair, C.,: Computational difficulties of bilevel linear programming, Vol. 38, Operations Research (1990) 556–560

[61] Kolstad, C.D., Lasdon, L.S.,: Derivative estimation and computational experience with large bilevel mathematical programs, Vol. 65, Journal of Optimization Theory and Applications (1990) 485–499

[62] Vicente, L.N., Savard, G., Júdice, J.J.,: Descent approaches for quadratic bilevel programming, Vol. 81, Journal of Optimization Theory and Applications (1994) 379–399

[63] Falk, J.E., Liu, J.,: On bilevel programming, Part I: General nonlinear cases, Vol. 70, Mathematical Programming (1995) 47–72

[64] Ishizuka, Y., Aiyoshi, E.,: Double penalty method for bilevel optimization problems, Vol. 34, Annals of Operations Research (1992) 73–88

[65] Case, L.M.: An _1 penalty function approach to the nonlinear bilevel programming problem, PhD thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada (1999)

[66] Conn, A.R., Gould, N.I.M., Toint, Ph.L.,: Trust-region methods. Philadelphia: SIAM (2000)

[67] Colson, B., Marcotte, P., Savard, G.,: A trust-region method for nonlinear programming: algorithm and computational experience, Vol. 30, Computational Optimization and Applications (2005)

[68] Marinakis, Y., Marinaki, M., Michel, L.,: A Bilevel Genetic Algorithm for a real life location routing problem. Vol. 11, No.1, International Journal of Logistics: Research and Applications (2008) 49–65

[69] Sun, H., Gao, Z., Wu, J.,: A bi-level programming model and solution algorithm for the location of logistics distribution centers. Vol. 32, Applied Mathematical Modelling (2008) 610-616

[70] Calvete, H.I., Galé, C., Mateo, P.M.,: A new approach for solving linear bilevel problems using genetic algoriths. European Journal of Operational Research (2007)

[71] Marinakis, Y., Migdalas, A., Pardalos, P.M.,: A new bilevel formulation for the vehicle routing problem and a solution method using a genetic algorithm, Vol. 38, J Glob Optim (2007) 555-580

[72] Osman, M.S., Abd El-Wahed, W.F., El Shafei, M.M.K., Abd El Wahad, H.B.,: A Solution Methodology of Bi-Level Programming Based on Genetic Algorithm, Vol. 4, Journal of Mathematics and Statistics 5 (2009) 352-359

[73] Alekseeva, E., Kochetova, N., Kochetov, Y., Plyastnov, A.,: A Hybrid Memetic Algorithm for the Competitive p-Median Problem, 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing, Moscow, Russia (2009) 1516-1520

[74] Wang Guang-min, Wang Xian-jia, Wan Zhong-ping, Jia Shi-hui,: An adaptive genetic algorithm for solving bilevel linear programming problem, Vol. 28 (12), Applied Mathematics and Mechanics (English Edition) (2007) 1605-1612

[75] Yanh, J., Zhang, M., He, B., Yanh, C.,: Bi-level programming model and hybrid genetic algorithm for the flow interception problem with customer choice, Vol. 57, Computing and Mathematics Application (2009) 1985-1994

[76] Mathieu, R., Pittard, L., Anandalingam, G.,: Genetic algorithm based approach to bi-level linear programming, Vol. 28, Recherrche opérationnelle/ Operations Research (1994) 1-21

[77] Wang Guang-Min, Wan Zhong-Ping, Wang Xian-Jia, An Zhong-Hua,: Genetic Algorithm for Solving Convex Quadratic Bilevel Programming Problem, eprints for the optimization community (2003)

[78] Jaramillo, J.H., Bhadury, J., Batta, R.,: On the use of genetic algorithms to solve location problems, Vol. 29, Computers and Operations Research (2002) 761-779

[79] Uno, T., Katagiri, H., Kato, K.,: An application of Particle Swarm Optimization to Bilevel Facility Location Problems with Quality of Facilities, Vol. 12, Asia pacific management review (2007) 183-190

[80] Whitley, D.,: A Genetic Algorithm Tutorial, Department of Computer Science, Colorado State University (1993)

[81] Goldberg, D.,: Genetic Algorithms in Search, Optimization in Machine Learning, Addison Wesley, Reading (1989)

[82] Holland, J.H.,: Outline for a logical theory of adaptive systems,Vil. 3, J. Assoc. Comput. Mach. (1962) 297-314

[83] Holland, J.H.,: Adaption in Natural and Artificial Systems, University of Michigan Press, Ann Arbor (1975)

[84] Holland, J.H.,: Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence, MIT Press (1992)

[85] Michalewicz, Z.,: Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs, (2nd ed.), Springer-Verlag (1994)

[86] Wendell, R.E. and McKelvey, R.D. (1981). New perspectives in competitive location theory, *European Journal of Operational Research,* 6(2)**,** 174-182.

[87] Hakimi, S.L. (1983). On locating new facilities in a competitive environment. *European Journal of Operational Research,* 12(1), 29-35.

[88] Drezner, Z. (1982). Competitive location strategies for two facilities. *Regional Science and Urban Economics,* 12(4), 85-493.

[89] Karkazis, J. (1989). Facilities location in a competitive environment: A promethee based multiple, criteria analysis. *European Journal of Operational Research,* 42(3), 294-304.

[90] Stackelberg H (1934) Markform and Gleichgewicht. Springer, Berlin Heidelberg New York

[91] Eiselt HA, Laporte G (1996) Sequential location problems. Eur J Oper Res 96:217–231

[92] Hakimi SL (1990) Location with spatial interactions: competitive locations and games. In: Mirchandani PB, Francis RL (eds) Discrete location theory. Wiley, New York, pp 439–478

[93] Drezner T, Eiselt HA (2002) Comsumers in competitive location models. In: Drezner Z, Hamacher HW (eds) Facility location: applications and theory. Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 151–178

[94] Robeson, J.F., Copacino, W.C.,: The Logistics Handbook, The Free Press (1994)

[95] Stock & Lambert: Strategic Logistics Management, 3rd Edition, Irwin Mc-Graw Hill (1993)

[96] Cristofides, N.,: Graph Theory. An Algorithm Approach, New York: Academic Press (1975)

[97] Hansen, P., Jaumard, B.,: Cluster Analysis and Mathematical Programming, Vol. 79, Mathematical Programming (1997) 191-215

[98] Krarup, J., Pruzan, P.,: The simple plant location problem: survey and synthesis, Vol.12, N 1, European J. Oper. (1983) 36-81

[99] Mirchandani, P., Francis, R., (eds.): Discrete Location Theory, Wiley-Intersience (1990)

[100] Beresnev, V., Gimadi, E., Dementev, V.,: Extremal Standartization Problems, Novosibirsk: Nauka (1978)

[101] Diaz, J.A., Fernandez, E.,: Column generation for the single source capacitated plant location problem, Vol.1, Technical report DR 2000/17, UPC Barcelona (2000)

[102] Sridharan, R.,: The capacitated plant location problem, Vol. 87, European Journal of Operational Research (1995) 203–213

[103] Holmberg, K., Ronnqvist, M., Yuan, D.,: An exact algorithm for the capacitated facility location problems with single sourcing, Vol.113, European Journal of Operational Research (1999) 544–559

[104] Λυκοθανάσης Σ., καθηγητής στο τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Υλικό από τις σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος «Θεωρία αποφάσεων" του εργαστηρίου Αναγνώρισης Προτύπων στον τομέα Θεμελιώσεων και Εφαρμογών της Επιστήμης των Υπολογιστών (2008)

[105] Rasmusen, E., Petrakis, E.,: Defining the Mean Preserving Spread: 3-pt versus 4-pt, in "Decision Making under Risk and Uncertainty: New Models and Empirical Findings", ed. John Geweke, Kluwer Academic Publishers (1992) 53-58

[106] Colson, B., Marcotte, P., Savard, G.,: Bilevel programming: a survey, Vol. 3, 4OR (2005) 87–107

[107] DeJong, K.,: An Analysis of the Behavious of a Class of Genetic Adaptive Systems, PhD Dissertion, Department of Computer and Communication Sciences, University of Michigan, Ann Arbor (1975)

[108] Wang, G., Wan, Z., Wang, X.,: Solving Method for a Class of Bilevel Linear Programming based on Genetic Algorithms, eprints for the optimization community (2003)

[109] Santos-Peñate, D., R., Suárez-Vega, R., Dorta-González, P.,: The Leader-Follower Location Madel, Vol. 7, Netw Spat Econ (2007) 45-61

[110] Aboolian, R., Berman, O., Krass, D.,: Competitive facility location model with concave demand, Vol. 181, European Journal of Operational Research (2007) 598-619

[111] Shmoys, D.B., Tardos, E., Aardal, K,.: Approximation algorithms for facility location problems, Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (1998)

[112] Alexandrov, N., Dennis, J.E.Jr.,: Algorithms for bilevel optimization, AIAA/ NASA/ USAF/ ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analyis and Optimization (1994)