ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΕΝΔΡΑ(MARTINGALES) ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ BANACH, ΑΡΙΘΜΟΙ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ ΤΕΛΕΣΤΩΝ ΣΤΟΝ L^1

ΠΑΠΑΔΕΡΑΚΗ ΙΩΑΝΝΑ

Επιβλέπων : Επίκουρος Καθηγητής **Πετράκης Μίνως**

ΧΑΝΙΑ , 2012

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Μίνωα Πετράκη, για την βοήθεια του, την επιστημονική καθοδήγηση, όσο και για την ηθική υποστήριξη που μου προσέφερε κατά την διάρκεια της εργασίας μου.

Ευχαριστώ τους καθηγητές : κ. Δ. Κανδυλάκη (Αναπληρωτή Καθηγητή) και κ. Α. Μανουσάκη (Επίκουρο Καθηγητή) που συμμετείχαν στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης.

Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδάκτορα Αναστάση Σηφαλάκη και την υποψήφια διδάκτορα Μαριάννα Παπαδομανωλάκη για τις συμβουλές τους, την βοήθεια και το κουράγιο που μου έδιναν κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος ευχαριστώ την οικογένεια μου για την ηθική συμπαράσταση και υπομονή που μου έδιναν αυτά τα χρόνια.

Η εργασιά αυτή κατατέθηκε στο Γενικό τμήμα του Πολυτεχνείου Κρήτης τον Φεβρουάριο του 2012.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή παραθέτουμε μία σύντομη εισαγωγή στη θεωρία χώρων Banach με την Radon Nikodym ιδιότητα(RNP).

Ορίζουμε την RNP και παρουσιάζουμε τα βασικα θεωρήματα(σχέση της RNP με δένδρα,martingales και τελεστές στον L^1).

Στο κεφάλαιο 5 αποδεικνύουμε ότι άν $T : L^1 \to X$ είναι φραγμένος τελεστής και c_n είναι οι αριθμοί Gelfand του περιορισμού του T στον L^∞ τότε ο χώρος X περιέχει ένα δένδρο του οποίου οι διαφορές(nodes) ικανοποιούν τη σχέση $\left\| \sum_{k=1}^{2^n} d_{n,k} \right\| \geq 2^{n+1} \cdot c_{2^n}$.

Τέλος στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε γνωστά αποτελέσματα για ημιεμφυτεύσεις του L^1 σε χώρους Banach.

1.ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ:

Εστω (Ω,Σ,λ) ένας χώρος πιθανότητας και X ένας χώρος Banach.

Μία συνάρτηση $f:\Omega\to X$ καλείται απλή εάν υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots x_n \in X$ και $E_1, E_2, \ldots E_n \in \Sigma$ έτσι ώστε $f=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot X_{E_i}$,όπου $X_{E_i}(\omega)=1$ εάν $\omega \in E_i$ και $X_{E_i}(\omega)=0$ εάν $\omega \notin E_i$. Το (Bochner) ολοκλήρωμα μιας απλής συναρτήσεως f είναι εξ'ορισμού: $\int_E f d\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \lambda(E\cap E_i), E\in\Sigma.$

Μία συνάρτηση $f:\Omega\to X$ καλείται μετρήσιμη εάν υπάρχει μια ακολουθία απλών συναρτήσεων $(s_n)_{n\in N}$ έτσι ώστε $\lim_n \|s_n - f\| = 0$ λ-σχεδόν παντού.

Εάν $f:\Omega\to X$ είναι μετρήσιμη και άν υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\lim_n \int_\Omega \|s_n - f\| d\lambda = 0.$ Τότε η f καλείται Bochner ολοκληρώσιμη.Σ'αυτή την περίπτωση το $\int_E f d\lambda$ ορίζεται για κάθε $L\in\Sigma$ σαν το όριο $\lim_n \int_E s_n d\lambda.$

Έστω $1 \leqq p < \infty$ τότε $L_p(s,\Sigma,\mu)$ είναι το σύνολο όλων των μ-μετρήσιμων συναρτήσεων $f:S\to X$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\|f(\cdot)\|^p$ είναι μ-ολοκληρώσιμες.Από την νόρμα $|f|$ ενός στοιχείου $f\in L_p(s,\Sigma,\mu)$ εννούμε την ποσότητα:$|f| = \left[\int_s \|f(s)\|^p d\mu(s)\right]^{\frac{1}{p}}$.Όταν είναι σκόπιμο,για λόγους σαφήνειας,το σύμβολο $|f|_p$ θα χρησιμοποιείται για την νόρμα ενός στοιχείου στον $L_p(s,\Sigma,\mu)$.

1.1 Θεώρημα : Έστω $f:\Omega\to X$ μία μετρήσιμη συνάρτηση.Η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη εάν και μόνο άν $\int_\Omega \|f\| d\lambda < \infty$.

Με $L_X^1(\lambda)$ συμβολίζουμε τον χώρο *Banach* όλων των *Bochner* ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με νόρμα $\|f\|_{L_X^1} = \int_\Omega \|f\| d\lambda$.

Θεωρήματα για Bochner ολοκληρώσιμες συναρτήσεις :

1.Έστω T ένας κλειστός τελεστής από τον χώρο *Banach X* στον χώρο *Banach Y* .Εάν η $f : \Omega \to X$ και η $Tf : \Omega \to Y$ είναι *Bochner* ολοκληρώσιμες, τοτε $T\left(\int_E f d\lambda\right) = \int_E (Tf) d\lambda$.

2. Εάν $f \in L_X^1$ και $E \in \Sigma$, $\lambda(E) > 0$ τότε $\frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda \in \overline{co}(f(E))$.

3. Εάν $f : [0,1] \to X$ είναι *Bochner* ολοκληρώσιμη τότε για όλα σχεδόν τα $s \in [0,1]$ έχουμε $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t) dt = f(s)$.

4. Εάν $f, g \in L_X^1$ και $\int_E f d\lambda = \int_E g d\lambda \ \forall\ E \in \Sigma$ τότε $f = g$ λ – σχεδόν παντού.

5. Εάν $f \in L_X^1$ τότε $\|\int_E f d\lambda\| \leq \int_E \|f\| d\lambda \ \forall E \in \Sigma$.

6. Έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία απο *Bochner* ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_n : \Omega \to X$.Εάν $\lim_n \lambda(\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \varepsilon\} = 0 \ \forall \varepsilon > 0)$ και εάν υπάρχει πραγματική *Lebesque* ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\|f_n\| \leq g$ λ -σχεδόν παντού,τότε η f είναι *Bochner* ολοκληρώσιμη και $\lim_n \int_E f_n d\lambda = \int_E f_n d\lambda \ \forall E \in \Sigma$

1.2 Ορισμός : Η απεικόνιση $\vec{\mu} : \Sigma \to X$ *καλείται διανυσματικό μέτρο (vector* *measure) εάν* $\vec{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(\mathrm{A}_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (A_n)$ *για κάθε ακολουθία* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ξένων συνόλων από την σ-άλγεβρα Σ.*

Η κύμανση (variation) ενός διανυσματικού μέτρου $\vec{\mu}$, είναι η (επεκταμένη πραγματικη) συναρτηση $\left|\vec{\mu}\right| : \Sigma \to [0,\infty]$ της οποίας η τιμή σ'ένα σύνολο $\mathrm{E} \in \Sigma$ είναι $\left|\vec{\mu}\right| = \sup_{\pi} \sum_{\mathrm{A}\in\pi} \left\| \vec{\mu}(\mathrm{A}) \right\|$ όπου το supermum το παίρνουμε πάνω σε όλες τις διαμερίσεις του Ε σε πεπερασμένο το πλήθος ξένων ανά δύο στοιχείων από την Σ.Εάν $\left|\vec{\mu}\right|(\Omega) < \infty$ τότε το διανυσματίκο μέτρο $\vec{\mu}$ καλείται μέτρο φραγμένης κύμανσης (bounded variation).

Εάν (Ω,Σ,λ) είναι ένας χώρος πιθανότητας , X ένας χώρος *Banach* και $f \in L_X^1(\lambda)$ μία *Bochner* ολοκληρώσιμη συνάρτηση, μπορούμε να ορίσουμε ένα διανυσματικό μέτρο $\vec{\mu} : \Sigma \to \mathrm{X}$ ώς εξής : $\vec{\mu}(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} f d\lambda,\ \mathrm{E} \in \Sigma$.

Το ότι το $\vec{\mu}$ είναι αριθμήσιμα προσθετικό χρειάζεται απόδειξη. (Εάν $\mathrm{E} = \bigcup_n E_n$ με $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων απο την Σ, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\lambda$ συγλίνει απολύτως, δι'ότι κυριαρχείται από την συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|f\|\, d\lambda$.

Παρατηρούμε ότι $\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\lambda - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\lambda \| = \| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\lambda \|$. Είναι φανερό ότι $\lim_m \lambda\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n\right) = 0$ και επομενώς $\lim_m \| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\lambda \| = 0 \Rightarrow \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\lambda$. Αυτό σημαίνει ότι $\vec{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(\mathrm{E}_n)$). Το μέτρο $\vec{\mu}$, $\vec{\mu}(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} f d\lambda$ είναι φραγμένης κύμανσης (bounded variation) και απολύτως συνεχές ως πρός το λ (δηλαδή εάν $\mathrm{E} \in \Sigma$ και $\lambda(\mathrm{E}) = 0$ τότε $\left|\vec{\mu}\right|(\mathrm{E}_n) = 0$).

Το επόμενο θεώρημα δίνει τον χαρακτηρισμό ασθενώς συμπαγών συνόλων στον $L_1(\mu)$.

1.3 Θεώρημα$[W]$ *: Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας και H ένα υποσύνολο του* $L_1(\mu)$ *.Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες.*

1. Το H *δεν είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές στον* L_1 *.*

2. Το H *δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο .*

3. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ *και ακολουθία από ξένα σύνολα* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *έτσι ώστε* , $\left\{\sup \int_{A_n} |f| d\mu \, : f \in H\right\} \geq \varepsilon \,, \quad n = 1,2,\ldots$

4. Υπάρχει μία βασική ακολουθία από $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ *ισοδύναμη με την βάση του μοναδιαίου διανύσματος στον* l_1 *.*

5. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ *, τέτοιο ώστε,για κάθε ακέραιο* N *υπάρχουν* N *ξένα σύνολα* $A_1,\ldots,A_N$ *, τέτοια ώστε* $\left\{\sup \int_{A_n} |f| d\mu \, : f \in H\right\} \geq \varepsilon \,, \quad n = 1,2,\ldots,N$

6. Υπάρχει μία σταθερά K *τέτοια ώστε για κάθε ακέραιο* N *υπάρχουν* $f_1,\ldots,f_N \subset H$ *,* K *– ισοδύναμες με την βάση μοναδιαίων διανυσμάτων στον* l_1^N *.*

Απόδειξη :

Η απόδειξη θα αποτελείται απο της εξής ισοδύναμες συνέπειες :

$(1 \Rightarrow 2)$.Υποθέτουμε $\mathrm{H} \subset L_1(\mu)$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο έτσι ώστε για $f \in H$ έχουμε $\|f\| \leq M$.Δίνεται ένας ακέραιος n, γράφουμε κάθε συνάρτηση $f \in H$ ώς $f = f^n + f_n = f \cdot X\{|f| \geq n\} + f \cdot X\{|f| < n\}$.Το σύνολο $\{f_n \, : f \in H\} \subset n \cdot B_{L_\infty(\mu)}$ είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές. Από $\mu\{|f| \geq n\} \leq \frac{M}{n}$, n ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα δίνει $\sup\{\|f^n\|_1 : f \in H\} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Από παρακάτω λήμμα συμπερένουμε ότι το H είναι σχετικά ασθενώς συμπαγες.

1.4 Λήμμα: Ένα υποσύνολο $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ είναι ασθενώς συμπαγές για καθε $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει ένα ασθενώς συμπαγές σύνολο $\mathrm{A}_\varepsilon \subset \mathrm{X}$ έτσι ώστε $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}_\varepsilon + \varepsilon \mathrm{B}_{\mathrm{X}}$.

$(2 \Rightarrow 3)$.Ο όρος (2) σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > 0$ υπάρχει ένα σύνολο $\mathrm{A}n$ και μία συνάρτηση $f_n \in H$ έτσι ώστε $\mu(\mathrm{A}_n) < n$ και $\int_{\mathrm{A}_n} |f_n| d\mu > \varepsilon$. Ας καθορίσουμε θετικούς αριθμούς $\delta_{j,k}, k = 2,3,\ldots, j = 1,2,\ldots,k-1$, έτσι ώστε $\sum_{j,k} \delta_{j,k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Επανειλημμένα χρησιμοποιόντας την παρατήρηση ότι ένα πεπερασμένο σύνολο από συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, βρίσκουμε σύνολα $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ και συναρτήσεις $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ στον H έτσι ώστε

$$\int_{\mathrm{B}_k} |f_k| \geq \varepsilon , \qquad \kappa = 1,2,3,\ldots,$$

$$\int_{B_k} |f_j| \leq \delta_{j,k} \qquad j = 1,2,\ldots,k-1 .$$

Βάζουμε $\mathrm{A} = B_k \setminus \cup_{j \succ k} B_j$. Σαφώς τα $(\mathrm{A}_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ξένα και

$$\int_{\mathrm{A}_k} |f_k| d\mu \geq \int_{\mathrm{B}_k} |f_k| d\mu - \sum_{j \succ k} \int_{B_j} |f_k| d\mu \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

$(3 \Rightarrow 4)$.Ορίζουμε ξένα σύνολα $(\mathrm{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ και συναρτήσεις $f_n \in H,\ n = 1,2,\ldots$ τέτοια ώστε $\int_{\mathrm{A}_n} |f_n| d\mu \geq \varepsilon > 0$. Βάζουμε $h_n = \left(\int_{\mathrm{A}_n} |f_n| d\mu\right)^{-1} f_n \bullet X_{A_n}$ και $\varphi_n = sgnf_n \bullet X_{A_n}$.Σαφώς $Y = span\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ισομετρικά στον l_1 και $P(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f\bar{\varphi}_n d\mu \bullet h_n$ είναι μία προβολή από τον $L_1(\mu)$ στον Y . Είναι φανερό ότι $P(\{f_n\}_{n=1}^{\infty})$ δεν δεν είναι σχετικά συμπαγές στη νόρμα. Από θεώρημα (1.5) έχουμε μία ακολουθία $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε το $\{P(f_{n_j})\}_{j=1}^{\infty}$ να είναι ισοδύναμο με την βάση μοναδιαίου διανύσματος στον l_1, αλλά αυτό σημαίνει ότι η ίδια $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με τη βάση μοναδιαίου διανύσματος στον l_1.

1.5 Θεώρημα (Schur): Για ένα κλειστό υποσύνολο $H \subset l_1$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Το H είναι σχετικά συμπαγές.

2. Το H είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές.

3. Δεν υπάρχει ακολουθία η οποία είναι βασική ακολουθία ισοδύναμη με τη βάση των μοναδιαίων διανυσμάτων στον l_1.

Η απόδειξη προκύπτει από το παρακάτω λήμμα.

1.6 Λήμμα: Εάν $H \subset l_n$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο, όχι σχετικά συμπαγές τότε υπάρχει μία βασική ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ισοδύναμη με την βάση των μοναδιαίων διανυσμάτων στον l_1.

Για να αποδείξουμε το λήμμα ας υποθέσουμε $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ τέτοια ώστε $\|b_n\| \leq C$, $n = 1,2,\ldots$ για κάποιο C και $\|b_n - b_m\| \geq \delta$, για $m \neq n$ και $\delta > 0$. Μια τυπική διαγώνια διαδικασία δίνει μία υπακολουθία $\{b_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $b_{n_j}(k) \to b(k)$ καθώς $j \to \infty$ για κάθε $k = 1,2,\ldots$. Άρα $b_{n_j} \to b$ ασθενώς, επομένως από γνωστή πρόταση πέρνουμε μία επιπλέον υπακολουθία(η οποία ονομάζεται επίσης b_{n_j}) τέτοια ώστε $(b_{n_j} - b)_{j=1}^{\infty}$, η οποία είναι ισοδύναμη με μία $block$ – βασική ακολουθία , και κατά συνέπεια με την βάση μοναδιαίου διανύσματος στον l_1. Έστω $Y = span\{(b_{n_j} - b)\}_{j=1}^{\infty}$, αν είναι ανγκαίο παραλλείποντας ένα πεπερασμένο αριθμό από j μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b \notin Y$. Τότε

$\|\sum a_j b_{n_j}\| = \|\sum a_j(b_{n_j} - b) + (\sum a_j)b\| \geq K\|\sum a_j(b_{n_j} - b)\| \geq K\sum|a_j|$,

έτσι ώστε $\{b_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ είναι η επιθυμητή ακολουθία.

Τώρα συνεχίζουμε την απόδειξη του θεωρήματος.

$(6 \Rightarrow 5)$.Μπορούμε να υποθέσουμε $\|f_j\| \leq 1, \quad j = 1,2,\ldots N$ συνεπώς $K^{-1}\sum_{j=1}^{N}|a_j| \leq \int\left|\sum_{j=1}^{N} a_j f_j\right|$ για όλες τις ακολουθίες $(\alpha_j)_{j=1}^{N}$. Έστω $r_j(t)$ η συνάρτηση Rademacher. Έχουμε

$$K^{-1}\sum_{j=1}^{N}|a_j| \leq \int_0^1\int\left|\sum_{j=1}^{N} a_j r_j(t) f_j\right| d\mu dt$$

$$\leq \int\left(\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{N} a_j r_j(t) f_j\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} d\mu$$

$$= \int \left(\sum_{j=1}^{N} |a_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mu$$

$$\leq \int \left(\max_j |a_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \left| \sum_{j=1}^{N} a_j f_j \right| \right)^{\frac{1}{2}} d\mu$$

$$\leq \int \left(\max_j |a_j f_j| d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \sum_{j=1}^{N} |a_j f_j| \right)^{\frac{1}{2}} d\mu$$

$$\leq \int \left(\max_j |a_j f_j| d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{N} |a_j| \right)^{\frac{1}{2}}$$

Συνεπώς

$$K^{-2} \sum_{j=1}^{N} |a_j| \leq \int \max_j |a_j f_j| d\mu$$

$$K^{-2} N \leq \int \max_j |f_j| d\mu$$

Έστω $B_s,\ s = 1,2,\ldots,N$, ξένα σύνολα τέτοια ώστε $(\max_j |f_j|)|B_s = |f_s|$ (μερικά απο αυτά μπορεί να είναι κενά), από παραπάνω έχουμε ότι :

$$K^{-2} N \leq \sum_{s=1}^{N} \int_{B_s} |f_s| d\mu \ .$$

Επειδή $\|f_s\| \leq 1$ συμπεραίνουμε ότι για τουλάχιστον $\frac{N}{(2K^2-1)}$ δείκτες s έχουμε $\int_{B_S} |f_s| d\mu \geq \frac{1}{2K^2}$.

2. Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ RADON-NIKODYM

2.1 Ορισμός: Ο χώρος $Banach\ X$ *λέμε ότι έχει την* $Radon - Nikodym$ *ιδιότητα* (RNP) *, εάν για κάθε χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ *και για κάθε διανυσματικό μέτρο* $\vec{\mu} : \Sigma \to \mathrm{X}$ *(το οποίο είναι φραγμένης κύμανσης και απολύτως συνεχές ως πρός το* λ *) υπάρχει* $Bochner$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση* $f \in L^1_X(\lambda)$ *έτσι ώστε* $\vec{\mu}(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} f d\lambda$ $\forall \mathrm{E} \in \Sigma$ *.*

2.2 Ορισμός: Έστω K *ένα κλειστό φραγμένο κυρτό υποσύνολο του χώρου* $Banach\ X.$ *Το σύνολο* K *έχει την* $Radon - Nikodym$ *ιδιότητα εάν για κάθε χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ *και κάθε διανυσματικό μέτρο* $\vec{\mu} : \Sigma \to \mathrm{X}$ *το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς* λ *, είναι φραγμένης κύμανσης και που το* $''average\ range''$ $A(\vec{\mu}) = \left\{ \frac{\vec{\mu}(\mathrm{E})}{\lambda(\mathrm{E})}, \mathrm{E} \in \Sigma, \lambda\mathrm{E} > 0 \right\}$ *περιέχεται στον* K *υπάρχει* $f \in L^1_X(\lambda)$ *έτσι ώστε* $\vec{\mu}(\mathrm{A}) = \int f d\lambda \quad \forall \mathrm{E} \in \Sigma$ *.*

Ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ έχει την RNP εάν κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του K έχει την RNP .

Οι χώροι $L^1, c_{o,}\ c[0,1],\ l^\infty,\ L^\infty$ δεν έχουν την RNP. Κάθε αυτοπαθής χώρος, κάθε δυικός χώρος είναι διαχωρίσιμος (π.χ. l^1) κάθε χώρος με $boundelly\ complete$ βάση έχει την RNP.

Είναι πολύ εύκολο να δεί κανείς ότι :

1. Εάν X, Ψ είναι ισομορφικοί χώροι $Banach$ και ο X έχει την RNP τότε κ ο Ψ έχει την RNP .

2. Εάν ο X έχει την RNP τότε και κάθε υπόχωρος του X έχει την RNP .

3. Εάν κάθε διαχωρίσιμος υπόχωρος του X έχει την RNP τότε και ο X έχει την RNP .

3. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΙΜΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

3.1 Ορισμός: Έστω X ένας χώρος $Banach$. Ένας τελεστής $T : L^1[0,1] \to X$ καλείται αναπαραστάσιμος (representable) αν υπάρχει $g \in L_X^\infty$ έτσι ώστε $T_\varphi = \int \varphi \cdot g$ για κάθε $\varphi \in L^1[0,1]$.

3.2 Θεώρημα: Έστω $K \subset X$ ένα κυρτό, κλειστό υποσύνολο του X με την RNP. Άν $T : L^1[0,1] \to X$ είναι ένας τελεστής έτσι ώστε $\left\{T_\varphi : \varphi \geq 0 \int \varphi = 1\right\} \subset K$ τότε ο T είναι αναπαραστάσιμος.

3.3 Θεώρημα: Ο χώρος $Banach$ έχει την RNP αν και μόνο αν κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : L^1 \to X$ είναι αναπαραστάσιμος.

3.4 Θεώρημα (Dunford-Pettis): Έστω $T : L^1 \to X$ ένας αναπαραστάσιμος τελεστής. Άν $K \subset L^1$ είναι ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του L^1, τότε το σύνολο $T(K)$ είναι norm-συμπαγές υποσύνολο του X.

3.5 Θεώρημα (Lewis-Stegall): Έστω $T : L^1 \to X$ ένας τελεστής. Ο T είναι αναπαραστάσιμος αν και μόνο αν υπάρχουν τελεστες $S : L^1 \to l^1$, $U : l^1 \to X$ έτσι ώστε $T = U \circ S$.

3.6 Θεώρημα$[S]$: Έστω $T : L^1 \to X$ ένας ασθενώς συμπαγής τελεστής. Τότε ο T είναι αναπαραστάσιμος.

4. MARTINGALES

Έστω (Ω,Σ,λ) ένας χώρος πιθανότητας, $\Sigma' \subset \Sigma$ μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και X κάποιος χώρος *Banach* . Η συνάρτηση $g \in L^1_X(\lambda)$ καλείται conditional expectation της f ως προς Σ' αν η g είναι Σ' – μετρήσιμη και $\int\limits_{\mathrm{E}} g d\lambda = \int\limits_{\mathrm{E}} f d\lambda$, $\forall \mathrm{E} \in \Sigma'$. Με $\mathrm{E}\big(f|\Sigma'\big)$ συμβολίζουμε την conditional expectation της f ως πρός Σ' .

Παρατήρηση: Το κλασικό θεώρημα *Radon – Nikodym* δίνει κατευθείαν ότι αν $f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μία πραγματική συνάρτηση και $\Sigma' \subset \Sigma$ μία σ-υποάλγεβρα της Σ τότε η $\mathrm{E}\big(f|\Sigma'\big)$ υπάρχει. Πράγματι, αν $m : \Sigma' \to \mathbb{R}$ είναι το μέτρο $m(A) = \int\limits_A f d\lambda$ τότε $m << \lambda$ και η $\mathrm{E}\big(f|\Sigma'\big)$ είναι η *Radon – Nikodym* παράγωγος $\frac{dm}{d\lambda}$. Ο ίδιος συλλογισμός αποδεικνύει ότι αν $f : \Omega \to \mathrm{X}$ είναι μια *Bochner* ολοκληρώσιμη συνάρτηση και ο X έχει την *Radon – Nikodym* ιδιότητα, τότε η $\mathrm{E}\big(f|\Sigma'\big)$ υπάρχει.

4.1 Θεώρημα: Έστω $f \in L^1_X(\Omega,\Sigma,\lambda)$, $\Sigma' \subset \Sigma$ μια σ – υποάλγεβρα της Σ. Υπάρχει $g = \mathrm{E}\big(f|\Sigma'\big)$ (ουσιαστικά μοναδική) έτσι ώστε

α. $\mathrm{E}\big(f|\Sigma'\big) \in L^1_X(\Omega,\Sigma,\lambda)$

β. $\int\limits_{\mathrm{A}} g d\lambda = \int\limits_{\mathrm{A}} f d\lambda$, $\forall \mathrm{A} \in \Sigma'$

Ο τελεστής $\mathrm{E}(\bullet/\Sigma') : L^1_X \to L^1_X$ είναι γραμμικός και ικανοποιεί τα εξής:

1. $\|\mathrm{E}\big(f|\Sigma'\big)(\omega)\| \leq \mathrm{E}(\|f(\bullet)\|/\Sigma')(\omega)$ λ-σχεδόν παντού

2. $\|\mathrm{E}\big(f|\Sigma'\big)(\omega)\| \leq \|f\|_1, \forall f \in L^1_X(\lambda)$

3. Εάν $\Sigma'' \subset \Sigma$ είναι σ – αλγεβρα τότε
$\mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\big(f|\Sigma'\big)/\Sigma''\Big) = \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\big(f|\Sigma''\big)/\Sigma'\Big) = \mathrm{E}\big(f|\Sigma''\big)$

4.2 Ορισμός: Έστω $\{\Sigma n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αύξουσα ακολουθία απο σ – υποάλγεβρες της Σ.

Ένα martingale είναι μία ακολουθία $(f_n, \Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in L_X^1(\lambda)$ από Bochner ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_n : \Omega \to \mathrm{X}$ τέτοιες ώστε:

1. Οι f_n είναι μετρήσιμες συναρτήσεις σε σχέση με την Σ_n.

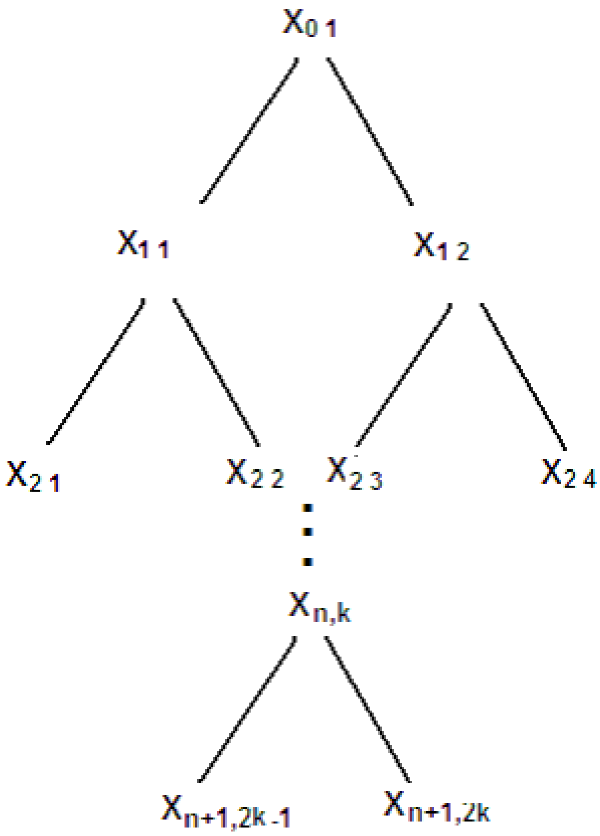
2. $E(f_{n+1}/\Sigma_n) = f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Δέντρα: Ένα άπειρο δέντρο J στον X είναι μια ακολουθία (x_n) στον X με την ιδιότητα $x_n = \frac{x_{2n}+x_{2n+1}}{2}$, για όλα τα $n \geq 1$.

Παράδειγμα 1: Έστω $f \in L_X^1(\lambda)$ και $\Sigma_o \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_n$ μια αύξουσα ακολουθία σ – αλγεβρών και $f_n = E\big(f/\Sigma_n\big)$. Τότε η ακολουθία (f_n, Σ_n) είναι ένα *martingale*.

Παράδειγμα 2: Έστω $(x_{n,k})$, $n = 0,1,2,\ldots$, $k = 1,2,\ldots 2^n$ ένα δέντρο σ'ένα χώρο *Banach X*. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $(x_{n,k})$ είναι φραγμένη και $x_{n,k} = \frac{1}{2}(x_{n+1,2k-1} + x_{n+1,2k}) \forall n = 0,1,2,\ldots$, $1 \leq k \leq 2^n$. Έστω $I_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, $n = 0,1,2,\ldots$, $1 \leq k \leq 2^n$ η ακολουθία των δυαδικών διαστημάτων. Με Σ_n συμβολίζουμε την πεπερασμένη άλγεβρα που γεννάται από την $I_{n,k}$, $1 \leq k \leq 2^n$

Μπορούμε να ορίσουμε ένα *martingale* με τιμές στον χώρο X ως εξής:



$$\xi_0 = x_{01} X_{I_{01}}$$

$$\xi_1 = x_{11} X_{I_{11}} + x_{12} X_{I_{12}}$$

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{2^n} x_{n,k} X_{I_{n,k}} \ , \ \xi_n : [0,1] \to X.$$

Μπορούμε να δούμε ότι $\int\limits_{[0,1]} \xi_o = \int\limits_{[0,1]} \xi_1$ αφού $x_{0,1} = \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12})$. Ομοίως έχουμε ότι $\mathrm{E}(\xi_{n+1}/\Sigma_n) = \xi_n$ που σημαίνει ότι η ακολουθία (ξ_n, Σ_n) είναι ένα *martingale*.

Ένα δέντρο $(x_{n,k})$ καλείται ε – δέντρο αν $\|x_{n+1,2k-1} - x_{n,k}\| > \varepsilon \ \ \forall n, \ \forall k$ όπου $1 \leq k \leq 2^n$.

Το *martingale* (ξ_n, Σ_n) που αντιστοιχεί σ'ένα ε – δέντρο δεν μπορεί να συγκλίνει αφού $\|\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)\| > \varepsilon, \ \forall t \in [0,1]$. Στον $L^1[0,1]$ υπάρχει ένα 1 – δέντρο.

Πράγματι άν $h_{n,k} = \frac{X_{\left[\frac{K-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]}}{\frac{1}{2^n}}$, $1 \leq k \leq 2^n$, $1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, \ldots$ έχουμε ότι $\|h_{n,k}\|_1 \leq 1 \ \ \forall n, \ \forall k$ όπου $1 \leq k \leq 2^n$ και $\|h_{n+1,2k-1} - h_{n+1,2k}\|_1 = 1$. Είναι επίσης φανερό ότι $(h_{n,k})$ είναι δέντρο δηλαδή $h_{n+1,2k-1} + h_{n+1,2k} = 2h_{n,k}$, $\forall n, \ \forall k$ όπου $1 \leq k \leq 2^n$.

Παραδείγματα πραγματικών Martingales.

1$[Wi]$. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $E(|X_k|) < \infty$, $\forall k$ και $E(|X_k|) = 0$, $\forall k$.

Ορίζουμε $S_0 = 0$ και

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$
$$F_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots X_n) \ , \qquad F_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Τότε για $n \geq 1$, έχουμε

$$E(S_n \backslash F_{n-1}) = E(S_{n-1} \backslash F_{n-1}) + E(X_n \backslash F_{n-1}) = S_{n-1} + E(X_n) = S_{n-1}.$$

Η πρώτη ισότητα είναι προφανής από την ιδιότητα της γραμμικότητας. Από S_{n-1} είναι F_{n-1} μετρήσιμες, $E(S_{n-1} \backslash F_{n-1}) = S_{n-1}$ και αφού η X_n είναι ανεξάρτητη από την F_{n-1} έχουμε $E(X_n \backslash F_{n-1}) = E(X_n)$ (Απο γνωστή ιδιότητα γνωρίζουμε ότι έαν X είναι ανεξάρτητο απο H τότε $E(X/H) = E(X)$).

2$[Wi]$. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με

$$E(X_k) = 1 \ , \ \forall k.$$

Ορίζουμε $M_0 = 1, \ F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ και

$$M_n = X_1, X_2, \ldots X_n \ , \qquad F_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots X_n) \ .$$

Τότε για $n \geq 1$, έχουμε

$$E(M_n \backslash F_{n-1}) = E(M_{n-1}X_n \backslash F_{n-1}) = M_{n-1}E(X_n \backslash F_{n-1}) = M_{n-1}E(X_n) = M$$

,

έτσι το M είναι ένα *martingale*.

3$[Wi]$. Ας πάρουμε ακολουθία $\{F_n\}$ και έστω $\xi \in L^1(\Omega, F, P)$. Ορίζουμε $M_n = E(\xi \backslash F_n)$. Από γνωστή ιδιότητα έχουμε ότι

$$E(M_n \backslash F_{n-1}) = E(\xi \backslash F_n \backslash F_{n-1}) = E(\xi \backslash F_{n-1}) = M_{n-1}.$$

επομένως το M είναι ένα *martingale*.

4$[\mathrm{B}i]$. Έστω (Ω, F, P) ένας χώρος πιθανότητας, v ένα πεπερασμένο μέτρο στον F και $F_1, F_2, \ldots$ μία ακολουθία απο σ – άλγεβρες στον F. Υποθέτουμε ότι ο P υπερισχύει του v όταν και οι δύο περιορίζονται στον F_n. Έχουμε $A \in F_n$ με $P(A) = 0$ συνεπάγεται ότι $v(A) = 0$. Τότε υπάρχει μία πυκνότητα ή μια $Radon - Nikodym$ παράγωγος X_n από v σε σχέση με το P όταν και οι δύο περιορίζονται στον F_n. Η X_n είναι μία συνάρτηση που είναι μετρήσιμη στον F_n και ολοκληρώσιμη στον P και ισχύει

$$\int_A X_n dP = v(A)\ , \quad A \in F_n.$$

Εάν $A \in F_n$ τότε $A \in F_{n+1}$ και $\int_A X_{n+1} dP = v(A)$.

Έτσι η X_n είναι ένα *martingale* στον F_n.

5$[\mathrm{B}i]$. (Μία ειδίκευση του προηγούμενου παραδείγματος). Έστω P ένα μέτρο $Lebesque$ στο σ – πεδίο του F απο $Borel$ υποσύνολα για $\Omega = (0,1]$ και έστω F_n μία πεπερασμένη σ – άλγεβρα η οποία παράγεται από την διαμέριση του Ω σε δυαδικά διαστήματα $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$, $0 \le k < 2^n$. Εάν $A \in F_n$ και $P(A) = 0$, τότε το A είναι κενό. Επομένως το P κυριαρχεί από κάθε πεπερασμένο μέτρο v στην F_n. Η $Radon - Nikodym$ παράγωγος είναι:

$$X_n(\omega) = \frac{\nu(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]}{2^{-n}} \quad \text{εάν} \quad \omega \in (k2^{-n},(k+1)2^{-n}] \ .$$

6$[\mathrm{B}i]$. Υποθέτουμε οτι Z είναι μια τυχαία ολοκληρώσιμη μεταβλητή στον (Ω, F, P) και η F_n αποτελείται από σ – άλγεβρες στον F. Εάν

$$X_n = E[Z \| F_n]$$

τότε οι τρείς πρώτες ιδιότητες στον ορισμό των *martingales* πληρούνται και $E[X_{n+1} \| F_n] = E[E[Z \| F_{n+1}] \| F_n] = E[Z \| F_n] = X_n$. Έτσι ο X_n είναι ένα *martingale* σχετικά με την F_n.

Submartingales

Ένα submartingale αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές X_n που σχετίζονται με σ – άλγεβρες στον F_n και απο γνωστές ιδιότητες ισχύει ότι:

$$E[X_{n+1} \| F_n] \geq X_n \ .$$

Όπως πρίν ο X_n είναι ένα submartingale, εάν υπάρχει ένα submartingale σε σχέση με ορισμένες ακολουθίες F_n, και την ειδική ακολουθία $F_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, τότε λειτουργεί. Η προηγούμενη σχέση είναι ίδια με την παρακάτω:

$E[X_{n+k} \| F_n] \geq X_n$ για $k \geq 1$.

Πέρνωντας αναμενόμενες τιμές έχουμε ότι

$$E[X_1] \leq E[X_2] \leq \ldots \ .$$

Παραδείγματα submartingales:

1. Υποθέτουμε ότι το Δ_n είναι ανεξάρτητο και ολοκληρώσιμο. Αυτό χρειάζεται διότι $E[\Delta_n]$ είναι για $n \geq 2$ μη αρνητικός, εκτός από το 0. Τότε $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$ ορίζουν ένα submartingale.

2. Υποθέτουμε ότι ο X_n είναι ένα *martingale* που σχετίζεται με τον F_n. Τότε το $|X_n|$ είναι μετρήσιμα F_n και ολοκληρώσιμα και $E\big[|X_{n+1}| \, \| \, F_n\big] \geq |E[X_{n+1} \| F_n]| = |X_n|$.

Έτσι το $|X_n|$ είναι ένα submartingale σχετικό με τον F_n. Ακόμη και άν τα $X_1, X_2, \ldots X_n$ παράγουν τον $F_n v$, στην πραγματικότητα τα $|X_1|, \ldots, |X_n|$ παράγουν ένα σ – πεδίο μικρότερο από τον F_n.

4.3 Θεώρημα: Έστω X ένας χώρος Banach και $K \subset X$ ένα κλειστό φραγμένο σύνολο με RNP. Τότε κάθε martingale με τιμές στον K συγκλίνει σχεδόν παντού. (Ίσχύει και το αντίστροφο).

4.4 Θεώρημα[D – U]: Ένα martingale $\left(f_n, B_n,\ n \in \mathbb{N}\right)$ στον $L_p(\mu, X)$ συγκλίνει στην $L_p(\mu, X)$ νόρμα αν και μόνο αν υπάρχει $f \in L_p(\mu, X)$ τέτοιο ώστε $\forall E \in \bigcup_n B_n$ να έχουμε $\lim_n \int_E f_n d\mu = F(E) = \int_E f d\mu$.

Το επόμενο πόρισμα είναι στην ουσία το παραπάνω θεώρημα σε πιό απλή μορφή.

4.5 Πόρισμα: Ένα martingale $\left(f_n, B_n,\ n \in \mathbb{N}\right)$ στον $L_p(\mu, X)$, $(1 \leq p < \infty)$ συγκλίνει στην $L_p(\mu, X)$ νόρμα αν και μόνο αν υπάρχει $f \in L_p(\mu, X)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{E}\left(f / B_n\right) = f_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4.6 Ορισμός: Ένα martingale $\left(f_n, B_n,\ n \in \mathbb{N}\right)$ στον $L_1(\mu, X)$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο αν $\lim_{\mu(\mathrm{E}) \to 0, \mathrm{E} \in \mathrm{B}_n} \int_E \|f_n\| d\mu = 0$ ομοιόμορφα στο $n \in \mathbb{N}$.

4.7 Πόρισμα: Έστω ότι ο X έχει την Radon – Nikodym ιδιότητα $1 \leq p < \infty$, και $\left(f_n, B_n,\ n \in \mathbb{N}\right)$ ένα martingale στον $L_p(\mu, X)$. Τότε το $\lim_n f_n$ υπάρχει στην $L_p(\mu, X)$ – νόρμα, αν και μόνο αν

1. $p = 1,\ \sup_n \|f_n\|_1 < \infty$ *και* $\left(f_n, B_n,\ n \in \mathbb{N}\right)$ *ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο ή*

2. $1 < p < \infty$ *και* $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$.

Το προηγούμενο πόρισμα έχει και αντίστροφο το οποίο "δένει" τη σύγκλιση του *martingale* με την *RNP*. Αυτό είναι το εξής θεώρημα:

4.8 Θεώρημα: Έστω X χώρος $Banach$ τέτοιος ώστε για κάθε πεπερασμένο μετρήσιμο χώρο (Ω, Σ, μ), κάθε φραγμένο ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο $martingale$ στον $L_1(\mu, X)$ συγκλίνει στην $L_1(\mu, X)$ νόρμα. Τότε ο X έχει την $Radon - Nikodym$ ιδιότητα.

4.9 Θεώρημα: Ένα $martingale$ που συγκλίνει στον $L_1(\mu, X)$, συγκλίνει και στο $L_1(\mu, X)$- οριό του σχεδόν παντού.

4.10 Ορισμός: Άν ξ_n ένα $martingale$ τότε η ακολουθία $d_n = \xi_{n+1} - \xi_n$ καλείται martingale difference sequence $(m.d.s)$.

4.11 Θεώρημα ($Gaposhkin$): Έστω (g_n) μια ασθενώς μηδενική ακολουθία στον L^p. Τότε υπάρχει μια m.d.s. (f_n) στον L^p και μια υπακολουθία (h_n) της (g_n) τέτοια ώστε η σειρά $\sum_n \| h_n - f_n \|_p$ συγκλίνει.

Απόδειξη$[F]$:

Άς υποθέσουμε ότι $n_1 < \ldots < n_{k-1}$ και $f_1, \ldots, f_{k-1}$ έχουν οριστεί έτσι ώστε $\| h_j - f_j \|_p < 2^{-j}$ και εάν $j \geq 2,\ E(f_j, \Sigma_{j-1}) = 0$, όπου Σ_j είναι η άλγεβρα που παράγεται από τις απλές συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_j$ και $h_j = g_{n_j}$, για $j = 1, \ldots, k-1$. Έστω $\lim_n \| E(g_n, \Sigma_{k-1}) \|_p = 0$, μπορούμε να διαλέξουμε $n_k > n_{k-1}$ με $\| E(h_k, \Sigma_{k-1}) \|_p < 2^{-k-2}$, όπου $h_k = g_{n_k}$. Πέρνουμε μία απλή συνάρτηση f_k' έτσι ώστε $\left\| f_k' - h_k \right\|_p < 2^{-k-2}$. Έτσι θέτοντας $f_k = f_k' - E\left(f_k', \Sigma_{\kappa-1}\right)$ μπορούμε να συνεχίσουμε με επαγωγή.

5. ΑΡΙΘΜΟΙ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ (ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ)ΤΕΛΕΣΤΩΝ.(entropy numbers, approximation numbers).

Άν $K \subseteq X$ συμπαγές τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ έτσι ώστε $\inf_{j \leq n} d(x, x_j) < \varepsilon$ (totally bounded).

Άν δεν είναι συμπαγές το K τότε μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο συμπάγειας των $q(k) = \inf\{\varepsilon : d(x, x_j) < \varepsilon\}$.

Άν έχω τελεστή $T : X \to Y$, ο τελεστής καλείται συμπαγής αν $T(B_X) \subseteq Y$ συμπαγές.

5.1 Γνωστοί approximation numbers τελεστών.

Έστω τελεστής $T : X \to Y$, ανάμεσα στους χώρους $Banach$ X και Y ορίζουμε: $a_n(T) = \inf\{\|T - A\| : A : X \to Y, rank(A) < n\}$.

Οι approximation numbers ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

1.Έχουμε ότι $a_1(T) \geq a_2(T) \geq \dots \geq a_n(T) \dots$ και $a_1(T) = \|T\|$.

2.Έχουμε ότι $a_{k+n-1}(T_1 + T_2) \leq a_k(T_1) + a_n(T_2)$ για $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 : X \to Y$, $a_n(T_1 + T_2) \leq \|T_1\| + a_n(T_2)$.

3.Έχουμε ότι $a_{k+n-1}(RS) \leq a_k(R) a_n(S)$ για $S : X \to Y$ και $R : Y \to F$, γενικά
α) $a_n(RS) \leq \|R\| a_n(S)$.
β) $a_n(RS) \leq a_n(R) \|S\|$.
4. Πέρνουμε $a_n(T) = 0$ εάν κ μόνο εάν η τάξη $(\mathrm{T}) < n$.

5.Προκύπτει ότι $a_n(I_X) = 1$ για $\dim(X) \geq n$, όπου I_X είναι ο ταυτοτικός χάρτης από τον *Banach* χώρο X.

5.2. Kolmogorov numbers.

5.2.1. Πρόταση: Ένας τελεστής $T : X \to Y$ όπου X, Y χώροι Banach, *είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης* $N_\varepsilon \subseteq Y$ *με* $T(B_X) \subset N_\varepsilon + \varepsilon B_Y$.

Οι αριθμοί Kolmogorov $d_n(T)$ ενός τελεστή $T : X \to Y$ ορίζονται ως εξής:
$d_n(T) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : T(B_X) \subset N_\varepsilon + \varepsilon B_Y, \text{όπου } N_\varepsilon \subseteq Y \text{ και } \dim(N_\varepsilon) < n\right\}$.

5.3 Gelfand numbers.

5.3.1 Πρόταση$[C - S]$*: Ένας τελεστής* $T : X \to Y$ *όπου* X, Y *χώροι* Banach, *είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχουν πεπερασμένα* $x_i^* \in X^*$, $1 \leq i \leq k$ *όπου*
$\|T(x)\| \leq \sup_{1 \leq i \leq k} |x_i^*(x)| + \varepsilon \|x\|$ *όπου* $x \in X$.

Απόδειξη:
Έστω τελεστής $T : X \to Y$ *και* $\varepsilon > 0$ μπορούμε να ορίσουμε πολλά πεπερασμένα στοιχεία $y_i \in X$, $1 \leq i \leq k$ τέτοια ώστε $T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{y_i + \frac{\varepsilon}{2} B_Y\}$.
Επιπλέον απο το θεώρημα *Hahn – Banach* για κάθε y_i υπάρχει ένα $y_i^* \in Y'$ με $|y_i^*(y)| = \|y_i\|$ και $\|y_i^*\| = 1$.
Περνώντας στο σηναρτησοειδές $x_i^* \in X^*$ που ορίζεται από την σχέση

$|x_i^*(x)| = |Ty_i^*(x)|$ ή $T^k y_i^*$ μας δίνει την δυνατότητα να επαληθεύσουμε την πρόταση 5.5.1. Με βάση το προηγούμενο αρκεί τυχαίο $x \in X$ για να δουλέψουμε με $x \in B_X$ επειδή κάθε $x \in X$, $x \neq 0$ μπορεί να αλλάξει σε ένα στοιχείο απο B_X σε $\frac{x}{\|x\|}$. Η εικόνα Tx από ένα στοιχείο $x \in B_X$,ωστόσο ανήκει στην ένωση,δηλαδη $Tx \in \{y_k + (\frac{\varepsilon}{2})B_Y\}$. Η νόρμα του στοιχείου y_k ορίζεται ως εξής:
$\|y_k\| = |y_k^*(y)| \leq |y_k^*(y_k - T_x)| + |y_k^*(T(x))| \leq \|y_k - T_x\| \cdot \|y_i^*\| + \sup_{1 \leq i \leq k} |x_i^*(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{1 \leq i \leq k}$

.

Άρα έχουμε ότι $\|Tx\| \leq \|Tx - y_k\| + \|y_k\| \leq \varepsilon + \sup_{1\leq i\leq k}|x_i^*(x)|$, $x \in X$.

Αντιστρόφως ας υποθέσουμε ότι ο τελεστής $T : X \to Y$ πληρεί τα παραπάνω, τότε για τυχαίο $\varepsilon > 0$ με κατάλληλα $x_i^* \in X^*$, προκειμένου να αποδείξουμε ότι $T(B_X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y θεωρούμε ένα σύστημα από στοιχεία $y_j \in T(B_X)$ όπου $\|y_j - y_k\| \geq 4\varepsilon$ για $j \neq k$.

Χρησιμοποιώντας τα $y_j = Tx_j$ με $x_j \in Bx$ μπορούμε να ορίσουμε ότι

$4\varepsilon \leq \|Tx_j - Tx_k\| \leq \sup_{1\leq i\leq k}|(x_{j-k})_i^*(x)| + 2\varepsilon$ επομένως

$2\varepsilon \leq \sup_{1\leq i\leq k}|(x_{j-k})_i^*(x)|$ για $j \neq k$.

Το supremum μπορούμε να πούμε ότι είναι η απόσταση των στοιχείων:

$u_j = (|x_i^*(x_j)|)_{1\leq i\leq k}$ και $u_k = (|x_i^*(x_k)|)_{1\leq i\leq k}$

στον *Banach* χώρο l_∞^k. Από το

$\|u_j\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq k}|x_i^*(x_j)| \leq \sup_{1\leq i\leq k}\|x_i\|$ το σύστημα $\{u_j\} \subset l_\infty^k$ είναι κλειστό υποσύνολο

από $l_\infty^{n_\varepsilon}$. Αλλά σε ένα χώρο *Banach* πεπερασμένης διάστασης κάθε κλειστό υποσύνολο είναι συμπαγές. Τα στοιχεία $u_j \in l_\infty^k$ ικανοποιούν τα εξής

$2\varepsilon \leq \|u_j - u_k\|_\infty$ για $j \neq k$,

ακόμη και από ένα πεπερασμένο σύστημα στον l_∞^k. Συνεπώς $y_j \in T(B_X)$ είναι πεπερασμένο. Έτσι $T(B_X)$ αποδείχθηκε ότι είναι συμπαγές.

Οι Gelfand number $c_n(T)$ ενός τελεστή $T : X \to Y$ ορίζονται ως εξής:

$$c_n(T) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \|Tx\| \leq \sup_{1\leq i\leq k}|x_i^*(x)| + \varepsilon\|x\|, \text{όπου } x_i^* \in X^k, 1 \leq i \leq k \text{ με } k < n\right\}.$$

Θεώρημα$[C - S]$*: Ένας τελεστής* T *είναι συμπαγής, αν κ μόνο αν* $\lim_{n\to\infty} c_n(T) = 0$.

Απόδειξη:

Από προταση 5.3.1.

Παρατήρηση$[C - S]$: Ειναι γνωστο T συμπαγής αν η ακολουθία των *approximation* numbers $a_n, d_n, \ldots \to 0$.

5.4 Gelfand αριθμοί τελεστών στον L^1.

Έστω τελεστής $T : L^1 \to X$
Θεωρούμε $i_p : L^p \to L^1$, με $i_p(f) = f$.
Θεωρούμε $T_p = T \circ i_p : L^p \to X$ με $1 < p \leq \infty$.

5.4.1 Πρόταση: Έστω $c_n^{(p)} = c_n^{(p)}(T) = c_n(T_p)$. Άν $\lim_{n\to\infty} c_n^{(p)} = 0$ για κάποιο $p > 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} c_n^{(p)} = 0 \ \forall \ 1 < p \leq \infty$.

Απόδειξη:
Άν $\lim_{n\to\infty} c_n^{(p)} = 0 \Leftrightarrow T_p : L^p \to X$ συμπαγής$\Leftrightarrow$ $T : L^1 \to X$ $Dunford - Pettis$ τελεστής$\Rightarrow$ $T_p : L^p \to X$ είναι συμπαγής $\forall \ 1 < p \leq \infty$.

5.4.2 Πρόταση: Έστω τελεστής $T : L^1 \to X$. Τότε αν $p_1 > p_2$ έχουμε ότι

$c_n^{(p_2)}(T) \geq c_n^{(p_1)}(T)$.

Απόδειξη:

Έστω τελεστής $T : L^1 \to X$ και $i_p : L^P \to L^1$ με $p > 1,\ L^1 \to \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.
Πέρνούμε $M \subseteq L^1$ με codim$M \leq n \Leftrightarrow \exists\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in X^k$ έτσι ώστε
$M = \left\{x : x_i^*(x) = 0,\ i \leq n\right\} = \bigcap_{i\leq n} \ker x_i^*$. Τότε $\exists\ x \in X,\ \|x\| = 1$ με $x \in M$ δηλαδή
$x_i^*(x) = 0,\ i \leq n$ και $\|T(x)\| \geq c_n(T)$. Ορίζουμε $T \circ i_{p_1} : L^{p_1} \to X$ με
$x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in (L^{p_1})^*$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$ και $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in (L^{p_2})^*$ με $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = 1$.
Έστω $p_1 > p_2$ έχουμε $L^{p_1'} \subseteq L^{p_2'}$ άρα $c_n^{(p_2)}(T) \geq c_n^{(p_1)}(T)$.

5.4.3 Θεώρημα: Έστω $T : L^1 \to X$ φραγμένος τελεστής. Έστω $c_n = c_n^{(\infty)}(T) = c_n(T \circ l_\infty)$. Τότε υπάρχει ένα δέντρο $(x_{n,k})_{k=1,2,\ldots,2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ στον X έτσι ώστε αν οι διαφορές $(nodes)$ $d_{n,k} = x_{n+1,2k-1} - x_{n+1,2k}$ τότε $\left\|\sum_{k=1}^{2^n} d_{n,k}\right\| \geq 2^{n+1} \cdot c_{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη:

Έστω $T : L^1 \to X$ φραγμένος τελεστής και $T \circ i_\infty : L^\infty \to X$.
Έστω $g_1, g_2, \ldots, g_n \in L^1$, τότε υπάρχει r με $|r| \leq 1,\ r \in B_{L^\infty}$ και με $\int r g_i = 0$ για

$i \leq n$ και $\|T(r)\| \geq c_n$.

Κατασκευάζουμε ένα δυαδικό δέντρο στον $L^1(T)$ ως εξής:

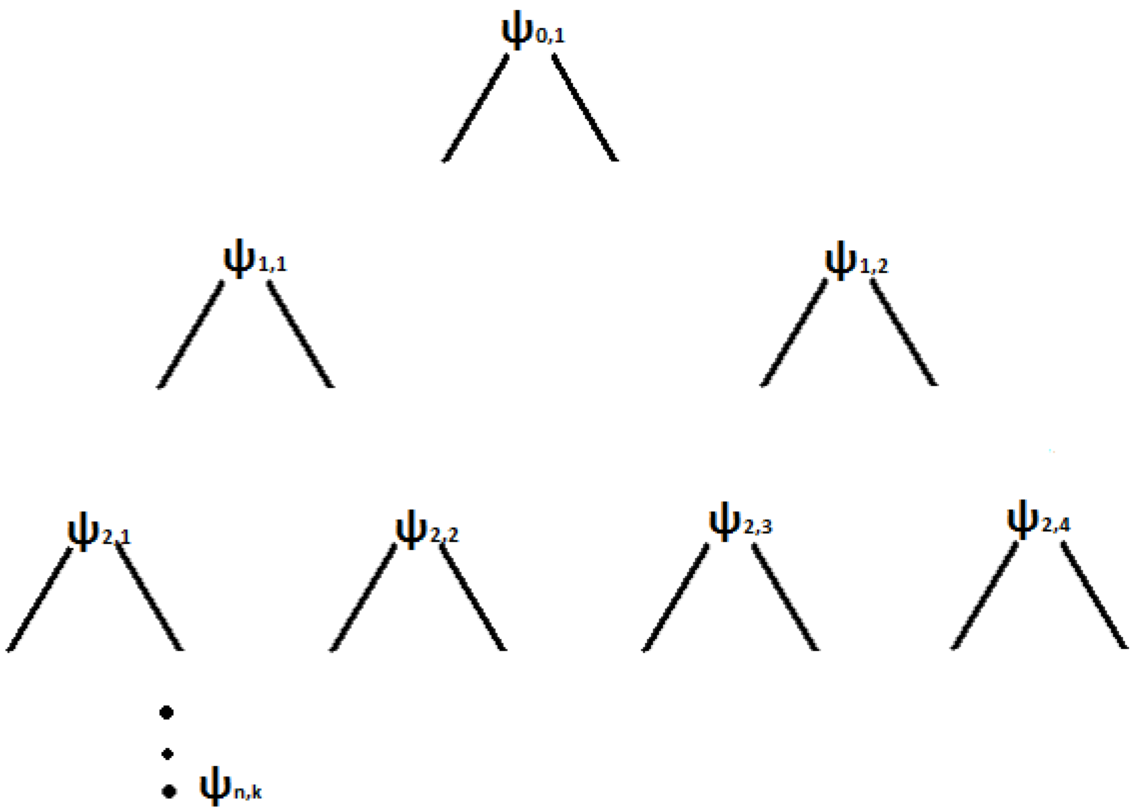
Έστω $\psi_{01} = 1$

$\psi_{1,1} = 1(1 + r_1)$

$\psi_{1,2} = 1(1 - r_{n_1})$

Αν έχει κατασκευαστεί το $\psi_{n,k}$ ορίζουμε $\psi_{n+1,2k-1} = \psi_{n,k}\ (1 + r_{n,k})$ και $\psi_{n+1,2k} = \psi_{n,k}$ $(1 - r_{n,k})$.

Το δένδρο $(\psi_{n,k})$ στον $L^1(T)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι της μορφής του επόμενου σχήματος



Για το πρώτο επίπεδο πέρνουμε $\psi_{01} = 1$.

Για το δεύτερο επίπεδο περνουμε $\psi_{1,1} = 1 + r_1$ και $\psi_{1,2} = 1 - r_1$ με

1) $\|r_1\| \leq 1$ και $\int r_1 \psi = 0$

2) $\|T(r_1)\| > c_1$

Αντίστοιχα για το $\psi_{1,2}$.

Για το τρίτο επίπεδο πέρνουμε $\psi_{2,1} = \psi_{1,1} + r_2$, $\psi_{2,2} = \psi_{1,1} - r_2$, $\psi_{2,3} = \psi_{1,2} + r_2$ και $\psi_{2,4} = \psi_{1,2} - r_2$ με

1) $\|r_2\| \leq 1$ και $\int r_2 \psi_{2,1} = 0$, $\int r_2 \psi_{2,2} = 0$, $\int r_2 \psi_{2,3} = 0$, $\int r_2 \psi_{2,4} = 0$,

2) $\|T(r_2)\| > c_2$

Αντίστοιχα για τα υπόλοιπα .

Αν έχει κατασκευαστεί το $\psi_{n,k}$ ορίζουμε $\psi_{n+1,2k-1} = \psi_{n,k}\ (1 + r_{n,k})$ και $\psi_{n+1,2k} = \psi_{n,k}\ (1 - r_{n,k})$ με

1) $\|r_{n,k}\| \leq 1$ και $\int r_{n,k}\psi_{n,k} = 0\ \forall k$ και

2) $\|T(r_{n,k})\| > c_{2^n}$

Παρατηρούμε ότι $\|\psi_{n,k}\| = \|\psi_{n+1,2k}\|$ αρα το δεντρο $\psi_{n,k}$ είναι φραγμένο.

Επίσης $\sum_{k=1}^{2^n} d_{n,k} = \sum_{k=1}^{2^n} 2r\psi_{n,k} = 2^{n+1} r$.

Αφού $\|T(r)\| > c_{2^n}$ έχουμε $\left\| \sum_{k=1}^{2^{n+1}} d_{n,k} \right\| \geq 2^{n+1} \cdot c_{2^n}$.

5.4.4 Πρόταση: Έστω $T : L^1 \to X$ τελεστής και $c_n = c_n(T \circ i_\infty)$. Τότε υπάρχει $S : L^1 \to X$ έτσι ώστε $\|S(r_n)\| \geq c_{2^n}$, όπου r_n είναι οι Rademacher συναρτήσεις.

Απόδειξη:

Ο S είναι ο τελεστής που ορίζεται από το δένδρο του θεωρήματος 5.8 .

5.4.5 Πόρισμα$[G]$: Άν $T : L^1 \to X$ δεν είναι Dunford-Pettis τότε ο X περιέχει ένα Rademacher δένδρο.

5.4.6 Ορισμός: Ένα δένδρο λέγεται Rademacher αν υπάρχει $\delta > 0$ με $\frac{1}{2^n} \left\| \sum_{k=1}^{2^n} d_{n,k} \right\| \geq \delta$.

Τελεστές συνέλιξης.

Αν $\lambda \in \mathrm{M}(\Pi)$ με $\widehat{\lambda}(n), n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε τους συντελεστές Fourier του λ, $\widehat{\lambda}(n) = \int_{\Pi} e^{-int} d\lambda(t)$.

5.4.7 Ορισμός: Αν $\mu, v \in \mathrm{M}(\Pi)$ τότε η συνέλιξη $\mu * v$ ορίζεται ως μέτρο

$\mu * v(\mathrm{E}) = \int_{\Pi} \mu(\mathrm{E} - t) dr(t), \quad \forall \ \mathrm{E} \ \in \Sigma.$

Ισχύουν τα εξής :

1. $\mu * v = v * \mu$
2. $\mu * (v_1 + v_2) = \mu * v_1 + \mu * v_2$
3. $\mu * (v * \lambda) = (\mu * v) * \lambda$

Αν $\lambda \in \mathrm{M}(\Pi)$ με $\mathrm{T}_\lambda : L^1(\Pi) \to L^1(\Pi)$ συμβολίζουμε τον τελεστή συνέλιξης

$\mathrm{T}_\lambda(f) = f * \lambda$ δηλαδή $(\mathrm{T}_\lambda f)(x) = \int_{\Pi} f(x-y) d\lambda(y)$, $f \in L^1(\Pi)$, $x \in \Pi$.

Έστω $\mathrm{T}_\lambda : L^1(\Pi) \to L^1(\Pi)$.

Έχουμε $u_n(t) = e^{-int}$.

Αφού $T_\lambda(u_n) = \widehat{\lambda}(n) u_n$ και ο τελεστής είναι διαγώνιος τελεστής $L^2(\Pi) \to L^2(\Pi)$.

Άν $\widehat{\lambda}(n) \underset{|n| \to 0}{\to} 0$ έχουμε ότι T είναι συμπαγής. Ορίζουμε τις διαφορές $d_{n,k} = x_{n+1,2k-1} - x_{n+1,2k}$.

Τα $\widehat{\lambda}(n)$ είναι λοιπόν ιδιοτιμές του τελεστή T_λ.

Είναι γνωστό από $[C-S]$ ότι η νιοστή ιδιοτιμή $\lambda_n \leq \sqrt{2}\, c_n(T_\lambda)$.

Επομένως από το θεώρημα 5.4.3 έχουμε ότι $\frac{1}{2^n} \left\| \sum_{k=1}^{2^n} d_{n,k} \right\| \geq c\widehat{\lambda}(n)$.

5.4.8 Πρόταση: Έστω μέτρο $\lambda \in M(0, 2\pi)$. Τότε υπάρχει δένδρο στον $L^1(\Pi)$ έτσι *ώστε οι διαφορές* $\frac{1}{2^n}\left\|\sum_{k=1}^{2^n} d_{n,k}\right\| \geq c \cdot \widehat{\lambda}(n)$.

6. ΗΜΙΕΜΦΥΤΕΥΣΕΙΣ (Semi-embeddings) ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ BANACH.

6.1 Ορισμός: Έστω X και Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο T ονομάζεται semi-embedding αν ο T είναι ένα προς ένα και $T(B_X)$ είναι κλειστό στον Y, όπου B_X η μοναδιαία μπάλα του X, δηλαδή το σύνολο $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$.

Λέμε ότι ο X semi-embeds στον Y αν υπάρχει μία semi-embedding απεικόνιση

από τον X στον Y. Σαφώς κάθε ισομορφισμός ή embedding είναι μία semi-embedding. Συνήθως ο όρος του semi-embedding είναι πολύ ασθενέστερος από τον όρο embedding. Επίσης εάν ο X είναι αυτοπαθής τότε κάθε τελεστής $T : X \to Y$ ο οποίος είναι ένα προς ένα είναι semi-embedding. Από γνωστή πρόταση δεν υπάρχουν semi-embedding από τον $L_1[0,1]$ σε οποιοδήποτε αυτοπαθή χώρο.

6.2 Πρόταση: Έστω X και Y διαχωρίσιμοι χώροι Banach και $T : X \to Y$ semi-embedding. Τότε υπάρχει ένα $x \in X$ με $\|x\| = 1$, έτσι ώστε εάν $(x)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\|x\| \leq 1$, $n = 1,2,\ldots$ και $Tx_n \to Tx$ τότε $x_n \to x$.

Απόδειξη:
Επειδή ο T είναι semi-embedding, η εικόνα από κάθε κλειστή μπάλα στον X είναι κλειστή και στον Y. Πέρνουμε $\varepsilon > 0$ και ένα σχετικό ανοιχτό σύνολο $V \subset T(B_X)$. Έστω ακολουθία $(u_j)_{j=1}^{\infty} \subset B_X$ έτσι ώστε να μπορούμε να ορίσουμε $B_X = \bigcup_{J=1}^{\infty} B(u_j,\varepsilon) \cap B_X$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα κατηγορίας Baire στην κάλυψη του V από κλειστά σύνολα $T(B(u_j,\varepsilon) \cap B_X)$, παίρνουμε τα ακόλουθα:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε σχετικό ανοιχτό σύνολο $V \subset T(B_X)$ υπάρχει ένα συγκεκριμένο μη κενό ανοιχτό σύνολο $U \subset V$ έτσι ώστε $T^{-1}(U) < \varepsilon$.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω επαγωγικά βρίσκουμε μία ακολουθία απο συγκεκριμένα ανοιχτά σύνολα $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ στον $T(B_X)$ έτσι ώστε $U_n \supset \overline{U}_{n+1} \supset U_{n+1}$ και

$diam T^{-1}(U_n) < \frac{1}{n}$ όπου $0 \notin U$. Σαφώς $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-1}(U_n)$ αποτελείται από ακριβώς ένα σημείο x_0. Το κατάλληλο x ισούται με $\frac{x_0}{\|x_0\|}$.

Εφαρμόζοντας την πρόταση 6.2 για $X = L_1[0,1]$ έχουμε το παρακάτω λήμμα.

6.3 Λήμμα: Εάν ο $T : L_1[0,1] \to X$ είναι semi-embedding, τότε υπάρχει $f \in L_1[0,1]$ με $\|f\| = 1$ και ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε για όλες τις πραγματικές συναρτήσεις φ με $\int_0^1 \varphi(t)dt = 0$ και $|\varphi| = 1$, έχουμε σχεδόν παντού $\|T(\varphi f)\| \geq \delta$.

Απόδειξη:

Από την πρόταση 6.2 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα $f \in L_1[0,1]$ με $\|f\| = 1$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|f - g\| < \frac{1}{2}$ όταν $\|g\| \leq 1$ και $\|Tf - Tg\| < \delta$. Λαμβάνοντας υπόψη το παραπάνω φ παίρνουμε $\psi = \varphi$ ή $\psi = -\varphi$ έτσι ώστε να έχουμε $\int(1+\psi)|f|d\mu \leq 1$. Για $g = (1+\psi)f$ έχουμε $\|g\| \leq 1$ και $\|g - f\| = \|\psi f\| = 1$, έτσι $\delta < \|Tf - Tg\|$. Αλλά $\|T(\varphi f)\| = \|Tf - Tg\|$, έτσι οι ισχυρισμοί ισχύουν.

6.4 Θεώρημα$[B-R],[W]$: Έστω μ ένα μέτρο το οποίο είναι συνεχές. Δεν υπάρχουν semi-embedding από τον $L_1(\mu)$ στο c_0.

Απόδειξη:

Είναι αρκετό να εξετάσουμε μόνο τον $L_1[0,1]$.

Σε αντίθεση με αυτό που έχουμε υποθέσει δηλαδή ότι $T : L_1[0,1] \to c_0$ είναι semi-embedding και $\|T\| = 1$, παίρνουμε $f \in L_1[0,1]$ και $\delta > 0$ όπως το λήμμα 6.3. Ορίζουμε ένα ακέραιο $N > \frac{2}{\delta}$ και έστω $A_1, \ldots, A_N$ ξένα σύνολα τέτοια ώστε $\int_{A_j}|f| = \frac{1}{N}$. Για κάθε n με $n = 1,2,\ldots,N$, έστω ακολουθία r_j^n, που δηλώνει μία Rademacher ακολουθία, όπως οι συναρτήσεις στο A_n.

$$|r_j^n| = \chi A_n\ , \quad n = 1,2,\ldots,N \quad , \ j = 1,2,\ldots \qquad (1)$$

$$\int r_j^n = 0\,,\qquad n = 1,2,\ldots,N \quad,\ j = 1,2,\ldots \tag{2}$$

$$r_j^n f \to \omega \text{ καθώς } j \to \infty \text{ για κάθε } n, \text{ με } n = 1,2,\ldots,N. \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας το Mazur "gliding hump" επιχείρημα, η παραπάνω σχέση (3) παράγει αριθμούς $j(n)$, $n = 1,\ldots,N$ έτσι ώστε

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} T\left(r_{j(n)}^n f\right) \right\| \leq 1.5 \max_n T\left(r_{j(n)}^n f\right) \leq 1.5 \cdot N^{-1} < \delta.$$

Αλλά από την σχέση (1), (2) και το λήμμα 6.3 έχουμε

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} T\left(r_{j(n)}^n f\right) \right\| = \left\| T\left(\left(\sum_{n=1}^{N} r_{j(n)}^n\right) f\right) \right\| \geq \delta$$

το οποίο είναι αδύνατο. Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει το θεώρημα.

Παρόμοιας φύσης με το θεώρημα είναι κ το παρακάτω λήμμα.

6.5 Λήμμα $[B-R]$: Έστω ένας τελεστής $T : L_1 \to c_0$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μία συνάρτηση r με $|r| = 1$ (και $\int r dt = 0$) τέτοια ώστε $\|Tr\| < \varepsilon$.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\|T\| \leq 1$. Έστω (e_n) ορίζουμε τη συνηθισμένη βάση του l_1 , και έστω $f_n = T^* e_n$ για κάθε n. Τότε η $f_n \to 0$ ασθενώς και $\|f_n\|_\infty \leq 1$ για κάθε n.

Διαλέγουμε k τέτοιο ώστε $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$, και για j με $1 \leq j \leq k$ ορίζουμε $I_j = \left[(j-1)/k, j/k\right)$. Επίσης διαλέγουμε r της μορφής $r = \sum_{j=1}^{k} r_j$, όπου για κάθε j,

$$\begin{aligned} &r_j(x) = 1 \text{ ή } -1\,, \quad \text{άν} \quad x \in I_j\,, \\ &r_j(x) = 0\,, \quad \text{άν} \quad x \notin I_j\,, \text{ και } \int r_j dt = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Ακόμα, για κάθε j , $\|r_j\|_1 = \frac{1}{k}$, οπότε $\|Tr_j\| \leq \frac{1}{k}$. Διαλέγουμε τις r_j ώστε τα Tr_j

σχεδόν dislointly supported στο c_0. Οπότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι

$$\|\sum Tr_j\| \leq 2\max_j \|Tr_j\| < \varepsilon.$$

Διαλέγουμε r_1 αυθαίρετα ώστε να ικανοποιεί την (1). Επίσης διαλέγουμε N_1 ώστε $\|Tr_1(n)\| < \frac{\varepsilon}{4}$ για κάθε $n \geq N_1$. Μπορούμε να βρούμε τώρα ακέραιους $N_2,\ldots,N_k$ και συναρτήσεις $r_2,\ldots,r_n$ τέτοιες ώστε για κάθε j με $2 \leq j \leq k$,

$N_{j-1} < N_j$ και r_j να ικανοποιούν την (1) , $\quad (2)$

$Tr_j(n) = 0$ αν $n < N_{j-1} \quad (3)$

και

$|Tr_j(n)| < \frac{e}{2^{j+1}}$ αν $n \geq N_j \quad (4)$

θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Υποθέτουμε ότι $2 \leq j \leq k$ και ότι N_{j-1} , r_{j-1} έχουν ήδη επιλεγεί. Από το Liapunoff convexity theorem $[D - U]$, υπάρχει ένα υποσύνολο E του I_j ώστε

$$\int_E f_n dt = \frac{1}{2}\int_{I_j} f_n dt \qquad \text{για κάθε} \quad n < N_{j-1}$$

και

$$\int_E 1dt = \frac{1}{2}\int_{I_j} 1dt\,. \qquad (5)$$

Τότε η $r_j = \chi_E - \chi_{I_j\sim E}$ ικανοποιεί την (1) και την (3). Τώρα διαλέγουμε $N_j > N_{j-1}$ ώστε η (4) να ισχύει.

Οπότε η κατασκευή είναι πλήρης με τη βοήθεια της επαγωγής. Απαιτούμε η $r = \sum r_j$ να έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Επομένως η r είναι 1, -1 σχεδόν παντού και $\int rdt = 0$. Παίρνουμε n θετικό ακέραιο. Άν $n \geq N_k$, τότε απο την (4) έχουμε

$$|(Tr)(n)| \leq \sum_{j=1}^{k} |Tr_j(n)| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Άν $n \leq N_1$, τότε $|Tr(n)| = |Tr_1(n)|$ από την $(3) \leq \|r_1\|_1 < \varepsilon/2$. Αλλιώς, διαλέγουμε $2 \leq i \leq k$ με $N_{i-1} \leq n \leq N_i$. Τότε

$$|Tr(n)| = \left|\sum_{j=1}^{i-1} Tr_j(n) + Tr_i(n)\right| \qquad \text{(από την } (3)\text{)}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} + \|r_i\|_1 \qquad \text{(από την } (4)\text{)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k}\,.$$

Οπότε $\|Tr\| \leq (\frac{\varepsilon}{2}) + \left(\frac{1}{k}\right) < \varepsilon$, και το λήμμα αποδείχθηκε.

6.6 Θεώρημα (Menchoff)$[B-R],[W]$: Έστω G μία συμπαγής, άπειρη μετρήσιμη ομάδα με μία δυική ομάδα Γ. Έστω $M_0(G) \subset M(G)$ το οποίο δηλώνει το σύνολο όλων των μέτρων ν με $\widehat{\nu}(\gamma) \in c_0(\Gamma)$. Τότε το M_0 είναι ένα μή διαχωρίσιμο κλειστό σύνολο στον $M(G)$.

Απόδειξη:

Δεδομένου ότι ο μετασχημάτισμος Foureir $\wedge : M(G) \to l_\infty(\Gamma)$ είναι συνεχής και δεδομένου ότι $M_0 = (\wedge^{-1})(c_0(\Gamma))$, βλέπουμε ότι ο M είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος. Επίσης για $\nu \in M_0$ και $p = \sum_{\gamma\in A} \alpha_\gamma \gamma$ με πεπερασμένο $A \subset \Gamma$ εύκολα ελέγχουμε ότι $p \cdot \nu \in M_0$. Δεδομένου ότι το M_0 είναι κλειστό έχουμε ότι το M_0 είναι a band. Εάν το M_0 είναι διαχωρίσιμο, τότε υπάρχει ένα θετικό μέτρο $\mu \in M(G)$ τέτοιο ώστε $M_0 = L_1(\mu)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το μ δεν έχει άτομα. Από θεώρημα 6.4 το $(BM_0)^\wedge$ δεν είναι κλειστό στο $c_0(\Gamma)$, έτσι υπάρχει $\alpha(\gamma) \in c_0(\Gamma) \backslash (B_{M_0})^\wedge$ και $\mu_n \in B_{M_0}$ τέτοιο ώστε $\widehat{\mu}_n \to \alpha$ στο $c_0(\Gamma)$. Έστω μ ένα ω^* – οριακό σημείο από την $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$. Επειδή $\|\mu\| \leq 1$ και $\widehat{\mu} = \alpha$, συμπεραίνουμε ότι $\mu \in B_{M_0}$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή του α .

6.7 Λήμμα$[B-R]$: Έστω X και Y χώροι Banach, $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής και K ένα κλειστό φραγμένο διαχωρίσιμο κυρτό υποσύνολο του X. Υποθέτουμε ότι $T(K)$ είναι κλειστό και ο $T \mid K$ είναι ένα προς ένα. Τότε αν (f_n) είναι ένα K-valued martingale τέτοιο ώστε το (Tf_n) συγκλίνει σχεδόν παντού, το (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού.

Απόδειξη:

Έστω A μία σ – υποάλγεβρα της Σ, και E_A ορίζουμε τη conditional expectation σε σχέση με την A. Διαλέγουμε μία αύξουσα ακολουθία (A_n) από σ – υποάλγεβρες της Σ, τέτοια ώστε για κάθε n, η (f_n) είναι (A_n) μετρήσιμη με $E_{n-1}f_n = f_{n-1}$ για $n > 1$, όπου $E_n = E_{A_n}$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι η Σ είναι η μικρότερη πλήρης σ –

αλγεβρα που περιέχει όλες τις A_n.

Από την υπόθεση υπάρχει μία Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε $Tf_n \to g$ σχεδόν παντού. (Φυσικά η (Tf_n) είναι επίσης ένα martingale σε σχέση με την (A_n)). Αφού το TK είναι κλειστό, υποθέτουμε ότι η g παίρνει τιμές TK παντού. Επίσης ορίζουμε $f = T^{-1}g$. Το K είναι Polish χώρος και ο $T \mid K$ είναι ένα προς ένα συνεχής. Από το κλασικό θεώρημα του Lusin, αν U είναι ένα Borel υποσύνολο του K, το TU είναι ένα Borel σύνολο, οπότε $f^{-1}(U) = g^{-1}(TU)$ είναι Lebesque μετρήσιμη. Οπότε η f είναι μετρήσιμη και Bochner ολοκληρώσιμη. Από το Doob martingale convergence theorem, έχουμε $E_n f \to f$ σχεδόν παντού. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρειάζεται ακόμα να δείξουμε ότι

$$E_n f = f_n \quad \text{σχεδον παντού για κάθε } n . \quad (1)$$

Ακόμα αφού ο T είναι ένα πρός ένα, είναι αρκετό να δείξουμε ότι $TE_n f = Tf_n$ σχεδόν παντού για κάθε n.

Για συγκεκριμένο n , από $Tf_j \to g$ στην L^1 νορμα,

$$Tf_n = E_n g \qquad (2)$$

Αλλά

$$E_n g = E_n Tf = TE_n f. \qquad (3)$$

Επομένως αφού $Tf_n = TE_n f$ η (1) αποδείχθηκε.

6.8 Θεώρημα$[B - R]$*: Έστω* $T : L^1 \to c_0$ *ένας τελεστής τέτοιος ώστε* $T \mid P$ *να είναι ένα πρός ένα. Τότε το* TP *δεν είναι κλειστό.*

Απόδειξη:

Πρέπει να δείξουμε ότι εάν ο T είναι ένας οποιδήποτε τελεστής από τον L^1 στο c_0 τότε υπάρχει ένα δυαδικό martingale (f_n) που αντιστιχεί στον P με την (f_n) να αποκλίνει σχεδόν παντού. Έτσι εάν το TP είναι ένα πρός ένα, το TP δεν μπορεί να είναι κλειστό από το λήμμα 5.13.7 .

Για κάθε $n = 0,1,2,\dots$ έστω A_n η άλγεβρα από σύνολα που αποτελείται από $f_n = \left\{\left[(j-1)/2^n, j/2^n\right) : 1 \le j \le 2^n\right\}$. Έστω $f_0 = 1$. Υποθέτουμε $n \ge 1$ και την f_{n-1} να έχει οριστεί έτσι ώστε f_{n-1} να είναι A_{n-1} μετρήσιμη. Για όλα τα $\omega \in [0,1]$ υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο E_ω με $m(E_\omega) = \frac{1}{2^{n-1}}$ και $f_{n-1}(\omega) = 2^{n-1}\chi_{E_\omega}$.

Καθορίζουμε συγκεκριμένο j με $1 \le j \le 2^{n-1}$ και σύνολα $E = E_\omega$ όπου $\omega = (j-1) / 2^{n-1}$. Εφαρμόζοντας το λήμμα 5.13.7 στο $T \mid L^1(E)$ όπου μπορούμε να θεωρήσουμε $(E, P \cap E, m \cdot 2^{n-1})$ ως ένα χώρο πιθανότητας (με $P \cap E$ τα Lebesque μετρήσιμα υποσύνολα του E) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μία μετρήσιμη συνάρτηση $h = h_j^n$ με $\int hdm = 0$, $h(x) = \pm 2^{n-1}$ για όλα τα $x \in E$, και $h(x) = 0$ για όλα τα $x \notin E$ έτσι ώστε $\|Th\| \leq 1/2^n$.

Ορίζουμε $d_n : [0,1] \to P$ με

$$d_n = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} h_j^n \Big(\chi_{[(j-1)/2^{n-1},\,(2j-1)/2^n)} - \chi_{[(2j-1)/2^n,\,j/2^{n-1})} \Big) .$$

Τότε $f_n = f_{n-1} + d_n$.

Ως εκ τούτου έχουμε ότι η (f_n) αντιστοιχεί στον P και για όλα τα $n \geq 1$ και σχεδόν όλα τα ω έχουμε,

$$\|f_n - f_{n-1}(\omega)\|_1 = 1 \qquad \text{ενώ} \qquad \|(Tf_n - Tf_{n-1})(\omega)\| \leq 1/2^n .$$

Έτσι η (f_n) έχει όλες τις επιθυμητές ιδιότητες για να ολοκληρωθεί η απόδειξη.

Ο L^1 δεν ημιευμφυτεύεται σε χώρο με unconditional βάση.

6.9 Ορισμός: Η ακολουθία από τα στοιχεία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, σε ένα χώρο Banach X ονομάζεται schauder βάση (η απλά βάση) εάν για κάθε $x \in X$, υπάρχει μία μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

Άς υπογραμμίσουμε ότι το σύμβολο "=" σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει στο x στη νόρμα του X .

6.10 Ορισμός: Μία Schauder βάση $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ με ορθογώνια συναρτησοειδή $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ σε ένα χώρο Banach X, ονομάζεται unconditional βάση εάν για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$ συγκλίνει unconditionally.

Μία βάση που δεν είναι unconditional ονομάζεται conditional. Σαφώς τα μοναδιαία διανύσματα στον l_p , $1 \leq p \leq \infty$, ή στο c_0 αποτελούν μία unconditional βάση. Εύκολα ελέγχουμε ότι εάν $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία unconditional βάση στον X τότε

$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια unconditional βασική ακολουθία στον X^*.

6.11 Θεώρημα $[W], [L-T]$: Είναι γνωστό ότι ο $L_1[0,1]$ δεν εμφυτεύεται σε κανένα χώρο με unconditional βάση.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση
6.12 Πρόταση: Ένα μπλόκ από βασικές ακολουθίες μίας unconditional βάσης είναι μία unconditional βασική ακολουθία.

Απόδειξη (**θεωρήματος 6.11**):

Έστω $(r_n(t))_{n=1}^{\infty}$ η ακολουθία από Rademacher συναρτήσεις. Σημειώνουμε ότι για κάθε $x \in L_1[0,1]$,

$$x \cdot r_n \to 0 \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty \qquad (1)$$

και

$$\|x + x r_n\|_1 \to \|x\|_1 \ \text{καθώς} \ n \to \infty \quad (2)$$

Άς υποθέσουμε ότι ο $L_1[0,1]$ εμφυτεύεται σε ένα χώρο Banach Y με μία unconditional βάση $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.
Αρχίζοντας με $x = 1$ ορίζουμε,
$$x_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) r_{k_n}$$
όπου το k_n αυξάνεται τόσο γρήγορα ώστε

$$\tfrac{1}{2} \le \|x_n\|_1 = \|x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}\| \le 2 \quad (3)$$

Η ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ θεωρείται στον Y ότι είναι ισοδύναμη με ένα μπλόκ από βασικές ακολουθίες τις βάσης $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. (4)

Η σχέση (4) μπορεί να αποδειχθεί με βάση την σχέση (1) και επιχειρήματα. Η σχέση (3) από την (2) επειδή
$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2}) + (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2}) \cdot r_{k_{n-1}}$. Οι σχέσεις (3) και (4) και η πρόταση 6.12 δείχνουν ότι για κάποια σταθερά C (ανάλογα με την νόρμα από τις ημιεμφυτεύσεις του $L_1[0,1]$ στον Y) και για κάθε επιλογή από $\varepsilon_n = \pm 1$ και για κάθε N

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \right\|_1 \leq C \,.$$

Αλλά αυτό και η σχέση (3) έρχονται σε αντίθεση με την ανισότητα $\left(\sum_{n=1}^{N} \| x_n \|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \sup_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \right\|_p$ για όλα τα πεπερασμένα $(x_n)_{n=1}^{N} \subset L_p(\Omega, \mu)$, με $1 \leq p \leq 2$ και μ ένα μέτρο πιθανότητας.

Ο H.Rosenthal έχει αποδείξει ότι ο L^1 δεν G_δ-εμφυτεύεται σε χώρο με unconditional βάση.

Το ασθενέστερο αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

Έστω $T : L^1 \to X$ ημιεμφύτευση.

Από το Λήμμα 6.3 (αν δεχθούμε ότι $f = 1$) έχουμε ότι

$$\| T\varphi \| > \delta \text{ για κάθε } \varphi \text{ με } \int \varphi = 0 \,,\ |\varphi| = 1$$

δηλαδή (Rosenthal) ο L^1 sign-embeds στον X.

Παραλαγή της απόδειξης του θεωρήματος 6.11 δίνει το αποτέλεσμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[**B**] *J. Bourgain*, Dunford - Pettis operators on L^1 and the Radon - Nikodym property, Israel J. Math. 37, (1980), 34 - 47

[**Bi**] Patrick Billingsley , Probability and Measure, Third Edition,University of Chicago,1995

[**B**-**R**] *J. Bourgain* and H.P.Rosenthal, Applications of the Theory of Semi-embeddings to Banach Space Theory, Lecture Notes in Math , 995, University of Texas at Austrin, (1983), 149-188

[**C**-**S**] Bernd Carl and Irmtraud Stefani, Entropy,Compactness and the Approximation of Operators 98, Cambridge University Press,1990

[**D**-**S**] *N. Dunford - J. T. Schwartz*, Linear Operators, Part I, Interscience, New York and London, 1958

[**D**-**U**] *J. Diestel - J. Uhl Jr*, Vector Measures , AMS 1977

[**F**] Francisco J. Freniche, Cesaro Convergence of Martingale Difference Sequences and the Banach-Saks and Szlenk theorems, American Mathematical Society, Volume 103, No 1, May 1988, 234-236

[**G**] M.Girardi ,Thesis, University of Illinois,1990

[**W**] *P.Wojtaszczyk , Banach spaces for analysts, Cambridge studies in advanced Mathematics 25,1991*

[**Wi**] David Williams, Probability with Martingales, Cambridge University,1991