

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΕ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΠΕΛΑΤΕΣ ΠΟΥ
ΑΠΟΘΑΡΡΥΝΟΝΤΑΙ**

Διατριβή που υπεβλήθη για τη μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την
απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος

υπό

Άγγελου Α. Οικονομόπουλου

Χανιά, 2010

© Copyright υπό Άγγελου Α. Οικονομόπουλου

Έτος: 2010

Η διατριβή του Άγγελου Οικονομόπουλου, εγκρίνεται

Βασίλης Κουϊκόγλου _____

Καθηγητής, επιβλέπων

Αναστάσιος Πουλιέζος _____

Καθηγητής, μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής

Νικόλαος Τσουρβελούδης _____

Αναπληρωτής Καθηγητής, μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής

Ιωάννης Φίλης _____

Καθηγητής

Ευάγγελος Γρηγορούδης _____

Επίκουρος Καθηγητής

Ιωάννης Νικολός _____

Επίκουρος Καθηγητής

Ευστράτιος Ιωαννίδης _____

Λέκτορας Πανεπιστημίου Αιγαίου

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	8
1.1	Αντικείμενο της διατριβής	8
1.2	Βιβλιογραφική ανασκόπηση	9
1.3	Συνεισφορά της διατριβής	13
1.4	Δομή της διατριβής	15
2	Σύστημα Παραγωγής Σταθερού Αποθέματος με Μία Μηχανή και Πελάτες που Αποθαρρύνονται	17
2.1	Εισαγωγή	17
2.2	Περιγραφή και μοντελοποίηση του προβλήματος	18
2.3	Βελτιστοποίηση	28
2.4	Αριθμητικά αποτελέσματα	32
2.5	Σύνοψη και συμπεράσματα	36
3	Γραμμές Παραγωγής με Υποσχόμενο Χρόνο Παράδοσης Παραγγελιών και Πολιτικές Ελέγχου Αποθεμάτων και Πωλήσεων	38
3.1	Εισαγωγή	38
3.2	Περιγραφή συστήματος	39
3.3	Μέτρα απόδοσης του συστήματος	42
3.4	Βελτιστοποίηση	50
3.5	Αριθμητικά αποτελέσματα	52
3.6	Σύνοψη και συμπεράσματα	60
4	Δίκτυα Παραγωγής με Πελάτες που Αποθαρρύνονται	62
4.1	Εισαγωγή	62
4.2	Περιγραφή του δικτύου παραγωγής	63
4.3	Βελτιστοποίηση	67
4.4	Αριθμητικά αποτελέσματα	69
4.5	Σύνοψη και συμπεράσματα	81
5	Συμπεράσματα	83
	Παράρτημα	85
	Βιβλιογραφία	91

Ευχαριστίες

Με αφορμή την ολοκλήρωση της διατριβής αυτής, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς την οικογένειά μου που με υποστήριξε και με υποστηρίζει σε κάθε μου αναζήτηση, τους φίλους μου που με κράτησαν όρθιο σε δύσκολες στιγμές αλλά και τους συναδέλφους μου με τους οποίους μοιραστήκαμε μια τέτοια δοκιμασία. Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου και δάσκαλο, κ. Βασίλη Κουϊκόγλου για την καθοδήγηση του και τις απαραίτητες υποδείξεις που μου έκανε καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης αυτής της διατριβής, κυρίως όμως θέλω να τον ευχαριστήσω για την υποστήριξη, συμπαράσταση, εμπιστοσύνη αλλά και την φιλία του όλα αυτά τα χρόνια που συνεργαζόμαστε. Τούτο το κείμενο είναι αφιερωμένο σε αυτόν. Τέλος μια ειδική αναφορά στην αγαπημένη μου γιαγιά Μαρία που θα είναι πάντα δίπλα μου αλλά και ένα μεγάλο ευχαριστώ στην Εύη, ήσουν εκεί χωρίς να στο ζητήσω ποτέ.

Η εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής χρηματοδοτήθηκε εν μέρει από το Κοινοφελές Ίδρυμα Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης.

Σύντομο βιογραφικό σημείωμα

Ο Άγγελος Οικονομόπουλος γεννήθηκε στην Αθήνα το 1979. Έχει πτυχίο Μηχανικού Παραγωγής και Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης στα συστήματα παραγωγής από το τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης. Αντικείμενα της έρευνάς του είναι η ανάλυση και ο έλεγχος συστημάτων παραγωγής.

Περίληψη

Σε αυτή την διατριβή μελετώνται προβλήματα ελέγχου παραγωγής και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής στα οποία παρατηρείται αποθάρρυνση πελατών σε περιόδους όπου το προϊόν δεν είναι ετοιμοπαράδοτο. Στόχος του ελέγχου είναι η μεγιστοποίηση του ρυθμού κέρδους του συστήματος. Το κέρδος ισούται με τα έσοδα από τις πωλήσεις μειωμένα κατά το κόστος λειτουργίας, διατήρησης αποθεμάτων αλλά και απώλειας ή καθυστέρησης των πελατών. Μια απλή και πρακτική πολιτική ελέγχου παραγωγής είναι ο ορισμός ενός ανώτατου κατωφλιού για το επίπεδο αποθέματος έτοιμων προϊόντων, το οποίο ονομάζεται απόθεμα βάσης. Η παραγωγή του συστήματος είναι συνεχής όσο το απόθεμα είναι κάτω από αυτό το κατώφλι και μετά παύει. Συχνά σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, αφικνούμενοι πελάτες διστάζουν να θέσουν παραγγελίες λόγω της αναμενόμενης καθυστέρησης που θα υποστούν. Ακόμη και αν ένας πελάτης παραγγείλει προϊόν, ενδεχομένως στην συνέχεια να ακυρώσει την παραγγελία του αν ο χρόνος αναμονής είναι μεγάλος. Μια απλή πολιτική για να μετριασθεί το κόστος απώλειας ή καθυστέρησης παραγγελιών, είναι η μερική ικανοποίηση της ζήτησης. Αφικνούμενες παραγγελίες γίνονται δεκτές όσο ο αριθμός των εν δυνάμει εκκρεμών παραγγελιών είναι κάτω ενός ορισμένου κατωφλιού, γνωστό ως έλλειμμα βάσης, και μετά απορρίπτονται. Σε αυτήν την εργασία προτείνονται συντονισμένες πολιτικές τύπου κατωφλιού για τον από κοινού έλεγχο της παραγωγής και της αποδοχής παραγγελιών. Εξετάζονται περιπτώσεις απλών συστημάτων μιας μηχανής και γραμμές παραγωγής. Με τη χρήση της θεωρίας ουρών αναμονής εξάγονται αναλυτικές εκφράσεις του ρυθμού κέρδους του συστήματος ως προς τις παραμέτρους ελέγχου, ήτοι, το απόθεμα βάσης και το έλλειμμα βάσης. Επίσης εξετάζονται γενικότερα δίκτυα παραγωγής με τη χρήση προσομοίωσης. Αποδεικνύεται σε κάθε περίπτωση ότι οι παράμετροι ελέγχου που μεγιστοποιούν τον ρυθμό κέρδους του εκάστοτε συστήματος έχουν ένα άνω φράγμα και προτείνονται απλοί αλγόριθμοι αναζήτησης των βέλτιστων παραμέτρων οι οποίοι τερματίζουν μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Η προτεινόμενη πολιτική συντονισμένου ελέγχου συγκρίνεται με συνήθεις πολιτικές. Τα αριθμητικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την ανωτερότητα και τα πλεονεκτήματα του συντονισμένου ελέγχου παραγωγής και αποδοχής παραγγελιών.

1 Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της διατριβής

Ο έλεγχος των συστημάτων παραγωγής αποτελεί ένα από τα βασικά κλειδιά για την βιωσιμότητα και την κερδοφορία των βιομηχανικών επιχειρήσεων. Τον τελευταίο αιώνα έχουν γίνει πολλές αλλαγές στην οργάνωση και τον έλεγχο της παραγωγικής διαδικασίας. Αλλαγές με γνώμονα τις συνθήκες κάθε εποχής, κοινωνικές και τεχνολογικές, τη συνεχή αύξηση του ανταγωνισμού αλλά και τις υψηλότερες απαιτήσεις του καταναλωτικού κοινού.

Στις αρχές του 20στού αιώνα, η βιομηχανία είχε υιοθετήσει τη μαζική παραγωγή προϊόντων χρησιμοποιώντας όλη τη δυναμικότητα του εργοστασίου. Σύμφωνα με αυτό το πρότυπο της παραγωγής, κάθε τμήμα του εργοστασίου παρήγαγε συνεχώς, εφόσον είχε ικανή τροφοδοσία και επαρκή χώρο αποθήκευσης. Μέχρι τα μέσα του αιώνα, το είδος αυτό της παραγωγής ήταν βολικό, αφού απαιτούσε ελάχιστες προσπάθειες συντονισμού μεταξύ των τμημάτων του εργοστασίου. Το πρότυπο αυτό, ενώ ήταν πρακτικό σε βιομηχανίες οι οποίες λειτουργούσαν ως μονοπώλια (π.χ. η αυτοκινητοβιομηχανία Ford τότε), σήμερα μοιάζει ξεπερασμένο και εφαρμόζεται όλο και πιο σπάνια. Αιτία είναι η αύξηση του αριθμού βιομηχανιών που παράγουν ανταγωνιστικά προϊόντα, πράγμα που αλλάζει δραματικά το σκηνικό της αγοράς τις τελευταίες δεκαετίες.

Σήμερα, για να επιβιώσει μια βιομηχανία θα πρέπει να ελαχιστοποιήσει το κόστος λειτουργίας της, ενώ παράλληλα να είναι σε θέση να ικανοποιήσει την αγορά - ποιοτικά και ποσοτικά - προσφέροντας ποικιλία παρόμοιων προϊόντων σε ελκυστικές τιμές. Η παραγωγική διαδικασία πλέον, περιλαμβάνει τη λήψη σημαντικών αποφάσεων που, μεταξύ άλλων, σχετίζονται με το συντονισμένο έλεγχο της παραγωγής σε κάθε τμήμα ώστε να αποφεύγεται η διατήρηση υψηλών αποθεμάτων και συγχρόνως η έλλειψη προϊόντων που οδηγεί σε ανικανοποίητη ζήτηση.

Συγκεκριμένα ο έλεγχος παραγωγής απαντά σε ερωτήματα που σχετίζονται με το χρονικό προγραμματισμό της λειτουργίας κάθε μηχανής του συστήματος (πότε ξεκινά η παραγωγή, με τι ρυθμό και πότε διακόπτεται) και τον έλεγχο των πωλήσεων (αποδοχή-απόρριψη μιας παραγγελίας ή ανάθεση σε υπεργολάβο). Σκοπός του ελέγχου είναι η βελτιστοποίηση ενός ή και περισσότερων μέτρων απόδοσης του

συστήματος. Αυτά μπορεί να είναι το καθαρό κέρδος από πωλήσεις, το κόστος λειτουργίας, το μέσο απόθεμα και η ικανοποίηση των πελατών από απόψεως χρόνου παράδοσης και ποιότητας.

Στην παρούσα διατριβή εξετάζουμε το πρόβλημα του ελέγχου του ρυθμού παραγωγής και της αποδοχής των παραγγελιών συναρτήσει των αποθεμάτων σε κάθε στάδιο παραγωγής και του πλήθους των εκκρεμών παραγγελιών. Μελετάμε συστήματα, που παράγουν ένα μόνο προϊόν για να ικανοποιήσουν τυχαία ζήτηση. Στα συστήματα που εξετάζονται, σε περιόδους μηδενικού αποθέματος έτοιμων προϊόντων, οι πελάτες αποθαρρύνονται και είτε διστάζουν να θέσουν μια παραγγελία όταν υπάρχει ήδη ένας αριθμός πελατών σε αναμονή οι οποίοι έχουν προτεραιότητα, είτε ακυρώνουν παραγγελίες αν ο χρόνος αναμονής γίνει πολύ μεγάλος. Αυτή είναι μια λογική και ρεαλιστική παραδοχή η οποία δεν έχει μελετηθεί επαρκώς στην βιβλιογραφία των συστημάτων παραγωγής.

Για τον έλεγχο της παραγωγής και των αφικνούμενων πελατών εφαρμόζουμε απλές πολιτικές κατώφλιού. Σύμφωνα με αυτές τις πολιτικές, το σύστημα παράγει στον μέγιστο ρυθμό όσο το απόθεμα έτοιμων προϊόντων είναι μικρότερο από ένα κατώφλι που ονομάζεται *απόθεμα βάσης* και διακόπτει την παραγωγή όταν το απόθεμα είναι ίσο με αυτό το κατώφλι. Για τον έλεγχο των πωλήσεων αντίστοιχα, ορίζεται μια μέγιστη τιμή ανικανοποίητων παραγγελιών η οποία ονομάζεται *ελλείμμα βάσης*. Το σύστημα αποδέχεται παραγγελίες πελατών όσο το πλήθος των παραγγελιών που ήδη εκκρεμούν είναι μικρότερο του ελλείμματος βάσης, αλλιώς τις απορρίπτει.

Στόχος είναι ο από κοινού καθορισμός του αποθέματος και του ελλείμματος βάσης που μεγιστοποιούν το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα χρόνου για το εκάστοτε σύστημα. Ο ρυθμός κέρδους προκύπτει από τα έσοδα των πωλήσεων μείον το κόστος αποθεμάτων, το κόστος των εκκρεμών και των ανικανοποίητων παραγγελιών.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Τα ερωτήματα στα οποία καλείται να απαντήσει ο έλεγχος παραγωγής έχουν σημαντική επιρροή σε ένα μεγάλο αριθμό παραμέτρων της παραγωγικής διαδικασίας, όπως ο ρυθμός παραγωγής του συστήματος, ο μέσος αριθμός αποθεμάτων και

εκκρεμών παραγγελιών και το ποσοστό ανικανοποίητων παραγγελιών. Οι παραπάνω δείκτες επιδρούν τόσο στον αριθμό των πωλήσεων και άρα τον ρυθμό εσόδων, όσο και στο κόστος διατήρησης αποθεμάτων, εκκρεμών παραγγελιών αλλά και μη ικανοποίησης της ζήτησης [1]. Κάθε μια συνιστώσα κόστους θα περιγραφεί σε επόμενο κεφάλαιο.

Τα συστήματα παραγωγής είναι δυναμικά συστήματα γι' αυτό και τα προβλήματα του ελέγχου της παραγωγής συνήθως διατυπώνονται ως προβλήματα βελτιστοποίησης δυναμικών συστημάτων και επιλύονται είτε με δυναμικό προγραμματισμό είτε με βέλτιστο έλεγχο. Για απλά συστήματα παραγωγής που αποτελούνται από μία μηχανή και παράγουν ένα τύπο προϊόντος αποδεικνύεται [2] ότι οι βέλτιστες πολιτικές ελέγχου του ρυθμού παραγωγής είναι τύπου *κατώφλιου* (threshold-type). Οι πολιτικές αυτού του τύπου ορίζουν πως ο βέλτιστος ρυθμός παραγωγής είναι ο μέγιστος δυνατός όσο η στάθμη του αποθέματος έτοιμων προϊόντων είναι χαμηλότερη από ένα προκαθορισμένο επίπεδο. Όταν ο αριθμός του αποθέματος έτοιμων προϊόντων γίνει ίσος με αυτό το προκαθορισμένο κατώφλι, η μηχανή παράγει συγχρονισμένα με την ζήτηση ώστε το απόθεμα να διατηρείται σε αυτό το επίπεδο.

Μελετώντας πιο πολύπλοκα συστήματα με περισσότερες μηχανές, το πρόβλημα γίνεται πιο σύνθετο. Οι βέλτιστες πολιτικές είναι δύσκολο να προσδιοριστούν και, ακόμη και σε περιπτώσεις που αυτό είναι δυνατό [3], η πρακτική εφαρμογή τους εμφανίζει μειονεκτήματα (δαπανηρός εξοπλισμός, κόστος κατάλληλης εκπαίδευσης προσωπικού, λάθη στην εφαρμογή της πολιτικής λόγω κακής κατανόησης) που πολλές φορές είναι σημαντικότερα από το θεωρητικό οικονομικό όφελος εφαρμογής της βέλτιστης πολιτικής. Για αυτόν το λόγο, ο δυναμικός προγραμματισμός και ο βέλτιστος έλεγχος χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά πλέον για την αναγνώριση των δομικών ιδιοτήτων μιας βέλτιστης πολιτικής ελέγχου, ιδιότητες που οδηγούν στον καθορισμό πιο απλών, υποβέλτιστων πολιτικών, που είναι εύκολα υλοποιήσιμες και εξαρτώνται από μικρό σχετικά αριθμό παραμέτρων. Υπάρχουν αρκετές κατηγορίες απλών πολιτικών ελέγχου για συστήματα παραγωγής: οι πολιτικές *αποθέματος βάσης*, οι πολιτικές KANBAN, CONWIP καθώς και συνδυασμοί αυτών. Μια βιβλιογραφική επισκόπηση των διαφόρων οικογενειών πολιτικών ελέγχου μπορεί κάποιος να βρει στο βιβλίο των Buzacott και Shanthikumar [4] καθώς και στην εργασία των Liberopoulos και Dallery [5].

Σε αυτή την εργασία εξετάζουμε συστήματα *παραγωγής προς αποθήκευση* (make-to-stock) που παράγουν ένα προϊόν για να ικανοποιήσουν τυχαία ζήτηση. Τα συστήματα αυτά αποτελούνται από μία μονάδα παραγωγής με μηχανές, ενδιάμεσες αποθήκες και μια αποθήκη έτοιμων προϊόντων. Μια συνηθισμένη πρακτική ελέγχου αποθεμάτων σε τέτοια συστήματα συνίσταται στον καθορισμό ενός κατώφλιου για το πλήθος των έτοιμων προϊόντων που ονομάζεται *απόθεμα βάσης* (base-stock) [6], [7]. Οι πολιτικές αποθέματος βάσης αναπτύχθηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 1950 και εφαρμόζονται μέχρι σήμερα με μικρές παραλλαγές στην πλειοψηφία των συστημάτων παραγωγής. Σε κάθε στάδιο της παραγωγής ορίζεται ένα απόθεμα βάσης και όταν το απόθεμα προϊόντων αγγίζει το απόθεμα βάσης τότε η παραγωγή σταματά και ξεκινάει πάλι όταν το απόθεμα πέσει κάτω από αυτό το κατώφλι. Παρόμοιες πολιτικές, είναι η πολιτική *σταθερού αποθέματος* (CONWIP, constant work-in-process) [8] και η πολιτική *σταθερής αποθεματικής θέσης* (CONIP, constant inventory position). Σύμφωνα με τις πολιτικές αυτές, οι μηχανές του συστήματος παράγουν όποτε έχουν υλικά, ωστόσο στην πολιτική σταθερού αποθέματος, η μονάδα παραγωγής τροφοδοτείται με πρώτες ύλες μόνο όταν κάποιο τελικό προϊόν πωληθεί ενώ η πολιτική σταθερής αποθεματικής θέσης ορίζει πως η μονάδα τροφοδοτείται όταν γίνει μια παραγγελία προϊόντος (είτε αυτή οδηγήσει σε απευθείας πώληση, είτε εκκρεμεί). Μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της οικογένειας πολιτικών είναι ότι το κόστος αποθέματος είναι φραγμένο. Αν το απόθεμα βάσης ή το επίπεδο σταθερού αποθέματος επιλεγεί μηδέν τότε η πολιτικές αυτές ονομάζονται πολιτικές *παραγωγής κατά παραγγελία* (MTO, make-to-order).

Για τη μαθηματική περιγραφή συστημάτων παραγωγής, χρησιμοποιούνται συχνά αναμονητικά συστήματα. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές αναφορές για την εξέταση της δομής βέλτιστων πολιτικών ελέγχου αποδοχής πελατών σε τέτοια συστήματα [9], [10]. Οι πολιτικές αποδοχής πελατών σε προβλήματα συστημάτων παραγωγής και αποθεματικών συστημάτων είναι συνήθως απλές: όταν δεν υπάρχει έτοιμο προϊόν, οι παραγγελίες είτε απορρίπτονται είτε γίνονται όλες δεκτές. Σε περιόδους όπου δεν υπάρχει απόθεμα στο σύστημα, η απόρριψη όλων των εισερχόμενων παραγγελιών ονομάζεται πολιτική *πλήρους απόρριψης* (LS, lost sales), ενώ στην περίπτωση όπου γίνονται όλες αποδεκτές, η πολιτική ονομάζεται *πλήρους αποδοχής* (CB, complete backordering). Η κάθε μια από τις παραπάνω πολιτικές προτιμάται ανάλογα με την περίπτωση. Σε συστήματα όπου ο ρυθμός παραγωγής είναι πολύ μικρότερος της ζήτησης, η πολιτική πλήρους αποδοχής καθίσταται

ζημιογόνος αφού είναι προφανές ότι οι πελάτες στην αναμονή θα αυξάνονται συνεχώς [6]. Οι πολιτικές *πλήρους απόρριψης* και *πλήρους αποδοχής* είναι εκ διαμέτρου αντίθετες. Μια ενδιάμεση πολιτική ελέγχου παραγγελιών είναι η πολιτική *μερικής αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης*. Η πολιτική αυτή ορίζει ένα κατώφλι που ονομάζεται *έλλειμμα βάσης*. Όταν το πλήθος παραγγελιών που εκκρεμούν είναι κάτω από το έλλειμμα βάσης, τότε όλες οι παραγγελίες γίνονται δεκτές ενώ όταν οι εκκρεμείς παραγγελίες φθάσουν αυτό το κατώφλι τότε απορρίπτονται. Αυτή η πολιτική προτάθηκε το 1969 [11] από τον Naor για τον έλεγχο ενός απλού συστήματος μιας μηχανής με εκθετικούς χρόνους παραγωγής και ζήτησης.

Την τελευταία δεκαετία έχουν δημοσιευτεί αρκετές εργασίες που συνδυάζουν απλές πολιτικές ελέγχου παραγωγής και αποθεμάτων (αποθέματος βάσης, σταθερού αποθέματος και παραλλαγές αυτών) με την πολιτική ελλείμματος βάσης για συστήματα μιας ([12]–[14]) ή και περισσοτέρων μηχανών [15]. Σε πρόσφατη διατριβή [16] παρουσιάζεται ένας συνδυασμένος έλεγχος παραγωγής και αποθεμάτων με πολιτικές *μερικής αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης* και *τυχαίας αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης* (RAC, random arrival control) για δίκτυα παραγωγής. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στις εργασίες αυτές δείχνουν ότι η μερική αποδοχή της ζήτησης είναι αποδοτικότερη από την πλήρη αποδοχή ή απόρριψή της.

Παρόλο που η βιβλιογραφία πλέον είναι αρκετά εκτενής, δεν υπάρχουν πολλές αναφορές σε αποτελέσματα σχετικά με τον έλεγχο συστημάτων παραγωγής όταν οι πελάτες αποθαρρύνονται. Συστήματα δηλαδή στα οποία η ζήτηση σε περιόδους μηδενικού αποθέματος είναι εν γένει φθίνουσα συνάρτηση αλλά και στα οποία πελάτες που είναι ήδη σε αναμονή προϊόντος μπορεί να ακυρώνουν παραγγελίες.

Η αποθάρρυνση (ή ανυπομονησία) που εμφανίζουν οι πελάτες σε περιόδους μηδενικού αποθέματος είναι μια σημαντική παράμετρος που επηρεάζει τις αποφάσεις για τον έλεγχο των συστημάτων παραγωγής. Το πρόβλημα αυτό έχει τελευταία βρει εφαρμογές σε τηλεπικοινωνιακά συστήματα. Όταν αναφερόμαστε σε αυτό το φαινόμενο συμπεριφοράς των πελατών, συνήθως χρησιμοποιούμε τους όρους *αποτροπή πελατών* (balking) και *εγκατάλειψη πελατών* (reneging) ([17]–[19]).

Η αποτροπή πελατών συμβαίνει όταν ένας αφικνούμενος πελάτης σε περιόδους μηδενικού αποθέματος αποφασίζει να μην κάνει παραγγελία πιστεύοντας ότι θα καθυστερήσει πολύ η ικανοποίησή της. Η αποτροπή των πελατών είναι ζημιογόνος

καθώς προκαλεί κόστος απώλειας πωλήσεων. Η μοντελοποίηση αυτής της συμπεριφοράς επιτυγχάνεται υποθέτοντας μια γνωστή πιθανότητα αποτροπής σε κάθε αφικνούμενο πελάτη. Αυτή η πιθανότητα εξαρτάται είτε από τον αριθμό των ήδη εκκρεμών παραγγελιών [20], είτε από μια εκτίμηση του χρόνου απόκρισης του συστήματος σε αφικνούμενες παραγγελίες κατά τη διάρκεια μηδενικών αποθεμάτων [21]. Στην τελευταία περίπτωση, κάθε πελάτης έχει ένα μέγιστο χρονικό διάστημα αναμονής (προθεσμία που μετράει από την ώρα της άφιξής του) και θέτει μια παραγγελία μόνο αν έχει εγγυήσεις ότι ο χρόνος απόκρισης του συστήματος στην παραγγελία του είναι μικρότερος από αυτό το διάστημα.

Η εγκατάλειψη πελατών συμβαίνει όταν ένας πελάτης που έχει ήδη θέσει μια παραγγελία σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, αποφασίζει να την αποσύρει αν αναγκαστεί να περιμένει περισσότερο από ένα μέγιστο ανεκτό χρόνο αναμονής. Η απόσυρση παραγγελιών, πέραν του κόστους απώλειας μιας πώλησης προκαλεί και ένα κόστος απώλειας της καλής θέλησης των πελατών, προδιαθέτοντας τους αρνητικά σε ενδεχόμενη μελλοντική παραγγελία. Το θέμα της εγκατάλειψης των ουρών αναμονής έχει μελετηθεί τις τελευταίες δεκαετίες αλλά αναλυτικά αποτελέσματα για δείκτες απόδοσης όπως το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών, ο μέσος χρόνο αναμονής πελατών ή ο ρυθμός εγκατάλειψης, περιορίζονται σε απλά συστήματα ενός σταδίου παραγωγής με έναν [22] ή περισσότερους εξυπηρετούντες ([23]–[25]). Για πιο γενικά συστήματα παραγωγής όπως γραμμές παραγωγής ή δίκτυα, το πρόβλημα γίνεται πολύ σύνθετο λόγω μαθηματικής πολυπλοκότητας η οποία καθιστά πολύ δύσκολη την εξαγωγή αναλυτικών εκφράσεων για τους παραπάνω δείκτες και άρα τον εντοπισμό των βέλτιστων παραμέτρων του ελέγχου.

1.3 Συνεισφορά της διατριβής

Στην παρούσα διατριβή εξετάζεται το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου παραγωγής, αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής με στοχαστική ζήτηση και αποθάρρυνση πελατών σε περιόδους μηδενικού αποθέματος. Ειδικότερα μελετάται μια σχετικά νέα πολιτική μερικής αποδοχής παραγγελιών (η πολιτική ελλείμματος βάσης). Εξάγονται αναλυτικές εκφράσεις σημαντικών μέτρων απόδοσης που συνθέτουν την συνάρτηση κέρδους τέτοιων συστημάτων συναρτήσει ορισμένων παραμέτρων ελέγχου (απόθεμα ασφαλείας, κατώφλι απόρριψης

παραγγελιών), και, τελικά, προσδιορίζονται βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου οι οποίες μεγιστοποιούν το μέσο ρυθμό κέρδους του συστήματος.

Μελετώνται πρώτα απλά συστήματα μίας μηχανής και επεκτείνουμε την ανάλυση της εργασίας [14] για συστήματα στα οποία οι πελάτες σε περιόδους μηδενικού αποθέματος εμφανίζουν και τις δύο μορφές αποθάρρυνσης (διστάζουν να θέσουν ή και αποσύρουν παραγγελίες). Ευρίσκονται αναλυτικές εκφράσεις για τους χρόνους αναμονής πελατών που τελικά θα εξυπηρετηθούν, για το μέσο πλήθος αυτών, καθώς και όρια για τις πιθανότητες απόσυρσης παραγγελιών. Οι ποσότητες αυτές είναι απαραίτητες για τον εντοπισμό του βέλτιστου μέσου ρυθμού κέρδους του συστήματος, αλλά μέχρι τώρα ο υπολογισμός τους γινόταν μόνο με προσομοίωση.

Μελετώνται επίσης γραμμές παραγωγής, επεκτείνοντας τη μέθοδο μοντελοποίησης της εργασίας [15], στις οποίες η ζήτηση μειώνεται (λόγω αποθάρρυνσης) σε περιόδους μηδενικού αποθέματος και υπάρχουν ρήτρες καθυστέρησης στην παράδοση παραγγελιών. Ευρίσκονται αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα καθυστέρησης παράδοσης μιας παραγγελίας πέραν ενός χρονικού ορίου, σε συστήματα που παράγουν προϊόντα είτε προς αποθήκευση είτε κατά παραγγελία και έχουν χρόνους κατεργασίας που ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Τέτοια αποτελέσματα έχουν αναπτυχθεί [26] για γραμμές παραγωγής που παράγουν μόνο κατά παραγγελία.

Με τα προηγούμενα αναλυτικά μοντέλα απαιτούνται λίγα μόλις δευτερόλεπτα στον υπολογιστή για να βρει κάποιος βέλτιστες πολιτικές αποθεμάτων και διαχείρισης παραγγελιών. Όμως, τα μοντέλα αυτά βασίζονται στην παραδοχή ότι οι χρόνοι κατεργασίας είναι εκθετικοί και η ζήτηση ακολουθεί την διαδικασία Poisson. Η πειραματική μελέτη που παρουσιάζεται στη διατριβή δείχνει ότι, ακόμη και όταν οι υποθέσεις αυτές δεν ισχύουν, τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης με αναλυτικά μοντέλα είναι αρκετά κοντά στις βέλτιστές τιμές που προκύπτουν από εξαντλητική αναζήτηση με προσομοίωση. Επιπλέον, ο ρυθμός κέρδους φαίνεται να είναι μονοκόρυφη (unimodal) συνάρτηση των παραμέτρων ελέγχου. Συνεπώς, για την βελτιστοποίηση μπορεί κάποιος να ξεκινήσει θέτοντας ως αρχικές τιμές των παραμέτρων ελέγχου, τις βέλτιστες τιμές που δίνουν τα (προσεγγιστικά) αναλυτικά μοντέλα, και κατόπιν να εφαρμόσει έρευνα αναζήτησης τοπικού μεγίστου για την συνάρτηση κέρδους χρησιμοποιώντας προσομοίωση. Με αυτόν τον τρόπο

εξοικονομείται σημαντικός υπολογιστικός χρόνος, αφού η προσομοίωση είναι ακριβής αλλά εξαιρετικά χρονοβόρα μέθοδος στον υπολογιστή.

Η προτεινόμενη πολιτική που συνδυάζει την μερική αποδοχή παραγγελιών και τη διατήρηση αποθέματος ασφαλείας, υπερέχει, ως προς την απόδοση, άλλων συχνότερα εφαρμοζόμενων πολιτικών όπως η πολιτική παραγωγής κατά παραγγελία και η πολιτική πλήρους απόρριψης.

1.4 Δομή της διατριβής

Η διατριβή αποτελείται από τέσσερα επιπλέον κεφάλαια:

Στο Κεφάλαιο 2 εξετάζονται απλά συστήματα μίας μηχανής με εκθετικούς χρόνους παραγωγής και αφίξεων παραγγελιών. Σε περιόδους μηδενικού αποθέματος οι πελάτες εμφανίζουν και τους δύο τύπους αποθάρρυνσης, αποτροπή και εγκατάλειψη. Το σύστημα υιοθετεί την πολιτική σταθερού αποθέματος για τον έλεγχο των αποθεμάτων και της παραγωγής και την πολιτική ελλείμματος βάσης για τον έλεγχο των αφικνούμενων παραγγελιών. Το σύστημα μοντελοποιείται ως ένα αναμονητικό σύστημα $M/M/1/k^*$. Το κέρδος του συστήματος προκύπτει από το κέρδος πωλήσεων προϊόντων μείον το κόστος αποθεμάτων και μη ικανοποιημένης ζήτησης και εκφράζεται συναρτήσει των παραμέτρων ελέγχου. Αποδεικνύεται ότι οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου είναι φραγμένες. Με βάση αυτήν την ιδιότητα αναπτύσσεται ένας απλός αλγόριθμος για τον προσδιορισμό του βέλτιστου επιπέδου σταθερού αποθέματος και του βέλτιστου ελλείμματος βάσης. Τα αριθμητικά παραδείγματα δείχνουν ότι η προτεινόμενη πολιτική υπερτερεί άλλων διαδεδομένων πολιτικών.

Στο Κεφάλαιο 3 εξετάζονται γραμμές παραγωγής όπου η αποθάρρυνση των πελατών έχει μόνο τη μορφή της αποτροπής αλλά υπάρχει ποινή όταν ο χρόνος καθυστέρησης υπερβαίνει τις προθεσμίες. Το σύστημα υιοθετεί την πολιτική σταθερής αποθεματικής θέσης για τον έλεγχο των αποθεμάτων και της παραγωγής

* Στην θεωρία ουρών αναμονής, η σύμβαση συμβολισμού ενός αναμονητικού συστήματος είναι: $A/B/C/D$ όπου τα A και B συμβολίζουν τη στατιστική εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. (M για εκθετική, E για Erlang, G για γενικές κατανομές κ.ο.κ.). Το C συμβολίζει τον αριθμό των εξυπηρετούντων, το D τη χωρητικότητα του συστήματος (αν ο τελευταίος συμβολισμός παραλείπεται, τότε η χωρητικότητα θεωρείται άπειρη).

και την πολιτική ελλείματος βάσης για τον έλεγχο αποδοχής των αφικνούμενων παραγγελιών. Στην περίπτωση όπου έχουμε εκθετικούς χρόνους παραγωγής και αφίξεων παραγγελιών, το σύστημα μοντελοποιείται ως ένα κλειστό αναμονητικό δίκτυο. Το κέρδος του συστήματος προκύπτει από το κέρδος πωλήσεων προϊόντων μείον το κόστος αποθεμάτων και μη ικανοποιημένης ζήτησης και εκφράζεται συναρτήσει των παραμέτρων ελέγχου. Αποδεικνύεται ότι οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου είναι φραγμένες ανεξαρτήτως κατανομής των χρόνων κατεργασίας. Με βάση αυτήν την ιδιότητα αναπτύσσεται ένας απλός αλγόριθμος για τον προσδιορισμό του βέλτιστου επιπέδου σταθερού αποθέματος και του βέλτιστου ελλείματος βάσης. Για γραμμές παραγωγής με εκθετικούς χρόνους κατεργασίας, έχουμε αναλυτικούς τύπους κλειστής μορφής για τη συνάρτηση κέρδους. Με την βοήθεια της προσομοίωσης μελετάμε την απόδοση γραμμών παραγωγής με μη εκθετικούς χρόνους κατεργασίας. Και σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται σύγκριση της προτεινόμενης πολιτικής και τα αριθμητικά παραδείγματα δείχνουν ότι η προτεινόμενη πολιτική υπερτερεί άλλων διαδεδομένων πολιτικών.

Στο Κεφάλαιο 4 πραγματοποιείται μια εφαρμογή πολιτικών συνδυασμένου ελέγχου για ένα δίκτυο παραγωγής που δεν επιδέχεται αναλυτικής μελέτης και, με τη βοήθεια αλγορίθμου προσομοίωσης, γίνεται σύγκριση των πολιτικών αυτών με άλλες ευρέως διαδεδομένες πολιτικές. Τα αριθμητικά παραδείγματα δείχνουν ότι ο συνδυασμένος έλεγχος των αποθεμάτων και των αφικνούμενων παραγγελιών υπερτερεί των άλλων.

Τέλος στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται συμπεράσματα και κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

2 Σύστημα Παραγωγής Σταθερού Αποθέματος με Μία Μηχανή και Πελάτες που Αποθαρρύνονται

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα μιας μηχανής με εκθετικούς χρόνους κατεργασίας και αφίξεων πελατών. Σε περιόδους μηδενικού αποθέματος οι πελάτες εμφανίζονται διστακτικοί στο να κάνουν παραγγελίες ενώ μπορούν ακόμη και να τις ακυρώσουν αν χρειαστεί να περιμένουν για μεγάλο χρονικό διάστημα στην ουρά αναμονής. Προτείνουμε μια απλή πολιτική σταθερού αποθέματος για τον έλεγχο των αποθεμάτων και ελλείμματος βάσης για τον έλεγχο της αποδοχής παραγγελιών. Μέρος αυτού του κεφαλαίου αυτού έχει παρουσιαστεί στο *4th Annual IEEE Conference on Automation Science and Engineering* [27].

Στις εργασίες [12] και [13] αναλύονται παρόμοια συστήματα με συνδυασμένο έλεγχο αποθέματος βάσης και ελλείμματος βάσης χωρίς όμως να λαμβάνουν υπόψη την πιθανή αποθάρρυνση των πελατών. Επίσης, στην εργασία [14] εξετάζεται το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου σταθερού αποθέματος και ελλείμματος βάσης για απλά συστήματα μιας μηχανής με γενικά κατανομημένους χρόνους κατεργασίας χωρίς αποθάρρυνση πελατών. Πρόσφατα, ο Monaghan [22] ανέλυσε το φαινόμενο της εγκατάλειψης πελατών από την ουρά αναμονής για απλά συστήματα μιας μηχανής με εκθετικούς χρόνους. Υπέθεσε ότι κάθε αφικνούμενος πελάτης έχει ένα μέγιστο διάστημα αναμονής από την ώρα της άφιξής του (διορία) που ακολουθεί γνωστή κατανομή με γνωστή μέση τιμή. Αν ο χρόνος αναμονής μέχρι την ικανοποίηση της παραγγελίας ξεπεράσει αυτό το διάστημα, ο πελάτης εγκαταλείπει το σύστημα. Αποδείχθηκε [22] πως ο ρυθμός εγκατάλειψης της ουράς είναι μια διαδικασία Poisson ανεξαρτήτως κατανομής της διορίας των πελατών.

Η δομή του κεφαλαίου είναι η εξής. Στην Παράγραφο 2.2 περιγράφεται η πολιτική σταθερού αποθέματος για τον έλεγχο των αποθεμάτων και ελλείμματος βάσης για τον έλεγχο της αποδοχής παραγγελιών. Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του Monaghan για να μοντελοποιήσουμε το σύστημά μας σαν ένα αναμονητικό σύστημα $M/M/1/k$, ήτοι εκθετική κατανομή για τους χρόνους αφίξεων και εξυπηρέτησης, ένας εξυπηρετών και πεπερασμένη χωρητικότητα k , η οποία ισούται

με το άθροισμα του επιπέδου σταθερού αποθέματος και του ελλείμματος βάσης. Εξάγουμε αναλυτικές εκφράσεις για την συνάρτηση κέρδους του συστήματος ως προς τις παραμέτρους ελέγχου. Στην Παράγραφο 2.3 προσδιορίζονται άνω φράγματα για τις βέλτιστες τιμές σταθερού αποθέματος και ελλείμματος βάσης και περιγράφεται ένας απλός αλγόριθμος εξαντλητικής αναζήτησης για τον εντοπισμό τους. Στην Παράγραφο 2.4 γίνεται σύγκριση της προτεινόμενης πολιτικής με άλλες πολιτικές και στην Παράγραφο 2.5 παρουσιάζονται συμπεράσματα.

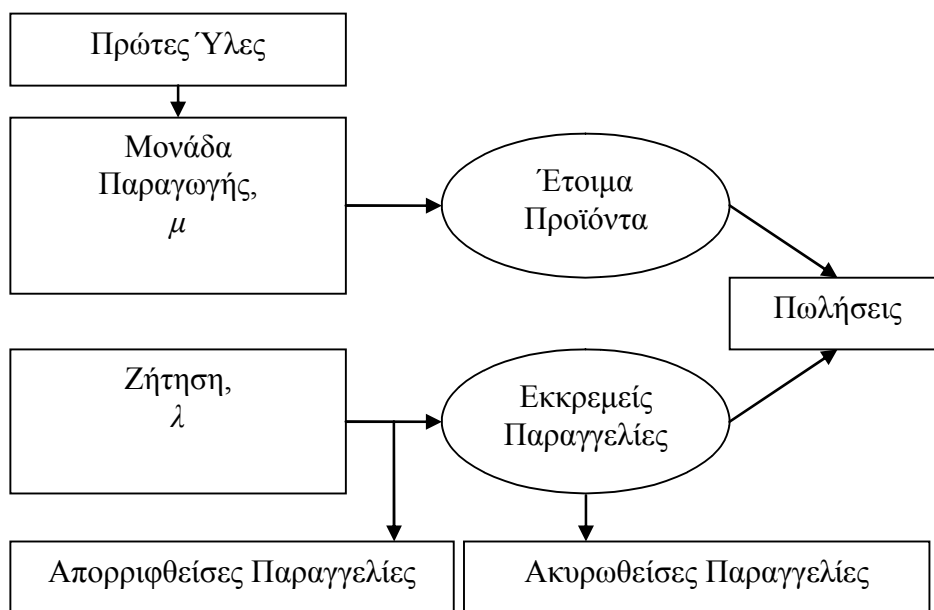
2.2 Περιγραφή και μοντελοποίηση του προβλήματος

2.2.1 Περιγραφή του συστήματος

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής με μια μηχανή, όπως αυτό του Σχ. 2.1, το οποίο παράγει ένα μόνο προϊόν για να ικανοποιήσει τυχαία ζήτηση. Υποθέτουμε ότι πελάτες έρχονται στο σύστημα ακολουθώντας μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και κάθε πελάτης ζητά μια μονάδα προϊόντος. Οι χρόνοι παραγωγής είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu$. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων και οι χρόνοι παραγωγής είναι αμοιβαίως ανεξάρτητοι.

Όταν υπάρχει απόθεμα έτοιμων προϊόντων, κάθε αφικνούμενος πελάτης ικανοποιείται αμέσως. Σε περιόδους μηδενικού αποθέματος οι πελάτες μπορεί να αποθαρρυνθούν, υπολογίζοντας το χρόνο μέχρι να ικανοποιηθεί η παραγγελία τους, και να μην παραγγείλουν προϊόν πηγαίνοντας σε κάποια ανταγωνιστική εταιρία για να εξυπηρετηθούν άμεσα. Έστω το σύστημα σε περίοδο μηδενικού αποθέματος και ένας πελάτης που καταφθάνει όταν m παραγγελίες ήδη εκκρεμούν, όπου $m \geq 0$. Ορίζουμε ως q_m την πιθανότητα αυτός ο πελάτης να θέσει μια παραγγελία. Υποθέτουμε ότι η q_m είναι μια συνάρτηση μη αύξουσα ως προς m , το οποίο είναι λογικό καθώς η αποθάρρυνση των πελατών θα είναι μεγαλύτερη όταν είναι περισσότερες οι παραγγελίες που ήδη εκκρεμούν. Ακόμη και όταν έχουμε $m = 0$, ο πελάτης θα έχει μια καθυστέρηση μέχρις ότου παραχθεί το προϊόν του και εξυπηρετηθεί και άρα επίσης μπορεί να αποθαρρυνθεί. Τελικά θα έχουμε ότι, $1 \geq q_0 \geq q_1 \geq \dots$. Όταν το πλήθος των παραγγελιών που εκκρεμούν είναι m , τότε ο μέσος ρυθμός με τον οποίο ζητούνται προϊόντα είναι λq_m , άρα ορίζοντας $\lambda_m = \lambda q_m$ για κάθε m θα έχουμε $\lambda \geq \lambda_0 \geq \lambda_1 \dots$.

Επιπλέον, σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, πελάτες που δέχονται να θέσουν μια παραγγελία μπορεί να την ακυρώσουν αν περιμένουν για μεγάλο χρονικό διάστημα στην ουρά αναμονής. Μοντελοποιούμε αυτήν την συμπεριφορά των πελατών αναθέτοντας ένα μέγιστο χρονικό διάστημα αναμονής σε κάθε αφικνούμενο πελάτη από την ώρα της άφιξης του (διορία). Η διορία κάθε πελάτη είναι μία τυχαία μεταβλητή Θ με γνωστή συνάρτηση κατανομής $G(t) = P(\Theta \leq t)$ και μέση τιμή θ . Μία εκκρεμής παραγγελία ακυρώνεται όταν ο χρόνος από την ώρα που έγινε η παραγγελία ξεπεράσει την τιμή Θ . Οι χρόνοι παραγωγής και οι διορίες των πελατών είναι αμοιβαίως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.



Σχήμα 2.1: Δομικό διάγραμμα των τμημάτων παραγωγής και παραγγελιών μιας βιομηχανικής επιχείρησης

Η λειτουργία του συστήματος συνδέεται με τα παρακάτω οικονομικά μεγέθη:

- p το κέρδος από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος
- h το μοναδιαίο κόστος αποθέματος τελικού προϊόντος, που είναι το κόστος διατήρησης αποθέματος μιας μονάδας τελικού προϊόντος για μια χρονική μονάδα
- r το μοναδιαίο κόστος αποθέματος πρώτης ύλης, που είναι το κόστος διατήρησης αποθέματος μιας μονάδας πρώτης ύλης για μια χρονική μονάδα.

b το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών, που είναι το κόστος καθυστέρησης ικανοποίησης μιας εκκρεμούσας παραγγελίας στη μονάδα του χρόνου δεδομένου ότι η παραγγελία δεν θα αποσυρθεί.

p_r το κόστος από την απόσυρση μίας παραγγελίας λόγω καθυστέρησης

Οι παράμετροι κόστους αποθέματος h και r περιλαμβάνουν δύο συνιστώσες κόστους. Η πρώτη είναι το χρηματοοικονομικό κόστος, που προκύπτει από τη δέσμευση κεφαλαίου για την αγορά πρώτων υλών. Η δεύτερη περιλαμβάνει όλα τα είδη κόστους που σχετίζονται με την φυσική διαδικασία συντήρησης αποθέματος, όπως το κόστος των αποθηκευτικών χώρων, το κόστος λειτουργίας ενός συστήματος διαχείρισης υλικών, το κόστος κατάψυξης για κάποια είδη προϊόντων κλπ. Το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών b είναι χρηματοοικονομικό. Συνίσταται στην απώλεια της ευκαιρίας επένδυσης του κέρδους από την πώληση ενός προϊόντος για όσο χρονικό διάστημα μια παραγγελία παραμένει ανικανοποίητη, σε σχέση με την επένδυση του κέρδους αν η πώληση γινόταν άμεσα. Για αυτόν το λόγο, το μοναδιαίο κόστος b , επιβαρύνει το σύστημα μόνο για τις παραγγελίες που τελικά θα οδηγήσουν σε πώληση. Τέλος, το κόστος p_r απαρτίζεται από το κόστος δυσφήμισης στην περίπτωση που ο πελάτης βιώσει καθυστέρηση μεγαλύτερη από το μέγιστο χρόνο αναμονής του και αποσύρει την παραγγελία του.

Για να ισορροπήσουμε το κόστος αποθέματος και το κόστος καθυστέρησης ή μη ικανοποίησης της ζήτησης, στο σύστημα εφαρμόζεται μια μικτή πολιτική σταθερού αποθέματος - ελλείμματος βάσης (CONWIP -BB) για τον έλεγχο της παραγωγής, των αποθεμάτων και των πωλήσεων.

2.2.2 Περιγραφή της μικτής πολιτικής σταθερού αποθέματος - ελλείμματος βάσης

Βασική αρχή ενός συστήματος σταθερού αποθέματος είναι ότι το συνολικό απόθεμα του συστήματος (έτοιμα προϊόντα, προϊόντα προς κατεργασία και πρώτες ύλες) μένει πάντα σταθερό και ίσο με το επίπεδο σταθερού αποθέματος (CONWIP level). Επίσης σύμφωνα με την πολιτική ελλείμματος βάσης, σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, οι εισερχόμενες παραγγελίες θα γίνονται δεκτές όσο ο αριθμός των ήδη εκκρεμών παραγγελιών είναι μικρότερος από το έλλειμμα βάσης.

Έστω s το επίπεδο σταθερού αποθέματος και c το έλλειμμα βάσης. Υποθέστε ότι αρχικά στο σύστημα παραγωγής υπάρχουν s έτοιμα προϊόντα, κανένα προϊόν υπό

κατεργασία ή πρώτες ύλες και καμία εκκρεμής παραγγελία. Όσο υπάρχουν έτοιμα προϊόντα, κάθε εισερχόμενη παραγγελία θα οδηγεί και σε πώληση. Με την πώληση ενός προϊόντος, μια πρώτη ύλη εισάγεται στην μονάδα παραγωγής για να ξεκινήσει η παραγωγή και να αντικατασταθεί το προϊόν που πουλήθηκε. Με αυτόν τον τρόπο, το συνολικό απόθεμα παραμένει σταθερό καθώς ανά πάσα στιγμή το άθροισμα έτοιμων προϊόντων, των πρώτων υλών και του κομματιού υπό κατεργασία στην μηχανή του συστήματος θα είναι ίσο με s . Σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, οι εισερχόμενες παραγγελίες γίνονται δεκτές μόνο αν ο αριθμός εκκρεμών παραγγελιών είναι μικρότερος από c . Όταν γίνεται δεκτή μια παραγγελία δεν τοποθετούνται πρώτες ύλες στο σύστημα. Αυτό γίνεται μόνο όταν αυτή η παραγγελία θα οδηγήσει σε πώληση, διατηρώντας έτσι το συνολικό απόθεμα σταθερό.

Το πρόβλημα προς επίλυση είναι ο καθορισμός των βέλτιστων s και c που μεγιστοποιούν το μέσο ρυθμό κέρδους του συστήματος. Αυτή η ποσότητα ισούται με το μέσο ρυθμό κέρδους από τις πωλήσεις μείον το αναμενόμενο κόστος αποθεμάτων και το κόστος καθυστέρησης ικανοποίησης ή μη ικανοποίησης της ζήτησης, ήτοι

$$J(s, c) = pTH_{s,c} - hH_{s,c} - rR_{s,c} - bB_{s,c} - p_r RR_{s,c}, \quad (2.1)$$

όπου $TH_{s,c}$ ορίζεται ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος, $H_{s,c}$ το μέσο απόθεμα έτοιμων προϊόντων, $R_{s,c}$ το μέσο απόθεμα πρώτων υλών συμπεριλαμβανομένου του κομματιού που μπορεί να είναι υπό κατεργασία, $B_{s,c}$ το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών που δεν αποσύρονται και $RR_{s,c}$ ο ρυθμός ακύρωσης παραγγελιών λόγω υπερβολικής καθυστέρησης. Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε αναλυτικές εκφράσεις αυτών των ποσοτήτων με τη βοήθεια της θεωρίας ουρών αναμονής, χρησιμοποιώντας ένα ισοδύναμο, με αυτό του συστήματος παραγωγής, Μαρκοβιανό αναμονητικό μοντέλο.

2.2.3 Το Μαρκοβιανό σύστημα

Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από έναν ακέραιο αριθμό n , όπου $-c \leq n \leq s$. Αν $n \geq 0$, τότε στο σύστημα υπάρχουν n έτοιμα προϊόντα, $s - n$ πρώτες ύλες μαζί με εκείνη που είναι υπό κατεργασία στην μηχανή και δεν υπάρχουν εκκρεμείς παραγγελίες. Όταν $n < 0$, δεν υπάρχουν έτοιμα προϊόντα, εκκρεμούν $-n$ παραγγελίες και έχουν εισαχθεί πρώτες ύλες για την κατασκευή s προϊόντων μαζί με εκείνη που είναι υπό κατεργασία στην μηχανή. Ειδικότερα, όταν $n = s$, η αποθήκη έτοιμων προϊόντων είναι πλήρης και η παραγωγική μονάδα αδρανής. Όταν $n = -c$,

δεν υπάρχουν έτοιμα προϊόντα στο σύστημα, εκκρεμούν c παραγγελίες και υπάρχουν πρώτες ύλες για την παραγωγή s προϊόντων συμπεριλαμβανομένης εκείνης που είναι υπό κατεργασία στην μηχανή.

Έστω m ο αριθμός εκκρεμών παραγγελιών, n_r ο αριθμός των πρώτων υλών συμπεριλαμβανομένου του κομματιού υπό κατεργασία και n_h ο αριθμός έτοιμων προϊόντων στο σύστημα παραγωγής. Σύμφωνα με την πολιτική σταθερού αποθέματος θα έχουμε $n_r + n_h = s$. Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζεται ο συσχετισμός της κατάστασης n με τις στάθμες των αποθεμάτων n_r και n_h και τον αριθμό m των εκκρεμών παραγγελιών στο σύστημα παραγωγής. Η περίπτωση όπου έχουμε το επίπεδο σταθερού αποθέματος $s = 0$ και το έλλειμμα βάσης $c > 0$, θεωρείται ειδική περίπτωση. Εξ ορισμού, σε ένα σύστημα σταθερού αποθέματος με $s = 0$, ισχύει η σχέση $n_r + n_h = s = 0$, το οποίο υπονοεί ότι το σύστημα θα είναι μονίμως αδρανές λόγω έλλειψης πρώτων υλών. Ακολουθώντας τους Ioannidis and Kouikoglou [14] υποθέτουμε ότι όταν $s = 0$ και $c > 0$, το σύστημα υιοθετεί μια πολιτική παραγωγής κατά παραγγελία, όπου θα έχουμε πάντα $n_h = 0$ και $n_r = 0$ ή 1 . Αν δεν εκκρεμούν παραγγελίες ($n = 0$), το σύστημα θα είναι όντως αδρανές με $n_r = 0$. Αν έχουμε $m = -n > 0$ εκκρεμείς παραγγελίες, τότε θα υπάρχει ένα κομμάτι υπό κατεργασία στη μηχανή και άρα $n_r = 1$. Στον Πίνακα 2.1, περιλαμβάνονται οι περιπτώσεις με $s = 0$ γράφοντας $n_r = \max(s, 1)$ όποτε $m > 0$.

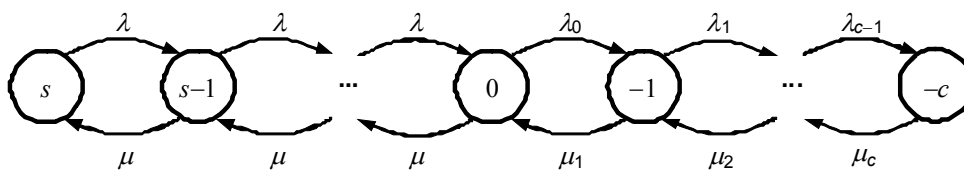
Αποδεικνύεται [22] ότι σε συστήματα μιας μηχανής, η απόσυρση παραγγελιών λόγω μεγάλης καθυστέρησης μπορεί να περιγραφεί σαν μια διαδικασία Poisson της οποίας ο ρυθμός γ_m εξαρτάται από τον αριθμό των παραγγελιών που εκκρεμούν. Το αποτέλεσμα αυτό περιορίζεται σε συστήματα με εκθετικούς χρόνους αφίξεων και παραγωγής αλλά ισχύει για οποιαδήποτε κατανομή $G(t)$ της διορίας που θέτουν οι πελάτες στο σύστημα παραγωγής. Ορίζουμε μ_m , $m = 1, 2, \dots, c$, το συνολικό ρυθμό αναχώρησης πελατών από το σύστημα, είτε λόγω απόσυρσης μιας παραγγελίας είτε λόγω ικανοποίησής της, όταν εκκρεμούν m παραγγελίες. Τότε ισχύει

$$\mu_m = \gamma_m + \mu. \quad (2.2)$$

Πίνακας 2.1: Αντιστοιχία καταστάσεων αναμονητικού συστήματος και μεταβλητών του συστήματος παραγωγής

Μεταβλητές συστήματος παραγωγής			Συνολική μεταβλητή κατάστασης	Σχόλια
n_r	n_h	m	n	
0	s	0	s	Οι γραμμές ισχύουν μόνο όταν $s > 0$
1	$s - 1$	0	$s - 1$	
...	
s	0	0	0	
$\max(s, 1)$	0	1	-1	Οι γραμμές ισχύουν μόνο όταν $c > 0$
...	
$\max(s, 1)$	0	c	$-c$	

Από την υπόθεση ότι οι χρόνοι αφίξεων είναι εκθετικοί και την Εξ.(2.2) προκύπτει ότι η κατάσταση n του συστήματος είναι μια διαδικασία γέννησης-θανάτου (birth-death process) η εξέλιξη της οποίας μπορεί να περιγραφεί από μια αλυσίδα Markov. Οι καταστάσεις της αλυσίδας και οι μεταβάσεις της παρουσιάζονται στο Σχ. 2.2.



Σχήμα 2.2: Αλυσίδα Markov του αναμονητικού συστήματος

Έστω $P(n)$ η πιθανότητα το αναμονητικό σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση n , $n = s, s - 1, \dots, -c + 1, -c$. Στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας του συστήματος αυτές οι πιθανότητες ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov:

$$P(n) \times (\text{ρυθμός εξόδου από την κατάσταση } n) = \sum_{\substack{\text{Όλες οι καταστάσεις} \\ i \neq n}} P(i) \times (\text{μετάβαση από } i \text{ σε } n)$$

ήτοι: $P(s)\lambda = P(s - 1)\mu$,

$$P(s-1)(\lambda + \mu) = P(s)\lambda + P(s-2)\mu,$$

...

$$P(-c)\mu_c = P(-c+1)\lambda_{c-1}.$$

Από αυτές, με λίγη άλγεβρα ευρίσκουμε:

$$P(n) = \begin{cases} \rho^{s-n}P(s), & n \geq 0 \\ \rho^s \rho_0 \rho_1 \dots \rho_{-n-1}P(s), & n < 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

όπου ορίζουμε $\rho = \lambda/\mu$, $\rho_0 = \lambda_0/\mu_1$, ..., $\rho_{c-1} = \lambda_{c-1}/\mu_c$.

Στην εξίσωση κανονικοποίησης, $P(s) + \dots + P(-c) = 1$, αντικαθιστούμε τις Εξ. (2.3)

και προκύπτει ότι

$$P(s) = \left[\sum_{i=0}^s \rho^i + \rho^s (\rho_0 + \rho_0 \rho_1 + \dots + \rho_0 \rho_1 \dots \rho_{c-1}) \right]^{-1}. \quad (2.4)$$

Οι πιθανότητες $P(n)$ εξαρτώνται από τις τιμές s , c και κανονικά θα έπρεπε να αναγράφονται ως $P_{s,c}(n)$, αλλά για απλούστευση ο συγκεκριμένος συμβολισμός παραλείπεται.

2.2.4 Αναλυτικές εκφράσεις των μέτρων απόδοσης του συστήματος

Σε αυτό το σημείο θα αναζητήσουμε αναλυτικές εκφράσεις για τις ποσότητες $TH_{s,c}$, $H_{s,c}$, $R_{s,c}$, $B_{s,c}$ και $RR_{s,c}$ ώστε να υπολογίσουμε το μέσο ρυθμό κέρδους όπως δίνεται στην Εξ. (2.1).

Το σύστημα παραγωγής παράγει με μέσο ρυθμό μ όσο το απόθεμα έτοιμων προϊόντων είναι μικρότερο του s , δηλαδή $n_h < s$ ή ισοδύναμα, και με τη βοήθεια του Πίνακα 2.1 όσο ισχύει η σχέση $n < s$. Το σύστημα σταματά την παραγωγή του όταν η κατάσταση γίνει s . Άρα ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$TH_{s,c} = \mu [1 - P(s)]. \quad (2.5)$$

Το μέσο αποθέματα του συστήματος $H_{s,c}$ (έτοιμων προϊόντων) και $R_{s,c}$ (πρώτων υλών συμπεριλαμβανομένου του κομματιού που μπορεί να βρίσκεται υπό κατεργασία στη μηχανή) είναι $R_{s,c} = E(n_r)$ και $H_{s,c} = E(n_h)$ αντίστοιχα, όπου E ο τελεστής μέσης τιμής. Από τον Πίνακα 2.1 βρίσκουμε ότι

$$R_{s,c} = \sum_{n=0}^s (s-n)P(n) + s \sum_{n=0}^{-c} P(n), \quad (2.6)$$

$$H_{s,c} = \sum_{n=1}^s nP(n). \quad (2.7)$$

Παρατηρήστε ότι $R_{s,c} + H_{s,c} = s$ για κάθε περίπτωση όπου $s > 0$.

Ο συνολικός ρυθμός ακύρωσης παραγγελιών λόγω υπερβολικής καθυστέρησης υπολογίζεται από την εξίσωση

$$RR_{s,c} = \sum_{m=1}^c \gamma_m P(-m), \quad (2.8)$$

όπου γ_m είναι ο ρυθμός ακυρώσεων όταν υπάρχουν m εκκρεμείς παραγγελίες.

Στην συνέχεια εξάγουμε τύπους για τις ποσότητες γ_m και μ_m που εμφανίζονται στις Εξ. (2.3)–(2.8). Θεωρούμε έναν πελάτη που θέτει μια παραγγελία ενώ υπάρχουν ήδη m παραγγελίες να εκκρεμούν. Έστω V_m ο τυχαίος χρόνος απόκρισης του συστήματος (χρόνος μέχρι να ικανοποιηθεί η παραγγελία) για το συγκεκριμένο πελάτη, δοθέντος ότι ο πελάτης έχει απεριόριστη υπομονή, $\Theta = \infty$, δηλαδή δεν θα ακυρώσει την παραγγελία όσο και αν χρειαστεί να περιμένει. Ο χρόνος V_m ονομάζεται υπό συνθήκη χρόνος απόκρισης. Αποδεικνύεται στο Λήμμα 3.2 της [22], ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του V_m για ένα M/M/1 αναμονητικό σύστημα με μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης μ , είναι

$$f_{V_m}(t) = \frac{1}{\Phi_m} \left[\int_0^t (1-G(x)) dx \right]^m e^{-\mu t}$$

όπου $G(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του Θ και το Φ_m δίνεται ως

$$\Phi_m = \int_0^\infty \left[\int_0^t (1-G(\tau)) d\tau \right]^m e^{-\mu t} dt. \quad (2.9)$$

Ο ρυθμός ακύρωσης παραγγελιών όταν υπάρχουν m εκκρεμείς παραγγελίες δίνεται από το Λήμμα 3.4 της [22]:

$$\gamma_m = \frac{m\Phi_{m-1}}{\Phi_m} - \mu. \quad (2.10)$$

Ο ρυθμός αναχώρησης πελατών μ_m από το σύστημα, είτε λόγω απόσυρσης είτε λόγω ικανοποίησης μιας παραγγελίας, όταν εκκρεμούν m παραγγελίες, $n = -m$, ευρίσκεται αντικαθιστώντας την Εξ. (2.10) στην Εξ. (2.2).

Απομένει να βρούμε μια αναλυτική έκφραση για το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών $B_{s,c}$, που αντιστοιχεί σε παραγγελίες πελατών που θα έχουν την υπομονή να περιμένουν μέχρι να ικανοποιηθεί η παραγγελία τους χωρίς να την ακυρώσουν. Θεωρούμε έναν αφικνούμενο πελάτη που βρίσκει ήδη $m < c$ παραγγελίες να εκκρεμούν και αποφασίζει να θέσει άλλη μια. Το αν αυτή η παραγγελία τελικά θα οδηγήσει σε πώληση ή θα αποσυρθεί, εξαρτάται από την διορία του πελάτη, Θ , και τον υπό συνθήκη χρόνο απόκρισης του συστήματος, V_m . Αν $V_m \leq \Theta$, τότε θα περιμένει μέχρι να ικανοποιηθεί η παραγγελία του, αλλιώς θα την αποσύρει. Το Λήμμα 3.3 της [22] δίνει την πιθανότητα Π_m , μη απόσυρσης μιας παραγγελίας που έγινε από έναν πελάτη όταν ήδη εκκρεμούσαν άλλες m ,

$$\Pi_m = P(V_m \leq \Theta) = \frac{\mu \Phi_{m+1}}{(m+1)\Phi_m}. \quad (2.11)$$

Για να υπολογίσουμε το $B_{s,c}$, χρησιμοποιούμε την πιθανότητα Π_m και το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.1: (α) Έστω E_m ο υπό συνθήκη μέσος χρόνος μέχρι να ικανοποιηθεί η παραγγελία ενός αφικνούμενου πελάτη που βρίσκει m παραγγελίες ήδη να εκκρεμούν, δοθέντος ότι ο πελάτης δεν θα αποσύρει. Τότε

$$E_m = E(V_m | V_m \leq \Theta) = \frac{\int_0^\infty t f_{V_m}(t)(1-G(t))dt}{\Pi_m}. \quad (2.12)$$

(β) Έστω $W_{s,c}$ ο μέσος χρόνος αναμονής όλων των πελατών των οποίων οι παραγγελίες διεκπεραιώθηκαν κανονικά χωρίς να αποσυρθούν, συμπεριλαμβάνοντας και τους πελάτες που βρήκαν έτοιμο προϊόν και ικανοποιήθηκαν αμέσως. Τότε

$$W_{s,c} = \frac{\sum_{m=0}^{c-1} \lambda_m P(-m) \Pi_m E_m}{\text{TH}_{s,c}}. \quad (2.13)$$

Απόδειξη

(α) Από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής, έχουμε

$$E_m = E(V_m | V_m \leq \Theta) = \int_0^\infty t f_{V_m}(t | V_m \leq \Theta) dt$$

$$= \frac{\int_0^\infty t f_{V_m}(t) P(\Theta \geq t) dt}{P(V_m \leq \Theta)} = \frac{\int_0^\infty t f_{V_m}(t) (1 - G(t)) dt}{\Pi_m}.$$

(β) Ο μέσος ρυθμός άφιξης πελατών των οποίων οι παραγγελίες θα διεκπεραιωθούν εγκαίρως είναι ίσος με $\text{TH}_{s,c}$. Σημειώστε πως όταν $n = -c$, όλοι οι αφικνούμενοι πελάτες απορρίπτονται. Εξετάζουμε πελάτες των οποίων οι παραγγελίες ικανοποιήθηκαν και, όταν έθεσαν την παραγγελία τους, βρήκαν το σύστημα στην κατάσταση n , για κάθε n , τέτοιο ώστε $-(c-1) \leq n \leq s$. Όταν έχουμε $n > 0$, οι αφικνούμενοι πελάτες ικανοποιούνται άμεσα χωρίς καμία καθυστέρηση. Συνεπώς, για να υπολογίσουμε το μέσο χρόνο καθυστέρησης, αρκεί να μελετήσουμε τις περιπτώσεις πελατών που βρήκαν το σύστημα σε κατάσταση $n = -m \leq 0$.

Θεωρούμε έναν πελάτη που θέτει μια παραγγελία όταν ήδη εκκρεμούν άλλες m . Υποθέστε ότι αυτός ο πελάτης θα είναι αρκετά υπομονετικός ώστε να περιμένει μέχρι να ικανοποιηθεί. Ο μέσος ρυθμός αφίξεων τέτοιων πελατών δίνεται από το γινόμενο του μέσου ρυθμού αφίξεων πελατών στην κατάσταση $-m$, $\lambda_m P(-m)$, με την πιθανότητα Π_m ώστε κάθε ένας από αυτούς τους πελάτες να ικανοποιηθεί (δηλ. να έχει αρκετά μεγάλη διορία). Ο μέσος χρόνος αναμονής E_m αυτών των πελατών, δίνεται από την Εξ. (2.12).

Ο μέσος χρόνος αναμονής $W_{s,c}$ όλων των πελατών των οποίων οι παραγγελίες διεκπεραιώθηκαν κανονικά χωρίς να αποσυρθούν, θα είναι τελικά το άθροισμα των μέσων χρόνων αναμονής E_m , για κάθε $m = 0, \dots, c-1$, σταθμισμένο με την αντίστοιχη αναλογία $\lambda_m P(-m) \Pi_m / \text{TH}_{s,c}$ των πελατών που περίμεναν μέχρι να ικανοποιηθούν σε σχέση με το σύνολο των πελατών που ικανοποιήθηκαν, το οποίο αποδεικνύει την Εξ. (2.13). ΟΕΔ

Από το Λήμμα 2.1 και το νόμο του Little [4], (μέσο απόθεμα) = (μέσος ρυθμός εισόδου) \times (μέσος χρόνος αναμονής), υπολογίζουμε το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών $B_{s,c}$, που διεκπεραιώθηκαν εγκαίρως,

$$B_{s,c} = \text{TH}_{s,c} W_{s,c} = \sum_{m=0}^{c-1} \lambda_m P(-m) \Pi_m E_m. \quad (2.14)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2.2), (2.10), και την σχέση $\rho_m = \lambda_m/\mu_{m+1}$ στις Εξ. (2.3), (2.4) μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος. Στην συνέχεια, με τη χρήση των Εξ. (2.5)–(2.8) και των Εξ. (2.11)–(2.14) μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις παραμέτρους της Εξ. (2.1). Έχουμε δηλαδή μια αναλυτική έκφραση του μέσου ρυθμού κέρδους του συστήματος $J(s, c)$, συναρτήσει του επιπέδου σταθερού αποθέματος s και του ελλείμματος βάσης c .

Σε αυτό το σημείο αξίζει να προσθέσουμε πως σε απλά συστήματα μιας μηχανής, μια πολιτική αποθέματος βάσης θα ήταν πιο αποτελεσματική από αυτήν του σταθερού αποθέματος. Σύμφωνα με την πολιτική αποθέματος βάσης, οι ανάλογες πρώτες ύλες για την αντικατάσταση ενός προϊόντος αποστέλλονται στην είσοδο της μηχανής μόνο όταν η μηχανή τις χρειάζεται ώστε να μην αποστερηθεί πρώτων υλών αλλά και να αποφευχθούν περιττά κόστη αποθέματος πρώτων υλών. Η πολιτική αποθέματος βάσης θα έχει τις ίδιες εκφράσεις για τα μέτρα απόδοσης του συστήματος αλλά σαφώς μικρότερο μέσο απόθεμα πρώτων υλών, $R_{s,c} = 1 - P(s)$. Δηλαδή μόνο ένα κομμάτι υπό κατεργασία στην μηχανή εφόσον το απόθεμα τελικού προϊόντος είναι κάτω από το απόθεμα βάσης.

2.3 Βελτιστοποίηση

Έχοντας ακριβείς εκφράσεις των μέτρων απόδοσης του συστήματος και της συνάρτησης του μέσου ρυθμού κέρδους $J(s, c)$, θα προχωρήσουμε στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης $J(s, c)$. Το πρόβλημα είναι δύο διαστάσεων. Θα αποδείξουμε ότι οι βέλτιστες τιμές του s και του c είναι φραγμένες σε ένα συγκεκριμένο δισδιάστατο πλέγμα τιμών ενώ τιμές έξω από αυτό το πλέγμα δεν είναι συμφέρουσες. Ακολούθως θα παρουσιάσουμε έναν απλό αλγόριθμο εξαντλητικής αναζήτησης μέσα σε αυτό το δισδιάστατο χώρο που θα εξασφαλίζει την εύρεση των βέλτιστων τιμών του επιπέδου σταθερού αποθέματος s και του ελλείμματος βάσης c .

Το παρακάτω θεώρημα εξασφαλίζει ότι βέλτιστο επίπεδο σταθερού αποθέματος s έχει άνω φράγμα.

Θεώρημα 2.1: Το βέλτιστο επίπεδο σταθερού αποθέματος ικανοποιεί την συνθήκη

$$s \leq p \frac{\min(\lambda, \mu)}{\min(r, h)}. \quad (2.15)$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι αν δεν ισχύει η συνθήκη (2.15), τότε ο ρυθμός κέρδους του συστήματος δεν θα είναι θετικός. Από την Εξ. (2.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
J(s, c) &= pTH_{s,c} - hH_{s,c} - rR_{s,c} - bB_{s,c} - p_rRR_{s,c} \\
&\leq pTH_{s,c} - \min(h, r)H_{s,c} - \min(h, r)R_{s,c} \\
&= pTH_{s,c} - \min(h, r)s \\
&\leq p\min(\lambda, \mu) - \min(h, r)s,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο ρυθμός πωλήσεων του συστήματος δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό της ζήτησης λ ούτε από τον ονομαστικό ρυθμό της μονάδας παραγωγής μ . Αν το επίπεδο σταθερού αποθέματος παραβιάζει την ανισότητα (2.15), τότε το αριστερό μέρος της ανισότητας (2.16) γίνεται μη θετικό, όπως και ο ρυθμός κέρδους του συστήματος. Συνεπώς, το επίπεδο σταθερού αποθέματος πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη (2.15). ΟΕΔ

Στην συνέχεια θα βρούμε ένα άνω φράγμα και για το βέλτιστο έλλειμμα βάσης c . Το φράγμα αυτό θα ισχύει για κάθε κατανομή του μέγιστου χρόνου αναμονής (διορίας) των πελατών από όλες εκείνες που έχουν σταθερή μέση τιμή θ . Για την εύρεση αυτού του φράγματος θα θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση όπου οι διορίες όλων των πελατών στο σύστημα είναι σταθερές και ίσες με θ , $\Theta = \theta$ και άρα θα ακολουθούν την «αιτιοκρατική» κατανομή με μέση τιμή θ :

$$P(\Theta \leq t) = G^D(t) = \begin{cases} 0, & t < \theta \\ 1, & t \geq \theta. \end{cases} \tag{2.17}$$

Από αυτό το σημείο, για διευκόλυνση του αναγνώστη, όλες οι ποσότητες που αναφέρονται σε συστήματα με σταθερές διορίες $\Theta = \theta$ θα σημαίνονται με τον άνω δείκτη D. Τα επόμενα θεωρήματα εξασφαλίζουν την ύπαρξη ενός άνω ορίου για την βέλτιστη τιμή του c σε συστήματα με στοχαστικά μέγιστα διαστήματα αναμονής. Το όριο αυτό αντιστοιχεί σε σύστημα με ντετερμινιστικά μέγιστα διαστήματα αναμονής.

Θεώρημα 2.2: Οι πιθανότητες μη ακύρωσης μιας παραγγελίας, που έγινε όταν ήδη εκκρεμούσαν άλλες m , σε ένα σύστημα με σταθερές διορίες και ένα άλλο με διορίες που έχουν οποιαδήποτε κατανομή με μέση τιμή θ , ικανοποιούν την σχέση

$$\Pi_m^D \geq \Pi_m. \tag{2.18}$$

Απόδειξη: Βλ. Παράρτημα

Θεώρημα 2.3: Όταν τα μέγιστα διαστήματα αναμονής των πελατών ακολουθούν αυθαίρετες συναρτήσεις κατανομών με μέση τιμή θ , το βέλτιστο έλλειμμα βάσης ικανοποιεί την ανισότητα

$$c < \mu\theta(1 + p/p_r). \quad (2.19)$$

Απόδειξη

Μελετάμε την αύξηση του κέρδους ΔJ που προκύπτει αν δεχθούμε μια παραγγελία όταν ήδη εκκρεμούν άλλες $c-1$. Το ΔJ θα είναι είτε, (i) p μείον το κόστος καθυστέρησης ικανοποίησης της παραγγελίας, αν ο πελάτης αυτός δεν αποσύρει την παραγγελία του, δηλαδή $V_{c-1} \leq \Theta$, είτε (ii) το καθαρό κόστος p_r αν η παραγγελία ακυρωθεί. Το μέσο αυξανόμενο κέρδος, $E(\Delta J)$, ικανοποιεί τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} E(\Delta J) &= [p - bE(V_{c-1} | V_{c-1} \leq \Theta)]P(V_{c-1} \leq \Theta) - p_r[1 - P(V_{c-1} \leq \Theta)] \\ &\leq (p + p_r)P(V_{c-1} \leq \Theta) - p_r \\ &\leq (p + p_r)P(V_{c-1}^D \leq \theta) - p_r, \end{aligned} \quad (2.20)$$

όπου η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $bE(V_{c-1} | V_{c-1} \leq \Theta) \geq 0$ και η δεύτερη από το Θεώρημα 2.2. Μια συνθήκη κάτω από την οποία θα είναι συμφέρουσα η αποδοχή της παραγγελία αυτού του πελάτη θα ήταν $E(\Delta J) > 0$ ή, από την ανισότητα (2.20),

$$\Pi_{c-1}^D = P(V_{c-1}^D \leq \theta) > \frac{p_r}{p + p_r}. \quad (2.21)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2.9), (2.17) και θέτοντας $m = c - 1$ στην Εξ. (2.11), μετά από λίγη άλγεβρα παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Pi_{c-1}^D &= \frac{\frac{(\mu\theta)^c}{c!} + \frac{(\mu\theta)^{c+1}}{(c+1)!} + \dots}{\frac{(\mu\theta)^{c-1}}{(c-1)!} + \frac{(\mu\theta)^c}{c!} + \dots} \\ &= \frac{\mu\theta}{c} \frac{\frac{(\mu\theta)^{c-1}}{(c-1)!} + \frac{(\mu\theta)^c}{(c-1)!(c+1)} + \dots}{\frac{(\mu\theta)^{c-1}}{(c-1)!} + \frac{(\mu\theta)^c}{c!} + \dots}, \end{aligned}$$

απ' όπου εύκολα προκύπτει ότι $\Pi_{c-1}^D \leq \mu\theta/c$. Από την τελευταία ανισότητα και την ανισότητα (2.21) παίρνουμε τη συνθήκη (2.19) το οποίο αποδεικνύει και το θεώρημα. ΟΕΔ

Τα Θεωρήματα 2.1 και 2.3 αντίστοιχα, παρέχουν ένα άνω όριο για τη βέλτιστη τιμή του σταθερού επιπέδου αποθέματος s^* και του βέλτιστου ελλείμματος βάσης c^* . Ο παρακάτω αλγόριθμος, κάνοντας χρήση των δύο ορίων που παρέχουν τα θεωρήματα, εντοπίζει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων τη βέλτιστη λύση (s^*, c^*) και καθορίζει το μέγιστο μέσο ρυθμό κέρδος J^* .

Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης 2.1

Βήμα 1. Θέσε $J(0, 0) = 0$, $J^* = 0$, $s^* = 0$, και $c^* = 0$. Δώσε αρχικές τιμές παραμέτρων:
 $s = 0$, $c = 1$.

Βήμα 2. Υπολόγισε τον ρυθμό κέρδους $J(s, c)$ με τη χρήση των Εξ. (2.1)–(2.14). Αν $J(s, c) > J^*$, τότε θέσε $J^* = J(s, c)$, $s^* = s$, και $c^* = c$.

Βήμα 3. Αν το $c + 1$ ικανοποιεί την ανισότητα (2.19), τότε θέσε $c = c + 1$ και πήγαινε στο βήμα 2; αλλιώς θέσε $c = 0$ και πήγαινε στο βήμα 4.

Βήμα 4. Αν το $s + 1$ ικανοποιεί την ανισότητα (2.15), τότε θέσε $s = s + 1$ και πήγαινε στο βήμα 2; Αλλιώς τέλος.

Για παράδειγμα, αν θέσουμε τιμές $\lambda = 10$, $\mu = 12$, $\theta = 4$, $h = 0.2p$, $r = 0.1p$, και $p_r = 0.5p$, τότε οι ανισότητες (2.15) και (2.19) ικανοποιούνται για $s^* \leq 100$ και $c^* \leq 143$. Για αυτά τα όρια, ο αλγόριθμος μπορεί να εντοπίσει τη βέλτιστη λύση σε λιγότερο από δέκα δευτερόλεπτα χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή Pentium IV 3GHz με 1Gb RAM.

Στην επόμενη ενότητα, επιβεβαιώνεται με τη βοήθεια αριθμητικών παραδειγμάτων ότι η προτεινόμενη πολιτική σταθερού επιπέδου αποθέματος και ελλείμματος βάσης επιτυγχάνει υψηλότερο κέρδος από άλλες ευρέως χρησιμοποιούμενες πολιτικές.

2.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Συγκρίνουμε την προτεινόμενη μικτή πολιτική σταθερού επιπέδου αποθέματος – ελλείμματος βάσης με παραμέτρους s και c με πολιτικές που εφαρμόζονται πολύ συχνά σε συστήματα παραγωγής. Για συντομία η προτεινόμενη μικτή πολιτική θα αναφέρεται ως CONWIP-BB.

Η CONWIP-BB συγκρίνεται με την πολιτική πλήρους απόρριψης παραγγελιών η οποία θα αναφέρεται ως LS (lost sales) και την πολιτική παραγωγής κατά παραγγελία η οποία θα αναφέρεται ως MTO (make-to-order). Σύμφωνα με την LS, διατηρούμε κάποιο επίπεδο αποθέματος προϊόντων και σε περιόδους μηδενικού αποθέματος προϊόντων απορρίπτουμε όλες τις εισερχόμενες παραγγελίες. Η MTO λειτουργεί χωρίς απόθεμα, και για την αποδοχή παραγγελιών χρησιμοποιείται η πολιτική ελλείμματος βάσης. Αυτές οι πολιτικές είναι ειδικές περιπτώσεις της πολιτικής CONWIP-BB. Πράγματι, έστω $(s, c)_{\text{CONWIP-BB}}$ μια πολιτική μερικής αποδοχής παραγγελιών με απόθεμα βάσης s και έλλειμμα βάσης c . Τότε η πολιτική LS είναι ισοδύναμη με την πολιτική $(s, 0)_{\text{CONWIP-BB}}$, και η πολιτική MTO με την $(0, c)_{\text{CONWIP-BB}}$.

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής σαν αυτό που περιγράφεται στην Παράγραφο 2.2.1, με εκθετικά κατανεμημένους χρόνους μεταξύ διαδοχικών αφίξεων και εκθετικές διάρκειες κατεργασιών στη μηχανή. Σε περιόδους μηδενικού αποθέματος έτοιμων προϊόντων ένας πελάτης που βρίσκει m παραγγελίες ήδη να εκκρεμούν, θα δεχτεί να θέσει την παραγγελία του με πιθανότητα που ακολουθεί την αρμονική πρόοδο $q_m = [1 + 0.2(m + 1)]^{-1}$. Κάθε πελάτης που δέχεται να περιμένει στην ουρά έχει ένα εκθετικά κατανεμημένο μέγιστο διάστημα αναμονής με μέση τιμή θ και συνάρτηση κατανομής $G(t) = 1 - e^{-t/\theta}$. Αντικαθιστώντας αυτή την κατανομή στις Εξ. (2.9), (2.10), και (2.2) παίρνουμε το ρυθμό απόσυρσης παραγγελιών $\gamma_m = m/\theta$ και το συνολικό ρυθμό αναχώρησης πελατών $\mu_m = \mu + m/\theta$ από το σύστημα όταν m παραγγελίες εκκρεμούν.

Οι βασικές τιμές των παραμέτρων του συστήματος είναι $\lambda = 10$, $\mu = 12$, $\theta = 4$, $p = 50$, $h = 10$, $r = 5$, $b = 10$ και $p_r = 25$. Εξετάζεται η ευαισθησία του ρυθμού κέρδους σε αλλαγές βασικών παραμέτρων του συστήματος για όλες τις υπό εξέταση πολιτικές. Σε κάθε παράδειγμα αλλάζουμε μια παράμετρο διατηρώντας τις υπόλοιπες

στη βασική τους τιμή και υπολογίζουμε το μέγιστο ρυθμό κέρδους του συστήματος για κάθε πολιτική.

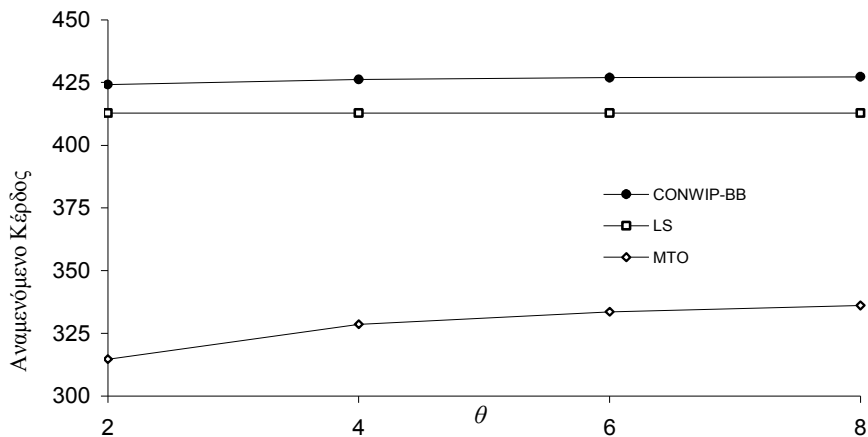
Πίνακας 2.2 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικούς ρυθμούς λ

	Ρυθμός ζήτησης											
	$\lambda = 3$			$\lambda = 6$			$\lambda = 10$			$\lambda = 18$		
Πολιτικές	s	c	J	s	c	J	s	c	J	s	c	J
CONWIP-BB	1	14	132.71	2	14	265.94	5	10	426.22	6	1	546.67
MTO	0	15	113.32	0	15	215.20	0	14	328.64	0	9	465.69
LS	2	0	124.28	4	0	254.51	6	0	412.73	7	0	544.44

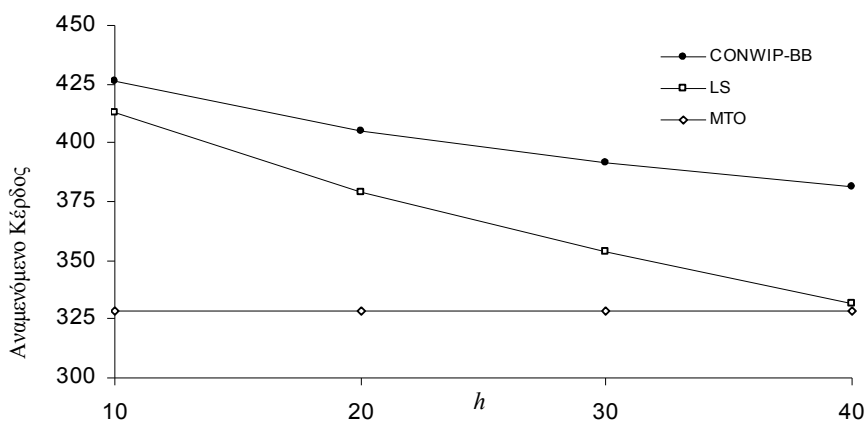
Στον Πίνακα 2.2 παρατηρούμε πως όταν ο ρυθμός ζήτησης είναι κατά πολύ μικρότερος της δυναμικότητας παραγωγής μ του συστήματος, π.χ. $\lambda = 3$, συμφέρει περισσότερο να παράγουμε κατά παραγγελία διατηρώντας ένα μικρό απόθεμα ασφαλείας, $s = 1$. Σε μία τέτοια περίπτωση κάποιος θα περίμενε η πολιτική πλήρους απόρριψης πελατών LS να είναι λιγότερο συμφέρουσα της MTO καθώς με τόσο μικρό ρυθμό ζήτησης φαίνεται ασύμφορο να απορρίπτουμε πελάτες. Στην πραγματικότητα, αυτό θα ίσχυε αν στο σύστημα δεν υπήρχε η διστακτικότητα των πελατών να κάνουν παραγγελίες κατά την άφιξή τους σε περιόδους μηδενικού αποθέματος αλλά και οι ακυρώσεις των παραγγελιών μετά από κάποιο διάστημα αναμονής. Η κακή επίδοση της MTO εξηγείται από το μεγάλο ρυθμό με τον οποίο ακυρώνονται παραγγελίες (το σύστημα δεν έχει ποτέ έτοιμο προϊόν) και το υψηλό κόστος ακύρωσης p_r μιας παραγγελίας σε σχέση με το καθαρό κέρδος πώλησης p . Για υψηλούς ρυθμούς ζήτησης σε σχέση με δυναμικότητα παραγωγή του συστήματος, π.χ. $\lambda = 18$, το βέλτιστο έλλειμμα βάσης πέφτει στην τιμή $c = 1$ και η επίδοση της LS ($c = 0$) είναι πολύ κοντά με αυτήν της προτεινόμενης πολιτικής. Για ακόμη μεγαλύτερες τιμές του λ , η μικτή πολιτική θα εκφυλιστεί σε πολιτική πλήρους απόρριψης.

Τα Σχ. 2.3 έως 2.6 παρουσιάζουν το μέγιστο ρυθμό κέρδους κάθε πολιτικής για διάφορες τιμές των θ , h , r , και b . Σε μερικές περιπτώσεις η CONWIP-BB και η LS

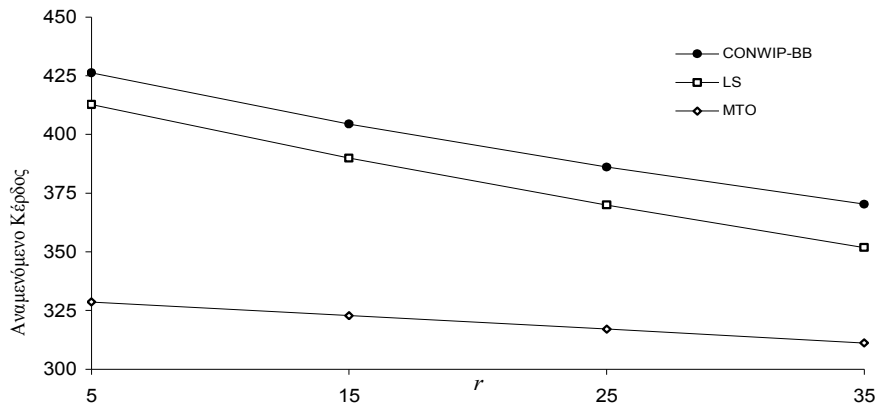
έχουν μικρές διαφορές στις επιδόσεις τους. Για παράδειγμα, όταν οι παράμετροι κόστους αποθέματος h και r τείνουν στο μηδέν ή όταν το κόστος εκκρεμών παραγγελιών b αυξάνει, και οι δύο πολιτικές διατηρούν υψηλά επίπεδα έτοιμων προϊόντων s και, συνεπώς, υπάρχει μικρή πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα σε περίοδο μηδενικού αποθέματος. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το βέλτιστο έλλειμμα βάσης c της CONWIP-BB είναι πολύ μικρό ή ακόμα και μηδέν, όπως στην πολιτική LS. Ωστόσο, όταν τα h και r είναι υψηλά, η μικτή πολιτική CONWIP-BB υπερτερεί αισθητά της LS αλλά και της MTO.



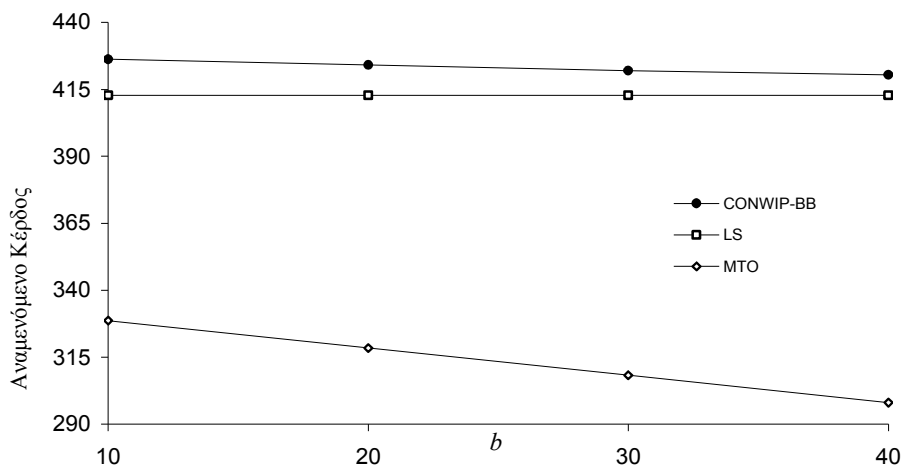
Σχήμα 2.3 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς τη μέση τιμή θ του μέγιστου χρόνου αναμονής πελατών



Σχήμα 2.4 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς το μοναδιαίο κόστος αποθέματος έτοιμων προϊόντων h



Σχήμα 2.5 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς το μοναδιαίο κόστος αποθέματος πρώτων υλών r



Σχήμα 2.6 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών b

Το πλεονέκτημα της προτεινόμενης πολιτικής CONWIP-BB σε σχέση τις ειδικές περιπτώσεις της, LS και MTO, είναι ότι μπορεί και ισορροπεί το επίπεδο των αποθεμάτων, των εκκρεμών παραγγελιών αλλά και το κόστος χαμένων παραγγελιών με τέτοιο τρόπο ώστε πάντα να έχουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος. Ένα άλλο σημαντικό πλεονέκτημα είναι η προσαρμογή της σε μεταβολές των οικονομικών παραμέτρων ενός συστήματος, στις αλλαγές της ζήτησης (εποχιακά προϊόντα) αλλά και στην αλλαγή της συμπεριφοράς των πελατών σε περιόδους μηδενικού αποθέματος (διαφορετικές πιθανότητες αποθάρρυνσης, διάφορες κατανομές προθεσμιών).

2.5 Σύνοψη και συμπεράσματα

Μελετήσαμε πολιτικές κατώφλιού για τον έλεγχο της παραγωγής και των πωλήσεων σε ένα απλό σύστημα παραγωγής σταθερού επιπέδου αποθέματος (CONWIP) με μία μηχανή και πελάτες που αποθαρρύνονται. Όταν δεν εκκρεμούν παραγγελίες, το σύστημα παράγει στο μέγιστο ρυθμό μέχρι ο αριθμός έτοιμων προϊόντων να φτάσει το επιθυμητό επίπεδο σταθερού αποθέματος (CONWIP level). Όταν δεν υπάρχει έτοιμο προϊόν, οι πελάτες εμφανίζονται λιγότερο πρόθυμοι να θέσουν παραγγελίες και το σύστημα τις δέχεται όσο το σύνολο των εν δυνάμει εκκρεμών παραγγελιών είναι κάτω από ένα προκαθορισμένο κατώφλι, το έλλειμμα βάσης. Επιπλέον, πελάτες των οποίων η διευθέτηση των παραγγελιών καθυστερεί πάνω από ένα μέγιστο διάστημα, ακυρώνουν τις παραγγελίες τους ζημιώνοντας το σύστημα.

Το σύστημα έχει εκθετικούς χρόνους παραγωγής. Οι πελάτες θέτουν παραγγελίες ακολουθώντας μία διαδικασία Poisson της οποίας ο ρυθμός εξαρτάται από τον αριθμό των παραγγελιών που ήδη εκκρεμούν και είναι εν γένει φθίνουσα συνάρτηση. Το μέγιστο διάστημα αναμονής των πελατών είναι μια τυχαία μεταβλητή με γνωστή μέση τιμή και γνωστή αλλά αυθαίρετη κατανομή. Το καθαρό επίπεδο αποθέματος του συστήματος (θετικό όταν υπάρχει προϊόν, αρνητικό όταν εκκρεμούν παραγγελίες) είναι μια διαδικασία γέννησης-θανάτου. Η ανάλυση ενός ισοδύναμου αναμονητικού συστήματος οδήγησε στην ανάπτυξη αλγορίθμου για την εύρεση των βέλτιστων τιμών του σταθερού επιπέδου αποθέματος και του ελλείμματος βάσης ώστε ο μέσος ρυθμός κέρδους να είναι μέγιστος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η προτεινόμενη πολιτική επιτυγχάνει υψηλότερο κέρδος από άλλες πολιτικές που έχουν εξεταστεί στη λογοτεχνία των συστημάτων παραγωγής.

Η ιδέα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε συστήματα παραγωγής με πολλές μηχανές και πελάτες που αποθαρρύνονται. Ένα συναφές πρόβλημα με πρακτικές εφαρμογές είναι ο προσδιορισμός ενός μέγιστου χρόνου παράδοσης που υπόσχεται η επιχείρηση (quoted lead time) σε περιόδους μηδενικού αποθέματος. Αυτοί οι χρόνοι επηρεάζουν την συμπεριφορά των πελατών. Ένας μικρός υποσχόμενος χρόνος ανταπόκρισης στις παραγγελίες οδηγεί σε μικρές πιθανότητες αποθάρρυνσης στην άφιξη των πελατών αλλά και σε συχνές ακυρώσεις παραγγελιών, αν ο υποσχόμενος χρόνος δεν είναι ρεαλιστικός. Σε επόμενο κεφάλαιο μελετάμε παρόμοιου τύπου πολιτικές σε γραμμές

παραγωγής όπου το σύστημα θα αναγγέλλει έναν χρόνο απόκρισης σε παραγγελίες που γίνονται σε περιόδους μηδενικού αποθέματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το μοντέλο που παρουσιάστηκε σε αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζεται σε συστήματα με πελάτες που αποθαρρύνονται αλλά εύκολα μπορεί να επεκταθεί σε συστήματα με προϊόντα που υφίστανται αλλοίωση με την πάροδο του χρόνου και δεν μπορούν να αποθηκεύονται επ' αόριστο.

3 Γραμμές Παραγωγής με Υποσχόμενο Χρόνο Παράδοσης Παραγγελιών και Πολιτικές Ελέγχου Αποθεμάτων και Πωλήσεων

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε το πρόβλημα του ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε γραμμές παραγωγής που παράγουν ένα προϊόν για να ικανοποιήσουν τυχαία ζήτηση. Οι πελάτες σε περιόδους μηδενικού αποθέματος αποθαρρύνονται στο να κάνουν παραγγελίες. Ακολουθούμε μια απλή πολιτική ελέγχου αποθεμάτων. Όταν το απόθεμα έτοιμων προϊόντων φτάσει ένα όριο, το απόθεμα βάσης, τότε η παραγωγική διαδικασία διακόπτεται. Για τον έλεγχο των παραγγελιών εφαρμόζεται η πολιτική μερικής αποδοχής των εκκρεμών παραγγελιών ορίζοντας ένα έλλειμμα βάσης. Μέρος αυτού του κεφαλαίου αυτού έχει παρουσιαστεί στο 7th *International Conference on Stochastic Models of Manufacturing and Service Operations* [28] και έχει γίνει δεκτό προς δημοσίευση στο περιοδικό *International Journal of Production Research* [29].

Ο Whitt [24] μελέτησε τηλεπικοινωνιακά κέντρα με πολλούς εξυπηρετούντες, εκθετικούς χρόνους αφίξεων και εξυπηρέτησης και πελάτες που αποθαρρύνονται. Συνέκρινε δύο διαφορετικά μοντέλα. Στο πρώτο, κάθε πελάτης που βρίσκει το τηλεφωνικό κέντρο γεμάτο, εισέρχεται στο σύστημα με μια γνωστή πιθανότητα έχοντας ένα μέγιστο χρόνο αναμονής σε αυτό. Ο πελάτης ή δεν εισέρχεται στην ουρά αναμονής ή, αν αποφασίσει να εισέλθει, εγκαταλείπει την ουρά αν δεν αρχίσει η εξυπηρέτησή του μέσα σε αυτό το μέγιστο χρονικό διάστημα. Στο δεύτερο μοντέλο, οι πελάτες που βρίσκουν το κέντρο γεμάτο, ενημερώνονται για το μέσο χρόνο αναμονής μέχρι την αρχή της εξυπηρέτησης και αποφασίζουν αν θα παραμείνουν συγκρίνοντας αυτόν το χρόνο με το μέγιστο χρονικό διάστημα που αυτοί είναι διατεθειμένοι να περιμένουν. Αν ο πελάτης αποφασίσει να παραμείνει, δεν θα εγκαταλείψει την ουρά. Ο Whitt βρήκε αναλυτικές εκφράσεις για σημαντικά μέτρα απόδοσης όπως ο μέσος χρόνος αναμονής και η παραγωγικότητα του τηλεφωνικού κέντρου για τα δύο αυτά μοντέλα και κατέληξε ότι είναι προτιμότερο οι πελάτες να ενημερώνονται για πιθανές καθυστερήσεις.

Σε πιο πολύπλοκα συστήματα πολλών σταδίων, όπως οι γραμμές παραγωγής, η αναλυτική έκφραση μέτρων απόδοσης είναι πολύ σύνθετο πρόβλημα. Για αυτόν το λόγο, και έχοντας υπόψη τα αποτελέσματα του Whitt, υποθέτουμε ότι το σύστημα παραγωγής υιοθετεί μια πολιτική υποσχόμενου διαστήματος παράδοσης των παραγγελιών σε περιόδους μηδενικού αποθέματος. Οι πελάτες που αποφασίζουν να περιμένουν στην ουρά αναμονής δεν μπορούν να την εγκαταλείψουν αλλά επωφελούνται από κάποια έκπτωση στην τιμή πώλησης αν τελικά το προϊόν τους παραδοθεί αργότερα από το υποσχόμενο διάστημα.

Η δομή του κεφαλαίου έχει ως εξής. Στην Παράγραφο 3.2 δίνεται μια περιγραφή του συστήματος. Στην Παράγραφο 3.3 μοντελοποιούμε το σύστημα σαν ένα κλειστό αναμονητικό δίκτυο και εξάγουμε αναλυτικές εκφράσεις των μέτρων απόδοσης του συστήματος και της συνάρτησης του μέσου ρυθμού κέρδους ως προς τις παραμέτρους ελέγχου, το απόθεμα βάσης και το έλλειμμα βάσης. Στην Παράγραφο 3.4 ευρίσκουμε φράγματα για τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου και παρουσιάζουμε έναν απλό αλγόριθμο εξαντλητικής αναζήτησης για τον εντοπισμό τους. Στην Παράγραφο 3.5 με αριθμητικά παραδείγματα συγκρίνουμε την προτεινόμενη πολιτική με άλλες διαδεδομένες πολιτικές. Επίσης, με την μέθοδο της προσομοίωσης αναλύονται γραμμές παραγωγής με χρόνους κατεργασίας των μηχανών που ακολουθούν άλλες κατανομές εκτός της εκθετικής. Στην Παράγραφο 3.6 παρουσιάζονται συμπεράσματα.

3.2 Περιγραφή συστήματος

Εξετάζουμε μια γραμμή παραγωγής με N μηχανές που παράγει ένα προϊόν. Η μηχανή M_i μαζί με την αποθήκη τροφοδοσίας της θα αναφέρονται ορισμένες φορές ως κόμβος i , $i = 1, 2, \dots, N$, και n_i θα συμβολίζει τον αριθμό κομματιών προς κατεργασία στον κόμβο i , μαζί με το κομμάτι που ήδη κατεργάζεται η μηχανή M_i . Οι πρώτες ύλες περνούν πρώτα από τη μηχανή M_N . Εν γένει, κομμάτια των οποίων η κατεργασία τελείωσε από την μηχανή M_i , οδηγούνται στον κόμβο $i - 1$. Η τελική κατεργασία γίνεται στη μηχανή M_1 και από εκεί τα προϊόντα οδηγούνται σε μια αποθήκη έτοιμων προϊόντων. Οι χρόνοι κατεργασίας της M_i είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $1/\mu_i$. Για να απλοποιήσουμε το μοντέλο, υποθέτουμε ότι όλοι οι ρυθμοί κατεργασίας μ_i είναι διαφορετικοί. Οι πελάτες

φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson και μέσο ρυθμό λ . Κάθε πελάτης ζητά μια μονάδα προϊόντος.

Όταν υπάρχει απόθεμα έτοιμων προϊόντων, κάθε παραγγελία οδηγεί κατευθείαν σε πώληση και οι ανάλογες πρώτες ύλες, για την αντικατάσταση του προϊόντος που πωλήθηκε, οδηγούνται στην αποθήκη τροφοδοσίας του κόμβου N . Σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, οι παραγγελίες δεν μπορούν να εκπληρωθούν αμέσως και οι πελάτες εμφανίζονται λιγότερο πρόθυμοι να θέσουν παραγγελίες. Για να αντιμετωπίσει τις ακυρώσεις παραγγελιών και να προσελκύσει απρόθυμους πελάτες, η εταιρία υπόσχεται ένα σταθερό χρόνο υστέρησης QLT (quoted lead time) από τη στιγμή που γίνεται κάθε παραγγελία, μετά το πέρας του οποίου, αν η παραγγελία ακόμα εκκρεμεί, ο πελάτης θα ωφελείται από μια σημαντική έκπτωση στην τιμή πώλησης του προϊόντος. Υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης έχει ένα μέγιστο χρονικό διάστημα αναμονής από τη στιγμή της άφιξης του μέχρι τελικά να εκπληρωθεί η παραγγελία του. Αν το διάστημα QLT που προσφέρει η εταιρία είναι μεγαλύτερο από το μέγιστο χρονικό διάστημα αναμονής του πελάτη, τότε αυτός δεν θα παραγγείλει προϊόν. Σε αντίθετη περίπτωση, ο πελάτης θέτει την παραγγελία του αλλά πλέον δεν μπορεί να την αποσύρει ακόμα και αν εκπνεύσει το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο του υποσχέθηκε η εταιρία ότι θα ικανοποιηθεί.

Έστω q η πιθανότητα ώστε ένας πελάτης να θέσει μια παραγγελία σε περιόδους μηδενικού αποθέματος. Ο μέγιστος χρόνος αναμονής των πελατών είναι μία τυχαία μεταβλητή Θ με γνωστή συνάρτηση κατανομής $G(t) = P(\Theta \leq t)$ και μέση τιμή θ . Ο υποσχόμενος χρόνος παράδοσης QLT που αναγγέλλει η εταιρία μέχρι την εκπλήρωση των παραγγελιών είναι σταθερός. Η πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης, που δεν θα βρει έτοιμο προϊόν, να κάνει μια παραγγελία είναι

$$\begin{aligned} q &= P(\text{QLT} \leq \Theta) = 1 - P(\Theta \leq \text{QLT}) \\ &= 1 - G(\text{QLT}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Επομένως, όταν δεν υπάρχει έτοιμο προϊόν, ο πραγματικός ρυθμός ζήτησης προϊόντος είναι $q\lambda$. Οι πελάτες ικανοποιούνται σύμφωνα με το πρωτόκολλο FCFS (first come first served), δηλαδή με σειρά προτεραιότητας ανάλογη του χρόνου που έγινε η παραγγελία. Το σύστημα υιοθετεί μια πολιτική σταθερής αποθεματικής θέσης για την αναπλήρωση των πρώτων υλών. Κάθε φορά που ένας πελάτης ζητά ένα

προϊόν και μπαίνει στη λίστα αναμονής, οι ανάλογες πρώτες ύλες τοποθετούνται στην αποθήκη τροφοδοσίας του κόμβου N .

Έστω n_F αριθμός έτοιμων προϊόντων, n_B ο αριθμός εκκρεμών παραγγελιών και n_H ο συνολικός αριθμός κομματιών (πρώτες ύλες, κομμάτια υπό κατεργασία, έτοιμα προϊόντα) στο σύστημα. Για τον έλεγχο της παραγωγής και των πωλήσεων εφαρμόζεται μια μικτή πολιτική, αποθέματος βάσης για τον αριθμό των έτοιμων προϊόντων και ελλείμματος βάσης για τον αριθμό των εκκρεμών παραγγελιών. Η πολιτική θα συμβολίζεται ως BSBB (base stock–base backlog). Σύμφωνα με την πολιτική αυτή, η παραγωγή διακόπτεται όσο ο αριθμός έτοιμων προϊόντων n_F είναι ίσος με το απόθεμα βάσης s , ενώ νέες παραγγελίες θα γίνονται δεκτές όσο ο αριθμός εκκρεμών παραγγελιών n_B είναι μικρότερος του ελλείμματος βάσης c . Για την διαχείριση των πρώτων υλών, το σύστημα υιοθετεί μια πολιτική σταθερής αποθεματικής θέσης. Η αποθεματική θέση ενός συστήματος ορίζεται ως το συνολικό απόθεμα του συστήματος (πρώτες ύλες, προϊόντα υπό κατεργασία, έτοιμα προϊόντα) μείον τον αριθμό των εκκρεμών παραγγελιών. Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει η αποθεματική θέση του συστήματος να είναι σταθερή και ίση με το απόθεμα βάσης. Πρώτες ύλες θα αποστέλλονται στον κόμβο N κάθε φορά που μια παραγγελία γίνεται δεκτή. Συνεπώς οποιαδήποτε χρονική στιγμή, το συνολικό απόθεμα του συστήματος θα είναι ίσο με το άθροισμα του αποθέματος βάσης s και τον αριθμό εκκρεμών παραγγελιών,

$$n_H = s + n_B, \quad (3.2)$$

και άρα η αποθεματική θέση του συστήματος, $n_H - n_B$, είναι πάντα ίση με s .

Η λειτουργία της γραμμής παραγωγής συνδέεται με τα παρακάτω οικονομικά μεγέθη:

- p το κέρδος από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος
- h το μοναδιαίο κόστος αποθέματος, που είναι το κόστος διατήρησης αποθέματος μιας μονάδας τελικού προϊόντος ή κομματιών υπό κατεργασία ή πρώτης ύλης για μια χρονική μονάδα.
- b το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών, που είναι το κόστος καθυστέρησης ικανοποίησης μιας εκκρεμούσας παραγγελίας στη μονάδα του χρόνου

d το σταθερό κόστος καθυστέρησης μίας παραγγελίας που εκκρεμεί για διάστημα μεγαλύτερο του QLT

Αξίζει να σημειωθεί πως θα μπορούσαμε να δεχθούμε διαφορετικές παραμέτρους κόστους αποθέματος h_1, \dots, h_N ανάλογα με το στάδιο παραγωγής του κάθε κομματιού υπό κατεργασία αλλά για λόγους απλότητας υποθέτουμε ένα ενιαίο κόστος h .

Το πρόβλημα είναι να καθορίσουμε τις βέλτιστες τιμές του s και του c ώστε να μεγιστοποιήσουμε το μέσο ρυθμό κέρδους του συστήματος,

$$J(s, c) = pTH_{s,c} - hH_{s,c} - bB_{s,c} - dD_{s,c} \quad (3.3)$$

όπου $TH_{s,c}$ ορίζεται ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος, $H_{s,c}$ το μέσο απόθεμα όλων των κομματιών στο σύστημα (τελικό προϊόν, κομμάτια υπό κατεργασία ή πρώτες ύλες), $B_{s,c}$ το μέσο πλήθος εκκρεμμένων παραγγελιών και $D_{s,c}$ ο μέσος ρυθμός με τον οποίο παραγγελίες καθυστερούν πάνω από διάστημα QLT για να εκπληρωθούν.

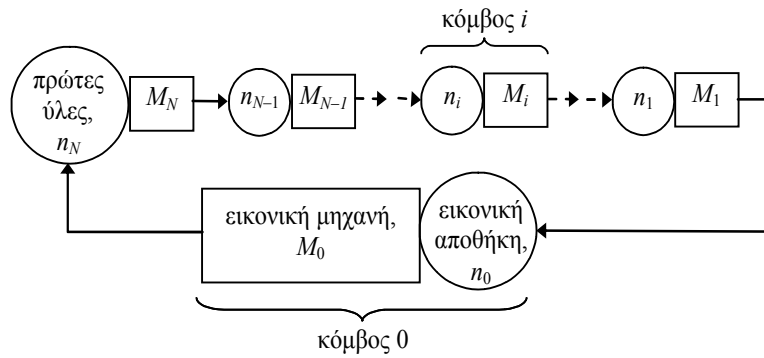
3.3 Μέτρα απόδοσης του συστήματος

Σε αυτήν την ενότητα εξάγουμε αναλυτικές εκφράσεις των μέτρων απόδοσης του συστήματος που σχετίζονται με το αναμενόμενο κέρδος της Εξ. (3.3).

3.3.1 Ισοδύναμο κλειστό δίκτυο Jackson

Θεωρούμε το κυκλικό αναμονητικό δίκτυο του Σχ. 3.1, στο οποίο υπάρχουν $N + 1$ κόμβοι εξυπηρέτησης, $i = 0, 1, \dots, N$, και συνολικός πληθυσμός $s + c$ κομματιών. Υποθέστε ότι η μηχανή M_0 του κόμβου 0 έχει ρυθμό κατεργασίας μ_0 ίσο με το ρυθμό με τον οποίο γίνονται παραγγελίες στο σύστημα παραγωγής. Ο ρυθμός κατεργασίας μ_i και το πλήθος κομματιών n_i σε κάθε κόμβο i του αναμονητικού συστήματος είναι αντίστοιχος με αυτόν του συστήματος παραγωγής για κάθε κόμβο $i = 1, \dots, N$.

Σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις, το σύστημα παραγωγής και το αναμονητικό σύστημα εξελίσσονται με τον ίδιο τρόπο. Υποθέτουμε πως όταν $n_0 = 0$ στο αναμονητικό σύστημα, το σύστημα παραγωγής έχει $n_F = 0$ και $n_B = c$, και όταν $n_0 = s + c$ το σύστημα παραγωγής έχει $n_F = s$ και $n_B = 0$ (αναλυτικά στοιχεία για την ισοδυναμία των δύο συστημάτων υπάρχουν στην ενότητα II.B της εργασίας [15]).



Σχήμα 3.1 . Ισοδύναμο κλειστό αναμονητικό δίκτυο.

Στον Πίνακα 3.1 παρουσιάζεται συνοπτικά ο συσχετισμός του αριθμού n_0 των κομματιών στον κόμβο 0 του αναμονητικού συστήματος και των μεταβλητών κατάστασης n_F , n_B και n_H του συστήματος παραγωγής. Εφόσον ο ρυθμός εξυπηρέτησης του κόμβου 0 είναι ίσος με το ρυθμό ζήτησης των προϊόντων, ο ρυθμός μ_0 εξαρτάται από το πλήθος κομματιών στον κόμβο 0, άρα,

$$\mu_0(n_0) = \begin{cases} \lambda, & n_0 > c \\ q\lambda, & n_0 \leq c. \end{cases} \quad (3.4)$$

Πίνακας 3.1: Αντιστοιχία μεταβλητών του συστήματος παραγωγής και κατάστασης n_0 του αναμονητικού συστήματος

Συστήμα παραγωγής			Αναμονητικό σύστημα
n_F	n_B	n_H	n_0
s	0	s	$s + c$
$s - 1$	0	s	$s + c - 1$
...
1	0	s	$c + 1$
0	0	s	c
0	1	$s + 1$	$c - 1$
...
0	c	$s + c$	0

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 3.1, εξάγουμε τις εκφράσεις για το ρυθμό παραγωγής $TH_{s,c}$, το μέσο απόθεμα $H_{s,c}$, το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών $B_{s,c}$, και το μέσο ρυθμό καθυστέρησης $D_{s,c}$.

Ο ρυθμός παραγωγής του συστήματος θα είναι ίσος με το ρυθμό με τον οποίο το σύστημα δέχεται παραγγελίες. Από την Εξ. (3.4), παρατηρούμε ότι αυτός ο ρυθμός, από λ μειώνεται σε $q\lambda$ σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, δηλαδή όταν $n_F = 0$ ή, αντίστοιχα, όταν στο ισοδύναμο σύστημα, $n_0 \leq c$. Επομένως,

$$TH_{s,c} = \lambda P(n_0 \geq c + 1) + q\lambda P(n_0 \leq c). \quad (3.5)$$

Το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών στην γραμμή παραγωγής είναι εξ ορισμού $B_{s,c} = E(n_B)$, όπου E , ο τελεστής μέσης τιμής. Από τον Πίνακα 3.1 βλέπουμε ότι $n_B = 0$ όταν $n_0 \leq c$ και $n_0 = c - n_B$ όταν $n_B \geq 1$, κατά συνέπεια,

$$B_{s,c} = \sum_{k=1}^c kP(n_0 = c - k). \quad (3.6)$$

Το μέσο συνολικό απόθεμα όλων των κομματιών είναι $H_{s,c} = E(n_H)$, από την εξίσωση (3.2) προκύπτει

$$H_{s,c} = s + B_{s,c}. \quad (3.7)$$

Τέλος, ο μέσος ρυθμός $D_{s,c}$ εμφάνισης παραγγελιών που καθυστερούν να ολοκληρωθούν πέραν του διαστήματος QLT είναι ίσος με το ρυθμό αφίξεων τέτοιων παραγγελιών, δηλαδή,

$$D_{s,c} = \sum_{m=0}^{c-1} q\lambda P(n_0 = c - m) \Pi_m, \quad (3.8)$$

όπου $q\lambda P(n_0 = c - m)$ είναι ο ρυθμός με τον οποίο γίνεται μια νέα παραγγελία όταν ήδη εκκρεμούν άλλες $n_B = m$, και Π_m ορίζεται η πιθανότητα ώστε ο χρόνος εκπλήρωσης αυτής της παραγγελίας να ξεπερνά το QLT.

Οι απαραίτητες συναρτήσεις για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων Π_m θα αναπτυχθούν στην επόμενη παράγραφο. Όλες οι πιθανότητες της μεταβλητής κατάστασης n_0 που χρειάζονται στις Εξ. (3.5) έως (3.8) μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας γνωστούς τύπους για κλειστά δίκτυα Jackson (για λεπτομέρειες, βλέπε ενότητα II.C των [15], και στην εργασία [30]). Παρακάτω δίνονται οι απαραίτητες εξισώσεις:

(i) Σταθερές κανονικοποίησης ενός κυκλικού δικτύου Jackson με κόμβους $k = i, i - 1, \dots, j$, μέσους ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_k , συνολικό πλήθος n κομματιών και ο κόμβος j να τροφοδοτεί κομμάτια πίσω στον κόμβο i ,

$$G_{i,j}(n) = \sum_{n_i + \dots + n_j = n} \prod_{k=i}^j \mu_k^{-n_k}, j \leq i. \quad (3.9)$$

(ii) Σταθερά κανονικοποίησης του ισοδύναμου αναμονητικού συστήματος του Σχ. 3.1 (N κόμβοι με συνολικό πληθυσμό $s + c$ και ρυθμό εξυπηρέτησης για τον κόμβο 0 που δίνεται από την Εξ. (3.4)),

$$G(s + c) = \sum_{n_0=0}^{s+c} q^{-\min(n_0, c)} \lambda^{-n_0} G_{N,1}(s + c - n_0). \quad (3.10)$$

(iii) Πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του ισοδύναμου αναμονητικού συστήματος του Σχ. 3.1,

$$P(n_0, \dots, n_N) = \frac{1}{G(s + c)} q^{-\min(n_0, c)} \lambda^{-n_0} \prod_{k=1}^N \mu_k^{-n_k}. \quad (3.11)$$

(iv) Πιθανότητες κατάστασης του κόμβου 0 του ισοδύναμου αναμονητικού συστήματος του Σχ. 3.1,

$$P(n_0 = k) = \frac{1}{G(s + c)} q^{-\min(k, c)} \lambda^{-k} G_{N,1}(s + c - k), \quad (3.12)$$

$$P(n_0 \geq k) = \frac{1}{G(s + c)} \sum_{n=k}^{s+c} q^{-\min(n, c)} \lambda^{-n} G_{N,1}(s + c - n). \quad (3.13)$$

3.3.2 Ανάλυση υποσχόμενου χρόνου παράδοσης παραγγελιών

Σε αυτό το σημείο θα εξάγουμε τις απαραίτητες συναρτήσεις για τον υπολογισμό της πιθανότητας Π_m . Έστω ότι το απόθεμα βάσης είναι $s \geq 1$. Την ειδική περίπτωση $s = 0$ θα την αναλύσουμε σλίγο αργότερα. Εξετάζουμε το σύστημα στην μόνιμη κατάσταση. Υποθέτουμε ότι ένας πελάτης καταφθάνει κατά τη διάρκεια ενός διαστήματος μηδενικού αποθέματος $(t, t + dt)$ και αποφασίζει να θέσει μια παραγγελία ενώ ήδη εκκρεμούν άλλες m , $m < c$. Τη χρονική στιγμή t , ακριβώς πριν ο πελάτης θέσει την παραγγελία του, υπάρχουν συνολικά $n_H = s + m$ κομμάτια και πρώτες ύλες υπό κατεργασία στη γραμμή παραγωγής (πλήθος s κομματιών για την αναπλήρωση του αποθέματος βάσης και ένα κομμάτι για κάθε εκκρεμούσα

παραγγελία). Εφόσον η εταιρία εφαρμόζει το πρωτόκολλο FCFS, ο χρόνος εκπλήρωσης της νέας παραγγελίας, θα είναι ο χρόνος που χρειάζεται η γραμμή παραγωγής για να ολοκληρώσει συνολικά $m + 1$ προϊόντα. Πρέπει να εξεταστούν πολλές περιπτώσεις ανάλογα με τη θέση του $m + 1$ κομματιού μέσα στη γραμμή παραγωγής. Συνοπτικά, η πιθανότητα ώστε ο χρόνος ολοκλήρωσης μιας παραγγελίας να υπερβεί το QLT, δοθέντος ότι έχουμε $n_B = m$ παραγγελίες ήδη να εκκρεμούν, υπολογίζεται σε τρία βήματα: (α) υπολογίζουμε τις πιθανότητες των διάφορων θέσεων του κομματιού $m + 1$ μέσα στη γραμμή παραγωγής (σε ποιο κόμβο βρίσκεται το κομμάτι $m + 1$ μετρώντας τα κομμάτια από τον κόμβο 1 και πίσω); (β) για κάθε πιθανή θέση του κομματιού στους κόμβους $i = N, N - 1, \dots, 1$, υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατανομής του συνολικού χρόνου που το κομμάτι $m + 1$ θα βρίσκεται στους κόμβους των M_i, M_{i-1}, \dots και M_1 ; και (γ) προσθέτουμε το γινόμενο των πιθανοτήτων (α) και (β) για όλους τους κόμβους i .

3.3.2.1 Η τοποθεσία του κομματιού $m + 1$

Πρόταση 3.1: Υποθέτουμε ότι γίνεται μια νέα παραγγελία όταν ήδη εκκρεμούν άλλες m . Τότε, για $s \geq 1$, έχουμε την δεσμευμένη πιθανότητα,

$P(\text{το } m + 1 \text{ είναι στην } M_i \mid n_B = m \text{ τη στιγμή } t \text{ και νέα παραγγελία την στιγμή } t^+) =$

$$= \frac{P(A)}{P(C)} \quad (3.14)$$

$$= \frac{G_{i,1}(m)\mu_i^{-1}G_{N,i}(s-1)}{G_{N,1}(s+m)}, \quad (3.15)$$

όπου ως A ορίζουμε το ενδεχόμενο το κομμάτι $m + 1$ να βρίσκεται στην M_i και να έχουμε $n_B = m$ τη χρονική στιγμή t και μια νέα παραγγελία να έρχεται τη χρονική στιγμή t^+ , και ως C το ενδεχόμενο να έχουμε $n_B = m$ τη χρονική στιγμή t και μια νέα παραγγελία να έρχεται τη χρονική στιγμή t^+ .

Απόδειξη

Πρώτα υπολογίζουμε τον παρονομαστή της Εξ (3.14). Η πιθανότητα ώστε ένας πελάτης να έρθει στο χρονικό διάστημα $(t, t + dt)$ και τελικά να θέσει μια παραγγελία όταν ήδη εκκρεμούν m , $m < c$, παραγγελίες στο σύστημα, ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων των ακόλουθων γεγονότων:

- (i) τη χρονική στιγμή t , στη μόνιμη κατάσταση, το σύστημα δεν έχει έτοιμο προϊόν και εκκρεμούν m παραγγελίες, ή, ισοδύναμα, συνολικά υπάρχουν $s + m$ κομμάτια και πρώτες ύλες προς κατεργασία στους κόμβους $N, N - 1, \dots, 1$;
- (ii) ένας πελάτης έρχεται στο χρονικό διάστημα $(t, t + dt)$ και αποφασίζει να θέσει μια παραγγελία.

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις Εξ. (3.4) και (3.12), μπορούμε να υπολογίσουμε τον παρονομαστή της Εξ. (3.14) ως εξής:

$$\begin{aligned}
P(n_B = m \text{ τη στιγμή } t \text{ και μια νέα παραγγελία γίνεται την στιγμή } t^+) &= \\
&= P(n_0 = c - m) \times (\lambda q dt) \\
&= (q \lambda dt) \frac{1}{G(s + c)} (q \lambda)^{-c+m} G_{N,1}(s + m). \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Ο αριθμητής της Εξ. (3.14), είναι η πιθανότητα της τομής των γεγονότων (ii) και ενός υποσυνόλου του γεγονότος (i) που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

- (iii) τα πρώτα m κομμάτια υπό κατεργασία είναι οπουδήποτε ανάμεσα στις μηχανές M_i, M_{i-1}, \dots, M_1 ;
- (iv) ένα (το $m + 1$) ή και περισσότερα κομμάτια υπό κατεργασία είναι στον κόμβο της μηχανής M_i ;
- (v) τα υπόλοιπα $s - 1$ κομμάτια υπό κατεργασία ή πρώτες ύλες είναι οπουδήποτε μεταξύ των μηχανών M_N και M_i .

Η πιθανότητα της τομής των (iii)–(v) υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
P(\text{γεγονός (iii) και (iv) και (v)}) &= \\
&= P(\text{ισοδύναμα, το κομμάτι } m + 1 \text{ είναι στην } M_i \text{ και } n_0 = c - m) \\
&= \sum_{\substack{(i) n'_i + n_{i-1} + \dots + n_1 = m \\ (iii) n_N + \dots + n_{i+1} + n''_i = s-1}} P(n_0 = c - m, n_N, \dots, n_i = n'_i + n''_i + 1, \dots, n_1) \\
&= \\
&= \frac{1}{G(s + c)} (q \lambda)^{-(c-m)} \left(\sum_{n_N + \dots + n_{i+1} + n''_i = s-1} \mu_N^{-n_N} \dots \mu_{i+1}^{-n_{i+1}} \mu_i^{-n''_i} \right) \mu_i^{-1} \left(\sum_{n'_i + n_{i-1} + \dots + n_1 = m} \mu_i^{-n'_i} \mu_{i-1}^{-n_{i-1}} \dots \mu_1^{-n_1} \right) \\
&= \frac{1}{G(s + c)} (q \lambda)^{-c+m} G_{i,1}(m) \mu_i^{-1} G_{N,i}(s - 1).
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα ανωτέρω με $q\lambda dt$ και διαιρώντας με την Εξ (3.16) παίρνουμε την Εξ. (3.15) το οποίο αποδεικνύει την πρόταση. ΟΕΔ

3.3.2.2 Υπολειπόμενος χρόνος ολοκλήρωσης του κομματιού $m + 1$ από την μηχανή M_i και μετά

Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή t , το κομμάτι $m + 1$ βρίσκεται στον κόμβο της μηχανής M_i περιμένοντας την κατεργασία του στις M_i, M_{i-1}, \dots και M_1 . Η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου μέχρι αυτό το κομμάτι να ολοκληρωθεί εξαρτάται από τις θέσεις των υπόλοιπων m κομματιών υπό κατεργασία μπροστά από αυτό. Η απαρίθμηση όλων των πιθανών περιπτώσεων παρουσιάζει συνδυαστικές δυσκολίες τις οποίες θα παρακάμψουμε χρησιμοποιώντας το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.2: Ο υπολειπόμενος χρόνος παραγωγής του κομματιού $m + 1$ έχει τη ίδια κατανομή με το χρόνο που χρειάζεται ένα κομμάτι ώστε να ολοκληρώσει κύκλο σε κυκλικό δίκτυο Jackson που αποτελείται μόνο από τους κόμβους $i, i - 1, \dots, 1$ και έχει συνολικό πληθυσμό $m + 1$ κομματιών. Η πιθανότητα ώστε αυτός ο χρόνος να ξεπεράσει το QLT δίνεται από

$$DP_i(m) = \sum_{k=1}^i \left[\beta_{k,i}(m) \sum_{j=0}^m e^{-\mu_k QLT} \frac{(\mu_k QLT)^j}{j!} \right], \quad (3.17)$$

όπου, για δίκτυα με διαφορετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης κάθε κόμβου έχουμε,

$$\beta_{k,i}(m) = \frac{\alpha_{k,i} \mu_k^{-m}}{\sum_{j=1}^i \alpha_{j,i} \mu_j^{-m}}, \quad \alpha_{k,i} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^i \frac{\mu_l}{\mu_l - \mu_k}. \quad (3.18)$$

Απόδειξη

Το πρώτο μέρος της απόδειξης είναι παρόμοιο με την απόδειξη της Πρότασης 3.1. Θεωρούμε μια νέα παραγγελία που γίνεται σε περίοδο μηδενικού αποθέματος όταν άλλες m ήδη εκκρεμούν. Επίσης υποθέτουμε ότι αυτή η παραγγελία «βλέπει» την γραμμή παραγωγής στην ακόλουθη κατάσταση:

- (iii)' τα πρώτα m κομμάτια είναι σε συγκεκριμένες θέσεις ανάμεσα στις μηχανές M_i, M_{i-1}, \dots, M_1 ;
- (iv) ένα (το $m + 1$) ή και περισσότερα κομμάτια είναι στον κόμβο της μηχανής M_i ;

- (v) τα υπόλοιπα $s - 1$ κομμάτια ή πρώτες ύλες είναι οπουδήποτε μεταξύ των μηχανών M_N και M_i .

Το γεγονός (iii)' είναι ένα υποσύνολο του (iii), όπως αυτό ορίστηκε στην απόδειξη της Πρότασης 3.1. Η δεσμευμένη πιθανότητα των γεγονότων (iii)' και (iv) δοθέντος των (iii) έως (iv) είναι

$$\begin{aligned} & \frac{P(\text{η άφιξη βλέπει } n_0 = c - m, n_1, \dots, n_{i-1} \text{ και } n_i = n'_i + n''_i + 1 \text{ με } n_1 + \dots + n_{i-1} + n'_i = m)}{P(\text{η άφιξη βλέπει } m \text{ παραγγελίες να εκκρεμούν και το κομμάτι } m + 1 \text{ στην } M_i)} \\ &= \frac{\frac{1}{G(s+c)} (q\lambda)^{-(c-m)} \left(\sum_{n_N + \dots + n_{i+1} + n''_i = s-1} \mu_N^{-n_N} \dots \mu_{i+1}^{-n_{i+1}} \mu_i^{-n''_i} \right) \mu_i^{-1} \left(\mu_i^{-n'_i} \mu_{i-1}^{-n_{i-1}} \dots \mu_1^{-m} \right) (q\lambda dt)}{\frac{1}{G(s+c)} (q\lambda)^{-(c-m)} \left(\sum_{n_N + \dots + n_{i+1} + n''_i = s-1} \mu_N^{-n_N} \dots \mu_{i+1}^{-n_{i+1}} \mu_i^{-n''_i} \right) \mu_i^{-1} \left(\sum_{n'_i + n_{i-1} + \dots + m = m} \mu_i^{-n'_i} \mu_{i-1}^{-n_{i-1}} \dots \mu_1^{-m} \right) (q\lambda dt)} \\ &= \frac{\mu_i^{-n''_i} \mu_{i-1}^{-n_{i-1}} \dots \mu_1^{-m}}{G_{i,1}(m)}. \end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης ενός αναμονητικού κλειστού δικτύου με πληθυσμό m κομματιών και τους κόμβους $i, i - 1, \dots$, και 1 σε κύκλο. Το *θεώρημα αφίξεων* για δίκτυα Jackson [31] λει ότι αυτή η πιθανότητα είναι ίδια με την πιθανότητα της κατάστασης του δικτύου όπως το «βλέπει» ένα κομμάτι που εισέρχεται στον κόμβο i από τον κόμβο 1 στο ίδιο κλειστό δίκτυο αλλά με συνολικό πληθυσμό $m + 1$ κομματιών. Επομένως, η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ώστε να ολοκληρωθεί το κομμάτι $m + 1$ είναι η ίδια με την κατανομή του χρόνου που χρειάζεται ένα κομμάτι για να ολοκληρώσει ένα κύκλο σε μικρότερο δίκτυο με τους κόμβους $i, i - 1, \dots$, και 1 και πληθυσμό $m + 1$ κομματιών. Επιπλέον, η πιθανότητα ώστε αυτός ο χρόνος να είναι μεγαλύτερος από QLT δίνεται από την Εξ. (3.17), όπως αποδεικνύει ο Zazanis [26]. Όταν όλοι οι ρυθμοί εξυπηρέτησης στους κόμβους είναι διαφορετικοί, οι συντελεστές $\beta_{k,i}(m)$ και $\alpha_{k,i}$ δίνονται από την Εξ. (3.18), σε περίπτωση που κάτι τέτοιο δεν ισχύει, οι συντελεστές αυτοί μπορούν να υπολογιστούν με τη μέθοδο του Lam [32]. ΟΕΔ

3.3.2.3 Υπολογισμός των μέτρων απόδοσης

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 3.1 και 3.2, παίρνουμε την πιθανότητα Π_m ώστε ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη που θέτει μια παραγγελία όταν εκκρεμούν άλλες m , να ξεπεράσει τον υποσχόμενο χρόνο παράδοσης QLT:

$$\Pi_m = \sum_{i=1}^N P(\text{το κομμάτι } m+1 \text{ είναι στην } M_i \mid n_B = m) DP_i(m), s \geq 1. \quad (3.19\alpha)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $s=0$, έχουμε μια πολιτική παραγωγής κατά παραγγελία και κάθε κομμάτι υπό κατεργασία στη γραμμή αντιστοιχεί και σε μια από τις παραγγελίες που εκκρεμούν. Συνεπώς, όταν εκκρεμούν m παραγγελίες και γίνεται μια ακόμα, οι αντίστοιχες πρώτες ύλες για την παραγγελία $m+1$ τοποθετούνται κατευθείαν στην είσοδο του κόμβου της πρώτης μηχανής, M_N . Σε αυτήν την περίπτωση, η Εξ. (3.16) απλοποιείται στη μορφή

$$\Pi_m = DP_N(m), \text{για συστήματα παραγωγής κατά παραγγελία (πολιτική ΜΤΟ)}. \quad (3.19\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ (3.9), (3.10), (3.12), (3.13), (3.15) και (3.17) έως (3.19) μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα μέτρα απόδοσης του συστήματος όπως δίνονται από τις Εξ (3.5) έως (3.8) και, τελικά, να υπολογίσουμε το μέσο ρυθμό κέρδους του συστήματος της Εξ. (3.3).

3.4 Βελτιστοποίηση

Εξετάζουμε τώρα το πρόβλημα καθορισμού των βέλτιστων τιμών s και c , οι οποίες συμβολίζονται s_{opt} και c_{opt} αντίστοιχα, ώστε να μεγιστοποιήσουμε το αναμενόμενο κέρδος τους συστήματος. Οι ακόλουθες προτάσεις εξασφαλίζουν ότι αυτές οι βέλτιστες τιμές είναι φραγμένες.

Πρόταση 3.3: Το βέλτιστο απόθεμα βάσης s_{opt} , έχει το ακόλουθο άνω φράγμα,

$$s_{\text{opt}} < \frac{p\lambda}{h}.$$

Απόδειξη

Ο ρυθμός παραγωγής του συστήματος δεν μπορεί να υπερβαίνει το ρυθμό ζήτησης λ . Επίσης, επειδή $n_H = s + n_B$, έχουμε $H_{s,c} = E(n_H) \geq s$. Από την Εξ. (3.3) προκύπτει ότι $J(s, c) \leq p\lambda - sh$. Εφόσον η συνάρτηση $J(s, c)$ δεν πρέπει να είναι αρνητική, λαμβάνουμε το όριο της Πρότασης 3.3 για το s_{opt} . ΟΕΔ

Πρόταση 3.4: Το βέλτιστο έλλειμμα βάσης c_{opt} , έχει το ακόλουθο άνω φράγμα,

$$c_{\text{opt}} < \frac{p\mu_1}{h+b}.$$

Απόδειξη

Έστω ένας αφικνούμενος πελάτης σε περίοδο μηδενικού αποθέματος ο οποίος βρίσκει $c - 1$ παραγγελίες να εκκρεμούν και αποφασίζει να θέσει μια ακόμα. Αυτός ο πελάτης πρέπει να περιμένει μέχρις ότου c προϊόντα να παραχθούν από τη γραμμή παραγωγής. Η καλύτερη δυνατή περίπτωση ώστε αυτός ο πελάτης να εξυπηρετηθεί γρήγορα θα ήταν αν τη στιγμή της παραγγελίας, c κομμάτια υπό κατεργασία βρίσκονταν στην τελευταία μηχανή M_1 και χρειαζόνταν μόνο μια κατεργασία. Ο μέσος χρόνος παράδοσης αυτής της παραγγελίας επομένως θα είναι μεγαλύτερος ή ίσος (στην καλύτερη περίπτωση) από c/μ_1 και το μέσο κόστος αποθέματος και εκκρεμών παραγγελιών που αντιστοιχούν σε αυτό το χρόνο παράδοσης θα είναι $c(h + b)/\mu_1$. Η τελευταία έκφραση κόστους θα πρέπει να είναι μικρότερη από p ώστε να διασφαλίσουμε ότι το μέσο κέρδος από την αποδοχή αυτού του πελάτη είναι θετικό. Αυτή η παρατήρηση μας εξασφαλίζει ένα όριο του c_{opt} πάνω από το οποίο, δεν θα είναι κερδοφόρο για το σύστημα να γίνει αποδεκτή μια εισερχόμενη παραγγελία. ΟΕΔ

Με τη χρήση των παραπάνω προτάσεων, παρουσιάζουμε αλγόριθμο βελτιστοποίησης οποίος κάνει εξαντλητική αναζήτηση για όλες τις τιμές των s και c που είναι μικρότερες από τα παραπάνω φράγματα εξασφαλίζοντας την εύρεση των βέλτιστων τιμών s_{opt} και c_{opt} και τον υπολογισμό του μέγιστου μέσου ρυθμού κέρδους του συστήματος, σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης 3.1

Βήμα 1. Θέσε $J(0, 0) = 0$, $J_{\text{opt}} = 0$, $s_{\text{opt}} = 0$, και $c_{\text{opt}} = 0$. Δώσε αρχικές τιμές παραμέτρων: $s = 1$, $c = 0$.

Βήμα 2. Υπολόγισε το ρυθμό κέρδους $J(s, c)$. Αν $J(s, c) > J_{\text{opt}}$, τότε θέσε $J^* = J(s, c)$, $s_{\text{opt}} = s$, και $c_{\text{opt}} = c$.

Βήμα 3. Εφαρμογή Πρότασης 3.3: Αν $(s + 1) < p\lambda/h$, τότε θέσε $s = s + 1$ και πήγαινε στο βήμα 2; αλλιώς στο βήμα 4.

Βήμα 4. Εφαρμογή Πρότασης 3.4: Αν $(c + 1) < p\mu_1/(h + b)$, τότε θέσε $c = c + 1$, $s = 0$ και πήγαινε στο βήμα 2; αλλιώς τέλος.

3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτήν την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης που παρουσιάσαμε προηγουμένως για να αναδείξουμε τα πλεονεκτήματα προτεινόμενης μικτής πολιτικής BSBB σε σχέση δύο απλούστερες, αλλά δημοφιλείς στα συστήματα παραγωγής, πολιτικές.

3.5.1 Αναλυτικά αποτελέσματα για γραμμές παραγωγής με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης

Θεωρήστε μια γραμμή παραγωγής παρόμοια με αυτήν που περιγράφεται στην Παράγραφο 3.2 που αποτελείται από έξι μηχανές M_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, με εκθετικά καταναμημένους χρόνους εξυπηρέτησης και αφίξεων. Οι βασικές τιμές των παραμέτρων του συστήματος είναι: μέσος ρυθμός ζήτησης $\lambda = 4.0$, μέσοι ρυθμοί παραγωγής $\mu_1 = 5.25$, $\mu_2 = 6.5$, $\mu_3 = 5.5$, $\mu_4 = 5.0$, $\mu_5 = 7.0$, $\mu_6 = 6.0$, κέρδος πώλησης $p = 100.0$, μοναδιαία κόστη $h = 8.0$, $b = 8.0$, σταθερό κόστος καθυστέρησης $d = 10.0$, και υποσχόμενος χρόνος παράδοσης $QLT = 1.0$. Ο μέγιστος χρόνος αναμονής Θ των πελατών είναι μια τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη συνάρτηση κατανομής στο $[0, 10]$, άρα, $G(t) = t/10$. Αντικαθιστώντας την $G(t)$ στην Εξ. (3.1), παίρνουμε $q = 0.9$. Αυτό σημαίνει ότι το 90% των πελατών που έρχονται σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, είναι πρόθυμοι να περιμένουν μια χρονική μονάδα (όσο το διάστημα QLT που υποσχέθηκε η εταιρία) και επομένως, θέτουν μια παραγγελία.

Συγκρίνουμε την πολιτική BSBB, θα συμβολίζεται ως $(s, c)_{BSBB}$, με την πολιτική πλήρους απόρριψης (LS) και την πολιτική παραγωγής κατά παραγγελία (MTO). Αυτές οι πολιτικές αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της BSBB καθώς η LS αντιστοιχεί με την $(s, 0)_{BSBB}$ και η MTO συμπίπτει με την $(0, c)_{BSBB}$, για αυτόν το λόγο οι επιδόσεις τους δεν θα είναι, εν γένει, καλύτερες της BSBB. Εξετάζουμε τον τρόπο που επηρεάζουν διάφορες τιμές των λ , h , b , d και QLT το ρυθμό καθαρού κέρδους του συστήματος. Σε κάθε πείραμα αλλάζουμε την τιμή μιας εκ των παραπάνω παραμέτρων, διατηρώντας τις άλλες στις βασικές τιμές, και υπολογίζουμε τις βέλτιστες παραμέτρους ελέγχου των πολιτικών BSBB, LS και MTO. Οι Πίνακες 3.2 και 3.3 παρουσιάζουν το μέσο ρυθμό κέρδους του συστήματος και τις βέλτιστες παραμέτρους ελέγχου s και c για διάφορες τιμές των λ και QLT. Τα Σχ.3.2 έως 3.4

δείχνουν το μέσο ρυθμό κέρδους για διάφορες τιμές των παραμέτρων κόστους h , b και d .

Πίνακας 3.2 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικούς ρυθμούς λ

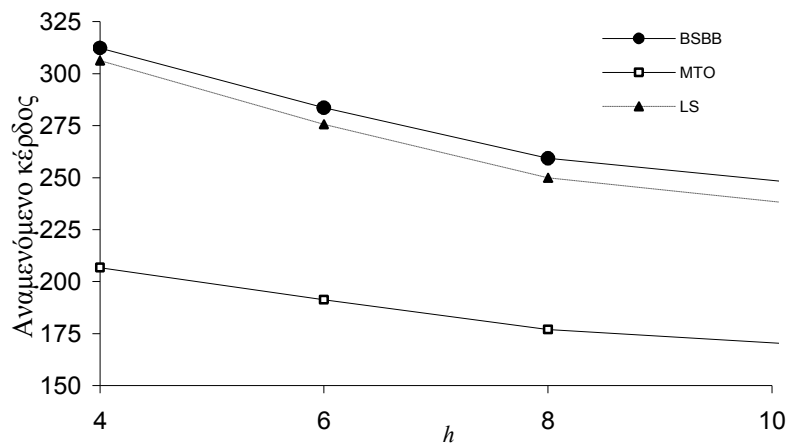
	Ρυθμός ζήτησης											
	$\lambda = 3$			$\lambda = 4$			$\lambda = 4.95$			$\lambda = 6.95$		
Πολιτικές	s	c	J	s	c	J	s	c	J	s	c	J
CONIP-BB	7	6	215.97	11	3	259.21	13	2	280.39	13	1	294.17
MTO	0	13	160.29	0	10	177.06	0	9	182.81	0	8	186.51
LS	9	0	202.10	12	0	249.91	14	0	275.48	14	0	293.18

Από τον Πίνακα 3.2 παρατηρούμε πως όταν το λ είναι μεγαλύτερο από το ρυθμό παραγωγής της πιο αργής μηχανής, $\min \mu_i = 5$, οι πολιτικές LS και BSBB παρουσιάζουν παρόμοια αποτελέσματα. Αυτό συμβαίνει διότι η BSBB τείνει να απορρίπτει πελάτες σε περιόδους μηδενικού αποθέματος και να διατηρεί υψηλό απόθεμα έτοιμων προϊόντων όταν ο ρυθμός αφίξεων των πελατών είναι υψηλός. Ωστόσο, όσο μειώνεται ο ρυθμός ζήτησης, οι περίοδοι μηδενικού αποθέματος είναι σπάνιες και πλέον το σύστημα δεν χρειάζεται να διατηρεί μεγάλο αριθμό έτοιμων προϊόντων.

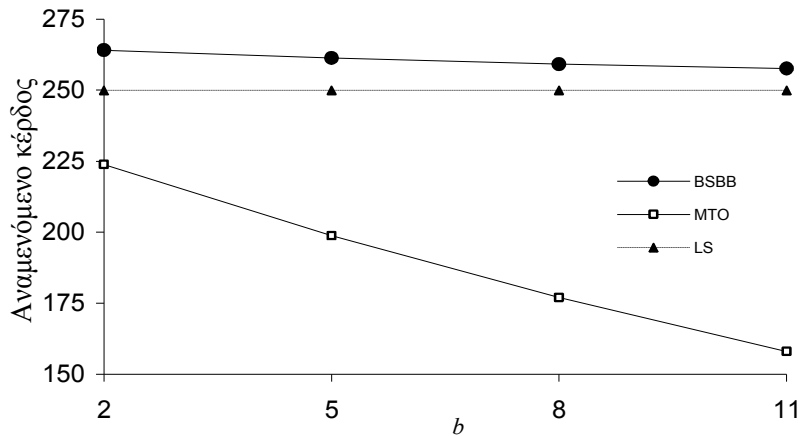
Πίνακας 3.3 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικές τιμές QLT

	Υποσχόμενος χρόνος παράδοσης											
	QLT = 0			QLT = 1			QLT = 2			QLT = 5		
Πολιτικές	s	c	J	s	c	J	s	c	J	s	c	J
CONIP-BB	12	1	250.69	11	3	259.21	11	4	259.22	11	5	254.61
MTO	0	10	179.40	0	10	177.06	0	10	185.12	0	17	148.83
LS	12	0	249.91	12	0	249.91	12	0	249.91	12	0	249.91

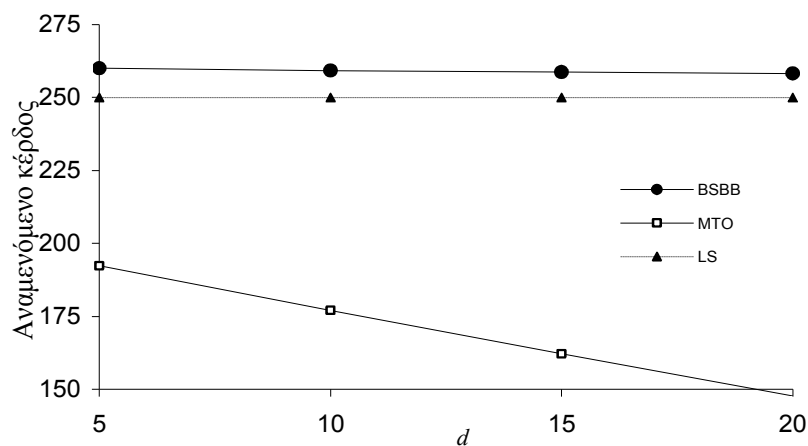
Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα που προκύπτει παρατηρώντας τον Πίνακα 3.3, είναι ότι η BSBB αποδίδει πάντα καλύτερα, αλλά όχι σε μεγάλο βαθμό, από την LS για όλες τις τιμές QLT που δοκιμάσαμε. Όταν η τιμή QLT είναι μηδέν, όλοι οι πελάτες που έρχονται στο σύστημα, θα θέσουν μια παραγγελία με πιθανότητα ένα. Σε αυτήν την περίπτωση, η BSBB προσαρμόζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να προστατέψει το σύστημα από το υψηλό κόστος ποινών καθυστέρησης. Είναι προφανές πως όλες οι παραγγελίες που θα γίνουν σε περίοδο μηδενικού αποθέματος θα χρειαστούν χρόνο μεγαλύτερο του μηδενός μέχρι τελικά να εκπληρωθούν, επομένως η BSBB απορρίπτει πελάτες όταν ο αριθμός των εκκρεμών παραγγελιών φτάσει στην τιμή $c = 1$ και, άρα αποδίδει παρόμοια με την πολιτική LS ($c = 0$). Όσο ο χρόνος QLT αυξάνει, οι πελάτες γίνονται πιο διστακτικοί και ο ρυθμός αφίξεων σε περιόδους μηδενικού αποθέματος μειώνεται. Σε μια τέτοια περίπτωση, ένας λιγότερο αυστηρός έλεγχος των αφίξεων είναι πιο συμφέρων και η BSBB επιτρέπει μεγαλύτερο αριθμό εκκρεμών παραγγελιών.



Σχήμα 3.2 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς το μοναδιαίο κόστος αποθέματος h



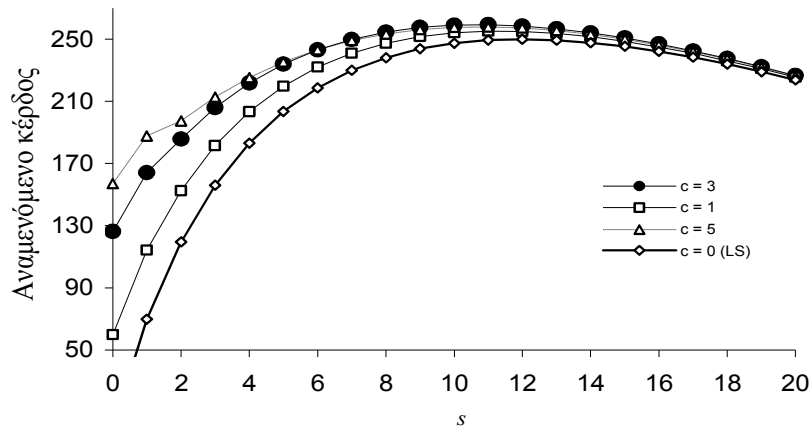
Σχήμα 3.3 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών b



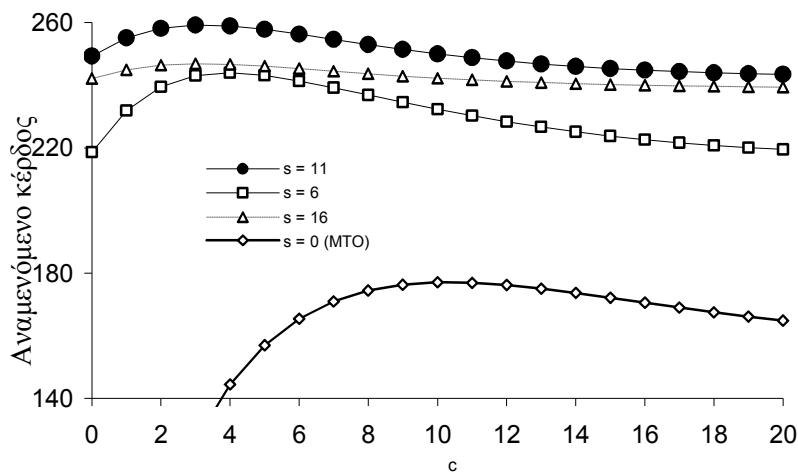
Σχήμα 3.4 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς το σταθερό κόστος καθυστέρηση d

Ένα άλλο στοιχείο που εξετάζουμε, είναι οι ιδιότητες δεύτερης τάξης του αναμενόμενου κέρδους ως προς s και c για την πολιτική BSBB. Στα Σχ. 3.5 και 3.6, παρουσιάζεται ο μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος ως προς s και c αντίστοιχα. Παρατηρούμε από το γράφημα της $J(s, c)$, ότι η συνάρτηση εμφανίζεται να είναι μονοκόρυφη (unimodal) ως προς τις παραμέτρους ελέγχου. Φαίνεται δηλαδή να έχει ένα μέγιστο σημείο για κάθε παράμετρο s και c όταν η τιμή της άλλης μένει σταθερή. Αυτή η ιδιότητα σε σχέση με το s υποδηλώνει ότι το βέλτιστο απόθεμα βάσης για ένα σύστημα με σταθερό έλλειμμα βάσης c είναι μια τιμή s_c τέτοια ώστε $J(s_c, c) > J(s_c + 1, c)$. Αντίστοιχα αυτό θα ισχύει και για το βέλτιστο έλλειμμα βάσης

όταν το απόθεμα βάσης παραμένει σταθερό. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας θα μπορούσε να μειώσει δραστικά τον υπολογιστικό χρόνο για τον εντοπισμό των βέλτιστων παραμέτρων της πολιτικής BSBB και αυτό διότι, στα βήματα 3 και 4 του Αλγορίθμου 3.1, η μετάβαση στο βήμα 2 θα γίνει όταν εντοπιστεί τοπικό μέγιστο για κάποια τιμή των s και c , αντίστοιχα, αγνοώντας την Πρόταση 3.3 και 3.4.



Σχήμα 3.5 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς το απόθεμα βάσης s



Σχήμα 3.6 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς το έλλειμμα βάσης c

Ο ρυθμός κέρδους επίσης, εμφανίζεται ως υποαρθρωτή (submodular) συνάρτηση. Αυτή η ιδιότητα υποδηλώνει ότι, αν για κάποιο σταθερό s , η c_s είναι η μεγαλύτερη τιμή του c για την οποία η $J(s, c)$ μεγιστοποιείται, τότε το c_s είναι μια μη αύξουσα συνάρτηση του s , δηλαδή $c_s \leq c_{s-1}$. Παραδείγματος χάριν, από το Σχ. 3.6 παρατηρούμε

ότι η μέγιστη τιμή του μέσου ρυθμού κέρδους του συστήματος για τιμές $s = 0, 4, 11,$ και 16 αντιστοιχεί στα $c_0 = 10, c_6 = 4$ και $c_{11} = c_{16} = 3$. Παρομοίως, κάτι αντίστοιχο φαίνεται να ισχύει και για το s παρατηρώντας το Σχ. 3.5, δηλαδή ότι για κάποια σταθερή τιμή c , η s_c που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση κέρδους, ικανοποιεί τη σχέση $s_c \leq s_{c-1}$. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας, επίσης θα μείωνε τον υπολογιστικό χρόνο των βέλτιστων παραμέτρων ελέγχου. Για παράδειγμα, όταν θα έχουμε βρει το βέλτιστο απόθεμα βάσης s_{c-1} για κάποιο έλλειμμα βάσης $c-1$, το αντίστοιχο βέλτιστο απόθεμα βάσης s_c για έλλειμμα βάσης c θα ανήκει στο υποσύνολο $\{0, 1, \dots, s_{c-1}\}$; άρα στο βήμα 3 του Αλγορίθμου 3.1 δεν χρειάζεται να δοκιμάσουμε τιμές για το s μεγαλύτερες του s_{c-1} ακόμη και αν αυτές ικανοποιούν την Πρόταση 3.3.

3.5.2 Αποτελέσματα προσομοίωσης για γραμμές παραγωγής με αυθαίρετους χρόνους εξυπηρέτησης

Μέχρι τώρα, στο κεφάλαιο αυτό, έχουμε υποθέσει ότι όλες οι μηχανές στην γραμμή παραγωγής έχουν εκθετικά κατανομημένους χρόνους παραγωγής. Αυτή η υπόθεση μας επιτρέπει να μοντελοποιήσουμε τη γραμμή σαν ένα δίκτυο Jackson και να καταλήξουμε σε αναλυτικές εκφράσεις για όλα τα μέτρα απόδοσης του συστήματος που αφορούν το αναμενόμενο κέρδος. Ωστόσο, αυτή η παραδοχή δεν είναι πάντα ρεαλιστική. Ο Inman [33] μελέτησε τους χρόνους παραγωγής μηχανών σε δύο εργοστάσια αυτοκινητοβιομηχανιών και παρατήρησε ότι οι κατανομές Erlang προσεγγίζουν καλύτερα τις εμπειρικές κατανομές των χρόνων παραγωγής. Για να εξετάσουμε την απόδοση της προτεινόμενης μικτής πολιτικής σε πιο ρεαλιστικά συστήματα, μελετήσαμε γραμμές παραγωγής έξι μηχανών, με τις ίδιες βασικές τιμές των παραμέτρων όπως και στην προηγούμενη ενότητα. Αυτήν τη φορά, οι χρόνοι παραγωγής των μηχανών ακολουθούν κατανομή Erlang με διάφορα στάδια, αλλά οι μέσες τιμές των χρόνων κατεργασίας σε κάθε μηχανή M_i είναι ίσοι με $1/\mu_i$, όπως και στην περίπτωση των εκθετικών χρόνων. Οι βέλτιστες παράμετροι ελέγχου s και c για κάθε περίπτωση εντοπίζονται με τη βοήθεια του Αλγορίθμου 3.1, χρησιμοποιώντας όμως την μέθοδο της προσομοίωσης για να υπολογίσουμε το μέσο ρυθμό κέρδους στο βήμα 2, και όχι τις αναλυτικές εκφράσεις που απαρτίζουν την Εξ. (3.3). Παρατηρήστε ότι τόσο η Πρόταση 3.3 όσο και η Πρόταση 3.4 ισχύουν, ανεξάρτητα της κατανομής που έχουμε υποθέσει για τους χρόνους κατεργασίας ή τους χρόνους αφίξεων.

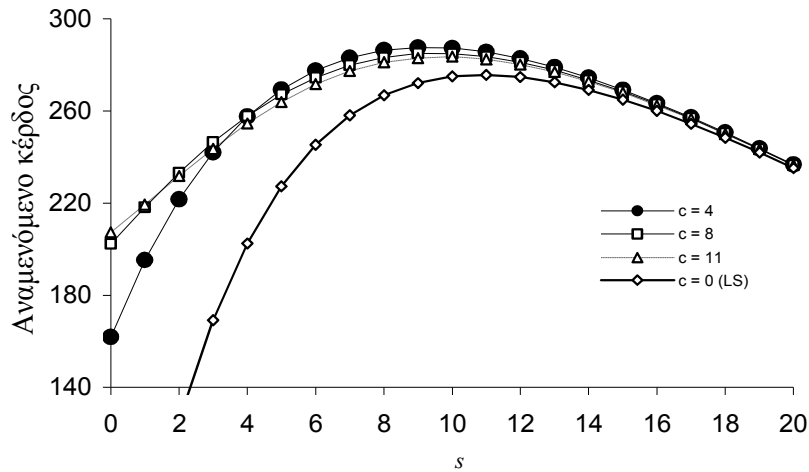
Δοκιμάστηκαν τέσσερις διαφορετικές κατανομές για τους χρόνους παραγωγής: η εκθετική (Erlang-1), η Erlang-2, η Erlang-4 και η ντετερμινιστική (Erlang- ∞). Για να είναι αμερόληπτα τα πειράματα, χρησιμοποιήθηκαν κοινοί τυχαίοι αριθμοί για την προσομοίωση των χρόνων εξυπηρέτησης. Σε όλα τα πειράματα, το σφάλμα εκτίμησης του αναμενόμενου κέρδους ήταν μικρότερο του 0.5% με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Τα πειράματα έγιναν σε προσωπικό υπολογιστή Intel Core 2 Duo 2.33GHz με 2Gb RAM. Ο υπολογιστικός χρόνος της εξαντλητικής αναζήτησης για τον εντοπισμό των βέλτιστων παραμέτρων s και c , κυμάνθηκε από μισή μέχρι και τρεις ώρες ανάλογα με τις παραμέτρους του συστήματος και κυρίως τις διάφορες κατανομές που δοκιμάστηκαν.

Πίνακας 3.4 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικές κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης

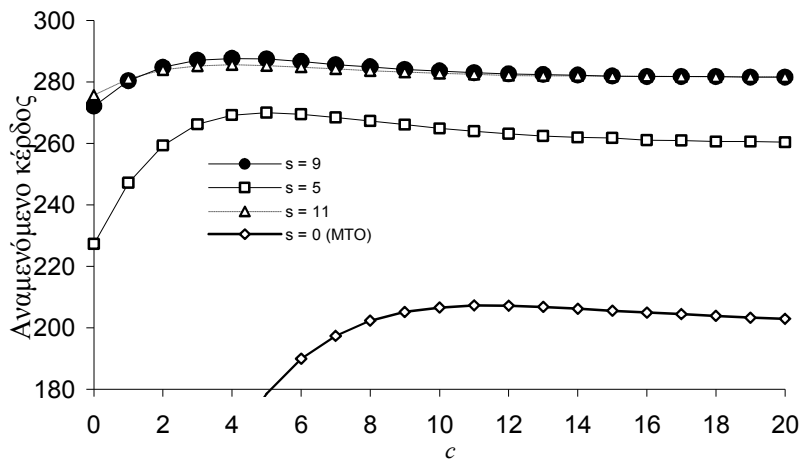
	Κατανομή											
	Εκθετική			Erlang-2			Erlang-4			Ντετερμινιστική		
Πολιτικές	s	c	J	s	c	J	s	c	J	s	c	J
CONIP-BB	11	3	259.26	9	4	287.65	8	5	304.86	7	5	327.47
MTO	0	11	177.06	0	11	207.27	0	12	226.60	0	12	249.75
LS	12	0	249.96	11	0	275.73	10	0	291.62	9	0	313.46

Ο Πίνακας 3.4 δίνει τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για το μέγιστο μέσο ρυθμό κέρδους και τις αντίστοιχες βέλτιστες τιμές των s και c των πολιτικών BSBB, LS και MTO. Η στήλη με τον τίτλο «QLT = 1» του Πίνακα 3.2 και η στήλη «Εκθετική» του Πίνακα 3.4 αντιστοιχούν στα αναλυτικά αποτελέσματα και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για το ίδιο σύστημα. Παρατηρούμε ότι το μοντέλο προσομοίωσης δίνει τις ίδιες βέλτιστες παραμέτρους, εκτός από την περίπτωση της πολιτικής MTO όπου το βέλτιστο c απέχει κατά 1 (ωστόσο η εκτίμηση του μέσου ρυθμού κέρδους $J \approx 177$ των δύο μοντέλων απέχει μόλις 0.002%). Όσο αυξάνουμε τον αριθμό των σταδίων της κατανομής Erlang από ένα (περίπτωση εκθετικών κατανομών) μέχρι το άπειρο (περίπτωση ντετερμινιστικών κατανομών), η διακύμανση των χρόνων παραγωγής μειώνεται στο μηδέν. Από τον Πίνακα 3.4

παρατηρούμε ότι η μείωση της διακύμανσης οδηγεί σε αύξηση του ρυθμού κέρδους, μείωση του βέλτιστου αποθέματος βάσης (για τις πολιτικές BSBB και LS) και αύξηση του επιτρεπόμενου αριθμού εκκρεμών παραγγελιών (για τις πολιτικές BSBB και MTO).



Σχήμα 3.7 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς το απόθεμα βάσης s



Σχήμα 3.8 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς το έλλειμμα βάσης c

Εξετάζουμε επίσης τις ιδιότητες δεύτερης τάξης του αναμενόμενου κέρδους ως προς s και c για την πολιτική BSBB. Για αυτό το πείραμα χρησιμοποιούμε την κατανομή Erlang-2 για τους χρόνους παραγωγής των μηχανών και τις βασικές τιμές για τις υπόλοιπες παραμέτρους του συστήματος. Στα Σχ. 3.7 και 3.8, η συνάρτηση του αναμενόμενου κέρδους φαίνεται, όπως και στην περίπτωση του εκθετικού

μοντέλου, ότι είναι υποαρθρωτή, και μονοκόρυφη (έχει ένα ολικό μέγιστο ως προς s και c). Η απόδειξη αυτών των ιδιοτήτων για μη εκθετικές γραμμές παραγωγής θα μπορούσε να μειώσει δραστικά τον αριθμό των προσομοιώσεων που χρειάζονται για τον εντοπισμό του μέγιστου αναμενόμενου κέρδους. Παρατηρήσαμε από τους Πίνακες 3.4 και 3.2 ότι οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου για το μη εκθετικό μοντέλο, είναι κοντά σε αυτές του εκθετικού. Αυτό σημαίνει πως θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές που δίνει το αναλυτικό μοντέλο των εκθετικών χρόνων παραγωγής (μικρός υπολογιστικός χρόνος) σαν αρχικές τιμές των s και c , και στη συνέχεια να πραγματοποιήσουμε μια τοπική αναζήτηση γύρω από αυτές τις τιμές, με τη χρήση προσομοίωσης, ώστε να καταλήξουμε σε βέλτιστες τιμές ελέγχου για μοντέλα με χρόνους παραγωγής διαφορετικών κατανομών. Κάποιες οδηγίες για το πως μπορεί να γίνει αυτή η τοπική αναζήτηση αποτελεσματικά δίνονται στην Παράγραφο 5.1.

Επιπρόσθετα, ακόμη και αν αρκούμασταν στις τιμές s , c του αναλυτικού μοντέλου, το κέρδος του συστήματος θα είναι σχετικά κοντά στο βέλτιστο. Για παράδειγμα, από τον Πίνακα 3.4, βλέπουμε ότι οι βέλτιστες τιμές ελέγχου για το εκθετικό (αναλυτικό) μοντέλο είναι $s = 11$ και $c = 3$. Αν χρησιμοποιούσαμε τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων ελέγχου σε ένα σύστημα με χρόνους κατεργασίας που ακολουθούν την κατανομή Erlang-2, τότε το αναμενόμενο κέρδος θα ήταν $J(11,3) = 285.26$, τιμή πολύ κοντινή όπως φαίνεται επίσης στον Πίνακα 3.4 στο βέλτιστο αναμενόμενο κέρδος, $J^* = 287.65$, με βέλτιστες παραμέτρους ελέγχου, $s = 9$ και $c = 4$.

3.6 Σύνοψη και συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε μια πολιτική ελέγχου για γραμμές παραγωγής με εκθετικούς χρόνους κατεργασίας και πελάτες που αποθαρρύνονται. Σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, η εταιρία ενημερώνει τους εισερχόμενους πελάτες για πιθανές καθυστερήσεις στην παράδοση των παραγγελιών τους και αναφέρει έναν υποσχόμενο χρόνο παράδοσης QLT σε κάθε πελάτη. Αν αυτός ο χρόνος εκπνεύσει πριν η εταιρία ικανοποιήσει τον πελάτη, αυτός θα ωφελείται από μία σημαντική έκπτωση στην τιμή πώλησης του προϊόντος. Ένας πελάτης θα διστάσει να παραγγείλει προϊόν αν ο υποσχόμενος χρόνος QLT είναι μεγαλύτερος από το μέγιστο

χρόνο αναμονής του πελάτη ο οποίος είναι μια τυχαία μεταβλητή με γνωστή κατανομή.

Προτείνεται μια μικτή πολιτική ελέγχου τύπου κατωφλιού για τη μεγιστοποίηση του μέσου ρυθμού καθαρού κέρδους του συστήματος. Το σύστημα θα δέχεται πελάτες όσο ο αριθμός των εκκρεμών παραγγελιών είναι κάτω από ένα κατώφλι c και παράγει όσο το απόθεμα τελικού προϊόντος είναι κάτω από ένα κατώφλι s . Εξάγουμε αναλυτικές εκφράσεις των μέτρων απόδοσης που απαρτίζουν το μέσο ρυθμό καθαρού κέρδους του συστήματος. Αναπτύσσουμε έναν απλό και αποτελεσματικό αλγόριθμο που χρησιμοποιεί άνω όρια για τις βέλτιστες παραμέτρους s και c και τις εντοπίζει με εξαντλητική αναζήτηση. Τα άνω όρια ισχύουν ανεξαρτήτως κατανομής για τους ρυθμούς κατεργασίας των μηχανών στη γραμμή παραγωγής.

Συγκρίναμε την προτεινόμενη πολιτική, BSBB, με την LS (πολιτική πλήρους απόρριψης πελατών σε περιόδους μηδενικού αποθέματος) και την MTO (πολιτική παραγωγής κατά παραγγελία χωρίς διατήρηση αποθέματος). Γενικά πολιτική BSBB χειρίζεται τις τιμές s και c με βέλτιστο τρόπο και παρουσιάζει καλύτερη προσαρμοστικότητα από την LS ή την MTO στη διακύμανση της ζήτησης και τις αλλαγές των οικονομικών παραμέτρων του συστήματος. Συστήματα με εκθετικούς χρόνους παραγωγής επιδέχονται αναλυτικής επίλυσης σε μικρό υπολογιστικό χρόνο. Συστήματα με αυθαίρετες κατανομές μπορούν να επιλυθούν με μεγάλη ακρίβεια χρησιμοποιώντας την μέθοδο της προσομοίωσης. Σε κάθε περίπτωση, η BSBB αποδίδει καλύτερα από τις LS και MTO.

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα φαίνεται ότι ο μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος είναι μονοκόρυφη και υποαρθρωτή συνάρτηση ως προς τις παραμέτρους ελέγχου. Η μαθηματική επιβεβαίωση αυτών των δύο ιδιοτήτων θα μειώσει σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο για τον εντοπισμό των βέλτιστων παραμέτρων ελέγχου του συστήματος και είναι θέμα μελλοντικής έρευνας. Επιπρόσθετα, είναι σαφές ότι ο υποσχόμενος χρόνος QLT παίζει σημαντικό ρόλο στην συμπεριφορά και την δυναμική του συστήματος. Η προσθήκη του QLT σαν μια εκ των παραμέτρων ελέγχου, αποτελεί πρόκληση και επίσης είναι θέμα μελλοντικής έρευνας. Κάποια πρόσφατα αποτελέσματα για το QLT σαν μεταβλητή ελέγχου σε απλά συστήματα μιας μηχανής και εκθετικούς χρόνους παραγωγής παρουσιάζονται στην εργασία [34].

4 Δίκτυα Παραγωγής με Πελάτες που Αποθαρρύνονται

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές του συνδυασμένου ελέγχου παραγωγής, αποθεμάτων και αφικνούμενων παραγγελιών σε ένα δίκτυο παραγωγής με γενικούς χρόνους κατεργασίας που παράγει ένα προϊόν για να ικανοποιήσει τυχαία ζήτηση και πελάτες που, σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, αποθαρρύνονται.

Σαν παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε ένα σχετικά απλό δίκτυο παραγωγής στο οποίο ο έλεγχος του αποθέματος τελικού προϊόντος θα γίνεται σύμφωνα με την πολιτική αποθέματος βάσης και ο έλεγχος των αφίξεων σύμφωνα με την πολιτική μερικής αποδοχής με έλλειμμα βάσης. Θα συγκρίνουμε την απόδοση του δικτύου εξετάζοντας δύο διαφορετικές πολιτικές αναπλήρωσης των πρώτων υλών. Την πολιτική σταθερού αποθέματος (CONWIP) και την πολιτική σταθερής αποθεματικής θέσης (CONIP).

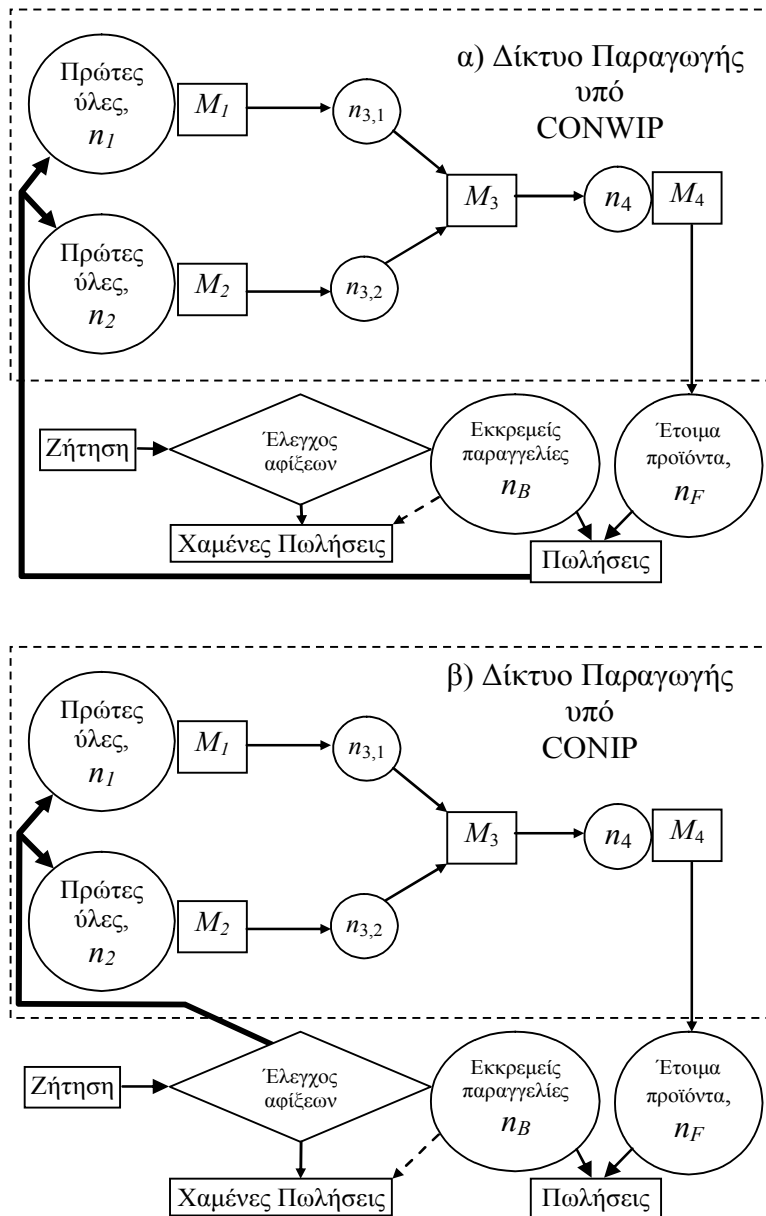
Όπως και στο Κεφάλαιο 3, το δίκτυο παραγωγής, σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, αναγγέλλει ένα χρόνο παράδοσης προϊόντος από την ώρα άφιξης κάθε πελάτη. Κάθε αφικνούμενος πελάτης έχει ένα μέγιστο χρόνο αναμονής από την ώρα της άφιξής του. Πελάτες των οποίων ο μέγιστος χρόνος αναμονής είναι μικρότερος του χρόνου παράδοσης που αναγγέλλει η εταιρία δεν θα κάνουν παραγγελία ενώ σε αντίθετη περίπτωση μπαίνουν στην ουρά αναμονής. Για τους πελάτες των οποίων οι παραγγελίες εκκρεμούν, εξετάζονται δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση οι πελάτες, όπως και στο Κεφάλαιο 3, δεν θα μπορούν να αποσύρουν την παραγγελία τους ακόμη και αν εκπνεύσει το υποσχόμενο χρονικό διάστημα αλλά αν η παραγγελία τους παραδοθεί αργότερα θα επωφελούνται από μια έκπτωση στην τιμή πώλησης. Στην δεύτερη περίπτωση οι πελάτες αποσύρουν τις παραγγελίες μετά το πέρας του μέγιστου χρόνου αναμονής τους και εφόσον αυτές εξακολουθούν να εκκρεμούν. Στην περίπτωση αυτή το δίκτυο ζημιώνεται με ένα κόστος δυσφήμισης. Επιπρόσθετα, στο σενάριο όπου έχουμε απόσυρση παραγγελιών εξετάζουμε δύο διαφορετικά πρωτοκόλλα εξυπηρέτησης, το FCFS, δηλαδή με σειρά προτεραιότητας ανάλογη του χρόνου που έγινε η παραγγελία και το EDD (earliest due date) δηλαδή με προτεραιότητα στους πελάτες των οποίων ο μέγιστος χρόνος αναμονής εκπνέει πιο

γρήγορα. Επειδή δεν είναι δυνατή η εξαγωγή αναλυτικών εκφράσεων για τα μέτρα απόδοσης ενός τέτοιου συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε προσομοίωση.

Η δομή του κεφαλαίου έχει ως εξής. Στην Παράγραφο 4.2 γίνεται μια περιγραφή του δικτύου παραγωγής, των διαφορετικών πολιτικών αναπλήρωσης πρώτων υλών, καθώς και η έκφραση του μέσου ρυθμού κέρδους του συστήματος για τις διαφορετικές περιπτώσεις αποθάρρυνσης των πελατών (με ή χωρίς εγκατάλειψη). Στην Παράγραφο 4.3 ευρίσκονται απλά όρια για το βέλτιστο απόθεμα βάσης και το βέλτιστο έλλειμμα βάσης και παρουσιάζεται ένας απλός αλγόριθμος εντοπισμού των τιμών αυτών με την βοήθεια της προσομοίωσης. Στην Παράγραφο 4.4 παρουσιάζονται αριθμητικά παραδείγματα και γίνεται μια σύγκριση των πολιτικών μεταξύ τους αλλά και με άλλες διαδεδομένες πολιτικές. Στην Παράγραφο 4.5 παραθέτονται κάποια χρήσιμα συμπεράσματα.

4.2 Περιγραφή του δικτύου παραγωγής

Εξετάζουμε ένα σύστημα παραγωγής σαν αυτό του Σχ. 5.1 με τέσσερις μηχανές που παράγει ένα προϊόν. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι τυχαίοι με μέσο ρυθμό λ και κάθε πελάτης ζητάει μια μονάδα προϊόντος. Η παραγωγική μονάδα αποτελείται από τέσσερις μηχανές και οι χρόνοι κατεργασίας τους είναι επίσης τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές $1/\mu_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Τα παραγόμενα κομμάτια αποθηκεύονται σε μια αποθήκη έτοιμων προϊόντων. Η μηχανή 3 είναι μια μηχανή συναρμολόγησης, έχει δύο αποθήκες τροφοδοσίας και για να αρχίσει κατεργασία για την κατασκευή ενός προϊόντος χρειάζεται ένα κομμάτι (εξάρτημα) από κάθε αποθήκη. Ο έλεγχος του αποθέματος τελικού προϊόντος γίνεται σύμφωνα με την πολιτική αποθέματος βάσης με το απόθεμα βάσης να συμβολίζεται s . Για τον έλεγχο των αφικνούμενων παραγγελιών σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, το σύστημα υιοθετεί την πολιτική μερικής ικανοποίησης της ζήτησης με έλλειμμα βάσης που συμβολίζεται c .



Σχήμα 4.1: Σύστημα παραγωγής, έλεγχος παραγγελιών και τροφοδοσία πρώτων υλών

Θα εξετάσουμε δύο διαφορετικές πολιτικές τροφοδοσίας των πρώτων υλών στην παραγωγική μονάδα. Έστω n_F αριθμός έτοιμων προϊόντων, n_B ο αριθμός εκκρεμών παραγγελιών.

Πολιτική Σταθερού Αποθέματος (CONWIP): Οι αποθήκες πρώτων υλών n_1 και n_2 θα τροφοδοτούνται με τις απαραίτητες πρώτες ύλες για την κατασκευή ενός τελικού προϊόντος κάθε φορά που γίνεται μια πώληση (Σχ. 4.1α). Σύμφωνα με αυτήν την πολιτική, ανά πάσα στιγμή το σύνολο των πρώτων υλών και των κομματιών υπό κατεργασία στην παραγωγική μονάδα του δικτύου θα είναι αρκετά για να κατασκευαστούν ακριβώς $s - n_F$ προϊόντα, $0 \leq n_F \leq s$

Πολιτική Σταθερής Αποθεματικής Θέσης (CONIP): Οι αποθήκες πρώτων υλών n_1 και n_2 θα τροφοδοτούνται με τις απαραίτητες πρώτες ύλες για την κατασκευή ενός τελικού προϊόντος κάθε φορά που γίνεται δεκτή μία νέα παραγγελία (Σχ. 4.1β). Έστω ότι το σύστημα κάποια χρονική στιγμή έχει έτοιμα προϊόντα, $0 < n_F \leq s$, τότε το σύνολο των πρώτων υλών και των κομματιών υπό κατεργασία στην παραγωγική μονάδα του δικτύου θα είναι αρκετό για να κατασκευαστούν ακριβώς $s - n_F$ προϊόντα. Έστω τώρα ότι το σύστημα είναι σε περίοδο μηδενικού αποθέματος, $n_F = 0$ και υπάρχουν παραγγελίες σε εκκρεμότητα, $n_B > 0$, τότε το σύνολο των πρώτων υλών και των κομματιών υπό κατεργασία στην παραγωγική μονάδα του δικτύου θα είναι αρκετό για να κατασκευαστούν ακριβώς $s + n_B$ προϊόντα. Γενικά, ανά πάσα στιγμή το σύνολο των πρώτων υλών και των κομματιών υπό κατεργασία στην παραγωγική μονάδα του δικτύου θα είναι αρκετό για να κατασκευαστούν ακριβώς $s - n_F + n_B$ προϊόντα.

Σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, οι παραγγελίες δεν μπορούν να εκπληρωθούν αμέσως και οι πελάτες εμφανίζονται λιγότερο πρόθυμοι να θέσουν παραγγελίες. Όπως και στο Κεφάλαιο 3, η εταιρία αναγγέλλει ένα σταθερό υποσχόμενο χρονικό διάστημα QLT από τη στιγμή που τίθεται κάθε παραγγελία. Υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης έχει έναν μέγιστο χρονικό διάστημα αναμονής από την στιγμή της άφιξης του μέχρι τελικά να εκπληρωθεί η παραγγελία του. Αν το διάστημα QLT που προσφέρει η εταιρία είναι μεγαλύτερο από το μέγιστο χρονικό διάστημα αναμονής του πελάτη, τότε αυτός δεν θα παραγγείλει προϊόν. Σε αντίθετη περίπτωση, ο πελάτης θέτει την παραγγελία του.

Έστω q η πιθανότητα ώστε ένας πελάτης να θέσει μια παραγγελία σε περιόδους μηδενικού αποθέματος και Θ ο μέγιστος χρόνος αναμονής των πελατών, που είναι μία τυχαία με γνωστή συνάρτηση κατανομής $G(t) = P(\Theta \leq t)$ και μέση τιμή θ . Δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο όπως και στο Κεφάλαιο 3, παίρνουμε την πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης που δεν θα βρει έτοιμο προϊόν, να τοποθετήσει μια παραγγελία:

$$q = P(\text{QLT} \leq \Theta) = 1 - P(\Theta \leq \text{QLT}) \\ = 1 - G(\text{QLT}).$$

Θα μελετήσουμε την απόδοση του δικτύου με δύο διαφορετικά σενάρια αποθάρρυνσης. Στην πρώτη περίπτωση θα εργαστούμε όπως στο Κεφάλαιο 3.

Υποθέτουμε πως από τη στιγμή που ένας πελάτης θέτει μια παραγγελιά, δεν μπορεί να την ακυρώσει αλλά θα επωφελείται από μια σημαντική έκπτωση στην τιμή πώλησης αν τελικά εξυπηρετηθεί μετά το QLT. Στη δεύτερη περίπτωση, αν ο πελάτης δεν εξυπηρετηθεί μέσα στο χρόνο Θ από την ώρα της άφιξής του τότε θα εγκαταλείψει την ουρά αναμονής και η παραγγελία θα αποσυρθεί.

Η λειτουργία του συστήματος παραγωγής συνδέεται με τα παρακάτω οικονομικά μεγέθη:

- p το κέρδος από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος
- h το μοναδιαίο κόστος αποθέματος, που είναι το κόστος διατήρησης αποθέματος μιας μονάδας τελικού προϊόντος ή κομματιών υπό κατεργασία ή πρώτων υλών για την κατασκευή ενός προϊόντος, για μια χρονική μονάδα.
- b το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών, που είναι το κόστος καθυστέρησης ικανοποίησης μιας εκκρεμούσας παραγγελίας στη μονάδα του χρόνου
- d το σταθερό κόστος καθυστέρησης μίας παραγγελίας που εκκρεμεί για διάστημα μεγαλύτερο του QLT (ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου δεν επιτρέπεται η απόσυρση παραγγελιών)
- p_r το κόστος από την απόσυρση μίας εκκρεμούσας παραγγελίας λόγω καθυστέρησης (ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου υπάρχει απόσυρση παραγγελιών)

Το πρόβλημα είναι να καθορίσουμε τις βέλτιστες τιμές του s και του c ώστε να μεγιστοποιήσουμε το μέσο ρυθμό κέρδους του συστήματος. Στην περίπτωση όπου δεν επιτρέπονται οι ακυρώσεις παραγγελιών αυτό θα δίνεται ως

$$J(s, c) = pTH - hH - bB - dD \quad (4.1\alpha)$$

όπου TH ορίζεται ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος, H το μέσο απόθεμα όλων των κομματιών στο σύστημα (τελικό προϊόν, κομμάτια υπό κατεργασία ή πρώτες ύλες), B το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών και D ο μέσος ρυθμός με τον οποίο παραγγελίες καθυστερούν πάνω από διάστημα QLT για να εκπληρωθούν.

Στην περίπτωση όπου οι πελάτες μπορούν να εγκαταλείψουν την ουρά αναμονής ακυρώνοντας παραγγελίες, ο ρυθμός κέρδους του συστήματος θα δίνεται ως

$$J(s, c) = pTH - hH - bB - p_r RR \quad (4.1\beta)$$

όπου RR ο ρυθμός ακύρωσης παραγγελιών λόγω υπερβολικής καθυστέρησης.

4.3 Βελτιστοποίηση

Αν και δεν έχουμε εξάγει αναλυτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις κέρδους των Εξ. (4.1β), παραθέτουμε απλά όρια για τις βέλτιστες τιμές s , c για κάθε μία από τις περιπτώσεις που περιγράφονται στην προηγούμενη παράγραφο. Στην συνέχεια με έναν απλό αλγόριθμο εξαντλητικής αναζήτησης και τη βοήθεια της προσομοίωσης, μπορούμε να εντοπίσουμε τις βέλτιστες παραμέτρους σε κάθε περίπτωση. Οι παρακάτω προτάσεις εξασφαλίζουν αυτά τα όρια.

Πρόταση 4.1: Για οποιαδήποτε πολιτική τροφοδοσίας πρώτων υλών και ανεξαρτήτως μορφής αποθάρρυνσης, το βέλτιστο απόθεμα βάσης s_{opt} , έχει το ακόλουθο άνω φράγμα,

$$s_{\text{opt}} < \frac{p\lambda}{h}. \quad (4.2)$$

Απόδειξη

Υποθέστε ότι παράγεται ένα προϊόν όταν ήδη υπάρχουν άλλα $s - 1$ προς πώληση. Το κομμάτι θα παραμείνει στην αποθήκη έτοιμων προϊόντων ένα μέσο χρόνο s/λ μέχρι να πουληθεί. Το μέσο κέρδος από την πώληση αυτού του προϊόντος θα είναι $p - hs/\lambda$. Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει αυτή η ποσότητα να είναι θετική αλλιώς το s δεν μπορεί να είναι βέλτιστο. ΟΕΔ

Πρόταση 4.2: Για οποιαδήποτε πολιτική τροφοδοσίας πρώτων υλών και στην περίπτωση που δεν επιτρέπεται η ακύρωση παραγγελιών (το σύστημα θα έχει την συνάρτηση κέρδους της Εξ. (4.1α)), το βέλτιστο έλλειμμα βάσης c_{opt} , έχει το ακόλουθο άνω φράγμα,

$$c_{\text{opt}} < \frac{p\mu_4}{h + b}. \quad (4.3)$$

Απόδειξη

Η απόδειξη της Πρότασης 4.2 είναι αντίστοιχη αυτής της Πρότασης 3.4 του Κεφαλαίου 3 με τελευταία μηχανή τη M_4 . ΟΕΔ

Πρόταση 4.3: Για οποιαδήποτε πολιτική τροφοδοσίας πρώτων υλών, στην περίπτωση που υπάρχει ακύρωση παραγγελιών (το σύστημα θα έχει τη συνάρτηση κέρδους της Εξ. (4.1β)) και οι χρόνοι κατεργασίας της πιο γρήγορης μηχανής του δικτύου ακολουθούν εκθετική κατανομή, το βέλτιστο έλλειμμα βάσης c_{opt} , έχει το ακόλουθο άνω φράγμα,

$$c_{opt} < \mu_r \theta (1 + p/p_r). \quad (4.4)$$

όπου μ_r ο ρυθμός κατεργασίας της πιο γρήγορης μηχανής του δικτύου.

Απόδειξη

Θεωρούμε δυο διαφορετικά συστήματα, το δίκτυο του Σχ. 5.1 και ένα απλό σύστημα μίας μηχανής, της πιο γρήγορης του δικτύου. Υποθέτουμε ότι και στα δύο συστήματα εκκρεμούν $c - 1$ παραγγελίες και έρχεται μία ακόμα. Η μέση μεταβολή του ρυθμού κέρδους του δικτύου αν αυτή η παραγγελία γίνει δεκτή θα είναι:

$$E(\Delta J_{\text{δικτύου}}) = [p - bE(\text{χρόνος παραμονής της παραγγελίας})]P(\text{να μην αποσυρθεί}) - p_r[1 - P(\text{να μην αποσυρθεί})].$$

όπου E ο τελεστής μέσης τιμής.

Αντίστοιχα για το απλό εκθετικό σύστημα θα έχουμε:

$$E(\Delta J_{\text{απλού}}) = [p - bE(\text{χρόνος παραμονής της παραγγελίας})]P(\text{να μην αποσυρθεί}) - p_r[1 - P(\text{να μην αποσυρθεί})].$$

Συγκρίνοντας τις δύο παραπάνω εκφράσεις παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να μην αποσυρθεί μια παραγγελία είναι μεγαλύτερη όταν έχουμε το απλό σύστημα μιας μηχανής καθώς ο συνολικός χρόνος παραγωγής ενός προϊόντος είναι μικρότερος. Επίσης, ο μέσος χρόνος παραμονής της παραγγελίας δοθέντος ότι δεν θα αποσυρθεί, είναι μεγαλύτερος στην περίπτωση του δικτύου. Από τις παρατηρήσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι $E(\Delta J_{\text{δικτύου}}) \leq E(\Delta J_{\text{απλού}})$. Μια συνθήκη για να δεχτεί την παραγγελία το δίκτυο θα ήταν $E(\Delta J_{\text{δικτύου}}) > 0$. Αν συμφέρει να δεχτεί την παραγγελία το «αργό» δίκτυο, τότε συμφέρει να τη δεχτεί και το «πιο γρήγορο» απλό σύστημα παραγωγής με την εκθετική μηχανή. Το φράγμα της Εξ. (4.4) αντιστοιχεί στο φράγμα για το βέλτιστο έλλειμμα βάσης ενός απλού δικτύου μίας μηχανής με εκθετικούς χρόνους κατεργασίας και μέσο $1/\mu_r$. (Κεφάλαιο 2, Θεώρημα 2.3). ΟΕΔ

Με τη χρήση των παραπάνω προτάσεων, παρουσιάζουμε αλγόριθμο βελτιστοποίησης ο οποίος κάνει εξαντλητική αναζήτηση για όλες τις τιμές των s και c που είναι μικρότερες από τα παραπάνω φράγματα εξασφαλίζοντας την εύρεση των βέλτιστων τιμών s_{opt} και c_{opt} και τον υπολογισμό του μέγιστου μέσου ρυθμού κέρδους του συστήματος με τη μέθοδο της προσομοίωσης διακριτών συστημάτων, σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης 4.1

Βήμα 1. Θέσε $J(0, 0) = 0$, $J_{\text{opt}} = 0$, $s_{\text{opt}} = 0$, και $c_{\text{opt}} = 0$. Δώσε αρχικές τιμές παραμέτρων: $s = 1$, $c = 0$.

Βήμα 2. Υπολόγισε τον ρυθμό κέρδους $J(s, c)$ ανάλογα με το αν επιτρέπεται ή όχι η απόσυρση παραγγελιών (Εξ (4.1α) ή (4.1β)). Αν $J(s, c) > J_{\text{opt}}$, τότε θέσε $J^* = J(s, c)$, $s_{\text{opt}} = s$, και $c_{\text{opt}} = c$.

Βήμα 3. Εφαρμογή Πρότασης 4.1: Αν $(s + 1) < p\lambda/h$, τότε θέσε $s = s + 1$ και πήγαινε στο βήμα 2; αλλιώς στο βήμα 4.

Βήμα 4. Αν δεν επιτρέπεται η απόσυρση παραγγελιών τότε Εφαρμογή Πρότασης 4.2: Αν $(c + 1) < p\mu_1/(h + b)$, τότε θέσε $c = c + 1$, $s = 0$ και πήγαινε στο βήμα 2; αλλιώς τέλος.

;αλλιώς Εφαρμογή Πρότασης 4.3:

Αν $(c + 1) < \mu_1\theta(1 + p/p_r)$, τότε θέσε $c = c + 1$, $s = 0$ και πήγαινε στο βήμα 2; αλλιώς τέλος.

4.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτήν την παράγραφο με την βοήθεια του Αλγορίθμου 4.1 θα παρουσιάσουμε αριθμητικά αποτελέσματα για το παραπάνω δίκτυο συγκρίνοντας πέντε διαφορετικές πολιτικές:

CONWIP-BB Πολιτική συνδυασμένου ελέγχου αποθέματος βάσης με σταθερό επίπεδο αποθέματος s , και μερική ικανοποίησης της ζήτησης με έλλειμμα βάσης c .

- CONIP-BB Πολιτική συνδυασμένου ελέγχου σταθερής αποθεματικής θέσης με αποθέματος βάσης s , και μερική ικανοποίηση της ζήτησης με έλλειμμα βάσης c .
- CONWIP-MTO Πολιτική παραγωγής κατά παραγγελία με σταθερό απόθεμα ίσο με 0. Μόνο όταν εκκρεμούν παραγγελίες το σύστημα έχει συνολικό απόθεμα 1.
- CONIP-MTO Πολιτική παραγωγής κατά παραγγελία με σταθερή αποθεματική θέση ίση με 0. Όταν εκκρεμούν παραγγελίας το συνολικό απόθεμα του συστήματος είναι ίσο με τον αριθμό εκκρεμών παραγγελιών.
- LS Πολιτική πλήρους απόρριψης παραγγελιών, σε αυτήν την περίπτωση οι πολιτικές CONWIP και CONIP για την αναπλήρωση των πρώτων υλών συμπίπτουν.

Θα δοκιμάσουμε την απόδοση των πέντε πολιτικών και για τις δύο περιπτώσεις αποθάρρυνσης που περιγράφηκαν στην Παράγραφο 4.1. Σε όλα τα πειράματα οι χρόνοι αφίξεων ακολουθούν διαδικασία Poisson. Για τους χρόνους παραγωγής των μηχανών δοκιμάστηκαν η εκθετική κατανομή και η Erlang-2. Για την περίπτωση που έχουμε εγκατάλειψη και καμία μηχανή του δικτύου δεν παράγει με εκθετικούς χρόνους δεν έχουν βρεθεί κατάλληλα όρια για το βέλτιστο έλλειμμα βάσης c , ωστόσο, έστω και αυθαίρετα, θα χρησιμοποιήσουμε το όριο της Πρότασης 4.3 για να πάρουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα. Οι βασικές τιμές των παραμέτρων του συστήματος είναι: ρυθμός ζήτησης $\lambda = 4.0$, μέσοι ρυθμοί παραγωγής $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = 7$, $\mu_3 = 5$, $\mu_4 = 5.5$, κέρδος πώλησης $p = 100.0$, μοναδιαίο κόστος αποθέματος $h = 8.0$, μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών $b = 8.0$, σταθερό κόστος καθυστέρησης $d = 10.0$, και υποσχόμενος χρόνος παράδοσης $QLT = 1.0$. Ο μέγιστος χρόνος αναμονής Θ των πελατών είναι μια τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη συνάρτηση κατανομής στο $[0, 10]$, άρα, $G(t) = t/10$. Όλα τα πειράματα έγιναν με τη βοήθεια της προσομοίωσης σε έναν υπολογιστή Intel Core 2 Duo 2.33GHz με 2Gb RAM. Οι χρόνοι βελτιστοποίησης των s , c για ένα συγκεκριμένο σενάριο παραμέτρων διέφερε από μία μέχρι τέσσερις ώρες ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων και την κατανομή των χρόνων κατεργασίας. Σε κάθε περίπτωση τα σφάλματα ήταν μικρότερα του 2% με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

4.4.1 Σύστημα παραγωγής χωρίς εγκατάλειψη

Εξετάζουμε τον τρόπο που επηρεάζουν διάφορες τιμές των λ και QLT το ρυθμό κέρδους του συστήματος. Σε κάθε πείραμα αλλάζουμε την τιμή μιας εκ των παραμέτρων, διατηρώντας την άλλη σταθερή, και υπολογίζουμε τις βέλτιστες παραμέτρους ελέγχου των πολιτικών υπό εξέταση. Οι Πίνακες 4.1 και 4.2 παρουσιάζουν το μέσο ρυθμό κέρδους του συστήματος και τις βέλτιστες παραμέτρους ελέγχου s και c για διάφορες τιμές των λ και QLT όταν οι χρόνοι παραγωγής των μηχανών ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Οι Πίνακες 4.3 και 4.4 παρουσιάζουν παρόμοια αποτελέσματα όταν οι χρόνοι παραγωγής των μηχανών ακολουθούν την Erlang-2 κατανομή.

Πίνακας 4.1 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος παραγωγής με εκθετικές μηχανές και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικούς ρυθμούς λ

	Ρυθμός ζήτησης											
	$\lambda = 3$			$\lambda = 4$			$\lambda = 4.95$			$\lambda = 6.95$		
Πολιτικές	s	c	J	s	c	J	s	c	J	s	c	J
CONWIP-BB	5	9	242.36	8	5	301.33	10	3	333.43	10	1	353.94
CONIP-BB	5	10	241.19	8	5	298.21	10	2	330.18	11	1	352.29
CONWIP-MTO	0	3	118.20	0	2	124.53	0	2	127.51	0	2	129.75
CONIP-MTO	0	13	204.91	0	10	239.16	0	8	253.14	0	7	263.51
LS	7	0	225.19	9	0	285.47	11	0	323.10	11	0	350.64

Πίνακας 4.2 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος παραγωγής με εκθετικές μηχανές και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικές τιμές QLT

	Υποσχόμενος χρόνος παράδοσης											
	QLT = 0			QLT = 1			QLT = 2			QLT = 5		
Πολιτικές	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>
CONWIP-BB	9	4	292.16	8	5	301.34	8	8	300.15	9	6	291.60
CONIP-BB	8	3	289.43	8	5	298.21	8	6	297.35	9	4	290.72
CONWIP-MTO	0	2	117.93	0	2	124.53	0	3	128.59	0	4	122.62
CONIP-MTO	0	10	238.33	0	10	239.16	0	11	242.10	0	13	169.85
LS	9	0	285.47	9	0	285.47	9	0	285.47	9	0	285.47

Πίνακας 4.3 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος παραγωγής με Erlang-2 μηχανές και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικούς ρυθμούς λ

	Ρυθμός ζήτησης											
	$\lambda = 3$			$\lambda = 4$			$\lambda = 4.95$			$\lambda = 6.95$		
Πολιτικές	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>
CONWIP-BB	4	11	252.68	6	6	321.99	8	4	363.96	9	2	389.80
CONIP-BB	4	12	251.33	6	5	318.74	8	3	359.78	9	1	388.01
CONWIP-MTO	0	2	123.53	0	2	130.69	0	2	133.67	0	2	135.51
CONIP-MTO	0	13	218.97	0	10	264.55	0	8	286.73	0	6	303.80
LS	6	0	235.91	8	0	304.77	10	0	351.17	10	0	385.50

Πίνακας 4.4 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος παραγωγής με Erlang-2 μηχανές και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικές τιμές QLT

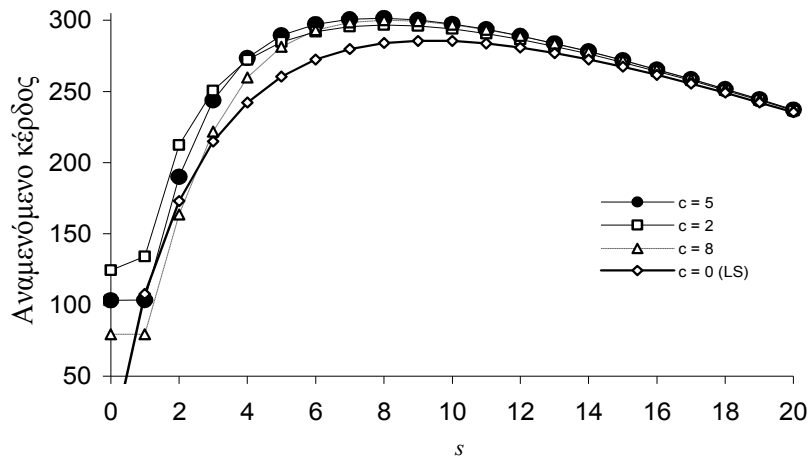
	Υποσχόμενος χρόνος παράδοσης											
	QLT = 0			QLT = 1			QLT = 2			QLT = 5		
Πολιτικές	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>
CONWIP-BB	7	5	313.80	6	6	321.99	7	10	318.64	8	7	309.66
CONIP-BB	7	4	310.27	6	5	318.74	7	7	316.12	8	4	309.18
CONWIP-MTO	0	2	123.51	0	2	130.69	0	3	135.60	0	4	128.11
CONIP-MTO	0	10	264.08	0	10	264.55	0	10	261.35	0	12	174.34
LS	8	0	304.77	8	0	304.77	8	0	304.77	8	0	304.77

Από τους Πίνακα 4.1 και 4.3 παρατηρούμε πως όταν το λ είναι μεγαλύτερο από τον ρυθμό παραγωγής της πιο αργής μηχανής, $\min \mu_i = 5$, η πολιτική LS και οι μικτές πολιτικές CONWIP-BB και CONIP-BB παρουσιάζουν παρόμοια αποτελέσματα. Αυτό συμβαίνει διότι οι μικτές πολιτικές εμφανίζουν την τάση να απορρίπτουν πελάτες σε περιόδους μηδενικού αποθέματος και να διατηρούν υψηλό απόθεμα έτοιμων προϊόντων όταν ο ρυθμός αφίξεων των πελατών είναι υψηλός. Ωστόσο, όσο μειώνεται ο ρυθμός ζήτησης, οι περίοδοι μηδενικού αποθέματος είναι σπάνιες και πλέον το σύστημα δεν χρειάζεται να διατηρεί μεγάλο αριθμό έτοιμων προϊόντων. Μια επίσης παρατήρηση είναι ότι εν γένει η πολιτική CONWIP-BB αποδίδει καλύτερα όλων, και της CONIP-BB έστω και ελάχιστα. Αντίθετα, οι πολιτικές MTO φαίνεται να λειτουργούν καλύτερα με τη μέθοδο αναπλήρωσης CONIP καθώς διατηρούν από τη μία μεγαλύτερο απόθεμα, αλλά οι χρόνοι απόκρισης στις εκκρεμείς παραγγελίες είναι κατά πολύ μικρότεροι, ήτοι μικρό κόστος εκκρεμών παραγγελιών και καθυστερήσεων πέραν του QLT. Σε κάθε περίπτωση, οι πολιτικές MTO υστερούν των υπολοίπων.

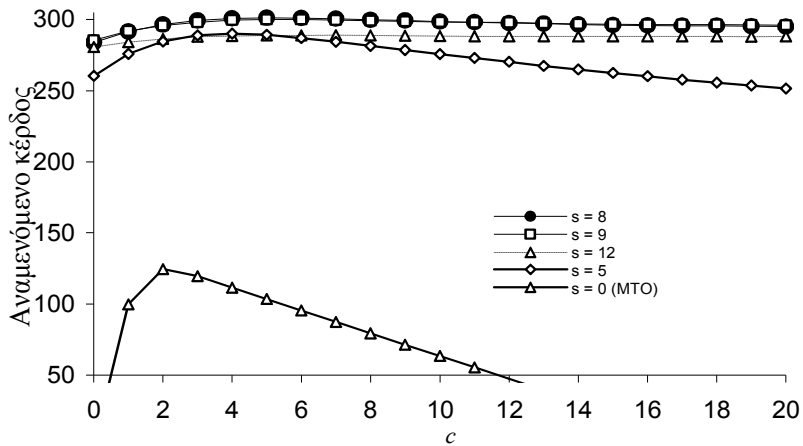
Από τους Πίνακες 4.2 και 4.4 παρατηρούμε ότι οι μικτές πολιτικές αποδίδουν πάντα καλύτερα για όλες τις τιμές QLT που δοκιμάσαμε. Όταν η τιμή QLT είναι μηδέν, όλοι οι πελάτες που έρχονται στο σύστημα, θα θέσουν μια παραγγελία με

πιθανότητα ένα. Σε αυτήν την περίπτωση, οι μικτές πολιτικές λειτουργούν με τέτοιο τρόπο ώστε να προστατευτεί το σύστημα από το υψηλό κόστος ποινών καθυστέρησης καθώς όλες οι παραγγελίες θα καθυστερήσουν, διατηρώντας μικρό αριθμό εκκρεμών παραγγελιών. Όσο ο χρόνος QLT αυξάνει, οι πελάτες γίνονται πιο διστακτικοί και ο ρυθμός αφίξεων σε περιόδους μηδενικού αποθέματος μειώνεται. Σε μια τέτοια περίπτωση, ένας λιγότερο αυστηρός έλεγχος των αφίξεων είναι πιο συμφέρων αλλά και η διατήρηση υψηλότερων αποθεμάτων για να μην έχουνε συχνά περιόδους μηδενικού αποθέματος. Τέλος, όπως και στο προηγούμενα κεφάλαια, έτσι και εδώ παρατηρούμε ότι όταν μειώνεται η διασπορά στους χρόνους κατεργασίας των μηχανών, αυξάνεται το κέρδος του συστήματος και οι μικτές πολιτικές ούσες πιο σίγουρες, εν γένει επιτρέπουν περισσότερες ανικανοποίητες παραγγελίες.

Ένα άλλο στοιχείο που εξετάζουμε, είναι οι ιδιότητες δεύτερης τάξης του ρυθμού κέρδους ως προς s και c για τις μικτές πολιτικές. Στα Σχ. 4.2 και 4.3, παρουσιάζεται ο μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος ως προς s και c αντίστοιχα για την πολιτική CONWIP-BB ενώ στα Σχ. 4.4 και 4.5 για την πολιτική CONIP-BB.

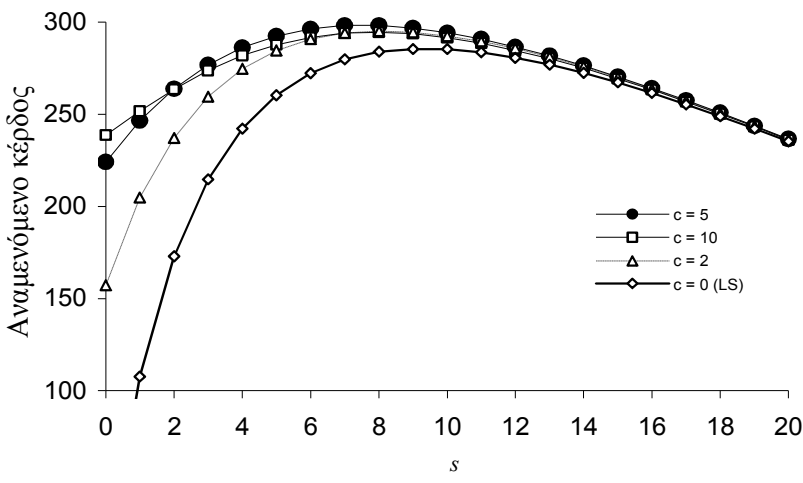


Σχήμα 4.2 . Αναμενόμενο κέρδος του συστήματος παραγωγής με εκθετικές μηχανές ως προς το απόθεμα βάσης s (πολιτική CONWIP-BB)

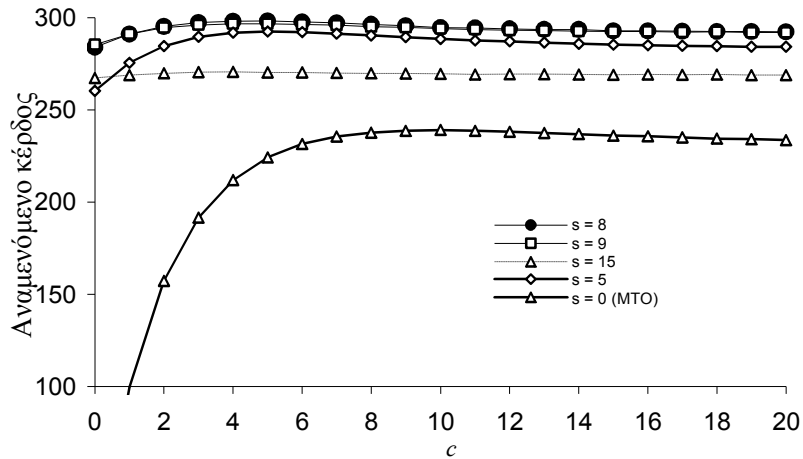


Σχήμα 4.3 . Αναμενόμενο κέρδος του συστήματος παραγωγής με εκθετικές μηχανές ως προς το έλλειμμα βάσης c (πολιτική CONWIP-BB)

Παρατηρούμε σε όλα τα γραφήματα ότι η $J(s, c)$ παρουσιάζεται ως μονοκόρυφη (unimodal) συνάρτηση των παραμέτρων ελέγχου. Φαίνεται δηλαδή να έχει ένα μέγιστο σημείο για κάθε παράμετρο s και c όταν η τιμή της άλλης μένει σταθερή.



Σχήμα 4.4 . Αναμενόμενο κέρδος του συστήματος παραγωγής με εκθετικές μηχανές ως προς το απόθεμα βάσης s (πολιτική CONIP-BB)



Σχήμα 4.5 . Αναμενόμενο κέρδος του συστήματος παραγωγής με εκθετικές μηχανές ως προς το έλλειμμα βάσης c (πολιτική CONIP-BB)

Τα Σχ. 4.2 έως 4.4 εμφανίζουν αποτελέσματα για εκθετικά κατανομημένους χρόνους παραγωγής, τα πειράματα που έγιναν δείχνουν παρόμοια αποτελέσματα και για κατανομές τύπου Erlang.

4.4.2 Σύστημα παραγωγής με εγκατάλειψη

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, εξετάζουμε τον τρόπο που επηρεάζουν διάφορες τιμές των λ και QLT τον καθαρό ρυθμό κέρδους του συστήματος. Επίσης μελετάμε τον τρόπο που επηρεάζεται ο ρυθμός κέρδους του συστήματος για δύο διαφορετικά πρωτόκολλα εξυπηρέτησης της ανικανοποίητης ζήτησης, το FCFS και το EDD. Οι Πίνακες 4.5 και 4.6 παρουσιάζουν το μέσο ρυθμό κέρδους του συστήματος και τις βέλτιστες παραμέτρους ελέγχου s και c για διάφορες τιμές των λ και QLT όταν οι χρόνοι παραγωγής των μηχανών ακολουθούν την εκθετική κατανομή, ενώ οι πίνακες 4.7 και 4.8 αναφέρονται σε παρόμοια αποτελέσματα με χρόνους παραγωγής Erlang-2. Σε όλους αυτούς τους πίνακες το πρωτόκολλα εξυπηρέτησης ήταν το FCFS.

Πίνακας 4.5 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος παραγωγής με εκθετικές μηχανές και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικούς ρυθμούς λ

	Ρυθμός ζήτησης											
	$\lambda = 3$			$\lambda = 4$			$\lambda = 4.95$			$\lambda = 6.95$		
Πολιτικές	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>
CONWIP-BB	5	17	244.19	8	9	304.41	10	4	335.50	10	1	354.02
CONIP-BB	4	15	242.65	7	7	300.70	9	3	331.33	10	1	352.50
CONWIP-MTO	0	3	129.35	0	3	133.20	0	2	134.86	0	2	138.29
CONIP-MTO	0	14	214.85	0	13	258.70	0	10	280.15	0	8	295.26
LS	7	0	225.19	9	0	285.47	11	0	323.10	11	0	350.64

Πίνακας 4.6 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος παραγωγής με εκθετικές μηχανές και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικές τιμές QLT

	Υποσχόμενος χρόνος παράδοσης											
	QLT = 0			QLT = 1			QLT = 2			QLT = 5		
Πολιτικές	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>
CONWIP-BB	8	8	306.89	8	9	304.41	8	9	300.56	9	6	291.60
CONIP-BB	7	6	301.91	7	7	300.70	8	7	297.58	9	4	290.72
CONWIP-MTO	0	3	133.81	0	3	133.20	0	3	131.77	0	4	122.65
CONIP-MTO	0	12	259.17	0	13	258.70	0	14	246.71	0	13	169.87
LS	9	0	285.47	9	0	285.47	9	0	285.47	9	0	285.47

Πίνακας 4.7 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος παραγωγής με Erlang-2 μηχανές και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικούς ρυθμούς λ

	Ρυθμός ζήτησης											
	$\lambda = 3$			$\lambda = 4$			$\lambda = 4.95$			$\lambda = 6.95$		
Πολιτικές	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>
CONWIP-BB	4	15	253.69	6	20	324.58	8	5	365.82	9	2	390.04
CONIP-BB	4	13	252.02	6	7	320.20	8	3	360.10	9	1	388.03
CONWIP-MTO	0	3	134.94	0	3	138.78	0	2	141.02	0	2	144.17
CONIP-MTO	0	14	226.51	0	12	281.17	0	10	311.77	0	8	335.26
LS	6	0	235.91	8	0	304.77	10	0	351.17	10	0	385.50

Πίνακας 4.8 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος παραγωγής με Erlang-2 μηχανές και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικές τιμές QLT

	Υποσχόμενος χρόνος παράδοσης											
	QLT = 0			QLT = 1			QLT = 2			QLT = 5		
Πολιτικές	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>J</i>
CONWIP-BB	6	10	328.66	6	20	324.58	7	19	318.72	8	7	309.66
CONIP-BB	6	7	322.52	6	7	320.20	7	7	316.15	8	4	309.18
CONWIP-MTO	0	3	139.35	0	3	138.78	0	3	137.54	0	4	128.11
CONIP-MTO	0	12	282.81	0	12	281.17	0	16	263.04	0	12	174.34
LS	8	0	304.77	8	0	304.77	8	0	304.77	8	0	304.77

Τα συμπεράσματα που μπορούν να βγουν από τους παραπάνω πίνακες είναι παρόμοια με αυτά της Παραγράφου 4.4.1. Μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση συγκρίνοντας τους πίνακες της Παραγράφου 4.4.1 με τους αντίστοιχους αυτής είναι

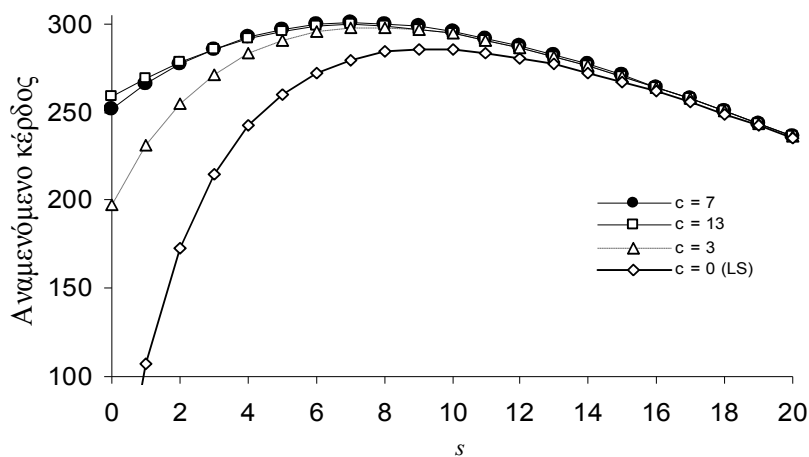
ότι η πολιτική μερικής αποδοχής, επιτρέπει μεγαλύτερο αριθμό εκκρεμών παραγγελιών όταν στο σύστημα υπάρχει η εγκατάλειψη των πελατών από ότι επιτρέπει όταν οι πελάτες δεν ακυρώνουν παραγγελίες και απλά το σύστημα επιδέχεται μία ποινή καθυστέρησης για παραδόσεις προϊόντων περαν του QLT. Για παράδειγμα, στον Πίνακα 4.1, για $\lambda = 4$ έχουμε για την πολιτική CONWIP-BB, $s = 8$ και $c = 5$, ενώ στον Πίνακα 4.5 οι αντίστοιχες τιμές είναι $s = 8$ και $c = 9$. Γενικά παρατηρούμε ότι όταν υπάρχει εγκατάλειψη, οι μικτές πολιτικές αντιδρούν ανάλογα ώστε να διατηρήσουν το συνολικό ρυθμό παραγωγής του συστήματος υψηλό, είτε αυξάνοντας το s είτε, κυρίως, το c και έτσι ισορροπούν το κόστος που προκύπτει από καθυστερήσεις και εγκαταλείψεις με κέρδος από πωλήσεις. Με αυτόν τον τρόπο διατηρούν πάντα υψηλότερο κέρδος από τις πολιτικές MTO και LS.

Πίνακας 4.9 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος παραγωγής και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικές κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης και διαφορετικά πρωτόκολλα εξυπηρέτησης

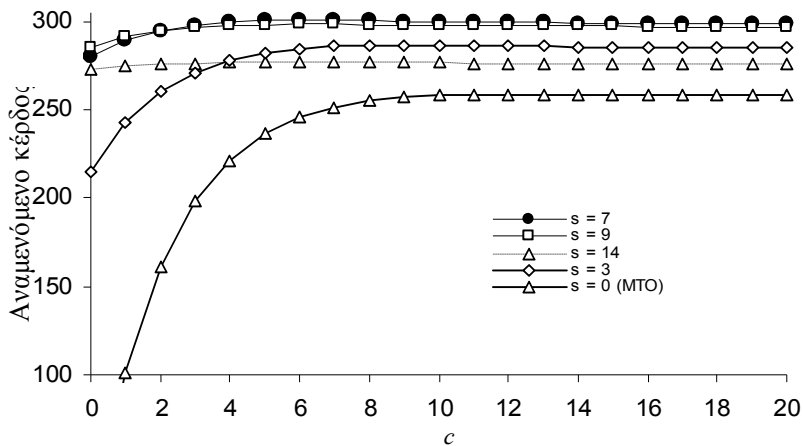
	Κατανομή - Πρωτόκολλο εξυπηρέτησης											
	Εκθετική						Erlang-2					
	FIFO			EDD			FIFO			EDD		
Πολιτικές	s	c	J	s	c	J	s	c	J	s	c	J
CONWIP-BB	8	9	304.41	8	8	304.27	6	20	324.58	6	9	324.74
CONIP-BB	7	7	300.70	7	6	300.93	6	7	320.20	6	7	320.42
CONWIP-MTO	0	3	133.20	0	3	132.45	0	3	138.78	0	3	138.26
CONIP-MTO	0	13	258.70	0	12	263.79	0	12	281.17	0	11	285.63
LS	9	0	285.47	9	0	285.47	8	0	304.77	8	0	304.77

Ο Πίνακας 4.9 παρουσιάζει το ρυθμό κέρδους του συστήματος για τις βασικές παραμέτρους του συστήματος. Ο πίνακας είναι συγκεντρωτικός. Περιέχει όλες τις πολιτικές, για τις δύο περιπτώσεις κατανομών των χρόνων παραγωγής των μηχανών και για τα δύο πρωτόκολλα εξυπηρέτησης που εξετάζουμε. Παρατηρούμε ότι το

κέρδος του συστήματος είναι μεγαλύτερο για την κατανομή με τη μικρότερη διασπορά, την Erlang-2. Ένα επίσης χρήσιμο συμπέρασμα είναι ότι το πρωτόκολλο EDD, σε περιπτώσεις όπου διατηρείται απόθεμα έτοιμων προϊόντων (μικτές πολιτικές) δεν επηρεάζει ιδιαίτερα το κέρδος. Στην περίπτωση CONIP-MTO όμως το πρωτόκολλο EDD έχει μια θετική επίδραση. Αυτό συμβαίνει διότι το σύστημα βρίσκεται συνέχεια σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, με την πολιτική CONIP κυκλοφορούν κομμάτια στη μονάδα παραγωγής (το οποίο σημαίνει πολύ μικρότερους χρόνους αναμονής από την CONWIP) προλαβαίνοντας έτσι με το πρωτόκολλο EDD να εξυπηρετήσει κάποιους από τους πελάτες που με το πρωτόκολλο FCFS θα ακύρωναν παραγγελίες. Στην CONWIP-BB κυκλοφορεί μόνο ένα κομμάτι στη μονάδα παραγωγής, οι καθυστερήσεις είναι πάντα μεγάλες και επομένως η αλλαγή προτεραιότητας δεν βοηθά ιδιαίτερα.



Σχήμα 5.5 . Αναμενόμενο κέρδος του συστήματος παραγωγής με εκθετικές μηχανές ως προς το απόθεμα βάσης s



Σχήμα 5.6 . Αναμενόμενο κέρδος του συστήματος παραγωγής με εκθετικές μηχανές ως προς το έλλειμμα βάσης c

Επίσης όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, εξετάσαμε τις ιδιότητες δεύτερης τάξης του ρυθμού κέρδους ως προς s και c για τις μικτές πολιτικές. Στα Σχ. 4.6 και 4.7, παρουσιάζεται ο μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος ως προς s και c αντίστοιχα για την πολιτική CONIP-BB με εκθετικούς χρόνους κατεργασιών και πρωτόκολλο εξυπηρέτησης FCFS. Παρατηρούμε πάλι ότι η $J(s, c)$ φαίνεται να έχει ένα μέγιστο σημείο για κάθε παράμετρο s και c όταν η τιμή της άλλης μένει σταθερή. Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν για πρωτόκολλο EDD με εκθετικές ή Erlang κατανομές.

4.5 Σύνοψη και συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε μέσω προσομοίωσης πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε δίκτυα παραγωγής με γενικούς χρόνους αφίξεων πελατών, γενικούς χρόνους κατεργασίας μηχανών και πελάτες που αποθαρρύνονται. Σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, οι εισερχόμενοι πελάτες ενημερώνονται για πιθανές καθυστερήσεις στην παράδοση των παραγγελιών τους και το σύστημα αναγγέλλει αναφέρει ένα υποσχόμενο χρονικό διάστημα παράδοσης σε κάθε πελάτη. Ένας πελάτης θα διστάσει να παραγγείλει προϊόν αν ο υποσχόμενος χρόνος του συστήματος ξεπερνά το μέγιστο χρόνο αναμονής του, ο οποίος είναι μια τυχαία μεταβλητή με γνωστή κατανομή.

Αν αυτός ο χρόνος εκπνεύσει πριν η εταιρία ικανοποιήσει τον πελάτη μελετάμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη ο πελάτης θα ωφελείται από μία σημαντική έκπτωση στην τιμή πώλησης του προϊόντος αλλά δεν θα μπορεί να ακυρώσει την παραγγελία. Στην δεύτερη ο πελάτης ακυρώνει την παραγγελία μετά το πέρας του μέγιστου χρόνου αναμονής του.

Το σύστημα δέχεται πελάτες όσο ο αριθμός των εκκρεμών παραγγελιών είναι κάτω από ένα κατώφλι c και παράγει όσο το απόθεμα τελικού προϊόντος είναι κάτω από ένα κατώφλι s . Αναπτύξαμε έναν απλό και αποτελεσματικό αλγόριθμο που χρησιμοποιεί άνω όρια για τις βέλτιστες παραμέτρους s και c και τις εντοπίζει με εξαντλητική αναζήτηση. Δοκιμάσαμε το σύστημα κάτω από δύο διαφορετικές πολιτικές αναπλήρωσης των πρώτων υλών, την πολιτική σταθερού αποθέματος και την πολιτική σταθερής αποθεματικής θέσης. Στην περίπτωση που έχουμε ακυρώσεις παραγγελιών δοκιμάσαμε δύο διαφορετικά πρωτόκολλα εξυπηρέτησης, το FCFS και το EDD.

Συγκρίναμε δύο πολιτικές συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και αφίξεων, τις CONWIP-BB και CONIP-BB, με τις δύο αντίστοιχες πολιτικές παραγωγής κατά παραγγελία, CONWIP-MTO και CONIP-MTO, και την πολιτική πλήρους απόρριψης πελατών, LS. Σε κάθε περίπτωση, τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι ο συνδυασμένος έλεγχος αποθεμάτων και αφίξεων επιτυγχάνει μεγαλύτερο κέρδος και παρουσιάζει καλύτερη προσαρμοστικότητα από την LS ή τις πολιτικές MTO στην διακύμανση της ζήτησης αλλά και στις αλλαγές του υποσχόμενου διαστήματος παράδοσης παραγγελιών που αναγγέλλει η εταιρία. Επίσης φαίνεται ότι ο μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος είναι μονοκόρυφη συνάρτηση ως προς τις παραμέτρους ελέγχου.

5 Συμπεράσματα

Η διατριβή αυτή είχε ως στόχο την επίλυση προβλημάτων συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και πωλήσεων σε συστήματα παραγωγής προς αποθήκευση και πελάτες που αποθαρρύνονται. Εξετάσαμε προβλήματα

- μίας μηχανής με εκθετικούς χρόνους μεταξύ αφίξεων, εκθετικούς χρόνους κατεργασίας της μηχανής και πελάτες που αποθαρρύνονται
- γραμμών παραγωγής με γενικούς χρόνους μεταξύ αφίξεων, γενικούς χρόνους κατεργασιών των μηχανών
- δικτύων παραγωγής με γενικούς χρόνους μεταξύ αφίξεων, γενικούς χρόνους κατεργασιών των μηχανών.

Για τον έλεγχο των αποθεμάτων και των αφίξεων, προτάθηκε ο συνδυασμός απλών πολιτικών τύπου κατωφλιού με παράμετρο το απόθεμα βάσης για το απόθεμα τελικού προϊόντος, με την πολιτική μερικής ικανοποίησης της ζήτησης με παράμετρο το έλλειμμα βάσης για τον αριθμό των επιτρεπόμενων ανικανοποίητων παραγγελιών. Το πρόβλημα προς επίλυση ήταν η μεγιστοποίηση του μέσου κέρδους του συστήματος συναρτήσει των παραμέτρων ελέγχου, το απόθεμα βάσης και το έλλειμμα βάσης.

Το σύστημα μίας μηχανής μοντελοποιήθηκε ως ένα σύστημα $M/M/1/k$, ενώ η γραμμή παραγωγής περιγράφηκε με τη βοήθεια ενός ισοδύναμου κλειστού δικτύου αναμονής. Για τη μέτρηση της απόδοσης των συστημάτων αυτών χρησιμοποιήσαμε το μέσο ρυθμό κέρδους, που είναι ο ρυθμός κέρδους από πωλήσεις μείον το κόστος αποθεμάτων, το κόστος εκκρεμών παραγγελιών και το κόστος μη ικανοποίησης της ζήτησης. Αποδείχθηκε ότι οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου που μεγιστοποιούν το ρυθμό κέρδους του συστήματος είναι φραγμένες. Με αυτήν την παρατήρηση, αναπτύξαμε υπολογιστικά αποδοτικούς αλγορίθμους εξαντλητικής αναζήτησης για την εκτίμηση των βέλτιστων παραμέτρων της προτεινόμενης πολιτικής. Πραγματοποιήσαμε αριθμητικά πειράματα για να συγκρίνουμε την απόδοση των προτεινόμενων πολιτικών με άλλες πολιτικές ελέγχου που εφαρμόζονται σήμερα στα πολλά συστήματα παραγωγής. Τα αριθμητικά αποτελέσματα τεκμηρίωσαν την υπεροχή των συνδυασμένων πολιτικών ελέγχου αποθεμάτων και αφίξεων.

Τέλος εφαρμόσαμε και επεκτείναμε τον συνδυασμένο έλεγχο αποθεμάτων και αφίξεων σε ένα δίκτυο παραγωγής με πελάτες που αποθαρρύνονται. Αποδεικνύεται και σε αυτήν την περίπτωση ότι για συστήματα όπου η μορφή της αποθάρρυνσης των πελατών είναι μόνο αυτή της αποτροπής στο να γίνει μια παραγγελία σε περιόδους μηδενικού αποθέματος, οι παράμετροι του ελέγχου είναι φραγμένες. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε την πολιτική αποθέματος βάσης για τον έλεγχο του αποθέματος τελικού προϊόντος σε συνδυασμό με την πολιτική μερικής ικανοποίησης της ζήτησης αλλά και δύο διαφορετικές πολιτικές αναπλήρωσης των πρώτων υλών, της πολιτική σταθερού αποθέματος και την πολιτική σταθερής αποθεματικής θέσης. Ο υπολογισμός του ρυθμού κέρδους έγινε με τη βοήθεια της προσομοίωσης καθώς δεν κατέστη δυνατή η εξαγωγή κάποιας αναλυτικής έκφρασης για τη συνάρτηση κέρδους. Τα αριθμητικά αποτελέσματα τεκμηρίωσαν την υπεροχή των συνδυασμένων πολιτικών ελέγχου αποθεμάτων και αφίξεων.

Σε όλα τα αριθμητικά πειράματα η εφαρμογή των προτεινόμενων πολιτικών συνδυασμένου ελέγχου απέδωσε καλύτερα από άλλες διαδεδομένες πολιτικές. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι οι περισσότερες από τις ανταγωνιστικές πολιτικές, όπως φάνηκε από την ανάλυσή μας, αποτελούν υποπεριπτώσεις των προτεινόμενων πολιτικών.

Η ανάλυση που παρουσιάσαμε για το πρόβλημα της απόσυρσης παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής μπορεί εύκολα να επεκταθεί για το πρόβλημα της παραγωγής και αποθήκευσης προϊόντων που αλλοιώνονται στον χρόνο.

Παράρτημα

Απόδειξη Θεωρήματος 2.2

Για συστήματα με σταθερή διορία, η πιθανότητα μη ακύρωσης της παραγγελίας, Εξ. (2.11), γράφεται

$$\Pi_m^D = \frac{\mu \Phi_{m+1}^D}{(m+1)\Phi_m^D} \quad (\text{Π.1})$$

και η ανισότητα (2.18), γίνεται

$$\frac{\Phi_{m+1}^D}{\Phi_m^D} \geq \frac{\Phi_{m+1}}{\Phi_m}. \quad (\text{Π.2})$$

Συνεπώς, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η ανισότητα (Π.2) ισχύει για κάθε $m \geq 0$.

Για $m = 0$, η Εξ. (Π.2) γίνεται

$$\frac{\Phi_1^D}{\Phi_0^D} \geq \frac{\Phi_1}{\Phi_0},$$

από την Εξ. (2.9) και θέτοντας $m = 0$, προκύπτει

$$\Phi_0^D(\mu) = \Phi_0(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt,$$

και η προηγούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με $\Phi_1^D(\mu) \geq \Phi_1(\mu)$, το οποίο ισχύει σύμφωνα με το Λήμμα 5.1.2 της [22].

Για $m > 0$, αντικαθιστώντας την Εξ. (2.9) στην (Π.2) έχουμε

$$\frac{\int_0^{\infty} \left[\int_0^t (1 - G^D(\tau)) d\tau \right]^{m+1} e^{-\mu t} dt}{\int_0^{\infty} \left[\int_0^t (1 - G^D(\tau)) d\tau \right]^m e^{-\mu t} dt} \geq \frac{\int_0^{\infty} \left[\int_0^t (1 - G(\tau)) d\tau \right]^{m+1} e^{-\mu t} dt}{\int_0^{\infty} \left[\int_0^t (1 - G(\tau)) d\tau \right]^m e^{-\mu t} dt}.$$

Όλοι οι όροι της παραπάνω ανισότητας είναι μετασχηματισμοί Laplace με παράμετρο μ . Ορίζουμε

$$A(t) = \frac{\int_0^t (1 - G(\tau)) d\tau}{\theta}, \quad (\text{Π.3})$$

$$D(t) = \frac{\int_0^t (1 - G^D(\tau)) d\tau}{\theta} = \begin{cases} t/\theta, & t \leq \theta \\ 1, & t > \theta, \end{cases} \quad (\text{Π.4})$$

όπου η δεύτερη ισότητα της Εξ. (Π.4) προκύπτει από την Εξ. (2.17). Με τη χρήση των Εξ. (Π.3), (Π.4) και εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης για τους μετασχηματισμούς Laplace στην προηγούμενη ανισότητα προκύπτει

$$L[D^m(t) * A^{m+1}(t) - A^m(t) * D^{m+1}(t)] \leq 0,$$

όπου με $L[\cdot]$ και $*$ αντίστοιχα, δηλώνουμε το μετασχηματισμό Laplace και τον τελεστή της συνέλιξης. Για να αποδείξουμε την παραπάνω σχέση, αρκεί να δείξουμε ότι

$$D^m(t) * A^{m+1}(t) \leq A^m(t) * D^{m+1}(t) \quad (\text{Π.5})$$

για κάθε $t \geq 0$ και $m = 1, 2, \dots$

Είναι γνωστό από τη θεωρία πιθανοτήτων ότι για κάθε μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής G ισχύει ότι:

$$\text{μέση τιμή } \theta = \int_0^{\infty} (1 - G(t)) dt.$$

Ο αριθμητής της Εξ. (Π.3) αυξάνει μονότονα στην τιμή θ καθώς $t \rightarrow \infty$. Συνεπώς $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 1$, οπότε η $A(t)$ είναι συνάρτηση κατανομής κάποιας τυχαίας μεταβλητής, έστω Y . Επιπρόσθετα, η $A^m(t) = [P(Y \leq t)]^m$ είναι η συνάρτηση κατανομής της μέγιστης από m ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Y_1, \dots, Y_m , και η $A^{m+1}(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της μέγιστης από $m + 1$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Y_{m+1}, \dots, Y_{2m+1} , όλες με την ίδια συνάρτηση κατανομής $A(t)$. Γράφουμε

$$A^m(t) = P[\max(Y_1, \dots, Y_m) \leq t],$$

$$A^{m+1}(t) = P[\max(Y_{m+1}, \dots, Y_{2m+1}) \leq t].$$

Με παρόμοιο τρόπο, από την Εξ. (Π.4) προκύπτει ότι

$$D^m(t) = P[\max(X_1, \dots, X_m) \leq t]$$

$$D^{m+1}(t) = P[\max(X_{m+1}, \dots, X_{2m+1}) \leq t],$$

όπου οι $X_i, i = 1, \dots, 2m + 1$, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $(0, \theta)$. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$Q = \max(X_1, \dots, X_m) + \max(Y_{m+1}, \dots, Y_{2m+1}), \quad (\text{Π.6})$$

$$Z = \max(Y_1, \dots, Y_m) + \max(X_{m+1}, \dots, X_{2m+1}). \quad (\text{Π.7})$$

Αν τα τυχαία διανύσματα της Εξ. (Π.6), (X_1, \dots, X_m) και $(Y_{m+1}, \dots, Y_{2m+1})$ είναι ανεξάρτητα, τότε η συνάρτηση κατανομής $P(Q \leq t)$ είναι ίση με τη συνέλιξη των επιμέρους συναρτήσεων κατανομών, ήτοι $P(Q \leq t) = D^m(t) * A^{m+1}(t)$. Παρομοίως στην Εξ. (Π.7), αν το διάνυσμα (Y_1, \dots, Y_m) είναι ανεξάρτητο του $(X_{m+1}, \dots, X_{2m+1})$, τότε θα έχουμε $P(Z \leq t) = A^m(t) * D^{m+1}(t)$. Επομένως, η ανισότητα (Π.5) είναι ισοδύναμη με την

$$P(Q \leq t) \leq P(Z \leq t). \quad (\text{Π.8})$$

Η ανισότητα (Π.8) υποδηλώνει ότι η Z είναι στοχαστικά μικρότερη ή ίση της Q .

Για να αποδείξουμε αυτήν την ανισότητα, θα συγκρίνουμε ισοπληθή δείγματα τιμών των τυχαίων μεταβλητών Z και Q και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ των δύο δειγμάτων τέτοια ώστε κάθε τιμή στο δείγμα της μεταβλητής Z είναι μικρότερη ή ίση από μία τιμή δείγματος της μεταβλητής Q .

Για να δημιουργήσουμε δείγματα τιμών για τις τυχαίες μεταβλητές των Εξ. (Π.6) και (Π.7) θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αντίστροφου μετασχηματισμού [35]. Θεωρούμε $2m + 1$ ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς $U_i, i = 1, \dots, 2m + 1$, ομοιόμορφα κατανεμημένους στο $[0, 1]$. Για ευκολία στο συμβολισμό, οι αριθμοί U_i , αν και τυχαίοι, διατάσσονται σε φθίνουσα σειρά, $U_1 \geq \dots \geq U_{2m+1}$.

Αν αναδιατάξουμε αυτούς τους αριθμούς προκύπτουν $(2m + 1)!$ ισοπίθανες διατάξεις. Από κάθε διάταξη αυτών των τυχαίων αριθμών, χρησιμοποιούμε τους πρώτους m για να παράγουμε τις πρώτες m τυχαίες μεταβλητές X_i της Εξ. (Π.6) και τις πρώτες m τυχαίες μεταβλητές Y_i της Εξ. (Π.7). Οι υπόλοιποι $m + 1$ ομοιόμορφοι αριθμοί θα χρησιμοποιηθούν για τις τελευταίες $m + 1$ τυχαίες μεταβλητές κάθε εξίσωσης. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι ο U_j παίρνει την i -οστή θέση σε κάποια συγκεκριμένη διάταξη. Η μέθοδος αντίστροφου μετασχηματισμού θα παράγει τα δείγματα τιμών

$$Y_i = A^{-1}(U_j), \quad X_i = D^{-1}(U_j) = \theta U_j, \quad (\text{Π.9})$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την Εξ. (Π.4), ήτοι η $D(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής μιας ομοιόμορφης στο $[0, \theta]$ τυχαίας μεταβλητής. Αν η

συνάρτηση A δεν είναι αυστηρώς μονότονη, τότε η Y_i είναι ίση με τη μικρότερη λύση της εξίσωσης $A(t) = U_j$. Παρότι χρησιμοποιούμε τον ίδιο τυχαίο αριθμό U_j για να παράγουμε τις X_i και Y_i , οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \dots, X_m, Y_{m+1}, \dots, Y_{2m+1}$ της Εξ. (Π.6) είναι ανεξάρτητες διότι προκύπτουν $2m + 1$ από διαφορετικούς τυχαίους αριθμούς U_j , $j = 1, \dots, 2m + 1$. Ομοίως, οι μεταβλητές $Y_1, \dots, Y_m, X_{m+1}, \dots, X_{2m+1}$ της Εξ. (Π.7) είναι επίσης ανεξάρτητες γιατί παράγονται από διαφορετικούς αριθμούς (αν και είναι ίδιοι με εκείνους της Εξ. (Π.6)).

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για όλες τις διατάξεις U_1, \dots, U_{2m+1} και παίρνουμε δύο δείγματα τιμών μεγέθους $(2m + 1)!$ για τις τυχαίες μεταβλητές Q και Z . Θα δείξουμε ότι κάποια στοιχεία των δύο αυτών δειγμάτων είναι ίσα και τα υπόλοιπα είναι τέτοια ώστε $Z \leq Q$. Για την καλύτερη κατανόηση της απόδειξης εξετάζεται πρώτα η περίπτωση $m = 1$ και ακολούθως η γενικότερη για κάθε $m \geq 1$.

Περίπτωση 1: $m = 1$

Θεωρούμε τρεις ανεξάρτητους ομοιόμορφους τυχαίους αριθμούς U_1, U_2, U_3 και έστω ότι $U_1 \geq U_2 \geq U_3$. Από αυτούς τους αριθμούς προκύπτουν οι εξής έξι διατάξεις:

$$(U_1, U_2, U_3), (U_1, U_3, U_2), (U_2, U_1, U_3), (U_2, U_3, U_1), (U_3, U_1, U_2), (U_3, U_2, U_1).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και τις Εξ.(Π.6), (Π.7), (Π.9) οι παραπάνω αναδιατάξεις δίνουν τις ακόλουθες τιμές για την τυχαία μεταβλητή Q :

$$Q_1 = \max(X_1) + \max(Y_2, Y_3) = \theta U_1 + A^{-1}(U_2) = Q_{1,2},$$

$$Q_2 = \max(X_1) + \max(Y_3, Y_2) = \theta U_1 + A^{-1}(U_2) = Q_{1,2},$$

$$Q_3 = \max(X_2) + \max(Y_1, Y_3) = \theta U_2 + A^{-1}(U_1) = Q_{2,1},$$

$$Q_4 = \max(X_2) + \max(Y_3, Y_1) = \theta U_2 + A^{-1}(U_1) = Q_{2,1},$$

$$Q_5 = \max(X_3) + \max(Y_1, Y_2) = \theta U_3 + A^{-1}(U_1) = Q_{3,1},$$

$$Q_6 = \max(X_3) + \max(Y_2, Y_1) = \theta U_3 + A^{-1}(U_1) = Q_{3,1},$$

και για την τυχαία μεταβλητή Z , δίνουν τις τιμές:

$$Z_1 = \max(Y_1) + \max(X_2, X_3) = A^{-1}(U_1) + \theta U_2 = Z_{1,2},$$

$$Z_2 = \max(Y_1) + \max(X_3, X_2) = A^{-1}(U_1) + \theta U_2 = Z_{1,2},$$

$$Z_3 = \max(Y_2) + \max(X_1, X_3) = A^{-1}(U_2) + \theta U_1 = Z_{2,1},$$

$$Z_4 = \max(Y_2) + \max(X_3, X_1) = A^{-1}(U_2) + \theta U_1 = Z_{2,1},$$

$$Z_5 = \max(Y_3) + \max(X_1, X_2) = A^{-1}(U_3) + \theta U_1 = Z_{3,1},$$

$$Z_6 = \max(Y_3) + \max(X_2, X_1) = A^{-1}(U_3) + \theta U_1 = Z_{3,1}.$$

Στην συνέχεια συνδυάζουμε κάθε τιμή του δείγματος της Z με μια μεγαλύτερη ή ίση τιμή του δείγματος της Q . Παρατηρούμε ότι $Q_{1,2} = Z_{2,1}$ και $Z_{1,2} = Q_{2,1}$, άρα έχουμε $Z_1 = Q_3$, $Z_2 = Q_4$, $Z_3 = Q_1$, $Z_4 = Q_2$. Απομένει να συνδυάσουμε τις τιμές Z_5, Z_6, Q_5, Q_6 .

Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(U) = A^{-1}(U) - \theta U$ για $U \in [0, 1]$. Η παράγωγός της είναι

$$\frac{dF(U)}{dU} = \frac{dA^{-1}(U)}{dU} - \theta = \frac{1}{dA(t)/dt} - \theta = \frac{\theta}{1-G(t)} - \theta,$$

όπου η τελευταία έκφραση προκύπτει παραγωγίζοντας την Εξ. (Π.3) στο σημείο $t = A^{-1}(U)$. Η παραπάνω έκφραση δεν είναι αρνητική διότι εξ ορισμού ισχύει $1 - G(t) \in [0, 1]$ για κάθε $t \geq 0$. Επομένως, η $F(U)$ είναι αύξουσα στο $U \in [0, 1]$. Εφόσον $U_1 \geq U_3$, έχουμε ότι $A^{-1}(U_1) - \theta U_1 \geq A^{-1}(U_3) - \theta U_3$. Αναδιατάσσοντας αυτήν την ανισότητα έχουμε τελικά $A^{-1}(U_3) + \theta U_1 \leq \theta U_3 + A^{-1}(U_1)$, δηλαδή $Z_{3,1} \leq Q_{j,1}$, και άρα θα έχουμε $Z_5 \leq Q_5$ και $Z_6 \leq Q_6$.

Τελικά, για $m = 1$, από οποιοδήποτε σύνολο τυχαίων αριθμών U_1, U_2, U_3 προκύπτουν 3! δείγματα τιμών τέτοια ώστε $Z \leq Q$. Επομένως, για κάθε $t \geq 0$, όποτε ισχύει ότι $Q \leq t$, θα ισχύει και ότι $Z \leq t$.

Περίπτωση 2: $m \geq 1$

Θεωρούμε $2m + 1$ ανεξάρτητους ομοιόμορφους τυχαίους αριθμούς $U_i, i = 1, \dots, 2m + 1$ και έστω $U_1 \geq \dots \geq U_{2m+1}$. Σε οποιαδήποτε από τις $(2m + 1)!$ διατάξεις, ο τυχαίος αριθμός U_1 θα καταλαμβάνει μια θέση είτε (i) στις πρώτες m θέσεις είτε (ii) στις τελευταίες $m + 1$ θέσεις.

(i) Υποθέτουμε ότι ο U_1 βρίσκεται σε μία από τις πρώτες m θέσεις μίας διάταξης τυχαίων αριθμών. Έστω ότι στην συγκεκριμένη διάταξη ο $U_j, j \geq 2$, είναι ο μεγαλύτερος από τους τυχαίους αριθμούς στις τελευταίες $m + 1$ θέσεις. Αντικαθιστώντας τις Εξ. (Π9) στις Εξ. (Π6) και (Π7) παράγουμε τα παρακάτω δείγματα για τις Q και Z :

$$Q_{1,j} = \theta U_1 + A^{-1}(U_j), \quad Z_{1,j} = A^{-1}(U_1) + \theta U_j. \quad (\text{Π.10})$$

Σε ένα σύνολο $2m + 1$ τυχαίων αριθμών, υπάρχουν αρκετές διατάξεις οι οποίες εξάγουν το παραπάνω δείγμα τιμών. Επειδή ο U_j είναι ο μεγαλύτερος αριθμός στις τελευταίες $m + 1$ θέσεις, οι υπόλοιπες m από αυτές τις θέσεις θα συμπληρώνονται από μικρότερους τυχαίους αριθμούς, δηλαδή στοιχεία του συνόλου $\{U_{j+1}, \dots, U_{2m+1}\}$. Από αυτήν την παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των διατάξεων που εξάγει δείγματα τιμών για τις μεταβλητές Q και Z ίσα με $Q_{1,j}$ και $Z_{1,j}$, αντίστοιχα, είναι $N_{1,j} = \binom{2m+1-j}{m}, j \geq 2$.

(ii) Τώρα υποθέτουμε ότι ο U_1 καταλαμβάνει μία από τις τελευταίες $m + 1$ θέσεις μιας διάταξης, και έστω ο μεγαλύτερος αριθμός στις πρώτες m θέσεις να είναι εκ νέου ο U_j . Αντικαθιστώντας τις Εξ. (Π.9) στις Εξ. (Π.6) και (Π.7), τα αντίστοιχα δείγματα τιμών $Q_{j,1}$ and $Z_{j,1}$ δίνονται από

$$Q_{j,1} = \theta U_j + A^{-1}(U_1), \quad Z_{j,1} = A^{-1}(U_j) + \theta U_1. \quad (\text{Π.11})$$

Κάνοντας μια παρόμοια παρατήρηση με αυτήν της περίπτωσης (i), ο αριθμός των διατάξεων που εξάγει αυτές τις τιμές για τις Q και Z , θα είναι $N_{j,1} = \binom{2m+1-j}{m-1} = N_{1,j} m / (m + 2 - j)$. Παρατηρούμε ότι για $j \geq 2$, έχουμε $N_{j,1} \geq N_{1,j}$.

Στην συνέχεια συνδυάζουμε κάθε δείγμα τιμής της Z με μια μεγαλύτερη ή ίση τιμή του δείγματος της Q . Από τις Εξ. (Π.10) και (Π.11) παρατηρούμε ότι

$$Q_{1,j} = Z_{j,1} \quad \text{και} \quad Z_{1,j} = Q_{j,1}. \quad (\text{Π.12})$$

Τα ζευγάρια τιμών $(Z_{j,1}, Q_{1,j})$ και $(Z_{1,j}, Q_{j,1})$ ικανοποιούν την ανισότητα $Z \leq Q$ ως ισότητα. Αφού έχουμε $N_{1,j} \leq N_{j,1}$, θα υπάρχουν $N_{1,j}$ τέτοια ζευγάρια στο σύνολο των δειγμάτων τιμών για κάθε μεταβλητή. Απαλείφοντας αυτά, παραμένουν $N_{j,1} - N_{1,j}$ δείγματα τιμών ίσα με $Z_{j,1}$ και $N_{j,1} - N_{1,j}$ ίσα με $W_{j,1}$ τα οποία δεν έχουμε αντιστοιχίσει. Εφόσον $U_1 \geq U_j$, όπως και στην Περίπτωση 1, έχουμε ότι $A^{-1}(U_1) - \theta U_1 \geq A^{-1}(U_j) - \theta U_j$. Αναδιατάσσοντας αυτήν την ανισότητα και χρησιμοποιώντας τις Εξ. (Π.10) και (Π.11), έχουμε τελικά

$$Z_{j,1} \leq Q_{j,1}. \quad (\text{Π.13})$$

Από τις Εξ. (Π.12) και (Π.13) προκύπτει ότι, οποιοδήποτε σύνολο τυχαίων αριθμών $\{U_1, \dots, U_{2m+1}\}$ παράγει $(2m + 1)!$ δείγματα τιμών τέτοια ώστε $Z \leq Q$. Επομένως, για κάθε $t \geq 0$, όποτε ισχύει ότι $Q \leq t$, θα ισχύει και ότι $Z \leq t$. Αυτό αποδεικνύει την Εξ (Π8) και τελικά το θεώρημα. ΟΕΔ

Βιβλιογραφία

- [1] Porteus, E. L. (1990) Stochastic inventory theory. *Handbooks in OR & MS*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, vol. 2, 605–652.
- [2] Akella, R. and Kumar, P.R. (1986) Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**, 116–126.
- [3] Veach, M.H. and Wein, L.M. (1994) Optimal control of a two-station tandem production-inventory system. *Operations Research*, **42**, 337–350.
- [4] Buzacott, J.A. and Shanthikumar, J.G. (1993) *Stochastic Models of Manufacturing Systems* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [5] Liberopoulos, G. and Dallery, Y. (2000) A unified framework for pull control mechanisms in multi-stage manufacturing systems. *Annals of Operations Research*, **93**, 325–355.
- [6] Zipkin, P.H. (2000) *Foundations of Inventory Management*, McGraw-Hill, New York, NY.
- [7] Rubio, R. and Wein, L. W. (1996) Setting base stock levels using product-form queueing networks. *Manage. Sci.*, vol. 42, 259–268.
- [8] Spearman, M. L., Woodruff, D. L. and Hopp, W. J. (1990) Conwip: a pull alternative to Kanban,” *Int. J. Prod Res.*, vol. 28, 879–894.
- [9] Stidham, S. Jr (1985) Optimal control of admission to a queueing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**, 705–713.
- [10] Stidham, S. Jr and Weber, R.R. (1993) A survey of Markov decision models for control of networks of queues. *Queueing Systems*, **13**, 291–314.
- [11] Naor, P. (1969), The regulation of queue size by levying tolls, *Econometrica*, **37**, 15–24.
- [12] Caldentey, R.A. (2001) Analyzing the make-to stock queue in the supply chain and e-business settings. Ph.D. dissertation, Sloan School of Management, MIT, Massachusetts.
- [13] Kouikoglou, V.S. and Phillis, Y.A. (2002) Design of product specifications and control policies in a single-stage production system. *IIE Transactions*, **34**, 590–

600.

- [14] Ioannidis, S. and Kouikoglou, V.S. (2008) Revenue management in single-stage CONWIP production systems. *International Journal of Production Research*, **46** (22), 6513–6532.
- [15] Ioannidis, S., Kouikoglou, V.S. and Phillis, Y.A., (2008) Analysis of admission and inventory control policies for production networks. *IEEE Transactions on Automation Science & Engineering*, **5** (2), 275–288.
- [16] Ιωαννίδης, Ε. (2004) *Συνεργαζόμενες πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής*. Διδακτορική διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
- [17] Haight, F.A. (1959) Queueing with reneging. *Metrika*, **2** (1), 186–197.
- [18] Haight, F.A. (1960) Queueing with balking II. *Biometrika*, **47**, 285–296.
- [19] Haight, F.A. (1957) Queueing with balking. *Biometrika*, **44**, 360–369.
- [20] Subba Rao, S. (1967) Queueing models with balking and reneging. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **19** (1), 55–71.
- [21] Liu, L. and Kulkarni, V.G. (2008) Balking and reneging in M/G/s systems exact analysis and approximations. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **22** (3), 355–371.
- [22] Movaghar, A. (2006) On queueing with customer impatience until the end of service. *Stochastic Models*, **22** (1), 149–173.
- [23] Baccelli F. and Hebuterne, G. (1981) *On queues with impatient customers* [online]. INRIA report 94, France. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα: <http://hal.inria.fr/inria-00076467/en/> [Ημερομηνία πρόσβασης 24 Αυγούστου 2009].
- [24] Whitt, W. (1999) Improving service by informing customers about anticipated delays. *Management Science*, **45** (2), 192–207.
- [25] Brandt, A. and Brandt, M. (1999) On the M(n)/M(n)/s queue with impatient calls. *Performance Evaluation*, **35** (1-2), 1–18.
- [26] Zazanis, M.A. (2004) Cycle times in single server cyclic Jackson networks. *Operational Research Letters*, **32** (5), 422–430.

- [27] Economopoulos A. A. and Kouikoglou S. V. (2008) “Analysis of a simple CONWIP system with impatient customers,” Proceedings of the *4th Annual IEEE Conference on Automation Science and Engineering (CASE 2008)*, Washington DC, USA, August 23-26, 2008.
- [28] Economopoulos, A.A. and Kouikoglou, V.S. (2009) “Lead-time analysis and a control policy for production lines with exponential machines,” Proceedings of the *7th International Conference on Stochastic Models of Manufacturing and Service Operations*, (SMMSO 2009), Ostuni, Italy, June 7–12, 2009.
- [29] Economopoulos A. A. and Kouikoglou S. V. (2010) Lead-Time analysis and a control policy for production lines. *International Journal of Production Research*, (accepted).
- [30] Buzen, J.P. (1973) Computational algorithms for closed queuing networks with exponential servers. *Communications of the ACM*, **16**, 527–531.
- [31] Sevcik, K.C. and Mitrani, I. (1981) The distribution of queuing network states as input and output instants. *Journal of the ACM*, **28** (2), 358–371.
- [32] Lam, S.S (1977) An extension of Moore’s result for closed queueing networks. *IBM Journal of Research and Development*, **21**, 384–387.
- [33] Inman, R.R. (1999) Empirical evaluation of exponential and independence assumptions in queueing models of manufacturing systems. *Production Planning and Control*, **8** (4), 409–432.
- [34] Savasaneril S., Griffin P., Keskinocak P. (2009) Dynamic Lead-Time quotation for an M/M/1 Base-Stock inventory queue. *Operations Research*, Published online in *Articles in Advance*, October 28.
- [35] Law A. M. and Kelton. W. D. (1991) *Simulation Modeling and Analysis*. New York, NY: McGraw-Hill.