Ύπαρξη λύσης Μερικών Διαφορικών εξισώσεων σε χώρους **Sobolev**

Νικολαος Ε. Σιδηροπουλος

Διδακτορικη Διατριβη

Πολυτεχνειο Κρητης
Γενικο Τμημα
21/5/2012

. στην γυναίκα μου Ελένη και στα παιδιά μου, Βαγγέλη, Ελίνα και Μαλένα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Δημήτριο Κανδυλάκη για τις πολύτιμες συμβουλές, υποδείξεις και τη βοήθεια του κατά την προετοιμασία της παρούσας διατριβής. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά και τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής, κ. Δημοσθένη Έλληνα, κ. Μίνω Πετράκη, κ. Ιωακείμ Γρυσπολάκη, κ. Αθανάσιο Λυμπερόπουλο, κ. Αντώνη Μανουσάκη και κ. Ιωάννη Σαριδάκη, για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους.

Επταμελης Επιτροπη

Δημήτριος Κανδυλάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης (Επιβλέπων Καθηγητής)

Δημοσθένης Έλληνας Καθηγητής του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)

Μίνως Πετράκης, Επίκουρος Καθηγητής του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)

Ιωακείμ Γρυσπολάκης, Καθηγητής του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης

Αθανάσιος Λυμπερόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Αντώνιος Μανουσάκης, Επίκουρος Καθηγητής του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης

Ιωάννης Σαριδάκης, Καθηγητής του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης

Τα Κεφάλαια 2, 3 και 4 της διατριβής αυτής είναι τα ακόλουθα δημοσιευμένα άρθρα 1, 2, και 3 αντίστοιχα

1.Dimitrios A. Kandilakis, Nikolaos E. Sidiropoulos, Existence and uniqueness results of posotive solutions for nonvariational quasilinear elliptic systems Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006(2006), No. 84, pp.1-6.

2.Nikolaos E. Sidiropoulos, Existence of solutions to indefinite quasilinear elliptic problems of p-q-Laplacian type, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010(2010), No. 162, pp. 1-23.

3.Dimitrios A. Kandilakis, Nikolaos E. Sidiropoulos, Elliptic problems involving the p(x)-Laplacian with competing nonlinearities Journal of Mathematical Analysis and Applications 379 (2011) 378-387

Προλογος

Αντικείμενο αυτής της διατριβής είναι η μελέτη ύπαρξης λύσεων μερικών διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων τους. Η μελέτη των προβλημάτων αυτών κατέχει κεντρική θέση τόσο στα λεγόμενα καθαρά μαθηματικά όσο και στις εφαρμογές τους. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις παίζουν ένα πολυ σημαντικό ρόλο στις φυσικομαθηματικές και τεχνολογικές επιστήμες. Οι μέθοδοι επίλυσης των προβλημάτων που χρησιμοποιούνται σ' αυτήν την εργασία είναι οι εξής:

Μεταβολικές μέθοδοι (*variational methods*). Οι μεταβολικές μέθοδοι είναι πολύ ισχυρές τεχνικές στη μη-γραμμική ανάλυση και σε μεγάλο βαθμό χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές των καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, που βασίζονται στην αρχή ελαχιστοποίησης ενός ολοκληρωτικού συναρτησοειδούς.
Το πρόβλημα που προκύπτει συχνά διατυπώνεται με τη μορφή μιάς εξίσωσης τελεστών της μορφής $Au = f$. Ο τελεστής A είναι ένας κατάλληλος μη-γραμμικός τελεστής ορισμένος σε ένα υποσύνολο ενός χώρου *Banach* X με τιμές στο δυικό του X^*. Ο χώρος X είναι συνήθως ένας κλειστός υπόχωρος κάποιου χώρου *Sobolev*. Η επιλογή του χώρου X μέσα από τον οποίο θα αναζητηθούν οι ασθενείς λύσεις, εξαρτάται τόσο από τα δεδομένα του προβλήματος, όσο και από τις συνοριακές συνθήκες.

Μη μεταβολικές μέθοδοι. Είναι διάφορες τεχνικές οι οποίες παρέχουν την ύπαρξη, τη μοναδικότητα και άλλες ιδιότητες των λύσεων για μη-γραμμικές, ελλειπτικές και παραβολικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους οι οποίες δεν έχουν μεταβολική μορφή. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του σταθερού σημείου (*Fixed Point Method*).
Αναζητούμε τις λύσεις των υπο μελέτη διαφορικών εξισώσεων στους χώρους *Sobolev* οι οποίοι περιέχουν συναρτήσεις με γενικευμένη παράγωγο οπότε αποτελούν τους πλέον κατάλληλους χώρους για τη μεταβολική διατύπωση προβλημάτων συνοριακών τιμών. Οι συναρτήσεις των χώρων *Sobolev* παρά το γεγονός ότι δεν παραγωγίζονται με την κλασσική έννοια, έχουν γενικευμένες παραγώγους οι οποίες διατηρούν ορισμένες ιδιότητες των ομαλών συναρτήσεων όπως είναι η ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Η τελευταία είναι καθοριστικής σημασίας διότι μας δίνει τη δυνατότητα μετάβασης από το αρχικό πρόβλημα στη μεταβολική εκδοχή του.
Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι το θεώρημα ενσφήνωσης του *Sobolev* καθιστά τους χώρους αυτούς πολύ χρήσιμα εργαλεία για τη μελέτη των Διαφορικών Εξισώσεων. Στα πλαίσια του θεωρήματος αυτού συνοψίζονται τα βασικό-

τερα αποτελέσματα που αφορούν στις ενσφηνώσεις των χώρων *Sobolev*. Τα αποτελέσματα που αφορούν τις συνεχείς ενσφηνώσεις οφείλονται κυρίως στο *Sobolev* αλλά σημαντική συμβολή προς την κατεύθυνση αυτή είχαν οι *Morrey* και *Gagliardo*. Τα αποτελέσματα που σχετίζονται με τις συμπαγείς ενσφηνώσεις των χώρων *Sobolev* οφείλονται στους *Rellich* και *Kondrachov*. Για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [1],[2] .

Η διατριβή αυτή αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 1. Αναφέρουμε βασικές έννοιες και τεχνικές με τις οποίες αντιμετωπίζονται τα προβλήματα που μελετούμε εδώ. Συγκεκριμένα, ορίζουμε τους χώρους L^p και *Sobolev* και παραθέτουμε τις ιδιότητες τους.

Κεφάλαιο 2. Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των ψευδογραμμικών (*quasilinear*) συστημάτων. Συγκεκριμένα παρέχουμε συνθήκες για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα θετικών λύσεων του ψευδογραμμικού ελλειπτικού συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta_p u = f(x,u,v) \ \ \Omega \\ -\Delta_q v = g(x,u,v) \ \ \Omega \end{array}\right\}$$

με συνοριακές συνθήκες Dirichlet σε φραγμένο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.

Κεφάλαιο 3. Σ′ αυτό το κεφάλαιο μελετάμε το αόριστο ($indefinite$) ελλειπτικό πρόβλημα

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta u - \Delta_p u = a(x)|u|^{q-2}u - b(x)|u|^{s-2}u \quad \sigma\tau o \ \ \Omega, \\ u = 0 \quad \sigma\tau o \ \ \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

όπου Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο στο $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, με ένα επαρκώς λείο σύνορο, q, s είναι υποκρίσιμοι εκθέτες, η $a(\cdot)$ αλλάζει πρόσημο και $b(x) \geq 0$ ς.π. στο Ω. Οι αποδείξεις μας είναι μεταβολικού τύπου και είναι βασισμένες είτε στην μέθοδο των ινώσεων ($fibering$) του *Pohozaev* είτε στο Θεώρημα Ορεινής Διάβασης ($Mountain\ Pass\ Theorem$).

Κεφάλαιο 4. Μελετάμε την ύπαρξη μη αρνητικών λύσεων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ινώσεων του *Pohozaev* για το ψευδογραμμικό πρόβλημα

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta_{p(x)} u = -\lambda a(x)|u|^{p(x)-2}u + \mu b(x)|u|^{q(x)-2}u - \varepsilon c(x)|u|^{t(x)-2}u \quad \Omega \\ u = 0 \ \sigma\tau o \ \ \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $\mathbb{N} \geq 2$, είναι ένα φραγμένο χωρίο με επαρκώς λείο σύνορο, οι $a(.), b(.), c(.)$ είναι ουσιωδώς φραγμένες συναρτήσεις, οι $p(.), q(.), t(.)$ είναι συνεχείς στο $\overline{\Omega}$ και λ είναι μία παράμετρος.

Συμβολισμοί

Ω, μη κενό, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$

E' δυϊκός του χώρου $Banach$ E

$supp\{f\}$ ο φορέας μιας συνεχούς συνάρτησης f

$< \cdot, \cdot >$ εσωτερικό γινόμενο ως προς τη δυϊκότητα E, E'

σ. π. σχεδόν παντού

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$

$D^a u = \frac{\partial^{a_1 + a_2 + ... + a_N}}{\partial x_1^{a_1} ... \partial x_N^{a_N}} u, \ |a| = \sum_{i=1}^N a_i$

$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ η $p - Laplacian$ της u

$L^p(\Omega)$ ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων με ολοκληρώσιμη την $p - \textit{δύναμη}$

$L^{p'}(\Omega)$ ο δυϊκός του $L^p(\Omega)$, όπου $p' = \frac{p}{p-1}$

$C_c(\Omega)$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα

$C^k(\Omega)$ ο χώρος των συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους μέχρι την *τάξη κ στο* Ω

$C^\infty(\Omega)$ ο χώρος των συναρτήσεων που έχουν παράγωγο κάθε τάξης στο Ω

$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$$C^{0,a}(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\Omega) : \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^a} < \infty\} \ \mu\epsilon \ 0 < a < 1$$

$$C^{k,a}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) : D^j u \in C^{0,a}(\overline{\Omega}), \ \ |j| \leq k\}$$

$$|| \cdot ||_{C^{k,a}(\overline{\Omega})} = \sup_{|\beta| = k} \ \sup_{x,y \in \Omega, \, x \neq y} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x - y|^a} + \max_{0 \leq |\beta| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\beta u(x)|$$

$W_0^{1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$ χώροι $Sobolev$

$\rightarrow$ ισχυρή σύγκλιση

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ανασκόπηση βασικής θεωρίας

Στο κεφάλαιο αυτό υπενθυμίζουμε τα βασικά εργαλεία της συναρτησιακής α-νάλυσης και περιγράφουμε τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των προβλημάτων που ακολουθούν στα επόμενα κεφάλαια.

1.1 Χώροι συναρτήσεων

Έστω E ένας γραμμικός πάνω στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός Ένα γραμμικό συναρτησιακό είναι μία γραμμική απεικόνιση ορισμένη στον E ή σε έναν γραμμικό υπόχωρο του E, με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Με E' συμβολίζουμε τον δυικό του E, δηλαδή τον χώρο των συνεχών γραμμικών συναρτησιακών πάνω στον E. Ο E' είναι εφοδιασμένος με την δυική νόρμα

$$||f|| = sup_{x\neq 0 x\in E, ||x||\leq 1}|f(x)|$$

Όταν $f \in E'$ και $x \in E$ γράφουμε $< f, x >$ ή $f(x)$.

Με E'' συμβολίζουμε τον δυικό του E'.

Έστω E ένας χώρος $Banach$ και J η κανονική ενσφήνωση από το Ε στον E''.

Ορισμός. Ο Ε λέγεται ανακλαστικός αν $J(E) = E''$.

Όταν ο Ε είναι ανακλαστικός ταυτίζουμε τον Ε με τον E'' μέσω του ισομορφισμού J.

Ορισμός. Ένας χώρος $Banach$ λέγεται ομοιόμορφα κυρτός αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει δ$>$ 0 τέτοιο ώστε:

$$\text{αν } x, y \in E,\ ||x|| \leq 1,\ ||y|| \leq 1 \text{ και } ||x - y| > \epsilon \text{ τότε } ||\frac{x+y}{2}|| > 1 - \delta.$$

Έστω Ω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N, N \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}$, με $C^k(\bar{\Omega})$ συμβολίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων που οι οποίες έχουν συνεχείς κλασικές μερικές παραγώγους μέχρι τάξης k στο $\bar{\Omega}$. Σε αυτόν το χώρο η συνήθης νόρμα $||\cdot||_{k,\infty}$ ορίζεται ως εξής

$$||f||_{k,\infty} := \max\{\sup_{\bar{\Omega}} |\partial_x^a f| : |a| \leq k, a \in \mathbb{N}_0^N\}$$

Με $C_0^\infty(\Omega)$ θα συμβολίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων των οποίων οι φορείς περιέχονται στο Ω και που έχουν κλασσικές παραγώγους κάθε τάξης στο Ω. Συμβολίζουμε επίσης με $L^1(\Omega)$ το χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με νόρμα

$$||f||_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Ο $L^1_{loc}(\Omega)$ είναι ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων οι οποίες είναι τοπικά ολοκληρώσιμες στο Ω.

Θεώρημα 1.1.1 *(Πυκνότητα) Ο χώρος $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^1(\Omega)$, δηλαδή για κάθε $f \in L^1(\Omega)$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $f_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε $||f - f_1||_{L^1(\Omega)} \leq \epsilon$.*

Ορισμός : Έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$. Ορίζουμε το γραμμικό χώρο

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ μετρήσιμη και } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

με νόρμα

$$||f||_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε $f \in L^p(\Omega)$.

Ταυτίζουμε στοιχεία του $L^p(\Omega)$ τα οποία είναι ίσα σ.π στο Ω.

Ορισμός : Θέτουμε

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ μετρήσιμη και υπάρχει σταθερά } C \text{ τέτοια ώστε } |f(x)| \leq C \text{ σ.π. στο } \Omega\}$$

με νόρμα

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ σ.π. στο } \Omega\}$$

για κάθε $f \in L^{\infty}(\Omega)$.

Η ανισότητα του Minkowski
Για $1 \leq p \leq \infty$ και $f, g \in L^p(\Omega)$ έχουμε:

$$||f+g||_{L^p(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} + ||g||_{L^p(\Omega)}.$$

Η ανισότητα του H$\ddot{o}$lder
Έστω $1 \leq p, q \leq \infty$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ αν $f \in L^p(\Omega)$ και $g \in L^q(\Omega)$, τότε $fg \in L^1(\Omega)$:

$$||fg||_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} ||g||_{L^p(\Omega)}.$$

Η ανισότητα του Swartz
Αυτή είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας $H\ddot{o}lder's$ όταν $p = q = 2$. Αν $f \in L^2(\Omega)$ και $g \in L^2(\Omega)$, τότε $fg \in L^(1)(\Omega)$:

$$||fg||_{L^1((\Omega)} \leq ||f||_{L^2((\Omega))} ||g||_{L^2((\Omega))}.$$

Η Ασθενής Παράγωγος
Για δοσμένο n, ορίζουμε ένα πολυδείκτη a ως μία διατεταγμένη συλλογή από θετικούς ακεραίους $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, του οποίου το μήκος δίνεται από τη σχέση $|a| = \sum_i^n a_i$ Έστω f μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο Ω και a ένας πολυδείκτης. Μία συνάρτηση g ολοκληρώσιμη στο Ω θα λέγεται ασθενής παράγωγος τάξης a της f αν

$$\int_\Omega g\phi = (-1)^{|a|} \int_\Omega f D^a \phi$$

για κάθε $\phi \in C_0^{|a|}(\Omega)$. Αν η f είναι μία m-φορές διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε a με $|a| \leq m$ η παράγωγος μπορεί να εκφραστεί ως

$$D^a f(x) = \frac{\partial^{|a|} f(x)}{\partial x_{11}^a \cdots \partial x_{nn}^a}.$$

1.1.1 Χώροι Sobolev

Οι χώροι αυτοί είναι πολύ χρήσιμοι στη μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών για διαφορικές εξισώσεις, επειδή αποτελούν το φυσιολογικό πλαίσιο για τη μεταβολική διατύπωση συνοριακών προβλημάτων [20].

Έστω Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$.
Ορισμός : Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | \ \textit{υπάρχουν} \ g_i \in L^p(\Omega) \textit{τέτοιες ώστε}$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \ \textit{για κάθε} \ \phi \in C_0^\infty(\Omega), i = 1, 2, ..., N\}.$$

Θέτουμε $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$ γράφουμε $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ και $\bigtriangledown u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N}) = gradu$.
Ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ εφοδιάζεται με τη νόρμα

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^p(\Omega)}.$$

Ο χώρος $H^1(\Omega)$ εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)}$$

με αντίστοιχη νόρμα

$$||u||_{H^1(\Omega)} = ||u||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(\Omega)$ το κλειστό περίβλημα του $C_0^1(\Omega)$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ ως προς τη νόρμα του $W^{1,p}(\Omega)$. Αποδεικνύεται ότι

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega) = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \ \textit{στο} \ L^2(\partial\Omega)\}.$$

Συμβολίζουμε επίσης με $W^{-1,p}(\Omega)$ το δυϊκό χώρο του $W_0^{1,p}(\Omega)$ και με $H^{-1}(\Omega)$ το δυϊκό χώρο του $H_0^1(\Omega)$. Έτσι έχουμε το ακόλουθο σχήμα

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις [50].

1.2 Βασικά θεωρήματα

Διατύπωνουμε τώρα το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης **(Hildebrandt and Graves (1927))**:

Θεώρημα 1.2.1 *Έστω X, Y, Z χώροι Banach, και $U(x_0, y_0) \subset X \times Y$ μία ανοιχτή περιοχή του (x_0, y_0) και $F : U(x_0, y_0) \to Z$ μία συνεχής συνάρτηση με $F(x_0, y_0) = 0$.*
Υποθέτουμε επίσης ότι
(i) Η F_y υπάρχει στο $U(x_0, y_0)$ με

$$F_y(x_0, y_0) : Y \to Z$$

είναι 1-1 και επί.
(ii) Οι F, F_y είναι συνεχείς στο (x_0, y_0).
Τότε:
(a) Υπάρχουν θετικοί αριθμοί r_0, $r > 0$ τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in X$ με $||x - x_0|| \leq r_0$, υπάρχει μοναδικό $y(x) \in Y$ με $||y(x) - y_0|| \leq r$ και $F(x, y(x)) = 0$ και η απεικόνιση $x \to y(x)$ είναι συνεχής.
(b) Αν η F είναι παραγωγίσιμη τότε και η απεικόνιση $x \to y(x)$ είναι παραγωγίσιμη. [60]

Η Ισχυρή Αρχή Συγκρίσεως(The strong Comparison Principle)
Η κλασσική ισχυρή αρχή του μεγίστου διατυπώνει ότι μια υπερ-αρμονική C^2 συνάρτηση u ορισμένη σε ένα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του R^n δεν έχει σημείο μεγίστου στο εσωτερικό του Ω εκτός αν είναι σταθερή. Αυτό το αποτέλεσμα παραμένει αληθές αν η $u \in W^{1,p}(\Omega)$ είναι μια $p-$υπερ-αρμονική συνάρτηση τέτοια ώστε $div(|Du|^{p-2}Du) \in L^s_{loc}(\Omega)$ με $s > pN/(N-1)$, [57], [58]. Άμεση συνέπεια της ισχυρής αρχής του μεγίστου είναι η ισχυρή αρχή της συγκρίσεως (*comparison principle*) η οποία με την υπόθεση ότι:

$$-\triangle_p u_1 \leq -\triangle_p u_2.$$

δίνει ότι $u_1 \leq u_2$ στο Ω, [38].

Ορισμός : Λέμε ότι το $\partial\Omega$ είναι Lipschitz αν για κάθε $x \in \partial\Omega$ υπάρχει $r > 0$ και μία απεικόνιση Lipschitz $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\Omega \cap B(x, r) = \{y | \gamma(y_1, ..., y_{N-1}) < y_N\} \cap B(x, r),$$

όπου $B(x, r) \equiv \{y || y_i - x_i| < r, i = 1, ..., N\}$.

Θεώρημα 1.2.2 *Έστω Ω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, με Lipschitz σύνορο $\partial\Omega, 1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει μία φραγμένη γραμμική απεικόνιση*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

τέτοια ώστε $Tu = u$ στο $\partial\Omega$ και $||Tu||_{L^p(\partial\Omega)} \leq ||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$ για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$.

Green's Theorem

Θεώρημα 1.2.3 *Έστω $f, \phi \in C^1(\Omega)$. Τότε*

$$\int_\Omega f_{xi}\phi dx = -\int_\Omega f\phi_{xi}dx + \int_{\partial\Omega} f\phi v^i dS \ (i = 1, ..., n)$$

1.2.1 Θεώρημα Ορεινής Διάβασης

Το Θεώρημα Ορεινής Διάβασης είναι ένα θεμελιώδες εργαλείο στη μη-γραμμική ανάλυση, όπου χρησιμοποιείται για την απόδειξη ύπαρξης λύσεων για μεταβολικά προβλήματα ορισμένα σε χώρους άπειρης διάστασης.

Για τη διατύπωση του Θεωρήματος χρειαζόμαστε τη συνθήκη $Palais - Smale$ την οποία παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

Ορισμός : Έστω ότι το συναρτησοειδές $F : X \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμο κατά *Fréchet* στο χώρο *Banach* X. Θα λέμε ότι το F ικανοποιεί την συνθήκη συμπάγειας $Palais - Smale$ αν κάθε ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$ τέτοια ώστε:
(i) η $F(u_k)$, είναι φραγμένη και
(ii) $||F'(u_k)|| \to 0$, καθώς το $n \to \infty$,
έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Το πρότυπο για ένα διαφορίσιμο κατά *Fréchet* συναρτησιακό, που ικανοποιεί την (PS) είναι μια συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους που είναι ασθενώς συμπιεστικό. Αφού η ακολουθία $F(u_n)$ είναι φραγμένη, προκύπτει ότι, η (u_n) είναι επίσης φραγμένη, και συνεπώς έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Ως παράδειγμα συνάρτησης, που δεν ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη, αναφέρουμε την $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(u) = cosu$, θεωρώντας την ακολουθία (u_n) με $u_n = n\pi$. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στα [33], [61]. Μία άμεση εφαρμογή της συνθήκης (PS) είναι το Θεώρημα Ορεινής Διάβασης.

Θεώρημα 1.2.4 *Έστω Q είναι ένας χώρος Banach και $F : X \to \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό συνεχώς διαφορίσιμο κατά Fréchet. Αν*

(H_1) *το* F *ικανοποιεί την συνθήκη* $Palais - Smale$,

(H_2) *υπάρχουν σταθερές* $r, a > 0$ *τέτοιες ώστε* $F(0) < a, |F(u)| > a$ *αν* $||u|| = r$,

(H_3) *υπάρχει ένα στοιχείο* w *με* $||w|| > r$ *για το οποίο ισχύει* $F(w) < a$.

Έστω K *το σύνολο όλων των συνεχών απεικονίσεων (μονοπατιών)* $p : [0,1] \to X$ *με* $p(0) = 0$ *και* $p(1) = w$. *Επιπλέον, θέτουμε*

$$c := inf_{p \in K} sup_{0 \leq t \leq 1} F(p(t)).$$

Τότε υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο u *του* F *τέτοιο ώστε* $F(u) = c$ *και* $c > a$.

Για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [8].

1.2.2 Η μέθοδος των ινώσεων $(fibering)$

Η μέθοδος των ινώσεων $fibering$ χρησιμοποιείται για την μελέτη μεταβολικών προβλημάτων. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ ένα κατά $Fréchet$ διαφορίσιμο συναρτησιακό στο χώρο $Banach$ X. Ορίζουμε το συναρτησιακό $\tilde{f}$ στον $\mathbb{R} \times X$ ως εξής:

$$\tilde{f}(t, v) = f(tv), \tag{1.1}$$

Θα αναζητήσουμε τα κρίσιμα σημεία της $\tilde{f}$ υπό τη συνθήκη $H(v) = c$ όπου το $H : E \to \mathbb{R}$ είναι ένα διαφορίσιμο συναρτησιακό. Το παρακάτω Λήμμα αποδεικνύει ότι τα κρίσιμα σημεία της $\tilde{f}$ στο σύνολο $\{x \in X : H(v) = c\}$ παρέχουν κρίσιμα σημεία για την f.

Λήμμα 1.2.1 *Έστω* $H : E \to \mathbb{R}$ *ένα διαφορίσιμο συναρτησιακό στον* $X \setminus 0$, *το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$< H'(v), v > \neq 0 \text{ αν } H(v) = 1.$$

Αν v *είναι ένα υπό συνθήκη κρίσιμο σημείο της* $\tilde{f}$, *υπό τον περιορισμό* $H(v) = 1$, *τότε η* $u := r(v)v$ *είναι ένα κρίσιμο σημείο της* $f(.)$.

Η μέθοδος των ινώσεων αποδίδεται στον $Pohozaev$. Για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [48]

1.2.3 Θεωρήματα σταθερού σημείου

Δύο διακριτές κλάσεις θεωρημάτων σταθερού σημείου σχετίζονται με
(i) *strict contractions*,

(ii) συμπαγείς απεικονίσεις
Για τα παρακάτω υποθέτουμε ότι ο X ένας χώρος *Banach*.

1.2.4 Το Θεώρημα σταθερού σημείου του *Banach*

Θεώρημα 1.2.5 *Έστω ότι η συνάρτηση*

$$A \,:\, X \to X$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$||A(u) - A(\tilde{u})|| \leq \gamma ||u - u|| \tag{1.2}$$

για κάθε $(u, \tilde{u} \in X)$ *και κάποιο* $\gamma < 1$. *Τότε η* A *έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο.*

Ορισμός: Αν η A ικανοποιεί την (1.2) θα λέγεται *strict contraction*.

1.2.5 Το Θεώρημα σταθερού σημείου του *Schauder*

Θεώρημα 1.2.6 *Έστω ότι το* $K \subset X$ *είναι συμπαγές και κυρτό και η απεικόνιση*

$$A \quad : K \to K$$

είναι συνεχής. Τότε η A *έχει ένα σταθερό σημείο στο* K.

Οι αποδείξεις των θεωρημάτων αυτής της ενότητας είναι διαθέσιμες στο [33].

1.3 Ανισότητες Sobolev

Θεώρημα 1.3.1 $(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)$ *Αν* $1 \leq p < N$ *τότε*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

όπου $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, *και υπάρχει σταθερά* $C(p,N)$ *τέτοια ώστε*

$$||u||_{L^{p*}(\mathbb{R}^N)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

για κάθε $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Όταν το Ω είναι ένα τυχαίο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και $1 \leq p < N$, τότε

$$||u||_{L^{p*}(\Omega)} \leq C(p,N)||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$$

για κάθε $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Θεώρημα 1.3.2 *(Ανισότητα Poincaré) Υποθέτουμε ότι το* Ω *είναι ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^N$. *Τότε υπάρχει σταθερά* $C(p,\Omega)$ *τέτοια ώστε*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C(p,N)||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$$

για κάθε $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad (1 \leq p < \infty)$

Θεώρημα 1.3.3 *(***Rellich-Kondrachov***)*
Έστω Ω *ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^N$ *με λείο σύνορο. Τότε*

(1) *αν* $p < N$ *τότε* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *όπου* $q \in [1, p^*)$ *και* $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$

(2) *αν* $p = N$ *τότε* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *για κάθε* $q \in [1, +\infty)$,

(3) *αν* $p > N$ *τότε* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\Omega)$
και οι ενσφηνώσεις είναι συμπαγείς.

Κεφάλαιο 2

Μελέτη της ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης ψευδογραμμικού συστήματος

2.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

Εδώ μελετάμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα θετικών λύσεων του ψευδογραμμικού ελλειπτικού συστήματος

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= f(x,u,v) \ \textit{στο}\, \Omega, \\ -\Delta_q v &= g(x,u,v) \ \textit{στο}\, \Omega, \\ u = v &= 0 \quad \textit{στο}\, \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

με *Dirichlet* συνοριακές συνθήκες σε φραγμένο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.

2.2 Αναδρομή προηγούμενων αποτελεσμάτων

Σ' αυτή την ενότητα δίνουμε αποτελέσματα ύπαρξης και μοναδικότητας θετικών λύσεων του ασθενώς συνδεδεμένου (*weakly coupled*) ψευδογραμμικού ελλειπτικού συστήματος (2.1), όπου Ω είναι μία φραγμένη περιοχή στο $\mathbb{R}^N$ με λείο σύνορο $\partial\Omega$ και οι συναρτήσεις $f, g : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ είναι συνεχείς. Όπως συνήθως για $s > 1$, το $\Delta_s u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{s-2}\nabla u)$ συμβολίζει τον τελεστή *s-Laplace*. Οι ελλειπτικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν τον τελεστή *s-Laplace* χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων όπως

(1) η ροή των ρευστών. Όταν $s = 2$ ο τελεστής χρησιμοποιείται για τα Νευτώνεια ρευστά [12], όταν $s \in (1, 2)$ χρησιμοποιείται για τα ψεύδο-πλαστικά μη-Νευτώνεια ρευστά και όταν $s > 2$ για τα διασταλτικά μη-Νευτώνεια ρευστά:

- δυναμικά ρευστά. Η *shear stress* $\overrightarrow{\tau}(x)$ και η κλίση ∇u της ταχύτητας του ρευστού συνδέονται διαμέσω της εξίσωσης $\overrightarrow{\tau}(x) = r(x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)$.

- ροή πορωδών μέσων (για παράδειγμα στη ροή στα φράγματα με μη-ομαλά τοιχώματα), όπου $s = 3/2$, [52].

- μη-γραμμική ελαστικότητα, όπου $s \geq 2$, [46], [62].

- *Glaciology*, όταν $s \in (1, 4/3]$,[47].

- αποκατάσταση εικόνας, όταν $s \in [1, 2]$, αναφέρουμε τα [19], [23].

(2) χημικές αντιδράσεις,

(3) διαμόρφωση προτύπων (*pattern formation*)

(4) ανάπτυξη πληθυσμών, εδώ τα u, v παριστάνουν δύο ανταγωνιστούς πληθυσμούς, κατά συνέπεια παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον οι θετικές λύσεις του (2.1).
Έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετές μέθοδοι για να αντιμετωπιστούν οι ψευδογραμμικές εξισώσεις και τα ψευδογραμμικά συστήματα. Στην μονοδιάστατη περίπτωση, οι ασθενείς λύσεις μπορούν να αναζητηθούν μέσω μεταβολικών μεθόδων που παρέχουν κρίσιμα σημεία του αντίστοιχου συναρτησοειδούς ενέργειας, μια προσέγγιση επίσης καρποφόρα και στην περίπτωση δυναμικών συστημάτων, όπου για παράδειγμα η μη-γραμμικότητα του δεξιού μέλους είναι η κατά κατεύθυνση παράγωγος ενός C^1- συναρτησοειδούς [7], [36], [55]. Όμως λόγω έλλειψης της μεταβολικής δομής η αντιμετώπιση των μη μεταβολικών συστημάτων όπως του (2.1) είναι πιο πολύπλοκη και βασίζεται σε τοπολογικές μεθόδους

[5]. Πρόσφατα έχουν γίνει σημαντικές μελέτες του (2.1). Ο *Dalmasso* [28] εξασφάλισε ύπαρξη και μοναδικότητα θετικών λύσεων στην ημιγραμμική περίπτωση $p = q = 2$ με την προυπόθεση ότι η f είναι συνάρτηση μόνο του v και η g είναι συνάρτηση μόνο του u, δηλαδή, το (2.1) είναι ένα σύστημα Lane-Emden. Τα αποτελέσματα της ύπαρξης στην περίπτωση όπου οι f και g είναι μονώνυμα των u και v εξασφαλίζονται επίσης στο [27], ενώ το ημιγραμμικό σύστημα των Lane-Emden μελετήθηκε από τον *Hai* [39]. Στην εργασία αυτή υιοθετούμε τη μέθοδο που χρησιμοποιείται στο [39] για να συμπληρώσουμε και να επεκτείνουμε τα αποτελέσματα των προαναφερθέντων εργασιών.

2.3 Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης

Υποθέτουμε ότι:

(H1) οι $f, g : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε:
(i) οι $u \to f(x, u, v)$ και $u \to g(x, u, v)$ είναι μη φθίνουσες για κάθε $x \in \overline{\Omega}$ και $v \geq 0$.
(ii) οι $v \to f(x, u, v)$ και $v \to g(x, u, v)$ είναι μη φθίνουσες για κάθε $x \in \overline{\Omega}$ και $u \geq 0$.

(H2) Για κάθε $a > 0$,

$$\limsup_{z \to 0^+} \frac{h^{\frac{1}{p-1}}(z, ak^{\frac{1}{q-1}}(z, z))}{z} = \infty,$$

όπου

$$h(u, v) := \min_{x \in \overline{\Omega}} f(x, u, v)$$

και

$$k(u, v) := \min_{x \in \overline{\Omega}} g(x, u, v).$$

(H3) Για κάθε $b > 0$,

$$\liminf_{z \to +\infty} \frac{F^{\frac{1}{p-1}}(z, bG^{\frac{1}{q-1}}(z, z))}{z} = 0,$$

όπου

$$F(u, v) := \max_{x \in \overline{\Omega}} f(x, u, v)$$

και

$$G(u,v) := \max_{x\in\overline{\Omega}} g(x,u,v).$$

(H4)

$$\liminf_{z\to+\infty} \frac{G^{\frac{1}{q-1}}(z,z)}{z} = 0$$

και

$$\limsup_{z\to 0^+} \frac{k^{\frac{1}{q-1}}(z,z)}{z} = \infty.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η D είναι μία υποπεριοχή του Ω με $\overline{D} \subset \Omega$. Έστω $\delta(.) := \chi_D(.)$, η χαρακτηριστική συνάρτηση της D. Οι λύσεις $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$ των προβλημάτων

$$-\Delta_p \widetilde{\varphi} = \delta \quad \sigma\tau o \quad \Omega,$$

$$\widetilde{\varphi} = 0 \quad \sigma\tau o \quad \partial\Omega$$

και

$$-\Delta_q \widetilde{\psi} = \delta \quad \sigma\tau o \quad \Omega,$$

$$\widetilde{\psi} = 0 \quad \sigma\tau o \quad \partial\Omega$$

θα χρησιμεύσουν παρακάτω. Έστω φ (αντίστοιχα ψ) οι συναρτήσεις στρέψης για τους τελεστές $-\Delta_p$ (αντίστοιχα $-\Delta_q$), δηλαδή,

$$\begin{aligned} -\Delta_p \varphi = 1 \quad \sigma\tau o \quad \Omega, \\ \varphi = 0 \quad \sigma\tau o \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

και

$$\begin{aligned} -\Delta_q \psi = 1 \quad \sigma\tau o \quad \Omega, \\ \psi = 0 \quad \sigma\tau o \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Παρατηρούμε ότι από την ισχυρή αρχή συγκρίσεως [38], υπάρχουν θετικοί αριθμοί M και m τέτοιοι ώστε $\widetilde{\varphi} \geq M\varphi$, $\widetilde{\psi} \geq M\psi$ στο Ω και $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}, \varphi, \psi \geq m$ στο $\overline{D}$. Παραθέτουμε τώρα τα αποτελέσματα ύπαρξης και μοναδικότητας.

Θεώρημα 2.3.1 *Έστω ότι οι f, g ικανοποιούν τις (H1)-(H4). Τότε η 2.1 έχει μία θετική λύση (u,v).*

Θεώρημα 2.3.2 *Έστω ότι οι f, g ικανοποιούν την (H1) και υποθέτουμε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές r_1, r_2, s_1, s_2 τέτοιες ώστε οι $\frac{f(x,s,t)}{s^{r_1}}, \frac{g(x,s,t)}{s^{s_1}}$ είναι μη-αύξουσες για $x \in \overline{\Omega}$ και $t \geq 0$, και $\frac{f(x,s,t)}{t^{r_2}}, \quad \frac{g(x,s,t)}{t^{s_2}}$ είναι μη-αύξουσες για $x \in \overline{\Omega}$ και $s \geq 0$. Εάν μία από τις παρακάτω συνθήκες ικανοποιείται:*

(i) $\frac{r_1+r_2}{p-1} < 1$ *και* $\frac{(r_1+r_2)s_1+s_2(p-1)}{(p-1)(q-1)} < 1$,

(ii) $\frac{s_1+s_2}{q-1} < 1$ *και* $\frac{(s_1+s_2)r_2+r_1(q-1)}{(p-1)(q-1)} < 1$,

(iii) $\frac{s_1+s_2}{q-1} < 1$ *και* $\frac{r_1+r_2}{p-1} < 1$,

(iv) $\frac{r_1+r_2}{p-1} > 1$, $\frac{s_1+s_2}{q-1} < 1$ *και* $\frac{(r_1+r_2)(q-1)r_1+(s_1+s_2)(p-1)r_2}{(p-1)(q-1)^2} < 1$,

(v) $\frac{r_1+r_2}{p-1} < 1$, $\frac{s_1+s_2}{q-1} > 1$ *και* $\frac{(r_1+r_2)(q-1)s_1+(s_1+s_2)(p-1)s_2}{(p-1)^2(q-1)} < 1$,

τότε η (2.1) *έχει το πολύ μία θετική λύση.*

Παραδείγματα Το Θεώρημα 2.3.1 εφαρμόζεται όταν (i) $f(u,v) = u^\alpha + v^\beta$ και $g(u,v) = u^\gamma + v^\delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, και οι $(H2) - H(4)$ ικανοποιούνται

$$\alpha < p-1, \quad \max\{\gamma, \delta\} < q-1,$$

και

$$\max\{\gamma, \delta\}\beta < (p-1)(q-1).$$

(ii) $f(u,v) = u^\alpha v^\beta$ και $g(u,v) = u^\gamma v^\delta$ και οι(H2)-H(4) ικανοποιούνται αν ισχύει

$$\alpha + \frac{\gamma+\delta}{q-1}\beta < p-1$$

και

$$\gamma + \delta < q-1.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1
Ενόψη των (H2) και (H4), υπάρχει $\varepsilon \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$Mh^{\frac{1}{p-1}}(\varepsilon m, mg^{\frac{1}{q-1}}(\varepsilon m, \varepsilon m)) \geq \varepsilon$$

και

$$Mk^{\frac{1}{q-1}}(\varepsilon m,\varepsilon m)\geq\varepsilon. \tag{2.4}$$

Για $(w_1,w_2)\in C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})$, έστω $T(w_1,w_2):=(u,v)$ είναι μία λύση του

$$-\Delta_p u=f(x,\max(w_{1,}\varepsilon\varphi),v)\quad \sigma\tau o\quad \Omega$$
$$-\Delta_q v=g(x,\max(w_{1,}\varepsilon\varphi),\max(w_{2,}\varepsilon\psi))\quad \sigma\tau o\,\Omega$$
$$u=v=0\quad \sigma\tau o\,\Omega$$

Εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$T:C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})\to C(\overline{\Omega})\times C(\overline{\Omega})$$

είναι απόλυτα συνεχής. Από τις (H3) και (H4) υπάρχει ένας αριθμός $R>\max\{|\varphi|_\infty,|\psi|_\infty\}$ τέτοιος ώστε

$$F^{\frac{1}{p-1}}(R,|\psi|_\infty G^{\frac{1}{q-1}}(R,R))|\varphi|_\infty\leq R,$$
$$G^{\frac{1}{q-1}}(R,R)|\psi|_\infty\leq R.$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$T(\overline{B}(0,R)\times\overline{B}(0,R))\subseteq\overline{B}(0,R)\times\overline{B}(0,R),$$

όπου με $\overline{B}(0,R)$ δηλώνουμε την κλειστή μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα R στο $C(\overline{\Omega})$. Πράγματι, έστω $w_1,w_2\in C(\overline{\Omega})$, με $|w_1|_\infty\leq R$ και $|w_2|_\infty\leq R$. Τότε, ενόψη του (2.3),

$$-\Delta_q v=g(x,\max(w_{1,}\varepsilon\varphi),\max(w_{2,}\varepsilon\psi))$$

$$\leq G(R,R)(-\Delta_q\psi)=-\Delta_q(G^{\frac{1}{q-1}}(R,R)\psi)\quad \sigma\tau o\,\Omega,$$

η οποία από την Αρχή Ισχυρής Συγκρίσεως [38] δίνει ότι

$$v\leq G^{\frac{1}{q-1}}(R,R)\psi.$$

Συνεπώς,

$$|v|_\infty\leq R.$$

Επίσης,

$$-\Delta_p u=f(x,\max(w_{1,}\varepsilon\varphi),v)\leq F(R,v)$$
$$\leq F(R,G^{\frac{1}{q-1}}(R,R)\psi)\leq F(R,G^{\frac{1}{q-1}}(R,R)|\psi|_\infty),$$

η οποία, από την Αρχή Ισχυρής Συγκρίσεως, δίνει ότι

$$u \leq F^{\frac{1}{p-1}}(R, g^{\frac{1}{q-1}}(R,R)|\psi|_\infty)|\varphi|_\infty \leq R,$$

οπότε $|u|_\infty \leq R$, αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό.

Από το θεώρημα σταθερού σημείου του *Schauder* η T έχει ένα σταθερό σημείο (u,v) με $|u|_\infty \leq R$ και $|v|_\infty \leq R$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $|u|_\infty \geq \varepsilon\varphi$ και $|v|_\infty \geq \varepsilon\psi$. Επειδή

$$\begin{aligned} -\Delta_q v = g(x, \max(u,\varepsilon\varphi), \max(v,\varepsilon\psi)) &\geq g(x,\varepsilon\varphi,\varepsilon\psi) \\ &\geq \begin{cases} g(x,\varepsilon m,\varepsilon m) & \textit{στο } \overline{D}, \\ 0 & \textit{στο } \Omega\backslash\overline{D}, \end{cases} \\ &\geq \begin{cases} k(\varepsilon m,\varepsilon m) & \textit{στο } \overline{D}, \\ 0 & \textit{στο } \Omega\backslash\overline{D}, \end{cases} \end{aligned}$$

έπεται από την Αρχή Ισχυρής Συγκρίσεως ότι

$$v \geq k^{\frac{1}{q-1}}(\varepsilon m,\varepsilon m)\widetilde{\psi} \geq Mk^{\frac{1}{q-1}}(\varepsilon m,\varepsilon m)\psi \geq \varepsilon\psi.$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} -\Delta_p u = f(x,\max(u,\varepsilon\varphi),v) &\geq f(x,\max(u,\varepsilon\varphi), k^{\frac{1}{q-1}}(\varepsilon m,\varepsilon m)\widetilde{\psi}) \\ &\geq \begin{cases} f(x,\max(u,\varepsilon\varphi), k^{\frac{1}{q-1}}(\varepsilon m,\varepsilon m)m) & \textit{στο } \overline{D}, \\ 0 & \textit{στο } \Omega\backslash\overline{D}, \end{cases} \\ &\geq \begin{cases} h(\varepsilon m, mk^{\frac{1}{q-1}}(\varepsilon m,\varepsilon m)m)) & \textit{στο } \overline{D}, \\ 0 & \textit{στο } \Omega\backslash\overline{D}, \end{cases} \end{aligned}$$

συνεπώς

$$u \geq h^{\frac{1}{p-1}}(\varepsilon m, k^{\frac{1}{q-1}}(\varepsilon m,\varepsilon m)m)\widetilde{\varphi} \geq Mh^{\frac{1}{p-1}}(\varepsilon m, mk^{\frac{1}{q-1}}(\varepsilon m,\varepsilon m)) \geq \varepsilon\varphi,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Απόδειξη του θεωρήματος 2.3.2

Θα δώσουμε την απόδειξη στις περιπτώσεις $(i),(iii)$ και (iv). Έστω (u,v) και (u_1,v_1) θετικές λύσεις της (1). Όπως στο [21], ορίζουμε

$$\Delta = \{\ \delta_1 \in\ (0,1] : u \geq \varepsilon u_1 \textit{ και } v \geq \varepsilon v_1 \textit{ στο } \overline{\Omega} \textit{ για } \varepsilon \in\ [0,\delta_1]\}.$$

Προφανώς $\Delta \neq \emptyset$. Έστω $\delta = \sup \Delta$. Θα δείξουμε ότι $\delta = 1$. Υποθέτουμε ότι $\delta < 1$. Αν η (i) ισχύει. Τότε

$$-\Delta_p u \geq f(x, \delta u_1, v) \geq \delta^{r_1} f(x, u_1, v) \geq \delta^{r_1}\delta^{r_2} f(x, u_1, v_1) = \delta^{r_1+r_2} f(x, u_1, v_1),$$

και επειδή

$$-\Delta_p(\delta^{\frac{r_1+r_2}{p-1}} u_1) = \delta^{r_1+r_2} f(x, u_1, v_1),$$

έπεται ότι

$$u \geq \delta^{\frac{r_1+r_2}{p-1}} u_1. \tag{2.5}$$

Συνδυάζοντας την (2.5) με την (2.1), παίρνουμε ότι

$$-\Delta_q v \geq g(x, \delta^{\frac{r_1+r_2}{p-1}} u_1, v) \geq g(x, \delta^{\frac{r_1+r_2}{p-1}} u_1, \delta v_1) \geq \delta^{\frac{(r_1+r_2)s_1}{p-1}} g(x, u_1, \delta v_1).$$

επομένως,

$$-\Delta_q v \geq \delta^{\frac{(r_1+r_2)s_1}{p-1}} \delta^{s_2} g(x, u_1, v_1) \geq \delta^{\frac{(r_1+r_2)s_1+s_2(p-1)}{(p-1)}} g(x, u_1, v_1),$$

και έτσι

$$v \geq \delta^{\frac{(r_1+r_2)s_1+s_2(p-1)}{(p-1)(q-1)}} v_1, \tag{2.6}$$

το οποίο αντιβαίνει με στον ορισμό του δ.
Στην περίπτωση (iii) έχουμε

$$-\Delta_q v \geq g(x, \delta u_1, v) \geq \delta^{s_1} g(x, u_1, v)$$

$$\geq \delta^{s_1}\delta^{s_2} g(x, u_1, v_1) = \delta^{s_1+s_2} g(x, u_1, v_1).$$

Επειδή

$$-\Delta_q(\delta^{\frac{s_1+s_2}{q-1}} v_1) = \delta^{s_1+s_2} g(x, u_1, v_1),$$

έπεται ότι

$$v \geq \delta^{\frac{s_1+s_2}{q-1}} v_1. \tag{2.7}$$

Ενόψη των ανισοτήτων (2.5) και (2.7) καταλήγουμε σε άτοπο από τον ορισμό του δ.
Υποθέτουμε τώρα ότι η (iv) ισχύει. Δουλεύοντας όπως στην (2.5) έχουμε ότι

$$u \geq \delta^{\frac{s_1+s_2}{q-1}} v_1. \tag{2.8}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.5) και (2.8) στην πρώτη εξίσωση του συστήματος έχουμε ότι

$$-\Delta_p u \geq f(x, \delta^{\frac{r_1+r_2}{p-1}} u_1, \delta^{\frac{s_1+s_2}{q-1}} v_1) \tag{2.9}$$

$$\geq \delta^{\frac{(r_1+r_2)(q-1)r_1+(s_1+s_2)(p-1)r_2}{(q-1)(p-1)}} f(x, u_1, v_1) \tag{2.10}$$

$$= -\delta^{\frac{(r_1+r_2)(q-1)r_1+(s_1+s_2)(p-1)r_2}{(q-1)(p-1)}} \Delta_p u_1. \tag{2.11}$$

Συνεπώς,

$$u \geq \delta^{\frac{(r_1+r_2)(q-1)r_1+(s_1+s_2)(p-1)r_2}{(p-1)^2(q-1)}} u_1.$$

Επίσης

$$-\Delta_q v \geq g(x, \delta^{\frac{r_1+r_2}{p-1}} u_1, \delta^{\frac{s_1+s_2}{q-1}} v_1) \geq \delta^{\frac{(r_1+r_2)(q-1)r_1+(s_1+s_2)(p-1)r_2}{(q-1)(p-1)}} g(x, u_1, v_1)$$

$$= -\delta^{\frac{(r_1+r_2)(q-1)r_1+(s_1+s_2)(p-1)r_2}{(q-1)(p-1)}} \Delta_q v_1.$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι,

$$v \geq \delta^{\frac{(r_1+r_2)(q-1)r_1+(s_1+s_2)(p-1)r_2}{(p-1)(q-1)^2}} v_1,$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο από τον ορισμό του δ. Άρα $\delta = 1$, δηλαδή, $v \geq v_1$ και $u \geq u_1$. Ομοίως, $v \leq v_1$ και $u \leq u_1$. Συνεπώς, $u = u_1$ και $v = v_1$.

Κεφάλαιο 3

Ύπαρξη λύσεων σε αόριστο ένα ελλειπτικό πρόβλημα τύπου **p-q Laplacian**

3.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

Μελετάμε το αόριστο ($indefinite$) ψευδογραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} -\Delta u - \Delta_p u = a(x)|u|^{q-2}u - b(x)|u|^{s-2}u \quad & \textit{στο}\ \Omega, \\ u = 0 \quad & \textit{στο}\ \partial\Omega, \end{aligned}$$

όπου Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο στο $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, με ένα επαρκώς λείο σύνορο, q, s είναι υποκρίσιμοι εκθέτες, η $a(\cdot)$ αλλάζει πρόσημο και $b(x) \geq 0$ σ..π. στο Ω. Οι αποδείξεις μας είναι μεταβολικού ($variational$) τύπου και είναι βασίζονται είτε στην μέθοδο των ινώσεων είτε στο θεώρημα Ορεινής Διάβασης.

3.2 Αναδρομή προηγούμενων αποτελεσμάτων

Έστω Ω φραγμένη περιοχή στον $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, με επαρκώς λείο σύνορο $\partial\Omega$. Θεωρούμε τη μη-γραμμική εξίσωση

$$-\Delta_q u - \Delta_p u = f(x, u) \quad \textit{στο}\ \Omega \tag{3.1}$$

με $Dirichlet$ συνοριακή συνθήκη

$$u = 0 \quad \sigma\tau o \ \partial\Omega, \tag{3.2}$$

όπου $p, q \in (1, N)$, και $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μιά $Caratheodory$ συνάρτηση. Οι λύσεις της (3.1) είναι στάσιμες ($stationary$) λύσεις του συστήματος αντίδρασης -διάχυσης

$$u_t = div(A(u)\nabla u) + f(x, u), \tag{3.3}$$

οπου $A(u) = (|\nabla u|^{q-2} + |\nabla u|^{p-2})$. Αυτό το σύστημα έχει ευρύ φάσμα εφαρμογών στις φυσικές επιστήμες όπως στις χημικές αντιδράσεις [11], στην βιοφυσική [35] και φυσική πλάσματος [56]. Η συνάρτηση u περιγράφει τη συγκέντρωση ενός μεγέθους, $div(A(u)\nabla u)$ αντιστοιχεί στη διάχυση με συντελεστές διάχυσης τις $A(u)$ και $f(\cdot, \cdot)$ να αναπαριστούν την αντίδραση.

Η εξίσωση (3.1) εμφανίζεται επίσης στη μελέτη των σολιτονικών λύσεων της μη-γραμμικής $Schrödinger$ εξίσωσης

$$i\psi_t = -\Delta\psi - \Delta_p\psi + f(x, \psi)$$

που μελετήθηκε από τον $Derrick$ στο [29] ως ένα μοντέλο για στοιχειώδη σωματίδια.

Όταν $p = q = 2$, η 3.1 είναι μία κανονική $Schrödinger$ εξίσωση η οποία έχει μελετηθεί εκτενώς, αναφέρομαστε στα [13, 16, 17]. Πρόσφατα, το πρόβλημα όταν $m = 2 \neq q$ και

$$f(x, u) = V'(u)$$

έχει μελετηθεί στο [14] όπου αποδεικνύεται ότι η (3.1) έχει μία ασθενή λύση. Το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$-\Delta u + V(x)u + \varepsilon^r(-\Delta_p u + W'(u)) = \mu u$$

εξετάστηκε στο [15] σε σχέση με τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών καθώς το $\varepsilon \to 0$. Στο [26] έχει μελετηθεί η περίπτωση όπου $m \neq p$ και

$$f(x, u) = \lambda a(x)|u|^{\gamma-2}u - b(x)|u|^{m-2}u - c(x)|u|^{p-2}u$$

όπου επίσης παρουσιάζεται ένα αποτέλεσμα διακλάδωσης. Στο [41] παρέχεται μία λύση υπό την υπόθεση ότι

$$f(x, u) = g(x, u) - b(x)|u|^{m-2}u - c(x)|u|^{p-2}u \tag{3.4}$$

και η συνάρτηση $g(\cdot,\cdot)$ δεν ικανοποιεί την συνθήκη $Ambrosetti - Rabinowitz$:

$$0 \leq G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds \leq \frac{1}{p+\theta} g(x,u)u, \text{ όταν } (x,u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+.$$

Η $C^{1,\delta}$-ομαλότητα των λύσεων του προβλήματος (3.1) αποδεικνύεται στο [40]. Η μέθοδος ελαχιστοποίησης τουθ συναρτησιακού ενέργειας υπό συνθήκη υιοθετείται στο [59]

$$\int_{\mathbb{R}^N} [b(x)|u|^q - c(x)|u|^p u]dx = \lambda$$

υιοθετείται στο [59] όταν η $f(\cdot,\cdot)$ ικανοποιεί την (3.4) για να αποδείξει ότι η (3.1) έχει μία λύση για $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $\lambda_0 > 0$. Επαρκείς συνθήκες για την ύπαρξη δύο λύσεων του προβλήματος (3.1) δίνονται στο [44].

Σ' αυτό το Κεφάλαιο μελετάμε το πρόβλημα

$$-\Delta u - \Delta_p u = a(x)|u|^{q-2}u - b(x)|u|^{s-2}u \quad \text{στο } \Omega, \tag{3.5}$$

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \tag{3.6}$$

όπου οι εκθέτες q, s είναι υποκρίσιμοι και οι $a(\cdot), b(\cdot)$ είναι ουσιωδώς φραγμένες συναρτήσεις, η $a(\cdot)$ αλλάζει πρόσημο ενώ $b(\cdot) \geq 0$ σ.π στο Ω. Οι αποδείξεις μας βασίζονται είτε στη μέθοδο των ινώσεων του $Pohozaev$ [49] είτε στο Θεώρημα Ορεινής Διάβασης των $Ambrosetti - Rabinowitz$ [8].

Λόγω συμμετρίας, θα παρουσιάσουμε τις περιπτώσεις όπου $p < 2$.

3.3 Αποτελέσματα ύπαρξης λύσης

Κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις για τα δεδομένα του προβλήματος (3.5) – (3.6):

(H0) $1 < s, q < 2^*$.

(H1) $a(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ και $a_+ := \max\{a, 0\} \neq 0$.

(H2) $b(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ και $b(x) \geq 0$ σ.π στο Ω.

Εξετάζουμε το πρόβλημα στο χώρο

$$E := H_0^1(\Omega),$$

που εφοδιάζεται με τη νόρμα $\|\upsilon\|_E = \|\nabla \upsilon\|_2$. Το συναρτησοειδές ενέργειας $\Phi : E \to \mathbb{R}$ του προβλήματος (3.5) – (3.6) είναι

$$\Phi(\upsilon) := \frac{1}{p}\|\nabla \upsilon\|_p^p + \frac{1}{2}\|\nabla \upsilon\|_2^2 - \frac{1}{q}A(\upsilon) + \frac{1}{s}B(\upsilon), \tag{3.7}$$

όπου

$$A(\upsilon) := \int_\Omega a(x)|\upsilon|^q dx \ \ \textit{και} \ \ B(\upsilon) := \int_\Omega b(x)|\upsilon|^s dx.$$

Για τον εντοπισμό μη-αρνητικών κρίσιμων σημείων της $\Phi(\cdot)$ χρησιμοποιούμε την μέθοδο των ινώσεων. Για αυτό αναλύουμε την συνάρτηση $u \in E$ ως $u = r\upsilon$, όπου $r \in \mathbb{R}$, $\upsilon \in E$, και ορίζουμε το επεκτεταμένο συναρτησοειδές $F(\cdot,\cdot)$ σχετικό με την $\Phi(\cdot)$ ως

$$F(r,\upsilon) := \Phi(r\upsilon) = \frac{|r|^p}{p}\|\nabla \upsilon\|_p^p + \frac{|r|^2}{2}\|\nabla \upsilon\|_2^2 - \frac{|r|^q}{q}A(\upsilon) + \frac{|r|^s}{s}B(\upsilon). \tag{3.8}$$

Αν $u = r\upsilon$ είναι ένα κρίσιμο σημείο της $\Phi(\cdot)$, τότε έχουμε

$$F_r(r,\upsilon) = 0. \tag{3.9}$$

Προφανώς η (3.9) είναι ισοδύναμη με την

$$r^2\|\nabla \upsilon\|_2^2 + r^p\|\nabla \upsilon\|_p^p = r^q A(\upsilon) - r^s B(\upsilon). \tag{3.10}$$

Έστω ότι η $r := r(\upsilon)$ να είναι θετική λύση της (3.10). Ορίζουμε το επαγόμενο συναρτησοειδές $\hat{\Phi}(\upsilon) := \Phi(r(\upsilon)\upsilon)$, $\upsilon \in E$, το οποίο, εν'οψη της (3.10), έχει τις ακόλουθες ισοδύναμες εκφράσεις

$$\hat{\Phi}(\upsilon) := r^2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{p})\|\nabla \upsilon\|_2^2 + r^q(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q})A(\upsilon) + r^s(\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{p})B(\upsilon) \tag{3.11}$$

$$= r^q(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q})\|\nabla \upsilon\|_p^p + r^2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{q})\|\nabla \upsilon\|_2^2 + r^s(\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{q})B(\upsilon) \tag{3.12}$$

$$= r^p(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{s})\|\nabla \upsilon\|_p^p + r^2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{s})\|\nabla \upsilon\|_2^2 + r^q(\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{q})A(\upsilon) \tag{3.13}$$

$$= r^p(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{2})\|\nabla \upsilon\|_p^p + r^q(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{q})A(\upsilon) + r^s(\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{2})B(\upsilon) \tag{3.14}$$

Η μέθοδος των ινώσεων βασίζεται στο ακόλουθο γεγονός,[32], [43], [49].

Λήμμα 3.3.1 *Έστω $H : E \to \mathbb{R}$ ένα συναρτησοειδές συνεχώς κατά Fréchet-διαφορίσιμο στο $E\backslash\{0\}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

$$\langle H'(v), v\rangle \neq 0 \quad \text{αν } H(v) = 1,$$

και $H(0) = 0$. Αν $v \neq 0$ είναι ένα υπό συνθήκη κρίσιμο σημείο της $\hat{\Phi}(\cdot)$ κάτω από τους περιορισμούς $H(v) = 1$, τότε $u := r(v)v$ είναι ένα μη μηδενικό κρίσιμο σημείο της $\Phi(\cdot)$.

Περισσότερες λεπτομέρειες αναφέρονται στην [32]. Ως περιορισμό θα χρησιμοποιήσουμε το συναρτησοειδές

$$H(v) := \|\nabla v\|_p^p + \|\nabla v\|_2^2$$

πού πραφανώς ικανοποιεί τις δύο συνθήκες του Λήμματος 3.3.1. Έστω

$$S^1 := \{v \in E : H(v) = 1\}. \tag{3.15}$$

Παρατηρούμε ότι, λόγω της υπόθεσης $(H1)$, το σύνολο

$$G_1 := \{v \in E : A(v) > 0\}$$

είναι μη κενό.

Περίπτωση 1: $q < \min\{p, s, 2\}$

Θα εργαστούμε όπως στα [32, 42, 43]. Από την (3.10) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση

$$r^{p-q}\|\nabla v\|_p^p + r^{2-q}\|\nabla v\|_2^2 + r^{s-q}B(v) = A(v), \tag{3.16}$$

η οποία έχει μία μοναδική λύση $r(v) > 0$ για κάθε $v \in G_1$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $r(v)v = r(kv)kv$ για κάθε $k > 0$. Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης, έχουμε ότι $r(\cdot) \in C^1(G_1)$. Αν $v \in S^1$ τότε από την ανισότητα *Hölder* συνεπάγεται ότι $\|\nabla v\|_2^2 \geq \theta$ για κάποιο $\theta > 0$ και έτσι, από την (3.16), η $r(\cdot)$ είναι φραγμένη στο $G_1 \cap S^1$ επειδή η $A(\cdot)$ είναι φραγμένη στον S^1 από το θεώρημα του $Rellich - Kondrachov$. Συνεπώς, η $\hat{\Phi}(\cdot)$ είναι κάτω φραγμένη στο $G_1 \cap S^1$. Έστω

$$M = \inf_{u \in G_1 \cap S^1} \hat{\Phi}(u).$$

Από την (3.12), $M < 0$. Υποθέτουμε ότι η $\{v_n\}$ είναι μία ακολουθία ελαχιστοποίησης για την $\hat{\Phi}(\cdot)$ στο $G_1 \cap S^1$. Τότε, για τουλάχιστον μία υπακολουθία, έχουμε ότι $\upsilon_n \to \tilde{\upsilon}$ ασθενώς στο E, και έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A(\upsilon_n) \to A(\tilde{\upsilon})$ και $B(\upsilon_n) \to B(\tilde{\upsilon})$. Εκμεταλλευόμενοι την ασθενή κάτω ημι-συνέχεια της νόρμας παίρνουμε ότι

$$0 \leq \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 \leq \liminf \|\nabla\upsilon_n\|_2^2, \quad 0 \leq \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p \leq \liminf \|\nabla\upsilon_n\|_p^p.$$

Επειδή η $\{r(\upsilon_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r(\upsilon_n) \to \tilde{r}$. Επομένως,

$$\Phi(\tilde{r}\tilde{\upsilon}) \leq \liminf \Phi(r_n\upsilon_n) = M < 0,$$

που συνεπάγεται ότι $\tilde{r} > 0$ και $\tilde{\upsilon} \neq 0$. Επίσης, από την (3.16)

$$r(\upsilon_n)^{p-q}\|\nabla\upsilon_n\|_p^p + r(\upsilon_n)^{2-q}\|\nabla\upsilon_n\|_2^2 + r(\upsilon_n)^{s-q}B(\upsilon_n) = A(\upsilon_n). \tag{3.17}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι

$$0 < \tilde{r}^{p-q}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p + \tilde{r}^{2-q}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 + \tilde{r}^{s-q}B(\tilde{\upsilon}) \leq A(\tilde{\upsilon}), \tag{3.18}$$

από την οποία συνάγουμε ότι $\tilde{\upsilon} \in G_1$. Λόγω της (;;),

$$r(\tilde{\upsilon})^{p-q}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p + r(\tilde{\upsilon})^{2-q}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 + r(\tilde{\upsilon})^{s-q}B(\tilde{\upsilon}) = A(\tilde{\upsilon}), \tag{3.19}$$

και έτσι λόγω της (3.18) παίρνουμε ότι $\tilde{r} \leq r(\tilde{\upsilon}\ )$. Αν υποθέσουμε ότι $\tilde{r} < r(\tilde{\upsilon})$, τότε, αφού η συνάρτηση $t \to \Phi(t\tilde{\upsilon})$, $t \in (0, r(\tilde{\upsilon}))$, είναι γνησίως φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι

$$\hat{\Phi}(\tilde{\upsilon}) = \Phi(r(\tilde{\upsilon})\tilde{\upsilon}) < \Phi(\tilde{r}\tilde{\upsilon}) \leq M. \tag{3.20}$$

Αλλά τότε

$$\hat{\Phi}(\frac{\tilde{\upsilon}}{\|\tilde{\upsilon}\|_E}) = \hat{\Phi}(\tilde{\upsilon}) < M,$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, $\tilde{r} = r(\tilde{\upsilon})$. Από τις (3.17) και (3.19),

$$\lim_{n\to\infty}\{\|\nabla\upsilon_n\|_p^p + r(\upsilon_n)^{2-p}\|\nabla\upsilon_n\|_2^2\} = \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p + r(\tilde{\upsilon})^{2-p}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2, \tag{3.21}$$

από την οποία συνεπάγεται ότι $\|\nabla\upsilon_n\|_p^p \to \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p$ και $\|\nabla\upsilon_n\|_2^2 \to \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2$. Κατά συνέπεια, $\tilde{\upsilon} \in S^1$ και $\hat{\Phi}(\tilde{\upsilon}) = M$. Αφού η $|\tilde{\upsilon}|$ ελαχιστοποιεί επίσης την $\hat{\Phi}(\cdot)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\tilde{\upsilon} \geq 0$. Από το λήμμα 3.3.1 συνεπάγεται ότι $u := r(\tilde{\upsilon})\tilde{\upsilon}$ είναι μία λύση του (3.5) $-$ (3.6). Από το [40, *Theorem* 1], έχουμε ότι $u \in C^{1,\delta}(\Omega)$ για κάποιο $\delta \in (0,1)$. Επομένως έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3.1 *Υποθέτουμε ότι οι* (H0)-(H2) *ικανοποιούνται και* $q < \min\{p, s, 2\}$. *Τότε το πρόβλημα* $(3.5) - (3.6)$ *έχει μία μη-αρνητική λύση* $u \in C^{1,\delta}(\Omega)$ *για κάποιο* $\delta \in (0,1)$.

Περίπτωση 2: $p < q < 2 < s$

Έστω

$$Q(r, v) := r^{q-p} A(v) - r^{s-p} B(v) - r^{2-p} \|\nabla v\|_2^2. \tag{3.22}$$

Τότε η (3.10) είναι ισοδύναμη με την

$$Q(r, v) = \|\nabla v\|_p^p. \tag{3.23}$$

Παρατηρούμε ότι όταν $v \in G_1$ η συνάρτηση $Q(\cdot, v)$ έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο $r_* := r_*(v)$ το οποίο ικανοποιεί την

$$(q-p)A(v) = (s-p) r_*(v)^{s-q} B(v) + (2-p) r_*(v)^{2-q} \|\nabla v\|_2^2. \tag{3.24}$$

Λόγω της (3.22) προκύπτουν οι ακόλουθες ισοδύναμες εκφράσεις της (3.24), οι οποίες θα χρειαστούν στη συνέχεια,

$$Q(r_*(v), v) = \frac{2-q}{2-p} r_*(v)^{q-p} A(v) + \frac{s-2}{2-p} r_*(v)^{s-p} B(v),$$

$$Q(r_*(v), v) = \frac{s-q}{s-p} r_*(v)^{s-p} A(v) + \frac{2-s}{s-p} r_*(v)^{2-p} \|\nabla v\|_2^2,$$

$$Q(r_*(v), v) = \frac{s-q}{q-p} r_*(v)^{s-p} B(v) + \frac{2-q}{q-p} r_*(v)^{s-p} \|\nabla v\|_2^2.$$

Έστω

$$G_2 := \{v \in G_1 : \|\nabla v\|_p^p < Q(r_*(v), v)\}. \tag{3.25}$$

Η εξίσωση (3.23) έχει δύο θετικές λύσεις $r_1(v)$, $r_2(v)$ με $r_1(v) < r_*(v) < r_2(v)$ για κάθε $v \in G_2$. Έστω $r := r_2(v)$. Τότε

$$r^{p-q+1} Q_r(r, v) = (q-p)A(v) - (s-p) r^{s-q} B(v) - (2-p) r^{2-q} \|\nabla v\|_2^2,$$

η οποία, συνδυαζόμενη με την (3.24), δίνει

$$r^{p-q+1} Q_r(r, v) = (2-p)\|\nabla v\|_2^2 (r_*^{2-q} - r^{2-q}) + (s-p) B(v) (r_*^{s-q} - r^{s-q}) < 0.$$

Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης η $r(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Έστω

$$G_3 := \{\upsilon \in G_1 : \|\nabla \upsilon\|_p^p < \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p} r_*(\upsilon)^{q-p} A(\upsilon)\}. \tag{3.26}$$

Ας υποθέσουμε ότι $G_3 \neq \emptyset$. Επειδή $q > p$ και $r(\upsilon) > r_*(\upsilon)$, βλέπουμε ότι $G_3 \subseteq G_2$ και έτσι $G_2 \neq \emptyset$. Αν $\upsilon \in G_3$, τότε

$$\|\nabla \upsilon\|_p^p < \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p} r_*(\upsilon)^{q-p} A(\upsilon), \tag{3.27}$$

και κατά συνέπεια έχουμε ότι

$$\|\nabla \upsilon\|_p^p < \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p} r(\upsilon)^{q-p} A(\upsilon).$$

Έτσι

$$\frac{2-p}{p} r(\upsilon)^p \|\nabla \upsilon\|_p^p + \frac{q-2}{q} r(\upsilon)^q A(\upsilon) < 0. \tag{3.28}$$

Από τις (3.28) και (3.14) έχουμε ότι

$$\hat{\Phi}(\upsilon) < r^p(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})\|\nabla \upsilon\|_p^p + r^q(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})A(\upsilon) < 0.$$

Επίσης, αν $\upsilon \in G_2 \cap S^1$, από την (3.16)

$$r(\upsilon) \leq \Big(\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla \upsilon\|_2^2}\Big)^{1/(2-q)}, \tag{3.29}$$

οπότε η $r(\cdot)$ είναι φραγμένη στο $G_2 \cap S^1$. Συνεπώς, η $\hat{\Phi}(\upsilon)$ είναι επίσης φραγμένη στο $G_2 \cap S^1$. Έστω

$$M := \inf_{\upsilon \in G_2 \cap S^1} \hat{\Phi}(\upsilon) < 0.$$

Υποθέτουμε ότι η $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία ελαχιστοποίησης της $\hat{\Phi}$ στο $G_2 \cap S^1$. Τότε υπάρχει $\tilde{\upsilon} \in E$ τέτοιο ώστε, για τουλάχιστον μία υπακολουθία,

$$A(\upsilon_n) \to A(\tilde{\upsilon}),$$

$$B(\upsilon_n) \to B(\tilde{\upsilon}),$$

$$0 \leq \|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2 \leq \liminf \|\nabla \upsilon_n\|_2 \leq 1,$$

$$0 \leq \|\nabla \tilde{\upsilon}\|_p \leq \liminf \|\nabla \upsilon_n\|_p \leq 1.$$

Θα πρέπει να έχουμε $\tilde{\upsilon} \neq 0$, διαφορετικά

$$0 = \Phi(0) \leq \lim \inf_{n\to\infty} \Phi(r(\upsilon_n)\upsilon_n) = M,$$

το οποίο είναι άτοπο. Επειδή η $\{r(\upsilon_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και $r_*(\upsilon_n) < r(\upsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r_*(\upsilon_n) \to \tilde{r}_*$ και $r(\upsilon_n) \to \tilde{r} > 0$. Αν $A(\tilde{\upsilon}) = 0$, τότε από την (3.29) προκύπτει ότι $\tilde{r} = 0$ η οποία οδηγεί σε άτοπο. Άρα $A(\tilde{\upsilon}) > 0$ και έτσι $\tilde{\upsilon} \in G_1$. Επίσης, $\tilde{r}_* > 0$ λόγω της (3.24). Ισχυριζόμαστε ότι $\tilde{\upsilon} \in G_3$. Πράγματι, από την (3.23) έχουμε,

$$\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p \leq \limsup_{n\to\infty} \|\nabla\upsilon_n\|_p^p \leq \limsup_{n\to\infty} Q(r_*(\upsilon_n), \upsilon_n)$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty}\{r_*(\upsilon_n)^{q-p}A(\upsilon_n) - r_*(\upsilon_n)^{s-p}B(\upsilon_n)\} - \liminf_{n\to\infty} r_*(\upsilon_n)^{2-p}\|\nabla\upsilon_n\|_2^2$$

$$\leq \tilde{r}_*^{q-p}A(\tilde{\upsilon}) - \tilde{r}_*^{s-p}B(\tilde{\upsilon}) - \tilde{r}_*^{2-p}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 = Q(\tilde{r}_*, \tilde{\upsilon}) \tag{3.30}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p \leq Q(r_*(\tilde{\upsilon}), \tilde{\upsilon}). \tag{3.31}$$

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η ισότητα

$$\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p = Q(r_*(\tilde{\upsilon}), \tilde{\upsilon}), \tag{3.32}$$

τότε χρησιμοποιώντας την (3.10) για $\upsilon = \upsilon_n$ και παίρνοντας το όριο καθώς το $n \to +\infty$, έχουμε ότι

$$\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p \leq \limsup_{n\to\infty} \|\nabla\tilde{\upsilon}_n\|_p^p \leq \limsup_{n\to\infty} Q(r(\upsilon_n), \upsilon_n)$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty}\{r(\upsilon_n)^{q-p}A(\upsilon_n) - r(\upsilon_n)^{s-p}B(\upsilon_n)\} - \liminf_{n\to\infty} r(\upsilon_n)^{2-p}\|\nabla\upsilon_n\|_2^2$$

$$\leq \tilde{r}^{q-p}A(\tilde{\upsilon}) - \tilde{r}^{s-p}B(\tilde{\upsilon}) - \tilde{r}^{2-p}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 = Q(\tilde{r}, \tilde{\upsilon}), \tag{3.33}$$

Λόγω των (3.3), (3.32) και (3.3), συμπεραίνουμε ότι $\tilde{r} = \tilde{r}_* = \tilde{r}_*(\tilde{\upsilon})$. Από την άλλη μεριά, αντικαθιστώντας όπου υ την υ_n στην (3.24) και παίρνοντας το όριο προκύπτει ότι

$$(q-p)A(\tilde{\upsilon}) \geq (s-p)r_*(\tilde{\upsilon})^{s-q}B(\tilde{\upsilon}) + (2-p)r_*(\tilde{\upsilon})^{2-q}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2.$$

Επειδή η $r_*(\tilde{\upsilon})$ ικανοποιεί την

$$(q-p)A(\tilde{\upsilon}) = (s-p)r_*(\tilde{\upsilon})^{s-q}B(\tilde{\upsilon}) + (2-p)r_*(\tilde{\upsilon})^{2-q}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2,$$

συμπεραίνουμε ότι $\|\nabla\upsilon_n\|_2^2 \to \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2$ και

$$(q-p)\,A(\tilde{\upsilon}) = (s-p)\,r_*(\tilde{\upsilon})^{s-q}B(\tilde{\upsilon}) + (2-p)\,r_*(\tilde{\upsilon})^{2-q}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2. \tag{3.34}$$

Άρα,

$$A(\tilde{\upsilon}) = \frac{s-p}{q-p}\tilde{r}^{s-q}B(\tilde{\upsilon}) + \frac{2-p}{q-p}\tilde{r}^{2-q}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2. \tag{3.35}$$

Επίσης, (3.11) και (3.35) δίνουν ότι

$$M = \lim_{n\to\infty}\hat{\Phi}(\upsilon_n) = \frac{(s-q)(s-p)}{pqs}\tilde{r}^s B(\tilde{\upsilon}) + \frac{(2-p)(2-q)}{2pq}\tilde{r}^2\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, $\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p < Q(r_*(\tilde{\upsilon}),\tilde{\upsilon})$, άρα $\tilde{\upsilon} \in G_3$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $\tilde{r} = r(\tilde{\upsilon})$. Έστω $t > 0$ τέτοιο ώστε $t\tilde{\upsilon} \in S^1$. Επειδή

$$r_*(t\tilde{\upsilon})t\tilde{\upsilon} = r_*(\tilde{\upsilon})\tilde{\upsilon}, \tag{3.36}$$

από τις (3.23), (3.26) και την (3.36), έχουμε

$$\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p < Q(r_*(\tilde{\upsilon}),\tilde{\upsilon}) = Q(tr_*(t\tilde{\upsilon}),\tilde{\upsilon}) = t^{-p}Q(r_*(t\tilde{\upsilon}),t\tilde{\upsilon}).$$

Άρα

$$\|t\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p \le Q(r_*(t\tilde{\upsilon}),t\tilde{\upsilon}),$$

από την οποία συνεπάγεται ότι $t\tilde{\upsilon} \in G_2 \cap S^1$. Επιπλέον, από την (3.23), η $r(t\tilde{\upsilon})$ ικανοποιεί την

$$Q(tr(t\tilde{\upsilon}),\tilde{\upsilon}) = \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p = Q(r(\tilde{\upsilon}),\tilde{\upsilon}), \tag{3.37}$$

η οποία δίνει ότι

$$tr(t\tilde{\upsilon}) = r(\tilde{\upsilon}). \tag{3.38}$$

Λόγω της (3.3),

$$Q(r(\tilde{\upsilon}),\tilde{\upsilon}) = \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p \le Q(\tilde{r},\tilde{\upsilon}),$$

οπότε $\tilde{r} \le r(\tilde{\upsilon})$. Αν υποθέσουμε ότι $\tilde{r} < r(\tilde{\upsilon})$, τότε, επειδή η συνάρτηση $z \to \Phi(z\tilde{\upsilon})$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\tilde{r}, r(\tilde{\upsilon}))$, από την (3.38) έχουμε ότι

$$M = \liminf_{n\to\infty}\Phi(r(\upsilon_n)\upsilon_n) \ge \Phi(\tilde{r}\tilde{\upsilon}) > \Phi(r(\tilde{\upsilon})\tilde{\upsilon}) = \Phi(r(t\tilde{\upsilon})t\tilde{\upsilon}) = \hat{\Phi}(t\tilde{\upsilon}),$$

που οδηγεί σε άτοπο. Άρα $\tilde{r} = r(\tilde{\upsilon})$, οπότε η (3.21) ισχύει, δηλαδή $\tilde{\upsilon} \in S^1$ και $\hat{\Phi}(\tilde{\upsilon}) = M$. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\tilde{\upsilon} \geq 0$. Από το Λήμμα 3.3.1 συνεπάγεται ότι $u := r(\tilde{\upsilon})\tilde{\upsilon}$ είναι μία λύση του (3.5) – (3.6).

Έχουμε λοιπόν το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3.2 *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες ικανοποιούνται* (H0)-(H2), $p < q < 2 < s$ *και το σύνολο* G_3 *το οποίο ορίζεται από την (3.26) είναι μη κενό. Τότε το πρόβλημα* (3.5) – (3.6) *έχει μία μη αρνητική λύση* $u \in C^{1,\delta}(\Omega)$ *για κάποιο* $\delta \in (0,1)$.

Θα δώσουμε παρακάτω κάποιες συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν ότι $G_3 \neq \emptyset$. Υποθέτουμε ότι $supp a^+ \subseteq supp b$. Τότε υπάρχει $\upsilon \in S^1$ τέτοιο ώστε $B(\upsilon) > 0$. Επειδή $r_*(\upsilon)^{2-q} < r(\upsilon)^{2-q}$, η (3.24) συνεπάγεται ότι

$$(q-p)A(\upsilon) < (s-p)r_*(\upsilon)^{s-q}B(\upsilon) + (2-p)r(\upsilon)^{2-q}\|\nabla\upsilon\|_2^2, \tag{3.39}$$

και έτσι

$$r_*(\upsilon)^{s-q} > \frac{q-p}{s-p}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)} - \frac{2-p}{s-p}r(\upsilon)^{2-q}\frac{\|\nabla\upsilon\|_2^2}{B(\upsilon)}.$$

Κατά συνέπεια,

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon) > \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}M(\upsilon), \tag{3.40}$$

όπου

$$M(\upsilon) = \Big(\frac{q-p}{s-p}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)} - \frac{2-p}{s-p}r(\upsilon)^{2-q}\frac{\|\nabla\upsilon\|_2^2}{B(\upsilon)}\Big)^{(q-p)/(s-q)}A(\upsilon)$$

Επίσης η (3.16) δίνει ότι

$$r(\upsilon) \leq \Big(\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)}\Big)^{1/(s-q)}, \tag{3.41}$$

η οποία συνδυαζόμενη με την (3.40) συνάγει ότι

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-p}{s-p}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)} - \frac{2-p}{s-p}r(\upsilon)^{2-q}\frac{\|\nabla\upsilon\|_2^2}{B(\upsilon)}\Big)^{(q-p)/(s-q)}A(\upsilon)$$

$$> \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-p}{s-p}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)} - \frac{2-p}{s-p}\Big(\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)}\Big)^{(2-q)/(s-q)}\frac{\|\nabla\upsilon\|_2^2}{B(\upsilon)}\Big)^{\frac{q-p}{s-q}}A(\upsilon).$$

Αν η $a^+(\cdot)$ είναι αρκετά μεγάλη τότε

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}K(\upsilon)A(\upsilon) > \|\nabla\upsilon\|_p^p, \tag{3.42}$$

όπου

$$K(\upsilon) = \Big(\frac{q-p}{s-p}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)} - \frac{2-p}{s-p}A(\upsilon)^{(2-q)/(s-q)}\frac{\|\nabla\upsilon\|_2^2}{B(\upsilon)^{\frac{2-q}{s-q}+1}}\Big)^{(q-p)/(s-q)}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι $\upsilon \in G_3$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $(suppa^+\backslash suppb)^o \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $\upsilon \in S^1$ με $B(\upsilon) = 0$. Από την (3.24) βλέπουμε ότι

$$r_*(\upsilon) = \Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{1/(2-q)}, \tag{3.43}$$

και έτσι

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon) = \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)}A(\upsilon).$$

Συνεπώς, αν η $a^+(\cdot)$ είναι αρκετά μεγάλη,

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-p}{2-p}\Big)^{\frac{q-p}{2-q}}A(\upsilon)^{\frac{2-p}{2-q}} > \|\nabla\upsilon\|_2^{2(2-p)/(2-q)}, \tag{3.44}$$

οπότε $G_3 \neq \emptyset$.

Περίπτωση 3: $p < s < q < 2$

Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε

$$Q(r,\upsilon) := r^{q-p}A(\upsilon) - r^{s-p}B(\upsilon) - r^{2-p}\|\nabla\upsilon\|_2^2.$$

Έστω $\upsilon \in G_1$ με $B(\upsilon) > 0$. Για $r \geq 0$ ορίζουμε επίσης

$$F(r,\upsilon) := r^{p-s}Q(r,\upsilon) = r^{q-s}A(\upsilon) - B(\upsilon) - \|\nabla\upsilon\|_2^2 r^{2-s}. \tag{3.45}$$

Τότε, $F(0,\upsilon) = -B(\upsilon) < 0$ και $\lim_{r\to+\infty} F(r,\upsilon) = -\infty$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $F(\cdot,\upsilon)$ έχει ένα μέγιστο στο

$$\bar{r}(\upsilon) = \Big(\frac{q-s}{2-s}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{1/(2-q)} \tag{3.46}$$

με

$$F(\bar{r}(\upsilon),\upsilon) = \frac{2-q}{2-s}\bar{r}^{q-s}A(\upsilon) - B(\upsilon). \tag{3.47}$$

Συνεπώς, $Q(r,\upsilon) > 0$ για κάποιο $r > 0$ αν και μόνο αν $F(\bar{r}(\upsilon),\upsilon) > 0$, και αυτό ισχύει αν

$$\bar{r}(\upsilon) > \hat{r}(\upsilon) := (\frac{2-s}{2-q}\frac{B(\upsilon)}{A(\upsilon)})^{1/(q-s)}. \tag{3.48}$$

Υποθέτουμε ότι η (3.48) ισχύει. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτηση

$$r \mapsto r^{p-s+1}Q_r(r,\upsilon) = (q-p)r^{q-s}A(\upsilon) - (2-p)\|\nabla\upsilon\|_2^2 r(\upsilon)^{2-s} - (s-p)B(\upsilon),$$

έχει δύο θετικές ρίζες $r_{1*}(\upsilon)$ και $r_{2*}(\upsilon)$ με $r_{1*}(\upsilon) < r_{2*}(\upsilon)$. Προφανώς το $r_{1*}(\upsilon)$ είναι ένα σημείο τοπικού ελαχίστου της $Q(.,\upsilon)$ ενώ το $r_{2*}(\upsilon)$ είναι ένα σημείο ολικού μεγίστου της $Q(.,\upsilon)$. Ορίζουμε $r_*(\upsilon) := r_{2*}(\upsilon)$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\bar{r}(\upsilon) < r_*(\upsilon). \tag{3.49}$$

Πράγματι,

$$r^{s-p}F_r(r,\upsilon) = Q_r(r,\upsilon) + (p-s)\frac{Q(r,\upsilon)}{r},$$

και επειδή $F_r(\bar{r}(\upsilon),\upsilon) = 0$ και $Q(\bar{r}(\upsilon),\upsilon) = \bar{r}(\upsilon)^{s-p}F(\bar{r}(\upsilon),\upsilon) > 0$ παίρνουμε ότι

$$Q_r(\bar{r}(\upsilon),\upsilon) = (s-p)\frac{Q(\bar{r}(\upsilon),\upsilon)}{\bar{r}(\upsilon)} > 0,$$

η οποία αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Στη συνέχεια, έστω $\upsilon \in G_1$ με $B(\upsilon) = 0$. Τότε η $Q(\cdot,\upsilon)$ έχει μέγιστο στο σημείο

$$r_*(\upsilon) := \Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{1/(2-q)} \tag{3.50}$$

με

$$Q(r_*(\upsilon),\upsilon) = \frac{2-q}{2-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon). \tag{3.51}$$

Επειδή το $r_*(\upsilon)$ ικανοποιεί την εξίσωση $Q_r(\cdot,\upsilon)=0$, έχουμε ότι

$$(q-p)A(\upsilon)r_*(\upsilon)^{q-s}=(s-p)B(\upsilon)+(2-p)\|\nabla\upsilon\|_2^2 r_*(\upsilon)^{2-s}, \tag{3.52}$$

οπότε

$$r_*(\upsilon)\le\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{1/(2-q)}. \tag{3.53}$$

Αν $\upsilon\in G_2$ και η συνθήκη (3.48) ικανοποιείται, τότε (3.10) έχει δύο θετικές λύσεις $r_1(\upsilon)$, $r_2(\upsilon)$ με $r_1(\upsilon)<r_*(\upsilon)<r_2(\upsilon)$. Ορίζουμε $r(\upsilon):=r_2(\upsilon)$. Αφού $Q_r(r,\upsilon)<0$ για όλα τα $r>r_*(\upsilon)$, από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης, $r\in C^1(G_2)$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο

$$G_4:=\{\upsilon\in G_1:\|\nabla\upsilon\|_p^p\le\frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}M(\upsilon)\bar r(\upsilon)^{s-p}\} \tag{3.54}$$

με $M(\upsilon)=(\frac{s}{q}\frac{2-q}{2-s}\bar r(\upsilon)^{q-s}A(\upsilon)-B(\upsilon))$, είναι μη κενό, οπότε

$$\bar r(\upsilon)>\Big(\frac{q}{s}\frac{2-s}{2-q}\frac{B(\upsilon)}{A(\upsilon)}\Big)^{1/(q-s)}.$$

Θα δείξουμε ότι $G_4\subseteq G_2$. Πράγματι, έστω $\upsilon\in G_4$. Υποθέτουμε καταρχάς ότι $B(\upsilon)>0$. Τότε, αφού $\frac{p}{s}$, $\frac{2-s}{2-p}$ και $\frac{s}{q}$ είναι μικρότεροι του 1, συνδυάζοντας τις (3.45), (3.47), (3.49) και (3.54) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|\nabla\upsilon\|_p^p&<\Big(\frac{s}{q}\frac{2-q}{2-s}\bar r(\upsilon)^{q-s}A(\upsilon)-B(\upsilon)\Big)\bar r(\upsilon)^{s-p}\\&<\Big(\frac{2-q}{2-s}\bar r(\upsilon)^{q-s}A(\upsilon)-B(\upsilon)\Big)\bar r(\upsilon)^{s-p}\\&=F(\bar r(\upsilon),\upsilon)\bar r(\upsilon)^{s-p}=Q(\bar r(\upsilon),\upsilon)<Q(r_*(\upsilon),\upsilon),\end{aligned}$$

και έτσι $\upsilon\in G_2$. Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι $B(\upsilon)=0$. Τότε, από την (3.49),

$$\|\nabla\upsilon\|_p^p<\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\bar r(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon)<\frac{2-q}{2-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon)=Q(r_*(\upsilon),\upsilon),$$

η οποία αποδεικνύει ότι $\upsilon\in G_2$. Επισημαίνουμε επίσης ότι $G_4\cap S^1\neq\emptyset$. Επειδή $\bar r(\upsilon)<r_*(\upsilon)<r(\upsilon)$ για κάθε $\upsilon\in G_4$, παίρνουμε ότι

$$\|\nabla\upsilon\|_p^p\le\frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}\Big(\frac{s}{q}\frac{2-q}{2-s}r(\upsilon)^{q-s}A(\upsilon)-B(\upsilon)\Big)r(\upsilon)^{s-p},$$

η οποία, λόγω της (3.14), συνεπάγεται ότι $\hat{\Phi}(\upsilon) < 0$ όταν $\upsilon \in G_4$. Επίσης, αν $\upsilon \in G_2 \cap S^1$, τότε η (3.16) δίνει ότι

$$r(\upsilon) \leq \Big(\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla \upsilon\|_2^2}\Big)^{1/(2-q)}, \tag{3.55}$$

και έτσι η $r(\cdot)$ είναι φραγμένη στο $G_2 \cap S^1$. Επομένως $\hat{\Phi}(\upsilon)$ $G_2 \cap S^1$. Έστω

$$M := \inf_{\upsilon \in G_2 \cap S^1} \hat{\Phi}(\upsilon) < 0.$$

Υποθέτουμε ότι η $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία ελαχιστοποίησης για τη $\hat{\Phi}(\cdot)$ στο $\widetilde{G}_2 \cap S^1$. Τότε, υπάρχει $\tilde{\upsilon} \in E$ τέτοιο ώστε, για τουλάχιστον μία υπακολουθία, $A(\upsilon_n) \to A(\tilde{\upsilon})$ και $B(\upsilon_n) \to B(\tilde{\upsilon})$. Πρέπει να ισχύει $\tilde{\upsilon} \neq 0$, διαφορετικά, $0 = \Phi(0) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(r(\upsilon_n)\upsilon_n) = M$, το οποίο είναι άτοπο. Αφού $\{r(\upsilon_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη παίρνουμε ότι $r(\upsilon_n) \to \tilde{r}$, και $r_*(\upsilon_n) \to \tilde{r}_*$. Επίσης, $\tilde{r} > 0$ επειδή $M = \liminf_{n\to\infty} \hat{\Phi}(\upsilon_n) < 0$. Αν υποθέσουμε ότι $A(\tilde{\upsilon}) = 0$, τότε, από την (3.55), θα είχαμε $\tilde{r} = 0$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $\tilde{\upsilon} \in G_1$. Από τις (3.48) και (3.49) έχουμε ότι

$$\tilde{r} \geq \tilde{r}_* \geq \hat{r}(\tilde{\upsilon}) := (\frac{2-s}{2-q}\frac{B(\tilde{\upsilon})}{A(\tilde{\upsilon})})^{1/(q-s)}. \tag{3.56}$$

Θα δείξουμε ότι $\tilde{\upsilon} \in G_2$. Πράγματι, αν αυτό δεν ισχύει, τότε, όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, $\tilde{r} = \tilde{r}_* = r_*(\tilde{\upsilon})$ όπου $r_*(\tilde{\upsilon})$ είναι ένα σημείο ολικού μεγίστου της $Q(\cdot, \tilde{\upsilon})$ το οποίο ικανοποιεί την

$$(q-p)A(\tilde{\upsilon})r_*(\tilde{\upsilon})^{q-s} = (s-p)B(\tilde{\upsilon}) + (2-p)\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 r_*(\tilde{\upsilon})^{2-s}.$$

Συνεπώς, παίρνοντας το όριο στην (3.52), στην οποία έχουμε αντικαταστήσει την υ με την υ_n, $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\|\nabla \upsilon_n\|_2^2 \to \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2$, όπου

$$(q-p)A(\tilde{\upsilon})\tilde{r}^{q-s} - (s-p)B(\tilde{\upsilon}) = (2-p)\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 \tilde{r}^{2-s}. \tag{3.57}$$

Αυτό, ωστόσο, οδηγεί σε άτοπο επειδή από τις (3.11), (3.57) και (3.56) έχουμε ότι

$$M = \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(\upsilon_n) = \frac{(q-p)(2-q)}{2pq}\Big(\tilde{r}^{q-s}A(\tilde{\upsilon}) - \frac{q}{s}\frac{s-p}{q-p}\frac{2-s}{2-q}\frac{B(\tilde{\upsilon})}{A(\tilde{\upsilon})}\Big)\tilde{r}^s A(\tilde{\upsilon}) > 0.$$

Συνεπώς $\tilde{\upsilon} \in G_2$ όπως ισχυριστήκαμε. Χρησιμοποιώντας παρόμοια αιτιολόγηση, όπως στην περίπτωση $p < q < 2 < s$, αποδεικνύουμε ότι $\tilde{r} = r(\tilde{\upsilon})$. Τελικά, παίρνοντας το όριο στην (3.23) έχουμε ότι $\tilde{\upsilon} \in S^1$ και $\hat{\Phi}(\tilde{\upsilon}) = M$. Το Λήμμα (3.3.1) δίνει ότι η $u := r(\tilde{\upsilon})\tilde{\upsilon} \geq 0$ είναι μία λύση του (3.5)-(3.6). Επομένως, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3.3 *Υποθέτουμε ότι οι* (H0)-(H2) *ικανοποιούνται*, $p < s < q < 2$ *ακαι το σύνολο* G_4 *όπως ορίζεται στην (3.54) είναι μη κενό. Τότε το πρόβλημα* (3.1) − (3.2) *έχει μία μη αρνητική λύση* $u \in C^{1,\delta}(\Omega)$ *για κάποιο* $\delta \in (0,1)$.

Τώρα θα δώσουμε κάποιες συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν ότι το $G_4 \neq \emptyset$. Έστω $suppa^+ \subseteq suppb$. Τότε υπάρχει $\upsilon \in S^1$ τέτοιο ώστε $B(\upsilon) > 0$. Από την (3.46) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\bar{r}(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon) - \frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}B(\upsilon)\bar{r}(\upsilon)^{s-p} \\
&= \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-s}{2-s}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)}A(\upsilon) \\
&-\frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}B(\upsilon)\Big(\frac{q-s}{2-s}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(s-p)/(2-q)} \\
&= \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-s}{2-s}\frac{1}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)}A(\upsilon)^{\frac{q-p}{2-q}+1} \\
&-\frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}B(\upsilon)\Big(\frac{q-s}{2-s}\frac{1}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(s-p)/(2-q)}A(\upsilon)^{\frac{s-p}{2-q}}.
\end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-s}{2-s}\frac{1}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)}A(\upsilon)^{\frac{q-p}{2-q}+1} \\
&-\frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}B(\upsilon)\Big(\frac{q-s}{2-s}\frac{1}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(s-p)/(2-q)}A(\upsilon)^{(s-p)/(2-q)} > \|\nabla\upsilon\|_p^p,
\end{aligned} \tag{3.58}$$

τότε $\upsilon \in G_4$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν η $a^+(\cdot)$ είναι αρκετά μεγάλη τότε η (3.3) είναι αληθής.

Επίσης αν υποθέσουμε ότι $(suppa^+ \backslash suppb)^o \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $\upsilon \in G_1$ με $B(\upsilon) = 0$. Από την (3.46) έχουμε

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\bar{r}(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon)$$

$$= \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-s}{2-s}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)}A(\upsilon)$$
$$= \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-s}{2-s}\frac{1}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)}A(\upsilon)^{\frac{q-p}{2-q}+1}.$$

Υποθέτοντας ότι

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-s}{2-s}\frac{1}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)}A(\upsilon)^{\frac{q-p}{2-q}+1} > \|\nabla\upsilon\|_p^p, \tag{3.59}$$

έχουμε $\upsilon \in G_4$. Συνεπώς, αν η $a^+(\cdot)$ είναι αρκετά μεγάλη, τότε η (3.59) ισχύει.

Περίπτωση 4: $p < 2 < q < s$

Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε ότι ισχύει επιπλέον η παρακάτω υπόθεση:

(H3) $b(x) \geq bo > 0$ *σ.π στο* Ω.

Έστω

$$Q(r,\upsilon) := r^{q-2}A(\upsilon) - r^{s-2}B(\upsilon) - r^{p-2}\|\nabla\upsilon\|_p^p. \tag{3.60}$$

Τότε η (3.10) είναι ισοδύναμη με την

$$Q(r,\upsilon) = \|\nabla\upsilon\|_2^2. \tag{3.61}$$

Για κάθε $\upsilon \in G_1$ η συνάρτηση $Q(\cdot,\upsilon)$ έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο $r_* := r_*(\upsilon)$ το οποίο αντιστοιχεί σε ένα ολικό μέγιστο και ικανοποιεί την

$$(q-2)r_*^{q-p}A(\upsilon) + (2-p)\|\nabla\upsilon\|_p^p = (s-2)r_*^{s-p}B(\upsilon). \tag{3.62}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$r_*(\upsilon) \geq \Big(\frac{q-2}{s-2}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)}\Big)^{\frac{1}{s-q}}. \tag{3.63}$$

Συνδυάζοντας τις (3.60), (3.62) παίρνουμε ότι

$$Q(r_*(\upsilon),\upsilon) = \tfrac{q-p}{2-p}r_*(\upsilon)^{q-2}A(\upsilon) - \tfrac{s-p}{2-p}r_*(\upsilon)^{s-2}B(\upsilon)$$

$$= \frac{s-q}{s-2}r_*(\upsilon)^{q-2}A(\upsilon) - \frac{s-p}{s-2}r_*(\upsilon)^{p-2}\|\nabla\upsilon\|_p^p.$$

Έστω
$$\tilde{G}_2 := \{\upsilon \in G_1 : \|\nabla \upsilon\|_2^2 < Q(r_*(\upsilon), \upsilon)\}.$$
Προφανώς, αν $\upsilon \in \tilde{G}_2$, τότε η (3.10) έχει ακριβώς δύο θετικές λύσεις $r_1(\upsilon)$ και $r_2(\upsilon)$ με $r_1(\upsilon) < r_*(\upsilon) < r_2(\upsilon)$. Όπως προηγουμένως, έστω $r := r_2(\upsilon)$. Επειδή

$$r^{2-q+1}Q_r(r, \upsilon) = (q-2)A(\upsilon) - (s-2)r^{s-q}B(\upsilon) - (p-2)r^{p-q}\|\nabla \upsilon\|_p^p,$$

λόγω της (3.62), παίρνουμε ότι

$$r^{2-q+1}Q_r(r, \upsilon) = (s-2)B(\upsilon)(r_*^{s-q} - r^{s-q}) + (2-p)\|\nabla \upsilon\|_p^p(r^{p-q} - r_*^{p-q}) < 0,$$

η οποία δίνει ότι η $r(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Τώρα ορίζουμε το σύνολο

$$\begin{aligned} G_5 := \{\upsilon \in G_1 : \|\nabla \upsilon\|_2^2 \ &< \ \frac{2}{q}\frac{s-q}{s-2}A(\upsilon)r_*(\upsilon)^{q-2} \\ &- \ \frac{2}{p}\frac{s-p}{s-2}\|\nabla \upsilon\|_p^p r_*(\upsilon)^{p-2}\} \end{aligned} \tag{3.64}$$

και υποθέτουμε ότι $G_5 \neq \emptyset$. Αφού $\frac{2}{q} < 1$ και $\frac{2}{p} > 1$ βλέπουμε ότι $G_5 \subseteq \tilde{G}_2$, και έτσι $\tilde{G}_2 \neq \emptyset$. Επιπλέον, $G_5 \cap S^1 \neq \emptyset$ επειδή η r ικανοποιεί την (3.38). Αν $\upsilon \in G_5$, τότε από την (3.64),

$$\|\nabla \upsilon\|_2^2 < \frac{2}{q}\frac{s-q}{s-2}A(\upsilon)r(\upsilon)^{q-2} - \frac{2}{p}\frac{s-p}{s-2}\|\nabla \upsilon\|_p^p r(\upsilon)^{p-2}. \tag{3.65}$$

Επίσης, οι (3.13) και (3.65) δίνουν ότι

$$r^p(\frac{1}{p} - \frac{1}{s})\|\nabla \upsilon\|_p^p + r^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{s})\|\nabla \upsilon\|_2^2 + r^q(\frac{1}{s} - \frac{1}{q})A(\upsilon) < 0,$$

και έτσι $\hat{\Phi}(\upsilon) < 0$. Ισχυριζόμαστε ότι η $r(\cdot)$ είναι φραγμένη από πάνω στο $\tilde{G}_2 \cap S^1$. Πράγματι, από την (3.16) έχουμε ότι

$$r(\upsilon) \leq (\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)})^{1/(s-q)}, \tag{3.66}$$

ενώ η υπόθεση (H3) δίνει

$$A(\upsilon) \leq cB(\upsilon)^{q/s} \tag{3.67}$$

για κάθε $\upsilon \in E$ και κάποιο $c > 0$. Επίσης αν $\upsilon \in \tilde{G}_2$, τότε για κάποιο $\theta > 0$,

$$\theta < \|\nabla \upsilon\|_2^2 < \frac{q-p}{2-p} r_*(\upsilon)^{q-2} A(\upsilon) < \frac{q-p}{2-p} r(\upsilon)^{q-2} A(\upsilon). \tag{3.68}$$

Από τις (3.66) και (3.68) παίρνουμε ότι

$$\theta < \frac{q-p}{2-p} \Big(\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)}\Big)^{(q-2)/(s-q)} A(\upsilon). \tag{3.69}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις (3.67) και (3.69), έχουμε

$$\theta < \frac{q-p}{2-p} c^{\frac{s-2}{s-q}} B(\upsilon)^{\frac{2}{s}}, \tag{3.70}$$

και έτσι η $B(\cdot)$ είναι φραγμένη μακριά από το 0. Ο ισχυρισμός αποδεικνύεται λόγω της (3.66). Επομένως, η $\hat{\Phi}(\upsilon)$ είναι επίσης φραγμένη στο σύνολο $\tilde{G}_2 \cap S^1$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$M = \inf_{\tilde{G}_2 \cap S^1} \hat{\Phi}(\upsilon) < 0$$

και υποθέτουμε ότι $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία ελαχιστοποίησης της $\hat{\Phi}$ στο $\tilde{G}_2 \cap S^1$. Επειδή $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, υπάρχει $\tilde{\upsilon} \in E$ τέτοιο ώστε, για μία τουλάχιστον υπακολουθία, $A(\upsilon_n) \to A(\tilde{\upsilon}) \geq 0$ και $B(\upsilon_n) \to B(\tilde{\upsilon})$. Από την (3.70), προκύπτει ότι $\tilde{\upsilon} \neq 0$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $r_*(\upsilon_n) \to \tilde{r}_*$ και $r(\upsilon_n) \to \tilde{r}$. Προφανώς, $\tilde{r} > 0$ επειδή $M = \liminf_{n\to\infty} \hat{\Phi}(\upsilon_n) < 0$. Επίσης, $A(\tilde{\upsilon}) > 0$, διαφορετικά, θα είχαμε $\tilde{r} = 0$. Επιπλέον $\tilde{r}_* > 0$ από την (3.63). Ισχυριζόμαστε ότι $\tilde{\upsilon} \in G_5$. Επειδή

$$\begin{aligned}
\|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2 &\leq \limsup_{n\to\infty} \|\nabla \tilde{\upsilon}_n\|_2^2 \leq \limsup_{n\to\infty} Q(r_*(\upsilon_n), \upsilon_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \{r_*(\upsilon_n)^{q-2} A(\upsilon_n) - r_*(\upsilon_n)^{s-2} B(\upsilon_n)\} \\
&\quad - \lim \inf_{n\to\infty} r_*(\upsilon_n)^{p-2} \|\nabla \upsilon_n\|_p^p \\
&\leq \tilde{r}_*^{q-2} A(\tilde{\upsilon}) - \tilde{r}_*^{s-2} B(\tilde{\upsilon}) - \tilde{r}_*^{p-2} \|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2 = Q(\tilde{r}_*, \tilde{\upsilon}),
\end{aligned}$$

βλέπουμε ότι

$$\|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2 \leq Q(r_*(\tilde{\upsilon}), \tilde{\upsilon}). \tag{3.71}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει η γνήσια ανισότητα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι

$$\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 = Q(r_*(\tilde{\upsilon}), \tilde{\upsilon}). \tag{3.72}$$

Επειδή $\tilde{r} > 0$, αντικαθιστώντας στην (3.61) όπου $\upsilon = \upsilon_n$ και παίρνοντας το όριο, συμπεραίνουμε ότι

$$\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 \leq \limsup_{n\to\infty} \|\nabla\tilde{\upsilon}_n\|_2^2 \leq \limsup_{n\to\infty} Q(r(\upsilon_n), \upsilon_n)$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty}\{r(\upsilon_n)^{q-2}A(\upsilon_n) - r(\upsilon_n)^{s-2}B(\upsilon_n)\}$$

$$-\liminf_{n\to\infty} r(\upsilon_n)^{p-2}\|\nabla\upsilon_n\|_p^p$$

$$\leq \tilde{r}^{q-2}A(\tilde{\upsilon}) - \tilde{r}^{s-2}B(\tilde{\upsilon}) - \tilde{r}^{p-2}\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p = Q(\tilde{r}, \tilde{\upsilon}). \tag{3.73}$$

Συνεπώς, από τις (3.3), (3.72) και (3.3) θα έχουμε $\tilde{r} = \tilde{r}_* = \tilde{r}_*(\tilde{\upsilon})$. Έτσι, αντικαθιστώντας όπου υ την υ_n στην 3.62 και παίρνοντας το όριο έχουμε ότι

$$(q-2)r_*(\tilde{\upsilon})^{q-p}A(\tilde{\upsilon}) + (2-p)\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p \leq (s-2)r_*(\tilde{\upsilon})^{s-p}B(\tilde{\upsilon}).$$

Επειδή η $r_*(\tilde{\upsilon})$ ικανοποιεί την

$$(q-2)r_*(\tilde{\upsilon})^{q-p}A(\tilde{\upsilon}) + (2-p)\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p = (s-2)r_*(\tilde{\upsilon})^{s-p}B(\tilde{\upsilon}),$$

συμπεραίνουμε ότι $\|\nabla\upsilon_n\|_p^p \to \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p$. Τότε, από την (3.14) προκύπτει ότι

$$M = \lim_{n\to\infty}\hat{\Phi}(\upsilon_n) = \frac{(2-p)(s-p)}{2ps}\tilde{r}^p\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_p^p + \frac{(q-2)(s-q)}{2ps}\tilde{r}^q A(\tilde{\upsilon}) > 0,$$

άτοπο. Επομένως, $\tilde{\upsilon} \in \tilde{G}_2$ όπως ισχυριστήκαμε. Παρόμοια αιτιολόγηση με την περίπτωση $p < q < 2 < s$ αποδεικνύει ότι $\tilde{r} \leq r(\tilde{\upsilon})$. Αν υπόθεσουμε τώρα ότι $\tilde{r} < r(\tilde{\upsilon})$, τότε, επειδή η συνάρτηση

$$\psi(z) := \frac{\partial}{\partial z}\Phi(z\tilde{\upsilon}) = z\{\|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 - Q(z, \tilde{\upsilon})\}, \tag{3.74}$$

είναι γνήσια αρνητική για $z \in (\tilde{r}, r(\tilde{\upsilon}))$, η (3.38) δίνει

$$M = \liminf_{n\to\infty}\Phi(r(\upsilon_n)\upsilon_n) \geq \Phi(\tilde{r}\tilde{\upsilon}) > \Phi(r(\tilde{\upsilon})\tilde{\upsilon}) = \Phi(r(t\tilde{\upsilon})t\tilde{\upsilon}) = \hat{\Phi}(t\tilde{\upsilon}),$$

η οποία αντιβαίνει στον ορισμό του M. Κατά συνέπεια, $\tilde{\upsilon} \in S^1$ και $\hat{\Phi}(\tilde{\upsilon}) = M$. Επομένως η $u := r(\tilde{\upsilon})\tilde{\upsilon}$ είναι μία λύση του προβλήματος (3.5)-(3.6).

Συνεπώς έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.3.4 *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες* (H0)–(H3) *ικανοποιούνται,* $p < 2 < q < s$ *και το σύνολο* G_5 *που ορίζεται από την (3.64) είναι μη κενό. Τότε το πρόβλημα* (3.1) – (3.2) *έχει μία μη αρνητική λύση* $u \in C^{1,\delta}(\Omega)$ *για κάποιο* $\delta \in (0,1)$.

Θα παρουσιάσουμε τώρα συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν ότι $G_5 \neq \emptyset$. Από την (3.62),

$$\Big(\frac{q-2}{s-2}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)}ig)^{1/(s-q)} \leq r_*(\upsilon),$$

συνεπώς

$$\frac{2}{q}\frac{s-q}{s-2}A(\upsilon)r_*(\upsilon)^{q-2} - \frac{2}{p}\frac{s-p}{s-2}\|\nabla\upsilon\|_p^p r_*(\upsilon)^{p-2}$$

$$\geq \frac{2}{q}\frac{s-q}{s-2}A(\upsilon)\Big(\frac{q-2}{s-2}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)}\Big)^{(q-2)/(s-q)} - \frac{2}{p}\frac{s-p}{s-2}\|\nabla\upsilon\|_p^p\Big(\frac{q-2}{s-2}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)}\Big)^{\frac{p-2}{s-q}}$$

$$= \frac{2}{q}\frac{s-q}{s-2}\Big(\frac{q-2}{s-2}\Big)^{(q-2)/(s-q)}A(\upsilon)^{(s-2)/(s-q)}B(\upsilon)^{(2-q)/(s-q)}$$
$$-\frac{2}{p}\frac{s-p}{s-2}\Big(\frac{q-2}{s-2}\Big)^{\frac{p-2}{s-q}}\|\nabla\upsilon\|_p^p B(\upsilon)^{\frac{2-p}{s-q}}A(\upsilon)^{\frac{p-2}{s-q}}.$$

Επειδή $\frac{s-2}{s-q} > \frac{p-2}{s-q}$ συμπεραίνουμε ότι $G_5 \neq \emptyset$ όταν η $a^+(\cdot)$ είναι αρκετά μεγάλη.

Περίπτωση 5: $p < s < q < 2$

Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε την συνάρτηση

$$Q(r,\upsilon) := r^{q-p}A(\upsilon) - r^{s-p}B(\upsilon) - r^{2-p}\|\nabla\upsilon\|_2^2.$$

Για $\upsilon \in G_1$, η $Q(\cdot,\upsilon)$ έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο $r_* := r_*(\upsilon)$ το οποίο αντιστοιχεί σε ένα ολικό μέγιστο και ικανοποιεί την

$$(q-p)r_*^{q-s}A(\upsilon) + (p-s)B(\upsilon) = (2-p)r_*^{2-s}\|\nabla\upsilon\|_2^2 \tag{3.75}$$

και

$$Q(r_*(\upsilon),\upsilon) = \frac{2-q}{2-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon) - \frac{2-s}{2-p}r_*(\upsilon)^{s-p}B(\upsilon).$$

Από την (3.75) παίρνουμε

$$r_*(\upsilon) \geq \Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{1/(2-q)}. \tag{3.76}$$

Προφανώς, αν η $\upsilon \in G_2$ τότε η (3.22) έχει ακριβώς δύο θετικές λύσεις $r_1(\upsilon)$, $r_2(\upsilon)$ με $r_1(\upsilon) < r_*(\upsilon) < r_2(\upsilon)$. Έστω $r := r(\upsilon)$ η μεγαλύτερη λύση. Έχουμε

$$r^{p-1}Q_r(r,\upsilon) = (q-p)A(\upsilon)r^{q-2} - (s-p)r^{s-2}B(\upsilon) - (2-p)\|\nabla\upsilon\|_2^2,$$

η οποία, ενόψη της (3.75), δίνει

$$r^{p-1}Q_r(r,\upsilon) = (q-p)A(\upsilon)(r^{q-2} - r_*^{q-2}) + (p-s)B(\upsilon)(r^{s-2} - r_*^{s-2}) < 0.$$

Επομένως, η $r(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Έστω

$$\begin{aligned} G_6 := \{\upsilon \in G_1 : \|\nabla\upsilon\|_p^p &< \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon) \\ &- \frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}r_*(\upsilon)^{s-p}B(\upsilon)\} \end{aligned} \tag{3.77}$$

και υποθέτουμε ότι $G_6 \neq \emptyset$. Άμεσα προκύπτει ότι $G_6 \subseteq G_2$, αφού $\frac{p}{q} < 1$ και $G_2 \neq \emptyset$. Επιπλέον, $G_6 \cap S^1 \neq \emptyset$ και $\hat{\Phi}(\upsilon) < 0$ για κάθε $\upsilon \in G_6$. Πράγματι, αφού $r(\upsilon) > r_*(\upsilon)$, από την (3.77) έχουμε ότι

$$\|\nabla\upsilon\|_p^p < \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}r(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon) - \frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}r(\upsilon)^{s-p}B(\upsilon). \tag{3.78}$$

Επίσης, οι (3.14) και (3.78) δίνουν ότι

$$r^q\frac{2-p}{2p}\|\nabla\upsilon\|_p^p + r^q\frac{q-2}{2q}A(\upsilon) + r^s\frac{2-s}{2s}B(\upsilon) < 0,$$

$\hat{\Phi}(\upsilon) < 0$. Στη συνέχεια, επειδή $2 > q$ από την (3.29) προκύπτει ότι η $r(\cdot)$ είναι φραγμένη από πάνω στο $G_2 \cap S^1$. Συνεπώς, η $\hat{\Phi}(\upsilon)$ είναι επίσης φραγμένη στο $G_2 \cap S^1$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$M = \inf_{\upsilon \in G_2 \cap S^1} \hat{\Phi}(\upsilon) < 0.$$

Άν η $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία ελαχιστοποίησης $\hat{\Phi}$ στο $G_2 \cap S^1$ τότε, υπάρχει $\tilde{\upsilon} \in E$ τέτοιο ώστε, για τουλάχιστον μία υπακολουθία, $A(\upsilon_n) \to A(\tilde{\upsilon}) \geq 0$ και $B(\upsilon_n) \to B(\tilde{\upsilon}) \geq 0$. Επίσης από την (3.15) έχουμε ότι

$$0 < \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2^2 \leq \liminf \|\nabla\upsilon_n\|_2^2 \leq 1.$$

Επειδή η $r(\cdot)$ είναι φραγμένη στο $G_2 \cap S^1$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $r_*(\upsilon_n) \to \tilde{r}_*$ και $r(\upsilon_n) \to \tilde{r}$. Έχουμε πάλι ότι $\tilde{r} > 0$, διαφορετικά, $M = \liminf_{n\to\infty} \hat{\Phi}(\upsilon_n) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Επίσης έχουμε ότι $A(\tilde{\upsilon}) > 0$, επειδή, αν υποθέσουμε το αντίστροφο, η (3.23) δίνει ότι

$$r(\upsilon_n)^{2-q}\|\nabla \upsilon_n\|_2^2 \leq A(\upsilon_n),$$

και παίρνοντας το όριο,

$$\tilde{r}^{2-q}\|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2 \leq \liminf_{n\to\infty}(r(\upsilon_n)^{2-q}\|\nabla \upsilon_n\|_2^2) \leq \lim_{n\to\infty} A(\upsilon_n) = A(\tilde{\upsilon}).$$

Άρα, $\tilde{r} = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Επιπλέον $\tilde{r}_* > 0$ λόγω της (3.76). Ισχυριζόμαστε ότι $\tilde{\upsilon} \in G_6$. Πράγματι, αν αυτό δεν ισχύει, τότε, εφαρμόζοντας τα ίδια επιχειρήματα όπως και στην απόδειξη της περίπτωσης $p < q < 2 < s$, θα είχαμε $\tilde{r} = \tilde{r}_* = r_*(\tilde{\upsilon})$, ενώ, για μια υπακολουθία, $\|\nabla \upsilon_n\|_2^2 \to \|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2$. Από την (3.75) έχουμε ότι

$$\frac{q-p}{2p}\tilde{r}^s A(\tilde{\upsilon}) + \frac{p-s}{2p}\tilde{r}^s B(\tilde{\upsilon}) = \frac{2-p}{2p}\tilde{r}^2\|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2. \tag{3.79}$$

Τότε οι (3.14) και (3.79) συνάγουν ότι

$$M = \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(\upsilon_n) = \frac{(q-p)(2-q)}{2pq}\tilde{r}^q A(\tilde{\upsilon}) + \frac{(p-s)(2-s)}{2ps}\tilde{r}^s B(\tilde{\upsilon}) > 0.$$

Επομένως, η $\tilde{\upsilon} \in G_2$ όπως ισχυριστήκαμε. Με παρόμοια αιτιολόγηση όπως και στην περίπτωση $p < q < 2 < s$ αποδεικνύουμε ότι $\tilde{r} = r(\tilde{\upsilon})$. Τελικά, παίρνοντας το όριο στην (3.23) συμπεραίνουμε ότι $\tilde{\upsilon} \in S^1$ και $\hat{\Phi}(\tilde{\upsilon}) = M$. Συνεπώς $u := r(\tilde{\upsilon})\tilde{\upsilon}$ είναι μία λύση του (3.5)-(3.6).

Επομένως έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3.5 *Υποθέτουμε ότι οι* (H0)–(H2) *ικανοποιούνται,* $s < p < q < 2$ *και το σύνολο* G_6 *όπως ορίζεται από την* 3.77 *είναι μη κενό. Τότε το πρόβλημα* (3.5) – (3.6) *έχει μία μη αρνητική λύση* $u \in C^{1,\delta}(\Omega)$ *για κάποιο* $\delta \in (0,1)$.

Θα δώσουμε κάποιες συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν ότι $G_6 \neq \emptyset$. Υποθέτουμε ότι $suppa^+ \subseteq suppb$. Τότε υπάρχει $\upsilon \in S^1$ τέτοιο ώστε $B(\upsilon) > 0$. Από την (3.75)

$$\left(\frac{p-s}{2-p}\frac{B(\upsilon)}{\|\nabla \upsilon\|_2^2}\right)^{1/(2-s)} \leq r_*(\upsilon), \tag{3.80}$$

και ενόψη της (3.80),

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon)-\frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}r_*(\upsilon)^{s-p}B(\upsilon)$$
$$\geq\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-s)}A(\upsilon)$$

$$-\frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}\Big(\frac{p-s}{2-p}\frac{B(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(s-p)/(2-s)}B(\upsilon)$$

$$\geq\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{1}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-s)}A(\upsilon)^{\frac{2-p}{2-s}+1}$$

$$-\frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}\Big(\frac{p-s}{2-p}\frac{1}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(s-p)/(2-s)}B(\upsilon)^{(2-p)/(2-s)}.$$

Παρατηρούμε ότι αν

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{1}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-s)}A(\upsilon)^{\frac{2-p}{2-s}+1}$$

$$-\frac{p}{s}\frac{2-s}{2-p}\Big(\frac{p-s}{2-p}\frac{1}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(s-p)/(2-s)}B(\upsilon)^{\frac{2-p}{2-s}}>\|\nabla\upsilon\|_2^2,$$

τότε το $G_6\neq\emptyset$. Είναι φανερό ότι εάν η $a^+(\cdot)$ είναι μεγάλη σε σύγκριση με την $b(\cdot)$ τότε η ανίσωση ικανοποιείται.

Υποθέτουμε τώρα ότι $(suppa^+\backslash suppb)^o\neq\emptyset$. Τότε υπάρχει $\upsilon\in S^1$ με $B(\upsilon)=0$. Από την (3.75) έχουμε ότι

$$\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{1/(2-q)}=r_*(\upsilon),\tag{3.81}$$

και έτσι, ενόψη της (3.81),

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon)=\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)}A(\upsilon)$$

$$= \frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{1}{\|\nabla v\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)} A(v)^{\frac{2-p}{2-q}}.$$

Αν υποθέσουμε ότι

$$\frac{p}{q}\frac{2-q}{2-p}\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{1}{\|\nabla v\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)} A(v)^{\frac{2-p}{2-q}} > \|\nabla v\|_2^2,$$

από την οποία προκύπτει

$$A(v)^{\frac{2-p}{2-q}} > \frac{q}{p}\frac{2-p}{2-q}\Big(\frac{q-p}{2-p}\Big)^{(p-q)/(2-q)} \|\nabla v\|_2^2, \tag{3.82}$$

τότε αν η $a^+(\cdot)$ είναι αρκετά μεγάλη η (3.82) ισχύει. Συνεπώς παίρνουμε ότι το $G_6 \neq \emptyset$.

Περίπτωση 6: $s < q < p < 2$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η παρακάτω συνθήκη:

(H4) $V := (suppa^+ \backslash suppb)^o \neq \emptyset$.

Ορίζουμε

$$Q(r,v) := r^{q-p}A(v) - r^{s-p}B(v) - r^{2-p}\|\nabla v\|_2^2. \tag{3.83}$$

Έστω $v \in G_1$. Αν $B(v) = 0$, η εξίσωση (3.16) έχει μία μοναδική λύση $r(v) > 0$, ενώ αν η $B(v) > 0$, η συνάρτηση $Q(\cdot, v)$ έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο $r_* := r_*(v)$ το οποίο αντιστοιχεί σε ένα ολικό μέγιστο και ικανοποιεί την

$$(p-s)B(v) = (p-q)r_*^{q-s}A(v) + (2-p)r_*^{2-s}\|\nabla v\|_2^2. \tag{3.84}$$

Προφανώς, αν $v \in G_2$, τότε (3.10) έχει ακριβώς δύο θετικές λύσεις $r_1(v)$ και $r_2(v)$ με $r_1(v) < r_*(v) < r_2(v)$. Έστω $r := r(v)$ η μοναδική λύση της (3.10) στην περίπτωση όπου $B(v) = 0$ ή η μεγαλύτερη λύση r_2 στην περίπτωση όπου $B(v) > 0$. Παρατηρούμε ότι αν $B(v) > 0$ τότε

$$r^{p-s+1}Q_r(r,v) = (q-p)A(v)r^{q-s} - (s-p)B(v) - (2-p)r^{2-s}\|\nabla v\|_2^2$$

και έτσι, λόγω της (3.84), συμπεραίνουμε ότι

$$r^{p-s+1}Q_r(r,v) = (p-q)A(v)(r_*^{q-s} - r^{q-s}) - (p-2)\|\nabla v\|_2^2(r_*^{2-s} - r^{2-s}) < 0,$$

ενώ εάν $B(v) = 0$, τότε έχουμε ότι

$$r^{p+1}Q_r(r,v) = (q-p)A(v)r^q - (2-p)\|\nabla v\|_2^2 r^2 < 0.$$

Άρα η $r(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη, από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης. Ορίζουμε

$$G_7 = \{v \in G_1 : B(v) = 0\} \cup \{v \in G_1 : B(v) > 0 \ \ \textit{και} \ \ \|\nabla v\|_p^p < Q(r_*(v), v)\}.$$

Λόγω των (H1) και (H4), βλέπουμε ότι $G_7 \neq \emptyset$ επειδή για κάθε $v \in E$ με $suppv \subseteq V$ ισχύει ότι $A(v) > 0$ και $B(v) = 0$. Ισχυριζόμαστε ότι το G_7 είναι ανοιχτό. Πράγματι, έστω $\hat{v} \in G_7$ και $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E \backslash G_7$ μια ακολουθία με $v_n \to \hat{v}$ ισχυρά στο E. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η $B(\hat{v}) = 0$ ενώ $B(\hat{v}) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι,

$$\|\nabla v_n\|_p^p \geq Q(r_*(v_n), v_n) \textit{για κάθε}\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.85}$$

Επειδή $A(\hat{v}) > 0$, λόγω της (3.84), έχουμε $r_*(v_n) \to 0$. Συνδυάζοντας τις (3.84) και (3.83) παίρνουμε ότι

$$Q(r_*(v), v) = \frac{q-s}{p-s} r_*(v)^{q-p} A(v) - \frac{2-s}{p-s} r_*(v)^{2-p} \|\nabla v\|_2^2,$$

συνεπώς $\lim_{n\to\infty} Q(r_*(v_n), v_n) = +\infty$, που είναι άτοπο λόγω της (3.85). Από την (3.10)συνάγουμε ότι η $r(\cdot)$ είναι φραγμένη, συνεπώς η $\hat{\Phi}(\cdot)$ είναι επίσης φραγμένη στο $G_7 \cap S^1$. Λόγω της (3.11) και της (H4), $M < 0$.

Ορίζουμε τώρα το παρακάτω πρόβλημα

$$M = \inf_{v \in G_2 \cap S^1} \hat{\Phi}(v) < 0$$

και υποθέτουμε ότι η $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία ελαχιστοποίησης της $\hat{\Phi}$ στο $G_7 \cap S^1$. Τότε υπάρχει $\tilde{v} \in E$ τέτοιο ώστε $A(v_n) \to A(\tilde{v}) \geq 0$, $B(v_n) \to B(\tilde{v}) \geq 0$ και

$$0 \leq \|\nabla \tilde{v}\|_p^p \leq \liminf \|\nabla v_n\|_p^p \leq 1.$$

Επιπλέον, $r(v_n) \to \tilde{r}$ για μία νέα υπακολουθία. Προφανώς $\tilde{r} > 0$ επειδή αν $\tilde{r} = 0$ τότε, από την (3.11), $M = \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(v_n) = 0$· το οποίο είναι άτοπο. Ισχυριζόμαστε ότι $A(\tilde{v}) > 0$. Πράγματι, από την (3.16) έχουμε ότι

$$\|\nabla v_n\|_p^p r(v_n)^{p-q} \leq A(v_n),$$

και παίρνοντας το όριο,

$$\|\nabla \tilde{v}\|_p^p r(\tilde{v})^{p-q} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_p^p r(v_n)^{p-q} \leq \lim_{n\to\infty} A(v_n) = A(\tilde{v}).$$

Άρα, αν $A(\tilde{v}) = 0$ τότε $\tilde{v} = 0$. Ωστόσο, αυτό οδηγεί σε άτοπο, επειδή από την (3.8), θα είχαμε $0 = \Phi(0) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(r(v_n)v_n) = M$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $\tilde{v} \in G_7$. Αρχικά υποθέτουμε ότι $B(\tilde{v}) > 0$. Επειδή

$$(p-s)B(v_n) = (p-q)r_*^{q-s}A(v_n) + (2-p)r_*^{2-s}\|\nabla v_n\|_2^2,$$

παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\{r_*(v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Έτσι, για μια υπακολουθία, $r_*(v_n) \to \tilde{r}_* > 0$. Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα με την προηγούμενη περίπτωση έχουμε ότι $\tilde{r} = \tilde{r}_* = r_*(\tilde{v})$. Παίρνοντας το όριο στην (3.84) βλεπουμε ότι $\|\nabla v_n\|_2^2 \to \|\nabla \tilde{v}\|_2^2$ και

$$B(\tilde{v}) = \frac{p-q}{p-s} r_*^{q-s}(\tilde{v})A(\tilde{v}) + \frac{2-p}{p-s} r_*^{2-s}(\tilde{v})\|\nabla \tilde{v}\|_2^2.$$

Επομένως,

$$M = \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(v_n) = \frac{(2-s)(2-p)}{2ps}\tilde{r}^2\|\nabla\tilde{v}\|_2^2 + \tilde{r}^q A(\tilde{v})\frac{(q-s)(p-q)}{psq} > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, $\tilde{v} \in G_7$ όπως ισχυριστήκαμε. Επίσης αν $B(\tilde{v}) = 0$ τότε άμεσα προκύπτει ότι $\tilde{v} \in G_7$. Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση $p < q < 2 < s$ οδηγούμαστε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3.6 *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες* (H0)-(H2) και (H4) *ικανοποιούνται και* $s < q < p < 2$. *Τότε το πρόβλημα* $(3.1) - (3.2)$ *έχει μία μη αρνητική λύση* $u \in C^{1,\delta}(\Omega)$ *για κάποιο* $\delta \in (0,1)$.

Περίπτωση 7: $p < q < s < 2$

Σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε

$$Q(r,v) := r^{q-p}A(v) - r^{s-p}B(v) - r^{2-p}\|\nabla v\|_2^2.$$

Παρατηρούμε ότι για $v \in G_1$ η συνάρτηση $Q(\cdot, v)$ έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο $r_* := r_*(v)$ το οποίο ικανοποιεί την

$$(q-p)A(v) = (s-p)r_*(v)^{s-q}B(v) + (2-p)r_*(v)^{2-q}\|\nabla v\|_2^2. \qquad (3.86)$$

Είναι φανερό ότι η (3.10) έχει δύο θετικές λύσεις $r_1(v)$, $r_2(v)$ με $r_1(v) < r_*(v) < r_2(v)$ για κάθε $v \in G_2$. Έστω $r := r_2(v)$. Τότε

$$r^{p-q+1}Q_r(r,v) = (q-p)A(v) - (s-p)r^{s-q}B(v) - (2-p)r^{2-q}\|\nabla v\|_2^2,$$

η οποία συνδυαζόμενη με την (3.86), δίνει

$$r^{p-q+1}Q_r(r,\upsilon) = (2-p)\|\nabla\upsilon\|_2^2(r_*^{2-q} - r^{2-q}) + (s-p)B(\upsilon)(r_*^{s-q} - r^{s-q}) < 0.$$

Επομένως, το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης εξασφαλίζει ότι η $r(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Υποθέτουμε ότι το σύνολο

$$G_8 := \{\upsilon \in G_1 : \|\nabla\upsilon\|_p^p < \frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon)\}$$

είναι μη κενό. Επειδή $q > p$ και $r(\upsilon)^{q-p} > r_*(\upsilon)^{q-p}$, παρατηρούμε ότι $G_8 \subseteq G_2$ και έτσι $G_2 \neq \emptyset$. Αν $\upsilon \in G_8$, τότε

$$\|\nabla\upsilon\|_p^p < \frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon) < \frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p}r(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon)$$

συνεπώς

$$\frac{2-p}{p}r(\upsilon)^p\|\nabla\upsilon\|_p^p + \frac{q-2}{q}r(\upsilon)^qA(\upsilon) < 0. \tag{3.87}$$

Συνδυάζοντας τις (3.87) και (3.14), έχουμε ότι

$$\hat{\Phi}(\upsilon) < r^p(\frac{1}{p} - \frac{1}{s})\|\nabla\upsilon\|_p^p + r^q(\frac{1}{s} - \frac{1}{q})A(\upsilon) < 0.$$

Επίσης, αν $\upsilon \in G_2 \cap S^1$, τότε η (3.16) συνάγει ότι

$$r(\upsilon) \leq \Big(\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{1/(2-q)}$$

συνεπώς η $r(\cdot)$ είναι φραγμένη στο $G_2 \cap S^1$. Κατά συνέπεια η $\hat{\Phi}(\upsilon)$ είναι επίσης φραγμένη στο $G_2 \cap S^1$. Έστω

$$M := \inf_{\upsilon \in G_2 \cap S^1} \hat{\Phi}(\upsilon) < 0$$

και υποθέτουμε ότι η $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία ελαχιστοποίησης της $\hat{\Phi}$ στο $G_2 \cap S^1$. Τότε, υπάρχει $\tilde{\upsilon} \in E$ τέτοιο ώστε, για τουλάχιστον μία υπακολουθία,

$$A(\upsilon_n) \to A(\tilde{\upsilon}) \geq 0,\ B(\upsilon_n) \to B(\tilde{\upsilon}) \geq 0,$$

$$0 \leq \|\nabla\tilde{\upsilon}\|_2 \leq \liminf \|\nabla\upsilon_n\|_2 \leq 1,$$

$$0 \leq \|\nabla \tilde{\upsilon}\|_p \leq \liminf \|\nabla \upsilon_n\|_p \leq 1.$$

Θα έχουμε $\tilde{\upsilon} \neq 0$, διαφορετικά, $0 = \Phi(0) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(r(\upsilon_n)\upsilon_n) = M$, το οποίο είναι άτοπο. Επειδή η $\{r(\upsilon_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και $r_*(\upsilon_n) < r(\upsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $r_*(\upsilon_n) \to \tilde{r}_*$ και $r(\upsilon_n) \to \tilde{r}$. Επειδή $M = \liminf_{n\to\infty} \hat{\Phi}(\upsilon_n) < 0$ προκύπτει ότι $\tilde{r} > 0$. Επίσης έχουμε ότι $A(\tilde{\upsilon}) > 0$, διότι, αν υποθέσουμε το αντίθετο, από την

$$\tilde{r}^{2-q}\|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2 \leq \liminf_{n\to\infty}(r(\upsilon_n)^{2-q}\|\nabla \upsilon_n\|_2^2) \leq \lim_{n\to\infty} A(\upsilon_n) = A(\tilde{\upsilon})$$

θα παίρναμε $\tilde{r} = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, $\tilde{\upsilon} \in G_1$. Επίσης, $\tilde{r}_* > 0$ από την (3.86). Θα δείξουμε ότι $\tilde{\upsilon} \in G_2$. Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση $p < q < 2 < s$ συνάγουμε ότι $\tilde{r} = \tilde{r}_* = \tilde{r}_*(\tilde{\upsilon})$. Επίσης, αντικαθιστώντας όπου υ την υ_n στην (3.86) και παίρνοντας το όριο οδηγούμαστε στην

$$(q-p)A(\tilde{\upsilon}) \geq (s-p)r_*(\tilde{\upsilon})^{s-q}B(\tilde{\upsilon}) + (2-p)r_*(\tilde{\upsilon})^{2-q}\|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2.$$

Ωστόσο, η $r_*(\tilde{\upsilon})$ ικανοποιεί την

$$(q-p)A(\tilde{\upsilon}) = (s-p)r_*(\tilde{\upsilon})^{s-q}B(\tilde{\upsilon}) + (2-p)r_*(\tilde{\upsilon})^{2-q}\|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2,$$

συνεπώς συμπεραίνουμε ότι $\|\nabla \upsilon_n\|_2^2 \to \|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2$. Από την (3.34) παίρνουμε ότι

$$A(\tilde{\upsilon}) = \frac{s-p}{q-p}\tilde{r}^{s-q}B(\tilde{\upsilon}) + \frac{2-p}{q-p}\tilde{r}^{2-q}\|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2. \tag{3.88}$$

Έτσι, οι (3.14) και (3.88) συνάγουν ότι

$$M = \lim_{n\to\infty} \hat{\Phi}(\upsilon_n) = \frac{(s-q)(s-p)}{pqs}\tilde{r}^s B(\tilde{\upsilon}) + \frac{(2-p)(2-q)}{2pq}\tilde{r}^2\|\nabla \tilde{\upsilon}\|_2^2 > 0,$$

άτοπο, αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό . Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση $p < q < 2 < s$ έχουμε την $\tilde{r} = r(\tilde{\upsilon})$. Τελικά, παίρνοντας το όριο στην (3.23) οδηγούμεθα στην (3.21), η οποία εξασφαλίζει ότι $\tilde{\upsilon} \in S^1$ και $\hat{\Phi}(\tilde{\upsilon}) = M$. Συνεπώς, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.3.7 *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες* (H0)-(H2) *ικανοποιούνται,* $p < q < s < 2$ *και το σύνολο* G_3 *όπως ορίζεται στην (3.26) είναι μη κενό. Τότε το πρόβλημα* (3.5) – (3.6) *έχει μία μη αρνητική λύση* $u \in C^{1,\delta}(\Omega)$ *για κάποιο* $\delta \in (0, 1)$.

Θα δώσουμε τώρα κάποιες συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν ότι $G_3 \neq \emptyset$. Υποθέτουμε ότι $suppa^+ \subseteq suppb$. Τότε υπάρχει $\upsilon \in G_1$ τέτοιο ώστε $B(\upsilon) > 0$. Αφού $r_*(\upsilon)^{2-q} < r(\upsilon)^{2-q}$, από την (3.86) έχουμε ότι

$$(q-p)A(\upsilon) < (s-p)r_*(\upsilon)^{s-q}B(\upsilon) + (2-p)r(\upsilon)^{2-q}\|\nabla\upsilon\|_2^2, \tag{3.89}$$

συνεπώς

$$r_*(\upsilon)^{s-q} > \frac{q-p}{s-p}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)} - \frac{2-p}{s-p}r(\upsilon)^{2-q}\frac{\|\nabla\upsilon\|_2^2}{B(\upsilon)}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon) \quad &> \quad \frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p} \times \\ \Big(\frac{q-p}{s-p}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)} \quad &- \quad \frac{2-p}{s-p}r(\upsilon)^{2-q}\frac{\|\nabla\upsilon\|_2^2}{B(\upsilon)}\Big)^{(q-p)/(s-q)}A(\upsilon).\end{aligned} \tag{3.90}$$

Από την άλλη, η (3.16) δίνει ότι

$$r(\upsilon) \leq \Big(\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)}\Big)^{1/(s-q)},$$

η οποία συνδυαζόμενη με την (3.90) συνάγει ότι

$$\frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p}\Big(\frac{q-p}{s-p}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)} - \frac{2-p}{s-p}r(\upsilon)^{2-q}\frac{\|\nabla\upsilon\|_2^2}{B(\upsilon)}\Big)^{(q-p)/(s-q)}A(\upsilon)$$

$$> \frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p}\Big(\frac{q-p}{s-p}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)} - \frac{2-p}{s-p}\Big(\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)}\Big)^{(2-q)/(s-q)}\frac{\|\nabla\upsilon\|_2^2}{B(\upsilon)}\Big)^{\frac{q-p}{s-q}}A(\upsilon).$$

Αν η $a^+(\cdot)$ είναι αρκετά μεγάλη, τότε

$$\frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p}\Big(\frac{q-p}{s-p}\frac{A(\upsilon)}{B(\upsilon)} - \frac{2-p}{s-p}A(\upsilon)^{(2-q)/(s-q)}\frac{\|\nabla\upsilon\|_2^2}{B(\upsilon)^{\frac{2-q}{s-q}+1}}\Big)^{(q-p)/(s-q)}A(\upsilon) >$$

$$\|\nabla\upsilon\|_p^p,$$

από την οποία έχουμε ότι $\upsilon \in G_8$. Συνεπώς $G_8 \neq \emptyset$.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $(suppa^+)\backslash suppb))^o \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $\upsilon \in S^1$ με $B(\upsilon) = 0$. Από την (3.86)

$$r_*(\upsilon) = \Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla\upsilon\|_2^2}\Big)^{1/(2-q)},$$

συνεπώς

$$\frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p}r_*(\upsilon)^{q-p}A(\upsilon) = \frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p}\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla \upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)}A(\upsilon).$$

Επομένως, αν η $a^+(\cdot)$ είναι αρκετά μεγάλη, τότε

$$\frac{p}{q}\frac{s-q}{s-p}\Big(\frac{q-p}{2-p}\frac{A(\upsilon)}{\|\nabla \upsilon\|_2^2}\Big)^{(q-p)/(2-q)}A(\upsilon) > \|\nabla \upsilon\|_p^p,$$

από την οποία έχουμε ότι $G_8 \neq \emptyset$.

Περίπτωση 8: $q > \max\{p, s, 2\}$

Σε αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Ορεινής Διάβασης.

Λήμμα 3.3.2 *Η $\Phi(\cdot)$ ικανοποιεί την συνθήκη Palais – Smale.*

Απόδειξη: Έστω $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι μία ακολουθία στο E τέτοια ώστε $|\Phi(u_n)| \leq C$ για κάποιο $C > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\Phi'(u_n) \to 0$ στον $E' = H^{-1}(\Omega)$. Για $\varepsilon > 0$ και $\upsilon \in E$ έχουμε

$$|\langle \Phi'(u_n), \upsilon\rangle| = \Big| \int |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \upsilon dx + \int \nabla u_n \nabla \upsilon dx$$

$$- \int a(x){u_n}^{q-1}\upsilon dx \ \ + \int b(x){u_n}^{s-1}\upsilon dx\Big| \ \leq \varepsilon \|\upsilon\|_E \tag{3.91}$$

Αν αντικαταστήσουμε όπου $\upsilon = u_n$ στην (3.3), τότε

$$\int a(x){u_n}^q dx \leq \varepsilon \|u_n\|_{1,k} + \int |\nabla u_n|^p dx + \int |\nabla u_n|^2 dx + \int b(x){u_n}^s dx \tag{3.92}$$

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι

$$\frac{1}{p}\|\nabla u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 - \frac{1}{q}\int a(x)|u_n|^q dx + \frac{1}{s}\int b(x)|u_n|^s dx \leq C. \tag{3.93}$$

Συνδυάζοντας τις (3.92) και (3.93) παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{p}\|\nabla u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|\nabla u_n\|_2^2 + \frac{1}{s}\int b(x)|u_n|^s dx - \frac{1}{q}\varepsilon\|u_n\|_E$$

$$-\frac{1}{q}\int |\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{q}\int |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{q}\int b(x){u_n}^s dx \leq C,$$

συνεπώς

$$(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\|\nabla u_n\|_p^p+(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})\|\nabla u_n\|_2^2+(\frac{1}{s}-\frac{1}{q})\int b(x)|u_n|^s dx\le C+\frac{1}{q}\varepsilon\|u_n\|_E.$$

Επειδή $q>\max\{p,2,s\}$, συμπεραίνουμε ότι

$$(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\|\nabla u_n\|_p^p+(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})\|\nabla u_n\|_2^2\le C+\frac{1}{q}\varepsilon\|u_n\|_E \tag{3.94}$$

η οποία αποδεικνύει ότι η ακολουθία $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη στο E. Συνεπώς για κάποια υπακολουθία της $\{u_n\}$ την οποία συμβολίζουμε με $\{u_n\}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_n\to u$ ασθενώς στο E. Κατά συνέπεια,

$$\lim_{n\to\infty}\langle\Phi'(u_n)-\Phi'(u),u_n-u\rangle=0. \tag{3.95}$$

Ανικαθιστώντας το υ με το u_n-u στην (3.3) έχουμε ότι

$$\int\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla u_n-\nabla u)dx+\int\left(\nabla u_n-\nabla u\right)(\nabla u_n-\nabla u)dx$$

$$=\langle\Phi'(u_n)-\Phi'(u),u_n-u\rangle-\int|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n-u)dx$$

$$-\int\nabla u_n\nabla(u_n-u)dx+\int|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_n-u)dx+\int\nabla u\nabla(u_n-u)dx$$
$$-\int a(x)|u|^{q-2}u(u_n-u)dx+\int b(x)|u_n|^{s-2}u_n(u_n-u)dx+$$
$$\int a(x)|u_n|^{q-2}u_n(u_n-u)dx+\int b(x)|u|^{s-2}u(u_n-u)dx \tag{3.96}$$

Επειδή, για τουλάχιστον μία υπακολουθία, $u_n\to u$ στον $L^p(\Omega)$ και στον $L^2(\Omega)$, (3.3) δίνει

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{\int\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla u_n-\nabla u)dx$$
$$+\int\left(\nabla u_n-\nabla u\right)(\nabla u_n-\nabla u)dx\Big\}=0.$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$0\leq \Big\{\Big(\int|\varphi|^k dx\Big)^{1/k'}-\Big(\int|\psi|^k dx\Big)^{1/k'}\Big\}\Big\{\Big(\int|\varphi|^k dx\Big)^{1/k}-\Big(\int|\psi|^k dx\Big)^{1/k}\Big\}$$
$$\leq \int\big(|\varphi|^{k-2}\varphi-|\psi|^{k-2}\psi\big)(\varphi-\psi)dx,$$
η οποία ισχύει για $\varphi,\psi\in L^k(\Omega)$ με $k'=k/(k-1)$, [31], για να συμπεραίνουμε ότι $u_n\to u$ στο E.

Λήμμα 3.3.3 *(i) Υπάρχουν $\rho,\alpha>0$ τέτοια ώστε $\Phi(u)\geq\alpha$ αν $\|u\|_E=\rho$.*
(ii) Υπάρχει $u\in E$ με $\|u\|>\rho$ και $\Phi(u)<0$.

Απόδειξη:
(i) Αν $u\in E\backslash\{0\}$, τότε
$$\Phi(u)\geq\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2-\frac{1}{q}\int a(x)|u|^q dx.$$
Από την ενσφήνωση *Sobolev* έχουμε ότι
$$\Phi(u)\geq\frac{1}{p}\|u\|_E^2-\frac{c}{q}\|u\|_E^q\geq\alpha>0,$$
όταν $\|u\|_E=\rho$ με $\rho>0$ είναι αρκετά μικρό.
(ii) Έστω $v\in G_1$ και $t>0$. Τότε
$$\Phi(tv)=\frac{t^p}{p}\|\nabla v\|_p^p+\frac{t^2}{2}\|\nabla v\|_2^2-\frac{t^q}{q}\int a(x)|v|^q dx+\frac{t^s}{s}\int b(x)|v|^s dx,$$
συνεπώς $\lim_{t\to\infty}\Phi(tv)=-\infty$. Άρα $\Phi(tv)<0$ για αρκετά μεγάλο t.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ορεινής Διάβασης παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3.8 *Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες* (H0)–(H4) *ισχύουν με $q>\max\{p,s,2\}$. Τότε το πρόβλημα* (3.1) – (3.2) *έχει μία λύση.*

Κεφάλαιο 4

Ελλειπτικά προβλήματα με την **p(x)-Laplacian** και ανταγωνιστικές μη-γραμμικότητες

4.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

Θα μελετήσουμε την ύπαρξη μη-αρνητικών λύσεων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ινώσεων για το ελλειπτικό πρόβλημα

$$-\Delta_{p(x)}u = -\lambda a(x)|u|^{p(x)-2}u + \mu b(x)|u|^{q(x)-2}u - \varepsilon c(x)|u|^{t(x)-2}u \ \sigma\tau o\ \Omega, \quad (4.1)$$

$$u = 0 \ \ \sigma\tau o\ \partial\Omega, \quad (4.2)$$

όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ είναι ένα φραγμένο χωρίο, $a(.), b(.)$, $c(.)$ είναι ουσιωδώς φραγμένες συναρτήσεις $L^\infty(\Omega)$ και οι $p(.), q(.), t(.)$ είναι συνεχείς στο $\overline{\Omega}$.

4.2 Αναδρομή προηγούμενων αποτελεσμάτων

Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο στο $\mathbb{R}^N$ με αρκετά λείο σύνορο $\partial\Omega$. Θεωρούμε το ψευδογραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα

$$\left.\begin{aligned} -\Delta_{p(x)}u &= f(x,u) \ \sigma\tau o\ \Omega, \\ u &= 0 \qquad \sigma\tau o\ \partial\Omega, \end{aligned}\right\}$$

όπου $\Delta_{p(x)}u = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ είναι ο $p(x)-Laplace$ τελεστής και οι f : $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία Καραθεοδωρή συνάρτηση.
Όταν ο εκθέτης $p(.)$ δεν είναι σταθερός, ο τελεστής $p(x)-$ $Laplace$ εμφανίζεται σε μοντέλα που αφορούν

(i) Ηλεκτρολογικά ρευστά, [9], [51].

(ii) Αποκατάσταση εικόνας, όπου $p(x) \in [1, 2]$, [25].

(iii) Μη-γραμμικούς $Darcy's\ laws$ σε πορώδη μέσα, [10].

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το πρόβλημα

$$-\Delta_{p(x)}u = -\lambda a(x)|u|^{p(x)-2}u + \mu b(x)|u|^{q(x)-2}u - \varepsilon c(x)|u|^{t(x)-2}u \ \sigma\tau o\ \Omega, \quad (4.3)$$

$$u = 0 \quad \sigma\tau o\ \partial\Omega, \quad (4.4)$$

όπου το Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο στο $\mathbb{R}^N$ με αρκετά λείο σύνορο $\partial\Omega$, οι $p, q, t : \overline{\Omega} \to (1, +\infty)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ενώ λ, μ και ε είναι θετικές σταθερές. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση $b(.)$ αλλάζει πρόσημο ενώ η $a(.)$ και $c(.)$ είναι μη-αρνητικές στο Ω. Το πρόβλημα (4.4.1) εξετάστηκε στο [6] για την περίπτωση $c \equiv 0$ με $p(x) < q(x)$ στο $\overline{\Omega}$ όπου, μέσω μιας εφαρμογής του Θεωρήματος Ορεινής Διάβασης, αποδείχθηκε η ύπαρξη άπειρου αριθμού λύσεων. Η περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}^N$ έχει μελετηθεί στο [4] όπου, κάτω από κατάλληλες συνθήκες συμπεριφοράς του $q(.)$ στο άπειρο, αποδεικνύεται η ύπαρξη μίας λύσης. Εξισώσεις οι οποίες περιέχουν τον τελεστή $-\Delta_{p_1(x)}u - \Delta_{p_2(x)}u$ σε ένα φραγμένο χωρίο εξετάστηκαν στο [45] όπου $m(x) := \max\{p_1(x), p_2(x)\} < q(x) < \frac{Nm(x)}{N-m(x)}$. Σημειώνουμε ότι καμία από τις προναφερθέντες εργασίες δεν εξετάζει το πρόσημο των παρεχόμενων λύσεων στην περίπτωση όπου $q(x) < p(x)$ στο $\overline{\Omega}$.

Ο σκοπός μας είναι να δώσουμε συνθήκες για την (4.4.1) οι οποίες εξασφαλίζουν την ύπαρξη μίας μη-αρνητικής λύσης και να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της λύσης και του ενεργειακού συναρτησοειδούς καθώς $\varepsilon \to 0$. Για να το κάνουμε αυτό υιοθετούμε τη μέθοδο των ινώσεων του $Pohozaev$, [32], [43], [49], η οποία αναλύει τον χώρο $Sobolev$ $W^{1,p(.)}(\Omega)$ σε ακτίνες ($fibers$), και εξετάζει τη συμπεριφορά του συναρτησειακού ενέργειας σε αυτές, όπως ήδη έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 1.

4.3 Μαθηματικό υπόβαθρο

Σε αυτήν την ενότητα παραθέτουμε κάποιους ορισμούς και βασικές ιδιότητες των χώρων με μεταβλητό εκθέτη $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ και $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο [34].
Έστω

$$C_+(\overline{\Omega}) = \left\{p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : p \ \ \textit{είναι συνεχείς και} \ \ p(x) > 1 \ \ \textit{για κάθε} \ x \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Αν $s \in C_+(\overline{\Omega})$ ορίζουμε $s^+ := \sup_{x\in\overline{\Omega}} s(x)$ και $s^- := \inf_{x\in\overline{\Omega}} s(x)$.
Δίνεται $p \in C_+(\overline{\Omega})$. Ο χώρος *Lebesgue* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ με μεταβλητό εκθέτη είναι ορίζεται ως εξής:

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \ \ \textit{είναι μετρήσιμη και} \int_\Omega |u|^{p(x)} dx < \infty \right\}.$$

Ο χώρος αυτός εφοδιασμένος με τη νόρμα *Luxemburg* :

$$\|u\|_{p(.)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{u}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

είναι ένας χώρος *Banach* και μοιράζεται πολλές από τις ιδιότητες των κλασσικών *Lebesgue* χώρων όπως η διαχωρισιμότητα, ανακλαστικότητα και η ομοιόμορφη κυρτότητα. Η $\|u\|_{p(.)}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ανισότητες:

$$\left(\int_\Omega |u|^{p(x)} dx\right)^{1/p^-} \leq ||u||_{p(.)} \leq \left(\int_\Omega |u|^{p(x)} dx\right)^{1/p^+} \quad \textit{αν} \ \ ||u||_{p(.)} < 1 \tag{4.5}$$

και

$$\left(\int_\Omega |u|^{p(x)} dx\right)^{1/p^+} \leq ||u||_{p(.)} \leq \left(\int_\Omega |u|^{p(x)} dx\right)^{1/p^-} \quad \textit{αν} \ ||u||_{p(.)} \geq 1. \tag{4.6}$$

Επιπλέον, αν $p, s \in C_+(\overline{\Omega})$ με $p(x) < s(x)$ στο $\overline{\Omega}$, τότε η ενσφήνωση $L^{s(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega)$ είναι συνεχής.

Ο χώρος *Sobolev* $W^{1,p(.)}(\Omega)$ με μεταβλητό εκθέτη ορίζεται ως

$$W^{1,p(.)}(\Omega) := \left\{ u \in L^{p(.)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(.)}(\Omega) \right\}$$

και εφοδιάζεται με την νόρμα

$$\|u\|_{1,p(.)} = \|u\|_{p(.)} + \|\nabla u\|_{p(.)} .$$

Ο $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ ορίζεται ως η κλειστότητα του $C_0^\infty(\Omega)$ στον $W^{1,p(.)}(\Omega)$ ως προς τη νόρμα $||\cdot||_{1,p}$. Ο κρίσιμος *Sobolev* εκθέτης ορίζεται από την

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)} & \alpha\nu\ p(x) < N, \\ +\infty & \alpha\nu\ p(x) \geq N. \end{cases}$$

Οι χώροι $W^{1,p(.)}(\Omega)$ και $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμοι, ανακλαστικοί και ομοιόμορφα κυρτοί χώροι *Banach*. Επιπλέον, αν $q(x) < p^*(x)$ στο $\overline{\Omega}$, τότε $W^{1,p(.)}(\Omega)$ ενσφηνώνεται συμπαγώς στον $L^{q(.)}(\Omega)$. Άρα, εν'οψη των (4.5) και (4.6),

$$\int_\Omega |v|^{q(x)} dx \leq c \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx \right)^\beta , \tag{4.7}$$

όπου $c > 0$ και

$$\beta := \begin{cases} \frac{q^-}{p^+} & \alpha\nu\ \|u\|_{q(.)} < 1 \ \ \kappa\alpha\iota\ \ \|\nabla u\|_{p(.)} < 1 \\ \frac{q^+}{p^+} & \alpha\nu\ \ \|u\|_{q(.)} \geq 1 \ \ \kappa\alpha\iota\ \ \|\nabla u\|_{p(.)} < 1 \\ \frac{q^+}{p^-} & \alpha\nu\ \ \|u\|_{q(.)} \geq 1\kappa\alpha\iota\ \ \|\nabla u\|_{p(.)} \geq 1 \\ \frac{q^-}{p^-} & \alpha\nu\ \ \|u\|_{q(.)} < 1\kappa\alpha\iota\ \ \|\nabla u\|_{p(.)} \geq 1. \end{cases} \tag{4.8}$$

Η ανάλογη ανισότητα της *Poincaré* είναι η

$$\|u\|_{p(.)} \leq C \|\nabla u\|_{p(.)}$$

$$'opou$$

υ $\in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$, και $C > 0$. Συνεπώς, οι νόρμες $\|u\|_{1,p(.)}$ και $\|\nabla u\|_{p(.)}$ είναι ισοδύναμες στον $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$.

4.4 Υποθέσεις και κύρια αποτελέσματα

Διατυπώνουμε τις υποθέσεις για το πρόβλημα $(4.1)-(4.2)$:

$H(1)$ $p, q, t \in C_+(\overline{\Omega})$ με $p(x) < N$ και $q(x) < p^* < t(x)$ για κάθε $x \in \overline{\Omega}$.

$H(2)$ $a, b, c \in L^\infty(\Omega)$ με $a, c \geq 0$ σ.π στο Ω και $m\{x \in \Omega : b(x) > 0\} > 0$.

Το συναρτησιακό ενέργειας του προβλήματος $(4.1)-(4.2)$ είναι ορισμένο στο χώρο $E := W_0^{1,p(.)}(\Omega) \cap L^{t(.)}(\Omega)$ ο οποίος εφοδιάζεται με τη νόρμα

$$||u||_E =: ||u||_{1,p(.)} + ||u||_{t(.)},$$

και δίνεται από την

$$\Phi_\varepsilon(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \lambda \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|u|^{p(x)}dx - \mu \int_\Omega \frac{b(x)}{q(x)}|u|^{q(x)}dx$$

$$+\varepsilon \int_\Omega \frac{c(x)}{t(x)}|u|^{t(x)}dx. \tag{4.9}$$

Ορίζουμε το επεκταμένο συναρτησοειδές $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R}$ θέτοντας για κάθε $r > 0$ και $v \in E$

$$\mathcal{F}(r, v) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla v|^{p(x)} r^{p(x)} dx + \lambda \int_\Omega \frac{a(x)}{p(x)}|v|^{p(x)} r^{p(x)} dx$$

$$-\mu \int_\Omega \frac{b(x)}{q(x)}|v|^{q(x)} r^{q(x)} dx + \varepsilon \int_\Omega \frac{c(x)}{t(x)}|v|^{t(x)} r^{t(x)} dx. \tag{4.10}$$

Αν $u = rv$ είναι ένα μη-τετριμμένο κρίσιμο σημείο της $\Phi_\varepsilon(.)$, τότε

$$\mathcal{F}_r(r, v) = 0. \tag{4.11}$$

Υποθέτουμε ότι η $r = r(v) > 0$ ικανοποιεί την (4.11) για κάθε v στο $E\backslash\{0\}$ και $r(.) \in C^1(E\backslash\{0\})$. Τότε το συναρτησοειδές

$$\widehat{\Phi}_\varepsilon(v) := \Phi_\varepsilon(r(v)v) \tag{4.12}$$

είναι καλώς ορισμένο και είναι συνεχώς διαφορίσιμο στο E. Θα μελετήσουμε την $\widehat{\Phi}_\varepsilon(.)$ υπό τον περιορισμό

$$H(v) = 1,$$

όπου $H : E \to \mathbb{R}$ είναι ορισμένη από την

$$H(v) := \int_\Omega \left[|\nabla v|^{p(x)} + \lambda a(x)|v|^{p(x)}\right] dx + \varepsilon \int_\Omega c(x)|u|^{t(x)} dx \tag{4.13}$$

Το κύριο εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η μέθοδος των ινώσεων. Σημειώνουμε ότι το συναρτησοειδές H, όπως ορίζεται στην (4.13), ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος (3.3.1).
Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $q^+ < p^-$

Θεώρημα 4.4.1 *Υποθέτουμε ότι οι $H(1)$ και $H(2)$ ικανοποιούνται, $\lambda, \mu > 0$ και $\varepsilon \geq 0$. Τότε το πρόβλημα $(4.1) - (4.2)$ έχει μία μη-αρνητική λύση.*

Απόδειξη:
Έστω

$$S^1 := \{v \in E : H(v) = 1\} \tag{4.14}$$

και

$$B := \{v \in E : \int_\Omega b(x)|v|^{q(x)} dx > 0\}.$$

Η σχέση (4.11) είναι ισοδύναμη με την

$$\int_\Omega \left[|\nabla v|^{p(x)} + \lambda a(x)|v|^{p(x)}\right] r^{p(x)} dx + \varepsilon \int_\Omega c(x)|v|^{t(x)} r^{t(x)} dx$$

$$= \mu \int_\Omega b(x)|v|^{q(x)} r^{q(x)} dx, \tag{4.15}$$

η οποία, λόγω της $H(2)$, έχει μία μοναδική θετική λύση $r := r(v)$ για κάθε $v \in B$. Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης $r(.) \in C^1(E\backslash\{0\})$. Αν $v \in S^1 \cap B$ με $r(v) \geq 1$, τότε από την H(1) και την (4.15) έχουμε ότι

$$r^{p^-}\left\{\int\limits_\Omega \left[|\nabla v|^{p(x)}+\lambda a(x)|v|^{p(x)}\right]dx+\varepsilon\int\limits_\Omega c(x)|v|^{t(x)}dx\right\}$$
$$=r^{p^-}\leq \mu\int\limits_\Omega b(x)|v|^{q(x)}r^{q(x)}dx\leq r^{q^+}\mu\int\limits_\Omega b|v|^{p(x)}dx,$$
συνεπώς
$$r^{p^- - q^+}\leq \mu\int\limits_\Omega b|v|^{p(x)}dx.$$

Επομένως η $r(.)$ είναι φραγμένη στο $S^1\cap B$. Επίσης, αν $v\in S^1\cap B$, από τις $H(1)$, (4.10) και (4.15), έχουμε ότι

$$\widehat{\Phi}_\varepsilon(v)<\left(\frac{1}{p^-}-\frac{1}{q^+}\right)\int\limits_\Omega|\nabla v|^{p(x)}r^{p(x)}dx+\lambda\left(\frac{1}{p^-}-\frac{1}{q^+}\right)\int\limits_\Omega a|v|^{p(x)}r^{p(x)}dx$$
$$+\varepsilon\left(\frac{1}{t^-}-\frac{1}{q^+}\right)\int\limits_\Omega c|v|^{t(x)}r^{p(x)}dx,$$

και έτσι $\widehat{\Phi}_\varepsilon(v)<0$. Συνεπώς,

$$M:=\inf\{\widehat{\Phi}_\varepsilon(v):v\in S^1\cap B\}<0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το $infimum$ επιτυγχάνεται σε ένα σημείο του $S^1\cap B$. Για αυτό θεωρούμε μια ακολουθία $v_n\in S^1$, $n\in\mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\widehat{\Phi}_\varepsilon(v_n)\to M$. Επειδή η v_n είναι φραγμένη στο E, υπάρχει μία υπακολουθία της v_n, την οποία δηλώνουμε επίσης ως v_n, τέτοια ώστε η $v_n\to v_0$ ασθενώς στο $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ και $L^{t(.)}(\Omega)$ και ισχυρά στους $L^{p(.)}(\Omega)$ και $L^{q(.)}(\Omega)$. Επιπλέον, αφού η $r(.)$ είναι φραγμένη στο $S^1\cap B$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $r(v_n)\to r_0$. Από την ασθενή κάτω ημι-συνέχεια των νορμών $||.||_{1,p(.)}$ και $||.||_{t(.)}$ έχουμε ότι

$$\widehat{\Phi_\varepsilon}(r_0v_0)\leq \liminf_{n\to+\infty}\widehat{\Phi_\varepsilon}(v_n)=M, \tag{4.16}$$

από την οποία συνάγουμε ότι $r_0>0$ και $v_0\neq 0$. Επίσης, αντικαθιστώντας στην (4.15) το v με το v_n και υποθέτοντας ότι $n\to+\infty$, έχουμε ότι

$$\int\limits_\Omega|\nabla v_0|^{p(x)}r_0^{p(x)}dx+\lambda\int\limits_\Omega a|v_0|^{p(x)}r_0^{p(x)}dx+\varepsilon\int\limits_\Omega c|v_0|^{t(x)}r_0^{t(x)}dx$$

$$\leq \mu \int_\Omega b|v_0|^{q(x)} r_0^{q(x)} dx,$$

οπότε $r_0 \leq r(v_0)$ και $r_0 v_0 \in B$. Αν υποθέσουμε ότι $r_0 < r(v_0)$, τότε επειδή η συνάρτηση $r \to \Phi_\varepsilon(rv)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, r(v_0)]$ έχουμε

$$\widehat{\Phi}_\varepsilon(v_0) = \Phi_\varepsilon(r(v_0)v_0) < \widehat{\Phi}_\varepsilon(r_0 v_0) = M. \tag{4.17}$$

Επίσης, για $\rho > 0$, λόγω της (4.15), η $r(\rho v_0)$ ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_\Omega |\nabla \rho v_0|^{p(x)} r(\rho v_0)^{p(x)} dx + \lambda \int_\Omega a|\rho v_0|^{p(x)} r(\rho v_0)^{p(x)} dx$$

$$-\mu \int_\Omega b|\rho v_0|^{q(x)} r(\rho v_0)^{q(x)} dx + \varepsilon \int_\Omega c|\rho v_0|^{t(x)} r(\rho v_0)^{t(x)} dx = 0.$$

Άρα,

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^{p(x)} \left[\rho r(\rho v_0)\right]^{p(x)} dx + \lambda \int_\Omega a|v_0|^{p(x)} \left[\rho r(\rho v_0)\right]^{p(x)} dx$$

$$-\int_\Omega b|v_0|^{q(x)} \left[\rho r(\rho v_0)\right]^{q(x)} dx + \varepsilon \int_\Omega c|v_0|^{t(x)} [\rho r(\rho v_0)]^{t(x)} dx = 0,$$

η οποία δίνει ότι

$$r(v_0) = \rho r(\rho v_0). \tag{4.18}$$

Έστω $s > 0$ τέτοιο ώστε $sv_0 \in S^1$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.17) και (4.18) έχουμε

$$\widehat{\Phi}_\varepsilon(sv_0) = \Phi_\varepsilon(r(tv_0)sv_0) = \Phi_\varepsilon(r(v_0)v_0) = \widehat{\Phi}_\varepsilon(v_0) < M,$$

το οποίο αντιβαίνει στον ορισμό του M. Συνεπώς $r_0 = r(v_0)$ και οι (4.16) και (4.18) συνάγουν ότι $\widehat{\Phi}_\varepsilon(sv_0) = M$. Από το Λήμμα (3.3.1) έχουμε ότι $u := r(v_0)v_0$ είναι μία λύση της (4.4.1). Αφού η $|u|$ ελαχιστοποιεί επίσης την $\widehat{\Phi}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u \geq 0$. ■

Περίπτωση 2: $p^+ < q^-$

Όπως φαίνεται στο ακόλουθο Λήμμα (4.4.1) το πρόβλημα $(4.1) - (4.2)$ δεν έχει πάντα μή τετριμμένη λύση για κάθε τιμή του μ. Η Απόδειξη βασίζεται σε ένα αποτέλεσμα του [22].

Λήμμα 4.4.1 *Υποθέτουμε ότι $H(1)$ και $H(2)$ ισχύουν όπου $b(x) \geq 0$ σ.π και $c(x) > \eta > 0$ σχ.π. στο Ω. Τότε, για κάθε $\lambda, \varepsilon > 0$ υπάρχει $\mu^*(\lambda, \varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε πρόβλημα $(4.1) - (4.2)$ δεν έχει μία μη-τετριμένη λύση για $0 < \mu < \mu^*(\lambda, \varepsilon)$.*

Απόδειξη: Έστω u μία λύση του $(4.1) - (4.2)$. Τότε

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p(x)} + \lambda a(x)|u|^{p(x)}\right] dx + \varepsilon \int_\Omega c(x)|u|^{t(x)} dx = \mu \int_\Omega b(x)|u|^{q(x)} dx. \tag{4.19}$$

Από την ανισότητα του $Young$ έχουμε ότι

$$\mu \int_\Omega b(x)|u|^{q(x)} dx \leq \frac{\varepsilon q^+}{t^-} \int_\Omega c(x)|u|^{t(x)} dx + \frac{t^+ - q^-}{t^-} \mu^\gamma ||b||_\infty^\delta \varepsilon^{-\zeta} \int_\Omega c(x)^{\frac{q(x)}{q(x)-t(x)}} dx,$$

όπου

$$\gamma := \begin{cases} \frac{t^+}{t^- - q^+} & \text{αν } \mu \geq 1 \\ \frac{t^-}{t^+ - q^-} & \text{αν } \mu < 1, \end{cases} \quad \delta := \begin{cases} \frac{t^+}{t^- - q^+} & \text{αν } ||b||_\infty \geq 1 \\ \frac{t^-}{t^+ - q^-} & \text{αν } ||b||_\infty < 1, \end{cases} \quad \text{αν}$$

$$\zeta := \begin{cases} \frac{q^-}{t^- - q^+} & \text{αν } \varepsilon \geq 1 \\ \frac{q^+}{t^+ - q^-} & \text{αν } \varepsilon < 1, \end{cases}$$

και έτσι η (4.19) μας δίνει ότι

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^{p(x)} + \lambda a(x)|u|^{p(x)}\right] dx \leq \frac{t^+ - q^-}{t^-} \mu^\gamma ||b||_\infty^\delta \varepsilon^{-\zeta} \int_\Omega c(x)^{\frac{q(x)}{q(x)-t(x)}} dx. \tag{4.20}$$

Από τις (4.8) και (4.19) έχουμε

$$\hat{c} \left(\int_\Omega b(x)|u|^{q(x)} dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p(x)} + \lambda a(x)|u|^{p(x)}\right] dx \leq \mu \int_\Omega b(x)|u|^{q(x)} dx \tag{4.21}$$

όπου $\hat{c} > 0$ και ο β όπως ορίζεται από την (4.8) με q στη θέση του s. Άρα,

$$\left(\frac{\hat{c}^\beta}{\mu} \right)^{\frac{1}{\beta - 1}} \leq \hat{c} \left(\int_\Omega b(x)|u|^{q(x)} dx \right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{4.22}$$

Λόγω των (4.20)-(4.22) έχουμε

$$\mu \geq \mu^*(\lambda,\varepsilon) := \left(\frac{t^-}{t^+ - q^-} \frac{\hat{c}^{\frac{\beta}{\beta-1}} \varepsilon^{\zeta}}{||b||_\infty^\delta \int\limits_\Omega c(x)^{\frac{q(x)}{q(x)-t(x)}} dx} \right)^{\frac{\beta-1}{\gamma(\beta-1)+1}} > 0.$$

Λήμμα 4.4.2 *Υποθέτουμε ότι οι c_1, c_2 είναι θετικές σταθερές, η $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μία μη-αρνητική ουσιωδώς φραγμένη συνάρτηση με $m\{x \in \Omega : \gamma(x) > 0\} > 0$ και $q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $1 < p < q(x) < t$ για κάθε $x \in \overline{\Omega}$, όπου $p, t \in \mathbb{R}$. Τότε, για αρκετά μεγάλο $\mu > 0$, η εξίσωση*

$$c_1 r^p + c_2 r^t - \mu \int\limits_\Omega \gamma(x) r^{q(x)} dx = 0$$

έχει δύο λύσεις $r_1, r_2 > 0$.

Απόδειξη: Έστω

$$g(r) := c_1 + c_2 r^{t-p} - \mu \int\limits_\Omega \gamma(x) r^{q(x)-p} dx,\ r > 0.$$

Τότε $g(0) = c_1$ και $\lim_{r \to +\infty} g(r) = +\infty$. Εύκολα προκύπτει ότι η $g'(r)$ έχει μοναδική θετική ρίζα. Αφού $inf_{r>0} g(r) < 0$ για αρκετά μεγάλο $\mu > 0$, το αποτέλεσμα έπεται.
Για το επόμενο αποτέλεσμα ύπαρξης υποθέτουμε τα παρακάτω για τη συνάρτηση $c(.)$ και τους εκθέτες p, q και t :

$H(3)$ $supp(b(.)^+) \subseteq supp(c(.))$, όπου $b(x)^+ = \max\{b(x), 0\}$, $x \in \Omega$.

$H(4)$ $p^+(t^- - p^-) > q^-(t^- - q^+)$ αν
$$t^+ \leq \min\left\{ q^- p^+ (q^+ - p^-) p^+ (t^- - p^-) - q^-(t^- - q^+), \tfrac{q^-(t^- - p^-)}{q^+ - p^-} \right\}.$$

$H(5)$ Η $q(.)$ είναι μία σταθερά ή οι $p(.)$ και $t(.)$ είναι σταθερές.

Σημειώνουμε ότι αν οι $p(.)$, $q(.)$ και $t(.)$ είναι σταθερές συναρτήσεις, τότε η $H(4)$ ικανοποιείται αν $t < p + q$.

Θεώρημα 4.4.2 *Υποθέτουμε ότι* $(H1)-(H5)$ *ισχύει όπου* $p^+ < q$. *Τότε για κάθε* $\lambda, \varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\mu^*(\lambda,\varepsilon) > 0$, *τέτοια ώστε το (4.4.1) έχει μία μη αρνητική λύση για κάθε* $\mu > \mu^*(\lambda,\varepsilon)$.

Απόδειξη: Για $v \in B$ και $r > 0$ ορίζουμε

$$G_\varepsilon(r,v) := \frac{\int\limits_\Omega \left[|\nabla v|^{p(x)} + \lambda a(x)|v|^{p(x)}\right] r^{p(x)}dx + \varepsilon \int\limits_\Omega c(x)|v|^{t(x)}r^{t(x)}dx}{r^q \int\limits_\Omega b(x)|v|^q dx},$$

$$c_1(v) := \frac{\int\limits_\Omega \left[|\nabla v|^{p(x)} + \lambda a(x)|v|^{p(x)}\right] dx}{\int\limits_\Omega b(x)|v|^q dx}$$

και

$$c_2(v) := \frac{\varepsilon \int\limits_\Omega c(x)|v|^{t(x)}dx}{\int\limits_\Omega b(x)|v|^q dx}.$$

Τότε, αν $r \geq 1$,

$$c_1(v)r^{p^- - q^+} + c_2(v)r^{t^- - q^+} = g_l^1(r,v)$$

$$\leq G_\varepsilon(r,v) \leq g_u^1(r,v) = c_1(v)r^{p^+ - q^-} + c_2(v)r^{t^+ - q^-},$$

και αν $r < 1$,

$$c_1(v)r^{p^+ - q^-} + c_2(v)r^{t^+ - q^-} = g_l^2(r,v) \leq G_\varepsilon(r,v)$$

$$\leq g_u^2(r,v) = c_1(v)r^{p^- - q^-} + c_2(v)r^{t^- - q^-}.$$

Άρα,

$$\lim_{r\to 0^+} G_\varepsilon(r,v) = \lim_{r\to +\infty} G_\varepsilon(r,v) = +\infty.$$

Αν $q(x) = q$ για κάθε $x \in \overline{\Omega}$, τότε $\frac{\partial}{\partial r}G_\varepsilon(.,v) = 0$ αν και μόνο αν

$$\int_\Omega (q-p(x))\left[|\nabla v|^{p(x)}+\lambda a(x)|v|^{p(x)}\right] r^{p(x)}dx$$

$$-\varepsilon\int_\Omega (t(x)-q)c(x)|v|^{t(x)}r^{t(x)}dx=0.$$

Εύκολα προκύπτει ότι η (4.4) έχει μία μοναδική ρίζα $r_*(v)$ η οποία είναι μοναδικό κρίσιμο σημείο ολικού ελαχίστου της $G_\varepsilon(.,v)$. Συνεπώς, για μεγάλο $\mu>0$, η συνάρτηση $G_\varepsilon(r,v)=\mu$ έχει δύο λύσεις $r_1(v)$ και $r_2(v)$ όπου $r_1(v)<r_2(v)$. Επίσης, αν $p(x)=p$ και $t(x)=t$ για κάθε $x\in\overline{\Omega}$, τότε από την (4.15)

$$r^p\int_\Omega \left[|\nabla v|^{p(x)}+\lambda a(x)|v|^{p(x)}\right]dx+\varepsilon r^t\int_\Omega c(x)|v|^{t(x)}dx=\mu\int_\Omega b(x)|v|^{q(x)}r^{q(x)}dx. \tag{4.23}$$

Από το Λήμμα 4.4.2 βλέπουμε ότι η (4.23) δέχεται δύο λύσεις $r_1(v)$ και $r_2(v)$ όπου $r_1(v)<r_2(v)$. Σημειώνουμε ότι $r_1(v)$ και $r_2(v)$ είναι επίσης λύσεις της (4.15). Ορίζουμε $r(v):=r_2(v)$. Εύκολα βλέπουμε ότι η $r(v)$ αυξάνει καθώς το μ αυξάνει ή το ε αυξάνει.
Έστω

$$B_0^\varepsilon(\mu):=\{u\in B:\mu>G_\varepsilon(r_*(u),u)\}.$$

Είναι προφανές ότι $B_0^\varepsilon(\mu)\neq\emptyset$ αν το μ είναι αρκετά μεγάλο. Στη συνέχεια, θα βρούμε ένα άνω φράγμα για την $r_*(v)$ όταν $v\in B_0^\varepsilon(\mu)$. Από τον ορισμό του $B_0^\varepsilon(\mu)$

$$\int_\Omega p(x)\left[|\nabla v|^{p(x)}+\lambda a(x)|v|^{p(x)}\right]r_*(v)^{p(x)}dx+\varepsilon\int_\Omega t(x)c(x)|v|^{t(x)}r_*(v)^{t(x)}dx$$

$$<\mu q r_*(v)^q\int_\Omega b(x)|v|^q dx,$$

έτσι, αν $r_*(v)\geq 1$, έχουμε ότι

$$r_*(v)^{t^-}\varepsilon t^-\int_\Omega c(x)|v|^{t(x)}dx<\mu q r_*(v)^{q^+}\int_\Omega b(x)|v|^q dx,$$

ενώ αν $r_*(v)<1$, έχουμε

$$r_*(v)^{t^+}\varepsilon t^-\int_\Omega c(x)|v|^{t(x)}dx<\mu q r_*(v)^q\int_\Omega b(x)|v|^q dx.$$

Συνεπώς,

$$r_*(v) < \left[\frac{\mu q \int\limits_\Omega b(x)|v|^q dx}{\varepsilon t^- \int\limits_\Omega c(x)|v|^{t(x)} dx}\right]^{1/(t^- - q^+)} \quad , \ \ \alpha\nu \ \ r_*(v) \geq 1, \tag{4.24}$$

και

$$r_*(v) < \left[\frac{\mu q \int\limits_\Omega b(x)|v|^q dx}{\varepsilon t^- \int\limits_\Omega c(x)|v|^{t(x)} dx}\right]^{1/(t^+ - q^-)} \quad , \ \ \alpha\nu \ \ r_*(v) < 1.$$

Θα δείξουμε ότι αν $v \in B_0^\varepsilon(\mu) \cap S^1$ τότε

$$1 < \int\limits_\Omega c(x)|v|^{t(x)} dx + d\left(\int\limits_\Omega c(x)|v|^{t(x)} dx\right)^\eta,$$

όπου $d > 0$ και

$$\eta := \begin{cases} \frac{q^-(t^- - p^-) - t^+(q^+ - p^-)}{t^+(t^- - q^+)} \ \alpha\nu \ ||v||_{q(.)} < 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ r_*(v) \geq 1, \\ \frac{p^+}{t^+} \ \alpha\nu \ \ ||v||_{q(.)} < 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ r_*(v) < 1, \\ \frac{q^+(t^+ - p^+) - t^+(q^- - p^+)}{t^+(t^+ - q^-)} \quad \alpha\nu \ \ ||v||_{q(.)} \geq 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ r_*(v) < 1, \\ \frac{q^+(t^- - p^-) - t^+(q^+ - p^-)}{t^+(t^- - q^+)} \\ \ \ \alpha\nu \ \ ||v||_{q(.)} \geq 1 \ \kappa\alpha\iota \ r_*(v) \geq 1. \end{cases}$$

Θα παρουσιάσουμε μόνο την περίπτωση όπου $||v||_q < 1$ και $r_*(v) \geq 1$, οι υπόλοιπες τρείς περιπτώσεις μπορούν να αντιμετωπιστούν ανάλογα. Επειδή $G_\varepsilon(r_*(v), v) < \mu$, έχουμε ότι

$$\int\limits_\Omega \left[|\nabla v|^{p(x)} + \lambda a(x)|v|^{p(x)}\right] r_*(v)^{p(x)} dx < \mu r_*(v)^q \int\limits_\Omega b(x)|v|^q dx, \tag{4.25}$$

και έτσι

$$r_*(v)^{p^-} \int\limits_\Omega \left[|\nabla v|^{p(x)} + \lambda a(x)|v|^{p(x)}\right] dx < r_*(v)^{q^+} \mu \int\limits_\Omega b(x)|v|^{q(x)} dx,$$

η οποία, λόγω της (4.13), μας δίνει ότι

$$\left(1 - \int_{\Omega} c(x)|v|^{t(x)}dx\right) < r_*(v)^{q^+-p^-}\mu\int_{\Omega} b(x)|v|^{q(x)}dx.$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανίσωση με την (4.24) έχουμε

$$\left(\varepsilon\int_{\Omega} c(x)|v|^{t(x)}dx\right)^{\frac{q-p^-}{t^--q}}\left(1 - \int_{\Omega} c(x)|v|^{t(x)}dx\right)$$

$$< \left(\frac{\mu q^+}{t^-}\right)^{\frac{q^+-p^-}{t^--q^+}}\left(\mu\int_{\Omega} b(x)|v|^{q(x)}dx\right)^{\frac{t^--p^-}{t^--q^+}} \tag{4.26}$$

Οι υποθέσεις $H(3)$, $H(4)$ και οι σχέσεις (4.5), (4.6) συνάγουν ότι

$$\int_{\Omega} b(x)|v|^{q(x)}dx \le \hat{d}\left(\int_{\Omega} c(x)|v|^{t(x)}dx\right)^{\frac{q^-}{t^+}},$$

για κάποιο $\hat{d} > 0$, το οποίο, λόγω της (4.26), δίνει ότι

$$1 < \int_{\Omega} c(x)|v|^{t(x)}dx + d\left(\int_{\Omega} c(x)|v|^{t(x)}dx\right)^{\frac{q^-(t^--p^-)-t^+(q^+-p^-)}{t^+(t^--q^+)}},$$

όπου $d > 0$. Συνεπώς, αν $D := \{\int_{\Omega} c(x)|v|^{t(x)}dx,\ v \in B_0^{\varepsilon}(\mu)\}$,

τότε $infD > 0$.
Από την (4.15),

$$\int_{\Omega} c(x)|v|^{t(x)}r^{t(x)}dx \le \mu\int_{\Omega} b(x)|v|^{q(x)}r^{q(x)}dx,$$

από την οποία προκύπτει ότι, αν $r \geq 1$,

$$r^{t^- - q^+} \leq \frac{\mu \int\limits_\Omega b(x)|v|^{q(x)}dx}{\varepsilon \int\limits_\Omega c(x)|v|^{t(x)}dx} \tag{4.27}$$

ενώ, αν $r < 1$

$$r^{t^+ - q^-} \leq \frac{\mu \int\limits_\Omega b(x)|v|^{q(x)}dx}{\varepsilon \int\limits_\Omega c(x)|v|^{t(x)}dx}. \tag{4.28}$$

Επειδή $infD > 0$ βλέπουμε ότι η $r(v)$ όταν $v \in B_0^\varepsilon(\mu)$, είναι φραγμένη από πάνω. Λόγω των (4.10), (4.12) και (4.15)

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}_\varepsilon(v) \leq & \int\limits_\Omega \frac{1}{p(x)} \left[|\nabla v|^{p(x)} + \lambda a(x)|v|^{p(x)}\right] r^{p(x)}dx \\
& -\mu \int\limits_\Omega \frac{b(x)}{q(x)}|v|^{q(x)}r^{q(x)}dx + \varepsilon \int\limits_\Omega \frac{c(x)}{t^-}|v|^{t(x)}r^{t(x)}dx \\
= & \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{t^-}\right) \left[|\nabla v|^{p(x)} + \lambda a(x)|v|^{p(x)}\right] r^{p(x)}dx \\
& -\mu \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{q(x)} - \frac{1}{t^-}\right) b(x)|v|^{q(x)}r^{q(x)}dx.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Επειδή η $r(v)$ αυξάνει όταν το μ αυξάνει και $p(x) < q$ στο $\overline{\Omega}$, παίρνοντας το μ αρκετά μεγάλο, έστω $\mu^*(\lambda, \varepsilon)$, έχουμε ότι $\widehat{\Phi}_\varepsilon(v) < 0$ για τουλάχιστον ένα $v \in S^1 \cap B_0^\varepsilon(\mu^*(\lambda, \varepsilon))$. Ισχυριζόμαστε ότι το ελάχιστο της $\widehat{\Phi}_\varepsilon(,)$ επιτυγχάνεται σε ένα σημείο στο $S^1 \cap B_0^\varepsilon(\mu^*(\lambda, \varepsilon))$. Για να το δείξουμε, έστω $v_n \in S^1$, $n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία τέτοια ώστε $\widehat{\Phi}_\varepsilon(v_n) \to M$. Αφού η v_n είναι φραγμένη στο E, υπάρχει μία υπακολουθία της v_n, την οποία συμβολίζουμε επίσης με v_n, τέτοια ώστε $v_n \to v_0$ ασθενώς στους $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ και $L^{t(.)}(\Omega)$ και ισχυρά στον $L^{p(.)}(\Omega)$ και $L^q(\Omega)$. Επίσης, επειδή η $r(.)$ είναι φραγμένη στο $S^1 \cap B_0^\varepsilon(\mu^*(\lambda, \varepsilon))$, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $v_0 \neq 0$ και $r(v_n) \to r_0 > 0$. Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση ($q^+ < p^-$) και εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η συνάρτηση $r \to \Phi_\varepsilon(rv)$ έχει ένα ολικό ελάχιστο στο $r = r(v_0)$ συμπεραίνουμε ότι $r_0 = r(v_0)$. Η ακολουθία $r_*(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, είναι φραγμένη συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r_*(u_n) \to r_*^0$. Ενόψη των (4.4) και (4.4) παίρνουμε

$$G_\varepsilon(r_*(v_n), v_n) \geq \begin{cases} \min_{r\geq 1} g_l^1(r, v_n) & \alpha\nu \;\; r_*(v_n) \geq 1, \\ \min_{0<r<1} g_l^2(r, v_n) & \alpha\nu \;\; r_*(v_n) < 1, \end{cases}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή

$$\min_{r\geq 1} g_l^1(r, v_n) \geq \min_{r>0} g_l^1(r, v_n) = c_1(v_n)^{\frac{t^+-q^-}{t^+-p^+}} c_2(v_n)^{\frac{q^--p^+}{t^+-p^+}},$$

με μία παρόμοια ανισότητα να ισχύει για $\min_{0<r<1} g_l^1(r, v_n)$, βλέπουμε ότι, στο όριο, $G_\varepsilon(r_*^0, v_0) > 0$. Άρα $r_*^0 > 0$. Η κάτω ημισυνέχεια της νόρμας μας δίνει ότι $\mu \geq G_\varepsilon(r_*^0, v_0)$. Αφού το ελάχιστο της $r \to G_\varepsilon(r, v_0)$ επιτυγχάνεται στο $r = r_*(v_0)$, έχουμε επίσης ότι $\mu \geq G_\varepsilon(r_*(v_0), v_0)$. Ισχυριζόμαστε ότι $\mu > G_\varepsilon(r_*(v_0), v_0)$. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $\mu = G_\varepsilon(r_*(v_0), v_0)$. Επειδή $\mu = G_\varepsilon(r(v_n), v_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε ότι

$$\int_\Omega \left[|\nabla v_n|^{p(x)} + \lambda a(x)|v_n|^{p(x)}\right] r(v_n)^{p(x)} dx + \varepsilon \int_\Omega c(x)|v_n|^{t(x)} r(v_n)^{t(x)} dx$$
$$= \mu \int_\Omega b(x)|v_n|^{q(x)} r(v_n)^{q(x)} dx$$

το οποίο στο όριο μας δίνει

$$\int_\Omega \left[|\nabla v_0|^{p(x)} + \lambda a(x)|v_0|^{p(x)}\right] r(v_0)^{p(x)} dx + \varepsilon \int_\Omega c(x)|v_0|^{t(x)} r(v_0)^{t(x)} dx$$
$$\leq \mu \int_\Omega b(x)|v_0|^{q(x)} r(v_0)^{q(x)} dx,$$

δηλαδή, $\mu \geq G_\varepsilon(r(v_0), v_0)$. Άρα

$$r_*(v_0) = r(v_0) = r_0. \tag{4.30}$$

Επίσης, $\frac{\partial}{\partial r} G_\varepsilon(r_*(v_n), v_n) = 0$, συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\Big(\int_\Omega p(x)\left[|\nabla v_n|^{p(x)} + \lambda a(x)|v_n|^{p(x)}\right] r_*(v_n)^{p(x)} dx$$
$$+ \varepsilon \int_\Omega t(x)c(x)|v_n|^{t(x)} r_*(v_n)^{t(x)}\Big)\Big(\int_\Omega b(x)|v_n|^{q(x)} r_*(v_n)^{q(x)} dx\Big)$$

$$=(\int\limits_{\Omega}\left[|\nabla v_n|^{p(x)}+\lambda a(x)|v_n|^{p(x)}\right]r_*(v_n)^{p(x)}dx$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_{\Omega}c(x)|v_n|^{t(x)}r_*(v_n)^{t(x)})(\int\limits_{\Omega}q(x)b(x)|v_n|^{q(x)}r_*(v_n)^{q(x)}dx),.$$

Άρα

$$(q^+-p^-)\int\limits_{\Omega}\left[|\nabla v_n|^{p(x)}+\lambda a(x)|v_n|^{p(x)}\right]r_*(v_n)^{p(x)}dx$$

$$\geq\varepsilon(t^- - q^+)\int\limits_{\Omega}c(x)|v_n|^{t(x)}r_*(v_n)^{t(x)}dx.$$

Ενόψη των (4.10), (4.15), (4.30) και (4.4) έχουμε

$$\text{M}=\lim_{n\to+\infty}\Phi_\varepsilon(r(v_n)v_n)$$

$$\geq\lim_{n\to+\infty}\varepsilon\left((q^- - p^+)(t^- - q^+)p^+(q^+-p^-)-t^+-q^-t^+\right)\times$$

$$\int\limits_{\Omega}c(x)|v_n|^{t(x)}r_*(v_n)^{t(x)}dx\geq 0,$$

που είναι άτοπο. Άρα $\mu > G_\varepsilon(r_*(v_0),v_0)$, δηλαδή $v_0\in B_0^\varepsilon(\mu^*(\lambda,\varepsilon))$. Μπορούμε τώρα να συνεχίσουμε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.2. ■

Είναι φανερό ότι αν $c\equiv 0$ το προηγούμενο Θεώρημα δεν ισχύει. Προκειμένου να μελετήσουμε περαιτέρω το πρόβλημα (4.4.1) θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων του (4.4.1) καθώς $\varepsilon\to 0$. Έστω $\lambda>0$, $\varepsilon_0>0$ και $\mu>\mu^*(\lambda,\varepsilon_0)$. Το Θεώρημα 4.4.2 εξασφαλίζει ότι το (4.1) – (4.2) έχει μία λύση $u_0=r_{\varepsilon_0}(v_{\varepsilon_0})v_{\varepsilon_0}$, $v_{\varepsilon_0}\in B_0^\varepsilon(\mu)\cap S^1$. Ισχυριζόμαστε ότι η (4.4.1) έχει μία λύση $u_\varepsilon=r_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Πράγματι, αν $v\in B_0^\varepsilon(\mu)$ τότε $G_\varepsilon(r_*(v),v)\leq\max\{g_u^1(r_u^1,v),g_u^2(r_u^2,v)\}$, όπου r_u^1,r_u^2 είναι σημεία ολικών ελαχίστων για τις συναρτήσεις $g_u^1(.,v)$ και $g_u^2(.,v)$. Ενόψη των (4.4) και (4.4),

$$g_u^1(r_u^1,v)=k_1c_1(v)^{\frac{t^+-q^-}{t^+-p^+}}c_2(v)^{\frac{q^--p^+}{t^+-p^+}}$$

$$=\frac{k_1(\int\limits_{\Omega}\left[|\nabla v|^{p(x)}+\lambda a(x)|v|^{p(x)}\right]dx)^{\frac{t^+-q^-}{t^+-p^+}}(\int\limits_{\Omega}c(x)|v|^{t(x)}dx)^{\frac{q^--p^+}{t^+-p^+}}\varepsilon^{\frac{q^--p^+}{t^+-p^+}}}{\int\limits_{\Omega}b(x)|v|^{q(x)}dx}$$

και

$$g_u^2(r_u^2, v) = k_2 c_1(v)^{\frac{t^- - q^-}{t^- - p^-}} c_2(v)^{\frac{q^- - p^-}{t^- - p^-}}$$

$$= \frac{k_2 (\int\limits_\Omega \left[|\nabla v|^{p(x)} + \lambda a(x)|v|^{p(x)} \right] dx)^{\frac{t^- - q^-}{t^- - p^-}} (\int\limits_\Omega c(x)|v|^{t(x)} dx)^{\frac{q^- - p^-}{t^- - p^-}} \varepsilon^{\frac{q^- - p^-}{t^- - p^-}}}{\int\limits_\Omega b(x)|v|^{q(x)} dx,},$$

όπου k_1, k_2 είναι κάποιες θετικές σταθερές ανεξάρτητες από το ε και το v. Άρα, $G_\varepsilon(r_*(v), v) \downarrow 0$ καθώς $\varepsilon \downarrow 0$ και έτσι $G_\varepsilon(r_*(v_{\varepsilon_0}), v_{\varepsilon_0}) < \mu$ για κάθε $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Κατά συνέπεια $v_{\varepsilon_0} \in B_0^\varepsilon(\mu) \cap S^1$ και έτσι $B_0^\varepsilon(\mu) \cap S^1 \neq \emptyset$. Επίσης, λόγω των (4.4) και (4.4), $r_\varepsilon(v_{\varepsilon_0}) \to +\infty$ καθώς $\varepsilon \to 0$. Από την (4.29), $\widehat{\Phi}_\varepsilon(v_{\varepsilon_0}) < 0$ για κάθε $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Άρα, $\inf\{\widehat{\Phi}_\varepsilon(v) : v \in S^1 \cap B_0^\varepsilon(\mu)\} < 0$ για κάθε $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Επαναλαμβάνοντας τα επιχειρήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.4.1 παίρνουμε ότι το πρόβλημα (4.1)$-$(4.2) έχει μία λύση $u_\varepsilon = r_\varepsilon(v_\varepsilon)v_\varepsilon$, $v_\varepsilon \in B_0^\varepsilon(\mu) \cap S^1$, για κάθε $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Συνεπώς $r_\varepsilon(v_{\varepsilon_0}) \to +\infty$ καθώς το $\varepsilon \to 0$ και η (4.29) συνεπάγεται ότι $\widehat{\Phi}_\varepsilon(v_{\varepsilon_0}) \to -\infty$. Άρα, $\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) = \widehat{\Phi}_\varepsilon(v_\varepsilon) \to -\infty$ καθώς το $\varepsilon \to 0$.. Από τις (4.7), (4.9) παίρνουμε ότι $\|u_\varepsilon\|_E \to +\infty$ καθώς $\varepsilon \to 0$.

Επομένως έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.4.3 *Υποθέτουμε ότι οι* $(H1) - (H4)$ *ικανοποιούνται με* $p^+ < q$, $\lambda > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ *και* $\mu > \mu^*(\lambda, \varepsilon_0)$. *Τότε το πρόβλημα* $(4.1) - (4.2)$ *δέχεται μία λύση* u_ε *για κάθε* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *με* $\|u_\varepsilon\|_E \to +\infty$ *και* $\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) \to -\infty$ *καθώς* $\varepsilon \to 0$.

Παρατήρηση Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ ισχύουν επίσης αν υποθέσουμε ότι η $t(.)$ είναι υποκρίσιμη, δηλαδή $t(x) < \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ στο Ω και σε αυτήν την περίπτωση παίρνουμε $E := W_0^{1,p(.)}(\Omega)$.

Βιβλιογραφία

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces,* Acad. Press, New York, 1975.

[2] R.A. Adams, L. Hedberg, *Function Spaces and Potencial Theory,* Springer-Verlag, 1996.

[3] K. Ak, On the Dirichlet problem for quasi-linear elliptic differential equations of the second order. J. Math. Soc. Japan 13 (1961) 45-62.

[4] C.O. Alves, Existence of solution for a degenerate $p(x)$-Laplacian equation in $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 345 (2008) 731–742.

[5] C.O. Alves, D.G. de Figueiredo, Nonvariational elliptic systems, Discr. Contin. Dyn. Systems 8 (2) (2002) 289-302.

[6] I. Andrei, Existence of solutions for a $p(x)$-Laplacian non-homogeneous equation, Electron. J. Differential Equations 2009 no. 72 1-12.

[7] A. Ambrosetti, J.G. Azorero, I. Peral Existence and multiplicity results for some nonlinear elliptic equations: a survey, Rendiconti di Matematica, SerieVII, 20 (2000) 167-198.

[8] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Functional Analysis 14 (1973) 349-381.

[9] S.N. Antontsev, J.F. Rodrigues, On stationary thermo-rheological viscous flows, Ann. Univ. Ferrara 52 no. 1 (2006) 19–36.

[10] S.N. Antontsev, S.I. Shmarev, On localization of solutions of elliptic equations with nonhomogeneous anisotropic degeneracy, Siberian Math. J. 46 (2005) 765–782.

[11] R. Aris, *Mathematical Modelling Techniques,* Research Notes in Mathematics, Pitman, London, 1978.

[12] C. Atkinson, K. El-Ali, Some boundary value problems for the Bingham model, J. Non-Newtonian fluid Mech. 41 (1992) 339-363.

[13] A. Bahri, Y.Y. Li On a min-max procedure for the existence of a positive solution for certain scalar field equations in $\mathbb{R}^N$, Revista Matematica Iberoamericana 6 no. 1-2 (1990) 1–15.

[14] V. Benci, P. D'Avenia, D. Fortunato, L. Pisani Solitons in several space dimensions: Derrick's problem and infinitely many solutions, Arch. Rational Mech. Anal. 154 (2000) 297-324.

[15] V.Benci, A.M. Micheletti, D.Visetti An eigenvalue problem for a quasilinear elliptic field equation, J. Differential Equations 184 (2002) 299-320.

[16] H.Berestycki, P.L. Lions Nonlinear scalar field equations I: existence of a ground state, Arch. Rational Mech. Anal. 82 no. 4 (1983) 313–345.

[17] H. Berestycki, P.L. Lions Nonlinear scalar field equations II: existence of infinitely many solutions, Archive for Rational Mechanics and Analysis 82 no. 4 (1983) 347–375.

[18] G. Bliss, An integral inequality, J. London Math. Soc. 5 (1930) 40-46

[19] P. Blomgren, T.F. Chan, P. Mulet, C. Wong, Total variation image restoration: Numerical methods and extensions, Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing, Vol. III, IEEE, Los Alamitos, CA (1997) 384–387.

[20] H. Brezis, *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer, 2010

[21] H. Brezis, S. Kamin, Sublinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, Manuscripta Math. 74 (1992) 87-106.

[22] J. Chabrowski, Elliptic variational problems with indefinite nonlinearities, Topol. Methods Nonlinear Anal. 9 (1997) no. 2 221-231.

[23] A. Chambolle, P.L. Lions, Image recovery via total variation minimization and related problems, Numer. Math. 76 (1997) 167–188.

[24] Kung-Ching Chang *Methods in Nonlinear Analysis,* Springer 2005.

[25] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math. 66 (4) (2006) 1383–1406.

[26] L. Cherfils, Y. Il'yasov On the stationary solutions of generalized reaction diffusion equations with p&q-Laplacian, Commun. Pure Appl. Anal. 4 no. 1 (2005) 9-22.

[27] P. Clement, J. Fleckinger, E. Mitidieri, F. de Thelin, Existence of positive solutions for a nonvariational quasilinear elliptic system, J. Differential Equations 166 (2000) 455-477.

[28] R. Dalmasso, Existence and uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic systems, Nonlinear Analysis TMA 39 (2000) 559-568.

[29] G.H. Derrick Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles, J. Math. Physics 5 (1964) 1252-1254.

[30] J.I. Diaz, *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries,* Pitman Publ. Program 1985.

[31] P. Drabek, J. Hernandez Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems, Nonlinear Analysis TMA 44 (2001) 189-204.

[32] P. Drábek, S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 127 (1997) 703-726.

[33] L.C. Evans, *Partial Differential Equations,* American Mathematical Society 1998.

[34] X. Fan, D. Zhao, On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001) 424-446.

[35] P.C. Fife, *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems,* Lecture Notes in Biomathematics, 28, Springer Verlag, Berlin-New York 1979.

[36] D.G. de Figueiredo, Semilinear elliptic systems, in Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, World Scientific (1997) 125-152.

[37] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order,* second edition Springer-Verlag, Heidelberg, 1983.

[38] M.Guedda,L.Veron, Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Nonlinear Analysis TMA 13 (1989) 879-902.

[39] D.D. Hai, Existence and uniqueness of solutions for quasilinear elliptic systems, Proc. AMS 133 no 1 (2004) 223-228.

[40] C. He, G. Li The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing p&q-Laplacian, Ann. Acad. Scien. Fennicae Math. 33 (2008) 337-371.

[41] G. Hardy, J. Littlewood, Some properties of fractional integrals, (1) Math.Z., 27 (1928) 565-606.

[42] D.A. Kandilakis A multiplicity result for quasilinear problems with convex and concave nonlinearities and nonlinear boundary conditions in unbounded domains, Electron. J. Differential Equations, vol 2005 (2005) no. 57 1-12.

[43] D.A. Kandilakis, A.N. Lyberopoulos, Indefinite quasilinear elliptic problems with subcritical and supercritical nonlinearities on unbounded domains, J. Differential Equations 230 (2006) 337-361.

[44] G. Li, X. Liang, The existence of non-trivial solutions to nonlinear elliptic equation of $p-q$-Laplacian type on $\mathbb{R}^n$, Nonlinear Analysis TMA, 71 (2009) 2316-2334.

[45] M. Mihailescu, On a class of nonlinear problems involving a $p(x)$-Laplace type operator, Czech. Math. Journal 58 no. 133 (2008) 155-172.

[46] M. Otani, A remark on certain nonlinear elliptic equations, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. 19 (1984) 23–28.

[47] M.-C. Pélissier, M.L. Reynaud, Etude d'un modéle mathématique d' écoulement de glacier. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 279 (1974) 531–534.

[48] S.I. Pohozaev, On the solvability of nonlinear equations with odd operators Funktsional. Anal. i Prilozhen 1 (1967) no. 3 66-73 English transl. in Funcional Anal. Appl. 1 (1967)

[49] S.I. Pohozaev, The fibering method in nonlinear variational problems, in: Topological and Variational Methods for Nonlinear Boundary Value Problems, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 365 Longman, Harlow 1997 35–88.

[50] M. Renardy, R.C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, New York 1993.

[51] M. Ruzicka, Electrorheological Fluids Modeling and Mathematical Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[52] R.E. Showalter, N.J. Walkington, Diffusion of fluid in a fissured medium with microstructure, SIAM J. Math. Anal. 22 (1991) 1702–1722.

[53] S. Sobolev, *Applications of functional analysis in mathematical physics,* Amer. Math. Soc. 1963.

[54] S. Sobolev, On a theorem of functional analysis, Mat. Sb. (N.S.) 4 (1938) 471-497, English transl., A.M.S Transl., Ser. 2 Vol 34 (1963) pp. 39-68.

[55] N.M. Stavrakakis, N. Zographopoulos, Multiplicity and regularity results for some quasilinear elliptic systems on $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis TMA 50 (2002) 55-69.

[56] M. Struwe *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.

[57] P. Tolksdorf, On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domain with conical boundary points, Communs partial diff Eqns. 8 (1983) 773-817.

[58] J.L. Vazquez, A strong maximum principle for quasilinear elliptic equations, Appl. Math. Optim. 12 191-202 (1994).

[59] M. Wu, Z. Yang A class of p-q-Laplacian type equation with potentiala eigenvalue problem in $\mathbb{R}^N$, Boundary Value Problems, Article ID 185319 (2009).

[60] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vol. I.*, New York: Springer-Verlag, 1986.

[61] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vol. II-I: Variational Method and Optimazation,* New York: Springer-Verlag, 1986.

[62] V.V. Zhikov, Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, Mathematics of the USSR-Izvestiya, 29 (1997) 33–36.