ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ
και
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΣΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ:

"Παραμετρική Ανάλυση για τον υπολογισμό του Βέλτιστου τρόπου Απομείωσης της Συγκέντρωσης Τάσεων σε Επίπεδους Φορείς Στοιχείων Μηχανών υπό την Επίδραση Αξονικής Φόρτισης."

ΟΝΟΜΑ: ΤΣΙΓΚΟΣ ΣΤΕΡΓΟΣ
Α.Μ.: 9010521

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Κ. ΠΡΟΒΙΔΑΚΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ 1994 - 95΄

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός της εργασίας είναι η μείωση της συγκέντρωσης τάσεων γύρω από κυκλική οπή σε αξονικά φορτιζόμενο έλασμα εισάγοντας βοηθητικές οπές σε κάθε πλευρά της αρχικής οπής.
Μάλιστα γίνεται προσδιορισμός των καλύτερων μεγεθών και τοποθετήσεων των βοηθητικών οπών έτσι ώστε να έχουμε βέλτιστη απομείωση της συγκέντρωσης τάσεων.
Για την επίτευξη των παραπάνω χρησιμοποιείται η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων η οποία είναι σχετικά καινούργια μέθοδος και μπορεί να καλύψει ένα μεγάλο πεδίο εφαρμογών. Πρέπει να αναφέρουμε εδώ οτι η ταχεία ανάπτυξη των υπολογιστών είναι αυτή η οποία έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων, όπως είναι η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων οι οποίες είναι ακριβέστερες και αποδοτικότερες στην αντιμετώπιση των προβλημάτων.
Έτσι αφού αρχικά γίνει μία εισαγωγή με ιστορικά στοιχεία, προβλήματα απο την συγκέντρωση τάσεων, τρόπος μείωσης τους κ.τ.λ. ακολουθεί ανάπτυξη της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων. Στη συνέχεια γίνεται αριθμητική επεξεργασία του προβλήματος στην οποία και έχουμε παρουσίαση του προγράμματος Linear που χρησιμοποιούμε. Κατοπίν έχουμε τα αποτελέσματα και την επεξεργασία τους, και τέλος διάφορα συμπεράσματα και προτάσεις βελτιώσης της προτεινόμενης λύσης.
Κλείνοντας τον πρόλογο θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που συνέβαλλαν στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής και ειδικότερα τον κ. Προβιδάκη για την αρχική ιδέα, την παρακολούθηση της εργασίας απο την αρχή μέχρι το τέλος της, για τις χρήσιμες συμβουλές και παρατηρήσεις του, και για την βοήθεια του στην επίλυση των κάθε είδους προβλημάτων που προέκυψαν στην πράξη.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την εφαρμογή της μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων για τον υπολογισμό των τάσεων σε επίπεδους φορείς υπό την επίδραση αξονικής φόρτισης.
Στην συνέχεια, προτείνεται βέλτιστος τρόπος απομείωσης της παραπάνω συγκέντρωσης τάσεων κάνωντας παραμετρική ανάλυση των αποτελεσμάτων της μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ:

[1]Kirsch, G., “Die Theorie del Elastizitat und die Bedurfnisse der Fesstigkeitslehre”, Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure.

[2]Howland, R.C.J., “On the stressers in the Neighborhood, of Circular Hole in a strip under Tension, Trans. Roy. Soc.”

[3]G.N. Saniv, Stress Concentration Around Holes, Pergamon Press, New York, 1961.

[4]Peterson, R.E., Stress Concentration Factors, John Wiley and Sons, Inc. New York (1974).

[5]Heywood, R.D., Designing by Photoelasticity, Chapman and Hall, London, 1952.

[6]Jindal, “Reduction of stress concentration around a hole in a uniaxially loaded plate”, J. Strain Anal., 18(2), (1983).

[7]P.E. Erickson, W.F. Riley: Minimizing Stress Concentrations Around Circular Holes in Uniaxially Loaded Plates.

[8]Leyer A., Maschinenkonstruktionslehre, Birkhauser Verlag, Based, Switzerland. English language edition. Machine Design, Blackie and son, London, 1974.

[9]C.A. Brebbia, J. Dominquez: Boundary Elements An Introductory course (second edition).

[10]C.P. Providakis, D.A. Sotiropoulos and D.E. Beskos: B.E.M. analysis of reduced dynamic stress concentration by multiple holes.

[11]Π.Σ. Θεοχάρη: Πειραματική μηχανική των υλικών.

[12]Α. Δημαρόγκωνα: Στοιχεία Μηχανών με υπολογιστές (C.A.D.). Τόμος I, Πάτρα 1989.

[13]Stress Strain and Structural matrices, Walter D. Pilkey.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορικά στοίχεια:

Το πρόβλημα του προσδιορισμού της διανομής της τάσης γύρω από οπές σε ελάσματα έχει αναλυθεί εκτεταμένα στην τεχνική βιβλιογαφία. Μία θεωρητική λύση για την κατανομή της τάσης που συνδέεται με μία κυκλική οπή σ'ένα άπειρο έλασμα υπό ομοιόμορφη μονοαξονική φόρτιση βρέθηκε από τον Kirsch [1] το 1898.

Αργότερα έχουμε και την λύση για την περίπτωση της κυκλικής οπής σε ένα έλασμα περιορισμένου πλάτους υπό την επίδραση μονοαξονικής φόρτισης, και η οποία εκδόθηκε από τον Howland το 1930 [2].

Στα μετέπειτα χρόνια λύσεις βρέθηκαν για μια ευρεία ποικιλία διαστημάτων οπών και για ένα αριθμό διαφορετικών σχεδίων οπών υπό διαφορετικές συνθήκες φόρτισης του ελάσματος. Τα αποτελέσματα αυτών των μελετών συνοψίζονται σε βιβλία από τον Savin [3] και τον Peterson [4].

Μία φωτοελαστική μέθοδος για την μείωση της συγκέντρωσης τάσεων γύρω από μία κεντρική κυκλική οπή σε ένα μοναοξονικό φορτισμένο έλασμα παρουσιάστηκε από τον Heywood [5]. Στην δυσδιάστατη προσέγγιση του μικρότερες οπές εισάγονται σε κάθε πλευρά της αρχικής οπής και στην κατεύθυνση της φόρτισης μειώνοντας έτσι την κατανομή της τάσης γύρω από την κεντρική οπή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι βοηθητικές οπές βοηθούν στην εξομάλυνση της ροής των τροχιών της κύριας φόρτισης γύρω από την αρχική οπή.
Μάλιστα τονίζουμε ότι η περίπτωση που εξετάστηκε από τον Heywood δεν έφερε τη μεγαλύτερη πιθανή μείωση. Πιο συγκεκριμένα η μέγιστη τάση μειώθηκε στο ογδόντα τέσσερα τοις εκατό(84%) της αρχικής της τιμής εξαιτείας της ύπαρξης των βοηθητικών οπών.

Επίσης ο Jindal [6] ερεύνησε την επίδραση των βοηθητικών οπών σε μία στατική κατανομή τάσης γύρω από μία κεντρική οπή. Η μελέτη έγινε με την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και έκανε συγκρίσεις με την δυσδιάστατη φωτοελαστική μέθοδο.

Τέλος οι Erickson και Riley [7] έχουν μελετήσει το ίδιο πρόβλημα χρσιμοποιώντας και μόνο την δυσδιάστατη φωτοελαστική μέθοδο για τον προσδιορισμό των

καλύτερων μεγεθών και τοποθετήσεων των βοηθητικών οπών για έναν αριθμό ελασμάτων με διαφορετικές αναλογίες διαμέτρου κεντρικής οπής και πλάτους ελάσματος. Τα αποτελέσματα της μελέτης τους θα παρουσιατούν αναλυτικά στην συνέχεια.
Τονίζουμε, ότι σε όλες τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν επιτεύχθηκαν σημαντικές μειώσεις των τάσεων.

1.2: Γενικά για την συγκέντρωση τάσεων και τα προβλήματα που δημιουργεί:

Γνωρίζουμε ότι όταν μία αξονική δύναμη εφαρμόζεται σε ένα μέλος δημουργεί μιά σύνθετη κατανομή τάσεων. Σύνθετες κατανομές τάσεων δεν προκύπτουν μόνο από την επίδραση συγκεντρωμένου φορτίου αλλά προκύπτουν επίσης σε τμήματα όπου η εγκάρσια διατομή των μελών αλλάζει.
Για παράδειγμα θεωρούμε τη ράβδο στο σχήμα 1-α η οποία υπόκειται σε μία αξονική δύναμη P. Εδώ μπορεί να φανεί ότι οι οριζόντιες και κάθετες γραμμές του πλέγματος συνδοιάζονται σε ένα ασυνήθιστο σχέδιο γύρω από την οπή η οποία βρίσκεται στο κέντρο της ράβδου.
Η μέγιστη τάση στην ράβδο παρουσιάζεται στην μικρότερη εγκάρσια διατομή της ράβδου. Παρατηρούμε επομένως ότι στην περίπτωση της γεωμετρικής ανωμαλίας κατά την οποία η διατομή μεταβάλλεται απότομα, έχουμε ανακατονομή των τάσεων και οι προκύπτουσες κατανομές δεν είναι ποιά ομοιόμορφες. Μάλιστα στα σημεία κοντά στην γεωμετρική ανωμαλία και πιο συγκεκριμένα στην ελάχιστη διατομή εμφανίζονται οι μεγαλύτερες τιμές των τάσεων.
Η συμπεριφορά της συγκέντρωσης των τάσεων σε αυτό το τμήμα μπορεί να ορισθεί είτε από μία μαθηματική ανάλυση χρησιμοποιώντας την θεωρία της ελαστικότητας, είτε πειραματικά μετρώντας την κανονική ένταση στη διατομή α-α και κατόπιν υπολογίζοντας την τάση χρησιμοποιώντας τον νόμο του Hooke:
$\boldsymbol{\sigma = E * \varepsilon}$ όπου, ε: η παραμόρφωση που προκαλείται και, Ε: το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young.

Ανεξάρτητα από την μέθοδο που χρησιμοποιείται, η μορφή της κατανομής της τάσης θα είναι σαν αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1-b.

Με παρόμοιο τρόπο αν η ράβδος έχει μία ελάττωση στην εγκάρσια διατομή της, σχήμα 2-α, και σ’αυτή την περίπτωση η μέγιστη τάση στην ράβδο θα εμφανιστεί στη μικρότερη περιοχή εγκάρσιας διατομής (τμήμα α-α) και η κατανομή της τάσης θα είναι σαν αυτή που φαίνεται στο σχήμα 2-b.

Σχήμα 1 και Σχήμα 2

Και στις δύο από τις παραπάνω περιπτώσεις η ισορροπία δυνάμεων απαιτεί το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης που προκύπτει από την κατανομή της τάσης, να είναι ίσο με την αξονική δύναμη P. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\mathbf{P = S_A\, \sigma^{*} d_A}$$

Πρακτικά δεν χρησιμοποιείται η πραγματική κατανομή της τάσης. Αντίθετα, μόνο η μέγιστη τάση πρέπει να είναι γνωστή και το μέλος σχεδιάζεται έτσι ώστε να αντέχει σε αυτή την τάση όταν το αξονικό φορτίο P εφαρμόζεται.

Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες μία περιοχή της εγκάρσιας διατομής αλλάζει, σαν αυτές που συζητήθηκαν προηγουμένως, συγκεκριμένες τιμές της μέγιστης κανονικής τάσης στο κρίσιμο τμήμα μπορούν να ορισθούν χρησιμοποιώντας πειραματικές μεθόδους ή ανώτερες μαθηματικές τεχνικές που χρησιμοποιούν την θεωρία της ελαστικότητας.

Τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών συνήθως παρουσιάζονται σε γραφήματα χρησιμοποιώντας έναν παράγοντα συγκέντρωσης της τάσης K. Ορίζουμε τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων K, σαν την αναλογία της μέγιστης τάσης σ max προς την μέση τάση σ avg που δρα στο μικρότερο τμήμα διατομής, δηλαδή:

$$\mathbf{K = \sigma\ max/\sigma\ avg}$$

Θεωρώντας το K γνωστό και την μέση κανονική τάση υπολογισμένη από τη σχέση: σ avg = P/A, όπου A είναι η μικρότερη περιοχή εγκάρσιας διατομής (σχήμα 1-c και 2-c), μπορούμε από την παραπάνω εξίσωση να υπολογίσουμε την μέγιστη τάση στο τμήμα διατομής η οποία ισούται:

$$\mathbf{\sigma\ max = K * (P/A)}$$

Παραδείγματα αυτών των γραφημάτων για τις ράβδους που φαίνονται στα σχήματα 1-α και 2-α, δίνονται στα σχήματα 3 και 4.

σχήμα 3 **σχήμα 4**

Τονίζουμε εδώ πέρα ότι ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων K είναι ανεξάρτητος από τις ιδιότητες του υλικού της ράβδου. Έτσι εξαρτάται μόνο από την γεωμετρία της ράβδου και τον τύπο της ασυνέχειας.

Για παράδειγμα, σε μία απότομη αλλαγή στην εγκάρσια διατομή μιάς ράβδου θεωρητικά έχει υπολογισθεί ότι, (σχήμα 5-α), παράγεται ένας συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων μεγαλύτερος από τρία. Με άλλα λόγια η μέγιστη τάση θα είναι τρείς φορές μεγαλύτερη από την μέση τάση στο μικρότερο τμήμα διατομής.

Εντούτοις αυτό μπορεί να μειωθεί στο 1.5 εισάγωντας μια προσαρμογή όπως φαίνεται στο σχήμα 5-b. Ακόμη μεγαλύτερη μείωση μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας μικρές ραβδώσεις ή τρύπες όπως φαίνεται στα σχήματα

5-c και 5-d.

(a) **(c)**

(b) **(d)**

σχήμα 5

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις τα σχέδια βοηθούν να μειωθεί η ακαμψία των υλικών που περιβάλλουν τις γωνίες, έτσι ώστε τόσο η τάση όσο και η ένταση να είναι πιο ομαλά κατανεμημένες πάνω στη ράβδο.

Οι συντελεστές συγκέντρωσης της τάσης που δίνονται στα σχήματα 3 και 4 ορίστηκαν με βάση ένα στατικό φορτίο, με την προϋπόθεση ότι η τάση στο υλικό δεν υπερβαίνει το όριο αναλογίας.

Αν το υλικό είναι ψαθυρό το όριο αναλογίας μπορεί να βρίσκεται κοντά στην τάση θραύσης και έτσι γι' αυτό το υλικό η καταστροφή θα ξεκινήσει στο σημείο της κατανομής της τάσης όπου το όριο αναλογίας προσεγγίζεται.

Ουσιαστικά αυτό που συμβαίνει είναι ότι μια ρωγμή ξεκινά απ' αυτό το σημείο και μία υψηλότερη συγκέντρωση τάσεων θα εμφανιστεί στο άκρο αυτής της ρωγμής.

Το γεγονός αυτό προκαλεί την εξάπλωση της ρωγμής στο τμήμα της διατομής με αποτέλεσμα να επέλθει η τελική θραύση.

Για το λόγο αυτό είναι πολύ σημαντικό να λαμβάνουμε υπόψιν τους συντελεστές συγκέντρωσης τάσεων κατά το σχεδιασμό, όταν χρησιμοποιούμε ψαθυρά υλικά.
Από την άλλη πλευρά αν το υλικό είναι όλκιμο και υποκείμενο σε ένα στατικό φορτίο, οι σχεδιαστές συνήθως αμελούν να χρησιμοποιήσουν τους συντελεστές συγκέντρωσης της τάσης αφού κάθε τάση η οποία υπερβάινει το όριο αναλογίας δεν οδηγεί σε ρωγμάτωση. Αντίθετα, το υλικό θα έχει κρατήσει απόθεμα δύναμης ώστε να μην υποχωρήσει και να αντέξει στην αυξανόμενη τάση.

Οι συγκεντρώσεις της τάσης είναι επίσης υπεύθυνες για πολλές καταστροφές δομικών μελών ή μηχανικών στοιχείων τα οποία υπόκεινται σε φορτίσεις κόπωσης. Σε αυτές τις περιπτώσεις μία συγκέντρωση τάσεων θα προκαλέσει τη ρηγμάτωση του υλικού εάν η τάση υπερβεί το όριο αντοχής του υλικού, ανεξάρτητα από το αν το υλικό είναι ψαθυρό ή όλκιμο. Πιο συγκεκριμένα κατά την στατική φόρτιση η υπέρβαση της επιτρεπόμενης τάσης έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία πυρήνων τοπικών πλαστικών παραμορφώσεων οι οποίες εξελίσονται στη συνέχεια σε ρωγμές και έχουμε τελικά την θραύση του σώματος.
Όμοια και κατά την δυναμική ή επαναληπτική φόρτιση τα σημεία μέγιστης τάσης είναι οι πυρήνες δημιουργίας ρωγμών κοπώσεως, οι οποίες εξελίσονται και επιφέρουν την τελική θραύση της κατασκευής.

Συνεπώς οι μηχανικοί που ασχολούνται με την σχεδίαση πρέπει να αναζητήσουν τρόπους για να περιορίσουν το μέγεθος της καταστροφής που μπορεί να προκληθεί από την κόπωση.

1.3 Τρόποι μείωσης της συγκέντρωσης τάσεων

Μία ποιοτική ανάλυση τεχνικών για την αποφυγή των καταστροφικών επιπτώσεων της συγκέτρωσης της τάσης, δίνονται από τον Leyer [8].
Σαν γενικός κανόνας, η δύναμη πρέπει να μεταφέρεται από σημείο σε σημείο όσο πιο ομαλά γίνεται. Απότομες μεταπτώσεις στην διεύθυνση της ροής της δύναμης δεν πρέπει να υπάρχουν ενώ πρέπει να έχουμε ομαλές καμπύλες.

Ένας τρόπος για να πετύχουμε ομαλή ροή της δύναμης στην περίπτωση ελάσματος με κυκλική οπή είναι να ανοίξουμε βοηθητικές οπές όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Μάλιστα η μελέτη αυτού του τρόπου αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

σχήμα 1

Επίσης μπορούμε να αλλάξουμε το σχήμα της οπής και από κύκλος να γίνει έλλειψη, οπότε και πάλι πετυγχαίνουμε εξομάλυνση της ροής της δύναμης σχήμα 2.

σχήμα 2

Ακόμη, με στρογγύλευση των ριζών των εγκοπών μπορούμε να πετύχουμε ομαλή ροή της δύναμης (σχήμα 3.)

σχήμα 3

Στην περίπτωση που αυξητές της τάσης είναι αναγκαίοι λόγω λειτουργικών απαιτήσεων, οι αυξητές αυτοί πρέπει να τοποθετούνται σε χώρους χαμηλής ονομαστικής τάσης, αν αυτό είναι δυνατόν.

Τα σχήματα 4-α, b, c περιγράφουν διάφορες μορφές εγκοπών και τρυπών διατεταγμένες ανάλογα με την συγκέντρωση τάσεων που προκαλούν.

(a) **(b)**

(c)

Σχήμα 4 ***: Επίδραση εγκοπών και οπών στην κατανομή τάσης . (α) Μορφές κοινών εγκοπών διατεταγμένες ανάλογα με τα αποτελέσματα πάνω στην ροή τάσης (παρατειρείται μέιωση από τα αριστερά προς τα δεξιά και από την κορυφή προς τα κάτω.). (β) Ασύμετρες μορφές εγκοπών διατεταγμένες με όμοιο τρόπο όπως στο (α). (γ) Μορφές εσωτερικών εγκοπών διατεταγμένες παρόμοια.***

Το σχήμα 5 δείχνει πώς η διεύθυνση της ροής της δύναμης επηρεάζει την έκταση της συγκέντρωσης της τάσης την οποία προκαλεί μία εγκοπή.

Η διαμόρφωση που φαίνεται στο σχήμα 5-b έχει υψηλότερα επίπεδα τάσης λόγω της απότομης αλλαγής στην διεύθυνση της ροής της δύναμης

σχήμα 5 : ***Δύο κομμάτια με το ίδιο σχήμα αλλά με διαφορετική ροή τάσης.τα οποία μπορούν να δώσουν συνολικά διαφορετικά αποτελέσματα εγκωπών και διαφορετικά σε φάρδος επίπεδα τάσης στο γωνιακό βήμα.***
(a) Ομαλή ροή τάσης (b) Η αιχμή αλλάζει την διεύθυνση της ροής της τάσης προκαλώντας υψηλότερες τιμές.

Όταν οι εγκωπές είναι απαραίτητες η μετακίνηση υλικού κοντά στην εγκοπή μπορεί να ανακουφίσει τις επιπτώσεις της συγκέντρωσης της τάσης.
Τα σχήματα 6, 7, 8, 9, 10, 11 επιδεικνύουν παραδείγματα στα οποία η μετακίνηση υλικού αυξάνει την αντοχή του μέλους.

σχήμα 6 : ***Μία χρήσιμη μέθοδος μείωσης των επιζήμιων αποτελεσμάτων των εγκωπών που δεν μπορούν να αποφευχθούν είναι το να κατευθύνεις τις γραμμές τάσης μέσω εγκωπών που δεν είναι λειτουργικά απαραίτητες και οι οποίες είναι οριοθετημένες εγκοπές εκτώνωσης.***
(a) Η διακεκομένη γραμμή δείχνει έναν ομαλό τρόπο μείωσης του τνήματος αλλά η γωνία η οποία μπορεί να είναι απαραίτητη λειτουργικά θα απαλειφθεί..
(b) Ιδανικός τρόπος μείωσης τμήματος ενώ παραμένει η γωνία.
(c) Συμβιβασμός λόγω δυσκολιών στο κόψιμο της εγκοπής, όπως στην (b) περίπτωση.
(d) Εγκωπή πολύ ρηχή για αποτελεσματικότητα.
(e) Τα πλευρά της εγκωπής είναι παράλληλα μειώνοντας την αποτελεσματικότητα.

σχήμα 7 : ***Εγκωπή εκτόνωσης όπου το σπείρωμα της βίδας συναντά το κυλινδρικό σώμα της.***
(a) Αξιοσημείωτη συγκέντρωση τάσης μπορεί να παρουσιαστεί στο βήμα προσαρμογής.
(b) Η χρήση μιας ομαλότερης προσαρμογής οδηγεί σε εκτόνωση της συγκέντρωσης τάσης.

σχήμα 8 : ***Ανακούφιση της συγκέντρωσης τάσης μέσω αφαίρεσης υλικού.***
(a) Υποτίθεται ότι μια εγκωπή τέτοιου τύπου θα παρουσιαστεί σ' αυτό το στοιχείο. Η εγκωπή από μόνη της είναι ένας ανεπιθύμητος τρόπος μείωσης του τμήματος.
(b) Η απομάκρυνση της σκιασμένης περιοχής θα ήταν ένας καλός τρόπος μείωσης του τμήματος , αλλά η εγκωπή και οι πλατιές πάνω και κάτω επιφάνειες παραλείπονται. Η διαδικασία κοψίματος θα είναι πιο δύσκολη από τις περιπτώσεις (c) και (d).
(c) Συγκέντρωση τάσης μειωμένη αλλά παραμένει η εγκωπή.
(d) Συγκέντρωση τάσης μειωμένη αλλά η εγκοπή και οι πάνω και κάτω επιφάνειες παραμένουν.

σχήμα 9 : ***Μείωση της συγκέντρωσης τάσης σε κλιμακωτό κορμό.***
(a) Έντονη συγκέντρωση τάσης.
(b) Χρήση μεγάλης ακτίνας , εφ' όσον αυτό είναι εφικτό.
(c) Πρόσθετη αυλάκωση δίνει καλύτερα αποτελέσματα.
(d) Υποσκαμένη βάση βοηθάει εάν οι τροποποιήσεις (b) και (c) δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

σχήμα 10 : ***Ράβδοι με κολλάρα και τρύπες.***
(a) Φαρδιά κολλάρα μειώνουν τη συγκέντρωση τάσης. Η ράβδος στα δεξιά με το κολλάρο θα μας οδηγήσει σε μειωμένη συγκέντρωση τάσης σε σχέση με την ράβδο στα αριστερά.
(b) Οι ραβδώσεις μειώνουν την συγκέντρωση τάσεων γύρω από την τρύπα.

σχήμα 11 : ***Σχεδίαση παξιμαδιών, η οποία είναι πολύ σημαντική σε φόρτιση κόπωσης.***
(a) Τυπικός συνδυασμός βίδας και παξιμαδιού. Η ροή δύναμης κοντά στην κορυφή παξιμαδιού είναι διάχυτη , αλλά στην περιοχή D η πυκνότητα της ροής τάσης είναι πολύ υψηλή.
(b) Παξιμάδι με χείλος . Η ροή δύναμης στην εσωτερική πλευρά του χείλους είναι στην ίδια κατεύθυνση όπως στην βίδα και η ροή δύναμης είναι πιο ισομερώς κατανεμημένη σ' όλο το παξιμάδι σε σύγκριση με την περίπτωση (a) . Η μέγιστη τάση είναι εκτονωμένη.
(c) Η ροή τάσης δεν αντιστρέφεται καθόλου , οπότε η ένταση της κόπωσης εδώ είναι σημαντικά υψηλότερη απ' ότι στις άλλες περιπτώσεις.

Πιο συγκεκριμένα το σχήμα 11 δείχνει τρείς τύπους σχεδίασης παξιμαδιών από τους οποίους ο τρόπος σχεδίασης (c) είναι καλύτερος από τον (b), ο οποίος με τη σειρά του είναι ανώτερος του (α).

Σε αυτό το σχήμα η πυκνότητα της ροής της τάσης στην περιοχή D είναι υψηλότερη στο σχέδιο (α). Το σχέδιο (b) οδηγεί σε μία ροή τάσης στο εσωτερικό του χείλους η οποία είναι στην ίδια διεύθυνση με την αντίστοιχη στη βίδα, και αναφορικά με το προηγούμενο σχέδιο είναι περισσότερο ομαλή στο παξιμάδι έτσι ώστε η ακραία πίεση να ανακουφίζεται.

Στο σχέδιο (c) η ροή της δύναμης δεν αλλάζει διεύθυνση με αποτέλεσμα να έχουμε αξιοσημείωτη ελάττωση στην συγκέντρωση της τάσης.

Ένας τύπος συγκέντρωσης της τάσης που καλείται ενδιάμεση εγκοπή, συνήθως παράγεται όταν κομμάτια ενώνονται με συγκόληση.

Στο σχήμα 12 δείχνει παραδείγματα ενδιάμεσων εγκοπών και έναν τρόπο με τον οποίο μετριάζονται οι επιπτώσεις.

Στις επιφάνειες στις οποίες οι πλάκες που ενώνονται ακουμπούν χωρίς γέμισμα από μέταλλο συγκόλησης, εμφανίζεται σαν αποτέλεσμα ένα οξύ ρήγμα το οποίο προκαλεί συγκέντρωση της τάσης.

Συγκέντρωση της τάσης προκαλείται επίσης από φτωχές τεχνικές συγκόλησης οι οποίες δημιουργούν μικρά ρήματα στο υλικό συγκόλησης ή λακούβες στο υλικό της βάσης.

σχήμα 12 : ***(a) Τύπος ένωσης που συχνά χρησιμοποιήται στην πρακτική συγκόλησης έχοντας εγκωπές προσαρμογής .***
(b) Βελτιωμένες ενώσεις μέσω της απόριψης των αιχμηρών άκρων.

1.4 Συγκέντρωση τάσεων σε διάτρητο έλασμα με κυκλική οπή - θεωρίες των Kirsch και Howland:

Έστω ένα λεπτό έλασμα στο κέντρο του οποίου υπάρχει κυκλική οπή ακτίνας α, και στο οποίο ασκείται ομοιόμορφα κατανεμημένο εφελκυστικό φορτίο.
Εάν θεωρήσουμε το εύρος του ελάσματος άπειρο ή τουλάχιστον πολύ μεγαλύτερο της διαμέτρου της οπής, ισχύει τότε η θεωρία του Kirsch η οποία μας δίνει την κατανομή των τάσεων στο έλασμα.
Έτσι έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις τάσεων συναρτήσει των πολικών συντεταγμένων του σχήματος 1.

(1.1)

σχήμα 1

Μάλιστα έχουμε και τις οριακές συνθήκες που λένε ότι για r = α, οι τάσεις σrr και τrθ μηδενίζονται στην ελεύθερη επιφάνεια της οπής. Έτσι αντικαθιστώντας την τιμή r = α στην εξίσωση της τάσης σθθ, προκύπτει η κατανομή της τάσης στο χείλος της οπής η οποία και δίνεται από τον απλό τύπο:

(1.2)

Η κατανομή της τάσης σθθ φαίνεται στο σχήμα 2 από το οποίο προκύπτει ότι η μέγιστη εφελκυστική τάση αναπτύσεται στα σημεία θ = $\pm$ 90 (μοίρες) και είναι ίση με:

$$\sigma_{\theta\theta\,max} = 3 \cdot \sigma_m \qquad (1.3)$$

Η τάση σθθ μηδενίζεται στα σημεία θ = $\pm$ 30 (μοίρες) και θ = $\pm$ 150 (μοίρες).

σχήμα 2

Επίσης η μέγιστη θλιπτική τάση αναπτύσεται στα σημεία θ = 0 (μοίρες) και θ = 180 (μοίρες) και ισούται με:

$$\boldsymbol{\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_m} \qquad (1.4)$$

Από τις εξισώσεις (1.1) προκύπτουν οι συνιστώσες $\sigma_{xx} = \sigma_{rr}$ και $\sigma_{\psi\psi} = \sigma_{\theta\theta}$ κατά μήκος της ελάχιστης διατομής της πλάκας δηλαδή για: $\theta = \pm 90$ (μοίρες).
Οι τιμές των τάσεων αυτών δίνονται από τις σχέσεις:

(1.5)

Από την εξίσωση 1.5 (β) , φαίνεται ότι η μέγιστη τάση είναι η $\sigma_{\theta\theta max} = 3^*\sigma_m$ η οποία βρίσκεται στην τομή της ελάχιστης διατομής και του συνόρου της κυκλικής οπής.
Ακόμη από αυτή την εξίσωση προκύπτει ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

Kσ = μέγιστη τάση/μέση τάση

Οπότε για την συγκεκριμένη περίπτωση που έχουμε κυκλική οπή στο κέντρο άπειρη επίπεδης πλάκας ισούται με:

$$\boldsymbol{K_\sigma = 3\sigma_m/\sigma_m = 3}$$

Στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 3) δίνονται οι κατανομές των συνιστωσών των τάσεων σ_{xx} και $\sigma_{\psi\psi}$ στην ελάχιστη διατομή ($\theta = 90$ μοίρες).

σχήμα 3

Από το σχήμα αυτό συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη συγκέντρωση τάσεων, για την δεδομένη γεωμετρία της πλάκας, είναι τοπικού χαρακτήρα και περιορίζεται σε μικρή περιοχή κοντά στο χείλος της οπής. Ακόμη η τιμή της τάσης σθθ μειώνεται γρήγορα με την αύξηση της ακτίνας r και πλησιάζει την μέση τιμή σm.

Για την περίπτωση όπου το έλασμα είναι πεπερασμένου εύρους ή εύρους μικρότερου κάποιου αριθμού διαμέτρων της οπής (έστω δέκα), τότε η παραπάνω θεωρία του Kirsch εφαρμόζεται με επιφύλαξη. Έτσι εδώ έχουμε την θεωρία του Howland ο οποίος εξήγησε θεωρητικά το πρόβλημα ελασμάτων πεπερασμένου εύρους.

Η λύση την οποία έδωσε ο Howland έχει πολλές φορές επικυρωθή μέσω πειραμάτων και θεωρείται σήμερα ως κλασσική λύση για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων για την περίπτωση που το έλασμα έχει πεπερασμένο εύρος υπολογίζεται ως προς τη μέση τάση στην ελάχιστη διατομή και κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 3 και 1.5, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα, σχήμα 4 .

σχήμα 4

Οι κατανομές των τάσεων μοιάζουν με τις αντίστοιχες κατανομές της θεωρίας του Kirsch. Μάλιστα επειδή το ολοκλήρωμα της τάσεως σθθ ($\theta = \pm$ 90 μοίρες) από $r = \pm\alpha$ εώς $r = \pm w$, επί την αντίστοιχη επιφάνεια της διατομής πρέπει να ισούται με το εφελκυστικό φορτίο, η τιμή σθθ είναι μικρότερη της μέσης τάσης στα σύνορα του ελάσματος.

Από θεωρητικές και πειραματικές αναλύσεις έχει βρεθεί ότι ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων μπορεί να καθορισθεί με αρκετή ακρίβεια από τον εμπειρικό τύπο:

$$\mathbf{K = \sigma max/\sigma m = (3\beta\text{-}1)/(\beta+0.3)} \qquad (1.6)$$

όπου β είναι ο λόγος του εύρους της λωρίδας ως προς τη διάμετρο της οπής (w/2α) και σm είναι η μέση τάση επί της ελάχιστης διατομής.

Τέλος, η κατανομή των εφαπτομενικών τάσεων στο σύνορο της οπής μοιάζει με την αντίστοιχη κατανομή που είχαμε για την πλάκα απείρων διαστάσεων. Έτσι, η επενέργεια της εφελκυστικής δύναμης δημιουργεί θλιπτικές τάσεις στην περιοχή της τομής του συνόρου της οπής και του επιμήκη άξονα της λωρίδας.

Τα παραπάνω ισχύουν και για την περίπτωση που έχουμε θλίψη του ελάσματος, αρκεί να μην έχουμε φαινόμενα λυγισμού.

1.5 Παρόμοιες εργασίες:

Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικότερα τα αποτελέσματα της εργασίας των Erickson και Riley όπως είχε αναφερθεί προηγουμένως.

Στην εργασία τους επιχειρήθηκε μία συστηματική μελέτη χρησιμοποιώντας δυσδιάστατες μεθόδους φωτοελαστικότητας για τον προσδιορισμό των καλύτερων μεγεθών και τοποθετήσεων των βοηθητικών οπών για έναν αριθμό ελασμάτων με διαφορετικές αναλογίες μεταξύ διαμέτρου κεντρικής οπής και πλάτους ελάσματος.

Οι μέγιστες μειώσης έντασης από 13 μέχρι 21 τοις εκατό φάνηκαν στα ελάσματα με αναλογίες διαμέτρου οπής και πλάτους ελάσματος μεταξύ 0.1 και 0.6 όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Καταλαβαίνουμε επομένως ότι με τέτοιες μειώσεις στο μέγιστο επίπεδο έντασης, η βελτίωση στη διάρκεια ζωής του ελάσματος μπορεί να είναι πολύ σημαντική.

Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για μελέτη φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

εικόνα 1

Έτσι έχουμε τα ακόλουθα σύμβολα τα οποία χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την γεωμετρία των μοντέλων και για να καθιερώσουν παραμέτρους χωρίς διαστάσεις για την παρουσίαση των δοκιμών:

w = πλάτος ελάσματος
c = διάμετρος κεντρικής οπής
α = απόσταση μεταξύ κέντρων της κεντρικής και της βοηθητικής οπής.
d = διάμετρος βοηθητικών οπών

c/w = αναλογία μεταξύ διαμέτρου κεντρικής οπής και πλάτους ελάσματος.
α/w = αναλογία μεταξύ απόστασης οπών και πλάτους ελάσματος.
d/w = αναλογία μεταξύ διαμέτρου βοηθητικής οπής και πλάτους ελάσματος.
d/α = αναλογία μεταξύ διαμέτρου βοηθητικής οπής και απόστασης οπών.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως στην εργασία τους οι Erickson και Riley χρησιμοποίησαν τηε φωτοελαστική μέθοδο για να μελετήσουν την συγκέντρωση τάσεων.
Έτσι χρησιμοποιήθηκε ένα πεδίο πόλωσης διάχυτου φωτός με μία πηγή φωτός νατρίου (λ = 589.3 nm).
Τα μοντέλα φτιάχτηκαν από φύλλα του φωτοελαστικού πλαστικού Homolite 100.
Όλα τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη είχαν μήκος 14 ίντσες (356 mm) μεταξύ αλυσίδων φόρτισης ,πλάτος 4,5 ίντσες (114 mm) και πάχος 1/4 ίντσας (6.4 mm).Οι διάμετροι των κεντρικών οπών κυμαίνονται από 0.5 ίντσα (12.7mm) εώς 2.5 ίντσες (63.5mm). Έτσι είχαμε αναλογίες c/w που κυμαίνονταν από 0.111 εώς 0.556.

Τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη διαιρέθηκαν σε 4 ομάδες με αναλογίες c/w = 0.111 - 0.222 - 0.389 και 0.556.

Τα αποτελέσματα της μελέτης των Erickson και Riley απεικονίζονται με την μορφή των παρακάτω γραφικών παραστάσεων.
Στην εικόνα 2 η βέλτιστη αναλογία d/w απεικονίζεται σαν συνάρτηση του λόγου c/w.
Αυτή η καμπύλη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της βέλτιστης διαμέτρου d της βοηθητικής οπής που χρειάζεται για να έχουμε την μέγιστη μείωση στην κατανομή της τάσης.

εικόνα 2

Στην εικόνα 3 η βέλτιστη αναλογία α/w απεικονίζεται συναρτήση του λόγου c/w. Αυτή η καμπύλη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την τοποθέτηση των βοηθητικών οπών αφού η αναλογία c/w για το έλασμα έχει καθορισθεί.

εικόνα 3

Τέλος, στην <u>εικόνα 4</u> ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων SCF παριστάνεται συναρτήση του λόγου c/w. Οι καμπύλες απεικονίζονται για τα ελάσματα χωρίς βοηθητικές οπές (η λύση του Howland) και για τα ελάσματα με τις βοηθητικές οπές με την βέλτιστη απόσταση α και την βέλτιστη διάμετρο d, πράγμα το οποίο είναι και αντικείμενο της παρούσας μελέτης.

Τα αποτελέσματα που απεικονίζονται στην εικόνα 4 δείχνουν ότι οι επιδράσεις της συγκέντρωσης τάσεων της κεντρικής οπής μπορούν να μειωθούν από 13 μέχρι 21 τοις εκατό ανάλογα με την αναλογία c/w του ελάσματος. Μάλιστα η μεγαλύτερη μείωση συναντάται στα μεγάλα μεγέθη οπών.

εικόνα 4

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή ο Heywood στο πειραμά του χρησιμοποίησε έλασμα που το πλάτος του ήταν 1.69 ίντσες (42.9 mm), η διάμετρος της κεντρικής οπής ήταν 0.5 ίντσα (12.7 mm) και το διάστημα μεταξύ της κεντρικής οπής και της βοηθητικής ήταν 0.5 ίντσα (12.7 mm).

Η καλύτερη διάμετρος για τις βοηθητικές οπές γι' αυτό το συνδυασμό παραμέτρων ήταν 0.4 ίντσες (10.2 mm), και η μείωση της συγκέντρωσης τάσης που επιτεύχθηκε ήταν 16 τοις εκατό.

Τα σχήματα 2, 3 και 4 δείχνουν για το πείραμα του Heywood ότι το καλύτερο διάστημα μεταξύ των κέντρων των οπών είναι 0.57 ίντσες (14.4 mm) και η καλύτερη διάμετρος βοηθητικής οπής είναι 0.44 ίντσες (11.1 mm). Αυτές οι διαστάσεις θα μας έδιναν μείωση συγκέντρωσης τάσης 18 τοις εκατό.

Ακόμα, οι επιδράσεις της συγκέντρωσης τάσεων της κεντρικής οπής και των βοηθητικών μελετήθηκαν αν μπορούν να μειωθούν περισσότερο τοποθετώντας

συμπληρωματικές ομάδες βοηθητικών οπών στο έλασμα μεταξύ των υπαρχόντων βοηθητικών και των άκρων του ελάσματος.
Αρκετά μοντέλα δοκιμάστηκαν διαλέγοντας το μέγεθος και την απόσταση των νέων βοηθητικών οπών χρησιμοποιώντας τα σχήματα 2 και 3 και μια αναλογία διαμέτρου οπής και πλάτους ελάσματος βασισμένη στο προηγούμενο set των βοηθητικών οπών. Αυτή η διαδικασία δεν επέφερε μια καλύτερη κατάσταση και έτσι το θέμα δεν συνεχίστκε σ’ αυτή την μελέτη.

Τα αποτελέματα της μελέτης των Erickson και Riley δείχνουν ότι η συγκέντρωση τάσεων μιας κεντρικής κυκλικής οπής σ’ ένα μονοαξονικό φορτισμένο έλασμα μπορούν να μειωθούν από 13 εώς 21 τοις εκατό εισάγοντας βοηθητικές οπές σε κάθε πλευρά της κεντρικής οπής. Καταλαβαίνουμε επομένως, ότι μια τέτοια μείωση της τάσης θα μπορούσε να έχει σημαντικά αποτελέσματα στη διάρκεια ζωής του ελάσματος.

1.6 Αντικείμενο παρούσας εργασίας και ανάγκη ενασχόλησης με αυτό

Έχουμε τον επίπεδο φορέα στοιχείου μηχανής, ο οποίος καταπονείται από ομοιόμορφή κατανομή αξονικής φόρτισης στα άκρα του, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

σχήμα1

Στο κέντρο του αντικειμένου υπάρχει κυκλική οπή διαμέτρου D στην οποία έχουμε την μέγιστη τάση 3*σ, όπως φαίνεται από την κατανομή τάσης του σχήματος και όπως υπολογίσθηκε αναλυτικά και αποδείχθηκε πειραματικά από τα προηγούμενα κεφάλαια της παρούσας εργασίας. Γνωρίζουμε ότι η τάση ορίζεται ως εξής:

σ = (Δύναμη)/(Εμβαδό στο οποίο ασκείται η δύναμη) = P/A = P/R*t

Σύμφωνα με τα προηγούμενα κεφάλαια υπάρχουν δύο τρόποι ώστε να μειώσουμε την τάση στην κυκλική οπή. (Τονίζουμε ξανά ότι μας ενδιαφέρει η οπή γιατί εκεί έχουμε την μέγιστη τάση.)
Έτσι λοιπόν ο πρώτος τρόπος είναι να αλλάξουμε το σχήμα της οπής και να την κάνουμε έλλειψη, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.

σχήμα 2

Θέλουμε επομένως να ελαχιστοποιήσουμε την συγκέντρωση τάσεων στην έλειψη ψάχνοντας τις κατάλληλες διαστάσεις της 2α και2b.
Στην παρούσα εργασία δε θα εξεταστεί ο πρώτος τρόπος που αναφέραμε άλλα ο δεύτερος, ο οποίος και παρουσιάζεται στην συνέχεια.

Πιο συγκεκριμένα στον δεύτερο τρόπο προσθέτουμε δύο βοηθητικές οπές την μία δεξιά και την άλλη αριστερά της κεντρικής οπής, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

σχήμα 3

Έτσι πετυγχαίνουμε να μειώσουμε την συγκέντρωση τάσεων στην οπή.
Μάλιστα ψάχνουμε τις βέλτιστες διαμέτρους d των βοηθητικών οπών και την βέλτιστη απόσταση α μεταξύ των κέντρων των οπών έτσι ώστε να έχουμε ελαχιστοποίηση της τάσης.

1.7 Γενική ανάπτυξη μεθοδολογίας επίλυσης του προβλήματος

Για την επίτευξη των παραπάνω θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (Boundary Element Method BEM) για τον υπολογισμό των τάσεων.
Σε αυτή την μέθοδο χωρίζεται η περιφέρεια του αντικειμένου σε στοιχεία καθώς και η περιφέρεια των οπών.
Τονίζουμε ότι υπάρχουν διάφορες εναλλακτικές λύσεις εδώ πέρα. Μία από αυτές είναι να χρησιμοποιηθούν τα γραμμικά συνοριακά στοιχεία στα οποία το κάθε συνοριακό στοιχείο ορίζεται από δύο κόμβους (σχήμα).

κόμβος **στοιχείο**

Μία δεύτερη λύση είναι να χρησιμοποιηθούν συνοριακά στοιχεία β΄ τάξεως στα οποία το κάθε συνοριακό στοιχείο ορίζεται από τρείς κόμβους (σχήμα).

κόμβος

στοιχείο

Στήν παρούσα εργασία θα ακολουθηθεί η πρώτη εναλλακτική λύση, δηλαδή θα γίνει χρήση γραμμικών συνοριακών στοιχείων.

Στη συνέχεια αφού έχει υπολογιστεί η καντανομή τάσεων με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, γίνεται με παραμετρική ανάλυση βελτιστοποίηση του προβλήματος υπολογίζοντας έτσι την βέλτιστη διάμετρο d της βοηθητικής οπής και την βέλτιστη απόσταση α μεταξύ των κέντρων των οπών, για τα οποία d και α έχουμε βέλτιστη απομείωση της συγκέντρωσης τάσεων.
Μάλιστα τονίζουμε ότι θα εξεταστεί το ίδιο ακριβώς πρόβλημα που έχει αναφερθεί προηγουμένως στην εργασία των Erickson και Riley όπου εκεί όμως επιλύθηκε πειραματικά με τη φωτοελαστική μέθοδο.
Έτσι θα μπορέσει να γίνει σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων της μεθοδολογίας που αναφέραμε προηγουμένως (Συνοριακά στοιχεία και βελτιστοποίηση με παραμετρική ανάλυση), καθώς και των αποτελεσμάτων της φωτοελαστικής μεθόδου που χρησιμοποίησαν οι Erickson και Riley στην εργασία τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

2.1 Γενικά για την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων:

Το πρόβλημα της εύρεσης των κατανομών των τάσεων και των παραμορφώσεων γύρω από μία οπή μπορεί να λυθεί με αριθμητικές μεθόδους. Σκοπός των αριθμητικών μεθόδων είναι η εύρεση μιας προσέγγισης των τάσεων και των παραμορφώσεων σε οποιοδήποτε σημείο έτσι ώστε να επαληθεύονται οι συνοριακές συνθήκες και η εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο.

Οι αριθμητικές μέθοδοι διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

(α) Οι διαφορικές μέθοδοι στις οποίες υπάγονται τα πεπερασμένα στοιχεία και οι πεπερασμένες διαφορές, και

(β) Οι ολοκληρωτικές μέθοδοι στις οποίες υπάγονται τα συνοριακά στοιχεία. (σχήμα 2.1)

Πιο συγκεκριμένα σύμφωνα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων το σώμα διαιρείται σε στοιχεία τα οποία καλύπτουν όλη την επιφάνεια του σώματος. Στη συνέχεια κάθε στοιχείο επιλύεται ξεχωριστά για να υπολογισθούν οι μετατοπίσεις στους κόμβους του και στη συνέχεια υπολογίζονται οι τάσεις και οι παραμορφώσεις του στοιχείο αυτού.
Αντίθετα στη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων διαιρείται σε στοιχεία μόνο το σύνορο του σώματος.
Έτσι θεωρώντας ότι οι ποσότητες του κάθε στοιχείου εξαρτώνται από τις αντίστοιχες ποσότητες όλων των άλλων στοιχείων και του ίδιου, δημιουργείται ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων από το οποίο υπολογίζονται οι άγνωστες ποσότητες στο σύνορο.
Στη συνέχεια οι ποσότητες στα μη συνοριακά σημεία υπολογίζονται από την μέση επίδραση όλων των στοιχείων.

Ιστορικά η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων είναι μια σχετικά καινούρια μέθοδος και διακρίνεται σε δύο κατηγορίες, στην άμεση και στην έμμεση μέθοδο

Πιο συγκεκριμένα στην άμεση μέθοδο (μαθηματική διατύπωση) οι συνοριακές συνθήκες σχετίζονται άμεσα με τις άγνωστες ποσότητες του συνόρου. Από τις

γνωστές ποσότητες και τις κατάλληλες εξισώσεις δημιουργείται ένα σύστημα εξισώσεων από το οποίο υπολογίζονται οι άγνωστες ποσότητες του συνόρου.
Στη συνέχεια το κάθε σημείο επιλύεται από την υπέρθεση όλων των στοιχείων του συνόρου.
Από την άλλη πλευρά στην έμμεση μέθοδο (φυσική διατύπωση) θεωρείται ότι στο σύνορο του σώματος ασκούνται κάποιες τάσεις ή παραμορφώσεις, οι οποίες δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα είναι δηλαδή εικονικές ποσότητες, έτσι ώστε να δημιουργούνται συνοριακές συνθήκες όμοιες με αυτές του προβλήματος που μελετάται.
Αφού λοιπόν δημιουργηθεί ένα σύστημα εξισώσεων υπολογίζονται οι εικονικές ποσότητες και στην συνέχεια μέσω κατάλληλων εξισώσεων υπολογίζονται οι τάσεις και οι παραμορφώσεις στο σύνορο. Μετά την επίλυση του συνόρου οι ποσότητες σε κάθε σημείο υπολογίζονται από την υπέρθεση όλων των στοιχείων του συνόρου.
Τονίζουμε στην έμμεση μέθοδο ότι ανάλογα με την εικονική ποσότητα που χρησιμοποιείται διακρίνονται δύο τεχνικές.
(α) των εικονικών τάσεων (fictitious stress), και
(β) των ασυνεχών μετατοπίσεων (displacement discontinuity).

Οι μέθοδοι που αναφέρθηκαν προηγουμένως έχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα που σχετίζονται με την απλότητα και τα πεδία εφαρμογής τους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	Άμεση μέθοδος B.E.M	**Έμμεση μέθοδος B.E.M**	
		Εικονικές τάσεις	Μέθοδος ασυνεχών μετατοπίσεων
Προγραμματιστική απλότητα	Μέτρια	Μεγάλη	Μεγάλη
Επίλυση ασυνεχειών	Ναί	Όχι	Ναί
Ακρίβεια	Πολύ καλή	Καλή	Καλή
Επίλυση εξωτερικής φόρτισης	Όχι	Ναί	Ναί

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την άμεση μέθοδο (μαθηματική διατύπωση).

<u>Διάκριση αριθμητικών μεθόδων</u>

Αριθμητικές Μέθοδοι

Διαφορικές

Ολοκληρωτικές

Μεικτές

Πεπερασμένα στοιχεία

Πεπερασμένες διαφορές

Συνοριακά στοιχεία

Έμμεσες τεχνικές

Άμεση τεχνική

Εικονικές τάσεις

Ασυνεχείς μετατοπίσεις

σχήμα 2.1

2.2 Πλεονεκτήματα και εφαρμογές της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων:

Οι μηχανικοί που έχουν ασχοληθεί με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να αναρωτηθούν γιατί είναι αναγκαία η παραγωγή μιας ακόμα τεχνικής υπολογισμού.
Η απάντηση είναι ότι τα πεπερασμένα στοιχεία έχουν αποδειχτεί ότι είναι ανεπαρκή ή ακατάλληλα σε πολλές εφαρμογές της μηχανικής και αυτό που είναι ίσως πιο σημαντικό, η μέθοδος σε πολλές περιπτώσεις είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί και γι' αυτό το λόγο δύσκολο να ενσωματωθεί σε συστήματα επίλυσης προβλημάτων μηχανικής βοηθούμενα απο Η/Υ.
Η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων είναι ακόμα μία σχετικά αργή διαδικασία λόγω της ανάγκης ορισμού των πλεγμάτων στο μέρος ή το χώρο που μελετάται

Τα οριακά στοιχεία έχουν προβάλλει ως δυναμική εναλλακτική λύση στα πεπερασμένα στοιχεία ειδικά σε περιπτώσεις όπου απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια λόγω προβλημάτων όπως η συγκέντρωση τάσεων ή όταν ο χώρος επεκτείνεται στο άπειρο.
Μάλιστα το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό των οριακών στοιχείων είναι ότι απαιτείται μόνο ανάλυση της επιφάνειας και όχι του όγκου.

Γι’ αυτό το λόγο οι κώδικες των οριακών στοιχείων είναι ευκολότερο να δημιουργηθούν σε μοντέλα 3 (τριών) διαστάσεων και σε αυτόματες γεννήτριες πλέγματος.

Αυτό το πλεονέκτημα είναι ιδιάιτερα σημαντικό για το σχεδιασμό καθώς η διαδικασία συνήθως απαιτεί μία σειρά από τροποποιήσεις οι οποίες είναι πιο δύσκολο να γίνουν χρησιμοποιώντας πεπερασμένα στοιχεία. Αντιθέτως στα οριακά στοιχεία τα πλέγματα είναι εύκολο να παραχθούν και οι αλλαγές στο σχεδιασμό δεν απαιτούν πλήρη επαναδιάταξη πλεγμάτων.

Αυτό το σημείο φαίνεται στην εικόνα 1 στην οποία έχουμε δύο όψεις ενός τμήματος τουρμπίνας χρησιμοποιώντας κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για τη μια πλευρά και οριακών στοιχείων για την άλλη.

Μια οποιαδήποτε τροποποίηση δημιουργεί δυσκολίες για τα πεπερασμένα στοιχεία καθώς μερικά στοιχεία μπορεί να παραμορφωθούν ή να έχουν κακές αναλογίες διαστάσεων. Αντίθετα, το πλέγμα οριακών στοιχείων είναι εύκολο να τροποποιηθεί.

Τονίζουμε ακόμη ότι ή εικόνα 1 περιγράφει μία δυσδιάστατη εφαρμογή και τα παραπάνω προβλήματα είναι πιο σύνθετα για τα πεπερασμένα στοιχεία όταν δουλεύουμε με τρείς διαστάσεις.

εικόνα 1

Τα πλέγματα οριακών στοιχείων, ιδιαίτερα τα τρισδιάστατα, μπορούν εύκολα να συνδεθούν σε συστήματα CAE καθώς η δομή ορίζεται χρησιμοποιώντας μόνο τα όρια.

Η διαδικασία ανάλυσης είναι ακόμα απλούστερη όταν χρησιμοποιούνται ασυνεχή στοιχεία τα οποία δεν είναι επιτρεπτά στα πεπερασμένα στοιχεία. Το πλέγμα που φαίνεται στην εικόνα 2 απεικονίζει την ανάλυση επιφάνειας του ενός ογδόου ενός προβλήματος, το οποίο είναι ένας κύλινδρος με μία κυλινδρική διάτρηση από τη μία πλευρά ως την άλλη.

Παρατηρούμε ότη η χρήση στοιχείων τα οποία μερικές φορές δεν συναντούνται στις γωνίες με άλλα στοιχεία και είναι επομένως ασυνεχή από την άποψη των μεταβλητών τους, διευκολήνει το πλέγμα.

Επιπλέον δεν υπάρχει ανάγκη να χρησιμοποιηθούν στοιχεία στα επίπεδα της συμμετρίας.

εικόνα 2

Η εικόνα 3 περγράφει ένα τμήμα τουρμπίνας και τη βάση της.

Παρατηρούμε ότι τα ασυνεχή στοιχεία επιτρέπουν μία απλή γεννήτρια πλέγματος και προσφέρουν έτσι πολλά πλεονεκτήματα από την άποψη των μετατροπών των πλεγμάτων και την πολλαπλή χρησιμότητα που έχουν.

ÊåöÜëáéï 2 : ÌÝèïäïò óõíïñéáêþí óôïé÷åßùí

εικόνα 3

Στη συνέχεια η εικόνα 4 δείχνει τη μερική συγκέντρωση τάσεων επιφάνειας Von Mises στη βάση της λεπίδας που αναφέραμε προηγουμένως.

εικόνα 4

Περισσότερο περίπλοκες τρισδιάστατες δομές όπως ένα μοντέλο ολοκληρωμένου στροφαλοφόρου άξονα που φαίνεται στην εικόνα 5, μπορούν να αναλυθούν σχετικά εύκολα χρησιμοποιώντας έναν συνδοιασμό συνεχόμενων και ασυνεχών στοιχείων.

Το μοντέλο που φαίνεται στο σχήμα αποτελείται από 2.000 περίπου οριακά στοιχεία επιφάνειας και κάθε μέρος του άξονα απεικονίζεται από μία ζώνη οριακών στοιχείων (παρόμοια θα είχαμε και σε μία υποδομή πεπερασμένων στοιχείων ή υπερ - στοιχείων), έχοντας έτσι ένα σύνολο 10.000 βαθμών ελευθερίας.
Καθώς μόνο η επιφάνεια του άξονα έχει απεικονισθεί χρησιμοποιώντας στοιχεία ο χρόνος διάπλασης είναι αρκετά γρήγορος και το πλέγμα στοιχείων μπορεί αυτόματα να δημιουργηθεί από ένα οριακό μοντέλο που προέρχεται από ένα σύστημα C.A.D.. Η λύση προβλημάτων αυτού του μεγέθους μπορεί τώρα εύκολα να επιτευχθεί στη νέα γενιά των ισχυρών μηχανικών σταθμών εργασίας. (Αυτό το μοντέλο έγινε σε ένα IBM RS 6000)

.

Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι ο χρόνος του υπολογιστή δεν είναι πλέον πρωταρχική ανυσηχία στην ανάλυση οριακών στοιχείων και μάλιστα αναμένονται επιπλέον αυξήσεις στην απόδοση των υπολογιστών μέσα στα επόμενα χρόνια.
Ακόμη το μοντέλο στην εικόνα 5 επιτρέπει στον χρήστη να αναλύσει τη συμπεριφορά του στροφαλοφόρου άξονα υπό διαφορετικές φορτίσεις (γομώσεις). Έπειτα μέρος του στροφαλοφόρου άξονα μπορεί να μελετηθεί με περισσότερη λεπτομέρεια για να βρεθεί η επίδραση που έχουν οι οπές λυπάνσεως, τα διαζώματα κ.τ.λ στην κατανομή έντασης.

εικόνα 5

Η εικόνα 6 δείχνει το μοντέλο για το μέρος ενός άξονα που αναλύεται με ένα πιο λεπτό πλέγμα σε σχέση με εκείνο στην εικόνα 5.
Αυτό το κομμάτι άξονα έχει μία οπή λιπάνσεως όπως φαίνεται στο διάγραμμα σκελετού στην εικόνα 7. Η ενδιαφέρουσα πλευρά αυτού του προβλήματος είναι ότι μικρές λεπτομέρειες μπορούν εύκολα να απεικονισθούν χωρίς να προκληθεί μεγάλη αύξηση στο κόστος της ανάλυσης.
Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία που περιγράφουν την οπή λιπάνσεως στην εικόνα 7 περιγράφουν μόνο της επιφάνεια της και δεν τέμνουν τα στοιχεία στο εξωτερικό μέρος του μοντέλου εκτός από εκεί που η τρύπα διαπερνάει την επιφάνεια.

εικόνα 6

εικόνα 7

Είναι φανερό από τα παραδείγματα ότι τα οριακά στοιχεία είναι ένα ιδανικό εργαλείο για το μηχανικό σχεδιασμό κυριώς επειδή είναι εύκολο να παράγονται τα δεδομένα που απαιτούνται για να λυθεί ένα πρόβλημα καθώς και να γίνονται οι τροποποίησεις που απαιτούνται για να επιτευχθεί το καλύτερο δυνατό σχέδιο.

Επίσης οι μηχανικοί χρειάζονται ανακούφιση από το τρομερό καθήκον της προετοιμασίας των δεδομένων για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Πιο σπουδαίο ακόμα είναι το γεγονός, ότι κάθε εργαλείο που μπορεί να συντομεύσει το χρόνο που απαιτείται για την ανάλυση και το σχεδιασμό μπορεί να επισπεύσει την ημερομηνία αποπεράτωσης ενός προγράμματος.

Το μέλλον των Β.Ε.Μ. στη μηχανική είναι υποσχόμενο και θα συνεχίσει να είναι εφοσών αυτοί που αναπτύσουν την μέθοδο δεν αποξενώνουν τους χρήστες, παράγοντας κώδικες οι οποίοι είναι αναξιόπιστοι ή δύσκολοι στη χρήση.

Τα περισσότερα από τα πλεονεκτήματα των Β.Ε.Μ. έχουν σχέση με τα πολύπλοκα μαθηματικά τους θεμέλια. Το γεγονός αυτό παρέχει έναν υψηλό βαθμό προσαρμοστικότητας και ακρίβειας σε καλογραμμένους κώδικες αλλά μπορεί να έχει και καταστροφικές συνέπειες στην περίπτωση κακογραμμένων κωδικών Β.Ε.Μ..
Η μέθοδος των Β.Ε.Μ. είναι περισσότερο επιρρεπής σε λάθη όταν δεν χρησιμοποιούνται οι κατάλληλες αριθμητικές τεχνικές και τότε είναι σημαντικό για τους ερευνητές να προσαρμόσουν κατάλληλα την θεωρία της μεθόδου.
Αν και η υπολογιστική απόδοση είναι σημαντική για την μέθοδο των Β.Ε.Μ., ιδιαίτερα στα τρισδιάστατα προβλήματα, βελτιώσεις στους χρόνους CPU δεν θα πρέπει να γίνονται σε βάρος της ακρίβειας και της ορθότητας.

Για παράδειγμα η εφαρμογή τεχνικών αριθμητικής ενσωμάτωσης σε κώδικες Β.Ε.Μ. μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα μεγάλες αποταμιεύσεις σε κωδικούς Η/Υ και επίσης να δώσει λογικά αποτελέσματα σε πολλές περιπτώσεις. Σε άλλες περιπτώσεις όμως η λύση μπορεί να είναι πολύ μικρής ακρίβειας ή μπορεί και να έχουμε μη συγκλίνοντα αποτελέσματα. Τα παραπάνω καθιστούν τέτοιους κώδικες αναξιόπιστους.
Ένα άλλο σπουδαίο πλεονέκτημα της μεθόδου των Β.Ε.Μ. σε σχέση με τα πεπερασμένα στοιχεία, είναι όταν αναλύονται προβλήματα με συγκέντρωση τάσεων (ή ροής).
Πολλές τέτοιες μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί και τείνουν να αποδείξουν την υψηλή ακρίβεια των οριακών στοιχείων σε προβλήματα όπως αυτά των εσωτερικών γωνιών, προβλήματα κόπωσης και σε εφαρμογές μηχανικής θραύσεως.
Δεν είναι πρόθεση μας σ'αυτή την εισήγηση να κάνουμε ανασκόπηση σε όλες αυτές τις μελέτες αλλά θέλουμε να τονίσουμε τη διαφορά στα αποτελέσματα που μπορούν να αποκομίσθουν χρησιμοποιώντας τη μία ή την άλλη αριθμητική μέθοδο.

Σαν επεξήγηση οι λύσεις των πεπερασμένων στοιχείων που βρίσκονται κατά μήκος μιάς γραμμής κοντά σε μία εσωτερική γωνία (<u>εικόνα 8</u>) όταν υπόκειται σε πίεση , φαίνονται στην <u>εικόνα 9</u>.
Το πρόβλημα επίσης αναλύθηκε χρησιμοποιώντας ένα φωτοελαστικό μοντέλο και οριακά στοιχεία. Τα αποτελέσματα για ένα πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων που αποτελείται από περίπου 500 βαθμούς ελευθερίας (69 στοιχεία) και χρησιμοποιεί στοιχεία οκτώ κόμβων, συγκρίνονται με τις λύσεις των Β.Ε.Μ. που αποκομίσθηκαν χρησιμοποιώντας μόνο 20 στοιχεία
Είναι φανερό από τις εικόνες ότι ενώ τα αποτελέσματα των 69 πεπερασμένων στοιχείων δείχνουν έλλειψη ισορροπίας στο χώρο καθώς και στο όριο, χρησιμοποιώντας οριακά στοιχεία αποκομίσθηκαν λογικά ακριβείς λύσεις. Μόνο όταν χρησιμοποιήθηκε ένα πολύ εκλεπτυσμένο πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων τα

αποτελέματα της μεθόδου συμφώνησαν με την λύση των οριακών στοιχείων και του φωτοελαστικού μοντέλου, δηλαδή μιλάμε για αποτελέσματα που αποκομίσθηκαν χρησιμοποιώντας 240 πεπερασμένα στοιχεία και έχωντας 1500 βαθμούς ελευθερίας.

εικόνα 8

.

εικόνα 9

Επίσης, ένα παράδειγμα για τη σύγκριση της ακρίβειας των δύο μεθόδων (B.E.M. και F.E.M.) αποτελεί το ακόλουθο.

Έχουμε έναν κύλινδρο που υπόκειται σε εσωτερική πίεση και μελετάται το πρώτο τεταρτημόριο του. Πιο συγκεκριμένα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων έχουμε 76 στοιχεία και 52 κόμβους ενώ με την μέθοδο των συνωριακών στοιχείων έχουμε 26 στοιχεία, όπως φαίνεται στο σχήμα 10 . Τα αποτελέσματα για την ακτινική και την εφαπτομενική τάση με τις δύο μεθόδους φαίνονται στο σχήμα 11.

εικόνα 10

εικόνα 11

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων ταυτίζονται με τα ακριβή αποτελέσματα, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Η ανάπτυξη ισχυρότερων hardware (parallel και vector processing computers) ευνοεί την χρήση της μεθόδου των B.E.M..

Αυτοί οι υπολογιστές είναι πιο κατάλληλοι για να αντιμετωπίσουν πλήρεις μήτρες καθώς και το είδος των λειτουργιών οι οποίες είναι χαρακτηριστικά γνωρίσματα των οριακών στοιχείων.

Η εφαρμογή που φαίνεται στο σχήμα 12 δείχνει τη χρήση των οριακών στοιχείων για τη λύση ενός μη - γραμμικού προβλήματος δηλαδή την ανάλυση επαφής μιάς ράβδου συνδέσεως.

Το μοντέλο σ' αυτή την περίπτωση έγινε σε σύστημα C.A.D. και η γωμετρία αυτόματα πέρασε σε πρόγραμμα Συνοριακών Στοιχείων (B E A S Y) και έγινε πλέγμα.

Παρατηρούμε ότι λόγο συμμετρίας μόνο το ένα τέταρτο του μοχλού χρειάζεται να αναλυθεί.

Η λύση αυτής της ανάλυσης φαίνεται στο σχήμα 13 όπου η σχετική μετατόπιση ανάμεσα στη σφήνα και τη ράβδο σύνδεσης φαίνεται καθαρά.

εικόνα 12

εικόνα 13

Και άλλα προβλήματα εκτός της ανάλυσης τάσεων ή θερμοκρασίας μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας οριακά στοιχεία. Τυπικές εφαρμογές συμπεριλαμβάνουν τη στρέψη, την ρευστομηχανική και τον ηλεκτρομαγνητισμό.

Οι μηχανικοί που ασχολούνται με θέματα προστασία από διάβρωση έχουν χρησιμοποιήσει τη μέθοδο για να σχεδιάζουν καλύτερα συστήματα προστασίας καθόδου για παράκτιες κατασκευές, πλοία και αγωγούς.

Πολλές από αυτές τις κατασκευές είναι βασικά τρισδιάστατες και το πεδίο ενδιαφέροντος επεκτείνεται στο άπειρο. Συνεπώς δεν θα μπορούσαν να αναλυθούν αποτελεσματικά πριν την ανάπτυξη της μεθόδου των οριακών στοιχείων.

Οι πρώτες προσπάθειες να χρησιμοποιηθούν πεπερασμένα στοιχεία ή πεπερασμένες διαφορές για να λυθούν αυτά τα προβλήματα είχαν πολύ λίγη επιτυχία.

Η χρήση της μεθόδου των οριακών στοιχείων αντιπροσωπεύει τη μόνη πρακτική λύση γι' αυτό το πρόβλημα. Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι μόνο η δομή της κατασκευής χρειάζεται να ορισθεί καθώς η μέθοδος των οριακών στοιχείων αυτόματα λαμβάνει υπόψη της το πεδίο δηλαδή το θαλάσσιο νερό που επεκτείνεται στο άπειρο.

Το σχήμα 14 δείχνει την πρώτη τρισδιάστατη εφαρμογή καθοδική προστασίας χρησιμοποιώντας οριακά στοιχεία, η οποία ήταν η μελέτη για την πλατφόρμα τάσης (TLP) που χτίστηκε από το CONOCO στο Hutton Field στη Βόρεια θάλασσα.

σχήμα 14

Το σχήμα 15 δείχνει την ανάλυση ενός τετάρτου της κατασκευής σε οριακά στοιχεία και το σχήμα 16 τα αποτελέσματα που ελήφθησαν για τις τάσεις πάνω στην επιφάνεια για μία λεπτομερή διαμόρφωση του βελτιωμένου κωδικού συστήματος που χρησιμοποιήθηκε.

εικόνα 15

εικόνα 16

Από τότε η μέθοδος των οριακών στοιχείων έχει γίνει το κλειδί για την επιτυχή και πρακτική ανάλυση των συστημάτων καθοδικής προστασίας και περαιτέρω εργασίες πάνω στο θέμα έχουν πραγματοποιηθεί κυρίως στο Ινστιτούτο Υπολογιστικής Μηχανικής στο Σαουθάμπτον της Μεγάλης Βρετανίας.

Έτσι τώρα υπάρχει ένα σύστημα το οποίο επιτρέπει στο μηχανικό που ασχολείται με προβλήματα διάβρωσης να εκτιμά τα περιθώρια επιλογής στο σχεδιασμό, να εξετάζει τις περιοχές του προβλήματος, να ερμηνεύει τις πειραματικές παρατηρήσεις, να βελτιώνει το σχέδιο και να προβλέπει με ακρίβεια και σιγουριά το βαθμό προστασίας και την πιθανή διάρκεια ζωής ενός συστήματος καθοδική προστασίας.

Η πρόοδος στο σχεδιασμό καθοδικής προστασίας χρησιμοποιώντας οριακά στοιχεία είναι μόνο μία από τις εφαρμογές της τεχνικής για τα συστήματα που επεκτείνονται στο άπειρο. Η μέθοδος σήμερα χρησιμοποιείται ευρέως σε άλλα προβλήματα με χώρους απείρου ή ημι-απείρου όπως αυτούς που εμφανίζονται στη γεωμηχανική, στην ωκεάνειο μηχανική, στην αεροδυναμική, στη ροή δια μέσου πορώδων μέσων και πολλά άλλα

.

Είδαμε σ' αυτή τη σύντομη αναφορά τα πλεονεκτήματα και της κυριότερες εφαρμογές της μεθόδου των B.E.M. σε μία ευρεία ποικιλία μηχανικών προβλημάτων.Συνοψίζοντας, τονίζουμε ότι η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων είναι σχετικά πρόσφατη μέθοδος, αλλά τα πεδία που μπορεί να καλύψει είναι πολλά.

Επίσης σε σύγκριση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων η μέθοδος των B.E.M παρουσιάζει αρκετά πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα που σχετίζονται με τα πεδία εφαρμογής των μεθόδων αλλά και με την ταχύτητα και την ακρίβεια τους. Συνοπτικά τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

<u>Συνοπτική σύγκριση συνοριακών και πεπερασμένων στοιχείων.</u>

Μέθοδος	**Πλεονεκτήματα**	**Μειονεκτήματα**
Συνοριακά στοιχεία	- Μόνο στοιχεία στο σύνορο, που συνεπάγεται λιγότερους υπολογισμούς. -Επίλυση πολλών προβλημάτων. - Ακριβείς σχετικά λύσεις	- Ο πίνακας των συντελεστών επιρροής είναι πλήρης - Ο χρόνος επίλυσης αυξάνεται εκθετικά με τον αριθμό των στοιχείων - Περιορισμένες δυνατότητες επίλυσης μη γραμμικών ή μη ομοιογενών μέσων
Πεπερασμένα στοιχεία	- Ανομοιογενή μέσα επιλύονται εύκολα - Επίλυση μη γραμμικών μέσων	- Μεγάλος αριθμός μεταβλητών σε σχέση με τα συνοριακά στοιχεία - Σχετικά αργή μέθοδος - Ο χρόνος επίλυσης αυξάνει εκθετικά με τον αριθμό των στοιχείων

Τέλος, το μέλλον της μεθόδου των B.E.M. εξαρτάται από την αποδοχή του από τους ασκούντες μηχανικούς, ιδιαίτερα ως εργαλείο σχεδιασμού. Οι ερευνητες της μεθόδου θα πρέπει να έχουν στόχο τους να κάνουν τη μεθοδο πιο προσιτή στους μηχανικούς γράφωντας κώδικες φιλικούς στη χρήση τους και εξηγώντας τα θεμέλια της μεθόδου έχωντας ως βάση τη μηχανική και όχι μαθηματικές έννοιες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε την τυποποίηση των συνοριακών στοιχείων για την επίλυση δυσδιάστατων ελαστοστατικών προβλημάτων.
Αρχικά, παρουσιάζονται οι εξισώσεις που διέπουν τα προβλήματα επίπεδης τάσης και τα προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης.
Στην συνέχεια ακολουθεί η τυποποίηση των γραμμικών συνοριακών στοιχείων και ακολουθεί η ανάπτυξη της πιο απλής τυποποίησης για συνοριακά στοιχεία, που είναι η μέθοδος των σταθερών στοιχείων.
Τέλος, γίνεται παρουσίαση του ελαστοστατικού προγράμματος Η/Υ Linear το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα εργασία. Τονίζουμε ότι υπάρχει μία ακόμη μέθοδος τυποποίησης συνοριακών στοιχείων, αυτή που χρησιμοποιεί δευτέρου βαθμού στοιχεία (quadratic elements) για την οποία όμως δεν θα προχωρήσουμε σε εκτενέστερη ανάλυση.

3.2 Προβλήματα επίπεδης τάσης (Plate stretching) και προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης (Plane strain):

Τα δισδιάστατα προβλήματα χωρίζονται σε δύο τύπους. Προβλήματα έντασις ελάσματος (μερικές φορές επίσης καλούνται και προβλήματα επίπεδης τάσης) και προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης, τα οποία εξαρτώνται από το πόσο το στερεό είναι συγκρατημένο στη κάθετη κατεύθυνση στο επίπεδο που εξετάζουμε.
Για να καταλάβουμε τη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο τύπων καταστάσεων υποθέτουμε το πρισματικό ομογενές στερεό που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

σχήμα 1

Οι τελικές επιφάνειες ορίζονται από τα επίπεδα x3 = $\pm$ h/2 και η κυλινδρική επιφάνεια απο x1 = x1 (Γ) και x2 = x2 (Γ), όπου (Γ) είναι το μήκος τόξου κατά μήκος της συνοριακής καμπύλης.

Έτσι αρχικά εξετάζουμε τα προβλήματα επίπεδης τάσης (Plate stretching).
Οι βασικές υποθέσεις γι’ αυτό τον τύπο προβλήματος είναι οι ακόλουθες:

(ι) Το σώμα πρέπει να είναι λεπτό, δηλαδή το h να είναι μικρό σε σύγκριση με τις αντιπροσωπευτικές διαστάσεις κατά μήκος στους άξονες x1 και x2.

(ιι) Δεν υπάρχουν έλξεις που δρουν στις τελικές επιφάνειες, δηλαδή στα x3= $\pm$ h/2 οι έλξεις Pj = 0.

(ιιι) Οι δυνάμεις σώματος που ενεργούν στα x1 - x2 επίπεδα είναι ανεξάρτητες του x3, δηλαδή:
b3 = 0 και b1, b2 είναι συναρτήσεις μόνο των x1,x2.

(ιν) Οι δυνάμεις που ενεργούν στο κυλινδρικό σώμα είναι δισδιάστατες (επίπεδες) και ανεξάρτητες του x3 δηλαδή: P3 = 0 και P1, P2 είναι συναρτήσεις των x1, x2.

Κάτω από αυτές τις υποθέσεις θεωρούμε ότι οι τάσεις: σ33, σ31 και σ32 είναι όλες μικρές σε σύγκριση με τις σ11, σ22 και σ12 και επίσης θεωρούμε ότι η μεταβολή των τελευταίων είναι ασήμαντη ως προς x3.
Έτσι ισχύει: σ33 = σ31 = σ32 = 0, και οι τάσεις σ11, σ22 και σ12 είναι συναρτήσεις μόνο των x1, x2:

$$\sigma 11(x1,x2),\ \sigma 22\ (x1,\ x2),\ \sigma 12\ (x1,x2) \qquad \textbf{(3.1)}$$

Εντούτοις μπορεί να παρατηρηθεί ότι αν και αυτές οι υποθέσεις είναι λογικές, στην πράξη των μηχανικών είναι μόνο προσεγίσεις καθώς παραβιάζουν τη συμβιβαστότητα των εξισώσεων. Ακόμη, η εξίσωση (3.1) μπορεί να γραφεί και συναρτήσει των μετατοπίσεων και έτσι να έχουμε και εναλλακτική δήλωση, δηλαδή ότι οι συνιστώσες μετακίνησης είναι μόνο συναρτήσεις των x1, x2:

$$u1 = u1\ (x1, x2)$$

(3.2)

$$u2 = u2\ (x1, x2)$$

Τονίζουμε ότι η μετατόπιση u3 είναι διάφορη του μηδέν και ότι οι παραμορφώσεις ε33 μπορούν να προσδιοριστούν συναρτήσει των τάσεων σ11, σ22 και σ12.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain).
Η περίπτωση αυτή συνήθως αντιπροσωπεύει την συμπεριφορά μεγάλων κατασκευών όπως τούνελ, αγωγών και γι' αυτό οι μετατοπίσεις στην κάθετη διεύθυνση μπορεί να υποτεθεί ότι είναι μηδενικές (π.χ. στις τελικές επιφάνειες).
Εδώ, οι υποθέσεις για την επίπεδη παραμόρφωση είναι οι ακόλουθες:

(ι) Οι μετατοπίσεις στις τελικές επιφάνειες u3 είναι μηδέν καθώς είναι συγκρατημένες και δεν μπορούν να κινηθούν κάθετα, λόγω του ότι η πυκνότητα είναι μεγάλη σε σύγκριση με τις αντιπροσωπευτικές διαστάσεις στις κατευθύνσεις x1, x2.

(ιι) Οι δυνάμεις σώματος και οι επιφανειακές δυνάμεις που ενεργούν στην κυλινδρική επιφάνεια δεν έχουν x3 συνιστώσα και είναι ανεξάρτητες του x3.

Σ' αυτή την περίπτωση επιπρόσθετα του u3 = 0 μπορεί κανείς να υποθέσει ότι οι μετατοπίσεις u1 και u2 στα ενδιάμεσα επίπεδα, είναι ανεξάρτητες του x3. Δηλαδή:

$$u1 = u1\ (x1, x2)$$
$$u2 = u2\ (x1, x2) \qquad \textbf{(3.3)}$$
$$u3 = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι μερικές από τις προκύπτουσες παραμορφώσεις θα είναι επίσης μηδέν, δηλαδή:

$$ε33 = ε31 = ε32 = 0 \qquad \textbf{(3.4)}$$

,και οι υπόλοιπες ανεξάρτητες του x3:

$$ε11 = ε11\ (x1, x2),\ \ ε22 = ε22\ (x1, x2),\ \ ε12 = ε12(x1,x2)$$

Σε αυτή την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης η τάση σ33 είναι διάφορη του μηδέν και μπορεί να προσδιοριστεί απ΄την τιμή των άλλων συνιστωσών.

Συνεχίζοντας, έχουμε τις σχέσεις μεταξύ τάσεων - παραμορφώσεων στις τρείς διαστάσεις για ένα ισοτροπικό σώμα, για επίπεδη παραμόρφωση ή επίπεδη τάση. Έτσι έχουμε:

(3.5)

Οι σχέσεις για την περίπτωση της επίπεδης τάσης προκύπτουν θέτοντας: σ33 = 0 στις εξισώσεις (3.5).
Έτσι θεωρούμε μόνο τις δισδιάστατες συνιστώσες ε11, ε22, και ε12, όπου:

(3.6)

Η τιμή της ε33 μπορεί να επιτευχθεί εκ των υστέρων από την τρίτη σχέση της (3.5), και έχουμε:

(3.7)

Οι εξισώσεις (3.6) μπορούν να αναστραφούν για να δώσουν τις αντίστοιχες τάσεις. Έχουμε επομένως:

(3.8)

Για την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης οι εξισώσεις μπορούν να βρεθούν απαλοίφωντας αρχικά την παραμόρφωση ε33 από την (3.5), δηλαδή:

(3.9)

Έτσι η (3.9) δίνει ότι:

(3.10)

Αντικαθιστώντας το σ33 στην εξίσωση (3.5) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

(3.11)

Η αντιστροφή αυτών των εξισώσεων μας δίνει τις τάσεις, οι οποίες και είναι:

(3.12)

Εάν ζητείται η τιμή της σ33, αυτή μπορεί να υπολογισθεί από την (3.10).
Παρατηρούμε σ' αυτό το σημείο ότι μερικές φορές είναι περισσότερο βολικό να εκφράζουμε τις δύο πρώτες παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιώντας την σταθερά Lame η οποία ισούται:

Έτσι οι εξισώσεις (3.12-a,b) γίνονται:

(3.13)

Μπορούμε επίσης να περάσουμε από τις εξισώσεις (3.8) για επίπεδη τάση στις εξισώσεις (3.12) για επίπεδη παραμόρφωση, αντικαθιστώντας απλά τα Ε και ν στην πρώτη εξίσωση από δύο ισοδύναμες τιμές Ε΄ και ν΄ οι οποίες δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:

(3.14)

,όπου η τιμή του G παραμένει η ίδια.
Αυτές οι ενδιαφέρουσες σχέσεις σημαίνουν ότι κανείς μπορεί να υλοποιήσει ένα πρόγραμμα για επίπεδη τάση και μετασχηματίζοντας τις δεδομένες ελαστικές σταθερές σύμφωνα με την (3.14), να λύσει επίσης ένα πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης.
Αυτό ακριβώς γίνεται στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων.
Αντίστροφα, στα συνοριακά στοιχεία κανείς δουλεύει με προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης καθώς η θεμελιώδης λύση είναι γνωστή γι' αυτό το είδος των προβλημάτων και εν συνεχεία τα προβλήματα επίπεδης τάσης μπορούν να λυθούν χρησιμοποίωντας την αντίστροφη σχέση της (3.14), δηλαδή την σχέση:

(3.15)

3.3 Τυποποίηση γραμμικών συνοριακών στοιχείων

Οι βασικές σχέσεις για συνοριακά στοιχεία στην ελαστοστατική εξειδικευμένες για δισδιάστατες περιπτώσεις, θα παρουσιαστούν σε αυτή την παράγραφο.
Έτσι μπορεί να αναπτυχθεί ένας ελαστοστατικός γραμμικός κώδικας σε υπολογιστή, ο οποίος χρησιμοποιώντας γραμμικά στοιχεία θα επιλύει προβλήματα ελαστικότητας (πρόγραμμα Linear).
Αρχικά έχουμε την εξίσωση του ολοκληρώματος

(3.16)

,όπου η βασική λύση έχει υποτεθεί ότι ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

(3.17)

Η εξίσωση (3.16) εφαρμόζεται για σημεία στο σύνορο ή για εσωτερικά σημεία (με cik=δικ).
Λείες επιφάνειες δίνουν cικ = 1/2 δικ, και οι γωνίες παράγουν ένα διαφορετικό τύπο cικ διανύσματος, όπως θα συζητηθεί σύντομα.
Η θεμελιώδης λύση για ένα ισοτροπικό υλικό σε επίπεδη παραμόρφωση δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

(3.18)

,όπου ρικ* και uικ*, εκφράζουν τους εφελκυσμούς και τις μετατοπίσεις στην κ-κατεύθυνση και ωφείλονται σε ένα μοναδιαίο φορτίο στην κατεύθυνση -ι που ενεργεί στο - i.
Επίσης η εξίσωση (3.16) μπορεί να γραφεί σε μορφή πίνακα, ορίζοντας τους ακόλουθους πίνακες.
Οι συνιστώσες της θεμελιώδους (βασικής) λύσης μπορουν να γραφούν σαν 2x2 πίνακες με στοιχεία uικ* και ρικ*, δηλαδή έχουμε:

και **(3.19)**

Τα διανύσματα της μετατόπισης, των εφελκυσμών και των δυνάμεων του σώματος είναι:

(3.20)

Έτσι η βασική λύση γίνεται:

(3.21)

,όπου το ui ορίζει τις μετατοπίσεις στο σημείο i (εσωτερικό ή συνοριακό) όπου το φορτίο εφαρμόζεται και ci είναι ένας πίνακας 2x2 από σταθερές που οι τιμές του εξαρτώνται από τον τύπο του σημείου που εξετάζουμε.
Εάν το i είναι εσωτερικό σημείο τότε:

(3.22)

Εάν είναι συνοριακό σημείο σε μία λεία επιφάνεια τότε:

(3.23)

Και εάν το i είναι γωνιακό σημείο τότε έχουμε:

(3.24)

,όπου τα Clk εξαρτώνται από το τύπο της γωνίας που εξετάζουμε, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Όπως αναφέρθηκε αρχικά, θα θεωρήσουμε την ανάπτυξη γραμμικών στοιχείων με αποτέλεσμα να χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε δύο τιμές για το u και δύο για το p. (σχήμα 2)

σχήμα 2

Έτσι έχουμε:

(3.25)

και

(3.26)

,όπου uj και pj αναφέρονται στις δεσμικές συνιστώσες των στοιχείων j.
Οι συνιστώσες για αυτά τα διανύσματα είναι οι uικ και pικ, όπου το k αναπαριστά τον κόμβο που εξετάζουμε στο στοιχείο και το ι ορίζει τη συνιστώσα των μετατοπίσεων ή των εφελκυσμών στην κατεύθυνση ι.
Οι συναρτήσεις φi είναι συναρτήσεις γραμμικής παρεμβολής, όπως είναι οι παρακάτω:

(3.27)

Εάν θεωρήσουμε Ν γραμμικά συνοριακά στοιχεία η εξίσωση που τα διέπει, αγνοώντας τις συνοριακές δυνάμεις για απλοποίηση, είναι η:

(3.28)

Μερικά από αυτά τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας αριθμητική ολοκλήρωση, αλλά εκείνα με τα σημεία ιδιομορφίας μπορούν ακόμη να υπολογιστούν και αναλυτικά.
Όπως έχουμε δει και προηγουμένως, για λεία σύνορα το Ci είναι ένας διαγώνιος πίνακας με 1/2 στη διαγώνιο. Όταν όμως το σημείο i είναι στην κορυφή όπως φαίνεται στο σχήμα 3 , το όριο της βασικής λύσης για τους εφελκυσμούς είναι:

(3.29)

,και το όριο αυτό δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα.

σχήμα 3

Για παράδειγμα στα δισδιάστατα προβλήματα που συζητήθηκαν, το παραπάνω όριο αντί να δώσει έναν διαγώνιο πίνακα με 1/2 στοιχεία διαγωνίου, δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

,έτσι ώστε:

Cικ = δικ + Iικ **(3.30)**

Είναι επομένως πολύ πιο πολύπλοκο να επιτευχθεί μία γενική έκφραση για το Iικ στις τρείς διαστάσεις αφού η ασυνέχεια της κλίσης μπορεί να έχει διάφορους τύπους.
Εντούτοις γενικά μπορεί κανείς να κάνει πάντα την ολοκλήρωση πάνω από το αντίστοιχο τμήμα της σφαιρικής επιφάνειας.

Ο απλούστερος τρόπος υπολογισμού των διαγώνιων υποπινάκων του πίνακα **H**, ο οποίος περιέχει τους υποπίνακες **c**, είναι να χρησιμοποιήσουμε τις υποθέσεις άκαμπτου σώματος για οριζόμενα πεδία ή περιοχές που τείνουν στο άπειρο.
Όλα αυτά συνεπάγονται ότι η διατύπωση των οριακών στοιχείων για την ελαστοστατική είναι πιο πολύπλοκη από την εφαρμογή τους σε δυναμικά προβλήματα αν και απαιτούνται τα ίδια βασικά βήματα.

3.4 Τυποποίηση σταθερών στοιχείων

Η πιο απλή μέθοδος τυποποίησης για τα συνορικά στοιχεία είναι η μέθοδος των σταθερών στοιχείων την οποία και θα παρουσιάσουμε σε αυτή την παράγραφο.
Θεωρούμε ότι η επιφάνεια κάτω από το σύνορο που εξετάζουμε διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας σταθερά στοιχεία όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

Η χρήση σταθερών στοιχείων συνεπάγεται ότι οι τιμές των u και p θεωρούναι σταθερές για κάθε στοιχείο και ίσες με την τιμή στον μεσαίο κόμβο του στοιχείου.
Επίσης μπορούμε να διακριτοποιήσουμε το εσωτερικό του πεδίου σε έναν αριθμό από κελιά τα οποία απαιτούνται για την ολοκλήρωση του όρου της δύναμης σώματος στην εξίσωση (3.21):

Αυτά τα κελιά χρησιμοποιούνται μόνο για αριθμητική ολοκλήρωση των όρων των δυνάμεων σώματος και σε βέβαιες περιπτώσεις που μπορούν να παρθούν στο σύνορο.
Υποθέτουμε εδώ ότι το σώμα Ω είναι διακριτοποιημένο σε N συνοριακά στοιχειά και M εσωτερικά κελιά, όπου η εξίσωση (3.21) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

(3.31)

Η παραπάνω εξίσωση αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο κόμβο i όπου οι μοναδιαίες δυνάμεις υποθέτουμε ότι ενεργούν εκεί.
Παρατηρούμε ότι οι όροι όπως: και , σχετίζουν τον κόμβο i με το στοχείο ή κόμβο j, και παράγεται έτσι ένας τύπος συντελεστή επίδρασης.

Μετά από την ολοκλήρωση τα ολοκληρώματα παράγουν δύο 2x2 υποπίνακες που καλούνται: και .

Αριθμητική ολοκλήρωση του όρου των δυνάμεων σώματος μπορεί να έρθει σε πέρας ως ακολούθως:

(3.32)

Παρατηρούμε ότι αυτό παράγει δύο συνιστώσεις του **B**is, τις Bis1 και Bis2, μετά από την αριθμητική ολοκλήρωση.

Ακόμη wp είναι οι συντελεστές βάρους και Ως η περιοχή του κελιού που θεωρούμε.

Η συνάρτηση (u*b) πρέπει να υπολογιστεί σε P σημεία ολοκλήρωσης, όπου το P μεταβάλλεται από 1 εώς r.

Έτσι η εξίσωση (3.31) τώρα γράφεται:

(3.33)

Αυτή η εξίσωση σχετίζει τις τιμές του u στον κόμβο i, με τις τιμές των u και p σε όλους του κόμβους στο σύνορο περιλαμβανομένου του i.

Παρατηρούμε ότι σ' αυτή την περίπτωση - λείο σύνορο - το **ci** είναι ένας πίνακας διαγώνιος (2x2) με στοιχείο διαγωνίου το 1/2.

Η εξίσωση (3.33) μπορεί να γραφτεί με έναν πιο συμπαγή τρόπο εάν ορίσουμε:

(3.34)

Ο τύπος επομένως (3.33), έχει την ακόλουθη μορφή:

(3.35)

Εάν κάποιος εφαρμόσει την (3.35) σε όλα τα συνοριακά σημεία το αποτέλεσμα μπορεί επίσης να γραφτεί σε μορφή πίνακα ως εξής:

(3.36)

όπου, **H** και **G** είναι 2N x 2N πίνακες (N ο αριθμός των συνοριακών κόμβων).

Η εξίσωση (3.36) πρέπει να αναδιατυπωθεί όταν εφαρμόζεται σε συνοριακές συνθήκες.

Η διαδικασία συνίσταται από την κίνηση στην αριστερή πλευρά όλων των στηλών πολλαπλασιασμένων με ένα άγνωστο και συσσωρευτικό στην δεξιά πλευρά διάνυσμα **F** όλων των τιμών, που παράγεται από τον πολλαπλασιασμό των γνωστών συνοριακών συνθηκών με τους όρους των αντίστοιχων στηλών.
Έτσι παράγεται το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

A * X = F + B   (3.37)
,όπου: **A** = ο πίνακας επιρροής.
Το διάνυσμα **X** αναπαριστά όλους τους αγνώστους, μετακινήσεις ή εφελκυσμούς, του προβλήματος.
Μόλις η (3.37) λυθεί, έχουν βρεθεί όλες οι συνοριακές τιμές.
Εφόσων οι μετατοπίσεις και οι εφελκυσμοί είναι γνωστά πάνω στο σύνορο είναι δυνατόν να υπολογισθούν οι μετατοπίσεις και οι τάσεις σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο.
Οι μετατοπίσεις δίνονται από τον τύπο (3.31) με:
cι = I (όπου **I** ο μοναδιαίος διαγώνιος). Έτσι έχουμε την εξίσωση:

(3.38)

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να διακριτοποιηθεί ως:

(3.39)

και μπορεί να ολοκληρωθεί αριθμητικά, αναλυτικά ή με συνδυασμό των δύο τεχνικών.
Οι εσωτερικές τάσεις μπορούν να βρεθούν από τον τύπο:

(3.40)

,όπου:

Ο τύπος (3.40) μπορεί να γραφεί στην διακριτοποιημένη μορφή όπως ακολούθως:

(3.41)

Τελός, όλα τα ολοκληρώματα στις παραπάνω εκφράσεις μπορούν να λυθούν αριθμητικά. Για την συγκεκριμένη περίπτωση των σταθερών στοιχείων είναι

απλούστερο και περισσότερο ακριβές να υλοποιηθούν μερικές ολοκληρώσεις αναλυτικά.
Περισσότερες πληροφορίες για την ολοκλήρωση υπάρχουν στο παράρτημα 1, που ακολουθεί στο τέλος της εργασίας.

3.5 Διάγραμμα ροής και χρήση του γραμμικού προγράμματος Linear:

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε το πρόγραμμα Linear, το οποίο είναι γραμμένο σε γλώσσα Fortran, και χρησιμοποιείται για τη λύση δυσδιάστατων ελαστοστατικών προβλημάτων χρησιμοποιώντας γραμμικά οριακά στοιχεία.
Τονίζουμε ότι γραμμικά οριακά στοιχεία είναι τα στοιχεία με γραμμικές μεταβολές των μετατοπίσεων και των έλξεων.
Το πρόγραμμα αυτό χρειάζεται λιγότερα βήματα επίλυσης απ' ότι ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων και ο αριθμός των αγνώστων είναι ουσιαστικά μικρότερος ,μια και μόνο στους κόμβους του συνόρου χρειάζονται.

Η εικόνα 1 συγκρίνει τα κύρια βήματα των δύο μεθόδων. Παρατηρούμε λοιπόν ότι όχι μόνο ο αριθμός των βημάτων μειώνονται για τα οριακά στοιχεία αλλά και η εισαγωγή δεδομένων είναι πολύ ευκολότερη σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ακόμη εσωτερικά αποτελέσματα υπολογίζονται μόνο στα απαιτούμενα σημεία και όχι παντού μέσα στην περιοχή, όπως και γίνεται στα πεπερασμένα στοιχεία.
Έτσι η σύγκριση των κυριότερων βημάτων των δύο μεθόδων είναι η ακόλουθη:

Πεπερασμένα Στοιχεία

Εισαγωγή δεδομένων

Υπολογισμός των τύπων των στοιχείων

Συναρμολόγηση του συνολικού συστήματος εξισώσεων

Εισαγωγή των ουσιωδών οριακών συνθηκών

Λύση του συστήματος των εξισώσεων για μετατοπίσεις.

Υπολογισμός των τάσεων ανά στοιχείο

Έξοδος αποτελεσμάτων

<u>Συνοριακά στοιχεία</u>

Εισαγωγή δεδομένων

Υπολογισμός του πίνακα επιρροής **A**

Λύση του συστήματος των εξισώσεων για τις τιμές των μετατοπίσεων και των έλξεων

Υπολογισμός των μετατοπίσεων και των τάσεων στα επιλεγμένα εσωτερικά σημεία

.

Έξοδος αποτελεσμάτων

εικόνα 1

Μάλιστα το πρόγραμμα Linear έχει τις ακόλουθες ικανότητες:

1. Λύση ελαστοστατικών επίπεδων τάσεων - επίπεδων παραμορφόσεων προβλημάτων με ισοτροπικές ιδιότητες υλικών.
2. Υπολογισμός των επιφανειακών έλξεων και μετατοπίσεων καθώς και τάσεων και μετατοπίσεων σε κάθε εσωτερικό σημείο. Επιπρόσθετα υπολογίζονται τάσεις στο όριο.
3. Επίπεδα συμμετρίας ως προς τον Χ και ως προς τον Ψ άξονα μπορούν να θεωρηθούν στην μελέτη χωρίς να χρειάζεται να ορισθούν οριακοί κόμβοι σ' αυτά τα επίπεδα (εικόνα 2).
4. Το πρόγραμμα επιτρέπει όρια στο άπειρο χωρίς καμία ειδική δυσκολία (εικόνα 3).
5. Το πρόγραμμα επιτρέπει πολλαπλές επιφάνειες.
6. Ασυνεχείς έλξεις επιτρέπεται να συμβαίνουν χρησιμοποιώντας διπλούς κόμβους με τον περιορισμό ότι ελάχιστα μία έλξη σε κάθε κατεύθυνση πρέπει να περιγράφεται σε έναν από τους διπλούς κόμβους.

εικόνα 2

εικόνα 3

Όσον αφορά το κύριο πρόγραμμα και τη δομή των δεδομένων του Linear έχουμε να πούμε τα εξείς:

Το διάγραμμά κύριας ροής για το πρόγραμμα των οριακών στοιχείων φαίνεται στην <u>εικόνα 4</u> .

INPUT

MATRX

MAIN PROGRAM

SLNPD

OUTPUT

END

εικόνα 4

Βλέπουμε επομένως ότι το κύριο πρόγραμμα καλεί τις ακόλουθες υπορουτίνες:

INPUT: αυτή η υπορουτίνα διαβάζει την εισαγωγή δεδομένων στο πρόγραμμα.

MATRIX: εδώ υπολογίζεται ο πίνακας **A** και το διάνυσμα **F**. Αυτά καλούνται **A** (100,100) και **XM** (100).

SLNPD: αυτή η υπορουτίνα λύνει το σύστημα των εξισώσεων με απαλειφή Gauss. Επίσης επιτρέπει σειρά ανταλλαγών αν απαιτείται.

OUTPUT: τέλος, εδώ γίνεται η έξοδος των αποτελεσμάτων της οριακής λύσης η οποία περιέχει υπολογισμούς και εκτυπώσεις των οριακών τάσεων καθώς και των εσωτερικών μετατοπίσεων και τάσεων.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένος, η εισαγωγή δεδομένων του προγράμματος Linear διαβάζεται στην υπορουτίνα INPUT.
Έτσι έχουμε τις ακόλουθες γραμμές για την εισαγωγή των δεδομένων:

1. Τίτλος.Εδώ βάζουμε τον τίτλο του προβλήματος ο οποίος συνήθως ξεκινάει από την δέκατη-έκτη κολόνα.
2. Γραμμή βασικών παραμέτρων. Σ' αυτή την γραμμή έχουμε τα εξείς στοιχεία: INFB, NE, NNEXT, NP, IPL, IDSYM, E, PO , όπου:

INFB: είναι ο άπειρος οριακός δείκτης. Παίρνει την τιμή μηδέν αν το σώμα είναι οριζόμενο και την τιμή ένα άν έχουμε απειροσύνορο.

NE: αυτή η μεταβλητή είναι ο αριθμός των στοιχείων του προβλήματος.

NNEXT: ο αριθμός των εξωτερικών κόμβων.

NP: ο αριθμός των εσωτερικών σημείων.

IPL: δείκτης που δηλώνει τον τύπο του προβλήματος. Παίρνει τις τιμές, ένα για επίπεδη τάση και δύο για επίπεδο παραμορφώσιμο πρόβλημα.

IDSYM: δείκτης που δηλώνει την ύπαρξη ή όχι συμετρίας. Παίρνει τις ακόλουθες τιμές: Μηδέν, για μη ύπαρξη συμμετρίας.
Ένα, για επίπεδη συμμετρία ως προς τον Y- άξονα.
Δύο, για επίπεδη συμμετρία ως προς τον X-άξονα
και τρία, για επίπεδη συμμετρία ως προς X και Y.

E: ο δείκτης του Young.

PO: ο λόγος του Poisson.

3. Συντεταγμένες των συνοριακών κόμβων. Αυτή η γραμμή περιέχει τις ακόλουθες μεταβλητές: K, X(K), Y(K), IDUP(K), COEFX, COEFY
όπου:
K: ο αριθμός του εξωτερικού κόμβου

X(K): συντεταγμένη X (τετμημένη) του κόμβου K

Y(K): συντεταγμένη Y (τεταγμένη) του κόμβου K

IDUP(K): δείκτης που δηλώνει την ύπαρξη διπλού κόμβου. Παίρνει τις ακόλουθες τιμές:
Μηδέν, αν ο κόμβος K δεν είναι διπλός ενώ στην περίπτωση διπλού κόμβου παίρνει σαν τιμή τον αριθμό του πρώτου από τους δύο κόμβους της γωνίας, μια και εκεί έχουμε τον διπλό κόμβο.
Δηλαδή στην περίπτωση διπλού κόμβου η γραμμή του πρώτου κόμβου έχει τις συντεταγμένες X και Y και το IDUP είναι μηδέν, ενώ η γραμμή του δεύτερου κόμβου έχει τις συντεταγμένες X και Y κενές και το IDUP ισούται με το K του πρώτου κόμβου.

COEFX: συντελεστής με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η τετμημένη X

COEFY: συντελεστής με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η τεταγμένη Ψ

4. Αριθμός οπών:
Αυτή η γραμμή περιέχει τον αριθμό των οπών, δηλαδή αποτελείται απο την εξής μεταβλητή: NHOLES
,όπου NHOLES:ο αριθμός οπών.

5. Χαρακτηριστικά μεγέθη της οπής. Εδώ έχουμε τα ακόλουθα στοιχεία:
Xo, Yo, Ro, SIZE, NSEG, BEG ,όπου:
Xo: η τετμημένη του κέντρου της οπής
Yo: η τεταγμένη του κέντρου της οπής
Ro: η ακτίνα της οπής
SIZE: το μέγεθος της οπής σε ακτίνια με το $\pi = 3.14$
NSEG: ο αριθμός των στοιχείων στα οποία έχουμε χωρίσει την οπή
BEG: μεταβλητή που δείχνει από ποιά γωνία ξεκινάει η αρίθμηση των κόμβων πάνω στην οπή. Για παράδειγμα για το παρακάτω σχήμα έχουμε: BEG = $\pi/2$ ($\pi = 3.14$)

κόμβος της οπής

$\pi/2$

6. Γραμμή που δηλώνει τους άξονες συμμετρίας. Εδώ έχουμε τις εξείς μεταβλητές: K, ISUM (K) ,όπου K: ο αριθμός του κόμβου, είτε εξωτερικού είτε κόμβος της οπής και, ISUM (K): διάνυσμα που δηλώνει αν το σημείο K εντοπίζεται πάνω σε άξονα συμμετρίας. Παίρνει τις τιμές:

Μηδέν, αν δεν ανήκει σε άξονα συμμετρίας.

Ένα, αν ανήκει στον οριζόντιο άξονα συμμετρίας X.

Δύο, αν ανήκει στον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας Y και,

Τρία αν εντοπίζεται στην τομή των αξόνων συμμετρίας.

7. Συντεταγμένες των εσωτερικών σημείων. Σε περίπτωση που χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση εσωτερικά σημεία βάζουμε την ακόλουθη γραμμή: K,X(K),Y(K),ISUM(K), COEFX, COEFY ,όπου:

K: ο αριθμός του εσωτερικού σημείου

X(K): τετμημένη του σημείου

Y(K): τεταγμένη του σημείου

ISUM(K): διάνυσμα που δηλώνει αν το σημείο K εντοπίζεται πάνω σε άξονα συμμετρίας

COEFX: συντελεστής της τετμημένης X

COEFY: συντελεστής της τεταγμένης Y

8. Συνεκτικότητα στοιχείων. Εδώ έχουμε τις μεταβλητές: K, INC (K,1), INC (K,2) ,όπου:

K: ο αριθμός του στοιχείου για το οποίο αναφερόμαστε

INC (K,1): πίνακας που περιέχει τον αριθμό του πρώτου κόμβου που ορίζει το στοιχείο K

INC (K,2): πίνακας που περιέχει τον αριθμό του δεύτερου κόμβου που ορίζει το στοιχείο K.

Δηλαδή έχουμε:

INC (K,1)   στοιχείο K   INC (K,2)

9. Προϋπολογισμός οριακών τιμών. Σ' αυτή τη γραμμή έχουμε:

NFIP, NDFIP

,όπου: NFIP: ο αριθμός των κόμβων που προϋπολογίζουν την μετατόπιση

και   NDFIP: ο αριθμός των κόμβων που προϋπολογίζουν την φόρτιση (τάση/μονάδα μήκους).

Τονίζουμε σ’ αυτό το σημείο ότι στους άξονες συμμετρίας δεν έχουμε μετατόπιση γεγονός που δεν το δηλώνουμε γιατί το θεωρεί αυτόματα δεδομένο το πρόγραμμα.
Έτσι δεν έχουμε κατακόρυφη μετατόπιση στο σημείο που ανήκει στον X άξονα συμμετρίας όπως και δεν έχουμε οριζόντια μετατόπιση στο σημείο που ανήκει στον Y άξονα συμμετρίας.
Επίσης τονίζουμε ότι αν δεν έχουμε στήριξη και το αντικείμενο είναι ελεύθερο δεν έχουμε αρχικό δεδομένο για την μετατόπιση και επομένως NFIP = 0, με αποτέλεσμα το σώμα να παραμορφώνεται.
Στην περίπτωση που έχουμε στήριξη τότε για την περίπτωση της άρθρωσης δεν έχουμε ούτε κατακόρυφη, ούτε οριζόντια μετατόπιση στους κόμβους της άρθρωσης.
Ενώ στην περίπτωση που έχουμε κύλιση τότε έχουμε οριζόντια μετατόπιση αλλά όχι κατακόρυφη στους κόμβους της κύλισης.

Σ’ αυτές τις περιπτώσεις (άρθρωσης ή κύλισης) έχουμε αρχικό δεδομένο για την μετατόπιση και επομένως, NFIP διαφορετικό του 0.

10. Αρχικές τιμές μετατοπίσεων. Σ΄αυτή την γραμμή έχουμε τις μεταβλητές:
K, Px, Py, IFIPx, IFIPy ,όπου:
K: ο αριθμός του κόμβου στον οποίο προϋπολογίζεται η μετατόπιση
Px: οριζόντια μετατόπιση
Py: κατακόρυφη μετατόπιση
IFIPx: δείκτης οριακής συνθήκης. Παίρνει τις τιμές:
Μηδέν, αν προϋπολογίζεται η φόρτιση και,
Ένα αν προϋπολογίζεται η μετατόπιση στον άξονα χ
IFIPy: όμοια για τον κατακόρυφο άξονα y

11. Αρχικές τιμές φόρτισης (τάση/μονάδα μήκους). Εδώ έχουμε: K, Px, Py ,όπου:
K: ο αριθμός του κόμβου στον οποίο προϋπολογίζεται η φόρτιση
Px: οριζόντια φόρτιση
Py: κατακόρυφη φόρτιση

Όσον αφορά τα αποτελέσματα του προγράμματος Linear, αυτά εκτυπώνονται μέσω της υπορουτίνας output.
Πιο συγκεκριμένα αυτή η υπορουτίνα εκτυπώνει τα αποτελέσματα για τις οριακές μετατοπίσεις και έλξεις. Επιπρόσθετα υπολογίζονται και εκτυπώνονται οι οριακές τάσεις καθώς και οι μετατοπίσεις και τάσεις των εσωτερικών σημείων.

Τονίζουμε ότι οι οριακές τάσεις υπολογίζονται στην υπορουτίνα FENC και αυτές οι τάσεις είναι πολύ σημαντικές στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές.
Επίσης οι εσωτερικές μετατοπίσεις και τάσεις υπολογίζονται ολοκληρώνοντας πάνω στα οριακά στοιχεία χρησιμοποιώντας την υπορουτίνα FUNC. Συνολικά τα αποτελέσματα του προγράμματος αποτελούνται από:
(ι) Μετατοπίσεις και έλξεις στους οριακούς κόμβους.
(ιι) Μετατοπίσεις και τάσεις στους οριακούς κόμβους και στα εσωτερικά σημεία.
Εδώ τονίζουμε μία αλλαγή που κάναμε στο πρόγραμμα. Πιο συγκεκριμένα στη θέση της τάσης Sz, η οποία είναι πάντα μηδέν στα δισδιάστατα προβλήματα, υπολογίζουμε την ισοδύναμη τάση Sv η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$S_V \quad = \quad \sqrt{S_x{}^2 + S_y{}^2 - 3T_{xy}{}^2 - S_x S_y}$$

όπου, Sx, Sy: ορθές τάσεις και
Txy: διατμητική τάση

Στη συνέχεια ακολουθεί ένα απλό παράδειγμα στο οποίο φαίνονται αυτά που αναφέρθηκαν προηγουμένως σχετικά με το input και το output του προγράμματος Linear.
Πιο συγκεκριμένα έχουμε ένα τετραγωνικό επίπεδο πάνω στο οποίο ασκείται ομοιόμορφη διαξονική φόρτιση.
Λόγω της ύπαρξης συμμετρίας εξετάζουμε το πάνω δεξιά τεταρτημόριο του επιπέδου, δηλαδή εξετάζουμε το παρακάτω <u>σχήμα:</u>

κύλιση
κόμβοι
6 5 4 3 Px = 2 MPa/m
2 E = 5 psi
ν = 0.3
O (0,0) 1
2

Παρατηρούμε ακόμη ότι λόγω της κύλισης που υπάρχει δεν θα έχουμε κατακόρυφη μετατόπιση στους πάνω κόμβους (4, 5, 6).

Εφαρμόζωντας την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων θεωρούμε έξι εξωτερικούς κόμβους για την ανάλυση του προβλήματος, όπως φαίνεται και παραπάνω.

Τονίζουμε ότι στη γωνία θεωρούμε έναν διπλό κόμβο ο οποίος αποτελείται από τους κόμβους 3 και 4.
Επομένως για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε την ακόλουθη εισαγωγή δεδομένων.
1η γραμμή: SQUARE PLATE PROBLEM. (τίτλος του προβλήματος)

2η γραμμή: 0, 4, 6, 0, 1, 3, 5, 0.3 όπου,
INFB = 0, γιατί το σώμα είναι οριζόμενο.
NE = 4, γιατί έχουμε τέσσερα στοιχεία στο πρόβλημα.
NNEXT = 6, γιατί έχουμε έξι εξωτερικούς κόμβους.
NP = 0, δηλαδή δεν έχουμε εσωτερικά σημεία.
IPL = 1, γιατί έχουμε επίπεδη τάση.
IDSYM = 3, γιατί έχουμε επίπεδη συμμετρία ως προς X καιY.
E = 5, ο δείκτης του Young
PO = 0.3, ο λόγος του Poisson

3η: 1, 2., 0., 0, 1., 1. όπου,
K = 1, ο αριθμός του εξωτερικού κόμβου.
X(K) = 2., η τετμημένη του κόμβου 1
Y(K) = 0., η τεταγμένη του κόμβου 1
IDUP(K) = 0, γιατί ο πρώτος κόμβος δεν είναι διπλός. Μόνο στον τέταρτο κόμβο είναι διάφορο του μηδενός και ίσο με τον αριθμό του προηγούμενου διπλού κόμβου (3).
COEFX = 1., δηλαδή ο συντελεστής τον X είναι μονάδα.
COEFY = 1., δηλαδή ο συντελεστής του Y είναι μονάδα.
Συνεχίζοντας την 3η γραμμή όμοια και για τους υπόλοιπους κόμβους έχουμε:
2, 2., 1., 0, 1., 1.
3, 2., 2., 0, 1., 1. (πρώτος διπλός κόμβος, άρα έχουμε τις συντεταγμένες x,y και: IDUP = 0)
4, 0., 0., 3, 1., 1. (δεύτερος διπλός κόμβος, άρα οι συντεταγμένες είναι μηδέν, και: 1DUP = 3)
5, 1., 2., 0, 1., 1.
6, 0., 2., 0, 1., 1.

4η: 0
,όπου: NHOLES = 0, δηλαδή δεν υπάρχει καμία τρύπα στο πρόβλημα.

5η: 1,1 , όπου: κ= 1 ο αριθμός του κόμβου
ISUM(K) = 1, δηλαδή ο πρώτος κόμβος ανήκει στον οριζόντιο άξονα συμμετρίας.

Όμοια και για τους υπόλοιπους κόμβους:
2,0 (δεν ανήκει σε άξονα συμμετρίας, άρα: ISUM = 0)
3,0
4,0
5,0
6,2 (ανήκει στον Y άξονα συμμετρίας, άρα: ISUM = 2)

6η: 1, 1, 2 ,όπου: κ = 1 ο αριθμός του στοιχείου στο οποίο αναφερόμαστε
INC(K,1) = 1, δηλαδή ο πρώτος κόμβος που ορίζει το στοιχείο είναι ο κ = 1.
INC(K,2) = 2, δηλαδή ο δεύτερος κόμβος που ορίζει το στοιχείο είναι ο κ =2.
Όμοια και για τα υπόλοιπα στοιχεία:
2, 2, 3
3, 4, 5
4, 5, 6

7η: 3,3 ,όπου: NFIP = 3, δηλάδη τρείς κόμβοι προϋπολογίζουν την μετατόπιση (κόμβοι 4, 5, 6).
NDFIP=3, δηλαδή τρείς κόμβοι προϋπολογίζουν την φόρτιση (κόμβοι 1,2,3)

8η: 4, 0., 0., 0, 1 όπου, κ = 4, ο αριθμός του κόμβου στον οποίο προϋπολογίζεται η μετατόπιση.
Px= 0., αρχική οριζόντια μετατόπιση.
Py = 0., αρχική κατακόρυφη μετατόπιση.
IFIPx = 0, δηλαδή στον άξονα X προϋπολογίζεται η φόρτιση.
IFIPy = 1, δηλαδή προϋπολογίζεται η μετατόπιση στον άξονα Y.
Όμοια και για τους υπόλοιπους κόμβους:
5, 0., 0., 0, 1
6, 0., 0., 0, 1

9η: 1, 2., 0. όπου, κ = 1, ο αριθμός του κόμβου στον οποίο προϋπολογίζεται η φόρτιση.
Pχ = 2., η οριζόντια φόρτιση.

Py = 0., η κατακόρυφη φόρτιση.
Όμοια λοιπόν έχουμε και:
2, 2., 0.
3, 2., 0.

Αυτή λοιπόν είναι η εισαγωγή δεδομένων για το απλό παράδειγμα στο οποίο έχουμε ένα επίπεδο τετράγωνο στο οποίο ασκείται ομοιόμορφη αξονική φόρτιση. Έτσι το πρόγραμμα Linear μας δίνει τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(*) Παρατηρούμε στην εισαγωγή δεδομένων ότι αν η μεταβλητή είναι πραγματική τότε βάζουμε τελεία (.) μετά το νούμερο, ενώ αν είναι ακέραια δεν βάζουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥΣ

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, το πρόβλημα με το οποίο ασχολείται η παρούσα εργασία έχει τις ίδιες διαστάσεις με το πρόβλημα που παρουσιάστηκε στην εργασία των Erickson και Riley.

Έτσι θα μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθοδολογίας που θα ακολουθήσουμε (μέθοδος συνοριακών στοιχείων και βελτιστοποίηση με παραμετρική ανάλυση) με τα αποτελέσματα της φωτοελαστικής μεθόδου που χρησιμοποίησαν οι Erickson και Riley.

Το πρόβλημα επομένως, με το οποίο ασχολείται η παρούσα εργασία έχει την ακόλουθη γεωμετριά:

σχήμα 1

Δηλαδή έχει μήκος 14 in (356 mm), πλάτος w = 4.5 in (114 mm) και πάχος 1/4 in (6.4 mm).

Η διάμετρος c της κεντρικής οπής κυμαίνεται από 0.5in (12.7 mm) εώς 2.5 in (63,5 mm). Έτσι έχουμε αναλογίες c/w που κυμαίνονται από: 0.111 εώς 0.556.

Ακόμη, με d συμβολίζουμε τη διάμετρο της βοηθητικής οπής και α την απόσταση μεταξύ των κέντρων των οπών, τα οποία d και α παίρνουν διάφορες τιμές όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Επίσης στο αντικείμενο του σχήματος ασκείται ομοιόμορφη αξονική φόρτιση με Px= 50 MPa/m.

Γνωρίζουμε ακόμη ότι το μέτρο του Young, E = 1000.Psi και ο λόγος του Poisson v= 0.3.

Θεωρούμε στη μελέτη 4 ομάδες με λόγους: c/w = 0.222, c/w = 0.111, c/w = 0.389 και c/w = 0.556.

Για κάθε ομάδα, περιληπτικά, θα κάνουμε τα εξείς:

Αρχικά θεωρούμε ότι δεν έχουμε βοηθητικές οπές, οπότε εφαρμόζωντας τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων υπολογίζουμε τη μέγιστη ισοδύναμη τάση (Svo) στην κεντρική οπή.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι έχουμε βοηθητικές οπές οπότε πάλι εφαρμόζωντας τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων υπολογίζουμε τη μέγιστη ισοδύναμη τάση (Sv) και στην κεντρική και στην βοηθητική οπή. Μάλιστα στην περίπτωση που έχουμε βοηθητικές οπές θεωρούμε διάφορους συνδοιασμούς για τις τιμές των d και α και έτσι για κάθε λόγο d/α παίρνουμε τις τιμές των τάσεων που αναφέραμε.

Μπορούμε επομένως να κάνουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση:

Sv /Svo καμπύλη 1

καμπύλη 2

καμπύλη 3

καμπύλη 3'

καμπύλη 2' καμπύλη 1'

optimum d/α

όπου, Svo: η μέγιστη ισοδύναμη τάση στην κεντρική οπή στην περίπτωση όπου δεν έχουμε βοηθητικές οπές και,

Sv: η μέγιστη ισοδύναμη τάση στην κεντρική οπή για τις καμπύλες 1, 2, 3 ,και η μέγιστη ισοδύναμη τάση στην βοηθητική οπή για τις καμπύλες 1΄, 2΄, 3΄, για την περίπτωση που έχουμε βοηθητικές οπές.

Παρατηρούμε από την γραφική παράσταση ότι όταν ο λόγος d/a αυξάνει, ο λόγος Sv/Svo μειώνεται για την κεντρική οπή και αυξάνει για την βοηθητική οπή.

Έτσι μπορούμε από αυτή την γραφική παράσταση να υπολογίσουμε το βέλτιστο σημείο, δηλαδή τη βέλτιστη διάμετρό d της βοηθητικής οπής και τη βέλτιστη απόσταση α μεταξύ των κέντρων των οπών, στο οποίο έχουμε ελαχιστοποίηση της τάσης.

Πιο συγκεκριμένα το βέλτιστο σημείο είναι το ελάχιστο (minimum) της καμπύλης που περνάει από τα σημεία τομής των καμπυλών 1 με 1΄, 2 με 2΄και 3 με 3΄.

Την παραπάνω διαδικασία θα την εφαρμόσουμε και στις τέσσερις ομάδες ξεκινώντας για: c/w =0.222

Πιο συγκεκριμένα αρχικά θεωρούμε ότι δεν έχουμε βοηθητικές οπές, οπότε εφαρμόζωντας την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων υπολογίζουμε την μέγιστη τάση στην κεντρική οπή.

Τονίζουμε ότι λόγω της ύπαρξης συμμετρίας εξετάζουμε το πάνω - δεξιά τεταρτημόριο όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

7

10 9 8 7 6 5

4

3 2.25

11 12 2

26

27 1

0.5

σχήμα 2

Σύμφωνα με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων θεωρούμε 10 εξωτερικούς κόμβους στην περιφέρεια του ελάσματος και 17 στην περιφέρεια της οπής (σχήμα 2), έχοντας συνολικά 24 στοιχεία. Οπότε η εισαγωγή δεδομένων για την περίπτωση αυτή όπου η διάμετρος της κεντρικής οπής είναι c = 1.0, παρουσιάζεται στην σελίδα 86. Προκύπτει επομένως η μέγιστη ισοδύναμη τάση στην κεντρική οπή, για την περίπτωση όπου δεν έχουμε βοηθητικές οπές και για λόγο c/w = 0.222, ότι είναι ίση με: Svo = max τάση στον 11ο κόμβο = 156.4813.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι έχουμε βοηθητικές οπές οπότε εφαρμόζουμε πάλι την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων στο πάνω - δεξιά τεταρτημόριο. (σχήμα 3)

7.

10 9 8 7 6

5

4

11 3 2.25

12 2

26 29 59 1

27 28 60

0.5

α d/2

σχήμα3

Θεωρούμε πάλι 10 εξωτερικούς κόμβου, 17 κόμβους στην κεντρική οπή και 33 κόμβους στην βοηθητική οπή, έχοντας συνολικά 56 στοιχεία.
Τονίζουμε ότι στις γωνίες θεωρούμε διπλούς κόμβους όπως είναι οι κόμβοι 5 και 6.
Ακόμη για τις μεταβλητές d και α θεωρούμε διάφορους συνδυασμούς τιμών όπως θα δούμε στη συνέχεια, έτσι ώστε να προκύψουν οι καμπύλες 1, 2, 3 και 1΄, 2΄, 3΄ της γραφικής παράστασης που αναφέραμε προηγουμένως.
Πιο συγκεκριμένα για τις τιμές των μεταβλητών d και α θεωρούμε τρείς αποστάσεις α = 1.12, 1.37, 1.62 και για κάθε μια από αυτές τις τιμές θεωρούμε πέντε διαμέτρους βοηθητικής οπής d = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0. Έτσι για κάθε καμπύλη της γραφικής παράστασης ,όπου σε κάθε καμπύλη αντιστοιχεί και μία τιμή α, έχουμε πέντε σημεία (Sv/Svo, d/α).
Η εισαγωγή δεδομένων για την περίπτωση όπου c = 1.0, α = 1.12 και d = 0.5 παρουσιάζεται στην σελίδα 88. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις η εισαγωγή δεδομένων είναι ακριβώς ίδια αλλάζοντας μόνο κάθε φορά την απόσταση α και την διάμετρο d στην γραμμή η οποία διαβάζει τα χαρακτηριστικά της βοηθητικής οπής.

Αναλυτικότερα για κάθε καμπύλη παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

<u>Καμπύλες για την κεντρική οπή (Sv = max τάση στην κεντρική οπή)</u>

<u>Καμπύλη 1 για α = 1.12:</u>
Βρείκαμε προηγουμένως ότι η μέγιστη τάση Svo στην κεντρική οπή, χωρίς να έχουμε βοηθητικές οπές, ότι είναι ιση με: Svo = Sv(11) = 156.4813 .
Έτσι τώρα για α = 1.12 και d = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 και 1.0 προκύπτουν τα εξείς 5 σημεία:
Για: α = 1.12 και d = 0.5(d/α = 0.4464), προκύπτει ότι η μέγιστη τάση στην κεντρική οπή είναι: Sv = Sv(11) = 148.3975
και ο λόγος Sv/Svo = 148.3975/156.4813 = 0.9483

Για: α = 1.12 και d = 0.6 (d/α = 0,5357), προκύπτει ότι η μέγιστη τάση Sv = 144.3569 και ο λόγος: Sv/Svo = 0.9225

Για: α = 1.12 και d = 0.7 (d/α = 0.625), προκύπτει ότι η max ταση: Sv = 139.273 και ο λόγος: Sv/Svo = 0.89

Για: α = 1.12 και d = 0.8 (d/α = 0.7142), προκύπτει ότι η max τάση: Sv = 133.0655 και ο λόγος: Sv/Svo = 0.85036

Και για α = 1.12 και d = 1.0 (d/α = 0.8928), προκύπτει ότι η max τάση: Sv = 117.2 και ο λόγος: Sv/Svo = 0.7489

Όμοια και,

Καμπύλη 2 για α = 1.37

Έχουμε ότι:

Για: α = 1.37 καιd = 0.5 (d/α = 0.36496), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 147.9321 και Sv/Svo = 0.94536

Για: α =1.37 και d = 0.6 (d/α = 0.4379), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 144.0331 και Sv/Svo = 0.9204

Για: α = 1.37 και d = 0.7 (d/α = 0.5109), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 139.3286 και Sv/Svo = 0.8903

Για: α = 1.37 και d = 0.8 (d/α = 0.5839), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 133.7834 και Sv/Svo = 0.8549

Για: α = 1.37 και d = 1.0 (d/α = 0.7299), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 120.0764 και Sv/Svo = 0.7673

Και, καμπύλη 3 για α = 1.62.

Βρίσκουμε σ' αυτή την περίπτωση ότι:

Για: α = 1.62 και d = 0.5 (d/α = 0.3086), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 148.4631 και Sv/Svo = 0.9487

Για: α = 1.62 και d = 0.6 (d/α = 0.3703), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 144.9039 και Sv/Svo = 0.926

Για: α = 1.62 και d = 0.7 (d/α = 0.432), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 140.675 και Sv/Svo = 0.8989

Για: α = 1.62 και d = 0.8 (d/α = 0.4938), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 135.7686 και Sv/Svo = 0.8676

Για: α = 1.62 και d = 1.0 (d/α = 0.6172), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 123.8995 και Sv/Svo = 0.7917

Στη συνέχεια υπολογίζουμε πέντε σημεία για κάθε μία από τις καμπύλες που αντιστοιχούν στην βοηθητική οπή, δηλαδή έχουμε:

Καμπύλες για την βοηθητική οπή (Sv = max τάση στην βοηθητική οπή)

Καμπύλη 1΄ για α = 1.12

Θεωρώντας πάλι σαν διαμέτρους βοηθητικής οπής d = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 και 1.0 έχουμε τα εξείς 5 σημεία:

Για: α = 1.12 και d = 0.5 (d/α = 0.4464), προκύπτει ότι η max τάση Sv = Sv(44) = 103.9971 και ο λόγος Sv / Svo = 0.6645

Για: α = 1.12 και d = 0.6 (d/α = 0.5357), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 110.0761 και ο λόγος Sv/Svo = 0.7034

Για: α = 1.12 και d = 0.7 (d/α = 0.625), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 115.867 και Sv/Svo = 0.7404

Για: α = 1.12 και d = 0.8 (d/α = 0.7142), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 121.5866 και Sv/Svo = 0.777

Για: α = 1.12 και d = 1.0 (d/α = 0.8928), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 131.9615 και Sv/Svo = 0.8433

<u>Καμπύλη 2΄ για α = 1.37</u>

Έχουμε ότι:

Για: α = 1.37 και d = 0.5 (d/α = 0.36496), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 114.6894 και Sv/Svo = 0.7329

Για: α = 1.37 και d = 0.6 (d/α = 0.4379), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 118.5894 και Sv/Svo = 0.7578

Για: α = 1.37 και d = 0.7 (d/α = 0.5109), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 122.6636 και Sv/Svo = 0.7838

Για: α = 1.37 και d = 0.8 (d/α = 0.5839), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 126.7602 και Sv/Svo = 0.81

Για: α = 1.37 και d = 1.0 (d/α = 0.7299), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 134.5836 και Sv/Svo = 0.86

Τέλος έχουμε:

<u>Καμπύλη 3' για α=1.62:</u>

Για: α = 1.62 και d = 0.5 (d/α = 0.3086), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 122.946 και Sv/Svo = 0.7856

Για: α = 1.62 και d = 0.6 (d/α = 0.3703), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 125.5109 και Sv/Svo = 0.802

Για: α = 1.62 και d = 0.7 (d/α = 0.432), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 128.321 και Sv/Svo = 0.82

Για: α = 1.62 και d = 0.8 (d/α = 0.4938), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 131.2989 και Sv/Svo = 0.839

Για: α = 1.62 και d = 1.0 (d/α = 0.6172), προκύπτει ότι η max τάση Sv = 137.4897 και Sv/Svo = 0.8786

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας 1 (σελ.83).

Όπως αναφέρθηκε και αρχικά παρατηρούμε ότι όταν ο λόγος d/α μεγαλώνει, ο λόγος Sv/Svo μειώνεται για την κεντρική οπή και αυξάνεται για την βοηθητική οπή.

Έτσι το βέλτιστο σημείο προκύπτει από το minimum της καμπύλης που περνάει από τα σημεία τομής των καμπυλών 1-1΄, 2-2΄ και 3-3΄. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα γραφικών HARVARD GRAPHICS προκύπτει η ακόλουθη γραφική παράσταση για λόγο c/w = 0.222 (σελ.84).

Τα σημεία τομής είναι για τις καμπύλες 1 - 1΄ το (0.8, 0.8), για τις καμπύλες 2 - 2΄ το (0.63, 0.82) και τις καμπύλες 3 - 3΄ το (0.53, 0.84).

Έτσι το βέλτιστο (optimum) σημείο στο οποίο έχουμε ελαχιστοποίηση των τάσεων είναι το minimum της καμπύλης που ενώνει τα παραπάνω σημεία και αντιστοιχεί στον λόγο d/α = 0.68.

Βρείκαμε επομένως τον βέλτιστο λόγο (d/α)opt = 0.68 για την πρώτη ομάδα c/w = 0.222, κάνωντας τις καμπύλες για τις τιμές του ακόλουθου πίνακα:

πλάτος w (in)	διάμετρος κεντρικής οπής c (in)	απόσταση α (in)
4.5	1.0	1.12
4.5	1.0	1.37
4.5	1.0	1.62

Ακόμη παρατηρούμε από την γραφική παράσταση ότι από το βέλτιστο σημείο (O.P.) περνάει μία καμπύλη, η οποία είναι μεταξύ των καμπυλών 1 (α = 1.12) και 2 (α = 1.37).

Σε αυτή την καμπύλη αντιστοιχεί λόγος α/w που είναι περίπου ίσος με την μέση τιμή των αντίστοιχων λόγων των καμπυλών 1 και 2. Δηλαδή:

$(\alpha/w)_{καμπύλης1}=1.12/4.5$ και $(\alpha/w)_{καμπύλης2}=1.37/4.5$

Οπότε:

$$(\alpha/w)_{καμπύλης\ o.p}=((1.12/4.5)+(1.37/4.5))/2=$$
$$=(0.2488+0.3044)/2 = 0.274$$

Έτσι για πλάτος w = 4.5, έχουμε ότι η βέτιστη απόσταση α μεταξύ των κέντρων των οπών ισούται με: $(\alpha)\ o.p. = 4.5 \times 0.274$

,δηλαδή: $(\alpha)\ o.p. = 1.233$

Και από το λόγο $(d/\alpha)\ o.p. = 0.68$,έχουμε ότι:

$$(d) o.p. = 0.68 * 1.233$$

δηλαδή: $(d) o.p. = 0.8384$.

Όμοια στη συνέχεια υπολογίζουμε το βέλτιστο σημείο (o.p.) και για την δεύτερη ομάδα στην οποία έχουμε λόγο c/w = 0.111.

Πιο συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές του ακόλουθου πίνακα:

πλάτος w	διάμετρος κεντρικής οπής c	απόσταση α
4.5	0.4995	1.12
4.5	0.4995	1.37
4.5	0.4995	1.62

Όσον αφορά την διάμετρο της βοηθητικής οπής d, αυτή παίρνει τιμές 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 και 1.0

Ακολουθόντας παρόμοια διαδικασία με αυτή στην πρώτη ομάδα, αρχικά θεωρούμε ότι δεν έχουμε βοηθητικές οπές και εφαρμόζουμε την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. (σχήμα 4)

7

10 9 8 7 6 5

4

3 2.25

11 2

27 1

0.249

σχήμα 4

Όπως και προηγουμένως, θεωρούμε 10 εξωτερικούς κόμβους και 17 κόμβους στην περιφέρεια της οπής, έχοντας συνολικά 24 στοιχεία.

Η εισαγωγή δεδομένων γι'αυτή την περίπτωση είναι παρόμοια με την εισαγωγή δεδομένων στην σελίδα 86, με την μόνη διαφορά ότι η διάμετρος c της κεντρικής οπής είναι τώρα ίση με 0.4995 (ακτίνα = c/2 = 0.24975).

Έτσι βρίσκουμε ότι η μέγιστη ισοδύναμη τάση στην κεντρική οπή ισούται με Svo = max τάση στον 11ο κόμβο = 150.471.

Συνεχίζοντας θεωρούμε ότι έχουμε βοηθητικές οπές όπως φαίνεται στο σχήμα 5 .

7

10 9 8 7 6

5

4
3 2.25
11 12 2
26 29 59 1
27 28 60
0.249
α d/2

σχήμα 5

Οπότε εφαρμόζουμε την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων θεωρόντας τους κόμβους που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, έχοντας συνολικά 56 στοιχεία.

Για τις μεταβλητές d και α θεωρούμε τρες αποστάσεις α = 1.12, 1.37, 1.62 και για κάθε μία από αυτές τις τιμές θεωρούμε πέντε διαμέτρους βοηθητικής οπής d = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, και 1.0.

Η εισαγωγή δεδομένων και γι' αυτή την περίπτωση είναι παρόμοια με την εισαγωγή δεδομένων της σελίδας 88, με τη μόνη διαφορά ότι θεωρούμε διάμετρο κεντρικής οπής c = 0.4995 και κάθε φορά αλλάζουμε την διάμετρο d και την απόσταση α στη γραμμή η οποία διαβάζει τα χαρακτηριστικά της βοηθητικής οπής.

Έτσι για κάθε καμπύλη 1(α = 1.12), 2(α = 1.37), 3(α = 1.62) και 1΄(α =1.12), 2΄(α = 1.37) και 3΄(α = 1.62) προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα όπως φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα - 2.(σελ.94)

Τονίζουμε ξανά ότι στις καμπύλες 1, 2 και 3 ,όπου Sv είναι η μέγιστη τάση στην κεντρική οπή ενώ στις καμπύλες 1΄, 2΄και 3΄ ,όπου Sv είναι η μέγιστη τάση στην βοηθητική οπή.

Έτσι από τα στοιχεία του πίνακα 2 προκύπτει η ακόλουθη γραφική παράσταση (σελ.96) για την ομάδα c/w =0.111.

Τα σημεία τομής είναι για τις καμπύλες 1 - 1΄ το (0.4, 0.88), για τις καμπύλες 2 -2΄ το (0.33, 0.9) και για τις καμπύλες 3 -3΄ το (0.28, 0.93).

Άρα από την καμπύλη που ενώνει τα παραπάνω σημεία τομής προκύπτει ότι το βέλτιστο σημείο (o.p.) στο οποίο έχουμε ελαχιστοποίηση των τάσεων, είναι το ελάχιστο σημείο της στο οποίο και αντιστοχεί λόγος (d/α)o.p. = 0.5

Ακομή το βέλτιστο σημείο (o.p.) είναι λίγο πιο πάνω από την καμπύλη 1 στην οποία αντιστοιχεί λόγος α/w = 0.24.

Στην καμπύλη 2 έχουμε λόγο α/w = 0.3, και η καμπύλη 2 είναι πιο κάτω από την 1.

Άρα στην καμπύλη που περνάει από το βέλτιστο σημείο (o.p.) αντιστοιχεί λόγος (α/w)o.p. = 0.2.
Επομένως για πλάτος w = 4.5, έχουμε ότι η βέλτιστη απόσταση α μεταξύ των κέντρων των οπών ισούται με:
(α)o.p. = 4.5 * 0.2
δηλαδή :(α)o.p. = 0.9

Και από τον λόγο (d/α)o.p. = 0.5 ,
συνεπάγεται ότι: (d)o.p. = 0.5 *0.9
,δηλαδή: (d)o.p. = 0.45

Συνεχίζουμε παρακάτω με την τρίτη ομάδα στην οποία αντιστοιχεί λόγος c/w = 0.389
Γι' αυτή την περίπτωση έχουμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

πλάτος	διάμετρος κεντρικής οπής c	απόσταση α
4.5	1.7505	1.6
4.5	1.7505	2
4.5	1.7505	2.4

Όσον αφορά την διάμετρο της βοηθητικής οπής d αυτή παίρνει τιμές 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 και 1.0 για α = 1.6 και α = 2., καθώς και d = 2., 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 για α = 2.4.

Αρχικά θεωρούμε ότι δεν έχουμε βοηθητικές οπές οπότε εφαρμόζωντας την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων υπολογίζουμε την μέγιστη ισοδύναμη τάση στην κεντρική οπή .(σχήμα 6)

7
10 9 8 7 6 5
4
11 3 2.25
2
26
27 1
0.875

σχήμα 6

Έχοντας επομένως τους κόμβους του σχήματος και συνολικά 24 στοιχεία, εισάγουμε τα δεδομένα στο πρόγραμμα Linear.

Η εισαγωγή δεδομένων είναι παρόμοια με αυτή στις προηγούμενες περιπτώσεις με τη μόνη διαφορά ότι βάζουμε για διάμετρο κεντρικής οπής c = 1.7505 (ακτίνα = 0.875).

Υπολογίζουμε λοιπόν την μέγιστη τάση στην κεντρική οπή, η οποία ισούται με Svo = max τάση στον 11ο κόμβο = 176.3954.

Παρατηρούμε, συγκρίνοντας με τις προηγούμενες ομάδες ότι καθώς η διάμετρος c της κεντρικής οπής μεγαλώνει η μέγιστη τάση Svo σ' αυτήν αυξάνει.

Προχωρόντας παρακάτω έχουμε προσθήκη βοηθητικών οπών όπως φαίνεται στο σχήμα 7.

7
10 9 8 7 6
5
4
11 12 3 2.25

2

26 29 59

27 28 60 1

0.875

α d/2

σχήμα 7

Εφαρμόζουμε λοιπόν την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων έχοντας 56 στοιχεία όπως φαίνεται και παραπάνω.

Για τις μεταβλητές d και α θεωρούμε τρείς αποστάσεις α = 1.6, 2., 2.4 και για α = 1.6 και 2. θεωρούμε d = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, και 1.0 ενώ για α = 2.4 έχουμε d = 2, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5.

Η εισαγωγή δεδομένων στο πρόγραμμα είναι παρόμοια με αυτή στις προηγούμενες περιπτώσεις με τη μόνη διαφορά ότι έχουμε διάμετρο κεντρικής οπής c = 1.7505 (ακτίνα c/2 = 0.875).

Έτσι αλλάζοντας κάθε φορά τη διάμετρο d της βοηθητικής οπής και την απόσταση των κέντρων α στη γραμμή που διαβάζει τα χαρακτηριστικά της βοηθητικής οπής, προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα (πίνακας 3).(σελ.100)

Τονίζουμε ότι σε κάθε απόσταση α αντιστοιχεί και μία καμπύλη. Δηλαδή στις καμπύλες 1 και 1΄ το α = 1.6, στις 2 και 2΄ το α = 2. και στις καμπύλες 3 και 3΄ το α = 2.4.

Από τα στοιχεία του προηγούμενου πίνακα προκύπτει η γραφική παράσταση της σελίδας 102 (c/w = 0.389).

Πιο συγκεκριμένα τα σημεία τομής των καμπυλών είναι για τις καμπύλες 1 -1΄ το (1, 0.81), για τις 2 -2΄ το (0.75, 0.8) και για τις καμπύλες 3 - 3΄ το (0.7, 0.82).

Άρα το βέλτιστο σημείο (o.p.) είναι το ελάχιστο της καμπύλης που ενώνει τα παραπάνω σημεία, και εκεί αντιστοιχεί λόγος (d/α)o.p. = 0.875.

Επίσης η καμπύλη που περνάει από το o.p. είναι μεταξύ των καμπυλών 1 (α = 1.6) και2 (α=2.).

Επομένως σε αυτή την καμπύλη αντιστοιχεί λόγος α/w που είναι περίπου ίσος με την μέση τιμή των αντίστοιχων λόγων των καμπυλών 1 και 2.

Δηλαδή:

(α/w) καμπύλης1 = 1.6/4.5 και (α/w)καμπύλης2 = 2/4.5

Οπότε: (α/w) καμπύλης o.p. = (1.6/4.5 + 2/4.5)/2
οπότε: (α/w) o.p. = (0.3555 + 0.4444)/2 = 0.4

Έτσι για το πλάτος w = 4.5, έχουμε ότι η βέλτιστη απόσταση α μεταξύ των κέντρων των οπών ισούται με: (α) o.p. = 4.5 * 0.4
δηλαδή: (α)o.p. = 1.8

Και από τον λόγο: (d/α)o.p. = 0.875
συνεπάγεται: (d)o.p. = 0.875 *1.8
δηλαδή: (d)o.p. = 1.575

Τέλος, έχουμε την όμαδα με λόγο c/w = 0.556 στην οποία και χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

πλάτος	διάμετρος κεντρικής οπής c	απόσταση α
4.5	2.502	2.51
4.5	2.502	2.71
4.5	2.502	2.91

Και για διάμετρο βοηθητικής οπής θεωρούμε τις τιμές d = 2, 2.1, 2.2, 2.25 και 2.3 σε κάθε τιμή της απόστασης α.
Μέ αυτό τον τρόπο έχουμε πέντε σημεία για κάθε καμπύλη έτσι ώστε να μπορούμε να τις σχεδιάσουμε. Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με προηγουμένως, αρχικά δεν έχουμε βοηθητικές οπές όπως φαίνεται στο ακόλουθο <u>σχήμα 8</u>.

7

10   9   8   7   6   5

11   12   4

3 2.25
2
26
27 1
1.251

σχήμα 8

Έτσι έχοντας τώρα μεγαλύτερη κεντρική οπή με διάμετρο c = 2.502 (ακτίνα c/2 = 1.251), τρέχουμε το πρόγραμμα Linear και βρίσκουμε την μέγιστη τάση στην οπή. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι: Svo = max τάση στον 11ο κόμβο = 219.6187
Παρατηρούμε ότι σ' αυτή την ομάδα έχουμε την μεγαλύτερη τάση, γεγονός αναμενόμενο μια και έχουμε την μεγαλύτερη κεντρική διάμετρο c . Συνεχίζοντας κανονικά την διαδικασία έχουμε το σχήμα 9,στο οποίο έχουμε προσθέσει βοηθητικές οπές.

7
10 9 8 7 6
5
11 12 4
3 2.25
2
26 29 59
27 28 60 1
1.251
α d/2

σχήμα 9

Επομένως εφαρμόζουμε και εδώ την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων όπου έχουμε τις ακόλουθες τιμές μεταβλητών. Για την απόσταση α θεωρούμε τις τιμές α = 2.51, 2.71 και 2.91 ενώ για την διάμετρο d έχουμε: d = 2, 2.1, 2.2, 2.25 και 2.3.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι κατά την επιλογή των τιμών των μεταβλητών d και α πρέπει να προσέξουμε έτσι ώστε να μην "πέσει" η βοηθητική οπή μέσα στην κεντρική οπή καθώς και να μην υπερβούμε το μήκος του ελάσματος.
Έτσι τρέχοντας το πρόγραμμα Linear με τις παραπάνω τιμές που αναφέραμε προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας 4, αποτελεσμάτων.(σελ.105)
Εδώ έχουμε τις καμπύλες 1, 1΄με α = 2.51, τις καμπύλες 2,2΄ με α =2.71 και τις 3,3΄ με α = 2.91.
Ακόμη όπου Sv είναι η μέγιστη τάση στην κεντρικη οπή για τις καμπύλες 1, 2, 3 και η μέγιστη τάση στην βοηθητική οπή για τις καμπύλες 1΄, 2΄, 3΄.

Και από τα στοιχεία του προηγούμενου πίνακα προκύπτει η ακόλουθη γραφική παράσταση για λόγο c/w = 0.556.(σελ.107)
Εδώ τα σημεία τομής είναι για τις καμπύλες 1 - 1΄ το (0.94, 0.8), για τις καμπύλες 2 - 2΄το (0.855, 0.785) και για τις καμπύλες 3 -3΄είναι το σημείο (0.79, 0.81).
Άρα από το ελάχιστο της καμπύλης που ενώνει τα παραπάνω σημεία προκύπτει ότι:
(d/α)o.p. = 0.87
Ακόμη το βέλτιστο σημείο (o.p.) είναι μεταξύ των καμπυλών 1 (α = 2.51) και 2(α = 2.71). Επομένως από το βέλτιστο σημείο περνάει καμπύλη στην οποία αντιστοιχεί λόγος α/w που είναι περίπου ίσος με την μέση τιμή των αντίστοιχων λόγων των καμπυλών 1 και 2.
Δηλαδή:
(α/w) καμπύλης1 = 2.51/4.5 και (α/w) καμπύλης2 = 2.71/4.5
Οπότε: (α/w) καμπύλης o.p. = (2.51/4.5 + 2.71/4.5)/2 = 0.58

Και για πλάτος w = 4.5 έχουμε ότι η βέλτιστη απόσταση α μεταξύ των κέντρων των οπών ισούται με:
(α)o.p. = 4.5 * 0.58
,δηλαδή: (α)o.p. = 2.61

Τέλος, από τον λόγο (d/α)o.p. = 0.87 ,συνεπάγεται ότι:
(d)o.p. = 0.87 * 2.61

,δηλαδή: (d)o.p. = 2.27

Αφού υπολογίσαμε την βέλτιστη διάμετρο d βοηθητικής οπής και την βέλτιστη απόσταση α μεταξύ των κέντρων των οπών και για τις τέσσερις ομάδες (c/w = 0.222, 0.111, 0.389 και 0.556), στη συνέχεια θα κάνουμε ορισμένες γραφικές παραστάσεις που έχουν σχέση με τις παραπάνω βέλτιστες τιμές.

Προηγουμένως βρείκαμε και για τις τέσσερις ομάδες που εξετάσαμε τις ακόλουθες βέλτιστες τιμές των διαμέτρων di, όπου, i = 1, 2, 3, 4 ο αριθμός της ομάδας που μελετήσαμε.

i	c/w	(di) o.ρ.
1	0.222	0.8384
2	0.111	0.45
3	0.389	1.575
4	0.556	2.27

Διαιρώντας αυτές τις τιμές (di)o.p. με το πλάτος w = 4.5 βρίσκουμε τις εξείς τιμές:

<u>πίνακας 5</u>

i	(di/w)o.p.	c/w
1	0.186	0.222
2	0.1	0.111
3	0.35	0.389
4	0.504	0.556

Επομένως μπορούμε να κάνουμε την γραφική παράσταση του λόγου (d/w)o.p. συναρτήση του λόγου c/w, όπου c: η διάμετρος της κεντρικής οπής και w: το πλάτος του ελάσματος.
Έτσι προκύπτει η ακόλουθη γραφική παράσταση της σελίδας 109. Από αυτήν συμπεραίνουμε ότι καθώς ο λόγος c/w αυξάνει και επομένως η διάμετρος c της κεντρικής οπής αυξάνει αφού το πλάτος w είναι σταθερό, ο λόγος d/w στο βέλτιστο σημείο αυξάνει ,δηλαδή η βέλτιστη διάμετρος d της βοηθητικής οπής που απαιτείται αυξάνεται καθώς μεγαλώνει η διάμετρος c της κεντρικής οπής.

Επίσης εκτός από τις βέλτιστες διαμέτρους di (i = 1,2,3,4) υπολογίσαμε προηγουμένως και τις βέλτιστες αποστάσεις αi (i =1,2,3,4) μεταξύ των κέντρων των οπών, οι οποίες είναι οι εξείς:

i	(αi)o.p.	c/w
1	1.233	0.222
2	0.9	0.111
3	1.8	0.389
4	2.61	0.556

Διαιρώντας τις τιμές (αi)o.p. με το πλάτος w = 4.5 έχουμε τις ακόλουθες τιμές:

πίνακας 6

i	(αi/w) o.p.	c/w
1	0.274	0.222
2	0.2	0.111
3	0.4	0.389
4	0.58	0.556

Έτσι μπορούμε να κάνουμε την γραφική παράσταση του λόγου (α/w)o.p. συναρτήση του λόγου c/w.
Παίρνουμε επομένως την γραφική παράσταση της ακόλουθης σελίδας.(σελ.111)
Από αυτήν συμπεραίνουμε κάτι ανάλογο με προηγουμένως, δηλαδή καθώς ο λόγος c/w αυξάνει και άρα η διάμετρος c της κεντρικής οπής αυξάνει οφού το πλάτος w είναι σταθερό, ο βέλτιστος λόγος α/w αυξάνεται δηλαδή η βέλτιστη απόσταση α

μεταξύ των κέντρων των οπών αυξάνεται με τον τρόπο που φαίνεται στην ακόλουθη γραφική παράσταση.

Τέλος, ορίζουμε τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων για το πρόβλημα που εξετάζουμε ως εξής:

SCF = (μέγιστη τάση στην κεντρική οπή/εξωτερική φόρτιση) =
= Sv(11)/Svoo= Sv(11)/50

Αρχικά θεωρούμε ότι δεν έχουμε βοηθητικές οπές οπότε για κάθε ομάδα υπολογίζουμε τον αντίστοιχο συντελεστή (SCF)i, όπου i = 1, 2, 3, 4.
Έτσι έχουμε:

<u>πίνακας 7</u>

i	c/w	Svi(11)	SCFi = Svi(11)/50
1	0.222	156.4813	3.129
2	0.111	150.471	3.
3	0.389	176.3954	3.527
4	0.556	219.6187	4.392

Όπου Svi(11), είναι η μέγιστη ισοδύναμη τάση στην κεντρική οπή (11ος κόμβος) για κάθε ομάδα i = 1, 2, 3, 4, χωρίς να έχουμε βοηθητικές οπές.
Αυτή η τάση υπολογίζεται με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων όπως είδαμε αναλυτικά προηγουμένως (σχήμα 10).

7

10 9 8 7 6 5

11 12 4

3 2.25

2
26
27 1
c/2

σχήμα 10

Όπου: c = 1.0, για την πρώτη ομάδα (i = 1)
c = 0.4995, για την δεύτερη ομάδα (i = 2)
c = 1.7505, για την τρίτη ομάδα (i = 3)
c = 2.502, για την τέταρτη ομάδα (i = 4)

Στην συνέχεια, θεωρούμε ότι έχουμε βοηθητικές οπές, οπότε γι' αυτή την περίπτωση υπολογίζουμε σε κάθε ομάδα τον αντίστοιχο συντελεστή SCFi, με i = 1, 2, 3, 4.
Πάλι έχουμε ότι: SCFi = Svi(11)/50 ,όπου η μέγιστη ισοδύναμη τάση Svi(11) υπολογίζεται με την μέθοδο των συνοριακών στοιχείων.
Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο σχήμα:

7
10 9 8 7 6
5
11 12 4
3 2.25
2
26 29 59
27 28 60 1
c/2
(αi)o.p (di)o.p/2

σχήμα 11

,όπου: c = 1.0, για την πρώτη ομάδα (i =1)
c = 0.4995, για την δεύτερη ομάδα (i = 2)
c = 1.7505, για την τρίτη ομάδα (i = 3)
c = 2.502, για την τέταρτη ομάδα (i = 4)

και: (αi) o.p. = 1.233, για i = 1
(αi) o.p. = 0.9, για i = 2
(αi) o.p. = 1.8, για i = 3
(αi) o.p. = 2.61, για i = 4

και: (di) o.p. = 0.8384, για i = 1
(di) o.p. = 0.45, για i = 2
(di) o.p. = 1.575 για i =3
(di) o.p. = 2.27, για i =4

Επομένως βρίσκουμε για κάθε ομάδα τον αντίστοιχο συντελεστή (SCF)i (i= 1, 2, 3, 4), όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

πίνακας 8

i	c/w	Svi (11)	SCFi = Svi(11)/50
1	0.222	130.615	2.612
2	0.111	125.496	2.509
3	0.389	143.4092	2.868
4	0.556	178.5155	3.5703

Τα αποτελέσματα των πινάκων 7 και 8 παριστάνονται γραφικά όπως φαίνεται στην ακόλουθη γραφική παράσταση της επόμενης σελίδας.
Από αυτήν συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχουν βοηθητικές οπές έχουμε μεγαλύτερο συντλεστή συγκέντρωσης τάσεων SCF, σε σύγκριση με την τιμή του συντελεστή για την περίπτωση που έχουμε βοηθητικές οπές.
Φαίνεται δηλαδή η μείωση της συγκέντρωσης τάσεων που προκαλεί η προσθήκη βοηθητικών οπών στο έλασμα.

Μάλιστα η μέγιστη μείωση της συγκέντρωσης τάσεων επιτυγχάνεται στην τέταρτη ομάδα (i =4), όπου ο SCF από 4.392 παίρνει την τιμή 3.5703 δηλαδή έχουμε μείωση κατά: 0.8217 (ποσοστό 21%).
Αντίθετα η ελάχιστη μείωση της συγκέντρωσης τάσεων επιτυγχάνεται στην δεύτερη ομάδα (i = 2), όπου ο SCF από 3. παίρνει την τιμή 2.509, δηλαδή έχουμε μείωση κατά 0.491 (ποσοστό 13%). Συμπεραίνουμε επομένως ότι όσο η διάμετρος c της κεντρικής οπής αυξάνει τόσο μεγαλύτερη μείωση προκαλείται στον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων με την βέλτιστη προσθήκη βοηθητικών οπών. Τα αποτελέσματα (output) του προγράμματος Linear στα οποία έχουμε τις μετατοπίσεις και τις τάσεις για τη περίπτωση της δεύτερης ομάδας (i = 2), και την περίπτωση της τέταρτης ομάδας (i =

4), πρώτα χώρις βοηθητικές οπές και στη συνέχεια με την βέλτιστη τοποθέτηση βοηθητικών οπών, παρουσιάζονται στο παράρτημα Π2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΛΥΣΗΣ

Από τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου συμπεραίνουμε ότι οι επιδράσεις της συγκέντρωσης τάσεων μιας κεντρικής κυκλικής οπής σ' ένα μονοαξονικά φορτισμένο έλασμα, μπορούν να μειωθούν σημαντικά εσάγοντας βοηθητικές οπές σε κάθε πλευρά της κεντρικής οπής.
Καταλαβαίνουμε επομένως ότι μία τέτοια μείωση στην συγκέντρωση τάσεων έχει σημαντικά αποτελέσματα όσον αφορά την αύξηση της διάρκειας ζωής του ελάσματος.

Ακόμη τα αποτελέσματα αυτά που προέκυψαν με τη μεθοδολογία που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (μέθοδος συνοριακών στοιχείων και βελτιστοποίηση με παραμετρική ανάλυση), συμφωνούν απολύτως με τα αποτελέσματα της φωτοελαστικής μεθόδου που χρησιμοποίησαν οι Erickson και Riley στην εργασία τους. Εδώ τονίζουμε ότι χρησιμοποιήσαμε τα ίδια μοντέλα με αυτά που χρησιμοποίησαν οι Erickson και Riley.
Συμπεραίνουμε επομένως ότι μεθοδολογία που ακολουθήσαμε είναι αξιόπιστη και μπορεί να χρησιμοποιηθεί γενικότερα για να πετύχουμε τον βέλτιστο τρόπο απομείωσης της συγκέντρωσης τάσεων σε επίπεδα στοιχεία μηχανών υπό την επίδραση αξονικής φόρτισης.

Ακόμη στη μεθοδολογία που ακολουθήσαμε χρσιμοποιήθηκαν γραμμικά στοιχεία (γραμμικό πρόγραμμα Linear) για την ανάλυση των τάσεων.
Εκτός από τα γραμμικά στοιχεία υπάρχουν και τα δευτέρου βαθμού στοιχεία (quadratic) καθώς και η πιο απλή περίπτωση τυποποίησης της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων που είναι τα σταθερά στοιχεία.
Μάλιστα, τα δευτέρου βαθμού στοιχεία (quadratic) παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον από την άποψη των εφαρμογών τους, καθώς πολλά προβλήματα μηχανικής είναι δύσκολο να λυθούν με ακρίβεια χρησιμοποιώντας σταθερά στοιχεία καθώς επίσης η μέθοδος των γραμμικών στοιχείων δεν συγκλίνει γρήγορα όπως για παράδειγμα σε προβλήματα κάμψης.
Γι' αυτό το λόγο ενώ τα σταθερά και γραμμικά στοιχεία μπορούν να εφαρμοστούν ικανοποιητικά σε πολλά προβλήματα, δεν είναι γενικά επαρκώς ακριβεί για εφαρμογές ανάλυσης τάσεων.

ĐáñáñôÞìáôá

Έτσι μπορούμε να βελτιώσουμε την μεθοδολογία μας χρησιμοποιώντας δευτέρου βαθμού στοιχεία (quadratic) εξασφαλίζοντας έτσι ταχύτερη σύγκλιση.

-ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ-

-Παράρτημα 1 (Π1): Ολοκλήρωση

Όλα τα ολοκληρώματα που είδαμε στο κεφάλαιο 3 μπορούν να λυθούν αριθμητικά.
Για την περίπτωση των σταθερών στοιχείων είναι απολούστερο και περισσότερο ακριβές να υλοποιηθούν μερικές ολοκληρώσεις αναλυτικά, ιδιαίτερα εκείνες του στοιχείου με το σημείο ιδιομορφίας για την περίπτωση i = j.
Οπουδήποτε αλλού οι τιμές των ολοκληρωμάτων στα **Hij** και **Gij** έχουν υπολογιστεί χρησιμοποιώντας μία τετραγωνική φόρμουλα Gause τεσσάρων σημείων.
Παρατηρούμε ότι οι τιμές στους υποπίνακες **Hij** (για i = j) είναι εύκολο να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις ενός άκαμπτου σώματος.
Οι όροι στον πίνακα **Gii** είναι οι μόνοι συντελεστές που υπολογίζονται αναλυτικά. Τα ολοκληρώματα υλοποιούνται για όλα τα στοιχεία στον:

Αντικαθιστώντας τη βασική λύση στα αντίστοιχα ολοκληρώματα κανείς μπορεί να ορίσει τρείς όρους όπως:

(1)

(2)

(3)

Τονίζουμε ότι το Γi αναφέρεται στο στοιχείο i πάνω στο οποίο “ενεργεί” το σημείο ιδιομορφίας.
Οι παράγωγοι του r στους τύπους (1), (2), (3) δίνονται στην γενική περίπτωση από τις σχέσεις:

(4)

(βλέπε σχήμα(α))

ÐáñáñôÞìáôá

όπου, **r** είναι το μέτρο του διανύσματος απόστασης **r**

σχήμα a

Με τους παραπάνω ορισμούς μπορεί κανείς να ασχοληθεί με την περίπτωση στην οποία το ολοκλήρωμα υλοποιείται στο στοιχείο i, το οποίο περιέχει το σημείο ιδιομορφίας (σχήμα b):

σχήμα b

Ας θεωρήσουμε ότι το στοιχείο ξεκινά από το ακραίο σημείο (1) και τελειώνει στο ακραίο σημείο (2), όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Οι αποστάσεις από τα σημεία αυτά ως το σημείο ιδιομορφίας i που βρίσκεται στο κέντρο του στοιχείου, είναι R ενώ με r συμβολίζουμε την μεταβλητή απόσταση από το i σε κάθε σημείο πάνω στο στοιχείο δηλαδή το r είναι ισοδύναμο του Γ.

Χρησιμοποιώντας ένα θ - r σύστημα συντεταγμένων, οριζόμενο στο σχήμα, μπορούμε να βρούμε τις ακόλουθες σχέσεις για την (4):

ÐáñáñôÞìáôá

$$\theta r/\theta x1 = r1/r = \cos\theta$$
$$(5)$$
$$\theta r/\theta x2 = r2/r = \sin\theta$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις (1), (2), και (3) πέρνοντας όρια γύρω από το σημείο ιδιομορφίας.

Με αυτό τον τρόπο υπολογίσαμε τα στοιχεία του πίνακα **Gu** αναλυτικά.

Π Ι Ν Α Κ Ε Σ   4ου Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Υ

Πίνακας 1
ΟΜΑΔΑ C/W=0.222

D/A	**Sv/Svo**
Καμπύλη 1 για α =1.12	
0.4464	0.9483
0.5357	0.9225
0.625	0.89
0.7142	0.85036
0.8928	0.7489
Καμπύλη 2 για α = 1.37	
0.36496	0.94536
0.4379	0.9204
0.5109	0.8903
0.5839	0.8549
0.7299	0.7673
Καμπύλη 3 για α = 1.62	
0.3086	0.9487
0.3703	0.926
0.432	0.8989
0.4938	0.8676
0.6172	0.7917
Καμπύλη 1΄ για α= 1.12	
0.4464	0.6645
0.5357	0.7034
0.625	0.7404
0.7142	0.777
0.8928	0.8433
Καμπύλη 2΄ για α = 1.37	

Comment:
Comment:

0.36496	0.7329
0.4379	0.7578
0.5109	0.7838
0.5839	0.81
0.7299	0.86
Καμπύλη 3΄ για α = 1.62	
0.3086	0.7856
0.3703	0.802
0.432	0.82
0.4938	0.839
0.6172	0.8786

<u>πίνακας 2</u>

ΟΜΑΔΑ: C/W = 0.111

D/A	**Sv**	**Sv/Svo**
Καμπύλη 1 για α = 1.12		
0.4464	126.4676	0.8404
0.5357	116.3982	0.7735
0.625	104.9108	0.697
0.7142	92.2409	0.613
0.8928	64.6184	0.4294
Καμπύλη 2 για α = 1.37		
0.36496	132.4725	0.88
0.4379	124.8277	0.829
0.5109	116.0191	0.771
0.5839	106.1701	0.705
0.7299	83.9874	0.558
Καμπύλη 3 για α = 1.62		
0.3086	136.8088	0.909
0.3703	130.9329	0.8701
0.432	124.1012	0.824
0.4938	116.3753	0.773
0.6172	98.5633	0.655
Καμπύλη 1΄ για α = 1.12		
0.4464	136.0645	0.904
0.5357	137.6822	0.915
0.625	139.2144	0.925
0.7142	140.5984	0.934
0.8928	142.8927	0.949
Καμπύλη 2΄ για α = 1.37		

ÐáñáñôÞìáôá

0.36496	139.6983	0.928
0.4379	140.7363	0.935
0.5109	141.8402	0.9426
0.5839	142.985	0.9502
0.7299	145.3268	0.965
Καμπύλη 3΄ για α = 1.62		
0.3086	142.3813	0.946
0.3703	143.2098	0.951
0.432	144.1572	0.958
0.4938	145.2075	0.965
0.6172	147.6186	0.981

<u>πίνακας 3</u>

ΟΜΑΔΑ: C/W = 0.389

D/A	**Sv**	**Sv/Svo**
Καμπύλη 1 για α = 1.6		
0.3125	174.6622	0.99
0.375	173.7635	0.985
0.4375	172.6086	0.9785
0.5	171.1641	0.9703
0.625	167.3002	0.9484
Καμπύλη 2 για α = 2.		
0.25	173.757	0.985
0.3	172.5359	0.9781
0.35	171.045	0.9696
0.4	169.251	0.9595
0.5	164.718	0.9338
Καμπύλη 3 για α = 2.4		
0.8333	121.836	0.6907
0.9166	108.006	0.6123
0.9583	100.386	0.5691
1.	92.3077	0.5233
1.0416	83.823	0.4752
Καμπύλη 1΄ για α = 1.6		
0.3125	74.2193	0.4207
0.375	79.7763	0.452
0.4375	85.5912	0.485
0.5	91.5676	0.5191
0.625	103.6803	0.5877
Καμπύλη 2΄ για α = 2.		

0.25	94.003	0.532
0.3	97.568	0.553
0.35	101.4802	0.5753
0.4	105.607	0.5987
0.5	114.357	0.6483
Καμπύλη 3΄ για α = 2.4		
0.8333	167.6109	0.9502
0.9166	178.5121	1.012
0.9583	184.3331	1.045
1.	190.6305	1.0807
1.0416	197.0336	1.117

πίνακας 4

ΟΜΑΔΑ: C/W = 0.556

D/A	**Sv**	**Sv/Svo**
Καμπύλη 1 για α = 2.51		
0.796	190.4394	0.8671
0.8366	186.4678	0.849
0.876	182.2334	0.8297
0.896	180.0511	0.8198
0.916	177.8644	0.8098
Καμπύλη 2 για α = 2.71		
0.738	190.382	0.8668
0.774	186.3675	0.8485
0.811	181.9806	0.8286
0.8302	179.6438	0.8179
0.848	177.2104	0.8069
Καμπύλη 3 για α = 2.91		
0.687	191.1040	0.8701
0.721	187.2243	0.85249
0.756	182.9706	0.8331
0.7731	180.6978	0.8227
0.7903	178.3243	0.8119
Καμπύλη 1΄ για α = 2.51		
0.796	147.3685	0.671
0.8366	154.2291	0.7022
0.876	161.3409	0.7346
0.896	164.9722	0.7511
0.916	168.6604	0.76796
Καμπύλη 2΄ για α = 2.71		

0.738	151.2117	0.6885
0.774	157.9311	0.7191
0.811	164.9037	0.7508
0.8302	168.4892	0.7671
0.848	172.1403	0.7838
Καμπύλη 3΄ για α = 2.91		
0.687	155.6688	0.7088
0.721	162.4393	0.7396
0.756	169.5432	0.7719
0.7731	173.2303	0.7887
0.7903	177.007	0.8059

<u>Παράρτημα 2 (Π2):</u> Αποτελέσματα

Σε αυτό το παράρτημα έχουμε τα αποτελέσματα (output) του προγράμματος Linear ,δηλαδή τις τάσεις και τις μετατοπίσεις στους κόμβους, για δύο από τις ομάδες που αναφέραμε προηγουμένως στό 4ο κεφάλαιο.
Πιο συγκεκριμένα έχουμε το output της ομάδας με λόγο c/w=0.111, στην οποία και παρατηρείται η ελάχιστη μείωση στην συγκέντρωση τάσεων με την βέλτιστη προσθήκη βοηθητικών οπών (ποσοστό 13%).
Επίσης έχουμε και το output της ομάδας με λόγο c/w=0.556, μια και σ'αυτήν παρατηρείται η μέγιστη μείωση στην συγκέντρωση τάσεων (ποσοστό 21%).

Μάλιστα τονίζουμε ότι σε κάθε ομάδα έχουμε το output αρχικά χωρίς βοηθητικές οπές και στη συνέχεια με την βέλτιστη προσθήκη βοηθητικών οπών.
Τέλος, οι κόμβοι στους οποίους αναφέρονται τα παρακάτω αποτελέσματα φαίνονται στα ακόλουθα σχήματα.(σχήμα 1 και σχήμα 2).

7
10 9 8 7 6 5
4
3
11 12 2 2.25
26 1

ÐáñáñôÞìáôá

27
0.249

(α)

7
10 9 8 7 6 5
4
11 3
12 2 2.25
27 28 60 1
0.249 0.225
0.9

(β)

σχήμα1:***ομάδα c/w = 0.111***

(α)Χωρίς βοηθητική οπή.

(β)Με βέλτιστη προσθήκη βοηθητικής οπής.

7

10 9 8 7 6 5
11 12 4
3 2.25
26 2
27 1

1.251

(α)

7

10 9 8 7 6 5
11 12 4
3 2.25
26 29 59 2
27 28 60 1

1.251

2.61 1.135

(β)

<u>σχήμα 2:</u>*<u>ομάδα c/w = 0.556</u>*

(α)Χωρίς βοηθητική οπή.

(β)Με βέλτιστη προσθήκη βοηθητικής οπής.

ÐáñáñôÞìáôá

ÐáñáñôÞìáôá

ÐáñáñôÞìáôá

ÐáñáñôÞìáôá

ĐáñáñôÞìáôá

ĐáñáñôÞìáôá

ĐáñáñôÞìáôá

ĐáñáñôÞìáôá

ĐáñáñôÞìáôá

ĐáñáñôÞìáôá

ĐáñáñôÞìáôá

ÐáñáñôÞìáôá

ÐáñáñôÞìáôá

ÐáñáñôÞìáôá

ÐáñáñôÞìáôá

ĐáñáñôÞìáôá

ÐáñáñôÞìáôá

ĐáñáñôÞìáôá

ÐáñáñôÞìáôá

ĐáñáñôÞìáôá