



Ασύρματα Κανάλια:  
Επίδραση του σφάλματος εκτίμησης  
στην αμοιβαία πληροφορία  
και βέλτιστη εκτίμηση

Λυραντωνάκη Θεανώ

A.M. 200130166

25 Ιουλίου 2005

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους με στήριξαν για να υλοποιήσω την εργασία αυτή. Πιο συγκεκριμένα, ευχαριστώ τους Αναπλ. Καθ. Αθανάσιο Λιάβα, Καθ. Νικόλαο Σιδηρόπουλο και Επίκ. Καθ. Ιωάννη Βαρδιάμπαση για τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή Αθανάσιο Λιάβα, που μου πρότεινε να συνεργαστούμε σε μία δύσκολη στιγμή για τη συνέχεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Η βοήθειά του, τόσο στον επιστημονικό τομέα, όσο και στον ανθρώπινο και ο χρόνος που διέθεσε ήταν καθοριστικά για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής. Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του τμήματος με τους οποίους συνεργάστηκα κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μαθημάτων. Ευχαριστώ, ακόμα, την ξαδέρφη μου Λίνα για τη βοήθειά της στη διόρθωση του κειμένου, καθώς και τους φίλους μου Νίκο, Μαριστέλλα και Δήμητρα, για την ηθική τους υποστήριξη. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και την αδερφή μου, που με στήριξαν όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ  
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Κ' ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ημερομηνία: 25 Ιούλιος 2005

Επιβλέπων:

\_\_\_\_\_

Αναπλ. καθ. Αθανάσιος Λιάβας

Εξεταστές:

\_\_\_\_\_

καθ. Νικόλαος Σιδηρόπουλος

\_\_\_\_\_

Επίκ. καθ. Ιωάννης Βαρδιάμπασης

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Ημερομηνία: 25 Ιούλιος 2005

Συγγραφέας: ΛΥΡΑΝΤΩΝΑΚΗ ΘΕΑΝΩ

Τίτλος: Ασύρματα Κανάλια: Επίδραση του σφάλματος  
εκτίμησης στην αμοιβαία πληροφορία και  
βέλτιστη εκτίμηση

Τμήμα: Ηλεκτρονικών Μηχ. κ' Μηχ. Η/Υ

# Περιεχόμενα

Περίληψη	vii
Εισαγωγή	1
<b>1 Κανάλια Διαλείψεων - Χαρακτηρισμός</b>	<b>3</b>
1.1 Εισαγωγή	3
1.2 Χαρακτηρισμός των καναλιών πολλαπλών διαδρομών με διαλείψεις	4
1.3 Συναρτήσεις χαρακτηρισμού καναλιών πολλαπλών διαδρομών με διαλείψεις	7
1.4 Μη-επιλεκτικά και επιλεκτικά κατά συχνότητα κανάλια	11
1.4.1 Κανάλια μη-επιλεκτικά κατά συχνότητα (frequency non-selective or flat fading)	11
1.4.2 Κανάλια επιλεκτικά κατά συχνότητα (frequency-selective)	13
<b>2 Χωρητικότητα Καναλιών</b>	<b>16</b>
2.1 Εισαγωγή	16
2.2 Ορισμοί	17

2.3	Χωρητικότητα Gaussian καναλιού . . . . .	21
2.4	Υπολογισμός χωρητικότητας μπλοκ Gaussian καναλιού με αμετάβλητη συνάρτηση μεταφοράς . . . . .	23
2.5	Υπολογισμός της αμοιβαίας πληροφορίας μερικά γνωστού στο δέκτη καναλιού, με γνωστή διασπορά σφάλματος. . . . .	24
2.5.1	Περίπτωση καναλιού αργών διαλείψεων μη επιλεκτικού κατά συχνότη- τα . . . . .	24
2.5.2	Γενική περίπτωση . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Μεγιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ εισόδου - εξόδου ενός καναλιού με χρήση συμβόλων εκπαίδευσης</b>	<b>33</b>
3.1	Εισαγωγή . . . . .	33
3.2	Περιγραφή συστήματος . . . . .	34
3.3	Ορισμός του προβλήματος . . . . .	36
3.4	Εκτίμηση του καναλιού . . . . .	37
3.5	Κάτω φράγμα χωρητικότητας . . . . .	39
3.6	Βελτιστοποίηση με διατάξεις QPP . . . . .	42
3.6.1	Διατάξεις QPP . . . . .	43
3.6.2	Βελτιστότητα των διατάξεων QPP-α για άγνωστο κανάλι . . . . .	43
3.6.3	Η επιλογή της παραμέτρου $\alpha$ . . . . .	47
3.7	Η βέλτιστη κατανομή ενέργειας . . . . .	47
	<b>Επίλογος</b>	<b>50</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>51</b>
	<b>A'</b>	<b>53</b>



# Περίληψη

---

Στα πλαίσια της εργασίας αυτής θα ασχοληθούμε με ασύρματα τηλεπικοινωνιακά κανάλια. Αντικείμενο μελέτης μας είναι η μεγιστοποίηση της χωρητικότητάς τους, δηλαδή της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ πομπού και δέκτη, χρησιμοποιώντας σύμβολα εκπαίδευσης.



# Εισαγωγή

---

Είναι γεγονός ότι η ζήτηση για παροχή ασύρματων υπηρεσιών έχει αυξηθεί ραγδαία την τελευταία δεκαετία. Σαν συνέπεια, η έρευνα πάνω στην ασύρματη επικοινωνία έχει γίνει ιδιαίτερα σημαντική.

Τα ασύρματα κανάλια παρουσιάζουν δύο σημαντικά χαρακτηριστικά. Πρώτον, το σήμα φτάνει στο δέκτη έχοντας ακολουθήσει πολλαπλές διαδρομές και δεύτερον, το ασύρματο μέσο μεταβάλλεται με το χρόνο. Λόγω των χαρακτηριστικών αυτών, τα ασύρματα κανάλια χαρακτηρίζονται σαν κανάλια πολλαπλών διαδρομών με διαλείψεις. Οι μηχανισμοί που προκαλούν το φαινόμενο των διαλείψεων μοντελοποιήθηκαν για πρώτη φορά τη δεκαετία 1950 - 1960. Οι αρχές που αναπτύχθηκαν εφαρμόζονταν για επικοινωνίες πέραν του ορίζοντα, καλύπτοντας μία ευρεία κλίμακα συχνοτήτων (HF, UHF, SHF). Σήμερα, το ενδιαφέρον μας στρέφεται κυρίως στην κινητή ραδιοεπικοινωνία. Τα μοντέλα και οι αρχές που αναπτύχθηκαν στο παρελθόν είναι ακόμα ιδιαίτερα χρήσιμα. Στο πρώτο κεφάλαιο της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας, παρουσιάζονται κάποια βασικά μοντέλα ασύρματων καναλιών και μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητές τους.

Η μεγάλη ζήτηση για την ασύρματη επικοινωνία και για υψηλή ταχύτητα στη μεταφορά των δεδομένων κάνει σημαντικό τον υπολογισμό των δυνατοτήτων των ασύρματων καναλιών. Το 1948 πρώτος ο Shannon στη δημοσίευσή του με τίτλο «Μία Μαθηματική Θεωρία της Επικοινωνίας», (A Mathematical Theory of Communication), ανέδειξε

τους περιορισμούς που διέπουν την αξιόπιστη επικοινωνία και όρισε τη χωρητικότητα των τηλεπικοινωνιακών καναλιών. Το δεύτερο κεφάλαιο ξεκινά με τον ορισμό της χωρητικότητας ενός καναλιού. Δυστυχώς, η χωρητικότητα δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί αναλυτικά για τα περισσότερα κανάλια. Μία σημαντική περίπτωση όπου η χωρητικότητα είναι δυνατό να υπολογιστεί αναλυτικά είναι η περίπτωση Gaussian καναλιού με αμετάβλητη συνάρτηση μεταφοράς, η οποία είναι γνωστή στο δέκτη. Όταν ο δέκτης διαθέτει μία εκτίμηση του καναλιού, τότε ο υπολογισμός της χωρητικότητας είναι δύσκολος και θα αρκεστούμε σε άνω και κάτω φράγματα.

Μία ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδος για την εκτίμηση καναλιών είναι η εκτίμηση μέσω συμβόλων εκπαίδευσης. Στο τρίτο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί μία μελέτη για τον τρόπο που θα πρέπει να διαταχθούν τα γνωστά σύμβολα, ώστε να μεγιστοποιηθεί η χωρητικότητα ενός καναλιού επιλεκτικού κατά συχνότητα που παρουσιάζει διαλείψεις.

Πριν προχωρήσουμε στο κείμενο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η έντονη γραφή χρησιμοποιείται σε πεζά για το συμβολισμό διανύσματος και σε κεφαλαία για το συμβολισμό πίνακα, π.χ.  $\mathbf{x}$ , διάνυσμα και  $\mathbf{A}$ , πίνακας. Όταν ένας πίνακας αποτελείται από άλλους πίνακες συμβολίζεται επιπλέον με καλλιγραφικά, π.χ.  $\mathcal{A}$ , μπλοκ πίνακας. Οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα. Ο συζυγής αριθμός συμβολίζεται με  $*$ , η αναστροφή με  $T$  και η Hermitian αναστροφή με  $H$ .

# Κεφάλαιο 1

## Κανάλια Διαλείψεων - Χαρακτηρισμός

---

### 1.1 Εισαγωγή

Πολλά ασύρματα κανάλια αλλάζουν συνεχώς με το χρόνο λόγω της χρονικής μεταβολής του μέσου μετάδοσης ή/και λόγω της κίνησης του πομπού και του δέκτη. Τέτοια κανάλια αφορούν τη βραχεία ιονοσφαιρική επικοινωνία, 3 - 30 MHz (HF), τις τροποσφαιρικές επικοινωνίες, 300 - 3000 MHz (UHF) και 3000 - 30000 MHz, την επικοινωνία γης - κινητού (LM) ή και δορυφόρου - κινητού, καθώς και τα κανάλια της κινητής τηλεφωνίας. Για παράδειγμα, τα ιόντα πάνω στα οποία ανακλάται το κύμα στην ιονοσφαιρική μετάδοση κινούνται συνεχώς. Η κίνηση αυτή φαίνεται στο χρήστη του καναλιού ως τυχαία. Αυτό σημαίνει ότι αν το ίδιο σήμα μεταδοθεί στην HF ζώνη συχνοτήτων σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, το λαμβανόμενο σήμα θα είναι διαφορετικό [1].

Ένα επιπλέον φαινόμενο που παρατηρείται στις ασύρματες ραδιοζεύξεις είναι ότι το σήμα φτάνει από τον πομπό στο δέκτη μέσω πολλαπλών διαδρομών (*multipath*). Το

λαμβανόμενο σήμα από κάθε διαδρομή, διαφέρει σε φάση και πλάτος και το ανυσματικό άθροισμα όλων των συνιστωσών παρουσιάζει σημαντική διακύμανση. Εάν ο δέκτης κινείται, οι διαδρομές μεταβάλλονται και το λαμβανόμενο σήμα παρουσιάζει αισθητή διακύμανση πλάτους και μεταβολές της συχνότητας (**φαινόμενο Doppler**). Στην περίπτωση που είναι κινητός και ο πομπός και ο δέκτης το φαινόμενο Doppler γίνεται πιο έντονο.

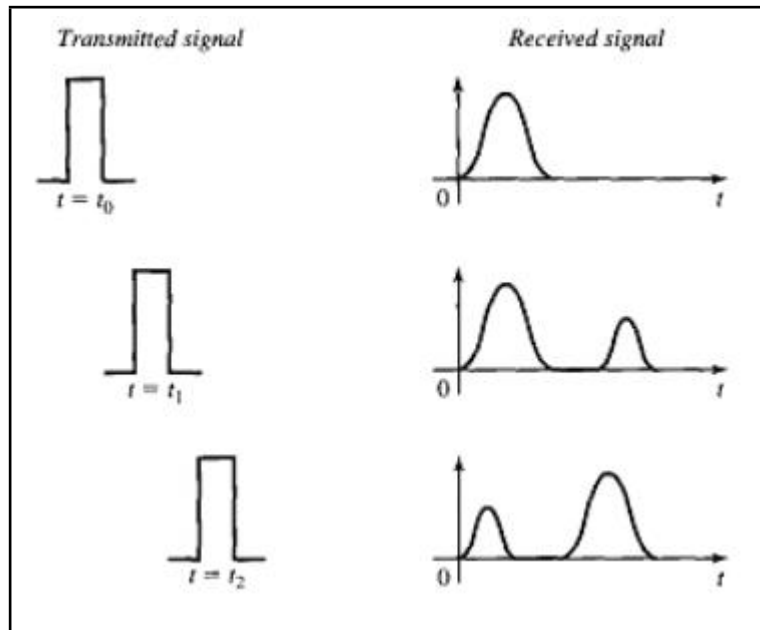
Σε αστικό περιβάλλον, οι πολλαπλές διαδρομές είναι πολυάριθμες και το μήκος των κεραιών είναι μικρό σε σχέση με το ύψος των κτιρίων. Οι μηχανισμοί διάδοσης που επικρατούν είναι η σκέδαση και οι πολλαπλές ανακλάσεις. Οι γρήγορες αλλαγές που παρουσιάζει η στάθμη του σήματος, λόγω πολλαπλών διαδρομών, ονομάζονται **γρήγορες διαλείψεις** (*fast fading*), σε αντιδιαστολή με τις **αργές διαλείψεις** (*slow fading*) που παρατηρούνται για μετακίνηση σε μεγάλες αποστάσεις και οφείλονται στη μεταβολή της μέσης στάθμης του σήματος λόγω απωλειών [2].

Η μεγάλη ζήτηση για κινητές επικοινωνίες, αλλά και η απαίτηση για υψηλή ποιότητα σε πολλές υπηρεσίες, όπως η ασύρματη μετάδοση ψηφιακού ήχου, κινούμενης εικόνας και γραπτών μηνυμάτων, καθιστά αναγκαία την όσο το δυνατό καλύτερη εκμετάλλευση του φάσματος που διατίθεται. Για το σκοπό αυτό, σημαντικό είναι να επιτευχθεί η στατιστική περιγραφή των χρονικά μεταβαλλόμενων καναλιών πολλαπλών διαδρομών με διαλείψεις (*multipath fading channels*), ώστε να γίνει εφικτή η σωστή σχεδίαση των ασύρματων τηλεπικοινωνιακών συστημάτων [3].

## 1.2 Χαρακτηρισμός των καναλιών πολλαπλών διαδρομών με διαλείψεις

Αν μεταδώσουμε ένα βραχύ παλμό μέσα από ένα χρονικά μεταβαλλόμενο κανάλι πολλαπλών διαδρομών, το σήμα που θα λάβουμε, λόγω πολλαπλών σκεδαστών οι οποίοι

εισάγουν διαφορετικές καθυστερήσεις, θα είναι διευρυμένο στο χρόνο (σχήμα 1, 1η κυματομορφή). Ένα χαρακτηριστικό, λοιπόν, ενός καναλιού πολλαπλών διαδρομών είναι η αύξηση της χρονικής διάρκειας του λαμβανόμενου σήματος σε σχέση με το εκπεμπόμενο, γνωστή ως **διάχυση στο χρόνο** (*spreading in time*).



Σχήμα 1: Απόκριση χρονικά μεταβαλλόμενου καναλιού

Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό των καναλιών αυτών είναι η μεταβολή της φύσης τους με το χρόνο, λόγω της χρονικής μεταβολής της δομής του μέσου. Όσον αφορά την ακολουθία παλμών, θα έχουμε μεταβολές στις εντάσεις και στις σχετικές καθυστερήσεις των πολλαπλών σημάτων (σχήμα 1, 2η και 3η κυματομορφή).

Έστω

$$s(t) = \text{Re} \left( s_i(t) e^{j2\pi f_c t} \right), \quad (1.1)$$

το σήμα που εκπέμπεται. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν πολλαπλές διαδρομές διάδοσης και ότι κάθε διαδρομή εισάγει καθυστέρηση διάδοσης, καθώς και έναν παράγοντα εξασθένισης, τα οποία είναι χρονικά μεταβαλλόμενα (λόγω των αλλαγών στο μέσο μετάδοσης).

Επομένως, το λαμβανόμενο σήμα θα είναι της μορφής:

$$x(t) = \sum_n \alpha_n(t) s(t - \tau_n(t)), \quad (1.2)$$

όπου  $\alpha_n(t)$  είναι η εξασθένιση που αντιστοιχεί στη  $n$ -οστή διαδρομή τη χρονική στιγμή  $t$  και  $\tau_n(t)$  η αντίστοιχη καθυστέρηση. Από τις (1.1) και (1.2) έχουμε:

$$x(t) = \text{Re} \left( \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} s_l(t - \tau_n(t)) e^{j2\pi f_c t} \right). \quad (1.3)$$

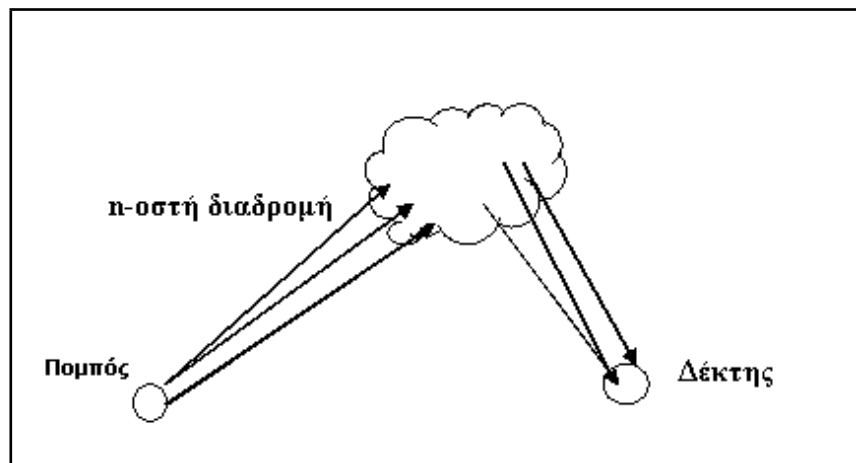
Είναι φανερό ότι το ισοδύναμο χαμηλοπερατό (equivalent lowpass) λαμβανόμενο σήμα θα είναι:

$$r(t) = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} s_l(t - \tau_n(t)). \quad (1.4)$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το ισοδύναμο χαμηλοπερατό κανάλι μπορεί να περιγραφεί από την παρακάτω εξίσωση:

$$c(\tau; t) = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \delta(\tau - \tau_n(t)) = \sum_n \alpha_n(\tau; t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)}. \quad (1.5)$$

Ορίζουμε  $\theta_n(t) = 2\pi f_c \tau_n(t)$ . Ο όρος αυτός αλλάζει σημαντικά για πολύ μικρές αλλαγές της καθυστέρησης του σήματος, γιατί οι συχνότητες που χρησιμοποιούνται για τις ασύρματες επικοινωνίες είναι της τάξης των MHz ( $10^6$  Hz). Αντίθετα, ο όρος  $\alpha_n(t)$  απαιτεί μεγάλες αλλαγές στο μέσο για να αλλάξει σημαντικά.



Σχήμα 2: Διαδρομές Διάδοσης Σήματος

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, οι διαδρομές διάδοσης είναι τυχαίες και πάρα πολλές. Επομένως, μπορούμε να δεχτούμε ότι το λαμβανόμενο σήμα είναι άθροισμα ανεξαρτήτων, ομοιόμορφα κατανεμημένων συνιστωσών. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, το λαμβανόμενο σήμα μπορεί να θεωρηθεί Gaussian [6].

### 1.3 Συναρτήσεις χαρακτηρισμού καναλιών πολλαπλών διαδρομών με διαλείψεις

Στην παράγραφο αυτή, θα αναφερθούν οι ορισμοί κάποιων μεγεθών πολύ σημαντικών για την περιγραφή των καναλιών πολλαπλών διαδρομών που παρουσιάζουν διαλείψεις.

Υποθέτοντας ότι η κρουστική απόκριση του καναλιού  $c(\tau, t)$  είναι στάσιμη, με την ευρεία έννοια, ορίζεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ως:

$$\phi_c(\tau_1, \tau_2; \Delta t) = E[c^*(\tau_1; t) \cdot c(\tau_2; t + \Delta t)]. \quad (1.6)$$

Στα περισσότερα μέσα ραδιομετάδοσης, η εξασθένιση και η μετατόπιση φάσης του καναλιού που συνδέονται με μία διαδρομή είναι ασυσχέτιστες με αυτές που συνδέονται με τις άλλες. Το γεγονός αυτό χαρακτηρίζεται σαν **ασυσχέτιστη σκέδαση** (*uncorrelated scattering*). Επομένως, υποθέτοντας ότι η σκέδαση στις δύο διαδρομές είναι ασυσχέτιστη, η εξίσωση (1.6) γίνεται:

$$E[c^*(\tau_1; t) \cdot c(\tau_2; t + \Delta t)] = \phi_c(\tau_1; \Delta t) \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (1.7)$$

Αν  $\Delta t = 0$ , τότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $\phi_c(\tau; \Delta t)$  γράφεται ως εξής:

$$\phi_c(\tau) = E[|c(\tau; t)|^2]. \quad (1.8)$$

Η συνάρτηση  $\phi_c(\tau)$  αποτελεί το μέσο όρο της ισχύος εξόδου του καναλιού σαν συνάρτηση της καθυστέρησης  $\tau$  και ονομάζεται **κατανομή ισχύος καναλιού πολλαπλών**

διαδρομών (*multipath intensity profile*) ή φάσμα ισχύος καθυστέρησης (*delay power spectrum*) του καναλιού. Το εύρος των τιμών  $\tau$  στις οποίες η  $\phi_c(\tau)$  είναι μη μηδενική ονομάζεται **διάχυση πολλαπλών διαδρομών** (*multipath spread*) και συμβολίζεται με  $T_m$ .

Μία ανάλογη περιγραφή του χρονικά μεταβαλλόμενου καναλιού πολλαπλών διαδρομών στο πεδίο της συχνότητας προκύπτει παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier (FT) της κρουστικής απόκρισης του καναλιού,  $c(\tau; t)$ :

$$C(f; t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau; t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (1.9)$$

Αν η κρουστική απόκριση  $c(\tau; t)$  είναι Gaussian τυχαία διαδικασία μηδενικής μέσης τιμής, τότε και ο FT,  $C(f; t)$ , είναι Gaussian τυχαία διαδικασία μηδενικής μέσης τιμής. Κάτω από την υπόθεση ότι το κανάλι είναι στοχαστικά στάσιμο, με την ευρεία έννοια, ορίζεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, η οποία εξαρτάται μόνο από τη διαφορά συχνοτήτων  $\Delta f = f_2 - f_1$ , ως:

$$\phi_c(f_1, f_2; \Delta t) = E [C^*(f_1; t) \cdot C(f_2; t + \Delta t)] \equiv \phi_c(\Delta f; \Delta t), \quad (1.10)$$

και ονομάζεται **συνάρτηση συσχέτισης ως προς τη συχνότητα και το χρόνο** (*spaced - frequency, spaced - time correlation function*) του καναλιού.

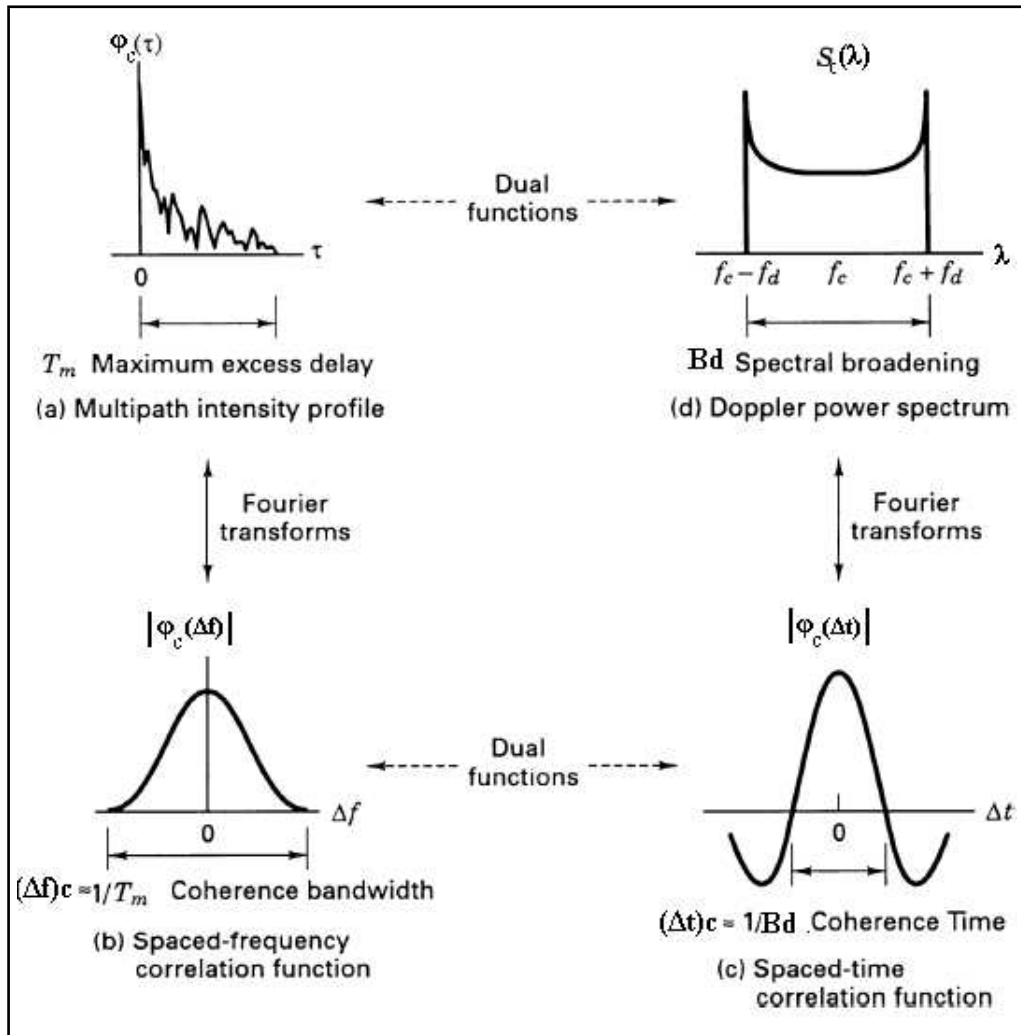
Αν  $\Delta t = 0$ , το εύρος συχνοτήτων  $\Delta f$  στο οποίο η συνάρτηση  $\phi_c(\Delta f)$  είναι μη μηδενική ονομάζεται **εύρος ζώνης συμφωνίας** (*coherence bandwidth*) και συμβολίζεται με  $(\Delta f)_c$ . Το εύρος ζώνης συμφωνίας είναι το εύρος συχνοτήτων για το οποίο η συμπεριφορά του καναλιού μπορεί να θεωρηθεί περίπου σταθερή [3].

Τα μεγέθη  $(\Delta f)_c$  και  $T_m$  συνδέονται με τη σχέση:

$$(\Delta f)_c \simeq \frac{1}{T_m}. \quad (1.11)$$

Επομένως, το αντίστροφο της διάχυσης πολλαπλών διαδρομών αποτελεί μέτρο του εύρους ζώνης συμφωνίας.





Σχήμα 3: Σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων συσχέτισης και των συναρτήσεων φάσματος ισχύος.

Στη συνέχεια, θα αναφερθεί ένα σημαντικό μέγεθος για την περιγραφή των καναλιών, όσον αφορά τη χρονική τους μεταβλητότητα. Οι χρονικές μεταβολές του καναλιού είναι γνωστές σαν (φασματική) διάχυση Doppler (*Doppler spread*), είτε σαν μετατόπιση φάσης Doppler (*Doppler shift*). Για να συνδέσουμε τις επιδράσεις του φαινομένου Doppler με τις χρονικές μεταβολές του καναλιού ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της  $\phi_c(\Delta f; \Delta t)$ , ως προς τη μεταβλητή  $\Delta t$ , λαμβάνοντας τη συνάρτηση:

$$S_c(\Delta f; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\Delta f; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t. \quad (1.12)$$

Θέτοντας  $\Delta f = 0$  προκύπτει:

$$S_c(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(0; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t. \quad (1.13)$$

Η συνάρτηση  $S_c(\lambda)$  εκφράζει την ένταση του σήματος ως συνάρτηση της συχνότητας Doppler  $\lambda$  και ονομάζεται **φάσμα ισχύος Doppler** (*Doppler power spectrum*). Το εύρος τιμών  $\lambda$  για τις οποίες η συνάρτηση παίρνει μη μηδενικές τιμές ονομάζεται **διάχυση Doppler** του καναλιού και συμβολίζεται με  $B_d$ . Ο αντίστροφός της αποτελεί μέτρο του χρονικού διαστήματος μέσα στο οποίο έχουμε πολύ μικρή μεταβολή των χαρακτηριστικών του καναλιού και ονομάζεται **χρόνος συμφωνίας** (*coherence time*) του καναλιού. Ορίζεται ως εξής:

$$(\Delta t)_c \approx \frac{1}{B_d}. \quad (1.14)$$

Ο χρόνος συμφωνίας  $(\Delta t)_c$  είναι το δυικό της διάχυσης Doppler στο πεδίο του χρόνου. Όταν ένα κανάλι μεταβάλλεται αργά, ο χρόνος συμφωνίας είναι μεγάλος και η διάχυση Doppler, αντίστοιχα, είναι μικρή. Το γινόμενο  $T_m B_d$  ονομάζεται **παράγοντας διάχυσης** (*spread factor*) του καναλιού. Αν  $T_m B_d < 1$  το κανάλι ονομάζεται **υποδιαχέον** (*underspread*), διαφορετικά ονομάζεται **υπερδιαχέον** (*overspread*).

Σε γενικές γραμμές, όταν ο παράγοντας διάχυσης του καναλιού ικανοποιεί τη συνθήκη  $T_m B_d \ll 1$ , η χρονική μεταβολή του είναι αργή συγκριτικά με τη διάχυση πολλαπλής διαδρομής ( $(\Delta t)_c \gg T_m$ ) και η απόκριση του καναλιού μπορεί να εκτιμηθεί με καλή προσέγγιση. Η εκτίμηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο δέκτη για καλύτερη αποδιαμόρφωση του λαμβανόμενου σήματος και στον πομπό για βελτιστοποίηση του εκπεμπόμενου σήματος. Όταν  $T_m B_d \gg 1$ , η εκτίμηση της απόκρισης του καναλιού είναι πολύ δύσκολη και αναξιόπιστη, αν όχι αδύνατη [3].

## 1.4 Μη-επιλεκτικά και επιλεκτικά κατά συχνότητα κανάλια

Στην προηγούμενη παράγραφο, αναφέρθηκαν κάποια βασικά μεγέθη για την περιγραφή ασύρματων καναλιών. Στη συνέχεια, θα μελετηθεί η επίδραση των ασύρματων καναλιών σε σήμα εισόδου με εύρος ζώνης  $W$  [3].

### 1.4.1 Κανάλια μη-επιλεκτικά κατά συχνότητα (frequency non-selective or flat fading)

Έστω  $s(t)$  το σήμα βασικής ζώνης που στέλνουμε μέσω του καναλιού και  $S(f)$  το φασματικό του περιεχόμενο. Το αντίστοιχο λαμβανόμενο σήμα στη γενική περίπτωση θα είναι:

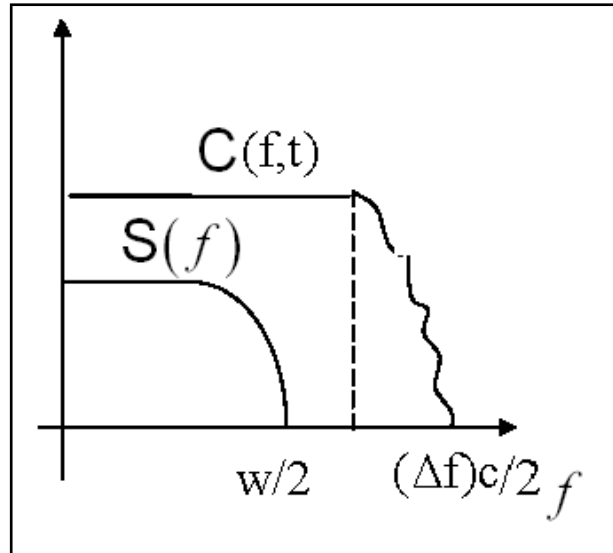
$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t; \tau) s(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} C(f; t) S(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (1.15)$$

Υποθέτουμε ότι το εύρος ζώνης  $W$  του  $S(f)$  είναι πολύ μικρότερο από το φάσμα συμφωνίας (σχήμα 4), δηλ.  $W \ll (\Delta f)_c \approx \frac{1}{T_m}$  (αντίστοιχα  $T_m \ll \frac{1}{W}$ ). Οι φασματικές συνιστώσες του  $S(f)$  υπόκεινται στην ίδια εξασθένιση και διαφορά φάσης κατά τη μετάδοσή τους στο κανάλι. Αυτό σημαίνει ότι στο εύρος ζώνης  $W$  που καταλαμβάνει το εκπεμπόμενο σήμα  $S(f)$ , η χρονικά μεταβαλλόμενη απόκριση συχνότητας του καναλιού  $C(f; t)$  είναι σταθερή ως προς τη συχνότητα. Αφού το σήμα  $S(f)$  έχει συγκεντρωμένο όλο το φασματικό του περιεχόμενο στην περιοχή  $f = 0$ , θα έχουμε  $C(f; t) = C(0; t)$ . Ένα τέτοιο κανάλι ονομάζεται **μη-επιλεκτικό κατά συχνότητα ή κανάλι επίπεδων διαλείψεων** (*frequency non-selective ή flat fading*). Η σχέση (1.15) για το κανάλι αυτό απλοποιείται σε:

$$r(t) = C(0; t) \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df = C(0; t) s(t) = \alpha(t) e^{-j\theta(t)} s(t). \quad (1.16)$$

Επομένως, σε ένα κανάλι μη-επιλεκτικό κατά συχνότητα, το λαμβανόμενο σήμα είναι απλά το γινόμενο του σήματος εκπομπής με ένα χρονικά μεταβαλλόμενο παράγοντα

$C(0; t) = \alpha(t)e^{-j\theta(t)}$ , ο οποίος αναπαριστά το χρονικά μεταβαλλόμενο κανάλι.



Σχήμα 4: Κανάλι σαν γραμμικό φίλτρο.

$C(f, t)$  απόκριση συχνοτήτων του καναλιού,  $S(f)$  η φασματική πυκνότητα του σήματος (signal spectrum),  $(\Delta f)_c$  το εύρος ζώνης συμφωνίας (coherence bandwidth) του καναλιού και  $W$  το εύρος ζώνης του σήματος.

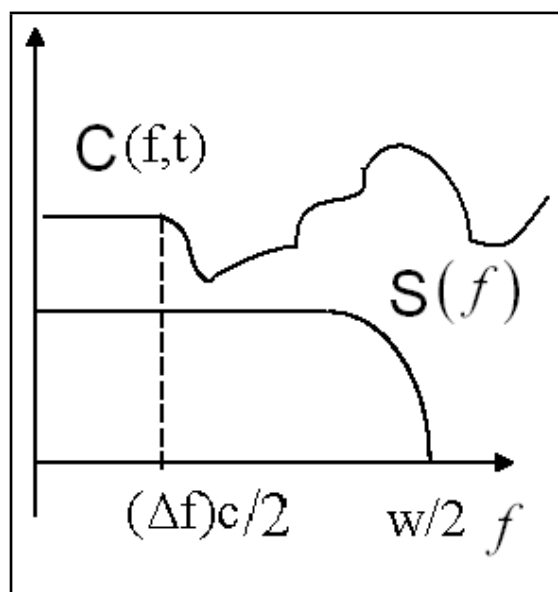
Η ταχύτητα των διαλείψεων μπορεί να χαρακτηριστεί είτε από το χρόνο συμφωνίας  $(\Delta t)_c$ , είτε από τη διάχυση Doppler  $B_d$ .

Για παράδειγμα, έστω ότι είναι δυνατή η επιλογή του εύρους ζώνης  $W$  του σήματος, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη  $W \ll (\Delta f)_c$  και η επιλογή της διάρκειας συμβόλου  $T_s$ , ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη  $T_s \ll (\Delta t)_c$ . Εφόσον το  $T_s$  είναι μικρότερο από το χρόνο συμφωνίας του καναλιού, η εξασθένιση του καναλιού  $\alpha(t)$  και η μεταβολή της φάσης  $e^{-j\theta(t)}$  είναι σταθερές για χρονική διάρκεια τουλάχιστον  $T_s$  (και περίπου ίση με  $(\Delta t)_c$ ). Στην περίπτωση αυτή, το κανάλι ονομάζεται κανάλι αργών διαλείψεων και η σχέση εισόδου - εξόδου για το χρονικό διάστημα  $t \in (t_0, t_0 + (\Delta t)_c)$  διαμορφώνεται ως εξής:

$$r(t) = \alpha e^{-j\theta} s(t).$$

Όταν ένα μη-επιλεκτικό κατά συχνότητα κανάλι είναι αργών διαλείψεων, ο παράγοντας διάχυσής του είναι μικρότερος της μονάδας. Όπως προαναφέρθηκε, τότε τα χαρακτηριστικά του μεταβάλλονται αρκετά αργά και μπορούν να μετρηθούν. Τα αργών διαλείψεων μη-επιλεκτικά κατά συχνότητα κανάλια είναι τα πιο εύκολα για ανάλυση [3].

#### 1.4.2 Κανάλια επιλεκτικά κατά συχνότητα (frequency-selective)



Σχήμα 5: Κανάλι σαν γραμμικό φίλτρο.

$C(f, t)$  απόκριση συχνοτήτων του καναλιού,  $S(f)$  φασματική πυκνότητα του σήματος (signal spectrum),  $(\Delta f)_c$  το εύρος ζώνης συμφωνίας (coherence bandwidth) του καναλιού και  $W$  το εύρος ζώνης του σήματος.

Έστω εκπεμπόμενο σήμα με εύρος ζώνης  $W$  μεγαλύτερο από το εύρος ζώνης συμφωνίας  $(\Delta f)_c$  του καναλιού. Οι συνιστώσες συχνότητας του  $S(f)$  που απέχουν περισσότερο από  $(\Delta f)_c$  υπόκεινται σε διαφορετικά κέρδη και μεταβολές φάσης (σχήμα 5). Στην περίπτωση αυτή, το κανάλι ονομάζεται **επιλεκτικό κατά συχνότητα** (*frequency-selective*) [3].

Οι συνιστώσες των πολλαπλών διαδρομών της απόκρισης του καναλιού μπορούν να διαχωριστούν αν η καθυστέρηση μεταξύ τους είναι μεγαλύτερη από  $\frac{1}{W}$ . Με τη βοήθεια του θεωρήματος δειγματοληψίας, το χρονικά μεταβαλλόμενο κανάλι μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

$$c(\tau; t) = \sum_{n=0}^L c_n(t) \delta\left(\tau - \frac{n}{W}\right) \quad (1.17)$$

και η αντίστοιχη χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση μεταφοράς ως:

$$C(f; t) = \sum_{n=0}^L c_n(t) e^{-j2\pi f \frac{n}{W}}, \quad (1.18)$$

όπου  $c_n(t)$  είναι η χρονικά μεταβαλλόμενη κρουστική απόκριση (του διακριτού καναλιού) και  $L$  η τάξη του καναλιού. Ο τυχαία χρονικά μεταβαλλόμενος συντελεστής  $c_n(t)$  μπορεί να παρασταθεί ως:

$$c_n(t) = \alpha_n(t) e^{j\theta_n(t)}. \quad (1.19)$$

Η σχέση εισόδου - εξόδου του καναλιού διαμορφώνεται ως εξής:

$$r(t) = \sum_{n=0}^L c_n(t) s\left(t - \frac{n}{W}\right). \quad (1.20)$$

Η κρουστική απόκριση  $c_n(t)$  συνήθως εκφράζεται σε στάσιμη, υπό την ευρεία έννοια, αμοιβαία ασυσχέτιστη διαδικασία με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης [6]:

$$\phi_{c_n}(\tau) = E[c_n^*(t) c_n(t + \tau)] \quad (1.21)$$

και συνάρτηση φάσματος ισχύος Doppler:

$$S_{c_n}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{c_n}(\tau) e^{-j2\pi\lambda\tau} d\tau. \quad (1.22)$$

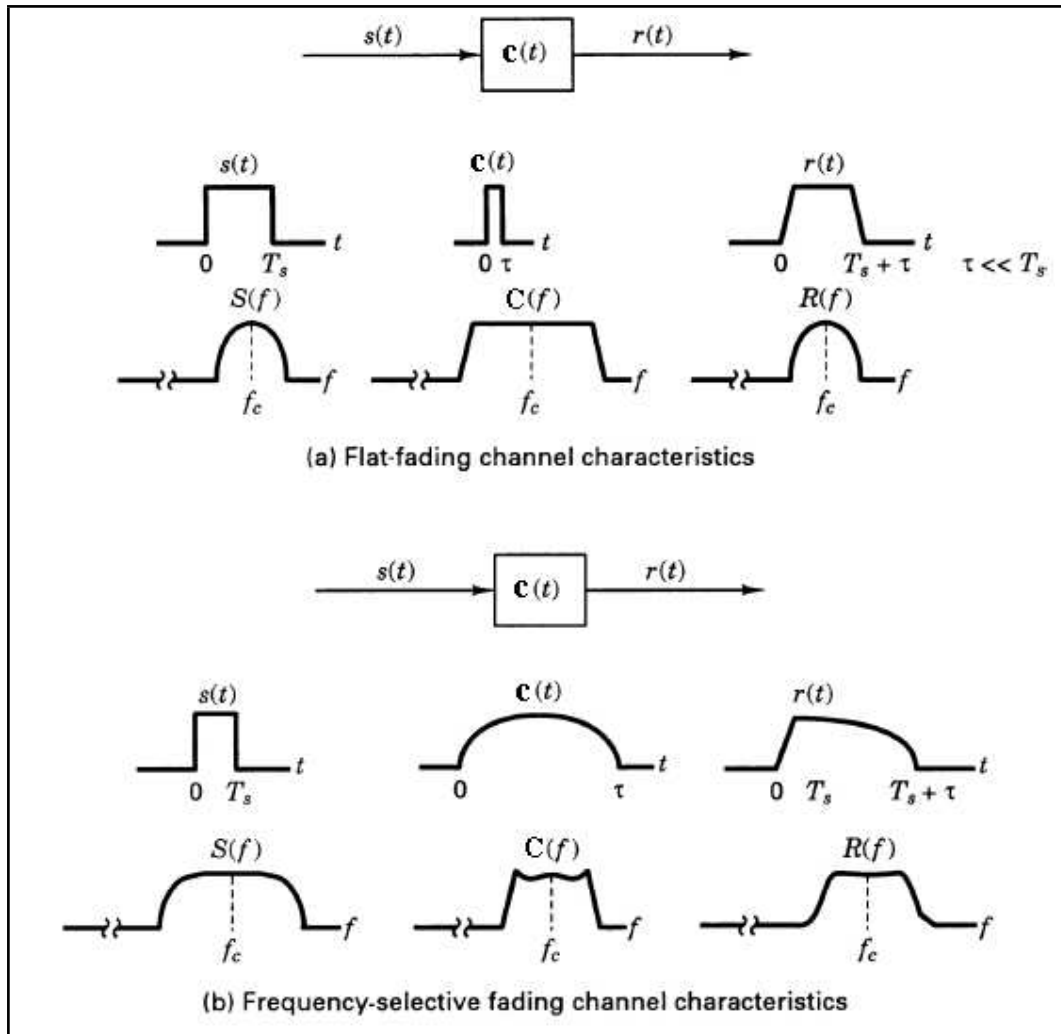
Όταν  $T_s \ll (\Delta t)_c$ , το κανάλι χαρακτηρίζεται ως αργών διαλείψεων. Στην περίπτωση αυτή, η σχέση εισόδου - εξόδου εκφράζεται ως εξής:

$$r(t) = \sum_{n=0}^L c_n s\left(t - \frac{n}{W}\right), \quad (1.23)$$

για  $t \in (t_0, t_0 + (\Delta t)_c)$ , ή μετά από δειγματοληψία:

$$r(k) = r(kT_s) = \sum_{n=0}^L c_n s(k - n), \quad (1.24)$$

με  $s(k) = s(kT_s)$ .



**Σχήμα 6:** Χαρακτηριστικά καναλιών αργών διαλείψεων α) μη-επιλεκτικών κατά συχνότητα, β) επιλεκτικών κατά συχνότητα.

## Κεφάλαιο 2

# Χωρητικότητα Καναλιών

---

### 2.1 Εισαγωγή

Η αύξηση των εφαρμογών της ασύρματης επικοινωνίας έχει εντατικοποιήσει την έρευνα για τη βέλτιστη χρησιμοποίηση του διαθέσιμου φάσματος. Η μελέτη των περιορισμών που διέπουν τα ασύρματα κανάλια είναι πολύ σημαντική μια και οι περιορισμοί αφορούν διάφορους τομείς: π.χ. η ισχύς των κινητών τηλεφώνων περιορίζεται από κανόνες ασφαλείας, η συχνότητα και το εύρος ζώνης του σήματος βασικής ζώνης περιορίζεται από την εμπορική διαθεσιμότητα, ενώ η φύση του καναλιού επικοινωνίας εξαρτάται από τις καιρικές συνθήκες, από τα φυσικά εμπόδια, κ.τ.λ. Επομένως, ο προσδιορισμός της χωρητικότητας των ασύρματων καναλιών, λαμβάνοντας υπόψη τους παραπάνω περιορισμούς, είναι κάτι παραπάνω από επίκαιρο. Πριν ορίσουμε τη χωρητικότητα ενός καναλιού και προχωρήσουμε στον υπολογισμό της, σκόπιμο είναι να αναφέρουμε κάποια μεγέθη τα οποία θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση της συνέχειας.



## 2.2 Ορισμοί

Στη θεωρία πληροφοριών, για τη μέτρηση της πληροφορίας που συνοδεύει κάποιο γεγονός χρησιμοποιείται η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός αυτό. Έτσι ορίζουμε την **αυτοπληροφορία** ή **πληροφοριακό περιεχόμενο** ενός γεγονότος σαν τον αρνητικό λογάριθμο της αντίστοιχης πιθανότητας:

$$I(x) = -\log p(x). \quad (2.1)$$

Γεγονότα με μικρή πιθανότητα έχουν μεγάλο πληροφοριακό περιεχόμενο, ενώ γεγονότα με μεγάλη πιθανότητα το αντίθετο.

Ο μέσος όρος της αυτοπληροφορίας που συνοδεύει την εμφάνιση κάθε τυχαίου συμβόλου  $X$  στην έξοδο της πηγής διακριτής πληροφορίας, ονομάζεται **Εντροπία** ή **Μέση Πληροφορία ανά σύμβολο** (*Entropy*) και δίνεται από την έκφραση [4]:

$$H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x). \quad (2.2)$$

Η εντροπία είναι μέτρο της αβεβαιότητας της τυχαίας μεταβλητής.

Η **από κοινού εντροπία** (*joint entropy*) ενός ζεύγους τυχαίων μεταβλητών  $X, Y$  με από κοινού μάζα πιθανότητας  $p(x, y)$  ορίζεται ως εξής:

$$H(X, Y) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(x, y). \quad (2.3)$$

Η **υπό συνθήκη εντροπία** (*conditional entropy*) ενός ζεύγους τυχαίων μεταβλητών  $X, Y$  με από κοινού μάζα πιθανότητας  $p(x, y)$  ορίζεται ως εξής:

$$H(Y|X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) H(Y|X = x) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(y|x). \quad (2.4)$$

Η υπό συνθήκη εντροπία είναι μέτρο της μέσης αβεβαιότητας για την τυχαία μεταβλητή  $Y$ , όταν είναι γνωστή η τυχαία μεταβλητή  $X$ . Ανάλογα ορίζεται η υπο συνθήκη εντροπία  $H(X|Y)$ .

Μεταξύ δύο συναρτήσεων μάζας πιθανότητας  $p(x)$  και  $q(x)$ , ορίζεται η **σχετική εντροπία** (*relative entropy*) ή **απόσταση Kullback - Leibler** ως εξής:

$$D(p||q) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}. \quad (2.5)$$

Η σχετική εντροπία είναι πάντα μη αρνητική και είναι μηδέν αν, και μόνο αν,  $p = q$ .

Για την περίπτωση συνεχών τυχαίων μεταβλητών, ορίζεται η **διαφορική εντροπία** (*differential entropy*) ως εξής:

$$h(X) = - \int f(x) \log f(x) dx, \quad (2.6)$$

όπου  $f(x)$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $X$ . Σε αντίθεση με τη διακριτή εντροπία, που είναι πάντα θετική ή μηδέν, η διαφορική εντροπία μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές [5].

Η **από κοινού διαφορική εντροπία** (*joint differential entropy*) ενός συνόλου  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τυχαίων μεταβλητών με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ορίζεται ως εξής:

$$h(X_1, X_2, \dots, X_n) = - \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) \log f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (2.7)$$

Αν  $X, Y$  έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f(x, y)$ , μπορούμε να ορίσουμε την **υπό συνθήκη διαφορική εντροπία** (*conditional differential entropy*) ως:

$$h(X|Y) = - \int \int f(x, y) \log f(x|y) dx dy. \quad (2.8)$$

Εφόσον γενικά ισχύει  $f(x|y) = f(x, y)/f(y)$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$h(X|Y) = h(X, Y) - h(Y). \quad (2.9)$$

Μεταξύ δύο συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας  $f$  και  $g$ , ορίζεται η **σχετική εντροπία** (απόσταση Kullback - Leibler) ως εξής:

$$D(f||g) = \int f \log \frac{f}{g} dx \geq 0. \quad (2.10)$$

Στην περίπτωση που  $X$  είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή κανονικής κατανομής, μέσης τιμής μηδέν και διασποράς  $\sigma^2$ , έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.11)$$

Εφαρμόζοντας την (2.6), η εντροπία της τυχαίας μεταβλητής  $X$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} h(X) &= - \int f(x) \ln f(x) dx = - \int f(x) \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) dx \\ &= - \int f(x) \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln \sqrt{2\pi\sigma^2} \right) dx \\ &= \int \frac{x^2}{2\sigma^2} \cdot f(x) dx + \int \ln \sqrt{2\pi\sigma^2} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} EX^2 + E [\ln \sqrt{2\pi\sigma^2}] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{2} \ln e + \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2\pi e\sigma^2 \text{ nats} = \frac{1}{2} \log 2\pi e\sigma^2 \text{ bits}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Επομένως, στην περίπτωση τυχαίας μεταβλητής με **κανονική κατανομή** μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς  $\sigma^2$ , η εντροπία είναι:

$$h(\mathcal{N}(0, \sigma^2)) = \frac{1}{2} \log 2\pi e\sigma^2 \text{ bits}. \quad (2.13)$$

Αν έχουμε ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , από κοινού κανονικών, με μέση τιμή  $\boldsymbol{\mu}$  και πίνακα συνδιασποράς  $\mathbf{K}$ , η εντροπία εκφράζεται ως εξής:

$$h(\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{K})) = \frac{1}{2} \log(2\pi e)^n |\mathbf{K}|, \quad (2.14)$$

όπου  $|\mathbf{K}|$  η ορίζουσα του πίνακα συνδιασποράς [5].

Εκτός από τα παραπάνω χρήσιμα μεγέθη, είναι σημαντική η εισαγωγή ενός μεγέθους που να χαρακτηρίζει το κανάλι πληροφορίας. Το μέγεθος αυτό είναι η έννοια της διαπληροφορίας, από την οποία θα οδηγηθούμε στον ορισμό της χωρητικότητας του καναλιού.

Ως **διαπληροφορία** ή **αμοιβαία πληροφορία** (*mutual information*) μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ , ορίζεται η σχετική εντροπία μεταξύ της από κοινού συνάρτησης μάζας πιθανότητας  $p(x, y)$  και του γινομένου των περιθωρίων  $p(x)p(y)$ :

$$I(X; Y) = D(p(x, y) || p(x)p(y)) = \sum_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}. \quad (2.15)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \geq 0. \quad (2.16)$$

Δηλαδή, η αμοιβαία πληροφορία αποτελεί τη μείωση της αβεβαιότητας για την  $X$ , εξαιτίας της γνώσης της  $Y$ .

Λόγω συμμετρίας ισχύει:

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X). \quad (2.17)$$

Η υπό **συνθήκη διαπληροφορία** (*conditional mutual information*) των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$  με γνωστή την  $Z$  ορίζεται ως εξής:

$$I(X; Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y, Z) = H(Y|Z) - H(Y|X, Z). \quad (2.18)$$

Στην περίπτωση συνεχών τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$  με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f(x, y)$ , η αμοιβαία πληροφορία ορίζεται ως εξής:

$$I(X; Y) = \int f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} \geq 0, \quad (2.19)$$

με την ισότητα να ισχύει αν, και μόνο αν,  $f(x, y) = f(x)f(y)$  ( $X$  και  $Y$  ανεξάρτητες).

Από τον ορισμό προκύπτει εύκολα ότι:

$$I(X; Y) = h(X) - h(X|Y) = h(Y) - h(Y|X). \quad (2.20)$$

Επειδή η αμοιβαία πληροφορία είναι μέγεθος μη αρνητικό, από την (2.17) προκύπτει ότι η συνθήκη μειώνει την εντροπία, δηλαδή:

$$H(Y|X) \leq H(Y), \quad (2.21)$$

με την ισότητα να ισχύει αν, και μόνο αν, οι  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες. Για την περίπτωση συνεχών μεταβλητών ισχύει αντίστοιχα:

$$h(Y|X) \leq h(Y). \quad (2.22)$$

Σημαντική ιδιότητα της εντροπίας και της διαφορική εντροπίας αποτελεί ο **κανόνας αλυσίδας**, που εκφράζεται ως εξής [5]:

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{i=1}^n H(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1) \leq \sum_{i=1}^n H(X_i) \\ h(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{i=1}^n h(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ο κανόνας αλυσίδας ισχύει αντίστοιχα για την αμοιβαία πληροφορία:

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^n I(X_i; Y | X_{i-1}, \dots, X_1). \quad (2.24)$$

Τέλος, ορίζεται η **χωρητικότητα** (*capacity*) ενός καναλιού ως το μέγιστο της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ της εισόδου  $X$  και της εξόδου  $Y$ :

$$C = \max_{p(x)} I(X; Y), \quad (2.25)$$

όπου το μέγιστο λαμβάνεται πάνω σε όλες τις πιθανές πυκνότητες πιθανότητας της εισόδου [4].

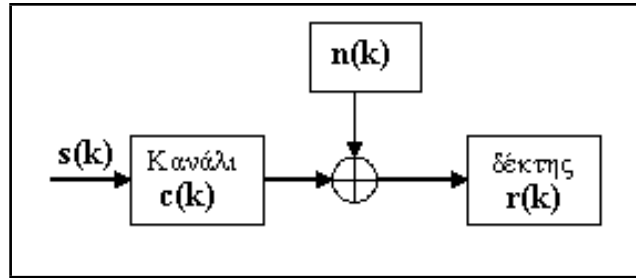
## 2.3 Χωρητικότητα Gaussian καναλιού

Τα κανάλια με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι κανάλια που μπορούν να περιγραφούν από τη σχέση:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (2.26)$$

όπου  $\mathbf{r}$  το σήμα στο δέκτη,  $\mathbf{C}$  ο πίνακας του καναλιού,  $\mathbf{s}$  το σήμα εκπομπής και  $\mathbf{n}$  ο θόρυβος. Σημαντικά κανάλια που μπορούν να περιγραφούν από την παραπάνω σχέση

είναι τα επιλεκτικά κατά συχνότητα κανάλια με μία είσοδο και μία έξοδο (SISO frequency selective), όταν τα θεωρούμε σε επίπεδο μπλοκ δεδομένων, και τα μη-επιλεκτικά κατά συχνότητα κανάλια με πολλές εισόδους και πολλές εξόδους (MIMO flat fading).



Σχήμα 7: Μοντέλο διακριτού καναλιού.

Για παράδειγμα, θεωρώντας κανάλι με μία είσοδο και μία έξοδο (σχήμα 7), με χρονική απόκριση  $\mathbf{c} = [c(0) \cdots c(L)]$ , η οποία παραμένει σταθερή για τις χρονικές στιγμές  $k = 0, \dots, N - 1$ , η σχέση εισόδου - εξόδου του καναλιού δίνεται από την έκφραση:

$$r(k) = \sum_{n=0}^L c(n) \cdot s(k - n) + n(k) \quad (2.27)$$

Υποθέτοντας ότι για  $k < 0$ ,  $s(k) = 0$ , η (2.27) μπορεί να γραφεί σε επίπεδο μπλοκ στη μορφή [8]:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ \vdots \\ r(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c(0) & & & & \\ c(1) & c(0) & & & \\ \dots & \vdots & \dots & & \\ c(L) & \dots & \vdots & \dots & \\ \dots & \dots & c(L) & \dots & c(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \vdots \\ s(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}} + \underbrace{\begin{bmatrix} n(0) \\ n(1) \\ \vdots \\ n(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}}. \quad (2.28)$$

## 2.4 Υπολογισμός χωρητικότητας μπλοκ Gaussian καναλιού με αμετάβλητη συνάρτηση μεταφοράς

Ας υποθέσουμε ότι:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{s} + \mathbf{n},$$

ή, χρησιμοποιώντας συμβολισμό τυχαίων διανυσμάτων:

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}\mathbf{S} + \mathbf{N}, \quad (2.29)$$

όπου  $\mathbf{C}$  είναι ο πίνακας του καναλιού και  $\mathbf{N}$  μηδενικής μέσης τιμής Gaussian θορύβος με ανεξάρτητα ίσης διακύμανσης (variance) πραγματικά μέρη. Υποθέτουμε ότι  $E[\mathbf{N}\mathbf{N}^T] = \sigma^2\mathbf{I}$ , δηλαδή ότι οι συνιστώσες του θορύβου είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Θα θεωρήσουμε, ακόμα, ότι το σήμα εκπομπής είναι μηδενικής μέσης τιμής, με πίνακα συνδιασποράς  $\mathbf{P}$ . Κατά συνέπεια, το λαμβανόμενο σήμα  $\mathbf{R}$  θα είναι και αυτό μηδενικής μέσης τιμής, ενώ ο πίνακας συνδιασποράς του θα είναι  $\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \sigma^2\mathbf{I}$ . Η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ του σήματος εκπομπής και του σήματος λήψης, με δεδομένο το κανάλι, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$I(\mathbf{R}; \mathbf{S} | \mathbf{C}) = h(\mathbf{R} | \mathbf{C}) - h(\mathbf{R} | \mathbf{S}, \mathbf{C}) \stackrel{(2.14)}{=} h(\mathbf{R} | \mathbf{C}) - \frac{N}{2} \cdot \log(2\pi e) - \frac{1}{2} \log |\sigma^2 \cdot \mathbf{I}|, \quad (2.30)$$

όπου  $N$  το μήκος του διανύσματος του λαμβανόμενου σήματος. Λαμβάνοντας υπόψη μας το θεώρημα ότι η αμοιβαία πληροφορία για δεδομένο πίνακα συνδιασποράς μεγιστοποιείται αν το λαμβανόμενο σήμα (και κατά συνέπεια και το εκπεμπόμενο) είναι κανονικής κατανομής, η (2.30) γίνεται:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{R}; \mathbf{S} | \mathbf{C}) &= \frac{N}{2} \cdot \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \log |\sigma^2 \cdot \mathbf{I} + \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T| - \frac{N}{2} \cdot \log(2\pi e) - \frac{1}{2} \log |\sigma^2 \cdot \mathbf{I}| \\ &= \frac{1}{2} \log |\sigma^2 \cdot \mathbf{I} + \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T| - \frac{1}{2} \log |\sigma^2 \cdot \mathbf{I}| \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T \right|. \end{aligned} \quad (2.31)$$

## 2.5 Υπολογισμός της αμοιβαίας πληροφορίας μερικά γνωστού στο δέκτη καναλιού, με γνωστή διασπορά σφάλματος.

### 2.5.1 Περίπτωση καναλιού αργών διαλείψεων μη επιλεκτικού κατά συχνότητα

Σε αυτό το εδάφιο θα θεωρήσουμε ότι το κανάλι μας έχει ένα πραγματικό συντελεστή  $c$ . Επομένως, η σχέση εισόδου - εξόδου τη χρονική στιγμή  $k$  διαμορφώνεται ως εξής:

$$r(k) = cs(k) + n(k). \quad (2.32)$$

Θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση ενός συμβόλου, άρα η σχέση (2.32) απλοποιείται στη μορφή:

$$r = cs + n \quad (2.33)$$

ή, χρησιμοποιώντας συμβολισμό τυχαίων μεταβλητών:

$$R = cS + N.$$

Υποθέτοντας ότι  $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma_N^2)$  και  $ES^2 = \sigma_S^2$ , η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου - εξόδου του μεγιστοποιείται για  $S \sim \mathcal{N}(0, \sigma_S^2)$  και δίνεται από τη σχέση:

$$I(S; R) = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{c^2 \sigma_S^2}{\sigma_N^2} \right). \quad (2.34)$$

Υποθέτουμε ότι το κανάλι είναι άγνωστο στον πομπό, ενώ ο δέκτης διαθέτει μία εκτίμησή του. Για να υπολογιστεί ένα φράγμα της αμοιβαίας πληροφορίας, ένας τρόπος που προτείνεται από τη Muriel Médard [8] είναι ο διαχωρισμός του καναλιού σε γνωστό μέρος  $\bar{c}$ , μέσης τιμής  $E(\bar{c}) = \bar{c}$  και σε σφάλμα  $\tilde{C}$ , μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς  $\sigma_C^2$  (σχήμα 8).

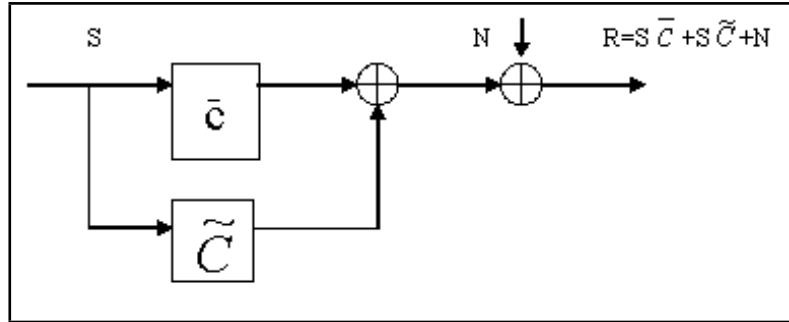


Το κανάλι μας είναι το:

$$C = \bar{c} + \tilde{C}.$$

Συνεπώς, το λαμβανόμενο σήμα δίνεται από τη σχέση:

$$R = (\bar{c} + \tilde{C})S + N. \quad (2.35)$$



Σχήμα 8: Μοντέλο μερικώς άγνωστου καναλιού με σφάλμα.

Για να υπολογίσουμε την αμοιβαία πληροφορία είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της εντροπίας του λαμβανόμενου σήματος, θεωρώντας γνωστό το σήμα εκπομπής και κατά ένα μέρος το κανάλι. Η υπό συνθήκη αυτή εντροπία θα είναι:

$$h(R|S = s, \bar{c}) = h(s\bar{c} + s\tilde{C} + N|S = s, \bar{c}) = h(s\tilde{C} + N|S = s, \bar{c}). \quad (2.36)$$

Παίρνοντας μέση τιμή ως προς  $S$ , λαμβάνουμε:

$$h(R|S) = \int p_S(s)h(s\tilde{C} + N)ds. \quad (2.37)$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος είναι δύσκολος αν δε γνωρίζουμε τη συνάρτηση κατανομής του σφάλματος εκτίμησης  $\tilde{C}$  του καναλιού. Ακόμα όμως και αν η κατανομή είναι γνωστή, δεν είναι βέβαιο ότι η (2.37) μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. Για αυτούς τους λόγους θα υπολογιστεί ένα κάτω και ένα άνω φράγμα της επιτεύξιμης αμοιβαίας πληροφορίας.

Η αμοιβαία πληροφορία δίνεται από τη σχέση:

$$I(R; S) = \sup_{p(S)} (h(S) - h(S|R)) \geq h(S) - h(S|R), \text{ για } S \sim \mathcal{N}(0, \sigma_S^2). \quad (2.38)$$

Επομένως, για τον υπολογισμό του κάτω φράγματος θα θεωρήσουμε ότι το εκπεμπόμενο σήμα είναι Gaussian, παρόλο που μπορεί να είναι σήμα και άλλης κατανομής.

Η υπό συνθήκη εντροπία του σήματος εκπομπής  $S$ , με δεδομένο το λαμβανόμενο σήμα  $R$ , μπορεί να γραφεί για  $\forall \alpha \in R$ , ως:

$$h(S|R = r) = h(S - \alpha R|R = r), \quad (2.39)$$

εφόσον η αφαίρεση σταθεράς δεν αλλάζει τη διαφορική εντροπία. Παίρνοντας μέση τιμή ως προς  $R$ , έχουμε:

$$\int h(S|R = r)p_R(r)dr = \int h(S - \alpha R|R = r)p_R(r)dr, \quad (2.40)$$

που είναι:

$$h(S|R) = h(S - \alpha R|R). \quad (2.41)$$

Η συνθήκη μειώνει την εντροπία και η Gaussian κατανομή για δεδομένη διασπορά τη μεγιστοποιεί, επομένως, η (2.41) γίνεται:

$$h(S|R) = h(S - \alpha R|R) \leq h(S - \alpha R) \leq \frac{1}{2} \ln(2\pi \text{Var}(S - \alpha R)). \quad (2.42)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε  $\alpha$ , άρα θα ισχύει και για το  $\alpha$  που ελαχιστοποιεί τη διασπορά  $\text{Var}(S - \alpha R)$ .

Για τον υπολογισμό αυτού του  $\alpha$ , θα εφαρμόσουμε την **εκτίμηση του γραμμικού ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος** (*Linear Minimum Mean Square Error*). Η εκτίμηση είναι:

$$\hat{S} = \alpha R,$$

ενώ το σφάλμα εκτίμησης είναι:

$$\mathcal{E} = S - \hat{S} = S - \alpha R.$$

Η μέση τιμή του τετραγώνου του σφάλματος είναι συνάρτηση του  $\alpha$  γιατί  $E(\mathcal{E}^2) = E[(S - \alpha R)^2] = f(\alpha)$ . Το  $\alpha$  που ελαχιστοποιεί την  $E(\mathcal{E}^2)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{E[SR]}{E[R^2]} = \frac{E[S(S\bar{c} + S\tilde{C} + N)]}{E[(S\bar{c} + S\tilde{C} + N)^2]} \\ &= \frac{\bar{c}E[S^2] + E[S^2] \cdot E[\tilde{C}] + E[S]E[N]}{\bar{c}^2E[S^2] + E[S^2] \cdot E[\tilde{C}^2] + E[N^2]} \\ &= \frac{\bar{c}\sigma_S^2}{\bar{c}^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_N^2}.\end{aligned}\quad (2.43)$$

Η διασπορά του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος,  $\text{Var}(S - \alpha R)$ , δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Var}(S - \alpha R) = \frac{\sigma_S^4 \cdot \sigma_C^2 + \sigma_N^2 \cdot \sigma_S^2}{\bar{c}^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_N^2}.\quad (2.44)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.42) (την οποία αν πολλαπλασιάσουμε με  $-1$  θα αλλάξει η φορά της ανισότητας) και λόγω της (2.44), η αμοιβαία πληροφορία γράφεται:

$$\begin{aligned}I(S; R) &\geq h(S) - h(S|R) \geq \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma_S^2) - \frac{1}{2} \ln \left( 2\pi e \frac{\sigma_S^4 \cdot \sigma_C^2 + \sigma_N^2 \cdot \sigma_S^2}{\bar{c}^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_N^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_N^2 + \bar{c}^2 \cdot \sigma_S^2}{\sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_N^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\bar{c}^2 \cdot \sigma_S^2}{\sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_N^2} \right).\end{aligned}\quad (2.45)$$

Προσπαθώντας να ερμηνεύσει κανείς την παραπάνω σχέση μπορεί να πει ότι η χειρότερη επίδραση του σφάλματος εκτίμησης του καναλιού είναι να λειτουργεί σαν προσθετικός λευκός θόρυβος. Το φράγμα της (2.45) αποτελεί, λοιπόν, τη χωρητικότητα που προκύπτει όταν στείλουμε Gaussian σήμα διασποράς  $\bar{c}^2 \cdot \sigma_S^2$  μέσα από ένα κανάλι με θόρυβο διασποράς  $\sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_N^2$ .

Ο υπολογισμός του άνω φράγματος γίνεται με τον παρακάτω απλό συλλογισμό. Επειδή το σήμα εκπομπής  $S$  είναι ανεξάρτητο από το κανάλι  $C$ , ισχύει ότι:

$$h(S|C) = h(S).\quad (2.46)$$

Επιπλέον,

$$h(S|R, C) \leq h(S|R).\quad (2.47)$$

Η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου - εξόδου του καναλιού δίνεται από τη σχέση:

$$I(S; R) = \sup_{p(S)} (h(S) - h(S|R)), \quad (2.48)$$

ενώ για δεδομένο το κανάλι,

$$I(S; R|C) = \sup_{p(S)} (h(S|C) - h(S|R, C)). \quad (2.49)$$

Λόγω των (2.47 – 2.49), προκύπτει:

$$I(S; R) \leq I(S; R|C). \quad (2.50)$$

Για κανάλι  $C$  γνωστό και ίσο με  $c$ , η μέγιστη αμοιβαία πληροφορία  $I(S; R|C = c)$ , δίνεται από τη σχέση:

$$I(S; R|C = c) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{c^2 \sigma_s^2}{\sigma_N^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{c^2 \sigma_s^2 + \sigma_N^2}{\sigma_N^2} \right). \quad (2.51)$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} I(S; R|C = \bar{c} + \tilde{C}) &= E_{\tilde{C}} \left( \frac{1}{2} \ln(\sigma_s^2(\bar{c} + \tilde{C})^2 + \sigma_N^2) - \frac{1}{2} \ln 2\pi e \sigma_N^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} E_{\tilde{C}} \left( \ln \frac{\bar{c}^2 \cdot \sigma_s^2 + \tilde{C}^2 \cdot \sigma_s^2 + 2\bar{c} \cdot \tilde{C} + \sigma_N^2}{\sigma_N^2} \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Χρησιμοποιώντας ότι η  $\ln$  είναι κοίλη συνάρτηση, η (2.52) γίνεται:

$$I(S; R|C) \leq \frac{1}{2} \ln E_{\tilde{C}} \left( \frac{\bar{c}^2 \cdot \sigma_s^2 + \tilde{C}^2 \cdot \sigma_s^2 + 2\bar{c} \cdot \tilde{C} + \sigma_N^2}{\sigma_N^2} \right). \quad (2.53)$$

Λόγω των (2.50) και (2.53), το άνω φράγμα της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ εισόδου και εξόδου του καναλιού δίνεται από τη σχέση:

$$I(S; R) \leq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\bar{c}^2 \cdot \sigma_s^2 + \sigma_C^2 \cdot \sigma_s^2 + \sigma_N^2}{\sigma_N^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\bar{c}^2 \cdot \sigma_s^2 + \sigma_C^2 \cdot \sigma_s^2}{\sigma_N^2} \right). \quad (2.54)$$

Το φράγμα της (2.54) αποτελεί τη χωρητικότητα καναλιού που θα προέκυπτε αν στέλναμε ένα σήμα διασποράς  $\bar{c}^2 \cdot \sigma_s^2 + \sigma_C^2 \cdot \sigma_s^2$  μέσω ενός Gaussian καναλιού προσθετικού θορύβου διασποράς  $\sigma_N^2$ .

Διαισθητικά μπορούμε να πούμε για τα δύο φράγματα ότι το άνω αποτελεί την περίπτωση που το σφάλμα εκτίμησης είναι εξ' ολοκλήρου χρήσιμο, ενώ το κάτω φράγμα αποτελεί την περίπτωση που το σφάλμα εκτίμησης είναι εξ' ολοκλήρου επιζήμιο [8].

Από τις (2.45) και (2.54) μπορεί να βρεθεί ένα άνω όριο στην απώλεια της αμοιβαίας πληροφορίας, εξαιτίας του ότι το κανάλι δεν είναι γνωστό, ως εξής:

$$\begin{aligned} -I(S; R) &\leq -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_N^2 + \bar{c}^2 \cdot \sigma_S^2}{\sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_N^2} \right) \\ I(S; R|C) &\leq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\bar{c}^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2 + \sigma_N^2}{\sigma_N^2} \right) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη προκύπτει:

$$I(S; R|C) - I(S|R) \leq \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\sigma_C^2 \cdot \sigma_S^2}{\sigma_N^2} \right). \quad (2.55)$$

Παρατηρώντας τις σχέσεις (2.45) και (2.54) βλέπουμε ότι αν η διασπορά του σφάλματος τείνει στο μηδέν, τότε η αμοιβαία πληροφορία συγκλίνει στην αμοιβαία πληροφορία της περίπτωσης όπου δεν υπάρχει σφάλμα εκτίμησης καναλιού.

## 2.5.2 Γενική περίπτωση

Εστώ ότι η σχέση εισόδου - εξόδου του καναλιού είναι:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{s} + \mathbf{n}. \quad (2.56)$$

Χρησιμοποιώντας συμβολισμό τυχαίων μεταβλητών, η σχέση εισόδου - εξόδου γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}\mathbf{S} + \mathbf{N} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{S} + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S} + \mathbf{N}. \quad (2.57)$$

Έστω ότι στέλνουμε Gaussian σήμα  $\mathbf{S}$   $k$  αμοιβαία ανεξαρτήτων συνιστωσών, με γνωστό πίνακα συνδιασποράς  $\mathbf{\Lambda}_S$ , μέσα από ένα κανάλι  $\mathbf{C}$  προσθετικού θορύβου  $\mathbf{N}$ , με πίνακα συνδιασποράς  $\mathbf{\Lambda}_N$ . Το κανάλι χωρίζεται σε γνωστό μέρος  $\bar{\mathbf{C}}$  και σε μέρος  $\tilde{\mathbf{C}}$ , που

αποτελεί το σφάλμα μέτρησης του καναλιού, μηδενικής μέσης τιμής. Η εντροπία της εισόδου είναι (βλέπε 2.14):

$$h(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \ln \left( (2\pi e)^k |\Lambda_S| \right). \quad (2.58)$$

Θα συμβολίσουμε τον πίνακα συνδιασποράς των ποσοτήτων  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}$  με  $\Lambda_{\mathbf{S},\mathbf{R}}$ . Για να υπολογίσουμε το κάτω φράγμα της μέγιστης επιτεύξιμης αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ εισόδου και εξόδου, η διαδικασία είναι ίδια με αυτή που ακολουθήθηκε στο προηγούμενο εδάφιο. Αντίστοιχα με την (2.42), ισχύει:

$$h(\mathbf{S}|\mathbf{R}) \leq h(\mathbf{S} - \mathbf{AR}) \leq \frac{1}{2} \ln \left( (2\pi e)^k |\Lambda_{\mathbf{S}-\mathbf{AR}}| \right), \quad (2.59)$$

όπου  $\mathbf{A}$  οποιοσδήποτε πίνακας  $k \times k$ . Σκοπός μας είναι να βρούμε τον πίνακα  $\mathbf{A}$  για τον οποίο το  $\mathbf{AR}$  να αποτελεί την γραμμική εκτίμηση ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Linear Minimum Mean Square Error) του εκπεμπόμενου σήματος  $\mathbf{S}$ . Η σχέση (2.43) γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \Lambda_{(\mathbf{S},\mathbf{R})} \Lambda_{\mathbf{R}}^{-1} \Rightarrow \\ \mathbf{A} &= \Lambda_{(\mathbf{S},\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S})} \Lambda_{\mathbf{R}}^{-1} \\ &= \Lambda_{(\mathbf{S},\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S})} (\Lambda_{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}} + \Lambda_{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{N}} + \Lambda_{\mathbf{N}})^{-1}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

λόγω του ότι το σήμα  $\mathbf{S}$  είναι στατιστικά ανεξάρτητο από το θόρυβο  $\mathbf{N}$  και από το σφάλμα μέτρησης του καναλιού  $\tilde{\mathbf{C}}$ . Το σφάλμα εκτίμησης της εισόδου από την έξοδο ισούται με:

$$\mathcal{E} = \mathbf{S} - \mathbf{AR}.$$

Ο πίνακας συνδιασποράς του σφάλματος δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{E}} &= E [(\mathbf{S} - \mathbf{AR}) (\mathbf{S}^T \mathbf{R}^T \mathbf{A}^T)] \\ &= E[\mathbf{S}\mathbf{S}^T] + E[\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{R}^T \mathbf{A}^T] - E[\mathbf{S}\mathbf{R}^T \mathbf{A}^T] - E[\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{S}^T] \\ &= \Lambda_{\mathbf{S}} + \mathbf{A}\Lambda_{\mathbf{R}}\mathbf{A}^T - \Lambda_{\mathbf{S}\mathbf{R}}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\Lambda_{\mathbf{R}\mathbf{S}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda_{\mathbf{S}} + \Lambda_{\mathbf{SR}}\Lambda_{\mathbf{R}}^{-1}\Lambda_{\mathbf{RS}} + \Lambda_{\mathbf{SR}}\Lambda_{\mathbf{R}}^{-1}\Lambda_{\mathbf{RS}} - \Lambda_{\mathbf{SR}}\Lambda_{\mathbf{R}}^{-1}\Lambda_{\mathbf{RS}} \\
&= \Lambda_{\mathbf{S}} - \Lambda_{\mathbf{SR}}\Lambda_{\mathbf{R}}^{-1}\Lambda_{\mathbf{RS}} \\
&= \Lambda_{\mathbf{S}} - \Lambda_{(\mathbf{S},\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S})}(\Lambda_{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}} + \Lambda_{\mathbf{N}})^{-1}\Lambda_{(\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S},\mathbf{S})}. \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση του Λήμματος Αντιστροφής Πινάκων<sup>1</sup>, μπορεί να αποδειχτεί ότι:

$$\Lambda_{\mathcal{E}}^{-1} = \Lambda_{\mathbf{S}}^{-1} + \bar{\mathbf{C}}^T(\Lambda_{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}} + \Lambda_{\mathbf{N}})^{-1}\bar{\mathbf{C}}. \tag{2.62}$$

Η (2.59), λόγω των παραπάνω, γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{S}|\mathbf{R}) &\leq h(\mathbf{S} - \alpha\mathbf{R}) = h(\mathcal{E}) \\
&\leq \frac{1}{2} \ln \left( (2\pi e)^k |\Lambda_{\mathcal{E}}| \right) \\
&= \frac{1}{2} k \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \ln(|\Lambda_{\mathcal{E}}|) \\
&= \frac{1}{2} k \ln(2\pi e) - \frac{1}{2} \ln(|\Lambda_{\mathcal{E}}^{-1}|) \\
&= \frac{1}{2} k \ln(2\pi e) - \frac{1}{2} \ln \left( \left| \Lambda_{\mathbf{S}}^{-1} + \bar{\mathbf{C}}^T(\Lambda_{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}} + \Lambda_{\mathbf{N}})^{-1}\bar{\mathbf{C}} \right| \right). \tag{2.63}
\end{aligned}$$

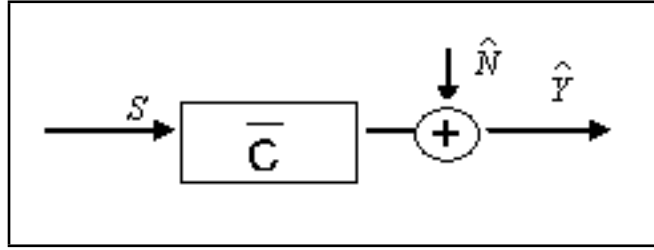
Επομένως, η αμοιβαία πληροφορία θα είναι <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{S}; \mathbf{R}) &= \sup_{p(\mathbf{S})} (h(\mathbf{S}) - h(\mathbf{S}|\mathbf{R})) \\
&\geq \frac{1}{2} k \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \ln(|\Lambda_{\mathbf{S}}|) - \frac{1}{2} k \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \ln \left( \left| \Lambda_{\mathbf{S}}^{-1} + \bar{\mathbf{C}}^T(\Lambda_{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}} + \Lambda_{\mathbf{N}})^{-1}\bar{\mathbf{C}} \right| \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln \left( \left| \Lambda_{\mathbf{S}} \left| \Lambda_{\mathbf{S}}^{-1} + \bar{\mathbf{C}}^T(\Lambda_{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}} + \Lambda_{\mathbf{N}})^{-1}\bar{\mathbf{C}} \right| \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln \left( \left| \mathbf{I} + \bar{\mathbf{C}}^T(\Lambda_{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}} + \Lambda_{\mathbf{N}})^{-1}\bar{\mathbf{C}}\Lambda_{\mathbf{S}} \right| \right). \tag{2.64}
\end{aligned}$$

Από την (2.64), μπορεί να πει κανείς ότι η αμοιβαία πληροφορία έχει σαν κάτω φράγμα την αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου ενός γνωστού καναλιού  $\bar{\mathbf{C}}$ , με προσθετικό θόρυβο συνδιασποράς  $\Lambda_{\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}} + \Lambda_{\mathbf{N}}$ . Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα κανάλι  $\bar{\mathbf{C}}$  στο οποίο υπάρχει θόρυβος  $\hat{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S} + \mathbf{N}$  και παίρνουμε έξοδο  $\hat{\mathbf{Y}}$ .

<sup>1</sup> $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1}$

<sup>2</sup>Χρησιμοποιείται η σχέση  $|A||B| = |AB|$ .



Σχήμα 9: Κανάλι με αμοιβαία πληροφορία την ισότητα της (2.64)

Το άνω φράγμα της αμοιβαίας πληροφορίας για τη γενική περίπτωση είναι ανάλογο του άνω φράγματος της αμοιβαίας πληροφορίας μη επιλεκτικού κατά συχνότητα καναλιού αργών διαλείψεων, όπως αυτό εκφράστηκε στη σχέση (2.54). Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{S}; \mathbf{R} | \bar{\mathbf{C}}) &\leq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|\mathbf{\Lambda}_{(\bar{\mathbf{C}}+\bar{\mathbf{C}})} \mathbf{s} + \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{N}}|}{|\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{N}}|} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left( |\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{\Lambda}_{(\bar{\mathbf{C}}+\bar{\mathbf{C}})} \mathbf{s} + \mathbf{I}| \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left( |\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{N}}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{C}}^T + \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{\Lambda}_{\bar{\mathbf{C}}\mathbf{S}} + \mathbf{I}| \right). \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

Το παραπάνω φράγμα αποτελεί τη χωρητικότητα που θα προέκυπτε στέλνοντας Gaussian σήμα συνδιασποράς  $\mathbf{\Lambda}_{(\bar{\mathbf{C}}+\bar{\mathbf{C}})} \mathbf{s}$  μέσω ενός καναλιού λευκού προσθετικού θορύβου με πίνακα συνδιασποράς  $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{N}}$  [8].



## Κεφάλαιο 3

# Μεγιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ εισόδου - εξόδου ενός καναλιού με χρήση συμβόλων εκπαίδευσης

---

### 3.1 Εισαγωγή

Σε πολλά συστήματα επικοινωνίας χρησιμοποιούνται δείγματα εκπαίδευσης για την εκτίμηση του καναλιού. Στην περίπτωση αυτή δημιουργούνται δύο προβλήματα τα οποία πρέπει να αντιμετωπιστούν: αν χρησιμοποιηθούν λίγα δείγματα για εκπαίδευση το κανάλι δεν εκτιμάται ικανοποιητικά, ενώ αν χρησιμοποιηθούν πολλά δεν μένει χρόνος για την αποστολή των δεδομένων. Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκε το κατά πόσο τα σφάλματα εκτίμησης του καναλιού επηρεάζουν τη χωρητικότητά του.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστεί η μελέτη των Srihari Adireddy, Lang Tong

και Harish Viswanathan, οι οποίοι υπολογίζουν τη βέλτιστη διάταξη των συμβόλων εκπαίδευσης (training symbols) για την εκτίμηση του καναλιού, όπου η βελτιστότητα ορίζεται ως προς τη μεγιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας [9].

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στη συνέχεια, για απλούστευση του συμβολισμού, οι τυχαίες μεταβλητές και οι υλοποιήσεις τους θα συμβολίζονται με τον ίδιο τρόπο.

## 3.2 Περιγραφή συστήματος

Το κανάλι που μελετάται είναι επιλεκτικό κατά συχνότητα και έχει κρουστική απόκριση που δίνεται από το διάνυσμα  $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_L]^T$ . Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα  $\mathbf{c}$  αποτελείται από  $L + 1$  ανεξάρτητα ομοιόμορφα κατανομημένα Gaussian δείγματα, μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς  $\frac{1}{L+1}$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η κρουστική απόκριση παραμένει σταθερή για χρόνο  $T$  περιόδων συμβόλου, έπειτα παίρνει τιμές ανεξάρτητες των προηγούμενων και παραμένει σταθερή για χρόνο  $T$  περιόδων συμβόλου, κατόπιν αλλάζει κ.ο.κ. Θεωρούμε ότι ούτε ο πομπός ούτε ο δέκτης γνωρίζουν το κανάλι.

Τα σύμβολα που στέλνουμε είναι σε μορφή πακέτων μήκους  $(T - L)$ . Στην αρχή κάθε πακέτου προστίθεται ένα μπλοκ  $\mathbf{s}_k$ , μήκους  $L$ , με γνωστά σύμβολα.

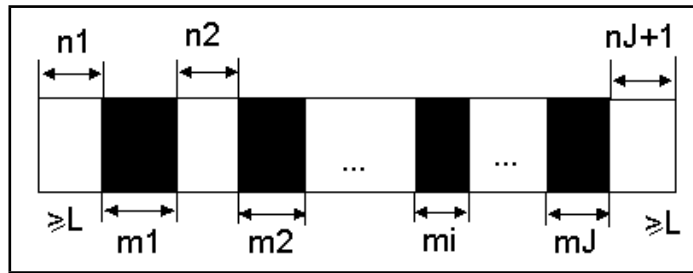
Για το χρονικό διάστημα  $T$  περιόδων συμβόλου που θεωρούμε ότι το κανάλι παραμένει σταθερό, το σύστημα μας μπορεί να περιγραφεί από την παρακάτω σχέση:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_T \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_L & \cdots & c_0 & & & \\ & c_L & \cdots & c_0 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \ddots & & \ddots \\ & & & & c_L & c_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{s}_k \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{N+P} \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}} + \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_T \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}}. \quad (3.1)$$

Ο προσθετικός θόρυβος  $\mathbf{n}$  είναι Gaussian μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς  $\sigma_n^2 \mathbf{I}$ . Το σήμα στην έξοδο του καναλιού  $\mathbf{r}$  είναι συνάρτηση των συμβόλων του τρέχοντος πακέτου

$\mathbf{s} = [\mathbf{s}_k^T, s_1, \dots, s_T]^T$  και του μπλοκ των γνωστών συμβόλων  $\mathbf{s}_k$  στην αρχή του επόμενου πακέτου.

Κάθε πακέτο  $\mathbf{s}$  αποτελείται από  $N$  άγνωστα και  $P+L$  γνωστά σύμβολα. Τα γνωστά σύμβολα τοποθετούνται σε μπλοκς μήκους  $a \geq L$ . Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η διάταξη του διανύσματος  $[\mathbf{s}^T \mathbf{s}_k^T]^T$ . Γενικά, κάθε διάταξη προσδιορίζεται από δύο δείκτες  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ . Ο δείκτης  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_j)$  δίνει τα μήκη των μπλοκς με τα άγνωστα σύμβολα, ενώ ο δείκτης  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_{j+1})$  δίνει τα μήκη των μπλοκς με τα γνωστά σύμβολα.



Σχήμα 10: Διάταξη πακέτου.

Αφού κάθε πακέτο αρχίζει με τουλάχιστον  $L$  γνωστά σύμβολα, το  $n_1$  είναι τουλάχιστον ίσο με  $L$ . Επίσης, εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι το  $J+1$  μπλοκ των γνωστών συμβόλων περιέχει τα πρώτα  $L$  γνωστά σύμβολα της αρχής του επόμενου πακέτου. Επομένως, εφόσον το  $n_{j+1}$  είναι τουλάχιστον ίσο με  $L$ , η μικρότερη τιμή του  $j$  είναι η μονάδα και αντιστοιχεί στην περίπτωση που όλα τα σύμβολα εκπαίδευσης τοποθετούνται στο τέλος του πακέτου.

Ο δέκτης αποτελείται από έναν εκτιμητή καναλιού και έναν αποκωδικοποιητή. Η εκτίμηση  $\hat{\mathbf{c}}$  που λαμβάνουμε βασίζεται μόνο στα σύμβολα εκπαίδευσης. Εφόσον το κανάλι αλλάζει από μπλοκ σε μπλοκ, ο εκτιμητής λειτουργεί ανά μπλοκ. Αν με  $s_{it}^k$  συμβολίζεται το  $k$ -οστό σύμβολο, του  $i$ -οστού μπλοκ εκπαίδευσης, τότε το διάνυσμα των συμβόλων εκπαίδευσης θα είναι:

$$\mathbf{s}_t = [s_{1t}^1 \dots s_{1t}^{n_1} \dots s_{(j+1)t}^1 \dots s_{(j+1)t}^{n_{j+1}}]^T.$$

Το διάνυσμα  $\mathbf{s}_k$  των γνωστών συμβόλων στην αρχή κάθε μπλοκ θα είναι:

$$\mathbf{s}_k = [s_{1t}^1 \dots s_{1t}^L]^T.$$

Συμβολίζουμε με  $\mathbf{r}_t$  το μέρος του λαμβανόμενου σήματος που οφείλεται μόνο στα σύμβολα εκπαίδευσης. Το υπόλοιπο μέρος του λαμβανόμενου σήματος συμβολίζεται με  $\mathbf{r}_d$ . Ο αποκωδικοποιητής χρησιμοποιεί τα  $\mathbf{r}_d$ ,  $\hat{\mathbf{c}} = g(\mathbf{r}_t, \mathbf{s}_t)$  και  $\mathbf{s}_t$  για να κάνει την αποκωδικοποίηση [9].

Η συνολική ισχύς εκπομπής  $P$  διατίθεται κατά ένα μέρος  $P_t$  για την εκτίμηση του καναλιού και κατά ένα μέρος  $P_d$  για την αποστολή των δεδομένων  $\mathbf{s}_d$ . Ο περιορισμός ισχύος καθορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{1}{(N + P + L)} \left( E\text{tr}(\mathbf{s}_d \mathbf{s}_d^H) + \text{tr}(\mathbf{s}_t \mathbf{s}_t^H) \right) = 1. \quad (3.2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $P_d = \frac{1}{N} E\text{tr}(\mathbf{s}_d \mathbf{s}_d^H)$  και  $P_t = \frac{1}{P+L} \text{tr}(\mathbf{s}_t \mathbf{s}_t^H)$ , η (3.2) γίνεται:

$$\frac{NP_d + (P + L)P_t}{N + P + L} = 1.$$

### 3.3 Ορισμός του προβλήματος

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη βέλτιστη διάταξη των συμβόλων εκπαίδευσης. Ορίζουμε ως  $\mathcal{P} = (\mathbf{m}, \mathbf{n})$  τη διάταξη των γνωστών συμβόλων και των δεδομένων. Η χωρητικότητα του συστήματος ορίζεται ως εξής:

$$C(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t) \triangleq \max_{f_{i.i.d}(\mathbf{s}_d)} I(\mathbf{r}_d, \hat{\mathbf{c}}; \mathbf{s}_d), \quad (3.3)$$

όπου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f_{i.i.d}(\mathbf{s}_d)$  και τα σύμβολα εκπαίδευσης  $\mathbf{s}_t$  είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός ισχύος. Στόχος είναι να βρεθεί η βέλτιστη διάταξη  $\mathcal{P}^\circ = (\mathbf{m}^\circ, \mathbf{n}^\circ)$ , η βέλτιστη κατανομή ισχύος  $(P_d^\circ, P_t^\circ)$  και τα βέλτιστα σύμβολα εκπαίδευσης  $\mathbf{s}_t^\circ$ , έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η χωρητικότητα του συστήματος, δηλαδή:

$$(\mathcal{P}^\circ, P_d^\circ, P_t^\circ, \mathbf{s}_t^\circ) = \arg \max_{\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t} C(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t).$$

### 3.4 Εκτίμηση του καναλιού

Η έξοδος του καναλιού  $\mathbf{r}_t$ , η οποία οφείλεται μόνο στα δείγματα εκπαίδευσης, δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{S}_t \mathbf{c} + \mathbf{n}_t \quad (3.4)$$

όπου

$$\mathbf{S}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1t} \\ \mathbf{S}_{1t} \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{(J+1)t} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{S}_{it}$  είναι ένας  $(n_i - L) \times (L + 1)$  Toeplitz πίνακας, ο οποίος σχηματίζεται από τα σύμβολα του  $i$ -οστού μπλοκ εκπαίδευσης ως εξής:

$$\mathbf{S}_{it} = \begin{bmatrix} s_{it}^{(L+1)} & \cdots & s_{it}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{it}^{n_i} & \cdots & s_{it}^{(n_i-L)} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Η εκτίμηση του καναλιού σύμφωνα με τον εκτιμητή ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MMSE) θα είναι:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{c}} &= \text{Cov}_{\mathbf{c}\mathbf{r}_t} \text{Cov}_{\mathbf{r}_t\mathbf{r}_t}^{-1} \mathbf{r}_t \\ &= E \left[ \mathbf{c}(\mathbf{S}_t \mathbf{c} + \mathbf{n}_t)^H \right] \left( E \left[ (\mathbf{S}_t \mathbf{c} + \mathbf{n}_t)(\mathbf{S}_t \mathbf{c} + \mathbf{n}_t)^H \right] \right)^{-1} \mathbf{r}_t \\ &= E \left[ \mathbf{c}\mathbf{c}^H \mathbf{S}_t^H + \mathbf{c}\mathbf{n}_t^H \right] \left( E \left[ \mathbf{S}_t \mathbf{c}\mathbf{c}^H \mathbf{S}_t^H + \mathbf{S}_t \mathbf{c}\mathbf{n}_t^H + \mathbf{n}_t \mathbf{c}^H \mathbf{S}_t^H + \mathbf{n}_t \mathbf{n}_t^H \right] \right)^{-1} \mathbf{r}_t \\ &= \frac{1}{L+1} \mathbf{S}_t^H \left( \mathbf{S}_t \frac{1}{L+1} \mathbf{S}_t^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{r}_t \\ &= \mathbf{S}_t^H \left( \mathbf{S}_t \mathbf{S}_t^H + (L+1)\sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{r}_t. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ορίζουμε το σφάλμα εκτίμησης ως εξής:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}. \quad (3.8)$$

Επομένως, ο πίνακας συνδιασποράς του είναι:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{c}}^H] &= E[(\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}})(\mathbf{c}^H - \hat{\mathbf{c}}^H)] \\
&= (\text{Cov}_{\mathbf{c}}^{-1} + \mathbf{S}_t^H \text{Cov}_{\mathbf{n}_t}^{-1} \mathbf{S}_t)^{-1} \\
&= \left( \left( \frac{\mathbf{I}}{L+1} \right)^{-1} + \mathbf{S}_t^H (\sigma_n^2)^{-1} \mathbf{S}_t \right)^{-1} \\
&= \left( (L+1) + \frac{(L+1)\mathbf{S}_t^H \mathbf{S}_t}{(L+1)\sigma_n^2} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{L+1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{S}_t^H \mathbf{S}_t}{\sigma^2} \right)^{-1} \tag{3.9}
\end{aligned}$$

όπου  $\sigma^2 = (L+1)\sigma_n^2$ .

Αν περιοριστούμε σε ορθογώνιους πίνακες εκπαίδευσης, δηλαδή σε πίνακες  $\mathbf{S}_t$  για τους οποίους  $\mathbf{S}_t^H \mathbf{S}_t = c\mathbf{I}$ , η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$E[\tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{c}}^H] = \frac{\mathbf{I}}{(L+1)(1 + \frac{c}{\sigma^2})}. \tag{3.10}$$

Τα λάθη εκτίμησης  $\tilde{\mathbf{c}}$  είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους και ως γνωστόν είναι ορθογώνια με την εκτίμηση  $\hat{\mathbf{c}}$  του καναλιού. Ο πίνακας συνδιασποράς της εκτίμησης  $\hat{\mathbf{c}}$  μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
E[\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{c}}^H] &= E[\mathbf{c}\mathbf{c}^H] - E[\tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{c}}^H] \\
&= \frac{\mathbf{I}}{L+1} - \frac{\mathbf{I}}{(L+1)(1 + \frac{c}{\sigma^2})} \\
&= \frac{\mathbf{I}}{L+1} \left( \frac{\frac{c}{\sigma^2}}{1 + \frac{c}{\sigma^2}} \right). \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Ο περιορισμός για την ισχύ που διατίθεται για την εκπαίδευση του καναλιού, στην περίπτωση αυτή, είναι:

$$c \leq (P+L)P_t. \tag{3.12}$$

### 3.5 Κάτω φράγμα χωρητικότητας

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, είναι δύσκολο να υπολογιστεί η χωρητικότητα  $C(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t)$  του καναλιού. Για το λόγο αυτό, αρχικά θα υπολογίσουμε ένα κάτω φράγμα, το οποίο στη συνέχεια θα βελτιστοποιήσουμε. Η χωρητικότητα δίνεται από τη σχέση <sup>1</sup>:

$$C(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t) = \max_{f.i.d(\mathbf{s}_d)} I(\mathbf{r}_d; \mathbf{s}_d | \hat{\mathbf{c}}). \quad (3.13)$$

Η σχέση εισόδου - εξόδου του καναλιού για το  $\mathbf{r}_d$  είναι:

$$\mathbf{r}_d = \mathbf{C}_d \cdot \mathbf{s}_d + \mathbf{T}\mathbf{c} + \mathbf{n}_d. \quad (3.14)$$

Η σχέση (3.14) γράφεται αναλυτικά ως εξής:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1d} \\ \mathbf{r}_{2d} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{Jd} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_d} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{C}_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_{m_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \mathcal{C}_{m_J} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_d} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{1d} \\ \mathbf{s}_{2d} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{Jd} \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_d} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_J \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{n}_d. \quad (3.15)$$

Κάθε στοιχείο του πίνακα  $\mathbf{C}_d$ ,  $\mathbf{C}_{m_i}$ , είναι Toeplitz πίνακας μεγέθους  $(m_i + L) \times m_i$  της μορφής:

$$\mathbf{C}_{m_i} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & c_1 & \ddots & 0 \\ c_L & \vdots & \ddots & c_0 \\ 0 & c_L & & c_1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & c_L \end{bmatrix}_{(m_i+L) \times m_i}. \quad (3.16)$$

<sup>1</sup>Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας στην (3.3) προκύπτει:  $I(\mathbf{r}_d, \hat{\mathbf{c}}; \mathbf{s}_d) = \underbrace{I(\hat{\mathbf{c}}; \mathbf{s}_d)}_0 + I(\mathbf{r}_d; \mathbf{s}_d | \hat{\mathbf{c}})$ .

Το διάνυσμα  $\mathbf{s}_d$  είναι ένα μπλοκ διάνυσμα. Κάθε στοιχείο του,  $\mathbf{s}_{id}$ , είναι διάνυσμα μήκους  $m_i$ , που αποτελείται από τα σύμβολα δεδομένων του  $i$ -οστού άγνωστου μπλοκ συμβόλων ( $s_{id}^1 \cdots s_{id}^{m_i}$ ).

Ο πίνακας  $\mathbf{T}_i$  είναι συνάρτηση των  $L$  συμβόλων εκπαίδευσης ( $s_{it}^{n_i-L+1}, \dots, s_{it}^{n_i}$ ) και ( $s_{(i+1)t}^1, \dots, s_{(i+1)t}^L$ ), πριν και μετά το  $i$ -οστό μπλοκ των άγνωστων συμβόλων και έχει τη μορφή:

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 0 & s_{it}^{n_i} & s_{it}^{n_i-1} & \cdots & s_{it}^{n_i-L+1} \\ 0 & 0 & s_{it}^{n_i} & \cdots & s_{it}^{n_i-L+1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & s_{it}^{n_i} \\ s_{(i+1)t}^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s_{(i+1)t}^2 & s_{(i+1)t}^1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ s_{(i+1)t}^L & \cdots & \cdots & s_{(i+1)t}^1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Οι πίνακες αυτοί εισάγονται στους υπολογισμούς γιατί τα πρώτα και τα τελευταία  $L$  δείγματα του  $\mathbf{r}_{id}$  εξαρτώνται από τα σύμβολα εκπαίδευσης.

Το λαμβανόμενο σήμα  $\mathbf{r}_d$  μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση της εκτίμησης  $\hat{\mathbf{c}}$  και του σφάλματος εκτίμησης  $\tilde{\mathbf{c}}$  ως εξής:

$$\mathbf{r}_d = \hat{\mathbf{C}}_d \mathbf{s}_d + \mathbf{T} \hat{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{C}}_d \mathbf{s}_d + \mathbf{T} \tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{n}_d. \quad (3.18)$$

Αν αφαιρέσουμε τη σταθερή ποσότητα  $\mathbf{T} \hat{\mathbf{c}}$  από το  $\mathbf{r}_d$  προκύπτει:

$$\hat{\mathbf{r}}_d = \hat{\mathbf{C}}_d \mathbf{s}_d + \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_d \mathbf{s}_d + \mathbf{T} \tilde{\mathbf{c}}}_{\mathbf{v}_d} + \mathbf{n}_d. \quad (3.19)$$

Επειδή η αφαίρεση σταθερής ποσότητας δε μεταβάλλει την αμοιβαία πληροφορία, έχουμε:

$$I(\mathbf{r}_d; \mathbf{s}_d | \hat{\mathbf{c}}) = I(\hat{\mathbf{r}}_d; \mathbf{s}_d | \hat{\mathbf{c}}). \quad (3.20)$$

Ο αναλυτικός υπολογισμός της  $I(\hat{\mathbf{r}}_d; \mathbf{s}_d | \hat{\mathbf{c}})$  είναι δύσκολος, γι' αυτό θα εξάγουμε ένα κάτω



φράγμα. Αρχικά, θα υπολογίσουμε τις υπό συνθήκη στατιστικές πρώτης και δεύτερης τάξης του  $\mathbf{v}_d$  ως εξής:

Μέση τιμή:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}_d|\hat{\mathbf{c}}] &= E[\tilde{\mathbf{C}}_d \mathbf{s}_d + \mathbf{T}\tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{n}_d|\hat{\mathbf{c}}] \\ &= E[\tilde{\mathbf{C}}_d|\hat{\mathbf{c}}]\mathbf{s}_d + \mathbf{T}E[\tilde{\mathbf{c}}|\hat{\mathbf{c}}] + E[\mathbf{n}_d] \\ &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{s}_d + \mathbf{T} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Πίνακας συνδιασποράς:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}_d \mathbf{v}_d^H|\hat{\mathbf{c}}] &= E[(\tilde{\mathbf{C}}_d \mathbf{s}_d + \mathbf{T}\tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{n}_d)(\mathbf{s}_d^H \tilde{\mathbf{C}}_d^H + \tilde{\mathbf{c}}^H \mathbf{T}^H + \mathbf{n}_d^H)|\hat{\mathbf{c}}] \\ &= E[\tilde{\mathbf{C}}_d \mathbf{s}_d \mathbf{s}_d^H \tilde{\mathbf{C}}_d^H] + E[\mathbf{T}\tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{c}}^H \mathbf{T}^H] + E[\mathbf{n}_d \mathbf{n}_d^H] \\ &= P_d E[\tilde{\mathbf{C}}_d \tilde{\mathbf{C}}_d^H] + \frac{1}{(L+1)(1+\frac{c}{\sigma^2})} \mathbf{T}\mathbf{T}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \\ &\triangleq \mathbf{R}_v. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για δεδομένο πίνακα συνδιασποράς θορύβου η χωρητικότητα του καναλιού ελαχιστοποιείται αν ο θόρυβος είναι Gaussian <sup>2</sup>.

Επομένως, ισχύει:

$$\begin{aligned} C(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t) &\geq C_{lb}(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t) \\ C_{lb}(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t) &= E \left[ \log \det \left( \mathbf{I} + P_d \mathbf{R}_v^{-1} \hat{\mathbf{C}}_d \hat{\mathbf{C}}_d^H \right) \right], \end{aligned} \tag{3.22}$$

όπου η μέση τιμή λαμβάνεται ως προς την εκτίμηση  $\hat{\mathbf{c}}$ . Η χωρητικότητα αυτή αποτελεί τη χωρητικότητα που προκύπτει όταν στέλνουμε Gaussian σήμα με πίνακα συνδιασποράς  $P_d \mathbf{I}$  μέσω ενός καναλιού  $\hat{\mathbf{C}}_d$  με Gaussian προσθετικό θόρυβο με πίνακα συνδιασποράς  $\mathbf{R}_v$ .

---

<sup>2</sup>Λήμμα 5.2.1. [11].

Ο πίνακας  $P_d E[\tilde{\mathbf{C}}_d \tilde{\mathbf{C}}_d^H]$  της (3.21) είναι της μορφής:

$$P_d E[\tilde{\mathbf{C}}_d \tilde{\mathbf{C}}_d^H] = \begin{bmatrix} P_d E[\tilde{\mathbf{C}}_{m_1} \tilde{\mathbf{C}}_{m_1}^H] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_d E[\tilde{\mathbf{C}}_{m_2} \tilde{\mathbf{C}}_{m_2}^H] & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & P_d E[\tilde{\mathbf{C}}_{m_j} \tilde{\mathbf{C}}_{m_j}^H] \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Κάθε πίνακας  $E[\tilde{\mathbf{C}}_{m_j} \tilde{\mathbf{C}}_{m_j}^H]$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας, διότι τα σφάλματα εκτίμησης είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους (βλέπε 3.10). Κάθε διαγώνιο στοιχείο είναι μικρότερο ή ίσο με το  $\text{tr} E[\tilde{\mathbf{c}} \tilde{\mathbf{c}}^H] = \frac{1}{1 + \frac{c}{\sigma^2}}$ . Ορίζουμε τον πίνακα  $\mathbf{R}_{vl}$  ως εξής:

$$\mathbf{R}_{vl} = \left( \frac{P_d}{1 + \frac{c}{\sigma^2}} + \sigma_n^2 \right) \mathbf{I} + \frac{1}{(L+1)(1 + \frac{c}{\sigma^2})} \mathbf{T} \mathbf{T}^H. \quad (3.24)$$

Από τις σχέσεις (3.21) και (3.24), προκύπτει ότι <sup>3</sup>:

$$|\mathbf{I} + P_d \mathbf{R}_{vl}^{-1} \hat{\mathbf{C}}_d \hat{\mathbf{C}}_d^H| \leq |\mathbf{I} + P_d \mathbf{R}_v^{-1} \hat{\mathbf{C}}_d \hat{\mathbf{C}}_d^H|. \quad (3.25)$$

Η (3.25) χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του κάτω φράγματος της (3.22), που τώρα μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$C_{lb}(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t) = E \left[ \log \left| \mathbf{I} + P_d \frac{\frac{c}{\sigma^2}}{1 + \frac{c}{\sigma^2}} \mathbf{R}_{vl}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_d \bar{\mathbf{C}}_d^H \right| \right] \quad (3.26)$$

όπου ο πίνακας  $\bar{\mathbf{C}}_d$  προκύπτει από κανονικοποίηση του  $\hat{\mathbf{C}}_d$ . Πιο συγκεκριμένα, το κανάλι  $\bar{\mathbf{c}}$  που παράγει το  $\bar{\mathbf{C}}_d$  έχει στοιχεία α.ο.κ., κανονικής κατανομής με μηδενική μέση τιμή και διασπορά  $\frac{1}{L+1}$  (βλέπε 3.11) [9].

### 3.6 Βελτιστοποίηση με διατάξεις QPP

Στο εδάφιο αυτό, θα μελετηθεί η βέλτιστη διάταξη για τα γνωστά και άγνωστα μπλοκ δεδομένων.

<sup>3</sup>Για θετικά ορισμένους πίνακες ισχύει ότι αν  $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$  τότε  $|\mathbf{A}^{-1}| \leq |\mathbf{B}^{-1}|$ . Οι πίνακες αυτοσυσχέτισης είναι θετικά ορισμένοι και ισχύει  $\mathbf{R}_{vl} \geq \mathbf{R}_v$ , επομένως μπορεί να εφαρμοστεί η παραπάνω ιδιότητα.

### 3.6.1 Διατάξεις QPP

Οι διατάξεις QPP αποτελούν οικογένεια διατάξεων, οι οποίες χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες με βάση το ελάχιστο επιτρεπόμενο μέγεθος του μπλοκ των γνωστών συμβόλων. Η κατηγορία για την οποία το  $\alpha$  είναι το ελάχιστο μέγεθος του μπλοκ συμβολίζεται με  $QPP - \alpha$ . Η διάταξη  $QPP - \alpha$  σχηματίζεται χωρίζοντας πρώτα τα γνωστά σύμβολα σε όσο το δυνατόν περισσότερα μπλοκς, κάθε ένα μεγέθους τουλάχιστον  $\alpha$ , και έπειτα τοποθετώντας τα έτσι, ώστε τα άγνωστα σύμβολα να είναι ισοκατανεμημένα.

**Ορισμός:** Με δεδομένο το  $\alpha$  και ένα μπλοκ με  $N$  άγνωστα και  $P \geq \alpha$  γνωστά σύμβολα, ορίζουμε  $J_\alpha = \lfloor \frac{P}{\alpha} \rfloor + 1$ . Μία διάταξη  $\mathcal{P} = (\mathbf{n}, \mathbf{m})$  ανήκει στην κατηγορία  $QPP - \alpha$  αν και μόνο αν:

1.  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}^{J_\alpha}$ , όπου

$$\mathcal{N}^{J_\alpha} = \left\{ (n_1, \dots, n_{J_\alpha+1}) : \sum_{i=2}^{J_\alpha} n_i = P \quad \& \quad n_1 = n_{J_\alpha+1} = L \right. \\ \left. \& \quad \min(n_2, \dots, n_{J_\alpha}) \geq \alpha \right\}. \quad (3.27)$$

2.  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}^{J_\alpha}$ , όπου

$$\mathcal{M}^{J_\alpha} = \left\{ (m_1, \dots, m_{J_\alpha}) : \sum_i m_i = N \quad \& \quad m_i \in \left\{ \left\lfloor \frac{N}{J_\alpha} \right\rfloor, \left( \left\lfloor \frac{N}{J_\alpha} \right\rfloor + 1 \right) \right\} \right\}. \quad (3.28)$$

Κάθε στοιχείο του  $\mathcal{N}^{J_\alpha}$  συμβολίζεται ως  $\mathbf{n}_{J_\alpha} = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_{J_\alpha})$ . Ανάλογα, κάθε στοιχείο του  $\mathcal{M}^{J_\alpha}$  συμβολίζεται με  $\mathbf{m}_{J_\alpha} = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_{J_\alpha})$  [9].

### 3.6.2 Βελτιστότητα των διατάξεων QPP-α για άγνωστο κανάλι

Στην παράγραφο αυτή, θα υπολογιστεί μία βέλτιστη τετράδα  $(\mathcal{P}^o, P_d^o, P_t^o, \mathbf{s}_t^o)$ :

$$(\mathcal{P}, P_d^o, P_t^o, \mathbf{s}_t^o) = \arg \max_{\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t} C_{lb}(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t). \quad (3.29)$$

Υπολογίζουμε πρώτα ένα μέγιστο του κάτω φράγματος  $C_{lb}(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t)$  της χωρητικότητας του καναλιού. Από την (3.26) είναι γνωστό ότι δίνεται από τη σχέση:

$$C_{lb}(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t) = E \left[ \log \left| \mathbf{I} + P_d \frac{c}{1 + \frac{c}{\sigma_n^2}} \mathbf{R}_{vl}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_d \bar{\mathbf{C}}_d^H \right| \right], \quad (3.30)$$

όπου

$$\mathbf{R}_{vl} = \left( \frac{P_d}{1 + \frac{c}{\sigma_n^2}} + \sigma_n^2 \right) \mathbf{I} + \frac{1}{(L+1)(1 + \frac{c}{\sigma_n^2})} \mathbf{T} \mathbf{T}^H. \quad (3.31)$$

Από την (3.31) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{R}_{vl} \geq \left( \frac{P_d}{1 + \frac{c}{\sigma_n^2}} + \sigma_n^2 \right) \mathbf{I}. \quad (3.32)$$

Επιπλέον, αν  $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ , και  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  πίνακες θετικά ορισμένοι, τότε  $\mathbf{A}^{-1} \leq \mathbf{B}^{-1}$ . Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.12) και (3.32), καθώς επίσης και την ιδιότητα της ορίζουσας  $|\mathbf{I} + \mathbf{AB}| = |\mathbf{I} + \mathbf{BA}|$ , το μέγιστο του  $C_{lb}(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t)$  διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} C_{lb}(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t) &\leq E \left[ \log \left| \mathbf{I} + \frac{P_d}{\sigma_n^2} \frac{c}{c + (L+1)(P_d + \sigma_n^2)} \bar{\mathbf{C}}_d \bar{\mathbf{C}}_d^H \right| \right] \\ &\leq E \left[ \log \left| \mathbf{I} + \frac{P_d}{\sigma_n^2} \frac{(P+L)P_t}{(P+L)P_t + (L+1)(P_d + \sigma_n^2)} \bar{\mathbf{C}}_d^H \bar{\mathbf{C}}_d \right| \right] \\ &= \sum_{i=1}^J E \left[ \log \left| \mathbf{I} + \frac{P_d}{\sigma_n^2} \frac{(P+L)P_t}{(P+L)P_t + (L+1)(P_d + \sigma_n^2)} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{m_i}^H \bar{\mathbf{C}}_{m_i} \right| \right] \\ &\triangleq \sum_{i=1}^J g(P_d, P_t, m_i). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Οι πίνακες  $\bar{\mathbf{C}}_{m_i}^H \bar{\mathbf{C}}_{m_i}$  είναι θετικά ορισμένοι Toeplitz πίνακες. Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχτεί ως εξής:

$$\bar{\mathbf{C}}_{m_i}^H \bar{\mathbf{C}}_{m_i} = \begin{bmatrix} \bar{c}_0^* & \cdots & \bar{c}_L^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{c}_0^* & \cdots & \bar{c}_L^* & 0 & \cdots \\ \vdots & & \cdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_0^* & \cdots & \bar{c}_L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_0 & & \vdots \\ \vdots & \bar{c}_1 & \ddots & 0 \\ \bar{c}_L & \vdots & \ddots & \bar{c}_0 \\ 0 & \bar{c}_L & & \bar{c}_1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \bar{c}_L \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum |\bar{c}_i|^2 & \sum \bar{c}_{i-1}^* \bar{c}_i & \cdots & \sum \bar{c}_{i-m_i}^* \bar{c}_i \\ \sum \bar{c}_i^* \bar{c}_{i-1} & \sum |\bar{c}_i|^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \bar{c}_i^* \bar{c}_{i-m_i} & \cdots & \cdots & \sum |\bar{c}_i|^2 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Επιπλέον, μπορεί να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση  $g$  που ορίζεται στην (3.33) έχει την ιδιότητα:

$$2g(P_d, P_t, n) \geq g(P_d, P_t, n+k) + g(P_d, P_t, n-k), \quad (3.35)$$

$\forall n \in \mathcal{Z}^+$ , &  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ <sup>4</sup>.

Από την παραπάνω ιδιότητα, η οποία ουσιαστικά υποδεικνύει ότι η συνάρτηση  $g$  παρουσιάζει χαρακτηριστικά κοίλης (concave) συνάρτησης, μπορεί να αποδειχθεί ότι:

- για  $J = J_\alpha$ , ισχύει:

$$\sum_{i=1}^J g(P_d, P_t, m_i) \leq \sum_{i=1}^{J_\alpha} g(P_d, P_t, \bar{m}_i), \quad (3.36)$$

όπου  $\mathbf{m}_{J_\alpha} = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_{J_\alpha})$  είναι ο δείκτης που δίνει τα μήκη των μπλοκ των άγνωστων συμβόλων για τη διάταξη  $QPP - \alpha$ .

- για  $J < J_\alpha$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^J g(P_d, P_t, m_i) &= \sum_{i=1}^J g(P_d, P_t, m_i) + \underbrace{\sum_{i=J+1}^{J_\alpha} g(P_d, P_t, 0)}_0 \\ &= \sum_{i=1}^{J_\alpha} g(P_d, P_t, \acute{m}_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{J_\alpha} g(P_d, P_t, \bar{m}_i), \end{aligned} \quad (3.37)$$

όπου  $\acute{m}_i = m_i$ , για  $i = 1, \dots, J$  και  $\acute{m}_i = 0$ , για  $i = (J+1), \dots, J_\alpha$ . Η ανισότητα προκύπτει λόγω της (3.36). Τελικά, από τις (3.36) και (3.37) για  $J \leq J_\alpha$ , συνεπάγεται ότι:

$$\sum_{i=1}^J g(P_d, P_t, m_i) \leq \sum_{i=1}^{J_\alpha} g(P_d, P_t, \bar{m}_i). \quad (3.38)$$

<sup>4</sup>Η απόδειξη βρίσκεται στο Παράρτημα Β.

Κάτω από τον περιορισμό ότι κάθε μπλοκ γνωστών συμβόλων αποτελείται τουλάχιστον από  $\alpha$  σύμβολα, ο αριθμός των μπλοκ των άγνωστων συμβόλων είναι  $J \leq J_\alpha$ . Επομένως, το κάτω φράγμα της χωρητικότητας για δεδομένα με διάταξη  $QPP - \alpha$  φράσσεται ως εξής:

$$C_{lb}(\mathcal{P}, P_d, P_t, \mathbf{s}_t) \leq \sum_{i=1}^{J_\alpha} g(P_d, P_t, \bar{m}_i). \quad (3.39)$$

### Μία βέλτιστη επιλογή συμβόλων εκπαίδευσης

Υποθέτουμε ότι  $\alpha \geq (2L + 1)$  και  $P \geq \alpha$ . Η διάταξη  $P^\circ$  και τα σύμβολα εκπαίδευσης  $\mathbf{s}_t^\circ$  είναι βέλτιστα αν:

1.  $P^\circ$  ανήκει στην οικογένεια  $QPP - \alpha$

2.

$$|s_{it}^k| = \begin{cases} \sqrt{\frac{(P+L)P_t}{J-1}}, & \text{αν } k = (L+1), i = 2, \dots, J \\ 0, & \text{αλλιού.} \end{cases} \quad (3.40)$$

Η συγκεκριμένη επιλογή των συμβόλων εκπαίδευσης  $\mathbf{s}_t^\circ$ , όπως προκύπτει από την (3.40), συνεπάγεται ότι κάθε πακέτο αρχίζει με  $L$  μηδενικά. Επιπλέον, κάθε μπλοκ γνωστών συμβόλων αρχίζει και τελειώνει με  $L$  μηδενικά και έχει μόνο ένα μη μηδενικό σύμβολο εκπαίδευσης. Η ενέργεια που διατίθεται για την εκπαίδευση μοιράζεται ισόποσα σε όλα αυτά τα μπλοκ. Για αυτή την επιλογή εκπαίδευσης προκύπτει ότι ο πίνακας  $\mathbf{T}$  της (3.15) είναι μηδενικός πίνακας. Επιπλέον,  $\mathbf{S}_t^H \mathbf{S}_t = (P+L)P_t \mathbf{I}$ . Λόγω της σχέσης αυτής, ο πίνακας συνδιασποράς  $\mathbf{R}_{vl}$  γίνεται:

$$\mathbf{R}_{vl} = \frac{P_d}{1 + \frac{(P+L)P_t}{\sigma^2}} \mathbf{I}. \quad (3.41)$$

Το κάτω φράγμα μπορεί εύκολα να υπολογιστεί και είναι ίσο με:

$$C_{lb}(\mathcal{P}^\circ, P_d, P_t, \mathbf{s}_t^\circ) = \sum_{i=1}^{J_\alpha} g(P_d, P_t, \bar{m}_i). \quad (3.42)$$

Από την (3.39) προκύπτει ότι η διάταξη αυτή είναι βέλτιστη [9].

### 3.6.3 Η επιλογή της παραμέτρου $\alpha$

Το ελάχιστο μέγεθος  $\alpha$  του μπλοκ των γνωστών συμβόλων αποτελεί παράμετρο σχεδίασης του συστήματος. Για  $\alpha \geq 2L + 1$  ισχύει (βλέπε 3.42):

$$C_{lb}(\mathcal{P}^o, P_d, P_t, \mathbf{s}_t^o) = \sum_{i=1}^{J_\alpha} g(P_d, P_t, \bar{m}_i). \quad (3.43)$$

Παρατηρούμε ότι το κάτω φράγμα  $C_{lb}$  της χωρητικότητας εξαρτάται από το  $\alpha$  μόνο μέσω του  $J_\alpha$ . Όσο το  $\alpha$  μειώνεται, το  $J_\alpha$  αυξάνεται ( $J_\alpha = \lfloor \frac{P}{\alpha} \rfloor + 1$ ). Επομένως, αν  $\alpha_1 > \alpha_2$ , τότε  $J_{\alpha_2} > J_{\alpha_1}$  και λόγω της (3.38) ισχύει [9]:

$$\sum_{i=1}^{J_{\alpha_1}} g(P_d, P_t, \bar{m}_i) < \sum_{i=1}^{J_{\alpha_2}} g(P_d, P_t, \bar{m}_i). \quad (3.44)$$

Για  $\alpha \geq 2L + 1$ , το κάτω φράγμα της χωρητικότητας είναι μονότονα φθίνουσα συνάρτηση του  $\alpha$ . Επομένως, η επιλογή του  $\alpha$  που μεγιστοποιεί το κάτω φράγμα της χωρητικότητας είναι η  $\alpha = 2L + 1$ .

## 3.7 Η βέλτιστη κατανομή ενέργειας

Η διάταξη που αναλύσαμε είναι βέλτιστη για κάθε κατανομή ενέργειας. Στην παράγραφο αυτή, θα βρεθεί η βέλτιστη κατανομή ενέργειας μεταξύ εκπαίδευσης και δεδομένων, με την υπόθεση ότι τα δεδομένα είναι βέλτιστα διατεταγμένα και ότι χρησιμοποιούνται βέλτιστα σύμβολα εκπαίδευσης [9].

Από την (3.33) παρατηρούμε ότι η επίδραση των παραμέτρων  $P_d$  και  $P_t$  στο κάτω φράγμα της χωρητικότητας εμφανίζεται μόνο μέσω του όρου  $p_{eff}$ :

$$p_{eff} \triangleq \frac{P_d}{\sigma_n^2} \frac{(P + L)P_t}{(P + L)P_t + (L + 1)(P_d + \sigma^2)}. \quad (3.45)$$

Εφόσον ο λογάριθμος είναι αύξουσα συνάρτηση, για να μεγιστοποιηθεί αρκεί να μεγιστοποιήσουμε το όρισμά του, δηλαδή να βρούμε το μέγιστο  $p_{eff}$  κάτω από τον περιορισμό

ισχύος:

$$\frac{NP_d + (P + L)P_t}{N + P + L} = 1 \Rightarrow NP_d + (P + L)P_t = N + P + L = T. \quad (3.46)$$

Αν θεωρήσουμε  $q$  το ποσοστό ισχύος που διατίθεται στα δεδομένα, τότε  $NP_d = qT$  και  $(P + L)P_t = (1 - q)T$  [10].

Επομένως, η (3.45) μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} p_{eff} &= \frac{q\frac{T}{N}(1-q)T}{\sigma_n^2 \left[ (1-q)T + (L+1) \left( \sigma^2 + q\frac{T}{N} \right) \right]} \\ &= \frac{T^2}{N\sigma_n^2 T - qT + (L+1)\sigma^2 + q\frac{T}{N}(L+1)} \frac{q(1-q)}{1} \\ &= \frac{T^2}{N\sigma_n^2 T \frac{(N-L-1)}{N} \frac{(L+1)\sigma_n^2 + T}{T(1-\frac{L+1}{N})} - q} \frac{q(1-q)}{1} \\ &= \frac{T}{\sigma_n^2(N-L-1) \frac{(L+1)\sigma_n^2 + T}{T(1-\frac{L+1}{N})} - q} \frac{q(1-q)}{1}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Θέτουμε  $\gamma = \frac{(L+1)\sigma_n^2 + T}{T(1-\frac{L+1}{N})}$ , οπότε η (3.47) γίνεται:

$$p_{eff} = \frac{T}{\sigma_n^2(N-L-1)} \frac{q(1-q)}{\gamma - q}. \quad (3.48)$$

Για να βρούμε το μέγιστο της (3.48) ως προς  $q$  θα θέσουμε την παράγωγο ως προς  $q$  ίση με το μηδέν. Μπορεί να αποδειχτεί ότι:

$$\arg \max_{0 < q < 1} \frac{q(1-q)}{\gamma - q} = \gamma - \sqrt{\gamma(\gamma - 1)}. \quad (3.49)$$

Η βέλτιστη ποσότητα ενέργειας που χρησιμοποιείται για τη μετάδοση των δεδομένων είναι:

$$\begin{aligned} P_d^o &= \frac{qT}{N} = \frac{(\gamma - \sqrt{\gamma(\gamma - 1)})T}{N} \\ &= \frac{\sqrt{\gamma}}{z} \left( \sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma - 1} \right), \end{aligned} \quad (3.50)$$

όπου  $z = \frac{N}{T}$ .



Η βέλτιστη ποσότητα ενέργειας που χρησιμοποιείται για εκπαίδευση είναι:

$$P_t^o = \frac{(1-q)T}{P+L} = \frac{(\sqrt{\gamma}-1)(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\gamma-1})T}{P+L}. \quad (3.51)$$

# Επίλογος

---

Στην εργασία αυτή ασχοληθήκαμε με ασύρματα κανάλια. Τα ασύρματα κανάλια είναι χρονικά μεταβαλλόμενα, γι' αυτό το λόγο δώσαμε μία στατιστική περιγραφή τους.

Στη συνέχεια, παρουσιάσαμε ορισμούς για βασικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν τα ασύρματα κανάλια και δώσαμε έμφαση στη χωρητικότητα. Είδαμε ότι σε περίπτωση Gaussian καναλιού που είναι γνωστό στο δέκτη, η χωρητικότητα είναι δυνατό να υπολογιστεί αναλυτικά. Χρησιμοποιώντας μία εκτίμηση του καναλιού, υπολογίσαμε άνω και κάτω φράγματα της χωρητικότητας. Παρατηρήσαμε ότι το άνω φράγμα αντιστοιχεί στην περίπτωση που η επίδραση του σφάλματος εκτίμησης είναι εξ' ολοκλήρου θετική και το κάτω φράγμα την περίπτωση που η επίδραση του σφάλματος εκτίμησης είναι εξ' ολοκλήρου επιζήμια.

Έπειτα, παρουσιάσαμε το πρόβλημα σχεδίασης βέλτιστων διατάξεων συμβόλων εκπαίδευσης για ένα επιλεκτικό κατά συχνότητα κανάλι, θεωρώντας το σε επίπεδο μπλοκ δεδομένων. Υποθέσαμε ότι ο δέκτης εκτιμά το κανάλι με έναν γραμμικό εκτιμητή ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MMSE). Τα γνωστά σύμβολα τοποθετήθηκαν σε μπλοκς μήκους  $\alpha \geq 2L + 1$ , όπου  $L + 1$  η τάξη του καναλιού. Αποδείχθηκε ότι, για  $\alpha \geq 2L + 1$  οι διατάξεις γνωστών συμβόλων που ανήκουν στην οικογένεια QPP- $\alpha$  είναι βέλτιστες. Τέλος, παρουσιάστηκε μία από τις βέλτιστες διατάξεις και δόθηκαν εκφράσεις για τη βέλτιστη κατανομή της ισχύος στα σύμβολα εκπαίδευσης και στα δεδομένα.

# Βιβλιογραφία

- [1] Σταμάτης Κουρής. *Στοιχεία Θεωρίας Κεραιών και Διαδόσεως Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη , 1994-1996.
- [2] Φωτεινή Νιόβη Παυλίδου. *Κινητή Ραδιοεπικοινωνία*. Θεσσαλονίκη: 1999.
- [3] John. G. Proakis. *Digital Communications*. New York: McGraw-Hill, c1995.
- [4] Δημήτριος Χρυσουλίδης. *Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφοριών*. Θεσσαλονίκη: Υπηρεσία Δημοσιευμάτων, 1991.
- [5] Thomas M. Cover, *Elements of Information Theory*. New York:Wiley, c1991.
- [6] Ezio Biglieri, John Proakis and Shlomo Shamai “Fading Channel: Information -Theoretic and Communications Aspects,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.44, pp. 2619-2692, Oct. 1998.
- [7] Emre Telatar, “Capacity of Multi-antenna Gaussian Channels,” *European Trans. on Telecommunications*, Vol. 10, No. 6, pp. 585-595, Nov/Dec 1999.
- [8] Muriel Médard, “The Effect upon Capacity in Wireless Communicationw of Perfect and Imperfect Knowledge of the Channel,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 46, No 3, pp. 943-946, May 2000.

- [9] Srihari Adireddy, Lang Tong and Harish Viswanathan, "Optimal Placement of Training for Frequency - Selective Block - Fading Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.48, No. 8, pp. 2238-2353, August 2002.
- [10] B. Hassibi and B. Hochwald, "How much training is needed in multiple -antenna wireless links?," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, No. 4, pp. 951-963, April 2003 .
- [11] A. Lapidoth and S. Shamai, "Fading channels: How perfect need perfect side information be?," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 48, No. 5, pp. 1118-1134 , May 2002.

# Παράρτημα Α'

---

Στο παράρτημα αυτό θα παρουσιαστούν δύο μοντέλα καναλιών διακριτού χρόνου (αποτέλεσμα δειγματοληψίας). Πρώτα θα περιγραφεί το SISO κανάλι, δηλαδή κανάλι μίας κεραίας εκπομπής και μία λήψης και κατόπιν το MIMO κανάλι, δηλαδή κανάλι πολλών κεραιών εκπομπής ( $M_T$ ) και λήψης ( $M_R$ ).

## SISO κανάλι

Για την περίπτωση καναλιού μη-επιλεκτικού κατά συχνότητα (flat fading), το λαμβανόμενο (δειγματοληπτημένο) σήμα θα είναι:

$$r[k] = \sqrt{E_s}cs[k] + n[k]. \quad (\text{A'.1})$$

Για την περίπτωση καναλιού επιλεκτικού κατά συχνότητα (frequency selective) κάθε δείγμα του λαμβανόμενου σήματος δίνεται από τη σχέση:

$$r[k] = \sqrt{E_s} [c[L-1] \cdots c[1]c[0]] \begin{bmatrix} s[k-L+1] \\ \vdots \\ s[k+T-1] \end{bmatrix} + n[k]. \quad (\text{A'.2})$$

Για  $T$  συνεχόμενα δείγματα του λαμβανόμενου σήματος, η σχέση εισόδου - εξόδου μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix} r[k] \\ \vdots \\ r[k+T-1] \end{bmatrix} = \sqrt{E_s} \mathcal{C} \begin{bmatrix} s[k-L+1] \\ \vdots \\ s[k+T-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n[k] \\ \vdots \\ n[k+T-1] \end{bmatrix}, \quad (\text{A'.3})$$

όπου  $\mathcal{C}$  είναι ένας Toeplitz πίνακας διαστάσεων  $T \times (T+L-1)$  της μορφής:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} c[L-1] & \cdots & c[0] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c[L-1] & \cdots & c[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & c[L-1] & \cdots & c[0] \end{bmatrix}. \quad (\text{A'.4})$$

## MIMO κανάλι

Στην περίπτωση καναλιού μη-επιλεκτικού κατά συχνότητα, το κανάλι μοντελοποιείται με έναν πίνακα  $\mathbf{C}$ , διαστάσεων  $M_R \times M_T$ . Το μοντέλο δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{r}[k] = \sqrt{\frac{E_s}{M_T}} \mathbf{C} \mathbf{s}[k] + \mathbf{n}[k], \quad (\text{A'.5})$$

όπου  $\mathbf{r}[k]$  είναι το διάνυσμα του λαμβανόμενου σήματος διάστασης  $M_R \times 1$ ,  $\mathbf{s}[k]$  το διάνυσμα του εκπεμπόμενου σήματος διάστασης  $M_T \times 1$ , ενώ  $\mathbf{n}[k]$  το διάνυσμα του θορύβου διάστασης  $M_R \times 1$ .

## Παράρτημα Β'

---

Ένας συμμετρικός Toeplitz πίνακας διάστασης  $n$  αναπαρίσται ως εξής:

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} r_0 & \cdots & r_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n-1} & \cdots & r_0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B'.1})$$

Για κάθε  $n$ , ο πίνακας  $\mathbf{R}_n$  διαμερίζεται ως εξής:

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{n-1} & \mathbf{r}_n \\ \mathbf{r}_n^T & r_0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B'.2})$$

με

$$\mathbf{r}_n = \begin{bmatrix} r_n \\ r_{n-1} \\ \vdots \\ r_1 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω διαμέριση, η ορίζουσα του πίνακα  $\mathbf{R}_n$  μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\det(\mathbf{R}_n) = \det(\mathbf{R}_{n-1}) \det(r_0 - \mathbf{r}_n^T \mathbf{R}_{n-1}^{-1} \mathbf{r}_n). \quad (\text{B'.3})$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Levinson-Durbin, η ορίζουσα ενός πίνακα Toeplitz

μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά, σύμφωνα με τον τύπο:

$$\frac{\det(\mathbf{R}_n)}{\det(\mathbf{R}_{n-1})} = a_n = a_0 \prod_{i=1}^n (1 - k_i^2), \quad (\text{B'.4})$$

όπου  $|k_i| < 1$ .

Επομένως, για  $i < j$  συνεπάγεται ότι  $a_i \geq a_j$ .

Ο λόγος  $\frac{\det(\mathbf{R}_n)}{\det(\mathbf{R}_{n-k})}$  μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\det(\mathbf{R}_n)}{\det(\mathbf{R}_{n-k})} = \frac{\det(\mathbf{R}_n)}{\det(\mathbf{R}_{n-1})} \cdots \frac{\det(\mathbf{R}_{n-k+1})}{\det(\mathbf{R}_{n-k})} = a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_{n-k+1}. \quad (\text{B'.5})$$

Ομοίως, ο λόγος  $\frac{\det(\mathbf{R}_{n+k})}{\det(\mathbf{R}_n)}$  γράφεται ως εξής:

$$\frac{\det(\mathbf{R}_{n+k})}{\det(\mathbf{R}_n)} = a_{n+k} \cdot a_{n+k-1} \cdots a_{n+1} \stackrel{(\text{B.5})}{\geq} a_n \cdots a_{n-k+1} = \frac{\det(\mathbf{R}_n)}{\det(\mathbf{R}_{n-k})} \Leftrightarrow \quad (\text{B'.6})$$

$$\det^2(\mathbf{R}_n) \geq \det(\mathbf{R}_{n+k}) \cdot \det(\mathbf{R}_{n-k}). \quad (\text{B'.7})$$

Λογαριθμίζοντας την (B'.7) έχουμε:

$$2 \log |\mathbf{R}_n| \geq \log |\mathbf{R}_{n+k}| + \log |\mathbf{R}_{n-k}|. \quad (\text{B'.8})$$

Επομένως, λόγω της (B'.8), η συνάρτηση  $g^1$  έχει την ιδιότητα:

$$2g(P_d, P_t, n) \geq g(P_d, P_t, n+k) + (P_d, P_t, n-k), \quad (\text{B'.9})$$

$\forall n \in \mathcal{Z}^+$ , &  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

---

<sup>1</sup>Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση  $g$  δίνεται από τη σχέση:  $g(\cdot, \cdot, n) = E \log |I + \alpha \bar{C}_n^H \bar{C}_n|$