

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών και Μηχανικών Ηλεκτρονικών
Υπολογιστών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΣΤΗ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΖΑΡΜΠΟΥ ΘΕΟΔΩΡΑ

Εξεταστική Επιτροπή: Λιάβας Αθανάσιος, Αν. Καθηγητής (Επιβλέπων)
Σιδηρόπουλος Νικόλαος, Καθηγητής
Καρυστινός Γεώργιος, Επίκουρος Καθηγητής

Χανιά, 2006

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή, κ. Αθανάσιο Λιάβα για την καθοδήγησή του κατά την διάρκεια της υλοποίησης αυτής της διπλωματικής μέχρι την ολοκλήρωσή της. Οι απαντήσεις του σε διάφορες απορίες υπήρξαν διαφωτιστικές και οι συμβουλές του, τόσο σε επιστημονικό όσο και σε ηθικό επίπεδο, καταλυτικής σημασίας.

Επίσης, ευχαριστώ την μεταπτυχιακό φοιτήτρια και φίλη μου Δέσποινα Τσιπουρίδου για την πολύτιμη βοήθειά της και παρέμβασή της σε κρίσιμες στιγμές.

Τέλος, είμαι βαθύτατα ευγνώμων στην οικογένεια μου και τους εντιμότετους φίλους μου, που με βοήθησαν και με στήριξαν σε κάθε μου επιλογή και δυσκολία...

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Τηλεπικοινωνιακά Κανάλια	5
2.1	Χαρακτηριστικά και Συμπεριφορά τηλεπικοινωνιακών καναλιών	5
2.2	Εκτίμηση Τηλεπικοινωνιακών καναλιών	8
3	Γραμμική ισοστάθμιση	13
3.1	Διάταξη και Λειτουργία του Γραμμικού ισοσταθμιστή	14
3.2	Υπολογισμός του φίλτρου του Γραμμικού ισοσταθμιστή μέσου τετραγωνικού σφάλματος	16
3.3	Αριθμητικά αποτελέσματα	20
4	Decision Feedback Ισοσταθμιστής	29
4.1	Δομή του DFE	29
4.2	Σχεδίαση των φίλτρων	30
4.3	Αριθμητικά αποτελέσματα	38
5	Σύγκριση των Ισοσταθμιστών	47

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η έννοια της επικοινωνίας μπορεί να περιγραφεί απλά ως η μετάδοση πληροφορίας από μια δεδομένη πηγή σε έναν καθορισμένο προορισμό, μέσω μιας διαδοχής σταδίων επεξεργασίας. Οι τεχνολογικές εξελίξεις στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα, οι υπολογιστές, τα υψηλής ταχύτητας πληροφοριακά δίκτυα και τα συστήματα πολυμέσων καθιστούν τη μετάδοση μηνυμάτων σε μεγάλες αποστάσεις εύκολη, αξιόπιστη, και κυρίως οικονομική. Επίσης, καθιστούν εύκολη τη μετάδοση μεγάλου όγκου πληροφορίας από ένα σημείο σε ένα άλλο με μικρή πιθανότητα σφάλματος.

Το πρώτο σύστημα ηλεκτρικά μεταδιδόμενης πληροφορίας ήταν ο τηλεγράφος. Η λειτουργία του τηλεγράφου ήταν βασισμένη σε κωδικοποιημένα μηνύματα ακολουθώντας τον κώδικα Morse, στον οποίο χρησιμοποιούνται διαδοχικά τελείες και παύλες που αναπαριστούν τους διάφορους χαρακτήρες [7].

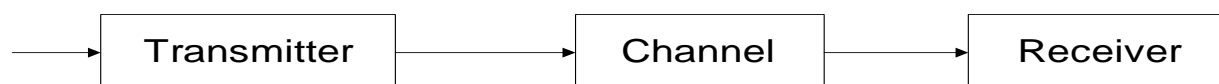
Κατά την απόπειρα αυτών των πρώτων μεταδόσεων πληροφορίας, παρατηρήθηκε ότι τα σήματα της λαμβανόμενης ακολουθίας τείνουν να γίνουν πιο 'πλατιά' συγκριτικά με τα σήματα της ακολουθίας που στέλνεται, με αποτέλεσμα να υπάρχει επικάλυψη στα λαμβανόμενα σήματα. Αυτό έχει σαν συνέπεια να παραμορφώνονται οι θέσεις διελεύσεων από το μηδέν υποβαθμίζοντας το σήμα και, συνεπώς, ολόκληρο το τηλεπικοινωνιακό σύστημα. Έτσι, αυτό γίνεται πιο ευαίσθητο στον προσθετικό θόρυβο και σε σφάλματα συγχρονισμού. Αυτή ακριβώς η

‘διαπλάτυνση’ και επικάλυψη των σημάτων της αρχικής ακολουθίας, που οδηγεί ενδεχομένως σε λανθασμένη αποκωδικοποίηση των σημάτων στην έξοδο, καλείται **αλληλοσυμβολική παρεμβολή** (Inter-symbol Interference ή συντομογραφημένα **ISI**).

Η ISI μπορεί να οφείλεται σε διάφορα αίτια. Μπορεί να προκληθεί τόσο κατά το φιλτράρισμα, όσο και από τη χρήση λανθασμένων επιλογών συχνοτήτων ή μη γραμμικών διατάξεων [7]. Πώς, όμως, μπορεί να αποφευχθεί η ISI;

Ο Morse προσπαθώντας να εξαλείψει το ανεπιθύμητο αυτό φαινόμενο, απλώς ‘αραίωσε’ την μετάδοση. Η επιβράδυνση του ρυθμού μετάδοσης bit ήταν ο βασικός τρόπος για να ελεγχθεί η ISI σε αυτές τις πρώτες μορφές επικοινωνίας. Αργότερα, όμως, δημιουργήθηκαν γρήγορα ολοκληρωμένα κυκλώματα, τα οποία επιτρέπουν την επεξεργασία σήματος ελέγχοντας την ISI και αυξάνουν τις ταχύτητες μετάδοσης. Ακολουθώντας τις τάσεις της τεχνολογίας για διαρκώς αυξανόμενους ρυθμούς μετάδοσης bit, η μείωση του ρυθμού αποστολής δεδομένων αποτελεί εύκολη, αλλά μη αποδεκτή λύση. Απαιτούνται, λοιπόν, άλλες λύσεις για την αντιμετώπιση της αλληλοσυμβολικής παρεμβολής.

Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα, γενικά, αποτελείται από τρία μέρη. Στο ένα άκρο βρίσκεται ο πομπός, ο οποίος δέχεται την πληροφορία από μια πηγή, την κωδικοποιεί σε μια προς μετάδοση μορφή και την μεταδίδει μέσω ενός καναλιού. Η βασική αυτή δομή του συστήματος μετάδοσης φαίνεται στο Σχήμα 1. Όταν το μήνυμα έχει ψηφιακή μορφή, για να μεταδοθεί πρέπει να μετατραπεί σε αναλογικό σήμα. Αυτή η μετατροπή γίνεται από το φίλτρο μετάδοσης, το οποίο μετατρέπει κάθε σύμβολο σε έναν κατάλληλο αναλογικό παλμό. Μετά τη μετάδοση, το φίλτρο λήψης βοηθά στην ανάκτηση των ψηφιακών τιμών από τους αναλογικούς παλμούς. Έστω, για παράδειγμα, ότι επιλέγονται να αποσταλούν τα $s(kT)$ σύμβολα μιας ψηφιακής ακολουθίας. Κάθε σύμβολο αντιστοιχεί σε έναν αναλογικό παλμό που εξαρτάται από την τιμή του συμβόλου. Ο παλμός προωθείται μέσω του τηλεπικοινωνιακού συστήματος και στην ιδανική περίπτωση το μήνυμα που φτάνει στον δέκτη, ο οποίος αποκωδικοποιεί το σήμα και το μετατρέπει σε κατανοητή πληροφορία, θα πρέπει να συμπίπτει με αυτό που αποστέλλει ο πομπός (ενδεχομένως με μικρή καθυστέρηση). Αν ο αναλογικός παλμός είναι πλατύτερος



Σχ.1. Τα βασικά μέρη ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος μετάδοσης

από τον χρόνο δύο διαδοχικών συμβόλων, τότε τα διαδοχικά σύμβολα στην έξοδό τους θα επικαλύπτονται. Παρατηρείται, δηλαδή, ISI.

Σε αυτή την περίπτωση, ένας τρόπος για να αποφευχθεί η ISI είναι να επιλεγεί ο παλμός έτσι, ώστε να είναι μοναδιαίος στις χρονικές στιγμές kT και μηδενικός στις χρονικές στιγμές $t = mT$ για κάθε $m \neq k$. Έτσι, η αναλογική κυματομορφή στις χρονικές στιγμές $t = kT$ περιέχει μόνο την τιμή του επιθυμητού συμβόλου εισόδου και δεν υπάρχει παρεμβολή από τα γειτονικά σύμβολα εισόδου. Αυτές οι παλμοσειρές καλούνται παλμοσειρές Nyquist. Ο Nyquist (1924) ήταν ο πρώτος που μελέτησε το πρόβλημα του μέγιστου ρυθμού σηματοδοσίας που μπορεί να επιτευχθεί σε ένα τηλεγραφικό κανάλι ενός ορισμένου εύρους ζώνης χωρίς την εκδήλωση αλληλοπαρεμβολής μεταξύ των συμβόλων [4].

Ωστόσο, μια άλλη συνηθισμένη αιτία εμφάνισης της ISI στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα αποτελούν τα κανάλια πολλαπλών διόδευσεων. Κατά τη διέλευση μέσα από το κανάλι είναι δυνατόν να υπάρξουν κι άλλες πρόσθετες παρεμβολές, όπως αυτές που προκαλούνται από άλλους χρήστες του καναλιού. Αυτές οι παρεμβολές, γενικά, θεωρούνται στοιχεία θορύβου ασυσχέτιστα με την ακολουθία της πηγής [5].

Ένας συνηθισμένος τρόπος αναιρέσης της παραμόρφωσης του καναλιού είναι η υλοποίηση κατάλληλων διατάξεων που καλούνται *ισοσταθμιστές καναλιού* (channel equalizers). Ο ισοσταθμιστής συνήθως είναι ένα φίλτρο στον δέκτη, το οποίο αναιρεί το ανεπιθύμητο αποτέλεσμα του καναλιού. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να είναι ένα γραμμικό φίλτρο, οι συντελεστές του οποίου είτε μεταβάλλονται με τον χρόνο (προσαρμοστικό φίλτρο), είτε παραμένουν σταθεροί για κάποιο χρονικό διάστημα, π.χ. για ένα πακέτο, και μπορούν να υπολογιστούν. Μειονέκτημα των γραμμικών ισοσταθμιστών είναι ότι ενισχύουν τον θόρυβο, όταν το κανάλι έχει

φασματικά κενά. Για να ανταπεξέλθουμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούμε μη-γραμμικές διατάξεις. Ένας τέτοιος μη-γραμμικός ισοσταθμιστής είναι ο *Ισοσταθμιστής με Ανάδραση Αποφάσεων* (*Decision Feedback Ισοσταθμιστής* ή συντομογραφημένα **DFE**), ο οποίος χρησιμοποιεί προηγούμενες αποφάσεις για την αναίρεση της ISI από προηγούμενα σύμβολα.

Κεφάλαιο 2

Τηλεπικοινωνιακά Κανάλια

2.1 Χαρακτηριστικά και Συμπεριφορά τηλεπικοινωνιακών καναλιών

Για τη σχεδίαση συστημάτων επικοινωνίας για μετάδοση πληροφορίας μέσα από φυσικά κανάλια, μας διευκολύνει η κατασκευή μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν ικανοποιητικά τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά του μέσου διάδοσης. Κάποια από τα βασικότερα και συνηθέστερα μοντέλα είναι το κανάλι προσθετικού θορύβου, το κανάλι γραμμικού φίλτρου και το γραμμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο κανάλι.

Στην παρούσα εργασία, το κανάλι της διάταξης που χρησιμοποιείται είναι περιορισμένου εύρους ζώνης. Ένα κανάλι περιορισμένου εύρους ζώνης χαρακτηρίζεται ως ένα γραμμικό φίλτρο με χρονική απόκριση $c(t)$ και απόκριση συχνότητας $C(f)$, όπου

$$C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Έστω, τώρα, ότι η είσοδος σε ένα κανάλι περιορισμένου εύρους ζώνης είναι μια κυματομορφή σήματος $g_T(t)$. Τότε, η χρονική απόκριση του καναλιού είναι η συνέλιξη του $g_T(t)$ με το $c(t)$, δηλαδή

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau)g_T(t - \tau)d\tau = c(t) * g_T(t)$$

ή εκφρασμένο στο πεδίο των συχνοτήτων

$$Z(f) = C(f)G_T(f)$$

όπου $G_T(f)$ είναι το φάσμα του σήματος $g_T(t)$ και $Z(f)$ είναι το φάσμα του $z(t)$. Επομένως, το κανάλι παραμορφώνει το μεταδιδόμενο σήμα $g_T(t)$.

Ωστόσο, σε ένα ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα, η έξοδος του φίλτρου λήψης $y(t)$ πρέπει να δειγματοληπτείται περιοδικά στο ρυθμό συμβόλων, σε ακριβείς χρονικές στιγμές δειγματοληψίας $t_m = mT + \tau_0$, όπου T είναι η περίοδος σηματοδοσίας και τ_0 είναι μια χρονική καθυστέρηση, η οποία αντιστοιχεί στην καθυστέρηση διάδοσης του σήματος από τον πομπό στον δέκτη. Για να εκτελέσουμε την περιοδική αυτή δειγματοληψία, χρειαζόμαστε ένα σήμα χρονισμού στον δέκτη. Η διαδικασία παραγωγής ενός τέτοιου σήματος χρονισμού στον δέκτη καλείται *συγχρονισμός συμβόλων* ή *ανάκτηση χρονισμού* [4].

Στην παρούσα εργασία, λοιπόν, θεωρούμε ψηφιακή επικοινωνία, στην οποία εφαρμόζεται η κρίσιμη λειτουργία ανάκτησης χρονισμού. Στο κανάλι με κρουστική απόκριση $c(t)$, στο οποίο υπάρχουν προσαρμοσμένα το φίλτρο εκπομπής (στην είσοδο) με κρουστική απόκριση $g_T(t)$ και το φίλτρο λήψης (στην έξοδο) με κρουστική απόκριση $g_R(t)$, υπάρχει ως επόμενη βαθμίδα του ψηφιακού συστήματος και ο δειγματολήπτης. Ο δειγματολήπτης απαιτεί την εξαγωγή του σήματος χρονισμού από το λαμβανόμενο σήμα καθορίζοντας τις κατάλληλες χρονικές στιγμές δειγματοληψίας της εξόδου του φίλτρου λήψης.

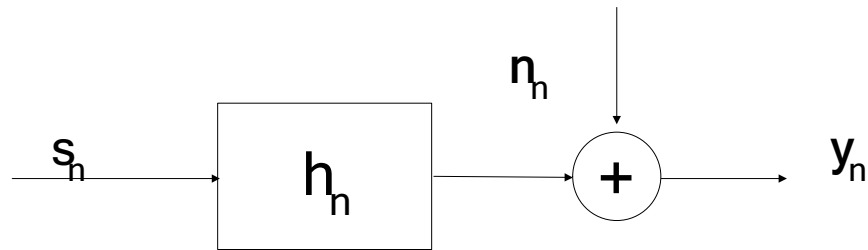
Το κανάλι χαρακτηρίζεται από το μήκος του, M , και το διάνυσμα \mathbf{h} . Οι συντελεστές $h_0 \dots h_{M-1}$ του διανύσματος συνελίσσονται με τα bits που φέρουν την πληροφορία, δίνοντας τα bits εξόδου του καναλιού. Πρόκειται για ένα σύστημα 1-εισόδου/1-εξόδου, του οποίου η σχέση εισόδου-εξόδου περιγράφεται από την μαθηματική εξίσωση:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} h(i)s(n-i)$$

όπου

- $\{s(n)\}$ είναι η τυχαία ακολουθία του σήματος εισόδου, αποτελούμενη από bits που παίρνουν τιμές $+1, -1$

2.1. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΚΑΝΑΛΙΩΝ



Σχ.2.1 Μοντέλο του καναλιού με πρόσθετο θόρυβο

- ο όρος $y(n)$, αντίστοιχα, εκφράζει τα δείγματα εξόδου
- το διάνυσμα της κρουστικής απόκρισης, \mathbf{h} , εκφράζει το αποτέλεσμα του συνδυασμού του φίλτρου εκπομπής, του φυσικού καναλιού και του φίλτρου λήψης.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, στα μοντέλα καναλιού που χρησιμοποιούνται στα συστήματα, εισάγεται και λευκός προσθετικός Gaussian θόρυβος (AWGN). Έτσι, λοιπόν, έστω ότι το σήμα στην έξοδο του καναλιού έχει διαβρωθεί από θόρυβο AWGN, $v(t)$. Τότε, στην έξοδο του καναλιού $z(t)$ προστίθεται ο θόρυβος κι επομένως, το σήμα στην έξοδο του καναλιού είναι της μορφής $z(t) + v(t)$. Καθώς αυτό το σήμα προωθείται σε επόμενες βαθμίδες, η έξοδος του φίλτρου λήψης δίνει το αποτέλεσμα $n(t) = v(t) * g_R(t)$. Το ολοκληρωμένο μοντέλο του καναλιού που περιγράφηκε αναπαριστάται σχηματικά στο Σχήμα 2.1.

Η ύπαρξη AWGN μετατρέπει την μαθηματική εξίσωση της σχέσης εισόδου-εξόδου ως εξής:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} h(i)s(n-i) + n(n) \quad (2.1)$$

όπου $\{n(n)\}$ είναι η ακολουθία των συμβόλων του θορύβου. Γενικά, πλέον, N πλήθος διαδοχικών συμβόλων στην έξοδο δίνουν το διάνυσμα:

$$\mathbf{y}_{n:n-N+1} \triangleq \begin{bmatrix} y_n & \cdots & y_{n-N+1} \end{bmatrix}^T$$

όπου \mathbf{T} αναπαριστά την πράξη 'αναστροφή πίνακα'. Η εξίσωση 2.1 μπορεί να εκφραστεί και ως

$$\mathbf{y}_{n:n-N+1} = \mathbf{H}\mathbf{s}_{n:n-N-M+1} + \mathbf{n}_{n:n-N+1} \quad (2.2)$$

όπου \mathbf{H} είναι ο $N \times (M + N - 1)$ Toeplitz πίνακας:

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} h_0 & \cdots & \cdots & h_{M-1} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & h_0 & \cdots & \cdots & h_{M-1} \end{bmatrix}$$

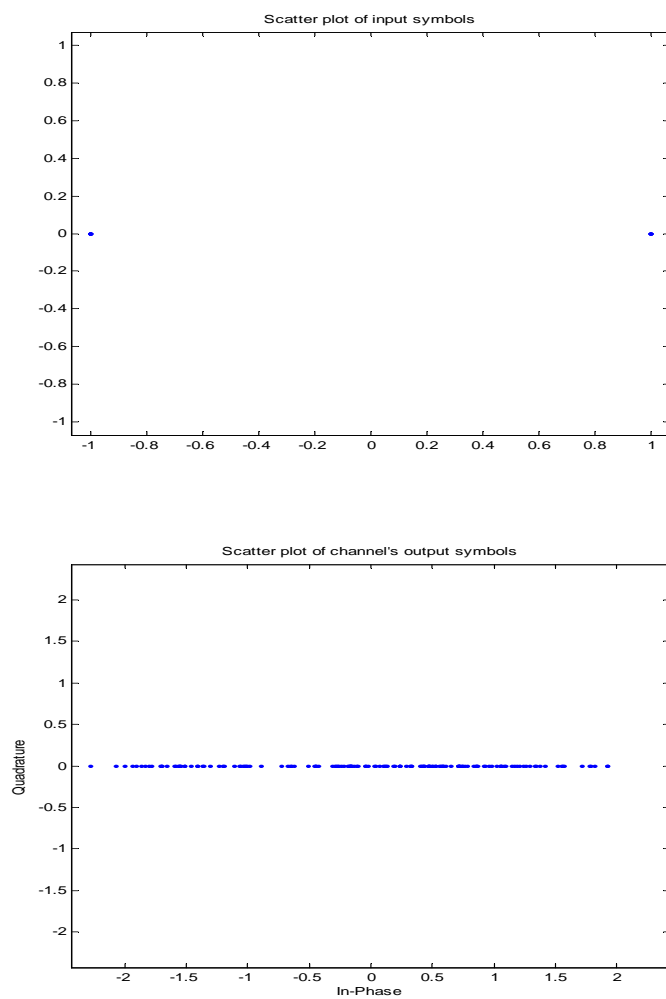
Πρακτικά, αυτό που ενδιαφέρει είναι το πώς το κανάλι επιδρά στο μεταδιδόμενο σήμα. Για παράδειγμα, έστω ότι μεταδίδεται ένα πακέτο s_1, \dots, s_N πλήθους $N=150$ δειγμάτων. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Γράφημα 2.1. Σε αυτό παρατηρείται πως τα σύμβολα του σήματος εισόδου παίρνουν τιμές ± 1 . Όμως, μετά τη μετάδοσή τους μέσα από το κανάλι, το αρχικό προς μετάδοση σήμα αλλοιώνεται σημαντικά, αφού τα σύμβολα είναι πλέον 'απλωμένα' και όχι συγκεντρωμένα γύρω από το ± 1 . Διαπιστώνεται, συνεπώς, εμφανώς η επίδραση του φαινομένου ISI.

2.2 Εκτίμηση Τηλεπικοινωνιακών Καναλιών

Επαναλαμβάνουμε ότι το κανάλι χαρακτηρίζεται από το διάλυμα της κρουστικής απόκρισης, \mathbf{h} , το οποίο εκφράζει το αποτέλεσμα του συνδυασμού του φίλτρου εκπομπής, του φυσικού καναλιού και του φίλτρου λήψης. Πιο συγκεκριμένα, σε ένα σύστημα αποτελούμενο από το φίλτρο μορφοποίησης στον πομπό $g_T(t)$, το κανάλι $c(t)$ και το φίλτρο μορφοποίησης στο δέκτη $g_R(t)$ η σύνθετη κρουστική απόκριση δίνεται από τη συνέλιξη

$$h(t) = g_T(t) * c(t) * g_R(t).$$

Συνήθως, στην πράξη υποτίθεται ότι η κρουστική απόκριση είναι μία πεπερασμένη και αιτιατή ακολουθία, και συνεπώς παίρνει τις μη μηδενικές τιμές h_0, h_1, \dots, h_M . Μέχρι στιγμής οι τιμές αυτές θεωρήθηκαν γνωστές. Ωστόσο, συνήθως, η κρουστική απόκριση του καναλιού είναι άγνωστη στο δέκτη. Σκοπός μας στη συνέχεια είναι να εκτιμήσουμε το άγνωστο κανάλι [6].



Γραφ.2.1 Παραμόρφωση του σήματος λόγω ISI κατά τη μετάδοση μέσω καναλιού με πρόσθετο θόρυβο

Έστω ότι η επικοινωνία πομπού-δέκτη διεξάγεται με πακέτα δεδομένων. Κάθε πακέτο που αποστέλλεται έχει την εξής μορφή :

$$s_1 \cdots s_{i_1-1} \quad \underbrace{s_{i_1} \cdots s_{i_2}}_{\text{Training-symbols}} \quad s_{i_2+1} \cdots s_N$$

όπου τα σύμβολα που χαρακτηρίζονται 'Training symbols' είναι γνωστά στο δέκτη, δεν μεταφέρουν πληροφορία και χρησιμοποιούνται για συγχρονισμό και εκτίμηση καναλιού. Υποθέτοντας ιδανικό συγχρονισμό, κάθε λαμβανόμενο πακέτο είναι της μορφής:

$$y_1 \cdots y_{i_1-1} \quad \underbrace{y_{i_1} \cdots y_{i_2}} \quad y_{i_2+1} \cdots y_N \cdots y_{N+M}.$$

Έστω $n_2 - n_1 > M$. Οι έξοδοι του καναλιού y_n που εξαρτώνται **μόνο** από τα (γνωστά στο δέκτη) σύμβολα εκπαίδευσης s_{i_1}, \dots, s_{i_2} μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$\begin{aligned} y_{i_1+M} &= h_0^o s_{i_1+M} + h_1^o s_{i_1+M-1} + \cdots + h_M^o s_{i_1} + n_{i_1+M} \\ &\vdots \\ y_{i_2} &= h_0^o s_{i_2} + h_1^o s_{i_2-1} + \cdots + h_M^o s_{i_2-M} + n_{i_2}. \end{aligned}$$

Σε μορφή πινάκων-διανυσμάτων, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως εξής

$$\begin{bmatrix} y_{i_1+M} \\ \vdots \\ y_{i_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{i_1+M} & s_{i_1+M-1} & \cdots & s_{i_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{i_2} & s_{i_2-1} & \cdots & s_{i_2-M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0^o \\ \vdots \\ h_M^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{i_1+M} \\ \vdots \\ n_{i_2} \end{bmatrix}$$

ή, με προφανείς ορισμούς,

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{h}^o + \mathbf{n}$$

όπου \mathbf{y} και \mathbf{S} είναι γνωστά και \mathbf{h}^o και \mathbf{n} άγνωστα. Αναζητώντας το \mathbf{h}^o , θα ακολουθήσουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (*Least Squares*) [6]. Σκοπός είναι να υπολογίσουμε το \mathbf{h}_{LS} το οποίο ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους

$$C(\mathbf{h}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{h}\|_2^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{h})^T (\mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{h})$$

όπου $\mathbf{h} \triangleq [h_0 \cdots h_M]^T$.

Ο όρος $C(\mathbf{h})$ είναι γραμμικός συνδυασμός γινομένων της μορφής $h_i h_j$. Αποδεικνύεται, ότι αν ο πίνακας \mathbf{S} είναι πλήρους βαθμού στηλών (δηλαδή, οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες), τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\left. \frac{\partial C(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right|_{\mathbf{h}=\mathbf{h}_{LS}} = \mathbf{0}.$$

Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του πίνακα $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ και το ότι κάθε βαθμωτό είναι ίσο με το ανάστροφό του (δηλαδή $\mathbf{y}^T \mathbf{S} \mathbf{h} = \mathbf{h}^T \mathbf{S}^T \mathbf{y}$), η λύση της εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{h}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \left(\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{S} \mathbf{h} - \mathbf{h}^T \mathbf{S}^T \mathbf{y} + \mathbf{h}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{h} \right) \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \left(\mathbf{y}^T \mathbf{S} \mathbf{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \left(\mathbf{h}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{h} \right) \\ &= -2 \mathbf{S}^T \mathbf{y} + 2 \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{h} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Τελικά, παίρνουμε

$$\mathbf{h}_{LS} = \left(\mathbf{S}^T \mathbf{S} \right)^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{y}.$$

ενώ το ελάχιστο κόστος είναι

$$C(\mathbf{h}_{LS}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{S} \left(\mathbf{S}^T \mathbf{S} \right)^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{y}.$$

Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε εκτίμηση καναλιού θα εννοούμε την εκτίμηση ελαχίστου τετραγώνου \mathbf{h}_{LS} .

Κεφάλαιο 3

Γραμμική ισοστάθμιση

Όταν στα τηλεπικοινωνιακά κανάλια δεν παρατηρείται αλληλοσυμβολική παρεμβολή (στην ιδανική δηλαδή περίπτωση), η σύνθετη χροστική απόκριση του συστήματος έχει ένα μόνο συντελεστή που ισούται με την μονάδα και όλοι οι υπόλοιποι είναι μηδέν [5]. Ωστόσο, στη συνηθισμένη περίπτωση, για παράδειγμα του καναλιού πολλαπλών διοδεύσεων, υπάρχει ISI και οι μη μηδενικοί συντελεστές αυξάνονται σε σχέση με τις διοδεύσεις του καναλιού. Η ιδέα της ισοστάθμισης, όπως προαναφέρθηκε, είναι να υλοποιηθεί ένα φίλτρο στον δέκτη που να αναιρεί την ISI. Στην ουσία, σκοπός είναι ο συνδυασμός κανάλι-φίλτρο να επιτυγχάνει χροστική απόκριση με μια μόνο μη μηδενική τιμή.

Ένας τρόπος ισοστάθμισης είναι η γραμμική ισοστάθμιση. Γενικά, ο γραμμικός ισοσταθμιστής προσπαθεί να αναιρέσει την ISI επιβάλλοντας η χροστική απόκριση του συστήματος κανάλι (με διάνυσμα \mathbf{h})-φίλτρο ισοσταθμιστή (με διάνυσμα \mathbf{f}) να είναι ισοδύναμη με μια καθυστέρηση Δ . Στο πεδίο των συχνοτήτων, δηλαδή, προσπαθούμε να πετύχουμε

$$H(f)F(f) \approx e^{-j2\pi\Delta f}$$

ή

$$|H(f)F(f)| \approx 1$$

Αυτό είναι επικίνδυνο για την μη αποδοτική λειτουργία των γραμμικών ισοσταθμιστών, όταν

για κάποιες συχνότητες ισχύει $|H(f)| \approx 0$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, λέμε ότι το κανάλι έχει φασματικά κενά (spectral nulls). Τότε, το

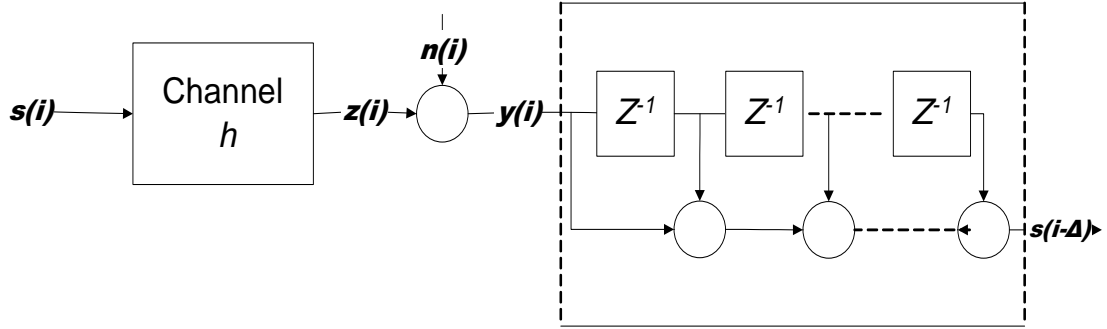
$$F(f) \approx 1/|H(f)|$$

παίρνει μεγάλες τιμές και, ουσιαστικά, ο ισοσταθμιστής ενισχύει τον θόρυβο.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι και διαφορετικά κριτήρια με βάση τα οποία επιλέγονται οι συντελεστές του βέλτιστου φίλτρου του ισοσταθμιστή. Μια προσέγγιση, για παράδειγμα, είναι η εύρεση του ελαχίστου του τετραγώνου του σφάλματος ανάμεσα στην έξοδο του ισοσταθμιστή και του αρχικού σήματος προς μετάδοση. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας ένα μπλοκ δεδομένων εκπαίδευσης. Ελαχιστοποίηση του ίδιου σφάλματος μπορεί, επίσης, να επιτευχθεί και με τη χρήση ενός προσαρμοστικού αλγορίθμου, ενώ σε περιπτώσεις που δεν χρησιμοποιούνται σύμβολα εκπαίδευσης είναι εφικτή η υλοποίηση decision-directed ισοσταθμιστών [5].

3.1 Διάταξη και Λειτουργία του Γραμμικού ισοσταθμιστή

Έστω ότι μια ακολουθία $\{s(i)\}$ ανεξάρτητων και όμοια κατανομημένων (i.i.d) συμβόλων μεταδίδεται μέσω ενός καναλιού. Κάθε σύμβολο είναι $+1$ με πιθανότητα p και -1 με πιθανότητα $1-p$. Συνήθως, ισχύει $p = 1/2$. Στα σύμβολα εξόδου $y(i)$, τα οποία συνιστούν το διάνυσμα \mathbf{y} , προστίθεται λευκός Gaussian θόρυβος $n(i)$, όπου $i > -\infty$. Ο AWGN είναι μηδενικής μέσης τιμής και έχει διακύμανση σ_n^2 . Υποθέτουμε, ότι οι διαδικασίες $\{s(i)\}$, $\{y(i)\}$, $\{n(i)\}$ είναι στατικές υπό την ευρεία έννοια (WSS). Αυτό σημαίνει, ότι οι μέσες τιμές τους είναι ανεξάρτητες του χρόνου, ενώ οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης εξαρτώνται μόνο από τη διαφορά δύο χρονικών στιγμών, έστω $t_1 - t_2$, κι όχι ξεχωριστά από τις t_1, t_2 . Επιπλέον, τα σήματα $\{s(i)\}$, $\{n(i)\}$ θεωρούνται ασυσχέτιστα. Το κανάλι είναι FIR, έχει μήκος M και χαρακτηρίζεται από



Σχ.3.1 Γραμμικός ισοσταθμιστής ενός FIR καναλιού με AWGN

το γνωστό διάνυσμα \mathbf{h} .

$$\mathbf{h} \triangleq \left[h(0) \quad h(1) \quad \dots \quad h(M-1) \right]^T$$

Σχηματικά, η διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 3.1.

Εξαιτίας της ‘μνήμης’ του καναλιού, κάθε μέτρηση $y(i)$ δεν εξαρτάται μόνο από το αντίστοιχο σύμβολο εισόδου $s(i)$, αλλά και από προηγούμενα σύμβολα $s(i - \Delta)$ καθώς ισχύει

$$y(i) = h(0)s(i) + \underbrace{\sum_{k=1}^{M-1} h(k)s(i-k)}_{\text{ISI}} + n(i). \quad (3.1)$$

Ο υπογραμμισμένος όρος εκφράζει την αλληλοσυμβολική παρεμβολή. Σκοπός του ισοσταθμιστή είναι να εξαλείψει την επίδραση αυτού του όρου. Για να επιτευχθεί αυτό, ο ισοσταθμιστής δεν χρησιμοποιεί μόνο το πιο πρόσφατο σύμβολο $y(i)$, αλλά και προηγούμενα σύμβολα $\{y(i-k)\}$, για παράδειγμα $k = 1, 2, \dots, L-1$. Αυτά τα προηγούμενα σύμβολα περιέχουν πληροφορία σχετική με τον όρο της ISI στο $y(i)$. Για παράδειγμα, η εξίσωση που εκφράζει τον όρο $\{y(i-k)\}$ είναι

$$y(i-1) = h(0)s(i-1) + \underbrace{\sum_{k=1}^{M-1} h(k)s(i-1-k)}_{\text{ISI}} + n(i-1), \quad (3.2)$$

όπου στον όρο της ISI σε αυτήν την εξίσωση (στον υπογραμμισμένο όρο), συμμετέχουν και σύμβολα δεδομένων που συμμετέχουν και στον όρο της ISI στην $y(i)$ [3]. Αυτός είναι

και ο λόγος που είναι κρίσιμο να χρησιμοποιηθούν προηγούμενες μετρήσεις προκειμένου να περιοριστεί η αλληλοσυμβολική παρεμβολή.

3.2 Υπολογισμός του φίλτρου του Γραμμικού ισοσταθμιστή μέσου τετραγωνικού σφάλματος

Το φίλτρο του ισοσταθμιστή επιλέχθηκε, έτσι ώστε να έχει L συντελεστές. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή i , θα χρησιμοποιούνται οι L παρατηρήσεις:

$$\mathbf{y}_{i:i-L+1} \triangleq \begin{bmatrix} y(i) \\ y(i-1) \\ y(i-2) \\ \vdots \\ y(i-L+1) \end{bmatrix}$$

ώστε να εκτιμηθεί το $s(i)$, ή γενικά, μια καθυστερημένη εκδοχή $s(i-\Delta)$. Στο εξής, για λόγους συντομίας το διάνυσμα $\mathbf{y}_{i:i-L+1}$ θα αναφέρεται ως \mathbf{y} και το σύμβολο που εκτιμήθηκε θα συμβολίζεται ως $\hat{s}(i-\Delta)$. Όπως παρατηρείται και από το σχήμα, αυτή η εκτίμηση εκφράζεται μέσω της γραμμικής εξίσωσης

$$\hat{s}(i-\Delta) = k(0)y(i) + k(1)y(i-1) + \dots + k(L-1)y(i-L+1) \quad (3.3)$$

ή

$$\hat{s}(i-\Delta) = \mathbf{k}^T \mathbf{y} \quad (3.4)$$

όπου \mathbf{k} είναι το διάνυσμα που χαρακτηρίζει το φίλτρο του ισοσταθμιστή

$$\mathbf{k} \triangleq \left[k(0) \quad k(1) \quad \dots \quad k(L-1) \right]^T$$

με L συντελεστές και έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$K(z) = k(0) + k(1)z^{-1} + \dots + k(L-1)z^{-(L-1)}.$$

3.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΣΤΗ ΜΕΣΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝ

Η βέλτιστη τιμή του \mathbf{k} θα εκφράζεται ως \mathbf{k}_{opt} . Οι εισόδου του \mathbf{k}_{opt} θα αντιστοιχούν στους συντελεστές του ισοσταθμιστή.

Το εκτιμημένο σήμα, $\hat{s}(i - \Delta)$, θα περάσει από μια μηχανή αποφάσεων, έτσι ώστε να γίνει η αντιστοίχιση του στο πιθανό σύμβολο εισόδου, με τελικό στόχο την ανάκτηση της ακολουθίας εισόδου. Ο σχεδιαστής προσδοκεί η αντιστοίχιση να είναι πάντα σωστή και για τον λόγο αυτό ψάχνει τους ιδανικούς συντελεστές. Η εύρεση των ιδανικών συντελεστών γίνεται μέσα από την ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου του σφάλματος (MSE), η εξίσωση του οποίου είναι:

$$E|\tilde{s}(i - \Delta)|^2$$

όπου

$$\tilde{s}(i - \Delta) = s(i - \Delta) - \hat{s}(i - \Delta).$$

Σύμφωνα με την εξίσωση 3.4 παίρνουμε τελικά

$$E|s(i - \Delta) - \mathbf{k}^T \mathbf{y}|^2.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} MSE &= E|s(i - \Delta) - \mathbf{k}^T \mathbf{y}|^2 \\ &= E\left(s(i - \Delta) - \mathbf{k}^T \mathbf{y}\right)\left(s(i - \Delta)^T - \mathbf{y}^T \mathbf{k}\right) \\ &= E\left(s(i - \Delta)^2 - s(i - \Delta)\mathbf{y}^T \mathbf{k} - \mathbf{k}^T \mathbf{y}s(i - \Delta)^T + \mathbf{k}^T \mathbf{y}\mathbf{y}^T \mathbf{k}\right) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$MSE = R_s - R_{sy}\mathbf{k} - \mathbf{k}^T R_{ys} + \mathbf{k}^T R_y \mathbf{k} \quad (3.5)$$

όπου

$$R_{sy} \triangleq E s(i - \Delta) \mathbf{y}^T$$

με διαστάσεις $(1 \times L)$, είναι το διάνυσμα της ετεροσυσχέτισης ανάμεσα στο $s(i - \Delta)$, το οποίο επιθυμούμε να εκτιμήσουμε, και το \mathbf{y} , ενώ

$$R_y \triangleq E \mathbf{y} \mathbf{y}^T$$

με διαστάσεις $(L \times L)$, είναι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του \mathbf{y} . Είναι σημαντική η παρατήρηση ότι, δεδομένου πως οι διαδικασίες $\{s(\cdot), y(\cdot)\}$ είναι στατικές υπό την ευρεία έννοια, οι ποσότητες $\{R_{sy}, R_y\}$ είναι ανεξάρτητες του i .

Ο βέλτιστος ισοσταθμιστής δίνεται από τη λύση της εξίσωσης:

$$\frac{\partial MSE}{\partial \mathbf{k}} = -R_{sy} + \mathbf{k}^T R_y = 0 \quad (3.6)$$

και δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{k}_{opt}^T = R_{sy} R_y^{-1}. \quad (3.7)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε αναλυτικά τα $\{R_{sy}, R_y\}$, ακολουθείται η εξής λογική. Αρχικά, εκφράζεται το διάνυσμα \mathbf{y} σε σχέση με το σήμα εισόδου. Συνεπώς, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (3.8)$$

όπου:

- το διάνυσμα \mathbf{y} έχει L εισόδους
- το διάνυσμα των σημάτων εισόδου \mathbf{s} αντιστοιχεί στο $\mathbf{s}_{i:i-L-M+2}$ με $L + M - 1$ εισόδους
- ο πίνακας \mathbf{H} του καναλιού μήκους M είναι $L \times (L + M - 1)$ διαστάσεων
- το διάνυσμα του θορύβου \mathbf{n} αντιστοιχεί στο $\mathbf{n}_{i:i-L+1}$ με L εισόδους.

Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω, παρατηρείται ότι υπάρχει μια γραμμική σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\{\mathbf{s}, \mathbf{y}\}$ κι αυτή η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν τα $\{R_{sy}, R_y\}$. Άρα,

$$R_y = E(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n})(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n})^T = \mathbf{H}R_s\mathbf{H}^T + R_n \quad (3.9)$$

3.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΦΙΛΤΡΟΥ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΣΤΗ ΜΕΣΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝ

όπου

$$R_s \triangleq E\mathbf{s}\mathbf{s}^T$$

διαστάσεων $(L + M - 1) \times (L + M - 1)$, και

$$R_n \triangleq E\mathbf{n}\mathbf{n}^T$$

διαστάσεων $L \times L$. Άρα, εφόσον τα $\{s(\cdot), n(\cdot)\}$ είναι *ασυσχέτιστα*

$$R_{sy} \triangleq Es(i - \Delta)(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n})^T = (Es(i - \Delta)\mathbf{s}^T) \mathbf{H}^T. \quad (3.10)$$

Η τιμή του $Es(i - \Delta)\mathbf{s}^T$ εξαρτάται από την τιμή της συσχέτισης μεταξύ των μεταδιδόμενων συμβόλων. Τώρα που τα $\{s(\cdot)\}$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και όμοια κατανεμημένα με διακύμανση σ_s^2 , ισχύει ότι

$$Es(i - \Delta) \mathbf{s}^T = Es(i - \Delta) \begin{bmatrix} s^T(i) & s^T(i - 1) & \dots & s^T(i - L - M + 1) \end{bmatrix}^T$$

δηλαδή

$$Es(i - \Delta) \mathbf{s}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \sigma_s^2 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$R_s = \sigma_s^2 \mathbf{I}. \quad (3.11)$$

Με παρόμοιο τρόπο, δεδομένου πως η ακολουθία $\{n(\cdot)\}$ είναι λευκός θόρυβος, δηλαδή τα στοιχεία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και όμοια κατανεμημένα με διακύμανση σ_n^2 , ισχύει για την ακολουθία του θορύβου

$$R_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}. \quad (3.12)$$

Τελικά, λοιπόν, προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$R_y = \sigma_s^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (3.13)$$

και

$$R_{sy} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times \Delta} & \sigma_s^2 & \mathbf{0}_{1 \times L + M - \Delta - 2} \end{bmatrix} \mathbf{H}^T. \quad (3.14)$$

Προκειμένου να βρεθεί το βέλτιστο διάνυσμα του ισοσταθμιστή, δηλαδή οι ιδανικοί συντελεστές, κι επομένως το βέλτιστο \mathbf{k}_{opt}^T , γίνεται αντικατάσταση των παραπάνω αποτελεσμάτων στην ισχύουσα σχέση του \mathbf{k}_{opt}^T και προκύπτουν τα εξής:

$$\mathbf{k}_{opt}^T = \sigma_s^2 e^T \Delta \mathbf{H}^T (\sigma_s^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} \quad (3.15)$$

όπου το e_Δ είναι το διάνυσμα

$$e_\Delta \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times \Delta} & 1 & \mathbf{0}_{1 \times (L+M-\Delta-2)} \end{bmatrix}^T.$$

Επιπλέον, αν στην εξίσωση (3.5) του MSE χρησιμοποιηθεί η εξίσωση (3.7) που δίνει τα \mathbf{k}_{opt}^T και \mathbf{k}_{opt} προκύπτει το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα, το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$MMSE = \sigma_s^2 \mathbf{I} - R_{sy} R_y^{-1} R_{ys} \quad (3.16)$$

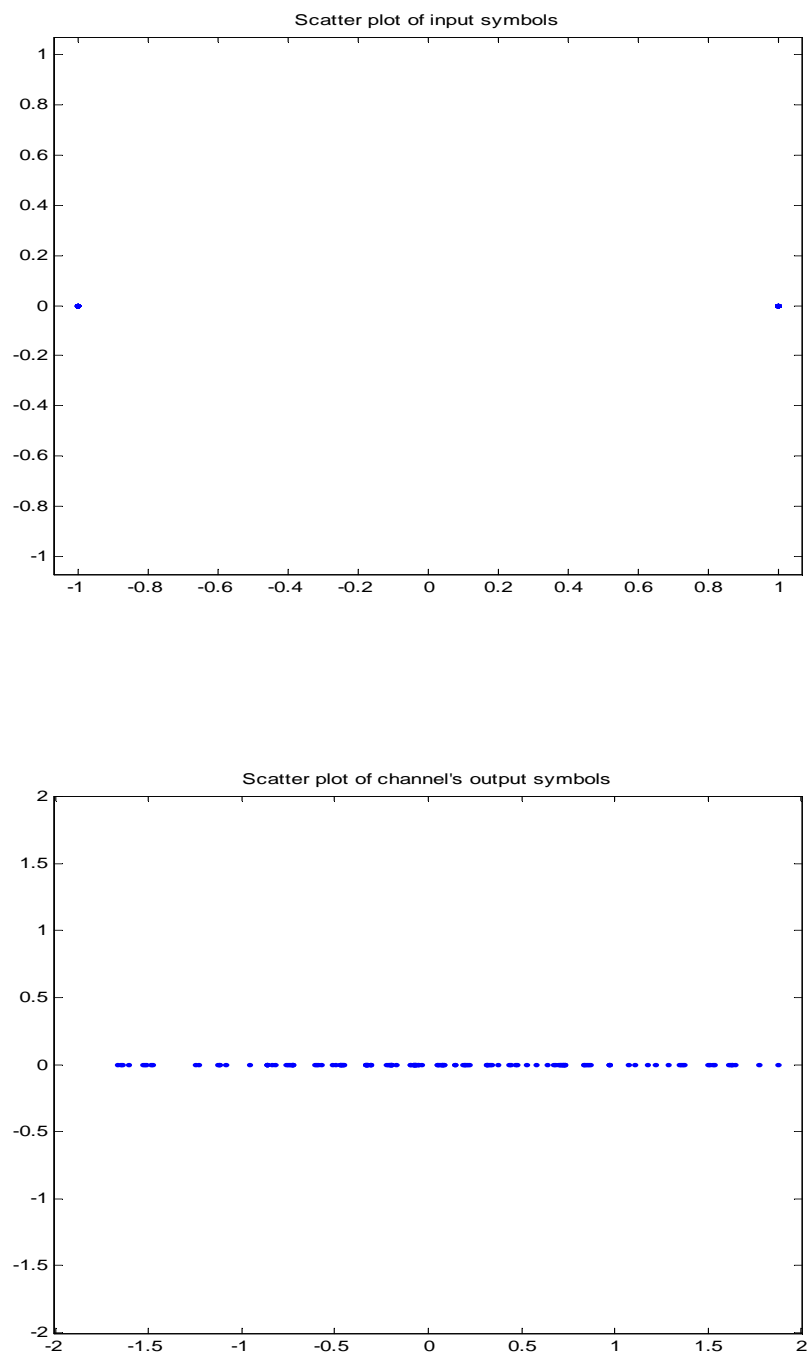
και με βάση τα παραπάνω προκύπτει:

$$MMSE = \sigma_s^2 (1 - \sigma_s^2 e^T \Delta \mathbf{H}^T R_y^{-1} \mathbf{H} e_\Delta) \quad (3.17)$$

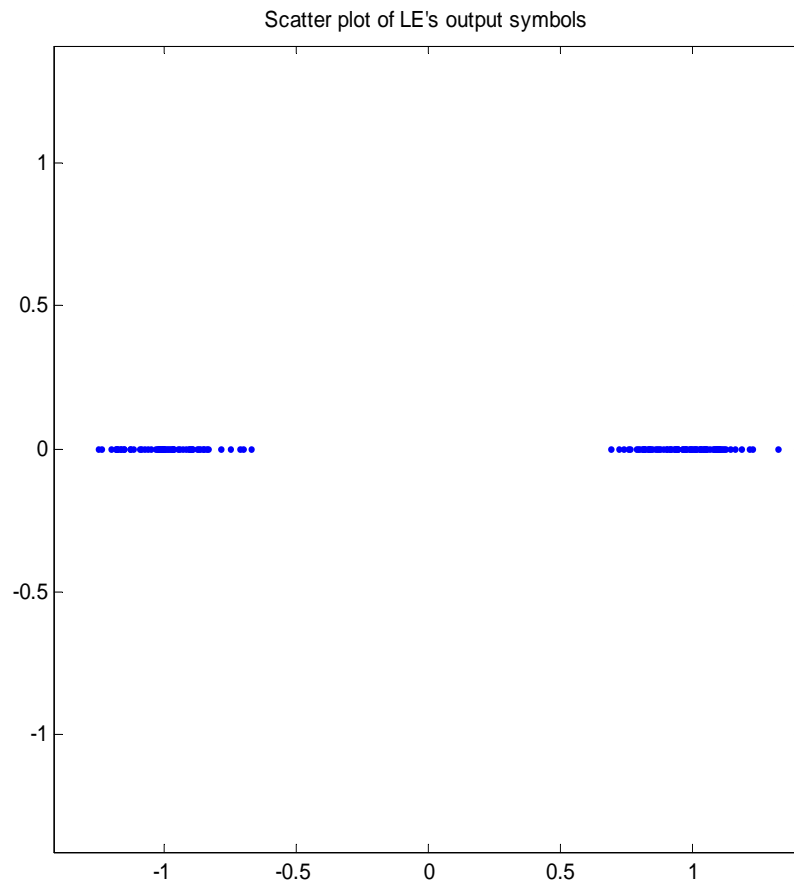
3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

Έστω, ότι αποστέλλουμε μια ακολουθία 150 τυχαίων συμβόλων $\{\pm 1\}$ μέσω ενός γνωστού καναλιού μήκους $M=6$ και το Signal-to-Noise Ratio (SNR) είναι 20dB. Στην έξοδο του καναλιού προστίθεται και λευκός Gaussian θόρυβος και η παραμόρφωση του σήματος είναι εμφανής στο Γράφημα 3.3.1. Σε αυτό φαίνεται πως τα σύμβολα εισόδου είναι συγκεντρωμένα γύρω από το (δηλαδή παίρνουν τιμές) ± 1 . Όμως, μετά τη διέλευση τους από το κανάλι, αυτά παρατηρούνται να είναι ‘απλωμένα’. Αυτό σημαίνει, πως το σήμα έχει υποστεί παραμόρφωση.

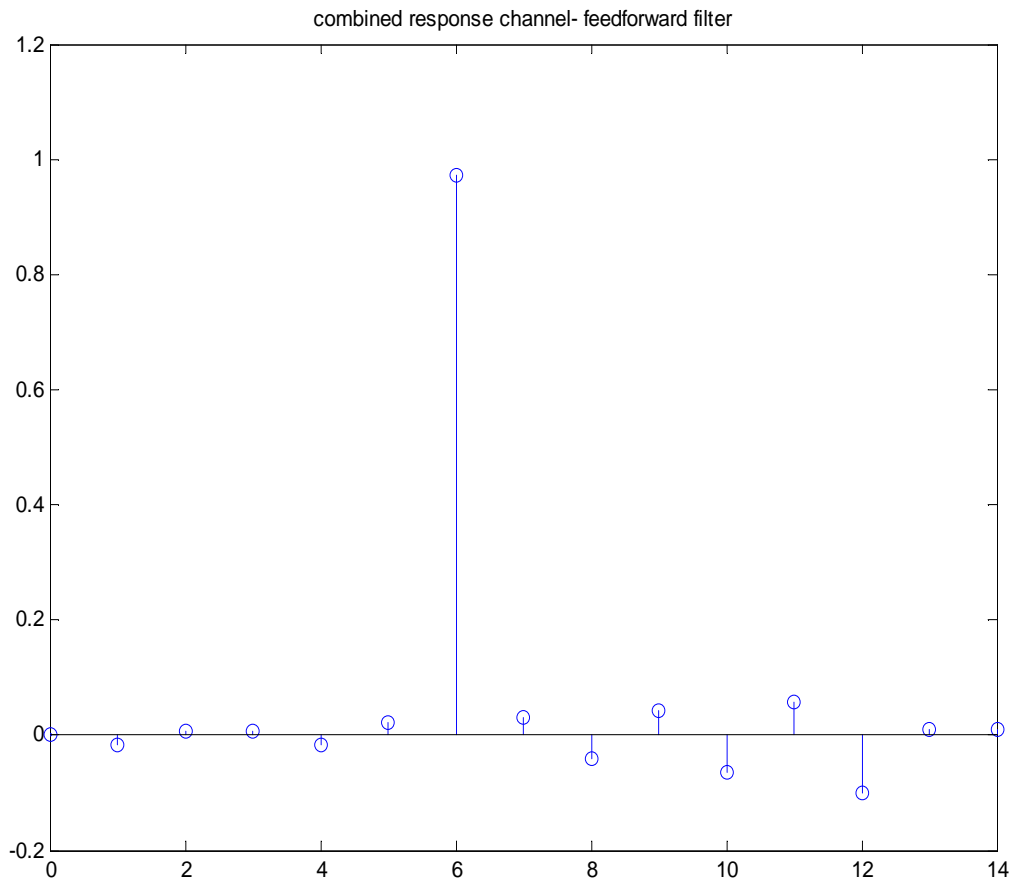
Στη συνέχεια, το παραμορφωμένο σήμα περνάει από το feedforward φίλτρο του ισοσταθμιστή και η έξοδος του από μια απλή μηχανή αποφάσεων. Στο Γράφημα 3.3.2 φαίνεται η έξοδος του ισοσταθμιστή. Τα σύμβολα μετά το φίλτρο του ισοσταθμιστή είναι ομαδοποιημένα σε κοντινές τιμές του ± 1 .



Γρ.3.3.1. Παραμόρφωση του σήματος από το κανάλι του γραμμικού ισοσταθμιστή με πρόσθετο Θόρυβο



Γρ.3.3.2. Κατανομή συμβόλων στην έξοδο
του γραμμικού ισοσταθμιστή

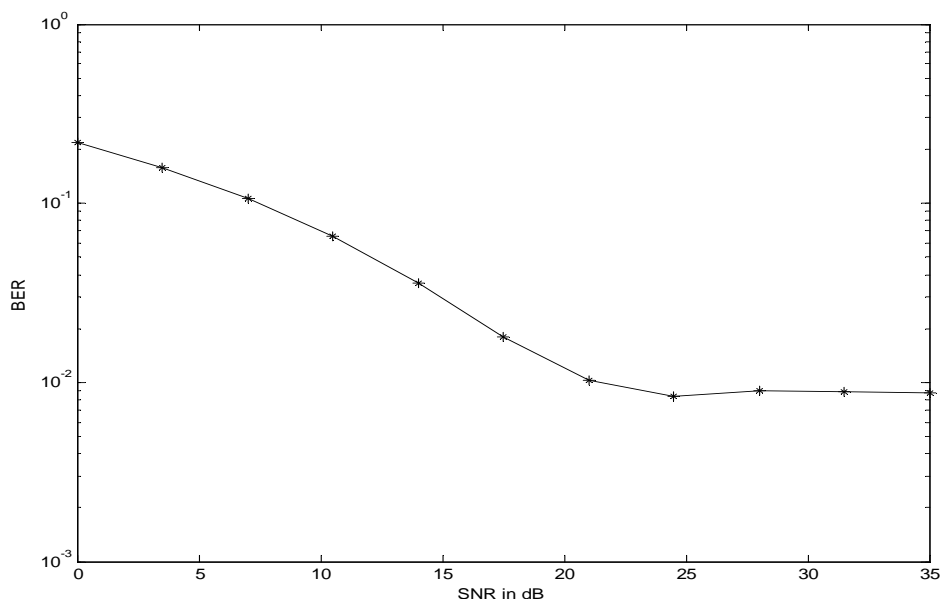


Γρ.3.3.3. Σύνθετη κρουστική απόκριση του γραμμικού ισοσταθμιστή

Επίσης, στο Γράφημα 3.3.3 παρατίθεται η σύνθετη κρουστική απόκριση καναλιού-φίλτρου, για την οποία ισχύει ότι ένας μόνο συντελεστής στη θέση Δ έχει τιμή κοντά στη μονάδα και οι υπόλοιποι είναι σχεδόν μηδενικοί.

Ωστόσο, όλα αυτά ισχύουν δεδομένου πως η τιμή του SNR είναι αρκετά μεγάλη. Μειώνοντας την τιμή αυτή μειώνεται και η απόδοση του ισοσταθμιστή, ενώ αυξάνεται τόσο το Bit-Error-Rate (BER) όσο και το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean-square-Error ή συντομογραφημένα MSE).

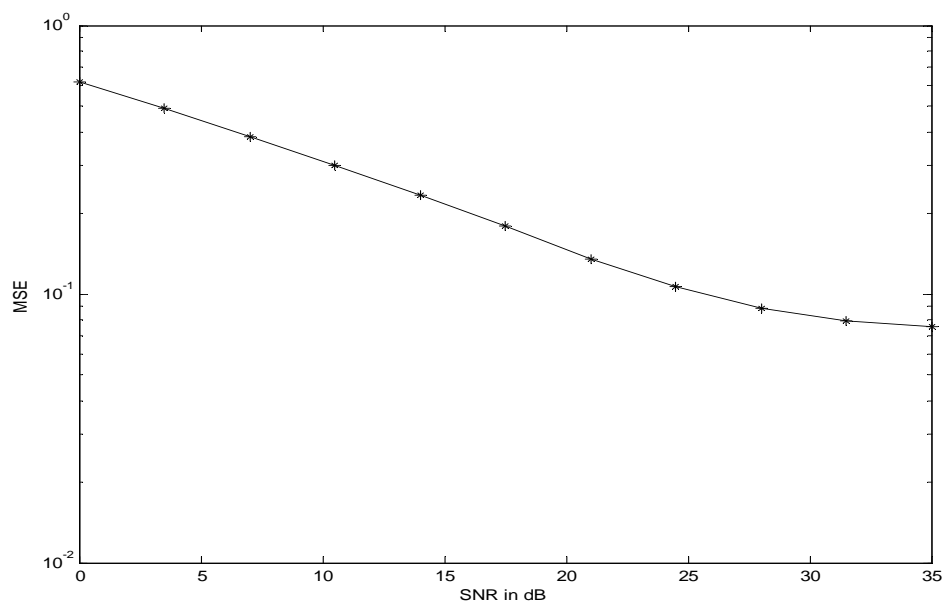
Πιο συγκεκριμένα, το BER είναι η πιθανότητα σφάλματος bit και αριθμητικά υπολογίζεται



**Γρ.3.3.4. Μεταβολή του BER στον γραμμικό ισοσταθμιστή
σε σχέση με τη μεταβολή του SNR ($L=10$, $M=6$, $D=6$)**

ως ο λόγος του πλήθους των λανθασμένων αποφάσεων στην έξοδο του ισοσταθμιστή προς το πλήθος των συμβόλων που στάλθηκαν. Έστω, ότι αποστέλλονται 1000 πακέτα των 150 συμβόλων. Το BER υπολογίζεται ως η μέση τιμή των BERs των πακέτων αυτών. Στο γράφημα 3.3.4 φαίνεται η μεταβολή του BER ως προς το SNR. Για τις μικρές τιμές του SNR το BER είναι σχετικά μεγάλο (της τάξης του 10^{-1}), όμως για τις μεγαλύτερες τιμές σταθεροποιείται σε μια μικρότερη τιμή.

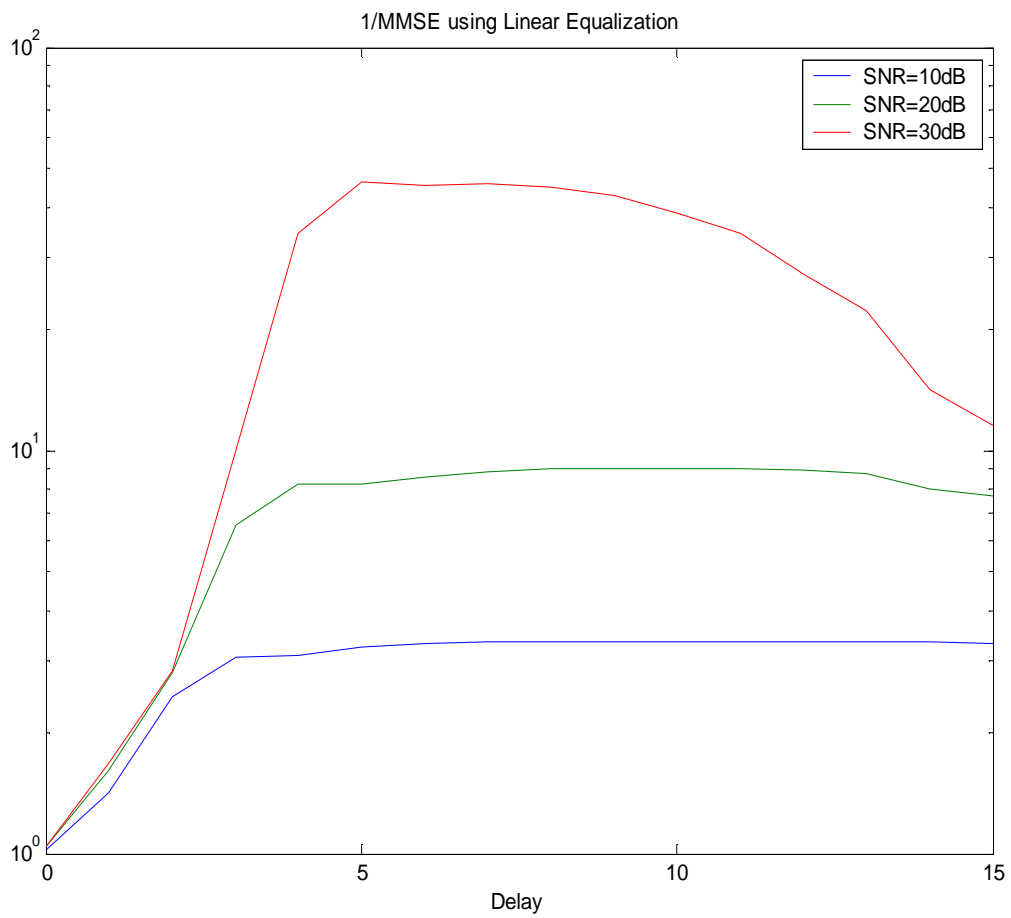
Αντίστοιχα, ενδιαφέρει και η μεταβολή του MSE σε σχέση με το SNR. Το MSE δίνεται από το τετράγωνο του απολύτου της διαφοράς του σήματος στην είσοδο της μηχανής αποφάσεων από την είσοδο του συστήματος. Για την μελέτη της συμπεριφοράς του ως προς τη μεταβολή της τιμής του SNR, έστω ότι αποστέλλονται 1000 πακέτα των 150 συμβόλων το καθένα. Το MSE υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των MSEs των πακέτων για κάθε SNR. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Γράφημα 3.3.5 Σε αυτό παρατηρείται, ότι καθώς η τιμή του SNR μεγαλώνει η



Γρ.3.3.5. Μεταβολή του MSE στον γραμμικό ισοσταθμιστή
σε σχέση με τη μεταβολή του SNR ($L=10$, $M=6$, $D=6$)

τιμή του MSE μικραίνει.

Ενδιαφέρον, επίσης, παρουσιάζει και η μεταβολή της τιμής του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MMSE) ως προς τη μεταβολή στην τιμή της καθυστέρησης Δ για διαφορετικά SNR. Αυτό υπολογίζεται από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης του MSE κατά την διαδικασία εύρεσης των βέλτιστων συντελεστών του φίλτρου του ισοσταθμιστή. Η συμπεριφορά του MMSE^{-1} στην αλλαγή του Δ φαίνεται στο Γράφημα 3.3.6. Παρατηρούμε, ότι για τις μικρές και για τις μεγάλες τιμές του Δ η απόδοση του ισοσταθμιστή δεν είναι καλή. Την καλύτερη απόδοση παρουσιάζει ο ισοσταθμιστής για τις μεσαίες τιμές του Δ σε όλα τα SNR. Ωστόσο, για την ίδια τιμή Δ μικρότερο MMSE έχει εμφανέστατα ο ισοσταθμιστής στα 30 db.



Γρ.3.3.6. Μεταβολή του MMSE^{-1} σε σχέση με τη μεταβολή του Δ

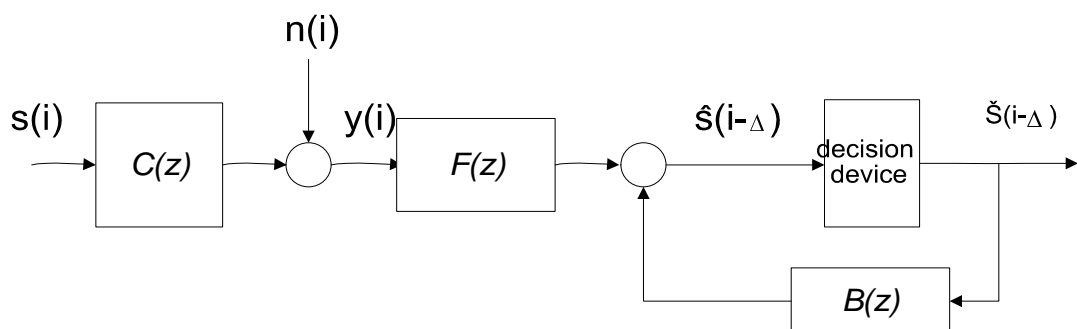
Κεφάλαιο 4

Decision Feedback Ισοσταθμιστής

4.1 Δομή του DFE

Η Γραμμική Ισοστάθμιση σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως όταν υπάρχουν φασματικά κενά, δεν δίνει επιθυμητά αποτελέσματα. Μια άλλη δομή, που σκοπός της είναι να εξαλείψει την αλληλοσυμβολική παρεμβολή, είναι ο Ισοσταθμιστής με Ανάδραση Αποφάσεων ή *Decision Feedback Equalizer (DFE)*. Ο ισοσταθμιστής αυτός συνίσταται από δύο φίλτρα, το feedforward και το feedback. Η δομή του ισοσταθμιστή φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 4.1.

Αναλυτικότερα, έστω το FIR κανάλι που περιγράφηκε στο δεύτερο εδάφιο. Είναι μήκους



Σχ.4.1. Decision Feedback ισοσταθμιστής

Μ με γνωστή την κρουστική απόκριση \mathbf{h} και συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(M-1)z^{-M-1}$$

Ακολουθία συμβόλων $\{s(\cdot)\}$ μεταδίδεται μέσω του καναλιού και στην ακολουθία του σήματος εξόδου προστίθεται λευκός Gaussian θόρυβος $\{n(i)\}$, ενώ τα $\{s(\cdot), n(\cdot)\}$ θεωρούνται ασυσχέτιστα. Εξαιτίας της ‘μνήμης’ του καναλιού, κάθε μέτρηση $y(i)$ δεν εξαρτάται μόνο από το αντίστοιχο σύμβολο εισόδου $s(i)$, αλλά και από προηγούμενα σύμβολα καθώς ισχύει

$$y(i) = h(0)s(i) + \underbrace{\sum_{k=1}^{M-1} h(k)s(i-k)}_{\text{ISI}} + n(i) \quad (4.1)$$

Ο υπογραμμισμένος όρος εκφράζει την αλληλοσυμβολική παρεμβολή, η οποία οφείλεται στη συμβολή προηγούμενων συμβόλων. Σκοπός του ισοσταθμιστή είναι να εξαλείψει την επίδραση αυτού του όρου.

4.2 Σχεδίαση των φίλτρων

Στις σχεδιαστικές προϋποθέσεις του συστήματος πρέπει να προστεθεί και το ότι, για λόγους ευκολίας, τα feedforward και feedback φίλτρα θεωρούνται FIR. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, το feedback φίλτρο αποτελεί ουσιαστικά ανάδραση, είσοδος της οποίας είναι η έξοδος της μηχανής αποφάσεων, $\hat{s}(i-\Delta)$. Η μηχανή αποφάσεων, αντίστοιχα, δέχεται σαν είσοδο το εκτιμημένο σήμα $\hat{s}(i-\Delta)$, που δίνεται από το συνδυασμό της εξόδου του feedforward και αυτής του feedback, και το αντιστοιχίζει στο κοντινότερο πιθανό σήμα.

Έστω, ότι το feedforward φίλτρο χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα \mathbf{f} , όπου

$$\mathbf{f} \triangleq \left[f(0) \quad f(1) \quad \dots \quad f(L-1) \right]^T$$

με L συντελεστές και έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + \dots + f(L-1)z^{-(L-1)}$$

Αντίστοιχα, έστω ότι το feedback φίλτρο χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα $\tilde{\mathbf{b}}$, όπου

$$\tilde{\mathbf{b}} \triangleq \begin{bmatrix} -b(1) & -b(2) & \dots & -b(Q) \end{bmatrix}^T$$

με Q συντελεστές και έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$\tilde{B}(z) = -b(1)z^{-1} - \dots - b(Q)z^{-Q}.$$

Παρατηρείται, ότι αυτό το φίλτρο είναι αυστηρά αιτιατό. Προηγούμενες αποφάσεις (δηλαδή έξοδοι της μηχανής αποφάσεων βασισμένες σε αποτέλεσμα της $\tilde{B}(z)$) ξαναχρησιμοποιούνται σαν είσοδοι του φίλτρου της ανάδρασης και σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του feedforward φίλτρου θα δώσουν νέες αποφάσεις.

Το κριτήριο για την εύρεση των συντελεστών των φίλτρων $\{f(i), b(i)\}$ είναι, όπως και στη γραμμική ισοστάθμιση, η ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, δηλαδή η ελαχιστοποίηση της διασποράς του σφάλματος

$$\tilde{s}(i - \Delta) \triangleq s(i - \Delta) - \hat{s}(i - \Delta).$$

Συνεπώς, ο σχεδιαστής περιμένει ότι το $\hat{s}(i - \Delta)$ θα είναι αρκετά κοντά στο $s(i - \Delta)$, έτσι ώστε η μηχανή αποφάσεων να μπορεί να αντιστοιχίζει το $\hat{s}(i - \Delta)$ στο σωστό σύμβολο κατά τη διαδικασία ανάκτησης της ακολουθίας. Έτσι, τα $\{f(i), b(i)\}$ θα δοθούν από τη λύση

$$\min E|\tilde{s}(i - \Delta)|^2$$

Η παρουσία της μηχανής αποφάσεων μετατρέπει την παραπάνω διαδικασία σε μη γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Αυτό συμβαίνει γιατί το $\hat{s}(i - \Delta)$ προκύπτει μη γραμμικά από την μέτρηση των συμβόλων $\{y(i)\}$. Για τη διευκόλυνση, λοιπόν, της σχεδίασης των $\{F(z), B(z)\}$ θεωρείται, ότι η μηχανή αποφάσεων δίνει σωστά αποτελέσματα. Έστω, δηλαδή, ότι ισχύει ότι

οι αποφάσεις $\{\tilde{s}(i - \Delta)\}$ είναι σωστές και ίσες με $\{s(i - \Delta)\}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αυτή η θεώρηση κρύβει έναν κίνδυνο για την σωστή ισοστάθμιση. Αν δοθεί μια λανθασμένη απόφαση, τότε αυτό το λάθος θα χρησιμοποιηθεί από το feedback φίλτρο κι αυτό θα εξακολουθήσει να δίνει ανεπιθύμητα αποτελέσματα εξαπλώνοντας το λάθος. Αυτό υποβαθμίζει ολόκληρη την δομή και περιορίζει την απόδοσή της, ιδιαίτερα για χαμηλές τιμές του Signal-to-Noise Ratio (SNR).

Όπως διαπιστώνεται και από το Σχήμα, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\hat{s}(i - \Delta) &= [f(0)y(i) + f(1)y(i - 1) + \dots + f(L - 1)y(i - L + 1)] \\ &\quad - [b(1)\hat{s}(i - \Delta - 1) + b(2)\hat{s}(i - \Delta - 2) + \dots + b(Q)\hat{s}(i - \Delta - Q)] \\ &= [f(0)y(i) + f(1)y(i - 1) + \dots + f(L - 1)y(i - L + 1)] \\ &\quad - [b(1)s(i - \Delta - 1) + b(2)s(i - \Delta - 2) + \dots + b(Q)s(i - \Delta - Q)]\end{aligned}\quad (4.2)$$

Προσπαθώντας να αποδοθούν οι παραπάνω εξισώσεις σε μια πιο συμπυκνωμένη μορφή με τη χρήση διανυσμάτων, ορίζουμε:

$$\mathbf{f}^T \triangleq \begin{bmatrix} f(0) & f(1) & \dots & f(L - 1) \end{bmatrix}$$

ενώ, συγκεντρώνοντας τους συντελεστές του $-B(z)$ σε ένα διάνυσμα γραμμή με μια μοναδιαία είσοδο, ισχύει

$$\mathbf{b}^T \triangleq \begin{bmatrix} 1 & b(1) & \dots & b(Q) \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση (4.2) του σφάλματος $\tilde{s}(i - \Delta)$, λοιπόν, μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned}\tilde{s}(i - \Delta) &= s(i - \Delta) - \hat{s}(i - \Delta) \\ &= s(i - \Delta) - \left(\sum_{j=0}^{L-1} f(j)y(i - j) - \sum_{j=1}^Q b(j)s(i - \Delta - j) \right) \\ &= \mathbf{b}^T \mathbf{s}_\Delta - \mathbf{f}^T \mathbf{y}\end{aligned}\quad (4.3)$$

όπου

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} y(i) \\ y(i-1) \\ y(i-2) \\ \vdots \\ y(i-L+1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_\Delta \triangleq \begin{bmatrix} s(i-\Delta) \\ s(i-\Delta-1) \\ s(i-\Delta-2) \\ \vdots \\ s(i-\Delta-Q) \end{bmatrix}$$

$L \times 1$ και $(Q+1) \times 1$ διαστάσεων, αντίστοιχα. Οπότε το πρόβλημα βελτιστοποίησης γίνεται

$$\min E|\mathbf{b}^T \mathbf{s}_\Delta - \mathbf{f}^T \mathbf{y}|^2 \quad (4.4)$$

ψάχνοντας τα κατάλληλα \mathbf{f}, \mathbf{b} . Τα βέλτιστα \mathbf{f}, \mathbf{b} θα συμβολίζονται ως \mathbf{f}_{opt}^T και \mathbf{b}_{opt}^T .

Αντί να γίνει προσπάθεια ελαχιστοποίησης της εξίσωσης σφάλματος μέσω βελτιστοποίησης των \mathbf{f}, \mathbf{b} ταυτόχρονα, είναι πιο εύκολο να θεωρηθεί κάποιο από τα δύο γνωστό, έστω το \mathbf{b} , και να αναζητηθεί η βέλτιστη λύση για το άλλο, έστω του \mathbf{f} [3]. Έτσι, τίθεται ο όρος $\mathbf{b}^T \mathbf{s}_\Delta = \alpha$, οπότε η εξίσωση σφάλματος γίνεται

$$\tilde{s}(i-\Delta) = \alpha - \mathbf{f}^T \mathbf{y} \quad (4.5)$$

ενώ το μέσο τετραγωνικό σφάλμα γίνεται:

$$MSE = E|\alpha - \mathbf{f}^T \mathbf{y}|^2 \quad (4.6)$$

και η ελαχιστοποίησή του είναι, πλέον, ένα κλασσικό γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων μέσων τετραγώνων (l.m.s.e) ψάχνοντας το κατάλληλο \mathbf{f} .

Έτσι, ισχύουν τα παρακάτω

$$\begin{aligned} MSE &= E|\tilde{s}(i-\Delta)|^2 \\ &= E|\alpha - \mathbf{f}^T \mathbf{y}|^2 \\ &= E(\alpha - \mathbf{f}^T \mathbf{y})(\alpha - \mathbf{y}^T \mathbf{f}) \\ &= E(\alpha^2 - \alpha \mathbf{y}^T \mathbf{f} - \mathbf{f}^T \mathbf{y} \alpha + \mathbf{f}^T \mathbf{y} \mathbf{y}^T \mathbf{f}) \end{aligned}$$

$$= R_\alpha - R_{\alpha y} \mathbf{f} - \mathbf{f}^T R_{y\alpha} + \mathbf{f}^T R_y \mathbf{f} \quad (4.7)$$

όπου $R_\alpha = E(\alpha^2) = E(b^T s_\Delta s_\Delta^T b) = b^T R_s b$, $R_{\alpha y} = E(\alpha \mathbf{y}^T)$, $R_{y\alpha} = E(\mathbf{y}^T \alpha)$ και $R_y = E(\mathbf{y} \mathbf{y}^T)$ και από τη λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{\partial MSE}{\partial \mathbf{f}} = -R_{\alpha y} + \mathbf{f}^T R_y = 0 \quad (4.8)$$

από την οποία δίνεται το \mathbf{f}_{opt}^T

$$\mathbf{f}_{opt}^T = R_{\alpha y} R_y^{-1}. \quad (4.9)$$

Όμως, χρησιμοποιώντας ότι

$$R_{\alpha y} \triangleq E \alpha \mathbf{y}^T = E \mathbf{b}^T \mathbf{s}_\Delta \mathbf{y}^T \quad (4.10)$$

και $R_{sy} = E(\mathbf{s}_\Delta \mathbf{y}^T)$ προκύπτει από την (4.9) ότι

$$\mathbf{f}_{opt}^T = \mathbf{b}^T R_{sy} R_y^{-1}. \quad (4.11)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.11) η συνάρτηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος δίνεται:

$$\begin{aligned} MSE &= R_\alpha - R_{\alpha y} \mathbf{f}_{opt} - \mathbf{f}_{opt}^T R_{y\alpha} + \mathbf{f}_{opt}^T R_y \mathbf{f}_{opt} \\ &= \mathbf{b}^T R_s \mathbf{b} - \mathbf{b}^T R_{sy} R_y R_{ys} \mathbf{b} - \mathbf{b}^T R_{sy} R_y^{-1} R_{ys} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T R_{sy} R_y^{-1} R_y R_y R_{ys} \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}^T R_s \mathbf{b} - \mathbf{b}^T R_{sy} R_y^{-1} R_{ys} \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}^T [R_s - R_{sy} R_y^{-1} R_{ys}] \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}^T R_\delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.12)$$

όπου οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης δίνονται από

$$R \triangleq E \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\Delta \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\Delta \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}^T \triangleq \begin{bmatrix} R_s & R_{sy} \\ R_{ys} & R_y \end{bmatrix}$$

και έχουν διαστάσεις

$$R_s : (Q + 1) \times (Q + 1) \text{ και } R_{sy} : (Q + 1) \times (L)$$

Όπως με τον γραμμικό ισοσταθμιστή, έτσι και τώρα, υποθέτουμε ότι οι διαδικασίες $\{s(\cdot), y(\cdot)\}$ είναι στατικές υπό την ευρεία έννοια, και συνεπώς οι ποσότητες $\{R_{sy}, R_y\}$ είναι ανεξάρτητες του i . Επίσης, γίνεται η υπόθεση ότι ο πίνακας της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης R είναι θετικά ορισμένος και κατά συνέπεια αντιστρέψιμος. Η ιδιότητα του θετικά ορισμένου πίνακα R εγγυάται, επίσης, ότι τόσο το R_y , όσο και το συμπλήρωμα Schur του R , R_δ , ως προς R_y είναι θετικά ορισμένοι πίνακες [3], δηλαδή ισχύει:

$$R_y > 0 \text{ και } R_\delta \triangleq R_s - R_{sy}R_y^{-1}R_{ys} > 0.$$

Επομένως, οι πίνακες των ποσοτήτων $\{R_\delta, R_y\}$ είναι κι αυτοί αντιστρέψιμοι.

Στη συνέχεια, πρέπει να λυθεί το

$$\min_{\mathbf{b}} \mathbf{b}^T R_\delta \mathbf{b} \tag{4.13}$$

ψάχνοντας το βέλτιστο \mathbf{b} .

Αν ληφθεί υπόψιν ότι το διάνυσμα \mathbf{b} έχει μονάδα στον πρώτο συντελεστή, τότε προκύπτει ένα ακόμη δεδομένο για την εύρεση του ζητούμενου \mathbf{b}_{opt}^T , αφού πρέπει να ισχύει ότι

$$\mathbf{b}^T \mathbf{e}_0 = 1$$

όπου \mathbf{e}_0 είναι το διάνυσμα $(Q + 1) \times 1$ διαστάσεων διάνυσμα

$$\mathbf{e}_0 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

Προκύπτει, δηλαδή, ένα πρόβλημα τετραγωνικής ελαχιστοποίησης υπό γραμμικό περιορισμό. Για την επίλυσή του χρησιμοποιείται το παρακάτω μαθηματικό λήμμα [3] :

Λήμμα 1 Έστω A ένας $(n \times n)$, ερμιτιανός, θετικά ορισμένος πίνακας και έστω $X \in \mathbf{C}^{n \times m}$, $B \in \mathbf{C}^{n \times k}$ και $C \in \mathbf{C}^{m \times k}$. Έστω, επίσης, ότι ο B είναι πλήρους βαθμού στηλών ίσου με k

(οπότε $n \geq k$). Τότε, η μοναδική λύση στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_X X^* A X$$

υπό τον περιορισμό

$$X^* B = C$$

δίνεται από

$$X_{opt} = A^{-1} B (B^* A^{-1} B)^{-1} C^*$$

Δεδομένου, λοιπόν, ότι το R_δ είναι ερμιτιανός, θετικά ορισμένος πίνακας και το \mathbf{e}_0 είναι πλήρους βαθμού στηλών και τα \mathbf{b} , \mathbf{e}_0 είναι διανύσματα, η εφαρμογή του λήμματος στην περίπτωση μας δίνει

$$\mathbf{b}_{opt} = R_\delta^{-1} \mathbf{e}_0 (\mathbf{e}_0^T R_\delta^{-1} \mathbf{e}_0)^{-1}$$

Δηλαδή προκύπτει, τελικά, ότι

$$\mathbf{b}_{opt}^T = \frac{\mathbf{e}_0^T R_\delta^{-1}}{\mathbf{e}_0^T R_\delta^{-1} \mathbf{e}_0} \quad (4.14)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση του \mathbf{b}_{opt}^T στην εξίσωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος $MSE = \mathbf{b}^T R_\delta \mathbf{b}$ τελικά προκύπτει η εξίσωση του MMSE

$$MMSE = \frac{1}{\mathbf{e}_0^T R_\delta^{-1} \mathbf{e}_0} \quad (4.15)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, λοιπόν, οι εξισώσεις που δίνουν τους βέλτιστους συντελεστές $\{f(i), b(i)\}$ του DFE, θεωρώντας πως οι αποφάσεις $\{\hat{s}(i - \Delta)\}$ είναι σωστές είναι:

$$\mathbf{b}_{opt}^T = \frac{\mathbf{e}_0^T R_\delta^{-1}}{\mathbf{e}_0^T R_\delta^{-1} \mathbf{e}_0} \quad (4.16)$$

και

$$\mathbf{f}_{opt}^T = \mathbf{b}_{opt}^T R_{sy} R_y^{-1} \quad (4.17)$$

Οι τρεις αυτές εξισώσεις περιέχουν σαν όρους, τους πίνακες των συναρτήσεων αυτοσυσχετίσης $\{R_s, R_{sy}, R_y\}$, οι οποίοι μπορούν να υπολογιστούν λαμβάνοντας υπ' όψιν το μοντέλο του καναλιού και τα στατιστικά δεδομένα για τα $\{s(\cdot), n(\cdot)\}$. Για τον σκοπό αυτό, αρχικά, εκφράζεται το \mathbf{y} σαν συνάρτηση των συμβόλων προς μετάδοση. Συνεπώς, ισχύει ότι

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}. \quad (4.18)$$

Διαπιστώνεται, λοιπόν, ότι υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ των διανυσμάτων \mathbf{y} , \mathbf{s} και αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να υπολογιστεί το R_y , για το οποίο ισχύει ότι

$$R_y = E(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n})(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n})^T = \mathbf{H}R_s\mathbf{H}^T + R_n \quad (4.19)$$

όπου $R_s \triangleq E\mathbf{s}\mathbf{s}^T$, διαστάσεων $(L + M - 1) \times (L + M - 1)$ και $R_n \triangleq E\mathbf{n}\mathbf{n}^T$, διαστάσεων $(L \times L)$.

Αντίστοιχα, δεδομένου ότι τα $\{n(\cdot), s(\cdot)\}$ είναι ασυσχέτιστα, ισχύει ότι

$$R_{sy} = E\mathbf{s}_\Delta(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n})^T = E(\mathbf{s}_\Delta\mathbf{s}^T)\mathbf{H}^T. \quad (4.20)$$

Πρέπει, τώρα, να υπολογιστεί το $E\mathbf{s}_\Delta\mathbf{s}^T$ ως συνάρτηση των μεταδιδόμενων συμβόλων. Φυσικά, η τιμή του $E\mathbf{s}_\Delta\mathbf{s}^T$ εξαρτάται από τη συσχέτιση μεταξύ των συμβόλων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Πρέπει να επισημανθεί ότι στο \mathbf{s}_Δ διάνυσμα, το Δ των εισόδων έχει νόημα να επιλεγθεί έτσι, ώστε οι εισόδοι αυτού του διανύσματος να συμπίπτουν με τις εισόδους του \mathbf{s} . Αυτό προϋποθέτει το μήκος του καναλιού, οι συντελεστές των φίλτρων και η τιμή Δ να ικανοποιούν την σχέση:

$$\Delta + Q \leq L + M - 2$$

Με αυτή την προϋπόθεση, λοιπόν, και θεωρώντας ότι τα $\{s(\cdot)\}$ είναι ανεξάρτητα και όμοια κατανομημένα με διακύμανση σ_s^2 , προκύπτει ότι

$$E\mathbf{s}_\Delta\mathbf{s}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+1)\times\Delta} & \sigma_s^2\mathbf{I}_{Q+1} & \mathbf{0}_{(Q+1)\times(L+M-\Delta-Q-1)} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Παρομοίως, έστω ότι και η διαδικασία του θορύβου $\{n(\cdot)\}$ είναι λευκή με διακύμανση σ_n^2 , ώστε $R_n = \sigma_n^2\mathbf{I}$.

Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$R_y = \sigma_s^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T + \sigma_n^2\mathbf{I}_L \quad (4.22)$$

και

$$R_{sy} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+1)\times\Delta} & \sigma_s^2\mathbf{I}_{Q+1} & \mathbf{0}_{(Q+1)\times(L+M-\Delta-Q-2)} \end{bmatrix} \mathbf{H}^T \quad (4.23)$$

όπου έστω

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+1)\times\Delta} & \sigma_s^2\mathbf{I}_{Q+1} & \mathbf{0}_{(Q+1)\times(L+M-\Delta-Q-2)} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$R_\delta = \sigma_s^2\mathbf{I} - R_{sy}(\sigma_s^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T + \sigma_n^2\mathbf{I}_L)^{-1}R_{ys} \quad (4.25)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις μπορούν, πλέον, να δοθούν αποτελέσματα για τους ζητούμενους βέλτιστους συντελεστές των φίλτρων και του MMSE.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κατά την υλοποίηση των παραπάνω σχέσεων, για να πολλαπλασιάζεται ο πίνακας \mathbf{P} με τον \mathbf{H}^T θα πρέπει, λόγω του τελευταίου μπλοκ πίνακα μηδενικών με διαστάσεις $(Q+1) \times (L+M-\Delta-Q-2)$, να ισχύει $\Delta+Q \leq L+M-2$.

4.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

Σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις υλοποιούνται τα φίλτρα του DFE στο MATLAB. Αυτό που ενδιαφέρει αρχικά, είναι να διαπιστώσουμε, αν πραγματικά ο ισοσταθμιστής εξαλείφει την αλληλοσυμβολική παρεμβολή.

Έστω, ότι αποστέλλουμε μια ακολουθία 150 τυχαίων συμβόλων $\{\pm 1\}$ μέσω ενός γνωστού καναλιού μήκους $M=6$ και το Signal-to-Noise Ratio (SNR) είναι 20dB. Στην έξοδο του καναλιού προστίθεται και λευκός Gaussian θόρυβος και η παραμόρφωση του σήματος είναι

εμφανής στο Γράφημα 4.2.1. Σε αυτό, ενώ τα σύμβολα εισόδου είναι συγκεντρωμένα γύρω από το $\{\pm 1\}$, τα σύμβολα εξόδου του καναλιού είναι ‘απλωμένα’.

Ωστόσο, το παραμορφωμένο σήμα περνάει από το feedforward φίλτρο, την μηχανή αποφάσεων και τελικά από το feedback φίλτρο. Στο Γράφημα 4.2.2. έχει σχεδιαστεί η κατανομή των συμβόλων της εξόδου του ισοσταθμιστή. Παρατηρείται, ότι αυτά είναι ομαδοποιημένα γύρω από το $\{\pm 1\}$.

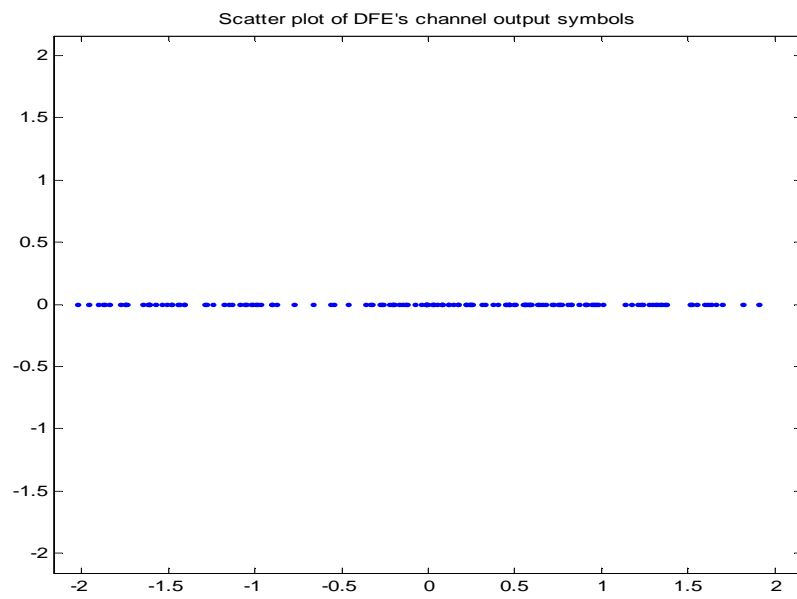
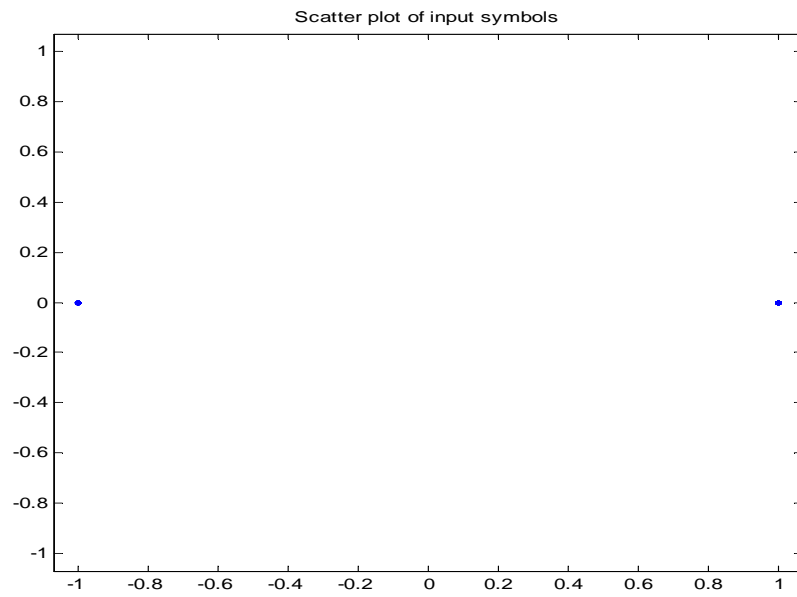
Φυσικά, όπως και στην γραμμική ισοστάθμιση, όλα αυτά ισχύουν δεδομένου πως η τιμή του SNR είναι αρκετά μεγάλη. Μειώνοντας την τιμή αυτή μειώνεται και η απόδοση του συστήματος, ενώ αυξάνεται τόσο το Bit-Error-Rate (BER) όσο και το Mean-square-Error (MSE). Στο Γράφημα 4.2.3 φαίνεται η μεταβολή του BER σε σχέση με το SNR. Για τις μικρές τιμές του SNR το BER είναι σχετικά μεγάλο (της τάξης του 10^{-1}), ενώ για τις μεγαλύτερες τιμές σταθεροποιείται σε μια μικρότερη τιμή.

Αντίστοιχα, ενδιαφέρει και η μεταβολή του MSE σε σχέση με το SNR. Για την παρατήρησή του, έστω ότι και πάλι αποστέλλονται 1000 πακέτα των 150 συμβόλων το καθένα και υπολογίζεται ο μέσος όρος των MSEs των πακέτων για κάθε SNR. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Γράφημα 4.2.4

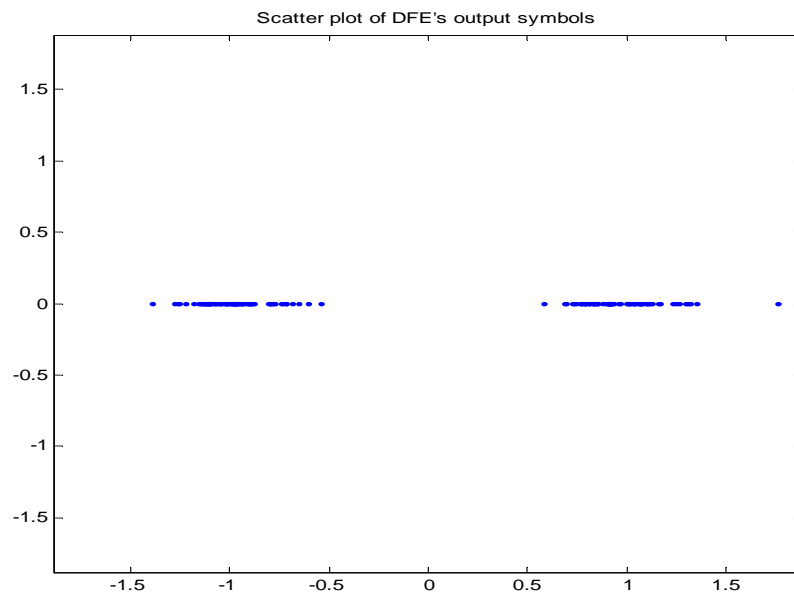
Τέλος, στο Γράφημα 4.2.5 παρατηρούμε πώς μεταβάλλεται το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε σχέση με τη μεταβολή στην καθυστέρηση Δ για διαφορετικές τιμές του SNR. Το MMSE (Minimum-Mean-Square-Error) υπολογίζεται από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης του MSE κατά την εύρεση των ιδανικών συντελεστών των φίλτρων του DFE. Για τις μικρές τιμές της καθυστέρησης παρατηρείται πως το MMSE βελτιώνεται σταδιακά, φτάνει σε μια μεγίστη τιμή και μετά σταθεροποιείται.

Τα παραπάνω αποτελέσματα προέκυψαν, δεδομένου ότι το κανάλι είναι γνωστό, έχει μήκος $M=6$, η καθυστέρηση είναι $\Delta=6$, ενώ το feedforward και feedback φίλτρο έχουν συντελεστές $L = 10$ και $Q = 5$, αντίστοιχα. Ωστόσο, ενδιαφέροντα είναι τα αποτελέσματα που προκύπτουν

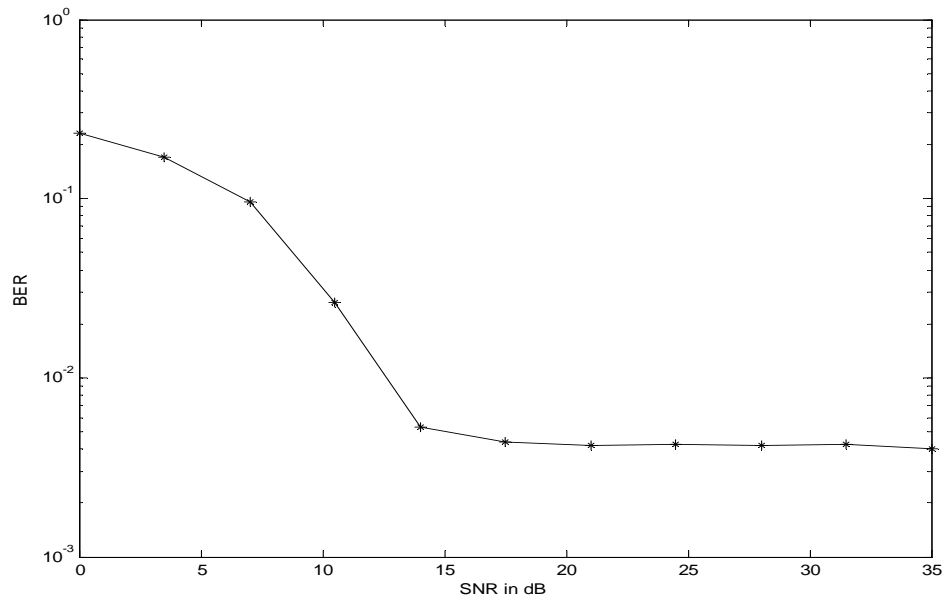
- αν αντί για το γνωστό κανάλι χρησιμοποιηθεί κανάλι που εκτιμήθηκε με τη μέθοδο LS και

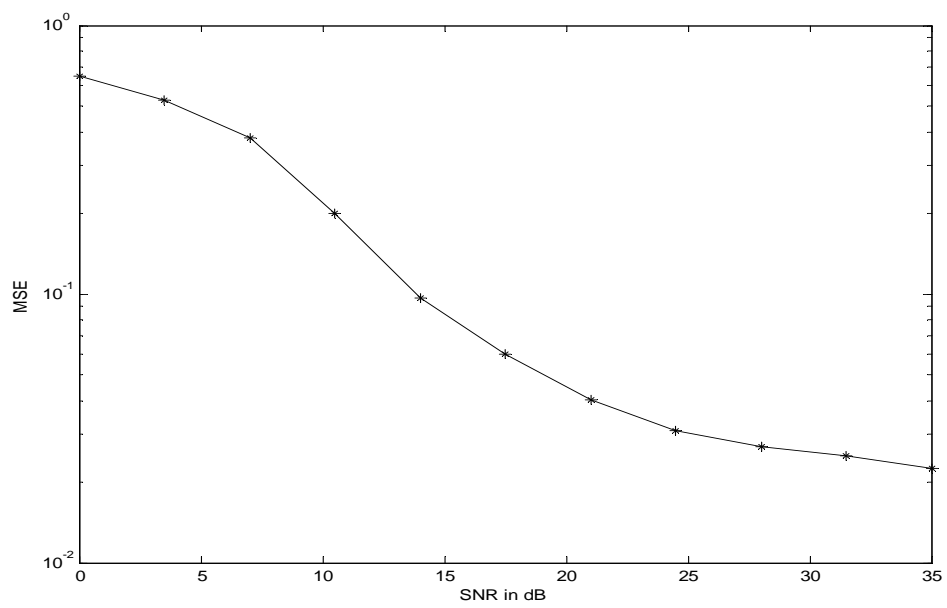


Γρ.4.2.1. Παρμόρφωση του σήματος στο κανάλι του DFE με πρόσθετο Gaussian θόρυβο

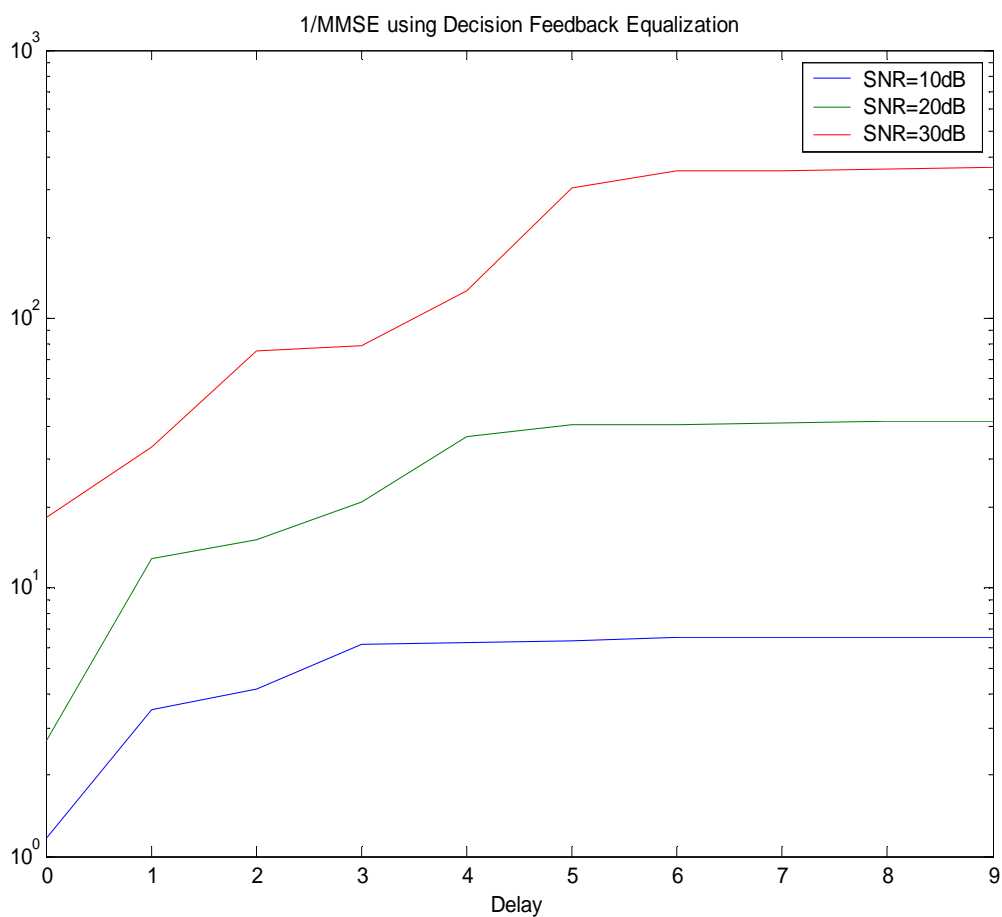


Γρ.4.2.2. Κατανομή συμβόλων στην έξοδο του DFE

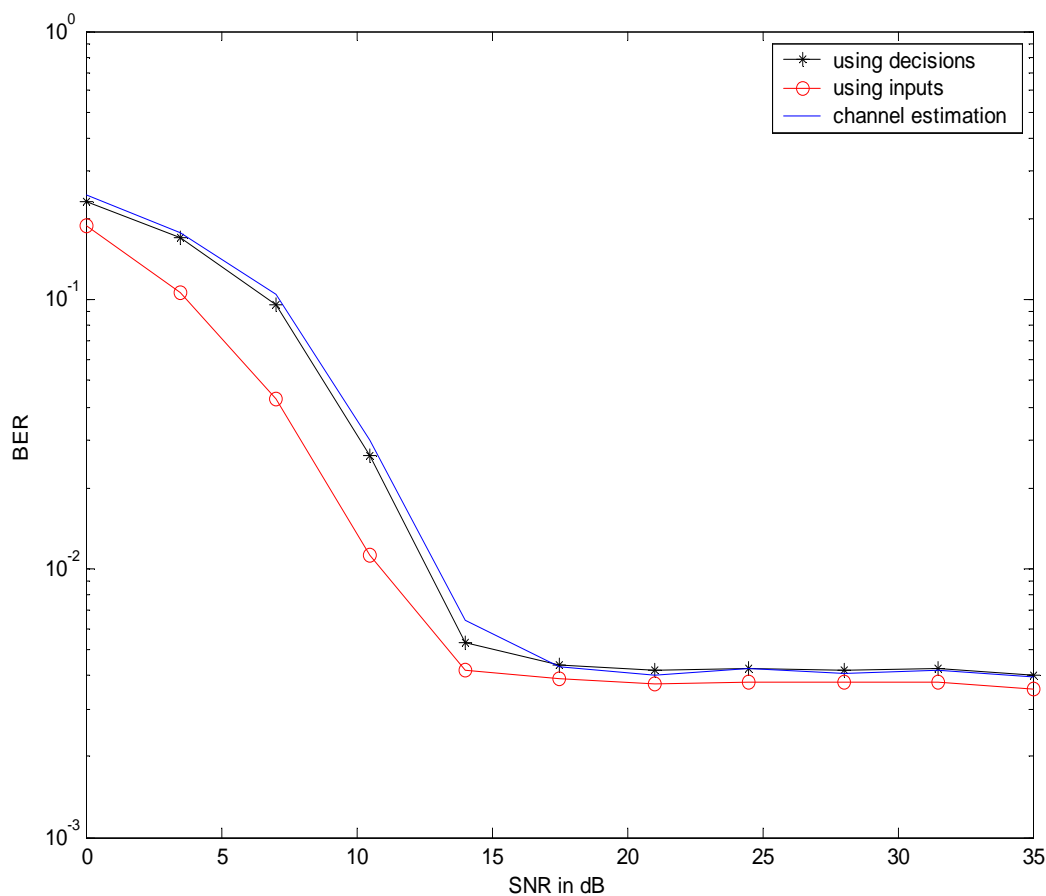
Γρ.4.2.3. Μεταβολή του BER στον Decision Feedback ισοσταθμιστή σε σχέση με τη μεταβολή του SNR ($L=10$, $M=6$, $Q=5$, $D=6$)



Γρ.4.2.4. Μεταβολή του MSE στον Decision Feedback ισοσταθμιστή
σε σχέση με τη μεταβολή του SNR ($L=10$, $M=6$, $Q=5$, $D=6$)



Γρ.4.2.5. Μεταβολή του MMSE^{-1} σε σχέση με τη μεταβολή του Δ στον DFE ($L=10, Q=5, M=6$)

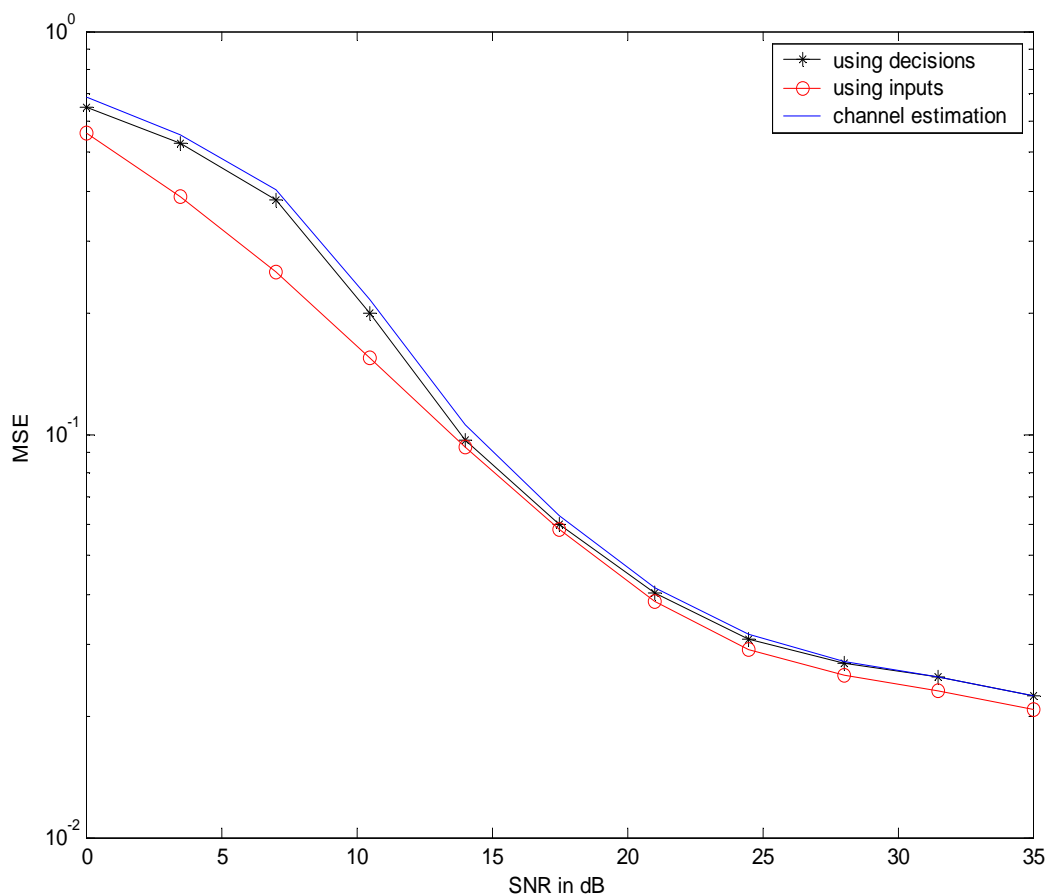


Γρ.4.3.1. Μεταβολή του BER

- αν αντί των αποφάσεων της μηχανής αποφάσεων στην είσοδο του feedback φίλτρου χρησιμοποιηθεί η πραγματική ακολουθία του σήματος εισόδου.

Οι διαφορές τους φαίνονται στα αποτελέσματά τους κατά τον υπολογισμό του BER και του MSE για τιμές SNR 0-35 d.

Για παράδειγμα, στο Γράφημα 4.3.1 φαίνεται ταυτόχρονα η μεταβολή του BER ως προς το SNR, όταν χρησιμοποιούνται οι αποφάσεις της μηχανής αποφάσεων, τα σύμβολα εισόδου και η εκτίμηση καναλιού (στην περίπτωση της εκτίμησης καναλιού χρησιμοποιούνται οι αποφάσεις κι όχι το αρχικό σήμα εισόδου).



Γρ.4.3.2. Μεταβολή του MSE

Παρατηρείται, λοιπόν, ότι καλύτερα αποτελέσματα (μικρότερη τιμή BER) δίνονται όταν χρησιμοποιούνται τα σύμβολα εισόδου, ενώ τα χειρότερα, όταν το κανάλι έχει εκτιμηθεί. Ωστόσο, οι διαφορές τους είναι μικρές, ενώ για τα μεγαλύτερα SNR, που η τιμή του BER σταθεροποιείται, οι διαφορές τους είναι ακόμη μικρότερες.

Αντίστοιχα, ελέγχονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν κατά τον υπολογισμό του MSE για τις ίδιες περιπτώσεις. Αυτά φαίνονται στο Γράφημα 4.3.2. Και πάλι τα καλύτερα αποτελέσματα, με μικρές διαφορές, δίνονται όταν χρησιμοποιούνται τα σύμβολα εισόδου, ενώ τα χειρότερα, όταν το κανάλι έχει εκτιμηθεί και στις μεγαλύτερες τιμές του SNR οι γραφικές

αναπαραστάσεις τείνουν να ταυτιστούν.

Κεφάλαιο 5

Σύγκριση των Ισοσταθμιστών

Όπως προαναφέρθηκε, προκειμένου να εξαλειφθεί το φαινόμενο της ISI και το σήμα $\{s(i)\}$, που αποστέλεται, να ανακτηθεί χωρίς παραμόρφωση, ο γραμμικός ισοσταθμιστής χρησιμοποιεί τόσο τις πρόσφατες, όσο και τις προηγούμενες μετρήσεις $\{y(i-k)\}$, όπου $k = 0, 1, \dots, L-1$. Αυτό συμβαίνει, γιατί οι προηγούμενες μετρήσεις περιέχουν πληροφορία σχετική με τον όρο της ISI στο $\{y(i)\}$ και συνεπώς, μπορούν να βοηθήσουν στον περιορισμό της. Φυσικά, θα ήταν προτιμότερο, αντί να χρησιμοποιούνται προηγούμενες μετρήσεις $\{y(i-1), y(i-2), \dots\}$, να χρησιμοποιούνται τα ίδια τα προηγούμενα σύμβολα $\{s(i-1), s(i-2), \dots\}$ για να εξαλειφθεί η επίδραση που έχουν στο $y(i)$.

Αυτή η ιδέα χρησιμοποιείται στον Decision Feedback Ισοσταθμιστή, ο οποίος χρησιμοποιεί προηγούμενες αποφάσεις για να αναιρέσει την ISI. Χάρη στο feedback φίλτρο, ο DFE τροφοδοτείται με πρόσφατες αποφάσεις, κι έτσι μειώνει την επίδραση της ISI σε νέες καθυστερημένες εκτιμήσεις του $s(i)$.

Αντίθετα, στην γραμμική ισοστάθμιση, το feedforward φίλτρο μειώνει την ISI προσπαθώντας να επιβάλλει

$$H(f)F(f) \approx e^{-j2\pi\Delta f}$$

Γενικά, αυτό είναι δύσκολο να επιτευχθεί, ειδικά σε κανάλια με σημαντική ISI [3]. Εξε-

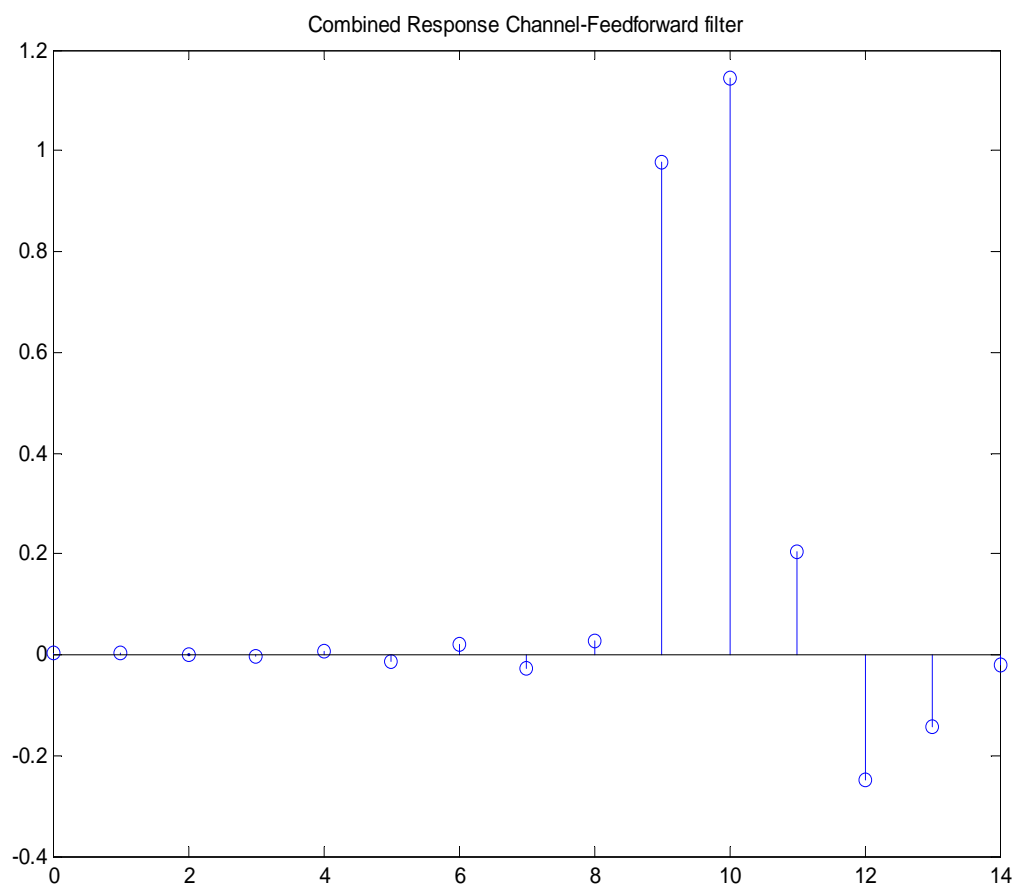
τάζοντας τον DFE, το $H(f)F(f)$ δίνει ακολουθία κρουστικής απόκρισης που θα έχει ακόμη δείγματα αλληλοσυμβολικής παρεμβολής. Έτσι, χρησιμοποιείται το feedback φίλτρο, ώστε να εξαλείψει αυτά τα δείγματα.

Πραγματικά, έστω η περίπτωση της αποστολής πακέτων 150 συμβόλων μέσω του DFE, όπου το κανάλι είναι γνωστό, έχει μήκος $M=6$, η καθυστέρηση είναι $\Delta=9$, ενώ το feedforward και feedback φίλτρο έχουν συντελεστές $L = 10$ και $Q = 5$, αντίστοιχα (εξετάζεται, δηλαδή, μια πολύ καλή περίπτωση για την αποδοτικότητα του DFE). Όταν υπάρχει καθυστέρηση $\Delta=9$, η σύνθετη κρουστική απόκριση του συστήματος κανάλι- feedforward φίλτρο είναι όπως φαίνεται στο Γράφημα 5.1.

Στο Γράφημα αυτό γίνεται εμφανές, ότι η μορφή της κρουστικής απόκρισης δεν είναι η επιθυμητή. Η ιδανική περίπτωση είναι να υπάρχει ένας μόνο συντελεστής κοντά στη μονάδα στη θέση Δ . Ωστόσο, στην προκειμένη περίπτωση, υπάρχουν συντελεστές από τη θέση Δ και μετά, που είναι μη μηδενικοί. Αυτό σημαίνει, ότι το feedforward φίλτρο δεν αναιρεί την αλληλοσυμβολική παρεμβολή. Το feedback φίλτρο έχει αναλάβει τον ρόλο της αναίρεσης αυτών των συμβόλων που προκαλεί η ISI και δεν αναιρεί το feedforward φίλτρο. Αυτό επιβεβαιώνεται στο Γράφημα 5.2, στο οποίο γίνεται ταυτόχρονη παράθεση των σύνθετων κρουστικών αποκρίσεων καναλιού- feedforward φίλτρου και αντίθετου feedback φίλτρου-πίνακα καθυστέρησης Δ . Σε αυτό το γράφημα, φαίνεται ότι οι κρουστικές αποκρίσεις είναι σχεδόν αντίθετες. Δηλαδή, το feedback φίλτρο όντως αναιρεί σύμβολα της ISI.

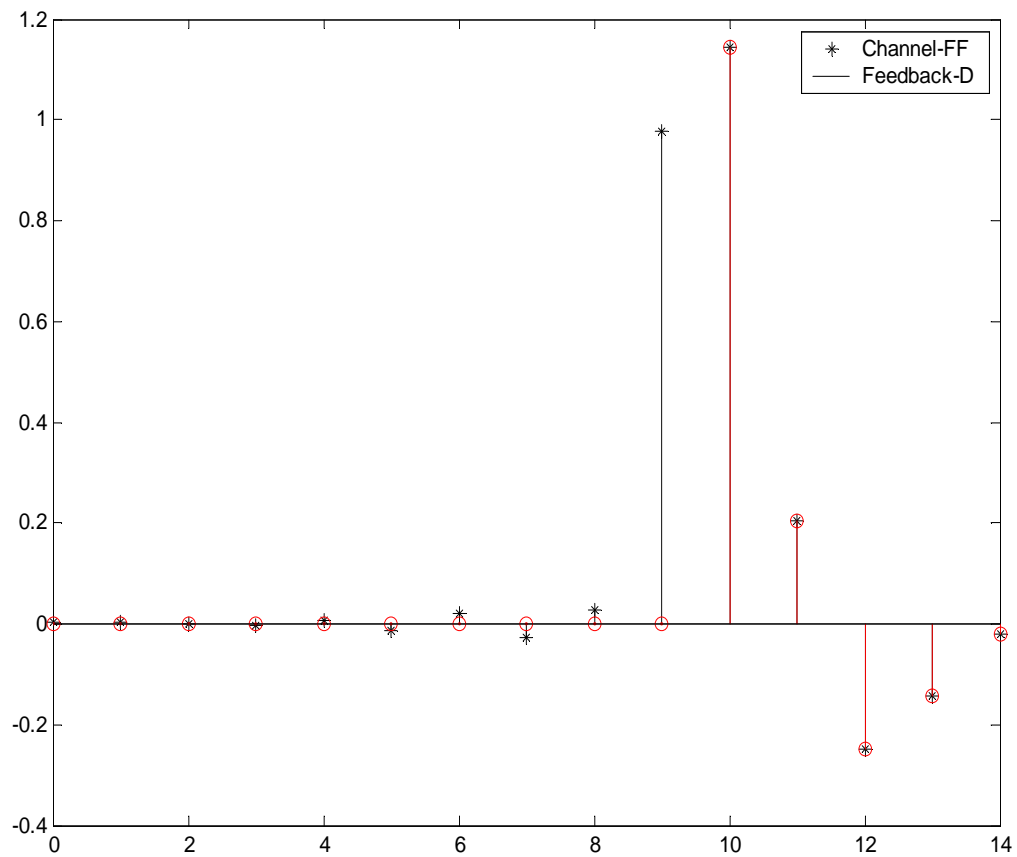
Στα Γραφήματα 5.3 και 5.4 γίνεται σύγκριση της απόδοσης του γραμμικού ισοσταθμιστή και του Decision Feedback ισοσταθμιστή ως προς το BER και το MSE, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα δίνονται μετά από αποστολή 1000 πακέτων των 150 συμβόλων για καθυστέρηση $\Delta=6$ το καθένα για SNR 0-35 dB και για την ίδια πολυπλοκότητα των δύο ισοσταθμιστών.

Είναι εμφανές, ότι για τις μικρές τιμές του SNR ο γραμμικός ισοσταθμιστής έχει καλύτερη απόδοση από τον Decision Feedback ισοσταθμιστή όσον αφορά το BER. Για τιμές, όμως, από 5dB και πάνω καλύτερη απόδοση εμφανίζει ο DFE, ο οποίος έχει πολύ μικρότερο BER. Μετά τα 20 dB περίπου η τιμή του BER σταθεροποιείται σε μια μικρή τιμή τόσο για τον DFE



Γρ.5.1. Σύνθετη Κρουστική Απόκριση Καναλιού-Feedforward φίλτρου

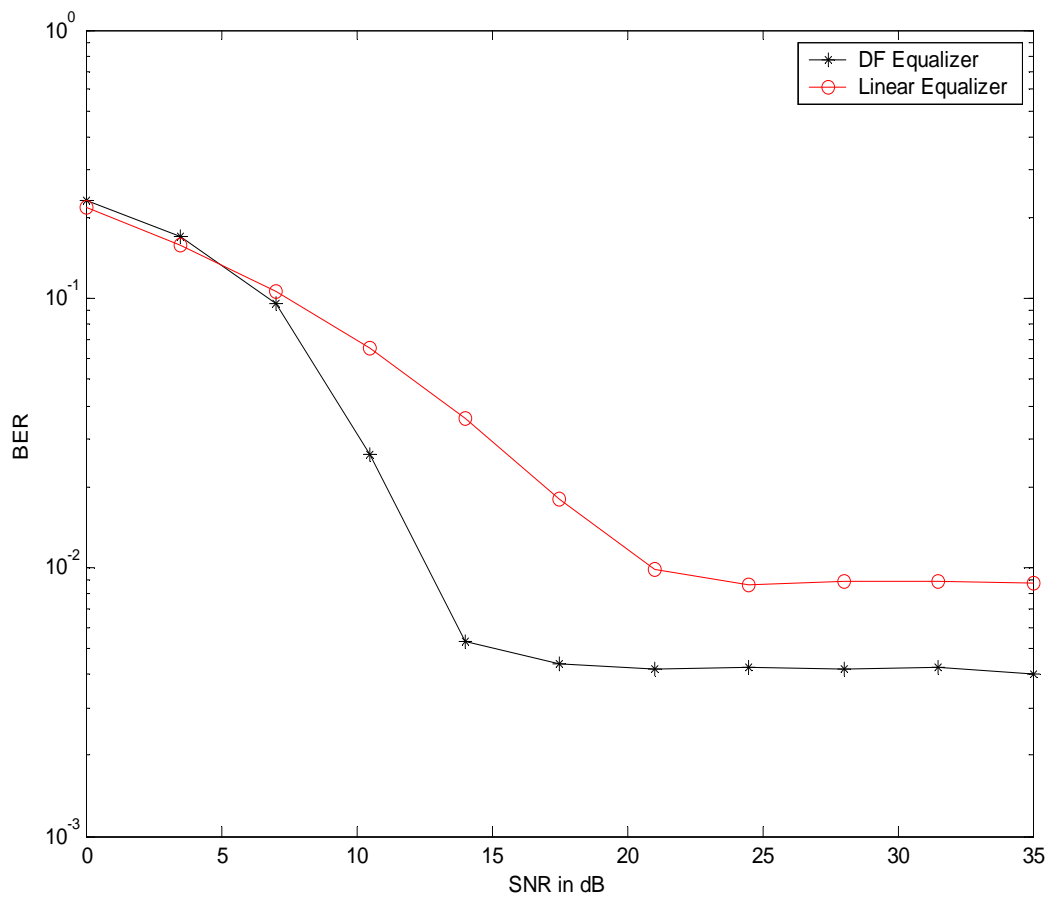
$$(L=10, Q=5, M=6, D=9)$$



Γρ.5.2. Σύνθετες Κρουστικές Αποκρίσεις

Καναλιού-Feedforward φίλτρου, αντίθετου Feedback φίλτρου-καθυστέρηση Δ

$$(L=10, Q=5, M=6, D=9)$$



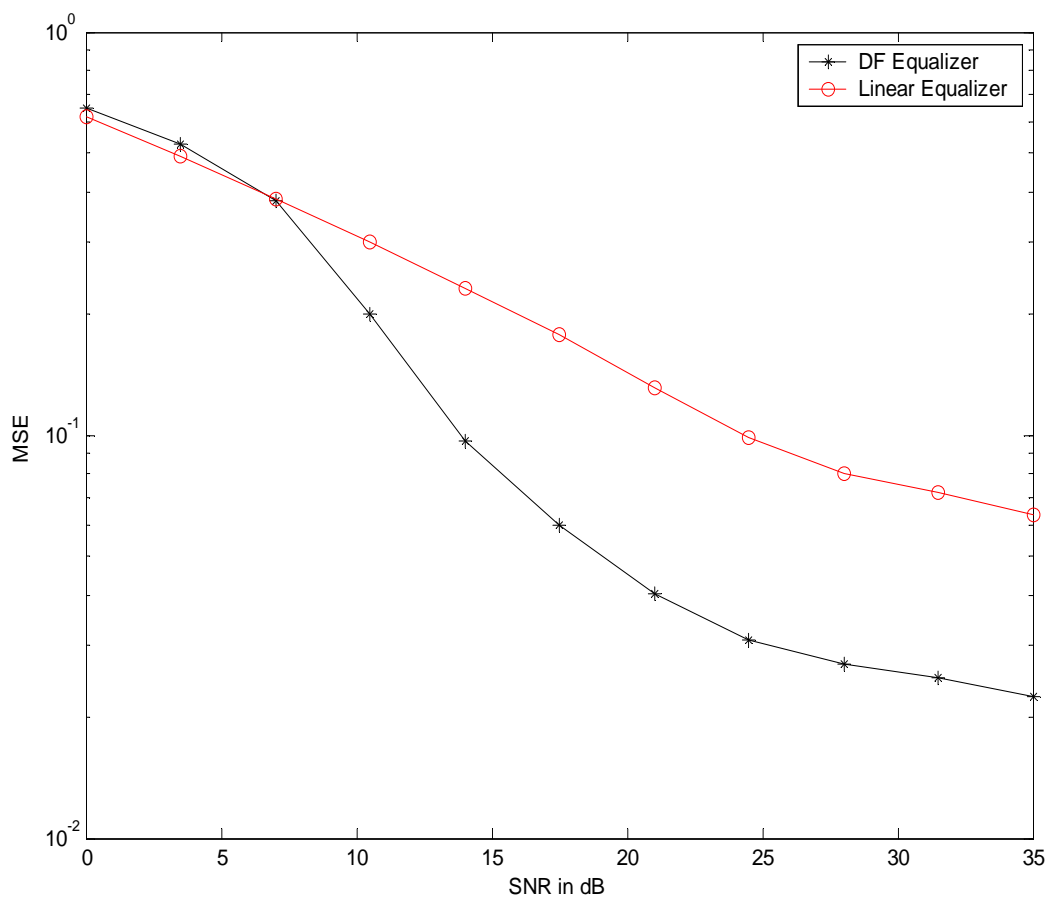
Γρ.5.3. Μεταβολή BER του LE και του DFE

$(L=10, Q=5, M=6, D=6)$

όσο και για τον γραμμικό, με τον DFE να έχει εμφανώς μικρότερη τιμή BER.

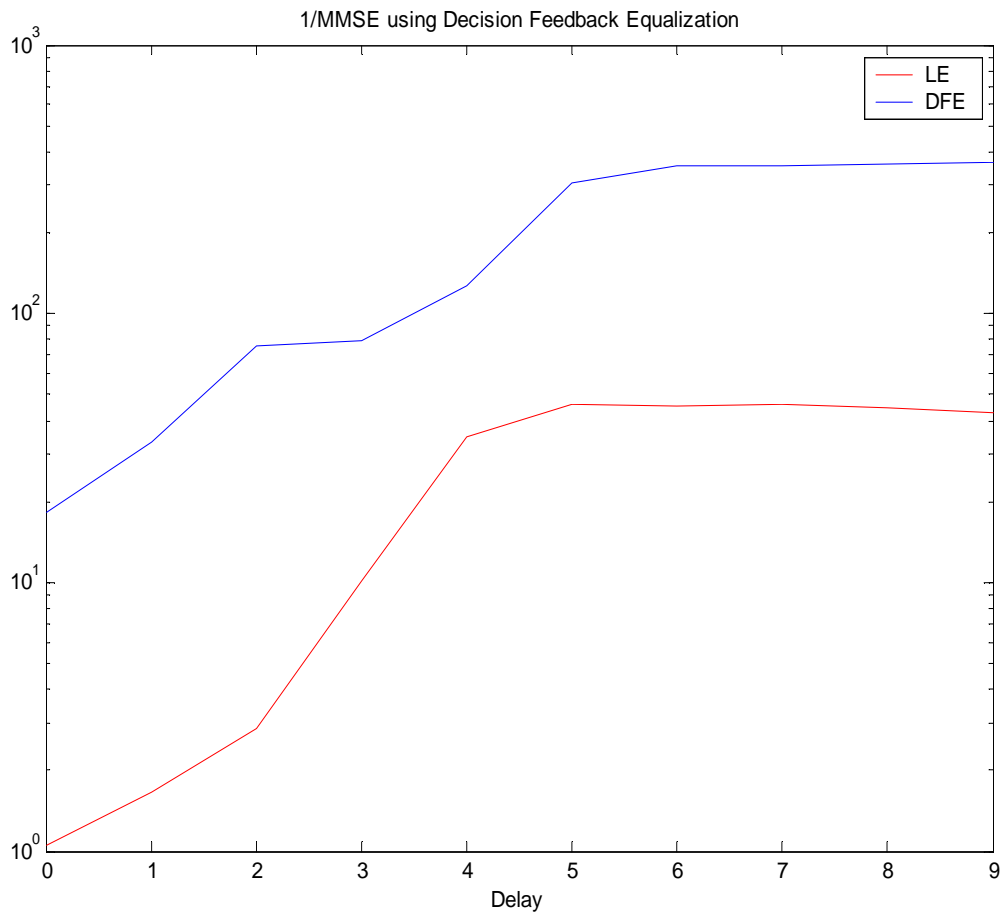
Η συμπεριφορά των δύο ισοσταθμιστών είναι παρόμοια και όσον αφορά το MSE. Για τις μικρές τιμές του SNR (περίπου έως τα 7 db) ο γραμμικός ισοσταθμιστής εμφανίζει μικρότερη τιμή MSE. Στα μεγαλύτερα SNRs, όμως, ο DFE έχει καλύτερη απόδοση. Η απόδοση και των δύο συνεχώς βελτιώνεται (το MSE μικραίνει), ταχύτερη, όμως, βελτίωση είναι εμφανέστατα αυτή του Decision Feedback ισοσταθμιστή.

Τέλος, στο Γράφημα 5.6 φαίνεται η μεταβολή του MMSE^{-1} για τους δύο ισοσταθμιστές με δεδομένο SNR (30 db), όταν μεταβάλλεται η καθυστέρηση Δ . Το MMSE (Minimum-Mean-Square-Error) δίνεται από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης του MSE κατά την εύρεση των ιδανικών συντελεστών των φίλτρων στον γραμμικό ισοσταθμιστή και στον DFE. Από το γράφημα συμπεραίνουμε ότι ο Decision Feedback Ισοσταθμιστής έχει καλύτερη απόδοση, αφού η βελτίωση του MMSE είναι ταχύτερη. Επίσης, για το ίδιο SNR το MMSE έχει μικρότερη τιμή στον DFE. Για τις μικρές τιμές του Δ , περίπου έως 5, η απόδοση του ισοσταθμιστή δεν είναι καλή, ενώ, στη συνέχεια, μέχρι την μέγιστη δυνατή τιμή του Δ , που έχει νόημα η λειτουργία του DFE, η τιμή του MMSE μικραίνει και φαίνεται να σταθεροποιείται και για τους δύο ισοσταθμιστές.



Γρ.5.4. Μεταβολή MSE του LE και του DFE

$$(L=10, Q=5, M=6, D=6)$$



Γρ.5.6. Μεταβολή $MMSE^{-1}$ του LE και του DFE ως προς Δ

($L=10$, $Q=5$, $M=6$, $SNR=30$ db)

Βιβλιογραφία

- [1] N. Al-Dhahir and J. M. Dioffi, *MMSE Decision-Feedback equalizers: finite-length results*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol 41, pp.961-975, July 1995.
- [2] A. Liavas, *On the Robustness of the Finite-Length MMSE-DFE With Respect to Channel and Second-Order Statistics Estimation Errors*, IEEE Trans. on signal processing, vol 50, No 11, November 2002.
- [3] Ali Sayed, *Fundamentals of adaptive filtering.*, IEEE-Wiley,2003.
- [4] J.G. Proakis και Masoud Salehi, *Συστήματα Τηλεπικοινωνιών*, 2η εκδ., Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 2002.
- [5] R.Johnson Jr. and William A. Sethares, *Telecommunication Breakdown*, 1st ed., Prentice Hall, 2003.
- [6] Αθ. Λιάβας, *Σημειώσεις Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα II*, Χανιά, Απρίλιος 2005
- [7] www.complextoreal.com