



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ**

Διπλωματική με Θέμα:

**ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ
ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ**

**Ψιμούλης Γεώργιος
Α.Μ. 200010032**

Επιβλέπων καθηγητής: Κουϊκόγλου Βασίλης

Χανιά, Σεπτέμβριος 2006

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα.....	1
1 Εισαγωγή.....	3
1.1 Ιστορική αναδρομή-Σκοπός της εργασίας.....	3
1.2 Αναμονητικά συστήματα.....	4
1.3 Μοντέλα.....	6
1.3.1 Η φύση των μοντέλων.....	6
1.3.2 Βασική προσέγγιση μοντελοποίησης.....	7
1.3.3 Τύποι μοντέλων.....	9
1.3.4 Γιατί μοντέλα.....	10
1.3.5 Απαιτήσεις μοντέλων.....	10
1.3.6 Αναλυτικά μοντέλα έναντι των μοντέλων προσομοίωσης.....	11
1.3.7 Διαφάνεια.....	13
1.4 Ανάγκη χρήσης και των δυο μοντέλων.....	14
1.5 Στόχος της εργασίας.....	14
2 Προσομοίωση.....	15
2.1 Σύντομη περιγραφή.....	15
2.1.1 Μοντέλα προσομοίωσης.....	15
2.1.2 Ανάπτυξη μοντέλου προσομοίωσης.....	16
2.1.3 Είδη προσομοίωσης.....	17
2.2 Αναγεννητική προσομοίωση.....	18
2.2.1 Πλεονεκτήματα της αναγεννητικής προσομοίωσης.....	19
2.2.2 Μειονεκτήματα της αναγεννητικής προσομοίωσης.....	19
2.2.3 Συλλογή αποτελεσμάτων στην αναγεννητική προσομοίωση.....	20
2.3 Αλγόριθμος προσομοίωσης ουρών αναμονής.....	22
3 Προσεγγιστικά μοντέλα G/G/1/K.....	26
3.1 Εισαγωγικά.....	26
3.2 Μαθηματικά μοντέλα.....	26
3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα.....	29
3.3.1 Πειράματα με μεταβλητό ρ	29
3.3.2 Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων άφιξης.....	32
3.3.3 Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης.....	35
3.3.4 Πειράματα που μεταβάλλεται το μέγεθος του χώρου αναμονής.....	37
4 Προσεγγιστικά μοντέλα M/G/1/K.....	40
4.1 Εισαγωγικά.....	40
4.2 Μαθηματικά μοντέλα.....	40
4.3 Αριθμητικά αποτελέσματα.....	42
4.3.1 Πειράματα με μεταβλητό ρ	42
4.3.2 Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης.....	45

4.3.3	Πειράματα που μεταβάλλεται το μέγεθος του χώρου αναμονής.....	48
5	Προσεγγιστικά μοντέλα G/G/m/K.....	51
5.1	Εισαγωγικά	51
5.2	Μαθηματικά μοντέλα.....	51
5.3	Αριθμητικά αποτελέσματα.....	54
5.3.1	Πειράματα με μεταβλητό ρ	55
5.3.2	Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων αφίξεων.....	57
5.3.3	Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης.....	59
5.3.4	Πειράματα που μεταβάλλεται το μέγεθος του χώρου αναμονής.....	61
5.3.5	Πειράματα με μεταβλητό αριθμό βαθμίδων εξυπηρέτησης	64
6	Προσεγγιστικά μοντέλα M/G/m/K.....	66
6.1	Εισαγωγικά	66
6.2	Μαθηματικά μοντέλα.....	66
6.3	Αριθμητικά αποτελέσματα.....	68
6.3.1	Πειράματα με μεταβλητό ρ	68
6.3.2	Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης.....	71
6.3.3	Πειράματα που μεταβάλλεται το μέγεθος του χώρου αναμονής.....	73
6.3.4	Πειράματα με μεταβλητό αριθμό βαθμίδων εξυπηρέτησης	76
7	Συμπεράσματα-Επεκτάσεις.....	78
7.1	Σύνοψη της εργασίας	78
7.2	Προσεγγιστικά μοντέλα G/G/1/K.....	79
7.3	Προσεγγιστικά μοντέλα M/G/1/K	81
7.4	Προσεγγιστικά μοντέλα G/G/m/K.....	83
7.5	Προσεγγιστικά μοντέλα M/G/m/K	84
7.6	Επεκτάσεις	86
	Παράρτημα.....	87
	Βιβλιογραφία	117

1 Εισαγωγή

1.1 Ιστορική αναδρομή-Σκοπός της εργασίας

Οι ουρές αναμονής είναι φαινόμενα που παρατηρούνται καθημερινά σε συστήματα εξυπηρέτησης, υπηρεσίες, κυκλοφοριακά συστήματα, δίκτυα υπολογιστών, κ.ο.κ. Μια ουρά αναμονής σχηματίζεται από αφίξεις πελατών, οχημάτων, ή πακέτων με δεδομένα σε δίκτυα Η/Υ ή τηλεπικοινωνιών τα οποία περιμένουν σε κάποιο χώρο τη σειρά τους μέχρις ότου εξυπηρετηθούν.

Με την χρήση των πρώτων τηλεφωνικών δικτύων κάνουν την εμφάνιση τους στον τομέα των επιστημών οι έννοιες ουρά και αναμονητικό σύστημα. Στα χρόνια που έπονται του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου η ανάγκη πληρέστερης και αποδοτικότερης διαχείρισης της παραγωγής σε συνάρτηση με την διαρκή εξέλιξη των μέσων αυτής έθεσαν τις εν λόγω έννοιες σε εξέχουσα θέση, καθώς πολύπλοκα και μεγάλα συστήματα μπορούσαν εύκολα να μοντελοποιηθούν με μορφή ουρών.

(αφίξεις=> βλάβες, εξυπηρετήσεις=>επισκευές).

Κατά την δεκαετία του 1960 η ύπαρξη υπολογιστικών μονάδων Η/Υ και συστημάτων ανταλλαγής πληροφοριών ανοίγουν το δρόμο σε μελέτες αναμονητικών συστημάτων. Η βιβλιογραφία που συντάσσεται γύρω από τα προβλήματα βελτιστοποίησης αναμονητικών συστημάτων αποκτά ενδιαφέρουσες διαστάσεις βρίσκοντας ραγδαία ανταπόκριση και στο βιομηχανικό τομέα, ο οποίος υιοθετεί σε μεγάλο βαθμό τις λύσεις-προτάσεις που συνάγονται από τις έρευνες.

Σήμερα η βιομηχανία Η/Υ χρησιμοποιεί τα αναμονητικά συστήματα (θεωρία ουρών) με σκοπό την ανάπτυξη πακέτων λογισμικού, των οποίων χαρακτηριστική είναι η δυνατότητα να παρέχουν λύσεις (με σχετική ευκολία –αυτοματοποίηση) σε προβλήματα που ανακύπτουν τόσο κατά τον σχεδιασμό νέων όσο και κατά την αξιολόγηση-βελτίωση υπάρχοντων υπολογιστικών συστημάτων. Η ανάγκη μελέτης των τηλεπικοινωνιών και η διάδοση των Η/Υ τόσο στη βιομηχανία (αυτοματοποίηση συστημάτων παραγωγής) όσο και σε ευρύτερο επίπεδο έχρισαν τη μελέτη των ουρών αναμονής σε αυτοτελή επιστήμη. Η εξειδικευμένη έρευνα έδωσε νέα πνοή και σε άλλες επιστήμες παραδοσιακότερες, όπως αυτή της πιθανοθεωρίας που μελετήθηκε μέσα απ' ένα καινούργιο πρίσμα. Γίνεται κατ' αυτό τον τρόπο κατανοητό πως ο συνδυασμός θεωρητικής μελέτης (βιβλιογραφία-ακαδημαϊκή προσέγγιση) και πρακτικών εφαρμογών (βιομηχανία- τηλεπικοινωνιακά δίκτυα-ιατρική) εγγυώνται για την περαιτέρω ανάπτυξη και ζωτικότητα των δικτύων αναμονής (**Gelenbe and Pujolle, 1999**).

1.2 Αναμονητικά συστήματα

Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός αναμονητικού συστήματος είναι

- **Στατιστική εισόδου:** Το είδος της στατιστικής κατανομής που ακολουθούν οι χρόνοι αφίξεων. Για παράδειγμά ο ρυθμός με τον οποίο καταφτάνουν οι πελάτες μιας τράπεζας.
- **Στατιστική εξόδου:** Το είδος της στατιστικής κατανομής που ακολουθούν οι χρόνοι εξυπηρέτησης του συστήματος. Στο παράδειγμά της τράπεζας, ο ρυθμός με τον οποίο εξυπηρετούνται οι πελάτες από την στιγμή που θα φτάσουν στο ταμείο.
- **Αριθμός εξυπηρετούντων:** Αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης. Στο παράδειγμά της τράπεζας ο αριθμός των ταμείων.
- **Χωρητικότητα του συστήματος:** Ο συνολικός αριθμός πελατών που μπορεί να βρίσκεται στο σύστημα την ίδια στιγμή. Το κτίριο που στεγάζεται η τράπεζα του παραδείγματος μπορεί να δεχθεί μέχρι έναν ορισμένο αριθμό ατόμων κάποιιοι από τους οποίους θα βρίσκονται στο ταμείο ενώ οι υπόλοιποι θα περιμένουν στην ουρά.
- **Μέγεθος πληθυσμού πελατών:** Ο συνολικός αριθμός πελατών που μπορεί να εξυπηρετηθεί από το σύστημα. Η τράπεζα μπορεί ημερησίως να εξυπηρετήσει έναν συγκεκριμένο αριθμό πελατών.

Με βάση τα παραπάνω χαρακτηρίστηκα τα συστήματα αναμονής μπορούν να συμβολιστούν ως ακολούθως:

I/O/m/K/P Όπου I η στατιστική εισόδου, O η στατιστική εξόδου, m αριθμός εξυπηρετούντων, K χωρητικότητα του συστήματος, P μέγεθος πληθυσμού πελατών.

Οι στατιστικές εισόδου κι εξόδου μπορεί να είναι:

- **Deterministic:** Η κατανομή δεν είναι τυχαία για παράδειγμα πραγματικά δεδομένα που έχουν μετρηθεί.
- **Εκθετική:** Συμβολίζεται με M (**Memoryless-χωρίς μνήμη**) και είναι η πιο κοινή και σε περισσότερο βάθος αναλυμένη περίπτωση.
- **Erlang:** Συμβολίζεται με E_k όπου ο δείκτης k συμβολίζει τον βαθμό της Erlang.
- **Γενική:** Συμβολίζεται με G και μπορεί να είναι οιαδήποτε άλλη στατιστική κατανομή.

Εν τάχει αναφέρονται παρακάτω μερικά από τα πεδία εφαρμογής των αναμονητικών συστημάτων.

- Τηλεπικοινωνίες.
- Κυκλοφοριακά συστήματα.
- Καθορισμός ακολουθίας εργασιών σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.
- Πρόβλεψη απόδοσης ηλεκτρονικού υπολογιστή.
- Υπηρεσίες υγείας (π.χ έλεγχος εκχώρησης κλινών σε νοσοκομείο).
- Εναέρια κυκλοφορία.
- Πωλήσεις εισιτηρίων αεροπορικής εταιρείας.
- Βιομηχανία εξόρυξης
- Διάταξη παραγωγής στην κατασκευαστική-μεταποιητική βιομηχανία

Τα σημαντικότερα μέτρα απόδοσης που εξετάζονται από τ' αναμονητικά συστήματά είναι:

- Μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα (N).
- Μέσο πλήθος πελατών στην ουρά (N_Q).
- Μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα (W).
- Μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά (W_Q).
- Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH).

Η βαρύτητα που δίνεται σε κάποιο μέτρο απόδοσης διαφέρει ανάλογα με την φύση του προβλήματος. Για παράδειγμά σε μια τράπεζα μπορεί να ενδιαφέρει ο χρόνος αναμονής στην ουρά πολύ περισσότερο από τον μέσο ρυθμό παραγωγής, το αντίστροφο μπορεί να συμβαίνει όταν το πρόβλημα έχει να κάνει με κάποιο σύστημα παραγωγής. Στην παρούσα εργασία τα μέτρα απόδοσης που εξετάζονται είναι ο μέσος ρυθμός παραγωγής και ο μέσος αριθμός πελατών.

Τα μοντέλα στα οποία οι χρόνοι αφίξεων κι εξυπηρετήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή χαρακτηρίζονται από την απλότητα που εμφανίζουν στους υπολογισμούς των μέτρων απόδοσης. Παρά την ευκολία χρήσης που τα διακρίνει δεν είναι δυνατό να είναι αποτελεσματικά για όλους τους τύπους προβλημάτων. Γίνεται λοιπόν επιτακτική η ανάγκη χρήσης πιο ευέλικτων αναμονητικών συστημάτων που θα έχουν ευρύτερο πεδίο εφαρμογής. Συστήματα με γενικές κατανομές εισόδου κι εξόδου έχουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά, παρουσιάζουν όμως εξαιρετική δυσκολία στον χειρισμό και τους

υπολογισμούς τους. Για τον λόγο αυτό η βιβλιογραφία τους είναι περιορισμένη και το εργαλείο που ενδείκνυται για την μελέτη τέτοιων συστημάτων είναι η προσομοίωση. Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμη η αναφορά στην μοντελοποίηση.

1.3 Μοντέλα

Οι πρώτοι σχεδιαστές συστημάτων παραγωγής στηρίζονταν στην παρατήρηση και σε εμπειρικούς κανόνες, για να προσδιορίσουν την επίδραση των παραμέτρων σχεδίασης και των κανόνων ελέγχου στην απόδοση του συστήματος. Η πολυπλοκότητα των αυτοματοποιημένων συστημάτων, το υψηλό αρχικό κόστος τους και ο συχνά μεγάλος χρόνος που απαιτείτο για να καταλήξουν στους ζητούμενους παραγωγικούς στόχους, οδήγησαν στη σχεδίαση μοντέλων - μεθοδολογικών εργαλείων. Η χρηστικότητα αυτών έχει να κάνει με την αποτίμηση της απόδοσης των εκάστοτε παραγωγικών συστημάτων.

1.3.1 Η φύση των μοντέλων

Σκοπός ενός μοντέλου είναι η αναπαράσταση μέρους ή της συνολικής λειτουργίας ενός συστήματος. Κατά κανόνα έχει τη μορφή ενός μαθηματικού τύπου ή ενός προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η δεύτερη από τις δύο μορφές μάλιστα δύναται να πραγματοποιήσει προβλέψεις αναφορικά με την απόδοση του συστήματος δεχόμενη αριθμητικές τιμές για διάφορες παραμέτρους του όπως χωρητικότητες αποθήκης, ρυθμοί παραγωγής των μηχανών, κ.ο.κ. Κατά συνέπεια, ο χρήστης ενός τέτοιου μοντέλου είναι σε θέση να γνωρίσει- πειραματιζόμενος με τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου- τους παράγοντες και τον τρόπο που αυτοί επηρεάζουν το σύστημα. Επιπλέον, μπορεί να προσεγγίσει την τιμή των παραμέτρων, για τις οποίες η επίδοση του συστήματος είναι η βέλτιστη. Στον αντίποδα των παραπάνω πρέπει να λάβει κανείς υπόψη του το γεγονός ότι τα σύγχρονα συστήματα είναι πολυεπίπεδα και πολυσύνθετα, είτε αυτά είναι συστήματα παραγωγής, είτε είναι τηλεπικοινωνιακά, είτε υπολογιστικά. Επομένως, τα προβλήματα που προκύπτουν κατά την ανάπτυξη - χρήση- ή βελτίωση αυτών είναι αδύνατο να λάβουν ουσιαστική και ολοκληρωμένη απάντηση από ένα και μόνο μοντέλο.

1.3.2 Βασική προσέγγιση μοντελοποίησης

Η μοντελοποίηση ενός σύνθετου συστήματος περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1.Αναγνώριση του πεδίου εφαρμογής

Με την ‘αναγνώριση του πεδίου εφαρμογής’ εννοούμε τη δυνατότητα αποτελεσματικής απεικόνισης του συστήματος από το μοντέλο και ταυτόχρονα τη διεξαγωγή έγκυρων / ικανοποιητικών αποτελεσμάτων τόσο σε ποιότητα όσο και σε ποσότητα. Η ανάγκη σχεδίασης ενός μοντέλου γεννάται όταν χρειάζεται μια σαφής και αποτελεσματική λύση σε κάποιο πρόβλημα. Για παράδειγμα, ο σχεδιασμός μιας νέας γραμμής παραγωγής ή η αναβάθμιση – βελτίωση κάποιας υπηρεσίας που χαρακτηρίζεται από χαμηλή απόδοση. Σε κάθε περίπτωση το μοντέλο που θα δημιουργηθεί θα πρέπει να είναι αμερόληπτο και κατά συνέπεια η προσεκτική εφαρμογή του συγκεκριμένου βήματος είναι επιτακτική .

2.Γνώση του συστήματος

Διακριτοποίηση/Διάκριση των συστατικών μερών του συστήματος όσο και των χαρακτηριστικών των εργασιών που εκτελούνται από αυτό. Για τη σωστή υλοποίηση του βήματος αυτού χρήσιμη είναι η παρατήρηση του συστήματος σε λειτουργία καθώς και η γνώση παρόμοιων συστημάτων.

3.Επιλογή της προσέγγισης του μοντέλου

Οι τύποι μοντέλων ποικίλουν ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, τον διαθέσιμο χρόνο και τον προϋπολογισμό που είναι διαθέσιμος σε κάθε περίπτωση, είναι δε οι ακόλουθοι:

- Μαθηματικά-Αναλυτικά μοντέλα.
- Μοντέλα προσομοίωσης σε ηλεκτρονικό υπολογιστή
- Μικρογραφίες του συστήματος – μακέτες.

Αρκετές φορές η μοντελοποίηση γίνεται με χρήση περισσότερων της μιας μορφής μοντέλου. Στις περισσότερες των περιπτώσεων η επικρατούσα μορφή είναι αυτή της προσομοίωσης σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, ενώ η αξιολόγηση της γίνεται με τη χρήση μαθηματικών μοντέλων. Υπάρχουν στην αγορά έτοιμα λογισμικά πακέτα με σκοπό την διευκόλυνση της διαδικασίας της μοντελοποίησης.

4.Ανάπτυξη και έλεγχος του μοντέλου

Το βήμα αυτό αφορά τη συλλογή πληροφοριών για τους κανόνες που ορίζουν το σύστημα και μελλοντικά θα διέπουν το μοντέλο.

Στη συνέχεια, αναφέρονται δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά την εκτέλεση αυτού του βήματος:

- Μικρός όγκος πληροφοριών μπορεί να οδηγήσει σε απλοποιημένη-προσεγγιστική μορφή μοντέλου.
- Στην περίπτωση που το προς μοντελοποίηση σύστημα δεν είναι υπαρκτό οι διαθέσιμες πληροφορίες- δεδομένα είναι ελάχιστες(α) και καθιστούν δύσκολη ακόμα την εκτίμηση μέσω των τιμών των παραμέτρων. Όσον αφορά τις κατανομές ορισμένων μεταβλητών π.χ. χρόνος διεκπεραίωσης εργασίας μιας μηχανής είναι επίσης δύσκολο να τις εκτιμήσουμε με ακρίβεια οπότε αναγκαστικά οδηγούμαστε σε υποθέσεις.
- Τέλος εξίσου δύσκολη είναι η εκτίμηση κατανομών και στην περίπτωση γνωστών συστημάτων αφού συνήθως η συγκομιδή δεδομένων είναι χρονοβόρα και πολυδάπανη.

5.Επιβεβαίωση και αξιολόγηση του μοντέλου

Το μοντέλο πρέπει να ελεγχθεί αν αποτελεί μία υψηλής πιστότητας αναπαράσταση της πραγματικότητας.

Η επιβεβαίωση έχει να κάνει με τον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων σύμφωνα πάντα και με τις υποθέσεις που έχουν γίνει κατά την ανάπτυξη του μοντέλου. Χαρακτηρίζεται από μαθηματικές τεχνικές, για παράδειγμα αν το μοντέλο είναι προσεγγιστικό πρέπει να συγκριθεί με κάποιο παρόμοιο του για την τεκμηρίωση της εγκυρότητας των προσεγγίσεων.

Ως αξιολόγηση από την άλλη θεωρούμε την διαδικασία με την οποία διασφαλίζεται, ότι το μοντέλο πράγματι αποτελεί μια έγκυρη απεικόνιση της πραγματικότητας.

6.Ανάπτυξη διεπαφής (interface)

Το μοντέλο ως μέσον αλληλεπίδρασης πρέπει να χαρακτηρίζεται από ευκολία στη χρήση.

7.Πειράματα με το μοντέλο

Έρευνα για το ποσοστό και τον τρόπο που επηρεάζει κάποια παράμετρος τις επιδόσεις του συστήματος. Για τα μοντέλα προσομοίωσης το βήμα αυτό απαιτεί μεθοδικότητα. Ένα καλώς ορισμένο σύνολο-σετ πειραματικών διατάξεων συντελεί τόσο στην εξαγωγή έγκυρων συμπερασμάτων όσο και στην οικονομία χρόνου και χρήματος.

8. Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Βάσει των αποτελεσμάτων ο χρήστης πρέπει να μπορεί να αποφανθεί για προβλήματα που έχουν δημιουργηθεί γύρω από το σύστημα και τις λειτουργίες του. Τα αποτελέσματα θα πρέπει να φανερώνουν πλεονεκτήματα και αδυναμίες του συστήματος.

1.3.3 Τύποι μοντέλων

1. Φυσικά μοντέλα

Τα φυσικά μοντέλα αποτελούν την υπό κλίμακα αναπαράσταση του συστήματος. Είναι δε σε θέση να εκτελούν τις ίδιες εργασίες μ' αυτό υπό τις ίδιες βέβαια συνθήκες και με την ίδια λογική. Προσφέρονται, επίσης, για ενημέρωση – εκπαίδευση προσωπικού πάνω σε κάποια εφαρμογή. Αλλά η χρήση τους δεν ενδείκνυται όταν σκοπός είναι η παρατήρηση και μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος.

2. Μοντέλα προσομοίωσης

Ένα μοντέλο προσομοίωσης έχει ως στόχο την αναπαραγωγή γεγονότων που θα συνέβαιναν στο σύστημα μέσω ενός προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή. Αυτό έχει ως προϋπόθεση ότι οι λογικές σχέσεις που διέπουν τα γεγονότα μπορούν να ορισθούν με ακρίβεια. Η πιθανοτική φύση ορισμένων ενδεχόμενων (π.χ χρόνος αφίξεων) μπορεί να παρουσιαστεί σαν δείγμα κατανομής η οποία αντιπροσωπεύει – περιγράφει την διαδικασία την οποία ακολουθούν τα γεγονότα για τη γένεση τους.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι για την ακριβή αναπαράσταση ενός συστήματος πρέπει ο χρόνος προσομοίωσης να είναι τέτοιος, ώστε να εμφανιστούν όλα τα ενδεχόμενα αβίαστα και σε ικανό αριθμό για επεξεργασία.

Τέτοιου είδους μοντέλα, τέλος, μπορούν να είναι εφοδιασμένα και με interactive graphic display για την ευκολότερη χρήση και κατανόηση της λειτουργίας τους.

3. Αναλυτικά –Μαθηματικά μοντέλα

Τα εν λόγω μοντέλα περιγράφουν το σύστημα με τη χρήση μαθηματικών κανόνων ή συμβόλων. Η χρήση τους καταλήγει σε κάποιο αλγόριθμο με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζονται οι τιμές για τις παραμέτρους του συστήματος που μας ενδιαφέρει .

Συχνά, δεν είναι δυνατό να καταλήξουμε σ'ένα ακριβές μοντέλο για το σύστημα που μελετάμε, οπότε δημιουργείται προσεγγιστικά/ κατά προσέγγιση. Επισημαίνεται, η ανάγκη να ελεγχθούν για την εγκυρότητά τους από αντίστοιχα προσομοίωσης.

1.3.4 Γιατί μοντέλα

Στην ενότητα αυτή παραθέτονται οι λόγοι χρήσης μοντέλων.

- Κατανόηση: Ένα μοντέλο χρησιμοποιείται για να περιγράψει το πως επηρεάζεται ένα σύστημα αλλά και τον τρόπο που γίνεται αυτό. Υποδεικνύει με λίγα λόγια τις μεταβλητές εκείνες που επηρεάζουν το σύστημα.
- Μάθηση: Μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέσο διδασκαλίας του συστήματος.
- Βελτίωση: Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτίωση του συστήματος τόσο κατά τον σχεδιασμό όσο και κατά τη χρήση του.
- Κατασκευή μοντέλων βελτιστοποίησης: Με βάση ένα μοντέλο που προβλέπει την απόδοση του συστήματος σαν συνάρτηση ορισμένων μεταβλητών κατασκευάζεται ένα αντίστοιχο βελτιστοποίησης με στόχο να φανερώσει τον συνδυασμό των μεταβλητών με τον οποίο το σύστημα έχει τη βέλτιστη απόδοση. Η συνήθης μορφή των μοντέλων αυτών είναι μαθηματικού τύπου.
- Λήψη αποφάσεων: Το σκεπτικό για τη δημιουργία ενός μοντέλου είναι η ανάγκη επίλυσης προβλημάτων που ανακύπτουν/προκύπτουν είτε κατά το σχεδιασμό είτε κατά τη χρήση του συστήματος.

1.3.5 Απαιτήσεις μοντέλων

Η μοντελοποίηση βασίζεται στη διαδοχή συγκεκριμένων υποθέσεων: αρχικά σχετικά με το σύστημα, με τα στοιχεία που το αποτελούν καθώς και τον τρόπο που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί. Στη συνέχεια, για τη φύση των διαταραχών που θα επηρεάσουν το σύστημα και το εύρος αντίδρασης του τελευταίου σε αυτές.

Κατά τη μοντελοποίηση λοιπόν πρέπει λαμβάνονται υπόψη τα ακόλουθα:

Απλότητα – πολυπλοκότητα

Η μοντελοποίηση χαρακτηρίζεται από συμβιβασμούς αναφορικά με το βαθμό λεπτομέρειας που το μοντέλο περιγράφει το σύστημα. Περισσότερη λεπτομέρεια συνεπάγεται πληρέστερη αναπαράσταση αλλά ταυτόχρονα δημιουργεί και την ύπαρξη ενός στρυφνού ως προς την επεξεργασία μοντέλου.

Ευελξία

Όπως έχει ήδη σημειωθεί, η χρήση ενός και μόνου μοντέλου δεν μπορεί να δώσει απαντήσεις σ'όλα τα ερωτήματα γύρω από ένα σύστημα. Παρόλα αυτά όμως είναι επιθυμητό από ένα μοντέλο να παρέχει λύσεις σε περισσότερα του ενός προβλήματα κατά τα στάδια εξέλιξης του συστήματος. Τα παραπάνω υποδεικνύουν ένα μοντέλο που επιτρέπει αλλαγές κατά τη χρήση του, στις τιμές των παραμέτρων που θεωρούνται /είναι ζωτικές για το σύστημα .

Απαιτήσεις δεδομένων

Τα δεδομένα που εισάγονται στο μοντέλο θα πρέπει να φιλτράρονται έτσι, ώστε να προάγουν την αντικειμενικότητα του. Το *‘μέτρον άριστον’* που διέπει την διαδικασία εισαγωγής δεδομένων.

Διαφάνεια

Το μοντέλο πρέπει να γίνεται κατανοητό από την πλειοψηφία των χρηστών. Απαιτούμε μια *user friendly* δομή στην οποία γίνεται εύκολα κατανοητός ο τρόπος λειτουργίας και είναι διαφανής η διαδικασία που ακολουθείται για την παραγωγή του αποτελέσματος.

Λειτουργικότητα

Κατά τη χρήση του μοντέλου είναι θεμιτό να καταναλώνονται οι λιγότεροι δυνατοί πόροι είτε οικονομικοί είτε ανθρώπινοι είτε αυτοί που αφορούν τον εξοπλισμό.

1.3.6 Αναλυτικά μοντέλα έναντι των μοντέλων προσομοίωσης

Για να προβούμε σε μια ουσιαστική σύγκριση των δυο ειδών μοντέλα -λαμβάνοντας υπόψη τις προαναφερθείσες απαιτήσεις, χρειάζεται, να περιγραφούν οι δύο προσεγγίσεις μοντελοποίησης.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι ανάπτυξης ενός μοντέλου προσομοίωσης. Ένας απ' αυτούς χαρακτηρίζεται από την προσπάθεια να συμπεριλάβουμε από την αρχή όλες τις απαραίτητες λεπτομέρειες για το σύστημα. Η πρακτική αυτή έχει ως αποτέλεσμα την αργή ανάπτυξη, πολύωρο debugging ενώ καθιστά τον κώδικα κατανοητό μόνο για τον κατασκευαστή του προγράμματος.

Άλλη προσέγγιση είναι να αναπτυχθούν μοντέλα για τα συστατικά-υποσυστήματα του συστήματος μας, να εξετασθεί η ορθότητα της λειτουργίας τους μεμονωμένα αρχικά και στη συνέχεια ανά ζεύγος, ανά τριάδες κοκ. Αρκετές φορές υπάρχουν έτοιμα μοντέλα προσομοίωσης διαφόρων υποσυστημάτων, αυτά μπορεί να είναι πιο λεπτομερή απ' όσο χρειάζεται για τη περιγραφή του δικού μας συστήματος αλλά είναι δυνατόν να διαιρεθούν και να τροποποιηθούν κατάλληλα προκειμένου να είναι λειτουργικά για το υπό σχεδιασμό πρόγραμμα. Η παραπάνω προσέγγιση καλείται μικρό-μάκρο προσέγγιση και έχει εφαρμογή σε πολύ μεγάλα συστήματα. Τα μοντέλα προσομοίωσης συνήθως είναι δυσνόητα για τους περισσότερους εκτός από τους κατασκευαστές τους αφού είναι γραμμένα σε εξειδικευμένες γλώσσες όπως GPSS, SLAM, SIMAN, SIMULA, SMALLTALK και μόνο οι ειδικοί σε γλώσσες προσομοίωσης μπορούν να κατανοήσουν τον κώδικα. Ο έλεγχος για την εγκυρότητα των μοντέλων αυτών γίνεται με δύο τρόπους.

Για τον πρώτο αρκεί να υπολογίσουμε κάποιο αποτέλεσμα για κάποια οριακή κατάσταση του συστήματος -οι οριακές καταστάσεις είναι δεκτικές σε απλοποιήσεις- όποτε είναι εύκολο να τις υπολογίσουμε χωρίς τη βοήθεια του μοντέλου και να τις συγκρίνουμε αργότερα, με το αποτέλεσμα του μοντέλου για την ίδια κατάσταση.

Στον δεύτερο χρησιμοποιούνται για τη σύγκριση αναλυτικά μοντέλα, τα οποία κατά την κατασκευή τους έχουν στηριχθεί στις ίδιες υποθέσεις-παραδοχές με το μοντέλο προσομοίωσης.

Τα μοντέλα προσομοίωσης εξάγουν ως αποτέλεσμα μια εκτίμηση-δείγμα της παραμέτρου του συστήματος που μας ενδιαφέρει σε συνάρτηση με το χρόνο.

Τα αναλυτικά μοντέλα παρουσιάζονται με τη μορφή μιας φόρμας υπολογισμού ή ορίζουν μια υπολογιστική διαδικασία. Στη δεύτερη περίπτωση πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η πολυπλοκότητα της διαδικασίας, για την τεκμηρίωση της παραπάνω πρότασης αρκεί να αναφερθεί ότι σε πολλές περιπτώσεις αύξηση μιας παραμέτρου του συστήματος, για παράδειγμα του αριθμού μηχανών ή των διαφορετικών εργασιών που εκτελούνται από μια βαθμίδα εξυπηρέτησης, αυξάνει εκθετικά την πολυπλοκότητα.

Τα παραπάνω δρουν συνήθως περιοριστικά στο μέγεθος του μοντέλου και το εύρος τιμών των παραμέτρων για τις οποίες η διαδικασία έχει εφαρμογή.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τη σύγκριση των δυο μοντέλων.

Απλότητα – πολυπλοκότητα

Όσον αφορά τη πολυπλοκότητα του συστήματος για τα μεν μοντέλα προσομοίωσης δεν αποτελεί περιορισμό, έχουν τη δυνατότητα να περιγράψουν οσοδήποτε μεγάλα και πολύπλοκα συστήματα με σχετική ευκολία αν εξαιρεθεί ο περιορισμός του απαιτούμενου χρόνου εκτέλεσης της διαδικασίας. Τα αναλυτικά από την άλλη μεριά περιορίζονται αισθητά με χαρακτηριστικό γεγονός την εκθετική αύξηση της πολυπλοκότητας των υπολογισμών συναρτήσει της αύξησης του μεγέθους του συστήματος. Επιπλέον, κάποιοι κανόνες ελέγχου αποδίδουν σ' ένα αναλυτικό μοντέλο έναν ιδιαίτερα δύστροπο χαρακτήρα.

Μοναδικός τρόπος να μελετηθεί ένα πολυσύνθετο σύστημα με κάποιο αναλυτικό μοντέλο είναι μέσω προσεγγίσεων. Ο τρόπος αυτός δεν ενδείκνυται γιατί είναι δύσκολο να διατυπωθούν έγκυρες προσεγγίσεις αλλά και να ελεγχθούν, καθώς η έκταση των συστημάτων, που οι προσεγγίσεις είναι έγκυρες, είναι μικρό.

Ευελιξία

Ένα καλοσχεδιασμένο μοντέλο προσομοίωσης πρέπει να επιτρέπει την ανάλυση διαφόρων συγγενικών δομών. Θεμελιώδες είναι να ορίζεται εκ των προτέρων, κατά την σχεδίαση, το είδος των αλλαγών που μοντελοποιούνται, ώστε να γίνονται κατευθείαν από τον χρήστη και να μην απαιτείται περαιτέρω παρέμβαση του προγραμματιστή. Επίσης, πρέπει να έχουν προβλεφθεί οι τυχόν αλλαγές σε τιμές παραμέτρων, καθώς ορισμένες πλατφόρμες εφαρμογών προσομοίωσης δεν επιτρέπουν κάτι τέτοιο. Στον αντίποδα, αλλαγές σε τιμές παραμέτρων σε αναλυτικά μοντέλα δεν παρουσιάζουν καμία δυσκολία αντίθετα με αλλαγές στη δομή του συστήματος που μπορούν να μεταμορφώσουν το αναλυτικό μοντέλο σ' ένα εντελώς καινούργιο, ή ακόμα από μοντέλο με εύκολη λύση να το κάνουν δυσπρόσιτο.

Απαιτήσεις δεδομένων

Η πλειοψηφία των αναλυτικών μοντέλων χαρακτηρίζεται ολιγαρκής όσον αφορά την απαίτηση δεδομένων, αφού ουσιαστικά αποτελούν απλές περιγραφές του συστήματος. Αντίθετα, τα αντίστοιχα προσομοίωσης απαιτούν μεγάλες ποσότητες πληροφοριών και ως εκ τούτου δεν είναι και εύκολα υλοποιήσιμα. Για το λόγο αυτό η συγγραφή τους πρέπει να γίνεται με γνώμονα τον όγκο των υπάρχουσων πληροφοριών.

1.3.7 Διαφάνεια

Τα μοντέλα προσομοίωσης όσων αφορά τον τρόπο λειτουργίας είναι καθ' όλα αδιαφανή στο χρήστη. Έτσι, προκύπτει η ανάγκη επεξήγησης της λογικής που διέπει το μοντέλο. Σημειώνεται ότι μόνο ένας έμπειρος προγραμματιστής μπορεί να καταλάβει τη φιλοσοφία του μοντέλου διαβάζοντας τον κώδικα.

Πιο προσιτά, από την άλλη, γίνονται τα αναλυτικά μοντέλα για κάποιον που βέβαια διαθέτει τις απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις. Στην πράξη όμως το κοινό, στο οποίο απευθύνεται το αναλυτικό μοντέλο δεν διαθέτει τις απαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις.

Λειτουργικότητα

Πλεονέκτημα αποτελεί για τα μοντέλα προσομοίωσης ο απαιτούμενος χρόνος ανάπτυξης του μοντέλου, σε αντίθεση με τα αναλυτικά που είναι λίγο ως πολύ απρόβλεπτα σε αυτό τον τομέα. Όταν το αναλυτικό μοντέλο ολοκληρωθεί και ειδικότερα όταν έχει τη μορφή κάποιου προγραμματιστικού αλγόριθμου χρειάζεται ελάχιστο χρόνο για να δώσει αποτελέσματα.

Το αντίθετο συμβαίνει με την προσομοίωση και γι' αυτό όταν σκοπός είναι η βελτιστοποίηση αν αναλογιστεί κανείς, ότι για μια προσομοίωση χρειάζεται κάποιος χρόνος ενώ για μια βελτιστοποίηση κάποιες χιλιάδες προσομοιώσεις, φτάνει στο συμπέρασμα ότι σε θέματα βελτιστοποίησης η χρήση αναλυτικών μοντέλων είναι μονόδρομος.

Διεπαφή με τον χρήστη (user interface)

Τα μοντέλα προσομοίωσης χρειάζονται μια εξωτερική φόρμα χειρισμού παραστατική και αλληλεπιδρούσα με το χρήστη. Τα αναλυτικά συνήθως αποτελούν κομμάτι ενός ευρύτερου συστήματος υποστήριξης αποφάσεων.

1.4 Ανάγκη χρήσης και των δυο μοντέλων

Μια ολοκληρωμένη μελέτη ενός σύγχρονου συστήματος ανεξαρτήτως κατηγορίας απαιτεί τη συνεργασία και των δυο ειδών μοντέλων.

Για να έχει αποτέλεσμα η μελέτη ενός σύνθετου συστήματος π.χ βιομηχανικού απαιτούνται τόσο τα αναλυτικά όσο και τα μοντέλα προσομοίωσης. Συχνά, χρειάζεται να δημιουργήσουμε κατά προσέγγιση μαθηματικά μοντέλα, οπότε η προσομοίωση είναι απαραίτητη για τον έλεγχο της εγκυρότητας των προσεγγίσεων. Ακόμα όμως και κατά τη απουσία προσεγγίσεων στα αναλυτικά μοντέλα η προσομοίωση βοηθά στην αναγνώριση των ζωτικών για το σύστημα παραμέτρων, οπότε και συμβάλλει στον καλύτερο σχεδιασμό του υποδεικνύοντας με λίγα λόγια τις μεταβλητές που θα αποτελέσουν τα θεμέλια του αναλυτικού μοντέλου.

Από την άλλη, όταν μελετάμε κάποιο μεγάλο και πολύπλοκο σύστημα ,δηλαδή χρησιμοποιούμε ως εργαλείο την προσομοίωση. Τα αναλυτικά μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επαληθεύσουν οριακές καταστάσεις οδηγώντας την κατασκευή του μοντέλου προσομοίωσης στο σωστό δρόμο. (**Buzacott and Shantikumar, 1993**)

1.5 Στόχος της εργασίας

Λαμβάνοντάς υπόψη όλα όσα γράφτηκαν παραπάνω αναφέρεται εν συντομία ο σκοπός της παρούσας εργασίας:

- ✓ Να συγκεντρώσει όλα τα μαθηματικά μοντέλα αναμονητικών συστημάτων με γενικές κατανομές εισόδου κι εξόδου.
- ✓ Να δημιουργήσει ένα ευέλικτο πρόγραμμα προσομοίωσης έχοντάς υπόψη τα βήματα της μοντελοποίησης
- ✓ Να χρησιμοποιήσει το μοντέλο της προσομοίωσης για να ελέγξει την εγκυρότητα των εκτιμήσεων των μαθηματικών μοντέλων για τον μέσο αριθμό παραγωγής και τον μέσο αριθμό πελατών.
- ✓ Να κατατάξει τα μοντέλα από το πιο αξιόπιστο στο λιγότερο.

Σημειώνεται ότι μια αμερόληπτη κατάταξη ξεφεύγει από τα πλαίσια της εργασίας καθώς είναι δύσκολο να ποσοτικοποιήσει κανείς όλες τις παραμέτρους που επηρεάζουν τα μοντέλα κι ακόμα κι αν γίνει αυτό η διαφορετικότητα των εφαρμογών δεν συνηγορεί στην αποκλειστική χρήση ενός μαθηματικού μοντέλου.

2 Προσομοίωση

2.1 Σύντομη περιγραφή

Ακολουθούν μερικοί ορισμοί που απαντούν στην ερώτηση τι ακριβώς είναι προσομοίωση.

‘Προσομοίωση (Simulation) είναι η μίμηση της λειτουργίας συστημάτων ή της εξέλιξης διαδικασιών μέσα στο χρόνο με τη βοήθεια υπολογιστή...’ (Κουϊκόγλου, 2002)

‘A simulation is the imitation of the operation of a real-world process or system over time". It "involves the generation of an artificial history of a system, and the observation of that artificial history to draw inferences ... ‘ (Banks et al)

‘In a simulation we use a computer to evaluate a model (of a system) numerically, and data are gathered in order to estimate the desired true characteristics of the model’ (Law and Kelton)

Βασικοί ορισμοί γύρω από την προσομοίωση:

- Σύστημα, ονομάζεται ένα σύνολο στοιχείων τα οποία εξελίσσονται και αλληλεπιδρούν σύμφωνα με κάποιους κανόνες. Τα συστήματα χωρίζονται σε στατικά και δυναμικά. Το στατικό δεν εμφανίζει εξέλιξη με την πάροδο του χρόνου αντίθετα με το δυναμικό.
- Μοντέλο, είναι το σύνολο των κανόνων που περιγράφουν την εξέλιξη του συστήματος με μαθηματικές ή λογικές σχέσεις.
- Κατάσταση, ονομάζεται το σύνολο των μεταβλητών οι οποίες δίνουν την απαραίτητη πληροφορία για την περιγραφή του συστήματος κάθε χρονική στιγμή.
- Γεγονός, η αιτία που προκαλεί αλλαγή στην κατάσταση του συστήματος.

2.1.1 Μοντέλα προσομοίωσης

Μπορούμε να διακρίνουμε δυο τύπους προσομοίωσης:

Προσομοίωση Monte Carlo

Με τον όρο Monte χαρακτηρίζεται κάθε αλγόριθμος προσομοίωσης που χρησιμοποιεί γεννήτριες τυχαίων αριθμών. Ως τέτοια μπορεί να θεωρηθεί και η ρουλέτα του καζίνο από το οποίο προέρχεται και το όνομα της μεθόδου. Η προσομοίωση Monte Carlo

εφαρμόστηκε κατά το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο για την ανάπτυξη της ατομικής βόμβας. Προσομοιώνει συστήματα για τα οποία η πάροδος του χρόνου δεν έχει ουσιαστική σημασία.

Δυναμική Προσομοίωση (Dynamic Simulation)

Με τον όρο δυναμική εννοούμε την προσομοίωση που εφαρμόζεται σε δυναμικά συστήματα, δηλαδή σε συστήματα όπου η διάσταση του χρόνου παίζει σημαντικό ρόλο. Τέτοια συστήματα είναι και τα αναμονητικά καθώς εξελίσσονται με την πάροδο του χρόνου. Ο τύπος δυναμικής προσομοίωσης έχει εφαρμογή στα αναμονητικά συστήματα.

2.1.2 Ανάπτυξη μοντέλου προσομοίωσης

Κατά την κατασκευή του μοντέλου της προσομοίωσης πολύ μεγάλη προσοχή πρέπει να δοθεί στα δυο ακόλουθα σημεία:

Επιλογή αρχικών συνθηκών. Οι εκτιμήσεις της συμπεριφοράς του συστήματος που θα προκύψουν από το μοντέλο της προσομοίωσης είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με τις αρχικές συνθήκες που επιλέχθηκαν κατά την κατασκευή του μοντέλου. Για του λόγου το αληθές, έστω ότι για ένα αναμονητικό σύστημα $G/G/1/\infty$ έχει επιλεγεί ως αρχική κατάσταση της προσομοίωσης στο σύστημα να βρίσκονται μηδέν πελάτες. Αν υποθεθεί τώρα ότι ο μέσος ρυθμός αφίξεων είναι πολύ μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της εξυπηρέτησης τότε η επιλογή εκκίνησης με άδειο σύστημα δεν συμβαδίζει με την κατάσταση που θα βρίσκεται το σύστημα μετά το πέρας ενός μεγάλου χρονικού διαστήματος.

Οι αρχικές συνθήκες πρέπει να επιλέγονται με την μεγαλύτερη δυνατή προσοχή καθώς εξαρτώνται άμεσα απ' αυτές τα αποτελέσματα που θα δώσει η προσομοίωση, αν και δεν είναι πάντα εύκολο να ορισθούν οι κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Επιλογή διάρκειας προσομοίωσης. Η ποιότητα των αποτελεσμάτων εξαρτάται άμεσα από την διάρκειά της προσομοίωσης. Η διάρκεια πρέπει να ορίζεται κατά τρόπο τέτοιο ώστε αφενός τα αποτελέσματά που δίνει η προσομοίωση να είναι τα επιθυμητά και αφετέρου το υπολογιστικό κόστος να είναι ελάχιστο. Και εδώ όπως και στην περίπτωση επιλογής των αρχικών συνθηκών παρουσιάζονται δυσκολίες στον ορισμό της κατάλληλης διάρκειας της προσομοίωσης. Για παράδειγμα αν απαιτείται από την προσομοίωση να εκτιμήσει κάποιο μέτρο απόδοσης στην μόνιμη κατάσταση π.χ τον μέσο αριθμό πελατών, δεν μπορεί κανείς να ορίσει με ακρίβεια τον χρόνο που θα χρειαστεί ο προσομοιωτής για να φτάσει στην μόνιμη κατάσταση.

Γίνεται αντιληπτό από τα παραπάνω ότι ο τρόπος που θα επιλέξουμε τα παραπάνω μεγέθη (χρόνος προσομοίωσης και αρχικές συνθήκες) διαφέρει ανάλογα με το είδος του αναμονητικού συστήματος που εξετάζεται και των ζητούμενων αποτελεσμάτων. Το γεγονός αυτό δημιουργεί διαφορετικούς τύπους σχεδίασης προσομοιωτών κάποιοι από τους οποίους αναφέρονται παρακάτω.

2.1.3 Είδη προσομοίωσης

Καταληκτική προσομοίωση (Terminating Simulation). Αυτός ο τύπος προσομοίωσης χρησιμοποιείται όταν μπορεί να επιλεγεί ένα φυσικό γεγονός το οποίο καθορίζει την διάρκεια κάθε κύκλου προσομοίωσης. Τα απαιτούμενα μέτρα απόδοσης ορίζονται σε συνάρτηση με τα διαστήματα του χρόνου προσομοίωσης. Για παράδειγμα οι καθυστερήσεις πελατών σε ένα κατάστημα λιανικής που λειτουργεί από τις 9:00 μέχρι τις 14:00.

Μη καταληκτική προσομοίωση (Non-Terminating Simulation). Ο συγκεκριμένος τύπος προσομοίωσης είναι κατάλληλος όταν τα επιθυμητά μέτρα απόδοσης ορίζονται σαν όρια όταν ο χρόνος προσομοίωσης τείνει στο άπειρο. Για παράδειγμα ο μέσος ρυθμός παραγωγής ενός εργοστασίου που λειτουργεί ακατάπαυστα ή ο μέσος αριθμός κατελημμένων γραμμών σε ένα δίκτυο τηλεφωνίας.

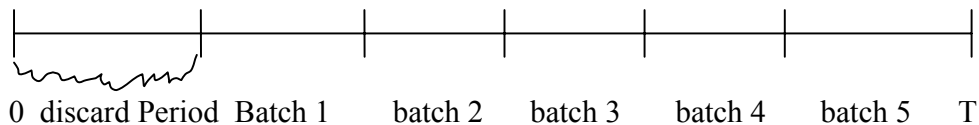
Αναγεννητική προσομοίωση (Regenerative Simulation). Το είδος αυτό εφαρμόζεται σε στοχαστικές διαδικασίες που έχουν αναγεννητική δομή. Θα γίνει εκτεταμένη αναφορά στην αναγεννητική προσομοίωση στην συνέχεια της εργασίας.

Ο τρόπος που θα ολοκληρώνεται η προσομοίωση και προκύπτουν τα τελικά αποτελέσματα είναι άλλο ένα χαρακτηριστικό του μοντέλου προσομοίωσης που χρήζει προσοχής. Υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις όσον αφορά τον τρόπο ολοκλήρωσης της προσομοίωσης οι κυριότερες από τις οποίες αναφέρονται παρακάτω.

Προσέγγιση πολλαπλών επαναλήψεων (Multiple Replications Approach). Όταν χρησιμοποιούμε καταληκτική προσομοίωση η τεχνική ολοκλήρωσης είναι η ακόλουθη: Έστω E ο χρόνος διάρκειας ενός κύκλου προσομοίωσης. Εκτελούνται n ανεξάρτητες επαναλήψεις της προσομοίωσης. Κάθε προσομοίωση έχει τις ίδιες αρχικές συνθήκες ενώ σταματά στο τέλος του χρόνου E . Από κάθε επανάληψη προκύπτει μια εκτίμηση έστω X_1, X_2, \dots, X_n για το μέτρο απόδοσης που μας ενδιαφέρει, οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες. Η τελική εκτίμηση προκύπτει από τις επιμέρους με την χρήση στατιστικών μεθόδων (διαστήματα εμπιστοσύνης, μέσος όρος κτλ).

Πολλαπλές επαναλήψεις (Multiple Replications). Η συγκεκριμένη μέθοδος εφαρμόζεται τόσο σε καταληκτική όσο και σε μη καταληκτική προσομοίωση. Όπως και προηγούμενα η ιδέα είναι να εκτελεστούν n ανεξάρτητες επαναλήψεις της προσομοίωσης. Κάθε φορά, κι εδώ εντοπίζεται και η διαφορά της με την προηγούμενη προσέγγιση, απορρίπτεται ένα σταθερού μεγέθους αρχικό κομμάτι της επανάληψης για να εξαιρεθεί όσο το δυνατόν περισσότερο η εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Το υπόλοιπο της απόρριψης αποτελεί την ανεξάρτητη εκτίμηση X_i του επιθυμητού μέτρου απόδοσης. Στη συνέχεια με χρήση στατιστικών μεθόδων καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα. Το πρόβλημα με τις πολλαπλές επαναλήψεις στην περίπτωση της μη καταληκτικής είναι ότι δεν μπορούν να επιλεγούν εύκολα οι αρχικές συνθήκες ενώ δεν μπορεί να προσδιορισθεί με ακρίβεια η στιγμή που το σύστημα βρίσκεται στην μόνιμη κατάσταση. Το μειονέκτημα της συγκεκριμένης προσέγγισης είναι ότι κάθε φορά πρέπει να χάνεται ένα κομμάτι από τα δεδομένα.

Μέσοι όροι παρτίδων (Batch Means Method). Η ιδέα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι να γίνει μια μεγάλη σε διάρκεια προσομοίωση να αφαιρεθεί το αρχικό κομμάτι με το σκεπτικό της προηγούμενης προσέγγισης και να χωριστεί το κομμάτι που μένει σε παρτίδες. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου έναντι της προηγούμενης είναι ότι αφαιρείται μόνο ένα κομμάτι αποτελεσμάτων κι έτσι χάνονται λιγότερα δεδομένα.



Σχήμα Α Batch Means Method

Θεωρώντας στην συνέχεια ότι κάθε παρτίδα αποτελεί και μια εκτίμηση για το ζητούμενο μέτρο απόδοσης εφαρμόζονται στατιστικές μέθοδοι για την παραγωγή του τελικού αποτελέσματος. Σημειώνεται ότι οι παρατηρήσεις είναι ‘σχεδόν ανεξάρτητες’ και γι’ αυτό το λόγο έχει διαπιστωθεί εμπειρικά ότι πρέπει οι παρτίδες να είναι σχετικά μεγάλες ενώ το σύνολο τους σχετικά μικρό.

2.2 Αναγεννητική προσομοίωση

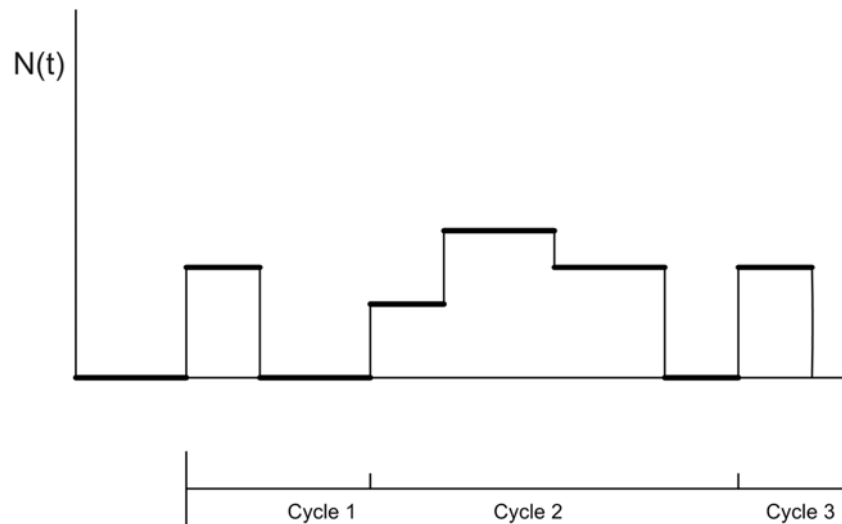
Μετά από αυτήν την παρένθεση για τις τεχνικές περάτωσης που εφαρμόζονται στην Καταληκτική και Μη Καταληκτική προσομοίωση, θα παρουσιασθεί η Αναγεννητική προσομοίωση. Ο προσομοιωτής που κατασκευάστηκε και χρησιμοποιήθηκε για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας είναι αναγεννητικού τύπου.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το είδος αυτό της προσομοίωσης εφαρμόζεται σε στοχαστικές διαδικασίες που έχουν αναγεννητική δομή. Μια στοχαστική διαδικασία θεωρείται αναγεννητική αν υπάρχει μια ακολουθία τυχαίων χρονικών σημείων στα οποία επανεκκινεί πιθανοτικά. Τα τυχαία αυτά χρονικά σημεία καλούνται σημεία αναγέννησης. Ανάλογα με την διαδικασία, παρατηρούνται κάθε φορά που η διαδικασία φτάνει να συγκεκριμένη κατάσταση, ή κάθε φορά που η διαδικασία βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση και λαμβάνει χώρα ένα συγκεκριμένο γεγονός.

Τα σημεία αναγέννησης διαιρούν την διαδικασία σε πιθανοτικά όμοιους αναγεννητικούς κύκλους. Κάθε φορά λοιπόν που η διαδικασία φτάνει σε κάποιο σημείο αναγέννησης, ξεκινά εκ νέου χωρίς να εξαρτάται από την κατάσταση της διαδικασίας που υπήρχε πριν από εκείνη την στιγμή. Δυο σημαντικά είδη αναγεννητικών στοχαστικών διαδικασιών είναι οι διακριτού και συνεχούς χρόνου αλυσίδες Markov. Η ιδιότητα των οποίων είναι, ότι δεδομένης της τωρινής κατάστασης, η μελλοντική εξέλιξη του συστήματος είναι απόλυτα ανεξάρτητη από το παρελθόν του. Αυτό με λίγα λόγια αυτό που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ότι για κάθε κατάσταση της αλυσίδας οι επιτυχείς αφίξεις στην κατάσταση αυτή αποτελούν σημεία αναγέννησης της διαδικασίας.

Για τον προσομοιωτή της έρευνας ως σημείο αναγέννησης επιλέχθηκε το γεγονός μια αφίξης σε άδειο σύστημα. Κάθε φορά που εισέρχεται στο σύστημα κάποιος πελάτης ενώ

αυτό ήταν άδείο η διαδικασία επανεκκινεί πιθανοτικά. Παρακάτω (Σχήμα Β) απεικονίζονται σχηματικά οι κύκλοι της προσομοίωσης όπως προκύπτουν από την επιλογή του σημείου αναγέννησης.



Σχήμα Β Κύκλοι αναγεννητικής προσομοίωσης

2.2.1 Πλεονεκτήματα της αναγεννητικής προσομοίωσης

Η μαγεία της αναγεννητικής προσομοίωσης είναι ότι οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από του διαφορετικούς κύκλους αναγέννησης είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Συνεπώς η συνολική περίοδος παρατήρησης χωρίζεται σε ακέραιο πλήθος υποπεριόδων που έχουν ίδια στατιστική συμπεριφορά μεταξύ τους. Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει την εφαρμογή μιας μεθόδου γνωστής ως αναγεννητική προσομοίωση η οποία επιτρέπει την εξαγωγή εκτιμήσεων από μια αυτοσυσχετιζόμενη στοχαστική διαδικασία. Ένα ακόμα πλεονέκτημα της αναγεννητικής μεθόδου είναι η απουσία της αφαιρούμενης περιόδου που υπήρχε στην Καταληκτική και Μη Καταληκτική προσομοίωση. Κάθε αναγεννητικός κύκλος είναι αντιπροσωπευτικός της συμπεριφοράς του συστήματος στην μόνιμη κατάσταση. Από τον πρώτο κιάλας κύκλο τα αποτελέσματα είναι πιθανοτικά όμοια με αυτά του χιλιοστού. Αν λοιπόν το σύστημα ξεκινήσει από ένα αναγεννητικό σημείο, οι παρατηρήσεις που προκύπτουν από κάθε κύκλο προσομοίωσης αποτελούν μια αμερόληπτη εκτίμηση του επιθυμητού μέτρου απόδοσης. Έτσι κερδίζεται πολύτιμος υπολογιστικός χρόνος.

2.2.2 Μειονεκτήματα της αναγεννητικής προσομοίωσης

Το βασικό μειονέκτημα της αναγεννητικής μεθόδου είναι ότι εφαρμόζεται μόνο σε αναγεννητικές στοχαστικές διαδικασίες. Πολλές φορές είναι δύσκολο να αποφανθεί κανείς για το αν μια στοχαστική διαδικασία που δεν είναι Markov είναι ή όχι αναγεννητική. Συνεχίζοντας, ακόμα και αν κάποιος γνωρίζει ότι μια στοχαστική διαδικασία είναι αναγεννητική καλείται να επιλέξει τα κατάλληλα σημεία αναγέννησης

έτσι ώστε να εμφανίζονται συχνά να εμφανίζεται ένας μεγάλος αριθμός κύκλων κάθε φορά που τρέχει η προσομοίωση. Για παράδειγμα έστω ότι για ένα αναμονητικό σύστημα $G/G/1/\infty$ έχει επιλεγεί ως σημείο αναγέννησης της προσομοίωσης η άφιξη στο σύστημα ενώ αυτό είναι στην κατάσταση μηδέν (άδειο). Αν υποθεθεί τώρα ότι ο μέσος ρυθμός αφίξεων είναι πολύ μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της εξυπηρέτησης τότε το σύστημα δεν θα αδειάζει συχνά και έτσι θα απαιτείται μια μεγάλης διάρκειας προσομοίωση για να προκύψει ένας καλός αριθμός κύκλων.

2.2.3 Συλλογή αποτελεσμάτων στην αναγεννητική προσομοίωση

Ο τρόπος που εφαρμόζονται οι στατιστικές μέθοδοι στην αναγεννητική προσομοίωση διαφέρουν από αυτές των προσεγγίσεων μέσης παρτίδας και πολλαπλών επαναλήψεων. Ας υποθεθεί ότι θέλει να υπολογίσει κάποιος τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, για κάποιο αναμονητικό σύστημα με την αναγεννητική μέθοδο. Ορίζονται οι ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές (Crane and Iglehart, 1975):

Y μέσος όρος πελατών στο σύστημα, υπολογισμένος σε έναν κύκλο
 τ η διάρκεια του κύκλου

Ο επόμενος λόγος που καλείται, σε ελεύθερη μετάφραση, **τύπος πηλίκου αναγεννητικής στοχαστικής διαδικασίας (ratio formula for regenerative stochastic process)**, δίνει τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα N :

$$N = \frac{E(Y)}{E(\tau)}$$

Εκτελώντας αναγεννητική προσομοίωση, για κάθε κύκλο i συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα Y_i , τ_i τα οποία είναι όμοιες και ανεξάρτητα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές.

Έστω τώρα ότι έχουν ολοκληρωθεί n κύκλοι από τους οποίους έχουν προκύψει τα αντίστοιχα Y_1, Y_2, \dots, Y_n και $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Για να προκύψει η εκτίμηση του μέσου αριθμού πελατών χρησιμοποιούνται οι δειγματικοί μέσοι \bar{Y}_n και $\bar{\tau}_n$, η ποσότητα \hat{N}_n αποτελεί την εκτίμηση για τον μέσο αριθμό πελατών και ορίζεται ως

$$\hat{N}_n \equiv \frac{\bar{Y}_n}{\bar{\tau}_n}$$

Για την κατασκευή του διαστήματος εμπιστοσύνης, πρώτα ορίζεται μια νέα τυχαία ποσότητα για κάθε κύκλο $Z_i = Y_i - N \tau_i$ από τον λόγο της αναγεννητικής προσομοίωσης και το γεγονός ότι τα ζεύγη (Y_i, τ_i) είναι ανεξάρτητα ισχύει ότι $E(Z_i) = 0$ και ότι Z_1, Z_2, \dots, Z_n είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές. Με εφαρμογή του κεντρικού οριακού θεωρήματος προκύπτει:

$\bar{Y}_n - N\bar{\tau}_n \approx \frac{\sigma(Z)}{\sqrt{n}} N(0,1)$ και διαιρώντας με $\bar{\tau}_n$ προκύπτει:

$$\frac{\bar{Y}_n - N}{\bar{\tau}_n} \approx \frac{\sigma(Z)}{\sqrt{n}} N(0,1)$$

Με τα προηγούμενα κατασκευάζεται το διάστημα εμπιστοσύνης $(1-\alpha)100\%$:

$$\left[\hat{N}_n - \frac{z\sigma(Z)}{\bar{\tau}_n \sqrt{n}}, \hat{N}_n + \frac{z\sigma(Z)}{\bar{\tau}_n \sqrt{n}} \right] \text{ όπου } z \text{ ικανοποιεί την } \Phi(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Υπολογισμός του $\sigma^2(z)$:

Υπολογίζονται στην συνέχεια η δειγματική διασπορά για τις ακολουθίες Y_1, Y_2, \dots, Y_n και $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ και η δειγματική συνδιακύμανση:

Δειγματική διασπορά:

$$v^{YY} \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2 \approx \sigma^2(Y) \quad (1) \quad \text{και} \quad v^{\tau\tau} \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tau_i - \bar{\tau}_n)^2 \approx \sigma^2(\tau) \quad (2)$$

Δειγματική συνδιακύμανση:

$$v^{Y\tau} \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)(\tau_i - \bar{\tau}_n) \approx \text{Cov}(Y, \tau) \quad (3)$$

Τελικός υπολογισμός του $\sigma^2(z)$:

$$v_n \equiv v_n^{YY} - 2\hat{N}v_n^{Y\tau} + \hat{N}^2 v_n^{\tau\tau} \quad (4)$$

Τελική προσέγγιση του μέσου αριθμού πελατών:

$$\left[\hat{N}_n - \frac{z}{\bar{\tau}_n} \sqrt{\frac{v_n}{n}}, \hat{N}_n + \frac{z}{\bar{\tau}_n} \sqrt{\frac{v_n}{n}} \right] \quad (5)$$

2.3 Αλγόριθμος προσομοίωσης ουρών αναμονής

Στην συνέχεια παρατίθεται ο αλγόριθμος στον οποίο στηρίζεται η προσομοίωση:
Ως γεγονότα του συστήματος θεωρούμε τις αναχωρήσεις κομματιών από τις μηχανές. Η άφιξη ισοδυναμεί με την αναχώρηση κομματιού από την μηχανή M_0 που έχει το ρόλο της τροφοδοτούσα μηχανής. Η μηχανή μηδέν δεν διακόπτει ποτέ την λειτουργία της, ακόμα κι όταν το σύστημα γεμίζει ο μηχανισμός αφίξεων δεν σταματά και οι αφίξεις που προκύπτουν κατ' αυτό το διάστημα χάνονται. Το σημείο αναγέννησης που έχει επιλεγεί είναι η πραγματοποίηση μιας άφιξης την χρονική στιγμή που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση μηδέν (άδειο). Συμβολισμοί:

N = πλήθος μηχανών

B = Χωρητικότητα αποθήκης, για την συνολική χωρητικότητα του συστήματος δεν χρησιμοποιείται ξεχωριστή μεταβλητή και εκφράζεται ως το άθροισμα $N+B$.

time= τρέχων χρόνος προσομοίωσης.

$T(i)$ = χρόνος επόμενης αναχώρησης. Υπογραμμίζεται ότι όταν το i έχει την τιμή μηδέν το γεγονός στο σύστημα είναι άφιξη.

$s(i)$ = κατάσταση μηχανών από $i=1 \dots N$. Έχει την τιμή 1 όταν η μηχανή λειτουργεί και την τιμή 0 όταν η μηχανή είναι αποστερημένη (πεινάει).

cust= αριθμός πελατών. $0 \leq \text{cust} \leq N+B$.

$P(\text{cust})$ = Χρόνος που το σύστημα μένει στην κατάσταση cust.

Prod= παραγωγή του συστήματος.

L = χρόνος αναμονής στο σύστημα.

TH = μέσος ρυθμός παραγωγής.

Π = μέσος αριθμός πελατών.

U = χρόνος επόμενης αναχώρησης

Λ = λίστα αποστερημένων μηχανών.

n = πλήθος κύκλων αναγέννησης που έχουν προσομοιωθεί ως τώρα

Όταν το σύστημα λειτουργεί θα υπάρχουν περίοδοι όπου όλες οι μηχανές θα λειτουργούν κανονικά, και περίοδοι όπου κάποιες μηχανές θα αδρανούν. Η λίστα Λ θα περιέχει $m \geq 0$ στοιχεία. Το στοιχείο $\Lambda(1)$ της λίστας είναι ο αριθμός της μηχανής που απεστερήθη πρώτη, το $\Lambda(2)$ είναι της δεύτερης κ.ο.κ. Συμβολίζεται με $i \Rightarrow \Lambda$ την πρόσθεσή της

μηχανής i στην τελευταία θέση της λίστας. Αυτό που κάνει στην πραγματικότητα το πρόγραμμα είναι να θέσει $m:=m+1$ και $\Lambda(m)=i$. Επίσης συμβολίζεται με $\Lambda \Rightarrow i$ η αφαίρεση του πρώτου στοιχείου της λίστας και την καταχώρηση της τιμής του στην μεταβλητή i . Αυτό που κάνει το πρόγραμμα είναι η αντικατάσταση $i=\Lambda(1)$ και η ολίσθηση των υπολοίπων $m-1$ στοιχείων της Λ κατά μια θέση επάνω.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

(A) ΔΙΑΒΑΣΕ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

N, B , παράμετροι κατανομών χρόνων κατεργασίας.

(B) ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ

time=0,

Για $i=1$ ως $N+B$

$i \Rightarrow \Lambda$

$T(i)=\infty$

$S(i)=0$

Επόμενο i

Χρησιμοποίησε τους τύπους **1, 2, 3, 4** (Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.2.3)

Αν $n < 5$ τότε

$n=n+1$

πήγαινε στο Γ

Αλλιώς

Υπολόγισε το διάστημα εμπιστοσύνης τύπος **5** (Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.2.3)

Αν το σφάλμα δεν είναι αποδεκτό τότε

$n=n+1$

πήγαινε στο Γ

Αλλιώς πήγαινε στο (ΣΤ) Τέλος

Τέλος Αν

Τέλος Αν

cust=1 (**Σημείο αναγέννησης**)

$\Lambda \Rightarrow i$

$S(i)=1$

$L=L-time$

Γέννησε τους χρόνους $T(0)$ και $T(i)$

(Γ) ΧΡΟΝΟΣ ΕΠΟΜΕΝΟΥ ΓΕΓΟΝΟΤΟΣ

Για $i=0$ ως $N+B$

Βρες το μικρότερο $T(i)$

Επόμενο i

Αν το μικρότερο $T(i)$ προκύπτει για $i=0$ τότε το επόμενο γεγονός είναι άφιξη.

Αλλιώς το επόμενο γεγονός είναι αναχώρηση.

Τέλος Αν

(Δ) ΑΦΙΞΗ

Αν $cust=0$ τότε πήγαινε στο (B) ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ

Αν $cust \leq N$ και $cust \neq 0$ και η Λ δεν είναι κενή τότε

$\Lambda \Rightarrow i$

$s(i)=1$

Γέννησε νέο χρόνο εξυπηρέτησης U

$T(i) = time + U$

$P(cust) = P(cust) + time$

$cust = cust + 1$

$P(cust) = P(cust) - time$

$L = L - time$

Γέννησε νέο χρόνο άφιξης

$T(0) = time + U$

Τέλος Αν

Αν $cust=N+B$ τότε

Γέννησε νέο χρόνο άφιξης

$T(0) = time + U$

Αλλιώς

Γέννησε νέο χρόνο άφιξης

$T(0) = time + U$

$P(cust) = P(cust) + time$

$cust = cust + 1$

$P(cust) = P(cust) - time$

$L = L - time$

Τέλος Αν

Πήγαινε στο (Γ) ΧΡΟΝΟΣ ΕΠΟΜΕΝΟΥ ΓΕΓΟΝΟΤΟΣ

(E) ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ

$$\text{Prod} = \text{Prod} + 1$$

$$L = L + \text{time}$$

$$P(\text{cust}) = P(\text{cust}) + \text{time}$$

$$\text{cust} = \text{cust} - 1$$

$$P(\text{cust}) = P(\text{cust}) - \text{time}$$

Αν $\text{cust}=0$ τότε

$$i \Rightarrow \Lambda$$

$$T(i) = \infty$$

$$S(i) = 0$$

Πήγαινε στο (Γ) ΧΡΟΝΟΣ ΕΠΟΜΕΝΟΥ ΓΕΓΟΝΟΤΟΣ

Τέλος Αν

Αν $\text{cust} < N$ τότε

$$i \Rightarrow \Lambda$$

$$T(i) = \infty$$

$$S(i) = 0$$

Πήγαινε στο (Γ) ΧΡΟΝΟΣ ΕΠΟΜΕΝΟΥ ΓΕΓΟΝΟΤΟΣ

Αλλιώς Γέννησε νέο χρόνο εξυπηρέτησης U

$$T(i) = \text{time} + U$$

Πήγαινε στο (Γ) ΧΡΟΝΟΣ ΕΠΟΜΕΝΟΥ ΓΕΓΟΝΟΤΟΣ

Τέλος Αν

(ΣΤ) ΤΕΛΟΣ

Υπολόγισε τον μέσο ρυθμό παραγωγής $TH = \text{Prod}/\text{time}$ τον μέσο αριθμό πελατών $\Pi = L/\text{time}$.

3 Προσεγγιστικά μοντέλα G/G/1/K



Στο **Σχήμα Γ** απεικονίζεται ένα μοντέλο G/G/1/K. Μια ψευδομηχάνη M_0 αντιπροσωπεύει τον μηχανισμό των αφίξεων. Το σύστημα έχει συνολική χωρητικότητα K, ή αναλυτικότερα μια βαθμίδα εξυπηρέτησης και n θέσεις αναμονής. Οι κατανομές που ακολουθούν αφίξεις και εξυπηρετήσεις είναι γενικές. Το μέτρο που χαρακτηρίζει την κατανομή και την διαφοροποιεί από την εκθετική είναι ο συντελεστής διασποράς CV.

Η τιμή του συντελεστή δίνεται: $CV = \frac{\sqrt{Var(x)}}{E(x)}$ και αποτελεί ένα μέτρο τυχαιότητας ή

διασποράς των χρόνων των μηχανών (αφίξης και εξυπηρετήσεων) γύρω από την μέση τιμή τους. Όταν οι χρόνοι είναι σταθεροί, τότε $CV=0$. Αντίθετα, η εκθετική κατανομή έχει $CV=1$, και αυτή η τιμή θεωρείται ως ένδειξη σχετικά μεγάλης τυχαιότητας.

3.1 Εισαγωγικά

Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζονται και συγκρίνονται μαθηματικά μοντέλα, διαφορετικών συγγραφέων, που προσεγγίζουν τον μέσο ρυθμό παραγωγής και τον μέσο αριθμό πελατών σ' ένα σύστημα G/G/1/K. Αποτελεσματικότερο κρίνεται το μοντέλο του οποίου η εκτίμηση για κάποιο από τα μέτρα απόδοσης που αναφέρθηκαν, βρίσκεται πιο κοντά στην τιμή που δίνεται από το μοντέλο προσομοίωσης για το αντίστοιχο μέτρο.

3.2 Μαθηματικά μοντέλα

Buzacott - Liu - Shantikumar (1994) [6]

Το συγκεκριμένο μοντέλο, το οποίο στη συνέχεια για λόγους συντομίας θα αναφέρεται ως μοντέλο Buzacott, έχει εφαρμογή σε συστήματα με μηχανισμό αφίξεων που παγώνει. Το χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου μηχανισμού είναι ότι κάθε φορά που το σύστημα είναι γεμάτο η διαδικασία γέννησης των αφίξεων 'σβήνει' - παγώνει και ενεργοποιείται - 'ανάβει' ξανά όταν αδειάσει κάποια θέση στο σύστημα. Ο μηχανισμός αυτός διαφέρει από εκείνο των χαμένων αφίξεων στον οποίο στηρίζεται το μοντέλο της προσομοίωσης. Το χαρακτηριστικό και κατ' επέκταση η διαφορά των χαμένων αφίξεων είναι ότι κάθε φορά που το σύστημα γεμίζει η διαδικασία γέννησης τους δεν σταματά, με αποτέλεσμα οι αφίξεις αυτές να μην καταφέρνουν να μπουν στο σύστημα και να

χάνονται. Παρά την ουσιαστική διαφορά στην αρχή λειτουργίας το μοντέλο του Buzacott συμμετέχει στην σύγκριση.

Ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται όπως παρακάτω:

$$TH = \lambda \frac{(1 - \rho\sigma^{K-1})}{(1 - \rho^2\sigma^{K-1})}, \rho < 1$$

Όπου

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \sigma = \frac{(\hat{n} - \rho)}{\hat{n}}, \quad \hat{n} = \left\{ \frac{\rho^2(1 + C_s^2)}{2(1 - \rho)} \right\} \left\{ \frac{C_a^2 + \rho^2 C_s^2}{1 + \rho^2 C_s^2} \right\} + \rho$$

$$TH = \lambda \frac{(1 - \rho\sigma^{K-1})}{(1 - \rho^2\sigma^{K-1})}, \rho > 1$$

Όπου

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \sigma = \frac{(\hat{n} - \rho)}{\hat{n}}, \quad \hat{n} = \left\{ \frac{\rho^2(1 + C_a^2)}{2(1 - \rho)} \right\} \left\{ \frac{C_s^2 + \rho^2 C_a^2}{1 + \rho^2 C_a^2} \right\} + \rho$$

$$TH = \lambda \frac{(C_a^2 + C_s^2 + 2(K - 1))}{2(C_a^2 + C_s^2 + K - 1)}, \rho = 1$$

Kim-Chae (2001) [7]

Οι συγγραφείς δίνουν εκτιμήσεις τόσο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής έμμεσα όσο και για τον μέσο αριθμό πελατών, άμεσα, στο σύστημα ακολουθώντας μια μέθοδο που εκείνοι ονομάζουν '*decomposed Little's formula*'. Για τον μέσο ρυθμό παραγωγής δίνεται ο χαρακτηρισμός έμμεσα γιατί στην εργασία τους δεν υπάρχει τύπος που αναφέρεται στο συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης. Υπάρχει όμως εκτίμηση για την πιθανότητα που έχει το σύστημα να μπλοκάρει, από την τελευταία είναι εφικτός ο υπολογισμός του μέσου ρυθμού παραγωγής. Για λόγους συντομίας το μοντέλο θα ονομάζεται μοντέλο Kim.

Πιθανότητα γεμάτου συστήματος:

$$P_K^A = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{\alpha_R} + \frac{K-1}{\alpha_R + b_R - \alpha} + \frac{1}{\alpha} \right\}^{-1}, \rho = 1$$

$$P_K^A = (1 - \rho) \left\{ \left(\frac{\alpha_R}{\alpha_R + b - \alpha} \right) \left(1 + \frac{\alpha - b}{\alpha_R + b_R - \alpha} \right)^{K-1} - \rho \right\}^{-1}, \rho \neq 1$$

Σε κάθε περίπτωση ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται:

$$TH = \lambda(1 - P_K^A)$$

Μέσος αριθμός πελατών:

$$E(N) \approx E(N^A) + (1 - P_K^A)(1 - \lambda\alpha_R), \rho \neq 1$$

όπου

$$E(N^A) \approx \frac{\lambda(\alpha_R + b_R - \alpha)}{1 - \rho} + \frac{b - b_R}{\alpha_R} + \left\{ \frac{\rho(b - b_R)}{(1 - \rho)\alpha_R} - \frac{\lambda(\alpha_R + b_R - \alpha) + \rho K}{1 - \rho} \right\} P_K^{\tilde{A}}, \rho \neq 1$$

και για $\rho=1$

$$E(N) \approx \frac{\frac{K(K-1)}{2(\alpha_R + b_R - \alpha)} + \frac{1}{\alpha_R} + \frac{b_R(K-1)}{\alpha(\alpha_R + b_R - \alpha)}}{\frac{1}{\alpha_R} + \frac{(K-1)}{(\alpha_R + b_R - \alpha)} + \frac{1}{\alpha}}, \rho = 1$$

Δίνονται:

$$\alpha = \frac{1}{\lambda}, b = \frac{1}{\mu}, \alpha_R = \frac{(1 + C_A^2)\alpha}{2}, b_R = \frac{(1 + C_S^2)b}{2}, \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Kouvatsos (1986) [8]

Προτείνεται ένα μοντέλο που δίνει εκτιμήσεις τόσο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής (έμμεσα) όσο και για τον μέσο αριθμό πελατών, (άμεσα) στο σύστημα ακολουθώντας μια μέθοδο που βασίζεται στην αρχή της μέγιστης εντροπίας. Για τον μέσο ρυθμό παραγωγής δίνεται ο χαρακτηρισμός έμμεσα γιατί στην εργασία τους δεν υπάρχει τύπος που αναφέρεται στο συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης. Υπάρχει όμως εκτίμηση για την πιθανότητα που έχει το σύστημα να μπλοκάρει, από την τελευταία είναι εφικτός ο υπολογισμός του μέσου ρυθμού παραγωγής.

Πιθανότητα γεμάτου συστήματος:

$$P_K = C_K \hat{P}_N$$

Μέσος ρυθμός παραγωγής:

$$TH = \lambda(1 - P_K)$$

Μέσος αριθμός πελατών:

$$N = \frac{\rho}{1 - \rho^2 x^{K-1}} \left\{ \frac{1 - x^K}{1 - x} - K \rho x^{K-1} \right\}$$

όπου

$$\hat{P}_N = (1 - \rho) g^{h(K)} x^K \text{ και } h(K) = 1, \quad g = \frac{2\rho}{C_\alpha^2 + \rho C_S^2 + \rho - 1}, \quad x = \frac{C_\alpha^2 + \rho C_S^2 + \rho - 1}{C_\alpha^2 + \rho C_S^2 - \rho + 1}$$

$$y = \frac{C_\alpha^2 + \rho C_S^2 - \rho + 1}{2}, \quad C_K = \frac{P_K(0)}{1 - \rho}, \quad P_K(0) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^2 x^{K-1}}$$

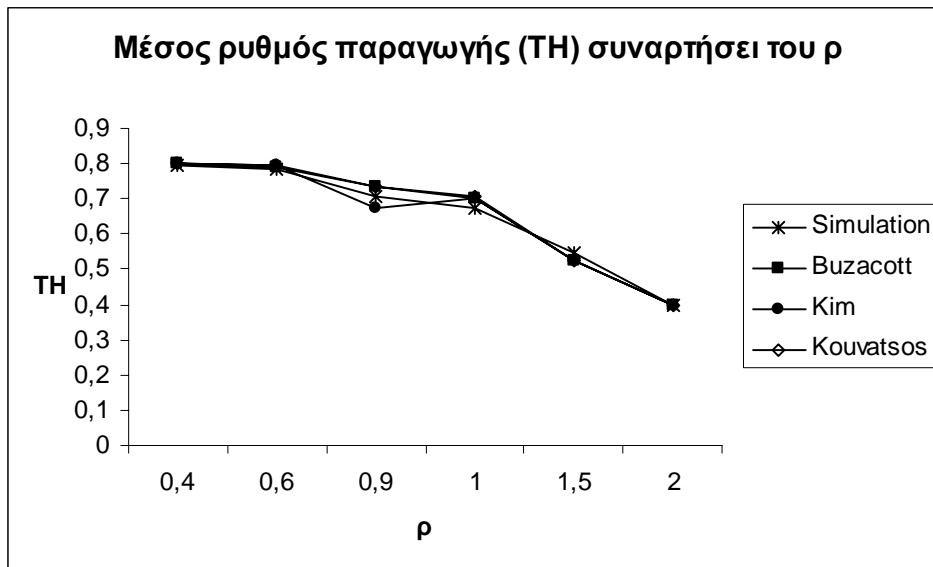
3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

Τα αριθμητικά αποτελέσματα αφορούν το μέσο ρυθμό παραγωγής ΤΗ και το μέσο αριθμό πελατών Ν και προκύπτουν από μια σειρά πειραμάτων όπου κάθε φορά μεταβάλλεται μια ζωτική παράμετρος του συστήματος ενώ οι άλλες παραμένουν σταθερές ως ακολούθως:

- Για μεταβλητό ρ διατηρούν σταθερές τιμές, το μέγεθος του χώρου αναμονής του συστήματος n ($n=4$), οι συντελεστές διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ και των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$ και $CV_{\epsilon\xi}=0.8$).
- Για μεταβλητό συντελεστή διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ διατηρούν σταθερές τιμές, το μέγεθος του χώρου αναμονής του συστήματος n ($n=4$), ο συντελεστής διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ ($CV_{\epsilon\xi}=0.8$) και το ρ ($\rho=0.9$).
- Για μεταβλητό συντελεστή διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ διατηρούν σταθερές τιμές, η χωρητικότητα του συστήματος n ($n=4$), ο συντελεστής διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$) και το ρ ($\rho=0.9$).
- Για μεταβλητό μέγεθος του χώρου αναμονής n διατηρούν σταθερές τιμές, οι συντελεστές διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ και των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$ και $CV_{\epsilon\xi}=0.8$), και το ρ ($\rho=0.9$).

3.3.1 Πειράματα με μεταβλητό ρ

Το ρ λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 0.4, 0.6, 0.9, 1.0, 1.5 και 2.0 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής ΤΗ και τον μέσο αριθμό πελατών Ν, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 3.3.1 και 3.3.2.



Σχήμα 3.3.1 Μέσος ρυθμός παραγωγής συναρτήσει του ρ

Για ρ ίσο με 0.4 ο ρυθμός παραγωγής (TH) που προκύπτει από την προσομοίωση είναι ίσος με 0.796053. Την καλύτερη εκτίμηση την καλύτερη εκτίμηση για το συγκεκριμένο μέγεθος την δίνει το **μοντέλο** του Buzacott με σφάλμα 0.00294 και ακολουθούν αυτά των Kouvatsos και Kim με σφάλμα 0.003653 και 0.00375 αντίστοιχα.

Για ρ ίσο με 0.6 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής μειώνεται στο 0.782406. Το σφάλμα εκτίμησης των μοντέλων αυξάνει σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση ($\rho=0.4$), ενώ η κατάταξη τους από το πιο ακριβές στο λιγότερο παραμένει η ίδια. Αναλυτικότερα, το μικρότερο σφάλμα παρουσιάζει το μοντέλο του Buzacott 0.00832, ακολουθεί του Kouvatsos (σφάλμα 0.010408) και τέλος του Kim (σφάλμα 0.011472).

Για ρ ίσο με 0.9 η τιμή της προσομοίωσης που αφορά τον μέσο ρυθμό παραγωγής σημειώνει νέα πτώση και ισούται τώρα με 0.705792, αντίθετα με το σφάλμα εκτίμησης των μοντέλων που διατηρεί ανοδική πορεία. Η κατάταξη όπως προηγούμενα δείχνει ακριβέστερο το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα 0.026821), αμέσως μετά αυτό του Kouvatsos (σφάλμα 0.027358) και τέλος του Kim που στην προκειμένη περίπτωση υποεκτιμά την τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής κατά 0.03369 (σφάλμα -0.03369).

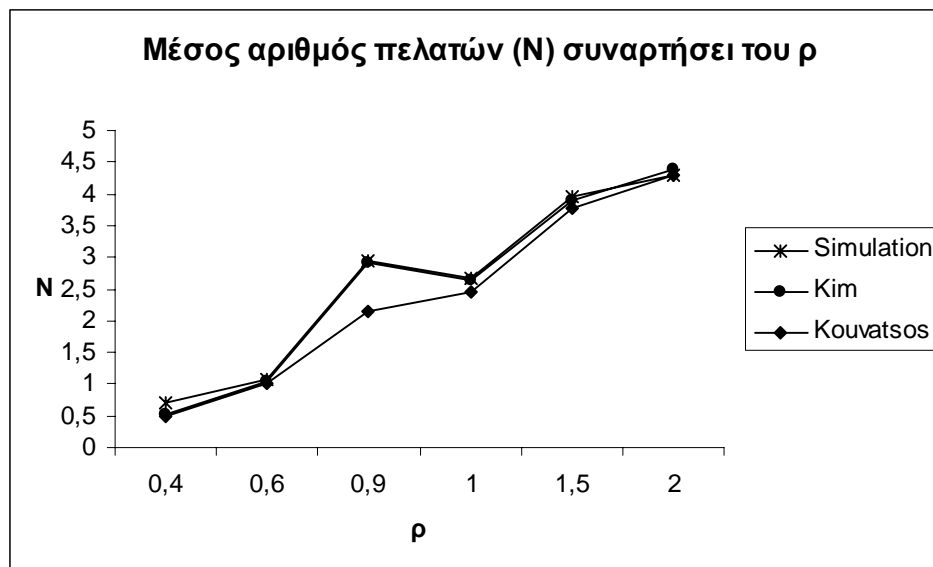
Για ρ ίσο με 1.0 η εκτίμηση της προσομοίωσης για το μέσο ρυθμό παραγωγής προκύπτει ίση με 0.672855. Πιο κοντά στην τιμή αυτή βρίσκεται η εκτίμηση του μοντέλου του Kim, που είναι το μοναδικό για το οποίο παρατηρείται μείωση της τιμής του σφάλματος κατά την άνοδο του ρ από 0.9 σε 1.0 (σφάλμα 0.029842). Ακολουθούν οι εκτιμήσεις του Buzacott (σφάλμα 0.030175) και Kouvatsos (σφάλμα 0.034486).

Για ρ ίσο με 1.5 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής που προκύπτει από την προσομοίωση είναι 0.549008. Για την συγκεκριμένη τιμή του ρ οι εκτιμήσεις όλων των μοντέλων εμφανίζονται πιο ακριβείς. Η καλύτερη από τις τρεις γίνεται από το μοντέλο

του Kim (σφάλμα 0.02451), και με απόσταση αναπνοής μεταξύ τους ακολουθούν του Buzacott (σφάλμα 0.02515) και Κουνατσος (σφάλμα 0.0252).

Για ρ ίσο με 2.0 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής που προκύπτει από την προσομοίωση είναι 0.399889. Τα μοντέλα στο σύνολο τους υποεκτιμούν το μέγεθος και βελτιώνουν τις εκτιμήσεις τους σε σχέση με την περίπτωση που το ρ ήταν 1.5. Κορυφαίο το μοντέλο του Kim (σφάλμα -0.00078) ακολουθεί του Κουνατσος (σφάλμα -0.00088) και του Buzacott (σφάλμα -0.00096).

Συνολικά, για τιμές του ρ από 0.4 μέχρι και 0.9 το μοντέλο του Buzacott εμφανίζεται ακριβέστερο από τα υπόλοιπα. Για τιμές από 1 ως και 2.0 το μοντέλο του Kim παίρνει τη σκυτάλη. Παρατηρείται ακόμα, ότι για το διάστημα 0.4 ως 0.9 το σφάλμα εκτίμησης των μοντέλων αυξάνει με την άνοδο του ρ , ενώ το αντίθετο ισχύει για τιμές πάνω από 1.0.



Σχήμα 3.3.2 Μέσος αριθμός πελατών συναρτήσει του ρ

Για ρ ίσο με 0.4 ο μέσος αριθμός πελατών (N) που προκύπτει από την προσομοίωση είναι ίσος με 0.692358. Την καλύτερη εκτίμηση για το συγκεκριμένο μέγεθος την δίνει το μοντέλο του Kim με σφάλμα -0.00294 και ακολουθεί του Κουνατσος με -0.194958. Όπως γίνεται αντιληπτό και τα δυο μοντέλα υποεκτιμούν το μέγεθος.

Για ρ ίσο με 0.6 και τα δυο μοντέλα δίνουν αρκετά καλές εκτιμήσεις. Ποιοτικά υποεκτιμούν κατά 0.04142, όσον αφορά το μοντέλο του Kim, και κατά 0.07238, για εκείνο του Κουνατσος. Η τιμή του μέσου αριθμού πελατών προκύπτει από την προσομοίωση ίση με 1.070464.

Για ρ ίσο με 0.9 η τιμή του μέσου αριθμού πελατών που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης ισούται με 2.939368. Προσεγγίζεται καλύτερα από το μοντέλο του Kim (σφάλμα -0.01822) που όπως φαίνεται, η απόδοση του ευνοείται από την αύξηση του ρ

(από 0.6 σε 0.9), σε αντίθεση με του Κουνατσοσ που παρουσιάζει αύξηση στο σφάλμα εκτίμησης του κατά 0.74504 (σφάλμα -0.78646).

Για ρ ίσο με 1.0 η τιμή του μέσου αριθμού πελατών που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης ισούται με 2.656575. Άνοδο στο σφάλμα εκτίμησης του παρουσιάζει το μοντέλο του Kim (σφάλμα -0.0323) παραμένοντας ωστόσο αισθητά καλύτερο από του Κουνατσοσ. Το τελευταίο αν και βελτιώνει την εκτίμηση του το σφάλμα του είναι περίπου 6 φορές μεγαλύτερο από αυτό που σημειώνει το μοντέλο του Kim.

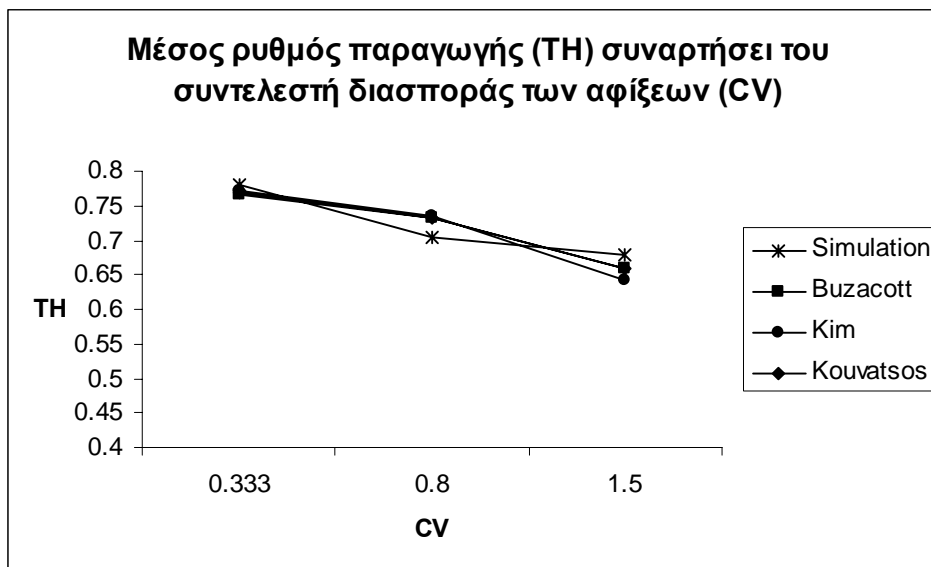
Για ρ ίσο με 1.5 η εκτίμηση της προσομοίωσης για το μέσο ρυθμό παραγωγής προκύπτει ίση με 3.94439. Ίδια σχεδόν εικόνα με αυτήν που περιγράφηκε αμέσως προηγούμενα, παρατηρείται και για την περίπτωση που το ρ έχει την τιμή 1.5. Το μοντέλο του Kim παρά την αύξηση της τιμής του σφάλματος του κατά 0.01997 (σφάλμα -0.05227) δίνει την πιο έγκυρη προσέγγιση από τα δυο. Το μοντέλο του Κουνατσοσ μειώνει το σφάλμα του αλλά και την απόσταση του από το πρώτο αφού πλέον σημειώνει σφάλμα 3 φορές μεγαλύτερο από του Kim.

Για ρ ίσο με 2.0 το μοντέλο του Κουνατσοσ κάνει εξαιρετική εκτίμηση. Για τιμή του μέσου αριθμού πελατών που δίνεται από την προσομοίωση ίση με 4.2900395 παρουσιάζει σφάλμα μόλις -0.00758. Δέκα φορές μεγαλύτερο είναι το σφάλμα που παρουσιάζει το μοντέλο του Kim (σφάλμα 0.081176). Όπως φαίνεται τέλος η διαφορά τους είναι και ποιοτική με το πρώτο να υποεκτιμά και το δεύτερο να υπερεκτιμά το μέγεθος.

Για τιμές του ρ μέχρι και το 1.5 το μοντέλο του Kim εμφανίζεται πιο ακριβές από του Κουνατσοσ όταν το ρ πάρει την τιμή 2 το μοντέλο του Κουνατσοσ ενδείκνυται για την μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών.

3.3.2 Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων άφιξης

Ο συντελεστής διασποράς των αφίξεων $CV_{\text{αφ}}$ λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 0.333, 0.8 και 1.5 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 3.3.3 και 3.3.4.



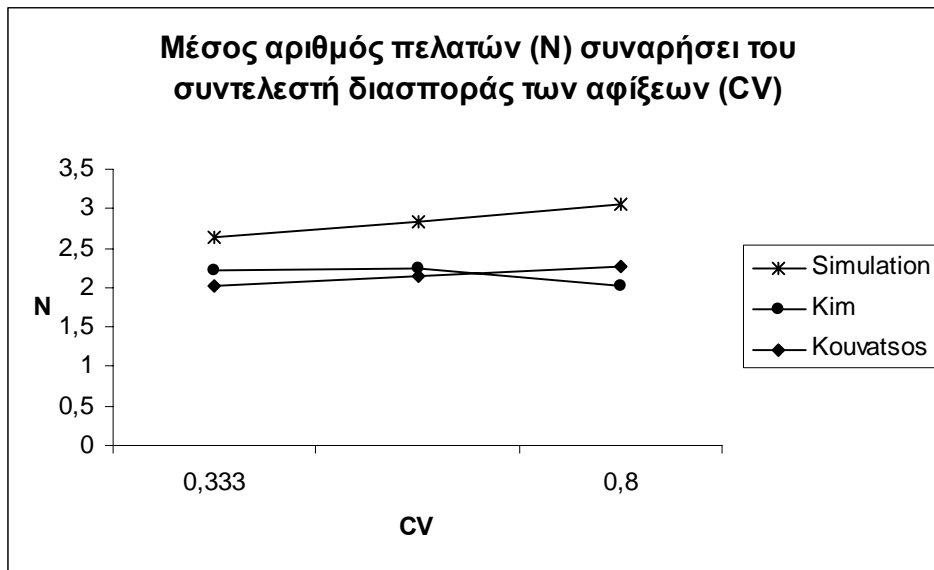
Σχήμα 3.3.3 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων αφίξεων

Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος ρυθμός παραγωγής εκτιμάται από την προσομοίωση ίσος με 0.780096. Η εκτίμηση του Kim είναι μικρότερη από την τιμή της προσομοίωσης κατά 0.00886, του Kouvatsos κατά 0.01237 και του Buzacott κατά 0.01391.

Για τιμή του **συντελεστή διασποράς (CV)** ίση με **0.8** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 0.702993. Πιο κοντά στην τιμή της προσομοίωσης βρίσκεται το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα 0.02962), ακολουθεί του Kouvatsos (σφάλμα 0.030157) και τέλος του Kim. Όπως γίνεται αντιληπτό η αύξηση του συντελεστή διασποράς από 0.333 σε 0.8 επηρέασε αρνητικά τα μοντέλα με συνέπεια ν' αυξήσουν το σφάλμα εκτίμησης τους.

Όταν ο **συντελεστής διασποράς** πάρει τιμή μεγαλύτερη της μονάδας και ίση με **1.5** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής είναι σύμφωνα με την προσομοίωση 0.679337. Το μοντέλο του Kim έχει τη μεγαλύτερη απόκλιση από την τιμή της προσομοίωσης (σφάλμα -0.03728) και είναι το μόνο από τα τρία που παρουσιάζει αύξηση στο σφάλμα εκτίμησης του σε σχέση με την προηγούμενη τιμή του συντελεστή διασποράς. Η καλύτερη εκτίμηση δίνεται από το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα -0.01996) και ακολουθεί του Kouvatsos (σφάλμα -0.02107).

Από τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι το μοντέλο του Kim εκτιμά χειρότερα το μέγεθος του TH όσο η τιμή του συντελεστή διασποράς μεγαλώνει ενώ τα υπόλοιπα δυο παρουσιάζουν μια σχετική σταθερότητα στις εκτιμήσεις τους για το εύρος τιμών του CV που εξετάστηκε με ακριβέστερο το μοντέλο του Buzacott.



Σχήμα 3.3.4 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων αφίξεων

Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος αριθμός πελατών προκύπτει από την προσομοίωση ίσος με 2.637328. Η εκτίμηση του Kim είναι μικρότερη από την τιμή της προσομοίωσης κατά 0.41517 και του Kouvatsos κατά 0.62473.

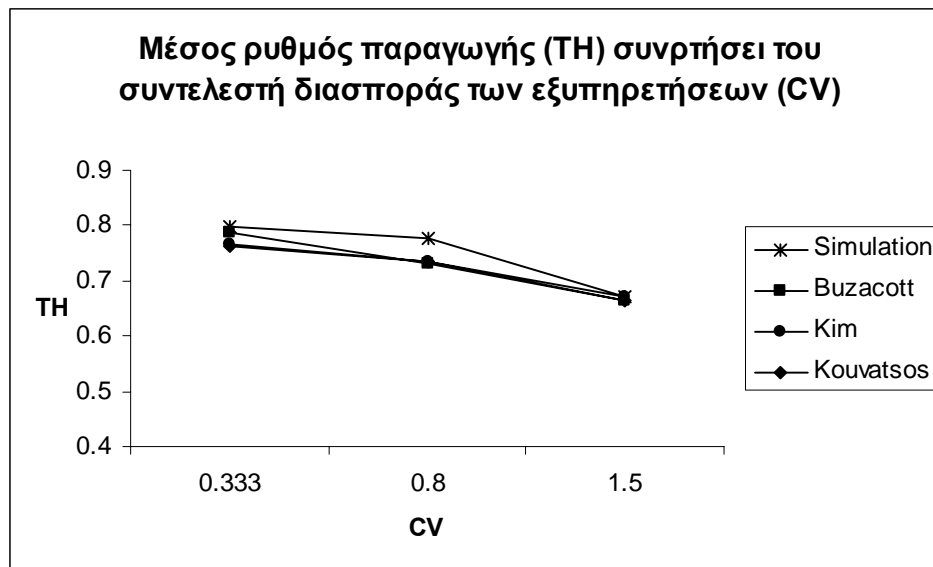
Για άνοδο του **συντελεστή διασποράς** σε **0.8** το αποτέλεσμα της προσομοίωσης για τον μέσο αριθμό πελατών είναι 2.835101. Και τα δυο μοντέλα αυξάνουν το σφάλμα εκτίμησης τους σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Αποτελεσματικότερο παραμένει αυτό του Kim που σημειώνει σφάλμα -0.60184 και έπεται του Kouvatsos με σφάλμα -0.6822.

Η περαιτέρω άνοδος της τιμής του συντελεστή διασποράς (η τιμή του γίνεται 1.5) φαίνεται πως δυσκολεύει περισσότερο τις εκτιμήσεις των μοντέλων. Έτσι για τιμή του μέσου αριθμού πελατών, όπως προκύπτει από την προσομοίωση, ίση με 3.049689 το μοντέλο του Kim παρουσιάζει σφάλμα -1.02472, που είναι και το μεγαλύτερο από τα δυο και του Kouvatsos -0.78247.

Συνολικά, οι εκτιμήσεις του μέσου αριθμού πελατών είναι λιγότερο ακριβείς από αυτές που προσφέρουν τα μοντέλα για τον μέσο ρυθμό παραγωγής. Χαρακτηριστικό τους είναι η άνοδος του σφάλματος με την άνοδο του συντελεστή διασποράς. Για τιμές του συντελεστή μέχρι και 0.8 το μοντέλο του Kim εκτιμά καλύτερα το μέγεθος ενώ για 1.5 το μοντέλο του Kouvatsos υπερισχύει.

3.3.3 Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης

Ο συντελεστής διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{εξ}$ λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 0.333, 0.8 και 1.5 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N , για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 3.3.5 και 3.3.6.



Σχήμα 3.3.5 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσεως του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων εξυπηρέτησης

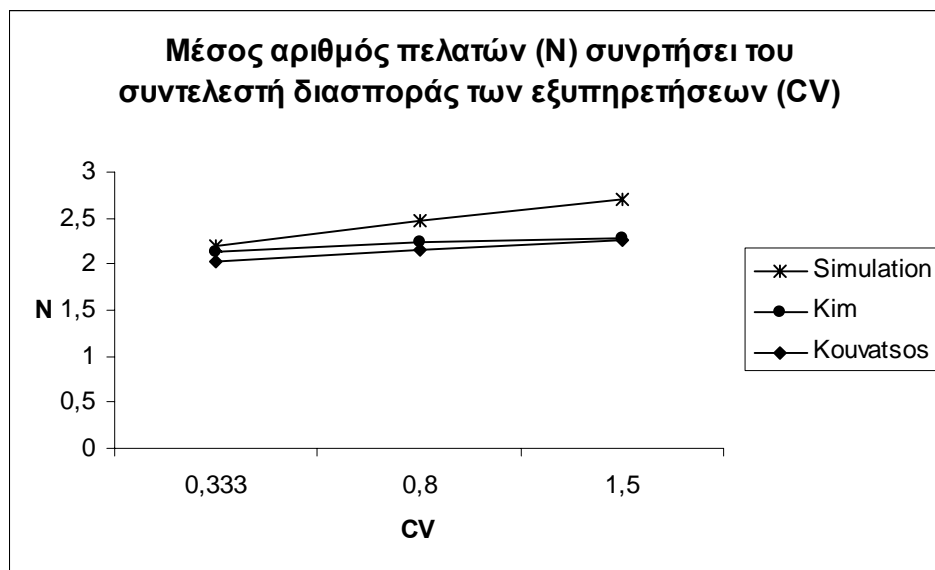
Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος ρυθμός παραγωγής εκτιμάται από την προσομοίωση ίσος με 0.796494. Η εκτίμηση του Buzacott είναι μικρότερη από την τιμή της προσομοίωσης κατά 0.00824, του Kim κατά 0.031 και του Kouvatsos κατά 0.03212.

Για τιμή του **συντελεστή διασποράς (CV)** ίση με **0.8** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 0.776266. Πιο κοντά στην τιμή της προσομοίωσης βρίσκεται το μοντέλο του Kim (σφάλμα 0.04047), ακολουθεί του Kouvatsos (σφάλμα 0.04312) και τέλος, με μικρή διαφορά από το δεύτερο του Buzacott (σφάλμα 0.04365). Όπως γίνεται αντιληπτό η αύξηση του συντελεστή διασποράς από 0.333 σε 0.8 επηρέασε αρνητικά τα μοντέλα με συνέπεια ν' αυξήσουν το σφάλμα εκτίμησης τους.

Όταν ο **συντελεστής διασποράς** πάρει τιμή μεγαλύτερη της μονάδας και ίση με **1.5** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής είναι σύμφωνα με την προσομοίωση 0.67007. Τα μοντέλα κάνουν τις εγκυρότερες εκτιμήσεις, όσον αφορά το συγκεκριμένο σετ μετρήσεων, με μικρές αποκλίσεις από την τιμή της προσομοίωσης.

Αναλυτικά, το μοντέλο του Kim παρουσιάζει σφάλμα εκτίμησης ίσο με 0.00134, είναι το μόνο από τα τρία μοντέλα που υπερεκτιμά το μέγεθος, ακολουθεί το μοντέλο του Buzacott με σφάλμα -0.00602 και τέλος του Κουβατσος με -0.00647.

Γενικά, τα μοντέλα εκτιμούν καλύτερα τον μέσο ρυθμό παραγωγής για τιμές του συντελεστή διασποράς μεγαλύτερες της μονάδας (1.5) και πολύ μικρότερες αυτής (0.333). Για ενδιάμεσες, κοντά στην μονάδα, τιμές τα μοντέλα παρουσιάζουν αύξηση του σφάλματος εκτίμησης. Το μοντέλο του Kim παρουσιάζεται καλύτερο για τις τιμές 0.8 και 1.5 ενώ για 0.333 το μοντέλο του Buzacott.



Σχήμα 3.3.6 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων εξυπηρέτησεων

Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος αριθμός πελατών προκύπτει από την προσομοίωση ίσος με 2.188703. Η εκτίμηση του Kim είναι μικρότερη από την τιμή της προσομοίωσης κατά 0.04733 και του Κουβατσος κατά 0.15567.

Για άνοδο του **συντελεστή διασποράς** σε **0.8** το αποτέλεσμα της προσομοίωσης για τον μέσο αριθμό πελατών είναι 2.464478. Και τα δυο μοντέλα αυξάνουν το σφάλμα εκτίμησης τους σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Αποτελεσματικότερο παραμένει αυτό του Kim που σημειώνει σφάλμα -0.23122 και έπειτα του Κουβατσος με σφάλμα -0.31157.

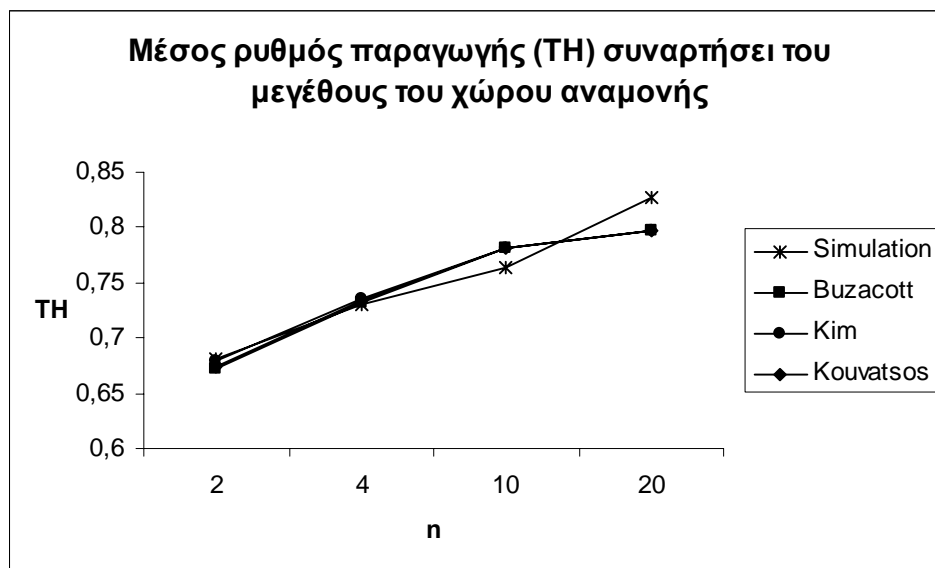
Η περαιτέρω άνοδος της τιμής του **συντελεστή διασποράς** (η τιμή του γίνεται **1.5**) φαίνεται πως δυσκολεύει περισσότερο τις εκτιμήσεις των μοντέλων. Έτσι για τιμή του μέσου αριθμού πελατών, όπως προκύπτει από την προσομοίωση, ίση με 2.70293 το

μοντέλο του Kim παρουσιάζει σφάλμα -0.41921 , και του Kounatsos -0.4408 . Το μοντέλο του Kim και σ' αυτήν την περίπτωση εκτιμά καλύτερα το μέγεθος.

Συνολικά, το σφάλμα των μοντέλων μεγαλώνει με την αύξηση της τιμής του συντελεστή διασποράς. Το μοντέλο του Kim αποτελεί το πιο ακριβές από τα δυο για όλες τις τιμές του συντελεστή διασποράς.

3.3.4 Πειράματα που μεταβάλλεται το μέγεθος του χώρου αναμονής

Το μέγεθος του χώρου αναμονής λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 2.0, 4.0, 10.0 και 20.0 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 3.3.7 και 3.3.8.



Σχήμα 3.3.7 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του μεγέθους του χώρου αναμονής (n)

Για 2 βαθμίδες αναμονής ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 0.681006 . Τα μοντέλα προσεγγίζουν με σχετική ακρίβεια το μέγεθος με κορυφαίο αυτό του Kim που σημειώνει σφάλμα -0.00096 . Ακολουθούν με αρκετή απόσταση τα μοντέλα Buzacott και Kounatsos με σφάλμα -0.00864 και -0.00792 αντίστοιχα.

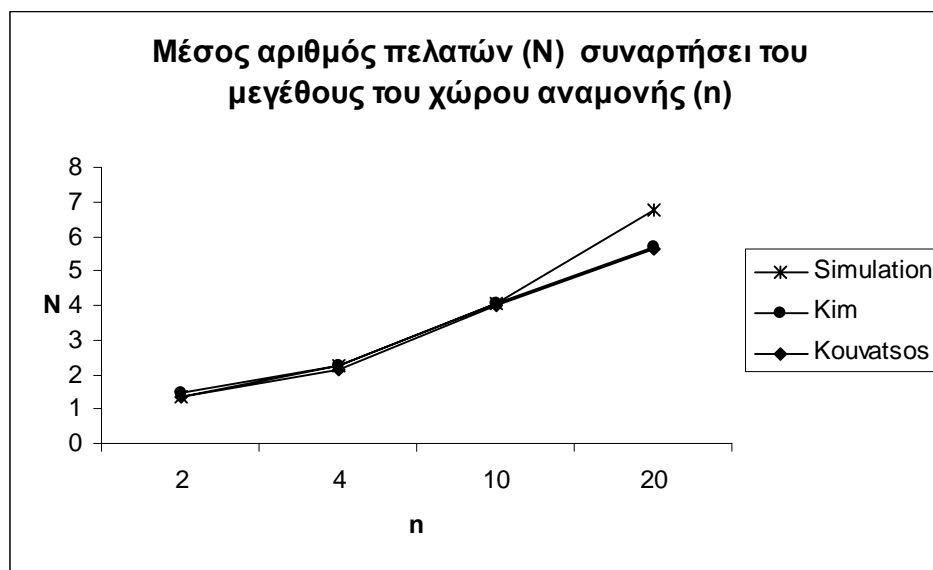
Για 4 βαθμίδες αναμονής από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 0.730114 για το μέσο ρυθμό παραγωγής. Το μοντέλο του Kim κάνει τώρα τη χειρότερη προσέγγιση από τα υπό εξέταση μοντέλα σημειώνοντας αύξηση του σφάλματος του κατ' απόλυτη τιμή ίση με 0.004722 (σφάλμα 0.005682). Τα υπόλοιπα βελτιώνουν τις προσεγγίσεις

τους, με πιο ακριβή αυτήν που γίνεται από το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα 0.002499). Το μοντέλο του Kouvatsos σημειώνει σφάλμα 0.003036.

Για 10 βαθμίδες αναμονής η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 0.7630335. Τα μοντέλα εκτιμούν με λιγότερη ακρίβεια το μέγεθος σε σχέση με τις περιπτώσεις με λιγότερες βαθμίδες που εξετάστηκαν προηγουμένως. Καλύτερο το μοντέλο του Buzacott με σφάλμα 0.018426 και με μικρή διαφορά πίσω του Kouvatsos σφάλμα 0.018673. Τελευταίο το μοντέλο του Kim με σφάλμα 0.019165.

Για 20 βαθμίδες αναμονής ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 0.826577. Οι εκτιμήσεις των μοντέλων διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους και κατατάσσονται από την πιο ακριβή στην λιγότερο όπως παρακάτω: Kim με σφάλμα -0.03, Kouvatsos με σφάλμα -0.03008 και Buzacott -0.03016.

Σε γενικές γραμμές, όσο μεγαλώνει η χωρητικότητα του συστήματος τόσο πιο ασταθή γίνονται τα μοντέλα. Πιο αξιόπιστα μπορούν να χαρακτηριστούν τα μοντέλα του Kim (καλύτερες εκτιμήσεις για $n=2$ και $n=10$) και του Kouvatsos (καλύτερες εκτιμήσεις για $n=4$ και $n=20$).



Σχήμα 3.3.8 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του μεγέθους του χώρου αναμονής (n)

Για 2 βαθμίδες αναμονής ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 1.339896. Αρκετά καλά προσεγγίζει το μέγεθος το μοντέλο του Kouvatsos που σημειώνει σφάλμα -0.022821. Το μοντέλο του Kim κάνει χειρότερη εκτίμηση με σφάλμα 0.101062.

Για 4 βαθμίδες αναμονής από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 2.265535 για τον μέσο αριθμό πελατών. Το μοντέλο του Kim ευνοείται από την αύξηση του μεγέθους του χώρου αναμονής και βελτιώνει την προσέγγιση του σημειώνοντας σφάλμα μικρότερο από την περίπτωση που το n είχε την τιμή 2 μικρότερο κατά 0.068792 κατ' απόλυτη τιμή (σφάλμα -0.03227). Το μοντέλο του Kouvatsos αντίθετα με του Kim παρουσιάζει αύξηση του σφάλματος εκτίμησης για το μοντέλο με τον μεγαλύτερο χώρο αναμονής που ισούται με 0.08982 (σφάλμα -0.11263).

Για 10 βαθμίδες αναμονής η τιμή του μέσου αριθμού πελατών δίνεται από την προσομοίωση ίση με 4.031043. Τα μοντέλα εκτιμούν με μεγαλύτερη ακρίβεια το μέγεθος σε σχέση με τις περιπτώσεις με λιγότερες βαθμίδες που εξετάστηκαν προηγουμένως. Καλύτερο το μοντέλο του Kim με σφάλμα 0.022782 . Το μοντέλο του Kouvatsos σημειώνει σφάλμα -0.04623.

Για 20 βαθμίδες αναμονής ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 6.766226. Οι εκτιμήσεις των μοντέλων παρουσιάζουν τώρα, εξαιρετικά μεγάλο σφάλμα ελαφρώς καλύτερη η εκτίμηση του Kim με σφάλμα -1.08311 έναντι -1.13329 του Kouvatsos.

Το μοντέλο του Kim εκτιμά καλύτερα τον μέσο αριθμό πελατών για τις περιπτώσεις που το μέγεθος του χώρου αναμονής έχει τις τιμές 4.0, 10.0 και 20.0 ενώ του Kouvatsos μόνο για την περίπτωση που είναι 2.0.

4 Προσεγγιστικά μοντέλα M/G/1/K



Στο Σχήμα Δ απεικονίζεται ένα μοντέλο G/G/1/K. Μια ψευδομηχανή M_0 αντιπροσωπεύει τον μηχανισμό των αφίξεων. Το σύστημα έχει συνολική χωρητικότητα K, ή αναλυτικότερα μια βαθμίδα εξυπηρέτησης και n θέσεις αναμονής. Η κατανομή εξυπηρέτησης είναι γενική. Το μέτρο που χαρακτηρίζει την κατανομή και την διαφοροποιεί από την εκθετική είναι ο συντελεστής διασποράς CV.

4.1 Εισαγωγικά

Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζονται και συγκρίνονται μαθηματικά μοντέλα, διαφορετικών συγγραφέων, που προσεγγίζουν τον μέσο ρυθμό παραγωγής και τον μέσο αριθμό πελατών σ' ένα σύστημα M/G/1/K. Αποτελεσματικότερο κρίνεται το μοντέλο του οποίου η εκτίμηση για κάποιο από τα μέτρα απόδοσης που αναφέρθηκαν, βρίσκεται πιο κοντά στην τιμή που δίνεται από το μοντέλο προσομοίωσης για το αντίστοιχο μέτρο.

4.2 Μαθηματικά μοντέλα

Gelenbe (1975) [9]

Ο συγγραφέας προτείνει ένα μοντέλο που δίνει εκτιμήσεις μόνο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής (έμμεσα) η μέθοδος που ακολουθεί βασίζεται στην προσέγγιση του συστήματος αναμονής μέσω μια συνεχούς διαδικασίας διάχυσης '*continuous diffusion process*'. Για τον μέσο ρυθμό παραγωγής δίνεται ο χαρακτηρισμός έμμεσα γιατί στην εργασία τους δεν υπάρχει τύπος που αναφέρεται στο συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης. Υπάρχει όμως εκτίμηση για την πιθανότητα που έχει το σύστημα να μπλοκάρει, από την τελευταία είναι εφικτός ο υπολογισμός του μέσου ρυθμού παραγωγής.

Πιθανότητα γεμάτου συστήματος:

$$P_K = \frac{\lambda (\mu - \lambda) \exp \frac{-2(\mu - \lambda)(k-1)}{\lambda C_a^2 + \mu C_s^2}}{\mu^2 - \lambda^2 \exp \frac{-2(\mu - \lambda)(k-1)}{\lambda C_a^2 + \mu C_s^2}}$$

Μέσος ρυθμός παραγωγής:

$$TH = \lambda (1 - P_K)$$

Kimura (1996) [10]

Το μοντέλο δίνει εκτιμήσεις μόνο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής (έμμεσα) η μέθοδος που ακολουθεί ονομάζεται *'two-moment approximation'*. Για τον μέσο ρυθμό παραγωγής δίνεται ο χαρακτηρισμός έμμεσα γιατί στην εργασία τους δεν υπάρχει τύπος που αναφέρεται στο συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης. Υπάρχει όμως εκτίμηση για την πιθανότητα που έχει το σύστημα να μπλοκάρει, από την τελευταία είναι εφικτός ο υπολογισμός του μέσου ρυθμού παραγωγής.

Πιθανότητα γεμάτου συστήματος:

$$P_K = \frac{\rho \left(\frac{2 + \sqrt{\rho C_s^2 - \sqrt{\rho} + 2K}}{2 + \sqrt{\rho C_s^2 - \sqrt{\rho}}} \right) (\rho - 1)}{\rho \left(\frac{2 + \sqrt{\rho C_s^2 - \sqrt{\rho} + 2K}}{2 + \sqrt{\rho C_s^2 - \sqrt{\rho}}} \right) - 1}$$

Μέσος ρυθμός παραγωγής:

$$TH = \lambda (1 - P_K)$$

Smith (2004) [11]

Και ο Smith όπως προηγούμενα ο Gelenbe προτείνει ένα μοντέλο που δίνει εκτιμήσεις μόνο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής (έμμεσα) η μέθοδος που ακολουθεί ονομάζεται *'two-moment approximation'*. Για τον μέσο ρυθμό παραγωγής δίνεται ο χαρακτηρισμός έμμεσα γιατί στην εργασία τους δεν υπάρχει τύπος που αναφέρεται στο συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης. Υπάρχει όμως εκτίμηση για την πιθανότητα που έχει το σύστημα να μπλοκάρει, από την τελευταία είναι εφικτός ο υπολογισμός του μέσου ρυθμού παραγωγής.

Πιθανότητα γεμάτου συστήματος:

$$P_K = \frac{\rho \left(\frac{-\sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} + 2K + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2}{2 + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2 - \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}}} \right) (\rho - 1)}{\rho \left(\frac{-\sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} + 2K + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2 + 1}{2 + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2 - \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}}} \right) - 1}$$

Μέσος ρυθμός παραγωγής:

$$TH = \lambda (1 - P_K)$$

4.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

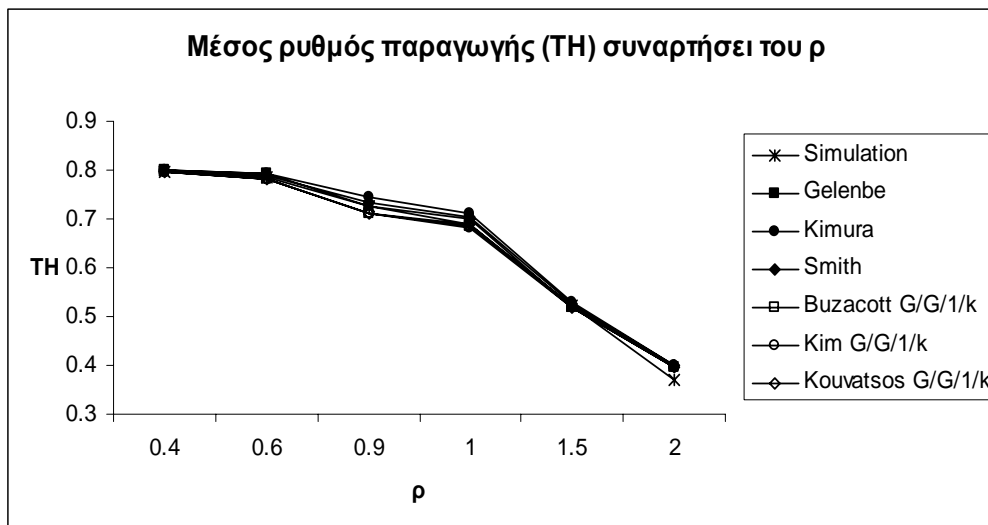
Η σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων στην παρούσα ενότητα θα γίνεται τόσο μεταξύ των μαθηματικών μοντέλων που παράγουν αποτελέσματα αποκλειστικά για συστήματα M/G/1/K (Ενότητα 3,2) όσο και αυτών που εξετάστηκαν στο Κεφάλαιο 2 και εκτιμούν τα μέτρα απόδοσης για τα γενικότερα συστήματα G/G/1K. Τα τελευταία δε, είναι τα μόνα που εκτιμούν και το μέγεθος του μέσου αριθμού πελατών.

Συνεχίζοντας, τα αριθμητικά αποτελέσματα αφορούν το μέσο ρυθμό παραγωγής TH και το μέσο αριθμό πελατών N και προκύπτουν από μια σειρά πειραμάτων όπου κάθε φορά μεταβάλλεται μια ζωτική παράμετρος του συστήματος ενώ οι άλλες παραμένουν σταθερές ως ακολούθως:

- Για μεταβλητό ρ διατηρούν σταθερές τιμές, το μέγεθος του χώρου αναμονής του συστήματος n ($n=4$), ο συντελεστής διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{εξ}$ ($CV_{εξ}=0.8$).
- Για μεταβλητό συντελεστή διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{εξ}$ διατηρούν σταθερές τιμές, η χωρητικότητα του συστήματος n ($n=4$) και το ρ ($\rho=0.9$).
- Για μεταβλητό μέγεθος του χώρου αναμονής n διατηρούν σταθερές τιμές, ο συντελεστής διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{εξ}$ ($CV_{εξ}=0.8$), και το ρ ($\rho=0.9$).

4.3.1 Πειράματα με μεταβλητό ρ

Το ρ λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 0.4, 0.6, 0.9, 1.0, 1.5 και 2.0 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 4.3.1 και 4.3.2.



Σχήμα 4.3.1 Μέσος ρυθμός παραγωγής συναρτήσει του ρ

Για ρ ίσο με 0.4 ο ρυθμός παραγωγής (TH) που προκύπτει από την προσομοίωση είναι ίσος με 0.794784. Καλύτερες εκτιμήσεις δίνουν τα μοντέλα του Κεφαλαίου 2 (Buzacott, Kim, Kouvatsos) και μάλιστα σημειώνουν το ίδιο ακριβώς σφάλμα (0.00221). Τα υπόλοιπα τρία κατατάσσονται από το πιο ακριβές στο λιγότερο ως εξής : Smith (σφάλμα 0.00356), Kimura (σφάλμα 0.00453), και Gelenbe (σφάλμα 0.00470).

Για ρ ίσο με 0.6 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής μειώνεται στο 0.783435. Το σφάλμα εκτίμησης των M/G/1/K μοντέλων αυξάνει σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση ($\rho=0.4$), ενώ η κατάταξη τους από το πιο ακριβές στο λιγότερο αλλάζει όπως φαίνεται παρακάτω. Το μικρότερο σφάλμα παρουσιάζει το μοντέλο του Smith 0.00511, ακολουθεί του Gelenbe (σφάλμα 0.00836) και τέλος του Kimura (σφάλμα 0.009469). Τα παραπάνω μαθηματικά μοντέλα υπερεκτιμούν το μέγεθος του μέσου ρυθμού παραγωγής σε αντίθεση με αυτά των Buzacott, Kim, Kouvatsos . Τα τελευταία δίνουν και σ' αυτήν την περίπτωση τα καλύτερα αποτελέσματα μειώνοντας μάλιστα το σφάλμα, κατ' απόλυτη τιμή, κατά 0.00037 (σφάλμα -0.00184).

Για ρ ίσο με 0.9 η τιμή της προσομοίωσης που αφορά τον μέσο ρυθμό παραγωγής υπολογίζεται τώρα ίση με 0.725779. Αντίθετα με τις προηγούμενες περιπτώσεις τα G/G/1/K μοντέλα σημειώνουν αύξηση του σφάλματος τους (σφάλμα -0.013) και κατατάσσονται προτελευταία, πριν από το μοντέλο του Kimura (σφάλμα 0.017468) στο γενικό σύνολο των μοντέλων. Καλύτερα προσεγγίζει το μέγεθος το μοντέλο του Gelenbe με σφάλμα 0.00152, και ακολουθεί αυτό του Smith με σφάλμα 0.008199.

Για ρ ίσο με 1.0 η εκτίμηση της προσομοίωσης για το μέσο ρυθμό παραγωγής προκύπτει ίση με 0.689297. Τα αποτελέσματα των G/G/1/K μοντέλων βρίσκονται πιο κοντά στην τιμή της προσομοίωσης σε αντίθεση με τ' αποτελέσματα των M/G/1/K.

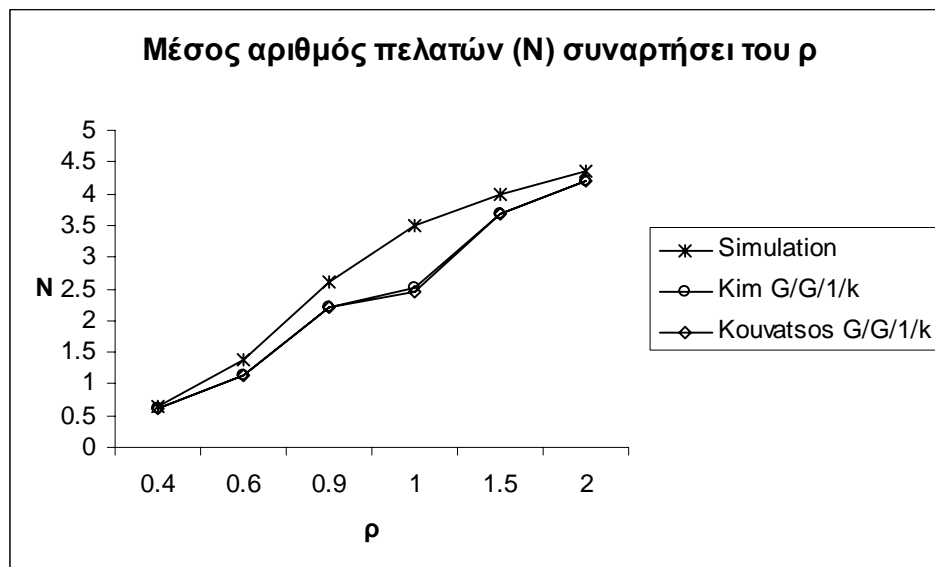
Αξιο αναφοράς το γεγονός ότι τα μοντέλα G/G/1/K για πρώτη φορά δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα μεταξύ τους, με αποτέλεσμα την παρακάτω κατάταξη:

Κουνατσός με σφάλμα -0.00152, Buzacott με σφάλμα -0.00561 και Kim με σφάλμα -0.00828. Ακολουθούν τα M/G/1/K μοντέλα με καλύτερο του Gelenbe που παρουσιάζει σφάλμα 0.010945 μετά του Smith με σφάλμα 0.013665 και τέλος του Kimura με σφάλμα 0.022394.

Για ρ ίσο με 1.5 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής που προκύπτει από την προσομοίωση είναι 0.521166. Για την συγκεκριμένη τιμή του ρ οι εκτιμήσεις όλων των μοντέλων εμφανίζονται πιο ακριβείς. Η καλύτερη εκτίμηση γίνεται από το μοντέλο του Buzacott με σφάλμα 0.002697 ακολουθεί του Gelenbe με σφάλμα -0.00355 και έπονται με μικρή διαφορά από του Gelenbe και ελάχιστη μεταξύ τους τα μοντέλα των Kim και Κουνατσός με σφάλμα -0.00363 και -0.00367 αντίστοιχα. Στις τελευταίες θέσεις τα μοντέλα του Smith (σφάλμα 0.005587) και του Kimura (σφάλμα 0.007122).

Για ρ ίσο με 2.0 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής που προκύπτει από την προσομοίωση είναι 0.37013. Τα μοντέλα στο σύνολο τους υπερεκτιμούν το μέγεθος και δίνουν χειρότερα αποτελέσματα σε σχέση με την περίπτωση που το ρ ήταν 1.5. Κορυφαίο το μοντέλο του Gelenbe (σφάλμα -0.026222) ακολουθεί του Buzacott (σφάλμα -0.026856), συνεχίζουν τα μοντέλα των Kim και Κουνατσός οι εκτιμήσεις των οποίων ταυτίζονται και παρουσιάζουν σφάλμα 0.027537. Στις τελευταίες θέσεις, ακόμα μια φορά τα μοντέλα του Smith (σφάλμα 0.02953) και του Kimura (σφάλμα 0.029609).

Η συμπεριφορά των μοντέλων σε σχέση με το ρ δεν μπορεί να ενταχθεί εύκολα και απόλυτα σε κάποιο κανόνα, αυτό που μπορεί να εξαχθεί σαν γενικό συμπέρασμα είναι ότι τα μοντέλα των Gelenbe και Buzacott παρουσιάζουν μεγαλύτερη σταθερότητα από τα υπόλοιπα.



Σχήμα 4.3.2 Μέσος αριθμός πελατών συναρτήσει του ρ

Για ρ ίσο με 0.4 ο μέσος αριθμός πελατών (N) που προκύπτει από την προσομοίωση είναι ίσος με 0.64756 . Τα δυο εξεταζόμενα μοντέλα παρουσιάζουν ακριβώς το ίδιο σφάλμα που έχει τιμή -0.04328.

Για ρ ίσο με 0.6 η τιμή του μέσου αριθμού πελατών προκύπτει από την προσομοίωση ίση με 1.382509. Και σ' αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει η παραμικρή διαφοροποίηση μεταξύ των αποτελεσμάτων των μοντέλων τα οποία υπολογίζουν τον μέσο ρυθμό παραγωγής κατά 0.24094 μειωμένο.

Για ρ ίσο με 0.9 η τιμή του μέσου αριθμού πελατών που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης ισούται με 2.6188333. Όπως και παραπάνω οι εκτιμήσεις των δυο μοντέλων είναι ίδιες .Η τιμή του σφάλματος για την παρούσα περίπτωση είναι ίση με -0.42179.

Για ρ ίσο με 1.0 η τιμή του μέσου αριθμού πελατών που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης ισούται με 3.506023. Εδώ οι εκτιμήσεις των μοντέλων προκύπτουν διαφορετικές δείχνοντας το μοντέλο του Kim (σφάλμα -0.98037) ελαφρώς καλύτερο από του Kouvatsos (σφάλμα -1.04596).

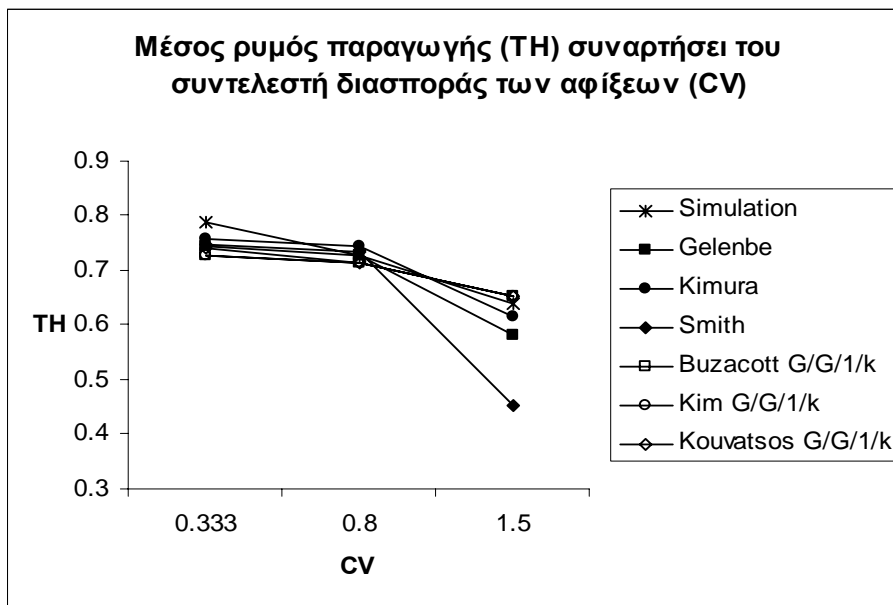
Για ρ ίσο με 1.5 η εκτίμηση της προσομοίωσης για το μέσο ρυθμό παραγωγής προκύπτει ίση με 3.981337. Βελτιωμένες εμφανίζονται οι εκτιμήσεις και ελαφρώς διαφορετικές. Αυτή τη φορά του Kouvatsos κάνει την καλύτερη προσέγγιση με σφάλμα -0.29597, ελαφρώς μικρότερο από το -0.29619 που αντιστοιχεί στο μοντέλο του Kim.

Για ρ ίσο με 2.0 τα δυο μοντέλα παρουσιάζουν πάλι τα ίδια αποτελέσματα. Η εκτίμηση τους για τον μέσο αριθμό πελατών απέχει 0.14018 λιγότερο απ' αυτήν που δίνεται από την προσομοίωση και είναι ίση με 4.352026 .

Τα δυο μοντέλα δεν διαφέρουν ουσιαστικά μεταξύ τους . Μοιράζονται από μια καλύτερη εκτίμηση, για $\rho=1.0$ του Kim και για $\rho=1.5$ του Kouvatsos, και για τις υπόλοιπες τιμές δεν παρουσιάζουν καμία διαφορά. Συνολικά οι εκτιμήσεις του μέσου αριθμού πελατών παρουσιάζουν μεγαλύτερο σφάλμα καθώς το ρ ανέρχεται από 0.4 σε 1.0, ενώ ισχύει το αντίθετο για το διάστημα από 1.5 ως και 2.0.

4.3.2 Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης

Ο συντελεστής διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{εξ}$ λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 0.333, 0.8 και 1.5 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N , για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 4.3.3 και 4.3.4.



Σχήμα 4.3.3 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων εξυπηρέτησης

Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος ρυθμός παραγωγής εκτιμάται από την προσομοίωση ίσος με 0.786513. Η εκτίμηση του μοντέλου του Buzacott ταυτίζεται με αυτήν που προκύπτει από το μοντέλο του Kim παρουσιάζοντας σφάλμα -0.05816.

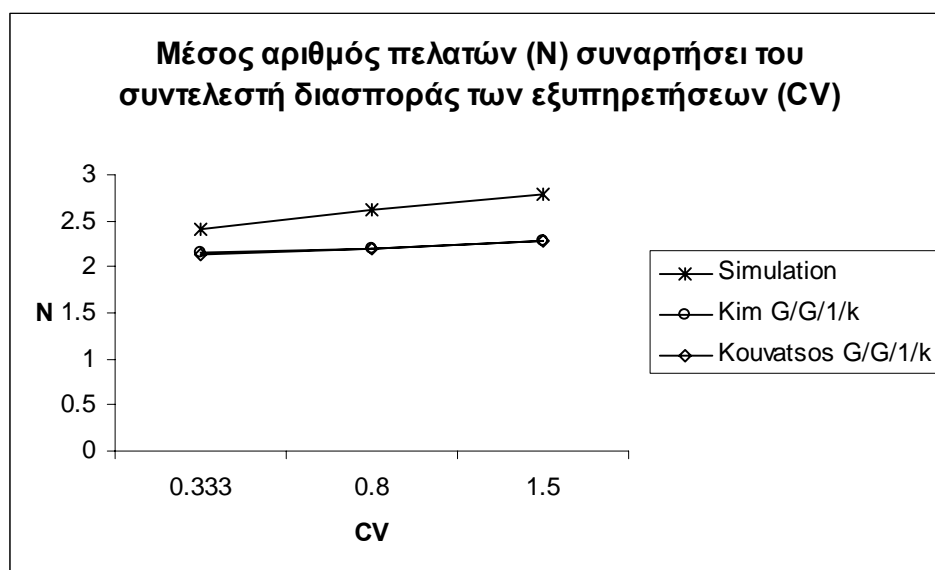
Η τιμή αυτή του σφάλματος είναι και η μεγαλύτερη που παρατηρείται στο σύνολο των αποτελεσμάτων για συντελεστή διασποράς ίσο με 0.333. Μεγαλύτερη ακρίβεια παρουσιάζει στην εκτίμηση του το μοντέλο του Kimura, που σημειώνει σφάλμα -0.02945. Με μικρή διαφορά μεταξύ τους ακολουθούν τα μοντέλα του Gelenbe και του Kimura με σφάλμα -0.04099 και -0.04068 αντίστοιχα. Το μοντέλο του Kouvatsos σημειώνει σφάλμα -0.04594. Όπως φαίνεται λοιπόν τα M/G/1/K μοντέλα υπερτερούν των αντίστοιχων G/G/1/K για συντελεστή διασποράς των αφίξεων πολύ μικρότερο της μονάδας.

Για τιμή του **συντελεστή διασποράς (CV)** ίση με **0.8** η τιμή της προσομοίωσης που αφορά τον μέσο ρυθμό παραγωγής υπολογίζεται τώρα ίση με 0.725779. Πλήρης ταύτιση παρατηρείται στ' αποτελέσματα των G/G/1/K μοντέλων, η εκτίμηση τους παρουσιάζει σφάλμα -0.013 με αποτέλεσμα να κατατάσσονται προτελευταία, πριν από το μοντέλο του Kimura (σφάλμα 0.017468) στο γενικό σύνολο των μοντέλων. Καλύτερα προσεγγίζει το μέγεθος το μοντέλο του Gelenbe με σφάλμα 0.00152, και ακολουθεί αυτό του Smith με σφάλμα 0.008199.

Όταν ο **συντελεστής διασποράς** πάρει τιμή μεγαλύτερη της μονάδας και ίση με **1.5** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής είναι σύμφωνα με την προσομοίωση 0.63801. Τα G/G/1/K (Buzacott, Kim, Kouvatsos) μοντέλα κάνουν τις εγκυρότερες εκτιμήσεις, όσων

αφορά το συγκεκριμένο σει μετρήσεων, και υπολογίζουν την τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής κατά 0.012871 μεγαλύτερη από αυτήν που προκύπτει από την προσομοίωση. Σημειώνεται η ταύτιση των αποτελεσμάτων του για ακόμα μια φορά. Το μοντέλο του Kimura σφάλει κατά -0.02369 στην εκτίμηση του και αυτό του Gelenbe κατά -0.05616. Η χειρότερη προσέγγιση, με διαφορά, ανήκει στο μοντέλο του Smith με σφάλμα -0.18608.

Σε γενικές γραμμές τα μοντέλα M/G/1/K και ειδικότερα του Gelenbe υπερτερούν των αντίστοιχων G/G/1/K όσο ο συντελεστής διασποράς των αφίξεων έχει τιμές μικρότερες της μονάδας. Για τιμές μεγαλύτερες του ένα τα G/G/1/K ανεξαιρέτως μοντέλου ενδείκνυνται για τον υπολογισμό του μέσου ρυθμού παραγωγής.



Σχήμα 4.3.4 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων εξυπηρετήσεων

Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος αριθμός πελατών προκύπτει από την προσομοίωση ίσος με 2.408197. Η εκτίμηση του Kim είναι μικρότερη από την τιμή της προσομοίωσης κατά 0.2434 και του Kouvatsos, ελαφρώς χειρότερη της πρώτης, κατά 0.27614.

Για άνοδο του **συντελεστή διασποράς** σε **0.8** το αποτέλεσμα της προσομοίωσης για τον μέσο αριθμό πελατών είναι η τιμή του μέσου αριθμού πελατών που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης ισούται με 2.6188333. Οι εκτιμήσεις των δυο μοντέλων ταυτίζονται και η τιμή του σφάλματος για την παρούσα περίπτωση είναι ίση με -0.42179.

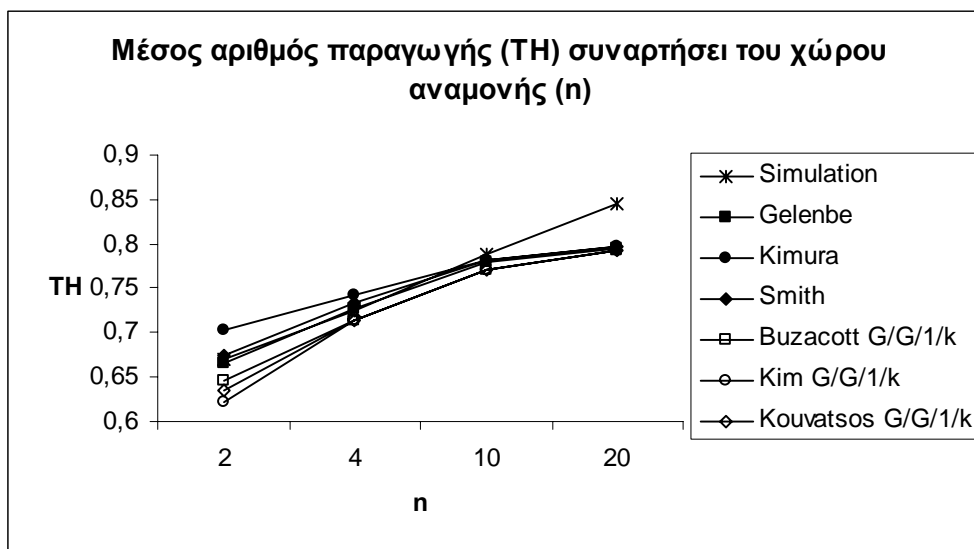
Η περαιτέρω άνοδος της τιμής του **συντελεστή διασποράς** (η τιμή του γίνεται **1.5**) η τιμή του μέσου αριθμού πελατών που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης ισούται με 2.798109. Και σ' αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει η παραμικρή

διαφοροποίηση μεταξύ των αποτελεσμάτων των μοντέλων τα οποία υπολογίζουν τον μέσο ρυθμό παραγωγής κατά 0.52428 μειωμένο σε σχέση με την τιμή της προσομοίωσης.

Συνολικά, το σφάλμα των μοντέλων μεγαλώνει με την αύξηση της τιμής του συντελεστή διασποράς. Το μοντέλο του Kim υπερτερεί του μοντέλου του Kouvatsos στην περίπτωση που ο συντελεστή διασποράς έχει τιμή 0.333. Σε κάθε άλλη περίπτωση η απόδοση των μοντέλων είναι η ίδια.

4.3.3 Πειράματα που μεταβάλλεται το μέγεθος του χώρου αναμονής

Το μέγεθος του χώρου αναμονής λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 2.0, 4.0, 10.0 και 20.0 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 4.3.5 και 4.3.6.



Σχήμα 4.3.5 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του μεγέθους του χώρου αναμονής (n)

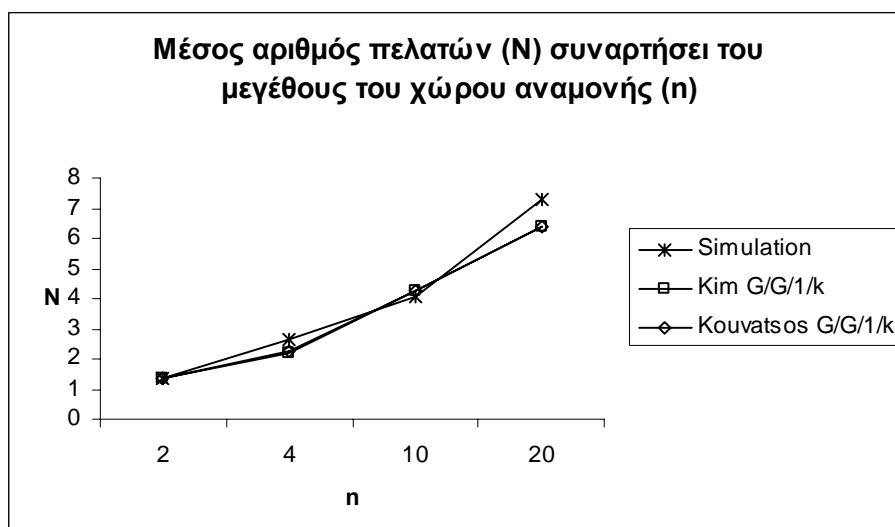
Για 2 βαθμίδες αναμονής ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 0.671046. Η καλύτερη εκτίμηση προκύπτει από το μοντέλο Smith που υπολογίζει τον μέσο ρυθμό παράγωγής με σφάλμα 0.002329. Η δεύτερη καλύτερη δίνεται από το μοντέλο του Gelenbe με σφάλμα -0.00568. Με μεγάλη διαφορά από τις δυο πρώτες οι υπόλοιπες προσεγγίσεις διατάσσονται όπως παρακάτω (από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο σφάλμα): Buzacott με σφάλμα -0.02937, Kimura με σφάλμα 0.031816, Kouvatsos με σφάλμα -0.03525 και Kim με σφάλμα -0.05005.

Για 4 βαθμίδες αναμονής η τιμή της προσομοίωσης που αφορά τον μέσο ρυθμό παραγωγής υπολογίζεται τώρα ίση με 0.725779. Πλήρης ταύτιση παρατηρείται στ' αποτελέσματα των G/G/1/K μοντέλων, η εκτίμηση τους παρουσιάζει σφάλμα -0.013 με αποτέλεσμα να κατατάσσονται προτελευταία, πριν από το μοντέλο του Kimura (σφάλμα 0.017468) στο γενικό σύνολο των μοντέλων. Καλύτερα προσεγγίζει το μέγεθος το μοντέλο του Gelenbe με σφάλμα 0.00152, και ακολουθεί αυτό του Smith με σφάλμα 0.008199.

Για 10 βαθμίδες αναμονής η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 0.789125. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση τ' αποτελέσματα των G/G/1/K μοντέλων δεν παρουσιάζουν καμία διαφοροποίηση μεταξύ τους, το σφάλμα εκτίμησης τους είναι ίσο με -0.01745 με αποτέλεσμα να κατατάσσονται στην τελευταία θέση όσον αφορά την εγκυρότητα προσέγγισης του μέσου ρυθμού παραγωγής. Μπροστά τους σ' αυτήν την κατάταξη βρίσκεται το μοντέλο του Gelenbe που σημειώνει σφάλμα -0.01016. Στην κορυφή με ελάχιστη διαφορά μεταξύ τους βρίσκονται τα μοντέλα του Kimura (σφάλμα -0.0063) και μετά του Smith (σφάλμα 0.00639).

Για 20 βαθμίδες αναμονής ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 0.845178. Πλήρης ταύτιση παρατηρείται στ' αποτελέσματα των G/G/1/K μοντέλων κι εδώ, η εκτίμηση τους παρουσιάζει σφάλμα -0.5239. Καλύτερες οι εκτιμήσεις των μοντέλων M/G/1/K για ακόμα μια φορά ακολουθούν την εξής διάταξη: Smith (σφάλμα -0.04818), Kimura (σφάλμα -0.04864), Gelenbe (σφάλμα -0.0496).

Τα μοντέλα M/G/1/K προσφέρουν μετρήσεις του μέσου ρυθμού παραγωγής με μεγαλύτερη ακρίβεια από τα G/G/1/K σχεδόν για όλες τις περιπτώσεις μεγέθους του χώρου αναμονής που εξετάζονται. Απ' αυτά ξεχωρίζουν τα μοντέλα του Gelenbe και κυρίως του Kimura.



Σχήμα 4.3.6 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του μεγέθους του χώρου αναμονής (n)

Για 2 βαθμίδες αναμονής ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 1.35825. Αρκετά καλά προσεγγίζει το μέγεθος το μοντέλο του Kim που σημειώνει σφάλμα -0.015813 ενώ απειροελάχιστη είναι η διαφορά του μοντέλου του Kounatsos που παρουσιάζει σφάλμα 0.015817.

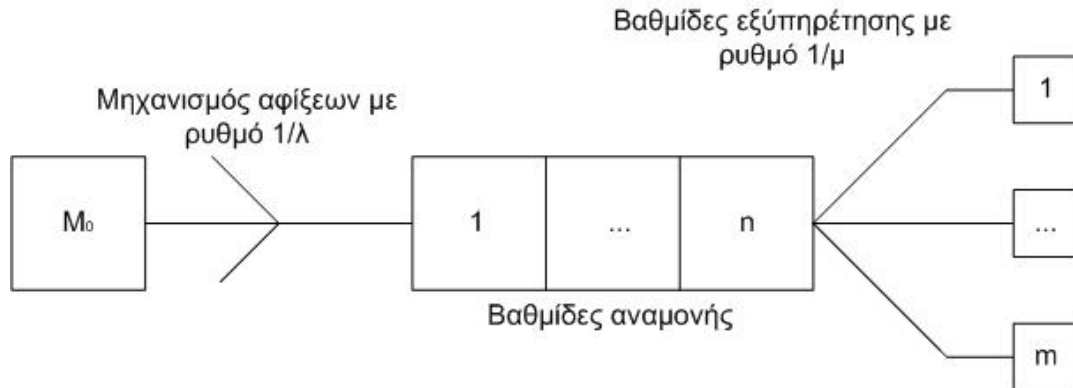
Για 4 βαθμίδες αναμονής από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 2.618833 για τον μέσο αριθμό πελατών. Και τα δυο μοντέλα παρουσιάζουν αύξηση του σφάλματος εκτίμησης. Το γεγονός αυτό επηρεάζει τη μεταξύ τους κατάταξη και δείχνει έτσι καλύτερο του Kounatsos (σφάλμα -0.35883) μπροστά από του Kim που σημειώνει σφάλμα -0.42179.

Για 10 βαθμίδες αναμονής η τιμή του μέσου αριθμού πελατών δίνεται από την προσομοίωση ίση με 4.053523. Τα δυο εξεταζόμενα μοντέλα παρουσιάζουν ακριβώς το ίδιο σφάλμα που έχει τιμή -0.182559, σαφώς μειωμένη σε σχέση μ' εκείνη που παρατηρήθηκε για 4 βαθμίδες αναμονής..

Για 20 βαθμίδες αναμονής ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 7.293294. Τα δυο εξεταζόμενα μοντέλα παρουσιάζουν και πάλι το ίδιο σφάλμα αυξημένο κατ' απόλυτη τιμή, σε σχέση την αμέσως προηγούμενη περίπτωση (n=10), κατά 0.69775 (σφάλμα -0.88334).

Το μοντέλο του Kim εκτιμά καλύτερα τον μέσο αριθμό πελατών για τις περιπτώσεις που το μέγεθος του χώρου αναμονής έχει την τιμή 2.0 ενώ του Kounatsos για την περίπτωση που είναι 4.0, στις υπόλοιπες περιπτώσεις οι μετρήσεις τους δεν διαφέρουν.

5 Προσεγγιστικά μοντέλα G/G/m/K



Σχήμα Ε Σύστημα G/G/m/K

Στο Σχήμα Ε απεικονίζεται ένα μοντέλο G/G/m/K. Μια ψευδομηχανή M_0 αντιπροσωπεύει τον μηχανισμό των αφίξεων. Το σύστημα έχει συνολική χωρητικότητα K , ή αναλυτικότερα m βαθμίδες εξυπηρέτησης και n θέσεις αναμονής. Οι κατανομές αφίξεων και εξυπηρέτησεων είναι γενικές. Το μέτρο που χαρακτηρίζει την κατανομή και την διαφοροποιεί από την εκθετική είναι ο συντελεστής διασποράς CV.

5.1 Εισαγωγικά

Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζονται και συγκρίνονται μαθηματικά μοντέλα, διαφορετικών συγγραφέων, που προσεγγίζουν τον μέσο ρυθμό παραγωγής και τον μέσο αριθμό πελατών σ' ένα σύστημα G/G/m/K. Αποτελεσματικότερο κρίνεται το μοντέλο του οποίου η εκτίμηση για κάποιο από τα μέτρα απόδοσης που αναφέρθηκαν, βρίσκεται πιο κοντά στην τιμή που δίνεται από το μοντέλο προσομοίωσης για το αντίστοιχο μέτρο.

5.2 Μαθηματικά μοντέλα

Yao- Buzacott (1984) [12,13]

Οι συγγραφείς προτείνουν εκτιμήσεις τόσο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής όσο και για τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα ακολουθώντας μια μέθοδο ανάλυσης διάχυσης 'diffusion process with two boundaries'. Για λόγους συντομίας το μοντέλο θα ονομάζεται μοντέλο Buzacott.

Μέσος ρυθμός παραγωγής:

$$TH = \mu BS$$

Μέσος αριθμός πελατών:

$$N = \pi_0 \left[\left(\frac{h_0}{\beta_1} \right) \left(\gamma_1 - \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{K-1} \zeta_i (\gamma_i - \gamma_{i+1}) (i - \gamma_i - \gamma_{i+1}) \right) + \pi_K \left[\left(\frac{h_K}{\beta_K} \right) \left(K - \gamma_K - \frac{1}{2} \right) + K \right] \right]$$

όπου

$$BS = \int_0^{m-1+\Delta} x f(x) dx + m(1 - P_{id}), \quad \Delta = \frac{(m-1)}{(K-1)}$$

$$P_{id} = \pi_0 \left[1 - \frac{h_0}{\beta_1} + \sum_{i=1}^{m-1} \zeta_i (\gamma_i - \gamma_{i+1}) + \zeta_{m-1} \gamma_m \exp\left(\frac{\Delta}{\gamma_m} \right) \right]$$

$$\pi_0 = \left[1 - \left(\frac{h_0}{\beta_1} \right) + \zeta_K \left(\frac{1 + \frac{\beta_K}{h_K}}{\exp(\gamma_K^{-1}) - 1} \right) \left(\sum_{i=1}^{K-1} \zeta_i (\gamma_i - \gamma_{i+1}) (i - \gamma_i - \gamma_{i+1}) \right) \right]^{-1}$$

$$\pi_K = \frac{\pi_0 \beta_K \zeta_K}{h_K (\exp(\gamma_K^{-1}) - 1)}$$

$$\zeta_{i+1} = \zeta_i \exp(\gamma_{i+1}^{-1}) \text{ για } (i=1, \dots, K-1), \quad \zeta_1 = \frac{h_0}{\beta_1} (\exp(\gamma_1^{-1}) - 1)$$

$$\gamma_i \equiv \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \text{ για } (i=1, \dots, K), \quad h_K = \frac{2\mu(K)}{S(K) + 1}, \quad h_0 = \frac{2\lambda(0)}{A(0) + 1}$$

$\lambda(i) = \lambda q$ όπου $0 < q < 1$, ισχύει για $i \geq m$ διαφορετικά η τιμή του μένει ίδια και ίση με λ .

$A(i) = qC \frac{2}{\alpha} + (1 - q)$ όπου $0 < q < 1$, ισχύει για $i \geq m$ διαφορετικά η τιμή του μένει ίδια και ίση με $C \frac{2}{\alpha}$.

$$\mu(i) = \mu \min(i, m) \text{ και } S(i) = \frac{1 + (C \frac{2}{\alpha} - 1)}{\min(i, m)}$$

$$\beta_i = \lambda(i) - \mu(i) \text{ και } \alpha_i = \lambda(i) A(i) - \mu(i) S(i)$$

Choi-Kim-Chae (2003) [14]

Οι συγγραφείς δίνουν εκτίμηση μόνο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής (έμμεσα) ακολουθώντας μια μέθοδο που εκείνοι ονομάζουν '*decomposed Little's formula*'. Για τον μέσο ρυθμό παραγωγής δίνεται ο χαρακτηρισμός έμμεσα γιατί στην εργασία τους δεν υπάρχει τύπος που αναφέρεται στο συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης. Υπάρχει όμως εκτίμηση για την πιθανότητα που έχει το σύστημα να μπλοκάρει, από την τελευταία είναι εφικτός ο υπολογισμός του μέσου ρυθμού παραγωγής. Για λόγους συντομίας το μοντέλο θα ονομάζεται μοντέλο Kim.

Πιθανότητα γεμάτου συστήματος:

$$P_K^A = \hat{P}_0 \frac{\Phi^n}{m! \alpha(\alpha_R)^{m-1}} \prod_{i=1}^m [b - i(\alpha - \alpha_R)]$$

Μέσος ρυθμός παραγωγής:

$$TH = \lambda (1 - P_K^A)$$

$$\Phi = \frac{b_R - m(\alpha - \alpha_R)}{m\alpha_R + b_R - b} = \frac{C_A^2 + \rho C_S^2 - (1 - \rho)}{C_A^2 + \rho C_S^2 + (1 - \rho)}, \quad \rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

$$\hat{P}_0^A = \left[\sum_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^i \frac{b - j(\alpha - \alpha_R)}{j\alpha_R} + \frac{1 - \rho \Phi^n}{1 - \rho} (\lambda\alpha_R - 1 + \rho) \prod_{j=1}^{m-1} \frac{b - j(\alpha - \alpha_R)}{j\alpha_R} \right]^{-1}, \rho \neq 1$$

$$\hat{P}_0^A = \left[\sum_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^i \frac{b - j(\alpha - \alpha_R)}{j\alpha_R} + \frac{m\alpha_R}{m\alpha_R + b_R - b} \left[n + \frac{b_R - m(\alpha - \alpha_R)}{m\alpha} \right] \prod_{j=1}^{m-1} \frac{b - j(\alpha - \alpha_R)}{j\alpha_R} \right]^{-1}, \rho = 1$$

Whitt (2003) [15]

Το μοντέλο που προτείνεται δίνει εκτίμηση μόνο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής (έμμεσα) ακολουθώντας μια μέθοδο διάχυσης '*diffusion approximation*'. Για τον μέσο ρυθμό παραγωγής δίνεται ο χαρακτηρισμός έμμεσα γιατί στην εργασία τους δεν υπάρχει τύπος που αναφέρεται στο συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης. Υπάρχει όμως εκτίμηση για την πιθανότητα που έχει το σύστημα να μπλοκάρει, από την τελευταία είναι εφικτός ο υπολογισμός του μέσου ρυθμού παραγωγής.

Πιθανότητα γεμάτου συστήματος:

$$P_K = \frac{\sqrt{m\Gamma_Q}}{\lambda}$$

Μέσος ρυθμός παραγωγής:

$$TH = \lambda (1 - P_K)$$

όπου

$$r_Q = \frac{f_{Q\infty} \sigma^2 Q(k)}{2}, f_{Q\infty} = \frac{\alpha \beta \exp^{-k\beta/\nu}}{\nu(1 - \exp^{-k\beta/\nu})}, k = \frac{n}{\sqrt{m}}$$

$\alpha = \left[1 + \frac{\beta \Phi(\beta)}{\phi(\beta)} \right]^{-1}$, όπου Φ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής με μέση τιμή μηδέν και διασπορά ένα.

$$\beta = \frac{\sqrt{m}}{1-\rho}, \rho = \frac{\lambda}{m\mu}, \nu = \frac{C_a^2 + WC_S^2 + 1 - W}{2}, W = \frac{1}{1+4\beta^2}$$

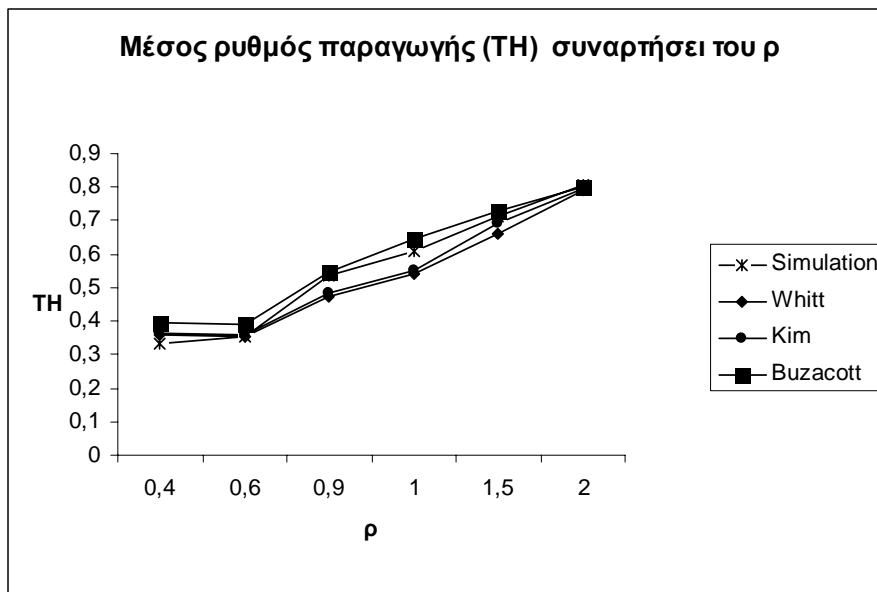
5.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

Τα αριθμητικά αποτελέσματα αφορούν το μέσο ρυθμό παραγωγής TH και το μέσο αριθμό πελατών N και προκύπτουν από μια σειρά πειραμάτων όπου κάθε φορά μεταβάλλεται μια ζωτική παράμετρος του συστήματος ενώ οι άλλες παραμένουν σταθερές ως ακολούθως:

- Για μεταβλητό ρ διατηρούν σταθερές τιμές, το μέγεθος του χώρου αναμονής του συστήματος n ($n=4$), ο αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης m ($m=5$), οι συντελεστές διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ και των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$ και $CV_{\epsilon\xi}=0.8$).
- Για μεταβλητό συντελεστή διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ διατηρούν σταθερές τιμές, το μέγεθος του χώρου αναμονής του συστήματος n ($n=4$), ο αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης m ($m=5$), ο συντελεστής διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ ($CV_{\epsilon\xi}=0.8$) και το ρ ($\rho=0.9$).
- Για μεταβλητό συντελεστή διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ διατηρούν σταθερές τιμές, το μέγεθος του χώρου αναμονής n ($n=4$), ο αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης m ($m=5$), ο συντελεστής διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$) και το ρ ($\rho=0.9$).
- Για μεταβλητό μέγεθος του χώρου αναμονής n διατηρούν σταθερές τιμές, οι συντελεστές διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ και των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$ και $CV_{\epsilon\xi}=0.8$), ο αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης m ($m=5$), και το ρ ($\rho=0.9$).
- Για μεταβλητό αριθμό βαθμίδων εξυπηρέτησης διατηρούν σταθερές τιμές, οι συντελεστές διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ και των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$ και $CV_{\epsilon\xi}=0.8$), το μέγεθος του χώρου αναμονής n ($n=4$) και το ρ ($\rho=0.9$).

5.3.1 Πειράματα με μεταβλητό ρ

Το ρ λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 0.4, 0.6, 0.9, 1.0, 1.5 και 2.0 και τ^* αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 5.3.1 και 5.3.2.



Σχήμα 5.3.1 Μέσος ρυθμός παραγωγής συναρτήσει του ρ

Για ρ ίσο με 0.4 ο ρυθμός παραγωγής (TH) που προκύπτει από την προσομοίωση είναι ίσος με 0.335195. Πιο κοντά στη συγκεκριμένη τιμή βρίσκεται η εκτίμηση του μοντέλου του Whitt, σημειώνει σφάλμα 0.026325, ακολουθεί αυτό του Kim με σφάλμα 0.030378 και τέλος του Buzacott με σφάλμα 0.058248. Στο σύνολο τους τα μοντέλα υπερεκτιμούν το μέγεθος.

Για ρ ίσο με 0.6 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής υπολογίζεται ίση με 0.354706. Η προσέγγιση του Whitt μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν άριστη αφού σημειώνει σφάλμα μόλις $-3.7E-05$, είναι το μοναδικό από τα τρία που υποεκτιμά το μέγεθος. Σημαντικά μεγαλύτερο σημειώνουν τα υπόλοιπα δυο μοντέλα 0.005645 το μοντέλο του Kim και 0.034041 του Buzacott. Και τα τρία μοντέλα όπως φαίνεται βελτιώνουν τις εκτιμήσεις τους κατά την άνοδο της τιμής του ρ από 0.4 σε 0.6.

Για ρ ίσο με 0.9 η τιμή της προσομοίωσης που αφορά τον μέσο ρυθμό παραγωγής υπολογίζεται τώρα ίση με 0.535446. Κατατάσσοντας τα μοντέλα από το πιο ακριβές στο λιγότερο προκύπτει η παρακάτω σειρά: Καλύτερο του Buzacott με σφάλμα 0.009965, αποτελεί το μοναδικό από τα τρία μοντέλα που βελτιώνει την εκτίμηση του σε σχέση μ'

αυτήν που έκανε για ρ ίσο με 0.6 και υπερεκτιμά το μέγεθος. Ακολουθεί το μοντέλο του Kim με σφάλμα -0.05335 και τέλος του Whitt με σφάλμα -0.06452.

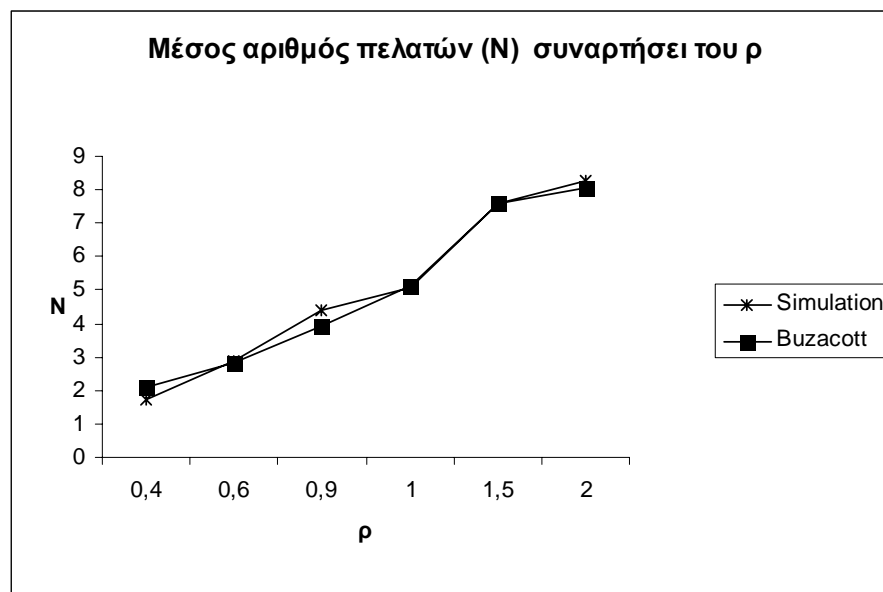
Για ρ ίσο με 1.0 η εκτίμηση της προσομοίωσης για το μέσο ρυθμό παραγωγής προκύπτει ίση με 0.610753. Η ακολουθία των μοντέλων με γνώμονα την ακρίβεια της προσέγγισης τους για το μέσο ρυθμό παραγωγής διατηρείται ίδια με αυτήν της περίπτωσης που το ρ είχε τιμή 0.9. Σημειώνοντάς την αύξηση του σφάλματος εκτίμησης η κατάταξη των μοντέλων φαίνεται παρακάτω:

Buzacott με σφάλμα 0.036245, Kim με σφάλμα -0.06168, Whitt με σφάλμα -0.07176.

Για ρ ίσο με 1.5 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής που προκύπτει από την προσομοίωση είναι 0.712346. Για την συγκεκριμένη τιμή του ρ οι εκτιμήσεις όλων των μοντέλων εμφανίζονται πιο ακριβείς. Η καλύτερη εκτίμηση γίνεται από το μοντέλο του Buzacott με σφάλμα 0.016025 ακολουθεί του Kim με σφάλμα -0.01938 και τελευταίο του Whitt με σφάλμα -0.04925.

Για ρ ίσο με 2.0 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής που προκύπτει από την προσομοίωση είναι 0.804753. Τα μοντέλα στο σύνολο τους υποεκτιμούν το μέγεθος και δίνουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την περίπτωση που το ρ ήταν 1.5. Κορυφαίο το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα -0.00162) ακολουθεί του Kim (σφάλμα -0.00838), και τέλος του Whitt (σφάλμα -0.0129).

Η συμπεριφορά των μοντέλων σε σχέση με το ρ δεν μπορεί να ενταχθεί εύκολα και απόλυτα σε κάποιο κανόνα, αυτό που μπορεί να εξαχθεί σαν γενικό συμπέρασμα είναι ότι το μοντέλο του Whitt εκτιμά καλύτερα τον μέσο ρυθμό παραγωγής για τιμές του ρ ίσες με 0.4 και 0.6 ενώ για όλες τις υπόλοιπες το μοντέλο του Buzacott αποτελεί την εγκυρότερη επιλογή.



Σχήμα 5.3.2 Μέσος αριθμός πελατών συναρτήσει του ρ

Μοναδικό μοντέλο που δίνει εκτίμηση για την τιμή του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα είναι το μοντέλο του Buzacott.

Για ρ ίσο με 0.4 ο μέσος αριθμός πελατών (N) που προκύπτει από την προσομοίωση είναι ίσος με 1.708506. Η εκτίμηση του μοντέλου του Buzacott για το ίδιο μέγεθος είναι 2.11215 (σφάλμα 0.403643).

Για ρ ίσο με 0.6 Η τιμή του μέσου αριθμού πελατών προκύπτει από την προσομοίωση ίση με 2.890291. Το μαθηματικό μοντέλο βελτιώνει την εκτίμηση του σε σχέση με πριν (σφάλμα -0.09079).

Για ρ ίσο με 0.9 η τιμή του μέσου αριθμού πελατών που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης ισούται με 4.395126. Η εκτίμηση του μοντέλου του Buzacott για το συγκεκριμένο μέγεθος είναι η χειρότερη που παρατηρείται για το σύνολο των πειραμάτων με μεταβλητό ρ . Η τιμή του μέσου αριθμού πελατών δίνεται ίση με 3.925436 (σφάλμα -0.46969).

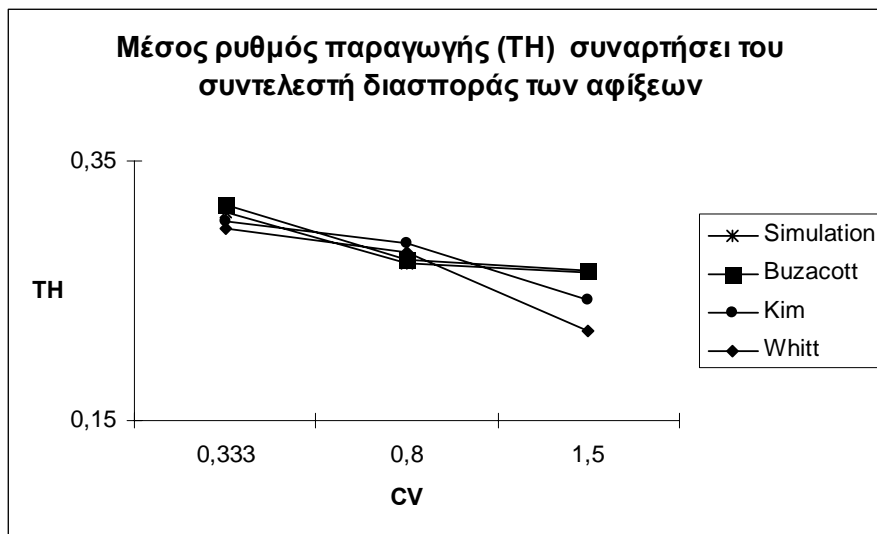
Για ρ ίσο με 1.0 η τιμή του μέσου αριθμού πελατών που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης ισούται με 5.051033. Το σφάλμα που σημειώνει το μοντέλο του Buzacott για την συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίσο με 0.093562.

Για ρ ίσο με 1.5 η εκτίμηση της προσομοίωσης για το μέσο ρυθμό παραγωγής προκύπτει ίση με 7.58525. Για το συγκεκριμένο ρ το μοντέλο κάνει την πιο ακριβή του εκτίμηση 7.565741 (με σφάλμα -0.01951).

Για ρ ίσο με 2.0 Η τιμή του μέσου αριθμού πελατών υπολογίζεται από το μοντέλο του Buzacott ίση με 8.063768 δηλαδή 0.22022 λιγότερο από την τιμή που προκύπτει από την προσομοίωση (8.28398).

5.3.2 Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων αφίξεων

Ο συντελεστής διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 0.333, 0.8 και 1.5 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N , για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 5.3.3 και 5.3.4.



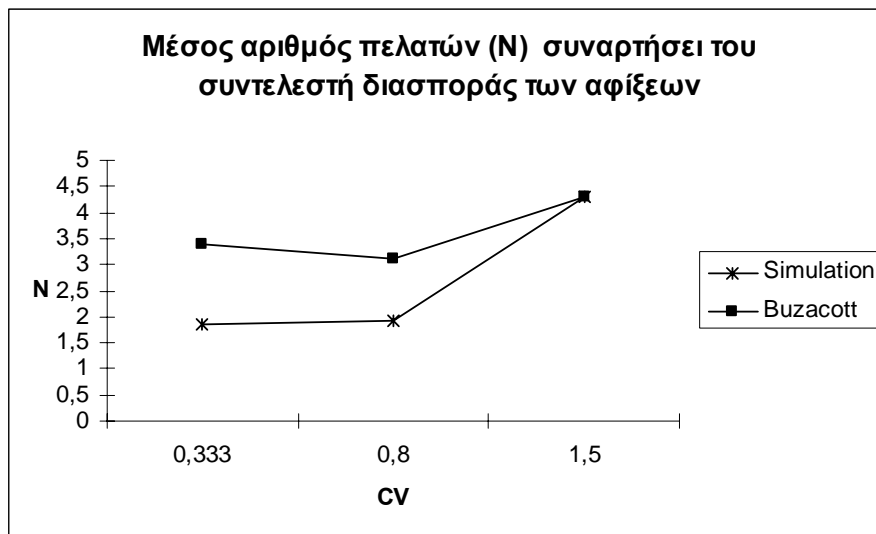
Σχήμα 5.3.3 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων αφίξεων

Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος ρυθμός παραγωγής εκτιμάται από την προσομοίωση ίσος με 0.31117. Η εκτίμηση του Buzacott είναι μικρότερη από την τιμή της προσομοίωσης κατά -0.00459 και αποτελεί την καλύτερη από τις τρεις. Η εκτίμηση του Kim ξεπερνά την τιμή της προσομοίωσης κατά 0.007929 και του Whitt κατά 0.013448.

Για τιμή του **συντελεστή διασποράς (CV)** ίση με **0.8** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 0.271759. Πιο κοντά στην τιμή της προσομοίωσης βρίσκεται το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα -0.00155), ακολουθεί του Whitt (σφάλμα 0.00712) και τέλος του Kim (σφάλμα -0.01443). Όπως γίνεται αντιληπτό η αύξηση του συντελεστή διασποράς από 0.333 σε 0.8 ευνοεί τα μοντέλα των Buzacott και Whitt που βελτιώνουν την εκτίμηση τους ενώ επηρέασε αρνητικά αυτό του Kim με συνέπεια ν' αυξήσει το σφάλμα του.

Όταν ο **συντελεστής διασποράς** πάρει τιμή μεγαλύτερη της μονάδας και ίση με **1.5** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής είναι σύμφωνα με την προσομοίωση 0.264161. Το μοντέλο του Whitt έχει τη μεγαλύτερη απόκλιση από την τιμή της προσομοίωσης (σφάλμα 0.045366) και τα τρία μοντέλα παρουσιάζουν αύξηση στο σφάλμα εκτίμησης τους σε σχέση με την προηγούμενη τιμή του συντελεστή διασποράς. Η καλύτερη εκτίμηση δίνεται από το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα -0.00163) και ακολουθεί του Kim (σφάλμα 0.020859).

Και τα τρία μοντέλα δίνουν την καλύτερη εκτίμηση τους για ενδιάμεση τιμή του συντελεστή διασποράς. Σταθερά καλύτερο από τα υπόλοιπα δυο το μοντέλο του Buzacott κάνει τις εγκυρότερες εκτιμήσεις για τον μέσο ρυθμό παραγωγής.



Σχήμα 5.3.4 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων αφίξεων

Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος αριθμός πελατών προκύπτει από την προσομοίωση ίσος με 1.866152. Η εκτίμηση του μοντέλου για το μέγεθος δεν είναι καθόλου καλή και σημειώνει εξαιρετικά μεγάλο σφάλμα -1.51967 .

Για άνοδο του **συντελεστή διασποράς** σε **0.8** το αποτέλεσμα της προσομοίωσης για τον μέσο αριθμό πελατών είναι 1.937709. Κακών εκτιμήσεων συνέχεια για το μοντέλο του Buzacott -1.16885 η τιμή του σφάλματος αυτή την φορά..

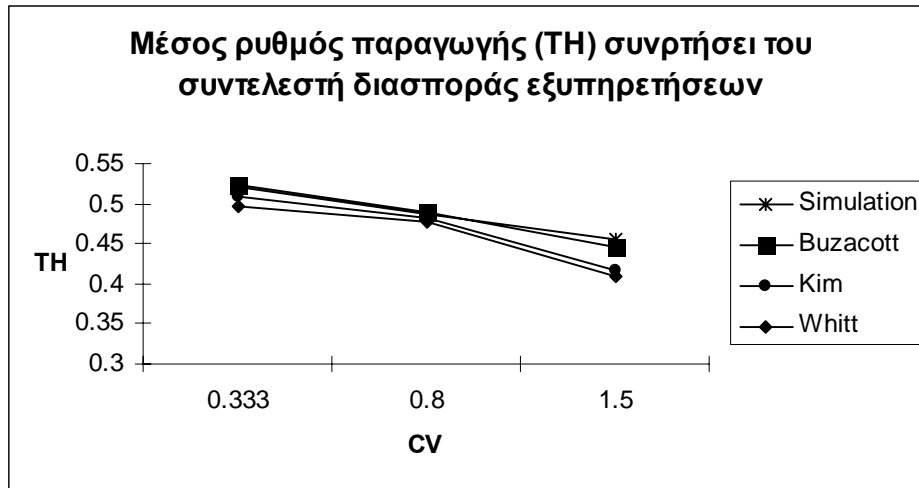
Η περαιτέρω άνοδος της τιμής του συντελεστή διασποράς (η τιμή του γίνεται 1.5) φαίνεται πως ευνοεί σημαντικά το μοντέλο. Η εκτίμηση του χαρακτηρίζεται εξαιρετική. Η τιμή της προσομοίωσης για τον μέσο αριθμό πελατών είναι 4.298529 και του μοντέλου του Buzacott 4.290807 δηλαδή σφάλμα μόλις 0.007722.

Όπως φαίνεται λοιπόν το μαθηματικό μοντέλο αδυνατεί να εκτιμήσει σωστά τον μέσο αριθμό πελατών για τιμές του συντελεστή διασποράς των αφίξεων μικρότερες της μονάδας. Για τιμές μεγαλύτερες του ένα φαίνεται ν' αποτελεί αξιόπιστο εργαλείο για την μέτρηση του συγκεκριμένου μεγέθους.

5.3.3 Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης

Ο συντελεστής διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{εξ}$ λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 0.333, 0.8 και 1.5 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό

παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 5.3.5 και 5.3.6.



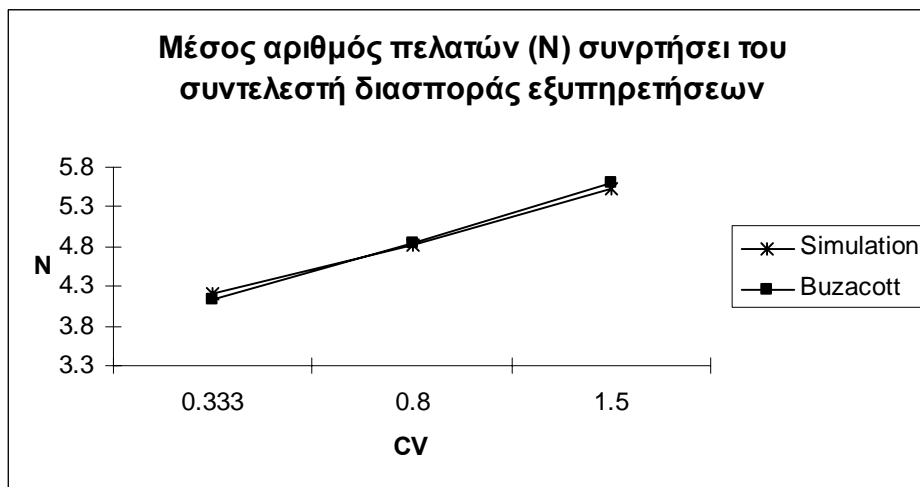
Σχήμα 5.3.5 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων εξυπηρέτησης

Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος ρυθμός παραγωγής εκτιμάται από την προσομοίωση ίσος με 0.520121. Η εκτίμηση του Buzacott είναι μικρότερη από την τιμή της προσομοίωσης κατά 0.00226, και είναι με διαφορά η πιο ακριβής. Του Kim ξεπερνά την τιμή της προσομοίωσης κατά 0.012564 και του Kounatsos κατά 0.022756.

Για τιμή του **συντελεστή διασποράς (CV)** ίση με **0.8** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 0.487016. Πιο κοντά στην τιμή της προσομοίωσης βρίσκεται, ακόμα μια φορά, το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα 0.04047), ακολουθεί του Kim (σφάλμα 0.04312) και τέλος με σφάλμα 0.009898 αυτή του Whitt. Όπως γίνεται αντιληπτό η αύξηση του συντελεστή διασποράς από 0.333 σε 0.8 ευνοεί τις εκτιμήσεις των μοντέλων.

Όταν ο **συντελεστής διασποράς** πάρει τιμή μεγαλύτερη της μονάδας και ίση με **1.5** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής είναι σύμφωνα με την προσομοίωση 0.454376. Τα μοντέλα για την εξεταζόμενη περίπτωση αυξάνουν το σφάλμα εκτίμησης τους. Σταθερά κορυφαίο το μοντέλο του Buzacott προσεγγίζει καλύτερα το μέγεθος από τα υπόλοιπα δυο (σφάλμα 0.008133). Το μοντέλο του Kim παρουσιάζει σφάλμα 0.038373 και αυτό του Whitt 0.044471.

Γενικά, η καλύτερη εκτίμηση των μοντέλων εντοπίζεται για ενδιάμεση τιμή του συντελεστή διασποράς (0.8). Το μοντέλο του Buzacott ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα τόσο ως προς την ακρίβεια εκτίμησης όσο και ως προς την σταθερότητα του για το εξεταζόμενο εύρος τιμών του συντελεστή διασποράς.



Σχήμα 5.3.6 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων εξυπηρέτησεων

Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος αριθμός πελατών προκύπτει από την προσομοίωση ίσος με 4.209607. Η εκτίμηση του Buzacott είναι ξεπερνά την τιμή της προσομοίωσης κατά 0.068657.

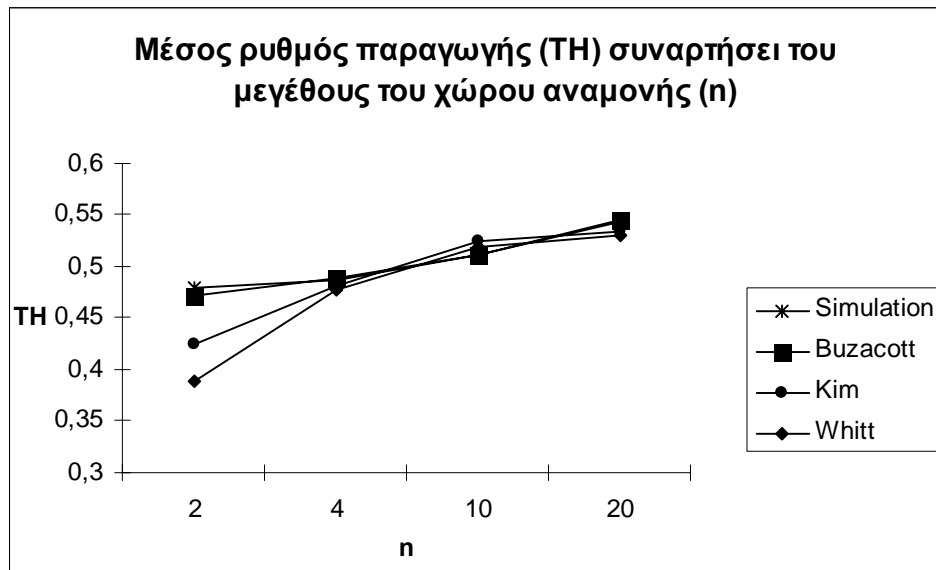
Για άνοδο του **συντελεστή διασποράς** σε **0.8** το αποτέλεσμα της προσομοίωσης για τον μέσο αριθμό πελατών είναι 4.81116. Το σφάλμα εκτίμησης του μοντέλου μειώνεται σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση και έχει τιμή ίση με -0.02916

Η περαιτέρω άνοδος της τιμής του **συντελεστή διασποράς** (η τιμή του γίνεται **1.5**) έχει ως αποτέλεσμα μικρή άνοδο του σφάλματος εκτίμησης του μοντέλου. Η τιμή της προσομοίωσης για τον μέσο αριθμό πελατών είναι 5.536674 και του μοντέλου του Buzacott 5.595972 δηλαδή σφάλμα -0.0593.

Συνολικά, οι εκτιμήσεις του μοντέλου μπορούν να χαρακτηριστούν έγκυρες και ακριβείς με καλύτερη αυτή που προκύπτει για τιμή του συντελεστή διασποράς ίση με 0.8.

5.3.4 Πειράματα που μεταβάλλεται το μέγεθος του χώρου αναμονής

Το μέγεθος του χώρου αναμονής λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 2.0, 4.0, 10.0 και 20.0 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 5.3.7 και 5.3.8.



Σχήμα 5.3.7 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του μεγέθους του χώρου αναμονής (n)

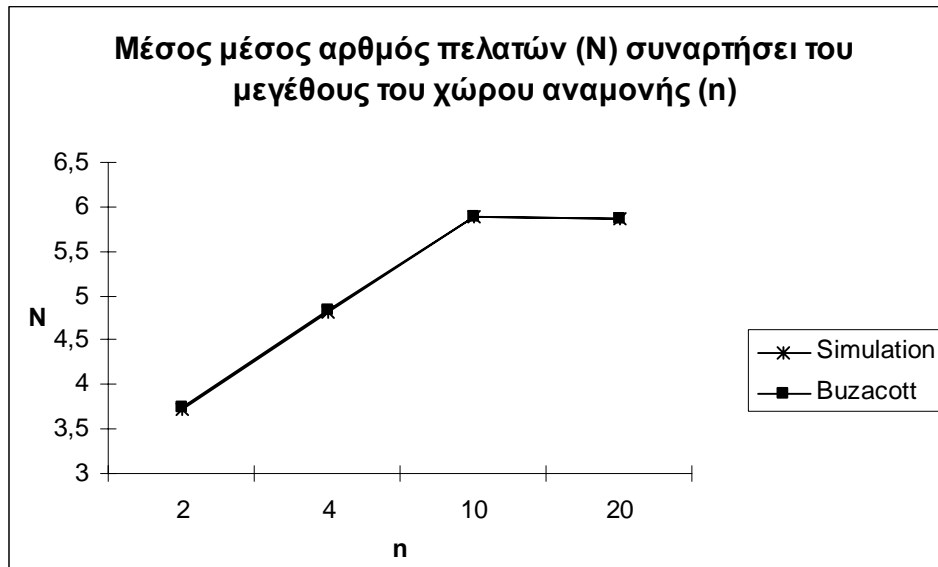
Για 2 βαθμίδες αναμονής ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 0.478891. Αρκετά καλή η εκτίμηση του μοντέλου του Buzacott σημειώνει σφάλμα 0.006254 και αποτελεί την καλύτερη μέτρηση με διαφορά για την εξεταζόμενη περίπτωση (n=2). Ακολουθούν το μοντέλο του Kim με σφάλμα 0.05427 και του Whitt με σφάλμα 0.091032.

Για 4 βαθμίδες αναμονής από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 0.487016 για το μέσο ρυθμό παραγωγής. Πιο κοντά στην τιμή της προσομοίωσης βρίσκεται, ακόμα μια φορά, το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα 0.04047), ακολουθεί του Kim (σφάλμα 0.04312) και τέλος με σφάλμα 0.009898 αυτή του Whitt. Όπως γίνεται αντιληπτό η αύξηση του μεγέθους του χώρου αναμονής από 2.0 σε 4.0 ευνοεί τις εκτιμήσεις των μοντέλων.

Για 10 βαθμίδες αναμονής η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 0.510741. Αύξηση του σφάλματος εκτίμησης σημειώνει το μοντέλο του Kim (σφάλμα -0.01342) αντίθετα με τα υπόλοιπα δυο που ανταποκρίνονται θετικά στην αύξηση του χώρου αναμονής από 4.0 σε 10.0 θέσεις. Το μοντέλο του Whitt σημειώνει σφάλμα -0.00734 ενώ αυτό του Buzacott επιτυγχάνει μια εξαιρετική εκτίμηση με σφάλμα μόλις 0.000276.

Για 20 βαθμίδες αναμονής ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 0.542995. Τα μοντέλα κατατάσσονται με αύξουσα διάταξη όσων αφορά το σφάλμα εκτίμησης τους όπως παρακάτω: Buzacott (-0.00153), Kim (0.009962), Whitt (0.012815).

Το μοντέλο του Buzacott προσεγγίζει καλύτερα από τ' άλλα δυο μοντέλα το μέγεθος του μέσου ρυθμού παραγωγής για όλες τις εξεταζόμενες τιμές του μεγέθους του χώρου αναμονής, κάνει δε, την καλύτερη μέτρηση του για $n=10.0$.



Σχήμα 5.3.8 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του μεγέθους του χώρου αναμονής (n)

Για 2 βαθμίδες αναμονής ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 3.720411. Μικρότερη κατά 0.0199 της τιμής της προσομοίωσης είναι αυτή που προκύπτει από το μοντέλο του Buzacott.

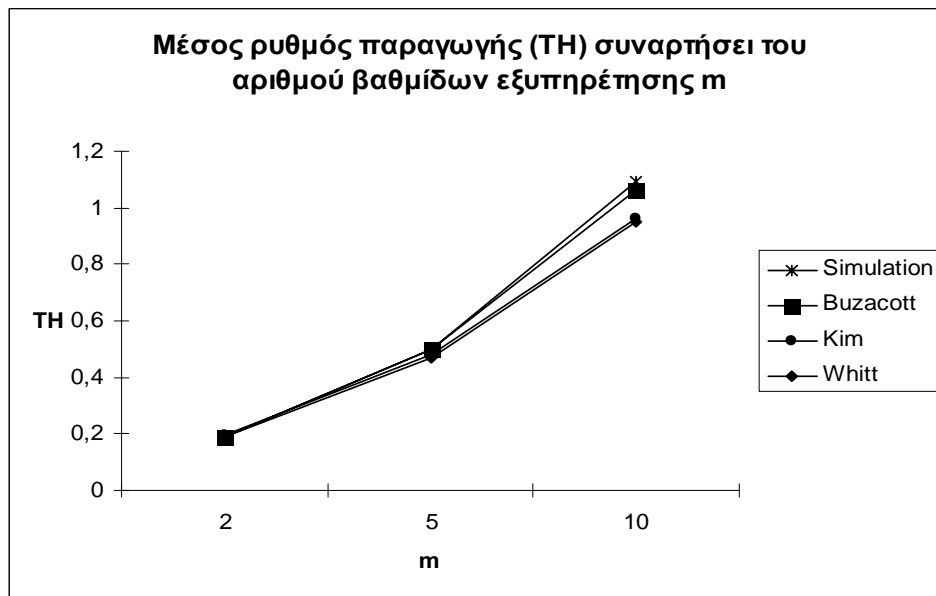
Για 4 βαθμίδες αναμονής από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 4.81126 για τον μέσο αριθμό πελατών. Το ίδιο μέγεθος εκτιμάται από το μοντέλο του Buzacott ίσο με 4.840285.

Για 10 βαθμίδες αναμονής η τιμή του μέσου αριθμού πελατών δίνεται από την προσομοίωση ίση με 5.876885. Μικρότερη κατά 0.02014 της τιμής της προσομοίωσης είναι αυτή που προκύπτει από το μοντέλο του Buzacott.

Για 20 βαθμίδες αναμονής ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 5.875764. Το μοντέλο σημειώνει το μικρότερο σφάλμα στο σύνολο των πειραμάτων που γίνονται μεταβάλλοντας το μέγεθος του χώρου αναμονής. Η τιμή που δίνει για τον μέσο αριθμό πελατών είναι ίση με 5.870801 σημειώνοντας σφάλμα μόλις 0.004963.

5.3.5 Πειράματα με μεταβλητό αριθμό βαθμίδων εξυπηρέτησης

Ο αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 2,0,5,0 και 10,0 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 5.3.9 και 5.3.10.



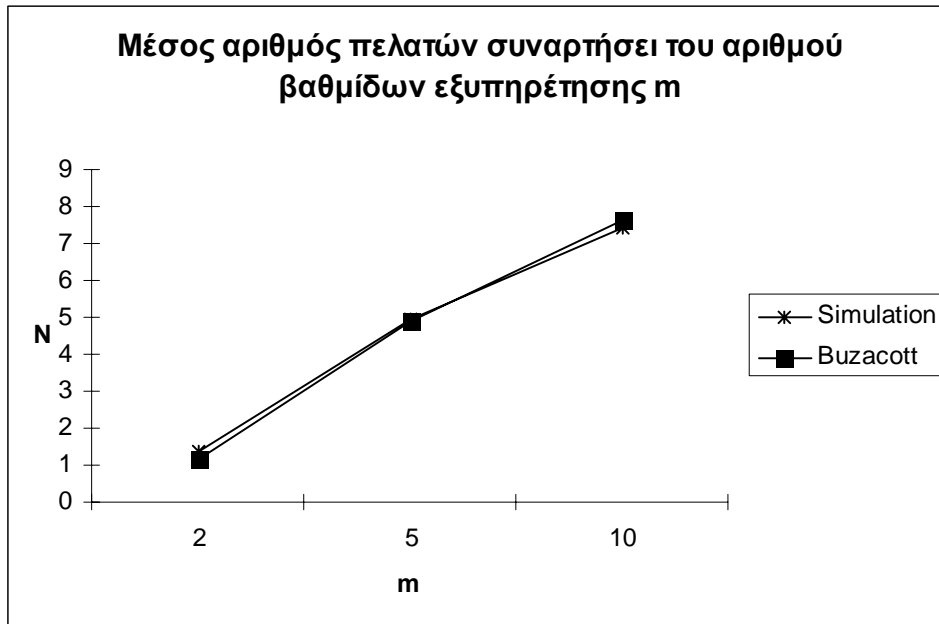
Σχήμα 5.3.9 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του αριθμού των βαθμίδων εξυπηρέτησης (m)

Για 2 βαθμίδες εξυπηρέτησης ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 0.187185. Αρκετά καλές μπορούν να χαρακτηριστούν οι εκτιμήσεις των μοντέλων. Καλύτερη εκείνη του Buzacott κάνοντας εκτίμηση για τον μέσο ρυθμό παραγωγής κατά 0.00042 μικρότερη από την τιμή της προσομοίωσης. Με ελάχιστη διαφορά ακολουθεί η εκτίμηση του Whitt που σημειώνει σφάλμα - 0.00048. Μεγαλύτερο το σφάλμα για το μοντέλο του Kim, έχει τιμή ίση με -0.00777.

Για 5 βαθμίδες εξυπηρέτησης από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 0.497542 για το μέσο ρυθμό παραγωγής. Πιο κοντά στην τιμή της προσομοίωσης βρίσκεται, ακόμα μια φορά, το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα -0.00119), ακολουθεί του Kim (σφάλμα 0.01545) και τέλος με σφάλμα 0.02549 αυτή του Whitt.

Για 10 βαθμίδες εξυπηρέτησης η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 1.095761. Αύξηση του σφάλματος εκτίμησης παρατηρείται για το σύνολο των μοντέλων. Χειρότερη η εκτίμηση Whitt (σφάλμα 0.144024), ελαφρώς καλύτερο του Whitt σημειώνει σφάλμα 0.132445. Με διαφορά καλύτερο του Buzacott σημειώνει σφάλμα 0.03154.

Η άνοδος του αριθμού των βαθμίδων εξυπηρέτησης δυσκολεύει τις εκτιμήσεις των μοντέλων. Το μοντέλο του Buzacott φαίνεται το εγκυρότερο από τα τρία.



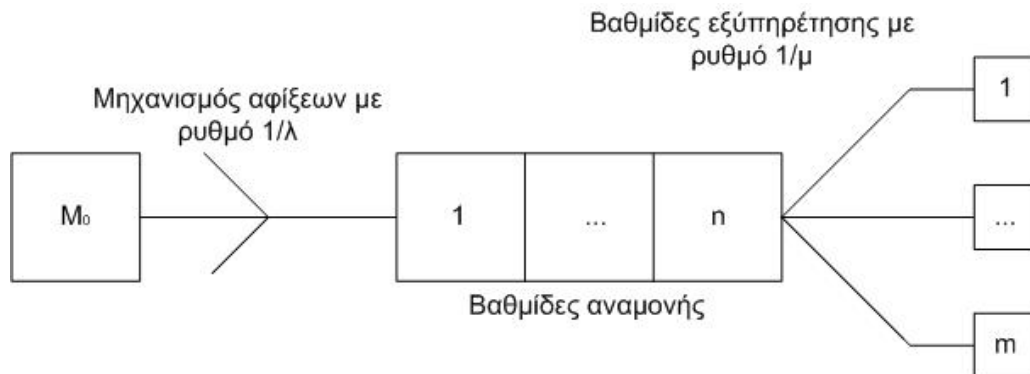
Σχήμα 5.3.10 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του μεγέθους του χώρου αναμονής (n)

Για 2 βαθμίδες εξυπηρέτησης ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 1.360207. Μεγαλύτερη κατά 0.197717 της τιμής της προσομοίωσης είναι αυτή που προκύπτει από το μοντέλο του Buzacott.

Για 5 βαθμίδες εξυπηρέτησης από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 4.957286 για τον μέσο αριθμό πελατών. Το ίδιο μέγεθος εκτιμάται από το μοντέλο του Buzacott ίσο με 4.868674. Για την συγκεκριμένη τιμή του αριθμού των βαθμίδων εξυπηρέτησης το μοντέλο δίνει την καλύτερη του εκτίμηση.

Για 10 βαθμίδες αναμονής η τιμή του μέσου αριθμού πελατών δίνεται από την προσομοίωση ίση με 7.401839. Μικρότερη κατά 0.2465 της τιμής της προσομοίωσης είναι αυτή που προκύπτει από το μοντέλο του Buzacott.

6 Προσεγγιστικά μοντέλα M/G/m/K



Σχήμα Στ Σύστημα G/G/m/K

Στο Σχήμα Στ απεικονίζεται ένα μοντέλο G/G/m/K. Μια ψευδομηχανή M_0 αντιπροσωπεύει τον μηχανισμό των αφίξεων. Το σύστημα έχει συνολική χωρητικότητα K , ή αναλυτικότερα m βαθμίδες εξυπηρέτησης και n θέσεις αναμονής. Η κατανομή εξυπηρέτησης είναι γενική. Το μέτρο που χαρακτηρίζει την κατανομή και την διαφοροποιεί από την εκθετική είναι ο συντελεστής διασποράς CV.

6.1 Εισαγωγικά

Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζονται και συγκρίνονται μαθηματικά μοντέλα, διαφορετικών συγγραφέων, που προσεγγίζουν τον μέσο ρυθμό παραγωγής και τον μέσο αριθμό πελατών σ' ένα σύστημα M/G/m/K. Αποτελεσματικότερο κρίνεται το μοντέλο του οποίου η εκτίμηση για κάποιο από τα μέτρα απόδοσης που αναφέρθηκαν, βρίσκεται πιο κοντά στην τιμή που δίνεται από το μοντέλο προσομοίωσης για το αντίστοιχο μέτρο.

6.2 Μαθηματικά μοντέλα

Τα μοντέλα που βρέθηκαν στην βιβλιογραφία και αναφέρονται σε αναμονητικά συστήματα M/G/m/K είναι τα ακόλουθα: **Kimura** (2000), **Hokstad** (1978), **Tijms-Van Hoorn** (1982), **Miyazawa** (1986), **Smith** (2005). Από αυτά στα πειράματα συμμετέχει μόνο το τελευταίο (Smith), ο λόγος είναι ότι τα υπόλοιπα μοντέλα προτείνονται προσεγγιστικοί τύποι των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης στους οποίους περιλαμβάνονται ολοκληρώματα της συνάρτησης κατανομής των χρόνων εξυπηρέτησης τα οποία δεν καταλήγουν σε λύση κλειστής μορφής.

Ο Smith προτείνει ένα μοντέλο που δίνει εκτιμήσεις μόνο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής (έμμεσα) η μέθοδος που ακολουθεί ονομάζεται *'two-moment approximation'*. Για τον μέσο ρυθμό παραγωγής δίνεται ο χαρακτηρισμός έμμεσα γιατί στην εργασία τους δεν υπάρχει τύπος που αναφέρεται στο συγκεκριμένο μέτρο

απόδοσης. Υπάρχει όμως εκτίμηση για την πιθανότητα που έχει το σύστημα να μπλοκάρει, από την τελευταία είναι εφικτός ο υπολογισμός του μέσου ρυθμού παραγωγής.

Smith (2001) [16]

Πιθανότητα γεμάτου συστήματος:

Για m=2 βαθμίδες εξυπηρέτησης:

$$P_K = \frac{\rho \frac{2 \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2} + 2K} + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2}{2 + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2 - \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}}}{(-2\mu + \lambda)}}{2\rho \frac{-\sqrt{\rho \exp^{-C_S^2} + 2K} + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2 + 1}{2 + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2 - \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}}}} (\lambda - 2\mu - \lambda)$$

Για m=5 βαθμίδες εξυπηρέτησης:

$$P_K = \frac{-625 \rho \frac{5 \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2} + 2K} + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2}{2 + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2 - \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}}}}{\mu^3 (-5\mu + \lambda)} \frac{5 \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2} + 2K} + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2}{-625 \rho \frac{5 \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2} + 2K} + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2}{2 + \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}} C_S^2 - \sqrt{\rho \exp^{-C_S^2}}}} (\mu^3 \lambda - 120 \mu^4 + 96 \lambda \mu^3 + 36 \lambda^2 \mu^2 + 8 \lambda^3 \mu + \lambda^4)$$

Για m=10 βαθμίδες εξυπηρέτησης:

Ο τύπος είναι παρόμοιος με αυτούς των περιπτώσεων για 2 και 5 βαθμίδες εξυπηρέτησης. Λόγω μεγέθους δεν παρουσιάζεται.

Μέσος ρυθμός παραγωγής: (ισχύει για όλες τις περιπτώσεις)

$$TH = \lambda (1 - P_K)$$

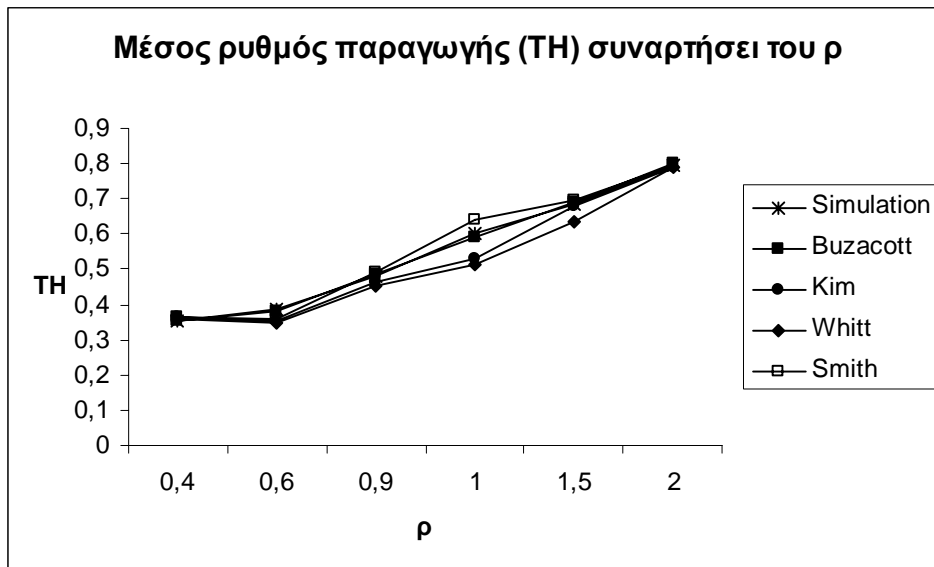
6.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

Τα αριθμητικά αποτελέσματα αφορούν το μέσο ρυθμό παραγωγής ΤΗ και το μέσο αριθμό πελατών N και προκύπτουν από μια σειρά πειραμάτων όπου κάθε φορά μεταβάλλεται μια ζωτική παράμετρος του συστήματος ενώ οι άλλες παραμένουν σταθερές ως ακολούθως:

- Για μεταβλητό ρ διατηρούν σταθερές τιμές, το μέγεθος του χώρου αναμονής του συστήματος n ($n=4$), ο αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης m ($m=5$), οι συντελεστές διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ και των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$ και $CV_{\epsilon\xi}=0.8$).
- Για μεταβλητό συντελεστή διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ διατηρούν σταθερές τιμές, το μέγεθος του χώρου αναμονής n ($n=4$), ο αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης m ($m=5$), ο συντελεστής διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$) και το ρ ($\rho=0.9$).
- Για μεταβλητό μέγεθος του χώρου αναμονής n διατηρούν σταθερές τιμές, οι συντελεστές διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ και των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$ και $CV_{\epsilon\xi}=0.8$), ο αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης m ($m=5$), και το ρ ($\rho=0.9$).
- Για μεταβλητό αριθμό βαθμίδων εξυπηρέτησης διατηρούν σταθερές τιμές, οι συντελεστές διασποράς των αφίξεων $CV_{\alpha\phi}$ και των εξυπηρετήσεων $CV_{\epsilon\xi}$ ($CV_{\alpha\phi}=0.8$ και $CV_{\epsilon\xi}=0.8$), το μέγεθος του χώρου αναμονής n ($n=4$) και το ρ ($\rho=0.9$).

6.3.1 Πειράματα με μεταβλητό ρ

Το ρ λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 0.4, 0.6, 0.9, 1.0, 1.5 και 2.0 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής ΤΗ και τον μέσο αριθμό πελατών N , για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 6.3.1 και 6.3.2.



Σχήμα 6.3.1 Μέσος ρυθμός παραγωγής συναρτήσει του ρ

Για ρ ίσο με 0,4 ο ρυθμός παραγωγής (TH) που προκύπτει από την προσομοίωση είναι ίσος με 0.354613. Πιο κοντά στη συγκεκριμένη τιμή βρίσκεται η εκτίμηση του μοντέλου του Buzacott, σημειώνει σφάλμα 0.001318, ακολουθεί αυτό του Whitt με σφάλμα 0.003865 του Kim με σφάλμα 0.008533 και με αρκετή διαφορά από το προηγούμενα του Smith με σφάλμα 0.010146. Στο σύνολο τους τα μοντέλα υπερεκτιμούν το μέγεθος.

Για ρ ίσο με 0,6 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής υπολογίζεται ίση με 0.385208. Η προσέγγιση του Buzacott σημειώνει το μικρότερο σφάλμα ανάμεσα στα εξεταζόμενα μοντέλα υποεκτιμώντας τον μέσο ρυθμό παραγωγής κατά 0.00293. Σημαντικά μεγαλύτερο σφάλμα σημειώνουν τα υπόλοιπα μοντέλα. Αναλυτικά, -0.02374 το μοντέλο του Smith -0.0327 του Kim και -0.03663 του. Το σύνολο των μοντέλων όπως φαίνεται εκτιμά με λιγότερη ακρίβεια τον μέσο ρυθμό παραγωγής κατά την άνοδο της τιμής του ρ από 0,4 σε 0,6.

Για ρ ίσο με 0,9 η τιμή της προσομοίωσης που αφορά τον μέσο ρυθμό παραγωγής υπολογίζεται τώρα ίση με 0.482816. Κατατάσσοντας τα μοντέλα από το πιο ακριβές στο λιγότερο προκύπτει η παρακάτω σειρά: Καλύτερο του Buzacott με σφάλμα 0.001926 ακολουθεί το μοντέλο του Smith με σφάλμα 0.006306. Τα δυο πρώτα μοντέλα έχουν κοινό χαρακτηριστικό ότι υπερεκτιμούν το μέγεθος. Έπονται με αρκετή διαφορά, του Kim με σφάλμα -0.01861 και τέλος του Whitt με σφάλμα -0.03227.

Για ρ ίσο με 1,0 η εκτίμηση της προσομοίωσης για το μέσο ρυθμό παραγωγής προκύπτει ίση με 0.602229. Η ακολουθία των μοντέλων με γνώμονα την ακρίβεια της προσέγγισης τους για το μέσο ρυθμό παραγωγής διατηρείται ίδια με αυτήν της

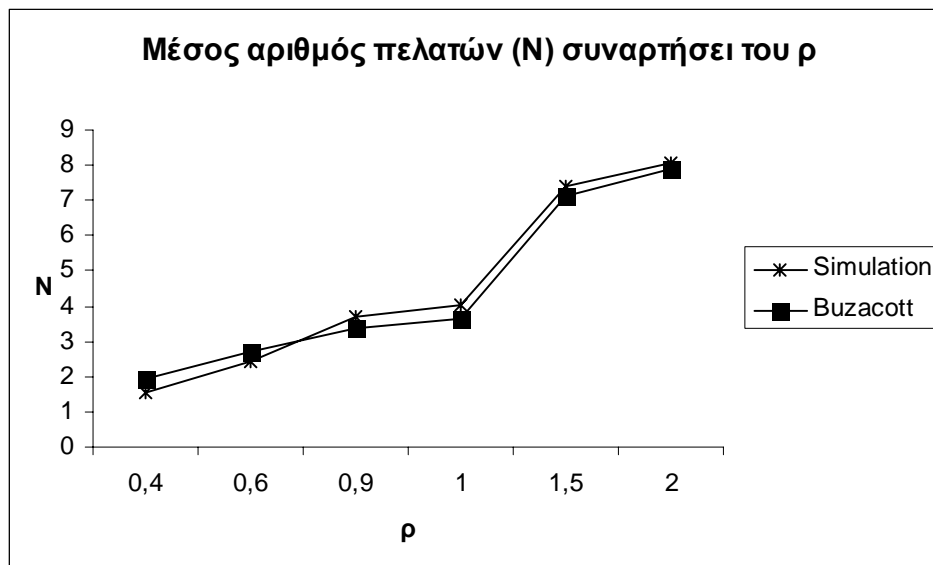
περίπτωσης που το ρ είχε τιμή 0.9. Σημειώνοντάς την αύξηση του σφάλματος εκτίμησης η κατάταξη των μοντέλων φαίνεται παρακάτω:

Buzacott με σφάλμα -0.01145, Smith με σφάλμα 0.037771, Kim με σφάλμα -0.06984, Whitt με σφάλμα -0.09013.

Για ρ ίσο με 1.5 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής που προκύπτει από την προσομοίωση είναι 0.686965. Η καλύτερη εκτίμηση γίνεται από το μοντέλο του Buzacott με σφάλμα 0.001915 ακολουθεί του Kim με σφάλμα -0.0067, του Smith με σφάλμα 0.009906, και τελευταίο του Whitt με σφάλμα -0.05096.

Για ρ ίσο με 2.0 η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής που προκύπτει από την προσομοίωση είναι 0.795883. Τα μοντέλα στο σύνολο τους υποεκτιμούν το μέγεθος και δίνουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την περίπτωση που το ρ ήταν 1.5. Κορυφαίο το μοντέλο του Smith (σφάλμα -0.001082) και με μικρή διαφορά το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα 0.002216) ακολουθεί του Kim (σφάλμα -0.00447), και τέλος του Whitt (σφάλμα -0.01362).

Η συμπεριφορά των μοντέλων σε σχέση με το ρ δεν μπορεί να ενταχθεί εύκολα και απόλυτα σε κάποιο κανόνα, αυτό που μπορεί να εξαχθεί σαν παρατήρηση είναι ότι τα μοντέλα των Buzacott και Smith εμφανίζονται πιο ακριβή από τα υπόλοιπα για όλες τις εξεταζόμενες τιμές του ρ .



Σχήμα 6.3.2 Μέσος αριθμός πελατών συναρτήσει του ρ

Μοναδικό μοντέλο που δίνει εκτίμηση για την τιμή του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα είναι το μοντέλο του Buzacott.

Για ρ ίσο με 0.4 ο μέσος αριθμός πελατών (N) που προκύπτει από την προσομοίωση είναι ίσος με 1.561005. Η εκτίμηση του μοντέλου του Buzacott για το ίδιο μέγεθος είναι 1.95528 (σφάλμα 0.394523).

Για ρ ίσο με 0.6 Η τιμή του μέσου αριθμού πελατών προκύπτει από την προσομοίωση ίση με 2.407772. Το μαθηματικό μοντέλο βελτιώνει την εκτίμηση του σε σχέση με πριν (σφάλμα -315277).

Για ρ ίσο με 0.9 η τιμή του μέσου αριθμού πελατών που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης ισούται με 3.676468. Το σφάλμα που σημειώνει το μοντέλο του Buzacott για την συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίσο με 0.3269.

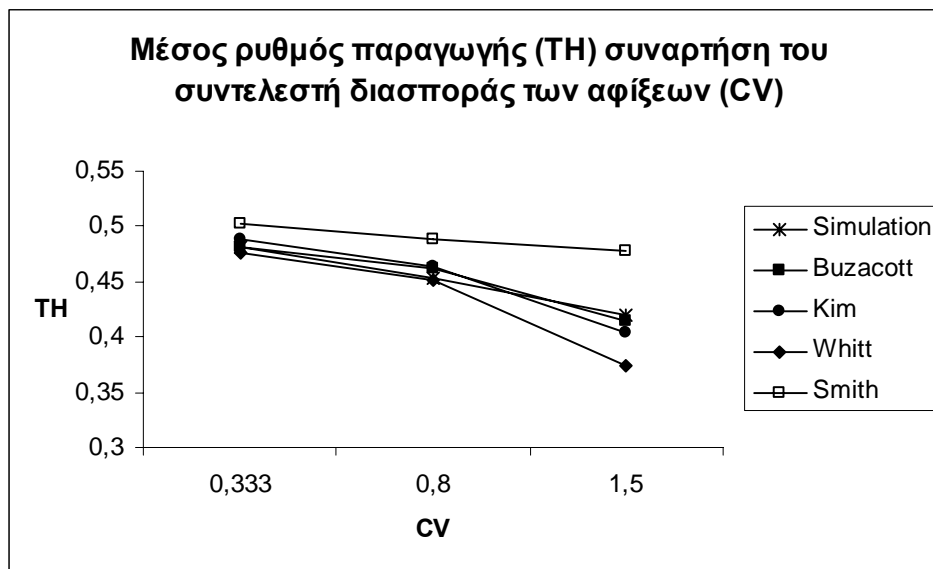
Για ρ ίσο με 1.0 η τιμή του μέσου αριθμού πελατών που προκύπτει από το μοντέλο προσομοίωσης ισούται με 4.011957. Η εκτίμηση του μοντέλου του Buzacott για το συγκεκριμένο μέγεθος είναι η χειρότερη που παρατηρείται για το σύνολο των πειραμάτων με μεταβλητό ρ . Η τιμή του μέσου αριθμού πελατών δίνεται ίση με 3.644127 (σφάλμα -0.36783).

Για ρ ίσο με 1.5 Η τιμή του μέσου αριθμού πελατών υπολογίζεται από το μοντέλο του Buzacott ίση με 7.104646 δηλαδή 0.30973 λιγότερο από την τιμή που προκύπτει από την προσομοίωση (7.41438).

Για ρ ίσο με 2.0 η εκτίμηση της προσομοίωσης για το μέσο ρυθμό παραγωγής προκύπτει ίση με 8.080478. Για το συγκεκριμένο ρ το μοντέλο κάνει την πιο ακριβή του εκτίμηση 7.923196 (με σφάλμα -0.15728).

6.3.2 Πειράματα που μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης

Ο συντελεστής διασποράς των εξυπηρετήσεων $CV_{εξ}$ λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 0.333, 0.8 και 1.5 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N , για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 6.3.3 και 6.3.4.



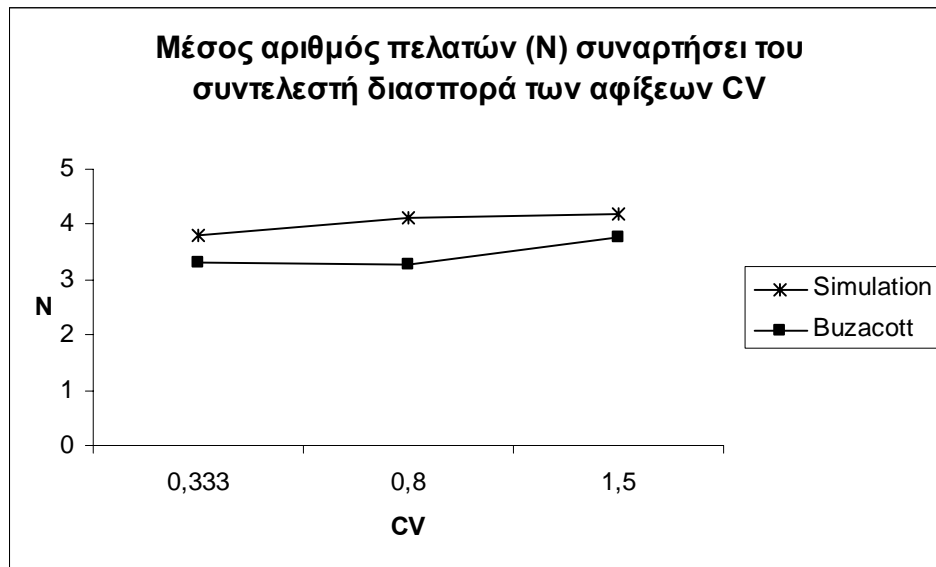
Σχήμα 6.3.3 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων εξυπηρέτησης

Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος ρυθμός παραγωγής εκτιμάται από την προσομοίωση ίσος με 0.481537. Η εκτίμηση του Buzacott είναι μικρότερη από την τιμή της προσομοίωσης μόλις κατά -0.00081, και είναι με διαφορά η πιο ακριβής. Του Kim και του Smith ξεπερνούν την τιμή της προσομοίωσης κατά 0.006663 και 0.020733 αντίστοιχα. Η εκτίμηση του Kounatsos παρουσιάζει σφάλμα ίσο με -0.00524 .

Για τιμή του **συντελεστή διασποράς (CV)** ίση με **0.8** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 0.4533347. Πιο κοντά στην τιμή της προσομοίωσης βρίσκεται, αυτή την φορά, το μοντέλο του Whitt (σφάλμα 0.0028), με μικρή διαφορά ακολουθεί το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα 0.009497). Λιγότερη ακρίβεια παρουσιάζουν στις εκτιμήσεις τους τα μοντέλα των Kim και Smith παρουσιάζοντας σφάλμα 0.010715 και 0.035775 αντίστοιχα.

Όταν ο **συντελεστής διασποράς** πάρει τιμή μεγαλύτερη της μονάδας και ίση με **1.5** η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής είναι σύμφωνα με την προσομοίωση 0.418897. Τα μοντέλα, με εξαίρεση αυτό του Buzacott, για την εξεταζόμενη περίπτωση αυξάνουν το σφάλμα εκτίμησης τους. Σταθερά κορυφαίο το μοντέλο του Buzacott προσεγγίζει καλύτερα το μέγεθος από τα υπόλοιπα (σφάλμα -0.00423). Το μοντέλο του Kim παρουσιάζει σφάλμα -0.01586 αυτό του Whitt -0.04419 και του Smith 0.058683.

Γενικά, το μοντέλο του Buzacott ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα τόσο ως προς την ακρίβεια εκτίμησης όσο και ως προς την σταθερότητα του για το εξεταζόμενο εύρος τιμών του συντελεστή διασποράς.



Σχήμα 6.3.4 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του συντελεστή διασποράς (CV) των χρόνων εξυπηρέτησεων

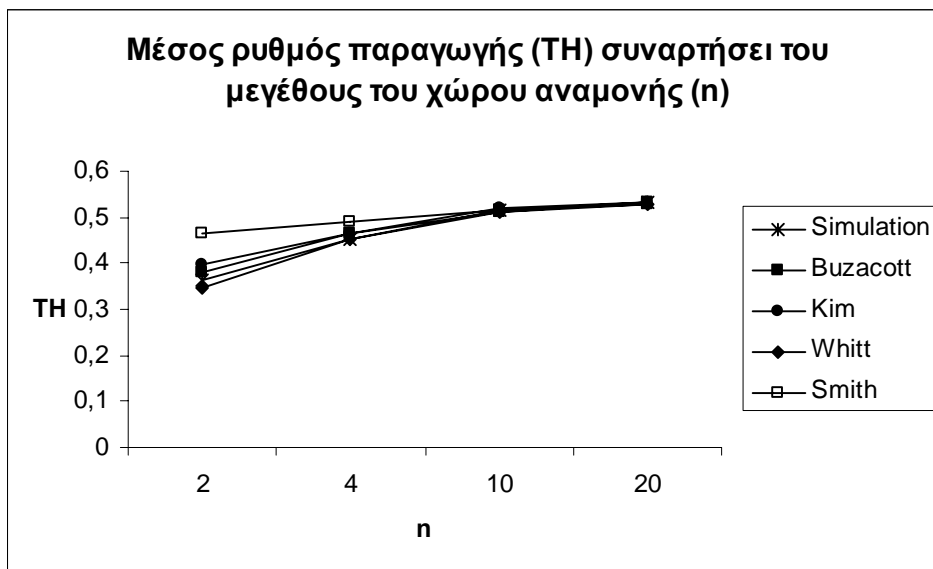
Στην περίπτωση που ο **συντελεστής διασποράς** είναι μικρότερος της μονάδας και ίσος με **0.333**, ο μέσος αριθμός πελατών προκύπτει από την προσομοίωση ίσος με 3.797989. Η εκτίμηση του Buzacott είναι μικρότερη της τιμής της προσομοίωσης κατά 0.47978.

Για άνοδο του **συντελεστή διασποράς** σε **0.8** το αποτέλεσμα της προσομοίωσης για τον μέσο αριθμό πελατών είναι 4.10825. Το σφάλμα εκτίμησης του μοντέλου αυξάνεται σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση και έχει τιμή ίση με -0.84563.

Η περαιτέρω άνοδος της τιμής του **συντελεστή διασποράς** (η τιμή του γίνεται **1.5**) έχει ως αποτέλεσμα μείωση του σφάλματος εκτίμησης του μοντέλου. Η τιμή της προσομοίωσης για τον μέσο αριθμό πελατών είναι 4.186325 και του μοντέλου του Buzacott 3.765885 δηλαδή σημειώνει σφάλμα -0.4244. Για τη συγκεκριμένη τιμή του συντελεστή διασποράς το μοντέλο κάνει την καλύτερη εκτίμηση του στο σύνολο των πειραμάτων με μεταβλητό συντελεστή διασποράς.

6.3.3 Πειράματα που μεταβάλλεται το μέγεθος του χώρου αναμονής

Το μέγεθος του χώρου αναμονής λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 2.0, 4.0, 10.0 και 20.0 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 6.3.5 και 6.3.6.



Σχήμα 6.3.5 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του μεγέθους του χώρου αναμονής (n)

Για 2 βαθμίδες αναμονής ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 0.36337. Αρκετά καλή η εκτίμηση του μοντέλου του Whitt σημειώνει σφάλμα -0.01725 και αποτελεί την καλύτερη μέτρηση για την εξεταζόμενη περίπτωση (n=2). Με πολύ μικρή διαφορά από το πρώτο ακολουθεί του Buzacott (σφάλμα 0.017599) Τέλος τα μοντέλα των Kim και Smith σημειώνουν σφάλμα 0.033044 και 0.09982 αντίστοιχα.

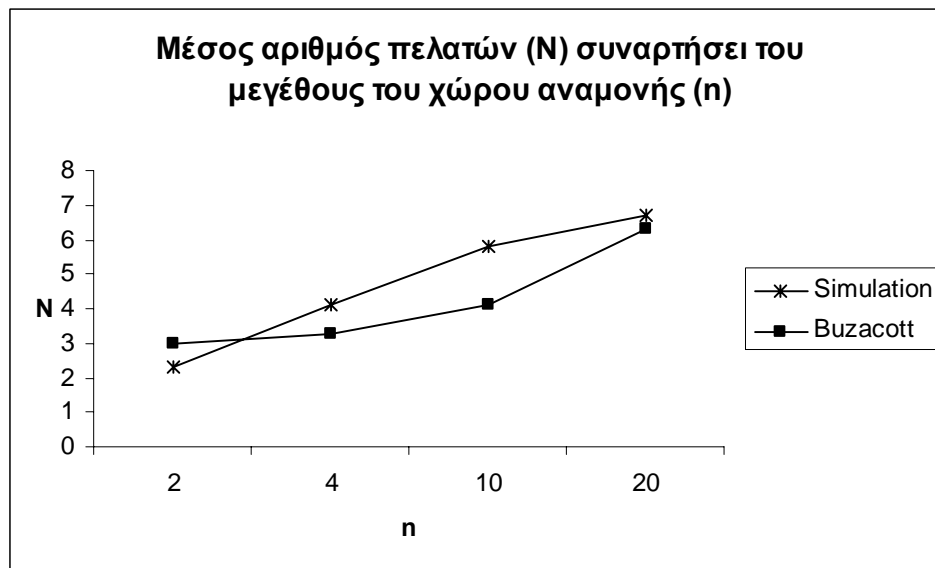
Για 4 βαθμίδες αναμονής από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 0.453347 για το μέσο ρυθμό παραγωγής. Πιο κοντά στην τιμή της προσομοίωσης βρίσκεται, ακόμα μια φορά, το μοντέλο του Whitt (σφάλμα -0.0028), ακολουθεί του Buzacott (σφάλμα 0.009497), και με μεγαλύτερη απόκλιση από την τιμή της προσομοίωσης το μοντέλο του Kim (σφάλμα 0.010715) και του Smith (σφάλμα 0.035775). Όπως γίνεται αντιληπτό η αύξηση του μεγέθους του χώρου αναμονής από 2.0 σε 4.0 ευνοεί τις εκτιμήσεις των μοντέλων.

Για 10 βαθμίδες αναμονής η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 0.514347. Όλα τα μοντέλα επιτυγχάνουν εξαιρετικές επιδόσεις προσεγγίζοντας με αρκετή ακρίβεια την τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής. Η καλύτερη εκτίμηση γίνεται από το μοντέλο του Smith (σφάλμα 0.003191). Με μικρή διαφορά από του Smith ακολουθούν τα μοντέλα των Kim (σφάλμα 0.003359), Whitt (σφάλμα -0.0034) και Buzacott (σφάλμα -0.0036).

Για 20 βαθμίδες αναμονής ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 0.530859. Για το συγκεκριμένο αριθμό βαθμίδων αναμονής τα μοντέλα επιτυγχάνουν τις καλύτερες εκτιμήσεις στο σύνολο των πειραμάτων που

παρουσιάζονται σ' αυτήν την ενότητα και κατατάσσονται με αύξουσα διάταξη όσων αφορά το σφάλμα εκτίμησης τους όπως παρακάτω:
Buzacott (0.001407), Kim (0.001503), Smith (-0.00179), Whitt (0.00304).

Τα μοντέλο των Whitt και Buzacott ξεχωρίζουν από τα υπόλοιπα όσων αφορά την ακρίβεια των εκτιμήσεων τους, ενώ και το μοντέλο του Smith εκτιμά με εξαιρετική ακρίβεια τον μέσο ρυθμό παραγωγής για σύστημά με 10 θέσεις αναμονής .



Σχήμα 6.3.6 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του μεγέθους του χώρου αναμονής (n)

Για 2 βαθμίδες αναμονής ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 2.316902. Μεγαλύτερη κατά 0.673485 της τιμής της προσομοίωσης είναι αυτή που προκύπτει από το μοντέλο του Buzacott.

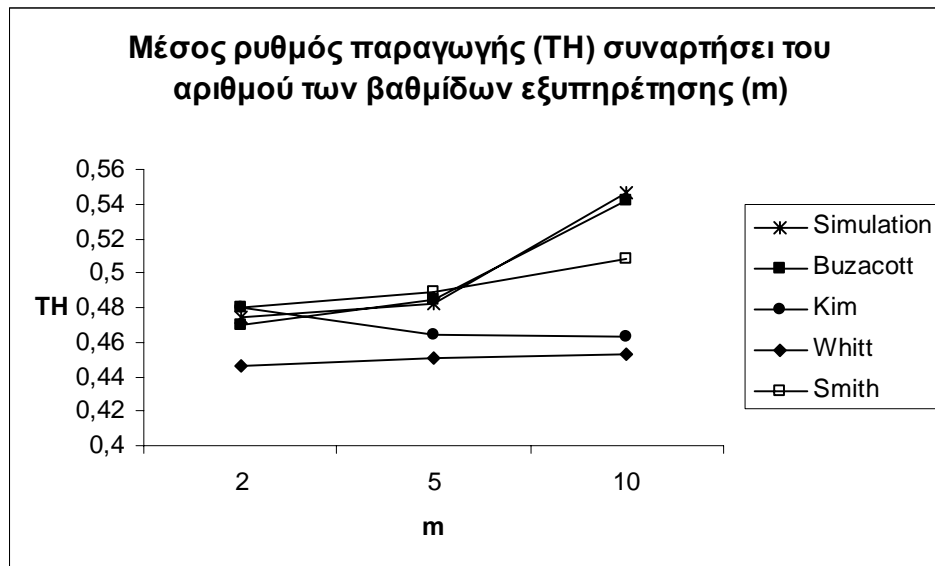
Για 4 βαθμίδες αναμονής από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 4.108125 για τον μέσο αριθμό πελατών. Το ίδιο μέγεθος εκτιμάται από το μοντέλο του Buzacott ίσο με 3.262617.

Για 10 βαθμίδες αναμονής η τιμή του μέσου αριθμού πελατών δίνεται από την προσομοίωση ίση με 5.775434. Μικρότερη κατά 1.67355 της τιμής της προσομοίωσης είναι αυτή που προκύπτει από το μοντέλο του Buzacott.

Για 20 βαθμίδες αναμονής ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 6.708417. Το μοντέλο σημειώνει το μικρότερο σφάλμα στο σύνολο των πειραμάτων που γίνονται μεταβάλλοντας το μέγεθος του χώρου αναμονής. Η τιμή που δίνει για τον μέσο αριθμό πελατών είναι ίση με 6.287075 σημειώνοντας σφάλμα 0.42134.

6.3.4 Πειράματα με μεταβλητό αριθμό βαθμίδων εξυπηρέτησης

Ο αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης λαμβάνει διαδοχικά τις εξής τιμές: 2.0, 5.0 και 10.0 και τ' αποτελέσματα που προκύπτουν για τον μέσο ρυθμό παραγωγής TH και τον μέσο αριθμό πελατών N, για προσομοίωση και μαθηματικά μοντέλα παρουσιάζονται στα σχήματα 6.3.7 και 6.3.8.



Σχήμα 6.3.7 Μέσος ρυθμός παραγωγής (TH) συναρτήσει του αριθμού των βαθμίδων εξυπηρέτησης (m)

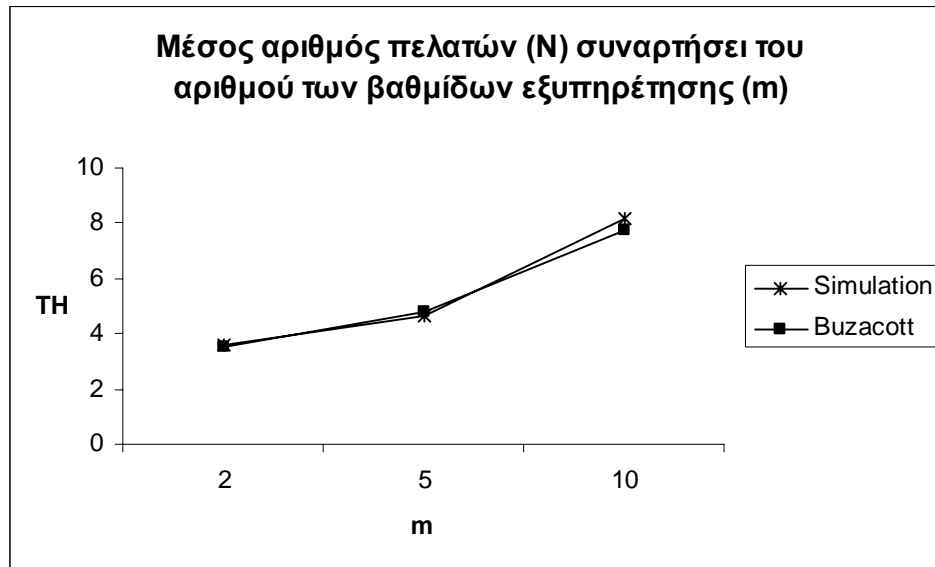
Για 2 βαθμίδες εξυπηρέτησης ο μέσος ρυθμός παραγωγής υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 0.474105. Αρκετά καλές μπορούν να χαρακτηριστούν οι εκτιμήσεις των μοντέλων. Καλύτερη εκείνη του Buzacott κάνοντας εκτίμηση για τον μέσο ρυθμό παραγωγής κατά 0.00404 μικρότερη από την τιμή της προσομοίωσης. Με μικρή διαφορά από του Buzacott και ελάχιστη μεταξύ τους ακολουθούν οι εκτιμήσεις των Smith (σφάλμα 0.005462) και Kim (σφάλμα 0.005512) και τέλος του Whitt (σφάλμα -0.0275).

Για 5 βαθμίδες εξυπηρέτησης από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 0.482816 για το μέσο ρυθμό παραγωγής. Πιο κοντά στην τιμή της προσομοίωσης βρίσκεται, και σ' αυτήν την περίπτωση, το μοντέλο του Buzacott (σφάλμα -0.001926), ακολουθεί του Smith (σφάλμα 0.006306), σφάλμα -0.01861 σημειώνει το μοντέλο αυτή του Kim. Την χειρότερη εκτίμηση κάνει το μοντέλο του Whitt σημειώνοντας σφάλμα -0.03227.

Για 10 βαθμίδες εξυπηρέτησης η τιμή του μέσου ρυθμού παραγωγής δίνεται από την προσομοίωση ίση με 0.546264. Αύξηση του σφάλματος εκτίμησης παρατηρείται για το σύνολο των μοντέλων. Χειρότερη η εκτίμηση Whitt (σφάλμα -0.09344), ελαφρώς

καλύτερο του Kim σημειώνει σφάλμα -0.09344 . Ακολουθεί το μοντέλο του Smith -0.03792 , ενώ με διαφορά καλύτερο του Buzacott σημειώνει σφάλμα -0.0048 .

Η άνοδος του αριθμού των βαθμίδων εξυπηρέτησης δυσκολεύει τις εκτιμήσεις των μοντέλων. Το μοντέλο του Buzacott φαίνεται το εγκυρότερο από τα τρία.



Σχήμα 6.3.8 Μέσος αριθμός πελατών (N) συναρτήσει του μεγέθους του χώρου αναμονής (n)

Για 2 βαθμίδες εξυπηρέτησης ο μέσος αριθμός πελατών υπολογίζεται από την προσομοίωση ίσος με 3.614816 . Μικρότερη κατά 0.1257 της τιμής της προσομοίωσης είναι αυτή που προκύπτει από το μοντέλο του Buzacott.

Για 5 βαθμίδες εξυπηρέτησης από την προσομοίωση προκύπτει τιμή ίση με 4.676498 για τον μέσο αριθμό πελατών. Το ίδιο μέγεθος εκτιμάται από το μοντέλο του Buzacott ίσο με 4.789918 . Για την συγκεκριμένη τιμή του αριθμού των βαθμίδων εξυπηρέτησης το μοντέλο δίνει την καλύτερη του εκτίμηση.

Για 10 βαθμίδες αναμονής η τιμή του μέσου αριθμού πελατών δίνεται από την προσομοίωση ίση με 8.14559 . Μικρότερη κατά 0.41694 της τιμής της προσομοίωσης είναι αυτή που προκύπτει από το μοντέλο του Buzacott.

7 Συμπεράσματα-Επεκτάσεις

7.1 Σύνοψη της εργασίας

Τα δίκτυα αναμονής είναι μια σύγχρονη επιστήμη που κέρδισε την αυτοτέλεια της στα μέσα της προηγούμενης χιλιετίας. Αποτελεί αντικείμενο εξαιρετικού ενδιαφέροντος τόσο σε θεωρητικό επίπεδο όσο και σε πρακτικό. Το πεδίο εφαρμογής της επιστήμης των δικτύων αναμονής είναι αχανές, καθώς με την θεωρία ουρών μπορούν να μοντελοποιηθούν από απλά καθημερινά προβλήματα π.χ Ουρά σε μια τράπεζα, μέχρι σύνθετα και πολύπλοκά όπως η περιγραφή ενός σύγχρονου δικτύου τηλεφωνίας.

Κύριο εργαλείο της επιστήμης των αναμονητικών συστημάτων είναι η μοντελοποίηση. Η τελευταία προβάλλει δυο τύπους μοντέλων που είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στην μελέτη των δικτύων αναμονής, την προσομοίωση και τα αναλυτικά-μαθηματικά μοντέλα. Με την προσομοίωση αναπαριστάται η λειτουργία ενός δικτύου με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η ανάπτυξη ενός τέτοιου μοντέλου γίνεται σχετικά εύκολα από κάποιον έμπειρο προγραμματιστή και μέσω αυτού μπορεί να μοντελοποιηθεί ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο και μεγάλο σύστημα. Τα μαθηματικά μοντέλα αναπτύσσονται πιο δύσκολα ενώ σε πολύπλοκα προβλήματα συχνά αδυνατούν να δώσουν λύση, παρόλα αυτά εφόσον δημιουργηθούν γίνονται απαραίτητο εργαλείο σε προβλήματα βελτιστοποίησης όπου παρέχουν λύση σε χρόνο μηδέν σε σύγκριση με αυτόν που χρειάζεται ένα μοντέλο προσομοίωσης που καλείται να δώσει λύση στο ίδιο πρόβλημα.

Σήμερα υπάρχει μια ποικιλία συστημάτων αναμονής που διακρίνονται μεταξύ τους βάση χαρακτηριστικών όπως οι στατιστικές κατανομές χρόνων αφίξεων κι εξυπηρέτησης ο αριθμός των βαθμίδων εξυπηρέτησης και το μέγεθος του χώρου αναμονής.

Τα συστήματα $M/G/m/K$, $G/G/m/K$, $M/G/1/K$, $G/G/1/K$ ανήκουν σε μια κατηγορία συστημάτων που χαρακτηρίζεται από την γενική κατανομή που ακολουθούν είτε οι αφίξεις είτε οι εξυπηρετήσεις είτε και τα δυο μαζί. Το χαρακτηριστικό τους αυτό τους επιτρέπει να έχουν εφαρμογή σε όλα τα σύγχρονα προβλήματα που ανακύπτουν και σχετίζονται με δίκτυα αναμονής. Βασικό τους μειονέκτημα η πολυπλοκότητα που παρουσιάζουν όσον αφορά την μοντελοποίηση της με μαθηματικούς τύπους λόγω ακριβώς αυτού του χαρακτηριστικού. Στην βιβλιογραφία έχουν γίνει προσπάθειες για μαθηματική μοντελοποίηση αλλά τα μοντέλα αφαιρούν περισσότερο προσεγγίσεις.

Σκοπός αυτής της εργασίας ήταν να συγκεντρώσει όλα τα μαθηματικά μοντέλα που αφορούν αναμονητικά συστήματα με γενική κατανομή και να τα συγκρίνει μεταξύ τους με την βοήθεια προσομοιωτή. Η σύγκριση έγινε εκτελώντας μια σειρά πειραμάτων μεταβάλλοντας κάθε φορά την τιμή μιας από τις παράμετρους που επηρεάζουν την απόδοση του συστήματος. Τα αποτελέσματα αφορούσαν μέτρα απόδοσης ενός αναμονητικού συστήματος και στην προκειμένη περίπτωση ήταν ο μέσος ρυθμός παραγωγή και ο μέσος αριθμός πελατών.

Συνεχίζοντας, αναφέρεται πως μερικά μόνο μοντέλα εκτιμούσαν τον μέσο αριθμό πελατών ενώ τον μέσο ρυθμό παραγωγής όλα. Πρέπει λοιπόν ο αναγνώστης να έχει

υπόψη του ότι τα μοντέλα που εκτιμούν και τα δυο μεγέθη αποκτούν ένα πλεονέκτημα έναντι αυτών που προσεγγίζουν μόνο τον μέσο ρυθμό παραγωγής.

Στις επόμενες παραγράφους συνοψίζονται τα βασικότερα συμπεράσματα από και κατά την εκτέλεση των πειραμάτων καθώς και προτάσεις για πιθανές επεκτάσεις της συγκεκριμένης έρευνας.

7.2 Προσεγγιστικά μοντέλα G/G/1/K

Για τη συγκεκριμένη κατηγορία αναμονητικών συστημάτων συγκεντρώθηκαν τα ακόλουθα τρία μοντέλα :

- ✓ **Buzacott - Liu - Shantikumar (1994)**
- ✓ **Kim-Chae (2001)**
- ✓ **Kouvatsos (1986)**

Από τα παραπάνω μοντέλα αυτό του Buzacott δεν παρέχει εκτίμηση για τον μέσο αριθμό πελατών.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το ρ προέκυψε ότι , για τιμές του ρ από 0.4 μέχρι και 0.9 το μοντέλο του Buzacott εμφανίζεται ακριβέστερο από τα υπόλοιπα. Για τιμές από 1 ως και 2.0 το μοντέλο του Kim παίρνει τη σκυτάλη. Παρατηρείται ακόμα, ότι για το διάστημα 0.4 ως 0.9 το σφάλμα εκτίμησης των μοντέλων αυξάνει με την άνοδο του ρ , ενώ το αντίθετο ισχύει για τιμές πάνω από 1.0.

Κατά την μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το ρ προέκυψε ότι ,για τιμές του ρ μέχρι και το 1.5 το μοντέλο του Kim εμφανίζεται πιο ακριβές από του Kouvatsos όταν το ρ πάρει την τιμή 2 το μοντέλο του Kouvatsos ενδείκνυται για την μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών

Αν κάποιος καλούταν να επιλέξει ένα από τα τρία μοντέλα πιο ελκυστική επιλογή αποτελεί το μοντέλο του Kim. Εκτιμά καλύτερα από τον ανταγωνισμό τον μέσο αριθμό πελατών και αρκετά καλά τον μέσο ρυθμό παραγωγής. Ο επιλογέας θα έπρεπε να συμβιβαστεί ωστόσο με την μέτρια απόδοση του στην εκτίμηση του μέσου ρυθμού παραγωγής για τιμές του ρ μικρότερες της μονάδας.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το συντελεστή διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης προέκυψε ότι , το μοντέλο του Kim εκτιμά χειρότερα το μέγεθος του TH όσο η τιμή του συντελεστή διασποράς μεγαλώνει ενώ τα υπόλοιπα δυο παρουσιάζουν μια σχετική σταθερότητα στις εκτιμήσεις τους για το εύρος τιμών του CV που εξετάστηκε με ακριβέστερο το μοντέλο του Buzacott.

Κατά την μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το συντελεστή διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης προέκυψε ότι , για τιμές του συντελεστή μέχρι και 0.8 το μοντέλο του Kim εκτιμά καλύτερα το μέγεθος ενώ για 1.5 το μοντέλο του Kouvatsos υπερικχύνει.

Αν κάποιος καλούταν να επιλέξει ένα από τα τρία μοντέλα πιο ελκυστική επιλογή αποτελεί το μοντέλο του Buzacott, αν ο επιλογέας ζητά προσεγγίσεις μόνο για τον μέσο ρυθμό παραγωγής. Αν το ζητούμενο ήταν η εκτίμηση και των δυο μέτρων απόδοσης ίσως η πιο 'σοφή' επιλογή να ήταν το μοντέλο του Kim. Τονίζεται εδώ ότι κανένα μοντέλο δεν υπερικχύνει σε όλες τις κατηγορίες ενός άλλου κι έτσι η επιλογή ενός και μόνο περικλείει αρκετούς συμβιβασμούς.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το συντελεστή διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης προέκυψε ότι , τα μοντέλα εκτιμούν καλύτερα τον μέσο ρυθμό παραγωγής για τιμές του συντελεστή διασποράς μεγαλύτερες της μονάδας (1.5) και πολύ μικρότερες αυτής (0.333). Για ενδιάμεσες, κοντά στην μονάδα, τιμές τα μοντέλα παρουσιάζουν αύξηση του σφάλματος εκτίμησης. Το μοντέλο του Kim παρουσιάζεται καλύτερο για τις τιμές 0.8 και 1.5 ενώ για 0.333 το μοντέλο του Buzacott.

Κατά την μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το συντελεστή διασποράς των χρόνων εξυπηρέτησης προέκυψε ότι , το σφάλμα των μοντέλων μεγαλώνει με την αύξηση της τιμής του συντελεστή διασποράς. Το μοντέλο του Kim αποτελεί το πιο ακριβές από τα δυο για όλες τις τιμές του συντελεστή διασποράς.

Αν κάποιος καλούταν να επιλέξει ένα από τα τρία μοντέλα το μοντέλο του Kim αποτελεί την ορθότερη επιλογή εκτιμώντας και τα δυο μεγέθη καλύτερα από τον ανταγωνισμό σχεδόν σε όλο το φάσμα τιμών του συντελεστή διασποράς των αφίξεων.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το μέγεθος του χώρου αναμονής προέκυψε ότι , όσο μεγαλώνει η χωρητικότητα του συστήματος τόσο πιο ασταθή γίνονται τα μοντέλα. Πιο αξιόπιστα μπορούν να χαρακτηριστούν τα μοντέλα του Kim (καλύτερες εκτιμήσεις για $n=2$ και $n=10$) και του Kouvatsos (καλύτερες εκτιμήσεις για $n=4$ και $n=20$).

Κατά την μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το μέγεθος του χώρου αναμονής προέκυψε ότι , το μοντέλο του Kim εκτιμά καλύτερα τον μέσο αριθμό πελατών για τις περιπτώσεις που το μέγεθος του χώρου αναμονής έχει τις τιμές 4.0,10.0 και 20.0 ενώ του Kouvatsos μόνο για την περίπτωση που είναι 2.0.

Αν κάποιος καλούταν να επιλέξει ένα από τα τρία μοντέλα πιο ελκυστική επιλογή αποτελεί το μοντέλο του Kim. Εκτιμά καλύτερα από τον ανταγωνισμό τον μέσο αριθμό πελατών (εξαιρείται η περίπτωση που το μέγεθος του χώρου αναμονής ισούται με 2.0)

και στην περίπτωση του μέσου ρυθμού παραγωγής μοιράζεται τις καλύτερες εκτιμήσεις με το μοντέλο του Kouvatsos (καλύτερες εκτιμήσεις για $n=4$ και $n=20$).

Δίνοντας μια συνολική εικόνα από όλα τα παραπάνω, το μοντέλο του Kim δείχνει το πιο ακριβές από τα τρία .

7.3 Προσεγγιστικά μοντέλα M/G/1/K

Για τη συγκεκριμένη κατηγορία αναμονητικών συστημάτων γίνεται σύγκριση τόσο μεταξύ των μαθηματικών μοντέλων που παράγουν αποτελέσματα αποκλειστικά για συστήματα M/G/1/K όσο και αυτών που εξετάστηκαν στο Κεφάλαιο 2 και εκτιμούν τα μέτρα απόδοσης για τα γενικότερα συστήματα G/G/1K. Τα τελευταία δε, είναι τα μόνα που εκτιμούν και το μέγεθος του μέσου αριθμού πελατών. Συνολικά τα μοντέλα που συγκεντρώθηκαν είναι τα παρακάτω:

- ✓ **Gelenbe (1975) M/G/1/K**
- ✓ **Kimura (1996) M/G/1/K**
- ✓ **Smith (2004) M/G/1/K**
- ✓ **Buzacott – Liu - Shantikumar (1994) G/G/1/K**
- ✓ **Kim-Chae (2001) G/G/1K**
- ✓ **Kouvatsos (1986) G/G/1/K**

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το ρ προέκυψε ότι ,η συμπεριφορά των μοντέλων σε σχέση με το ρ δεν μπορεί να ενταχθεί εύκολα και απόλυτα σε κάποιο κανόνα, αυτό που μπορεί να εξαχθεί σαν γενικό συμπέρασμα είναι ότι τα μοντέλα των Gelenbe και Buzacott παρουσιάζουν μεγαλύτερη σταθερότητα από τα υπόλοιπα.

Κατά την μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το ρ προέκυψε ότι , τα δυο μοντέλα που δίνουν εκτίμηση για το συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης (Kim, Kouvatsos) δεν διαφέρουν ουσιαστικά μεταξύ τους . Μοιράζονται από μια καλύτερη εκτίμηση, για $\rho=1.0$ του Kim και για $\rho=1.5$ του Kouvatsos, και για τις υπόλοιπες τιμές δεν παρουσιάζουν καμία διαφορά. Συνολικά οι εκτιμήσεις του μέσου αριθμού πελατών παρουσιάζουν μεγαλύτερο σφάλμα καθώς το ρ ανέρχεται από 0.4 σε 1.0, ενώ ισχύει το αντίθετο για το διάστημα από 1.5 ως και 2.0.

Η επιλογή ενός μόνο μοντέλου για την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής είναι εξαιρετικά δύσκολη ως αδύνατη, αυτό που ίσως θα μπορούσε να ειπωθεί με περισσότερη σιγουριά είναι το αντίθετο. Δηλαδή πιο μοντέλο δεν πρέπει να επιλεγεί. Σε ένα πρόβλημα λοιπόν, που χρειάζεται η πρόβλεψη μόνο του μέσου ρυθμού παραγωγής απορρίπτονται

τα μοντέλο των Smith και Kimura που κάνουν σταθερά κακές εκτιμήσεις. Στην περίπτωση που χρειάζονται και τα δυο μέτρα απόδοσης τα μοντέλα των Kim και Kouvatsos είναι σχεδόν ισοδύναμα.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το συντελεστή διασποράς των εξυπηρετήσεων προέκυψε ότι, τα μοντέλα M/G/1/K και ειδικότερα του Gelenbe υπερτερούν των αντίστοιχων G/G/1/K όσο ο συντελεστής διασποράς των αφίξεων έχει τιμές μικρότερες της μονάδας. Για τιμές μεγαλύτερες του ένα τα G/G/1/K ανεξαιρέτως μοντέλου ενδείκνυται για τον υπολογισμό του μέσου ρυθμού παραγωγής.

Κατά την μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το συντελεστή διασποράς των εξυπηρετήσεων προέκυψε ότι, το σφάλμα των μοντέλων μεγαλώνει με την αύξηση της τιμής του συντελεστή διασποράς. Το μοντέλο του Kim υπερτερεί του μοντέλου του Kouvatsos στην περίπτωση που ο συντελεστής διασποράς έχει τιμή 0.333. Σε κάθε άλλη περίπτωση η απόδοση των μοντέλων είναι η ίδια.

Αν κάποιος καλούταν να επιλέξει ένα από τα έξι μοντέλα πιο ελκυστική επιλογή αποτελεί το μοντέλο του Kim. Εκτιμά καλύτερα ή εξίσου με τον ανταγωνισμό τον μέσο αριθμό πελατών. Ο επιλογέας θα έπρεπε να συμβιβαστεί ωστόσο με την μέτρια απόδοση του στην εκτίμηση του μέσου ρυθμού παραγωγής για τιμές του συντελεστή διασποράς μικρότερες της μονάδας. Στην περίπτωση αυτή και με την προϋπόθεση ότι ο μέσος ρυθμός παραγωγής είναι το μοναδικό ζητούμενο το μοντέλο του Gelenbe υπερισχύει των υπολοίπων.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το μέγεθος του χώρου αναμονής προέκυψε ότι, τα μοντέλα M/G/1/K προσφέρουν μετρήσεις του μέσου ρυθμού παραγωγής με μεγαλύτερη ακρίβεια από τα G/G/1/K σχεδόν για όλες τις περιπτώσεις μεγέθους του χώρου αναμονής που εξετάζονται. Απ' αυτά ξεχωρίζουν τα μοντέλα του Gelenbe και κυρίως του Kimura.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το μέγεθος του χώρου αναμονής προέκυψε ότι, το μοντέλο του Kim εκτιμά καλύτερα τον μέσο αριθμό πελατών για τις περιπτώσεις που το μέγεθος του χώρου αναμονής έχει την τιμή 2.0 ενώ του Kouvatsos για την περίπτωση που είναι 4.0, στις υπόλοιπες περιπτώσεις οι μετρήσεις τους δεν διαφέρουν.

Ανάμεσα στα έξι μοντέλα αυτά που ξεχωρίζουν είναι το μοντέλο του Kim και αυτό του Kouvatsou, που κάνουν σχεδόν τις ίδιες εκτιμήσεις και για τα δυο μέτρα απόδοσης. Στην περίπτωση που ο μέσος ρυθμός παραγωγής είναι το μοναδικό ζητούμενο το μοντέλο του Kimura υπερισχύει των υπολοίπων.

7.4 Προσεγγιστικά μοντέλα G/G/m/K

Για τη συγκεκριμένη κατηγορία αναμονητικών συστημάτων συγκεντρώθηκαν τα ακόλουθα τρία μοντέλα :

- ✓ **Yao- Buzacott (1984)**
- ✓ **Choi-Kim-Chae (2003)**
- ✓ **Whitt (2003)**

Μόνο το μοντέλο του Buzacott προσεγγίζει τον μέσο αριθμό πελατών. Το γεγονός αυτό του χαρίζει ένα σαφές πλεονέκτημα όσον αφορά το θέμα επιλογή απέναντι στα άλλα.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το ρ προέκυψε ότι ,η συμπεριφορά των μοντέλων σε σχέση με το ρ δεν μπορεί να ενταχθεί εύκολα και απόλυτα σε κάποιο κανόνα, αυτό που μπορεί να εξαχθεί σαν γενικό συμπέρασμα είναι ότι το μοντέλο του Whitt εκτιμά καλύτερα τον μέσο ρυθμό παραγωγής για τιμές του ρ ίσες με 0.4 και 0.6 ενώ για όλες τις υπόλοιπες το μοντέλο του Buzacott αποτελεί την εγκυρότερη επιλογή.

Σύμφωνα λοιπόν, με τα παραπάνω αν κληθεί κάποιος να επιλέξει ένα από τα τρία μοντέλα αυτό του Buzacott αποτελεί την καλύτερη επιλογή.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το συντελεστή διασποράς των αφίξεων προέκυψε ότι , και τα τρία μοντέλα δίνουν την καλύτερη εκτίμηση τους για ενδιάμεση τιμή του συντελεστή διασποράς. Σταθερά καλύτερο από τα υπόλοιπα δυο το μοντέλο του Buzacott κάνει τις εγκυρότερες εκτιμήσεις για τον μέσο ρυθμό παραγωγής.

Κατά την μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το συντελεστή διασποράς των αφίξεων προέκυψε ότι , το μαθηματικό μοντέλο του Buzacott αδυνατεί να εκτιμήσει σωστά τον μέσο αριθμό πελατών για τιμές του συντελεστή διασποράς των αφίξεων μικρότερες της μονάδας. Για τιμές μεγαλύτερες του ένα φαίνεται ν' αποτελεί αξιόπιστο εργαλείο για την μέτρηση του συγκεκριμένου μεγέθους. Παρόλα αυτά δεν Υπάρχει ανταγωνισμός στην περίπτωση μέτρησης του μέσου αριθμού πελατών. Αφού λοιπόν το μοντέλο του Buzacott είναι το μοναδικό, είναι και το καλύτερο.

Ακόμα μια φορά το μοντέλο του Buzacott αποτελεί τη ιδανικότερη επιλογή υπερισχύοντας καθολικά του ανταγωνισμού όπου υπάρχει.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το συντελεστή διασποράς των εξυπηρετήσεων προέκυψε ότι , η καλύτερη εκτίμηση των μοντέλων εντοπίζεται για ενδιάμεση τιμή του συντελεστή διασποράς (0.8). Το μοντέλο του Buzacott ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα τόσο ως προς την ακρίβεια εκτίμησης όσο και ως προς την σταθερότητα του για το εξεταζόμενο εύρος τιμών του συντελεστή διασποράς.

Κατά την μέτρηση του μέσου αριθμού πελατών σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το συντελεστή διασποράς των εξυπηρετήσεων προέκυψε ότι , οι εκτιμήσεις του μοντέλου μπορούν να χαρακτηριστούν έγκυρες και ακριβείς με καλύτερη αυτή που προκύπτει για τιμή του συντελεστή διασποράς ίση με 0.8.

Και εδώ το μοντέλο του Buzacott δεν έχει αντίπαλο.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το μέγεθος του χώρου αναμονής προέκυψε ότι , το μοντέλο του Buzacott προσεγγίζει καλύτερα από τ' άλλα δυο μοντέλα (Kim,Whitt) το μέγεθος του μέσου ρυθμού παραγωγής για όλες τις εξεταζόμενες τιμές του μεγέθους του χώρου αναμονής, κάνει δε, την καλύτερη μέτρηση του για $n=10.0$. Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι είναι το μοναδικό μοντέλο που δίνει εκτίμηση για τον μέσο αριθμό πελατών το κάνει να μονοπωλεί το ενδιαφέρον για ακόμα μια φορά

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το αριθμό των βαθμίδων εξυπηρέτησης προέκυψε ότι , Η άνοδος του αριθμού των βαθμίδων εξυπηρέτησης δυσκολεύει τις εκτιμήσεις των μοντέλων. Το μοντέλο του Buzacott φαίνεται το εγκυρότερο από τα τρία.

Συνολικά το μοντέλο του Buzacott δεν έχει αντίπαλο σε καμία κατηγορία, ψάχνοντας την δεύτερη επιλογή το μοντέλο του Kim φαίνεται επικρατέστερο του Whitt.

7.5 Προσεγγιστικά μοντέλα M/G/m/K

Τα μοντέλα που βρέθηκαν στην βιβλιογραφία και αναφέρονται σε αναμονητικά συστήματα M/G/m/K είναι τα ακόλουθα: Kimura (2000), Hokstad (1978), Tijms-Van Hoorn (1982), Miyazawa (1986), Smith (2005). Από αυτά στα πειράματα συμμετέχει μόνο το τελευταίο (Smith), ο λόγος είναι ότι τα υπόλοιπα μοντέλα προτείνονται προσεγγιστικοί τύποι των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης στους οποίους περιλαμβάνονται ολοκληρώματα της συνάρτησης κατανομής των χρόνων εξυπηρέτησης τα οποία δεν καταλήγουν σε λύση κλειστής μορφής. Στην σύγκριση μαζί με το μοντέλο του Smith συμμετέχουν και τα μοντέλα που αναφέρονται στο γενικότερα συστήματα G/G/m/K. Συνολικά τα μοντέλα που συγκεντρώθηκαν είναι τα παρακάτω:

- ✓ **Smith (2004) M/G/m/K**
- ✓ **Yao- Buzacott (1984) G/G/m/K**
- ✓ **Choi-Kim-Chae (2003) G/G/m/K**
- ✓ **Whitt (2003) G/G/m/K**

Το μοντέλο του Buzacott παραμένει το μοναδικό που προτείνει προσέγγιση τον μέσο αριθμό πελατών. Το γεγονός αυτό του χαρίζει ένα σαφές πλεονέκτημα όσον αφορά το θέμα επιλογής απέναντι στα άλλα.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το ρ προέκυψε ότι, Η συμπεριφορά των μοντέλων σε σχέση με το ρ δεν μπορεί να ενταχθεί εύκολα και απόλυτα σε κάποιο κανόνα, αυτό που μπορεί να εξαχθεί σαν παρατήρηση είναι ότι τα μοντέλα των Buzacott και Smith εμφανίζονται πιο ακριβή από τα υπόλοιπα για όλες τις εξεταζόμενες τιμές του ρ .

Για τιμές του ρ ίσες με 2.0 και 0.6 το μοντέλο του Smith υπερτερεί του Buzacott όσον αφορά την ακρίβεια της εκτίμησης του μέσου ρυθμού παραγωγής χωρίς όμως να απειλεί την κυριαρχία του δεύτερου. Όταν τίθεται το ζήτημα επιλογής το μοντέλο του Buzacott αποτελεί την βέλτιστη επιλογή.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας συντελεστή διασπορά εξυπηρέτησεων προέκυψε ότι, το μοντέλο του Buzacott ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα τόσο ως προς την ακρίβεια εκτίμησης όσο και ως προς την σταθερότητα του για το εξεταζόμενο εύρος τιμών του συντελεστή διασποράς.

Δεν τίθεται θέμα επιλογής για ακόμα μια φορά.

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας το μέγεθος του χώρου αναμονής προέκυψε ότι, τα μοντέλα των Whitt και Buzacott ξεχωρίζουν από τα υπόλοιπα όσον αφορά την ακρίβεια των εκτιμήσεων τους, ενώ και το μοντέλο του Smith εκτιμά με εξαιρετική ακρίβεια τον μέσο ρυθμό παραγωγής για σύστημά με 10 θέσεις αναμονής.

Το μοντέλο του Whitt σπάει την κυριαρχία του μοντέλου του Buzacott, όσον αφορά φυσικά την εκτίμηση του μέσου ρυθμού παραγωγής. Κάνει καλύτερες εκτιμήσεις σε δυο περιπτώσεις ($n=2, n=5$) έναντι μιας του Buzacott ($n=20$) και μιας του Smith ($n=10$).

Κατά την μέτρηση του μέσου ρυθμού παραγωγής σε πειράματα που έγιναν μεταβάλλοντας τον αριθμό των βαθμίδων εξυπηρέτησης προέκυψε ότι, η άνοδος του αριθμού των βαθμίδων εξυπηρέτησης δυσκολεύει τις εκτιμήσεις των μοντέλων. Το μοντέλο του Buzacott φαίνεται το εγκυρότερο από τα τρία.

Συνολικά το μοντέλο του Buzacott είναι μακράν του ανταγωνισμού. Ακολουθούν τα μοντέλα του Smith και του Whitt ενώ στην τελευταία θέση βρίσκεται του Kim.

7.6 Επεκτάσεις

Σαν συνέχεια της έρευνας που παρουσιάστηκε προτείνονται τα ακόλουθα:

- Διεξαγωγή πειραμάτων με ακόμα περισσότερες τιμές στις μεταβλητές. Με αυτό τον τρόπο θα δημιουργηθεί μια πιο καθαρή εικόνα της συμπεριφοράς των μοντέλων και της εγκυρότητας των προσεγγίσεων για τα ζητούμενα μέτρα απόδοσης.
- Συνδυασμός διαφορετικών κατανομών για να φανεί κατά πόσο μπορεί να επηρεάσει μια συγκεκριμένη κατανομή την απόδοση ενός μοντέλου.
- Για την κατάταξη των μοντέλων να εφαρμοσθεί πολυκριτήρια ανάλυση η οποία θα λαμβάνει υπόψη της εκτός από την ποιότητα των αποτελεσμάτων και τη φιλικότητα του μοντέλου προς τον χρήστη.

Παράρτημα

Interface Προσομοιωτή

The screenshot shows a software interface for a simulation. It is titled "Form1" in the window header. The interface is divided into two main columns: "ARRIVALS" and "SERVICE".

Under "ARRIVALS":

- Variation Coefficients:** Three radio buttons for CV=0, CV>=1, and CV<1.
- Distributions:** Six radio buttons: Deterministic, Uniform, Expo, Erlang, Gamma, and Weibull. Each has an adjacent input field. The "Expo" option is selected, and its input field contains "CV=1".

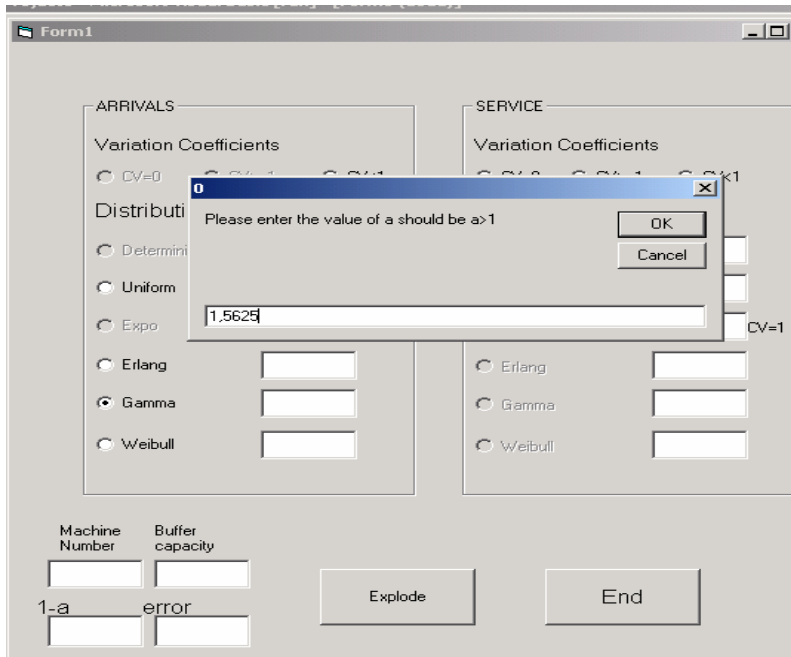
Under "SERVICE":

- Variation Coefficients:** Three radio buttons for CV=0, CV>=1, and CV<1.
- Distributions:** Six radio buttons: Deterministic, Uniform, Expo, Erlang, Gamma, and Weibull. Each has an adjacent input field. The "Expo" option is selected, and its input field contains "CV=1".

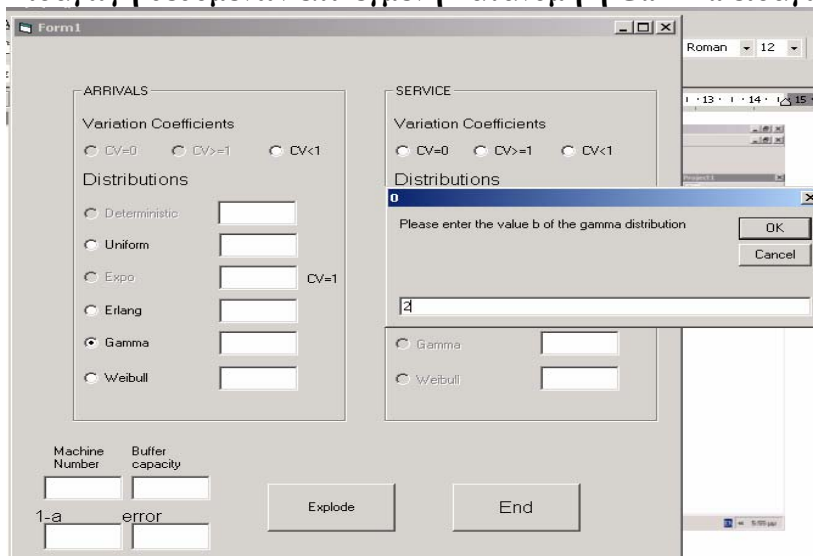
At the bottom of the interface:

- Two input fields labeled "Machine Number" and "Buffer capacity".
- Two buttons: "Explode" and "End".
- Below the "Machine Number" field, the text "1-a" is visible.
- Below the "Buffer capacity" field, the text "error" is visible.

Εισαγωγή δεδομένων επιλεγμένη κατανομή η Gamma εισαγωγή του α της Gamma



Εισαγωγή δεδομένων επιλεγμένη κατανομή η Gamma εισαγωγή του β της Gamma



Εισαγωγή δεδομένων επιλογή του επιτρεπόμενου σφάλματος και του διαστήματος εμπιστοσύνης:

The screenshot shows a software window titled "Form1" with two main configuration panels: "ARRIVALS" and "SERVICE".

- ARRIVALS Panel:**
 - Variation Coefficients: CV=0, CV>=1, CV<1
 - Distributions:
 - Deterministic
 - Uniform
 - Expo
 - Erlang
 - Gamma: 3,125
 - Weibull
- SERVICE Panel:**
 - Variation Coefficients: CV=0, CV>=1, CV<1
 - Distributions:
 - Deterministic
 - Uniform
 - Expo: 2,5
 - Erlang
 - Gamma
 - Weibull

At the bottom of the form, there are input fields and buttons:

- Machine Number: 1
- Buffer capacity: 5
- 1-a: 0.98
- error: 0.01
- Buttons: "Explode" and "End"

Κώδικας

Αρχικοποιήσεις

```
Public k#, alphaA#, bhataA#, gamaA#, alphaS#, bhataS#, gamaS#
Public Pn_G, Po_G, L_G, TH_G, meanL, meanTH, rho, Cva, Cvs As Variant
Public counter, icount, irow, icol As Integer
Private Sub CmdExplode_Click()
```

```
Dim xlApp As Excel.Application
Dim xlBook As Excel.Workbook
Dim xlSheet As Excel.Worksheet
```

```
Set xlApp = CreateObject("Excel.Application")
Set xlBook = xlApp.Workbooks.Add
Set xlSheet = xlBook.Worksheets(1)
xlSheet.Activate
counter = 0
irow = 1
N% = txtMachines.Text
B% = txtBuffer.Text
```

```

For Index = 0 To 5
If txtArvRate(Index).Enabled = True Then
ArvRate = txtArvRate(Index).Text
ArvIndex = Index
End If
Next Index

For Index = 0 To 5
If txtSrvRate(Index).Enabled = True Then
SrvRate = txtSrvRate(Index).Text
SrvIndex = Index
End If
Next Index
Error = txtError.Text
a = (1 - Val(txtTrust.Text)) / 2
Z = Normal()
If txtArvRate(2).Enabled = True Then
Cva = 1
Else
Cva = 1 / Sqr(alphaA)
End If
Cvs = 1 / Sqr(alphaS)
'Debug.Print Z
ReDim s(N), T(N), P(N% + B%), MP(N% + B%), VP(N% + B%), VPT(N% + B%),
VarP(N% + B%), test(N% + B%), test_2(N% + B%), meanP(N% + B%)
'Do Until counter = 100
nsim = 1

Do Until nsim >= 5
Call EpomenoGegonos(N, ArvRate, SrvRate, T, PR, s, B, TH, ArvIndex, SrvIndex,
alphaA, alphaS, bhtaA, bhtaS, gamaA, gamaS)
If L < 0 Then
L = L + time
End If
For i = 0 To N + B
If P(i) < 0 Then
P(i) = P(i) + time
End If
Next i
Do While Lista.IsEmpty() = False
Lista.RemoveFromFront (ejectItem)
Loop
Vtime = Vtime + time ^ 2
Mtime = Mtime + time
ML = ML + L

```

```

VL = VL + L ^ 2
VLT = VLT + (L * time)
Mprod = Mprod + Prod
Vprod = Vprod + Prod ^ 2
VTprod = VTprod + (Prod * time)
For i = 0 To N + B
MP(i) = MP(i) + P(i)
VP(i) = VP(i) + P(i) ^ 2
VPT(i) = VPT(i) + (P(i) * time)
'If nsim = 1 Then GoTo line1
'VarP(i) = ((1 / (nsim - 1)) * (VP(i) - (MP(i) ^ 2 / nsim))) _
'- (2 * (MP(i) / Mtime) * (1 / (nsim - 1)) * (VPT(i) - Mtime * (MP(i) / nsim))) _
'+ (((MP(i) / Mtime) ^ 2) * (1 / (nsim - 1)) * (Vtime - (Mtime ^ 2 / nsim)))
'line1:
Next i
nsim = nsim + 1
time = 0

```

Loop

```

Call EpomenoGegonos(N, ArvRate, SrvRate, T, PR, s, B, TH, ArvIndex, SrvIndex,
alphaA, alphaS, bhataA, bhataS, gamaA, gamaS)
  If L < 0 Then
    L = L + time
  End If
  For k = 0 To N + B
    If P(k) < 0 Then
      P(k) = P(k) + time
    End If
  Next k
  Do While Lista.IsEmpty() = False
    Lista.RemoveFromFront (ejectItem)
    Loop
    Vtime = Vtime + time ^ 2
    Mtime = Mtime + time
    ML = ML + L
    VL = VL + L ^ 2
    VLT = VLT + (L * time)
    Mprod = Mprod + Prod
    Vprod = Vprod + Prod ^ 2
    VTprod = VTprod + (Prod * time)

```

line2:

```

For i = 0 To N + B
MP(i) = MP(i) + P(i)
VP(i) = VP(i) + P(i) ^ 2
VPT(i) = VPT(i) + (P(i) * time)
VarP(i) = ((1 / (nsim - 1)) * (VP(i) - (MP(i) ^ 2 / nsim))) _
- (2 * (MP(i) / Mtime) * (1 / (nsim - 1)) * (VPT(i) - Mtime * (MP(i) / nsim))) _
+ (((MP(i) / Mtime) ^ 2) * (1 / (nsim - 1)) * (Vtime - (Mtime ^ 2 / nsim)))
'test(i) = 0
test(i) = (Z / (Mtime / nsim)) * (Sqr(VarP(i) / nsim))
test_2(i) = (Error * (MP(i) / Mtime)) / (1 + Error)
Next i
For j = 0 To N + B
If test(j) > test_2(j) Or testL > testL_2 Or testPR > testPR_2 Then
nsim = nsim + 1
time = 0

Call EpomenoGegonos(N, ArvRate, SrvRate, T, PR, s, B, TH, ArvIndex, SrvIndex,
alphaA, alphaS, bhtaA, bhtaS, gamaA, gamaS)
  If L < 0 Then
L = L + time
  End If
For k = 0 To N + B
  If P(k) < 0 Then
P(k) = P(k) + time
  End If
Next k
  Do While Lista.IsEmpty() = False
Lista.RemoveFromFront (ejectItem)
  Loop
Vtime = Vtime + time ^ 2
Mtime = Mtime + time
ML = ML + L
VL = VL + L ^ 2
VLT = VLT + (L * time)
varL = ((1 / (nsim - 1)) * (VL - (ML ^ 2 / nsim))) _
- (2 * (ML / Mtime) * (1 / (nsim - 1)) * (VLT - Mtime * (ML / nsim))) _
+ (((ML / Mtime) ^ 2) * (1 / (nsim - 1)) * (Vtime - (Mtime ^ 2 / nsim)))
testL = (Z / (Mtime / nsim)) * Sqr(varL / nsim)
testL_2 = (Error * (ML / Mtime)) / (1 + Error)

Mprod = Mprod + Prod
Vprod = Vprod + Prod ^ 2
VTprod = VTprod + (time * Prod)
VarProd = ((1 / (nsim - 1)) * (Vprod - (Mprod ^ 2 / nsim))) _
- (2 * (Mprod / Mtime) * (1 / (nsim - 1)) * (VTprod - Mtime * (Mprod / nsim))) _
+ (((Mprod / Mtime) ^ 2) * (1 / (nsim - 1)) * (Vtime - (Mtime ^ 2 / nsim)))

```

```

testPR = (Z / (Mtime / nsim)) * Sqr(VarProd / nsim)
testPR_2 = (Error * (Mprod / Mtime)) / (1 + Error)
GoTo line2
End If
Next j
Call Buzacott(Cva, Cvs, N, B)
Call Kim(Cva, Cvs, N, B)

```

```

icol = 1
For icol = 1 To N + B + 1
xlSheet.Cells(1, icol) = (MP(icol - 1) / Mtime)
xlSheet.Cells(3, icol) = PKim(icol - 1)
Next icol
'xlSheet.Cells(1, 2) = (MP(1) / Mtime)
'xlSheet.Cells(1, 3) = (MP(2) / Mtime)
'xlSheet.Cells(1, 4) = (MP(3) / Mtime)
'xlSheet.Cells(irow, 5) = (MP(4) / Mtime)
'xlSheet.Cells(irow, 6) = (MP(5) / Mtime)
'xlSheet.Cells(irow, 7) = (MP(6) / Mtime)
'xlSheet.Cells(irow, 8) = (MP(7) / Mtime)
xlSheet.Cells(2, 1) = Po
xlSheet.Cells(2, icol - 1) = Pn
xlSheet.Cells(1, icol) = (Mprod / Mtime)
xlSheet.Cells(2, icol) = THbuz
xlSheet.Cells(3, icol) = THKim
icol = icol + 1
xlSheet.Cells(1, icol) = (ML / Mtime)
xlSheet.Cells(2, icol) = Jb

```

```
xlSheet.Application.Visible = True
```

```
End Sub
```

```

Private Sub Command1_Click()
End
End Sub

```

```

Private Sub OptionA1_Click(Index As Integer)
Select Case Index
Case 0 'CV=0

```

```
OptionA2(0).Enabled = True
OptionA1(1).Enabled = False
OptionA1(2).Enabled = False
```

```
Case 1 'CV>=1
```

```
OptionA1(0).Enabled = False
OptionA1(2).Enabled = False
OptionA2(2).Enabled = True
OptionA2(4).Enabled = True
OptionA2(5).Enabled = True
```

```
Case 2 'CV<1
```

```
OptionA1(0).Enabled = False
OptionA1(1).Enabled = False
OptionA2(1).Enabled = True
OptionA2(3).Enabled = True
OptionA2(4).Enabled = True
OptionA2(5).Enabled = True
End Select
End Sub
```

```
Public Sub OptionA2_Click(Index As Integer)
```

```
Select Case Index
```

```
Case 0
```

```
txtArvRate(0).Enabled = True
```

```
Case 1 'UNIFORM
```

```
txtArvRate(1).Enabled = True
```

```
Cls
```

```
prompt$ = "doste to a omoiomorfhs katanomhs"
```

```
alphaA = InputBox(prompt$, alphaA#)
```

```
prompt$ = "doste to b ths omoiomorfhs katanomhs b>a"
```

```
bhtaA = InputBox(prompt$, bhtaA#)
```

```
txtArvRate(1).Text = (alphaA + bhtaA) / 2
```

```
Case 2 'EXPO
```

```
txtArvRate(2).Enabled = True
```

```
Case 3 'ERLANG
```

```
txtArvRate(3).Enabled = True
```

```
If OptionA1(2).Enabled = True Then
```

```
prompt$ = "Dose to alpha"
```

```

alphaA = InputBox(prompt$, alphaA#)
End If
prompt$ = "Dose to bhta"
bhtaA = InputBox(prompt$, bhtaA#)
txtArvRate(3).Text = bhtaA / alphaA

```

Case 4 'GAMMA

```

txtArvRate(4).Enabled = True
If OptionA1(1).Enabled = True Then
prompt$ = "Please enter the value of a. a Should be 0<a>1 or 1 for Cv=1 "
alphaA = InputBox(prompt$, alphaA#)
End If
If OptionA1(2).Enabled = True Then
prompt$ = "Please enter the value of a should be a>1"
alphaA = InputBox(prompt$, alphaA#)
End If
prompt$ = "Please enter the value b of the gamma distribution"
bhtaA = InputBox(prompt$, bhtaA#)
txtArvRate(4).Text = alphaA * bhtaA

```

Case 5 'WEIBULL

```

txtArvRate(5).Enabled = True
If OptionA1(1).Enabled = True Then
prompt$ = "Doste to a .Gia a=1 CV=1 allios a<1 "
alphaA = InputBox(prompt$, alphaA#)
End If
If OptionA2(1).Enabled = True Then
prompt$ = "doste to a>1"
alphaA = InputBox(prompt$, alphaA#)
End If
prompt$ = "doste to b"
bhtaA = InputBox(prompt$, bhtaA#)
prompt$ = "doste to g"
gamaA = InputBox(prompt$, gamaA#)
txtArvRate(5).Text = gamaA + (bhtaA * gama(alphaA, alphaS))
End Select
End Sub

```

```

Private Sub OptionS1_Click(Index As Integer)
Select Case Index

```

Case 0 'CV=0

```

OptionS1(1).Enabled = False
OptionS1(2).Enabled = False
OptionS2(0).Enabled = True

```



```
Case 1 'CV>=1
OptionS1(0).Enabled = False
OptionS1(2).Enabled = False
OptionS2(2).Enabled = True
OptionS2(4).Enabled = True
OptionS2(5).Enabled = True
```

```
Case 2 'CV<1
OptionS1(0).Enabled = False
OptionS1(1).Enabled = False
OptionS2(1).Enabled = True
OptionS2(3).Enabled = True
OptionS2(4).Enabled = True
OptionS2(5).Enabled = True
End Select
End Sub
```

```
Private Sub OptionS2_Click(Index As Integer)
Select Case Index
Case 0
txtSrvRate(0).Enabled = True
```

```
Case 1 'UNIFORM
txtSrvRate(1).Enabled = True
Cls
prompt$ = "doste tis parametrous ths omoiomorfh a kai meta b"
alphaS = InputBox(prompt$, alphaS#)
bhtaS = InputBox(prompt$, bhtaS#)
txtSrvRate(1).Text = (alphaS + bhtaS) / 2
```

```
Case 2 'EXPO
txtSrvRate(2).Enabled = True
```

```
Case 3 'ERLANG
txtSrvRate(3).Enabled = True
If OptionS1(2).Enabled = True Then
prompt$ = "Dose to a"
alphaS = InputBox(prompt$, alphaS#)
End If
If OptionS1(2).Enabled = True Then
prompt$ = "Dose to bhta :integer"
bhtaS = InputBox(prompt$, bhtaS#)
txtSrvRate(3) = bhtaS / alphaS
End If
```

Case 4 'GAMMA

```
txtSrvRate(4).Enabled = True
If OptionS1(1).Enabled = True Then
prompt$ = "Doste to a. 0<a>1 Gia CV=1 a=1"
alphaS = InputBox(prompt$, alphaS#)
End If
If OptionS1(2).Enabled = True Then
prompt$ = "Doste to a>1"
alphaS = InputBox(prompt$, alphaS#)
End If
prompt$ = "Doste to b ths gamma"
bhtaS = InputBox(prompt$, bhtaS#)
txtSrvRate(4).Text = alphaS * bhtaS
```

Case 5 'WEIBULL

```
txtSrvRate(5).Enabled = True
If OptionS1(1).Enabled = True Then
prompt$ = "Doste to a .Gia a=1 CV=1 allios a<1"
alphaS = InputBox(prompt$, alphaS#)
End If
If OptionS1(2).Enabled = True Then
prompt$ = "doste to a>1"
alphaS = InputBox(prompt$, alphaS#)
End If
prompt$ = "doste to b"
bhtaS = InputBox(prompt$, bhtaS#)
prompt$ = "doste to g"
gamaS = InputBox(prompt$, gamaS#)
txtSrvRate(5).Text = gamaS + bhtaS * (gama(alphaA, alphaS))
End Select
```

End Sub

Private Function gama(alphaA, alphaS) As Variant

'proseggish Stirling

Dim e, PI, ze, sinh As Double

e = 2.71828

PI = 3.14159

If OptionA2(5).Enabled = True Then

ze = (1 / alphaA) + 1

sinh = ((e ^ (1 / ze)) - (e ^ (-1 / ze))) / 2

gama = Sqr((2 * PI) / ze) * (ze / e * Sqr(sinh)) ^ ze

End If

If OptionS2(5).Enabled = True Then

```

ze = (1 / alphaS) + 1
sinh = ((e ^ (1 / ze)) - (e ^ (-1 / ze))) / 2
gama = Sqr((2 * PI) / ze) * (ze / e * Sqr(sinh)) ^ ze
End If
End Function

```

Γενήτριες

```

Public Function rand_Expo(mesos) As Double
'Dim NumberEX As Double
Randomize
rand_Expo = -(mesos) * Log(Rnd())
End Function

```

```

Public Function rand_Uniform(alpha, bhta)
'Dim NumberUA As Double
'NumberUA = Rnd()
Randomize
rand_Uniform = alpha + ((bhta - alpha) * Rnd())
End Function
Public Function rand_Gamma(alpha, bhta) As Variant

```

```

Dim PI, BI, Y, U1, U2, e As Variant
Dim aa, kiou, DA, LES, VI, VIS, MI As Variant

```

```
e = 2.71828
```

```
If 0 < alpha And alpha < 1 Then
```

```
BI = (e + alpha) / e
```

```
line1:
```

```
Randomize
```

```
U1 = Rnd()
```

```
PI = BI * U1
```

```
If PI <= 1 Then
```

```
Y = PI ^ (1 / alpha)
```

```
Randomize
```

```
U2 = Rnd()
```

```
    If U2 <= e ^ (-Y) Then
```

```

    rand_Gamma = Y * bhta
    Else: GoTo line1
    End If
End If
If PI > 1 Then
Y = -Log((BI - PI) / alpha)
Randomize
U2 = Rnd
    If U2 <= Y ^ (alpha - 1) Then
        rand_Gamma = Y * bhta
        Else: GoTo line1
        End If
    End If
End If

If alpha > 1 Then

aa = Sqr(2 * alpha - 1)
BI = alpha - Log(4)
kiou = alpha + (1 / aa)
DA = 4.5
LES = 1 + Log(DA)

line2:
Randomize
U1 = Rnd()
Randomize
U2 = Rnd()

VI = aa * Log(U1 / (1 - U1))
Y = alpha * e ^ VI
VIS = (U1 ^ 2) * U2
MI = BI + (kiou * VI) - Y

If MI + LES - (DA * VIS) >= 0 Then
    rand_Gamma = Y * bhta
    ElseIf MI > Log(VIS) Then
        rand_Gamma = Y * bhta
    Else: GoTo line2
    End If
End If
If alpha = 1 Then
mesos = alpha * bhta
rand_Gamma = rand_Expo(mesos)
End If
End Function

```

```

Public Function rand_Weibull(alpha, bhta, gama) As Variant
Dim Uw As Double
Uw = Rnd()
rand_Weibull = gama + ((-Log(Uw)) ^ (1 / alpha)) * bhta
End Function
Public Function rand_Erlang(alpha, bhta)
Dim UErl, Umult As Variant
Dim erl As Integer 'metrhths
UErl = 1
Umult = 1
For erl = 1 To bhta
Randomize
UErl = Rnd()
Umult = Umult * UErl
Next erl
rand_Erlang = (-1 / alpha) * (Log(Umult))

End Function

```

Αλγόριθμος

Option Explicit

```

Dim s() As Integer 'katastash mhxanon
Public T() As Variant 'xronos epomenou gegonotos se kathe mhxanh
Public B As Integer 'xorhtikothta apothikhhs
Public L As Double
Public time As Variant 'roloi prosomoiwshs
Public N As Integer 'arithmos mhxanon
Public ArvRate As Variant, SrvRate As Variant 'Ruthmoi afixeon-exipirethshs
Dim ArvIndex As Integer, SrvIndex As Integer 'oi deiktes bash ton ipoion kaleitai h
katallhlh gennhtria
Public mesos As Variant 'metavlhth pou tha xrhsimopieitai apo th gennhtria
Public Prod As Variant 'Paragogh
Public Lost As Integer
Dim i As Integer
Dim mhx As Integer
Public P() As Double
Dim ejectItem As Variant
Public alpha, bhta, gama As Variant
'Dim alphaA As Integer, bhtaA As Integer
'Dim alphaS As Integer, bhtaS As Integer
Dim U As Variant 'tuxaios arithmos
Public Lista As New CList
Public cust As Integer
Public l_meso, m_meso As Double
Public mit, mst As Variant

```

```
Public nstop As Integer
Public tsim As Variant
Public rho As Variant
```

```
Public Sub EpomenoGegonos(N, ArvRate, SrvRate, T, PR, s, B, TH, ArvIndex,
SrvIndex, alphaA, alphaS, bhataA, bhataS, gamaA, gamaS)
mit = 1 / ArvRate
mst = 1 / SrvRate
'rho = mit / (N * mst)
'If rho > 1 Then
'tsim = 5 * ((1 - rho ^ (N + B - 1)) / (1 - rho)) * (1 / (mit + (N * mst)))
'End If
'If mit >= (mst / N) Then
nstop = 0
'Else
' nstop = N + B
'End If
Prod = 0
L = 0
For i = 0 To N + B
P(i) = 0
Next i

For i = 1 To N
Lista.InsertAtBack (i)
s(i) = 0
T(i) = 1E+308
Next i
time = 0
L = L - time
cust = 1
```

```
    Select Case ArvIndex
```

```
        Case 0
```

```
        'deterministic
```

```
        Case 1 'UNIFORM
```

```
        U = 0
```

```
        alpha = alphaA
```

```
        bhata = bhataA
```

```
        U = rand_Uniform(alpha, bhata)
```

Case 2 'EXPO

U = 0

mesos = ArvRate

U = rand_Expo(mesos)

Case 3 'ERLANG

alpha = alphaA

bhta = bhtaA

U = rand_Erlang(alpha, bhta)

Case 4 'GAMMA

alpha = alphaA

bhta = bhtaA

U = 0

U = rand_Gamma(alpha, bhta)

Case 5 'WEIBULL

alpha = alphaA

bhta = bhtaA

gama = gamaA

U = 0

U = rand_Weibull(alpha, bhta, gama)

End Select

T(0) = U

Select Case SrvIndex

Case 0

'Detrministic

Case 1 'UNIFORM

U = 0

alpha = alphaS

bhta = bhtaS

U = rand_Uniform(alpha, bhta)

Case 2 'EXPO

U = 0

mesos = SrvRate

U = rand_Expo(mesos)

Case 3 'ERLANG

alpha = alphaS

bhta = bhtaS

U = rand_Erlang(alpha, bhta)

```

Case 4 'GAMMA
U = 0
alpha = alphaS
bhta = bhtaS
U = rand_Gamma(alpha, bhta)

Case 5
U = 0
alpha = alphaS
bhta = bhtaS
gama = gamaS
U = rand_Weibull(alpha, bhta, gama)
End Select
i = Lista.RemoveFromFront(ejectItem)
T(i) = U
P(cust) = P(cust) - time

```

start:

```

Call mini(T, N, B)
time = T(mhx)
If mxh = 0 Then GoTo Arrivals
If mxh <> 0 Then GoTo Service
'If time >= tsim Then Exit Sub

```

Arrivals:

```

'P(cust) = P(cust) + time
'L = L - time

If cust = nstop Then Exit Sub
If cust <= N And cust <> 0 And Lista.IsEmpty() = False Then
i = Lista.RemoveFromFront(ejectItem)
s(i) = 1
Select Case SrvIndex

```

```

Case 0
'Detrministic

```

```

Case 1 'UNIFORM
U = 0
alpha = alphaS
bhta = bhtaS
U = rand_Uniform(alpha, bhta)

```



```

Case 2 'EXPO
U = 0
mesos = SrvRate
U = rand_Expo(mesos)

Case 3 'ERLANG
alpha = alphaS
bhta = bhtaS
U = rand_Erlang(alpha, bhta)

Case 4 'GAMMA
U = 0
alpha = alphaS
bhta = bhtaS
U = rand_Gamma(alpha, bhta)

Case 5
U = 0
alpha = alphaS
bhta = bhtaS
gama = gamaS
U = rand_Weibull(alpha, bhta, gama)
End Select
T(i) = time + U
P(cust) = P(cust) + time
cust = cust + 1
P(cust) = P(cust) - time
L = L - time
Select Case ArvIndex
Case 0
'deterministic

Case 1 'UNIFORM
U = 0
alpha = alphaA
bhta = bhtaA
U = rand_Uniform(alpha, bhta)

Case 2 'EXPO
U = 0
mesos = ArvRate
U = rand_Expo(mesos)

Case 3 'ERLANG
alpha = alphaA
bhta = bhtaA

```

```

U = rand_Erlang(alpha, bhta)

Case 4 'GAMMA
U = 0
alpha = alphaA
bhta = bhtaA
U = rand_Gamma(alpha, bhta)

Case 5 'WEIBULL
U = 0
alpha = alphaA
bhta = bhtaA
gama = gamaA
U = rand_Weibull(alpha, bhta, gama)
End Select
T(0) = time + U
GoTo start
End If
If cust = N + B Then
' Lost = Lost + 1
Select Case ArvIndex
Case 0
'deterministic

Case 1 'UNIFORM
U = 0
alpha = alphaA
bhta = bhtaA
U = rand_Uniform(alpha, bhta)

Case 2 'EXPO
U = 0
mesos = ArvRate
U = rand_Expo(mesos)

Case 3 'ERLANG
alpha = alphaA
bhta = bhtaA
U = rand_Erlang(alpha, bhta)

Case 4 'GAMMA
U = 0
alpha = alphaA
bhta = bhtaA
U = rand_Gamma(alpha, bhta)

```

```

    Case 5 'WEIBULL
    U = 0
    alpha = alphaA
    bhta = bhtaA
    gama = gamaA
    U = rand_Weibull(alpha, bhta, gama)
    End Select
T(0) = time + U
GoTo start
Else
Select Case ArvIndex
    Case 0
    'deterministic

    Case 1 'UNIFORM
    U = 0
    alpha = alphaA
    bhta = bhtaA
    U = rand_Uniform(alpha, bhta)

    Case 2 'EXPO
    U = 0
    mesos = ArvRate
    U = rand_Expo(mesos)

    Case 3 'ERLANG
    alpha = alphaA
    bhta = bhtaA
    U = rand_Erlang(alpha, bhta)

    Case 4 'GAMMA
    U = 0
    alpha = alphaA
    bhta = bhtaA
    U = rand_Gamma(alpha, bhta)

    Case 5 'WEIBULL
    U = 0
    alpha = alphaA
    bhta = bhtaA
    gama = gamaA
    U = rand_Weibull(alpha, bhta, gama)
    End Select
T(0) = time + U
P(cust) = P(cust) + time

```

```
    cust = cust + 1
    P(cust) = P(cust) - time
    L = L - time
    GoTo start
End If
```

Service:

```
If cust = nstop Then GoTo bass
Prod = Prod + 1
L = L + time
P(cust) = P(cust) + time
cust = cust - 1
P(cust) = P(cust) - time
```

```
If cust < N And Lista.IsEmpty() Then
bass:
```

```
    s(mhx) = 0
    T(mhx) = 1E+308
    Lista.InsertAtBack (mhx)
    'P(cust) = P(cust) - time
    GoTo start
```

```
Else
```

```
    Select Case SrvIndex
```

```
        Case 0
            'Detrministic
```

```
        Case 1 'UNIFORM
            U = 0
            alpha = alphaS
            bhta = bhtaS
            U = rand_Uniform(alpha, bhta)
```

```
        Case 2 'EXPO
            U = 0
            mesos = SrvRate
            U = rand_Expo(mesos)
```

```
        Case 3 'ERLANG
            alpha = alphaS
```

```

    bhta = bhtaS
    U = rand_Erlang(alpha, bhta)

    Case 4 'GAMMA
    U = 0
    alpha = alphaS
    bhta = bhtaS
    U = rand_Gamma(alpha, bhta)

    Case 5
    U = 0
    alpha = alphaS
    bhta = bhtaS
    gama = gamaS
    U = rand_Weibull(alpha, bhta, gama)
    End Select
    T(mhx) = time + U
GoTo start
End If
End Sub

```

```

Public Sub mini(T, N, B)
Dim Min As Double
Dim j As Integer
Min = 1E+308
j = 0
While j <= N
    If T(j) < Min Then
        Min = T(j)
        mx = j
    End If
    j = j + 1
Wend

End Sub

```

Μοντέλα G/G/m/K

```

Option Explicit
Public mbuz(), Sbuz(), lbuz(), Abuz(), ab(), bb(), gb(), zb() As Variant
Public hN, ho, Po, Pn, Pid, Jb, Bs, DeltaB, sum1b, sum2b, q, minbuz, THbuz As Variant
Public gk(), lk(), mk(), PaK(), PKim(), gink()
Public akim, bkim, aRkim, bRkim, Nkim, gin1k, gin2k, gin3k, FiK, jk, mkim, roK,
THKim, factorial, sumk, LqKim, LsKim

```

```

Public Sub Buzacott(Cva, Cvs, N, B)
'Option Base 1
ReDim mbuz(N + B), Sbuz(N + B), lbuz(N + B), Abuz(N + B), ab(N + B), bb(N + B) _
, gb(N + B), zb(N + B)
q = 0.538823612
For i = 1 To N + B
    If i < N Then
        minbuz = i
        lbuz(i) = (1 / ArvRate) * 1
        Abuz(i) = Cva ^ 2
    Else:
        minbuz = N
        lbuz(i) = (1 / ArvRate) * q
        Abuz(i) = (q * Cva ^ 2) + (1 - q)
    End If
    mbuz(i) = minbuz * (1 / SrvRate)
    Sbuz(i) = 1 + (Cvs ^ 2 - 1) / minbuz
Next i
hN = (2 * mbuz(N + B)) / (Sbuz(N + B) + 1)
ho = (2 * lbuz(1)) / (Abuz(1) + 1)

For i = 1 To N + B
    bb(i) = lbuz(i) - mbuz(i)
    ab(i) = (lbuz(i) * Abuz(i)) + (mbuz(i) * Sbuz(i))
    gb(i) = ab(i) / (2 * bb(i))
Next i
zb(1) = (ho / bb(1)) * ((Exp(gb(1) ^ (-1)) - 1))

For i = 1 To (N + B) - 1
    zb(i + 1) = zb(i) * (Exp(gb(i + 1) ^ (-1)))
Next i
sum1b = 0
sum2b = 0
For i = 1 To (N + B) - 1
    sum1b = sum1b + (zb(i) * (gb(i) - gb(i + 1)))
    sum2b = sum2b + (zb(i) * (gb(i) - gb(i + 1)) * (i - gb(i) - gb(i + 1)))
Next i
Po = 1 / ((1 - (ho / bb(1)) + ((zb(N + B)) * _
(1 + (bb(N + B)) / hN)) / (Exp(1 / gb(N + B)) - 1) + sum1b))

Pn = (Po * bb(N + B) * zb(N + B)) / (hN * (Exp(1 / gb(N + B)) - 1))
If Pn < 0 Then Pn = 0
Jb = Po * (((ho / bb(1)) * (gb(1) - (1 / 2))) + sum2b + (Pn * ((hN / bb(N + B)) * (((N + B)
- gb(N + B) - (1 / 2)) + (N + B))))))
If Jb < 0 Then Jb = 0

```

```

DeltaB = (N - 1) / (N + B - 1)
sum1b = 0
sum2b = 0
For i = 1 To N - 1
sum1b = sum1b + (zb(i) * (gb(i) - gb(i + 1)))
sum2b = sum2b + (zb(i) * (gb(i) - gb(i + 1)) * (i - gb(i) - gb(i + 1)))
Next i
Pid = Po * (1 - (ho / bb(1)) + sum1b + (zb(N - 1) * gb(N) * Exp(DeltaB / gb(N))))
Bs = Po * ((ho / bb(1)) * (gb(1) - (1 / 2)) + sum2b + (zb(N - 1) * gb(N) * Exp(DeltaB /
gb(N)))) + (N * (1 - Pid))
THbuz = (1 / SrvRate) * Bs
End Sub

```

```

Public Sub Kim(Cva, Cvs, N, B)
ReDim PaK(N + B), gink(N + B), PKim(N + B), mk(N + B), lk(N + B), gk(N + B)
akim = 1 * ArvRate
bkim = 1 * SrvRate
aRkim = ((1 + Cva ^ 2) * akim) / 2
bRkim = ((1 + Cvs ^ 2) * bkim) / 2

```

```

For i = 1 To N + B
If i >= 1 And i <= N Then
mk(i) = (bkim - i * (akim - aRkim))
Else
mk(i) = ((-N * (akim - aRkim)) + bRkim)
End If
Next i

```

```

For i = 0 To N + B - 1
If i >= 0 And i <= N - 2 Then
lk(i) = 1 / ((i + 1) * aRkim)
ElseIf i >= N - 1 And i <= N + B - 2 Then
lk(i) = 1 / ((N * aRkim) + bRkim - bkim)
Else
lk(i) = 1 / (N * akim)
End If
Next i

```

```

gink(0) = 1
For i = 1 To N + B
gink(i) = gink(i - 1) * (lk(i - 1) / mk(i))
Next i
'gink(N + B) = gink(N + B - 1)
For i = 0 To N + B

```

```

If i = 0 Then
    gk(i) = (1 / ArvRate) * aRkim
ElseIf i >= 1 And i <= N + B - 1 Then
    gk(i) = (1 / ArvRate) * ((mk(i) * (akim - aRkim) / lk(i - 1)) + aRkim)
Else
    gk(i) = (1 / ArvRate) * ((mk(i) * (akim - aRkim) / lk(i - 1)) + akim)
End If
Next i
' _____ IPOLOGISMOS PaK _____

roK = ((1 / ArvRate) * bkim) / N
FiK = (Cva ^ 2 + (roK * Cvs ^ 2) - (1 - roK)) / (Cva ^ 2 + (roK * Cvs ^ 2) + (1 - roK))

If roK = 1 Then
    For jk = 1 To N - 1
        gin2k = gin2k * ((bkim - jk * (akim - aRkim)) / (jk * aRkim))
    Next jk
    PaK(0) = 1 / ((N * aRkim / (N * aRkim + bRkim - bkim)) * (B + ((bRkim - N * (akim - aRkim)) / (N * akim)))) + gin2k
    For mkim = 1 To N - 1
        gin1k = 1
        For i = 1 To mkim
            gin1k = gin1k * ((B - i * (akim - aRkim)) / (i * aRkim))
        Next i
        gin2k = 1
        For jk = 1 To N - 1
            gin2k = gin2k * ((bkim - jk * (akim - aRkim)) / (jk * aRkim))
        Next jk
        PaK(0) = PaK(0) + 1 / ((N * aRkim / (N * aRkim + bRkim - bkim)) * (B + ((bRkim - N * (akim - aRkim)) / (N * akim)))) + gin2k + gin1k
    Next mkim

Else
    gin2k = 1
    For jk = 1 To N - 1
        gin2k = gin2k * ((bkim - (jk * (akim - aRkim)))) / (jk * aRkim))
    Next jk
    PaK(0) = (((1 - (roK * FiK ^ B)) / (1 - roK)) * ((1 / ArvRate) * aRkim - 1 + roK) * gin2k) ^ (-1)

    For mkim = 1 To N - 1
        gin1k = 1
        For i = 1 To mkim
            gin1k = gin1k * ((B - i * (akim - aRkim)) / (i * aRkim))
        Next i

```



```

PaK(0) = 1 / (((1 - roK * FiK ^ B) / (1 - roK)) * ((1 / ArvRate) * aRkim - 1 + roK) *
gin2k) + gin1k + PaK(0)
Next mkim
End If

```

```

For i = 1 To N + B
PaK(i) = PaK(0) * gink(i)
Next i

```

' _____ IPOLOGISMOS Pk _____

```

For i = 0 To N + B
PKim(i) = PaK(i) * gk(i)
If PKim(i) < 0 Then
PKim(i) = 0
End If
'Nkim = Nkim + (N + B - i) * PKim(i)
Next i

```

' _____ IPOLOGISMOS TOY TH KIM _____

factorial = 1

```

For i = N To 1 Step -1
factorial = factorial * i
Next i

```

```

gin3k = 1
For i = 1 To N
gin3k = gin3k * (bkim - (i * (akim - aRkim)))
Next i
PaK(N + B) = PaK(0) * ((FiK ^ B) / (factorial * akim * (aRkim ^ (N - 1)))) * gin3k
THKim = (1 / ArvRate) * (1 - PaK(N + B))
'sumk = 0
'For i = 0 To N + B - 1
'sumk = sumk + PaK(i) * (aRkim + bRkim - akim)
'Next i

```

```

'Nkim = ((1 - PaK(N + B)) * 1 - ((1 / ArvRate) * aRkim)) + (((1 / ArvRate) * sumk) / (1 -
roK)) - ((roK * (N + B)) / (1 - roK)) * PaK(N + B)
'Debug.Print Nkim
'factorial = 1
'For i = 1 To N - 1
factorial = factorial * i
'Next i

```

```

'PaK(N) = PaK(0) * (1 / (factorial * (aRkim ^ (N - 1)))) * (1 / ((N * aRkim) + bRkim -
bkim)) * gin3k
'LqKim = PaK(N) * ((1 - ((B + 1) * FiK ^ B) + (B * (FiK ^ (B - 1)))) / ((1 - FiK) ^ 2)) -
((1 / ArvRate) * aRkim * ((1 - FiK ^ B) / (1 - FiK))) + B * PaK(N + B)
'LsKim = PaK(0) * ((1 - ((N + 1) * FiK ^ N) + (N * FiK ^ (N - 1))) / ((1 - FiK) ^ 2)) - ((1
/ ArvRate) * aRkim * ((1 - FiK ^ N) / (1 - FiK))) + N * PaK(N + B)
'sumk = 0
'For i = 0 To N
'sumk = sumk + (i * PaK(N - i))
'Next i
'LsKim = N * PaK(N) + (1 / ArvRate) * sumk

'Nkim = (LqKim + LsKim)
'Debug.Print Nkim
End Sub

```

Διάστημα εμπιστοσύνης

```

Option Explicit
Public pinakas(42, 11) As Variant
Public nsim As Variant ' arithmos prosomoioseon
Public a As Variant
Public Error As Variant
Public Z As Variant
Public i, j, keep_i, keep_j As Integer
Public MP(), VP(), VPT(), VLT As Variant
Public Vtime, Mtime, VL, ML, Mprod, Vprod, VTprod As Variant
Public test(), test_2(), testL, testL_2, testPR, testPR_2, meanP() As Variant
Public VarP(), varL, VarProd As Variant
Public Function Normal() As Variant
Dim filenum As Integer

filenum = FreeFile
Open "C:\Documents and Settings\Nikolas\Desktop\Giorgos\go_Normal.txt" For Input
As filenum
'Diavazei ton pinaka
For i = 0 To 41
  For j = 0 To 10
    Input #filenum, pinakas(i, j)
  Next j
Next i

For i = 0 To 41

```

```

For j = 0 To 10
If pinakas(i, 0) + pinakas(0, j) = a Then
keep_i = i
keep_j = j
End If
Next j
Next i

```

```

Normal = pinakas(keep_i, keep_j)

```

```

End Function

```

Λίστα με δομή FCFS

```

'Class CList
Public ejectItem
Option Explicit
Private mFirstNode As CListNode 'protos komvos sth lista
Private mLastNode As CListNode 'teleutaios komvos sth lista

'elegxos an h lista einai adeia
Public Function IsEmpty() As Boolean
IsEmpty = IIf(mFirstNode Is Nothing, True, False)
End Function

'eisodos komvou sto telos ths listas
Public Sub InsertAtBack(insertItem As Variant)
Dim tempNode As CListNode

If IsEmpty() Then
Set mLastNode = New CListNode
Set mFirstNode = mLastNode
Else
Set tempNode = mLastNode
Set mLastNode = New CListNode
tempNode.NextNode = mLastNode
End If

mLastNode.Data = insertItem
End Sub

'Afaresh komvou apo thn arxh ths listas
Public Function RemoveFromFront(ejectItem As Variant) As Variant

If IsEmpty() Then
RemoveFromFront = Null

```

```

    Exit Function
End If

ejectItem = mFirstNode.Data 'to eject pairnei th timh pou periexetai ston
                        'afairoumeno kombo
If mFirstNode Is mLastNode Then 'h lista exei mono ena stoixeio ara ADEIAZEI
    Set mFirstNode = Nothing
    Set mLastNode = Nothing
Else
    Set mFirstNode = mFirstNode.NextNode 'o protos kombos afaireitai kai
                        'ginetai protos autos pou htan deuterios

End If
RemoveFromFront = ejectItem
End Function
Public Property Get Iterator() As Variant
    Dim iter As CListItem
    Set iter = New CListItem
    iter.StartNode = mFirstNode
    Set Iterator = iter
End Property

'Class CListItem
Option Explicit
Private mBookmark As CListNode 'krataei anafora gia th thesh tou protou komvou
Private mFirstNode As CListNode 'krataei th thesh pou brisketai h epan/kh diadikasia

Public Property Let StartNode(ByVal vnewvalue As Variant)
    Set mFirstNode = vnewvalue
    Set mBookmark = mFirstNode
End Property

Public Function NextItem()
    Dim tempData As Variant

    If mBookmark Is Nothing Then
        NextItem = Null
    Else
        tempData = mBookmark.Data
        Set mBookmark = mBookmark.NextNode
        NextItem = tempData
    End If
End Function
Public Function HasMoreItems() As Boolean

```

```

    HasMoreItems = IIf(Not mBookmark Is Nothing, True, False)

End Function
Public Sub ResetBookmark()
    mBookmark = mFirstNode
End Sub

'Class CListNode
Option Explicit
Private mNodeData As Variant
Private mNextNode As CListNode
Public Property Get Data() As Variant
    Data = mNodeData
End Property
Public Property Let Data(ByVal vnewvalue As Variant)
    mNodeData = vnewvalue
End Property
Public Property Get NextNode() As CListNode
    Set NextNode = mNextNode
End Property
Public Property Let NextNode(ByVal vnewvalue As Variant)
    Set mNextNode = vnewvalue
End Property

```

Βιβλιογραφία

- [1] E.Gelenbe, G.Pulolle, *Introduction to Queueing Networks*, Wiley, West Sussex, 1998
- [2] J.A.Buzacott, J.G.Shantikumar, *Stochastic Models of Manufacturing Systems*, Prentice Hall, New Jersey, 1993
- [3] Β.Σ.Κουϊκόγλου, *Προσομοίωση*, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2002
- [4] J.C.Ramirez, "Introduction to simulation", course notes, Departement of computer science University of Pittsburgh, <http://www.cs.pitt.edu/~ramirez/cs1538/>
- [5] M.A.Crane, D.I.Iglehart, "Simulating stable stochastic systems:III. Regenerative processes and discrete event simulations," *Operations Research*, pp.33, 1975
- [6] J.A.Buzacott, X.G.Liu, J.G.Shantikumar, "Multistage flow line analysis with the stopped arrival queue model," *IIE Transactions*, pp.444-455, 1995
- [7] N.K.Kim, K.C.Chae, "Transforma free analysis os the GI/G/1/K queue through the decomposes Little's formula," *Computers & Operations Research*, pp.353-365, 2003
- [8] D.D.Kouvatsos, "A maximum entropy queue length distribution for a G/G/1 finite capacity queue", 1986.
- [9] E.Gelenbe, "On approximate computer system models," *journa of the association of computing machimery*, 22, pp.261-269, 1975
- [10] T.Kimura, "Optimal buffer design of an M/G/s queue with finite capacity," *Communications in statistics-Stochastiv models*, 12(1), pp.165-180, 1996
- [11] J.M.Smith, F.B.Cruz "The buffer allocation problem for general sinte buffer queueing networks," *IIE Transaction* 37, pp.343-365, 2005
- [12] D.D.W.Yao, J.A.Buzacott, "Queueing models for a flexible machining ststion Part I: The diffusion approximation," *European journal of operational research*, 19, pp.233-240, 1985
- [13] D.D.W.Yao, J.A.Buzacott, "Queueing models for a flexible machining ststion Part II: The method of coxian phases," *European journal of operational research*, 19, pp.241-252, 1985
- [14] D.W.Choi, N.K.kim, K.C.Chae, "A two moment approximation for the GI/G/c queue with finite capacity," *Informs*, 17, pp.75-81, 2005

- [15] W.Whitt,"A diffusion approximation for the G/GI/n/m queue,"*Opertions research*,52pp.922-941,2003
- [16] J.M.Smith, "Blocking probability models and system performance", *Performance evaluation*,52,pp.237-267,2003
- [17] T.R.Nieto, *Visual basic 6*, Deitel&Deitel,New Jersey,1999
- [18] M.Halvorson, *Microsoft Visual basic 6.0 step by step*, Microsoft Press,Washington,1998
- [19] P.G.Aitken, *Visual basic 6 Programming Blue Book*, Thomson, Arizona ,1998