ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Εκπόνηση

ΚΑΤΕΜΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΕΚΤΟΡΑΣ ΑΜ:200010101

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΟΥΙΚΟΓΛΟΥ ΒΑΣΙΛΗΣ

Ακαδημαϊκό Έτος 2005-6
Χανιά

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Σκοπός εργασίας

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία αναλύονται οι ουρές αναμονής διακριτού χρόνου με αυθαίρετες κατανομές πιθανοτήτων χρόνων αφίξεων και εξυπηρετήσεων. Οι ουρές αναμονής είναι ένα εργαλείο για την αναπαράσταση και ανάλυση δικτύων υπολογιστών και εργοστασίων. Η μέθοδος που εφαρμόστηκε για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων του συστήματος είναι οι εξισώσεις διαφορών. Στην αρχή νομίσαμε ότι είναι πρωτότυπη μέθοδος, στη συνέχεια όμως διαπιστώσαμε ότι υπάρχουν παρόμοιες εργασίες οι οποίες δεν συνοδεύονται από αντίστοιχο λογισμικό.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η πλήρης μέθοδός επίλυσης των εξισώσεων διαφορών και ένα πρόγραμμα σε περιβάλλον Matlab που δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να αναλύει ουρές αναμονής.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Η περιγραφή και ανάλυση συστημάτων με κατανομές πιθανοτήτων χρόνων άφιξης και εξυπηρέτησης Poisson παρουσιάζεται σε πολλά βιβλία ουρών αναμονής (βλ. πχ. [1]), επίσης υπάρχουν αποτελέσματα για κάποια συστήματα με άλλες κατανομές τα οποία δεν είναι ακριβή για κάθε κατανομή.

Για την ανάλυση αναμονητικών συστημάτων είναι συνήθως απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί μια συμπληρωματική μεταβλητή (supplementary variable), έτσι το σύστημα γίνεται Μαρκοβιανό (Markovian). Στο άρθρο [2] προτείνεται η χρησιμοποίηση του χρόνου άφιξης ή εξυπηρέτησης που εναπομένει (remaining time) αντί του χρόνου άφιξης ή εξυπηρέτησης που έχει διανυθεί (elapsed time) σαν συμπληρωματική μεταβλητή

Η ανάλυση μας στηρίζεται στο ότι κατάλληλη αναπαράσταση της κατάστασης του συστήματος οδηγεί σε ένα ισοδύναμο μοντέλο Markov. Στο άρθρο [3] που αναλύονται οι ουρές αναμονής διακριτού χρόνου με γενικές κατανομές, η αναπαράσταση της κατάστασης του συστήματος ορίζεται με παρόμοιο τρόπο με μας, με την διαφορά ότι εμείς χρησιμοποιήσαμε τους εναπομείναντες χρόνους άφιξης και εξυπηρέτησης, ενώ στο άρθρο [3] χρησιμοποιούν είτε τον εναπομένοντα χρόνο άφιξης και τον διανυθέντα χρόνο εξυπηρέτησης, είτε το αντίστροφο. Επίσης στον άρθρο [3] ο υπολογισμός των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης γίνεται χρησιμοποιώντας ανάλυση πινάκων (Matrix-Analytic Method,MAM), ενώ στην παρούσα διπλωματική απλοποιούνται με περαιτέρω ανάλυση χρησιμοποιώντας εξισώσεις διαφορών

Στην [4] παρουσιάζεται η θεωρία για την επίλυση εξισώσεων διαφορών.

1.3 Περιγραφή εργασίας

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε για να υπολογιστούν οι πιθανότητες του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, στην Παράγραφο 2.1 παρουσιάζεται η περιγραφή του μοντέλου που θα χρησιμοποιηθεί. Στην 2.2 περιγράφονται οι εξισώσεις πιθανοτήτων, και στην 2.3 δίνεται η γενική λύση των εξισώσεων η οποία προκύπτει ότι είναι γραμμικός συνδυασμός όρων γεωμετρικής προόδου. Στις Παραγράφους 2.4, 2.5 και 2.6 εξετάζονται εξισώσεις διαφορών των οποίων οι χαρακτηριστικές εξισώσεις έχουν απλές, μιγαδικές και πολλαπλές ρίζες αντίστοιχα. Τέλος στην 2.7 υπολογίζονται οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού όρων της γενικής λύσης που είναι απαραίτητοι για τον υπολογισμό της γενικής λύσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται μερικά αριθμητικά αποτελέσματα, στο τέταρτο τα συμπεράσματά μας και τέλος στο παράρτημα Α παρουσιάζεται ο κώδικας του προγράμματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΥΡΑΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟ

2.1 Περιγραφή

Θεωρούμε ένα σύστημα στο οποίο πελάτες φθάνουν και εξυπηρετούνται τις στιγμές 0,1,2,… .Δηλαδή ,οι χρόνοι αφίξεων και αναχωρήσεων θεωρούνται διακριτοί. Η πιθανότητα ώστε αν υπάρχει άφιξη στο σύστημα τώρα να έχουμε καινούργια άφιξη σε χρόνο i=1,2,... είναι α_{i-1} και η πιθανότητα ώστε αν ξεκινά τώρα μια εξυπηρέτηση να ολοκληρωθεί σε χρόνο j=1,2,… είναι b_{j-1} .

Η κατάσταση του συστήματος συμβολίζεται (n,i,j) και η πιθανότητα να είναι το σύστημα σε αυτήν την κατάσταση συμβολίζεται ως $P_{i,j}(n)$,όπου

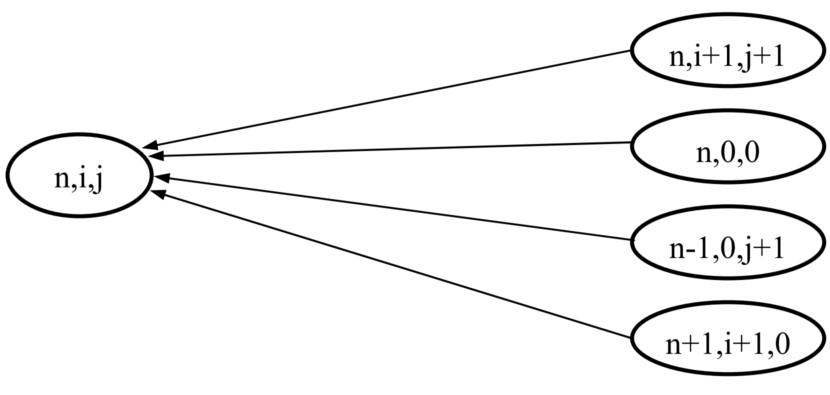
n : πλήθος πελατών στο σύστημα $0<n<N$

i : υπόλοιπος χρόνος μέχρι να έλθει ο επόμενος πελάτης, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ο τρέχων κύκλος $0<i<I$

j : υπόλοιπος χρόνος μέχρι να εξυπηρετηθεί αυτός που εξυπηρετείται, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ο τρέχων κύκλος $0<j<J$

Στην γενική περίπτωση υπάρχουν τέσσερεις καταστάσεις από τις οποίες μπορούμε να φτάσουμε την κατάσταση (n,i,j):

1. Να μην έχουμε ούτε άφιξη ούτε αναχώρηση, δηλαδή το σύστημα ήταν στην κατάσταση (n,i+1,j+1). Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι $P_{i+1,j+1}(n)$
2. Να έχουμε ταυτόχρονη άφιξη και αναχώρηση, δηλαδή το σύστημα ήταν στην κατάσταση (n,0,0). Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι $P_{0,0}(n)a_i b_j$
3. Να έχουμε μόνο άφιξη, δηλαδή το σύστημα ήταν στην κατάσταση (n-1,0,j+1). Η πιθανότητα να υπάρξει άφιξη από αυτήν την κατάσταση είναι $P_{0,j+1}(n-1)a_i$
4. Να έχουμε μόνο αναχώρηση, δηλαδή το σύστημα ήταν στην κατάσταση (n+1,ι+1,0). Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι $P_{i+1,0}(n+1)b_j$



2.2 Εξισώσεις πιθανοτήτων

Με βάση τα παραπάνω η πιθανότητα να βρεθούμε στην κατάσταση (n,i,j) είναι:

$$P_{i,j}(n) = P_{i+1,j+1}(n) + P_{0,0}(n)a_i b_j + P_{0,j+1}(n-1)a_i + P_{i+1,0}(n+1)b_j$$

Η οποία είναι η Γενική Εξίσωση για 0<i<I-1 , 0<j<J-1 και 1<n<N-1. Παρακάτω παρουσιάζονται οι συνοριακές εξισώσεις πιθανοτήτων.

Υπάρχουν τρεις τύποι συνοριακών εξισώσεων.

Τύπος Α

Οι καταστάσεις (n,I+1,j) ,(n,i,J+1) και (n,I+1,J+1) δεν υπάρχουν για αυτό θέτουμε $P_{I+1,j}(n)=0$, $P_{i,J+1}(n)=0$ και $P_{I+1,J+1}(n)=0$. Οι παρακάτω εξισώσεις ισχύουν για 1<n<N-1

$$P_{I,j}(n) = P_{0,0}(n)a_I b_j + P_{0,j+1}(n-1)a_i$$
$$P_{i,J}(n) = P_{0,0}(n)a_i b_J + P_{i+1,0}(n+1)b_J$$
$$P_{I,J}(n) = P_{0,0}(n)a_I b_J$$

Τύπος Β

Οι συνοριακές εξισώσεις τύπου Β καλύπτουν την περίπτωση που η εξυπηρέτηση είναι ανενεργή, δηλαδή n=0. Πριν από την κατάσταση (0,i,j) μπορούμε να έχουμε δύο καταστάσεις : είτε την κατάσταση (0,i+1,j) οπότε το σύστημα περιμένει να έρθει καινούργιος πελάτης, είτε την (1,i+1,0) που σημαίνει ότι μόλις ένας πελάτης εξυπηρετήθηκε. Οπότε έχουμε τις παρακάτω συνοριακές εξισώσεις που ισχύουν για κάθε i και j

$$P_{i,j}(0) = P_{i+1,j}(0) + P_{i+1,0}(1)b_j$$
$$P_{i,J}(0) = P_{i+1,J}(0) + P_{i+1,0}(1)b_J$$

Τύπος Γ

Οι συνοριακές εξισώσεις τύπου Γ καλύπτουν την περίπτωση που η άφιξη είναι ανενεργή, δηλαδή n=N. Πριν από την κατάσταση (N,i,j) μπορούμε να έχουμε δύο καταστάσεις : είτε την κατάσταση (N,i,j+1) που το σύστημα περιμένει να εξυπηρετηθεί ένας πελάτης, είτε την (N-1,0,j+1) που σημαίνει ότι μόλις ένας πελάτης αφίχθηκε. Οπότε έχουμε τις παρακάτω συνοριακές εξισώσεις που αφορούν μπλοκαρισμένες αφίξεις και ισχύουν για κάθε i και j

$$P_{i,j}(N) = P_{i,j+1}(N) + P_{0,j+1}(N-1)a_i$$
$$P_{I,j}(N) = P_{I,j+1}(N) + P_{0,j+1}(N-1)a_I$$

2.3 Γενική λύση χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Η γενική εξίσωση έχει την μορφή εξίσωσης διαφορών ως προς n. Στην περίπτωσή μας η εξίσωση είναι γραμμική, οι συντελεστές a_i και b_j είναι σταθεροί, γιατί δεν μεταβάλλονται με το n παρά μονό με i και j. Επίσης η εξίσωση είναι ομογενής γιατί δεν είναι της μορφής :

$$P_{i,j}(n) = P_{i+1,j+1}(n) + P_{0,0}(n)a_i b_j + P_{0,j+1}(n-1)a_i + P_{i+1,0}(n+1)b_j + g(n)$$

όπου g(n) συνάρτηση του n. Το αποτέλεσμα των παραπάνω είναι ότι η γενική λύση της γενικής εξίσωσης προκύπτει σαν τον γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους λύσεων, οπότε

$$P_{i,j}(n) = \sum C_\kappa X_\kappa^n Y_{\kappa,i} Z_{\kappa,j}$$

Θέτοντας $P_{i,j}(n) = X^n Y_i Z_j$ στη Γενική Εξίσωση έχουμε

$$X^n Y_i Z_j = X^n Y_{i+1} Z_{j+1} + X^n Y_0 Z_0 a_i b_j + X^{n-1} Y_0 Z_{j+1} a_i + X^{n+1} Y_{i+1} Z_0 b_j$$

Θεωρώντας Y_0=1 και Z_0=1, χωρίς βλάβη της γενικότητας αφού οποιαδήποτε Y_0 και Z_0 μπορούν να ισορροπηθούν από αλλαγές στους συντελεστές C_κ, και διαιρώντας με X^{n-1} έχουμε

$$\begin{aligned} X^n Y_i Z_j &= XY_{i+1} Z_{j+1} + Xa_i b_j + Z_{j+1} a_i + X^2 Y_{i+1} b_j \\ &= Z_{j+1}(XY_{i+1} + a_i) + Xb_j (XY_{i+1} + a_i) \\ &= (XY_{i+1} + a_i)(Z_{j+1} + Xb_j) \qquad (1) \end{aligned}$$

για i=0 η εξίσωση (1) γίνεται

$$XZ_j = (XY_1 + a_0)(Z_{j+1} + Xb_j) \qquad (2)$$

για j=0 η (2) γίνεται

$$\begin{aligned} X &= (XY_1 + a_0)(Z_1 + Xb_0) \Rightarrow \\ Z_1 &= \frac{X}{XY_1 + a_0} - Xb_0 \qquad (3) \end{aligned}$$

για j=1 η (2) γίνεται

$$\begin{aligned} XZ_1 &= (XY_1 + a_0)(Z_2 + Xb_1) \Rightarrow \\ Z_2 &= \frac{XZ_1}{(XY_1 + a_0)} - Xb_1 \qquad (4) \end{aligned}$$

Θέτουμε $A = \dfrac{X}{XY_1 + a_0}$ και αντικαθιστώντας το Z_1 στην (4) έχουμε

$$Z_1 = A - Xb_0$$
$$Z_2 = AZ_1 - Xb_1 \Rightarrow Z_2 = A^2 - AXb_0 - Xb_1$$

για j=2 η (2) γίνεται

$$XZ_2 = (XY_1 + a_0)(Z_3 + Xb_2) \Rightarrow$$
$$Z_3 = \frac{XZ_2}{XY_1 + a_0} - Xb_2 = AZ_2 - Xb_2 \tag{5}$$

αντικαθιστούμε το Z_2 στην (5)

$$Z_3 = A^3 - A^2 Xb_0 - AXb_1 - Xb_2$$

Οπότε γενικά για κάποιο j το Z_j είναι

$$Z_j = A^j - A^{j-1} Xb_0 - A^{j-2} Xb_1 - ..... - AXb_{j-2} - Xb_{j-1} \tag{6}$$

για j=0 η εξίσωση (1) γίνεται

$$XY_i = (XY_{i+1} + a_i)(Z_1 + Xb_0) \tag{7}$$

για i=0 η (7) γίνεται

$$X = (XY_1 + a_0)(Z_1 + Xb_0) \Rightarrow$$
$$Y_1 = \frac{1}{(Z_1 + Xb_0)} - \frac{a_0}{X} \tag{8}$$

για i=1 η (7) γίνεται

$$XY_1 = (XY_2 + a_1)(Z_1 + Xb_0) \Rightarrow$$
$$Y_2 = \frac{Y_1}{(Z_1 + Xb_0)} - \frac{a_1}{X} \tag{9}$$

για i=2 η (7) γίνεται

$$XY_2 = (XY_3 + a_2)(Z_1 + Xb_0) \Rightarrow$$
$$Y_3 = \frac{Y_2}{Z_1 + Xb_0} - \frac{a_2}{X} \tag{10}$$

Θέτουμε $B = \dfrac{1}{Z_1 + Xb_0}$ οπότε οι (8) ,(9) και (10) γίνονται

$$Y_1 = B - \frac{a_0}{X}$$

$$Y_2 = BY_1 - \frac{a_1}{X} \Rightarrow Y_2 = B(B - \frac{a_0}{X}) - \frac{a_1}{X} = B^2 - B\frac{a_0}{X} - \frac{a_1}{X}$$

$$Y_3 = BY_2 - \frac{a_2}{X} \Rightarrow Y_3 = B^3 - B^2\frac{a_0}{X} - B\frac{a_1}{X} - \frac{a_2}{X}$$

Οπότε γενικά για κάποιο i το Y_i είναι

$$Y_i = B^i - B^{i-1}\frac{a_0}{X} - B^{i-2}\frac{a_1}{X} - .... - B\frac{a_{i-2}}{X} - \frac{a_{i-1}}{X} \qquad (11)$$

Αντικαθιστούμε στην (6) και (11) τα A και B αντίστοιχα

$$Z_j = (\frac{X}{XY_1 + a_0})^j - (\frac{X}{XY_1 + a_0})^{j-1} Xb_0 - (\frac{X}{XY_1 + a_0})^{j-2} Xb_1 - ..... - (\frac{X}{XY_1 + a_0}) Xb_{j-2} - Xb_{j-1}$$

$$Y_i = (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^i - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^{i-1}\frac{a_0}{X} - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^{i-2}\frac{a_1}{X} - .... - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})\frac{a_{i-2}}{X} - \frac{a_{i-1}}{X}$$

Όμως για i=0 και j=0 η εξίσωση (1) γίνεται

$$X = (XY_1 + a_0)(Z_1 + Xb_0) \Rightarrow$$

$$\frac{X}{XY_1 + a_0} = Z_1 + Xb_0 \text{ οπότε}$$

$$Z_j = (Z_1 + Xb_0)^j - (Z_1 + Xb_0)^{j-1} Xb_0 - (Z_1 + Xb_0)^{j-2} Xb_1 - ..... - (Z_1 + Xb_0) Xb_{j-2} - Xb_{j-1}$$

$$Y_i = (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^i - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^{i-1}\frac{a_0}{X} - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^{i-2}\frac{a_1}{X} - .... - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})\frac{a_{i-2}}{X} - \frac{a_{i-1}}{X}$$

για i=I+1 και j=J+1 οι δύο εξισώσεις γίνονται

$$Z_{J+1} = (Z_1 + Xb_0)^{J+1} - (Z_1 + Xb_0)^J Xb_0 - (Z_1 + Xb_0)^{J-1} Xb_1 - ..... - (Z_1 + Xb_0) Xb_{J-1} - Xb_J \quad (12)$$

$$Y_{I+1} = (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^{I+1} - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^I\frac{a_0}{X} - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^{I-1}\frac{a_1}{X} - .... - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})\frac{a_{I-1}}{X} - \frac{a_I}{X} \qquad (13)$$

Όμως Z_{J+1}=0 και Y_{I+1}=0 από την (12) έχουμε

$$0 = (Z_1 + Xb_0)^{J+1} - (Z_1 + Xb_0)^J Xb_0 - (Z_1 + Xb_0)^{J-1} Xb_1 - ..... - (Z_1 + Xb_0) Xb_{J-1} - Xb_J \Rightarrow$$

$$(Z_1 + Xb_0)^{J+1} = (Z_1 + Xb_0)^J Xb_0 + (Z_1 + Xb_0)^{J-1} Xb_1 + ... + (Z_1 + Xb_0) Xb_{J-1} + Xb_J \Rightarrow$$

$$X = \frac{(Z_1 + Xb_0)^{J+1}}{(Z_1 + Xb_0)^J b_0 + (Z_1 + Xb_0)^{J-1} b_1 + ... + (Z_1 + Xb_0) b_{J-1} + b_J} \qquad (14)$$

και από την (13)

$$0 = (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^{I+1} - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^I\frac{a_0}{X} - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})^{I-1}\frac{a_1}{X} - .... - (\frac{1}{Z_1 + Xb_0})\frac{a_{I-1}}{X} - \frac{a_I}{X} \Rightarrow$$

$$(\frac{1}{Z_1+Xb_0})^{I+1} = (\frac{1}{Z_1+Xb_0})^{I}\frac{a_0}{X} + (\frac{1}{Z_1+Xb_0})^{I-1}\frac{a_1}{X} + ... + (\frac{1}{Z_1+Xb_0})\frac{a_{I-1}}{X} + \frac{a_I}{X} \Rightarrow$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(Z_1+Xb_0)^I$

$$\frac{1}{Z_1+Xb_0} = \frac{a_0}{X} + (Z_1+Xb_0)\frac{a_1}{X} + ... + (Z_1+Xb_0)^{I-1}\frac{a_{I-1}}{X} + (Z_1+Xb_0)^{I}\frac{a_I}{X}$$

$$= \frac{1}{X}\left[a_0 + (Z_1+Xb_0)a_1 + ... + (Z_1+Xb_0)^{I-1}a_{I-1} + (Z_1+Xb_0)^{I}a_I\right] \Rightarrow$$

$$X = (Z_1+Xb_0)\left[a_0 + (Z_1+Xb_0)a_1 + ... + (Z_1+Xb_0)^{I-1}a_{I-1} + (Z_1+Xb_0)^{I}a_I\right] \qquad (15)$$

Εισάγουμε το $\omega = Z_1 + Xb_0$ στις (14) και (15)

$$X = \frac{\omega^{J+1}}{\omega^J b_0 + \omega^{J-1}b_1 + ... + \omega b_{J-1} + b_J} \text{ και } X = \omega\left(a_0 + \omega a_1 + ... + \omega^{I-1}a_{I-1} + \omega^I a_I\right) \Rightarrow$$

$$\omega\left(a_0 + \omega a_1 + ... + \omega^{I-1}a_{I-1} + \omega^I a_I\right) = \frac{\omega^{J+1}}{\omega^J b_0 + \omega^{J-1}b_1 + ... + \omega b_{J-1} + b_J} \Rightarrow$$

$$\left(a_0 + \omega a_1 + ... + \omega^{I-1}a_{I-1} + \omega^I a_I\right)\left(\omega^J b_0 + \omega^{J-1}b_1 + ... + \omega b_{J-1} + b_J\right) = \omega^J \qquad (16)$$

Η (16) είναι πολυώνυμο βαθμού I+J .Από τις I+J λύσεις του υπολογίζουμε το X από τους τύπους (14) ή (15) και τα Y και Z από τύπους που αναπτύσσονται στα παρακάτω υποκεφάλαια. Υπενθυμίζουμε ότι $\omega = Z_1 + Xb_0$ και $\frac{X}{XY_1 + a_0} = Z_1 + Xb_0$ οπότε τα Z_1 και Y_1 είναι γνωστά

2.4 Απλές ρίζες

Η Γενική εξίσωση σε αυτήν την περίπτωση είναι

$$X^n Y_i Z_j = X^n Y_{i+1} Z_{j+1} + X^n a_i b_j + X^{n-1} Z_{j+1} a_i + X^{n+1} Y_{i+1} b_j$$

Διαιρούμε με X^{n-1}

$$XY_i Z_j = XY_{i+1}Z_{j+1} + Xa_i b_j + Z_{j+1}a_i + X^2 Y_{i+1} b_j$$

$$= Z_{j+1}(XY_{i+1} + a_i) + Xb_j(XY_{i+1} + a_i)$$

$$= (XY_{i+1} + a_i)(Z_{j+1} + Xb_j) \qquad (17)$$

για j=0 η (17) γίνεται

$$XY_i = (XY_{i+1} + a_i)(Z_1 + Xb_0) \qquad (18)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (17) και (18)

$$Z_j = \frac{Z_{j+1} + Xb_j}{Z_1 + Xb_0} \Rightarrow$$

$$Z_{j+1} = Z_j\left(Z_1 + Xb_0\right) - Xb_j \tag{19}$$

Η (19) δίνει τα Z_j για 1<j<J-1 δηλαδή Z_2 έως Z_J

για i=0 η εξίσωση (17) γίνεται

$$XZ_j = (XY_1 + a_0)(Z_{j+1} + Xb_j) \tag{20}$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (17) και (20)

$$Y_i = \frac{XY_{i+1} + a_i}{XY_1 + a_0} \Rightarrow$$
$$Y_{i+1} = \frac{Y_i\left(XY_1 + a_0\right) - a_i}{X} \tag{21}$$

Η (21) δίνει τα Y_ι για 1<ι<I-1 δηλαδή Y_2 έως Y_I

2.5 Μιγαδικές ρίζες

Έστω μία μιγαδική ρίζα $\omega = \alpha + i\beta$

$$\theta = \arctan\frac{\beta}{\alpha}$$
$$\rho = \sqrt{a^2 + \beta^2}$$

οπότε $\omega = \rho e^{i\theta}$

$$X = \rho e^{i\theta}\left(a_0 + \rho e^{i\theta} a_1 + ... + \rho^I e^{i\theta I} a_I\right) \Rightarrow$$
$$X = re^{i\xi\theta}$$

Σε αυτό το υποκεφάλαιο ασχολούμαστε με μιγαδικούς αριθμούς, το σύμβολο i θα συμβολίζει τον φανταστικό αριθμό. Για αυτό το Y_i σε αυτό το υποκεφάλαιο συμβολίζεται ως Y_g. Η Γενική εξίσωση σε αυτήν την περίπτωση είναι

$$X^n Y_g Z_j = X^n Y_{g+1} Z_{j+1} + X^n a_g b_j + X^{n-1} Z_{j+1} a_g + X^{n+1} Y_{g+1} b_j$$

Αντικαθιστούμε το X και η Γενική εξίσωση γίνεται

$$\left(re^{i\xi\theta}\right)^n Y_g Z_j = \left(re^{i\xi\theta}\right)^n Y_{g+1} Z_{j+1} + \left(re^{i\xi\theta}\right)^n a_g b_j + \left(re^{i\xi\theta}\right)^{n-1} Z_{j+1} a_g + + \left(re^{i\xi\theta}\right)^{n+1} Y_{g+1} b_j$$

Διαιρούμε με $r^{n-1} e^{i(n-1)\xi\theta}$

$$\begin{aligned} re^{i\xi\theta} Y_g Z_j &= re^{i\xi\theta} Y_{g+1} Z_{j+1} + re^{i\xi\theta} a_g b_j + Z_{j+1} a_g + r^2 e^{i2\xi\theta} Y_{g+1} b_j \\ &= Z_{j+1}\left(re^{i\xi\theta} Y_{g+1} + a_g\right) + re^{i\xi\theta} b_j \left(re^{i\xi\theta} Y_{g+1} + a_g\right) \\ &= \left(re^{i\xi\theta} Y_{g+1} + a_g\right)\left(Z_{j+1} + re^{i\xi\theta} b_j\right) \end{aligned} \tag{22}$$

για j=0 η (22) γίνεται

$$re^{i\xi\theta} Y_g = \left(re^{i\xi\theta} Y_{g+1} + a_g\right)\left(Z_1 + re^{i\xi\theta} b_0\right) \tag{23}$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (22) και (23)

$$Z_j = \frac{Z_{j+1} + re^{i\xi\theta} b_j}{Z_1 + re^{i\xi\theta} b_0} \Rightarrow$$
$$Z_{j+1} = Z_j \left(Z_1 + re^{i\xi\theta} b_0 \right) - re^{i\xi\theta} b_j \qquad (24)$$

Η (24) δίνει τα Z_j για 1<j<J-1 δηλαδή Z_2 έως Z_J

για g=0 η (22) γίνεται

$$re^{i\xi\theta} Z_j = \left(re^{i\xi\theta} Y_1 + a_0 \right)\left(Z_{j+1} + re^{i\xi\theta} b_j \right) \qquad (25)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (22) και (25)

$$Y_g = \frac{re^{i\xi\theta} Y_{g+1} + a_g}{re^{i\xi\theta} Y_1 + a_0} \Rightarrow$$
$$Y_{g+1} = \frac{Y_g \left(re^{i\xi\theta} Y_1 + a_0 \right) - a_g}{re^{i\xi\theta}} \qquad (26)$$

Η (26) δίνει τα Y_g για 1<g<I-1 δηλαδή Y_2 έως Y_I

Ο συζυγής της ρίζας $\omega = \alpha + i\beta$ είναι $\omega^* = \alpha - i\beta$ και σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\omega^* = \rho e^{-i\theta}$$
$$X^* = \rho e^{-i\theta} \left(a_0 + \rho e^{-i\theta} a_1 + ... + \rho^I e^{-i\theta I} a_I \right) \Rightarrow$$
$$X^* = re^{-i\xi\theta}$$

Όπως και στην αρχή του υποκεφαλαίου αντικαθιστούμε το X στη Γενική εξίσωση

$$\left(re^{-i\xi\theta} \right)^n Y_g Z_j = \left(re^{-i\xi\theta} \right)^n Y_{g+1} Z_{j+1} + \left(re^{-i\xi\theta} \right)^n a_g b_j + \left(re^{-i\xi\theta} \right)^{n-1} Z_{j+1} a_g +$$
$$+ \left(re^{-i\xi\theta} \right)^{n+1} Y_{g+1} b_j$$

Διαιρούμε με $r^{n-1} e^{-i(n-1)\xi\theta}$

$$\begin{aligned} re^{-i\xi\theta} Y_g Z_j &= re^{-i\xi\theta} Y_{g+1} Z_{j+1} + re^{-i\xi\theta} a_g b_j + Z_{j+1} a_g + r^2 e^{-i2\xi\theta} Y_{g+1} b_j \\ &= Z_{j+1} \left(re^{-i\xi\theta} Y_{g+1} + a_g \right) + re^{-i\xi\theta} b_j \left(re^{-i\xi\theta} Y_{g+1} + a_g \right) \\ &= \left(re^{-i\xi\theta} Y_{g+1} + a_g \right)\left(Z_{j+1} + re^{-i\xi\theta} b_j \right) \qquad (27) \end{aligned}$$

για j=0 η (3,3,9) γίνεται

$$re^{-i\xi\theta} Y_g = \left(re^{-i\xi\theta} Y_{g+1} + a_g \right)\left(Z_1 + re^{-i\xi\theta} b_0 \right) \qquad (28)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (27) και (28)

$$Z_j = \frac{Z_{j+1} + re^{-i\xi\theta} b_j}{Z_1 + re^{-i\xi\theta} b_0} \Rightarrow$$

$$Z^*_{j+1} = Z^*_j \left(Z^*_1 + re^{-i\xi\theta} b_0 \right) - re^{-i\xi\theta} b_j \tag{29}$$

Η (29) δίνει τα Z_j για 1<j<J-1 δηλαδή Z_2 έως Z_J

για i=0 η (27) γίνεται

$$re^{-i\xi\theta} Z_j = \left(re^{-i\xi\theta} Y_1 + a_0 \right)\left(Z_{j+1} + re^{-i\xi\theta} b_j \right) \tag{30}$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (27) και (30)

$$Y_g = \frac{re^{-i\xi\theta} Y_{g+1} + a_g}{re^{-i\xi\theta} Y_1 + a_0} \Rightarrow$$
$$Y^*_{g+1} = \frac{Y^*_g \left(re^{-i\xi\theta} Y^*_1 + a_0 \right) - a_g}{re^{-i\xi\theta}} \tag{31}$$

Η (31) δίνει τα Y_ι για 1<ι<I-1 δηλαδή Y_2 έως Y_I

2.6 Πολλαπλές Ρίζες

Η μόνη περίπτωση στην οποία παρατηρήθηκε ότι η (16) έχει πολλαπλές ρίζες είναι όταν I=J και $a_i=b_j$. Σε αυτή τη περίπτωση οι κατανομές άφιξης και εξυπηρέτησης είναι ίδιες, συνεπώς όλες οι πιθανότητες είναι ίδιες λόγω συμμετρίας, ήτοι $P(n) = \frac{1}{N+1}$ για n=0,1,2,…,N. Άρα οι πιθανότητες μπορούν να υπολογισθούν χωρίς την ανάγκη επίλυσης των εξισώσεων διαφορών.

Παρ'όλα αυτά, το ερώτημα του αν υφίστανται πολλαπλές ρίζες σε συστήματα με ανόμοιες κατανομές είναι ανοικτό και χρήζει περαιτέρω διερεύνησης, η οποία είναι πέραν του αντικειμένου της εργασίας αυτής.

2.7 Συντελεστές και Γενική λύση

Η γενική λύση είναι της μορφής $P_{i,j}(n)=\sum_{\kappa=1}^{I+J} C_\kappa X_\kappa^n Y_{\kappa,i} Z_{\kappa,j}$. Για κάθε ρίζα του πολυωνύμου (16) αντιστοιχεί ένας συντελεστής C_κ. Αυτοί χρειάζονται για να ικανοποιούνται οι συνοριακές εξισώσεις. Στο 1ο κεφάλαιο διατυπώθηκαν τρεις τύπους συνοριακών εξισώσεων. Πρέπει να βρεθούν αυτές που δεν ικανοποιούνται από την Γενική Εξίσωση.

Τύπου Α

$$P_{I,j}(n)=P_{0,0}(n)a_I b_j + P_{0,j+1}(n-1)a_i$$
$$P_{i,J}(n)=P_{0,0}(n)a_i b_J + P_{i+1,0}(n+1)b_J$$
$$P_{I,J}(n)=P_{0,0}(n)a_I b_J$$

$$X^n Y_I Z_j = X^n a_I b_j + X^{n-1} Z_{j+1} a_I \Rightarrow$$
$$Y_I Z_j = a_I\left(X b_j + Z_{j+1}\right) \tag{32}$$
$$X^n Y_i Z_J = X^n a_i b_J + X^{n+1} Y_{i+1} b_J \Rightarrow$$
$$Y_i Z_J = b_J\left(a_i + X Y_{i+1}\right) \tag{33}$$
$$X^n Y_I Z_J = X^n a_I b_J \Rightarrow$$
$$Y_I Z_J = a_I b_J \tag{34}$$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη τις (32) και (33)

$$\begin{aligned} XY_I Z_j Y_i Z_J &= a_I\left(X b_j + Z_{j+1}\right) b_J\left(a_i + XY_{i+1}\right) \\ &= a_I b_J\left(X b_j + Z_{j+1}\right)\left(a_i + XY_{i+1}\right) \end{aligned}$$

Λόγω της (34)

$$XY_i Z_j = \left(X b_j + Z_{j+1}\right)\left(a_i + XY_{i+1}\right)$$

που είναι η Γενική Εξίσωση, δηλαδή οι συνοριακές εξισώσεις τύπου Α ικανοποιούν την ΓΕ.

Τύπου Β

$$P_{i,j}(0)=P_{i+1,j}(0)+P_{i+1,0}(1)b_j \tag{35}$$
$$P_{i,J}(0)=P_{i+1,J}(0)+P_{i+1,0}(1)b_J$$

$$Y_i Z_j = Y_i Z_{j+1} + XY_{i+1} b_j$$
$$Y_i Z_J = Y_i Z_{J+1} + XY_{i+1} b_J$$

Είναι φανερό ότι δεν ικανοποιούν την Γενική Εξίσωση.
Παίρνουμε την (35) και για κάθε j≠0 έχω
$$P_{0,j}(0)=P_{1,j}(0)+P_{1,0}(1)b_j \tag{36}$$

$$P_{1,j}(0) = P_{2,j}(0) + P_{2,0}(1)b_j \qquad (37)$$
$$P_{2,j}(0) = P_{3,j}(0) + P_{3,0}(1)b_j \qquad (38)$$

.
.
.
.

$$P_{I-1,j}(0) = P_{I,j}(0) + P_{I,0}(1)b_j \qquad (39)$$

Αντικαθιστούμε στην (36) την (37)

$$\begin{aligned} P_{0,j}(0) &= P_{1,j}(0) + P_{1,0}(1)b_j \\ &= P_{2,j}(0) + P_{2,0}(1)b_j + P_{1,0}(1)b_j \end{aligned}$$

εισάγοντας και την (38)

$$P_{0,j}(0) = P_{3,j}(0) + P_{3,0}(1)b_j + P_{2,0}(1)b_j + P_{1,0}(1)b_j$$

Με την τέλεια επαγωγή καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} P_{0,j}(0) &= P_{I,j}(0) + P_{I,0}(1)b_j + ... + P_{3,0}(1)b_j + P_{2,0}(1)b_j + P_{1,0}(1)b_j \\ &= P_{I,j}(0) + \sum_{i=0}^{I} P_{i,0}(1)b_j \Rightarrow \\ P_{I,j}(0) &= P_{0,j}(0) - \sum_{i=0}^{I} P_{i,0}(1)b_j \end{aligned}$$

Το $P_{I,j}(0) = 0$ γιατί προκειμένου να φθάσει το σύστημα στην κατάσταση (I,j,0) θα έπρεπε στον προηγούμενο κύκλο

1. να ήταν στην (I+1,j,0) που αποκλείεται.
2. είτε να είχαμε i=0 ,που σημαίνει ότι στην αρχή του τρέχοντος κύκλου μπαίνει ένα κομμάτι ,αρα δεν θα ήταν δυνατόν n=0 τώρα

οπότε $0 = P_{0,j}(0) - \sum_{i=1}^{I} P_{i,0}(1)b_j$ για 1<j<J ,που είναι οι J εξισώσεις που ορίζουν τα Cκ.

Τύπου Γ

$$P_{i,j}(N) = P_{i,j+1}(N) + P_{0,j+1}(N-1)a_i \qquad (40)$$
$$P_{I,j}(N) = P_{I,j+1}(N) + P_{0,j+1}(N-1)a_I$$

$$X^N Y_i Z_j = X^N Y_i Z_{j+1} + X^{N-1} Z_{j+1} a_i$$
$$X^N Y_I Z_j = X^N Y_I Z_{j+1} + X^{N-1} Z_{j+1} a_I$$

Είναι φανερό ότι δεν ικανοποιούν την Γενική Εξίσωση

Παίρνουμε την (40) και για κάθε i≠0 έχω

$$P_{i,0}(N) = P_{i,1}(N) + P_{0,1}(N-1)a_i \quad (41)$$

$$P_{i,1}(N) = P_{i,2}(N) + P_{0,2}(N-1)a_i \quad (42)$$

$$P_{i,2}(N) = P_{i,3}(N) + P_{0,3}(N-1)a_i \quad (43)$$

.

.

.

.

$$P_{i,J-1}(N) = P_{i,J}(N) + P_{0,J}(N-1)a_i \quad (44)$$

Εισάγοντας στην (41) την (42) έχουμε

$$P_{i,0}(N) = P_{i,2}(N) + P_{0,2}(N-1)a_i + P_{0,1}(N-1)a_i$$

Αντικαθιστώντας και την (43)

$$P_{i,0}(N) = P_{i,3}(N) + P_{0,3}(N-1)a_i + P_{0,2}(N-1)a_i + P_{0,1}(N-1)a_i$$

Επαγωγικά καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$P_{i,0}(N) = P_{i,J}(N) + P_{0,J}(N-1)a_i + ... + P_{0,3}(N-1)a_i + P_{0,2}(N-1)a_i + P_{0,1}(N-1)a_i$$
$$= P_{i,J}(N) + \sum_{j=1}^{J} P_{0,j}(N-1)a_i$$

Το $P_{i,J}(N) = 0$ γιατί προκειμένου να φθάσει το σύστημα στην κατάσταση (i,J,N) θα έπρεπε στον προηγούμενο κύκλο

1. να ήταν στην (i,J+1,N) που αποκλείεται.
2. είτε να είχαμε j=0 ,που σημαίνει ότι τι στην αρχή του τρέχοντος κύκλου φεύγει ένα κομματι από το σύστημα ,αρα δεν θα ήταν δυνατόν n=N τώρα.

Οπότε

$P_{i,0}(N) - \sum_{j=1}^{J} P_{0,j}(N-1) * a_i = 0$ για 1<i<I ,

πού είναι οι υπόλοιπες I εξισώσεις που ορίζουν τα Cκ. Αντικαθιστούμε μία από αυτές (έστω την $P_{I,0}(N) - \sum_{j=1}^{J} P_{0,j}(N-1) * a_I = 0$) με την παρακάτω εξίσωση

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} P_{i,j}(n) = 1$$

Συνοπτικά το σύστημα τον I+J εξισώσεων είναι

$$P_{0,j}(0)-\sum_{i=1}^{I}P_{i,0}(1)b_j=0 \qquad \text{για } 1<j<J \tag{45}$$

$$P_{i,0}(N)-\sum_{j=1}^{J}P_{0,j}(N-1)a_i=0 \quad \text{για } 1<i<I-1 \tag{46}$$

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}P_{i,j}(n)=1 \tag{47}$$

Φέρνουμε όλες τις εξισώσεις στην μορφή $P_{i,j}(n)=\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa X_\kappa^n Y_{\kappa,i} Z_{\kappa,j}$

Από την (45) έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa X_\kappa^0 Y_{\kappa,0} Z_{\kappa,j}-\sum_{i=1}^{I}\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa X_\kappa^1 Y_{\kappa,i} Z_{\kappa,0} b_j=0 \Rightarrow$$

$$\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa\left(Z_{\kappa,j}-b_j X_\kappa\sum_{\iota=1}^{I}Y_{\kappa,i}\right)=0$$

Θέτουμε $A_{j\kappa}=Z_{\kappa,j}-b_j X_\kappa\sum_{\iota=1}^{I}Y_{\kappa,i}$ οπότε

$$\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa A_{j,\kappa}=0 \text{ για } 1<j<J \tag{48}$$

Από την (46) έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa X_\kappa^N Y_{\kappa,i} Z_{\kappa,0}-\sum_{j=1}^{J}\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa X_\kappa^{N-1} Y_{\kappa,0} Z_{\kappa,j} a_i=0 \Rightarrow$$

$$\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa X_\kappa^{N-1}\left(X_\kappa Y_{\kappa,i}-a_i\sum_{j=1}^{J}Z_{\kappa,j}\right)=0$$

Θέτουμε $B_{i\kappa}=X_\kappa^{N-1}(X_\kappa Y_{\kappa,i}-a_i\sum_{j=1}^{J}Z_{\kappa,j})$ οπότε

$$\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa B_{i,\kappa}=0 \text{ για } 1<i<I-1 \tag{49}$$

Από την (47), λαμβάνοντας υπόψην ότι $P_{i,J}(N)=0$ και $P_{I,j}(0)=0$, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}P_{i,j}(n)+\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J}P_{i,j}(0)+\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J-1}P_{i,j}(N)=1\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa X_\kappa^n Y_{\kappa,i}Z_{\kappa,j}+\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J}\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa X_\kappa^0 Y_{\kappa,i}Z_{\kappa,j}+\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa X_\kappa^N Y_{\kappa,i}Z_{\kappa,j}=1\Rightarrow$$

$$\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa\left(\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}X_\kappa^n Y_{\kappa,i}Z_{\kappa,j}+\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J}Y_{\kappa,i}Z_{\kappa,j}+\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J-1}X_\kappa^N Y_{\kappa,i}Z_{\kappa,j}\right)=1$$

Θέτουμε $D_\kappa=\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}X_\kappa^n Y_{\kappa,i}Z_{\kappa,j}+\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J}Y_{\kappa,i}Z_{\kappa,j}+\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J-1}X_\kappa^N Y_{\kappa,i}Z_{\kappa,j}$ οπότε

$$\sum_{\kappa=1}^{I+J}C_\kappa D_\kappa=1 \tag{50}$$

Οι (48) ,(49) και (50) αποτελούν ένα σύστημα από I+J εξισώσεις με I+J αγνώστους.Το μετατρέπουμε σε μορφή πινάκων για την πιο εύκολη επίλυση του. Έστω :

$C=\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\.\\.\\C_\kappa\end{bmatrix}$ και $E=\begin{bmatrix}A_{1,1} & A_{1,2} & . & . & A_{1,\kappa}\\ . & . & . & . & .\\ A_{J,1} & A_{J,2} & . & . & A_{J,\kappa}\\ B_{1,1} & B_{1,2} & . & . & B_{1,\kappa}\\ . & . & . & . & .\\ B_{I-1,1} & B_{I-1,2} & . & . & B_{I-1,\kappa}\\ D_1 & D_2 & . & . & D_\kappa\end{bmatrix}$ ο E είναι (κ × κ) τετραγωνικός πίνακας.

$$E*C=\begin{bmatrix}0\\0\\.\\.\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow C=E^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\.\\.\\0\\1\end{bmatrix}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρακάτω παρουσιάζονται μερικά αριθμητικά αποτελέσματα. Χρησιμοποιήθηκε πρόγραμμα στην Matlab της οποίας ο κώδικας παρουσιάζεται στο παράρτημα. Το μέσο πλήθος πελατών είναι

$$\overline{N} = 0\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=0}^{J} P_{i,j}(0) + 1\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} P_{i,j}(1) + 2\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} P_{i,j}(2) + ... + N\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J-1} P_{i,j}(N)$$

Ο μέσος ρυθμός παραγωγής ισούται με το μέσο πλήθος εξυπηρετήσεων ανα μονάδα χρόνου. Το πλήθος εξυπηρετήσεων ανα μονάδα χρόνου ισούται με την πιθανότητα ώστε ο εξυπηρετών να είναι στην κατάσταση j=0 και συγχρόνως να υπάρχει 1 τουλάχιστον πελάτης στο σύστημα.

$$TH = \sum_{i=0}^{I}\sum_{n=1}^{N} P_{i,0}(n)$$

Στους πίνακες 1 και 2 δίνονται οι μέσοι αριθμοί πελατών στο σύστημα και ο μέσος ρυθμός παραγωγής όταν τα a_i και b_j ακολουθούν γεωμετρική κατανομή. Η συνάρτηση υπολογίζει τις πιθανότητες a_i και b_j χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους για των υπολογισμό τους.

$$a_i = \begin{cases} p(1-p)^i, 0 < i < I-1 \\ (1-p)^I, i = I \end{cases} \quad \text{και} \quad b_j = \begin{cases} q(1-q)^j, 0 < j < J-1 \\ (1-q)^J, j = J \end{cases}$$

Πινακας 1 : N=5 και για p=0.8 και q=0.2

I	**J**	$\overline{N}$	$\overline{TH}$
4	4	4.99918529	0.33880743
5	5	4.99981110	0.29748530
6	6	4.99995637	0.27105671
7	7	4.99998997	0.25307347
8	8	4.99999771	0.24031882
9	9	4.99999948	0.23100496
10	10	4.99999988	0.22405805

Πινακας 2 : N=5 κα για p=0.2 και q=0.8

I	**J**	$\overline{N}$	$\overline{TH}$
4	4	1.502972	0.359441
5	5	1.862383	0.417434
6	6	1.729102	0.364799
7	7	1.588475	0.320401
8	8	1.588669	0.309605
9	9	1.682042	0.318506
10	10	1.830351	0.337946

Στους πίνακες 3 και 4 δίνονται οι μέσοι αριθμοί πελατών στο σύστημα και ο μέσος ρυθμός παραγωγής όταν τα $α_i$ ακολουθούν γεωμετρική κατανομή. Για να υπολογίσουμε τα b_j χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τρόπο :

Η μηχανή του συστήματος παράγει με επιτυχία με πιθανότητα w ή παθαίνει βλάβη με πιθανότητα. 1-w. Μόνο μία βλάβη μπορεί να συμβεί σε ένα κομμάτι. Η επισκευή της βλάβης γίνεται σε 1 κύκλο με πιθανότητα q, ή 2 κύκλους με πιθανότητα r, ή 3 κύκλους με πιθανότητα k, ή 4 κύκλους με πιθανότητα (1-q-r-k). Άρα με πιθανότητα w ο χρόνος είναι 1, με πιθανότητα (1-w)q είναι 2, με πιθανότητα (1-w)r είναι 3, με πιθανότητα (1-w)k είναι 4, με πιθανότητα (1-w)(1-q-r-k) είναι 5.

Πινακας 3 : για p=0.8 και w=0.8, q=0.2, r=0.15, k=0.25, 1-q-r-k =0.4

I	J	N	$\overline{N}$	$\overline{TH}$
4	4	5	1.793882	0.378696
4	4	10	4.129311	0.473061
4	4	20	8.966724	0.540471

Πινακας 4 : για p=0.8 και w=0.8, q=0.05, r=0.25, k=0.4, 1-q-r-k =0.3

I	J	N	$\overline{N}$	$\overline{TH}$
4	4	5	1.826774	0.378752
4	4	10	4.151264	0.468855
4	4	20	8.984794	0.534335

Επειδή στα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν τα I και J είναι μεγαλύτερα ή ίσα του 4, με αποτέλεσμα η (16) να είναι όγδοης ή και μεγαλύτερης τάξης, τα αριθμητικά αποτελέσματα μπορεί να παρουσιάζουν κάποιο σφάλμα. Ένας άλλος λόγος που τα αποτελέσματα μπορεί να παρουσιάζουν σφάλμα είναι η κατάσταση του πίνακα E και του αντιστρόφου του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μελετήσαμε ουρές αναμονής με διακριτούς χρόνους άφιξης και εξυπηρέτησης που ακολουθούν γενικές κατανομές και έχουν πεπερασμένο χώρο αναμονής. Αναπτύχθηκε πρόγραμμα σε περιβάλλον Matlab το οποίο υπολογίζει τα μέτρα απόδοσης τέτοιων συστημάτων, ήτοι τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης, το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα και το μέσο ρυθμό παραγωγής.

Η ανάλυση στηρίχθηκε στο ότι κατάλληλη αναπαράσταση της κατάστασης του συστήματος οδηγεί σε ένα ισοδύναμο μοντέλο Markov, στο οποίο οι πιθανότητες υπολογίζονται ως λύσεις γραμμικών εξισώσεων διαφορών.

Πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των εξισώσεων διαφορών έχουν απλές ρίζες, με εξαίρεση στις περιπτώσεις τις οποίες οι κατανομές άφιξης και εξυπηρέτησης ταυτίζονται. Στη τελευταία περίπτωση οι πιθανότητες μόνιμες κατάστασης είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε η επίλυση των εξισώσεων διαφορών δεν είναι απαραίτητη.

Το λογισμικό που αναπτύχθηκε μπορεί να εφαρμοσθεί για την ανάλυση ουρών σε εργοστάσια ή δίκτυα υπολογιστών. Επίσης μπορεί να εφαρμοσθεί ως βάση για την ανάλυση πολύπλοκων δικτύων αναμονής με πολλά στάδια εξυπηρέτησης, εφαρμόζοντας προσεγγιστικές τεχνικές αποσύνθεσης που είναι ανάλογες των θεωρημάτων Norton και Thevenin σε ηλεκτρικά κυκλώματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] **Γίαννης Α.Φίλης,** (2001), *Δίκτυα Παραγωγής C.A.M* (σημειώσεις μαθήματος), Πολυτεχνείο Κρήτης

[2] **Attahiru sule Alfa,** (2002), *An alternative approach for analyzing finite buffer queues in discrete time*, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, Canada

[3] **Attahiru sule Alfa & T.S.S. Srinivasa Rao,** (2000), *Supplementary variable technique in stochastic models,* Probability in the Engineering and information sciences 14: 203-218

[4] **Ivo Adan & Jan van der Wa**l, (1998), *Difference and differential equations in Stochastic Operations Research.* Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology , The Netherlands

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Στο παράρτημα παρουσιάζεται ο κώδικας του προγράμματος που χρησιμοποιήθηκε για να εξαχθούν τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3.

Α.1 Γενική Συνάρτηση

Η γενική συνάρτηση δέχεται σαν ορίσματα το I, το J, το N, το K και το L.Τα δύο τελευταία δίνονται ανάλογα πως θέλει ο χρήστης να υπολογισθούν οι πιθανότητες α και b. Ελέγχει αν αυτές έχουν υπολογισθεί σωστά, μετά υπολογίζει τις ρίζες του πολυωνύμου (16) και τις διαχωρίζει σε απλές πολλαπλές και μιγαδικές. Το πρόγραμμα μετά υπολογίζει τα Y και Z για απλές και μιγαδικές ρίζες. Ο διαχωρισμός που υπάρχει μετά είναι απαραίτητος επειδή η πολλαπλές ρίζες πρέπει να υπολογίζονται για κάθε n.

```
function [A,B,D,C,GEN,Average] = lisi(I,J,N,K,L)

[a,temp1]= create_Propabilities_a (I,K);
[b,temp2]= create_Propabilities_b (J,L);
if temp1+temp2==2
    d=sol(a,b,I,J);
    [S,P,M]=seperatesol (I, J, d);
    [A]= taYkaiZsin (I,J,a,b,S);
    [D]= taYkaiZfan (I,J,a,b,M);
    if numel(P)==0
        [C]= CalculateCk (I,J,a,b,A,D,N);
        [GEN] = calculateGen (I,J,C,A,D,N);
        [Average]=Meso_plithos (GEN,N,I,J);
        [TH]=Mesos_Ruthmos_Paragogis(GEN,N,I);
        Outdata (a,b,d,C);
    end
else
    disp('Yparxei lathos sta arxeia input gia ton upologismo ton a kai 
b pithanotiton');
end
end
```

Α.2 Υπολογισμός των πιθανοτήτων α και b

Η συνάρτηση υπολογίζει τις πιθανότητες α_i και b_j, ανάλογα με την επιλογή του χρήστη. Μπορεί είτε να τις διαβάσει από αρχείο Excel, είτε να τις δημιουργήσει με γεωμετρική κατανομή. Για τις πιθανότητες b_j υπάρχει η επιλογή για πιθανότητα βλάβης όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3

```
function [a ,temp1] = create_Propabilities_a(I,K)

if K==1
    [p]=textread('input1.txt','%f');
    [a]=Geometriki_Katanomi(p,I);
end
if K==2
    a=xlsread('input.xls','a');
end

temp1=0;
```

```
for i=0:I
    temp1=a(i+1)+temp1;
end

end
```

και

```
function [b ,temp2] = create_Propabilities_b(J,L)

if L==1
    [q]=textread('input2.txt','%f');
    [b]=Geometriki_Katanomi(q,J);
end
if L==2
    b=xlsread('input.xls','b');
end
if L==3
    temp=xlsread('input.xls','mal')
    b=Malfunction_Propabilities(temp,J);
end

temp2=0;
for i=0:J
    temp2=b(i+1)+temp2;
end

end

function [a] = Geometriki_Katanomi(p,I)

a=zeros(1,I+1);
for i=0:I-1
    a(i+1)=(1-p)^i*p;
end
a(I+1)=(1-p)^I;

end
function [b]=Malfunction_Propabilities(temp,J)

b=zeros(1,J+1);
temp1=0;
b(1)=temp(1);
for i=2:J
    b(i)=(1-temp(1))*temp(i);
    temp1=temp1+temp(i);
end
b(J+1)=(1-temp(1))*(1-temp1);

end
```

A.3 Υπολογισμός των ριζών

Η συνάρτηση υπολογίζει τις ρίζες του πολυωνύμου (16)

```
function  [d]= sol(a, b, I, J)
syms x

for i=0:I
    Xa(i+1)=(x^i);
end
for j=0:J
    Xb(J-j+1)=(x^j);
end
q=Xa;
w=Xb;
z1=q*a' ;
z2=w*b' ;
z=z1*z2-x^J;
m=zeros(I+J,1);
m=solve(z,x);
d=double(m);
```

A.4 Διαχωρισμός των ριζών

Οι τύποι για τον υπολογισμό τον Υ και Ζ διαφέρουν αν η ρίζα είναι απλή, πολλαπλή ή μιγαδική. Σε αυτήν την συνάρτηση επιτυγχάνεται ο διαχωρισμός των ρίζων στις προαναφερθείσες κατηγορίες.

```
function [A, B, C] = seperatesol(I, J, d)
l=0;

Πρώτα διαχωρίζονται οι πραγματικές ρίζες από τις μιγαδικές
for i=1:I+J
    if imag(d(i))==0
        j=j+1;
        X(j)=d(i);
    else
        l=l+1;
        Y(l)=d(i);
    end
end

Η ταξινόμηση διευκολύνει την περεταίρω διαδικασία
for g=1:j-1
    for i=1:j-1
        if (X(i)>X(i+1))
            temp=X(i);
            X(i)=X(i+1);
            X(i+1)=temp;
        end
    end
end
for g=1:l-1
    for i=1:l-1
        if (real(Y(i))>real(Y(i+1)))
            temp=Y(i);
            Y(i)=Y(i+1);
            Y(i+1)=temp;
```

```
        end
    end
end
```

Διαχωρισμός μεταξύ πολλαπλών και απλών ριζών

```
a(1,1)=X(1);
a(1,2)=1;
i=1;
temp=1;

for g=2:j
    if (X(g)~=X(g-1))
        i=i+1;
        a(i,1)=X(g);
        a(i,2)=1;
        temp=1;
    else
        temp=temp+1;
        a(i,2)=temp;
    end
end

k=0;
g=0;
for j=1:i
    if (a(j,2)==1)
        k=k+1;
    else
        g=g+1;
    end
end

A=zeros(k,1);
B=zeros(g,1);
C=zeros(l,1);

k=1;
temp=1;

for j=1:i
    if (a(j,2)==1)
        A(k,1)=a(j,1);
        k=k+1;
    else
        temp2=temp+a(j,2)-1;
        for g=temp:temp2
            B(g,1)=a(j,1);
        end
        temp=temp+a(j,2);
    end
end

for j=1:l
    C(j,1)=Y(j);
end
```

A.5 Υπολογισμός των Y και Z για απλές ρίζες

Η συνάρτηση υπολογίζει το X ,τα Y και τα Z για κάθε απλή ρίζα. Δημιουργεί τον πίνακα A που ο αριθμός των σειρών του είναι όσες είναι οι απλές ρίζες, ενώ το πλήθος των στηλών είναι I+J+2. Για μ απλές ρίζες ο A θα έχει την παρακάτω μορφή

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & X_1 & Y_{1,0} & .. & Y_{1,I} & Z_{1,0} & .. & Z_{1,J} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \omega_\mu & X_\mu & Y_{\mu,0} & .. & Y_{\mu,I} & Z_{\mu,0} & .. & Z_{\mu,J} \end{bmatrix}$$

```
function [D]= taYkaiZfan(I,J,a,b,M)
w=size(M);
temp1=w(1);
temp2=I+J+4;
D=zeros(temp1,temp2);

for i=1:temp1
    D(i,1)=M(i);
end

for i=1:temp1
    for j=1:I+1
        X(i,j)=(M(i))^(j-1);
    end
end
for i=1:temp1
        U(i)=X(i,:)*a';
end

for i=1:temp1
    D(i,2)=M(i)*U(i);
    D(i,3)=1;
    D(i,4)=(1/M(i))-(a(1)/D(i,2));
    D(i,3+I+1)=1;
    D(i,4+I+1)=M(i)-D(i,2)*b(1);
end

temp2=3+I;
temp=5;
k=2;
for i=1:temp1
    for j=temp:temp2
        D(i,j)=D(i,j-1)/D(i,1)-a(k)/D(i,2);
        k=k+1;
    end
    k=2;
end

temp2=4+I+J;
temp=6+I;
k=2;
for i=1:temp1
    for j=temp:temp2
        D(i,j)=D(i,1)* D(i,j-1)- D(i,2)*b(k);
        k=k+1;
    end
```

```
    k=2;
end
```

A.6 Υπολογισμός των Y και Z για απλές μιγαδικές ρίζες

Η συνάρτηση υπολογίζει το X, τα Y και τα Z για κάθε απλή μιγαδική ρίζα. Δημιουργεί τον πίνακα D που ο αριθμός των σειρών του είναι όσες είναι οι απλές μιγαδικές ρίζες, ενώ το πλήθος των στηλών είναι I+J+2. Για λ απλές μιγαδικές ρίζες ο D θα έχει την παρακάτω μορφή

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & X_1 & Y_{1,0} & .. & Y_{1,I} & Z_{1,0} & .. & Z_{1,J} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \omega_\mu & X_\mu & Y_{\mu,0} & .. & Y_{\mu,I} & Z_{\mu,0} & .. & Z_{\mu,J} \end{bmatrix}$$

```
function [A]= taYkaiZsin(I,J,a,b,S)
w=size(S);
temp1=w(1);
temp2=I+J+4;
A=zeros(temp1,temp2);

for i=1:temp1
    A(i,1)=S(i);
end

for i=1:temp1
    for j=1:I+1
        X(i,j)=(S(i))^(j-1);
    end
end
for i=1:temp1
        U(i)=X(i,:)*a';
end

for i=1:temp1
    A(i,2)=S(i)*U(i);
    A(i,3)=1;
    A(i,4)=(1/S(i))-(a(1)/A(i,2));
    A(i,3+I+1)=1;
    A(i,4+I+1)=S(i)-A(i,2)*b(1);
end

temp2=3+I;
temp=5;
k=2;
for i=1:temp1
    for j=temp:temp2
        A(i,j)=A(i,j-1)/A(i,1)-a(k)/A(i,2);
        k=k+1;
    end
    k=2;
end

temp2=4+I+J;
temp=6+I;
k=2;
```

```
for i=1:temp1
    for j=temp:temp2
        A(i,j)=A(i,1)*A(i,j-1)-A(i,2)*b(k);
        k=k+1;
    end
    k=2;
end
```

A.7 Υπολογισμός των συντελεστών C_κ

Η συνάρτηση υπολογίζει τους συντελεστές C_κ που χρειάζονται για τον υπολογισμό τις γενικής λύσης. Υπολογίζει πρώτα τον πίνακα Ε από το τέταρτο κεφάλαιο και μετά το διάνυσμα C που θα περιέχει τα C_κ. O E μπορεί να χωριστεί σε τέσσερα μέρη που το καθένα αντιστοιχεί σε απλές, πολλαπλές, απλές μιγαδικές και πολλαπλές μιγαδικές.

```
function [C ,t]= CalculateCk(I,J,a,b,A,D,N)
E=zeros(I+J,I+J);
C=zeros(I+J,1);
L=zeros(I+J,1);
L(I+J)=1;
[m n]=size(A);
[e n]=size(D);

Υπολογίζει το κομμάτι του Ε που αντιστοιχεί σε απλές ρίζες
[S]= CalculateCksingle(I,J,a,b,A,N,m);
Υπολογίζει το κομμάτι του Ε που αντιστοιχεί σε μιγαδικές ρίζες
 [M]= CalculateCkcomplex(I,J,a,b,D,N,e);

Δημιουργεί τον Ε
for i=1:I+J
    for j=1:m
        E(i,j)=S(i,j);
    end
end
for i=1:I+J
    for j=1:e
        E(i,j+m)=M(i,j);
    end
end

t=cond(E)
Υπολογίζει τους συντελεστές C
C=inv(E)*L;
end
```

A.8 Υπολογισμός του πίνακα Ε για απλές ρίζες

Η συνάρτηση υπολογίζει το κομμάτι του Ε για απλές ρίζες

```
function [S]= CalculateCksingle(I,J,a,b,A,N,m)

Y=zeros(m,1);
Z=zeros(m,1);
S=zeros(I+J,m);
```

```
for g=1:m
    for k=4:3+I
        Y(g)=A(g,k)+Y(g);
    end
end
for g=1:m
    for k=5+I:I+J+4
        Z(g)=A(g,k)+Z(g);
    end
end

for k=1:J
    for g=1:m
        S(k,g)=A(g,4+I+k)-A(g,2)*Y(g)*b(k+1);
    end
end
for k=J+1:J+I-1
    for g=1:m
        S(k,g)=(A(g,2)^(N-1))*(A(g,2)*A(g,k-J+3)-Z(g)*a(k-J+1));
    end
end

Y=zeros(m,1);
for g=1:m
    for k=3:2+I
        Y(g)=A(g,k)+Y(g);
    end
end
Z=zeros(m,1);
for g=1:m
    for k=4+I:I+J+4
        Z(g)=A(g,k)+Z(g);
    end
end
for g=1:m
    S(I+J,g)=Y(g)*Z(g)+S(I+J,g);
end

Y=zeros(m,1);
for g=1:m
    for k=3:3+I
        Y(g)=A(g,k)+Y(g);
    end
end
Z=zeros(m,1);
for g=1:m
    for k=4+I:I+J+3
        Z(g)=A(g,k)+Z(g);
    end
end
for g=1:m
    S(I+J,g)=Y(g)*Z(g)*(A(g,2)^(N))+S(I+J,g);
end

Y=zeros(m,1);
for g=1:m
    for k=3:3+I
        Y(g)=A(g,k)+Y(g);
    end
end
```

```
Z=zeros(m,1);
for g=1:m
    for k=4+I:I+J+4
        Z(g)=A(g,k)+Z(g);
    end
end
X=zeros(m,1);
for g=1:m
    for n=1:N-1
        X(g)=(A(g,2)^(n))+X(g);
    end
end
for g=1:m
    S(I+J,g)=Y(g)*Z(g)*X(g)+S(I+J,g);
end

end
```

Α.9 Υπολογισμός του πίνακα Ε για απλές μιγαδικές ρίζες

Η συνάρτηση υπολογίζει το κομμάτι του Ε για απλές μιγαδικές ρίζες

```
function [M]= CalculateCkcomplex(I,J,a,b,D,N,e)

Y=zeros(e,1);
Z=zeros(e,1);
M=zeros(I+J,e);

for g=1:e
    for k=4:3+I
        Y(g)=D(g,k)+Y(g);
    end
end
for g=1:e
    for k=5+I:I+J+4
        Z(g)=D(g,k)+Z(g);
    end
end

for k=1:J
    for g=1:e
        M(k,g)=D(g,4+I+k)-D(g,2)*Y(g)*b(k+1);
    end
end
for k=J+1:J+I-1
    for g=1:e
        M(k,g)=(D(g,2)^(N-1))*(D(g,2)*D(g,k-J+3)-Z(g)*a(k-J+1));
    end
end

Y=zeros(e,1);
for g=1:e
    for k=3:2+I
        Y(g)=D(g,k)+Y(g);
    end
end
Z=zeros(e,1);
for g=1:e
```

```
        for k=4+I:I+J+4
            Z(g)=D(g,k)+Z(g);
        end
    end
    for g=1:e
        M(I+J,g)=Y(g)*Z(g)+M(I+J,g);
    end

    Y=zeros(e,1);
    for g=1:e
        for k=3:3+I
            Y(g)=D(g,k)+Y(g);
        end
    end
    Z=zeros(e,1);
    for g=1:e
        for k=4+I:I+J+3
            Z(g)=D(g,k)+Z(g);
        end
    end
    for g=1:e
        M(I+J,g)=Y(g)*Z(g)*(D(g,2)^(N))+M(I+J,g);
    end

    Y=zeros(e,1);
    for g=1:e
        for k=3:3+I
            Y(g)=D(g,k)+Y(g);
        end
    end
    Z=zeros(e,1);
    for g=1:e
        for k=4+I:I+J+4
            Z(g)=D(g,k)+Z(g);
        end
    end
    X=zeros(e,1);
    for g=1:e
        for n=1:N-1
            X(g)=(D(g,2)^(n))+X(g);
        end
    end
    for g=1:e
        M(I+J,g)=Y(g)*Z(g)*X(g)+M(I+J,g);
    end
    end
```

A.10 Υπολογισμός των πιθανοτήτων για κάθε κατάσταση

Υπολογίζει τις πιθανότητες για κάθε κατάσταση και τις αποθηκεύει σε ένα αρχείο Excel

```
function [GEN] = calculateGen(I,J,C,A,D,N)

F=zeros(I+1,J+1);
T=zeros((I+1)*N,(J+1)*2);
w=size(A);
q=size(D);
G=zeros(1,I+J);
```

Υπολογίζει τις πιθανοτητες για κάθε κατάσταση

```
for n=0:N
    for i=0:I
        for j=0:J
            for k=1:w(1)
                G(k)=(A(k,2)^n)*A(k,3+i)*A(k,4+I+j);
            end
            for k=1:q(1)
                G(k+w(1))=(D(k,2)^n)*D(k,3+i)*D(k,4+I+j);
            end
            F(1+i,1+j)=G*C;
        end
    end
    GEN(:,:,n+1)=F;
end
```

Περίπτωση P(i,J,N)=0 για κάθε i

```
for i=0:I
    GEN(i+1,J+1,N+1)=0;
end
```

Περίπτωση P(I,j,0)=0 για κάθε j

```
for j=0:J
    GEN(I+1,j+1,1)=0;
end
```

Αποθηκεύει τις πιθανότητες.

```
temp=0;
for n=0:N
    for i=0:I
        for j=0:J
            T((i+1)+(I+1)*n,j+1+temp)=real(GEN(i+1,j+1,n+1));
            T((i+1)+(I+1)*n,j+2+temp)=imag(GEN(i+1,j+1,n+1));
            temp=temp+1;
        end
        temp=0;
    end
end
 xlswrite('data.xls', T, 'sheet3','B3')
end
```

A.11 Υπολογισμός του μέσου αριθμού πελατών

Υπολογίζει το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα χρησιμοποιώντας τον τύπο από το τρίτο κεφάλαιο

```
function [Aveg]=Meso_plithos(GEN,N,I,J)
Aveg=0;
for n=0:N
    temp=0;
    for i=0:I
        for j=0:J
            temp=temp+GEN(i+1,j+1,n+1);
        end
```

```
    end
    Aveg=Aveg+(n)*temp;
end
```

A.12 Υπολογισμός του μέσου ρυθμού παραγωγής

```
function [TH]=Mesos_Ruthmos_Paragogis(GEN,N,I)

TH=0;
for i=0:I
    for n=1:N
        TH = TH +GEN(i+1,1,n+1);
    End
end
```