



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Διπλωματική εργασία με θέμα :

« Εναλλακτικές προσεγγίσεις υπολογισμού του κινδύνου χαρτοφυλακίων: Η μέθοδος της υπό συνθήκη αξίας στον κίνδυνο και εφαρμογή στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών»

Μουτεσίδης Ευστάθιος

A.M. 9811118

Επιβλέπων καθηγητής :

Δούμπος Μιχάλης

ΧΑΝΙΑ 2003

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	2
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ	5
2.1 ΜΟΡΦΕΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ.....	5
2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ	6
2.2.1 <i>Η έννοια της αναμενόμενης απόδοσης</i>	7
2.2.2 <i>Η έννοια του κινδύνου σε χαρτοφυλάκια χρεογράφων</i>	7
2.2.3 <i>Αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια</i>	9
2.3 ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	11
2.4 ΑΞΙΑ ΣΤΟΝ ΚΙΝΔΥΝΟ (VALUE AT RISK, VAR)	11
2.4.1 <i>Εισαγωγή στην έννοια της VaR</i>	11
2.4.2 <i>Διαδικασία υπολογισμού – αναλυτική προσέγγιση</i>	14
2.4.3 <i>Εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού</i>	16
3. ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΑΞΙΑ ΣΤΟΝ ΚΙΝΔΥΝΟ (CONDITIONAL VALUE AT RISK , CVAR)	22
3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	22
3.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ	24
3.3 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ	27
3.3.1 <i>Περιορισμοί του προβλήματος</i>	28
3.3.2 <i>Διατύπωση του γραμμικού προβλήματος</i>	29
4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΟ ΑΞΙΩΝ ΑΘΗΝΩΝ	30
4.1 ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	30
4.2 ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	32
4.3 ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΟΥ ΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ	33
4.3.1 <i>Επίπεδο εμπιστοσύνης 99%</i>	33
4.3.2 <i>Επίπεδο εμπιστοσύνης 95%</i>	37
4.3.3 <i>Επίπεδο εμπιστοσύνης 90%</i>	41
4.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΚΑΙ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ, ΠΟΥ ΕΚΤΙΘΕΤΑΙ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ	45
4.5 ΤΟ ΕΙΔΟΣ ΚΑΙ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΣΕΝΑΡΙΩΝ	45
4.5.1 <i>Το πλήθος των σεναρίων</i>	46
4.5.2 <i>Ο χρονικός ορίζοντας των σεναρίων</i>	51
4.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΟΥ BOOTSTRAPPING.....	53
4.7 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ MARKOWITZ	54
5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ	58
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	60
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	63

1.Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, ολοένα και περισσότερο, απασχολεί τη διεθνή ερευνητική κοινότητα ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος. Οι πρόσφατες οικονομικές κρίσεις, λόγω της τιμής του πετρελαίου, των ισοτιμιών των νομισμάτων, της πολιτικής αστάθειας στις χώρες της άπω Ανατολής και τις Ρωσίας αλλά και η πτώχευσή μεγάλων εταιριών σε παγκόσμια κλίμακα δημιούργησαν έντονο προβληματισμό. Τα παραπάνω σε συνδυασμό με την παγκοσμιοποίηση των αγορών και τον συνεχώς αυξανόμενο ανταγωνισμό μεταξύ των εταιριών καθιέρωσαν την ανάλυση και διαχείριση χρηματοοικονομικών κινδύνων ως ένα πολύ σημαντικό πεδίο έρευνας. [Dowd 1998, Ζοπουνίδης 1998].

Ένα είδος χρηματοοικονομικού κινδύνου είναι και ο κίνδυνος της αγοράς (Market Risk), ο οποίος έχει ιδιαίτερη σημασία στη διαχείριση χαρτοφυλακίων. Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι ως χαρτοφυλάκιο ορίζεται το σύνολο των χρεογράφων, επικίνδυνων και μη, τα οποία έχει στην κατοχή του ένας επενδυτής. Οι πολλές επενδυτικές επιλογές και η αστάθεια της αγοράς, κάνουν σαφές το πόσο δύσκολα ελέγχεται ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου αλλά και το πόσο αναγκαίο είναι κάτι τέτοιο. Το πρώτο βήμα στην επιλογή και διαχείριση χαρτοφυλακίων, έγινε τη δεκαετία του 50 με το μοντέλο του Markowitz [Markowitz, 1952], το οποίο χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα. Ωστόσο η

μεγάλη ανάπτυξη στο χώρο της διαχείρισης χρηματοοικονομικών κινδύνων, ξεκίνησε, με την εμφάνιση της «Αξίας στον κίνδυνο» (Value at Risk, VaR) τη δεκαετία του 90. [Δούμπος 2003, Jorion 2001].

Στα πλαίσια της εργασίας θα μελετηθεί η μέθοδος αυτή και συγκεκριμένα η «υπό συνθήκη αξία στον κίνδυνο» (Conditional Value at Risk, CVaR), [Rockafellar and Uryasev, 2000]. Η ανάλυση αφορά στη συμπεριφορά της μεθόδου για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων υπολογισμού της και στην προσπάθεια εύρεσης βέλτιστων τιμών για τις παραμέτρους αυτές. Ταυτόχρονα με την εσωτερική ανάλυση της μεθόδου γίνεται και σύγκριση με το μοντέλο του Markowitz για να διαπιστωθούν τυχόν πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα.

Πιο συγκεκριμένα θα γίνει αρχικά η παρουσίαση του θεωρητικού υποβάθρου σχετικά με τον κίνδυνο και τη σημασία του στη διαχείριση χαρτοφυλακίων. Θα αναφερθούν οι υπάρχουσες μέθοδοι ελέγχου του κινδύνου και θα αναλυθεί η θεωρία της «αξίας στον κίνδυνο» και των υποπεριπτώσεών της. Στη συνέχεια θα γίνει αναλυτική παρουσίαση της CVaR και της διαδικασίας σύνθεσης χαρτοφυλακίων βέλτιστης CVaR. Η ανάλυση της λειτουργίας της μεθοδολογίας της CVaR γίνεται σε δεδομένα από το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών. Τα δεδομένα αφορούν 117 μετοχές οι οποίες συμμετέχουν στους τέσσερις βασικούς δείκτες του χρηματιστηρίου (FTSE ASE 20, FTSE MID 40, SMALL CAP 80, και Γενικός Δείκτης) και είναι εισηγμένες πριν το 2000. Για τις μετοχές αυτές συγκεντρώθηκαν οι ημερήσιες μεταβολές και οι τιμές τους από 1/4/2001 έως και 1/4/2003 και με βάση τα στοιχεία αυτά πραγματοποιείται η σύνθεσή διαφόρων χαρτοφυλακίων. Για τα χαρτοφυλάκια αυτά υπολογίζεται η αναμενόμενη απόδοση, η τυπική απόκλιση, η συνολική και η μελλοντική απόδοση και ο αριθμός μετοχών. Για τον υπολογισμό της μελλοντικής απόδοσης εφαρμόζεται το μοντέλο με στοιχεία των δύο ετών πλην του τελευταίου τριμήνου, και τα στοιχεία του τελευταίου τριμήνου χρησιμοποιούνται για να εξεταστεί η μελλοντική πορεία. Έτσι μπορούν να εξαχθούν σημαντικά συμπεράσματα για το πως λειτουργεί η μέθοδος και για το πως διάφορες παράμετροι -όπως το ποσοστό κεφαλαίου που εκτίθεται σε κίνδυνο, ο αριθμός υποθετικών σεναρίων και ο ορίζοντας ανακατασκευής του χαρτοφυλακίου- επηρεάζουν την απόδοση του χαρτοφυλακίου. Επίσης τονίζεται μέσω της ανάλυσης αυτής η σχέση μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης και της τυπικής απόκλισης, που ουσιαστικά αποτελεί αυτό που ονομάζεται κίνδυνος του χαρτοφυλακίου. Η ανάλυση ολοκληρώνεται με την ανάλυση του υπολογιστικού φόρτου της μεθόδου και τη σύγκριση με το μοντέλο του Markowitz.

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Μορφές χρηματοοικονομικών κινδύνων

Η πορεία της κάθε μετοχής επηρεάζεται σε ένα μεγάλο βαθμό από την οικονομική πορεία της επιχείρησης στην οποία αντιστοιχεί. Έτσι ο γενικός κίνδυνος που διατρέχει ένας επενδυτής, προκύπτει από την αλληλεπίδραση των διαφόρων χρηματοοικονομικών κινδύνων, που μπορούν να συνοψιστούν στις ακόλουθες κατηγορίες, [Dowd, 1998]:

- Ο επιχειρηματικός κίνδυνος (Business Risk). Είναι ο κίνδυνος ο οποίος εξαρτάται από το είδος της κάθε εταιρίας και από την αγορά μέσα στην οποία δραστηριοποιείται. Εάν, για παράδειγμα, πρόκειται για μια καπνοβιομηχανία από την αγορά καπνού κ.ο.κ.
- Ο κίνδυνος της αγοράς (Market Risk). Είναι ο κίνδυνος που εμπεριέχεται σε κάθε κίνηση μέσα στην αγορά. Μπορεί να χωριστεί σε επιμέρους κινδύνους,

όπως ο κίνδυνος του ρυθμού των επιτοκίων, σε περίπτωση δανεισμού και ο κίνδυνος των συναλλαγματικών ισοτιμιών σε περίπτωση που η πρόκειται για οικονομικές συναλλαγές με ξένες εταιρίες.

- Ο πιστωτικός κίνδυνος (Credit Risk), που είναι ο κίνδυνος αδυναμίας μιας επιχείρησης να εισπράξει τα χρέη τρίτων προς αυτή.
- Ο κίνδυνος ρευστότητας (Liquidity Risk), που αφορά πιθανές ζημιές σε περίπτωση, που είναι δύσκολο να βρεθούν αγοραστές για κάποιο χρεόγραφο.
- Ο λειτουργικός κίνδυνος (Operational Risk), ο οποίος έχει να κάνει με τον τρόπο λειτουργίας μιας επιχείρησης, δηλαδή της καλής κατάστασης του έμψυχου και άψυχου δυναμικού της.
- Ο νομικός κίνδυνος (Legal Risk), που λαμβάνει κάποιος όταν έχει ένα συμβόλαιο με έναν τρίτο και δε γνωρίζει κατά πόσο, σε περίπτωση παραβίασης του συμβολαίου από την άλλη πλευρά, θα μπορέσει να δικαιωθεί νομικά.

2.2 Θεωρία χαρτοφυλακίου

Για την επιλογή των χρεογράφων τα οποία, με ένα συγκεκριμένο ποσοστό συμμετοχής το καθένα, θα συγκροτήσουν το χαρτοφυλάκιο ενός επενδυτή, θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν όλες οι παραπάνω μορφές κινδύνου. Το ερώτημα που γεννάται όμως, το οποίο αποτελεί και τον κύριο άξονα της μελέτης αυτής, είναι το ποιο θα είναι το ποσοστό συμμετοχής του κάθε χρεογράφου στο χαρτοφυλάκιο. Για την απάντηση στο ερώτημα αυτό έχει αναπτυχθεί η θεωρία χαρτοφυλακίου η οποία, συνοπτικά, αφού εντοπίσει την αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο, διαφορετικών χαρτοφυλακίων, προτείνει είτε το χαρτοφυλάκιο ελαχίστου κινδύνου – αν πρόκειται για χαρτοφυλάκια ίδιας απόδοσης-, είτε το χαρτοφυλάκιο μέγιστης απόδοσης – αν η επιλογή γίνεται από χαρτοφυλάκια ίδιου κινδύνου. Για να γίνει κατανοητό αυτό θα πρέπει να εξεταστούν οι έννοιες της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου.

2.2.1 Η έννοια της αναμενόμενης απόδοσης

Ο απόδοση (return, r) ενός χρεογράφου σε μια χρονική περίοδο ορίζεται η ποσοστιαία μεταβολή της αξίας του μέσα στην περίοδο αυτή. Έτσι μια μετοχή που το μήνα Ιανουάριο κόστιζε 1€ και το μήνα Μάρτιο 1,8€ για το διάστημα των δύο μηνών που πέρασαν θεωρείται πως έχει απόδοση $(1,8-1)/1 = 0,8 = 80\%$. Γενικά αν τη χρονική στιγμή t η αξία ενός χρεογράφου είναι P_t και τη χρονική στιγμή $t + t'$ είναι $P_{t+t'}$, τότε για τη χρονική περίοδο t' η απόδοση είναι :

$$r_{t'} = \frac{P_{t+t'} - P_t}{P_t}$$

Έστω ότι για κάποιο χρεόγραφο υπάρχουν ημερήσια στοιχεία, δηλαδή η τιμή του κάθε ημέρα για ένα διάστημα και πρέπει να προβλεφθεί η τιμή του την επομένη. Αν υπολογιστούν οι αποδόσεις κάθε ημέρας, τότε η μέση τιμή των αποδόσεων αυτών θεωρείται η αναμενόμενη απόδοση του χρεογράφου για την ημέρα που θα ακολουθήσει. Έτσι με τη συλλογή ιστορικών στοιχείων για κάθε μετοχή, μπορούν να γίνουν προβλέψεις για τη μελλοντική πορεία της. Η αναμενόμενη απόδοση δηλαδή είναι η μέση τιμή των αποδόσεων και μπορεί να υπολογιστεί με τον παρακάτω τύπο:

$$E(r) = \frac{\sum_{t=1}^n r_t}{n}$$

Μιλώντας τώρα, για ένα χαρτοφυλάκιο όπου το ποσοστό συμμετοχής κάθε χρεογράφου i είναι w_i και όχι για ένα μόνο χρεόγραφο, η συνολική αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται από τη σχέση :

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^m w_i E(r_i)$$

2.2.2 Η έννοια του κινδύνου σε χαρτοφυλάκια χρεογράφων

Από μαθηματικής σκοπιάς, η έννοια του κινδύνου ενός χρεογράφου έχει ταυτιστεί με την τυπική απόκλιση, που ισούται με την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης.

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

Πρακτικά η τυπική απόκλιση είναι ένα μέτρο της μεταβλητότητας μιας τυχαίας μεταβλητής γύρω από την αναμενόμενη (μέση) τιμή. Μια μετοχή λοιπόν που μεταβάλλεται έντονα σε σχέση με τη μέση τιμή της θεωρείται ότι εμπεριέχει σημαντικό βαθμό κινδύνου. Έστω μια μετοχή που η τιμή της μεταβάλλεται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα.

Ημερομηνία	Τιμή μετοχής (€)
1/1/2003	1,00
1/2/2003	1,05
1/3/2003	1,12
1/4/2003	0,9

Συμβολίζοντας με P_i την τιμή της μετοχής τη στιγμή i , η απόδοση της r_i για το μήνα Φεβρουάριο θα είναι $\frac{1.05 - 1.00}{1.00} = 0,05 = 5\%$. Αντίστοιχα $r_2 = 0.0667 = 6.7\%$ και $r_3 = -19.6\%$. Έτσι :

$$r_i = \frac{P_{\text{τελευταία}} - P_{\text{αρχική}}}{P_{\text{αρχική}}}$$

θα είναι η απόδοση της μετοχής για κάθε μήνα, ενώ αν συμβολίσουμε με $E(r)$ τη μέση τιμή των αποδόσεων, ή όπως είθισται να λέγεται την αναμενόμενη απόδοση, τότε η τυπική απόκλιση, άρα και η κίνδυνος, θα είναι :

$$\sigma = \sqrt{\frac{[r_1 - E(r)]^2 + [r_2 - E(r)]^2 + [r_3 - E(r)]^2}{3}}$$

και στη γενική μορφή

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n [r_t - E(r)]^2}{n}}$$

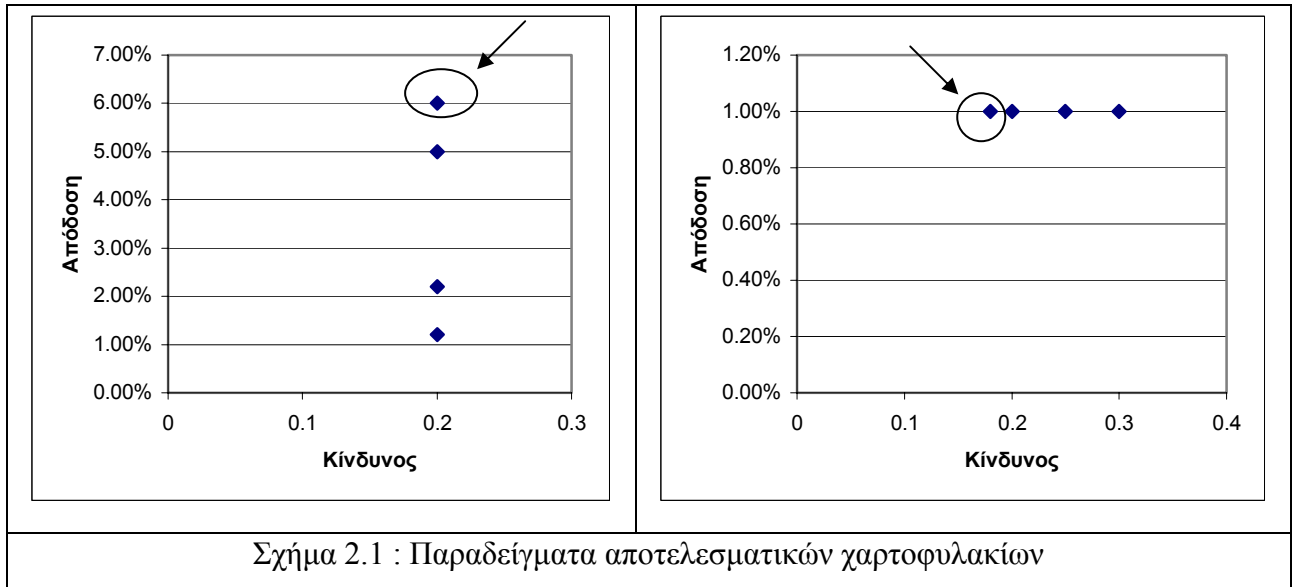
Μιλώντας για ένα χαρτοφυλάκιο από n χρεόγραφα, η έννοια του κινδύνου μπορεί να επεκταθεί ως εξής :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^m w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m w_i w_j \sigma_{ij}}$$

όπου w είναι το «βάρος» κάθε χρεογράφου, δηλαδή το ποσοστό συμμετοχής του στο χαρτοφυλάκιο. [Elton and Gruber, 1995]

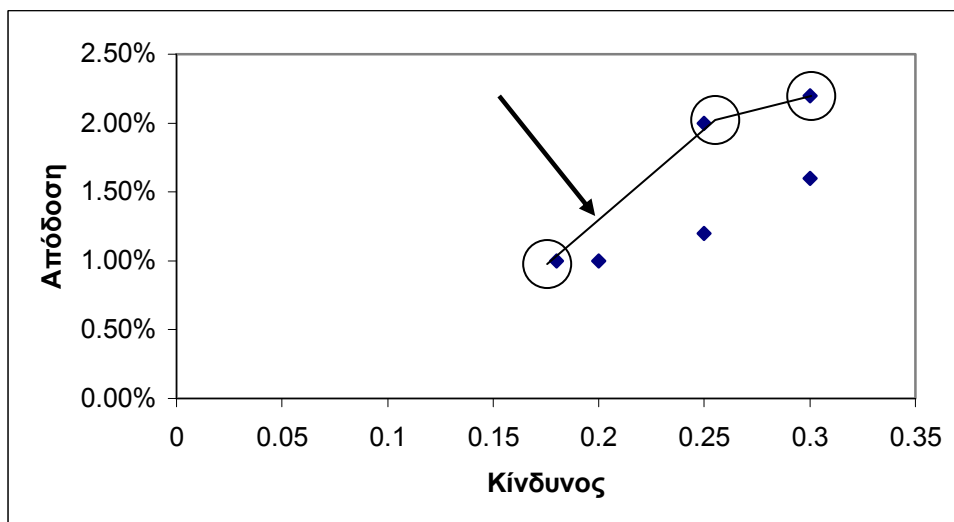
2.2.3 Αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια

Τις βάσεις για την κατασκευή βέλτιστων χαρτοφυλακίων, τις έθεσε ο Harry Markowitz. [Markowitz, 1952]. Ο κύριος άξονας του μοντέλου του Markowitz, το οποίο χρησιμοποιείται ευρύτατα μέχρι και σήμερα, είναι ο εντοπισμός αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων και η κατασκευή από αυτά του αποτελεσματικού συνόλου. Ο εντοπισμός αυτός βασίζεται σε μια σημαντική αρχή, που η ισχύ της θα διαπιστωθεί και με από την ανάλυση που ακολουθεί. Η αρχή αυτή είναι το ότι *η απόδοση είναι ανάλογη του κινδύνου*. Όσο μεγαλύτερο κίνδυνο αναλαμβάνει ο επενδυτής, τόσο υψηλότερη είναι η απόδοσή, που αναμένεται από την επένδυση. Καταλαβαίνει λοιπόν κανείς, για ακόμα μια φορά, τη μεγάλη σημασία υπολογισμού και ελέγχου του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου, αφού οι μεγάλες απαιτήσεις σε απόδοση απαιτούν και μεγάλη έκθεση σε κίνδυνο. Σύμφωνα με την αρχή αυτή λοιπόν ένα χαρτοφυλάκιο p ονομάζεται αποτελεσματικό εάν και μόνο αν δεν υπάρχει άλλο χαρτοφυλάκιο p' τέτοιο ώστε $E(r_{p'}) \geq E(r_p)$ και ταυτόχρονα $\sigma_{p'} < \sigma_p$. Δηλαδή αν δεν υπάρχει άλλο χαρτοφυλάκιο μεγαλύτερης απόδοσης και μικρότερου κινδύνου.



Σχήμα 2.1 : Παραδείγματα αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων

Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω σχήματα, από χαρτοφυλάκια ίδιας απόδοσης αποτελεσματικό θεωρείται αυτό που έχει το μικρότερο κίνδυνο, ενώ από χαρτοφυλάκια ίδιου κινδύνου, αποτελεσματικό θεωρείται αυτό με τη μεγαλύτερη απόδοση. Επειδή, για μια ενδεχόμενη επένδυση, τα αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια είναι περισσότερα του ενός, το σύνολό τους αποτελεί αυτό που ονομάζεται αποτελεσματικό σύνολο. Ένα αποτελεσματικό σύνολο αποτελούμενο από τρία αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια φαίνεται στο σχήμα, που ακολουθεί.



Σχήμα 2.2 : Απεικόνιση αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου

Αφού δημιουργηθεί, σύμφωνα με το μοντέλο του Markowitz, το αποτελεσματικό σύνολο, ο επενδυτής πρέπει να αποφασίσει, σύμφωνα με την απόδοση που απαιτεί και τον κίνδυνο που είναι σε θέση να επωμιστεί, ποιο από τα αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια θα επιλέξει.

2.3 Κριτική του μοντέλου

Με μια πρώτη ματιά στο μοντέλο του Markowitz, ανακαλύπτει κανείς και τα πρώτα «τρωτά» σημεία. Η έννοιες του κινδύνου και της απόδοσης δεν μπορούν να βρουν μια φυσική ερμηνεία, ώστε να γίνουν κατανοητές από οποιονδήποτε. Ο κίνδυνος ειδικά δίνεται από ένα μαθηματικό τύπο τον οποίο ο αποφασίζον απλώς αποδέχεται, χωρίς να σημαίνει για αυτόν κάτι πρακτικά κατανοητό. Έτσι ένας χρηματοοικονομικός σύμβουλος με τη βοήθεια του μοντέλου κατασκευάζει το αποτελεσματικό σύνολο και ο επενδυτής, αν δε γνωρίζει στατιστικές έννοιες όπως η τυπική απόκλιση και η διακύμανση, απλώς επιλέγει από αυτό το χαρτοφυλάκιο που του ταιριάζει, χωρίς να κατανοεί πλήρως την έννοια του αποτελεσματικού συνόλου και τη λειτουργία του μοντέλου. Είναι προφανής λοιπόν η ανάγκη για ένα μοντέλο με έννοιες πιο πρακτικές, έτσι ώστε να αναβαθμιστεί ο ρόλος του αποφασίζοντα και να μπορεί ο τελευταίος να κατανοεί ευκολότερα τον τρόπο λειτουργίας του.

2.4 Αξία στον κίνδυνο (Value at Risk, VaR)

2.4.1 Εισαγωγή στην έννοια της VaR

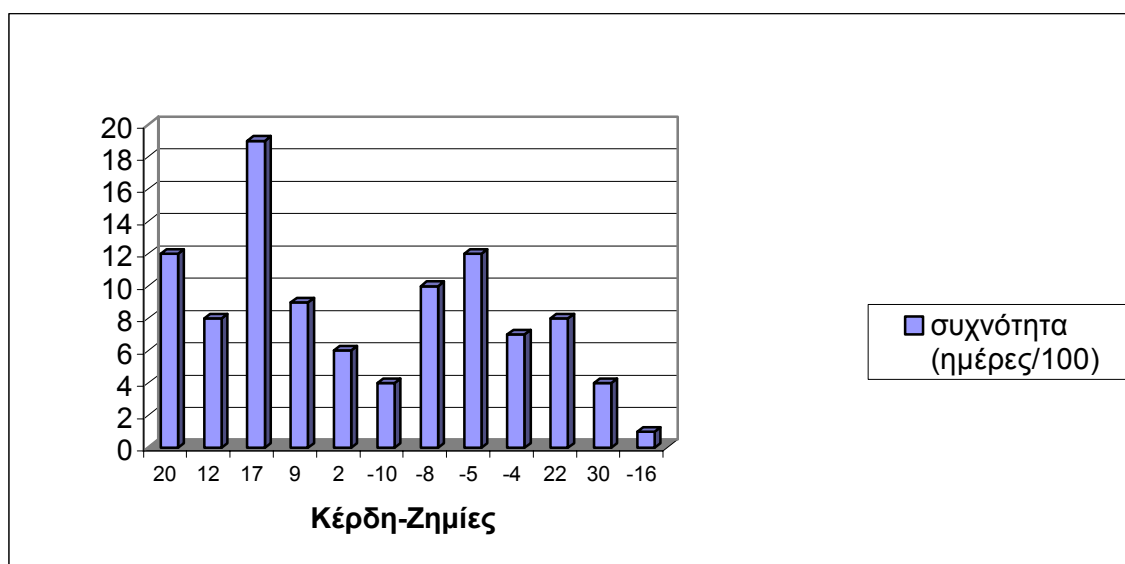
Στα τέλη της δεκαετίας του 70 και μέσα στη δεκαετία του 80, διάφορα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ανέπτυξαν συστήματα υπολογισμού του κινδύνου για δική τους χρήση, ενώ στη συνέχεια τα συστήματα αυτά άρχισαν να πωλούνται και σε διάφορους πελάτες. Το πιο γνωστό από τα συστήματα αυτά είναι το RiskMetrics το οποίο αναπτύχθηκε από την εταιρία JP Morgan και ουσιαστικά αποτέλεσε την αρχή της

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

ανάπτυξης της μεθόδου, που είναι γνωστή ως «αξία στον κίνδυνο». Η μέθοδος προέκυψε μετά από την απαίτηση του διευθυντή της JP Morgan, να του δίνεται καθημερινά μια αναφορά στην οποία θα υπολογίζονται οι πιθανές απώλειες της εταιρίας το επόμενο εικοσιτετράωρο.

Όταν λοιπόν πρόκειται κανείς να υπολογίσει την τιμή της VaR για μια συγκεκριμένη επένδυση, ουσιαστικά πρόκειται να απαντήσει στην εξής απλή ερώτηση. « Ποιά είναι η μέγιστη ζημία που μπορεί να υπάρξει λόγω της επένδυσης, σε ένα δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης». Από την πολύ απλή αυτή έκφραση καταλαβαίνει κανείς πως η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί οπουδήποτε υπάρχει κίνδυνος και φυσικά στην περίπτωση της διαχείρισης χαρτοφυλακίων. Το διάστημα εμπιστοσύνης, που αποτελεί και μια από τις παραμέτρους της μεθόδου, είναι μια πιθανότητα, που συνήθως κυμαίνεται γύρω από το 90%. Έτσι για διαστήματα 90, 95 και 99% η μέθοδος ονομάζεται VaR90, VaR95 και VaR99 αντίστοιχα.

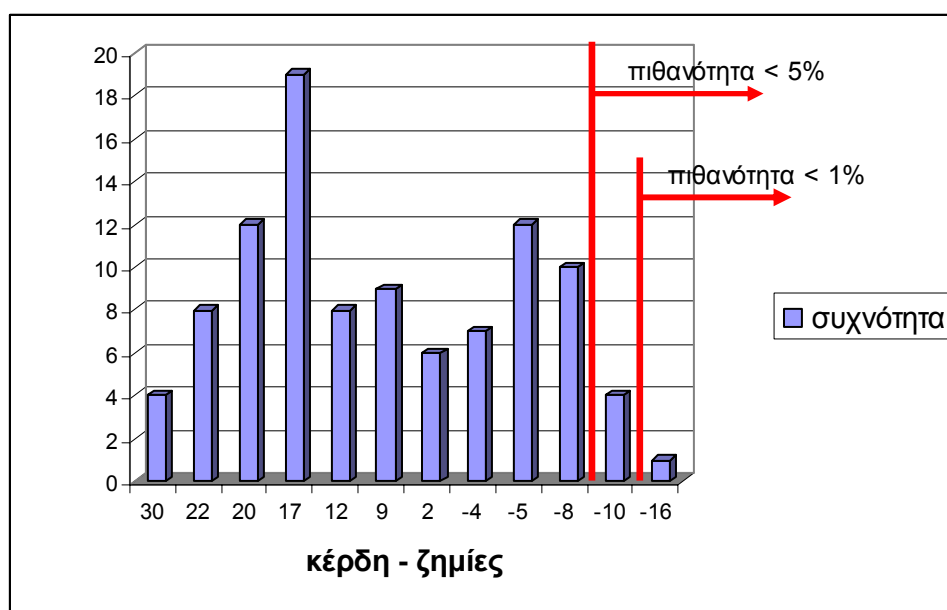
Για να γίνει πιο κατανοητή η λειτουργία της μεθόδου, θα παρατεθεί ένα παράδειγμα. Έστω μια επιχείρηση η οποία στατιστικά επί 100 ημέρες παρουσιάζει καθημερινά κέρδη ή ζημίες σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.3 : Συχνότητα κερδών και ζημιών

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

Έστω τώρα ότι πρέπει να υπολογιστεί για την εταιρία αυτή η τιμή της VaR95. Ειδικότερα, η VaR95 αντιστοιχεί σε ένα οριακό επίπεδο απωλειών τέτοιο ώστε η πιθανότητα εμφάνισης απωλειών υψηλότερων του οριακού αυτού επιπέδου να μην υπερβαίνει το 5%. Αφού η ημέρες της παρατήρησης είναι 100 άρα η συχνότητα της κάθε παρατήρησης αποτελεί και την πιθανότητα επανεμφάνισής της την επόμενη ημέρα. Οι τιμές -10 και -16 έχουν συνολικά πιθανότητα εμφάνισης 5% και έτσι οριοθετούν το διάστημα εμπιστοσύνης. Συνεπώς η VaR95 για αυτήν την περίπτωση είναι -8. Η τιμή της VaR99 για την ίδια εταιρία είναι -10, αφού είναι η μέγιστη δυνατή απώλεια, αν εξαιρεθεί η τιμή -12 η οποία έχει πιθανότητα εμφάνισης 1%. Ο τρόπος εξαγωγής των αποτελεσμάτων αυτών γίνεται πιο κατανοητός αν τοποθετηθούν στη σειρά τα κέρδη και οι ζημίες και εντοπιστεί το σημείο, κάτω από το οποίο οι απώλειες έχουν πιθανότητα εμφάνισης μικρότερη του 5% για τη VaR95 και 1% για τη VaR99. Το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής φαίνεται στο σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4 : Τοποθέτηση αποτελεσμάτων από το μεγαλύτερο κέρδος στη μεγαλύτερη ζημία

2.4.2 Διαδικασία υπολογισμού – αναλυτική προσέγγιση

Η VaR εξ'ορισμού είναι η μέγιστη αναμενόμενη ζημία σε δεδομένο χρονικό διάστημα και δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό για να υπολογιστεί η VaR ενός χαρτοφυλακίου αξίας P , θα πρέπει να υπολογιστεί η μέγιστη ζημία, δηλαδή $\Delta P^* = P - P_t^*$, που μπορεί να έχει ο επενδυτής, σε ένα χρονικό διάστημα t και με επίπεδο εμπιστοσύνης $1-a$. Θα πρέπει δηλαδή να υπολογιστεί η ζημία ΔP^* , έτσι ώστε η πιθανότητα $\Pr(\Delta P < \Delta P^*) = a$. Επειδή όμως η ανάλυση κάθε επενδυτικής θέσης γίνεται σε όρους απόδοσης, κρίνεται σκόπιμο, να εκφραστούν τα παραπάνω σύμφωνα με την έννοια της απόδοσης και όχι των νομισματικών μεταβολών ΔP και ΔP^* . Όπως ορίστηκε στην παράγραφο 2.2.1 η απόδοσή r μιας χρονικής περιόδου i ισούται με :

$$r_i = \frac{P_{t+i} - P_t}{P_t} \quad \text{ή διαφορετικά :}$$

$$r = \frac{\Delta P}{P} \Rightarrow \Delta P = rP.$$

Για τον υπολογισμό της VaR λοιπόν πρέπει να υπολογιστεί η οριακή απόδοση r^* , έτσι ώστε $\Pr(rP < r^*P) = a \Rightarrow \Pr(r < r^*) = a$. Για την επίλυση του προβλήματος λοιπόν, θα πρέπει να είναι γνωστή η στατιστική κατανομή της απόδοσης. Η ανάλυση απλοποιείται πολύ αν θεωρηθεί ότι η απόδοση ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ . Σε αυτήν την περίπτωση θα ισχύει το παρακάτω :

$$\Pr(r < r^*) = a \Rightarrow \Pr(Z < Z^* = \frac{r^* - \mu}{\sigma}) = a$$

Η τιμή του Z μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από τους πίνακες της κανονικής κατανομής. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό της VaR95, δηλαδή για επίπεδο

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

εμπιστοσύνης $1-\alpha=95\%$, προκύπτει ότι $Z^*=-1,65$. Γνωρίζοντας την τιμή αυτή, μπορεί να υπολογίσει κανείς το r^* , ως :

$$r^* = \mu + Z^* \sigma$$

και συνεπώς η VaR υπολογίζεται ως :

$$VaR = -\Delta P^* = -r^* P = (-\mu + Z^* \sigma) P = \mu P + Z^* \sigma P$$

Η VaR, που προκύπτει από τη σχέση αυτή εκφράζει ζημία σε απόλυτους όρους. Μια εναλλακτική λύση είναι ο υπολογισμός της σχετικής (relative) VaR, προσδιορίζοντας τη ζημία σε σχέση με το αναμενόμενο κέρδος. Η σχετική VaR υπολογίζεται από τον τύπο :

$$VaR = -(r^* P - \mu P) = -(\mu P + Z^* \sigma P - \mu P) = -Z^* \sigma P$$

Όπως φαίνεται για τον υπολογισμό της σχετικής VaR απαιτείται μόνο ο προσδιορισμός της τυπικής απόκλισης σ και επειδή τόσο από τη μια όσο και από την άλλη θεώρηση για τον υπολογισμό της VaR, παίρνει κανείς την ίδια πληροφορία, προτιμάται ο υπολογισμός της σχετικής VaR.

Η παραπάνω αναλυτική προσέγγιση για τον υπολογισμό της VaR μπορεί να επεκταθεί σε χαρτοφυλάκια χρεογράφων. Συγκεκριμένα, για ένα χαρτοφυλάκιο m χρεογράφων x_1, x_2, \dots, x_m , αποδεικνύεται [Δούμπος, 2003] ότι η VaR του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται από τον τύπο :

$$VaR_p = (\mathbf{VaR} \times \mathbf{C} \times \mathbf{VaR}')^{1/2}$$

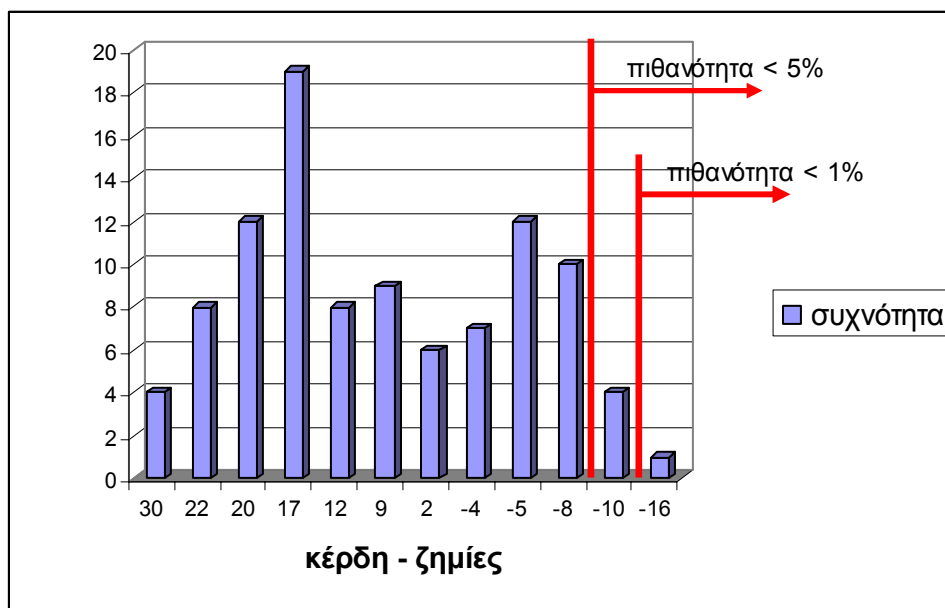
όπου \mathbf{VaR} είναι ένα $1 \times m$ διάνυσμα, ορισμένο ως $\mathbf{VaR} = [w_1 VaR_1, w_2 VaR_2, \dots, w_m VaR_m]$ και \mathbf{VaR}' το ανάστροφό του. Το \mathbf{C} είναι ο πίνακας συσχέτισης ($m \times m$) των αποδόσεων, δηλαδή κάθε στοιχείο του C_{ij} δείχνει το συντελεστή συσχέτισης ρ_{ij} μεταξύ δύο χρεογράφων X_i και X_j .

2.4.3 Εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού

Ο αναλυτικός τρόπος υπολογισμού, που προαναφέρθηκε, είναι απλός στη λειτουργία αλλά για να ισχύσει πρέπει να γίνει η παραδοχή της κανονικότητας των αποδόσεων. Αυτό δεν ανταποκρίνεται πάντα στην πραγματικότητα και έτσι έχουν προταθεί διάφοροι εναλλακτικοί τρόποι υπολογισμού της VaR, που ξεπερνούν το πρόβλημα αυτό. Οι τρεις σημαντικότεροι είναι οι παρακάτω.

- **Η ιστορική προσομοίωση (Historical Simulation).**

Η ιστορική προσομοίωση είναι αντίστοιχη με το παράδειγμα, που παρατέθηκε στην παράγραφο 2.4.1 για την κατανόηση της VaR και αποτελεί την απλούστερη μέθοδο υπολογισμού της. Όπως και με την αναλυτική μέθοδο έτσι και εδώ, απαιτείται η συγκέντρωση ιστορικών στοιχείων για τις αξίες των χρεογράφων, που συμμετέχουν στο χαρτοφυλάκιο. Η συγκέντρωση αυτή των στοιχείων γίνεται για μια σειρά $N+1$ χρονικών περιόδων, που μπορεί να είναι ημέρες, εβδομάδες, κλπ. Με βάση τις τιμές p_t και p_{t-1} των χρεογράφων ($t = 1, 2, 3, \dots, N$), υπολογίζεται για κάθε χρονική περίοδο t το κέρδος ή η ζημία χαρτοφυλακίου, σε κάθε χρονική στιγμή. Έτσι δημιουργείται μια σειρά από N παρατηρήσεις, με κέρδη ή ζημίες, οι οποίες και κατατάσσονται από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη. Η τιμή της VaR με επίπεδο εμπιστοσύνης α , θα είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή της κατάταξης αυτής, έτσι ώστε να είναι ταυτόχρονα και μεγαλύτερη από το $(1-\alpha) \%$ των παρατηρήσεων. Έτσι για την περίπτωση που περιγράφει ο πίνακας 4.3, θα έπρεπε πρώτα να τοποθετηθούν οι παρατηρήσεις στη σειρά από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη και στη συνέχεια να επιλεγεί για τιμή της VaR η μικρότερη δυνατή τιμή, που ταυτόχρονα είναι και μέσα στο επιθυμητό διάστημα εμπιστοσύνης. Θα δημιουργούνταν έτσι σχήμα σαν το παρακάτω :



Σχήμα 2.5 : Παράδειγμα ιστορικής προσομοίωσης

Εδώ φαίνεται η πιθανότητα εμφάνισης για τα αναμενόμενα κέρδη ή ζημιές, τα οποία έχουν τοποθετηθεί από το μεγαλύτερο κέρδος (+30), μέχρι και τη μεγαλύτερη απώλεια (-16). Φαίνεται καθαρά ότι η τιμή της VaR95 είναι -8, αφού αγνοώντας τις μέγιστες απώλειες με συνολική πιθανότητα μικρότερη του 95% το χειρότερο σενάριο είναι το -8. Αντίστοιχα η τιμή της VaR99 είναι -10.

Εκτός από την απλότητα στη χρήση και την ευκολία στην κατανόηση, η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης έχει και αρκετά άλλα πλεονεκτήματα.

1. Για να λειτουργήσει δε χρειάζεται καμία υπόθεση ή παραδοχή σχετικά με τη στατιστική κατανομή των αποδόσεων.
2. Δεν απαιτεί τον υπολογισμό παραμέτρων, όπως οι αναμενόμενες αποδόσεις οι τυπικές αποκλίσεις και οι συσχετίσεις, που κάνουν τους υπολογισμούς δύσκολους.
3. Μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα σε οποιοδήποτε χρεόγραφο ή χαρτοφυλάκιο χρεογράφων.
4. Βοηθά τον αποφασίζων να διαμορφώσει ευκολότερα μια άποψη για τις στατιστικές ιδιότητες των αποδόσεων της επενδυτικής του θέσης.

Εκτός όμως από τα πλεονεκτήματα της μεθόδου, υπάρχουν και κάποια σημεία, που δημιουργούν προβλήματα κατά τη χρήση της. Τα αρνητικά στοιχεία έχουν ως βάση το

ότι κύριος άξονας λειτουργίας της μεθόδου είναι τα ιστορικά στοιχεία και τίποτα πέρα από αυτά. Έτσι για τη σωστή λύση ενός προβλήματος θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν τα παρακάτω.

1. Τα ιστορικά δεδομένα θα πρέπει να είναι επιλεγμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αντιπροσωπευτικά και ρεαλιστικά. Θα πρέπει δηλαδή να αφορούν τόσο περιόδους ηρεμίας της αγοράς όσο και περιόδους με μεγάλες διακυμάνσεις, θετικές και αρνητικές.
2. Η τιμή της VaR θα είναι μη ρεαλιστική αν στα ιστορικά δεδομένα περιλαμβάνεται και μια περίοδος μεγάλης ανόδου ή πτώσης των τιμών, η οποία δεν είναι πιθανό να παρουσιαστεί στο μέλλον. Έτσι αν στα στοιχεία περιλαμβάνεται η περίοδος ενός οικονομικού «κραχ» θα προκύψει αδικαιολόγητα μεγάλη τιμή της VaR, ενώ το αντίθετο θα γίνει στην περίπτωση που θα εξεταστεί μια περίοδος μεγάλης ανόδου, λόγω κάποιου συγκεκριμένου γεγονότος.
3. Το πλήθος των ιστορικών δεδομένων πρέπει να επιλέγει προσεκτικά. Όσο περισσότερα είναι τα δεδομένα, τόσο μεγαλύτερης ακρίβειας είναι οι υπολογισμοί και οι προβλέψεις. Από την άλλη όμως ο μεγάλος αριθμός παλιών στοιχείων μπορεί να «καλύψει» τα πρόσφατα στοιχεία, τα οποία είναι και ποιο αντιπροσωπευτικά για την περαιτέρω πορεία ενός χρεογράφου, και αντικατοπτρίζουν καλύτερα τις τρέχουσες συνθήκες της αγοράς.
4. Ο υπολογισμός της VaR μέσω της ιστορικής προσομοίωσης γίνεται πολύ δύσκολος για περιόδους αναπροσαρμογής χαρτοφυλακίου μεγαλύτερες από μια μέρα. Έστω ότι ο χρονικός ορίζοντας αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου είναι ένας μήνας. Τότε οι παρατηρήσεις δε θα πρέπει να είναι ημερήσιες όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, αλλά μηνιαίες. Έτσι, για παράδειγμα, για τη συλλογή $N=100$ μηνιαίων παρατηρήσεων χρειάζονται $100*30= 3.000$ ημερήσιες παρατηρήσεις. Τα δεδομένα αυτά αφορούν περίοδο μεγαλύτερη των 8 ετών και συνεπώς η συλλογή τους μπορεί να είναι δύσκολη. [Linsmeier and Pearson, 1996]

- **Bootstrapping**

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων της ιστορικής προσομοίωσης και ειδικά του προβλήματος του πλήθους των δεδομένων, χρησιμοποιείται μια στατιστική διαδικασία δειγματοληψίας γνωστή ως bootstrap [Efron και Tibshirani, 1993]. Το Bootstrap είναι μια τυχαία επαναληπτική διαδικασία με επανατοποθέτηση η οποία εφαρμόζεται στο δείγμα των ιστορικών στοιχείων, με στόχο να δημιουργηθούν διάφορα τυχαία σενάρια τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της VaR και τα οποία δεν είναι δυνατό να βρεθούν από ιστορικά δεδομένα. Επειδή η μέθοδος του bootstrap χρησιμοποιείται στη συνέχεια για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων, κρίνεται σκόπιμη η σύντομη παρουσίαση της λειτουργίας της.

Στην κλασική στατιστική θεωρία, για να υπολογιστεί μια παράμετρος θα πρέπει να γίνει συλλογή σχετικών στοιχείων και όσο μεγαλύτερος ο όγκος των στοιχείων τόσο μεγαλύτερη και η ακρίβεια του υπολογισμού. Η μέθοδος του bootstrap δίνει λύση στην αδυναμία αλλά και το μεγάλο κόστος, της συλλογής μεγάλων δειγμάτων δεδομένων. Έστω λοιπόν ότι ένα δείγμα αποτελείται από N παρατηρήσεις (x_1, x_2, \dots, x_N) . Από το αρχικό δείγμα κατασκευάζονται B τυχαία δείγματα τα οποία είναι συνήθως ίδια σε αριθμό με τις παρατηρήσεις του δείγματος και για τη δημιουργία τους χρησιμοποιούνται γεννήτριες τυχαίων αριθμών. Αυτά τα δείγματα ονομάζονται δείγματα bootstrap. Επειδή κάθε δείγμα bootstrap έχει τόσες παρατηρήσεις όσες και το αρχικό δείγμα αλλά ταυτόχρονα κατασκευάστηκε με τυχαίο τρόπο, είναι αναμενόμενο να περιλαμβάνει και κάποιες επαναλήψεις των τιμών x_1, x_2, \dots, x_N . Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ένα δείγμα bootstrap περιλαμβάνει (κατά μέσο όρο) το 63% των παρατηρήσεων του αρχικού δείγματος. Ένα παράδειγμα δέκα δειγμάτων bootstrap, που κατασκευάστηκαν τυχαία από ένα αρχικό δείγμα x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 φαίνεται παρακάτω.

Πίνακας 2.1 : Παράδειγμα δημιουργίας σεναρίων με bootstrapping

Αρχικό	b1	b2	b3	b4	b5
x1	x2	x3	x5	x4	x5
x2	x2	x2	x4	x3	x4
x3	x5	x1	x2	x4	x3
x4	x2	x1	x4	x3	x2
x5	x2	x5	x5	x4	x3

Μετά την κατασκευή τους τα δείγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για στατιστικούς υπολογισμούς στη θέση των ιστορικών δεδομένων, λύνοντας έτσι κάθε πρόβλημα εξεύρεσης στοιχείων. Συγκεκριμένα στην περίπτωση της VaR με μηνιαίο ορίζοντα αναπροσαρμογής, που προαναφέρθηκε και δημιουργούσε πρόβλημα στη μέθοδο ιστορικής προσομοίωσης μπορεί να ακολουθηθεί η παρακάτω διαδικασία.

1. Από τα διαθέσιμα ημερήσια στοιχεία κατασκευάζονται B δείγματα μεγέθους 30. Τα δείγματα αυτά αποτελούν ουσιαστικά τυχαία μηνιαία δείγματα.
2. Από τις 30 παρατηρήσεις υπολογίζεται το κέρδος ή η ζημία, σε μηνιαία βάση.
3. Στα αποτελέσματα εφαρμόζεται η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης για τον υπολογισμό της μηνιαίας VaR.

Είναι εύκολο να καταλάβει κανείς, πως η διαδικασία αυτή περιέχει όλα τα πλεονεκτήματα της διαδικασίας της ιστορικής προσομοίωσης και επιπλέον αντιμετωπίζει αποτελεσματικά το πρόβλημα της συλλογής μεγάλου όγκου στοιχείων, αφού μπορεί από μικρό όγκο δεδομένων να δημιουργήσει οποιουδήποτε είδους τυχαίο σενάριο. Επιπλέον, με τη διαδικασία αυτή μειώνεται το στατιστικό σφάλμα, που υπάρχει στην περίπτωση μελέτης ενός συγκεκριμένου δείγματος. Πέραν των θετικών στοιχείων όμως, η μέθοδος του bootstrap έχει και αρνητικά. Το πιο σημαντικό από αυτά είναι η υπόθεση πως οι αποδόσεις είναι ανεξάρτητες του χρόνου, δηλαδή οι προηγούμενες αποδόσεις δεν επηρεάζουν τις νέες. [Efron και Tibshirani, 1993].

- **Προσομοίωση Monte Carlo**

Εκτός από την ιστορική προσομοίωση και τη μέθοδο του bootstrap, μια εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού της VaR είναι η προσομοίωση Monte Carlo. Σε αυτήν την περίπτωση, τα σενάρια που δημιουργούνται, δεν προκύπτουν από ιστορικά στοιχεία με τη βοήθεια προσομοίωσης, όπως με το bootstrap. Για τη δημιουργία τους γίνεται χρήση των στατιστικών ιδιοτήτων της απόδοσης της επένδυσης και σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές γίνεται η τυχαία παραγωγή τους. Μια ακόμα διαφορά με το bootstrap είναι ότι στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των σεναρίων είναι συνήθως μεγάλος.

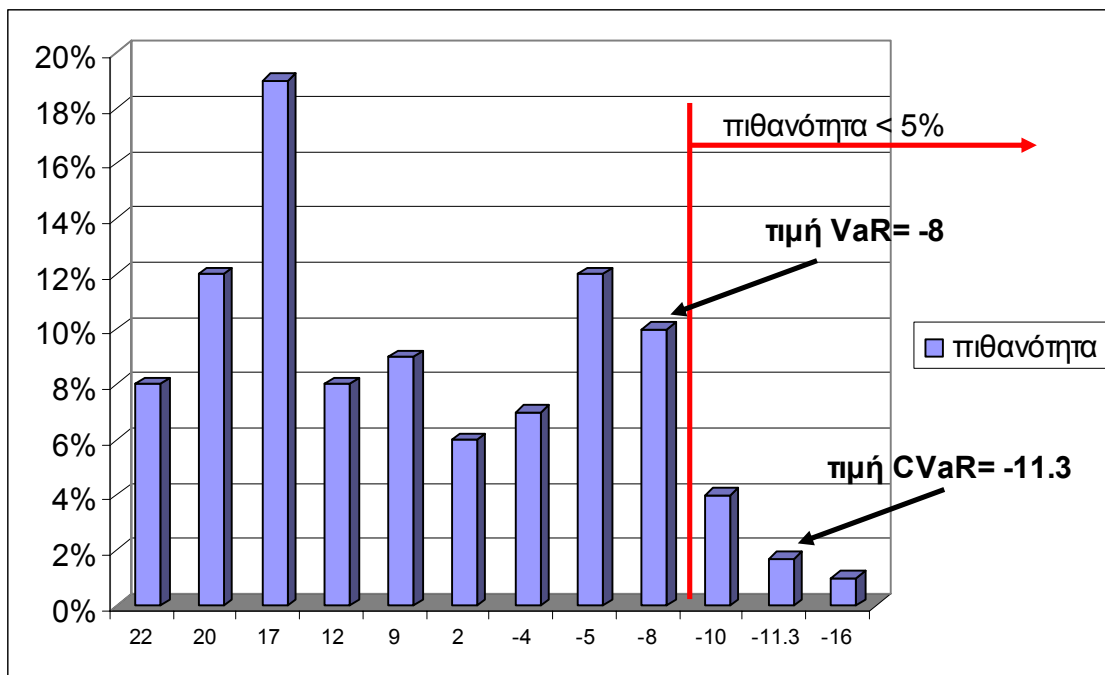
Το πρώτο βήμα στη χρησιμοποίηση της προσομοίωσης Monte Carlo είναι να καθορισθεί το μοντέλο το οποίο αντιπροσωπεύει καλύτερα την εξεταζόμενη μεταβολή στις τιμές των χρεογράφων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των μετοχών, η μεταβολή τους συνήθως μοντελοποιείται μέσω της διαδικασίας Wiener. Έτσι η μεταβολή στην αξία της μετοχής ορίζεται ως $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, όπου 'S' είναι η αξία, 'μ' η αναμενόμενη απόδοση (μέση τιμή) και 'σ' η αντίστοιχη τυπική απόκλιση. Το dW είναι ένας τυχαίος παράγοντας, που ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Μετά τον καθορισμό του μοντέλου και βάση της στατιστικής κατανομής, που ακολουθεί η κάθε παράμετρος του, γίνεται η δημιουργία τυχαίων σεναρίων, τα οποία πρέπει να είναι αρκετά έτσι ώστε να περιορισθεί το στατιστικό σφάλμα. Ένας ικανοποιητικός αριθμός είναι τα 10.000 σενάρια. Καταλαβαίνει έτσι κανείς πως στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από 10 χρεόγραφα, χρειάζονται $10 \cdot 10.000 = 100.000$ σενάρια.

Όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς, το βασικό μειονέκτημα της προσομοίωσης Monte Carlo είναι ο μεγάλος αριθμός σεναρίων, που σημαίνει αυξημένο χρόνο άρα και κόστος. Το βασικό πλεονέκτημα της είναι η μεγάλη ακρίβεια με την οποία υπολογίζεται η τιμή της VaR. [Linsmeier and Pearson, 1996]

3. Υπό Συνθήκη Αξία στον Κίνδυνο (Conditional Value at Risk , CVaR)

3.1 Θεωρητική προσέγγιση

Μια παραλλαγή της VaR είναι η υπό συνθήκη VaR ή CVaR [Rockafellar and Uryasev, 2000]. Η παραλλαγή αυτή χρησιμοποιείται και στη συνέχεια για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Όπως αναφέρθηκε, η VaR αντιπροσωπεύει τη μέγιστη δυνατή απώλεια μιας επένδυσης, μέσα σε ένα ορισμένο διάστημα εμπιστοσύνης. Το αρνητικό στοιχείο είναι το ότι οι υπόλοιπες αρνητικές αποδόσεις (ζημίες) οι οποίες είναι έξω από το διάστημα αυτό δε λαμβάνονται υπόψιν. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται στην περίπτωση της υπό συνθήκη αξίας στον κίνδυνο, αφού η τιμή της δεν είναι μια συγκεκριμένη απόδοση μέσα στο διάστημα εμπιστοσύνης αλλά ο μέσος όρος της τιμής της VaR και των απωλειών που την ξεπερνούν.



Σχήμα 2.6 : Σχηματική παρουσίαση CVaR

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.6, ενώ η τιμή της VaR θα ήταν -8 (ως η μέγιστη δυνατή απώλεια μέσα στο διάστημα εμπιστοσύνης του 95%) η τιμή της CVaR για το ίδιο πρόβλημα είναι -11,3. Τιμή η οποία αντιπροσωπεύει το μέσο όρο του -8 και των δύο τιμών -10 και -16, που βρίσκονται έξω από το διάστημα εμπιστοσύνης. Με αυτό τον τρόπο λαμβάνονται και αυτές οι τιμές υπόψιν δίνοντας πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα. Ουσιαστικά, βελτιστοποιώντας κανείς τη CVaR βελτιστοποιεί και τη VaR, αφού ισχύει ότι $CVaR \geq VaR$. Πέραν τουτου ένα ακόμα πλεονέκτημα της CVaR είναι το ότι μπορεί να βελτιστοποιηθεί με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού και έτσι η δημιουργία βέλτιστων χαρτοφυλακίων να γίνει μια διαδικασία επίλυσης ενός γραμμικού προβλήματος η οποία είναι σχετικά απλή στην κατανόηση και εύκολη στη χρήση αλλά και στην υλοποίηση. [Uryasev, 2000].

3.2 Μαθηματική μοντελοποίηση

Θα γίνει τώρα μια προσπάθεια να προσεγγιστεί το πρόβλημα εύρεσης βέλτιστου χαρτοφυλακίου με μαθηματικές σχέσεις και να δοθούν ορισμοί στις προηγούμενες έννοιες, που προσεγγίστηκαν θεωρητικά. Αρχικά θα πρέπει να οριστεί μια συνάρτηση, που θα αντιπροσωπεύει τις απώλειες. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται ως $f(x,y)$. Το διάνυσμα $x \in X$ παίρνει τιμές στο \mathbb{R} και περιέχει τις μεταβλητές απόφασης. Θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι ο αριθμός κάθε μετοχής στο χαρτοφυλάκιο. Το διάνυσμα y συμβολίζει τις αβεβαιότητες όπως παραδείγματος χάριν τιμές της αγοράς, που μπορούν να επηρεάσουν τις απώλειες.

Για κάθε διαφορετικό x η $f(x,y)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή στο \mathbb{R} σύμφωνα με το y . Θεωρούμε τώρα ότι το y έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\rho(y)$. Έτσι η πιθανότητα οι απώλειες $f(x,y)$, να μην υπερβούν ένα δεδομένο όριο ζ , δίνεται από τον τύπο :

$$\Psi(x, \zeta) = \int_{f(x,y) \leq \zeta} \rho(y) dy$$

Ως συνάρτηση του ζ για σταθερό x , η $\Psi(x, \zeta)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για κάθε απώλεια, που σχετίζεται με το x και θεωρείται συνεχής για κάθε ζ . Στη συνέχεια οι τιμές των α -VaR και α -CVaR, όπου $\alpha \in (0,1)$ δείχνει το διάστημα εμπιστοσύνης, θα συμβολίζονται με $\zeta_\alpha(x)$ και $\phi_\alpha(x)$ αντίστοιχα. Έτσι:

$$\zeta_\alpha(x) = \alpha \text{VaR} = \min \{ \zeta \in \mathbb{R} : \Psi(x, \zeta) \geq \alpha \}$$

$$\phi_\alpha(x) = \alpha \text{CVaR} = \frac{1}{1-\alpha} \int_{f(x,y) \geq \zeta_\alpha(x)} f(x,y) \rho(y) dy$$

Αφού ορίστηκαν μαθηματικά οι έννοιες της αξίας στον κίνδυνο, θα πρέπει να γίνουν οι απαραίτητοι μετασχηματισμοί έτσι ώστε το πρόβλημα να μετασχηματιστεί σε γραμμικό, το οποίο μπορεί εύκολα να βελτιστοποιηθεί. Για να πραγματοποιηθεί αυτό ορίζεται η παρακάτω συνάρτηση :

$$F_\alpha(x, \zeta) = \zeta + (1-\alpha)^{-1} \int_{y \in R} [f(x,y) - \zeta]^+ \rho(y) dy \text{ . Όπου } [t]^+ = \max \{t, 0\} \text{ .}$$

Σύμφωνα με τους Rockafellar and Uryasev (2000), αποδεικνύεται ότι η ελαχιστοποίηση της α -CVaR των απωλειών, που σχετίζονται με το $x \in X$, είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση της $F_\alpha(x, \zeta)$ για κάθε ζεύγος $(x, \zeta) \in X \times \mathbb{R}$, δηλαδή :

$$\min_{x \in X} \phi_\alpha(x) = \min_{(x, \zeta) \in X \times \mathbb{R}} F_\alpha(x, \zeta)$$

Σύμφωνα με τη σχέση αυτή, για τον καθορισμό του διανύσματος x το οποίο βελτιστοποιεί την α -CVaR, δε χρειάζεται να ασχοληθεί κανείς με τη συνάρτηση $\phi_\alpha(x)$, το οποίο είναι δύσκολο εξαιτίας της φύσης της συνάρτησης. Αντί για αυτήν αρκεί να βελτιστοποιηθεί η απλούστερη σε έκφραση συνάρτηση $F_\alpha(x, \zeta)$.

Για την εύρεση ενός αποτελεσματικού συνόλου [Rockafellar and Uryasev (2000)] μπορεί να ελαχιστοποιηθεί η τιμή της α -CVaR και ταυτόχρονα να απαιτείται μια ελάχιστη αναμενόμενη απόδοση. Θεωρώντας διαφορετικές αναμενόμενες αποδόσεις οι διάφορες λύσεις, που προκύπτουν δημιουργούν το αποτελεσματικό σύνολο. Μια εναλλακτική προσέγγιση από αυτήν είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους, με ταυτόχρονο περιορισμό του λαμβανόμενου ρίσκου. Μπορούν λοιπόν να αντιμετωπιστούν οι συναρτήσεις της CVaR και της αναμενόμενης απόδοσης και τελικά να ελαχιστοποιηθεί η αναμενόμενη ζημία υπό τον περιορισμό της CVaR.

Έστω η συνάρτηση $\phi(x)$ και η $R(x)$ (συνάρτηση κέρδους) οι οποίες εξαρτώνται από το διάνυσμα απόφασης x . Οι Krokmal, Palmquist, και Uryasev αποδεικνύουν ότι τα ακόλουθα προβλήματα βελτιστοποίησης είναι ισοδύναμα :

$$(P1) \quad \min_x \phi(x) - \mu_1 R(x), x \in X, \mu_1 \geq 0$$

$$(P2) \quad \min_x \phi(x), R(x) \geq p, x \in X$$

$$(P3) \quad \min_x -R(x), \phi(x) \leq \omega, x \in X$$

Έτσι για τη δημιουργία του αποτελεσματικού συνόλου με τις συναρτήσεις $\phi_\alpha(x)$ της CVaR και $R(x)$ του κέρδους, μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε από τις τρεις εκφράσεις (P1),(P2),(P3). Επίσης, η συνάρτηση $F_\alpha(x, \zeta)$ μπορεί να

3. Conditional Value at Risk

χρησιμοποιηθεί αντί της $\phi_\alpha(x)$ για την επίλυση του (P2). Αποδεικνύεται επίσης, ότι η $F_\alpha(x, \zeta)$ μπορεί να αντικαταστήσει την $\phi_\alpha(x)$ και στις υπόλοιπες εκφράσεις του προβλήματος, (P1) και (P3).

Τα αντίστοιχα προβλήματα (P1),(P2),(P3), που παρουσιάστηκαν πριν μπορούν να συνδυαστούν με διάφορες ιδέες για προσέγγιση του ολοκληρώματος της $F_\alpha(x, \zeta)$. Το ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί για παράδειγμα με δειγματοληψία της πιθανότητας της κατανομής του y σύμφωνα με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\rho(y)$. Αν η δειγματοληψία δώσει ένα σύνολο από διανύσματα y_1, y_2, \dots, y_J τότε η προσέγγιση του ολοκληρώματος και κατά συνέπεια της

$$F_\alpha(x, \zeta) = \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \int_{y \in R} [f(x, y) - \zeta]^+ \rho(y) dy \text{ είναι :}$$

$$\tilde{F}_\alpha(x, \zeta) = \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j [f(x, y_j) - \zeta]^+,$$

όπου με π_j συμβολίζεται η πιθανότητα του κάθε σεναρίου y_j . Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ των απωλειών είναι γραμμική ως προς το x , τότε η $\tilde{F}_\alpha(x, \zeta)$ είναι κυρτή και συνεχείς για διακριτές τιμές.

Έτσι, η συνάρτηση $F_\alpha(x, \zeta)$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $\tilde{F}_\alpha(x, \zeta)$.

Επιπρόσθετα με χρήση μεταβλητών $z_j, j = 1, \dots, J$ μπορεί η $\tilde{F}_\alpha(x, \zeta)$ να αντικατασταθεί από τη γραμμική σχέση

$$\zeta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j z_j$$

και από το σύνολο των γραμμικών επίσης περιορισμών :

$$z_j \geq f(x, y_j) - \zeta,$$

$$z_j \geq 0,$$

$$j = 1, \dots, J$$

$$\zeta \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς, βάσει των παραπάνω παρατηρήσεων, ο περιορισμός $\phi_\alpha(x) \leq \omega$ στο πρόβλημα (P3), μπορεί να αντικατασταθεί από τον περιορισμό $F_\alpha(x, \zeta) \leq \omega$.

Επιπρόσθετα, ο περιορισμός αυτός μπορεί να προσεγγιστεί από τον $\tilde{F}_\alpha(x, \zeta) \leq \omega$ και

να περιοριστεί στο παρακάτω σύστημα γραμμικών περιορισμών : [Krokhmal, Palmquist, Uryasev, 2001]

$$\zeta + (1-\alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j z_j \leq \omega, \quad z_j \geq f(x, y_j) - \zeta, \quad z_j \geq 0, \quad j=1, \dots, J, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

3.3 Το πρόβλημα βελτιστοποίησης

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιηθούν όλα τα παραπάνω συμπεράσματα, έτσι ώστε να μοντελοποιηθεί πλήρως, ένα πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου, με γραμμικό τρόπο, δηλαδή γραμμικές συναρτήσεις και περιορισμούς. Το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής θα είναι ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης γραμμικού προγραμματισμού. Αρχικά θα θεωρηθεί ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από n ($i=1,2,\dots,n$) χρεόγραφα. Στο εξής θα συμβολίζεται με $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ η αρχική σύνθεση του χαρτοφυλακίου, για παράδειγμα ο αριθμός κάθε μετοχής στο αρχικό χαρτοφυλάκιο και $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ η σύνθεση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου, του χαρτοφυλακίου δηλαδή μετά τη βελτιστοποίηση. Οι αρχικές τιμές των χρεόγραφων, δηλαδή οι τιμές τη στιγμή της αγοράς τους, θα δίνονται από το διάνυσμα $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$. Προφανώς το εσωτερικό γινόμενο $q^T x^0$ αντιπροσωπεύει την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου. Οι εξαρτημένες από τα σενάρια τιμές των χρεογράφων στο τέλος της περιόδου αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου είναι $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Τότε η συνάρτηση των απωλειών στο τέλος της περιόδου θα είναι :

$$f(x, y; x^0, q) = -y^T x + q^T x^0 \quad (1)$$

δηλαδή, η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου μείον την τελική. Η συνάρτηση $R(x)$, που προσδιορίζει το αποτέλεσμα της επένδυσης, θα είναι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου στο τέλος της περιόδου:

$$R(x) = E[y^T x] = \sum_{i=1}^n E[y_i] x_i \quad (2)$$

Έτσι η συνάρτηση $R(x)$ σχετίζεται με τη συνάρτηση $f(x,y)$ των απωλειών σύμφωνα με τη σχέση :

$$R(x) = -E[f(x, y)] + q^T x^0$$

και είναι γραμμική και κοίλη ως προς το x .

3.3.1 Περιορισμοί του προβλήματος

Η ανάγκη κεφαλαίου πολλών εταιριών αλλά και επενδυτών οδηγεί στην ενσωμάτωση ενός περιορισμού στο πρόβλημα, ο οποίος θα εξασφαλίζει την ύπαρξη του αναγκαίου κεφαλαίου. Για να επιτευχθεί αυτό περιορίζεται η τιμή της VaR σε ένα ορισμένο επίπεδο το οποίο διαμορφώνεται αναλογικά με το κεφάλαιο το οποίο επενδύεται. Για να περιοριστεί η VaR αρκεί να περιοριστεί η CVaR αφού ισχύει ότι $CVaR \geq VaR$. Συγκεκριμένα, η τιμή της CVaR δεν επιτρέπεται να ξεπεράσει ένα ποσοστό ω του επενδύομένου κεφαλαίου. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος περιορισμός :

$$\phi_{\alpha}(x) \leq \omega q^T x^0$$

όπου $q^T x^0$ είναι το κεφάλαιο, που επενδύεται και ω το ποσοστό του κεφαλαίου που επιθυμεί ο επενδυτής να εκθέσει σε κίνδυνο. Η $\phi_{\alpha}(x)$ εκφράζει τη CVaR για τη συνάρτηση απωλειών που δίνεται από τη σχέση (1). Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, προκύπτει το ακόλουθο σύνολο γραμμικών περιορισμών :

$$\zeta + (1-\alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j z_j \leq \omega \sum_{i=1}^n q_i x_i^0 \quad (3)$$

$$z_j \geq \sum_{i=1}^n (-y_{ij} x_i + q_i x_i^0) - \zeta \quad (4)$$

$$z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, J$$

Εκτός από αυτό το σύνολο περιορισμών, προκύπτει και ένας ακόμα, από τη λογική διαπίστωση, ότι η συνολική αξία των χρεόγραφων τη στιγμή της αγοράς τους θα πρέπει να είναι ίση με το κεφάλαιο το οποίο επιθυμεί ο επενδυτής να διαθέσει. Αν λοιπόν το αρχικό κεφάλαιο είναι C τότε θα πρέπει :

$$\sum_{i=1}^n q_i x_i^0 = C \quad (5)$$

3.3.2 Διατύπωση του γραμμικού προβλήματος

Αφού ολοκληρώθηκε η μοντελοποίηση του προβλήματος και μετασχηματίστηκε σε γραμμικό με γραμμικούς επίσης περιορισμούς μπορεί να παρουσιαστεί το γραμμικό πρόβλημα με την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς της. Το πρόβλημα λοιπόν σύμφωνα με τη σχέση (2) και τους περιορισμούς (3),(4),(5), είναι το παρακάτω: [Krokhmal, Palmquist, Uryasev, 2001],[Rockafellar, Uryasev, 2000]

:

$$\min_{x, \zeta} \sum_{i=1}^n -E[y_i]x_i$$

υπό τους περιορισμούς

$$\zeta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j z_j \leq \omega \sum_{k=1}^n q_k x_k^0$$

$$z_j \geq \sum_{i=1}^n (-y_{ij} x_i + q_i x_i^0) - \zeta, \quad z_j \geq 0, \quad j=1, \dots, J$$

$$\sum_{i=1}^n q_i x_i^0 = C$$

Αυτή είναι η μορφή του προβλήματος, που χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων, στα πλαίσια αυτής της μελέτης. Προφανώς, στο πρόβλημα μπορούν να ενσωματωθούν και άλλοι περιορισμοί, όπως ορισμός μέγιστου βάρους ενός χρεογράφου στο χαρτοφυλάκιο, προσθήκη του κόστους αγοράς και πώλησης (προμήθεια) στις απώλειες κλπ.

4. Εφαρμογή στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών

4.1 Δεδομένα και μεθοδολογία

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της μελέτης πάνω στην Υπό συνθήκη αξίας στον κίνδυνο. Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων πραγματοποιείται διαδοχικά η βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου μετοχών, για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του μοντέλου. Τα δεδομένα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν είναι οι ημερήσιες μεταβολές 117 μετοχών οι οποίες διαπραγματεύονται στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών και αφορούν την περίοδο 01/04/2001 έως 01/04/2003. Η επιλογή της περιόδου έγινε με γνώμονα αφενός να υπάρχουν αρκετά στοιχεία και αφετέρου τα στοιχεία αυτά να δίνουν μια ρεαλιστική εικόνα του τι πρόκειται να ακολουθήσει. Έτσι επιλέχθηκε η περίοδος των δύο τελευταίων ετών ως η περίοδος μετά από μια απότομη άνοδο και στη συνέχεια πτώση των τιμών. Το έτος 2000 θεωρήθηκε ότι αποτελεί το τελευταίο μέρος της πτώσης και αν περιλαμβάνονταν στην έρευνα θα αλλοίωνε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων. Οι μετοχές, για τις οποίες συλλέχθηκαν στοιχεία φαίνονται παρακάτω :

4. Εφαρμογή στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών

ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΣ (ΚΟ)	HELLAS CAN (ΚΑ)	ΜΥΤΙΛΗΝΑΙΟΣ ΟΜΙΛ.ΕΠΙΧ.(ΚΑ)
ΑΒΑΞ (ΚΟ)	ΕΛΒΑΛ (ΚΑ)	ΚΛΩΣΤΗΡΙΑ ΝΑΟΥΣΗΣ (ΚΟ)
ΑΓΡΟΤΙΚΗ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗ (ΚΟ)	ΕΛΓΕΚΑ (ΚΟ)	ΝΕΩΡΙΟΝ ΝΑΥΠΗΓΕΙΑ ΣΥΡΟΥ(ΚΟ)
ΑΕΓΕΚ (ΚΟ)	ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΚΑΛΩΔΙΑ (ΚΟ)	ΝΙΚΑΣ (ΚΟ)
ΑΛΡΗΑ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ (ΚΑ)	ΕΛΜΕC SPORΤ (ΚΟ)	ΝΟΤΟΣ CΟM HOLDINGS (ΚΟ)
ΑΘΗΝΑ (ΚΟ)	ΕΛΒΙSCO ΣΥΜΜΕΤΟΧΩΝ (ΚΑ)	ΝΤΕSΠΕΚ ΕΛΛΑΣ (ΚΑ)
ΑΚΤΩΡ (ΚΟ)	ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΠΕΤΡΕΛΑΙΑ (ΚΟ)	ΟΛΥΜΠΙΑΚΗ (ΚΟ)
ΑΛΦΑ ΑΛΦΑ HOLDINGS (ΚΟ)	ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΤΕΧΝΟΔΟΜΙΚΗ (ΚΟ)	Ο.Τ.Ε. (ΚΟ)
ΑΛΟΥΜΙΝΙΟ (ΚΟ)	ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΥΦΑΝΤΟΥΡΓΙΑ (ΚΟ)	ΑΥΤΟΗΕΛΛΑΣ (ΚΟ)
ΑΛΡΗΑ ΛΗΣΙΝΓΚ (ΚΟ)	ΕΜΠΟΡΙΚΗ (ΚΟ)	VOΔAFONE - ΡΑΝΑΦΟΝ (ΚΟ)
ΑΛΟΥΜΥΛ ΜΥΛΩΝΑΣ (ΚΟ)	ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΑΤΤΙΚΗΣ (ΚΑ)	ΠΑΠΑSΤΡΑΤΟΣ (ΚΟ)
ΑΛΤΕ (ΚΟ)	ΕΠΙΛΕΚΤΟΣ (ΚΑ)	ΠΕΙΡΑΙΩS LEASING (ΚΟ)
ΑΛΤΕC (ΚΟ)	ΕΡΜΗΣ (ΚΑ)	ΠΕΙΡΑΙΩS (ΚΟ)
ΑΛΡΗΑ ΒΑΝΚ (ΚΟ)	ΕΘΝΙΚΗ (ΚΟ)	ΠΗΓΑΣΟΣ (ΚΟ)
ΑΝΕΚ (ΚΟ)	ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ (ΚΟ)	ΠΛΑΣΤΙΚΑ ΘΡΑΚΗΣ (ΚΑ)
S & Β ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΟΡΥΚΤΑ (ΚΟ)	Κ.ΔΑΝΙΗΛΙΔΗ Η ΠΑΝΑΓΙΑ(ΚΟ)	ΠΛΑΙSΙΟ CΟMPUTERS (ΚΟ)
ΑΣΠΙS ΠΡΟΝΟΙΑ (ΚΟ)	ΕFG EUROΒΑΝΚ (ΚΟ)	ΠΛΑΣΤΙΚΑ ΚΡΗΤΗΣ (ΚΑ)
ΑΣΠΙS ΣΤΕΓΑΣΤΙΚΗ (ΚΟ)	ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΑΘΗΝΩΝ (ΚΟ)	ΠΟΥΛΙΑΔΗΣ & ΣΥΝΕΡΓΑΤΕS(ΚΟ)
ΑΛΡΗΑ ΑΣΤΙΚΑ ΑΚΙΝΗΤΑ (ΚΟ)	ΗΛΕΚΤΡΑ ΕΙSΑΓΩΓΙΚΗ (ΚΟ)	ΠΑΝΤΕΧΝΙΚΗ (ΚΟ)
ΑΤΤΙΚΕS ΕΚΔΟΣΕΙS (ΚΟ)	ΗΡΑΚΛΗΣ (ΚΟ)	ΡΟΚΑΣ (ΚΟ)
ΑΤΕΡΜΩΝ (ΚΟ)	ΗΥΑΤΤ REGENCY (ΚΟ)	ΣΑΝΥΟ ΕΛΛΑΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧ.(ΚΑ)
ΑΤΤΙΚΗΣ (ΚΟ)	ΙΑΤΡΙΚΟ ΑΘΗΝΩΝ (ΚΟ)	ΓΡ. ΣΑΡΑΝΤΗΣ (ΚΟ)
ΑΤΤΙ-ΚΑΤ (ΚΟ)	ΙΝΤΡΑΛΟΤ (ΚΟ)	ΣΕΛΜΑΝ (ΚΟ)
ΒΑΛΚΑΝ ΕΞΠΟΡΤ (ΚΟ)	ΙΝΤΡΑCΟΜ (ΚΟ)	ΣΙΔΕΝΟΡ (ΚΑ)
ΒΑΡΒΑΡΕSΟΣ ΝΗΜ.ΝΑΟΥΣΗΣ(ΚΑ)	ΚΑΤΑΣΤ. ΑΦΟΡ/ΤΩΝ ΕΙΔΩΝ(ΚΟ)	SPIDER (ΚΟ)
ΒΙΟΧΑΛΚΟ (ΚΑ)	Κ.ΚΑΡΔΑΣΙΛΑΡΗΣ & ΥΙΟΙ (ΚΟ)	ΑΓΡ/ΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΣΠΥΡΟΥ (ΚΟ)
ΓΕΚ (ΚΟ)	ΚΛΩΝΑΤΕΞ (ΚΟ)	ΓΡΑΜΜΕS ΣΤΡΙΝΤΖΗ (ΚΑ)
ΕΘΝΙΚΗ ΑΚΙΝΗΤΩΝ (ΚΟ)	ΙΝFΟ-QUEST (ΚΟ)	ΤΕΓΟΠΟΥΛΟΣ ΕΚΔΟΣΕΙS (ΚΟ)
UNISYSTEMS (ΚΟ)	Η.ΚΥΡΙΑΚΙΔΗΣ ΜΑΡΜΑΡΑ (ΚΟ)	ΤΕΡΝΑ (ΚΟ)
GOODYS (ΚΑ)	ΛΑΒΙΡΗΑΡΜ (ΚΟ)	ΤΗΛΕΤΥΠΟΣ (ΚΟ)
ΓΕΝΙΚΗ (ΚΟ)	ΛΑΜΔΑ DEVELOPMENT (ΚΟ)	ΤΙΤΑΝ (ΚΟ)
DELTA SINGULAR (ΚΟ)	ΛΑΜΨΑ (ΚΟ)	CΗΙΡΙΤΑ (ΚΟ)
ΔΕΛΤΑ ΣΥΜΜΕΤΟΧΩΝ (ΚΑ)	ΙΝFΟΡΜ Π. ΛΥΚΟΣ (ΚΟ)	ΦΟΙΝΙΞ (ΚΟ)
ΔΗΜ/ΦΙΚΟΣ ΟΡΓ. ΛΑΜΠΡΑΚΗ (ΚΟ)	ΜΙΧΑΗΛ Ι. ΜΑΙΛΛΗΣ (ΚΟ)	FRIGOGLOSS (ΚΟ)
EVEREST (ΚΟ)	ΜΕΤΚΑ (ΚΟ)	FOURLIS HOLDINGS (ΚΟ)
ΕΛΛ. ΒΙΟΜ. ΖΑΧΑΡΗΣ (ΚΑ)	ΜΗΧΑΝΙΚΗ (ΚΟ)	ΧΑΛΚΟΡ (ΚΑ)
ΕΓΝΑΤΙΑ (ΚΟ)	ΜΙΝΩΙΚΕS ΓΡΑΜΜΕS (ΚΟ)	ΧΑΤΖΗΩΑΝΝΟΥ HOLDINGS (ΚΟ)
ΕΘΝΙΚΗ ΑΣΦ. (ΚΟ)	ΜΟΥΖΑΚΗΣ (ΚΑ)	
COCA-COLA (ΚΑ)	ΜΠΑΛΑΦΑΣ ΣΥΜΜ. (ΚΟ)	
ΕΛΑΙS (ΚΟ)	JUMBO (ΚΟ)	

Οι μετοχές αυτές συμμετέχουν στους τέσσερις κυριότερους δείκτες του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών. Δημιουργήθηκε ένα σύνολο από τους δείκτες μικρής κεφαλαιοποίησης (Smalcap 80), μεσαίας κεφαλαιοποίησης (FTSE MID-40) υψηλής κεφαλαιοποίησης (FTSE ASE-20) και φυσικά του γενικού δείκτη. Τα στοιχεία, όπως προαναφέρθηκε αφορούν ημερήσιες αποδόσεις των μετοχών αυτών και προέρχονται από το δικτυακό χώρο της εφημερίδας 'Ναυτεμπορική'. Για την επίλυση του γραμμικού προβλήματος χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό MATLAB. Για να γίνει αυτό έπρεπε να δημιουργηθούν πίνακες με τα δεδομένα σε μορφή αναγνωρίσιμη από το MATLAB και στη συνέχεια να δοθούν οι κατάλληλες εντολές για την επίλυση, ανάλογα με την τιμή κάθε παραμέτρου. Οι εντολές αυτές συνοψίζονται σε μια συνάρτηση (m.file), που δημιουργήθηκε για το σκοπό αυτό και μπορεί να επιλύσει οποιοδήποτε πρόβλημα CVaR. Ο κώδικας της συνάρτησης αυτής δίνεται στο παράρτημα. Τα αποτελέσματα, που εξετάζονται σε κάθε περίπτωση, είναι η αναμενόμενη απόδοση και η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου, καθώς και η συνολική και μελλοντική απόδοσή του. Για τον υπολογισμό της μελλοντικής απόδοσης εξετάζεται η πορεία του χαρτοφυλακίου, που προκύπτει, στο διάστημα από 01/01/2003 μέχρι 01/04/2003. Δηλαδή, για την επίλυση του προβλήματος της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου, χρησιμοποιούνται, αντί όλων των δεδομένων, τα δεδομένα από 01/04/2001 έως και 31/12/2002. Δύο ακόμα σημαντικά στοιχεία τα οποία και υπολογίζονται είναι ο αριθμός των μετοχών του κάθε χαρτοφυλακίου και ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος.

4.2 Ερμηνεία των παραμέτρων του προβλήματος

Το πρόβλημα της δημιουργίας ενός χαρτοφυλακίου με τη μέθοδο CVaR, εκτός από τις ημερήσιες αποδόσεις και τις τιμές αγοράς των μετοχών, έχει πέντε παραμέτρους. Η πρώτη από αυτές είναι το διάστημα εμπιστοσύνης στο οποίο θα υπολογιστεί η τιμή της VaR και κατ'επέκταση της CVaR. Πρόκειται δηλαδή για τη μεταβλητή, που παραπάνω παρουσιάζεται ως 'α'. Στη μελέτη αυτή εξετάζονται περιπτώσεις για $\alpha=0,90$, $\alpha=0,95$ και $\alpha=0,99$. Θα υπολογιστούν δηλαδή οι τιμές των CVaR90, CVaR95, και CVaR99 αντίστοιχα. Επόμενη μεταβλητή είναι το ω , που εκφράζει το ποσοστό του

κεφαλαίου, που ο επενδυτής επιθυμεί να εκθέσει σε κίνδυνο και όπως θα φανεί και παρακάτω έχει μεγάλη σημασία. Μια επιλογή γύρω στο 10% , δηλαδή $\omega=0,1$, θεωρείται λογική. Οι τιμές που εξετάζονται στην παρούσα έρευνα κυμαίνονται από $\omega=0,06$ έως $\omega=0,15$. Μια παράμετρος, που επηρεάζει την ακρίβεια των υπολογισμών είναι ο αριθμός των σεναρίων. Όπως προαναφέρθηκε το πρόβλημα θα λυθεί με τη μέθοδο του bootstrap. Η μέθοδος αυτή δημιουργεί διάφορα υποθετικά σενάρια για τις αποδόσεις των μετοχών και εδώ θα χρησιμοποιηθούν 100, 500, 1000, και 1500 σενάρια. Επόμενη μεταβλητή είναι η περίοδος αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου. Ανάλογα με το πότε θέλει ο επενδυτής να επανεξετάζεται το χαρτοφυλάκιό του και να προχωρά σε αναπροσαρμογή του, αλλάζει και ο τρόπος επίλυσης. Αν για παράδειγμα ο ορίζοντας αναπροσαρμογής είναι μηνιαίος τότε το bootstrapping θα πρέπει να παράγει μηνιαία σενάρια κ.ο.κ. Ο ορίζοντας, που θα εξεταστεί είναι ημερήσιος, δεκαήμερος και εικοσαήμερος. Να σημειωθεί ότι ο ορίζοντας αφορά εργάσιμες ημέρες οπότε ο εικοσαήμερος ορίζοντας προσεγγίζει τη μηνιαία αναπροσαρμογή.

4.3 Το επίπεδο του αναλαμβανόμενου κινδύνου

Αυτό το οποίο εξετάζεται αρχικά, είναι η συμπεριφορά της μεθόδου, όταν αλλάζουν οι τιμές του διαστήματος εμπιστοσύνης και του ποσοστού του κεφαλαίου, που εκτίθεται σε κίνδυνο. Συγκεκριμένα εξετάζονται με τη σειρά διαστήματα εμπιστοσύνης $\alpha=0,99$, $\alpha=0,95$ και $\alpha=0,90$. Για το κάθε ένα από αυτά έγιναν διαδοχικές προσπάθειες επίλυσης ξεκινώντας από πολύ μικρό ω , μέχρι να εντοπιστεί η μικρότερη τιμή, για την οποία το πρόβλημα έχει λύση. Στη συνέχεια η επίλυση του προβλήματος γίνεται για διαφορετικές τιμές του ω από την ελάχιστη δυνατή μέχρι και την τιμή 0,15, που σημαίνει ότι εκτίθεται σε κίνδυνο το 15% του κεφαλαίου.

4.3.1 Επίπεδο εμπιστοσύνης 99%

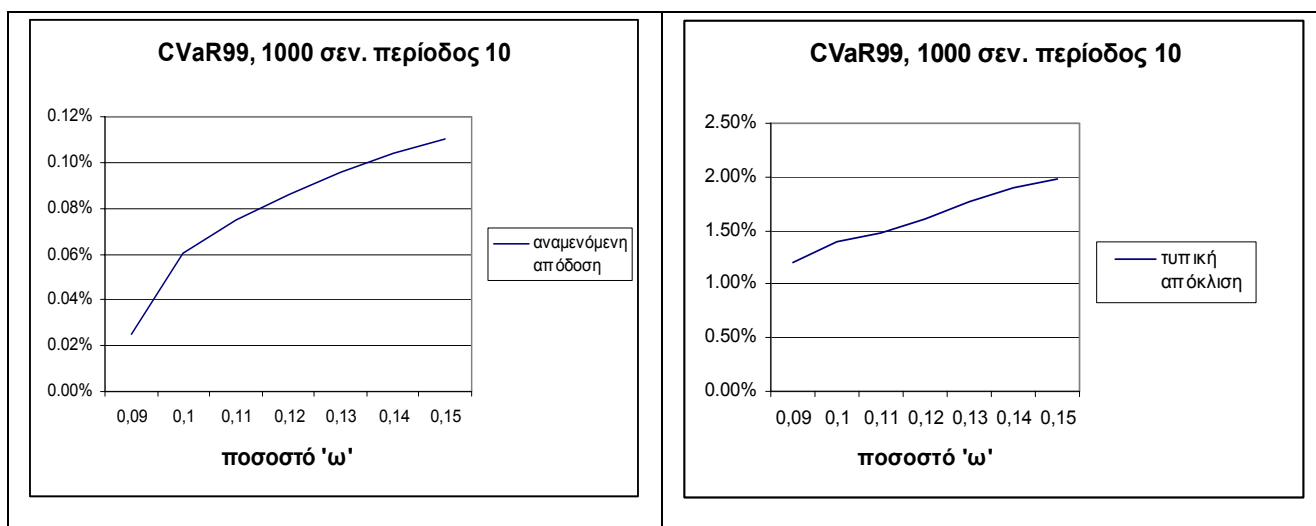
Η πρώτη περίπτωση, που εξετάζεται είναι η CVaR99. Μετά από διαδοχικές επαναλήψεις διαπιστώθηκε πως το πρόβλημα έχει λύση για ω τουλάχιστον 0,09. Έτσι

4. Εφαρμογή στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών

με αύξηση του ω κατά 0,01 κάθε φορά μέχρι την τιμή $\omega=0,15$ προκύπτουν 7 διαφορετικές λύσεις. Όσον αφορά τις υπόλοιπες μεταβλητές του προβλήματος, χρησιμοποιούνται σταθερά 1000 σενάρια και περίοδος αναπροσαρμογής 10 ημέρες. Από τα αποτελέσματα φάνηκε καθαρά η σταδιακή αύξηση της αναμενόμενης απόδοσης αλλά και της τυπικής απόκλισης όσο μεγαλώνει το ω . Η αύξηση αυτή φαίνεται στον παρακάτω πίνακα και στο σχήμα 4.1..

Πίνακας 4.1 : Αναμενόμενη απόδοση και τυπική απόκλιση για διαφορετικά ω

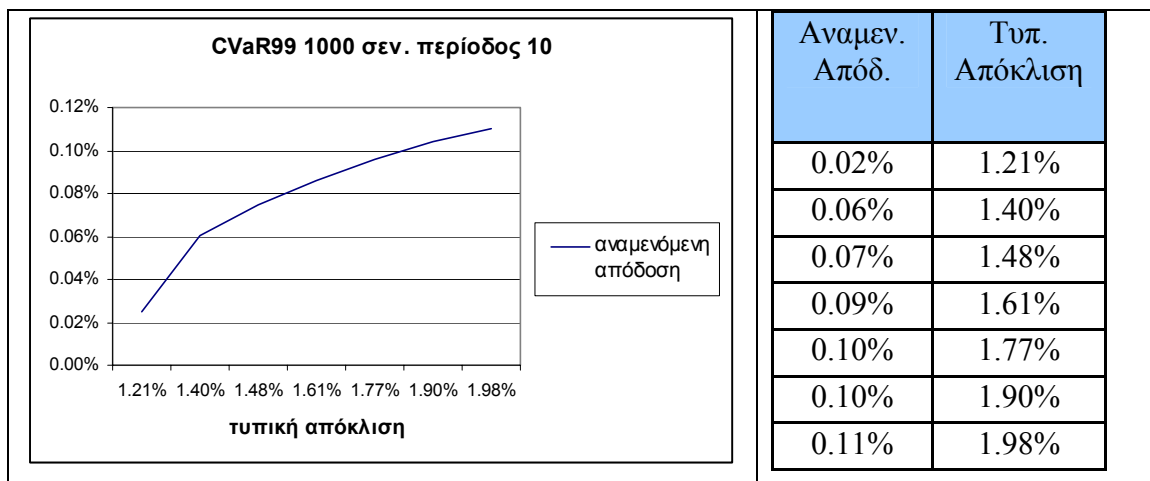
ω	Αναμεν. Απόδ.	Τυπ. Απόκλιση
0,09	0.0248%	1.2057%
0,1	0.0606%	1.4042%
0,11	0.0746%	1.4760%
0,12	0.0862%	1.6099%
0,13	0.0956%	1.7747%
0,14	0.1038%	1.9001%
0,15	0.1105%	1.9800%



Σχήμα 4.1 : Σχέσεις του ποσοστού ω με την αναμενόμενη απόδοση και την τυπική απόκλιση

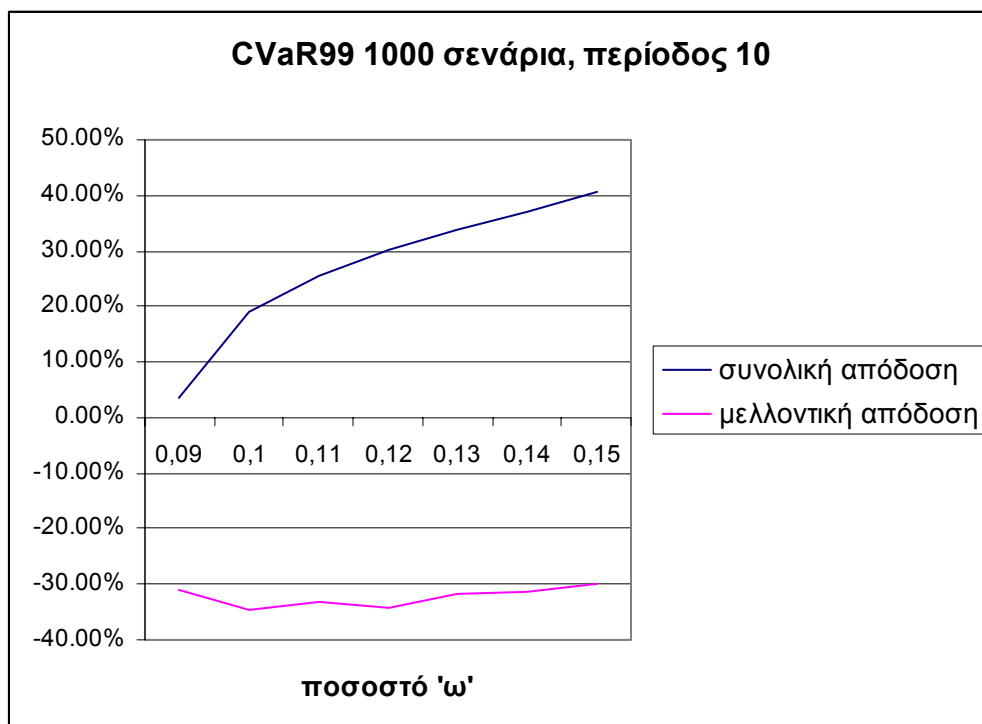
4. Εφαρμογή στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών

Αυτή η άνοδος της αναμενόμενης απόδοσης και της τυπικής απόκλισης, είναι απόλυτα φυσιολογική αφού όπως αναφέρθηκε και στην αρχή, όσο περισσότερο κίνδυνο αναλαμβάνει κανείς τόσο μεγαλύτερο είναι και το κέρδος το οποίο μπορεί να επιτύχει. Στην προκειμένη περίπτωση το ποσοστό ω του κεφαλαίου, που εκτίθεται σε κίνδυνο αντιπροσωπεύει τον κίνδυνο, κάτι το οποίο είναι και διαισθητικά κατανοητό. Παρατηρεί κανείς πως ο ρυθμός ανόδου της αναμενόμενης απόδοσης μειώνεται. Υπάρχει μια μεγάλη αύξηση από $\omega=0,09$ σε $\omega=0,1$ ενώ στη συνέχεια υπάρχει μια συνεχής άνοδος με μειωμένο ρυθμό. Επειδή σύμφωνα με τη θεωρία χαρτοφυλακίου ως κίνδυνος θεωρείται η τυπική απόκλιση και όχι το ω , που χρησιμοποιείται εδώ, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί η σχέση μεταξύ κινδύνου και αποδόσεως.



Σχήμα 4.2 : Σχέση μεταξύ αναμενόμενης απόδοσης και τυπικής απόκλισης

Από το διάγραμμα αυτό γίνονται δύο σημαντικές διαπιστώσεις. Αρχικά επαληθεύονται τα όσα λέχθηκαν για τη σχέση κινδύνου και αποδόσεως. Αυτό όμως που έχει μεγαλύτερη σημασία, όσον αφορά τη μέθοδο της «αξίας στον κίνδυνο» είναι η ομοιότητα του διαγράμματος 4.2 με το διάγραμμα της αναμενόμενης απόδοσης συναρτήσεως του ω (σχήμα 4.1). Η στατιστική έννοια της τυπικής απόκλισης, αντικαθίσταται με το ω , το οποίο είναι κάτι που ο αποφασίζων το κατανοεί και μπορεί να το ορίσει εύκολα. Ακολουθούν τα διαγράμματα της συνολικής και μελλοντικής απόδοσης του χαρτοφυλακίου, συναρτήσεως πάντα του ποσοστού ω .



Σχήμα 4.3 : Η σχέση του ποσοστού ω με την συνολική και τη μελλοντική απόδοση

Η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου, δηλαδή η απόδοση της επένδυσης την περίοδο 01/04/01 έως 31/12/02, κυμαίνεται μεταξύ 3,5% και 40% περίπου και παρουσιάζει ίδια πορεία με την τυπική απόκλιση και την αναμενόμενη απόδοση. Η μελλοντική απόδοση βρίσκεται γύρω στο -30%. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίοδο 01/01/03 – 31/03/03 στην οποία εξετάζεται το χαρτοφυλάκιο για τον υπολογισμό της μελλοντικής απόδοσης, ο γενικός δείκτης του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών είχε απώλειες της τάξης του 18%. Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, παρουσιάζονται τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα της έρευνας για την CVaR99 και διαφορετικά ποσοστά ω .

Πίνακας 4.2 : Συγκεντρωτικά αποτελέσματα για $\alpha=0,99$

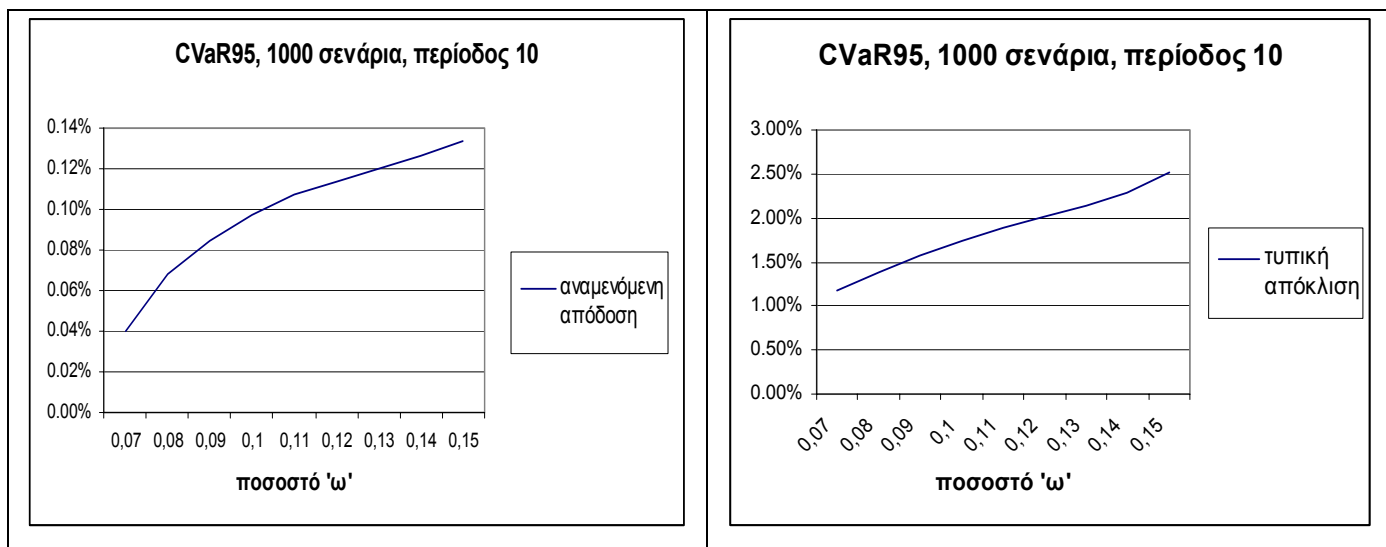
CVaR 99, 1000 σενάρια, περίοδος 10 ημέρες				
ω	Αναμεν. Απόδ.	Τυπ. απόκλιση	Συνολική απόδ.	Μελλ. Απόδ.
0,09	0.0248%	1.2057%	3.3885%	-30.9696%
0,1	0.0606%	1.4042%	19.1233%	-34.7781%
0,11	0.0746%	1.4760%	25.5390%	-33.2380%
0,12	0.0862%	1.6099%	30.1653%	-34.0961%
0,13	0.0956%	1.7747%	33.8474%	-31.8123%
0,14	0.1038%	1.9001%	37.2164%	-31.2495%
0,15	0.1105%	1.9800%	40.5212%	-29.9001%

4.3.2 Επίπεδο εμπιστοσύνης 95%

Επόμενη τιμή του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι το 95%. Ξεκινώντας από πολύ μικρό ω έτσι ώστε το πρόβλημα να είναι αδύνατο, υπολογίστηκε η ελάχιστη δυνατή τιμή του ω . Η τιμή αυτή είναι $\omega=0,07$ και όπως παρατηρεί κανείς είναι μικρότερη από ότι ήταν για διάστημα εμπιστοσύνης 0,99. Όπως και πριν χρησιμοποιούνται 1000 σενάρια και δεκαήμερος ορίζοντας αναπροσαρμογής. Με βήμα 0,01 και ξεκινώντας από την ελάχιστη τιμή, μέχρι και την τιμή $\omega=0,15$, προκύπτουν 9 διαφορετικά ω για τα οποία λύθηκε το πρόβλημα. Η πορεία της αναμενόμενης απόδοσης και της τυπικής απόκλισης των χαρτοφυλακίων, για διαφορετικά ποσοστά ω φαίνεται παρακάτω.

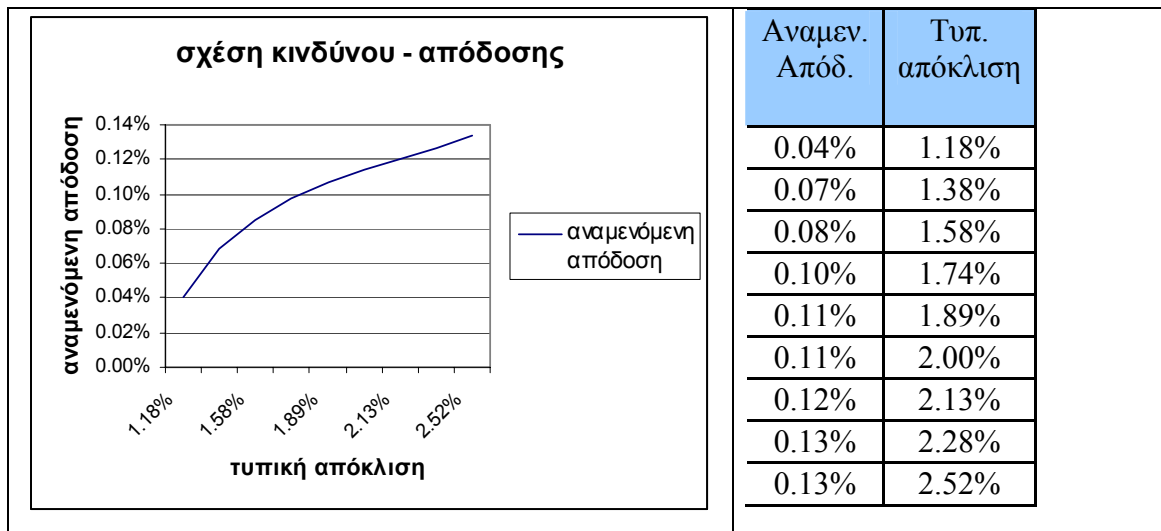
Πίνακας 4.3 : Αναμενόμενη απόδοση και τυπική απόκλιση συναρτήσει του ω , για $\alpha=0,95$

ω	Αναμεν. Απόδ.	Τυπ. απόκλιση
0,07	0.0401%	1.1792%
0,08	0.0681%	1.3781%
0,09	0.0848%	1.5801%
0,1	0.0970%	1.7441%
0,11	0.1069%	1.8912%
0,12	0.1139%	2.0040%
0,13	0.1202%	2.1339%
0,14	0.1260%	2.2763%
0,15	0.1333%	2.5158%



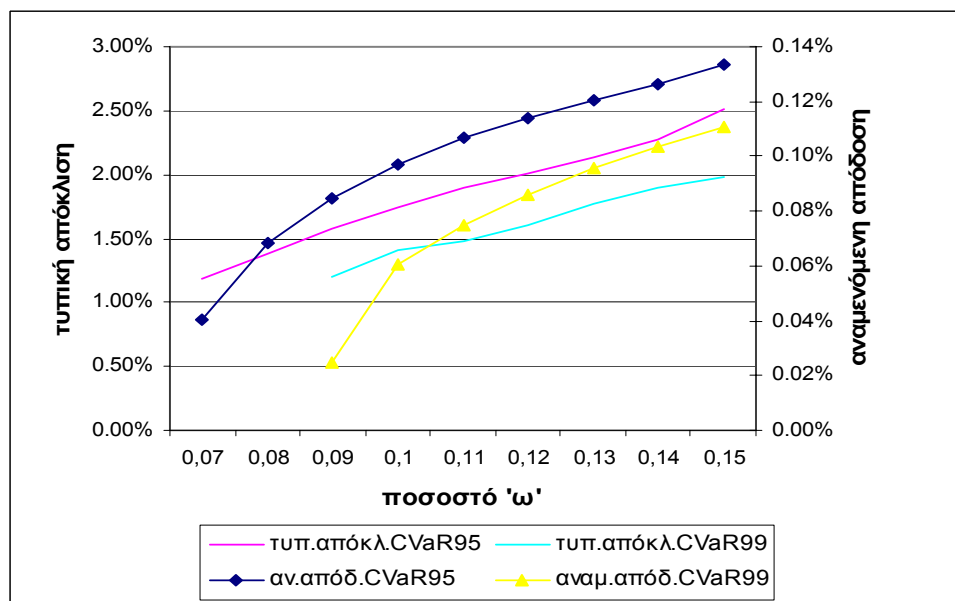
Σχήμα 4.4 : Διαγράμματα αναμενόμενης απόδοσης και τυπικής απόκλισης σε συνάρτηση με το ποσοστό ω

Όπως ήταν φυσικό, τόσο η αναμενόμενη απόδοση όσο και η τυπική απόκλιση, δηλαδή ο κίνδυνος, αυξάνουν όσο αυξάνει το ποσοστό του κεφαλαίου το οποίο εκτίθεται σε κίνδυνο. Σε σχέση με τα αποτελέσματα για ίδια ω αλλά για διάστημα εμπιστοσύνης 0,99, τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν μια σαφή αύξηση του κινδύνου αλλά και της αναμενόμενης απόδοσης. Όπως και πριν έτσι και τώρα μεγαλύτερος κίνδυνος σημαίνει μεγαλύτερη απόδοση, κάτι που φαίνεται και στο διάγραμμα κινδύνου απόδοσης που ακολουθεί (σχήμα 4.5). Επίσης, όπως και στο σχήμα 4.1, έτσι και εδώ, η τυπική απόκλιση δείχνει να αυξάνει σχεδόν γραμμικά ως προς το ω . Αυτή η γραμμική σχέση του εκτιθέμενου σε κίνδυνο κεφαλαίου και του κινδύνου (τυπική απόκλιση) της επένδυσης, φανερώνουν την ισοδυναμία τους, άρα και τη δυνατότητα έκφρασης του κινδύνου μέσω του ποσοστού ω . Η γραμμική αυτή σχέση φαίνεται και από την ανάλυση για επίπεδο εμπιστοσύνης 90%.



Σχήμα 4.5 : Σχέση αναμενόμενης απόδοσης και τυπικής απόκλισης για $\alpha=0,95$

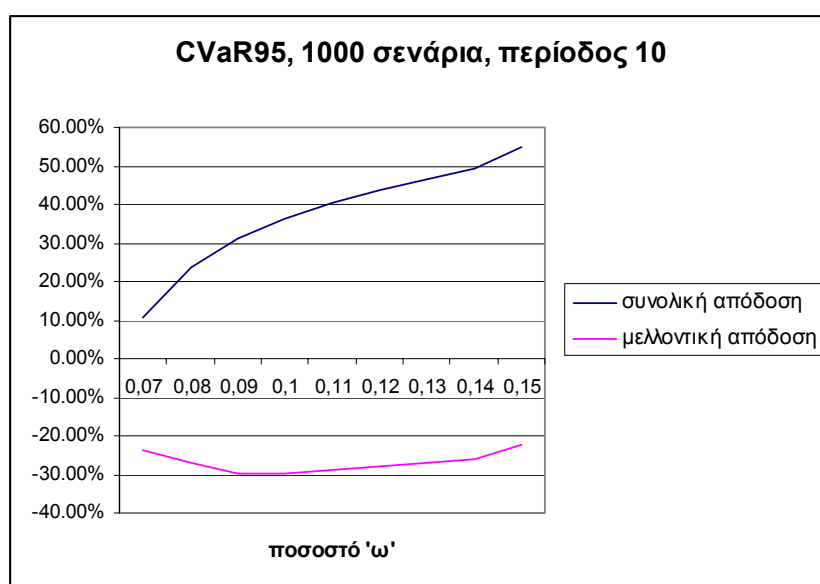
Αυτό το οποίο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για $\alpha=0,99$. Συγκεκριμένα, με διάστημα $\alpha=0,95$ βρίσκεται λύση με χαμηλότερο ω , συγκεκριμένα $\omega=0,07$, η οποία έχει και μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση και μικρότερο κίνδυνο. Για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών θα παρουσιαστούν οι αναμενόμενες αποδόσεις και οι τυπικές αποκλίσεις για τα δύο διαφορετικά διαστήματα 'α', στο ίδιο διάγραμμα.



Σχήμα 4.6 : Αναμενόμενες αποδόσεις και τυπικές αποκλίσεις για CVaR99 και CVaR95

4. Εφαρμογή στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών

Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα, τόσο η απόδοση όσο και ο κίνδυνος είναι μικρότερα για $\alpha=0,99$ κάτι φυσιολογικό άλλωστε αφού οι περιορισμοί για CVaR 99 είναι «αυστηρότεροι» απαιτώντας μεγαλύτερο ποσοστό των παρατηρήσεων να συμμορφώνεται με τον περιορισμό της VaR. Όμως το χαρτοφυλάκιο της CVaR95 με $\omega=0,07$ είναι σαφώς καλύτερο από τα χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου της CVaR99, αφού έχει μεγαλύτερη απόδοση και περιέχει λιγότερο κίνδυνο. Όσον αφορά τώρα στη συνολική και τη μελλοντική απόδοση το μοντέλο δίνει σαφώς καλύτερα αποτελέσματα από την περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου. Αυτό φαίνεται πολύ εύκολα από το παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 4.7 : Διάγραμμα συνολικής και μελλοντικές απόδοσης

Παρατηρεί κανείς ότι για ίδιες τιμές του ποσοστού ω με τη CVaR99, τόσο η αναμενόμενη απόδοση όσο και η μελλοντική έχουν καλύτερες τιμές. Η συνολική απόδοση αυξάνει συνεχώς με το ω όπως ήταν φυσικό αλλά η μελλοντική ενώ θα ήταν λογικό να μειώνεται (αφού πρόκειται για περίοδο πτώσης των τιμών), από ένα σημείο και μετά αυξάνει. Αυτό δικαιολογείται αν σκεφτεί κανείς πως για τη μελλοντική απόδοση λαμβάνονται υπόψιν πραγματικά στοιχεία τα οποία δεν είναι δυνατό να συμφωνούν πάντα με την πρόβλεψη. Κλείνοντας την παράγραφο αυτή παρατίθενται τα συνολικά αποτελέσματα για διάστημα εμπιστοσύνης $\alpha=0,95$.

Πίνακας 4.4 : Συγκεντρωτικά αποτελέσματα για $\alpha=0,95$

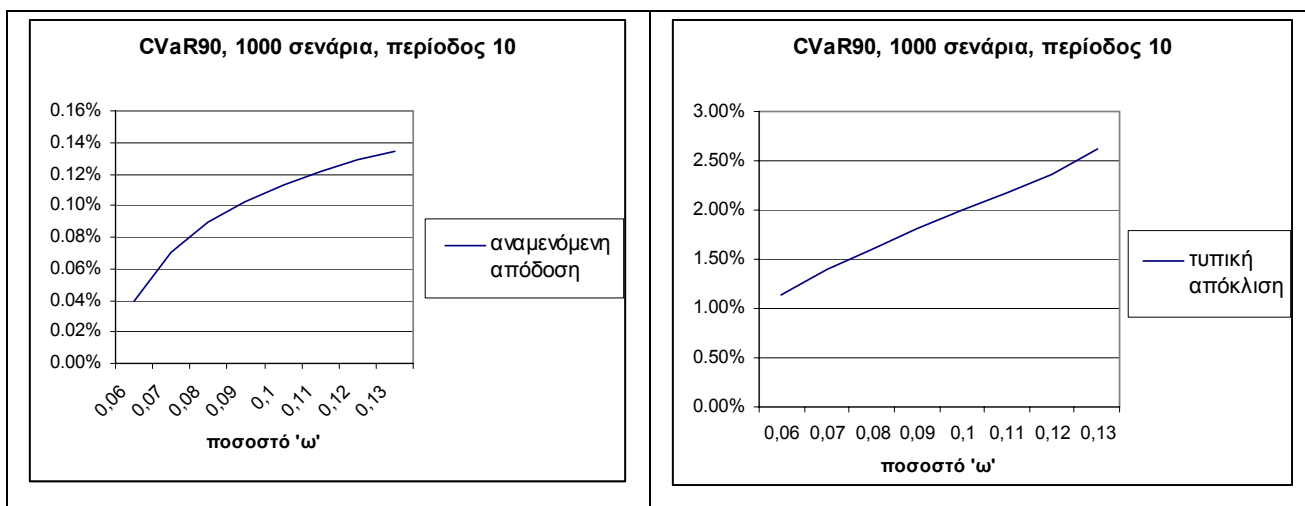
VaR 95, 1000 σενάρια, περίοδος αναπροσαρμ. 10 ημέρες				
ω	Αναμεν. Απόδ.	Τυπ. απόκλιση	Συνολική απόδ.	Μελλ. Απόδ.
0,07	0.0401%	1.1792%	10.5992%	-23.8429%
0,08	0.0681%	1.3781%	23.6316%	-27.1215%
0,09	0.0848%	1.5801%	31.0021%	-29.5822%
0,1	0.0970%	1.7441%	36.3774%	-29.8481%
0,11	0.1069%	1.8912%	40.6611%	-28.8619%
0,12	0.1139%	2.0040%	43.7032%	-27.8619%
0,13	0.1202%	2.1339%	46.5972%	-26.7685%
0,14	0.1260%	2.2763%	49.1583%	-25.8552%
0,15	0.1333%	2.5158%	54.8835%	-22.4666%

4.3.3 Επίπεδο εμπιστοσύνης 90%

Τελευταίο διάστημα εμπιστοσύνης, που εξετάζεται στην έρευνα αυτή, είναι το διάστημα που προκύπτει για $\alpha=0,90$. Για το διάστημα αυτό βρέθηκε ακόμα μικρότερη τιμή του ω , που δίνει λύση στο πρόβλημα αλλά όπως θα φανεί και στη συνέχεια τα αποτελέσματα δεν υπερéχουν από αυτά, που προέκυψαν για $\alpha=0,95$. Η ελάχιστη τιμή του ποσοστού ω ήταν για αυτή την περίπτωση 0,06 και με βήμα 0,01 βρίσκονται 10 διαφορετικές τιμές μέχρι την τιμή $\omega=0,15$. Παρόλα αυτά η μέθοδος για ω μεγαλύτερο από 0,13 δίνει τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα, οπότε θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από $\omega=0,06$ μέχρι και $\omega=0,13$. Η αναμενόμενη απόδοση και η τυπική απόκλιση των χαρτοφυλακίων κινούνται σε συνάρτηση με το ω όπως φαίνεται παρακάτω :

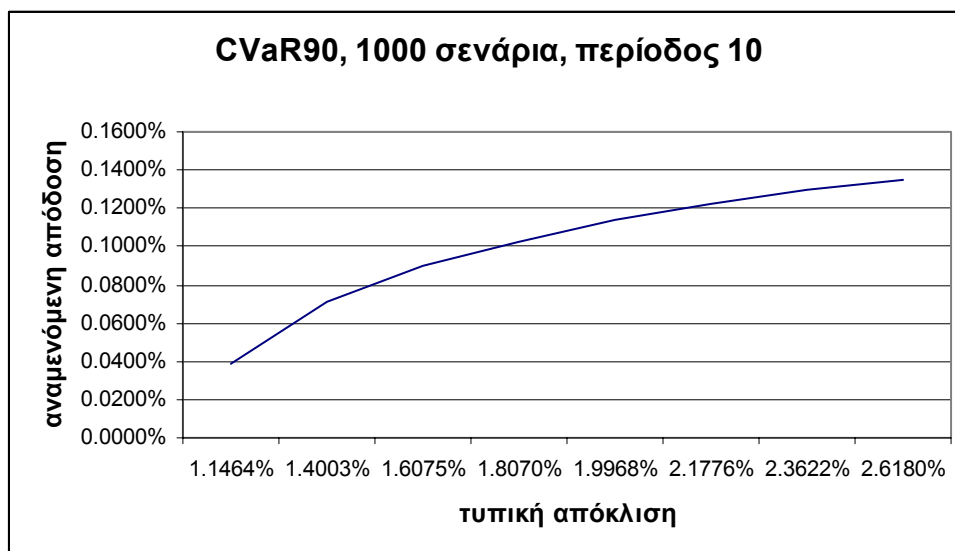
Πίνακας 4.5 : Αναμενόμενη απόδοση και τυπική απόκλιση συναρτήσει του ω , για $\alpha=0,90$

ω	Αναμεν. Απόδ.	Τυπ. απόκλιση
0,06	0.0390%	1.1464%
0,07	0.0709%	1.4003%
0,08	0.0895%	1.6075%
0,09	0.1025%	1.8070%
0,1	0.1135%	1.9968%
0,11	0.1221%	2.1776%
0,12	0.1292%	2.3622%
0,13	0.1349%	2.6180%



Σχήμα 4.8 : Διαγράμματα αναμενόμενης απόδοσης και τυπικής απόκλισης σε συνάρτηση με το ποσοστό ω

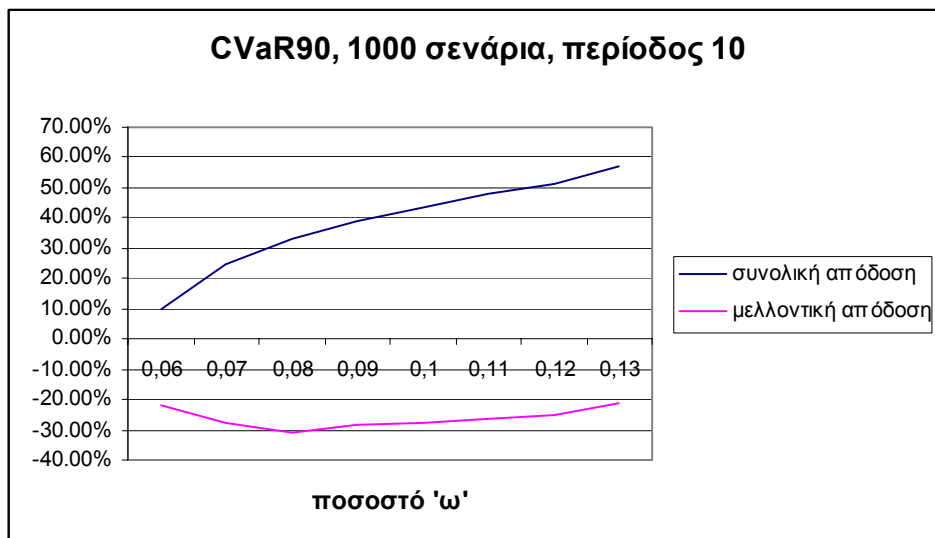
Το μικρότερο ποσοστό ω είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία χαρτοφυλακίου με μικρότερη τυπική απόκλιση από πριν, όχι όμως και μεγαλύτερης απόδοσης ταυτόχρονα. Έτσι δε μπορεί να πει κανείς πως για $\alpha=0,90$ το μοντέλο δίνει ακόμα καλύτερα αποτελέσματα, κάτι που συνέβαινε στη σύγκριση των αποτελεσμάτων για $\alpha=0,95$ και $\alpha=0,99$. Ακολουθεί όπως και πριν η σχέση αναμενόμενης απόδοσης και τυπικής απόκλισης μέσα από ένα διάγραμμα.



Σχήμα 4.9 : Σχέση αναμενόμενης απόδοσης και τυπικής απόκλισης για $\alpha=0,90$

Το διάγραμμα δεν παρουσιάζει μεγάλες διαφορές με αυτό της προηγούμενης παραγράφου. Απλώς ξεκινά από μια θέση με μικρότερο κίνδυνο αλλά και απόδοση από πριν, που προκύπτει για μικρότερο ω . Αυτή η συνεχής μείωση του ελάχιστου ω , για το οποίο το πρόβλημα έχει λύση, όσο μικραίνει το διάστημα εμπιστοσύνης είναι απόλυτα φυσιολογική. Σύμφωνα με τον ορισμό της $CVaR$ είναι ο μέσος όρος της VaR και των απωλειών έξω από το διάστημα εμπιστοσύνης. Όσο περιορίζεται το διάστημα αυτό (π.χ. $VaR99$) τόσο λιγότερες τιμές μένουν έξω από το διάστημα εμπιστοσύνης και είναι διαθέσιμες για επεξεργασία με τη μέθοδο της $CVaR$ και οι λύσεις του προβλήματος είναι περιορισμένες. Έτσι όσο μειώνεται κανείς το διάστημα εμπιστοσύνης, τόσο περισσότερες τιμές θα είναι έξω από αυτό και τόσο μικρότερα ω θα δίνουν λύση στο πρόβλημα.

Όσον αφορά τώρα στη συνολική και μελλοντική απόδοση των χαρτοφυλακίων, ούτε εδώ εμφανίζονται μεγάλες διαφορές, σε σχέση με τα προηγούμενα αποτελέσματα. Παρακάτω παρουσιάζονται στο ίδιο διάγραμμα οι τιμές τους για διαφορετικά ω .



Σχήμα 4.10 : Η συνολική και η μελλοντική απόδοση συναρτήσεσι του ποσοστού έκθεσης του κεφαλαίου σε κίνδυνο

Παρατηρείται και εδώ ότι η μελλοντική απόδοση του χαρτοφυλακίου ενώ μειώνεται όσο αυξάνει ο κίνδυνος, από ένα σημείο και μετά αυξάνει. Προφανώς οι μετοχές, που μέχρι τις 31/12/02 θεωρούνταν πιο επικίνδυνες, είχαν στη συνέχεια καλύτερη συμπεριφορά από την αναμενόμενη. Όπως και οι προηγούμενες έτσι και αυτή η παράγραφος θα κλείσει με τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα.

Πίνακας 4.6 : Συγκεντρωτικά αποτελέσματα για διάστημα εμπιστοσύνης 90%

CVaR 90, 1000 σενάρια, περίοδος αναπροσαρμογής 10 ημέρες				
ω	Αναμεν. Απόδ.	Τυπ. απόκλιση	Συνολική απόδ.	Μελλ. Απόδ.
0,06	0.0390%	1.1464%	9.9332%	-22.1507%
0,07	0.0709%	1.4003%	25.0103%	-27.7380%
0,08	0.0895%	1.6075%	33.0223%	-31.0618%
0,09	0.1025%	1.8070%	39.1674%	-28.5780%
0,1	0.1135%	1.9968%	43.6666%	-27.8001%
0,11	0.1221%	2.1776%	47.7767%	-26.1590%
0,12	0.1292%	2.3622%	51.0036%	-24.9768%
0,13	0.1349%	2.6180%	56.7763%	-21.1681%

4.4 Συμπεράσματα ανάλυσης διαστήματος εμπιστοσύνης και ποσοστού κεφαλαίου, που εκτίθεται σε κίνδυνο

Το πρώτο συμπέρασμα, που προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση είναι ότι όσο μειώνεται το διάστημα εμπιστοσύνης τόσο μικρότερα ω μπορούν να δώσουν λύση στο πρόβλημα. Έτσι δημιουργείται ένα είδος σύγκρουσης ανάμεσα στις μεταβλητές 'α' και ω . Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον ορισμό της VaR όσο μεγαλύτερο το διάστημα εμπιστοσύνης τόσο μεγαλύτερη και η ακρίβια άρα τόσο μικρότερος ο κίνδυνος. Από την άλλη για τους λόγους, που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, όσο μεγαλώνει το διάστημα εμπιστοσύνης τόσο μεγαλώνει και το ελάχιστο ω το οποίο είναι άμεσα συνδεδεμένο με τον κίνδυνο. Γεννάται έτσι το ερώτημα του πόσο μικρό διάστημα 'α' να επιλέξει κανείς. Όπως φάνηκε από την παραπάνω ανάλυση αυτό που παίζει το μεγαλύτερο ρόλο στον περιορισμό του κινδύνου είναι το ποσοστό ω και όχι το μικρό διάστημα εμπιστοσύνης. Παρόλα αυτά στην περίπτωση του $\alpha=0,90$ όπου βρέθηκε ακόμα μικρότερο ω δεν παρουσιάστηκε σαφής βελτίωση, όπως στην περίπτωση του $\alpha=95$ σε σχέση με το $\alpha=0,99$. Έτσι λοιπόν ο υπολογισμός της VaR99 θεωρείται υπερβολικός ενώ δε θα ήταν σωστό το διάστημα να πέσει κάτω από 90%. Επομένως, μια καλή επιλογή διαστήματος εμπιστοσύνης θα ήταν το 90% ή 95%. Όσον αφορά το ποσοστό ω τώρα δεν είναι δυνατό να επιλεγεί μια βέλτιστη τιμή. Ουσιαστικά, η επίλυση του προβλήματος για διαφορετικές τιμές του, είναι αυτό που θα δημιουργήσει το αποτελεσματικό σύνολο από το οποίο ο αποφασίζων ανάλογα με το ρίσκο που θέλει να αναλάβει θα επιλέξει το κατάλληλο χαρτοφυλάκιο. Πάντως όπως φάνηκε και από τα ίδια χαρτοφυλάκια, που προέκυψαν για $\omega=0,13$, $\omega=0,14$ και $\omega=0,15$ στην περίπτωση της CVaR90, τιμές του ποσοστού ω μεγαλύτερες από 15% είναι υπερβολικές.

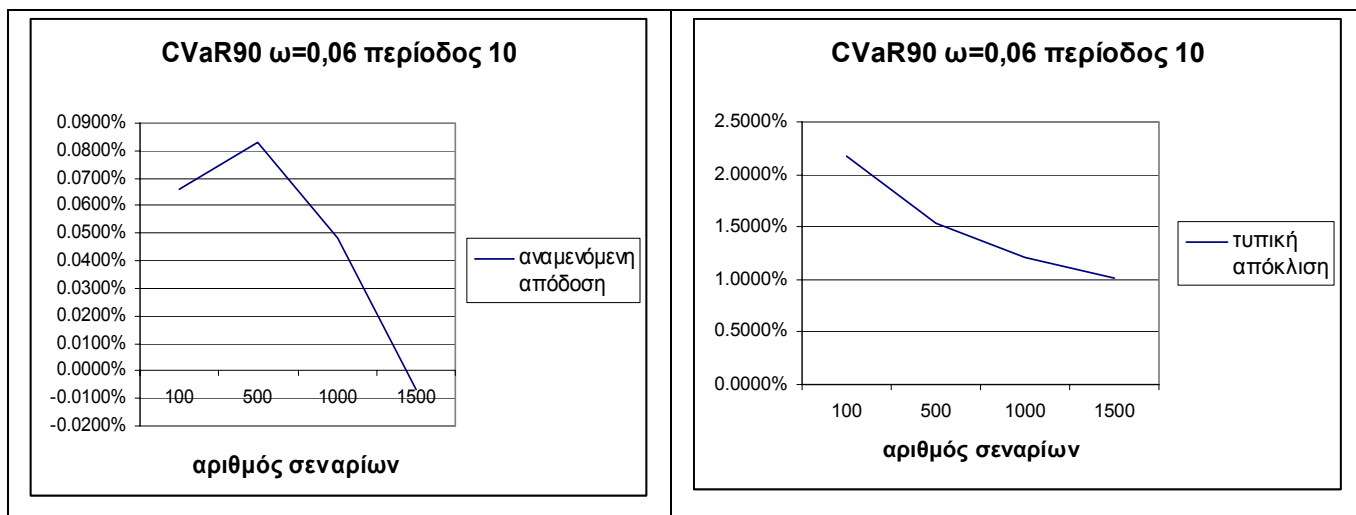
4.5 Το είδος και το πλήθος των σεναρίων

Όπως προαναφέρθηκε με τη μέθοδο του bootstrap παράγονται τυχαία σεναρία τα οποία και χρησιμοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος. Οι παράμετροι, που

επιδρούν στη διαμόρφωση αυτών των σεναρίων είναι ο αριθμός τους και η περίοδος αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου. Παρακάτω θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα, που προέκυψαν για 100, 500, 1000 και 1500 σεσάρια. Στην περίπτωση αυτή εκτός από την τυπική απόκλιση και την αναμενόμενη, συνολική και μελλοντική απόδοση θα εξετάζεται και ο αριθμός των μετοχών, που συνθέτουν το κάθε χαρτοφυλάκιο καθώς και ο χρόνος, που χρειάστηκε για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Να σημειωθεί ότι ο συγκεκριμένος χρόνος επίλυσης αφορά επεξεργαστή AMD Athlon 1200 MHz και μνήμη 256MB, ενώ χρησιμοποιείται το MATLAB με εγκατεστημένο το optimization toolbox TOMLAB. Στη συνέχεια θα εξεταστεί η επίδραση του χρονικού ορίζοντα των σεναρίων.

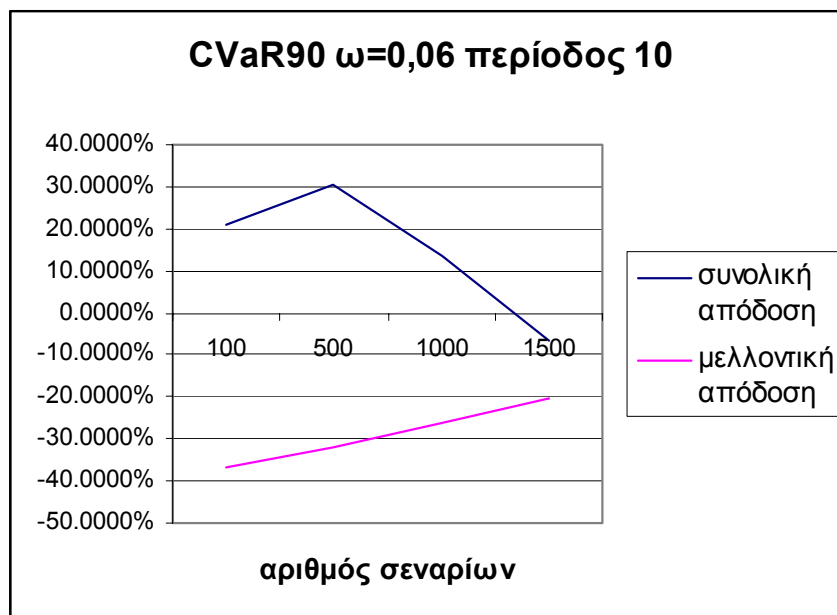
4.5.1 Το πλήθος των σεναρίων

Για την επίλυση με διαφορετικά σεσάρια, οι υπόλοιπες μεταβλητές πρέπει να μείνουν, όπως είναι φυσικό, σταθερές. Έτσι επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί η CVaR90 με $\omega=0,06$ και ορίζοντα αναπροσαρμογής δέκα ημέρες, που σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, είχε τα καλύτερα αποτελέσματα. Η διαφορά στην κάθε επίλυση έγκειται στο ότι τώρα, αντί να εξεταστούν 1000 διαφορετικά δεκαήμερα σεσάρια, που παράγονται μέσω της διαδικασίας bootstrap, θα εξεταστούν από 100 μέχρι και 1500 σεσάρια. Παρακάτω φαίνονται η αναμενόμενη απόδοση και η τυπική απόκλιση των χαρτοφυλακίων, που προέκυψαν.



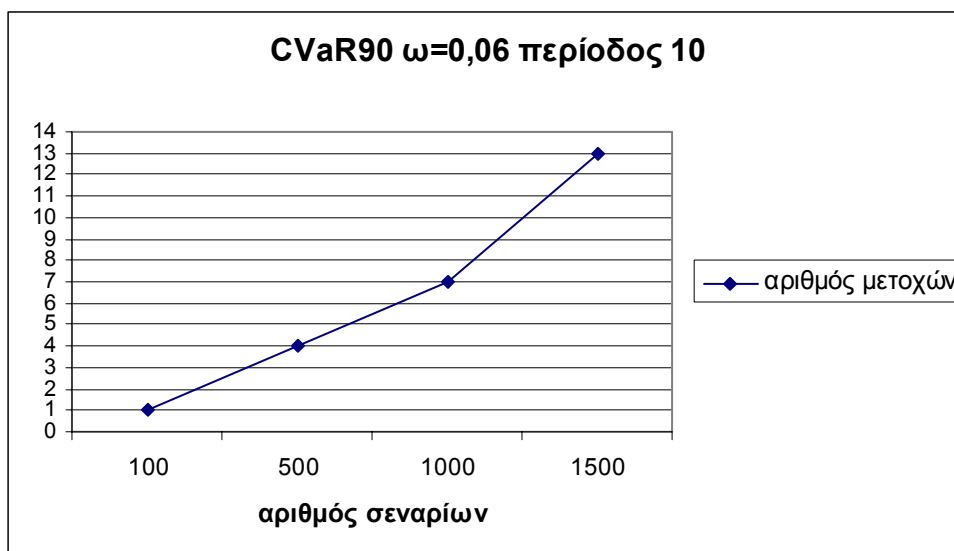
Σχήμα 4.11 : Η αναμενόμενη απόδοση και η τυπική απόκλιση, σε συνάρτηση με τον αριθμό σεναρίων

Για πολύ μικρό αριθμό σεναρίων (100) το μοντέλο δεν έχει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Φαίνεται χαρακτηριστικά ότι για 100 σεσάρια αν και η τυπική απόκλιση, δηλαδή ο κίνδυνος, έχει τη μέγιστη τιμή, η αναμενόμενη απόδοση είναι μικρότερη από ότι με 500 σεσάρια. Στη συνέχεια, όσο ο αριθμός σεναρίων μεγαλώνει τόσο μικραίνει ο κίνδυνος αλλά και η αναμενόμενη απόδοση κάτι φυσιολογικό αφού τα δεδομένα αφορούν περίοδο πτώσης, και όσο μεγαλώνει ο αριθμός σεναρίων τόσο προσεγγίζεται η πραγματικότητα. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι όσο περισσότερα σεσάρια τόσο το καλύτερο. Σε μια διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος για $\omega=0,1$ το πρόβλημα λύθηκε εκτός των άλλων και για 2000 σεσάρια και διαπιστώθηκε εκτός του υπερβολικού υπολογιστικού φόρτου, ότι τα αποτελέσματα για 1500 σεσάρια ήταν καλύτερα, ως προς τη μελλοντική απόδοση. Ακολουθούν η συνολική και μελλοντική απόδοση των χαρτοφυλακίων.



Σχήμα 4.12 : Μεταβολή της συνολικής και μελλοντικής απόδοσης συναρτήσει του πλήθους των σεναρίων

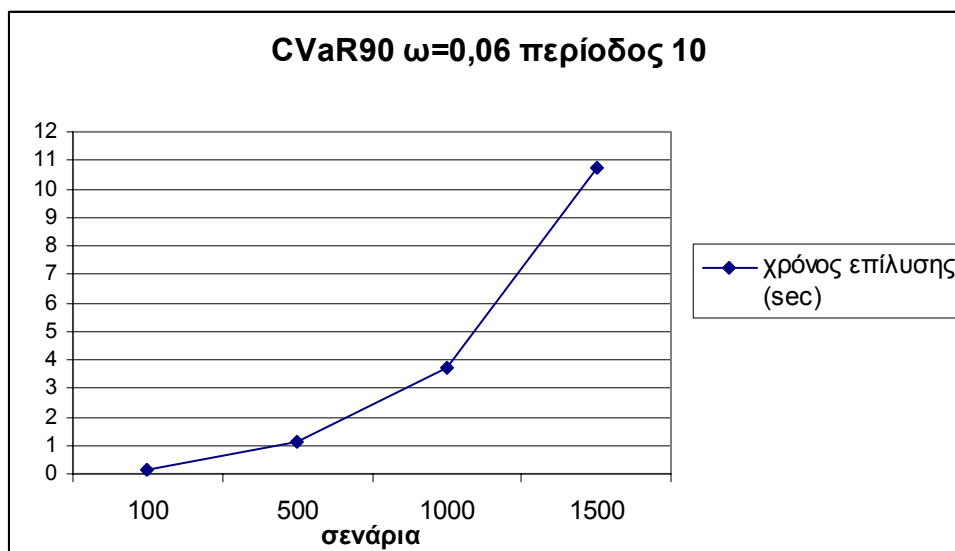
Όπως και με την αναμενόμενη απόδοση, έτσι και με τη συνολική, το χαρτοφυλάκιο των 100 σεναρίων δεν έχει σωστή συμπεριφορά. Έτσι συμπεραίνεται ότι για τη σωστή λειτουργία της μεθόδου ο αριθμός σεναρίων θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από 100. Ακόμα, είναι εντυπωσιακό το πως συρρικνώνονται οι μελλοντικές απώλειες όσο ο αριθμός των σεναρίων αυξάνει, δίνοντας στο μοντέλο μεγαλύτερη ακρίβεια, ενώ φαίνεται από το σχήμα 4.12, πως όσο αυξάνει ο αριθμός σεναρίων τόσο η μελλοντική απόδοση προσεγγίζει τη συνολική, δηλαδή το δημιουργούμενο χαρτοφυλάκιο προσεγγίζει την πραγματικότητα. Εκτός από αυτές τις παρατηρήσεις όμως, από τη μελέτη του bootstrapping προέκυψαν και άλλα ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα ο διαφορετικός αριθμός σεναρίων επηρεάζει και τον αριθμό των μετοχών, που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο.



Σχήμα 4.13 : Πλήθος επιλεγμένων μετοχών για διαφορετικό αριθμό σεναρίων

Ο αριθμός μετοχών, που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο αυξάνει όσο αυξάνει ο αριθμός των εξεταζόμενων σεναρίων. Η επιλογή μιας μόνο μετοχής, στην περίπτωση των 100 σεναρίων, επιβεβαιώνει τα προηγούμενα, σχετικά με το ότι τα 100 σενάρια είναι πολύ λίγα για να λειτουργήσει σωστά η μέθοδος. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί για ακόμα μια φορά ότι το κεφάλαιο το οποίο επενδύεται είναι 100.000 €. Για ένα τόσο μεγάλο κεφάλαιο ένα χαρτοφυλάκιο θα ήταν καλό να αποτελείται από αρκετές μετοχές. Έτσι οι λύσεις για 1000 και 1500 σενάρια με 7 και 13 μετοχές αντίστοιχα, είναι αποδεκτές, ενώ οι 4 μετοχές, που προκύπτουν για 500 σενάρια είναι πολύ λίγες. Μεγαλύτερος αριθμός μετοχών θα ήταν επίσης κάτι ανεπιθύμητο, γιατί ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο θα ήταν δύσκολο να ελεγχθεί.

Εκτός αυτών, όπως είναι φυσικό, η δημιουργία περισσότερων σεναρίων απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό φόρτο και συνεπώς χρόνο. Η αύξηση του χρόνου επίλυσης του γραμμικού προβλήματος, για τον προσδιορισμό του βέλτιστου χαρτοφυλακίου, φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 4.14 : Χρόνος επίλυσης συναρτήσει του αριθμού σεναρίων

Το πρόβλημα λύνεται σε λιγότερο από 5 sec για αριθμό σεναρίων μικρότερο από 1000 ενώ από εκεί και έπειτα παρουσιάζεται σημαντική αύξηση. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτά ο χρόνος δείχνει να αυξάνει εκθετικά ως προς τα σεναρία. Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί το πρόβλημα είναι γραμμικό και οι περιορισμοί, όπως ορίστηκαν στην παράγραφο 3.3.2, είναι όσοι και τα σεναρία συν δύο. Ένα γραμμικό πρόγραμμα είναι γνωστό πως έχει περισσότερο υπολογιστικό φόρτο όταν αυξάνουν οι περιορισμοί. Αυτό θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί με την επίλυση του δυϊκού προγράμματος. Τότε οι 117 μεταβλητές απόφασης εξαιτίας των μετοχών θα έδιναν ισάριθμους περιορισμούς στο δυϊκό πρόγραμμα, ενώ οι μεταβλητές απόφασης εξαιτίας των σεναρίων θα μεταφράζονταν σε φράγματα. Αντίστοιχα οι μεταβλητές απόφασης του δυϊκού θα γίνονταν όσοι οι περιορισμοί του αρχικού. Έτσι, θα αυξάνονταν οι μεταβλητές απόφασης και θα μειώνονταν οι περιορισμοί. Όμως η αύξηση των μεταβλητών απόφασης δεν επηρεάζει σημαντικά τον υπολογιστικό φόρτο ενός γραμμικού προγράμματος όσο η αύξηση των περιορισμών, οπότε ο χρόνος επίλυσης θα γινόταν συντομότερος. Παρακάτω φαίνεται το συγκεντρωτικό διάγραμμα για όλα τα αποτελέσματα, που εξετάστηκαν, για διαφορετικό αριθμό σεναρίων.

Πίνακας 4.7 : Συγκεντρωτικά αποτελέσματα για διαφορετικό αριθμό σεναρίων

σενάρια	Αναμ. Αποδ.	Τυπ. Αποκ.	Συνολ. Απ.	Μελλ. Αποδ.	αριθμός μετοχών	χρόνος επίλυσης
100	0.0660%	2.1768%	20.7969%	-36.9195%	1	0.14 sec
500	0.0831%	1.5426%	30.4161%	-32.2575%	4	1.121 sec
1000	0.0390%	1.1464%	9.9332%	-22.1507%	7	3.715 sec
1500	-0.0065%	1.0108%	-6.4862%	-20.3587%	13	10.705 sec

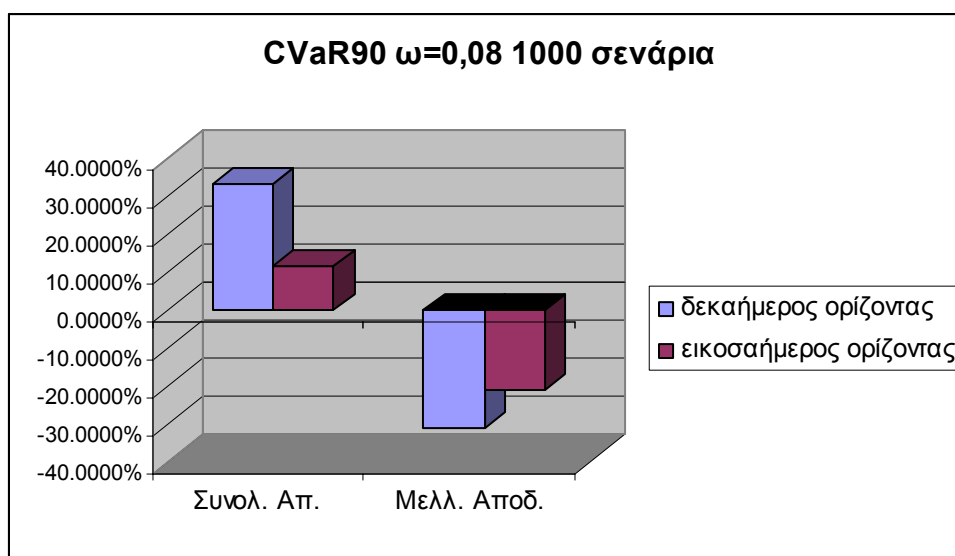
4.5.2 Ο χρονικός ορίζοντας των σεναρίων

Η τελευταία παράμετρος, που εξετάζεται στη μελέτη αυτή είναι ο χρονικός ορίζοντας στον οποίο αναφέρονται τα εξεταζόμενα σενάρια. Τα σενάρια, που δημιουργούνται με bootstrapping θα πρέπει να συμφωνούν με το κάθε πότε το χαρτοφυλάκιο θα ελέγχεται και θα γίνονται ή όχι οι απαραίτητες αλλαγές. Εδώ εξετάζονται τρεις περιπτώσεις. Από την ελάχιστη δυνατή περίοδο, δηλαδή ημερήσια αναπροσαρμογή, μέχρι και εικοσαήμερος ορίζοντας, που σημαίνει μηνιαία αναπροσαρμογή, αφού πρόκειται για εργάσιμες ημέρες. Δεν κρίνεται σκόπιμο να εξεταστεί μεγαλύτερος χρονικός ορίζοντας μιας και ένα χαρτοφυλάκιο καλό θα ήταν να ελέγχεται τουλάχιστον μια φορά το μήνα. Ως ενδιάμεση τιμή από τη μια ημέρα ως τις είκοσι χρησιμοποιείται το δεκαήμερο, για το οποίο έγιναν εξάλλου και όλες οι προηγούμενες αναλύσεις. Τα αποτελέσματα της διαδικασίας αυτής θα παρουσιαστούν συνολικά.

Πίνακας 4.8 : Ανάλυση του χρονικού ορίζοντα των σεναρίων

Διαφορετικός χρονικός ορίζοντας .VaR90, $\omega=0,08$, 1000 σεσάρια				
ορίζοντας	Αναμ. Αποδ.	Τυπ. Αποκ.	Συνολ. Απ.	Μελλ. Αποδ.
ημερήσιος	0.0393%	2.7577%	0.5238%	-72.8098%
δεκαήμερος	0.0895%	1.6075%	33.0223%	-31.0618%
εικοσαήμερος	0.0421%	1.1682%	11.6163%	-21.0950%

Όπως εύκολα συμπεραίνει κανείς η ημερήσια αναπροσαρμογή δεν έχει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Έχει μεγαλύτερο κίνδυνο και μικρότερη απόδοση από τις άλλες περιπτώσεις, ενώ σε πραγματικές συνθήκες (δηλαδή ως προς τη μελλοντική απόδοση), το χαρτοφυλάκιο, που δίνει έχει πολύ μεγάλες απώλειες. Όσον αφορά τώρα το δεκαήμερο και εικοσαήμερο χρονικό ορίζοντα το παρακάτω διάγραμμα θα βοηθήσει στη σύγκρισή τους.



Σχήμα 4.15 : Συνολική και μελλοντική απόδοση, για διαφορετικό ορίζοντα αναπροσαρμογής

Το χαρτοφυλάκιο, που έγινε με δεκαήμερο ορίζοντα αναπροσαρμογής αν και έχει λίγο χειρότερη μελλοντική απόδοση, είναι σαφώς ανώτερο όσον αφορά την συνολική απόδοσή του. Να σημειωθεί ότι η επίλυση εδώ έγινε για $\omega=0,08$ και όχι για $\omega=0,06$ γιατί ο ορίζοντας αναπροσαρμογής περιορίζει το ω όπως συνέβαινε και με το

διάστημα εμπιστοσύνης. Το πρόβλημα αυτό ήταν αδύνατο να λυθεί για $\omega=0,06$ και με εικοσαήμερο ορίζοντα. Το γεγονός αυτό έρχεται να προστεθεί στην παραπάνω παρατήρηση για τη συνολική απόδοση και σε συνδυασμό με το ότι δέκα εργάσιμες ημέρες είναι λογικό διάστημα, ενώ οι είκοσι εργάσιμες είναι πολύ μεγάλο, μπορεί να πει κανείς πως ιδανικός ορίζοντας αναπροσαρμογής είναι οι δέκα ημέρες.

4.6 Συμπεράσματα ανάλυσης του bootstrapping

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούν να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα, σχετικά με τις τιμές των δύο μεταβλητών του bootstrapping. Ο αριθμός των σεναρίων, που θα ήταν καλό να επιλέγεται είναι μεταξύ 1000 και 1500. Καλύτερα αποτελέσματα έδωσε το χαρτοφυλάκιο των 1500 σεναρίων αλλά σε περίπτωση που ο αριθμός μετοχών ή ο χρόνος υπολογισμού, θεωρηθούν υπερβολικοί θα μπορούσε να επιλεγεί αριθμός σεναρίων ανάμεσα σε αυτές τις δύο τιμές. Πάντως δε θα ήταν σωστό να επιλεγούν λιγότερα από 1000 σενάρια, γιατί τότε η προσομοίωση μέσω του bootstrap δε θα προσέγγιζε αρκετά την πραγματικότητα, κάτι που φάνηκε για 100 και 500 σενάρια.

Σχετικά με τον ορίζοντα αναπροσαρμογής, φάνηκε από τα αποτελέσματα, πως η τιμή που χρησιμοποιήθηκε έως τώρα για τους υπόλοιπους υπολογισμούς ήταν και η καλύτερη. Εξάλλου ο βέλτιστος ορίζοντας αναπροσαρμογής δεν είναι κάτι που θα προκύψει από έρευνα αλλά κάτι, που προκύπτει λογικά. Λιγότερο από δέκα ημέρες είναι υπερβολικά σύντομο διάστημα, ενώ ενασχόληση με το χαρτοφυλάκιο σε περίοδο μεγαλύτερη του ενός μήνα είναι ανεπαρκής.

Αυτό, που θα επιχειρηθεί τώρα είναι η δημιουργία ενός πλαισίου λειτουργίας της CVaR, με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων της μελέτης, που προηγήθηκε. Θα προταθούν λοιπόν τιμές για τον αριθμό σεναρίων, το διάστημα εμπιστοσύνης και τον ορίζοντα αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου. Όπως φάνηκε και πριν το διάστημα εμπιστοσύνης πρέπει να μην είναι πολύ περιοριστικό για να μπορεί να βρεθεί σχετικά μικρό ποσοστό ω , που να επιλύει το πρόβλημα. Έτσι θα ήταν καλό η μεταβλητή α να είναι 0,9 ή έστω 0,95. Στη μελέτη που προηγήθηκε πάντως τα καλύτερα αποτελέσματα βρέθηκαν για $\alpha=0,90$. Όσον αφορά στον αριθμό των σεναρίων, καλύτερα αποτελέσματα έδωσαν τα 1500. Εξίσου ικανοποιητική όμως είναι και η επίλυση με 1000 σενάρια. Λιγότερα από 1000 ή περισσότερα από 1500 σενάρια δημιούργησαν

πρόβλημα. Επόμενη μεταβλητή είναι ο ορίζοντας αναπροσαρμογής. Τόσο από τα αποτελέσματα όσο και από λογική επιλογή, ο δεκαήμερος ορίζοντας αναπροσαρμογής δείχνει να υπερέχει. Έτσι το χαρτοφυλάκιο ούτε εγκαταλείπεται για μεγάλο διάστημα, ούτε όμως εξετάζεται υπερβολικά δημιουργώντας πρόβλημα, όπως συνέβη με την ημερήσια αναπροσαρμογή.

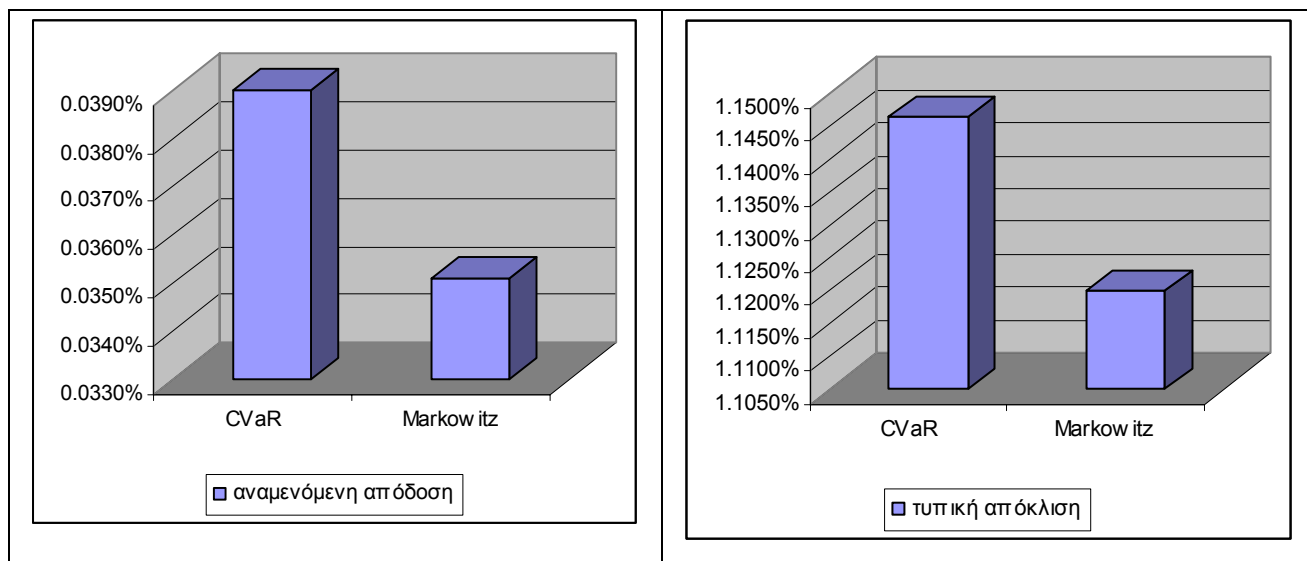
Σύμφωνα με τις τιμές αυτές μπορεί να ακολουθηθεί η παρακάτω διαδικασία επίλυσης. Να αναζητηθεί για $\alpha=0,9$ περίοδο 10 ημέρες και 1500 σενάρια το ελάχιστο ποσοστό ω , που δίνει λύση στο πρόβλημα και στη συνέχεια για διαφορετικές τιμές του ω από την ελάχιστη μέχρι και μια τιμή $\omega=0,15$ να δημιουργηθεί ένα σύνολο από χαρτοφυλάκια. Αυτό ουσιαστικά αποτελεί το αποτελεσματικό σύνολο από το οποίο ο αποφασίζων θα επιλέξει ένα, ανάλογα με τον κίνδυνο και την απόδοση, που θέλει.

4.7 Σύγκριση με το μοντέλο του Markowitz

Το αντικείμενο της παραγράφου αυτής είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου με το μοντέλο του Markowitz, το οποίο είναι ευρέως διαδεδομένο, στη σύνθεση χαρτοφυλακίων χρεογράφων. Όπως φάνηκε παραπάνω, το μοντέλο της υπό συνθήκη αξίας στον κίνδυνο έχει πολλές παραμέτρους, που με διαφορετικές τιμές δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Το μοντέλο του Markowitz προφανώς δεν έχει τις ίδιες παραμέτρους και για τη σύγκρισή των μεθόδων πρέπει να βρεθεί ένα κοινό σημείο αναφοράς, διαφορετικά η σύγκριση θα είναι άστοχη. Αυτό το κοινό στοιχείο αναφοράς θα είναι η αναμενόμενη απόδοση. Όχι όμως η αναμενόμενη απόδοση ως η μέση τιμή των ημερήσιων αποδόσεων κάθε μετοχής, που υπολογίζεται στα παραπάνω αποτελέσματα αλλά η αναμενόμενη απόδοση με βάση τα σενάρια, που δημιουργούνται με το bootstrapping. Έτσι για κάποιο χαρτοφυλάκιο, που έγινε με τη μέθοδο της CVaR, θα υπολογιστεί αυτή η αναμενόμενη απόδοση και στη συνέχεια θα γίνει ένα χαρτοφυλάκιο με το μοντέλο του Markowitz με την ίδια αναμενόμενη απόδοση. Τα δύο αυτά χαρτοφυλάκια θα συγκριθούν με τον ίδιο τρόπο, που συγκρίθηκαν μεταξύ τους τα διαφορετικά χαρτοφυλάκια της CVaR, δηλαδή ως προς την αναμενόμενη απόδοση με βάση τα ιστορικά στοιχεία των μετοχών, την τυπική απόκλιση, τη συνολική και μελλοντική απόδοση και τον αριθμό μετοχών. Το χαρτοφυλάκιο, που θα

4. Εφαρμογή στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών

συγκριθεί με το μοντέλο του Markowitz είναι αυτό, που προέκυψε για $\alpha=0,90$ $\omega=0,06$ 1000 σενάρια και δεκαήμερο ορίζοντα αναπροσαρμογής. Το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο, που προέκυψε με το μοντέλο του Markowitz, όπως θα φανεί και παρακάτω, είχε σε όλα τα μεγέθη σχεδόν ίδια συμπεριφορά. Ακολουθεί γράφημα με τις αναμενόμενες αποδόσεις και τις τυπικές αποκλίσεις των δύο χαρτοφυλακίων.

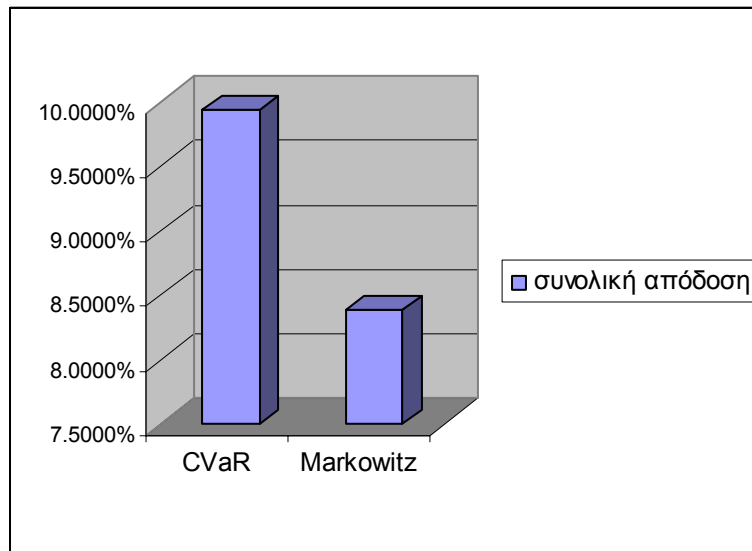


Σχήμα 4.16 : Η αναμενόμενη απόδοση και η τυπική απόκλιση για τις δύο μεθόδους

Πίνακας 4.9 : Οι τιμές της αναμενόμενης απόδοσης και της τυπικής απόκλισης, για χαρτοφυλάκια των δύο μεθόδων

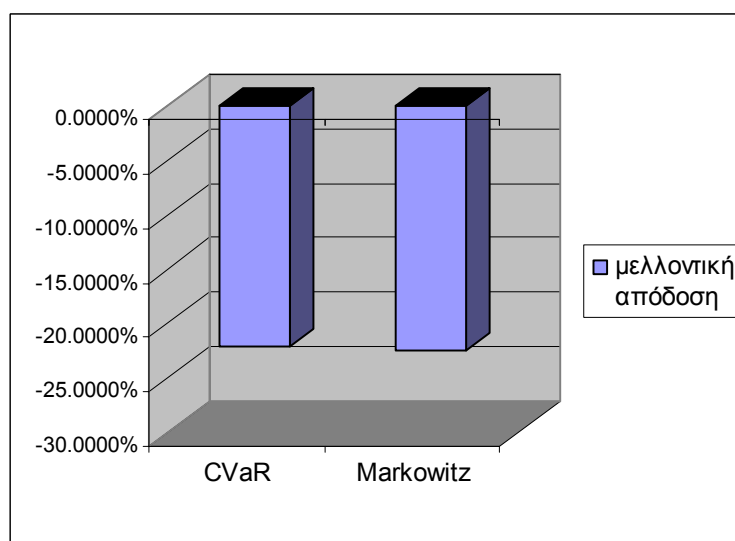
	αναμενόμενη απόδοση	τυπική απόκλιση
CVaR	0.0390%	1.1464%
Markowitz	0.0351%	1.12%

Τόσο η αναμενόμενη απόδοση, όσο και η τυπική απόκλιση των δύο χαρτοφυλακίων έχουν παραπλήσιες τιμές. Το μοντέλο του Markowitz έχει λίγο μικρότερη αναμενόμενη απόδοση αλλά και λιγότερο κίνδυνο, οπότε δε μπορεί να συμπεράνει κανείς ανωτερότητα ή όχι κάποιου εκ των δύο χαρτοφυλακίων. Στη συνέχεια της σύγκρισης παρουσιάζεται η συνολική απόδοση, που έχουν τα δύο χαρτοφυλάκια, που δημιουργήθηκαν.



Σχήμα 4.17 : Η συνολική απόδοση για χαρτοφυλάκια των δύο μεθόδων

Όπως η αναμενόμενη απόδοση και η τυπική απόκλιση, έτσι και η συνολική απόδοση έχει αντίστοιχη τιμή στα δύο χαρτοφυλάκια. Φτάνει να αναλογιστεί κανείς το εύρος της συνολικής απόδοσης, που παρουσιάστηκε για διαφορετικές τιμές του ποσοστού ω , στην παράγραφο 4.3, για να καταλάβει πόσο κοντά είναι αυτές οι δύο τιμές. Η συνολική απόδοση κυμαίνονταν από 9,9% μέχρι και 57% περίπου, ενώ εδώ η διαφορά είναι περίπου 1,5%. Αντίστοιχα μικρή είναι και η διαφορά στη μελλοντική απόδοση των δύο χαρτοφυλακίων, που παρουσιάζεται παρακάτω στο σχήμα 4.18.



Σχήμα 4.18 : Η μελλοντική απόδοση των δύο χαρτοφυλακίων

4. Εφαρμογή στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών

Το χαρτοφυλάκιο, που έγινε με το μοντέλο του Markowitz είχε απώλειες 22,4% ενώ το αντίστοιχο της CVaR είχε απώλειες 22,15%. Η ομοιότητα αυτή είναι αξιοσημείωτη αν αναλογιστεί κανείς πως η μελλοντική απόδοση υπολογίστηκε με πραγματικές τιμές που προέκυψαν από την πορεία του χρηματιστηρίου την περίοδο, που ακολούθησε τη συλλογή των στοιχείων. Δεν πρόκειται δηλαδή για στατιστικούς υπολογισμούς ή προϊόν προσομοίωσης. Λόγω της κοινής μελλοντικής πορείας των δύο χαρτοφυλακίων κρίθηκε σκόπιμο να αναλυθεί περισσότερο η σύνθεσή τους. Αυτό που διαπιστώθηκε είναι ότι τα δύο χαρτοφυλάκια όχι μόνο είχαν περίπου ίσο αριθμό μετοχών (7 για τη CVaR και 9 για το Markowitz) αλλά οι 7 μετοχές του χαρτοφυλακίου της CVaR ήταν κοινή επιλογή και των δύο μεθόδων. Η παρατήρηση αυτή είναι ίσως η κυριότερη απόδειξη της αντιστοιχίας των δύο μεθόδων. Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, παρατίθενται τα συνολικά αποτελέσματα της σύγκρισης των δύο μοντέλων.

Πίνακας 4.10 : Συγκεντρωτικά αποτελέσματα για χαρτοφυλάκια, που δημιουργήθηκαν με τη μέθοδο CVaR και με το μοντέλο του Markowitz

	αναμενόμενη απόδοση	τυπική απόκλιση	συνολική απόδοση	μελλοντική απόδοση	αριθμός μετοχών	κοινές μετοχές
CVaR	0.0390%	1.1464%	9.9332%	22.1507%	7	7
Markowitz	0.0351%	1.12%	8.3836%	22.4248%	9	

Βασιζόμενος στα αντίστοιχα αποτελέσματα και ταυτόχρονα στην ευκολία κατανόησης και χρήσης, συμπεραίνει κανείς την υπεροχή της μεθόδου της αξίας στον κίνδυνο. Οι μεταβλητές της μεθόδου έχουν φυσική σημασία, που μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητή από τον αποφασίζων. Ο κίνδυνος αντιπροσωπεύεται από το ποσοστό του κεφαλαίου που εκτίθεται σε ρίσκο, αντί της τυπικής απόκλισης, για την κατανόησή της οποίας χρειάζεται γνώση μαθηματικών και γενικά αποφεύγονται όλα τα αρνητικά στοιχεία του μοντέλου του Markowitz, που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 2.3.

5.Συμπεράσματα και Μελλοντικές Κατευθύνσεις

Αυτό το οποίο επιχειρήθηκε με τη μελέτη αυτή ήταν η ανάλυση της μεθόδου της υπό συνθήκη αξίας στον κίνδυνο και στη συνέχεια η σύγκρισή της με το μοντέλο του Markowitz. Από την ανάλυση προέκυψαν σημαντικά συμπεράσματα σχετικά με τη συμπεριφορά της μεθόδου για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών της και έτσι δημιουργήθηκε ένα προτεινόμενο πλαίσιο για την επίλυση προβλημάτων χαρτοφυλακίων με τη μέθοδο της υπό συνθήκη αξίας στον κίνδυνο.

Όσον αφορά τη σύγκριση με το μοντέλο του Markowitz, αποδείχθηκε η αντιστοιχία των μεθόδων, κάτι το οποίο οδηγεί στην υπεροχή της υπό συνθήκη αξίας στον κίνδυνο, η οποία είναι πιο εύκολη στη υλοποίηση και ποιά κατανοητή από τον αποφασίζοντα.

Πέραν τούτων η μελέτη αυτή έχει αρκετές διαφορετικές προοπτικές ανάπτυξης. Μια από αυτές είναι το να γίνουν οι υπολογισμοί με ένα διαφορετικό τρόπο υλοποίησης των σεναρίων. Θα μπορούσε δηλαδή αντί του bootstrap να χρησιμοποιηθεί ένας άλλος εναλλακτικός τρόπος, από αυτούς, που αναφέρονται στην παράγραφο 2.4.3, όπως για παράδειγμα η προσομοίωση Monte Carlo. Ακόμα, θα μπορούσε να συνδυαστεί η μελέτη αυτή με μια τεχνική επιλογής μετοχών με συγκεκριμένα κριτήρια,

όπως για παράδειγμα οι χρηματοοικονομικοί δείκτες. Έτσι θα περιορίζονταν και ο αριθμός των μετοχών και θα απλοποιούνταν κάποιοι υπολογισμοί, ενώ θα μειώνονταν και ο υπολογιστικός φόρτος. Τέλος, η έρευνα θα μπορούσε να επεκταθεί και σε διαφορετικά χρεόγραφα, όπως αμοιβαία κεφάλαια και ομόλογα, ή και σε συνδυασμούς ακίνδυνων και επικίνδυνων χρεογράφων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Για την επίλυση των διαφόρων προβλημάτων της CVaR, αλλάζοντας τις μεταβλητές, δημιουργήθηκε και χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω συνάρτηση (m.file), στο πρόγραμμα MATLAB. Η συνάρτηση αυτή δέχεται σαν είσοδο τις μεταβλητές του προβλήματος και επιστρέφει τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου (τεμάχια) και το χρόνο υπολογισμού.

```
function [results, time]= var (Q, R, clevel, per, scenarios,
days, capital)
%ypologismos cvar
%dimiourgia pinaka B *****
[Rlines,Rcols]=size(R);
B=unidrnd(Rlines,scenarios,days);
%dimiourgia pinaka Y *****
for t=1:Rcols
    Y(t,1:scenarios)=Q(t);
end;
for t=1:Rcols
    for j=1:scenarios
        for i=1:days
            Y(t,j)=Y(t,j)*(R(B(j,i),t)+1);
        end;
    end;
end;
%dimiourgia pinaka C *****
C=mean(Y,2);
for t=Rcols+1:scenarios+Rcols+1
    C(t,1)=0;
end;
%dimiourgia pinaka A *****
A=[-Y' -eye(scenarios)];
for t=1:scenarios
    A(t,scenarios+Rcols+1)=-1;
end;
for t=1:Rcols
    A(scenarios+1,t)=0;
end;
for t=Rcols+1:scenarios+Rcols
    A(scenarios+1,t)=(1/scenarios)*(1/(1-clevel));
end;
A(scenarios+1,scenarios+Rcols+1)=1;
for t=1:Rcols
    A(scenarios+2,t)=Q(t);
end;
%dimiourgia pinaka lb*****
for t=1:scenarios+Rcols+1
    lb(t,1)=0;
end;
```

```

%dimiourgia pinaka b
for t=1:scenarios
    b(t,1)=-capital;
end;
b(scenarios+1,1)=per*capital;
b(scenarios+2,1)=capital;
t=cputime;
results=linprog(-
C,A(1:scenarios+1,:),b(1:scenarios+1),A(scenarios+2,:),b(scenari
os+2,:),lb,[],[]);
time=cputime-t

```

Κλείνοντας, κρίνεται σκόπιμο να παρατεθούν τα αποτελέσματα της επίλυσης του προβλήματος με τη μέθοδο CVaR, τα οποία συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα του μοντέλου του Markowitz. Δίνονται λοιπόν παρακάτω οι μετοχές, που επιλέχθηκαν, για την περίπτωση της CVaR90 με 1000 σενάρια, ποσοστό κεφαλαίου που εκτίθεται σε κίνδυνο 6% και δεκαήμερο ορίζοντα αναπροσαρμογής, καθώς και το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο, που προέκυψε με χρήση του μοντέλου του Markowitz.

CVAR	ΠΟΣΟΣΤΟ	MARKOWITZ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΑΒΑΞ (ΚΟ)	12.32%	ΑΒΑΞ (ΚΟ)	14.56%
ΒΑΡΒΑΡΕΣΟΣ ΝΗΜ.ΝΑΟΥΣΗΣ(ΚΑ)	7.19%	ΒΑΡΒΑΡΕΣΟΣ ΝΗΜ.ΝΑΟΥΣΗΣ(ΚΑ)	6.96%
GOODYS (ΚΑ)	8.24%	GOODYS (ΚΑ)	10.81%
ELBISCO ΣΥΜΜΕΤΟΧΩΝ (ΚΑ)	8.27%	ΕΛΑΙΣ (ΚΟ)	2.96%
Κ.ΚΑΡΔΑΣΙΛΑΡΗΣ & ΥΙΟΙ (ΚΟ)	25.67%	ELBISCO ΣΥΜΜΕΤΟΧΩΝ (ΚΑ)	9.80%
ΠΑΠΑΣΤΡΑΤΟΣ (ΚΟ)	26.07%	Κ.ΚΑΡΔΑΣΙΛΑΡΗΣ & ΥΙΟΙ (ΚΟ)	19.45%
ΠΕΙΡΑΙΩΣ LEASING (ΚΟ)	12.25%	ΝΙΚΑΣ (ΚΟ)	2.25%
		ΠΑΠΑΣΤΡΑΤΟΣ (ΚΟ)	17.00%
		ΠΕΙΡΑΙΩΣ LEASING (ΚΟ)	16.22%

Βιβλιογραφία

Δούμπος, Μ. (2003), Μαθηματικός Χρηματοοικονομικός Λογισμός, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.

Dowd, K. (1998), *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, John Wiley and Sons, Chichester.

Efron, B. and Tibshirani, R.J. (1993), *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, New York.

Elton, E.J. and Gruber, M.J. (1995), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* (5th edition), John Wiley and Sons, New York.

Holmström, K. (1999), “*The Tomlab Optimization Environment in Matlab*”, *Advanced Modeling and Optimization*, 1, 47-69.

Jorion, P. (2000), *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* (2nd edition), McGraw-Hill, New York.

Linsmeier, J.T. and Pearson, D.N. (1996), “*Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk*”, University of Illinois at Urbana-Champaign, The Office for Futures and Options Research, Working Paper 96-04.

Markowitz, H. (1952), “*Portfolio selection*”, *Journal of Finance*, 7/1, 77-91.

Krokhmal, P., Palmquist, J., and Uryasev, S. (2001), “*Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk Objective and Constraints*”, *The Journal of Risk*, Vol. 4, no 2.

Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. (2000), “*Optimization of Conditional Value at Risk*”, *The Journal of Risk*, Vol.2, No 3, p. 21-41.

Uryasev, S. (2000), “*Conditional Value at Risk: Optimization Algorithms and Applications*”, *Financial Engineering News*, February, p. 1-5.

Ζοπουνίδης, Κ. (1998), *Ανάλυση και Διαχείριση Χρηματοοικονομικών Κινδύνων*, Πολυκριτήριες Προσεγγίσεις, Κλειδάριθμος, Αθήνα.