ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΩΛΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΑΠΛΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΠΕΛΑΤΕΣ ΠΟΥ ΑΠΟΘΑΡΡΥΝΟΝΤΑΙ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

υπό

Άγγελου Α. Οικονομόπουλου

Χανιά, 2005

© Copyright υπό Άγγελου Α. Οικονομόπουλου

Έτος: 2005

Η διατριβή του Άγγελου Οικονομόπουλου, εγκρίνεται από τους Βασίλη Κουϊκόγλου (επιβλέπων), Ιωάννη Νικολό και Ευάγγελο Γρηγορούδη.

1) Βασίλης Κουϊκόγλου (επιβλέπων)

2) Ιωάννης Νικολός

3) Ευάγγελος Γρηγορούδης

Περιεχόμενα

Με αφορμή την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς την οικογένειά μου, τη μητέρα μου, στην οποία και αφιερώνω την εργασία αυτή, τους φίλους αλλά και τους συναδέλφους μου. Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Βασίλη Κουϊκόγλου, για τις απαραίτητες υποδείξεις που μου έκανε καθ' όλη την διάρκεια αυτής της διατριβής. Κυρίως όμως θέλω να τον ευχαριστήσω για την υποστήριξη, συμπαράσταση, εμπιστοσύνη αλλά και την φιλία του όλα αυτά τα χρόνια που συνεργαζόμαστε.

Ο Άγγελος Οικονομόπουλος γεννήθηκε στην Αθήνα το 1979. Έχει πτυχίο Μηχανικού Παραγωγής και Διοίκησης από το Πολυτεχνείο Κρήτης και ολοκληρώνει το μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών «Συστήματα Παραγωγής» του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης Ο τομέας της έρευνάς του είναι η ανάλυση και ο έλεγχος συστημάτων παραγωγής.

Περίληψη

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής που παράγει ένα προϊόν. Η ζήτηση είναι τυχαία. Πελάτης που φθάνει σε περίοδο με μηδενικό απόθεμα είναι πρόθυμος να θέσει μια παραγγελία με πιθανότητα η οποία είναι φθίνουσα συνάρτηση του πλήθους των παραγγελιών που ήδη εκκρεμούν. Το καθαρό κέρδος του συστήματος ανά μονάδα χρόνου είναι ο μέσος ρυθμός κέρδους από πωλήσεις μείον το μέσο κόστος αποθέματος και ανικανοποίητων παραγγελιών. Το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε αν θα γίνει δεκτή ή όχι μια παραγγελία καθώς και να βρούμε την πολιτική βέλτιστου επιπέδου αποθέματος, ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος.

Στην βιβλιογραφία δεν υπάρχει αναφορά για μελέτες σε παρόμοια προβλήματα αφίξεων με αποθάρρυνση. Επιπλέον, τα προβλήματα βελτιστοποίησης αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών μελετώνται συνήθως ξεχωριστά.

Εξετάζονται συστήματα παραγωγής με μία μηχανή και τυχαίες διάρκειες παραγωγής, που παράγουν έως ότου το απόθεμα φθάσει ένα ορισμένο επίπεδο. Όταν δεν υπάρχει έτοιμο προϊόν, τότε το σύστημα δέχεται παραγγελίες μόνον όταν εκείνες που εκκρεμούν είναι κάτω από ένα ορισμένο όριο. Ο μέσος ρυθμός κέρδους υπολογίζεται με κλασσική ανάλυση ουρών αναμονής. Αποδεικνύονται ιδιότητες δεύτερης τάξης οι οποίες επιτρέπουν την ανάπτυξη αποτελεσματικών αλγορίθμων για τον καθορισμό από κοινού τόσο του βέλτιστου επιπέδου επιτρεπτού αποθέματος όσο και του μέγιστου πλήθους εκκρεμών παραγγελιών που επιτρέπονται ώστε να μεγιστοποιείται ο ρυθμός κέρδους του συστήματος.

1 Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της διατριβής

Στις αρχές του 20στού αιώνα, η βιομηχανία είχε υιοθετήσει τη μαζική παραγωγή προϊόντων ιδίου τύπου χρησιμοποιώντας όλη την δυναμικότητα του εργοστασίου. Σύμφωνα με αυτό το πρότυπο της παραγωγής, κάθε τμήμα του εργοστασίου παράγει συνεχώς, εφόσον έχει ικανή τροφοδοσία και επαρκή χώρο αποθήκευσης. Μέχρι τα μέσα του αιώνα, το είδος αυτό της παραγωγής ήταν βολικό, αφού απαιτούσε ελάχιστες προσπάθειες συντονισμού μεταξύ των τμημάτων του εργοστασίου.

Το πρότυπο αυτό, ενώ ταιριάζει σε βιομηχανίες οι οποίες λειτουργούσαν ως μονοπώλια (π.χ. η αυτοκινητοβιομηχανία Ford τότε), σήμερα εφαρμόζεται λιγότερο συχνά. Αιτία γι' αυτό είναι η αύξηση του αριθμού βιομηχανιών που παράγουν ανταγωνιστικά προϊόντα, πράγμα που άλλαξε δραματικά το σκηνικό της αγοράς κατά τις τελευταίες δεκαετίες. Σήμερα, για να επιβιώσει μία βιομηχανία θα πρέπει να μειώσει το κόστος λειτουργίας της στο ελάχιστο, ενώ παράλληλα να είναι σε θέση να ικανοποιήσει την αγορά προσφέροντας ποικιλία παρόμοιων προϊόντων. Για την οικονομικά αποτελεσματική παραγωγή και διάθεση των προϊόντων απαιτείται η λήψη αποφάσεων που, μεταξύ άλλων, σχετίζονται με τον συντονισμένο έλεγχο της παραγωγής σε κάθε τμήμα ώστε να αποφεύγεται η διατήρηση υψηλών αποθεμάτων και συγχρόνως η έλλείψη προϊόντων που οδηγεί σε ανικανοποίητη ζήτηση.

Τέτοιες αποφάσεις περιλαμβάνουν το χρονικό προγραμματισμός της λειτουργίας κάθε μηχανής του συστήματος (πότε ξεκινά η παραγωγή, με τι ρυθμό και πότε διακόπτεται) και ο έλεγχος των πωλήσεων (αποδοχή-απόρριψη μιας παραγγελίας ή ανάθεση σε υπεργολάβο). Ουσιαστικά ο έλεγχος της παραγωγής είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ενός ή και περισσοτέρων μέτρων απόδοσης όπως το καθαρό κέρδος, το κόστος λειτουργίας, το μέσο απόθεμα, η ικανοποίηση των πελατών, ο αριθμός των πωλήσεων.

Στην παρούσα διατριβή εξετάζουμε το πρόβλημα του ελέγχου του ρυθμού παραγωγής και της αποδοχής των παραγγελιών συναρτήσει των αποθεμάτων σε κάθε στάδιο παραγωγής και συναρτήσει του πλήθους των εκκρεμών παραγγελιών.

Μελετάμε ένα απλό σύστημα παραγωγής, που παράγει ένα μόνο προϊόν για να ικανοποιήσει τυχαία ζήτηση. Για τον έλεγχο του ρυθμού παραγωγής εφαρμόζεται η πολιτική αποθέματος βάσης. Σύμφωνα με αυτήν την πολιτική, το σύστημα παράγει στον μέγιστο ρυθμό όταν το απόθεμα έτοιμων προϊόντων είναι μικρότερο από ένα κατώφλι που ονομάζεται *απόθεμα βάσης* (base stock) και διακόπτει την παραγωγή όσο το απόθεμα είναι ίσο με αυτό το κατώφλι. Για τον έλεγχο των πωλήσεων προτείνεται μια ανάλογη πολιτική. Ορίζεται μια μέγιστη τιμή ανικανοποίητων παραγγελιών η οποία ονομάζεται *έλλειμμα βάσης* (base backlog), όσο των πλήθος των παραγγελιών που εκκρεμούν είναι μικρότερο του ελλείμματος βάσης, τότε το σύστημα αποδέχεται πελάτες, αλλιώς τους απορρίπτει.

Το σύστημα που μελετάμε έχει την ιδιαιτερότητα ότι ο ρυθμός της ζήτησης είναι φθίνουσα συνάρτηση σε σχέση με τον αριθμό των παραγγελιών που εκκρεμούν. Αυτή είναι μια πολύ λογική παραδοχή, καθώς πολλές φορές ένας πελάτης διστάζει να θέσει μια παραγγελία όταν υπάρχει ήδη ένας αριθμός πελατών οι οποίοι έχουν προτεραιότητα. Στόχος του ελέγχου είναι ο από κοινού καθορισμός του αποθέματος βάσης και ελλείμματος βάσης που μεγιστοποιούν το κέρδος ανά μονάδα χρόνου, το οποίο προκύπτει από τα έσοδα των πωλήσεων μείον το κόστος αποθεμάτων και το κόστος εκκρεμών παραγγελιών.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Τα προβλήματα ελέγχου παραγωγής συνήθως διατυπώνονται ως προβλήματα βελτιστοποίησης δυναμικών συστημάτων και επιλύονται είτε με δυναμικό προγραμματισμό είτε με βέλτιστο έλεγχο. Για συστήματα παραγωγής που αποτελούνται από μία μηχανή και παράγουν ένα τύπο προϊόντος, όπως το σύστημα που εξετάζεται σε αυτή την εργασία αποδεικνύεται [1] ότι οι βέλτιστες πολιτικές ελέγχου του ρυθμού παραγωγής είναι τύπου *κατωφλιού* (threshold-type). Οι πολιτικές αυτού του τύπου ορίζουν πως ο βέλτιστος ρυθμός παραγωγής είναι ο μέγιστος δυνατός όσο η στάθμη του αποθέματος έτοιμων προϊόντων είναι χαμηλότερη από ένα προκαθορισμένο απόθεμα βάσης. Όταν ο αριθμός του αποθέματος γίνει ίσος με το απόθεμα βάσης τότε η μηχανή παράγει συγχρονισμένα με την ζήτηση ώστε το απόθεμα να διατηρείται σε αυτή τη στάθμη.

Σε συστήματα με δύο ή και περισσότερες μηχανές, το πρόβλημα γίνεται πιο σύνθετο και οι βέλτιστες πολιτικές εξαιρετικά πολύπλοκες και αδύνατο να προσδιοριστούν στις περισσότερες περιπτώσεις. Ουσιαστικά σε τέτοιου είδους προβλήματα, ο δυναμικός προγραμματισμός και ο βέλτιστος έλεγχος χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά για την αναγνώριση των δομικών ιδιοτήτων της βέλτιστης πολιτικής ελέγχου. Τέτοιες ιδιότητες σε συστήματα παραγωγής με πολλές μηχανές εξετάζονται στις εργασίες [2]-[5].

Άλλος πρακτικός τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζονται προβλήματα ελέγχου παραγωγής είναι η αναζήτηση της καλύτερης πολιτικής από κάποια οικογένεια απλών πολιτικών που είναι εύκολα υλοποιήσιμες και εξαρτώνται από μικρό σχετικά αριθμό παραμέτρων. Τέτοιες πολιτικές για μεγάλα συστήματα παραγωγής μπορούν να βρεθούν με την χρήση των δομικών ιδιοτήτων της βέλτιστης πολιτικής που έχει βρεθεί για μικρότερα συστήματα. Υπάρχουν αρκετές κατηγορίες απλών πολιτικών ελέγχου για συστήματα παραγωγής: οι πολιτικές *αποθέματος βάσης*, οι πολιτικές KANBAN, CONWIP καθώς και συνδυασμοί αυτών. Μία βιβλιογραφική επισκόπηση των διαφόρων οικογενειών πολιτικών ελέγχου παρουσιάζεται στην [6].

Σε αυτή την εργασία εξετάζουμε ένα σύστημα από τα λεγόμενα συστήματα *παραγωγής προς αποθήκευση* (make-to-stock) που παράγουν ένα προϊόν για να ικανοποιήσουν στοχαστική ζήτηση. Τα συστήματα αυτά αποτελούνται από μία μονάδα παραγωγής με μηχανές, ενδιάμεσες αποθήκες (εδώ έχουμε μία μόνο μηχανή) και μια αποθήκη έτοιμων προϊόντων. Μια συνηθισμένη πρακτική ελέγχου αποθεμάτων σε τέτοια συστήματα συνίσταται στον καθορισμό ενός κατωφλιού για το πλήθος των έτοιμων προϊόντων [7] που, όπως στην περίπτωση συστήματος μίας μηχανής, ονομάζεται *απόθεμα βάσης* (base-stock). Οι πολιτικές αποθέματος βάσης αναπτύχθηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 1950 και εφαρμόζονται μέχρι σήμερα με μικρές παραλλαγές στην πλειοψηφία των συστημάτων παραγωγής. Σε κάθε στάδιο της παραγωγής ορίζεται ένα απόθεμα βάσης και όταν το απόθεμα προϊόντων αγγίξει το απόθεμα βάσης τότε η παραγωγή σταματά και ξεκινάει πάλι όταν το απόθεμα πέσει κάτω από αυτό το κατώφλι. Μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της πολιτικής είναι ότι το κόστος αποθέματος είναι φραγμένο. Αν το απόθεμα βάσης επιλεγεί μηδέν τότε η πολιτική αυτή ονομάζεται μηδενικού αποθέματος βάσης ή πιο σωστά πολιτική *παραγωγής κατά παραγγελία* (MTO, make-to-order).

Για την μαθηματική περιγραφή συστημάτων παραγωγής, χρησιμοποιούνται συχνά αναμονητικά συστήματα. Στη βιβλιογραφία του στοχαστικού ελέγχου, υπάρχουν αρκετές αναφορές για την εξέταση της δομής βέλτιστων πολιτικών ελέγχου αποδοχής πελατών σε τέτοια συστήματα (π.χ. βλ. [8], [9]). Παρόλο που η βιβλιογραφία είναι αρκετά εκτενής, δεν υπάρχουν πολλές αναφορές σε αποτελέσματα σχετικά με τον συνδυασμένο έλεγχο αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών [10].

Οι πολιτικές αποδοχής πελατών σε προβλήματα συστημάτων παραγωγής και αποθεματικών συστημάτων είναι συνήθως απλές, σύμφωνα με τις οποίες, όταν δεν υπάρχει έτοιμο προϊόν, οι παραγγελίες είτε απορρίπτονται είτε γίνονται όλες δεκτές. Σε περιόδους όπου δεν υπάρχει απόθεμα στο σύστημα, η απόρριψη όλων των εισερχόμενων παραγγελιών ονομάζεται πολιτική *πλήρους απόρριψης* (LS, lost sales), ενώ στην περίπτωση όπου γίνονται όλες αποδεκτές, η πολιτική ονομάζεται *πλήρους αποδοχής* (CB, complete backordering). Η κάθε μια από τις παραπάνω πολιτικές προτιμάται ανάλογα με την περίπτωση. Σε συστήματα όπου ο ρυθμός παραγωγής είναι μικρότερος της ζήτησης, η πολιτική πλήρους αποδοχής καθίσταται ζημιογόνος αφού είναι προφανές ότι οι πελάτες στην αναμονή θα αυξάνονται συνεχώς [7]. Οι πολιτικές LS και CB είναι εκ διαμέτρου αντίθετες, μια ενδιάμεση πολιτική ελέγχου παραγγελιών είναι η πολιτική *μερικής αποδοχής της μη ικανοποιημένης ζήτησης*. Η πολιτική αυτή ορίζει ένα κατώφλι που ονομάζεται *έλλειμμα βάσης*. Όταν το πλήθος παραγγελιών που εκκρεμούν είναι κάτω από το έλλειμμα βάσης, τότε όλες οι παραγγελίες γίνονται δεκτές ενώ όταν οι εκκρεμείς παραγγελίες φθάσουν αυτό το κατώφλι τότε απορρίπτονται. όλες η εισερχόμενες παραγγελίες απορρίπτονται.

Στην εργασία αυτή προτείνεται ο συνδυασμός των πολιτικών αποθέματος βάσης και ελλείμματος βάσης σε μια πολιτική που συμβολίζεται BSBB (base stock – base backlog). Η πολιτική μερικής BSBB είναι γενικότερη των MTO, LS και CB. Όταν η τιμή του ελλείμματος βάσης τεθεί ίση με 0 τότε η πολιτική γίνεται πλήρους απόρριψης, ενώ αντίστοιχα όταν η τιμή γίνει ∞ η πολιτική είναι πλήρους αποδοχής. Η εξέταση της BSBB γίνεται πρώτη φορά στις εργασίες [11], [12] και στην [10]. Στην [12] εξετάζεται το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων παραγγελιών και χαρακτηριστικών ποιότητας σε συστήματα παραγωγής με μία μηχανή και εκθετικούς χρόνους παραγωγής και αφίξεων πελατών. Το πρόβλημα περιγράφεται μαθηματικά με τη χρήση της θεωρίας αναμονητικών συστημάτων. Σε αυτήν τη διατριβή εξετάζουμε την πολιτική μερικής αποδοχής μη ικανοποιημένης ζήτησης σε παρόμοια συστήματα, με την διαφορά ότι η ζήτηση είναι μια φθίνουσα συνάρτηση των παραγγελιών που εκκρεμούν.

1.3 Δομή της διατριβής

Η παρούσα διατριβή αποτελείται από τρία επιπλέον κεφάλαια:

Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται μια περιγραφή του προβλήματος και παρουσιάζεται η μαθηματική μοντελοποίηση του συστήματος σαν ένα αναμονητικό σύστημα με πεπερασμένη χωρητικότητα ουράς, και αφίξεις και εξυπηρετήσεις που περιγράφονται από διαδικασίες Poisson. Από την επίλυση των εξισώσεων μόνιμης κατάστασης προκύπτει μια αναλυτική έκφραση της συνάρτησης κέρδους του συστήματος. Το κέρδος του συστήματος είναι το κέρδος πωλήσεων προϊόντων μειωμένο κατά το κόστος αποθέματος έτοιμων προϊόντων, πρώτων υλών και το κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης.

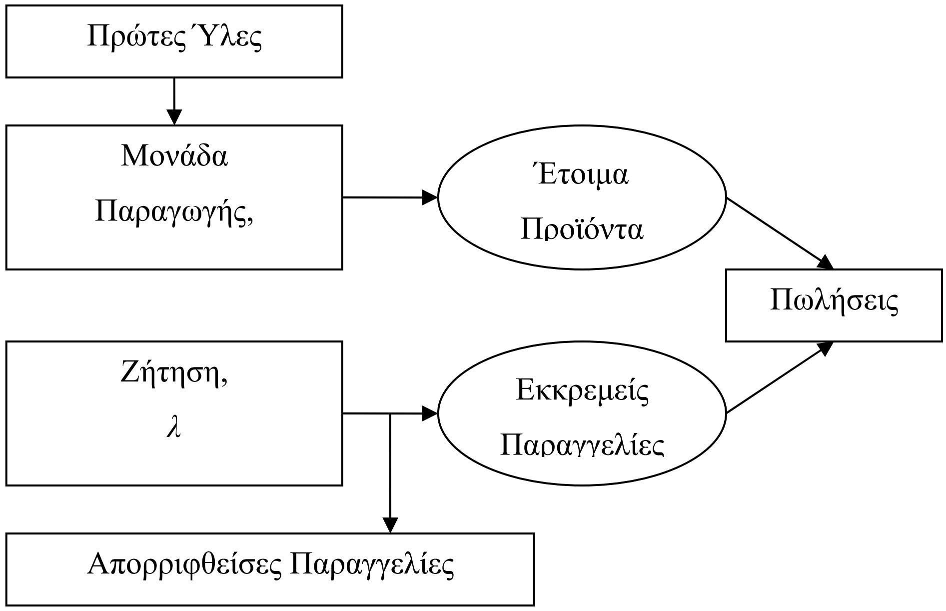
Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μελέτη ιδιοτήτων δεύτερης τάξης της συνάρτησης κέρδους οι οποίες διευκολύνουν τη βελτιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους. Ακολούθως παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος με την βοήθεια του οποίου εντοπίζονται οι βέλτιστες τιμές του αποθέματος βάσης και του ελλείμματος βάσης.

Στο Κεφάλαιο 4 πραγματοποιείται μια εφαρμογή της πολιτικής BSBB και γίνεται σύγκριση αυτής με άλλες ευρέως χρησιμοποιούμενες πολιτικές (MTO, CB, LS) για διάφορες τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Τα αριθμητικά παραδείγματα δείχνουν ότι η προτεινόμενη πολιτική υπερτερεί των άλλων. Επίσης γίνεται μια μελέτη ως προς κυρτότητα της συνάρτησης κέρδους. Τέλος παρουσιάζονται συμπεράσματα και κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

2 Συνεργαζόμενες Πολιτικές Ελέγχου Αποθεμάτων και Αποδοχής Παραγγελιών σε Συστήματα Μίας Μηχανής με Πελάτες που Αποθαρρύνονται

2.1 Περιγραφή του συστήματος παραγωγής

Θεωρούμε το σύστημα παραγωγής του Σχ. 2.1, το οποίο παράγει ένα μόνο προϊόν. Οι πελάτες έρχονται σε τυχαίους χρόνους και ο καθένας ζητά μια μονάδα προϊόντος κάθε φορά. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι παραγωγής είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ρυθμό μ. Επίσης οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ακολουθούν μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Τα παραγόμενα κομμάτια αποθηκεύονται σε μία αποθήκη έτοιμων προϊόντων. Μια αφικνούμενη παραγγελία η οποία βρίσκει προϊόν στην αποθήκη εξυπηρετείται αμέσως. Αν η αποθήκη είναι άδεια, τότε ο πελάτης θα θέσει την παραγγελία με πιθανότητα q_m, όπου m είναι ο αριθμός των παραγγελιών που ήδη εκκρεμούν, $m = 0$, 1, …. Υποθέτουμε ότι όσο περισσότερες είναι οι ανικανοποίητες παραγγελίες, τόσο αποθαρρύνονται οι πελάτες οπότε μειώνεται και η πιθανότητα q_m, άρα, $1 \geq q_0 \geq q_1 \geq$ …. Όταν το πλήθος των παραγγελιών που εκκρεμούν είναι m, τότε ο ρυθμός με τον οποίο ζητούνται πλέον προϊόντα είναι λq_m, άρα ορίζουμε $\lambda_m = \lambda q_m$ για κάθε $m = 0$, 1, …. Για $m = 0$ υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν προϊόντα στο σύστημα ούτε εκκρεμείς παραγγελίες, τότε το λq_0 δηλώνει το μέσο ρυθμό άφιξης πελάτη ο οποίος θα δεχθεί να μπει πρώτος στη λίστα αναμονής. Όταν υπάρχει έτοιμο απόθεμα, τότε η ζήτηση γίνεται με μέσο ρυθμό λ. Προφανώς θα έχουμε $\lambda \geq \lambda_0 \geq \lambda_1$ … .



Σχήμα 2.1: Σύστημα Παραγωγής

Η λειτουργία του συστήματος συνδέεται με τρία οικονομικά μεγέθη:

p το κέρδος από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος

h το μοναδιαίο κόστος αποθέματος, που είναι το κόστος διατήρησης αποθέματος μιας μονάδας τελικού προϊόντος ή πρώτης ύλης για μια χρονική μονάδα

b το μοναδιαίο κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης, που είναι το κόστος καθυστέρησης της ικανοποίησης μιας εκκρεμούσας παραγγελίας στη μονάδα του χρόνου.

Το κόστος αποθέματος h περιλαμβάνει δύο συνιστώσες κόστους. Η πρώτη είναι το χρηματοοικονομικό κόστος, που προκύπτει από τη δέσμευση κεφαλαίου για την αγορά πρώτων υλών. Η δεύτερη περιλαμβάνει όλα τα είδη κόστους που σχετίζονται με την φυσική διαδικασία συντήρησης αποθέματος, όπως το κόστος των αποθηκευτικών χώρων, το κόστος λειτουργίας ενός συστήματος διαχείρισης υλικών, το κόστος κατάψυξης για κάποια είδη προϊόντων κλπ. Το κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης b μπορεί να περιλαμβάνει επίσης δύο είδη κόστους. Το ένα κόστος είναι χρηματοοικονομικό και συνίσταται στην απώλεια της ευκαιρίας επένδυσης του κέρδους από την πώληση ενός προϊόντος για όσο χρονικό διάστημα μία παραγγελία παραμένει ανικανοποίητη σε σχέση με την επένδυση του κέρδους αν η πώληση γινόταν άμεσα. Η δεύτερη συνιστώσα απαρτίζεται από το τυχόν κόστος δυσφήμησης και τις ρήτρες καθυστέρησης, για την περίπτωση που ο πελάτης δεν ικανοποιηθεί αμέσως αλλά υποχρεωθεί να περιμένει.

2.2 Περιγραφή της πολιτικής BSBB

Για τον έλεγχο του αποθέματος και των εκκρεμών παραγγελιών χρησιμοποιείται μια πολιτική BSBB ώστε να αποφευχθούν υπερβολικά αποθέματα αλλά και εκκρεμείς παραγγελίες. Η παραγωγή διακόπτεται όταν η αποθήκη έτοιμων προϊόντων έχει s κομμάτια, το οποίο είναι το *απόθεμα βάσης*, ενώ μια νέα παραγγελία απορρίπτεται όταν εκκρεμούν ήδη c παραγγελίες, αυτό είναι το *έλλειμμα βάσης*.

Η πολιτική BSBB συνοψίζεται στους παρακάτω κανόνες:

Κανόνας 1: Στο χρόνο μηδέν, το σύστημα έχει s πρώτες ύλες, κανένα έτοιμο προϊόν και καμία εκκρεμούσα παραγγελία. Άρα η στάθμη της αποθήκης του συστήματος, η οποία προσμετρά έτοιμα προϊόντα και πρώτες ύλες για την παραγωγή αυτών, είναι σταθερή και ίση με s, όπου το s είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός τον οποίο θα αναφέρουμε ως απόθεμα βάσης. Το *επίπεδο αποθέματος* του συστήματος ορίζεται ως ο συνολικός αριθμός κομματιών στο σύστημα μείον το αριθμό των ανικανοποίητων παραγγελιών.

Κανόνας 2: Όταν ένας πελάτης ζητά ένα προϊόν, η αντίστοιχη παραγγελία γίνεται δεκτή και ικανοποιείται στιγμιαία αν υπάρχουν έτοιμα προϊόντα, αλλιώς η παραγγελία γίνεται αποδεκτή ή απορρίπτεται ανάλογα με τον αριθμό των παραγγελιών που ήδη εκκρεμούν. Αν εκκρεμούν c παραγγελίες, τότε η νέα παραγγελία απορρίπτεται, αλλιώς γίνεται δεκτή. Το c είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός τον οποίο θα αναφέρουμε ως έλλειμμα βάσης. Όταν μια παραγγελία γίνεται αποδεκτή, τότε μια πρώτη ύλη για ένα προϊόν εισέρχεται στο σύστημα και αυξάνει τον αριθμό κομματιών στο σύστημα κατά ένα, άρα το επίπεδο αποθέματος του συστήματος παραμένει αναλλοίωτο και ισούται με s.

Κανόνας 3: Μία πώληση πραγματοποιείται στιγμιαία όποτε υπάρχει ένα έτοιμο προϊόν στο σύστημα και μία εκκρεμούσα παραγγελία. Άρα ο αριθμός των προϊόντων και των εκκρεμών παραγγελιών δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα θετικός. Το επίπεδο αποθέματος του συστήματος δεν επηρεάζεται ούτε από τις πωλήσεις και παραμένει s.

Το πρόβλημα προς επίλυση είναι ο καθορισμός των βέλτιστων s και c που μεγιστοποιούν το μέσο ρυθμό κέρδους του συστήματος. Αυτή η ποσότητα ισούται με το μέσο ρυθμό κέρδους από τις πωλήσεις μείον το αναμενόμενο κόστος αποθέματος και μη ικανοποιημένης ζήτησης και δίνεται από την συνάρτηση:

$$J(s, c) = p\mathrm{TH}_{s,c} - hH_{s,c} - bB_{s,c},$$

όπου $\mathrm{TH}_{s,c}$ ορίζεται ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος, $H_{s,c}$ το μέσο απόθεμα του συστήματος (έτοιμα προϊόντα και πρώτες ύλες) και $B_{s,c}$ το μέσο πλήθος ανικανοποίητων παραγγελιών. Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε αναλυτικές εκφράσεις αυτών των ποσοτήτων χρησιμοποιώντας τη θεωρία ουρών αναμονής. Για τον λόγο αυτό αναλύεται ένα ισοδύναμο αναμονητικό σύστημα με αυτό του συστήματος παραγωγής που εξετάζουμε.

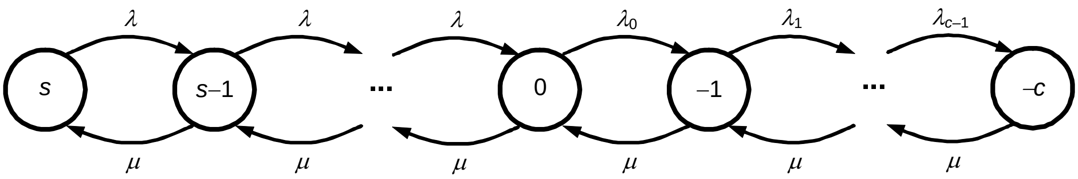
2.3 Το αναμονητικό σύστημα

Η κατάσταση του αναμονητικού συστήματος περιγράφεται από έναν ακέραιο αριθμό n, τέτοιον ώστε $-c \le n \le s$. Αν $n \ge 0$, στο αναμονητικό σύστημα, τότε στο σύστημα παραγωγής δεν υπάρχουν εκκρεμείς παραγγελίες, ο αριθμός των έτοιμων προϊόντων είναι n και υπάρχουν πρώτες ύλες για την παραγωγή $s - n$ προϊόντων. Όταν $n < 0$, στο σύστημα παραγωγής δεν υπάρχουν έτοιμα προϊόντα, εκκρεμούν $-n$ παραγγελίες και έχουν εισαχθεί πρώτες ύλες για την κατασκευή $s - n$ προϊόντων. Συγκεκριμένα, όταν $n = s$, το αναμονητικό σύστημα είναι άδειο και ο εξυπηρετών αδρανής. Αντίστοιχα στο αρχικό σύστημα, η αποθήκη έτοιμων προϊόντων είναι πλήρης και η παραγωγική μονάδα αδρανής. Όταν $n = -c$, το αναμονητικό σύστημα είναι γεμάτο και όλες οι νέες αφίξεις απορρίπτονται. Κατ' αντιστοιχία στο σύστημα παραγωγής δεν υπάρχουν έτοιμα προϊόντα, εκκρεμούν c ανικανοποίητες παραγγελίες και μπροστά από τη μηχανή υπάρχουν πρώτες ύλες για την παραγωγή $s + c$ προϊόντων. Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζονται η στάθμη του αποθέματος αλλά και των εκκρεμών παραγγελιών σε αντιστοιχία με τις καταστάσεις n του αναμονητικού συστήματος. Οι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρετήσεων στο αναμονητικό σύστημα ταυτίζονται αντίστοιχα με τους χρόνους αφίξεων παραγγελιών και παραγωγής στο σύστημα παραγωγής.

Πίνακας 2.1: Αντιστοιχία καταστάσεων αναμονητικού συστήματος και μεταβλητών του συστήματος παραγωγής

Καταστάσεις αναμονητικού συστήματος, n	s	$s-1$	…	0	-1	…	$-c$
Αριθμός πρώτων υλών	0	1	…	s	$s+1$	…	$s+c$
Αριθμός έτοιμων προϊόντων	s	$s-1$	…	0	0	…	0
Αριθμός εκκρεμούντων παραγγελιών	0	0	…	0	1	…	c

Εφόσον οι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρετήσεων είναι εκθετικοί, το αναμονητικό σύστημα είναι τύπου M/M/1/k, με χωρητικότητα $k = s + c$. Η εξέλιξη του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από μια αλυσίδα Markov, της οποίας οι καταστάσεις παρουσιάζονται στο Σχ. 2.2. Στη συνέχεια αναλύουμε το αναμονητικό σύστημα στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας.



Σχήμα 2.2: Αλυσίδα Markov του συστήματος

Έστω P_n η πιθανότητα ώστε στη μόνιμη κατάσταση, το αναμονητικό σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση n, $n = s, s-1, \ldots, -c+1, -c$. Στη θεωρία ουρών αναμονής, οι πιθανότητες αυτές υπολογίζονται με την χρήση των εξισώσεων Chapman-Kolmogorov οι οποίες έχουν την μορφή:

$$P_n \times (\text{ρυθμός εξόδου από την κατάσταση } n) = \sum_{\substack{\text{Όλες οι καταστάσεις} \\ m \neq n}} P_m \times (\text{μετάβαση από } m \text{ σε } n),$$

Για παράδειγμα για την κατάσταση 0, έχουμε την εξίσωση $P_0 (\lambda_0 + \mu) = P_1 \lambda + P_{-1} \mu$. Οι υπόλοιπες εξισώσεις προκύπτουν παρόμοια. Από αυτές, με λίγη άλγεβρα ευρίσκουμε:

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{s-n} P_s & n \geq 0 \\ \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{s} \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu^n} P_s & n < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Συμβολίζουμε ρ το πηλίκο του μέσου ρυθμού αφίξεων προς το μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης, άρα $\rho = \lambda \ / \ \mu$ και κατ' επέκταση $\rho_n = \lambda_n \ / \ \mu$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης, $P_s + P_{s-1} + \ldots + P_{-c} = 1$ και αντικαθιστώντας τις Εξ. (2.1) των πιθανοτήτων, προκύπτει η πιθανότητα της κατάστασης s:

$P_s = 1 \ / \ G_{s,c}$

όπου

$$G_{s,c} = \sum_{i=0}^{s} \rho^i + \rho^s \rho_0 (1 + \rho_1 + \rho_1 \rho_2 + \ldots + \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{c-1}) \tag{2.2}$$

2.4 Αναλυτικές εκφράσεις των μέτρων απόδοσης του συστήματος

Από τον Πίνακα 2.1 μπορούμε να διακρίνουμε ότι το μέσο απόθεμα του συστήματος (έτοιμα προϊόντα και πρώτες ύλες) βρίσκεται από την σχέση $H_{s,c} = sP_s + sP_{s-1} + \ldots + sP_0 + (s + 1)P_{-1} + \ldots + (s + c)P_{-c}$, ενώ ο μέσος αριθμός εκκρεμών παραγγελιών είναι $B_{s,c} = 1P_{-1} + 2P_{-2} + \ldots + cP_{-c}$. Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2.1) για τις πιθανότητες και με λίγη άλγεβρα καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις για αυτές τις ποσότητες

$$H_{s,c} = s + \frac{D_{s,c}}{G_{s,c}} \tag{2.3}$$

και

$$B_{s,c} = \frac{D_{s,c}}{G_{s,c}}, \tag{2.4}$$

όπου

$$D_{s,c} = \rho^s \rho_0 (1 + 2\rho_1 + 3\rho_1\rho_2 + \ldots + c\rho_1\rho_2 \ldots \rho_{c-1}) . \tag{2.5}$$

Το σύστημα παραγωγής παράγει με μέσο ρυθμό μ συνεχώς και σταματά την παραγωγή του όταν η κατάσταση γίνει s. Άρα ο μέσος ρυθμός παραγωγής του συστήματος μπορεί να βρεθεί από την σχέση

$$\mathrm{TH}_{s,c} = \mu(1 - P_s) = \mu \frac{G_{s,c} - 1}{G_{s,c}} . \tag{2.6}$$

Από τις Εξ. (2.3), (2.4), (2.5) και (2.6), ο ρυθμός καθαρού κέρδους του συστήματος γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} J(s, c) &= p\mathrm{TH}_{s,c} - hH_{s,c} - bB_{s,c} \\ &= p\mu(1 - P_s) - hs - (h + b)\frac{D_{s,c}}{G_{s,c}} \\ &= p\mu \frac{G_{s,c} - 1}{G_{s,c}} - hs - (h + b)\frac{D_{s,c}}{G_{s,c}} . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Η παραπάνω εξίσωση, εκφράζει το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος συναρτήσει του αποθέματος βάσης και του ελλείμματος βάσης. Η εξίσωση αυτή θα είναι και η αντικειμενική συνάρτηση προς μεγιστοποίηση του συστήματος.

3 Βελτιστοποίηση

3.1 Εισαγωγή

Στην προηγούμενη ενότητα, με την χρήση των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης, εκφράσαμε μαθηματικά το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος ως συνάρτηση του αποθέματος βάσης s και του ελλείμματος βάσης c. Έχοντας πλέον ακριβείς εκφράσεις των μέτρων απόδοσης του συστήματος και της συνάρτησης του μέσου ρυθμού κέρδους, θα προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος που δεν είναι άλλη από την μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $J(s, c)$. Το πρόβλημα αυτό είναι δύο διαστάσεων και επομένως θα το επιλύσουμε σειριακά. Πρώτα θα μεγιστοποιήσουμε την $J(s, c)$ συναρτήσει του c κρατώντας σταθερό το s, και στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε μια εξαντλητική αναζήτηση για το βέλτιστο s. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε δύο θεωρήματα τα οποία εξασφαλίζουν την κοιλότητα της $J(s, c)$ ως προς c και παρέχουν σημαντικές ιδιότητες που έχουν τα βέλτιστα c για διαδοχικές τιμές του s. Τέλος θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο βασισμένο στα δύο αυτά θεωρήματα, ο οποίος εντοπίζει τα βέλτιστα c και s.

3.2 Μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς το έλλειμμα βάσης

Αναφέραμε προηγουμένως ότι το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους είναι δύο διαστάσεων, επομένως θα το επιλύσουμε σειριακά. Πρώτα θα μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $J(s, c)$ ως προς το c κρατώντας το s σταθερό.

Για κάποια σταθερή τιμή του s αναζητούμε την τιμή c_s του c για την οποία ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι ακόλουθες ανισότητες

$$J(s, c_s) > J(s, c_s + 1) \tag{3.1}$$

$$J(s, c_s) \geq J(s, c_s - 1) \tag{3.2}$$

Το παρακάτω θεώρημα εξασφαλίζει ότι υπάρχει αυτό το c_s και ότι είναι μοναδικό

Θεώρημα 3.1: (α) Για κάθε σταθερό s, η συνάρτηση $J(s, c)$ μεγιστοποιείται στο σημείο $c_s < \infty$, το οποίο είναι η μοναδική λύση της ανισότητας

$$A_{s,c} \le \frac{p\mu}{h+b} < A_{s,c+1}, \tag{3.3}$$

όπου

$$A_{s,c} = c\sum_{i=0}^{s}\rho^{i} + \rho^{s}\rho_0\left[(c-1)+(c-2)\rho_1 + (c-3)\rho_1\rho_2 + \ldots + \rho_1\rho_2\ldots\rho_{c-2}\right]. \tag{3.4}$$

(β) Επίσης, η συνάρτηση $J(s, c)$ είναι αύξουσα ως προς c στο διάστημα $[0, c_s)$ και φθίνουσα στο (c_s,∞).

Απόδειξη

(α) Το βέλτιστο σημείο c_s πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις ανισότητες

$$J(s, c) > J(s, c + 1) \tag{3.5}$$

$$J(s, c) \ge J(s, c - 1) \tag{3.6}$$

Από την ανισότητα (3.5) και χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.6), καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$p\mu\frac{1}{G_{s,c}} + (h+b)\frac{D_{s,c}}{G_{s,c}} < p\mu\frac{1}{G_{s,c+1}} + (h+b)\frac{D_{s,c+1}}{G_{s,c+1}}$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (2.2), (2.5) και διαγράφοντας τους κοινούς όρους, η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$$\frac{p\mu}{h+b} < (c+1)\sum_{i=0}^{s}\rho^{i} + \rho^{s}\rho_0\left[c+(c-1)\rho_1 + (c-2)\rho_1\rho_2 + \ldots + \rho_1\rho_2\ldots\rho_{c-1}\right]$$

η οποία με την βοήθεια της Εξ. (3.4) μετατρέπεται στην

$$\frac{p\mu}{h+b} < A_{s,c+1}. \tag{3.7}$$

Δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο, η ανισότητα (3.6) δίνει

$$\frac{p\mu}{h+b} \ge A_{s,c}. \tag{3.8}$$

Επομένως, από τις (3.7), (3.8), το βέλτιστο σημείο c_s πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα (3.3). Εφόσον η Εξ. (3.4) είναι αύξουσα ως προς c, συνεπάγεται ότι η (3.3) έχει μοναδική ακέραια λύση, έστω την c_s. Επίσης, από την Εξ. (3.4) βλέπουμε ότι $\lim_{c\to\infty} A_{s,c} = \infty > p\mu/(h+b)$ και επομένως μια τιμή $c_s = \infty$ δεν ικανοποιεί την ανισότητα (3.3). Άρα το c_s θα είναι πεπερασμένο.

(β) Έστω ότι για σταθερό απόθεμα βάσης s, βρήκαμε το βέλτιστο έλλειμμα βάσης c_s το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες (3.1) και (3.2), που είναι ισοδύναμες με τις (3.7) και (3.8) αντίστοιχα. Τότε

$$
\begin{aligned}
A_{s,c_s-1} &= (c_s-1)\sum_{i=0}^{s}\rho^i + \rho^s\rho_0\left[(c_s-2)+(c_s-3)\rho_1+(c_s-4)\rho_1\rho_2+\ldots+\rho_1\rho_2\ldots\rho_{c_s-3}\right] \\
&= c_s\sum_{i=0}^{s}\rho^i + \rho^s\rho_0\left[(c_s-1)+(c_s-2)\rho_1+(c_s-3)\rho_1\rho_2+\ldots+\rho_1\rho_2\ldots\rho_{c_s-2}\right] \\
&\quad -\left[\sum_{i=0}^{s}\rho^i + \rho^s\rho_0\left[1+\rho_1+\rho_1\rho_2+\ldots+\rho_1\rho_2\ldots\rho_{c_s-2}\right]\right] \\
&= A_{s,c_s} - G_{s,c_s-1} \\
&< A_{s,c_s}
\end{aligned}
$$

Επομένως από την (3.8) θα έχουμε

$$p\mu/(h+b) \geq A_{s,c_s} > A_{s,c_s-1} \tag{3.9}$$

Έχουμε αποδείξει ότι η ανισότητα (3.8) ισοδυναμεί με την (3.6). Συνεπώς η (3.9) συνεπάγεται ότι $J(s, c_s-1) \geq J(s, c_s-2)$. Παρόμοια και με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι $J(s, c_s - k) \geq J(s, c_s - k - 1)$ για κάθε $k \geq 1$. Με ανάλογο τρόπο από την ισοδυναμία των (3.7) και (3.5) αποδεικνύεται ότι $J(s, c_s + k) \geq J(s, c_s + k + 1)$ για κάθε $k \geq 1$. Άρα η συνάρτηση $J(s, c)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, c_s)$ και φθίνουσα στο (c_s,∞).

Το επόμενο θεώρημα, παρέχει μια σημαντική ιδιότητα που έχουν τα βέλτιστα c_s για διαδοχικές τιμές του s. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη στην προσπάθεια εντοπισμού του βέλτιστου αποθέματος βάσης s^* για το σύστημα παραγωγής.

Θεώρημα 3.2: Αν το c_s είναι η τιμή του c που μεγιστοποιεί την $J(s, c)$ για σταθερό s, τότε η βέλτιστη λύση c_{s+1} της συνάρτησης $J(s+1, c)$ θα ικανοποιεί την ανισότητα $c_{s+1} \leq c_s$.

Απόδειξη

Από το μέρος (α) του Θεωρήματος 3.1, έχουμε ότι το βέλτιστο c_s για σταθερό s ικανοποιεί την ανισότητα $J(s, c_s) > J(s, c_s + 1)$, η οποία είναι ισοδύναμη με την $p\mu/(h + b) < A_{s,cs+1}$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
&A_{s+1,c_s+1} - A_{s,c_s+1} \\
&\quad = (c_s+1)\sum_{i=0}^{s+1}\rho^i + \rho^{s+1}\rho_0\left[c_s + (c_s-1)\rho_1 + (c_s-2)\rho_1\rho_2 + \ldots + \rho_1\rho_2\ldots\rho_{c_s-1}\right] \\
&\qquad - (c_s+1)\sum_{i=0}^{s}\rho^i - \rho^{s}\rho_0\left[c_s + (c_s-1)\rho_1 + (c_s-2)\rho_1\rho_2 + \ldots + \rho_1\rho_2\ldots\rho_{c_s-1}\right] \\
&= (c_s+1)\rho^{s+1} + \rho^{s}\rho_0\left[c_s + (c_s-1)\rho_1 + (c_s-2)\rho_1\rho_2 + \ldots + \rho_1\rho_2\ldots\rho_{c_s-1}\right](\rho-1)
\end{aligned}
$$

Όταν $\rho \geq 1$ η παραπάνω ποσότητα είναι θετική. Επίσης στην περίπτωση $\rho < 1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&A_{s+1,c_s+1} - A_{s,c_s+1} = \\
&= (c_s+1)\rho^{s+1} - (1-\rho)\rho^{s}\rho_0\left[c_s + (c_s-1)\rho_1 + (c_s-2)\rho_1\rho_2 + \ldots + \rho_1\rho_2\ldots\rho_{c_s-1}\right] \\
&\geq (c_s+1)\rho^{s+1} - (1-\rho)\rho^{s+1}\left[c_s + (c_s-1)\rho + (c_s-2)\rho^2 + \ldots + \rho^{c_s-1}\right] \\
&= (c_s+1)\rho^{s+1} - (1-\rho)\rho^{s+1}\left[c_s + (c_s-1)\rho + (c_s-2)\rho^2 + \ldots + \rho^{c_s-1}\right] \\
&= (c_s+1)\rho^{s+1} - (1-\rho)\rho^{s+1}\left\{c_s(1+\rho+\ldots\rho^{c_s-1}) - \left[0 + \rho + \ldots + (c_s-1)\rho^{c_s-1}\right]\right\} \\
&= (c_s+1)\rho^{s+1} - (1-\rho)\rho^{s+1}\left\{c_s\frac{1-\rho^{c_s}}{1-\rho} - \rho\left[1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots + (c_s-1)\rho^{c_s-2}\right]\right\} \\
&= (c_s+1)\rho^{s+1} - (1-\rho)\rho^{s+1}\left\{c_s\frac{1-\rho^{c_s}}{1-\rho} - \rho\frac{d\left[\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{c_s-1}\right]}{d\rho}\right\} \\
&= (c_s+1)\rho^{s+1} - (1-\rho)\rho^{s+1}\left\{c_s\frac{1-\rho^{c_s}}{1-\rho} - \rho\frac{d\left[\frac{1-\rho^{c_s}}{1-\rho} - 1\right]}{d\rho}\right\} \\
&= \rho^{s+1}\left[1 + c_s\rho^{c_s} + \frac{\rho}{1-\rho}\left[(c_s-1)\rho^{c_s} - c\rho^{c_s-1} + 1\right]\right] = \rho^{s+1}\left[1 + c_s\rho^{c_s} + \frac{\rho}{1-\rho}f(\rho)\right]
\end{aligned}
$$

όπου $f(\rho) = (c_s - 1)\rho^{c_s} - c_s\rho^{c_s-1} + 1$. Με παραγώγηση συναρτήσει του ρ, αποδεικνύεται ότι η $f(\rho)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του ρ, για $\rho < 1$. Εφόσον $f(1) = 0$, συνεπάγεται ότι $f(\rho) \geq 0$ και άρα $A_{s+1,c_s+1} \geq A_{s,\, c_s+1}$. Επομένως,

$$A_{s+1,c_s+1} \geq A_{s,c_s+1} \tag{3.10}$$

για κάθε ρ. Από τις ανισότητες (3.10) και (3.7) έχουμε ότι $p\mu/(h+b) < A_{s+1,c_s+1}$, η οποία ισοδυναμεί με την σχέση

$$J(s+1, c_s) > J(s+1, c_s+1). \tag{3.11}$$

Τέλος, το μέρος (β) του Θεωρήματος 3.1 λεει ότι η $J(s+1, c)$ είναι φθίνουσα αν και μόνο αν $c > c_{s+1}$,άρα από την (3.11) θα πρέπει $c_s + 1 > c_{s+1}$ συνεπώς έχουμε $c_{s+1} \leq c_s$.

3.3 Αλγόριθμος βελτιστοποίησης

Τα Θεωρήματα 3.1 και 3.2 παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για τις ιδιότητες της βέλτιστης λύσης στο σύστημα παραγωγής υπό εξέταση. Ο παρακάτω αλγόριθμος, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων αυτών, εντοπίζει την βέλτιστη λύση (s^*, c^*) πραγματοποιώντας αρχικά μια εξαντλητική αναζήτηση για το βέλτιστο απόθεμα βάσης και στη συνέχεια μια τοπική αναζήτηση για το βέλτιστο έλλειμμα βάσης.

Βήμα 1. Καθόρισε ένα άνω όριο s^{-} για την αναζήτηση του s^*. Θέσε $J^* = 0$, $s^* = 0$, και $c^* = 0$, ως τις τρέχουσες βέλτιστές τιμές.

Βήμα 2. Θέσε $s = 0$. Καθόρισε το βέλτιστο έλλειμμα βάσης $c_s = c_0$. Από το Θεώρημα 3.1, θα γίνει μια εξαντλητική αναζήτηση στο σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots\}$, οπότε Για $c = 0, 1, 2, \ldots$

Υπολόγισε το $J(0, c)$

Αν $J(0, c) < J(0, c-1)$, τότε θέσε $c_0 = c - 1$ και πήγαινε στο Βήμα 3,

αλλιώς αύξησε το c κατά 1 και συνέχισε.

Βήμα 3. Ενημέρωσε τις βέλτιστες παραμέτρους που έχουν βρεθεί μέχρι τώρα.

Αν $J(s, c_s) > J^*$, τότε θέσε $J^* = J(s, c_s)$, $s^* = s$, και $c^* = c_s$.

Βήμα 4. Αν $s < s^{-}$, τότε θέσε $s = s + 1$, αλλιώς τέλος.

Βήμα 5. Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 3.2, εντόπισε το βέλτιστο έλλειμμα βάσης πραγματοποιώντας μια τοπική αναζήτηση στο σύνολο $\{c_{s-1}, c_{s-1} - 1, \ldots, 0\}$, όπου c_{s-1} είναι το βέλτιστο έλλειμμα βάσης του προηγουμένου αποθέματος βάσης $s - 1$. Οπότε,

Για $c = c_{s-1}, c_{s-1} - 1, \ldots, 0$

Υπολόγισε το $J(s, c)$

Αν $J(s, c) < J(s, c + 1)$, τότε θέσε $c_s = c + 1$ και πήγαινε στο Βήμα 3,

αλλιώς μείωσε το c κατά 1 και συνέχισε

Όπως θα δούμε στην Παράγραφο 4.2, σε περίπτωση που μπορέσουμε να αποδείξουμε την κοιλότητα της συνάρτησης $J(s, c)$, τότε ο παραπάνω αλγόριθμος θα μπορούσε να τροποποιηθεί και, με λιγότερο υπολογιστικό φόρτο, να εντοπίσει την βέλτιστη λύση (s^*, c^*) πραγματοποιώντας μια εξαντλητική αναζήτηση για το βέλτιστο απόθεμα βάσης η οποία δεν θα σταματούσε στο άνω όριο s^{-} για την αναζήτηση του s^* αλλά σε εκείνη την τιμή s για την οποία θα ισχύει η σχέση $J(s, c_s) > J(s+1, c_{s+1})$.

Στην επόμενη ενότητα, επιβεβαιώνεται με την βοήθεια αριθμητικών παραδειγμάτων ότι η προτεινόμενη πολιτική BSBB επιτυγχάνει υψηλότερο κέρδος από άλλες ευρέως χρησιμοποιούμενες πολιτικές.

4 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Σε αυτήν την ενότητα συγκρίνουμε με αριθμητικά παραδείγματα την προτεινόμενη πολιτική BSBB για τον έλεγχο του αποθέματος και των εκκρεμών παραγγελιών σε ένα σύστημα με εκθετικά κατανεμημένους χρόνους μεταξύ διαδοχικών παραγγελιών και εκθετικές διάρκειες παραγωγής. Η σύγκριση γίνεται με άλλες συχνά εφαρμοζόμενες πολιτικές σε αντίστοιχες περιπτώσεις και για διάφορες παραμέτρους που ορίζουν τέτοια συστήματα. Τα αριθμητικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την ανωτερότητα και την ευελιξία της BSBB. Επιπρόσθετα, μελετάτε η κοιλότητα του ρυθμού καθαρού κέρδους του συστήματος συναρτήσει του αποθέματος βάσης.

4.1 Σύγκριση της πολιτικής BSBB με άλλες πολιτικές ελέγχου

Η προτεινόμενη πολιτική BSBB συγκρίνεται με τις ακόλουθες πολιτικές:

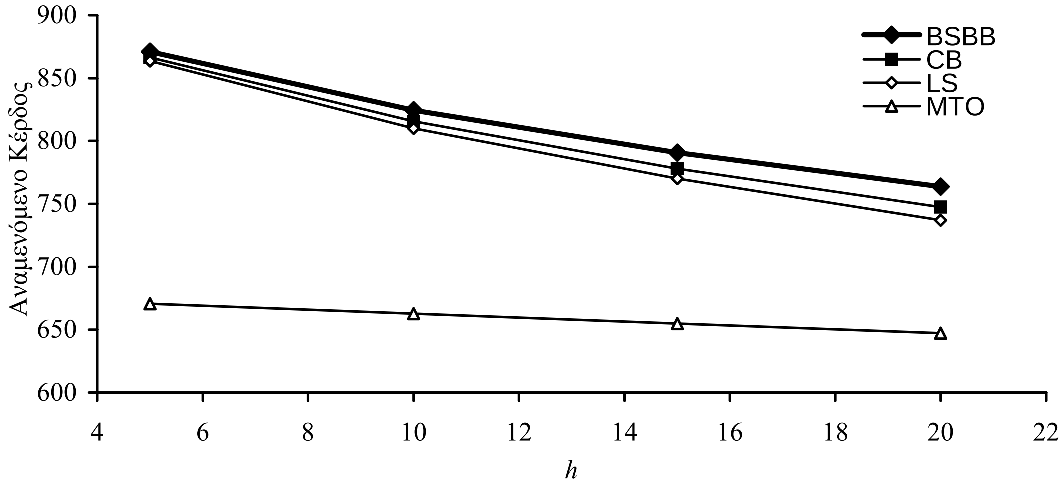
CB: Διατήρηση αποθέματος βάσης και πλήρης αποδοχή παραγγελιών που γίνονται σε περιόδους μηδενικού αποθέματος προϊόντων

LS: Διατήρηση αποθέματος βάσης και πλήρης απόρριψη παραγγελιών που γίνονται σε περιόδους μηδενικού αποθέματος προϊόντων

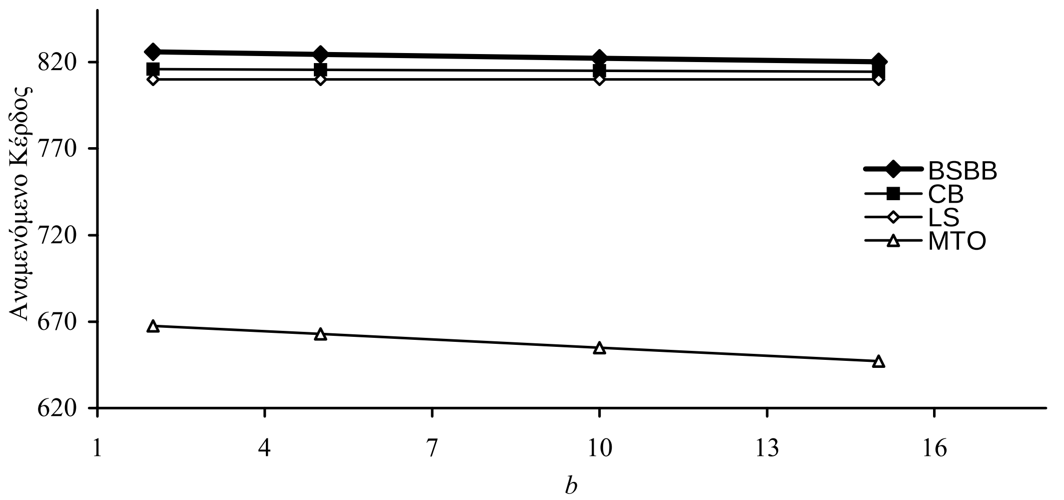
MTO: Λειτουργία χωρίς απόθεμα, αποδοχή παραγγελιών μέχρι κάποιο όριο (έλλειμμα βάσης)

Αυτές οι πολιτικές αποδεικνύεται ότι είναι ειδικές περιπτώσεις της πολιτικής BSBB. Πράγματι, έστω $(s, c)_{\mathrm{BSBB}}$ μια πολιτική μερικής αποδοχής παραγγελιών BSBB με απόθεμα βάσης s και έλλειμμα βάσης c. Τότε η πολιτική CB είναι ισοδύναμη με την πολιτική $(s, \infty)_{\mathrm{BSBB}}$, η LS είναι $(s, 0)_{\mathrm{BSBB}}$, και η πολιτική MTO είναι $(0, c)_{\mathrm{BSBB}}$.

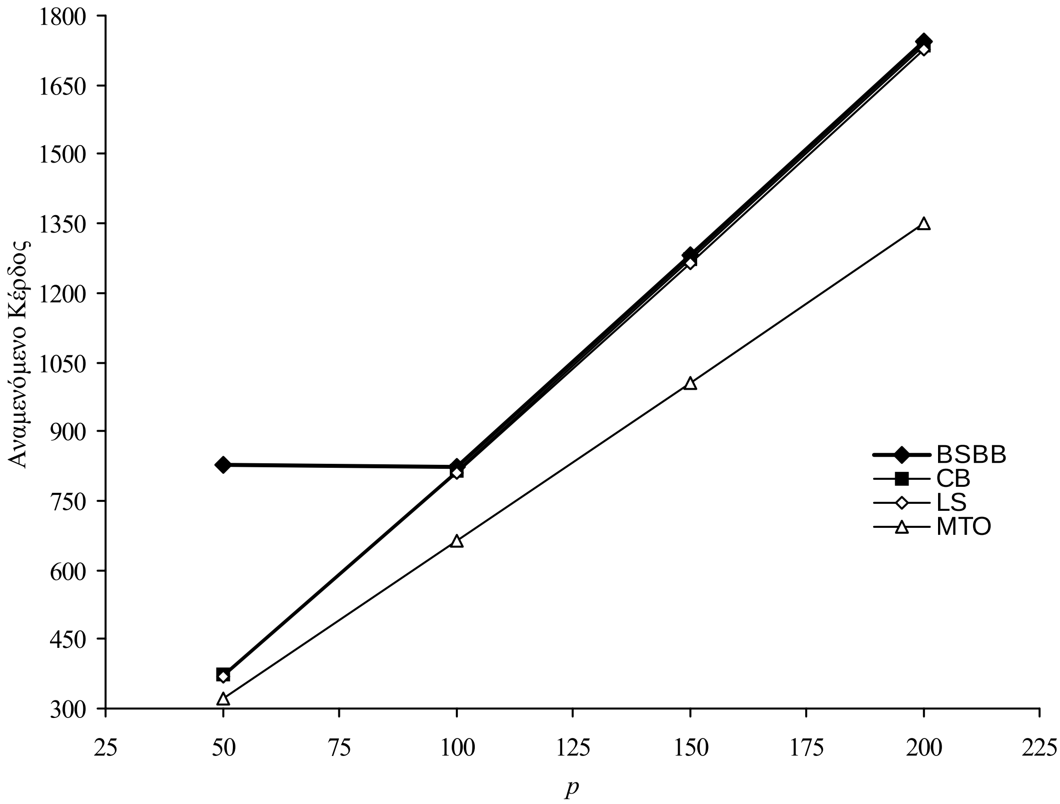
Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής με αποθαρρυνόμενες αφίξεις σε περιόδους με μηδενικό απόθεμα έτοιμων προϊόντων και πιθανότητες τοποθέτησης της παραγγελίας που ακολουθούν την αρμονική πρόοδο $q_m = [1 + 0.2(m + 1)]^{-1}$, όπου m είναι ο αριθμός των εκκρεμών παραγγελιών. Για παράδειγμα, σε περιόδους όπου δεν υπάρχει έτοιμο προϊόν, ένας πελάτης θα θέσει την παραγγελία του με πιθανότητα $1/1.2 = 0.833$, αν δεν εκκρεμούν άλλες παραγγελίες, ή $1/1.4 = 0.714$, αν εκκρεμεί μόνο μία, κ.ο.κ. Οι βασικές παράμετροι του συστήματος είναι $\lambda = 10$, $\mu = 10$, $h = 10$, $b = 5$, και $p = 100$. Εξετάζεται η επίδραση της μεταβολής των εξής παραμέτρων στο αναμενόμενο κέρδος για όλες τις υπό εξέταση πολιτικές: του κόστους αποθέματος h, του κέρδους πώλησης p, του κόστους ανικανοποίητης ζήτησης b και του ρυθμού ζήτησης λ. Στα Σχ. 4.1 - 4.3 φαίνονται τα αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές του h, b και p αντίστοιχα.



Σχήμα 4.1 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς h



Σχήμα 4.2 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς b



Σχήμα 4.3 . Αναμενόμενο κέρδος συστήματος ως προς *p*

Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται οι βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος καθώς και το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος κάθε πολιτικής για διάφορες τιμές του ρυθμού ζήτησης λ.

Πίνακας 4.1 : Βέλτιστες παράμετροι ελέγχου του συστήματος και αναμενόμενο κέρδος για διαφορετικούς ρυθμούς λ

	Ρυθμός ζήτησης											
	$\lambda = 6$			$\lambda = 10$			$\lambda = 20$			$\lambda = 50$		
Πολιτικές	s	c	J	s	c	J	s	c	J	s	c	J
BSBB	4	21	544.824	7	7	824.516	4	1	935.723	3	0	963.59
LS	5	0	530.424	9	0	810	5	0	934.127	3	0	963.59
CB	5	∞	535.213	8	∞	815.558	4	∞	929.647	1	∞	923.161
MTO	0	21	443.326	0	22	662.868	0	7	890.298	0	3	945.882

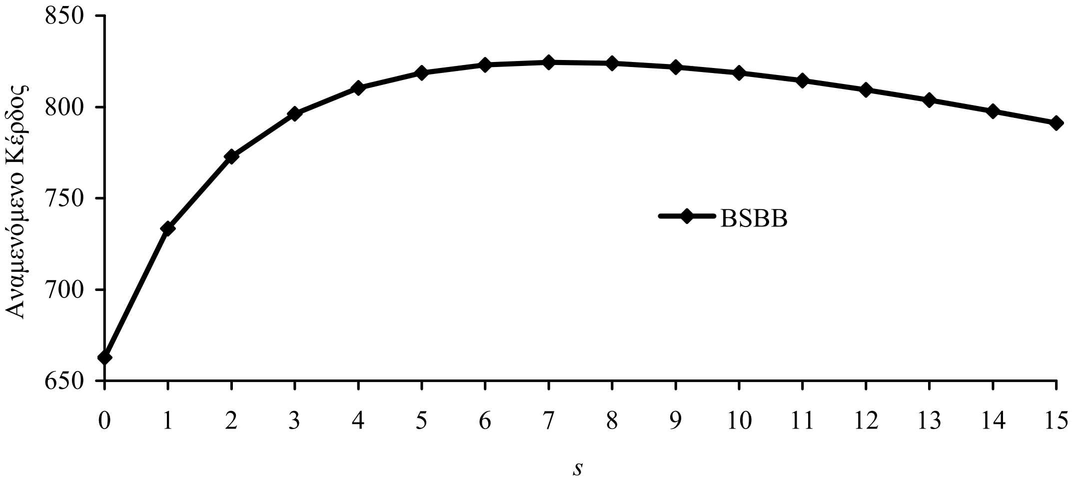
Από τα Σχ. 4.1 – 4.3 και τον Πίνακα 4.1, φαίνεται ότι η πολιτική BSBB επιτυγχάνει το υψηλότερο αναμενόμενο κέρδος σε όλες τις περιπτώσεις και άρα αποδεικνύεται και πιο προσαρμοστική στις παραμέτρους του προβλήματος. Παρατηρούμε επίσης ότι για μικρές τιμές του κόστους αποθέματος, οι πολιτικές CB (πλήρης αποδοχής) και LS (πλήρης απόρριψης) δίνουν αποτελέσματα πολύ κοντά στην BSBB. Αυτή είναι μια λογική παρατήρηση καθώς το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών είναι πολύ μικρό και οποιαδήποτε προσπάθεια για μείωσή του δεν συμβάλει σημαντικά στην αύξηση του κέρδους. Σημαντική παρατήρηση είναι ότι η πολιτική MTO (μερική αποδοχή χωρίς διατήρηση αποθέματος) στις περιπτώσεις όπου η ζήτηση είναι χαμηλή ($\lambda < \mu$) δίνει πολύ φτωχά αποτελέσματα καθώς θα υπάρχουν πάντα ανικανοποίητοι πελάτες.

Για τιμές του λ πολύ μεγαλύτερες του μ, το κέρδος που επιτυγχάνει η BSBB είναι ίδιο με το κέρδος της LS. Σε αυτή την περίπτωση οι αφίξεις των πελατών είναι πολύ συχνές με αποτέλεσμα η απώλεια κέρδους λόγω απόρριψης πελατών να είναι αμελητέα σε σχέση με το κόστος εκκρεμών παραγγελιών και συνεπώς το βέλτιστο έλλειμμα βάσης για την BSBB γίνεται 0. Γενικά όσο αυξάνει το μέσο κόστος b εκκρεμών παραγγελιών σε σχέση με το συνολικό αναμενόμενο κέρδος, το αναμενόμενο κέρδος της LS και της CB συγκλίνει με το αναμενόμενο κέρδος της BSBB και όσο το b μειώνεται σε σχέση με το συνολικό κέρδος, η απόδοση της BSBB είναι καλύτερη.

Άλλη μία παρατήρηση είναι ότι σε μικρές τιμές του μοναδιαίου κέρδους πωλήσεων, η προτεινόμενη πολιτική παρουσιάζει πολύ καλύτερη απόδοση από της υπόλοιπες. Αυτό οφείλεται στο ότι με την BSBB, το κέρδος που χάνεται από την μείωση της τιμής πώλησης συνυπολογίζεται στην απόφαση για την οριοθέτηση του αποθέματος βάσης και του ελλείμματος βάσης. Αντίθετα, στις άλλες πολιτικές δε συμβαίνει το ίδιο. Στην CB δεν διασφαλίζουμε την μικρότερη δυνατή απώλεια κέρδους καθώς πάντα θα δεχόμαστε παραγγελίες, στην LS δεν προσπαθούμε να αυξήσουμε τις πωλήσεις και στην MTO απορρίπτουμε πελάτες χωρίς να εξασφαλίσουμε τα κέρδη της από τις πωλήσεις του αποθέματος.

4.2 Μελέτη ιδιοτήτων δευτέρας τάξης της συνάρτησης αναμενόμενου κέρδους ως προς το απόθεμα βάσης

Στην Παράγραφο 3.3 παρουσιάσαμε έναν αλγόριθμο που εντοπίζει την βέλτιστη λύση (s^*, c^*) πραγματοποιώντας μια εξαντλητική αναζήτηση για το βέλτιστο απόθεμα βάσης και μια τοπική αναζήτηση για το βέλτιστο έλλειμμα βάσης. Η εξαντλητική αναζήτηση σταματά σε ένα άνω όριο $\bar{s}$ για το απόθεμα βάσης. Αν γνωρίζαμε ότι η συνάρτηση $J(s, c)$ ήταν κοίλη ή σχεδόν κοίλη ως προς (s, c) από κοινού τότε θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε μια τοπική έρευνα και για το s, η οποία θα σταματούσε στο μικρότερο s που ικανοποιεί την ανισότητα $J(s, c_s) > J(s+1, c_{s+1})$. Το Σχ. 4.4. δείχνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $J(s, c_s)$ για το σύστημα με τις βασικές τιμές παραμέτρων που ορίσθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.



Σχήμα 4.4 .Γραφική παράσταση της συνάρτησης $J(s, c_s)$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $J(s, c)$ είναι κοίλη στο σύνολο $\{ s: s \leq 15 \}$ αλλά για να χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα στον αλγόριθμο πρέπει πρώτα να αποδειχθεί το ίδιο και για κάθε $s > 15$. Αυτό αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

5 Συμπεράσματα – Κατευθύνσεις

Στην εργασία αυτή, εξετάσαμε το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής μίας μηχανής, που παράγουν ένα τύπο προϊόντος. Η πολιτική αυτή ονομάστηκε πολιτική *αποθέματος βάσης – ελλείμματος βάσης* (BSBB, base stock – base backlog). Όταν δεν υπάρχουν παραγγελίες το σύστημα παράγει μέχρι το απόθεμα να φτάσει ένα συγκεκριμένο κατώφλι, το απόθεμα βάσης. Κατ' ένα δυαδικό τρόπο, όταν δεν υπάρχει απόθεμα ετοίμων προϊόντων, οι νέες παραγγελίες αποθαρρύνονται και γίνονται δεκτές εφ' όσον το πλήθος των εκκρεμών παραγγελιών είναι μικρότερο από ένα συγκεκριμένο κατώφλι, το έλλειμμα βάσης, διαφορετικά απορρίπτονται. Το ζητούμενο σε αυτού του είδους τις πολιτικές είναι να εκτιμηθούν οι τιμές των δύο αυτών παραμέτρων που μεγιστοποιούν το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος, το οποίο προκύπτει από τα κέρδη των πωλήσεων μείον το κόστος αποθέματος και το κόστος μη ικανοποιημένης ζήτησης.

Μοντελοποιήσαμε το σύστημα ως ένα αναμονητικό σύστημα τύπου M/M/1/k και βρήκαμε τις ακριβείς μαθηματικές εκφράσεις των μέτρων απόδοσης του συστήματος καθώς και του αναμενόμενου κέρδους. Αποδείξαμε σημαντικές ιδιότητες για τις βέλτιστες τιμές του αποθέματος βάσης και του ελλείμματος βάσης με τη βοήθεια των οποίων υλοποιήσαμε έναν αλγόριθμο για τον εντοπισμό αυτών των βέλτιστων τιμών. Ο αλγόριθμός αυτός μπορεί να γίνει αποδοτικότερος και πιο οικονομικός εφόσον αποδειχθεί η κοιλότητα της συνάρτησης κέρδους ως προς το απόθεμα βάσης. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι ο συνδυασμένος έλεγχος αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών επιτυγχάνει υψηλότερα κέρδη από τρεις διαδεδομένες πολιτικές ελέγχου συστημάτων παραγωγής, με τις οποίες συγκρίθηκε.

Η ιδέα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε συστήματα παραγωγής με πολλές κατηγορίες πελατών, αλλά και σε συστήματα όπου υπάρχει διαφορετικό κόστος αποθήκευσης για τα έτοιμα προϊόντα και τις πρώτες ύλες. Μια ακόμα επέκταση αποτελεί η εξέταση γενικότερων κατανομών για τις αφίξεις παραγγελιών και τις διάρκειες παραγωγής.

Βιβλιογραφία

[1] Akella, R. and Kumar, P.R. (1986) Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**, 116–126.

[2] Lou, S.X.C. and Van Ryzin G., (1989) Optimal control rules for scheduling job shops. *Annals of Operations Research*, **17**, 233–248.

[3] Van Ryzin, G. Lou, S.X.C. and Gershwin, S.B. (1993) Production control for a tandem two-machine system. *IIE Transactions*, **25**, 5–20.

[4] Veach, M.H. and Wein, L.M. (1992) Monotone control of queueing networks. *Queueing Systems*, **12**, 391–408.

[5] Weber, R.R. and Stidham, S. Jr (1987) Optimal control of service rates in networks of queues. *Advances in Applied Probability*, **19**, 202–218.

[6] Buzacott, J.A. and Shanthikumar, J.G. (1992) A general approach for coordinating production in multiple-cell manufacturing systems. *Production and Operations Managent*, **1**, 34–52

[7] Zipkin, P.H. (2000) *Foundations of Inventory Management*, McGraw-Hill, New York, NY.

[8] Stidham, S. Jr (1985) Optimal control of admission to a queueing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**, 705–713.

[9] Stidham, S. Jr and Weber, R.R. (1993) A survey of Markov decision models for control of networks of queues. *Queueing Systems*, **13**, 291–314.

[10] Ιωαννίδης, Ε. (2004) *Συνεργαζόμενες πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής*. Διδακτορική διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά

[11] Caldentey, R.A. (2001) Analyzing the make-to stock queue in the supply chain and e-business settings. Ph.D. dissertation, Sloan School of Management, MIT, Massachusetts.

[12] Kouikoglou, V.S. and Phillis, Y.A. (2002) Design of product specifications and control policies in a single-stage production system. *IIE Transactions*, **34**, 590–600.

[13] Naor, P. (1969), The regulation of queue size by levying tolls, *Econometrica*, **37**, 15–24