ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

MARTINGALES , Ο ΧΩΡΟΣ L_1 ΚΑΙ Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ RADON NIKODYM

Διπλωματική Διατριβή Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΑΚΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

Επιβλέπων : Πετράκης Μίνως , Επίκουρος Καθηγητής

Χανιά
Οκτώβριος 2003

Η εργασία αυτή κατατέθηκε στο Γενικό Τμήμα του Πολυτεχνείου Κρήτης τον Οκτώβριο του 2003 . Επιβλέπων ήταν ο Μ . Πετράκης .

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι : κ . Ι . Γρυσπολάκης , Καθηγητής και οι κ. Δ . Κανδυλάκης , Μ . Πετράκης , Επίκουροι Καθηγητές .

Περιεχόμενα

Περίληψη

Σκοπός αυτής της πτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη των martingales ολοκληρώσιμων κατά Bochner συναρτήσεων . Τα martingales ορίστηκαν πριν από περίπου 30 χρόνια και από τότε αποτελούν όχι μόνο εργαλείο της θεωρίας πιθανοτήτων αλλά χρησιμοποιούνται και για την κατανόηση της δομής των χώρων Banach . Επίσης αναφέρουμε βασικά θεωρήματα σύγκλισης των martingales . Χρησιμοποιώντας αυτά τα θεωρήματα , βλέπουμε την ιδιότητα Radon-Nikodym να μετασχηματίζεται σε μια εσωτερική γεωμετρική ιδιότητα των χώρων Banach . Στη συνέχεια , ορίζουμε το sign-embedding και το semi-embedding στον L_1 , εξετάζοντας πάλι την την RNP σχετικά με τα martingales . Τέλος μελετάμε την ύπαρξη ακραίων σημείων ενός κλειστού και κυρτού συνόλου σε ένα χώρο Banach σε σχέση με την Radon-Nikodym και την Krein-Milman ιδιότητα .

Κεφάλαιο 1

1.1 Εισαγωγή

Ορισμός 1

Έστω ότι ο $(\Omega,\Sigma,\mathrm{P})$ *είναι ένας χώρος πιθανότητας και ο X ένας χώρος Banach με πλήρωση* $(\Omega,\Sigma',\mathrm{P}')$ *. Μία συνάρτηση* $s:\Omega\to\mathrm{X}$ *είναι μία απλή συνάρτηση αν η s μπορεί να γραφεί στη μορφή* $\sum_{i=1}^{n} x_i\chi_{A_i}$ *για διακεκριμένα* $x_i\in X$ *,* $i=1,...,n$ *και για πεπερασμένη διαμέριση* $\{A_i\}_{i=1}\in\Sigma$ *του Ω . Για κάθε* $\mathrm{A}\in\Sigma$ *και για κάθε απλή συνάρτηση s ορίζουμε το Bochner ολοκλήρωμα της s πάνω στο A ως* $\int_A sdP=\int\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{A_i}(A)dP=\sum_{i=1}^{n}x_i\mu\left(A\bigcap A_i\right)$.

Μία συνάρτηση $f:\Omega\to\mathrm{X}$ *ονομάζεται Bochner ολοκληρώσιμη (γράφουμε* $f\in L_X{}^1(\Omega,\Sigma,\mathrm{P})$ *ή* $L_X^1(P)$ *) αν υπάρχει ακολουθία* $\{s_n:n=1,2,...\}$ *απλών συναρτήσεων τέτοια ώστε*

1. $\lim_n s_n(\omega)=f(\omega)$ *σ . π . και*
2. $\lim_n\int_\Omega\left\|f(\omega)-s_n(\omega)\right\|dP'(\omega)=0$

Επίσης θα παραθέσουμε άλλον ένα ισοδύναμο ορισμό για το πότε μία συνάρτηση ονομάζεται Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση .

Ορισμός 2

1. *Μία συνάρτηση* $f:\Omega\to\mathrm{X}$ *ονομάζεται μετρήσιμη αν* $f^{-1}(U)\in\Sigma$ *για όλα τα ανοιχτά υποσύνολα U του X και αν υπάρχει ένα διαχωρίσιμο υποσύνολο* $C\subseteq X$ *τέτοια ώστε* $f^{-1}(U)\in\Sigma$ *και* $P\{f\in C\}=1$
2. *Αν η συνάρτηση* $f:\Omega\to\mathrm{X}$ *είναι μετρήσιμη και ισχύει* $\int\|f\|dP<+\infty$ *τότε η f ονομάζεται Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση .*

Στη θεωρία των martingales, σημαντικό ρόλο παίζει η conditional expectation μιας συνάρτησης την οποία θα ορίσουμε ευθύς αμέσως :

Ορισμός 3

Έστω Β μία σ-υποάλγεβρα της Σ και $f \in L_1(\mu, \mathrm{X})$ *. Ένα στοιχείο* g *του* $L_1(\mu, \mathrm{X})$ *ονομάζεται conditional expectation της f σε σχέση με τη Β αν η* g *είναι Β-μετρήσιμη και* $\int_{\mathrm{E}} g d\mu = \int_{\mathrm{E}} f d\mu \quad \forall \mathrm{E} \in \mathrm{B}$ *και συμβολίζουμε* $g = E(f/B)$.

Ορισμός 4 (RNP)

Ένα κλειστό κυρτό και φραγμένο σύνολο C σε ένα χώρο Banach X έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα (RNP) αν ικανοποιεί το παρακάτω:
Έστω (Ω,Β) ένας μετρήσιμος χώρος , τ ένα μέτρο με τιμές στο X και μ *ένα μέτρο πιθανότητας στον (Ω,Β) . Υποθέτουμε ότι* $\tau(\mathrm{A})/\mu(\mathrm{A}) \in C$ *για κάθε* $A \in B$ *με* $\mu(\mathrm{A}) \neq 0$ *. Τότε υπάρχει μία* $f \in L_1(\mu, \mathrm{X})$ *τέτοια ώστε*

$$\tau(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f(\omega) d\mu(\omega) \ , \ \mathrm{A} \in \mathrm{B}. \qquad (4.1)$$

Ο χώρος X έχει την RNP αν η μοναδιαία σφαίρα του έχει την RNP .

Επίσης , ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο ενός συνόλου που έχει την RNP έχει και αυτό την RNP . Οπότε , κάθε κλειστό φραγμένο και κυρτό σύνολο σε ένα χώρο με την RNP έχει την RNP . Τέλος , η συνάρτηση f στην (4.1) ονομάζεται Radon-Nikodym παράγωγος του τ σε σχέση με το μ και συμβολίζεται με $d\tau / d\mu$.

Το επόμενο λήμμα μας βοηθάει να τεκμηριώσουμε την ύπαρξη της conditional expectation στον $L_1(\mu, \mathrm{X})$.

Λήμμα 5

Έστω Β μία σ-υποάλγεβρα της Σ . Τότε η $E(f/B)$ *υπάρχει για κάθε* $f \in L_1(\mu) (= L_1(\mu, R))$. Επιπλέον , *αν* $f \in L_p(\mu) (1 \leq p < \infty)$, *τότε* $\|E(f/B)\|_p \leq \|f\|_p$.

Ένα σχόλιο για το παραπάνω λήμμα είναι το εξής : Αν ο X έχει την RNP , τα παραπάνω ισχύουν και για τον $L_p(\mu, \mathrm{X})$ αντί για τον $L_p(\mu)$. Το ίδιο συμβαίνει και αν ο X δεν έχει την RNP . Δηλαδή :

Θεώρημα 6 [DU]

Έστω Β μια σ-υποάλγεβρα της Σ . Τότε η $\mathrm{E}(f/B)$ *υπάρχει για κάθε* $f \in L_1(\mu, \mathrm{X})$. *Επίσης αν* $f \in L_p(\mu, \mathrm{X}) (1 \leq p < \infty)$ *, τότε* $\|E(f/B)\|_p \leq \|f\|_p$.

Απόδειξη

Έστω $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ με $x_i \in X, E_i \in \Sigma$ και $E_i \bigcap E_j = \varnothing$ για $i \neq j$, μια απλή συνάρτηση στον $L_p(\mu, X)(1 \leq p < \infty)$. Ορίζουμε την $E(f/B)$ ως

$$E(f/B) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(\chi_{E_i}/B)$$

όπου $E(\chi_E/B)$ είναι η conditional expectation της $\chi_E \in L_p(\mu, \mathbb{R})$ της οποίοας η ύπαρξη έχει διασφαλιστεί από το Λήμμα 5 .

Επιπλέον , έχουμε

$$\|E(f/B)\|_p = \left(\int_\Omega \|E(f/B)\|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| E(\chi_{E_i}/B)^p d\mu\right)^{1/p}\right)$$

$$= \left(\int_\Omega E\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \chi_{E_i} \Big/ B\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \chi_{E_i}\right\|_p \qquad \text{(από το Λήμμα 5)}$$

$$= \left(\int_\Omega \|f\|^p d\mu\right)^{1/p} = \|f\|_p \ . \ \square$$

Επειδή λοιπόν ορίσαμε την conditional expectation μπορούμε να συνεχίσουμε ξεκινώντας , από τον ορισμό του martingale :

Ορισμός 7

Έστω $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία αύξουσα ακολουθία από σ-υποάλγεβρες της Σ . Ένα martingale είναι μία ακολουθία $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ από Bochner ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $M_n : \Omega \rightarrow X$ τέτοιες ώστε

i) *Οι M_n είναι μετρήσιμες συναρτήσεις σε σχέση με τη Σ_n*

ii) $E(M_{n+1} | \Sigma_n) = M_n \quad \forall n \in N$

Δέντρα

Ένα άπειρο δέντρο J στον X είναι μία ακολουθία (x_n) στον X με την ιδιότητα $x_n = \dfrac{x_{2n} + x_{2n+1}}{2}$ για όλα τα $n \geq 1$.

Τώρα θα δούμε ένα δέντρο $J = (x_n)$ ως ένα martingale στον $L_1([0,1), X)$.

Έστω λοιπόν μ το μέτρο Lebesgue και $f_1 = x_1 \chi_{[0,1)}$,

$f_2 = x_2\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)} + x_3\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right)}$ και $f_k = \sum_{i=2^{k-1}}^{2k-1} x_i \chi_{I_{k,i}}$, όπου $I_{k,i} = \left[\left(\frac{i-2^{k-1}}{2^{k-1}}\right), \left(\frac{i-2^{k-1}+1}{2^{k-1}}\right)\right)$ για $i = 2^{k-1}, 2^{k+1}+1, \ldots, 2^k - 1$ για $k \geq 1$.

Οπότε εύκολα βλέπουμε ότι $\int\limits_{[0,1)} f_1 d\mu = \int\limits_{[0,1)} f_2 d\mu$ Επειδή $\frac{\chi_2 + \chi_3}{2} = \chi_1$.

Εντελώς όμοια έχουμε ότι $\int\limits_{I_{\kappa,\iota}} f_{k+1} d\mu = \int\limits_{I_{k,i}} f_k d\mu$, για κάθε $i = 2^{k-1}, \ldots, 2^k - 1$ και $k \geq 1$. Έτσι αν η B_0 είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα που περιέχει το $\varnothing$ και το $[0,1)$ και B_k είναι η πεπερασμένη σ-άλγεβρα που παράγεται από τα $\left\{I_{k,i}, i = 2^{k-1}, 2^{k-1}+1, \ldots 2^k - 1\right\}$, $k \geq 1$, τότε το $\left(f_k, B_k\right)$ είναι ένα martingale στον $L_1\left(\left[0,1\right), \mathrm{X}\right)$.

1.2 Θεωρήματα σύγκλισης

Ορισμός 8

α) Ένα διανυσματικό μέτρο είναι μια απεικόνιση $m : \Sigma \to X$ τέτοια ώστε

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(A_n\right) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} m\left(A_n\right)$$

για όλα τα ξένα ανά δύο υποσύνολα $\left\{A_n : n \in N\right\} \subseteq \Sigma$.

β) Ένα διανυσματικό μέτρο $m : \Sigma \to X$ θα λέγεται φραγμένης κύμανσης αν

$$\sup_j \sum_i \left\| m\left(E_i\right) \right\| < \infty$$

για όλες τις πεπερασμένες διαμερίσεις j του Ω στη Σ .

Μία σημαντική ιδιότητα ενός martingale $\left(f_n, B_n, n \in N\right)$ στον $L_p\left(\mu, X\right)$ $\left(1 \leq p < \infty\right)$ είναι ότι , αν $E \in \bigcup_n B_n$, τότε το όριο $\lim_n \int\limits_E f_n d\mu$ υπάρχει και είναι ίσο με *F(E)* , η δε απεικόνιση *E→F(E)* είναι ένα <u>διανυσματικό μέτρο</u> .

Για να το δούμε αυτό , έστω $E \in \bigcup_n B_n$. Επειδή η $\left(B_n, n \in N\right)$ είναι μία μονότονη αύξουσα ακολουθία από σ-υποάλγεβρες , υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $E \in B_n$ για κάθε $n \geq n_1$. Συνεπώς για $n \geq n_1$ έχουμε $\int\limits_E f_n d\mu = \int\limits_E E\left(f_n / B_{n_1}\right) d\mu = \int\limits_E f_{n_1} d\mu$.

Ας εξετάσουμε τώρα διάφορες έννοιες σύγκλισης των martingales.

Θεώρημα 9

Ένα martingale $\left(f_n, B_n, n \in N\right)$ *στον* $L_p\left(\mu, \mathrm{X}\right)$ *συγκλίνει στην* $L_p\left(\mu, \mathrm{X}\right)$*-νόρμα αν και μόνο αν υπάρχει* $f \in L_p\left(\mu, \mathrm{X}\right)$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $\mathrm{E} \in \bigcup_n B_n$ *να έχουμε* $\lim_n \int_E f_n d\mu = F\left(E\right) = \int_E f d\mu$.

Το επόμενο πόρισμα στην ουσία είναι το παραπάνω θεώρημα σε πιο απλή μορφή

Πόρισμα 10

Ένα martingale $\left(f_n, B_n, n \in N\right)$ *στον* $L_p\left(\mu, \mathrm{X}\right)\left(1 \leq p < \infty\right)$ *συγκλίνει στην* $L_p\left(\mu, \mathrm{X}\right)$*-νόρμα αν και μόνο αν* $\exists f \in L_p\left(\mu, \mathrm{X}\right)$ *τέτοια ώστε* $\mathrm{E}\left(f / B_n\right) = f_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 11

Ένα martingale $\left(f_n, B_n, n \in \mathbb{N}\right)$ *στον* $L_1\left(\mu, X\right)$ *είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο αν*

$$\lim_{\mu(E) \to 0, E \in B_n} \int_E \left\| f_n \right\| d\mu = 0$$

ομοιόμορφα στο $n \in \mathbb{N}$.

Πόρισμα 12

Έστω ότι ο X έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα , $1 \leq p < \infty$ *και* $\left(f_n, B_n, n \in N\right)$ *είναι ένα martingale στον* $L_p\left(\mu, \mathrm{X}\right)$. *Τότε το* $\lim_n f_n$ *υπάρχει στην* $L_p\left(\mu, \mathrm{X}\right)$*– νόρμα αν και μόνο αν*

i) $sup_n \left\| f_n \right\|_1 < \infty$ *και* $\left(f_n, B_n, n \in N\right)$ *ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο αν p=1, ή*

ii) $sup_n \left\| f_n \right\|_p < \infty$ *αν* 1<p<∞.

Το προηγούμενο πόρισμα έχει και αντίστροφο το οποίο ¨δένει¨ τη σύγκλιση του martingale με την Radon-Nikodym ιδιότητα . Αυτό είναι το εξής θεώρημα :

Θεώρημα 13

Έστω X χώρος Banach τέτοιος ώστε για κάθε πεπερασμένο μετρήσιμο χώρο $\left(\Omega, \Sigma, \mu\right)$, *κάθε φραγμένο ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο martingale στον* $L_1\left(\mu, \mathrm{X}\right)$ *συγκλίνει στην* $L_1\left(\mu, \mathrm{X}\right)$*-νόρμα . Τότε ο X έχει την Radon –Nikodym ιδιότητα .*

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα είναι το παρακάτω :

Θεωρημα 14 (Levy)

Έστω (Ω, F, P) *ένας χώρος πιθανότητας, X χώρος Banach και* $f:\Omega \to X$ *Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση . Έστω* $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F$ *μια αύξουσα ακολουθία από σ-υποάλγεβρες των οποίων η ένωση παράγει την F (δηλαδή , η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την* $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ *είναι η F). Έστω* $f_n = E(f/F_n)$. *Τότε*
$\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$ *και* $\lim_n \| f_n - f \|_1 = 0$.

Μια σημαντική ανισότητα για την απόδειξη είναι η maximal inequality την οποία αναφέρουμε:

MAXIMAL INEQUALITY 15 [RB]

Έστω (Ω, F, P) *και* F_n, *n=1,2,…όπως στο προηγούμενο θεώρημα.. Επίσης, έστω* $\{h_n : n = 1, 2, ..\}$ *μια ακολουθία μη-αρνητικών* $L_1(\Omega, F, P)$ *συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει:*

Α) η h_j *είναι* F_j *-μετρήσιμη*

Β) $\int_A h_i dp \le \int_A h_n$ *για* $i \le n$ *και* $A \in F_i$, *και*

Γ) $\sup_n \int_\Omega h_j dp < \infty$

Τότε για κάθε c>0 έχουμε

$$P\{\omega \in \Omega : \sup_j h_j(\omega)\} \le \frac{1}{c} \sup_j \int_A h_n dp.$$

Απόδειξη

Παίρνουμε n>0 . Έστω $A_1 = \{\omega \in \Omega : h_1(\omega) > c\}$ και
$A_i = \{\omega \in \Omega : h_1(\omega) \le c, ..., h_{i-1}(\omega) \le c, h_i(\omega) > c\}$ για $2 \le i \le n$. Παρατηρούμε ότι $A_i \in F_i$ για i=1,…,n και $A_i \cap A_j = \varnothing$ για $i \ne j$. Οπότε έχουμε:

$$cP\{\omega : \sup_{j \le n} h_j(\omega) > c\} = cP(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} cP(A_i) \le \sum_{i-1}^{n} \int_{A_i} h_i dp$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} h_n dP \le \int_\Omega h_n dP \le \sup_j \int_\Omega h_j dP.$$ Συνεπώς

$$P(\omega : \sup_{j \le n} h_\xi(\omega)) \le \frac{1}{c} \sup_j \int_\Omega h_j dP,$$

και αν πάρουμε το όριο καθώς το $n \to \infty$ έχουμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε.

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος .

Απόδειξη του Θεωρήματος Levy [RB]

Για κάθε $f \in L_X^1(\Omega, F, P)$ ορίζουμε ως f_n τη συνάρτηση $E\left(f/F_n\right)$ και έστω G το σύνολο των $f \in L_X^1(\Omega, F, P)$ που ικανοποιούν

A) $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \to 0$ όταν το $n \to \infty$, και

B) $\|f_n - f\|_1 \to 0$ όταν $n \to \infty$.

Θα αποδείξουμε ότι το G είναι πυκνό και κλειστό στον $L_X^1(P)$.

1) Το G είναι πυκνό στον $L_X^1(P)$:Αν $f \in L_X^1(\Omega, F_n, P)$ για κάποιο n, τότε $E\left(f/F_k\right) = f$ για κάθε $k \geq n$ όπότε $f \in G$. Δηλαδή, $F \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} L_X^1(\Omega, F_n, P)$.

Ειδικότερα, $\chi X_A \in F$ για $A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ χ∈ X και επειδή η $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι πυκνή στο F, κάθε $xX_B \quad (x \in X, B \in F)$ είναι μια καλή προσέγγιση στον $L_X^1(\Omega, F, P)$ από στοιχεία του G . Παρατηρούμε ότι το G είναι γραμμικός χώρος ο οποίος περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο από απλές συναρτήσεις . Επειδή το σύνολο των απλών συναρτήσεων είναι πυκνό στον $L_X^1(P)$ και το G είναι επίσης πυκνό στον $L_X^1(P)$.

2) Το G είναι κλειστό στο $L_X^1(\Omega, F, P)$: Υποθέτουμε ότι η f είναι στην κλειστή θήκη του F . Δοθέντος ε>0 και δ>0 βρίσκουμε $g \in F$ με $\|f - g\|_1 < \frac{1}{2}\varepsilon\delta$ και έστω $g_n = E\left(g/F_n\right)$. Για σχεδόν όλα τα ω∈Ω έχουμε

$$\|f_n(\omega) - f_k(\omega)\| = \|f_n(\omega) - f_k(\omega) + g_n(\omega) - g_n(\omega) + g_k(\omega) - g_k(\omega)\|$$

$$\leq \|g_n(\omega) - g_k(\omega)\| + \|(f_n - g_n)(\omega) - (f_\kappa - g_\kappa)(\omega)\| \tag{1}$$

$$\leq \|g_n(\omega) - g_k(\omega)\| + \|E\left(f - g/F_n\right)(\omega)\| + \|\mathrm{E}\left(f - g/F_k\right)(\omega)\|$$

$$\leq \|g_n(\omega) - g_k(\omega)\| + 2\sup_j E\left(\|f - g\|/F_j\right)(\omega).$$

Έστω τώρα $h_j(\omega) = E\left(\|f - g\|/F_j\right)(\omega)$. Από την (1) και από το γεγονός ότι $g \in F$ έχουμε

$$\lim_{n,k\to\infty} \sup \|f_n(\omega) - f_k(\omega)\| \leq 2\sup_j h_j(\omega) \tag{2}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι οι $\{h_j : j = 1, 2, ...\}$ ικανοποιούν τις συνθήκες της maximal inequality (επίσης στη maximal inequality μπορούμε στο B) να αντικαταστήσουμε το ≤ με =) .

Από την (2) έχουμε

$$P\left\{\omega : \lim_{n,k\to\infty} \sup \|f_n(\omega) - f_\kappa(\omega)\| < \varepsilon\right\} \leq P\left\{\omega : 2\sup_j h_j(\omega) > \varepsilon\right\}$$

$$\leq \frac{2}{\varepsilon}\sup_j \|h_j\|_1 = \frac{2}{\varepsilon}\sup_j \int_\Omega \|f(\omega)-g(\omega)\| dP(\omega) = \frac{2}{\varepsilon}\|f-g\|_1 < \delta.$$

Επειδή τα ε , δ είναι αυθαίρετα, το όριο $\lim_n f_n(\omega) = \widehat{f(\omega)}$ υπάρχει.

Επίσης, έστω ε>0 . Μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $g \in L^1_X(\Omega, F_N, P)$ για κάποια N τέτοια ώστε $\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Για $n \geq N$ έχουμε

$$\|f-f_n\|_1 = \|f-f_n+g-g+g_n-g_n\|_1 \leq \|f-g\|_1 + \|g-g_n\|_1 + \|g_n-f_n\|_1$$

$$= \|f-g\|_1 + \|g-E(g/F_n)\|_1 + \|E(g-f/F_n)\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \|g-f\|_1 < \varepsilon,$$

οπότε $\lim_n \|f-f_n\|_1 = 0.$ Άρα επειδή κάποια υπακολουθία της f_n συγκλίνει σχεδόν παντού στην f θα έχουμε $f(\omega) = \lim_\iota f_{n_i}(\omega) = \widehat{f(\omega)} = \lim_n f_n(\omega)$. □

Θεώρημα 16

Ένα martingale που συγκλίνει στον $L_1(\mu, \mathrm{X})$, συγκλίνει και στο $L_1(\mu, \mathrm{X})$-όριό του σχεδόν παντού.

Το επόμενο θεώρημα είναι ίσως από τα πιο σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας μέτρου . Ας δούμε όμως πρώτα μερικούς πολύ χρήσιμους ορισμούς :

Ορισμοί 17 [Ru]

Έστω μ ένα θετικό μέτρο σε μια σ-άλγεβρα Σ και έστω λ ένα αυθαίρετο μέτρο στη Σ (μπορεί να είναι θετικό ή μιγαδικό) .

Ορίζουμε το λ ως απόλυτα συνεχές σε σχέση με το μ και γράφουμε $\lambda << \mu$ αν $\lambda(E) = 0$ για κάθε $E \in \Sigma$ για το οποίο $\mu(E) = 0$.

Αν υπάρχει ένα σύνολο $A \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $\lambda(E) = \lambda(A \bigcap E)$ $\forall E \in \Sigma$, τότε λέμε ότι το λ είναι concentrated στο A . Τέλος , έστω λ_1 και λ_2 μέτρα στην Σ και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ζευγάρι ξένων συνόλων A και B τέτοια ώστε το λ_1 να είναι concentrated στο A και το λ_2 είναι concentrated στο B . Τότε λέμε ότι τα λ_1 και λ_2 είναι mutually singular και συμβολίζουμε $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

Μερικές απλές ιδιότητες είναι οι εξής :

Πρόταση 18

Υποθέτουμε ότι $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ είναι μέτρα σε μια σ-άλγεβρα Σ και το μ είναι θετικό .
A) Αν το λ είναι concentrated στο A , το ίδιο ισχύει και για το $|\lambda|$.

Β) Αν $\lambda_1 \perp \lambda_2$ *, τότε* $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.
Γ) Αν $\lambda_1 \perp \mu$ *και* $\lambda_2 \perp \mu$ *, τότε* $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.
Δ) Αν $\lambda_1 << \mu$ *και* $\lambda_2 << \mu$ *, τότε* $\lambda_1 + \lambda_2 << \mu$.
Ε) Αν $\lambda << \mu$ *, τότε* $|\lambda| << \mu$.
Στ) Αν $\lambda_1 << \mu$ *και* $\lambda_2 \perp \mu$ *, τότε* $\lambda_1 \perp \lambda_2$.
Η) Αν $\lambda << \mu$ *και* $\lambda \perp \mu$ *, τότε* $\lambda = 0$.

Θεώρημα 19 (Lebesgue-Radon-Nikodym)

Έστω μ *και* λ *θετικά φραγμένα μέτρα σε μια σ-άλγεβρα* Σ *υποσυνόλων του* X. *Τότε*
α) Υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι μέτρων λ_α *και* λ_s *στη* Σ *τέτοιο ώστε*

$$\lambda = \lambda_\alpha + \lambda_s, \quad \lambda_\alpha << \mu, \quad \lambda_s \perp \mu \qquad (1)$$

Τα παραπάνω μέτρα είναι θετικά και $\lambda_\alpha \perp \lambda_s$.
β) Υπάρχει $h \in L_1(\mu)$ *τέτοια ώστε* $\lambda_\alpha(E) = \int_E h d\mu$ *για κάθε* $E \in \Sigma$. *(2)*

Το ζευγάρι $(\lambda_\alpha, \lambda_s)$ *ονομάζεται Lebesgue διάσπαση του* λ *σε σχέση με το* μ *. Το β) είναι γνωστό ως το θεώρημα Radon-Nikodym* .

Απόδειξη [Ru]

Θέτω $\phi = \lambda + \mu$. Τότε το ϕ είναι ένα θετικό και φραγμένο μέτρο στην Σ . Ο ορισμός του αθροίσματος δυο μέτρων μας δείχνει ότι

$$\int_X f d\phi = \int_X f d\lambda + \int_X f d\mu \qquad (3)$$

για $f = X_E$. Εύκολα βλέπουμε ότι η ίδια σχέση ισχύει για κάθε απλή συνάρτηση *f* όπως και για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f . Αν $f \in L_2(\phi)$, από την ανισότητα Schwarz έχουμε

$$\left|\int_X f d\lambda\right| \le \int_X |f| d\lambda \le \int_X |f| d\phi \le \left\{\int_X |f|^2 d\phi\right\}^{\frac{1}{2}} \{\phi(X)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Επειδή $\phi(X) < \infty$, η απεικόνιση

$$f \to \int_X f d\lambda \qquad (4)$$

είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $L_2(\phi)$. Ξέρουμε ότι κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές σε ένα χώρο Hilbert H δίνεται από ένα στοιχείο του H , οπότε υπάρχει μια $g \in L_2(\phi)$ τέτοια ώστε

$$\int_X f d\lambda = \int_X fg d\phi \quad \left(f \in L_2(\phi)\right). \qquad (5)$$

Θέτουμε $f = X_E$ στην (5) με $E \in \Sigma$ και $\phi(E) > 0$. Τότε το αριστερό μέλος της (5) είναι το $\lambda(E)$. Επειδή $0 \le \lambda \le \phi$ έχουμε

$$0 \le \frac{1}{\phi(E)} \int_E g d\phi \le 1 \qquad (6)$$

Έτσι $g(x) \in [0,1)$ για σχεδόν όλα τα x (σε σχέση με την ϕ) . Θα υποθέσουμε ότι $0 \le g(x) \le 1$ για κάθε $x \in X$, χωρίς να επηρεάσουμε την (5) , και την ξαναγράφουμε ως ακολούθως

$$\int_X (1-g) f d\lambda = \int_X fg d\mu \qquad \left(f \in L_2(\phi) \right) \qquad (7)$$

Θέτουμε

$$A = \{x : 0 \le g(x) < 1\}, B = \{x : g(x) = 1\} \qquad (8)$$

και για $E \in \Sigma$ ορίζουμε

$$\lambda_a(E) = \lambda\left(A \bigcap E\right), \lambda_s(E) = \lambda\left(B \bigcap E\right). \qquad (9)$$

Αν στην (7) πάρουμε $f = X_B$, βλέπουμε ότι $\mu(B) = 0$. Οπότε $\lambda_s \perp \mu$. Επειδή η g είναι φραγμένη , η (7) ισχύει αν αντικαταστήσουμε την f με $\left(1 + g + ... + g^n\right) X_E$ για $n = 1, 2, 3, ...$ και $E \in \Sigma$. Τότε θα έχουμε

$$\int_E \left(1 - g^{n+1}\right) d\lambda = \int_E g\left(1 + g + ... + g^n\right) d\mu. \qquad (10)$$

Σε κάθε σημείο x του B, $g(x) = 1$, οπότε $1 - g^{n+1}(x) = 0$. Σε κάθε σημείο x του A, $g^{n+1}(x) \to 0$ μονότονα άρα το αριστερό μέλος της (10) συγκλίνει στο $\lambda\left(A \bigcap E\right) = \lambda_\alpha(E)$ όταν το $n \to \infty$.

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (10) αυξάνει μονότονα σε ένα μη αρνητικό μετρήσιμο όριο h οπότε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας δείχνει ότι το δεξί μέλος τείνει στο $\int_E h d\mu$ καθώς το $n \to \infty$.

Έτσι δείξαμε ότι η (2) ισχύει για κάθε $E \in \Sigma$. Παίρνοντας $E = X$, βλέπουμε ότι $h \in L_1(\mu)$ επειδή $\lambda_\alpha(X) < \infty$. Τελικά από τη (2) έχουμε ότι $\lambda_\alpha << \mu$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε . □

<u>Θεώρημα 20 (MARTINGALE POINTWISE CONVERGENCE THEOREM)</u>

Έστω (f_n, B_n) ένα $L_1(\mu, X)$-φραγμένο martingale. Υποθέτουμε ότι $F(E) = \lim_n \int_E f_n d\mu$ για $\mathrm{E} \in \bigcup_n B_n$, και F=G+H, $|G| << \mu, |\mathrm{H}| \perp \mu$ η διάσπαση Lebesgue του F σε σχέση με το μ .Τότε το $\lim_n f_n$ υπάρχει σχεδόν παντού αν και μόνο αν το G έχει μια $L_1(\mu, \mathrm{X})$-Radon Nikodym παράγωγο g.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\lim_n f_n = E\left(g \middle/ \sigma(\bigcup_n B_n) \right)$ *, όπου* $\sigma\left(\bigcup_n B_n\right)$ *είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την* $\bigcup_n B_n$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα το οποίο αποτελεί μια παραλλαγή της maximal inequality την οποία έχουμε αναφέρει νωρίτερα . (Για την απόδειξή του παραπέμπουμε στο βιβλίο [DU]) .

<u>Λήμμα 20.1 (MAXIMAL LEMMA)</u>

Έστω (f_n, B_n) *ένα martingale στον* $L_1(\mu, X)$ *και έστω* $\delta > 0$.
Αν $S_\delta = \left\{\omega : \sup_n \| f_n(\omega) \| > \delta \right\}$ *, τότε*

$$\limsup_n \int_{S_\delta} \left(\| f_n \| - \delta \right) d\mu \geq 0 \ .$$

Συνεπώς

$$\mu\left(\left\{ \omega : \sup_n \| f_n(\omega) \| > \delta \right\} \right) \leq \frac{1}{\delta} sup_n \| f_n \|_1$$

<u>Απόδειξη (Θεωρήματος 20)</u>

Θα θεωρήσουμε ότι $\Sigma = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)$. Έστω $g \in L_1(\mu, \mathrm{X})$ η Radon-Nikodym παράγωγος του G σε σχέση με το μ και ορίζω $g_n = E(g/B_n)$. Τότε το (g_n, B_n) είναι ένα $L_1(\mu, \mathrm{X})$-φραγμένο martingale το οποίο συγκλίνει στην g και στην $L_1(\mu, \mathrm{X})$-νόρμα . Επίσης θεωρούμε $h_n = f_n - g_n$. Τότε το (h_n, B_n) είναι ένα $L_1(\mu, \mathrm{X})$-φραγμένο martingale . Αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι $\lim_n h_n = 0$ τότε η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί .
Έστω λοιπόν $E \in B_n$. Τότε

$$G(E) + H(E) = F(E) = \int_E f_n d\mu = \int_E g_n d\mu = \int_E h_n d\mu = G(E) + \int_E h_n d\mu \ .$$

Οπότε $H(E) = \int_E h_n d\mu$ για κάθε $E \in B_n$. Όμως τα μ και $|\mathrm{H}|$ είναι singular μέτρα πάνω στην άλγεβρα που παράγεται από την $\bigcup_n B_n$. Συνεπώς , αν ε, δ >0 και $\varepsilon < 1$, τότε υπάρχει ένα σύνολο $A \in \bigcup_n B_n$ τέτοιο ώστε $\mu(\Omega \setminus A) + |H|(A) < \varepsilon\delta/2$.
Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε $A \in B_{n_0}$ και χρησιμοποιώντας το maximal λήμμα θα δείξουμε ότι

$$\mu\left(\left\{\omega : \sup_{n\geq n_0}\|h_n(\omega)\|>\varepsilon\right\}\right)=\mu\left(\left\{\omega : \sup_{n\geq n_0}\|h_n(\omega)\|>\varepsilon\right\}\setminus A\right)$$
$$+\mu\left(\left\{\omega : sup_{n\geq n_0}\|h_n(\omega)\|>\varepsilon\right\}\bigcap A\right)$$
$$\leq\frac{\varepsilon\delta}{2}+\left(1\!\!\diagup_{\varepsilon}\right)\sup_{n\geq n_0}\int_A\|h_n\|d\mu\leq \varepsilon\delta\!\!\diagup_2+\left(1\!\!\diagup_{\varepsilon}\right)|H|(A)<(\varepsilon\delta\!\!\diagup_2)+\delta\!\!\diagup_2<\delta .$$

Οπότε $\lim_n h_n=0$ ομοιόμορφα και $\lim_n f_n=\lim_n g_n+\lim_n h_n=g$, και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

Για το αντίστροφο , υποθέτουμε ότι $\lim_n f_n=\phi\in L_1(\mu,X)$. Έστω $g_n=E(\phi/B_n)$, οπότε το (f_n-g_n,B_n) είναι ένα $L_1(\mu,X)$-φραγμένο martingale . Ορίζουμε H_1 στην $\bigcup_n B_n$ ως $H_1(E)=\lim_n\int_E(f_n-g_n)d\mu$ για $E\in\bigcup_n B_n$.

Επίσης , έστω $H_{11}+H_{12}=H_1$ η Lebesgue διάσπαση του H_1 σε σχέση με το μ όπου $H_{11}<<\mu$ και H_{12} ένα singular ως προς το *H1* μέτρο . Αν το H_{11} δεν είναι ταυτοτικά μηδέν , υπάρχει $x_0^*\in\mathrm{X}^*$ τέτοιο ώστε το $x_0^*\mathrm{H}_{11}$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν . Οπότε έχουμε $\lim_n\int_E x_0^*(f_n-g_n)d\mu=x_0^*H_{11}(E)+x_0^*H_{12}(E)$ για κάθε $E\in\bigcup_n B_n$. Από το Radon-Nikodym θεώρημα , το $x_0^*H_{11}$ έχει μη- μηδενική Radon- Nikodym παράγωγο $h\in L_1(\mu)$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης έχουμε $\lim_n x_0^*(f_n-g_n)=h$ σχεδόν παντού . Αυτή η αντίθεση μας αποδεικνύει ότι το H_1 είναι μ-singular . Επίσης ορίζουμε $G_1(E)=\int_E\phi d\mu$ για $\mathrm{E}\in\bigcup_n \mathrm{B}_n$. Τότε για $E\in\bigcup_n B_n$ θα πάρουμε

$$F(E)=\lim_n\int_E f_n d\mu=\lim_n\int_E g_n+H_1(E)=G_1(E)+H_1(E)$$

Επειδή $G_1<<\mu$ και H_1 είναι μ-singular , έχουμε ότι $G_1=G$ και $H_1=H$. Οπότε το G έχει Radon-Nikodym παράγωγο την φ και $\lim_n f_n=\phi$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

1.3 Dentable σύνολα και RNP

Ορισμός 21

Έστω C ένα φραγμένο κλειστό και κυρτό σύνολο σε ένα χώρο Banach X , και έστω $x^*\in\mathrm{X}^*$ *και* $\alpha>0$. *Το slice* $S(C,x^*,a)$ *ορίζεται ως*

$$\left\{y\in C:\left\langle x^*,y\right\rangle\geq\sup\left\{\left\langle x^*,x\right\rangle:x\in C\right\}-a\right\} .$$

Το C καλείται <u>dentable</u> αν κάθε υποσύνολό του έχει slices με αυθαίρετα μικρή διάμετρο . Ένα σημείο $y \in C$ ονομάζεται <u>denting point</u> του C αν περιέχεται σε slices με αυθαίρετα μικρή διάμετρο .

Ας δούμε όμως πότε ένα σύνολο δεν είναι σ-dentable .

<u>Ορισμός 22</u>

Ένα σύνολο D σε ένα χώρο Banach δεν είναι σ-dentable αν υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε κάθε $x \in D$ έχει τη μορφή $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, όπου $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$, $a_i > 0$, $x_i \in D$ και $\|x - x_i\| \geq \varepsilon$ για κάθε i .

<u>Θεώρημα 23 (Maynard)</u>

Έστω ένας X χώρος Banach που περιέχει ένα φραγμένο σύνολο που δεν είναι σ-dentable . Τότε υπάρχει ένα δ>0 και ένα martingale (f_n, B_n) στον $L_1([0,1), X)$ τέτοιο ώστε $f_n([0,1)) \subseteq D$ και $\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \geq \delta$ για κάθε $n \in N$ και $t \in [0,1)$.

Συνεπώς , ένας χώρος Banach που περιέχει ένα σύνολο που δεν είναι σ-dentable δεν έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα .

<u>Απόδειξη [DU]</u>

Έστω X ένας χώρος Banach και D ένα φραγμένο σύνολο του X που δεν είναι dentable . Θα κατασκευάσουμε ένα martingale (f_n, B_n) στον $L_1([0,1), X)$ με $f_n([0,1)) \subseteq D$ και $\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\|_X \geq \varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon > 0$ και για κάθε $t \in [0,1)$.

Για την κατασκευή του (f_n, B_n) παίρνουμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ να υπάρχει ακολουθία θετικών αριθμών $(a_n(x))$ με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = 1$ καθώς και μια ακολουθία $x_n(x)$ στο D με $\|x - x_n(x)\| \geq \varepsilon$ για κάθε n τέτοια ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n(x) \qquad \textbf{(*)}$$

Παίρνουμε $\bar{x} \in D$ αυθαίρετα και ορίζουμε $f_1 = \bar{x}\chi_{[0,1)}$ και $B_1 = \{\varnothing, [0,1)\}$. Τότε έχουμε

$$f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\bar{x}) x_n(\bar{x}) \chi_{[0,1)}$$

Έστω $\beta_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\bar{x})$ (με $\beta_0 = 0$) και $I_m = [\beta_{m-1}, \beta_m)$ για $m \geq 1$. Επίσης ορίζουμε

$$f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\bar{x})\chi_{I_n}$$

Επειδή $\mu(I_n) = a_n(\bar{x})$ (το μ είναι το μέτρο Lebesgue) θα έχουμε ότι

$$\int_{[0,1)} f_2 d\mu = \int_{[0,1)} f_1 d\mu = \bar{x}$$

Οπότε η conditional expectation της f_2 είναι $E(f_2/B_1) = f_1$. Έστω B_2 η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα (I_n). Τότε $\|f_2(t) - f_1(t)\|_X \geq \varepsilon$ για κάθε $t \in [0,1)$.
Θα δείξουμε πώς κατασκευάζουμε το f_3 και τη B_3 από τη f_2 και τη B_2 . Έστω $\Delta_2 = \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. Τότε $f_2 = \sum_{E\in\Delta_2} x_E X_E$ με $x_E = x_n(\bar{x})$ όταν $E = I_n$. Η κατασκευή του f_3 από το f_2 είναι όμοια με την κατασκευή του f_2 από το f_1 . Παίρνουμε $E \in \Delta_2$ και από την (*) έχουμε

$$x_E = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_E)x_n(x_E)$$

με $a_n(x_E)$ και $x_n(x_E)$ όπως στην (*) . Τότε

$$f_2\chi_E = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_E)x_n(x_E)\right)\chi_E$$

Επίσης θεωρούμε (για αυτό το σημείο της απόδειξης) $E = [a,b)$ και

$$\beta_n = (b-a)\sum_{m=1}^{n} a_n(x_E) \text{ με } \beta_0 = 0 \ , \ I_n = [a+\beta_{n-1}, a+\beta_n)$$

και ορίζουμε το f_3 στο E ως

$$f_3\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(x_E)\chi_{I_n}.$$

Επειδή $\mu(I_n) = a_n(x_E)(b-a)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\int_E f_3 d\mu = (b-a)x_E = \int_E f_2 d\mu$$

Ορίζουμε το f_3 σε κάθε $E \in \Delta_2$ όπως παραπάνω . Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι $E(f_3/B_2) = f_2$. Επιπλέον από την (*) παίρνουμε ότι $f_3([0,1)) \subseteq D$ και $\|f_3(t) - f_2(t)\|_X \geq \varepsilon$ για κάθε $t \in [0,1)$. Έστω τώρα B_3 η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα I_n που έχουν κατασκευαστεί παραπάνω ως E και ανήκουν στο Δ_2 . Έτσι η κατασκευή του f_3 και της B_3 είναι πλήρης , οπότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε . □

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του προηγούμενου θεωρήματος . Πριν το αναφέρουμε όμως , είναι απαραίτητο να παρεμβάλουμε τον επόμενο ορισμό ο οποίος αποτελεί μια παραλλαγή του ορισμού 21:

Ορισμός 24

Ένα υποσύνολο D σε ένα χώρο Banach δεν είναι dentable αν υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε , για κάθε $x \in D$, $x \in \overline{co}\left(D \setminus B_\varepsilon(x)\right)$. Εδώ $B_\varepsilon(x) = \left\{y : \|y - x < \varepsilon\|\right\}$ και $\overline{co}\left(D \setminus B_\varepsilon(x)\right)$ είναι η κλειστή κυρτή θήκη του $D \setminus B_\varepsilon(x)$.

Θεώρημα 25

Ένας χώρος Banach που περιέχει ένα φραγμένο σύνολο που δεν είναι dentable δεν έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα .

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι μια παραλλαγή της απόδειξης του θεωρήματος 23 και περιέχει ένα martingale που δεν συγκλίνει . Έστω X χώρος Banach που περιέχει ένα φραγμένο σύνολο D που δεν είναι dentable . Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ που ικανοποιεί τον ορισμό 24 . Θα αποδείξουμε την ύπαρξη μιας ακολουθίας διαστημάτων π_n που διαμερίζουν το $[0,1)$ σε ημι-ανοιχτά διαστήματα και μιας ακολουθίας (f_n) από μετρήσιμες συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στο $[0,1)$ τέτοιες ώστε :

i) Κάθε f_n έχει τη μορφή $f_n = \sum_{E\in\pi_n} x_E \chi_E$ όπου $x_E \in D$ για κάθε $E \in \pi_n$.

ii) Το π_{n+1} αποτελεί εκλέπτυνση του π_n , δηλαδή κάθε π_n είναι η ένωση διαστημάτων στο π_{n+1} .

iii) Η σ-άλγεβρα των Borel συνόλων στο $[0,1)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n$.

iv) $\left\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\right\| \geq \varepsilon$ για κάθε n και $t \in [0,1)$.

v) Αν μ είναι το μέτρο Lebesgue , τότε $\left\|\int_E (f_m - f_n)\, d\mu\right\| < \mu(E)/2^n$ για κάθε $E \in \pi_n$ και για κάθε $m \geq n$.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε τα i-v χρησιμοποιώντας ένα martingale (f_n) όπως παρακάτω :

Από το v) βλέπουμε ότι το $F(E) = \lim_n \int_E f_n\, d\mu$ υπάρχει για κάθε $E \in \bigcup_n \pi_n$.

Ορίζουμε $g_n = \sum_{E\in\pi_n} \dfrac{F(E)}{\mu(E)} \chi_E$ με $\left(0/0\right) = 0$ όποτε προκύπτει.

Αν η B_n είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα π_n , τότε το (g_n, B_n) είναι ένα martingale στον $L_1([0,1), X)$. Επιπλέον , επειδή το D είναι φραγμένο , για κάθε $E \in \bigcup_n \pi_n$, έχουμε

$$\|F(E)/\mu(E)\| = \frac{\left\|\lim_n \int_E f_n d\mu\right\|}{\mu(E)} \leq K$$

όπου το K είναι ένα φράγμα για το D . Οπότε $\sup_{t\in[0,1),n\in N} \|g_n(t)\|_X \leq K$ και (g_n, B_n) είναι ένα ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο $L_1([0,1), X)$-φραγμένο martingale . Έτσι έχουμε

$$\int_{[0,1)} \|f_n - g_n\| d\mu = \sum_{E\in\pi_n} \|x_E \mu(E) - F(E)\|$$

$$= \lim_m \sum_{E\in\pi_n} \left\|\int_E (f_n - f_m) d\mu\right\| \leq \sum_{E\in\pi_n} \frac{\mu(E)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Δηλαδή η $(f_n - g_n)$ είναι μια ακολουθία Cauchy στον $L_1([0,1), X)$. Από το (iv) βλέπουμε ότι η (f_n) δεν είναι Cauchy . Οπότε το (g_n, B_n) είναι ένα ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο $L_1([0,1), X)$-φραγμένο martingale που δεν συγκλίνει . Άρα ο X δεν έχει την RNP .
Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη πρέπει να επαληθευτούν τα i) – v) .
Από την επιλογή του $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι για κάθε $\delta > 0$, για το κάθε $x \in D$ υπάρχει μια ακολουθία από θετικούς πραγματικούς $(a_n(x,\delta))$ με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x,\delta) = 1$ και μια ακολουθία $(x_n(x,\delta))$ στο $D \setminus B_\varepsilon(x)$ τέτοια ώστε

$$\left\|x - \sum_{m=1}^{\infty} a_n(x,\delta) x_n(x,\delta)\right\| < \delta \qquad (*)$$

Παρατηρούμε ότι επαναπροσδιορίζοντας κάποια από τα $x_n(x,\delta)$ και μειώνοντας τα αντίστοιχα $a_n(x,\delta)$ μπορούμε να πάρουμε $a_n(x,\delta) < \delta$. Αυτό το γεγονός θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε το (iii) .

Για να κατασκευάσουμε τα (f_n) και (π_n) , διαλέγουμε αυθαίρετα $\bar{x}$ στο D και ορίζουμε $f_1 = \bar{x}\chi_{[0,1)}$ και $\pi_1 = \{[0,1)\}$. Υποθέτουμε ότι τα π_n και $f_n = \sum_{E\in\pi_n} x_E \chi_E$ έχουν οριστεί με $x_E \in D$ για κάθε $E \in \pi_n$ όπου το E είναι ημιανοιχτό διάστημα . Εφαρμόζοντας την (*) για κάθε E παίρνουμε

$$\left\|x_E - \sum_{m=1}^{\infty} a_m\left(x_E, 1/2^{n+1}\right) x_m\left(x_E, 1/2^{n+1}\right)\right\| < 1/2^{n+1}$$

με $a_m\left(x_E,1/2^{n+1}\right),x_m\left(x_E,1/2^{n+1}\right)$ όπως στην (*) με $\delta=1/2^{n+1}$. Για αυτό το σημείο της απόδειξης , θεωρούμε $E=[a,b)$ και

$$\beta_n=(b-a)\sum_{m=1}^{n}a_m\left(x_E,1/2^{n+1}\right) \qquad \text{με } \beta_0=0 \ .$$

Έστω $I_m=[a+\beta_{m-1},a+\beta_m)$ με $\beta_0=0$. Ορίζουμε f_{n+1} στο E ως

$$f_{n+1}\chi_E=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\left(x_E,1/2^{n+1}\right)\chi_{I_m} \ .$$

Τα παραπάνω επαναλαμβάνονται για κάθε $E\in\pi_n$ σημειώνοντας ότι $\left\|f_n(t)-f_{n+1}(t)\right\|\geq\varepsilon$ για κάθε $t\in[0,1)$. Έτσι αποδείξαμε το (iv) .

Επιπλέον έχουμε ότι

$$\left\|\int_E(f_n-f_{n+1})d\mu\right\|=\left\|x_E-\sum_{m=1}^{\infty}x_m\left(x_E,1/2^{n+1}\right)a_m\left(x_E,1/2^{n+1}\right)\right\|\mu(E)$$

$$\leq\mu(E)/2^{n+1} \ ,$$

που αποδεικνύει το (v) .
Για την απόδειξη των (i) και (ii) αρκεί να θεωρήσουμε μια μετρήσιμη διαμέριση π_{n+1} του $[0,1)$ η οποία περιέχει τα ημι-ανοιχτά διαστήματα που προέρχονται από τα I_n που κατασκευάστηκαν παραπάνω ως E και ανήκουν στην π_n .

Για την απόδειξη του (iii) αρκεί να σημειώσουμε ότι $a_j\left(x_E,1/2^{n+1}\right)<1/2^{n+1}$ για όλα τα E και n . Η απόδειξη είναι πλήρης .

<u>Λήμμα 26</u>

Έστω (Ω,Σ,μ) ένας μετρήσιμος χώρος και $F:\Omega\to X$ ένα μ-συνεχές διανυσματικό μέτρο φραγμένης κύμανσης . Τότε υπάρχει $f\in L_1(\mu,X)$ τέτοια ώστε $F(E)=\int_E fd\mu$ για κάθε $E\in\Sigma$ υπό την προϋπόθεση ότι για $\varepsilon>0$ και $A\in\Sigma$ με $\mu(A)>0$, υπάρχει ένα σύνολο $B\in\Sigma$ με $B\subseteq A$ και $\mu(B)>0$ τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\left\{F(E)\big/\mu(E):E\in\Sigma,E\in B,\mu(B)>0\right\} \text{ να έχει διάμετρο } <\varepsilon \ .$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το <u>θεώρημα 26.1</u> και το <u>Exhaustion Lemma</u> 26 .2 τα οποία αναφέρουμε χωρίς απόδειξη (οι αποδείξεις τους βρίσκονται στο J . DIESTEL and J . J . UHL στις σελίδες 46 και 70 αντίστοιχα) .

Θεώρημα 26.1

Αν η f *είναι μια* μ *-Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση , τότε*

i) $\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E f d\mu = 0$.

ii) $\left\|\int_E f d\mu\right\| \leq \int_E \|f\| d\mu$ *, για κάθε* $E \in \Sigma$.

iii) Αν E_n *μια ακολουθία από ξένα ανά δυο μέλη της* Σ *και* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *, τότε*

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu \ ,$$

με το άθροισμα στο δεξί μέλος να συγκλίνει απόλυτα .

v) Αν $F(E) = \int_E f d\mu$ *, τότε το* F *είναι μέτρο φραγμένης κύμανσης και*

$$|F(E)| = \int_E f d\mu \ , \text{ για κάθε } E \in \Sigma \ .$$

EXHAUSTION LEMMA 26.2

Έστω $G : \Sigma \to X$ *ένα διανυσματικό μέτρο . Υποθέτουμε ότι η* P *είναι μια ιδιότητα του* G *τέτοια ώστε :*

α) Το G *έχει την* P *σε κάθε* μ *- μηδενικό σύνολο .*

β) Αν το G *έχει την* P *στο* $E \in \Sigma$ *, τότε το* G *έχει την ιδιότητα* P *σε κάθε* $A \in \Sigma$ *που περιέχεται στο* E *.*

γ) Αν το G *έχει την ιδιότητα* P *στα* E_1 *και* E_2 *(και τα δυο μέλη της* Σ *) , τότε το* G *έχει την ιδιότητα* P *στο* $E_1 \cup E_2$ *, και*

δ) Κάθε σύνολο $A \in \Sigma$ *θετικού μέτρου περιέχει ένα σύνολο* $B \in \Sigma$ *θετικού μέτρου τέτοιο ώστε το* G *έχει την ιδιότητα* P *στο* B *.*

Τότε υπάρχει μια ακολουθία (A_n) *από ξένα μέλη της* Σ *τέτοια ώστε* $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *και το* G *να έχει την ιδιότητα* P *σε κάθε* A_n *.*

Απόδειξη (Λήμματος 26)

Παίρνουμε $\varepsilon > 0$. Από το Exhaustion Lemma , υπάρχει μια ακολουθία ξένων $(E_n(\varepsilon)) \subseteq \Sigma$ με $\mu(E_n(\varepsilon)) > 0$ τέτοια ώστε

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(\varepsilon)\right) = 0$$

και κάθε σύνολο $\left\{ F(E) \big/ \mu(E) : E \subseteq E_n(\varepsilon), \mu(E) > 0 \right\}$ να έχει διάμετρο $\leq \varepsilon$.

Ορίζουμε

$$f_\varepsilon : \Omega \to X \text{ ως } f_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F\left(E_n(\varepsilon)\right)}{\mu\left(E_n(\varepsilon)\right)} X_{E_n(\varepsilon)} .$$

Αν $F_\varepsilon(.) = \int_{.} f_\varepsilon d\mu$, τότε για μια διαμέριση π του Ω έχουμε

$$\sum_{E\in\pi} \left\| F(E) - F_\varepsilon(E) \right\| = \sum_{E\in\pi} \left\| F(E) - \int_E f_\varepsilon d\mu \right\| \leq$$

$$\sum_{E\in\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| F\left(E \bigcap E_n(\varepsilon)\right) - \int_{E \bigcap E_n(\varepsilon)} f_\varepsilon d\mu \right\| =$$

$$\sum_{E\in\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{F\left(E \bigcap E_n(\varepsilon)\right)}{\mu\left(E \bigcap E_n(\varepsilon)\right)} - \frac{F\left(E_n(\varepsilon)\right)}{\mu\left(E_n(\varepsilon)\right)} \right\| \mu\left(E \bigcap E_n(\varepsilon)\right) \leq$$

$$\sum_{E\in\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \mu\left(E \bigcap E_n(\varepsilon)\right) \leq \varepsilon \mu(\Omega) .$$

Οπότε $\lim_{\varepsilon\to 0} \left|F - F_\varepsilon\right|(\Omega) = 0$. Άρα $\lim_{\delta\to 0, \varepsilon\to 0} \left|F_\varepsilon - F_\delta\right|(\Omega) = 0$. Επομένως

$$\lim_{\delta\to 0, \varepsilon\to 0} \int_\Omega \left\| f_\varepsilon - f_\delta \right\| d\mu = 0$$

(από θεώρημα 26.1). Συνεπώς αν $f_n = f_\varepsilon$ με $\varepsilon = \frac{1}{n}$, τότε η $\left(f_n\right)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $L_1(\mu, X)$. Έστω $\lim_n f_n = f$ στον $L_1(\mu, X)$. Τότε προφανώς έχουμε $F(E) = \int_E f d\mu$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται . □

Το επόμενο θεώρημα είναι από τα κεντρικά θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου . Μας δημιουργεί μια πρώτη ‘χειροπιαστή ένδειξη ότι η Radon-Nikodym ιδιότητα είναι μια γεωμετρική ιδιότητα των χώρων Banach .

Θεώρημα 27 (RIEFFEL-MAYNARD-HUFF-DAVIS-PHELPS)

Σε ένα χώρο Banach X , τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :
α) Κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι dentable .
β) Κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι σ-dentable .
γ) Ο χώρος X έχει την RNP .

<u>Απόδειξη [DU]</u>

Το (β) συνεπάγεται από το (γ) από το θεώρημα Maynard , ενώ το (α) συνεπάγεται από το (γ) από το θεώρημα 25 . Επειδή η dentability ικανοποιεί την σ-dentability , το θεώρημα θα αποδειχθεί αν δείξουμε ότι από το (β) έπεται το (γ) . Για να γίνει αυτό , έστω (Ω,Σ,μ) ένας μετρήσιμος χώρος και $F:\Sigma\to X$ ένα μ-συνεχές διανυσματικό μέτρο φραγμένης κύμανσης . Επειδή το $|F|(\Omega)$ είναι πεπερασμένο , υπάρχει μια ακολουθία ξένων συνόλων (A_n) της Σ με $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\Omega$ και $F(A)/\mu(A)$ φραγμένο για $A\subseteq A_n$ για σταθερό n . (Για να το δούμε αυτό , θεωρούμε $\phi\in L_1(\mu)$ την Radon-Nikodym παράγωγο του $|F|$ σε σχέση με το μ και ορίζουμε $A_n=[n-1\le\phi<n], n=1,2,...$) . Για να αποδείξουμε ότι το F έχει Radon-Nikodym παράγωγο στον $L_1(\mu,X)$ θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 26 . Έστω $A\in\Sigma$ με θετικό μέτρο . Τότε για κάποιο n έχουμε $\mu\left(A\bigcap A_n\right)>0$. Οπότε υπάρχει σύνολο $A^{'}\subseteq A,\ \ A^{'}\in\Sigma$ με $\mu\left(A^{'}\right)>0$ τέτοιο ώστε το $\Phi=\left\{F(E)/\mu(E):E\subseteq A^{'},\mu(E)>0\right\}$ να είναι φραγμένο . Από το (β) , το Φ είναι σ-dentable . Άρα αν $\varepsilon>0$ τότε υπάρχει ένα σύνολο $C\subseteq A^{'},\mu(C)>0$ που ικανοποιεί

$$\frac{F(C)}{\mu(C)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{F(E_n)}{\mu(E_n)}$$

όπου $a_n>0,\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$ και $E_n\subseteq C$. Έτσι

$$\left\|\frac{F\left(E_{n_0}\right)}{\mu\left(E_{n_0}\right)}-\frac{F(C)}{\mu(C)}\right\|\le\varepsilon$$

για τουλάχιστον μια επιλογή του n_0 . Επίσης , αν

$$\sup\left\{\left\|\frac{F(E)}{\mu(E)}-\frac{F(C)}{\mu(C)}\right\|:E\subseteq C\right\}\le\varepsilon$$

τότε σταματάμε και θεωρούμε $B=C$ στο Λήμμα 26 . Διαφορετικά , έστω j_1 ο μικρότερος ακέραιος ≥ 2 για τον οποίο ισχύει

$C_1\subseteq C$ με $\mu(C_1)\ge\dfrac{1}{j_1}$ και $\left\|\dfrac{F(C_1)}{\mu(C_1)}-\dfrac{F(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon$.

Επίσης

$$\frac{F(C)}{\mu(C)}=\frac{F(C_1)}{\mu(C_1)}\frac{\mu(C_1)}{\mu(C)}+\frac{F(C\setminus C_1)}{\mu(C\setminus C_1)}\frac{\mu(C\setminus C_1)}{\mu(C)}.$$

Αν $\sup\left\{\left\|\frac{F(E)}{\mu(E)}-\frac{F(C)}{\mu(C)}\right\|: E\subseteq C\setminus C_1\right\}\le \varepsilon$, τότε σταματάμε και εφαρμόζουμε το Λήμμα 26 για $B=C\setminus C_1$. Αλλιώς , έστω j_2 ο μικρότερος ακέραιος ≥ 2 για τον οποίο υπάρχει ένα σύνολο $C_2\subseteq C\setminus C_1$ με $\mu(C_2)>\frac{1}{j_2}$ και $\left\|\frac{F(C_2)}{\mu(C_2)}-\frac{F(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon$.

Ομοίως

$$\frac{F(C)}{\mu(C)}=\frac{F(C_1)}{\mu(C_1)}\frac{\mu(C_1)}{\mu(C)}+\frac{F(C_2)}{\mu(C_2)}\frac{\mu(C_2)}{\mu(C)}+\frac{F(C\setminus C_1\setminus C_2)}{\mu(C\setminus C_1\setminus C_2)}\frac{\mu(C\setminus C_1\setminus C_2)}{\mu(C)}.$$

Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο . Αν η διαδικασία σταματήσει σε n επαναλήψεις τότε αυτό που θέλουμε ισχύει εφαρμόζοντας το Λήμμα 26 για $B=C\setminus C_1\setminus C_2\setminus ... C_{n-1}$.

Αν η διαδικασία δεν σταματήσει , συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για να παραγάγουμε μια ακολουθία (C_n) ξένων υποσυνόλων του C θετικού μέτρου και μια μη-φθίνουσα ακολουθία (j_n) θετικών ακεραίων τέτοια ώστε

i) $\left\|\frac{F(C)}{\mu(C_n)}-\frac{F(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon$

ii) Αν $E\subseteq C\setminus\bigcup_{n=1}^{m}C_n, E\in\Sigma$ και $\left\|\frac{F(E)}{\mu(E)}-\frac{F(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon$ τότε $\mu(E)<\frac{1}{J_m-1}$, και

iii) $\frac{F(C)}{\mu(C)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{F(C_n)}{\mu(C_n)}\frac{\mu(C_n)}{\mu(C)}+\frac{F\left(C\setminus\bigcup_{n=1}^{m}C_n\right)}{\mu\left(C\setminus\bigcup_{n=1}^{m}C_n\right)}\frac{\mu\left(C\setminus\bigcup_{n=1}^{m}C_n\right)}{\mu(C)}$ για κάθε m .

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι το $\frac{F\left(C\setminus\bigcup_{n=1}^{m}C_n\right)}{\mu\left(C\setminus\bigcup_{n=1}^{m}C_n\right)}$ είναι φραγμένο . Οπότε $\lim_n \mu\left(C\setminus\bigcup_{n=1}^{m}C_n\right)=\mu\left(C\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\right)\ne 0$. Αλλιώς έχουμε

$$\frac{F(C)}{\mu(C)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(C_n)}{\mu(C_n)}\frac{\mu(C_n)}{\mu(C)} \text{ με } C_n\subseteq C\ ,\ \left\|\frac{F(C_n)}{\mu(C_n)}-\frac{F(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(C_n)}{\mu(C)}=1,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή του $F(C)/\mu(C)$. Οπότε το $B=C\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$ έχει θετικό μέτρο . Επίσης , αν υπάρχει $E\subseteq B$ με $\mu(E)>0$ και $\left\|\frac{F(E)}{\mu(E)}-\frac{F(C)}{\mu(C)}\right\|>\varepsilon$ τότε $E\subseteq C\setminus\bigcup_{n=1}^{m}C_n$ για κάθε m και συνεπώς

$\mu(E) < 1/(j_m - 1)$ για κάθε m από το ii) . Αλλά $\mu(C_m) \geq \frac{1}{j_m}$ για κάθε m και (C_m) μια ακολουθία ξένων μεταξύ τους συνόλων . Οπότε $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{j_m} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(C_m) < \infty$, άρα $\mu(E) \leq \lim_n \frac{1}{j_m - 1} = 0$. Αυτό μας δείχνει ότι $\left\| \frac{F(E)}{\mu(E)} - \frac{F(C)}{\mu(C)} \right\| \leq \varepsilon$ για κάθε $E \subseteq B, \mu(E) > 0$ και ολοκληρώνουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας το Λήμμα 23.
□

1.4 Quasi-martingales [KR]

Έστω X χώρος Banach, (Ω, Σ, μ) ένας χώρος πιθανότητας, A μια σ-υποάλγεβρα της Σ . Με $E = E_A$ συμβολίζουμε την conditional expectation σε σχέση με την A . Θεωρούμε σ-υποάλγεβρες $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ της Σ με A_0 την τετριμμένη άλγεβρα και ομοίως συμβολίζουμε με E_n την E_{A_n} conditional expectation σε σχέση με τη n-οστή άλγεβρα .

Ορισμός 28

Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Μια ακολουθία (f_n) του $L_p(X)$ καλείται p -quasi-martingale (σε σχέση με την (A_n)) αν ικανοποιεί τις παρακάτω δυο ιδιότητες :
α) Η f_n είναι A_n -μετρήσιμη για κάθε n , και
β) $\sum_{n=0}^{\infty} \|E_n f_{n+1} - f_n\| < \infty$.

Έστω $(\varepsilon_n)_{n=0}$ μια αθροίσιμη ακολουθία μη αρνητικών αριθμών . Θα λέμε ότι ένα p -quasi-martingale (f_n) αντιστοιχεί στην (ε_n) αν $\|E_n f_{n+1} - f_n\|_p \leq \varepsilon_n$ για $n = 0,1,...$. Προφανώς, ένα martingale σε σχέση με την (A_j) είναι απλά ένα martingale που αντιστοιχεί στην (ε_n) όπου $\varepsilon_n = 0$ για $n = 0,1,2,...$.

Θεώρημα 29

Έστω $1 \leq p \leq \infty$, (ε_n) μια ακολουθία από μη αρνητικούς αριθμούς και (f_n) ένα p -quasi-martingale (σε σχέση με την A_n) που αντιστοιχεί στην (ε_n) . Έστω K ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $f_n(\omega) \in K$ για όλα τα n και ω . Έστω $\delta_n = \sum_{j=n}^{\infty} \varepsilon_j$ για κάθε n . Τότε υπάρχει ένα martingale (g_n) (σε σχέση με την A_n) με τις παρακάτω ιδιότητες για κάθε n :
α) $g_n(\omega) \in K$
β) $\| f_n - g_n \|_p \leq \delta_n$

Επιπλέον έχουμε ότι $f_n - g_n \to 0$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη , ας δούμε πρώτα ένα σημαντικό πόρισμα .

Πόρισμα 30

Έστω K *ένα κλειστό φραγμένο υποσύνολο του X . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

α) Το K *έχει την RNP .*

β) Κάθε quasi-martingale (f_n) *συγκλίνει σ.π. στο* K *.*

γ) Κάθε quasi- martingale (f_n) *συγκλίνει στην* L_1*-νόρμα στο* K *.*

Απόδειξη

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα παραπάνω ισχύουν για martingales . Οπότε , μένει να αποδείξουμε ότι (α)$\to$(β) και (α)$\to$(γ) . Έστω ότι το K έχει την RNP και το (f_n) είναι ένα quasi-martingale που παίρνει τιμές στο K . Επίσης , έστω (g_n) ένα martingale όπως στο θεώρημα 29 . Από το (α) , το (g_n) παίρνει τιμές στο K . Επειδή η (g_n) συγκλίνει σχεδόν παντού και στην L_1-νόρμα και $f_n - g_n \to 0$ σχεδόν παντού και στην L_1-νόρμα , από το θεώρημα 29 , η (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού και στην L_1-νόρμα . □

Απόδειξη (θεωρήματος 29) [KR]

Θα κατασκευάσουμε ένα martingale (g_n) και θα αποδείξουμε ότι ικανοποιεί τα (α) και (β) . Θα δείξουμε , κρατώντας το k σταθερό, ότι η $(E_k f_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι Cauchy στον L_p . Έτσι η $E_k f_n$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση g_k του $L_p(X)$ καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή , παίρνοντας $n > k$, έχουμε

$$\|E_k f_n - f_k\|_p \leq \varepsilon_\kappa + \ldots + \varepsilon_{n-1} \tag{1}$$

Πράγματι ,

$E_k f_n - f_k = E_k(f_n - f_{n-1}) + E_k(f_{n-1} - f_{n-2}) + \ldots + E_k(f_{k+1} - f_k)$.

Αλλά για $k+1 \leq j \leq n$,έχουμε :

$$E_k(f_j - f_{j-1}) = E_k\left(E_{j-1}(f_j - f_{j-1})\right) = E_k\left(E_{j-1} f_j - f_{j-1}\right)$$

οπότε $\left\|E_k(f_j - f_{j-1})\right\|_p \leq \left\|E_{j-1} f_j - f_{j-1}\right\|_p \leq \varepsilon_{j-1}$, άρα

$\left\|\sum_{j=k+1}^{n} E_k(f_j - f_{j-1})\right\|_p \leq \sum_{j=k+1}^{n}\left\|E_k(f_j - f_{j-1})\right\|_p \leq \varepsilon_\kappa + \ldots + \varepsilon_{n-1}$ που αποδεικνύει την (1) . Επειδή ο $L_p(X)$ είναι χώρος Banach έχουμε ότι $E_k(f_n)$ συγκλίνει σε μια

A_k -μετρήσιμη συνάρτηση g_k στην L_p-νόρμα καθώς $n \to \infty$. Για κάθε n η $E_k\left(f_n\right)$ παίρνει τιμές στο K , άρα και η g_k (σχεδόν παντού) . Επίσης , από την (1) έχουμε ότι $\left\|E_k f_n - f_k\right\|_p \leq \delta_k$ για κάθε n , δηλαδή $\left\|g_k - f_k\right\|_p = \lim_{n\to\infty}\left\|E_k f_n - f_k\right\|_p \leq \delta_k$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι τα (α) και (β) ισχύουν . □

1.5 Αναπαραστάσιμοι τελεστές

Ένας τελεστής $T : L_1\left(\mu\right) \to X$ λέγεται αναπαραστάσιμος αν υπάρχει μια συνάρτηση $f \in L_\infty\left(\mu, X\right)$ τέτοια ώστε για κάθε $g \in L_1\left(\mu\right)$

$$Tg = \int gfd\mu . \tag{54}$$

Επίσης ορίζουμε ως $P\left(\mu\right)$ το σύνολο όλων των πυκνοτήτων πιθανότητας:

$$P\left(\mu\right) = \left\{\phi \in L_1\left(\mu\right) : \phi \geq 0, \int \phi d\mu = 1\right\}.$$

Γενικότερα , αν A είναι ένα μετρήσιμο σύνολο με $\mu\left(A\right) > 0$, ορίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\phi \in P\left(\mu\right)$ οι οποίες μηδενίζονται εκτός του A ως $P\left(\mu, A\right)$.

Πρόταση 31

Ένα φραγμένο κλειστό και κυρτό υποσύνολο C του X έχει την RNP αν και μόνο αν κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : L_1\left(\mu\right) \to X$ τέτοιος ώστε $T\phi \in C$ για κάθε $\phi \in P\left(\mu\right)$ είναι αναπαραστάσιμος .

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι η σχέση (54) ορίζει ένα γραμμικό τελεστή από τον $L_1\left(\mu\right)$ στον X με $\left\|T\right\| = \left\|f\right\|_\infty$.

Υποθέτουμε ότι τ είναι ένα μέτρο με τιμές στον X και τα τ και μ ικανοποιούν $\tau\left(A\right) \big/ \mu\left(A\right) \in C$ για κάθε A και ορίζουμε ένα τελεστή $T : L_1\left(\mu\right) \to E$ ως $T\chi_A = \tau\left(A\right)$. Από την κυρτότητα του C έχουμε

$$T\left(\sum \lambda_i \chi_{A_i}\right) = \sum \lambda_i \mu\left(A_i\right)\left(\tau\left(A_i\right) / \mu\left(A_i\right)\right) \in C$$

όταν $\lambda_i > 0$ και $\sum \lambda_i \mu\left(A_i\right) = 1$. Οπότε ο T έχει μια μοναδική έκφραση σαν φραγμένος γραμμικός τελεστής στον $L_1\left(\mu\right)$ και $T\phi \in C$ όταν $\phi \in P\left(\mu\right)$.

Χρησιμοποιώντας την (54) για τον T και για $g = \chi_A$ παίρνουμε την (4.1) (με την ίδια f) .

Αντίστροφα , για τον τελεστή T όπως έχει οριστεί στη διατύπωση της πρότασης , ορίζουμε τ ως $\tau(A) = T\chi_A$ και χρησιμοποιούμε την (4.1) για να παραγάγουμε μια φραγμένη συνάρτηση f . Από την γραμμικότητα του T , η σχέση (54) θα ισχύει (με αυτή την f) για κάθε g . □

Για ένα τελεστή $T : L_1(\mu) \to X$ και ένα μετρήσιμο σύνολο B με $\mu(B) > 0$ ορίζουμε

$$\Gamma_B = T\left(P(\mu, B)\right) \tag{55}$$

Οπότε ένα σύνολο C έχει την RNP αν και μόνο αν κάθε τελεστής $T : L_1(\mu) \to E$ που ικανοποιεί $\Gamma_\Omega = T\left(P(\mu)\right) \subset C$ είναι αναπαραστάσιμος .

Λήμμα 32 [BL]

Έστω (Ω,Σ,μ) ένας χώρος πιθανότητας και T:L₁(Ω,Σ,μ)→X ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής . Τότε ο T είναι αναπαραστάσιμος αν και μόνο αν για κάθε A στο Σ με $\mu(A) > 0$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα σύνολο $B \subset A$ με $\mu(B) > 0$ τέτοιο ώστε $diam(\Gamma_B) < \varepsilon$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι για κάθε A και ε υπάρχει υποσύνολο $\mathrm{B} \subset A$ με την επιθυμητή ιδιότητα . Για $\varepsilon > 0$, μπορούμε να 'διασπάσουμε' τον Ω σε μια αριθμήσιμη ένωση ξένων $\bigcup \mathrm{B}_i$ τέτοια ώστε $diam\left(\Gamma_{\mathrm{B}_i}\right) < \varepsilon$ για κάθε i . Θέτουμε $x_i = T\left(\chi_{\mathrm{B}_i} / \mu(\mathrm{B}_i)\right)$ και έστω $h = \sum x_i \chi_{\mathrm{B}_i}$. Έστω μη αρνητική συνάρτηση $g \in L_1$ με $\|g\|_1 = 1$, και ορίζουμε $a_i = \int_{\mathrm{B}_i} g d\mu$. Τότε $g\chi_{\mathrm{B}_i} / a_i , \chi_{\mathrm{B}_i} / \mu(\mathrm{B}_i) \in P(\mu, \mathrm{B}_i)$. Οπότε , από την επιλογή των B_i και επειδή $\sum a_i = 1$, έχουμε

$$\left\| Tg - \int ghd\mu \right\| \le \sum a_i \left\| T\left(g\chi_{\mathrm{B}_i} / a_i \right) - T\left(\chi_{\mathrm{B}_i} / \mu(\mathrm{B}_i) \right) \right\| \le \varepsilon$$

Οπότε $\left\| Tg - \int ghd\mu \right\| \le \varepsilon \|g\|_1$ για όλες τις $g \in L_1$. Επίσης , παίρνουμε $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ και κατασκευάζουμε διαμέριση $\left\{\mathrm{B}_i^n\right\}$ όπως παραπάνω , με κάθε διαμέριση να αποτελεί εκλέπτυνση της προηγούμενης . Οι συναρτήσεις $\{h_n\}$ συγκλίνουν στον $L_\infty(\mu, X)$ σε μια συνάρτηση f που ικανοποιεί την (54) .

Η άλλη κατεύθυνση είναι τετριμμένη . □

Θεώρημα 33

Έστω C ένα κλειστό, φραγμένο και κυρτό σύνολο του χώρου Banach X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :
α) Κάθε κλειστό κυρτό υποσύνολο του C είναι dentable .
β) Το C έχει την RNP .
γ) Κάθε martingale $\{f_n\}$, τέτοιο ώστε $f_n(\omega) \in C$ για κάθε n και ω , συγκλίνει σχεδόν παντού καθώς το $n \to \infty$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε δυο λήμματα .

Λήμμα 34

Έστω $T : L_1(\mu) \to \mathrm{X}$, και ορίζουμε τα σύνολα Γ_{B} όπως στην (55) . Παίρνουμε A με $\mu(A) > 0$, $x^* \in X^*$ και $a > 0$. Τότε υπάρχει ένα $\mathrm{B} \subset A$ με $\mu(A) > 0$ και $\Gamma_{\mathrm{B}} \subset S\left(\overline{\Gamma_A}, x^*, a\right)$.

Απόδειξη

Έστω $\gamma = \sup\left\{\langle x^*, x\rangle : x \in \Gamma_A\right\} - a$. Ορίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων στον L_1 που μηδενίζονται εκτός A ως $L_1(A)$ (και ορίζουμε $L_\infty(A)$ ομοίως) . Επειδή $a > 0$, υπάρχει συνάρτηση $\phi \in P(\mu, A)$ τέτοια ώστε $\langle x^*, T\phi\rangle > \gamma$. Το σύνολο

$$K = \left\{\psi : 0 \le \psi \in L_1(A), \langle x^*, T\psi\rangle \le \gamma \|\psi\|_1\right\}$$

είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος στον $L_1(A)$ το οποίο δεν περιέχει την ϕ . Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $g \in L_\infty(A)$ τέτοια ώστε $\int \phi g > \sup\left\{\int \psi g : \psi \in K\right\}$. Επειδή το K είναι κώνος θα έχουμε ότι $\sup\left\{\int \psi g : \psi \in K\right\} = 0$. Το σύνολο $\mathrm{B} = \{\omega : g(\omega) > 0\}$ έχει θετικό μέτρο επειδή $\phi \ge 0$ και $\int \phi g > 0$. Άρα , αν η ψ με $0 \le \psi \in L_1(\mathrm{B})$, ικανοποιεί $\int \psi = 1$, τότε $\int \psi g > 0$, δηλαδή $\psi \notin K$. Επομένως $\Gamma_{\mathrm{B}} \subset S\left(\overline{\Gamma_A}, x^*, a\right)$. □

Λήμμα 35

Έστω (Ω, B, μ) ένας χώρος πιθανότητας , και έστω $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αύξουσα ακολουθία από σ-υποάλγεβρες της B . Έστω $\{g_n\}$ μια ακολουθία από X-valued B_n -μετρήσιμες και Bochner ολοκληρώσημες συναρτήσεις τέτοια ώστε για ένα $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|g_n - E_{B_n} g_{n+1}\right\|_1 < \varepsilon$$

Τότε υπάρχει ένα B_n-adapted martingale $\{f_n\}$ τέτοιο ώστε $\|g_n - f_n\|_1 \le \varepsilon$ για κάθε n .

<u>Απόδειξη Θεωρήματος 33 [BL]</u>

α)$\Rightarrow$β) Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας και $T: L_1(\mu) \to X$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής με $T\phi \in C$ για κάθε $\phi \in P(\mu)$. Έστω A ένα σύνολο με $\mu(A) > 0$. Από το α) , το σύνολο $\overline{\Gamma_A} \subset C$ είναι dentable . Οπότε από το λήμμα 34 , για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\mathrm{B} \subset A$ με $diam(\Gamma_{\mathrm{B}}) < \varepsilon$. Από το λήμμα 32 ο τελεστής T είναι αναπαραστάσιμος , και επειδή ο T ήταν αυθαίρετος , το σύνολο C έχει την RNP από την πρόταση 31 .

β)$\Rightarrow$γ) Έστω (Ω, B, μ) ένας χώρος πιθανότητας και B_n μια αύξουσα ακολουθία από σ-υποάλγεβρες της B . Υποθέτουμε ότι η B παράγεται από την $\bigcup B_n$. Έστω $\{f_n\}$ ένα B_n-adapted martingale με $f_n: \Omega \to C$. Αν $A \in B_m$ για κάποια m , τότε $\int_A f_n d\mu = \int_A f_m d\mu$ για κάθε $n \ge m$. Οπότε το $\lim \int_A f_n d\mu = \tau(A)$ υπάρχει για κάθε $A \in B$. Το διανυσματικό μέτρο τ έχει πεπερασμένη κύμανση και $\tau(A)/\mu(A) \in C$ οπότε $\mu(A) > 0$. Επειδή το C έχει την RNP , υπάρχει $f \in L_\infty(\mu, X)$ τέτοια ώστε $\tau(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε A . Αν το $A \in B_m$ τότε $\int_A f d\mu = \tau(A) = \int_A f_m d\mu$, οπότε $f_m = E_{B_m} f$. Άρα , από όλα τα παραπάνω, καθώς και από την ίδια την πρόταση θα έχουμε $\|f_n - f\|_1 \to 0$ σχεδόν παντού .

γ)$\Rightarrow$α) Υποθέτουμε ότι το α) δεν ισχύει και ότι το C δεν είναι dentable , οπότε υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{co}(C \setminus B(x, \varepsilon))$ για κάθε $x \in C$. Θα κατασκευάσουμε μια αύξουσα ακολουθία από πεπερασμένες υποάλγεβρες B_n του $[0,1]$ και B_n-μετρήσιμες συναρτήσεις $g_n: [0,1] \to C$ τέτοιες ώστε

1) $|g_n(t) - g_{n+1}(t)| \ge \varepsilon$ για κάθε n και για κάθε $t \in [0,1]$, και

2) $\sum \|g_n - E_{B_n} g_{n+1}\| \le \varepsilon/4$

Αν γίνει αυτό , τότε η απόδειξη θα έχει τελειώσει . Στην πραγματικότητα , από το λήμμα 35 θα κατασκευάσουμε από τη g_n ένα B_n-adapted-martingale $\{f_n\}$ με $\|f_n - g_n\|_1 \le \varepsilon/4$ για κάθε n . Τότε $\|f_n - f_{n+1}\| \ge \varepsilon/2$ για κάθε n από το 1) , οπότε η $\{f_n\}$ δεν συγκλίνει στη νόρμα (ή σχεδόν παντού) .

Έστω B_1 η τετριμμένη άλγεβρα που περιέχει το $\varnothing$ και το $[0,1]$ και ορίζουμε $g_1 = x$ για κάποια $x \in C$. Υποθέτουμε ότι η B_n και g_n έχουν ήδη κατασκευαστεί . Έστω $[0,1] = \bigcup_{i=1}^m A_i$ η διαμέριση του $[0,1]$σε στοιχεία της B_n και ορίζουμε $g_n = \sum_{i=1}^m x_i \chi_{A_i}$ για κατάλληλα $x_i \in C$. Από την επιλογή του ε μπορούμε να βρούμε διανύσματα $\{x_{i,j}\}_{j=1}^{k_i}$ στο C και $\lambda_{i,j} \geq 0, \sum \lambda_{i,j} = 1$ τέτοια ώστε $\|x_i - x_{i,j}\| \geq \varepsilon$ και $\left\|\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{i,j} x_{i,j} - x_i\right\| \leq \varepsilon / 2^{n+3}$. Διαμερίζουμε κάθε A_i σε ξένα σύνολα $\{A_{i,j} : j \leq k_i\}$ με $m(A_{i,j}) = \lambda_{i,j} m(A_i)$ για κάθε i και j , παίρνουμε B_{n+1} να είναι η άλγεβρα της οποίας τα στοιχεία είναι τα $A_{i,j}$ και ορίζουμε $g_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{i,j} \chi_{A_{i,j}}$. Τότε τα (1) και (2) ισχύουν . □

Κεφάλαιο 2

2.1 Ιδιότητες των χώρων $L_p[0,1]$ $(1 \le p < \infty)$

Θεώρημα 1 (Khinchine's Inequalities) [D]

Έστω $(r_n)_{n\ge 1}$ *η ακολουθία των Rademacher συναρτήσεων . Τότε για κάθε* p *με* $1 \le p < \infty$ *υπάρχει μια σταθερά* $k_p > 0$ *τέτοια ώστε*

$$k_p^{-1}\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left\|\sum_i a_i r_i\right\|_p \le k_p\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ισχύει , για κάθε πεπερασμένη ακολουθία (a_i) *πραγματικών αριθμών .*

Απόδειξη

Οι Rademacher συναρτήσεις είναι ορθοκανονικές στο $[0,1]$ με sup norm 1 . Συνεπώς , χρειάζεται να δείξουμε μόνο ότι υπάρχουν σταθερές όπως στις ακόλουθες συνθήκες :

i) Αν $2 \le p$, τότε πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα $K > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left\|\sum_i a_i r_i\right\|_p \le K\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ii) Αν $1 \le p < 2$, τότε πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα $k > 0$ τέτοιο ώστε

$$k\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left\|\sum_i a_i r_i\right\|_p$$

Ας επαληθεύσουμε τώρα την ανισότητα Khinchine για $p \ge 2$. Η μονοτονία των $L_p - norm$ μας επιτρέπει να πάρουμε το p άρτιο , έστω $p = 2l$, όπου $l \ge 1$ φυσικός αριθμός . Επίσης

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i$$

και παίρνουμε το ολοκλήρωμα της p-δυναμής του πάνω στο $[0,1]$. Με τη βοήθεια της διωνυμικής ταυτότητας έχουμε

$$\int_0^1 S_n^p(t)\,dt = \int_0^1 S_n^{2l}(t)\,dt$$

$$= \int \left(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right)^{2l}$$

$$= \sum A_{a_1,\dots,a_j} a_{i_1}^{a_1} \dots a_{i_j}^{a_j} \int r_{i_1}^{a_1} \dots r_{i_j}^{a_j}$$

με $a_1,\dots,a_j$ θετικούς ακέραιους ,

$$\sum a_j = 2l \,,$$

$$A_{a_1,\dots,a_j} = \frac{(a_1+\dots+a_j)}{(a_1)!\dots(a_j)!} \,,$$

και $i_1,\dots,i_j$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ακέραιοι μεταξύ 1 και n . Επίσης , επειδή οι r_i είναι Rademacher συναρτήσεις , βλέπουμε ότι η μορφή του $\int S_n^p$ είναι πραγματικά πιο απλή από την αρχική , οπότε

$$\int S_n^p = \int S_n^{2l} = \sum A_{2\beta_1,\dots,2\beta_j} a_{i_1}^{2\beta_1} \dots \alpha_{i_j}^{2\beta_j}$$

επειδή το $\int r_{i_1}^{a_1} \dots r_{i_j}^{a_j}$ είναι 0 ή 1 ανάλογα με την ύπαρξη των πρώτων δυνάμεων $a_1,\dots,a_j$ ή την μη ύπαρξη αυτών . Φυσικά , σε αυτή τη μορφή του $\int S_n^p$, ξέρουμε ότι τα $\beta_1,\dots,\beta_j$ είναι θετικοί ακέραιοι και $\sum \beta_j = l$. Επίσης έχουμε :

$$\int S_n^p = \sum \frac{A_{2\beta_1,\dots 2\beta_j}}{A_{\beta_1,\dots,\beta_j}} A_{\beta_1,\dots,\beta_j} a_{i_1}^{2\beta_1} \dots a_{i_j}^{2\beta_j}$$

Θα δούμε τώρα αν ικανοποιείται η ανισότητα Holder παρέχοντας ένα άνω φράγμα για τα πηλίκα $A_{2\beta_1,\dots,2\beta_j} \big/ A_{\beta_1,\dots,\beta_j}$ ως ακολούθως

$$\frac{A_{2\beta_1,\dots,\beta_j}}{A_{\beta_1,\dots,\beta_j}} = \frac{(2l)!}{(2\beta_1)!\dots(2\beta_j)!} \frac{(\beta_1)!\dots(\beta_j)!}{(l)!}$$

$$= \frac{(2l)(2l-1)\dots(l+1)(l)!(\beta_1)!\dots(\beta_j)!}{(2\beta_1)\dots(\beta_1+1)(\beta_1)!\dots(2\beta_j)\dots(\beta_j+1)(\beta_j)!(l)!}$$

$$=\frac{(2l)(2l-1)\dots(l+1)}{(2\beta_1)\dots(\beta_1+1)\dots(2\beta_j)\dots(\beta_j+1)}$$

$$\leq \frac{(2l)(2l-1)\dots(l+1)}{2^{\beta_1}\dots2^{\beta_j}} = \frac{(2l)(2l-1)\dots(l+1)}{2^{\beta_1+\dots+\beta_j}}$$

$$\leq \frac{l^l}{2^l} \ .$$

Αυτό μας δίνει

$$\int S_n^{2l} \leq \left(\frac{l}{2}\right)^l \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^l \ .$$

Από το παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\left(\int S_n^p\right)^{1/p} = \left(\int S_n^{2l}\right)^{1/2l} \leq \sqrt{\frac{l}{2}}\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}$$

που αποδεικνύει το (i).

Για να αποδείξουμε το (ii) θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Liapounov : Αν η $f>0$ ανήκει σε όλους τους $L_p[0,1]$ για $p>0$, τότε η $\log\int_0^1 f^p$ είναι μια κυρτή συνάρτηση για $p>0$.

Για την απόδειξη του (ii) θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση που $1\leq p<2$. Παίρνουμε λ_1 και λ_2 έτσι ώστε $\lambda_1,\lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$ και $p\lambda_1+4\lambda_2=2$. Τότε

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) = \|S_n\|_2^2$$

$$\leq \|S_n\|_p^{p\lambda_1}\|S_n\|_4^{4\lambda_2} \quad \text{(από την ανισότητα Liapounov)}$$

$$\leq \|S_n\|_p^{p\lambda_1}\left[\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}\right]^{4\lambda_2}$$

από το (i) . Διαιρώντας και τα δυο μέλη με την κατάλληλη ποσότητα παίρνουμε

$$4^{-\frac{\lambda_2}{p\lambda_1}}\left(\sum a_i^2\right)^{1/2} \leq \|S_n\|_p$$

η οποία αποδεικνύει το (ii) .

Θεώρημα 2 (Banach – Saks)

Υποθέτουμε ότι $1 < p \le 2$ *. Αν η* (f_n) *είναι μιαι ασθενώς μηδενική ακολουθία στον* $L_p[0,1]$ *, τότε η* (f_n) *έχει μια υπακολουθία* (f_{k_n}) *με την ιδιότητα*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_{k_i} \right\| = O\left(n^{1/p} \right) .$$

Πόρισμα 3

Αν $1 < p \le 2$ *, τότε κάθε φραγμένη ακολουθία στον* $L_p[0,1]$ *έχει μια υπακολουθία της οποίας οι μέσοι όροι συγκλίνουν στη νόρμα .*

Τώρα θα διατυπώσουμε μια ‘μικρή βελτίωση ’ του θεωρήματος Banach- Saks στην περίπτωση του $L_2[0,1]$, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ότι αν η (f_n) είναι μια ασθενής μηδενική ακολουθία στον $L_2[0,1]$, τότε υπάρχει μια υπακολουθία της (f_{k_n}) με την ακόλουθη ιδιότητα

$$\lim_n \sup_{j_1 < \ldots < j_n} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_{k_{j_i}} \right\|_2 = 0 .$$

Υποθέτουμε ότι $\|f_n\|_2 \le 1$ για κάθε n και ότι η (f_n) είναι ασθενώς μηδενική . Έστω $k_1 = 1$ και διαλέγουμε $k_2 > k_1$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 f_{k_1}(t)\, f_{k_2}(t)\, dt < \frac{1}{2} .$$

Επαναλαμβάνουμε το παραπάνω , έστω $k_3 > k_2$ με

$$\int_0^1 f_{k_1}(t)\, f_{k_3}(t)\, dt, \int_0^1 f_{k_2}(t)\, f_{k_3}(t)\, dt < \frac{1}{3} .$$

Ομοίως , επιλέγουμε $k_4 > k_3$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 f_{k_1}(t)\, f_{k_4}(t)\, dt, \int_0^1 f_{k_2}(t)\, f_{k_4}(t)\, dt, \int_0^1 f_{k_3}(t)\, f_{k_4}(t)\, dt < \frac{1}{4} .$$

Τώρα είναι σαφές πώς προχωράει η μέθοδος της εύρεσης της υπακολουθίας . Έστω $j_1 < \ldots < j_n$. Τότε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_{k_{j_i}} \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\| f_{k_{j_i}} \right\|_2^2 + 2 \sum_{1 \le l < i \le n} \int_0^1 f_{n_{i_l}}\, f_{n_{i_j}}$$

$$\leq n+2\sum_{i=2}^{n}\sum_{l=1}^{i-1}\left(j_i\right)^{-1}=n+\sum_{i=2}^{n}\frac{i-1}{j_i}$$

$$\leq n+2n=3n\,.$$

Οπότε ο ισχυρισμός που διατυπώσαμε είναι αληθής .

<u>Λήμμα 4 (Diagonal Lemma)</u>

Έστω $\left(f_n\right)$ μια ασθενώς μηδενική ακολουθία στον $L_1\left[0,1\right]$. Τότε για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει υπακολουθία $\left(g_n\right)$ της $\left(f_n\right)$ τέτοια ώστε

$$\overline{\lim_k}\sup_{n_1<\ldots<n_k}\left\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}g_{n_i}\right\|_1\leq\varepsilon.$$

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι $\left\|f_n\right\|_1\leq 1$ για κάθε n . Έστω m,n θετικοί ακέραιοι και

$$E_{m,n}=\left\{t:\left|f_n\left(t\right)\right|\geq m\right\}$$

οπότε (αν το λ είναι το μέτρο Lebesgue)

$$\left|f_n\right|_1=\int_0^1\left|f_n\left(t\right)\right|\geq\int_{E_{m,n}}\left|f_n\left(t\right)\right|\geq m\lambda\left(E_{m,n}\right)$$

συνεπώς

$$\lambda\left(E_{m,n}\right)\leq\frac{1}{m}\;.$$

Επειδή το σύνολο $\left\{f_n:n\geq 1\right\}$ είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές στον $L_1\left[0,1\right]$, το κριτήριο Dunford-Pettis [DU] εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $n>0$ με $\int_E\left|f_n\left(t\right)\right|dt\leq\frac{\varepsilon}{3}$ όταν $\lambda\left(E\right)\leq n$. Με τον υπολογισμό που έγινε παραπάνω , βρήκαμε ότι υπάρχει ένα m_0 τέτοιο ώστε

$$\int_{E_{m_0,n}}\left|f_n\left(t\right)\right|dt\leq\frac{\varepsilon}{3}$$

για κάθε n . Ορίζουμε $\overline{f_n}$ ως

$$\overline{f_n}\left(t\right)=\begin{cases}f_n\left(t\right),t\in E_{m_0,n}\\0,t\notin E_{m_0,n}\end{cases}$$

Είναι σαφές ότι $f_n(t)-\overline{f_n}(t)$ είναι ακριβώς $f_n C_{[|f_n(t)|\le m_0]}$, και έτσι $f_n-\overline{f_n}\in m_0 B_{L_2[0,1]}$.
Από την ασθενή συμπάγεια του $m_0 B_{L_2[0,1]}$, μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία (n_k) από θετικούς ακέραιους και ένα $h\in m_0 B_{L_2[0,1]}$ τέτοιο ώστε

$$h = weak\lim_{k\to\infty} f_{n_k}-\overline{f}_{n_k}$$

Επίσης

$$\lim_k \sup_{i_k<\ldots<i_k}\left\|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(f_{n_{ij}}-\overline{f}_{n_{ij}}\right)-h\right\|_2 = 0 \ .$$

Επειδή $\left(f_{n_k}-\overline{f}_{n_k}\right)$ συγκλίνει ασθενώς στο h στον $L_2[0,1]$, το ίδιο ισχύει και στον $L_1[0,1]$. Αλλά η $\left(f_{n_k}\right)$ είναι ασθενώς μηδενική στον $L_1[0,1]$ οπότε

$$-h = weak\lim_k \overline{f}_{n_k} \ .$$

Επίσης

$$\left\|\overline{f}_{n_k}\right\|_1 = \int_{E_{m_0,n_k}}|f_n(t)|dt \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{για κάθε } k \quad \text{και } \|h\|_1 \le \frac{\varepsilon}{3} \ .$$

Από όλα τα παραπάνω , αν το k είναι αρκετά μεγάλο έχουμε ότι

$$\sup_{i_1<\ldots<i_k}\left\|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(f_{n_{ij}}-\overline{f}_{n_{ij}}\right)-h\right\|_1 \le$$
$$\sup_{i_1<\ldots<i_k}\left\|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(f_{n_{ij}}-\overline{f}_{n_{ij}}\right)-h\right\|_2 \le \frac{\varepsilon}{3} \ ,$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι για το ίδιο μεγάλο k έχουμε ,

$$\sup_{i_1<\ldots<i_k}\left\|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f_{n_{i_j}}\right\|_1$$

$$\le \sup_{i_1<\ldots<i_k}\left(\left\|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(f_{n_{i_j}}-\overline{f}_{n_{i_j}}\right)-h\right\|_1 + \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{k}\left\|f_{n_{i_j}}\right\|_1 + \|h\|_1\right) \le \varepsilon \ .$$

Δηλαδή η $g_k = f_{n_k}$ είναι η υπακολουθία που θέλαμε αποδεικνύοντας το ζητούμενο .

Θεώρημα 5 (Szlenk)

Κάθε ασθενής συγκλίνουσα ακολουθία στον $L_1[0,1]$ *έχει μια υπακολουθία της οποίας οι μέσοι όροι συγκλίνουν ως προς τη νόρμα .*

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι μια ασθενώς μηδενική ακολουθία στον $B_{L_1[0,1]}$. Αν γίνουν πολλές επαναλήψεις του diagonal λήμματος , τότε μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $\left(n_k(l)\right)_{l=1}^{\infty}$ από γνήσια αύξουσες ακολουθίες ακέραιων αριθμών , ώστε κάθε επόμενη ακολουθία να είναι υπακολουθία της προηγούμενης και τέτοια ώστε για κάθε l να έχουμε

$$\overline{\lim_{k}} \sup_{i_1<\ldots<i_k} \left\| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f_{n_{i_j}} \right\|_1 \le \frac{1}{l} \ .$$

Φυσικά η υπακολουθία που ζητάμε είναι ακριβώς η (g_n) της οποίας ο m-οστός όρος είναι ο $f_{n_m}(m)$. Πράγματι αν $k>l$, τότε

$$\left\| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} g_j \right\|_1 \le \left\| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{l} g_j \right\|_1 + \frac{k-l}{l}\left\| \frac{1}{k-l}\sum_{j=l+1}^{k} g_j \right\|_1$$

$$\le \left\| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{l} g_j \right\| + \left\| \frac{1}{k-l}\sum_{j=1}^{k-l} f_{n_{l+j}}(l+j) \right\|_1 .$$

Επίσης

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} g_j \right\|_1 \le \overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{l} g_j \right\| + \overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| \frac{1}{k-l}\sum_{j=1}^{k-l} f_{n_{l+j}}(l+j) \right\|_1$$

Ο πρώτος όρος $\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{l} g_j \right\|$ του παραπάνω αθροίσματος είναι 0 . Για σταθερό l και αφήνοντας το k να πηγαίνει στο ∞ , με $k>l$ έχουμε ότι ο δεύτερος όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι μικρότερος από $1/l$. Αυτό έπεται από το diagonal λήμμα . Άρα έχουμε

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} g_j \right\|_1 \le \frac{1}{l}$$

για όποιο l έχουμε διαλέξει . Αυτό μας δίνει ότι

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} g_j \right\|_1 = 0 \ .$$

Τα παραπάνω μπορούν να βρεθούν στο [D] .

Θεώρημα 6 (LEWIS-STEGALL)

Ένας χώρος Banach X έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα σε σχέση με τον (Ω,Σ,μ) αν και μόνο αν κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T: L_1(\mu)\to X$ επιδέχεται παραγοντοποίηση $T = LS$, όπου $L: l_1 \to X$ και $S: L_1(\mu)\to l_1$ είναι συνεχής γραμμικοί τελεστές .

Σε αυτή την περίπτωση , για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να διαλέξουμε L, S τέτοιους ώστε $\|S\| \le \|T\| + \varepsilon$ και $\|L\| \le 1$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τα τρία παρακάτω θεωρήματα και το παρακάτω πόρισμα :

Θεώρημα 6.1 (HILLE)

Έστω $T: X \to Y$ κλειστός γραμμικός τελεστής , όπου X, Y είναι χώροι Banach. Αν οι f και Tf είναι Bochner ολοκληρώσιμες σε σχέση με το μ , τότε

$$T\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E Tf d\mu$$

για κάθε $E \in \Sigma$.

Απόδειξη

Παραπέμπουμε στο [DU] σελ . 47 .

Θεώρημα 6.2

Έστω X ένας χώρος Banach και (Ω,Σ,μ) ένας πεπερασμένος χώρος μέτρου. Τότε ο X έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα σε σχέση με τον (Ω,Σ,μ) αν και μόνο αν κάθε $T: L_1(\mu)\to X$ είναι αναπαραστάσιμος .

Απόδειξη

Παραπέμπουμε στο [DU] σελ . 63 και σελ . 27 της παρούσας .

Πόρισμα 6.3

Μια συνάρτηση $f:\Omega \to X$ είναι μ-μετρήσιμη αν και μόνο αν η f είναι το μ-σχεδόν παντού ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας από αριθμήσιμες μ-μετρήσιμες συναρτήσεις .

Θεώρημα 6.4 (Dominated Convergence Theorem)

Έστω (Ω,Σ,μ) ένας πεπερασμένος χώρος μέτρου και (f_n) μια ακολουθία από Bochner ολοκληρώσιμες X-valued συναρτήσεις στον Ω . Αν $\lim_n f_n = f$ κατά μέτρο (δηλαδή $\lim_n \mu\{\omega\in\Omega : \|f_n - f\| \geq \varepsilon\} = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$) και υπάρχει μια πραγματική Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση g στον Ω με $\|f_n\| \leq g$ μ-σχεδόν παντού , τότε η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\lim_n \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ για κάθε $E\in\Sigma$. Στην πραγματικότητα , $\lim_n \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0$.

Απόδειξη

Παραπέμπουμε στο [DU] σελ . 45 .

Απόδειξη Θεωρήματος 6

Έστω ότι ο $T : L_1(\mu) \to X$ επιδέχεται μια τέτοια παραγοντοποίηση . Επειδή ο l_1 έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα, υπάρχει μια Bochner μ-ολοκληρώσιμη $g:\Omega\to l_1$ τέτοια ώστε για κάθε $f\in L_1(\mu)$ να έχουμε $S(f) = \int_\Omega fgd\mu$. Το γεγονός αυτό συνδυαζόμενο με το θεώρημα 6.1 μας δίνει ότι

$$T(f) = LS(f) = \int_\Omega fL(g)d\mu$$

για κάθε $f\in L_1(\mu)$. Οπότε ο T είναι αναπαραστάσιμος και από το θεώρημα 6.2 η απόδειξη ολοκληρώνεται .

Για το αντίστροφο , υποθέτουμε ότι ο X έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα σε σχέση με τον (Ω,Σ,μ) . Έστω $T : L_1(\mu)\to X$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής . Σύμφωνα με το θεώρημα 6.2 , υπάρχει $g\in L_\infty(\mu, X)$ τέτοια ώστε $T(f) = \int_\Omega fgd\mu$ για κάθε $f\in L_1(\mu)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το πόρισμα 6.3 , υπάρχει ακολουθία από μ-μετρήσιμες συναρτήσεις με αριθμήσιμο πλήθος τιμών τέτοια ώστε $\|g - f_n\|_\infty < \varepsilon 2^{-n-1}$. Ορίζουμε $g_1 = f_1$ και $g_n = f_n - f_{n-1}$ για $n\geq 2$, και έχουμε

$$\left\| g - \sum_{m=1}^{n} g_m \right\|_\infty < \varepsilon 2^{-n-1}$$

για κάθε n . Επίσης ορίζουμε για κάθε n , $g_n = \sum_{k=1}^\infty x_{n,k}\chi_{E_{n,k}}$ όπου $(E_{n,k})_{k=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία από ξένα μέλη της Σ και $\|x_{n,k}\| < \varepsilon 2^{-n}$ για κάθε $n\geq 2$. Ορίζουμε $S : L_1(\mu)\to l_1(N\times N)$ ως

$$S(f)(n,k) = \|x_{n,k}\| \int_{E_{n,k}} fd\mu$$

για $f\in L_1(\mu)$. Τότε έχουμε

$$\|S(f)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n,k}\|\left|\int_{E_{n,k}} fd\mu\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\|x_{1,k}\|\int_{E_{1,k}}|f|d\mu + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n,k}\|\int_{E_{n,k}}|f|d\mu \ .$$

Επειδή $\|g-g_1\|_\infty < \varepsilon/2$ και $\|g\|_\infty = \|T\|$, θα έχουμε ότι $\|x_{1,k}\| < \|T\| + \varepsilon/2$ για κάθε k .
Όμως $\|x_{n,k}\| < \varepsilon 2^{-n}$ για κάθε $n \geq 2$, οπότε

$$\|S(f)\| \leq \left(\|T\| + \varepsilon/2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_{1,k}}|f|d\mu + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon 2^{-n}\int_{E_{n,k}}|f|d\mu$$

$$\leq \left(\|T\| + \varepsilon\right)\|f\|_1 \ .$$

Άρα $\|S\| \leq \left(\|T\| + \varepsilon\right)$.
Επίσης ορίζουμε $L : l_1(N \times N) \to X$ ως ακολούθως

$$L\left(\left(a_{n,k}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\frac{x_{n,k}}{\|x_{n,k}\|}$$

με την παραδοχή ότι $0/0 = 0$. Είναι σαφές ότι $\|L\| \leq 1$.
Τελικά , αν $f \in L_1(\mu)$, τότε από το Dominated Convergence Theorem

$$LS(f) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n,k}\|\int_{E_{n,k}} fd\mu\frac{x_{n,k}}{\|x_{n,k}\|}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} fg_n d\mu = \int_{\Omega} fgd\mu = T(f) \ .$$

2.2 Semi-embedding και sign-embedding του L_1

Ορισμοί 7 ([R] – [BR] – [W])

Έστω X και Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας τελεστής (εννοούμε μια φραγμένη γραμμική απεικόνιση) . Ο T ονομάζεται semi-embedding αν ο T είναι ένα προς ένα και το σύνολο $TB_a(X)$ είναι κλειστό , όπου $Ba(X)$, η μοναδιαία μπάλα του X . Λέμε ότι ο X semi-embeds στον Y αν υπάρχει ένα semi-embedding από τον X στον Y . Επίσης ο T ονομάζεται embedding ή ισομορφισμός , αν υπάρχει ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Συνήθως , ο ‘όρος’ semi-embedding είναι πολύ ασθενέστερος από τον ‘όρο’ embedding . Τέλος , αν

$X = L_1$, λέμε ότι ο T είναι ένα <u>sign-embedding</u> , αν ο T είναι ένα προς ένα και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|Tx\| \geq \delta \|x\|$ όταν η συνάρτηση x παίρνει τιμές $1, 0, -1$.

Λήμμα 8

Έστω X και Y χώροι Banach , $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής και K ένα κλειστό φραγμένο διαχωρίσιμο κυρτό υποσύνολο του X . Υποθέτουμε ότι το σύνολο $T(K)$ είναι κλειστό , και ο $T|_K$ είναι ένα προς ένα . Τότε αν (f_n) είναι ένα K-valued martingale τέτοιο ώστε το (Tf_n) συγκλίνει σχεδόν παντού , το (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού .

Απόδειξη [BR]

Έστω A μια σ-υποάλγεβρα της Σ , και E_A η conditional expectation σε σχέση με την A . Διαλέγουμε μια αύξουσα ακολουθία (A_n) από σ-υποάλγεβρες της Σ , τέτοια ώστε για κάθε n , η (f_n) είναι (A_n) μετρήσιμη με $E_{n-1} f_n = f_{n-1}$ για $n > 1$, όπου $E_n = E_{A_n}$ για κάθε n . Υποθέτουμε ότι η Σ είναι η μικρότερη πλήρης σ-άλγεβρα που περιέχει όλες της A_n . Από την υπόθεση , υπάρχει μια Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε $Tf_n \to g$ σχεδόν παντού (φυσικά η (Tf_n) είναι επίσης ένα martingale σε σχέση με τη (A_n) .) Επειδή το TK είναι κλειστό, υποθέτουμε ότι η g παίρνει τιμές στο TK παντού . Επίσης ορίζουμε $f = T^{-1} g$.Το K είναι διαχωρίσιμο και πλήρες σύνολο και η $T|_K$ είναι μία ένα προς ένα και συνεχής συνάρτηση. Από το κλασικό θεώρημα του Lusin , αν U είναι ένα Borel υποσύνολο του K , το TU είναι επίσης ένα Borel σύνολο , οπότε το σύνολο $f^{-1}(U) = g^{-1}(TU)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο . Άρα η f είναι μετρήσιμη και Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση . Από το θεώρημα <u>Doob martingale convergence</u>, έχουμε ότι $E_n f \to f$ σχεδόν παντού . Μένει ακόμα να δείξουμε ότι $E_n f = f_n$ σχεδόν παντού για κάθε n . Όμως , επειδή ο T είναι ένα προς ένα , είναι αρκετό να δείξουμε ότι $TE_n f = Tf_n$ σχεδόν παντού για κάθε n . Αλλά για συγκεκριμένο n , $TE_n f = E_n Tf = \lim_{m \to \infty} E_n T f_m = \lim_{m \to \infty} TE_n f_m = Tf_n$.

Πόρισμα 9

Έστω X, Y, T και K όπως στο <u>λήμμα 8</u> . Τότε το K έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα αν και μόνο αν το TK έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα .

Περνάμε τώρα στη σχέση του sign-embedding και του semi-embedding του L_1 .

<u>Λήμμα 10</u>

Έστω X *ένας χώρος Banach και* T *ένας τελεστής* $T: L_1 \to X$ *με την ακόλουθη ιδιότητα : Υπάρχει ένα* $\delta > 0$ *, τέτοιο ώστε* $\|Tf\| \geq \delta$ *για κάθε* $f \in L_1$ *με* $\int fdm = 0$ *και* $|f| = 1$ *. Τότε ο* L_1 *sign-embeds στον* X *.*

Είμαστε έτοιμοι να συσχετίσουμε το sign-embedding και το semi-embedding στον L_1 .

Έστω P το σύνολο όλων των πυκνοτήτων πιθανότητας στον L_1 . Δηλαδή , $f \in P$ αν και μόνο αν $f \geq 0$ σχεδόν παντού και $\int fdm = 1$.

<u>Θεώρημα 11 [R]</u>

Έστω X *ένας χώρος Banach με την ακόλουθη ιδιότητα : Υπάρχει ένας ένα προς ένα τελεστής* $T: L_1 \to X$ *και ένα κλειστό φραγμένο κυρτό σύνολο* W *με* TW *κλειστό και* $P \subset W$ *. Τότε ο* L_1 *sign-embeds στον* X *.*

<u>Απόδειξη</u>

Έστω T και W όπως τα ορίσαμε στη διατύπωση του θεωρήματος παραπάνω . Από το <u>λήμμα 10</u> , αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός συνόλου θετικού μέτρου E και ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $\|Tf\| \geq \delta$ για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f με $\int fdm = 0$ και $|f| = \chi_E$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο E . Ορίζουμε $h_0 = 1$ και $E_1 = [0,1]$, μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων (E_n) η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα

α) $E_n = E_{2n} \bigcup E_{2n+1}$ και $E_{2n} \bigcap E_{2n+1} = \varnothing$.

β) $m(E_{2n}) = \dfrac{1}{2} m(E_n)$

και συναρτήσεις (h_n) με $h_n = \chi_{E_{2n}} - \chi_{E_{2n+1}}$ και $\|Th_n\| < \left\| \dfrac{h_n}{2^n} \right\|$ για κάθε n . Στην πραγματικότητα τις h_i τις ορίζουμε με $0 \leq i < n$. Οπότε τα E_n έχουν πλήρως οριστεί. Επιλέγουμε h_n τέτοιο ώστε $\int h_n dm = 0$, $|h_n| = \chi_{E_n}$ και $\|Th_n\| \leq \dfrac{\|h_n\|}{2^n}$. Επίσης ορίζουμε $E_{2n} = \{\omega : h_n(\omega) = 1\}$ και $E_{2n+1} = \{\omega : h_n(\omega) = -1\}$.

Τώρα ορίζουμε ένα martingale που παίρνει τιμές στο P ως

$$\overline{f}_n(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{\|h_i\|} h_i(\omega) \; , \; n = 1, 2, \ldots$$

Επίσης για πολλά $\omega \in [0,1]$ υπάρχουν απείρως πολλά n τέτοια ώστε $|h_n(\omega)| = 1$.
Οπότε $\left\| \overline{f}_{n+1} - \overline{f}_n(\omega) \right\| = 1$ για απείρως πολλά n , οπότε το $\left(\overline{f}_n\right)$ δεν συγκλίνει .
Όμως $\left(T\overline{f}_{n+1} - T\overline{f}_n\right)(\omega) = \dfrac{Th_n}{\|h_n\|} h_n(\omega)$. Άρα $\left\| \left(T\overline{f}_{n+1} - T\overline{f}_n\right)(\omega) \right\| < \dfrac{1}{2^n}$ για κάθε n,
επομένως το $\left(T\overline{f}_n\right)(\omega)$ συγκλίνει για κάθε ω . Η αντίθεση που προκύπτει από το <u>λήμμα 8</u> ολοκληρώνει την απόδειξη .

<u>Λήμμα 12 [R]</u>

Έστω $T : L_1 \to c_0$ ένας τελεστής. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει *μια συνάρτηση r με $|r| = 1$ (και $\int r dt = 0$) τέτοια ώστε $\|Tr\| < \varepsilon$.*

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\|T\| \le 1$. Έστω (e_n) η συνηθισμένη βάση του l_1 και $f_n = T^* e_n$ για κάθε n . Τότε η $f_n \to 0$ ασθενώς* και $\|f_n\|_\infty \le 1$ για κάθε n .

Διαλέγουμε k τέτοιο ώστε $1/k < \varepsilon/2$, και για j με $1 \le j \le k$ θέτουμε $I_j = \left[(j-1)/k, j/k\right)$. Επίσης διαλέγουμε r της μορφής $r = \sum_{j=1}^{k} r_j$, όπου για κάθε j ,

$$r_j(x) = 1 \text{ ή } -1 , \quad \text{αν} \quad x \in I_j$$
$$= 0 , \quad \text{αν} \quad x \notin I_j , \text{ και } \int r_j dt = 0 . \qquad (1)$$

Ακόμα , για κάθε j , $\|r_j\|_1 = 1/k$, οπότε $\|Tr_j\| \le 1/k$. Διαλέγουμε τις r_j ώστε τα Tr_j σχεδόν dislointly supported στο c_0 . Οπότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι

$$\left\| \sum Tr_j \right\| \le 2 \max_j \|Tr_j\| < \varepsilon .$$

Διαλέγουμε r_1 αυθαίρετα ώστε να ικανοποιεί την (1) . Επίσης διαλέγουμε N_1 ώστε $\|Tr_1(n)\| < \varepsilon/4$ για κάθε $n \ge N_1$. Μπορούμε να βρούμε τώρα ακέραιους $N_2, ..., N_k$ και συναρτήσεις $r_2, ..., r_n$ τέτοιες ώστε για κάθε j , με $2 \le j \le k$,

$$N_{j-1} < N_j \text{ και } r_j \text{ να ικανοποιούν την (1)} \qquad (2)$$

$$Tr_j(n) = 0 \quad \text{αν} \quad n < N_{j-1} , \qquad (3)$$

και

$$|Tr_j(n)| < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \quad \text{αν} \quad n \ge N_j . \qquad (4)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή . Υποθέτουμε ότι $2 \le j \le k$ και ότι N_{j-1}, r_{j-1} έχουν ήδη επιλεγεί . Από το <u>Liapunoff convexity theorem [DU]</u> , υπάρχει ένα υποσύνολο E του I_j ώστε

$$\int_E f_n dt = \frac{1}{2}\int_{I_j} f_n dt \qquad \text{για κάθε} \quad n < N_{j-1}$$

και

$$\int_E 1dt = \frac{1}{2}\int_{I_j} 1dt \ . \qquad (5)$$

Τότε η $r_j = \chi_E - \chi_{I_j \sim E}$ ικανοποιεί την (1) και την (3) . Τώρα διαλέγουμε $N_j > N_{j-1}$ ώστε να ισχύει η (4).

Η κατασκευή λοιπόν είναι πλήρης με τη βοήθεια της επαγωγής . Ισχυριζόμαστε ότι η $r = \sum r_j$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες . Εύκολα βλέπουμε ότι η r έχει τιμές $1, -1$ σχεδόν παντού και $\int r dt = 0$. Παίρνουμε n θετικό ακέραιο . Αν $n \geq N_k$ τότε από την (4) έχουμε

$$\left|(Tr)(n)\right| \leq \sum_{j=1}^{k} \left|Tr_j(n)\right| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Αν $n \leq N_1$, τότε $\left|Tr(n)\right| = \left|Tr_1(n)\right| \ \leq \|r_1\|_1 < \varepsilon/2$ από την (3). Διαφορετικά διαλέγουμε $2 \leq i \leq k$ με $N_{i-1} \leq n < N_i$ οπότε

$$\left|Tr(n)\right| = \left|\sum_{j=1}^{i-1} Tr_j(n) + Tr_i(n)\right| \quad \text{(από την (3))}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} + \|r_i\|_1 \qquad \text{(από την (4))}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k} \ .$$

Οπότε $\|Tr\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{1}{k}\right) < \varepsilon$, και το λήμμα αποδείχθηκε .

Θεώρημα 13 [BR]

Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach , Y ένας χώρος Banach , και $T : X \to Y$ μια semi-embedding τέτοια ώστε το $TBa(X)$ να έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα . Τότε ο X έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα .

Απόδειξη

Πρώτα παρατηρούμε ότι το TU είναι σύνολο Borel για όλα τα ανοιχτά σύνολα U . Πράγματι , αν το W είναι κλειστή μπάλα στον X , τότε το TW είναι κλειστό . Επειδή το U είναι αριθμήσιμη ένωση από ανοιχτές μπάλες , το TU είναι ένα F_σ σύνολο . Έστω $S : L_1 \to X$ ένας τελεστής . Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\|S\| \leq 1$. Ο τελεστής είναι αναπαραστάσιμος από μια συνάρτηση ψ επειδή το

TSP παίρνει τιμές στο $TBa(X)$ το οποίο είναι σύνολο που έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα . Επιπλέον την ψ μπορούμε να την επιλέξουμε ώστε να παίρνει τιμές στο $TBa(X)$. Επίσης ορίζουμε $\phi = T^{-1}\psi$ (υπενθυμίζουμε ότι ο T είναι ένα προς ένα και ο T^{-1} ορίζεται στο TX) . Αν το U είναι ανοιχτό σύνολο , τότε το $\phi^{-1}(U) = \psi^{-1}(TU)$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ επειδή το TU είναι Borel σύνολο και η ψ είναι ισχυρά μετρήσιμη . Οπότε η ϕ είναι επίσης ισχυρά μετρήσιμη . Απομένει να δείξουμε ότι η ϕ αναπαριστά τον S . Έστω $f \in L_1$. Θα δείξουμε ότι

$$Sf = \int f\phi dt \ . \qquad (1)$$

Επειδή ο T είναι ένα προς ένα , αρκεί να δείξουμε ότι

$$TSf = T\int f\phi dt \ . \qquad (2)$$

Όμως $T\int f\phi dt = \int f\, T\phi dt = \int f\psi dt$, οπότε η (2) ισχύει επειδή ο TS είναι αναπαραστάσιμος από την ψ , και η απόδειξη ολοκληρώνεται .

<u>Πρόταση 14</u>

Έστω $T : L_1 \to c_0$ ένας τελεστής. Ο T δεν είναι sign-embedding .

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon > 0$. Κατασκευάζουμε συνάρτηση r με $|r| = 1$ σχεδόν παντού και $\int r dm = 0$ έτσι ώστε $\|Tr\| < \varepsilon$. Υποθέτουμε , χωρίς βλάβη της γενικότητας , ότι $\|T\| < 1$. Διαλέγουμε k με $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ και ορίζουμε $I_j = \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right)$ για κάθε j με $1 \le j \le k$. Θα διαλέξουμε r της μορφής $r = \sum_{j=1}^{k} r_j$ όπου για κάθε j ισχύει

$$|r_j| = \chi_{I_j} \quad \text{και} \quad \int r_j dm = 0 \ . \qquad (*)$$

Διαλέγουμε αυθαίρετα την r_1 έτσι ώστε να ικανοποιεί την (*) και N_1 τέτοια ώστε $|Tr_1(n)| < \frac{\varepsilon}{4}$ για κάθε $n \ge N_1$. Χρησιμοποιώντας το Liapunoff convexity theorem διαλέγουμε με επαγωγή $N_2, ..., N_k$ και συναρτήσεις $r_2, ..., r_k$ τέτοιες ώστε για κάθε j , με $2 \le j \le k$,

1) $N_{j-1} < N_j$ και r_j να ικανοποιούν την (*)

2) $Tr_j(n) = 0$ αν $n < N_{j-1}$ και

3) $|Tr_j(n)| < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ αν $n \ge N_j$.

Από τα παραπάνω , έχουμε ότι τα Tr_j έχουν σχεδόν ξένο φορέα στον c_0 και μάλιστα

$$\|Tr\| = \|\Sigma Tr_j\| \le 2\max_j \|Tr_j\| < \varepsilon \ .$$

Κεφάλαιο 3

3.1 Το θεώρημα Krein-Milman και η Radon-Nikodym ιδιότητα

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τη σύνδεση μεταξύ της δομής των extreme σημείων και της Radon-Nikodym ιδιότητας , αποδεικνύοντας ότι ένα κλειστό φραγμένο κυρτό σύνολο σε ένα χώρο Banach με την Radon-Nikodym ιδιότητα είναι η κλειστή κυρτή θήκη των extreme σημείων του.

Τα επόμενα αποτελέσματα ([DU] – [RB]) μας οδηγούν στο θεώρημα Bishop-Phelps . Ξεκινώντας , ορίζουμε για κάθε $x^* \in X^*$ και $M > 0$ ένα κλειστό κυρτό κώνο $K\left(x^*, M\right)$ ως

$$K\left(x^*, M\right) = \left\{x \in X : \|x\| \leq M\, x^*\left(x\right)\right\} .$$

Λήμμα 1

Έστω C ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο του X . Αν $x^* \in X^*$ και x^* είναι φραγμένο στο C και $M > 0$, τότε για κάθε $z \in C$ υπάρχει $x_0 \in C$ με $x_0 - z \in K\left(x^*, M\right)$ και το $x_0 + K\left(x^*, M\right)$ supports το C στο x_0 , δηλαδή

$$C \bigcap \left(x_0 + K\left(x^*, M\right)\right) = \left\{x_0\right\} .$$

Απόδειξη

Θεωρούμε το C μερικά διατεταγμένο , γράφοντας $x \geq y$ όταν $x, y \in C$ και $x - y \in K\left(x^*, M\right)$. Σκοπεύουμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Zorn , οπότε έστω Π μια συλλογή από τα σημεία $x \in C$ με $x \geq z$ και W μια αλυσίδα του Π. Επειδή το $\left(x^*\left(w\right) : w \in W\right)$ είναι ένα μονότονα φραγμένο πραγματικό δίκτυο , αυτό συγκλίνει στο supremum του , a . Επειδή η $\left(x^*\left(w\right) : w \in W\right)$ είναι Cauchy , από τον ορισμό του $K\left(x^*, M\right)$ και αυτόν της μερικής διάταξης έχουμε ότι το $\left\{w : w \in W\right\}$ συγκλίνει στη νόρμα σε ένα στοιχείο x_1 . Η συνέχεια του x^* μας εγγυάται ότι $x_1 \in C$ και $x_1 \in \Pi$. Οπότε κάθε αλυσίδα στο Π έχει ένα άνω φράγμα στο Π και από το

Λήμμα του Zorn , το Π έχει ένα μεγιστικό στοιχείο x_0 . Εύκολα βλέπουμε ότι $x_0 - z \in K\left(x^*, M\right)$ και $x_0 \in C \bigcap \left(x_0 + K\left(x^*, M\right)\right)$. Αν $y \in C \bigcap \left(x_0 + K\left(x^*, M\right)\right)$, τότε $y - x_0 \in K\left(x^*, M\right)$ και $y \geq x_0$. Ακόμα έχουμε $x_0 \geq z$, οπότε $y \geq z$ και από την επιλογή του x_0 έχουμε $y = x_0$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη .

Λήμμα 2

Έστω x^* , $y^* \in X^*$ *με* $\left\|x^*\right\| = \left\|y^*\right\| = 1$. *Αν* $\varepsilon > 0$ *και* $\left|y^*(x)\right| \leq \varepsilon/2$ *όταν* $\|x\| \leq 1$ *και* $x^*(x) = 0$, *τότε* $\left\|x^* - y^*\right\| \leq \varepsilon$ *ή* $\left\|x^* + y^*\right\| \leq \varepsilon$.

Απόδειξη

Περιορίζουμε το y^* στον μηδενόχωρο του x^* . Έστω z^* ένα συναρτησοειδές επέκτασης Hahn-Banach αυτού του περιορισμού . Προφανώς $\left\|z^*\right\| \leq \varepsilon/2$. Επιπλέον , το $y^* - z^*$ μηδενίζεται όταν $x^*(w) = 0$, οπότε $y^* - z^* = ax^*$ για κάποιο a . Επίσης

$$\left|1 - |a|\right| = \left|\left\|y^*\right\| - \left\|y^* - z^*\right\|\right| \leq \left\|z^*\right\| \leq \varepsilon/2 \ .$$

Οπότε αν $a \geq 0$, έχουμε

$$\left\|x^* - y^*\right\| = \left\|(1-a)x^* - z^*\right\| \leq |1-a| + \left\|z^*\right\| \leq \varepsilon \ ,$$

Ενώ , αν $a < 0$, έχουμε

$$\left\|x^* + y^*\right\| = \left\|(1+a)x^* + z^*\right\| \leq |1+a| + \left\|z^*\right\| \leq \varepsilon \ .$$

Σε κάθε περίπτωση , το λήμμα αποδείχτηκε .

Λήμμα 3

Έστω x^* *και* $y^* \in X^*$ *με* $\left\|x^*\right\| = 1 = \left\|y^*\right\|$. *Αν* $0 < \varepsilon < 1$ *και* $M > 1 + 2\varepsilon^{-1}$ *τότε* $\left\|x^* - y^*\right\| \leq \varepsilon$ *όταν το* y^* *είναι μη αρνητικό στο* $K\left(x^*, M\right)$.

Απόδειξη

Διαλέγουμε $x \in X$ τέτοιο ώστε $\|x\| = 1$ και $1 + 2\varepsilon^{-1} < Mx^*(x)$. Αν $y \in X$, $\|y\| < 2\varepsilon^{-1}$ και $x^*(y) = 0$ και έχουμε

$$\|x \pm y\| \leq 1 + 2\varepsilon^{-1} < Mx^*(x) = Mx^*(x \pm y) \ .$$

Συνεπώς $x \pm y \in K\left(x^*, M\right)$. Από την υπόθεση , $y^*\left(x \pm y\right) \geq 0$. Έτσι $\left|y^*\left(y\right)\right| \leq y^*\left(x\right) \leq \|x\| = 1$. Από το Λήμμα 2 έχουμε ότι $\left\|x^* + y^*\right\| \leq \varepsilon$ ή $\left\|x^* - y^*\right\| \leq \varepsilon$. Επειδή όμως ε και $M^{-1} < 1$, υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε $\|z\| = 1$ και $\max\left(\varepsilon, M^{-1}\right) < x^*\left(z\right)$. Τότε $\|z\| \leq Mx^*\left(z\right)$ και $z \in K\left(x^*, M\right)$. Αλλά $y^*\left(z\right) \geq 0$, οπότε

$$\varepsilon < \left(x^* + y^*\right)\left(z\right) \leq \left\|x^* + y^*\right\|,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε .

Θεώρημα 4 (BISHOP-PHELPS)

Έστω C ένα κλειστό φραγμένο κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X . Το σύνολο των συναρτησοειδών που παίρνουν την μέγιστη τιμή τους στο C , είναι norm πυκνό στον X^* .

Απόδειξη

Αρκεί να προσεγγίσουμε το $x^* \in X^*$ με $\left\|x^*\right\| = 1$ με συναρτησοειδή τα οποία παίρνουν την μέγιστη τιμή τους στο C . Θα υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το $0 \in C$.

Έστω $0 < \varepsilon < 1$ και διαλέγουμε $M > 1 + 2\varepsilon^{-1}$. Επειδή $M > 1$, βλέπουμε ότι το $K\left(x^*, M\right)$ είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος με μη κενό εσωτερικό (αν $x_0 \in X$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε $x^*\left(x_0 \left\|x_0\right\|^{-1}\right) > M^{-1}$ τότε το $K\left(x^*, M\right)$ περιέχει μια ανοιχτή μπάλα με κέντρο το $x_0 \left\|x_0\right\|^{-1}$) . Εφαρμόζουμε το Λήμμα 1 στο C με $z = 0$ παίρνοντας $x_0 \in C \bigcap \left(x_0 + K\left(x^*, M\right)\right)$ τέτοιο ώστε το $x_0 + K\left(x^*, M\right)$ supports του C στο x_0 όπως στο Λήμμα 1 . Στη συνέχεια , διαχωρίζουμε το $x_0 + K\left(x^*, M\right)$ από το C με κάποιο $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{x \in C} y^*\left(x\right) = y^*\left(x_0\right) = \inf_{x \in K\left(x^*, M\right)} y^*\left(x + x_0\right)$$

$$= \inf_{x \in K\left(x^*, M\right)} y^*\left(x\right) + y^*\left(x_0\right) \ .$$

Με αυτό το y^* βρίσκουμε ότι

$$y^*\left(x\right) \geq 0 \qquad \text{για} \quad x \in K\left(x^*, M\right) \ .$$

Από το Λήμμα 3 συμπεραίνουμε ότι $\left\|x^* - y^*\right\| \leq \varepsilon$. Επειδή το y^* παίρνει την μέγιστη τιμή του στο $x_0 \in C$, η απόδειξη ολοκληρώθηκε .

Υπάρχει μια διαισθητική σύνδεση μεταξύ των εκφράσεων ‘ένα σύνολο S είναι dentable’ και ‘ένα σύνολο έχει ένα extreme σημείο’ . Αυτό ακριβώς θα μελετήσουμε παρακάτω .

<u>Θεώρημα 5 (LINDENSTRAUSS)</u>

Κάθε μη κενό κλειστό κυρτό και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach που έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα έχει ένα extreme σημείο .

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι ο X έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα και το D είναι ένα μη κενό κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του X . Τότε κάθε μη κενό υποσύνολο του D είναι dentable . Δηλαδή υπάρχει $x_1 \in D$ τέτοιο ώστε

$$x_1 \notin \overline{co}\left(D \setminus B_{2^{-1}}\left(x_1\right)\right) = C_1$$

όπου $B_\delta\left(x_1\right)$ είναι μια ανοιχτή μπάλα ακτίνας $\delta > 0$ με κέντρο το x_1 . Από τη γεωμετρική μορφή του Hahn-Banach θεωρήματος , υπάρχει ένα $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{x \in C_1} x^*\left(x\right) < x^*\left(x_1\right) .$$

Επίσης υπάρχει $x_1^* \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$\sup x_1^*\left(C_1\right) < \sup x_1^*\left(D\right) = x_1^*\left(z_0\right)$$

για κάποιο $z_0 \in D$.

Ορίζουμε $D_1 = \left\{x \in D : x_1^*\left(x\right) = x_1^*\left(z_0\right)\right\}$. Το σύνολο D_1 είναι dentable και έχει διάμετρο ≤ 1 . Επίσης , υπάρχει $x_2 \in D_1$ τέτοιο ώστε

$$x_2 \notin \overline{co}\left(D_1 \setminus B_{2^{-2}}\left(x_2\right)\right) = C_2 .$$

Επιλέγουμε $x_2^* \in X^*$ όπως παραπάνω τέτοιο ώστε

$$\sup x_2^* C_2 < \sup x_2^*\left(D_1\right) = x_2^*\left(z_1\right)$$

για κάποιο $z_1 \in D_1$.

Επίσης , έστω $D_2 = \left\{x \in D_1 : x_2^*\left(x\right) = x^*\left(z_1\right)\right\}$. Τότε , το D_2 είναι ένα μη κενό κλειστό φραγμένο κυρτό dentable υποσύνολο του D_1 με διάμετρο $\leq 2^{-1}$.

Η επαγωγική διαδικασία είναι τώρα ξεκάθαρη . Με επαγωγή , κατασκευάζουμε μια ακολουθία

$$D \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \ldots \supseteq D_n \supseteq \ldots$$

τέτοια ώστε η διάμετρος των D_n να είναι $\leq n^{-1}$ και το D_{n+1} να είναι η ‘εικόνα’ του D_n δηλαδή υπάρχει $x_{n+1}^* \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$D_{n+1} = \left\{ x \in D_n : x_{n+1}^*\left(x\right) = \sup x_{n+1}^*\left(D_n\right) \right\} \neq \varnothing \ .$$

Από την πληρότητα του X έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{x\}$. Αν $x = ay_1 + \left(1-a\right)y_2$ για κάποια y_1 , y_2 και $0 < a < 1$, τότε

$$\sup x_{n+1}^*\left(D_n\right) = x_{n+1}^*\left(x\right) = ax_{n+1}^*\left(y_1\right) + \left(1-a\right)x_{n+1}^*\left(y_2\right)$$

για κάθε $n \geq 1$. Οπότε το y_1 και το y_2 ανήκουν στο $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ και $x = y_1 = y_2$. Άρα το x είναι ένα extreme σημείο του D .

<u>Ορισμός 6</u>

Ένας χώρος Banach X έχει την Krein-Milman ιδιότητα αν κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι η κλειστή κυρτή θήκη των extreme σημείων του.

<u>Θεώρημα 7 (LINDENSTRAUSS)</u>

Αν κάθε μη κενό κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X περιέχει ένα extreme σημείο , τότε ο X έχει την Krein-Milman ιδιότητα .

Ειδικότερα , ένας χώρος Banach που έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα , έχει την Krein-Milman ιδιότητα .

<u>Απόδειξη</u>

Έστω B ένα μη κενό κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του X και E η κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου των extreme σημείων του B . Αν $E \neq B$ τότε , από το διαχωριστικό θεώρημα και από το θεώρημα Bishop-Phelps , υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$\sup x^*\left(E\right) < \sup x^*\left(B\right) = x^*\left(b_0\right)$$

για κάποιο $b_0 \in B$. Λόγω της επιλογής του x^* και του b_0 , το σύνολο

$$C = \left\{ b \in B : x^*\left(b\right) = \sup x^*\left(B\right) \right\}$$

είναι ένα μη κενό κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του X . Από την υπόθεση , το C έχει ένα extreme σημείο και από την επιλογή του x^* βλέπουμε ότι ένα extreme σημείο του C είναι επίσης ένα extreme σημείο του B . Αυτό αντιτίθεται με την υπόθεση ότι $C \bigcap E = \varnothing$ και το θεώρημα αποδεικνύεται .

Στη συνέχεια ορίζουμε τον χώρο $l^2\left(X\right)$ ως

$$l^2(X)=\left\{(x_n)_{n=1}^{\infty}, x_n \in X : \left\|(x_n)\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\|x_n\right\|^2<\infty\right\} .$$

<u>Θεώρημα 11</u>

Ένας χώρος Banach έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα αν και μόνο αν ο $l^2(X)$ έχει την Krein-Milman ιδιότητα .

<u>Απόδειξη</u>

Για την απόδειξη του Θεωρήματος παραπέμπουμε στο [WS] .

<u>Θεώρημα 12 [WS]</u>

Έστω X ένας χώρος Banach που είναι ισομορφικός με τον $X \oplus X$, τότε η Radon-Nikodym ιδιότητα και η Krein-Milman ιδιότητα είναι ισοδύναμες .

<u>Θεώρημα 13</u>

Σε ένα χώρο Banach X , τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :
α) Ο χώρος X^* έχει την Radon-Nikodym ιδιότητα .
β) Ο χώρος X^* έχει την Krein-Milman ιδιότητα .
γ) Κάθε διαχωρίσιμος υπόχωρος του X έχει διαχωρίσιμο δυικό .

<u>Ορισμός 14</u>

Το K λέγεται strongly regular αν για κάθε $L \subset K$ και για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχουν slices $S_1, S_2, \ldots, S_n$ των L έτσι ώστε

$$diam \frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}<\varepsilon .$$

Το ισχυρότερο αποτέλεσμα σχετικά με την ισοδυναμία RNP και KMP είναι το εξής θεώρημα του Schachermayer .

<u>Θεώρημα 15</u>

Αν το K είναι strongly regular τότε η Radon-Nikodym ιδιότητα και η Krein-Milman είναι ισοδύναμες στα υποσύνολα του K .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[DU] J . Diestel and J . J . UHL , JR , *Vector Measures* , Mathematical Surveys , Number 15 , (1979) , (AMS).

[WS] W . Schachermayer , *For a Banach space isomorphic to its square the Radon-Nikodym Property and the Krein-Milman Property are equivalent* , Studia Mathematica , T . LXXXL . (1985).

[RB] R . D . Bourgin , Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property, vol. 993, Springer-Verlag, (1983).

[R] H . P. Rosenthal, *Sign-embeddings of L_1* , Lecture Notes in Math , 995 , University of Texas at Austin , (1983).

[BR] J. Bourgain and H. P. Rosenthal, *Applications of the Theory of Semi-Embeddings to Banach Space Theory*, Journal of Functional Analysis 52 , (1983).

[S] C. Stegall, *The Radon-Nikodym Property in Banach spaces, part I* , Vorlesangen Fachbereich Math . Univ . Essen , 10 , Univ . Essen , Essen , (1983).

[KR] K . Kunen and H. Rosenthal , *Martingale proofs of some geometrical Results in Banach space theory*, Pacific Journal of Mathematics, vol 100, No 1, (1982).

[BL] Y . Benyamini , J . Lindenstrauss , *Geometric Nonlinear Functional Analysis* , vol 48 , Colloquium Publications , AMS , (2000).

[D] J . Diestel , *Sequences and series in Banach spaces* , Springer-Verlag , (1984).

[W] P . Wojtaszczyk , *Banach spaces for analysts* , Cambridge studies in advanced mathematics 25 , (1991).

[Ru] W . Rudin , *Real and complex analysis* , Tata McGraw-Hill , (1974).