Αναφορές

[1] H. Brezis, *Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1997.

[2] W. Allegretto, Y.X. Huang, *A Picone's identity for the p-Laplacian and applications* , Nonlinear Analysis, 32, No7 (1998) 819-830.

[3] Δ. Κανδυλάκης, Μ. Μαγειρόπουλος, Ν. Ζωγραφόπουλος, *The first eigenvalue of p-Laplacian systems with nonlinear boundary conditions,* Boundary Value Problems 3(2005) 307-321.

[4] P. Lindqvist, *On a nonlinear eigenvalue problem*, Lecture Notes, Norwegian University of Science and Technology, Norway.

[5] P.Drabek, J. Hernandez, *Nonlinear Analysis 44* (2001) 189-204.

[6] K.Deimling , *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag , 1980.

[7] E.Hewitt-K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag,1965.

Θεώρημα 3.2. (Egorov) Έστω μια ακολουθία συναρτήσεων f_n τέτοια ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού στον E με $\mu(E) \quad \infty$. Τότε για $n \quad 0$ δοσμένο, υπάρχει $A \subset E$ με $\mu(A) \quad n$ τέτοιο ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $E \setminus A$.

$$\int_{U_n^-}\left|u_n^-\right|^p \le \left(\int_{U_n^-}\left|u_n^-\right|^{p\cdot\frac{s_1}{p}}\right)^{\frac{p}{s_1}}\cdot\left(\int_{U_n^-}1\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}} = \left(\int_{U_n^-}\left|u_n^-\right|^{s_1}\right)^{\frac{p}{s_1}}\cdot\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}.$$

Ομοίως,

$$\int_{V_n^-}\left|\upsilon_n^-\right|^q \le \left(\int_{V_n^-}\left|\upsilon_n^-\right|^{q\cdot\frac{s_2}{q}}\right)^{\frac{q}{s_2}}\cdot\left(\int_{V_n^-}1\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}} = \left(\int_{V_n^-}\left|\upsilon_n^-\right|^{s_2}\right)^{\frac{q}{s_2}}\cdot\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}.$$

Από τις προηγούμενες δυο ανισότητες και τις (3.12),(3.13) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\left\|u_n^-\right\|_{1,p}^p &\le c\left[\left(\int_{U_n^-}\left|u_n^-\right|^{s_1}\right)^{\frac{p}{s_1}}\cdot\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}+\left(\int_{U_n^-}\left|\upsilon_n^-\right|^{s2}\right)^{\frac{q}{s_2}}\cdot\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}\right]\\ &\le c_1\left[\left\|u_n^-\right\|_{1,p}^p\cdot\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}+\left\|\upsilon_n^-\right\|_{1,q}^q\cdot\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}\right] \qquad (3.14)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\left\|\upsilon_n^-\right\|_{1,q}^q &\le c_2\left[\left(\int_{V_n^-}\left|u_n^-\right|^{s_1}\right)^{\frac{p}{s_1}}\cdot\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}+\left(\int_{V_n^-}\left|\upsilon_n^-\right|^{s_2}\right)^{\frac{q}{s_2}}\cdot\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}\right]\\ &\le c_3\left[\left\|u_n^-\right\|_{1,p}^p\cdot\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}+\left\|\upsilon_n^-\right\|_{1,q}^q\cdot\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}\right] \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3.14) και (3.15) έχουμε ότι

$$\left\|u_n^-\right\|_{1,p}^p+\left\|\upsilon_n^-\right\|_{1,q}^q \le c_4\left[\left\|u_n^-\right\|_{1,p}^p\cdot\left(\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}+\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}\right)+\left\|\upsilon_n^-\right\|_{1,q}^q\cdot\left(\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}+\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}\right)\right]$$

$$\left\|u_n^-\right\|_{1,p}^p+\left\|\upsilon_n^-\right\|_{1,q}^q \le c_5\cdot\max\left(\left(\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}+\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}\right),\left(\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}+\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}\right)\right)\cdot\left(\left\|u_n^-\right\|_{1,p}^p+\left\|\upsilon_n^-\right\|_{1,q}^q\right)$$

Άρα

$$1\le c_5\cdot\max\left(\left(\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}+\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_1}{s_1-p}}\right),\left(\mu\left(U_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}+\mu\left(V_n^-\right)^{\frac{s_2}{s_2-q}}\right)\right).$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνομε ότι $\mu\left(U_n^-\right)>\varepsilon$ ή $\mu\left(V_n^-\right)>\varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon \quad 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Egorov (που διατυπώνεται παρακάτω) συμπεραίνουμε ότι η οι u_n και υ_n θα συγκλίνουν ομοιόμορφα στις u_1 και υ_1 αντίστοιχα εκτός από ένα σύνολο θετικού μέτρου το οποίο όμως έρχεται σε αντίθεση με τις τελευταίες δυο ανισότητες, άτοπο.

Διαλέγοντας $\phi \equiv u_n^-$ και $\psi \equiv \upsilon_n^-$ θα έχομε

$$\int_{U_n^-} \left| u_n^{-\prime} \right|^p dx = \lambda_n \int_{U_n^-} \left| u_n^- \right|^p dx + \lambda_n \int_{U_n^-} \left| u_n^- \right|^\alpha \left| \upsilon_n \right|^\beta u_n^- \upsilon_n dx$$

και

$$\int_{V_n^-} \left| \upsilon_n^{-\prime} \right|^q dx = \lambda_n \int_{V_n^-} \left| \upsilon_n^- \right|^q dx + \lambda_n \int_{V_n^-} \left| u_n \right|^\alpha \left| \upsilon_n^- \right|^\beta u_n \upsilon_n^- dx$$

Επειδή οι συναρτήσεις $u_n^- \upsilon_n^+$ και $u_n^+ \upsilon_n^-$ είναι αρνητικές, από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνομε ότι

$$\int_{U_n^-} \left| u_n^{-\prime} \right|^p dx \le \lambda_n \int_{U_n^-} \left| u_n^- \right|^p dx + \lambda_n \int_{U_n^-} \left| u_n^- \right|^\alpha \left| \upsilon_n^- \right|^\beta u_n^- \upsilon_n^- dx$$

και

$$\int_{V_n^-} \left| \upsilon_n^{-\prime} \right|^q dx \le \lambda_n \int_{V_n^-} \left| \upsilon_n^- \right|^q dx + \lambda_n \int_{V_n^-} \left| u_n^- \right|^\alpha \left| \upsilon_n^- \right|^\beta u_n^- \upsilon_n^- dx$$

Από τις ανισότητες των Young και Holder θα έχομε ότι

$$\int_{U_n^-} \left| u_n^- \right|^\alpha \left| \upsilon_n^- \right|^\beta u_n^- \upsilon_n^- dx = \int_{U_n^-} \left| u_n^- \right|^{\alpha+1} \left| \upsilon_n^- \right|^{\beta+1} dx \le \int_{U_n^-} \left| u_n^- \right|^p dx + \int_{U_n^-} \left| \upsilon_n^- \right|^q dx$$

Άρα

$$\left\| u_n^- \right\|_{1,p}^p \le \left(\lambda_1 + \eta \right) \left[\left\| u_n^- \right\|_{L^p(U_n^-)}^p + \left\| \upsilon_n^- \right\|_{L^q(U_n^-)}^q \right] \tag{3.12}$$

Ομοίως,

$$\left\| \upsilon_n^- \right\|_{1,q}^q \le \left(\lambda_1 + \eta \right) \left[\left\| \upsilon_n^- \right\|_{L^q(V_n^-)}^q + \left\| u_n^- \right\|_{L^p(V_n^-)}^p \right] \tag{3.13}$$

Έστω ότι $s_1 > p$ και $s_2 > q$. Τότε $u_n^- \in L^{s_1}$ και συνεπώς $\left| u_n^- \right|^p \in L^{\frac{s_1}{p}}$.
Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Holder έχουμε

$$\int_{U_n^-} \left| u_n^- \right|^p \cdot 1 \le \left\| \left| u_n^- \right|^p \right\|_{\frac{s_1}{p}} \cdot \left\| 1 \right\|_{\left(\frac{s_1}{p} \right)'},$$

όπου

$$\left(\frac{s_1}{p} \right)' = \frac{\frac{s_1}{p}}{\frac{s_1}{p} - 1} = \frac{s_1}{s_1 - p}.$$

Άρα

$$\int_I \left(|\upsilon_n'|^{q-2}\, \upsilon_n' \; - \; |\upsilon_1'|^{q-2}\, \upsilon_1' \right)\left(\upsilon_n' - \upsilon_1'\right) dx =$$

$$\lambda_n \int_I \left(|\upsilon_n|^{q-2}\, \upsilon_n \; - \; |\upsilon_1|^{q-2}\, \upsilon_1 \right)\left(\upsilon_n - \upsilon_1\right) dx \; + \; \lambda_n \int_I \left(|u_n|^{\alpha} |\upsilon_n|^{\beta} u_n \; - \; |u_1|^{\alpha} |\upsilon_1|^{\beta} u_1 \right)\left(\upsilon_n - \upsilon_1\right) dx$$
$$+ \left(\lambda_n - \lambda_1\right)\left[\int_I |\upsilon_1|^{q-2}\, \upsilon_1 \left(\upsilon_n - \upsilon_1\right) dx \; + \; \int_I |u_1|^{\alpha} |\upsilon_1|^{\beta} u_1 dx \right]$$

Χρησιμοποιώντας τη συμπάγεια του τελεστή $\tilde{J}$ και την μονοτονία του p-Λαπλασιανού τελεστή έχουμε ότι

$$\int_I |u_n'|^p dx \to \int_I |u_1'|^p dx \qquad \text{και}$$

$$\int_I |\upsilon_n'|^q dx \to \int_I |\upsilon_1'|^q dx$$

Ορισμός 3.1 Έστω E ένας γραμμικός χώρος με νόρμα με την ιδιότητα , αν $\left(x_n\right)$ ακολουθία στον E, $x \in E$, $\|x_n\| = 1$, και $\|x\| = 1$, τότε από την σχέση

$$\left\| \frac{x_n + x}{2} \right\| \to 1$$

Θα έχομε

$$\|x_n - x\| \to 0.$$

Τέτοιοι χώροι λέγονται **αυστηρά κυρτοί**.

Πρόταση 3.1 Έστω $\left(y_n\right)$ ακολουθία στον E και y ένα στοιχείο του E τέτοιο ώστε

$$\|y_n\| \to \|y\|$$

και

$$y_n \to y \quad \text{ασθενώς.}$$

Τότε

$$\|y_n - y\| \to 0 .$$

Από την αυστηρή κυρτότητα του $W_0^{1,p}\left(I\right)$ και του $W_0^{1,q}\left(I\right)$ συνάγομε ότι $(u_n, \upsilon_n) \to (u_1, \upsilon_1)$ ισχυρά στον E. Για ένα συγκεκριμένο $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $(\phi, \psi) \in E$ έχουμε ότι

$$\int_I |u_n'|^{p-2} u_n' \phi' dx = \lambda_n \int_I |u_n|^{p-2} u_n \phi dx + \lambda_n \int_I |u_n|^{\alpha} |\upsilon_n|^{\beta} \upsilon_n \phi dx$$

και

$$\int_I |\upsilon_n'|^{q-2} \upsilon_n' \psi' dx = \lambda_n \int_I |\upsilon_n|^{q-2} \upsilon_n \psi dx + \lambda_n \int_I |u_n|^{\alpha} |\upsilon_n|^{\beta} u_n \psi dx$$

Έστω ότι $U_n^- = \left\{ x \in \overline{I} : u_n\left(x\right) < 0 \right\}$ και $V_n^- = \left\{ x \in \overline{I} : \upsilon_n\left(x\right) < 0 \right\}$. Θα πρέπει $\mu\left(I_n^-\right) > 0$ όπου $I_n^- = U_n^- \cup V_n^-$. Ορίζουμε $u_n^- = \min\left(0, u_n\right)$ και $\upsilon_n^- = \min\left(0, \upsilon_n\right)$.

$$\lambda_* \geq \frac{I(u_*,\upsilon_*)}{J(u_*,\upsilon_*)} = I(u^*,\upsilon^*) \geq \lambda_1$$

η οποία είναι αντίθετη στην αρχική μας υπόθεση.

ii) Στη συνέχεια θα δείξομε ότι το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν στην πρώτη ιδιοτιμή λ_1 είναι το:

$$E_2 = \left\{ \pm(cu_1, c^{\frac{p}{q}}\upsilon_1) : c > 0 \right\}.$$

Έστω ότι το (u,υ) είναι ένα ιδιοζεύγος του συστήματος (3.2) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1. Αν $u\upsilon \geq 0$ τότε τα δεξιά μέλη των εξισώσεων στα συστήματα (3.1) και (3.2) ταυτίζονται και άρα το (λ_1, u, υ) θα είναι ιδιοζεύγος του (3.1). Από την άλλη δεν μπορούμε να έχουμε $u\upsilon < 0$ σε ένα σύνολο με θετικό μέτρο γιατί τότε

$$\lambda_1 = \frac{I(u,\upsilon)}{\tilde{J}(u,\upsilon)} > \frac{I(u,\upsilon)}{J(u,\upsilon)} = \lambda_1,$$

που είναι άτοπο.

iii) Στην παράγραφο αυτή θα δείξομε ότι η πρώτη ιδιοτιμή λ_1 είναι απομονωμένη με την έννοια ότι υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε το διάστημα $(0, \lambda_1 + \eta)$ να μην περιέχει καμία άλλη ιδιοτιμή εκτός της λ_1.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $(\lambda_n, u_n, \upsilon_n)$ του (3.2) τέτοιο ώστε $\lambda_n \to \lambda_1$. Από τις ιδιότητες της λ_1 ξέρουμε ότι $\lambda_n \geq \lambda_1$ άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_n \in (\lambda_1, \lambda_1 + h)$ για κάποιο $h > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|(u_n, \upsilon_n)\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει λοιπόν $(\tilde{u}, \tilde{\upsilon}) \in E$ τέτοιο ώστε $(u_n, \upsilon_n) \to (\tilde{u}, \tilde{\upsilon})$ ασθενώς και από την simplicity της λ_1 παίρνουμε ότι $(\tilde{u}, \tilde{\upsilon}) = (u_1, \upsilon_1)$ ή $(\tilde{u}, \tilde{\upsilon}) = (-u_1, -\upsilon_1)$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $(u_n, \upsilon_n) \to (u_1, \upsilon_1)$ ασθενώς στον E. Για οποιαδήποτε ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων (u_n, υ_n) πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση του (3.2) με $u_n - u_1$ και ολοκληρώνοντας κατά μέλη θα έχουμε

$$\int_I \left(|u_n'|^{p-2} u_n' - |u_1'|^{p-2} u_1' \right) (u_n' - u_1') dx =$$

$$\lambda_n \int_I \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u_1|^{p-2} u_1 \right) (u_n - u_1) dx + \lambda_n \int_I \left(|u_n|^{\alpha} |\upsilon_n|^{\beta} \upsilon_n - |u_1|^{\alpha} |\upsilon_1|^{\beta} \upsilon_1 \right) (u_n - u_1) dx$$
$$+ (\lambda_n - \lambda_1) \left[\int_I |u_1|^{p-2} u_1 (u_n - u_1) dx + \int_I |u_1|^{\alpha} |\upsilon_1|^{\beta} \upsilon_1 dx \right]$$

Από την δεύτερη εξίσωση του (3.2) ομοίως παίρνουμε ότι

3.3 Το Δεύτερο Σύστημα

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζομε την απόδειξη του θεωρήματος 2.

i) Θα δείξομε ότι τα συστήματα (3.1) και (3.2) μοιράζονται την ίδια πρώτη θετική ιδιοτιμή λ_1. Σημειώνομε ότι δεν είναι γνωστό αν το δεύτερο σύστημα έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

Παρατηρούμε ότι για θετικές λύσεις τα συστήματα (3.1) και (3.2) ταυτίζονται, οπότε αν το $(\lambda_1, u_1, \upsilon_1)$ είναι ένα ιδιοζεύγος για το πρώτο σύστημα τότε θα είναι επίσης ιδιοζεύγος και για το δεύτερο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει ένα μη τετριμμένο ιδιοζεύγος $(\lambda_*, u_*, \upsilon_*)$ του (3.2) τέτοιο ώστε $0 < \lambda_* < \lambda_1$. Τότε θα ικανοποιείται η ακόλουθη ισότητα:

$$\lambda_* = \frac{I(u_*, \upsilon_*)}{\tilde{J}(u_*, \upsilon_*)} \qquad (3.8)$$

με $\tilde{J}(u_*, \upsilon_*) > 0$, με το $\tilde{J}(.,.)$ να δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{J}(u, \upsilon) = \frac{\alpha+1}{p}\int_I |u|^p + \frac{\beta+1}{q}\int_I |\upsilon|^q + \int_I |u|^\alpha |\upsilon|^\beta u\upsilon .$$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο $\tilde{J}(.,.)$ είναι συμπαγής. Από την (3.8) έχουμε ακόμα ότι

$$\lambda_* = \frac{I(u_*, \upsilon_*)}{J(u_*, \upsilon_*)}\frac{J(u_*, \upsilon_*)}{\tilde{J}(u_*, \upsilon_*)} \geq \frac{I(u_*, \upsilon_*)}{J(u_*, \upsilon_*)} \qquad (3.9)$$

επειδή

$$\frac{J(u_*, \upsilon_*)}{\tilde{J}(u_*, \upsilon_*)} \geq 1 .$$

Κανονικοποιώντας το ιδιοζεύγος (u_*, υ_*):

$$u^* =: \frac{|u_*|}{\left[J(u_*, \upsilon_*)\right]^{1/p}} \quad \text{και } \upsilon^* =: \frac{|\upsilon_*|}{\left[J(u_*, \upsilon_*)\right]^{1/q}} ,$$

παίρνομε ότι

$$I(u^*, \upsilon^*) = \frac{I(u_*, \upsilon_*)}{J(u_*, \upsilon_*)} \qquad (3.10)$$

και

$$J(u^*, \upsilon^*) = 1 \qquad (3.11)$$

Από τις σχέσεις (3.8)-(3.11) καταλήγομε στην

$$\omega_1^{\alpha+1}\omega_2^{\beta+1} \leq \frac{\alpha+1}{p}\left\{\omega_1^{\alpha+1}\frac{(\omega_2')^{\theta_2}}{(\omega_1')^{\theta_1}}\right\}^{\frac{p}{\alpha+1}} + \frac{\beta+1}{q}\left\{\omega_2^{\beta+1}\frac{(\omega_1')^{\theta_1}}{(\omega_2')^{\theta_2}}\right\}^{\frac{q}{\beta+1}}$$
$$= \frac{\alpha+1}{p}\omega_1^{p}(\omega_1')^{a-p+1}\cdot(\omega_2')^{\beta+1} + \frac{\beta+1}{q}\omega_2^{q}(\omega_2')^{\beta+1-q}\cdot(\omega_1')^{a+1}.$$

Άρα

$$\omega_1^{\alpha+1}\omega_2^{\beta+1} - \frac{\alpha+1}{p}\omega_1^{p}(\omega_1')^{a-p+1}\cdot(\omega_2')^{\beta+1} - \frac{\beta+1}{q}\omega_2^{q}(\omega_2')^{\beta+1-q}\cdot(\omega_1')^{a+1} \leq 0$$

το οποίο είναι άτοπο εκτός αν $\omega_1 = c_1\omega_1'$ και $\omega_2 = c_2\omega_2'$ για κάποια c_1 και c_2. Όμως τότε

$$-\Delta_p\omega_1 = -\Delta_p(c_1(\omega_1')) = c_1^{p-1}(-\Delta_p(\omega_1')) \leq \lambda\left[c_1^{p-1}(\omega_1')^{p-1} + c_1^{\alpha}c_2^{\beta+1}(\omega_1')^{\alpha}(\omega_2')^{\beta+1}\right].$$

Διαιρώντας με c_1^{p-1} κατά μέλη παίρνομε

$$-\Delta_p\omega_1' \leq \lambda\left[(\omega_1')^{p-1} + c_1^{\alpha+1-p}c_2^{\beta+1}(\omega_1')^{\alpha}(\omega_2')^{\beta+1}\right]$$

επειδή όμως έχουμε υποθέσει ότι

$$-\Delta_p\omega_1' \geq \lambda\left[(\omega_1')^{p-1} + (\omega_1')^{\alpha}(\omega_2')^{\beta+1}\right]$$

θα έχομε

$$c_1^{\alpha+1-p}c_2^{\beta+1} \geq 1.$$

Ομοίως, δουλεύοντας για το υ_2 παίρνουμε ότι $c_1^{\alpha+1}c_2^{\beta+1-q} \geq 1$. Έτσι $c_1 = c_2^{\frac{q}{p}}$ οπότε $(\omega_1', \omega_2') = (c\omega_1, c^{p/q}\omega_2)$.

Επιλέγοντας στα προηγούμενα $\lambda = \lambda_1$ και (u_1, υ_1) αντί για (ω_1, ω_2) και συνδυάζοντας το γεγονός ότι τα θετικά ιδιοζεύγη είναι της μορφής $(cu_1, c^{p/q}\upsilon_1)$ για κάποιο $c > 0$, και παρατηρώντας επιπρόσθετα ότι αν (u, υ) είναι ένα ιδιοζεύγος τότε και τα $(-u, \upsilon)$, $(u, -\upsilon)$, $(-u, -\upsilon)$ είναι επίσης ιδιοζεύγη, καταλήγομε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Με την ίδια τεχνική μπορούμε να δείξουμε ότι οι θετικές λύσεις στο I αντιστοιχούν μόνο στην πρώτη ιδιοτιμή. Πράγματι, αν υποθέσομε ότι υπάρχει ένα ιδιοζεύγος $(\lambda^*, u_2, \upsilon_2)$ για το σύστημα (3.5) τέτοιο ώστε $\lambda^* > \lambda_1, u_2 \geq 0$ και $\upsilon_2 \geq 0$ σχεδόν παντού στο I τότε το (u_1, υ_1) είναι λύση του συστήματος (3.4) με $\lambda = \lambda^*$ και το (u_2, υ_2) ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες .Τότε όμως $(u_2, \upsilon_2) = (cu_1, c^{p/q}\upsilon_1)$ για κάποιο $c > 0$, άτοπο.

$$0 \le \int_I |\phi'|^p \ - \ \lambda \int_I \frac{\phi^p}{(\omega_1')^{p-1}} \Big((\omega_1')^{p-1} \ - \ (\omega_1')^{\alpha} (\omega_2')^{\beta+1} \Big)$$

$$= \int_I |\phi'|^p \ - \ \lambda \int_I \phi^p \cdot \frac{(\omega_1')^{p-1}}{(\omega_1')^{p-1}} \ - \ \lambda \int_I \phi^p \cdot \frac{(\omega_1')^{\alpha}}{(\omega_1')^{p-1}} \cdot (\omega_2')^{\beta+1} .$$

Υποθέτοντας στην προηγούμενη ανισότητα ότι $\phi \to \omega_1$ στο $W_0^{1,p}(I)$ έχομε

$$0 \le \int_I \left| (\omega_1)' \right|^p \ - \ \lambda \int_I \omega_1^{\ p} \ - \ \lambda \int_I \omega_1^{\ p} (\omega_1')^{\alpha-p+1} (\omega_2')^{\beta+1} \ ,$$

και επειδή $\int_I \left| (\omega_1)' \right|^p \ \le \ \lambda \int_I \omega_1^{\ p} \ + \ \lambda \int_I \omega_1^{\ \alpha+1} \omega_2^{\ \beta+1}$, καταλήγομε στην ανισότητα

$$0 \le \int_I (\omega_1^{\ \alpha+1} \cdot \omega_2^{\ \beta+1} \ - \ \omega_1^{\ p} (\omega_1')^{\alpha-p+1} (\omega_2')^{\beta+1}). \tag{3.6}$$

Ομοίως,

$$0 \le \int_I (\omega_1^{\ \alpha+1} \cdot \omega_2^{\ \beta+1} \ - \ \omega_2^{\ q} (\omega_2')^{\beta+1-q} \cdot (\omega_1')^{a+1}). \tag{3.7}$$

Αν πολλαπλασιάσομε την (3.6) με $(\alpha+1)/p$ και την (3.7) με $(\beta+1)/q$ έχομε ότι

$$0 \le \int_I (\frac{\alpha+1}{p} \cdot \omega_1^{\ \alpha+1} \cdot \omega_2^{\ \beta+1} \ - \ \frac{\alpha+1}{p} \cdot \omega_1^{\ p} (\omega_1')^{\alpha-p+1} \cdot (\omega_2')^{\beta+1})$$

και

$$0 \le \int_I (\frac{\beta+1}{q} \cdot \omega_1^{\ \alpha+1} \cdot \omega_2^{\ \beta+1} \ - \ \frac{\beta+1}{q} \cdot \omega_2^{\ q} (\omega_2')^{\beta+1-q} \cdot (\omega_1')^{a+1}).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνομε

$$0 \le \int_I (\ \omega_1^{\ \alpha+1} \omega_2^{\ \beta+1} \ - \ \frac{\alpha+1}{p} \cdot \omega_1^{\ p} (\omega_1')^{\alpha-p+1} \cdot (\omega_2')^{\beta+1} - \frac{\beta+1}{q} \cdot \omega_2^{\ q} (\omega_2')^{\beta+1-q} \cdot (\omega_1')^{a+1} \ )$$

Ακόμα αν $\theta_1 = (\alpha+1)(\beta+1)/q$ και $\theta_2 = (\alpha+1)(\beta+1)/p$ τότε

$$\omega_1^{\ \alpha+1} \omega_2^{\ \beta+1} = \omega_1^{\ \alpha+1} \omega_2^{\ \beta+1} \frac{(\omega_2')^{\theta_2}}{(\omega_1')^{\theta_1}} \cdot \frac{(\omega_1')^{\theta_1}}{(\omega_2')^{\theta_2}} = (\ \omega_1^{\ \alpha+1} \frac{(\omega_2')^{\theta_2}}{(\omega_1')^{\theta_1}} \ )(\ \omega_2^{\ \beta+1} \frac{(\omega_1')^{\theta_1}}{(\omega_2')^{\theta_2}} \ ) .$$

και η ανισότητα του Young δίνει

όπου $u=\upsilon=0$ στο ∂I. Θα δείξουμε ότι $(\omega_1', \omega_2') = (c\omega_1, c^{p/q}\omega_2)$ για κάποιο $c>0$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Picone και το θεώρημα 1.1 παρακάτω.

Ταυτότητα του Picone

Έστω $\upsilon > 0$, $u \geq 0$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε

$$|u'|^2 + \frac{u^2}{\upsilon^2}|\upsilon'|^2 - 2\frac{u}{\upsilon}u'\upsilon' = |u'|^2 - \left(\frac{u^2}{\upsilon}\right)'\upsilon' \geq 0$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [1].

Η ταυτότητα του Picone χρησιμοποιείται στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 3.1.

Έστω $\upsilon > 0$, $u \geq 0$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν

$$L(u,\upsilon) = |u'|^p + (p-1)\frac{u^p}{\upsilon^p}|\upsilon'|^p - p\frac{u^{p\text{-}1}}{\upsilon^{p\text{-}1}}|u'|^{p-2}u'$$

και

$$R(u,\upsilon) = |u'|^p - \left(\frac{u^p}{\upsilon^{p\text{-}1}}\right)'|\upsilon'|^{p-2}\upsilon',$$

τότε

$$L(u,\upsilon) = R(u,\upsilon).$$

Επιπλέον, $L(u,\upsilon) \geq 0$ και $L(u,\upsilon) = 0$ σ.π. στο Ω αν και μόνο αν $\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = 0$ σ.π. στο Ω.

Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε επίσης στο [1].

Επιστρέφουμε στην απόδειξη. Θεωρούμε $\phi \in C_c^\infty(0,1)$ με $\phi > 0$. Τότε $\frac{\phi^p}{(\omega_1')^{p-1}} \in W_0^{1,p}(0,1)$ και από την ανισότητα του Picone και το θεώρημα 3.1 θα έχομε ότι :

$$0 \leq \int_I R(\phi,\omega_1') = \int_I |\phi'|^p - \int_I \left(\frac{\phi^p}{(\omega_1')^{p-1}}\right)' |(\omega_1')'|^{p-2}(\omega_1')'$$

$$= \int_I |\phi'|^p + \int_I \frac{\phi^p}{(\omega_1')^{p-1}}\Delta_p\omega_1'$$

$$\leq \int_I |\phi'|^p - \lambda\int_I \frac{\phi^p}{(\omega_1')^{p-1}}\left(|\omega_1'|^{p-2}\omega_1' - |\omega_1'|^{a-1}|\omega_2'|^{\beta+1}\omega_1'\right)$$

Όμως $\phi, \omega_1', \omega_2' > 0$, άρα

Για το συναρτησιακό $I(u,\upsilon)$ έχουμε ότι $I(u,\upsilon)=\frac{\alpha+1}{p}\int_I |u'|^p+\frac{\beta+1}{q}\int_I |\upsilon'|^q>0$ όταν $J(u,\upsilon)=1$ οπότε το infimum υπάρχει στον χώρο $W_0^{1,p}(0,1)\times W_0^{1,q}(0,1)$. Άρα θα υπάρχει μια ακολουθία $(\phi_n,\psi_n)\in W_0^{1,p}(0,1)\times W_0^{1,q}(0,1)$ τέτοια ώστε $\mathrm{J}(\phi_n,\psi_n)=1$ και $I(\phi_n,\psi_n)\to\lambda_1$. Η ακολουθία (ϕ_n,ψ_n) είναι φραγμένη στον E ο οποίος είναι ανακλαστικός, οπότε υπάρχει μια υπακολουθία $(\phi_{n_\kappa},\psi_{n_\kappa})$ της (ϕ_n,ψ_n) τέτοια ώστε $(\phi_{n_\kappa},\psi_{n_\kappa})\to(\phi,\psi)$ ασθενώς. Έχουμε όμως ότι $J(\phi_{n_\kappa},\psi_{n_\kappa})\to J(\phi,\psi)$ και $J(\phi_{n_\kappa},\psi_{n_\kappa})=1$, άρα $J(\phi,\psi)=1$. Ακόμα $I(\phi,\psi)\le\underline{\lim}\, I(\phi_{n_\kappa},\psi_{n_\kappa})=\lambda_1$, άρα $I(\phi,\psi)=\lambda_1$.

Παρατηρούμε ότι αν το ζεύγος (u,υ) ελαχιστοποιεί την (3.3) τότε και το $(|u|,|\upsilon|)$ θα την ελαχιστοποιεί. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων (u,υ) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 έτσι ώστε $u\ge 0$ και $\upsilon\ge 0$ σ.π. στο I . Από την ανισότητα του Harnack, $|u_1|>0$ και $|\upsilon_1|>0$, οπότε λόγω συνέχειας, οι u,υ δεν αλλάζουν πρόσημο.

3.2 Simplicity της λ_1

Στόχος μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να αποδείξουμε την simplicity της πρώτης ιδιοτιμής λ_1 του συστήματος (3.1) με $u=\upsilon=0$ στο ∂I .
Πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αν (u_1,υ_1) είναι ένα ζεύγος θετικών ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή λ_1 και αν (u_2,υ_2) είναι ένα άλλο ζευγάρι συναρτήσεων το οποίο αντιστοιχεί επίσης στην λ_1, τότε $(u_2,\upsilon_2)=(c_1u_1,\pm|c_1|^{p/q}\upsilon_1)$ για κάποιο $c_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Έστω λοιπόν ότι το (ω_1,ω_2) είναι θετική λύση στο I του συστήματος:

$$\begin{aligned}&-\Delta_p u\le\lambda|u|^{p-2}u+\lambda|u|^{a-1}|\upsilon|^{\beta+1}u\\&-\Delta_q \upsilon\le\lambda|\upsilon|^{q-2}\upsilon+\lambda|u|^{a+1}|\upsilon|^{\beta-1}\upsilon\ ,\end{aligned}\tag{3.4}$$

με $u=\upsilon=0$ στο ∂I, για κάποιο $\lambda>0$ και το ζεύγος (ω_1',ω_2') είναι μια θετική λύση στο I του συστήματος:

$$\begin{aligned}&-\Delta_p u\ge\lambda|u|^{p-2}u+\lambda|u|^{a-1}|\upsilon|^{\beta+1}u\\&-\Delta_q \upsilon\ge\lambda|\upsilon|^{q-2}\upsilon+\lambda|u|^{a+1}|\upsilon|^{\beta-1}\upsilon\ ,\end{aligned}\tag{3.5}$$

Θεώρημα 1 Έστω $I=(0,1)$. Τότε

i) Το σύστημα (3.1) έχει μια πρώτη ιδιοτιμή λ_1, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_1 = \inf\{I(u,\upsilon) : J(u,\upsilon)=1\}.$$

ii) Το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν στην λ_1 είναι το

$$E_1 = \left\{ \left(cu_1, \pm |c|^{p/q} \upsilon_1 \right) : c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

όπου (u_1,υ_1) είναι ένα τυχαίο ιδιοζεύγος με $u_1>0, \upsilon_1>0$. Επιπλέον, ένα θετικό ιδιοζεύγος πάντα αντιστοιχεί στην λ_1.

Θεώρημα 2

i) Το σύστημα (3.2) μοιράζεται την ίδια <u>θετική</u> πρώτη ιδιοτιμή λ_1 με το σύστημα (3.1).

ii) Το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν στην λ_1 είναι το σύνολο:

$$E_2 = \left\{ \pm(cu_1, c^{\frac{p}{q}} \upsilon_1) : c>0 \right\}$$

iii) Η πρώτη ιδιοτιμή λ_1 είναι <u>απομονωμένη</u> για το σύστημα (3.2), δηλαδή υπάρχει $\eta>0$ τέτοιο ώστε το διάστημα $(0,\lambda_1+\eta)$ δεν περιέχει άλλη ιδιοτιμή εκτός της λ_1.

Οι αποδείξεις δίνονται παρακάτω.

3.1 Ύπαρξη

Θα δείξουμε ότι η πρώτη ιδιοτιμή λ_1 του συστήματος

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} u + \lambda |u|^{a-1} |\upsilon|^{\beta+1} u \quad \text{σ.π. στο } I \\ -\Delta_q \upsilon &= \lambda |\upsilon|^{q-2} \upsilon + \lambda |u|^{a+1} |\upsilon|^{\beta-1} \upsilon \quad \text{σ.π. στο } I \\ u(0) &= u(1) = \upsilon(0) = \upsilon(1) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_1 = \inf\{I(u,\upsilon) : J(u,\upsilon)=1\}. \tag{3.3}$$

3. Μελέτη δύο quasilinear συστημάτων

Έστω I=(0,1). Θεωρούμε τα συστήματα :

$$\begin{aligned} &\text{-}\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u + \lambda |u|^{a-1} |u|^{\beta+1} u \quad \text{σ.π. στο } I \\ &\text{-}\Delta_q \upsilon = \lambda |\upsilon|^{q-2} \upsilon + \lambda |u|^{a+1} |\upsilon|^{\beta-1} \upsilon \quad \text{σ.π. στο } I \\ &u(0) = u(1) = \upsilon(0) = \upsilon(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

και

$$\begin{aligned} &\text{-}\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u + \lambda |u|^{a} |\upsilon|^{\beta} \upsilon \quad \text{σ.π. στο } I \\ &\text{-}\Delta_q \upsilon = \lambda |\upsilon|^{q-2} \upsilon + \lambda |u|^{a} |\upsilon|^{\beta} u \quad \text{σ.π. στο } I \\ &u(0) = u(1) = \upsilon(0) = \upsilon(1) = 0\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

όπου $\Delta_p u = \left(|u'|^{p-2} u'\right)'$, $\alpha, \beta \geq 0$ και $(\alpha+1)/p \; + \; (\beta+1)/q \; = \; 1$.

Θα δούμε ότι τα συστήματα (3.1) και (3.2) είναι στην πραγματικότητα μη γραμμικά προβλήματα ιδιοτιμών και στη συνέχεια θα μελετήσομε τις ιδιότητες της πρώτης ιδιοτιμής τους. Ο χώρος στον οποίο θεωρούμε τα συστήματα είναι ο $E = W_0^{1,p}(0,1) \times W_0^{1,q}(0,1)$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|(u,\upsilon)\|_{pq} = \|u\|_{1,p} + \|\upsilon\|_{1,q}$.

Ορίζομε τα συναρτησιακά $\Phi, I, J : E \to \mathbb{R}$ ως εξής

$$I(u,\upsilon) = \frac{\alpha+1}{p} \int_I |u'|^p + \frac{\beta+1}{q} \int_I |\upsilon'|^q$$

$$J(u,\upsilon) = \frac{\alpha+1}{p} \int_I |u|^p + \frac{\beta+1}{q} \int_I |\upsilon|^q + \int_I |u|^{\alpha+1} |\upsilon|^{\beta+1} \;,$$

και

$$\Phi(u,\upsilon) = I(u,\upsilon) \text{ - } \lambda J(u,\upsilon)\,.$$

Τα συναρτησιακά Φ, I, J είναι καλά ορισμένα και συνεχώς παραγωγίσιμα στον χώρο E. Επιπλέον σαν <u>ασθενή λύση</u> του συστήματος (3.1) θα θεωρούμε κάθε ζεύγος (u_0, υ_0) στο E που είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού Φ.

Τα βασικά αποτελέσματα αυτής της εργασίας είναι τα ακόλουθα δυο θεωρήματα.

Αν $\lambda \neq \lambda_1$, τότε $\lambda \quad \lambda_1$ και $\int_I \left(u^2 - \upsilon^2\right) dx \leq 0$, το οποίο είναι αδύνατο αφού στη θέση του u μπορούμε να πάρουμε $2u, 3u, \ldots$.Αποδείξαμε ότι $\lambda = \lambda_1$. Η περίπτωση $p \neq 2$ είναι όμοια.

$$\eta_2' = \left\{1+(p-1)\left(\frac{u+\varepsilon}{\upsilon+\varepsilon}\right)^p\right\}\upsilon' - p\left(\frac{u+\varepsilon}{\upsilon+\varepsilon}\right)^{p-1} u'$$

Αφού οι συναρτήσεις u και υ είναι φραγμένες θα έχουμε ότι $\eta_1,\eta_2 \in W_0^{1,p}(I)$. Για την περίπτωση που $p=2$ αντικαθιστώντας τις δοσμένες συναρτήσεις δοκιμής στις αντίστοιχες εξισώσεις και προσθέτοντας κατά μέλη καταλήγουμε στην

$$\int_I \left(u_\varepsilon^2+\upsilon_\varepsilon^2\right)\left|(\log u_\varepsilon)' - (\log \upsilon_\varepsilon)'\right|^2 dx = \lambda_1 \int_I \left[\frac{u}{u_\varepsilon} - \frac{\upsilon}{\upsilon_\varepsilon}\right]\left(u_\varepsilon^2-\upsilon_\varepsilon^2\right)dx$$

όπου $u_\varepsilon = u(x)+\varepsilon$ και $\upsilon_\varepsilon = \upsilon(x)+\varepsilon$. Καθώς το $\varepsilon \to 0$ το δεξί μέλος τείνει στο 0. Από το λήμμα του Fatou

$$\int_\Omega \left(u^2+\upsilon^2\right)\left|(\log u)' - (\log \upsilon)'\right|^2 dx = 0$$

και συνεπώς θα πρέπει $u\upsilon' = \upsilon u'$ σχεδόν παντού , άρα $u = C\upsilon$ ή $\upsilon = Cu$ για κάποια σταθερά C.
Στην περίπτωση $p \ge 2$ χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$|\omega_2|^p \ge |\omega_1|^p + p|\omega_1|^{p-2}\,\omega_1\cdot(\omega_2-\omega_1) + \frac{|\omega_2-\omega_1|^p}{2^{p-1}-1}$$

με $\omega_2 = (\log \upsilon_\varepsilon)'$ και $\omega_1 = (\log u_\varepsilon)'$.

Θεώρημα 2.3 Μια θετική ιδιοσυνάρτηση είναι πάντα η πρώτη ιδιοσυνάρτηση.

Απόδειξη. Έστω ότι η u είναι μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ και έστω υ η πρώτη ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην λ_1. Για την περίπτωση $p=2$ και εργαζόμενοι όπως και στην προηγούμενη απόδειξη καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_I \left(u_\varepsilon^2+\upsilon_\varepsilon^2\right)\left|(\log u_\varepsilon)' - (\log \upsilon_\varepsilon)'\right|^2 dx = \int_I \left[\lambda_1\frac{u}{u_\varepsilon} - \lambda\frac{\upsilon}{\upsilon_\varepsilon}\right]\left(u_\varepsilon^2-\upsilon_\varepsilon^2\right)dx$$

Καθώς το $\varepsilon \to 0$ παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος θα είναι μη αρνητικό ,δηλαδή

$$(\lambda_1-\lambda)\int_I \left(u^2-\upsilon^2\right)dx \ge 0$$

Απόδειξη Από τον ορισμό της πρώτης ιδιοτιμής έχουμε

$$\lambda_1 = \inf_{u \neq 0} \frac{\int_I |u'|^p \, dx}{\int_I |u|^p \, dx} = \inf_{\substack{\int_I |u|^p dx = 1 \\ u \neq 0}} \int_I |u'|^p \, dx$$

Θεωρούμε το συναρτησιακό $\psi(u) = \int_I |u'|^p \, dx$ το οποίο είναι κάτω φραγμένο στο σύνολο $\left\{ u \in W_0^{1,p}(I) : X(u) = \int_{\mathrm{I}} |u|^p = 1 \right\}$ από το 0, οπότε το infimum υπάρχει στον χώρο $W_0^{1,p}(I)$. Θα υπάρχει λοιπόν μια ακολουθία $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(I)$ με $\int_I |\phi_n|^p = 1$ για την οποία $\int_I |\phi_n'|^p \to \lambda_1$. Η ακολουθία $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον χώρο $W_0^{1,p}(I)$ και επειδή ο χώρος αυτός είναι ανακλαστικός θα υπάρχει υπακολουθία $\phi_{n_\kappa} \to u_1$ ασθενώς. Η εμφύτευση από τον $W_0^{1,p}(I)$ στον $L^p(I)$ είναι συμπαγής άρα για μια υπακολουθία $\int_I |\phi_{n_\kappa}|^p \to \int_I |u_1|^p$ και $\int_I |\phi_{n_\kappa}|^p = 1$, οπότε $\int_I |u_1|^p = 1$. Ακόμα $\int_I |u_1'|^p \leq \underline{\lim} \int_I |\phi_{n_\kappa}'|^p = \lambda_1$,άρα $\int_I |u_1'|^p = \lambda_1$ και συνεπώς η u_1 ελαχιστοποιεί το πηλίκο Rayleigh. Η $|u_1|$ είναι επίσης ελαχιστοποιούσα άρα θα ικανοποιεί την (2.3). Επειδή $|u_1| \geq 0$ από την ανισότητα Harnack έχουμε ότι $|u_1| \quad 0$. Άρα είτε $u_1 \quad 0$ στο I, είτε $u_1 \quad 0$ στο I λόγω συνέχειας .

Θεώρημα 2.2 Η πρώτη ιδιοτιμή είναι απλή σε κάθε φραγμένο διάστημα .

Απόδειξη . Έστω u και υ δύο ιδιοσυναρτήσεις. Οι $|u|$ και $|\upsilon|$ θα είναι επίσης ιδιοσυναρτήσεις , οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $u \quad 0$ και $\upsilon \quad 0$. Οι συναρτήσεις u , υ ικανοποιούν την εξίσωση

$$\int_I |u'|^{p-2} u' \eta' dx = \lambda_1 \int_I |u|^{p-2} u \eta dx$$

για κάθε $\eta \in C_0^\infty(I)$.

Χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις δοκιμής

$$\eta_1 = \frac{(u+\varepsilon)^p - (\upsilon+\varepsilon)^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}} \quad \text{και} \quad \eta_2 = \frac{(\upsilon+\varepsilon)^p - (u+\varepsilon)^p}{(\upsilon+\varepsilon)^{p-1}}$$

για κάποιο $\varepsilon \quad 0$. Τότε

$$\eta_1' = \left\{ 1 + (p-1) \left(\frac{\upsilon+\varepsilon}{u+\varepsilon} \right)^p \right\} u' - p \left(\frac{\upsilon+\varepsilon}{u+\varepsilon} \right)^{p-1} \upsilon'$$

και από συμμετρία η παράγωγος της συνάρτησης δοκιμής στην αντίστοιχη εξίσωση για την υ θα είναι

2. Η πρώτη ιδιοτιμή του p-Λαπλασιανού Τελεστή.

Έστω I ένα φραγμένο διάστημα στον $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το μη γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} u , \quad x \in I \\ u(x) &= 0 , \qquad\quad x \in \partial I \end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου $\Delta_p u = \left(|u'|^{p-2} u' \right)'$.

Ορισμός 2.1 Μια συνάρτηση $u \in W_0^{1,p}(I)$, $u \neq 0$, καλείται ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος (2.1) αν ισχύει

$$\int_I |u'|^{p-2} u' \upsilon' dx = \lambda \int_I |u|^{p-2} u \upsilon dx \tag{2.2}$$

για κάθε $\upsilon \in C_0^\infty(I)$. Ο αντίστοιχος πραγματικός αριθμός λ καλείται ιδιοτιμή.

Παρατήρηση 1. Κάθε ιδιοτιμή είναι θετική. Πράγματι αν θέσουμε στην (2.2) $u = \upsilon$ παίρνουμε ότι

$$\lambda = \frac{\int_I |u'|^p \, dx}{\int_I |u|^p \, dx} .$$

Ορισμός 2.2 Πρώτη ιδιοτιμή καλείται ο θετικός αριθμός

$$\lambda_1 = \inf_\phi \frac{\int_I |\phi'|^p \, dx}{\int_I |\phi|^p \, dx} \quad (\textbf{πηλίκο Rayleigh}) \tag{2.3}$$

όπου $\phi \in C_0^\infty(I)$, $\phi \neq 0$.

Λήμμα 2.1. (Ανισότητα Harnack) Αν u είναι μια μη αρνητική ιδιοσυνάρτηση, τότε

$$\max_{I_r} u \leq C \min_{I_r} u$$

όταν $I_{2r} \subset I$, όπου $C = C(N, p)$ και I_r, I_{2r} ομόκεντρα διαστήματα ακτίνας r και $2r$ που περιέχονται στο I.

Θεώρημα 2.1 Υπάρχει μια θετική ιδιοσυνάρτηση u_1 που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή λ_1. Η ιδιοσυνάρτηση αυτή ελαχιστοποιεί το πηλίκο Rayleigh σε όλες τις συναρτήσεις στον χώρο Sobolev $W_0^{1,p}(I)$. Επιπλέον κάθε ελαχιστοποιούσα συνάρτηση είναι πολλαπλάσιο της u_1 και διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\left(|u(x)|+|h(x)|\right)^{p-1}|h(x)|\in L^1(\Omega),$$

οπότε από το θεώρημα Lebesgue συμπεραίνουμε ότι

$$\langle \psi'(u),h\rangle = p\int_\Omega |u|^{p-2}uhdx.$$

Συνέχεια της παραγώγου κατά Gateaux

΄Έστω $f(u)=p|u|^{p-2}u$. Υποθέτουμε ότι $u_n\to u$ στον χώρο L^p. Τότε $f(u_n)\to f(u)$ στον L^q με $q=\dfrac{p}{p-1}$. Από την ανισότητα Holder παίρνουμε :

$$\left|\langle \psi'(u_n)-\psi'(u),h\rangle\right|\le \left|f(u_n)-f(u)\right|_q |h|_p$$

και έτσι

$$\left\|\psi'(u_n)-\psi'(u)\right\|\le \left|f(u_n)-f(u_n)\right|_q \to 0, n\to\infty.$$

$$\langle \nabla \phi(u), h \rangle = \langle \phi'(u), h \rangle.$$

Παρατήρηση 10.
i) Η παράγωγος κατά Gateaux δίνεται επίσης από τη σχέση :

$$\langle \phi'(u), h \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\phi(u+th) - \phi(u) \right].$$

ii) Κάθε παράγωγος κατά Frechet είναι παράγωγος κατά Gateaux.

Πρόταση 1.9 Αν η ϕ έχει συνεχή παράγωγο κατά Gateaux στο U τότε $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Για την απόδειξη παραπέμπομε στο [6].

Πρόταση 1.10 Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και $2 \le p < \infty$.

(i) Τα συναρτησιακά

$$\psi(u) = \int_\Omega |u|^p dx \quad , \quad \chi(u) = \int_\Omega |u^+|^p dx$$

είναι στον χώρο $C^1\left(L^p(\Omega), \mathbb{R}\right)$ και ισχύει :

$$\langle \psi'(u), h \rangle = p \int_\Omega |u|^{p-2} uhdx \quad , \quad \langle \chi'(u), h \rangle = \int_\Omega \left(u^+\right)^{p-1} hdx .$$

(ii) Αν $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ και $\Phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx$, τότε

$$\Phi'(u)(\upsilon) = p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \upsilon dx.$$

Απόδειξη.
Ύπαρξη της παραγώγου κατά Gateaux.

Θεωρούμε μόνο το συναρτησιακό ψ. Η απόδειξη για το χ είναι όμοια. Έστω $u, h \in L^p$. Δοθέντων $x \in \Omega$ και $0 < |t| < 1$ από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\lambda \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \frac{\left| |u(x)+th(x)|^p - |u(x)|^p \right|}{|t|} &= p|u(x) + \lambda th(x)|^{p-1} |h(x)| \\ &\le p\left(|u(x)| + |h(x)|\right)^{p-1} |h(x)|. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Holder έχουμε

$$\min_{\upsilon\in K}\left\{\frac{1}{2}\int_I\left(\upsilon'^2+\upsilon^2\right)-\int_I f\upsilon\right\}.$$

Για να δείξουμε ότι η u είναι κλασσική λύση, επιλέγομε στην (1.4) $\upsilon = u \pm \omega$ με $\omega \in H_0^1(I)$ και παίρνομε

$$\int_I u'\omega' + \int_I u\omega = \int_I f\omega \quad \text{για κάθε} \quad \omega \in H_0^1(I).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $u \in H^2(I)$ και μπορούμε να συνεχίσομε όπως στο ομογενές πρόβλημα Dirichlet.

Θεώρημα (Stampacchia). Έστω $a(u,\upsilon)$ ένα διγραμμικό, συνεχές και πιεστικό συναρτησιακό και K ένα κλειστό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του H. Για δεδομένο $\phi \in H'$ υπάρχει μοναδικό $u \in K$ τέτοιο ώστε

$$a(u,\upsilon-u) \geq \langle \phi, \upsilon-u\rangle \qquad \text{για κάθε } \upsilon \in K.$$

Επιπλέον, αν το a είναι συμμετρικό, τότε το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

$$\frac{1}{2}a(u,\upsilon)-\langle\phi,u\rangle = \min_{\upsilon\in K}\left\{\frac{1}{2}a(u,\upsilon)-\langle\phi,\upsilon\rangle\right\}.$$

Για την απόδειξη παραπέμπομε στο [1].

Παράγωγος Συναρτησιακού

Ορισμός 1.7 Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $\phi: U \to \mathbb{R}$. Η ϕ έχει <u>παράγωγο κατά Gateaux $\phi'(u) \in X'$ στο σημείο $u \in U$</u> αν για κάθε $h \in X$ ισχύει :

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\phi(u+th)-\phi(u)-\langle\phi'(u),th\rangle\right]=0.$$

Η ϕ έχει <u>παράγωγο κατά Frechet $\phi' \in X'$ στο σημείο $u \in U$</u> αν ισχύει :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}\left[\phi(u+h)-\phi(u)-\langle\phi'(u),h\rangle\right]=0.$$

Το συναρτησιακό ϕ θα ανήκει στον χώρο $C^1(U,\mathbb{R})$ αν κάθε Frechet παράγωγος του ϕ υπάρχει και είναι συνεχής στον U. Αν ο X είναι ένας χώρος Hilbert και το συναρτησιακό ϕ έχει παράγωγο κατά Gateaux στο σημείο $u \in U$, ορίζομε την κλίση $\nabla\phi(u)$ της ϕ στο u με τον τύπο :

Παρατήρηση 9. Μια ασθενής λύση τάξεως $C^2(I)$ είναι κλασσική λύση. Πράγματι, υποθέτουμε ότι $u \in C^2\left(\overline{I}\right)$, $u(a)=u(b)=0$ και η u ικανοποιεί την (1.2). Ολοκληρώνοντας την (1.2) κατά μέρη, παίρνομε

$$\int_I \left(-u''+u-f\right)\upsilon = 0 \quad \forall \upsilon \in H_0^1\left(I\right)$$

Επειδή ο $H_0^1\left(I\right)$ είναι πυκνός στον $L^2\left(I\right)$, προκύπτει ότι $-u''+u=f$ σχεδόν παντού (άρα- λόγω συνέχειας- σε όλο το I, επειδή $u \in C^2\left(\overline{I}\right)$).

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{gathered} -u''+u=f \quad \text{στο } I=(0,1) \\ u(0)=a,\ u(1)=b \end{gathered} \tag{1.3}$$

όπου $a,b \in \mathbb{R}$ και f μια δεδομένη συνάρτηση.

Πρόταση 2.8 Για δεδομένα $f \in L^2\left(I\right)$ και $a,b \in \mathbb{R}$, υπάρχει συνάρτηση $u \in H^2\left(I\right)$ μοναδική που ικανοποιεί την (1.3). Επιπλέον, η u είναι λύση του προβλήματος

$$\min_{\substack{\upsilon \in H^1(I) \\ \upsilon(0)=a,\ \upsilon(1)=b}} \left\{\frac{1}{2}\int_I \left(\upsilon'^2+\upsilon^2\right) - \int_I f\upsilon\right\}.$$

Επιπλέον, αν $f \in C\left(\overline{I}\right)$, τότε $u \in C^2\left(\overline{I}\right)$.

Απόδειξη. Στον χώρο H^1 θεωρούμε το κυρτό κλειστό υποσύνολο

$$K = \left\{\upsilon \in H^1\left(I\right) : \upsilon\left(0\right)=a,\ \upsilon\left(1\right)=b\right\}.$$

Αν η u είναι κλασσική λύση της (1.3), έχομε

$$\int_I u'\left(\upsilon-u\right)' + \int_I u\left(\upsilon-u\right) = \int_I f\left(\upsilon-u\right) \quad \text{για κάθε } \upsilon \in K$$

Ειδικότερα,

$$\int_I u'\left(\upsilon-u\right)' + \int_I u\left(\upsilon-u\right) \geq \int_I f\left(\upsilon-u\right) \quad \text{για κάθε } \upsilon \in K \tag{1.4}$$

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα Stampacchia (που δίνεται παρακάτω), το οποίο εξασφαλίζει ένα $u \in K$ που ικανοποιεί την (1.4). Επιπλέον, η u είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned}F'(\upsilon)(h) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[F(\upsilon+th)-F(\upsilon)\right]\\ &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2t}\left[a(\upsilon+th,\upsilon+th)-a(\upsilon,\upsilon)\right]-\frac{1}{t}\left[\langle\phi,\upsilon+th\rangle+\langle\phi,\upsilon\rangle\right]\right]\\ &= a(\upsilon,h)-\langle\phi,h\rangle\end{aligned}$$

άρα υπάρχει μοναδικό $u \in H$ που μηδενίζει την κατά Gateaux παράγωγο του F. Επιπλέον το F είναι κάτω φραγμένο, αφού

$$F(\upsilon)=\frac{1}{2}a(\upsilon,\upsilon)-\langle\phi,\upsilon\rangle \geq \frac{1}{2}a\|\upsilon\|^2-\|\phi\|\|\upsilon\| \ ,$$

άρα $F(u)\leq F(\upsilon)$ για κάθε $\upsilon\in H$, οπότε

$$\frac{1}{2}a(u,u)-\langle\phi,u\rangle=\min_{\upsilon\in H}\left\{\frac{1}{2}a(\upsilon,\upsilon)-\langle\phi,\upsilon\rangle\right\}.$$

Σαν συνέπεια του θεωρήματος Lax-Milgram έχομε

Πρόταση 1.7 Για κάθε $f\in L^2$ υπάρχει μοναδική λύση $u\in H_0^1(I)$ της (1.2). Επιπλέον το u είναι λύση του προβλήματος

$$\min_{\upsilon\in H_0^1(I)}\left\{\frac{1}{2}\int_I\left(\upsilon'^2+\upsilon^2\right)-\int_I f\upsilon\right\}.$$

Αυτό αποτελεί την <u>αρχή Dirichlet</u>.

Απόδειξη. Εφαρμόζομε το θεώρημα Lax-Milgram στον χώρο Hilbert $H=H_0^1(I)$ με το διγραμμικό συναρτησιακό

$$a(u,\upsilon)=\int u'\upsilon'+\int u\upsilon=(u,\upsilon)_{H^1}$$

και το γραμμικό συναρτησιακό $\phi{:}\upsilon\mapsto\int f\upsilon$.

<u>Παρατήρηση 8</u> . Αν $f\in L^2$ και αν $u\in H_0^1$ είναι μια ασθενής λύση, τότε $u\in H^2$. Πράγματι,

$$\int u'\upsilon'=\int(f-u)\upsilon \qquad \forall\,\upsilon\in C_c^1.$$

Άρα $u'\in H^1$ (αφού $f-u\in L^2$), δηλαδή $u\in H^2$. Αν επιπλέον $f\in C^1(\overline{I})$, τότε η ασθενής λύση u ανήκει στον $C^2(\overline{I})$, επειδή $(u')'\in C(\overline{I})$ οπότε $u'\in C(\overline{I})$. Δηλαδή, $u\in C^2(\overline{I})$.

Η παραπάνω ανισότητα αποδεικνύει ότι ο Α θα είναι 1-1. Θα αποδείξομε τώρα ότι το R(A) είναι ένα κλειστό υποσύνολο του Η. Έστω λοιπόν ότι $Au_n \to y$. Η ακολουθία Au_n είναι Cauchy άρα για ε >0 υπάρχει $n_0 \in N$ τ.ω.

$$\|Au_n - Au_m\| < \varepsilon \text{ όταν } m,n \geq n_0 .$$

Όμως,

$$a\|u_n - u_m\| \leq \|Au_n - Au_m\| < \varepsilon ,$$

οπότε η ακολουθία u_n είναι επίσης ακολουθία Cauchy. Όμως ο Η είναι πλήρης, άρα υπάρχει $u \in H$ τ.ω. $u_n \to u$. O A είναι συνεχής οπότε $Au_n \to Au$. Έτσι y=Au που αποδεικνύει ότι το R(A) είναι ένα κλειστό υποσύνολο του Η.

Υποθέτουμε τώρα ότι δεν ισχύει η (8). Αφού το $R(A)$ είναι κλειστό στον H ,θα υπάρχει ένα μη μηδενικό στοιχείο $\omega \in H$ με $\omega \in R(A)^{\perp}$, όμως τότε $\alpha\|\omega\|^2 \leq a(\omega,\omega) = (A\omega,\omega) = 0$, άτοπο.

Από το θεώρημα Riesz-Frechet ,υπάρχει ένα στοιχείο του $\omega \in H$ τέτοιο ώστε

$$\langle \phi, \upsilon \rangle = (\omega, \upsilon) \qquad \forall \upsilon \in H.$$

Χρησιμοποιώντας τις (7) και (8) βρίσκομε $u \in H$ που να ικανοποιεί την $Au = \omega$. Τότε

$$a(u,\upsilon) = (Au,\upsilon) = (\omega,\upsilon) = \langle \phi,\upsilon \rangle \qquad \forall \upsilon \in H.$$

Τέλος αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μοναδικό $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$a(u,\upsilon) = \langle \phi,\upsilon \rangle \qquad \forall \upsilon \in H.$$

Έστω $u \in H$ και $\tilde{u} \in H$ τέτοια ώστε $a(u,\upsilon) = \langle \phi,\upsilon \rangle$ και $a(\tilde{u},\upsilon) = \langle \phi,\upsilon \rangle$, τότε

$$a(u-\tilde{u},\upsilon) = 0 \qquad \forall \upsilon \in H.$$

Θέτοντας $\upsilon = u - \tilde{u}$, έχομε

$$\alpha\|u-\tilde{u}\|^2 \leq a(u-\tilde{u},u-\tilde{u}) = 0$$

Τέλος αν το a είναι συμμετρικό ορίζουμε το συναρτησιακό

$$F(\upsilon) = \frac{1}{2}a(\upsilon,\upsilon) - \langle \phi,\upsilon \rangle$$

Η παράγωγος κατά Gateaux της F θα είναι

$$a(u,\upsilon) = \langle \phi, \upsilon \rangle \qquad \forall \upsilon \in H.$$

Επιπλέον αν το a είναι συμμετρικό (δηλαδή $a(u,\upsilon) = a(\upsilon,u) \quad \forall u,\upsilon \in H$), τότε το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u \rangle = \min_{\upsilon \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(\upsilon,\upsilon) - \langle \phi, \upsilon \rangle \right\}.$$

Απόδειξη.

Για σταθερό $u \in H$, η απεικόνιση $\upsilon \mapsto a(u,\upsilon)$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό πάνω στον H και ,σύμφωνα με το θεώρημα Riesz-Frechet ,υπάρχει ένα στοιχείο του $\omega \in H$ τέτοιο ώστε

$$a(u,\upsilon) = (\omega,\upsilon), \quad \forall \upsilon \in H . \tag{5}$$

Θα γράφομε $Au = \omega$, όποτε ικανοποιείται η (5), έτσι ώστε

$$a(u,\upsilon) = (Au,\upsilon), \quad \forall u,\upsilon \in H \tag{6}$$

Ο A είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής . Πράγματι αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $u_1, u_2 \in H$,για κάθε $\upsilon \in H$ θα έχομε

$$\begin{aligned} \left(A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2),\upsilon\right) &= a\left((\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2),\upsilon\right) \quad \text{από την (6)} \\ &= \lambda_1 a(u_1,\upsilon) + \lambda_2 a(u_2,\upsilon) \\ &= \lambda_1 (Au_1,\upsilon) + \lambda_2 (Au_2,\upsilon) \quad \text{και πάλι από την (6)} \\ &= (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2,\upsilon) \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $\upsilon \in H$, άρα ο A είναι ένας γραμμικός τελεστής. Επιπλέον

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = a(u, Au) \le \alpha \|u\| \|Au\|$$

οπότε

$$\|Au\| \le \alpha \|u\| \quad \text{για κάθε } u \in H ,$$

άρα ο A είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Στη συνέχεια θα δείξομε ότι

$$\begin{cases} \text{ο } A \text{ είναι 1-1,και} \\ R(A) \text{ είναι κλειστό στον } H \end{cases} \tag{7}$$

και

$$R(A) = H . \tag{8}$$

Πράγματι ,

$$a\|u\|^2 \le a(u,u) = (Au,u) \le \|Au\| \|u\|,$$

οπότε

$$a\|u\| \le \|Au\|.$$

Η παρακάτω πρόταση χαρακτηρίζει τα στοιχεία του $W^{-1,p'}(I)$.

Πρόταση 1.6 Έστω $F \in W^{-1,p'}$. Τότε υπάρχουν $f_o, f_1 \in L^{p'}$ τέτοιες ώστε

$$\langle F, \upsilon \rangle = \int f_0 \upsilon + \int f_1 \upsilon' \quad \text{για κάθε } \upsilon \in W_0^{1,p}(I)$$

και
$$\|F\| = \max\left\{ \|f_0\|_{L^{p'}}, \|f_1\|_{L^{p'}} \right\}.$$

Όταν το I είναι φραγμένο τότε, λόγω της ανισότητας Poincare, μπορούμε να πάρομε $f_0 = 0$.

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε μερικές εφαρμογές των χώρων Sobolev.
Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} -u'' + u = f \quad \text{στο } I = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

όπου η f είναι μια δεδομένη τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο I. Οι συνοριακές συνθήκες $u(0) = u(1) = 0$ καλούνται ομογενείς συνθήκες Dirichlet .

Ορισμός 1.6 Κλασσική λύση της (1.1) είναι μια συνάρτηση $u \in C^2(\overline{I})$ που ικανοποιεί την (1.1) με τη συνήθη έννοια. Ασθενής λύση της (1.1) είναι μια συνάρτηση $u \in H_0^1(I)$ που ικανοποιεί την

$$\int_I u'\upsilon' + \int_I u\upsilon = \int_I f\upsilon \quad \forall \upsilon \in H_0^1(I) \tag{1.2}$$

Χρησιμοποιώντας κατά μέρη ολοκλήρωση, εύκολα βλέπομε ότι κάθε κλασσική λύση είναι και ασθενής λύση.

Ύπαρξη και μοναδικότητα μιας ασθενούς λύσεως .

Θεώρημα 1.4 (Lax-Milgram) Έστω $a(u,\upsilon)$ ένα διγραμμικό, συνεχές ($\exists C$ τέτοιο ώστε $|a(u,\upsilon)| \le C|u||\upsilon| \quad \forall u,\upsilon \in H$) και πιεστικό (δηλαδή $a(\upsilon,\upsilon) \ge a\|\upsilon\|^2$, $\forall \upsilon \in H$) συναρτησιακό. Τότε για κάθε $\phi \in H'$ υπάρχει μοναδικό $u \in H$ τέτοιο ώστε

(iii) Αν $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$, τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Παραθέτομε τα παρακάτω αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.3 Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$ αν και μόνο αν $\tilde{u} = 0$ στα άκρα του διαστήματος I (εδώ με $\tilde{u}$ συμβολίζομε τον συνεχή αντιπρόσωπο της u).

Πρόταση 1.3

(ι) Έστω $1 < p \quad \infty$ και $u \in L^p(I)$. Τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$ αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\left| \int_I u\phi' \right| \leq C \|\phi\|_{L^{p'}(I)} \qquad \forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R})$$

(ii) Έστω $1 \leq p \quad \infty$ και $u \in L^p(I)$. Ορίζομε την $\bar{u}$ με $\bar{u}(x) = u(x)$ αν $x \in I$ και $\bar{u}(x) = 0$ αν $x \notin I$. Τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$ αν και μόνο αν $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Πρόταση 1.4 (Ανισότητα Poincare) Υποθέτουμε ότι το διάστημα I είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται από το $|I|$) τέτοια ώστε

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p} \quad \text{για κάθε } u \in W_0^{1,p}(I) \qquad (4)$$

Δηλαδή στον χώρο $W_0^{1,p}(I)$ η έκφραση $\|u'\|_{L^p}$ είναι μια νόρμα ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,p}(I)$.

Απόδειξη. Για $u \in W_0^{1,p}(I)$ έχουμε

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t)\, dt \right| \leq \|u'\|_{L^1}.$$

Συνεπώς, $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1}$. Συμπεραίνουμε την (4) με χρήση της ανισότητας Holder.

Ορισμός 1.5 Αν $1 \leq p \quad \infty$, συμβολίζομε με $W^{-1,p'}(I)$ τον δυϊκό χώρο του $W_0^{1,p}(I)$ και με $H^{-1}(I)$ τον δυϊκό του $H_0^1(I)$.

Πρόταση 1.5 Αν το I είναι φραγμένο, έχουμε

$$W_0^{1,p}(I) \subset L^2(I) \subset W^{-1,p'}(I) \quad \text{για κάθε } 1 \leq p \quad \infty,$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις.
Αν το I δεν είναι φραγμένο, έχουμε

$$W_0^{1,p}(I) \subset L^2(I) \subset W^{-1,p'}(I) \quad \text{για κάθε } 1 \leq p \leq 2$$

με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις.

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}.$$

Για $p = 2$, θέτουμε

$$H^m(I) = W^{m,2}(I)$$

<u>Παρατήρηση 6</u>. Μια συνάρτηση u ανήκει στον χώρο $W^{m,p}(I)$ αν και μόνο αν υπάρχουν m συναρτήσεις $g_1, ..., g_m \in L^p(I)$ τέτοιες ώστε

$$\int u D^j \phi = (-1)^j \int g_j \phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(I),\ \forall j = 1, ..., m$$

όπου το $D^j \phi$ συμβολίζει την παράγωγο τάξεως j της ϕ. Όταν $u \in W^{m,p}(I)$ μπορούμε να θεωρήσουμε τις διαδοχικές παραγώγους $u' = g,\ (u')' = g_2$ μέχρι την τάξη m.

Θεωρούμε ότι ο χώρος $W^{m,p}(I)$ είναι εφοδιασμένος με την νόρμα

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{a=1}^{m} \left\| u^{(a)} \right\|_{L^p}$$

και ο χώρος H^m είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, \upsilon)_{H^m} = (u, \upsilon)_{L^2} + \sum_{a=1}^{m} \left(u^{(a)}, \upsilon^{(a)} \right)$$

και την νόρμα

$$\|u\|_{H^m} = \|u\|_{L^2} + \sum_{a=1}^{m} \left\| u^{(a)} \right\|_{L^2}.$$

Ο χώρος $W_0^{1,p}(I)$

Ορισμός 1.4 Για $1 \le p \quad \infty$, συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(I)$ το κλειστό περίβλημα του $C_c^1(I)$ στον $W^{1,p}(I)$ ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$. Γράφουμε επίσης $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$. Ο χώρος $W_0^{1,p}(I)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα του $W^{1,p}(I)$. Ο χώρος H_0^1 είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο του H^1. Ο χώρος $W_0^{1,p}(I)$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach που επιπλέον είναι ανακλαστικός για $p \in (1, \infty)$. Τέλος ο $H_0^1(I)$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

<u>Παρατήρηση 7.</u>

(i) Όταν $I = \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι ο $C_c^1(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (με την νόρμα του $W^{1,p}(\mathbb{R})$). Επομένως $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.

(ii) Ο $C_c^\infty(I)$ είναι πυκνός στον $W_0^{1,p}(I)$.

Πρόταση 1.2 Ἐστω $u \in L^p$ με $1 \quad p \leq \infty$. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες
(i) $u \in W^{1,p}(I)$.
(ii) Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\left|\int_I u\phi'\right| \leq C\|\phi\|_{L^{p'}(I)} \quad \forall \phi \in C_c^\infty(I)$$

όπου $p' = \dfrac{p}{p-1}$ και μπορούμε να επιλέξουμε $C = \|u'\|_{L^p}$.

Θεώρημα 1.2 Υπάρχει σταθερά C (που εξαρτάται μόνο από το $|I| \leq \infty$), τέτοια ώστε
(i) $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$

Δηλαδή ισχύει $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ με συνεχή ενσφήνωση, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.
Επιπλέον, αν το I είναι φραγμένο έχουμε

(ii) Η ενσφήνωση $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ είναι συμπαγής για $1 \quad p \leq \infty$
(iii) Η ενσφήνωση $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ είναι συμπαγής για $1 \leq q < \infty$.

<u>Παρατήρηση 5</u>. Έστω I ένα μη φραγμένο διάστημα. Αν $u \in W^{1,p}(I)$, τότε $u \in L^q(I)$ για κάθε $q \in [p, \infty]$ αφού

$$\int |u|^q \leq \|u\|_{L^\infty}^{q-p} \|u\|_{L^p}^p$$

Γενικά όμως, $u \notin L^q(I)$ για $q \in [1, p)$.

Πόρισμα 1.1 (Παραγώγιση γινομένου) Έστω $u, \upsilon \in W^{1,p}(I)$, όπου $1 \leq p \leq \infty$.
Τότε $u\upsilon \in W^{1,p}(I)$ και

$$(u\upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon'$$

Επιπλέον, ισχύει ο τύπος ολοκληρώσεως κατά μέρη

$$\int_y^x u'\upsilon = u(x)\upsilon(x) - u(y)\upsilon(y) - \int_y^x u\upsilon' \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Οι χώροι Sobolev $W^{m,p}(I)$

Ορισμός 1.3 Αν $m \geq 2$ ακέραιος και $1 \leq p \leq \infty$ πραγματικός. Τότε ορίζουμε αναδρομικά τον χώρο

$$\int_I f\left[\omega-\left(\int_I \omega\right)\psi\right]=0 \quad \forall \omega \in C_c(I),$$

δηλαδή

$$\int_I\left[f-\left(\int_I f\psi\right)\right]\omega=0 \quad \forall \omega \in C_c(I)$$

και επομένως από το λήμμα 1.1 $f-\left(\int_I f\psi\right)=0$ σ.π. , δηλαδή $f=C$ σ.π. με $C=\int_I f\psi.$

Λήμμα 1.3 Έστω $g \in L^1_{loc}(I)$. Για y_0 σταθερό στο I, θέτουμε

$$\upsilon(x)=\int_{y_0}^{x} g(t)dt, \quad x \in I.$$

Τότε $\upsilon \in C(I)$ και

$$\int_I \upsilon\phi'=-\int_I g\phi \quad \forall \phi \in C_c^1(\bar{I}).$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_I \upsilon\phi' &= \int_I\left[\int_{y_0}^{x} g(t)dt\right]\phi'(x)\,dx \\ &= -\int_a^{y_0} dx\int_x^{y_0} g(t)\phi'(x)dt+\int_{y_0}^{b} dx\int_{y_0}^{x} g(t)\phi'(x)\,dt.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_I \upsilon\phi' &= -\int_a^{y_0} g(t)dt\int_a^{t}\phi'(x)dx+\int_{y_0}^{b} g(t)\,dt\int_t^{b}\phi'(x)\,dx \\ &= -\int_I g(t)\phi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Απόδειξη του θεωρήματος 1.1 Για σταθερό $y_0 \in I$, ορίζουμε την συνάρτηση $\bar{u}(x)=\int_{y_0}^{x} u'(t)dt.$ Από το λήμμα 1.3, έχουμε

$$\int_I \bar{u}\phi'=-\int_I u'\phi \qquad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

Άρα, $\int(u-\bar{u})\phi'=0$ για κάθε $\phi \in C_c^1(I)$. Από το λήμμα 1.2 προκύπτει ότι $u-\bar{u}=C$ σ.π. Η συνάρτηση $\tilde{u}(x)=\bar{u}(x)+C$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Παρατίθενται τα παρακάτω αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 1.1 Ο χώρος $W^{1,p}(I)$ είναι ένας χώρος Banach για $1 \le p \le \infty$. Ο χώρος $W^{1,p}(I)$ είναι ανακλαστικός για $1 < p < \infty$ και διαχωρίσιμος για $1 \le p < \infty$.
Ο χώρος H^1 είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert .

$$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2},$$

ή με την ισοδύναμη νόρμα

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right)^{1/2}.$$

Θεώρημα 1.1 Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $\tilde{u} \in C\left(\overline{I}\right)$ τέτοια ώστε

$$u = \tilde{u} \text{ σ.π. στο } I$$

και

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \qquad \forall x, y \in \overline{I}$$

Παρατήρηση 3. Όπως φαίνεται από τον ορισμό 1.2, αν $u \in W^{1,p}(I)$ τότε κάθε συνάρτηση υ τέτοια ώστε $u = \upsilon$ σ.π. στο I ανήκει επίσης στον $W^{1,p}(I)$. Το θεώρημα 1.1 βεβαιώνει ότι κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(I)$ έχει ένα (και μόνο ένα) συνεχή αντιπρόσωπο, δηλαδή υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση που ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας της u για τη σχέση $u \sim \upsilon$ αν $u = \upsilon$ σ.π. . Όταν θα χρειάζεται, θα αντικαθιστούμε την u με τον συνεχή αντιπρόσωπο της. Για να μην βαρύνουμε τον συμβολισμό, θα σημειώνουμε επίσης με u το συνεχή αντιπρόσωπο της u.

Παρατήρηση 4. Είναι φανερό ότι αν $u \in W^{1,p}(I)$ και $u' \in C\left(\overline{I}\right)$, τότε $u \in C^1\left(\overline{I}\right)$ (ακριβέστερα $\tilde{u} \in C^1\left(\overline{I}\right)$, αλλά όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, θα ταυτίζουμε την u με την $\tilde{u}$).

Στην απόδειξη του θεωρήματος 1.1 θα χρησιμοποιηθούν τα ακόλουθα λήμματα :

Λήμμα 1.2 Έστω $f \in L^1_{loc}(I)$ τέτοια ώστε

$$\int_I f\phi' = 0 \qquad \forall \phi \in C_c^1(I). \qquad (1)$$

Τότε υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $f = C$ σ.π.

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια συνάρτηση $\psi \in C_c^1(I)$ τέτοια ώστε $\int \psi = 1$. Για κάθε συνάρτηση $\omega \in C_c(I)$, υπάρχει $\phi \in C_c^1(I)$ τέτοια ώστε

$$\phi' = \omega - \left(\int_I \omega\right)\psi.$$

Πράγματι, η συνάρτηση $h = \omega - \left(\int_I \omega\right)\psi$ είναι συνεχής, με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο I, και επειδή $\int h = 0$, η h έχει μια παράγουσα με συμπαγή φορέα. Συμπεραίνουμε από την (1) ότι

1. Οι χώροι Sobolev

Έστω $I=(a,b)$ ένα διάστημα φραγμένο ή μη και έστω $p\in\mathbb{R}$, με $1\le p\le\infty$.

Ορισμός 1.1 Έστω $u\in L^1(I)$. Η συνάρτηση $g\in L^1(I)$ θα λέγεται **παράγωγος της** u **με την έννοια των κατανομών** αν για κάθε $\phi\in C_c^1(I)$ ισχύει

$$\int_I u\phi' = -\int_I g\phi$$

και θα γράφουμε $u'=g$. Η συνάρτηση g είναι μοναδική σ.π. όπως φαίνεται από το παρακάτω:

Λήμμα 1.1 Έστω $g\in L^1(I)$ και $\int_I g\phi=0$ για κάθε $\phi\in C_c^1(I)$. Τότε g=0 σ.π.

Για την απόδειξη παραπέμπομε στο [1].

Ορισμός 1.2 Ο **χώρος Sobolev** $W^{1,p}(I)$ είναι το σύνολο

$$W^{1,p}(I)=\left\{u\in L^p(I): u'\in L^p(I)\right\}$$

Αν $p=2$, θέτουμε

$$H^1(I)=W^{1,2}(I).$$

Παρατήρηση 1. Η ϕ στον ορισμό 1.1 θα λέγεται συνάρτηση δοκιμής. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον $C_c^1(I)$ ή τον $C_c^\infty(I)$ ως χώρο συναρτήσεων δοκιμής.

Παρατήρηση 2. Είναι φανερό ότι, αν $u\in C^1(I)\cap L^p(I)$ και $u'\in L^p(I)$ (εδώ η u' είναι η συνήθης παράγωγος της u), τότε $u\in W^{1,p}(I)$. Επιπλέον, η συνήθης παράγωγος της u ταυτίζεται με την παράγωγο της u υπό την έννοια των κατανομών. Στην ειδική περίπτωση όπου το I είναι φραγμένο, ισχύει $C^1(\bar{I})\subset W^{1,p}(I)$ για κάθε $1\le p\le\infty$.

Θεωρούμε ότι ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(I)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{W^{1,p}}=\|u\|_{L^p}+\|u'\|_{L^p},$$

ή με την ισοδύναμη νόρμα $\left[\|u\|_{L^p}^p+\|u'\|_{L^p}^p\right]^{1/p}$, και ο χώρος H^1 είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u,\upsilon)_{H^1}=(u,\upsilon)_{L^2}+(u',\upsilon')_{L^2}$$

και την αντίστοιχη νόρμα

Χώροι Συναρτήσεων

$I \subset R^N$ ανοικτό,

$L^p(I) = \left\{ u \text{ μετρίσιμη στο } I \text{ και } \int_I |\mathrm{u}|^p < \infty \right\}, 1 \le p < \infty,$

$L^\infty(I) = \left\{ \text{u μετρήσιμη στο } I \text{ και υπάρχει } C \text{ τέτοιο ώστε } |u(x)| \le C \text{ σ.π. στο } I \right\},$

$L^1_{loc}(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \text{ μετρήσιμη τ.ω. } fx_k \in L^1(I) \text{ για κάθε } K \text{ συμπαγές υποσύνολο του } I \right\}$

$C_c(I)$ συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα στο I ,

$C^k(I)$ συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους μέχρι την τάξη k στο I . (k ακέραιος ≥ 0),

$C^\infty(I) = \bigcap_{k \ge 0} C^k(I),$

$C^k_c(I) = C^k(I) \cap C_c(I),$

$C^\infty_c(I) = C^\infty(I) \cap C_c(I),$

$C(\overline{I}) = \left\{ u : \overline{I} \to \mathbb{R}, u \text{ συνεχής} \right\}$

$$C^1(\overline{I}) = \begin{Bmatrix} u : \overline{I} \to \mathbb{R}, u \text{ παραγωγίσιμη στο } I \text{ και υπάρχουν τα όρια} \\ \text{της } u' \text{ στα άκρα του διαστήματος} \end{Bmatrix}$$

$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \exists \mathrm{g} \in L^p(I) \text{ τ.ω.} \int_I u\phi' = -\int_I g\phi \ \forall \phi \in C^1_c(I) \right\},$

$H^1(I) = W^{1,2}(I),$

$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}, \ m \ge 2,$

$H^m(I) = W^{m,2}(I), m \ge 2,$

$W^{1,p}_0(I)$ το κλειστό περίβλημα του $C^1_c(I)$ στον $W^{1,p}(I)$,σύμφωνα με τη νόρμα

$$\|\phi\| = \|\phi\|_{L^p(I)} + \|\phi'\|_{L^p(I)},$$

$H^1_0(I) = W^{1,2}_0(I).$

Αποδεικνύομε ότι τα συστήματα μοιράζονται την ίδια θετική πρώτη ιδιοτιμή λ_1, μελετάμε τις ιδιότητές της και χαρακτηρίζομε το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων τους (το οποίο δεν είναι ένας γραμμικός υπόχωρος).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη της παρακάτω κατηγορίας weakly coupled συστημάτων quasilinear εξισώσεων

$$-\Delta_p u = f(u,v)$$
$$-\Delta_q v = g(u,v)$$

με συνοριακές συνθήκες Dirichlet, όπου οι συναρτήσεις f, g είναι πολυώνυμα ως προς u και v και εξαρτώνται επίσης από μια πραγματική μεταβλητή λ την οποία θεωρούμε ως ιδιοτιμή του συστήματος. Τα συστήματα αυτά που προέρχονται από την μελέτη μη γραμμικών φαινομένων όπως pattern formation, chemical reaction και population evolution, όπου για παράδειγμα οι συναρτήσεις u και v αναπαριστούν την κατανομή δύο ανταγωνιστικών πληθυσμών.

Βασικό εργαλείο στην μελέτη μας είναι οι χώροι Banach που αποτελούνται από «ασθενώς» παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Η «ασθενής» παράγωγος είναι μια γενίκευση της έννοιας της συνήθους παραγώγου η οποία προέκυψε από την ανάγκη της επίλυσης διαφορικών εξισώσεων όπου ήταν εμφανές ότι η λύση τους δεν θα μπορούσε να ήταν παραγωγίσιμη με την συνήθη έννοια. Ως παράδειγμα αναφέρομε την διαφορική εξίσωση

$$x'(t) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
$$x(0) = 0,$$

η οποία έχει λύση την $x(t) = |t|$, μια μη παραγωγίσιμη-με την συνήθη έννοια-συνάρτηση.

Οι χώροι των ασθενώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν κάποια συνθήκη ολοκληρωσιμότητας ονομάζονται χώροι Sobolev προς τιμήν του Ρώσου μαθηματικού Sergei L'vovich Sobolev (1908-1989), η συνεισφορά του οποίου στην μελέτη των ομόνυμων χώρων είναι ιδιαίτερα σημαντική. Οι χώροι Sobolev δεν είναι μόνον ενδιαφέρουσες μαθηματικές κατασκευές αλλά αποτελούν την βάση για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους- άλλωστε για τον σκοπό αυτό δημιουργήθηκαν.

Εδώ εισάγομε τους χώρους Sobolev συναρτήσεων στην πραγματική ευθεία, μελετάμε αφ' ενός τις ιδιότητές τους (διαχωριμότητα, ανακλαστικότητα, σχέση με τους L^p) και αφ' ετέρου τις ιδιότητες των συναρτήσεων που περιλαμβάνουν. Εξετάζομε προβλήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με συνοριακές συνθήκες και με χρήση γνωστών θεωρημάτων (Lax-Milgram, Stampacchia) αποδεικνύομε ότι οι λύσεις τους βρίσκονται σε χώρους Sobolev.

Η θεωρία των χώρων Sobolev χρησιμοποιείται στα ακόλουθα δύο συστήματα που εμπίπτουν στην προαναφερθείσα κατηγορία

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u + \lambda |u|^{a-1} |u|^{\beta+1} u \quad \text{σ.π. στο } I := (0,1)$$
$$-\Delta_q \upsilon = \lambda |\upsilon|^{q-2} \upsilon + \lambda |u|^{a+1} |\upsilon|^{\beta-1} \upsilon \quad \text{σ.π. στο } I$$
$$u(0) = u(1) = \upsilon(0) = \upsilon(1) = 0$$

και

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u + \lambda |u|^{a} |\upsilon|^{\beta} \upsilon \quad \text{σ.π. στο } I$$
$$-\Delta_q \upsilon = \lambda |\upsilon|^{q-2} \upsilon + \lambda |u|^{a} |\upsilon|^{\beta} u \quad \text{σ.π. στο } I$$
$$u(0) = u(1) = \upsilon(0) = \upsilon(1) = 0 .$$

Περιεχόμενα

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ SOBOLEV ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Κουτσάκης Γιάννης

Διπλωματική Διατριβή
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Επιβλέπων Καθηγητής : Επ. Καθηγητής Δ. Κανδυλάκης

Χανιά, Απρίλιος 2006