ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη 2

Εισαγωγή 3

1. Η ανάπτυξη του αναμενόμενου χρόνου ζωής στην Ελλάδα κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών 5

    1.1. Εισαγωγή 5

    1.2. Προτεινόμενη μέθοδος προσέγγισης δεδομένων 7

2. *Αποτελέσματα για τις διαδικασίες διασποράς* 22

    2.1. . Η συνάρτηση πυκνότητας χρόνου 22

    2.2 Μια τετραγωνική συνάρτηση κατάστασης υγείας 27

    2.3. Τεχνικές στατιστικής εκτίμησης βασικών παραμέτρων 32

3. Εφαρμογές και Στοχαστική προσομοίωση στους πίνακες δεδομένων ανθρώπινης ζωής 34

    3.1. Περίπτωση Γαλλίας και Βελγίου 34

    3.2. Περίπτωση ελληνικών πινάκων δεδομένων ανθρώπινης ζωής 37

4. Ανάλυση Διακυμάνσεων Πινάκων Ζωής για τα ελληνικά δεδομένα 43

5. Συμπεράσματα 51

6. Βιβλιογραφία 53

    8.1. Ελληνική βιβλιογραφία 53

    8.2. Ξένη Βιβλιογραφία 53

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής τον κ. Η. Κοσματόπουλο και τον κ. Ε. Γρηγορούδη για την αμέριστη συνεργασία τους και τον πολύτιμο χρόνο τους.

Θεωρώ καθήκον μου και υποχρέωσή μου να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον Καθηγητή και Διευθυντή του εργαστηρίου Ανάλυσης Δεδομένων & Πρόβλεψης, του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης κ. Χρήστο Σκιαδά για την ανάθεση της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής, τις επιστημονικές του υποδείξεις καθώς και για την άψογη συνεργασία του κατά τη διεξαγωγή της.

Ευχαριστώ θερμά την οικογένειά μου για την ανεκτίμητη υλική και κυρίως ηθική υποστήριξη που τόσο γενναιόδωρα μου παρείχαν όλο αυτό το διάστημα. Η παρούσα εργασία αφιερώνεται στην νεογέννητη ανιψιά μου που ήρθε στον κόσμο στις 19-01-2007 και ομόρφυνε τον δικό μου κόσμο.

Ευχαριστώ επίσης την Χημικό Μηχανικό M.Sc., κα. Θεοδώρα Παπαδάμ για τις συμβουλές αλλά και την πολύτιμη βοήθειά της καθώς επίσης και την ηθική συμπαράστασή της κατά την διάρκεια πραγμάτωσης της παρούσας εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ όλους όσους βοήθησαν να γίνει το έργο της διεκπεραίωσης της μεταπτυχιακής διατριβής ευκολότερο και αποδοτικότερο με την φυσική παρουσία τους αλλά και την ηθική υποστήριξή τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία με τίτλο: "Μελέτη των Δεδομένων Θνησιμότητας στην Ελλάδα κατά τα Τελευταία Έτη" αποτελεί μεταπτυχιακή διατριβή του Γεωργίου Ματαλλιωτάκη και πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια των μεταπτυχιακών σπουδών του στην Επιχειρησιακή Έρευνα στον Τομέα Αποφάσεων, του Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης. Η εκπόνησή της πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Χρήστου Σκιαδά.

Στην συγκεκριμένη εργασία αυτή αναλύονται τα δεδομένα θνησιμότητας στην Ελλάδα κατά την τελευταία δεκαετία.

Χρησιμοποιείται ένα σύνθετο δυναμικό μοντέλο ανάλυσης που βασίζεται στη στοχαστική θεωρία και ιδιαίτερα στη θεωρία της πρώτης διάβασης.

Γίνεται αναλυτική παρουσίαση του μοντέλου και στη συνέχεια εφαρμόζονται στα δεδομένα της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας για την Ελλάδα.

Υπολογίζονται οι παράμετροι του μοντέλου και πραγματοποιείται στοχαστική προσομοίωση και παρουσιάζονται στοχαστικές διαδρομές.

Υπολογίζεται η μέση διάρκεια ζωής και η εξέλιξή της κατά την τελευταία εικοσαετία και εξάγονται ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

Εισαγωγή

Η κλασσική προσέγγιση στα δεδομένα εφαρμογών και ιδιαίτερα τα δεδομένα θνησιμότητας έγκειται στην εφαρμογή μιας θεωρητικής συνάρτησης κατανομής ή συνάρτηση πυκνότητας ή του ποσοστού (ρυθμού) θνησιμότητας σε ένα σύνολο παρατηρήσεων, παραδείγματος χάριν με μια κατανομή Makeham ή μια κατανομή Gompertz. Αυτή η μέθοδος καλείται στατική. Η μέθοδος που προτείνεται στο παρόν κείμενο είναι βασισμένη στο γεγονός ότι η ανθρώπινη ζωή έχει φυσικά μια χρονική εξέλιξη και αυτό που είναι δυνατόν να παρατηρηθεί οποιαδήποτε στιγμή είναι εάν το εξεταζόμενο άτομο είναι νεκρό ή ζωντανό. Ο Benjamin Gompertz παρατήρησε ότι η μοντελοποίηση της ανθρώπινης θνησιμότητας δεν ήταν μια απλή ντετερμινιστική αναζήτηση για ένα μοντέλο που ποικίλει με το χρόνο.

Η βασική έννοια που εισάγεται στην εργασία αυτή είναι η έννοια της κατάστασης υγείας στο χρόνο t. Αυτή είναι μια τυχαία μεταβλητή, S(t), που αντιπροσωπεύει την υγεία του ατόμου στο χρόνο t έτσι ώστε εάν αυτό έχει μια πάρα πολύ χαμηλή τιμή, το γεγονός θάνατος εμφανίζεται.

Το προτεινόμενο μοντέλο είναι ένα στοχαστικό μοντέλο συνεχούς χρόνου και παρέχεται από μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Το S(t) ως μια στοχαστική μεταβλητή που εκφράζει την κατάσταση της υγείας ενός ατόμου υπεισέρχεται στην στοχαστική διαφορική εξίσωση, επίσης εισάγονται η μ(t) μια συνάρτηση του χρόνου που εκφράζει την απειροελάχιστη μέση ανάπτυξη της κατάστασης της ανθρώπινης υγείας, η απειροελάχιστη διαφορά της ανθρώπινης υγείας που υποτίθεται ότι ήταν σταθερή στο προτεινόμενο μοντέλο και το W(t) η μεταβλητή της διαδικασίας Wiener.

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε έξι κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εμφανής η ανάπτυξη του αναμενόμενου χρόνου ζωής στην Ελλάδα κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών μέσω στατικών και δυναμικών μοντέλων για την κατάσταση υγείας αφού πραγματοποιείται μια εισαγωγή της έννοιας κατάσταση υγείας.

Η εφαρμογή ενός δυναμικού μοντέλου δεδομένων πίνακα ζωής αναπτύσσεται στο δεύτερο κεφάλαιο. Το στοχαστικό μοντέλο και οι σχετικές παράμετροι καθώς τα γενικά αποτελέσματα για τις διαδικασίες διασποράς η συνάρτηση πυκνότητας χρόνου μια τετραγωνική συνάρτηση κατάστασης υγείας και οι τεχνικές στατιστικής εκτίμησης βασικών παραμέτρων υπάρχουν στο κεφάλαιο αυτό.

Στο τρίτο κεφάλαιο πραγματοποιούνται εφαρμογές και στοχαστική προσομοίωση στους πίνακες δεδομένων ανθρώπινης ζωής. Η περίπτωση Γαλλίας και Βελγίου και η περίπτωση ελληνικών πινάκων δεδομένων ανθρώπινης ζωής αναλύονται.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται οι διακυμάνσεις των πινάκων ζωής για τα ελληνικά δεδομένα.

Στο πέμπτο κεφάλαιο εμφανίζονται τα συμπεράσματα από την παρούσα εργασία. Τέλος, στο ένατο κεφάλαιο παρουσιάζεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για την συγγραφή της εργασίας αυτής.

1. Η ανάπτυξη του αναμενόμενου χρόνου ζωής στην Ελλάδα κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών

1.1. <u>Εισαγωγή</u>

Ο αναμενόμενος χρόνος ζωής αυξάνεται κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών σε διάφορες χώρες. Αυτό καταδείχθηκε στις προηγούμενες μελέτες στη Γαλλία και το Βέλγιο μια δεκαετία πριν. Σε αυτό το κείμενο παρουσιάζεται η διαδικασία αύξησης του αναμενόμενου χρόνου ζωής στην Ελλάδα.

Πρώτα χρησιμοποιούμε ένα δυναμικό μοντέλο εκφράζοντας τους Πινάκες δεδομένων ανθρώπινης ζωής που διατυπώνονται με τη χρησιμοποίηση της θεωρίας της (πρώτης χρονικής διέλευσης) για μια στοχαστική διαδικασία.

Το μοντέλο παράγεται αναλυτικά και έπειτα εφαρμόζεται στα δεδομένα θνησιμότητας στην Ελλάδα. Εκτελείται επίσης μια στοχαστική προσομοίωση για την προτεινόμενη συνάρτηση κατάστασης υγείας και τις σχετικές στοχαστικές πορείες. Επιπλέον συζητούνται οι επιπτώσεις του προτεινόμενου μοντέλου και των αποτελεσμάτων που παράγονται στην επιστήμη των ασφαλειών.

Σε ένα πρόσφατο έγγραφο με τίτλο: “Μετρήσεις υγείας πληθυσμού: κρίσιμες εισαγωγές στην ανάπτυξη των δεδομένων για την πολιτική υγείας” Colin D Mathers, Christopher JL Murray, Majid Ezzati, Emmanuela Gakidou, Joshua A Salomon and Claudia Stein of the 1) Epidemiology and Burden of Disease, World Health Organization, Geneva, Switzerland 2) Evidence and Information for Policy, World

Health Organization, Geneva, Switzerland 3) Risk, Resource, and Environmental Management Division, Resources for the Future, Washington DC, USA, γράφουν :

“Τα έγκυρα, αξιόπιστα και συγκρίσιμα μέτρα των καταστάσεων υγείας των ατόμων και της κατάστασης της υγείας των πληθυσμών είναι κρίσιμα συστατικά της βάσης αποδεικτικών δεδομένων για την πολιτική υγείας. Πρέπει να αναπτύξουμε τις στρατηγικές μέτρησης υγείας πληθυσμών που εξετάζουν με συνοχή τις σχέσεις μεταξύ των επιδημιολογικών μέτρων (όπως οι εκθέσεις κινδύνου, η συχνότητα (incidence), και τα ποσοστά θνησιμότητας) και των πολυδιάστατων (multi-domain) μέτρων της κατάστασης της υγείας πληθυσμών, εξασφαλίζοντας την ισχύ και τη συγκρισιμότητα διασταυρούμενων-πληθυσμών”.

Σύμφωνα με αναφορές στην πρόσφατη βιβλιογραφία σχετικά με την “κατάσταση της υγείας ή το καθεστώς υγείας ενός πληθυσμού” εισάγεται η έννοια της κατάστασης υγείας ενός πληθυσμού που μοντελοποιείται με μια συνεχή-χρονική στοχαστική διαδικασία

$$S = (S(t),\ t \geq 0) \qquad (1.1.)$$

η οποία ορίζεται στο χώρο $(\Omega, \theta, (\theta_t), P)$, όπου η τυχαία μεταβλητή $S(t)$ αντιπροσωπεύει την κατάσταση υγείας ενός ατόμου στο χρόνο t.

Το γεγονός " θάνατος " ορίζεται ως ο χρόνος όπου η κατάσταση υγείας αγγίζει για πρώτη φορά ένα ελάχιστο επίπεδο υγείας αποκαλούμενο α. Συνεπώς, η διάρκεια ζωής του ατόμου είναι η τιμή αυτού του χρόνου T του συνόλου $(0, \alpha)$ για τη διαδικασία S.

Στην παρούσα εργασία, εισάγεται εν συντομία η γενική θεωρία των δυναμικών μοντέλων για τη μοντελοποίηση της ανθρώπινης ζωής και παρουσιάζουμε μια ιδιαίτερα καλή πρότυπη μοντελοποίηση που ταιριάζει αρκετά καλά στους ελληνικούς πίνακες θνησιμότητας.

Δίνονται επίσης μερικές πιθανές αιτήσεις αυτών των μοντέλων στις δυναμικές μελέτες της εξέλιξης θνησιμότητας και στη χρήση της θεωρίας μετοχών στην οικονομική μελέτη των συνταξιοδοτικών κεφαλαίων.

1.2. Προτεινόμενη μέθοδος προσέγγισης δεδομένων.

Η ανθρώπινη ζωή εξελίσσεται χρονικά.

Ο κλασσικός τρόπος προσέγγισης των δεδομένων τα οποία χρησιμοποιούνται για εφαρμογές και ιδιαίτερα των δεδομένων θνησιμότητας στηρίζεται στην εφαρμογή μιας θεωρητικής συνάρτησης κατανομής ή συνάρτηση πυκνότητας ή του ποσοστού (ρυθμού) θνησιμότητας σε ένα σύνολο παρατηρήσεων, παραδείγματος χάριν με μια κατανομή Makeham ή μια κατανομή Gompertz. Προτείνουμε τη μέθοδο που είναι βασισμένη στο γεγονός ότι η ανθρώπινη ζωή εξελίσσεται χρονικά και αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε οποιαδήποτε στιγμή είναι εάν το εξεταζόμενο άτομο είναι εν ζωή ή είναι νεκρό.

´´Ακολουθεί ένα κείμενο στην Αγγλική γλώσσα που δεν κρίνεται σκόπιμο να αποδοθεί στα Ελληνικά διότι ανήκει στη φιλοσοφία και στην έκφραση της Αγγλικής γλώσσας παλαιών ετών´´

*Benjamin Gompertz in his famous treatise on the law expressing the human mortality make some very crucial assumptions regarding the inevitable end of the human life. According to his words: "It is possible that death may be the consequence of two generally co-existing causes; the one, **chance**, without previous disposition to death or deterioration; the other, **deterioration**, or an increased inability to withstand destruction. If, for instance, there be a number of diseases to which the young and old were equally liable, and likewise which should be equally destructive whether the patient be young or old, it is evident that the deaths among the young and old by such diseases would be exactly in proportion of the number of young to the old; provided those numbers were sufficiently great for chance to have its play; and the intensity of mortality might then be said to be constant; and were there no other diseases but such as those, life of all ages would be of equal value, and the number of living and dying from a certain number living at a given earlier age, would decrease in geometrical progression, as the age increased by equal intervals of time; but if mankind be continually gaining seeds of indisposition, or in other words, an increased liability to death (which appears not to be an unlikely supposition with respect to a great part of life, though the contrary appears to take place at certain periods) it would follow that the number of living out of a given number of persons at a given age, at equal successive increments of age, would decrease in a greater ratio than the geometrical progression, and then the chances against the knowledge of any one having arrived to certain defined terms of old age might increase in a much faster progression, notwithstanding there might still be no limit to the age of man. … "*

Σύμφωνα με την δήλωση του Gompertz παραπάνω:

α) την πιθανότητα και την επιδείνωση ή μια αυξανόμενη ανικανότητα να αντισταθεί στην καταστροφή ή β) η αιτιοκρατία στην πιο πρόσφατη σημείωση είναι οι δύο βάσεις της δόμησης ενός μοντέλου σχετικά με τη διατύπωση μιας συνάρτησης που εκφράζει το νόμο της ανθρώπινης θνησιμότητας.

Μετά από την ανωτέρω πιθανότητα και την αιτιοκρατία μοντελοποιείται αμέσως από μια γενική στοχαστική διαφορική εξίσωση ενός συστήματος αύξησης της μορφής:

$$dx(t) = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw(t) \qquad (\mathbf{1.4.})$$

όπου η συνάρτηση αύξησης $x = x(t)$, χωρίς απώλεια γενικότητας, μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζεται μεταξύ $0 \leq x(t) \leq 1$ και $\mu(x,t)$ και $\sigma(x,t)$ είναι συναρτήσεις που καθορίζονται και $W(t)$ είναι τα μοντέλα της διαδικασίας Wiener.

Εντούτοις, η πιθανότητα που μοντελοποιήθηκε με μια στοχαστική διαδικασία δεν ήταν δυνατό να εκφραστεί στην αναλυτική μαθηματική σημείωση στις ημέρες του Gompertz. Άντ' αυτού η ντετερμινιστική περίπτωση διαμορφώθηκε εύκολα από τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης:

$$dx(t) = \mu(x,t)dt \qquad (\mathbf{1.5.})$$

εκτιμώντας ότι η ακόλουθη απλούστερη ντετερμινιστική έκφραση είναι επίσης χρήσιμη σε διάφορες εφαρμογές

$$dx(t) = \mu(x)dt \qquad (1.6.)$$

Η πιο πρόσφατη εξίσωση υπονοεί ότι το ποσοστό αύξησης

$$\dot{x} = dx \ / \ dt \qquad (1.7.)$$

είναι μια συνάρτηση του μεγέθους x του συστήματος.

Ο Benjamin Gompertz παρατήρησε ότι η μοντελοποίηση της ανθρώπινης θνησιμότητας δεν ήταν μια απλή ντετερμινιστική αναζήτηση για ένα μοντέλο που ποικίλει με το χρόνο. Αυτός απέδειξε ότι ο λογάριθμος των δεδομένων που συλλέχθηκαν στους πίνακες ζωής ήταν η βάση για τη δομή του μοντέλου. Η βάση του ήταν το " σχετικό ποσοστό αύξησης " το οποίο είναι το κλάσμα:

$$\dot{x}/x = d\ln x / dt = (\ln x)' = \dot{y} \qquad (1.8.)$$

Σύμφωνα με τις αρχικές ιδέες του Gompertz ο νόμος του στη σύγχρονη σημείωση μπορεί να βασιστεί στο σχετικό μέγεθος y που από το σύστημα ορίζεται ως εξής:

$$y = \int \frac{dx}{x} = \ln x \qquad (1.9.)$$

και προσεγγίζεται από το ακόλουθο:

$$y \approx \sum \frac{\Delta x}{x} \qquad \textbf{(1.10.)}$$

Δηλαδή το σχετικό μέγεθος y είναι ένα μέτρο όλων των σχετικών αλλαγών του συστήματος από τον αρχικό σχηματισμό μέχρι την πρόσφατη κατάσταση. Σε αυτήν την περίπτωση το τυποποιημένο μέτρο της αύξησης είναι το μέγεθος του συστήματος, το οποίο θεωρείται ως η μετρική κλίμακα του συστήματος. Αυτή η υπόθεση οδηγεί σε μια κατάλληλη πρότυπη διατύπωση ειδικά όταν τα συστήματα με απολύτως διαφορετικές κλίμακες μέτρου συγκρίνονται. Η απλούστερη υπόθεση ενός σταθερού σχετικού ποσοστού αύξησης παράγει το εκθετικό μοντέλο αύξησης $\dot{x}/x = b$ ή $\dot{x} = bx$.

Όπως είναι λογικό αναμένεται ότι ένα σύστημα έχει τα όρια στην αύξηση, ρεαλιστικότερο είναι να υποθέσει κάποιος ότι μειωμένο σχετικό ποσοστό αύξησης, οδηγεί άμεσα στην απλή διαφορική εξίσωση:

$$\dot{y} = -by \qquad \textbf{(1.11.)}$$

Αυτός είναι ένας νόμος προτεινόμενος από τον Benjamin Gompertz, 1825. Ο Gompertz στο διάσημο έγγραφό του “Στη φύση της συνάρτησης έκφρασης του νόμου της ανθρώπινης θνησιμότητας, και σε έναν νέο τρόπο καθορισμού της τιμής των απρόβλεπτων της ζωής” καταστάσεις:

“Στρέφω τώρα την προσοχή του αναγνώστη σε έναν νόμο που παρατηρείται στους πίνακες θνησιμότητας, για τα ίσα διαστήματα των μεγάλων περιόδων και υιοθετώντας τη σημείωση του προηγούμενου εγγράφου μου, θεωρώντας L_x να εκφράζει τον αριθμό διαβίωσης στην ηλικία x, και χρησιμοποιώντας λ για το χαρακτηριστικό του κοινού λογαρίθμου δηλαδή..., εάν οι διαφορές των λογαρίθμων της διαβίωσης στις ηλικίες n, n+m, n+2m, n+3m+, και τα λοιπά να είναι σταθερές, κατόπιν όταν οι αριθμοί διαβίωσης που αντιστοιχούν σε αυτές τις ηλικίες διαμορφώνουν μια γεωμετρική πρόοδο αυτή που θα είναι η θεμελιώδης αρχή των λογαρίθμων. Αυτός ο νόμος της γεωμετρικής προόδου εισχωρεί, σε έναν κατά προσέγγιση βαθμό, στις μεγάλες αναλογίες των διαφορετικών πινάκων της θνησιμότητας. "

Η τελευταία διαφορική εξίσωση 4.10 μπορεί να γραφτεί όπως

$$(\ln y)' = -b \qquad \textbf{(1.12.)}$$

ή

$$(\ln x)' = -b \ln x \qquad \textbf{(1.13.)}$$

και τελικά το προτεινόμενο μοντέλο από Benjamin Gompertz (1825) έχει ως αποτέλεσμα:

$$\dot{x} = -bx \ln x \qquad \textbf{(1.14.)}$$

Η ολοκλήρωση της 4.13 δίνει τη *συνάρτηση Gompertz*:

$$x = e^{\ln(x_0)e^{-bt}} \qquad (\mathbf{1.15.})$$

Μια επέκταση του λογαρίθμου σε μια σειρά δίνει την προσέγγιση $\ln x \approx -1 + x$ που εφαρμόζεται στην τελευταία εξίσωση παράγει το λογιστικό μοντέλο $\dot{x} = bx(1-x)$. Αυτό το μοντέλο προτάθηκε από τον P. F. Verhulst, 1837 για να εκφράσει έναν νόμο της αύξησης πληθυσμών.

Εντούτοις, το μοντέλο Gompertz είναι ένα μοντέλο αύξησης που έχει ένα μέγιστο στο $1/e \approx 38{,}83\,\%$ της διαδικασίας. Αυτό το αποτέλεσμα είναι σαφώς μη ρεαλιστικό, τουλάχιστον όταν εξετάζονται τα δεδομένα των πρόσφατων πινάκων ζωής.

Αντί αυτού είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι μια συνάρτηση που εκφράζει μια διαδικασία αποσύνθεσης, όπως είναι η κατανομή Weibull, προκύπτει αμέσως από το ανωτέρω μοντέλο Gompertz με το να υποθέσει ότι $x = 1 - x$.

Η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση είναι η παρακάτω:

$$[\ln(1 - x)]' = -b\ln(1 - x) \qquad (\mathbf{1.16.})$$

Το μέγιστο ποσοστό αύξησης (αποσύνθεσης) επιτυγχάνεται στο $1 - 1/e \approx 62.3\%$ της διαδικασίας.

Η εξίσωση Weibull έχει το ακόλουθο αποτέλεσμα από την ολοκλήρωση:

$$x = 1 - e^{\ln(1-x_0)e^{-bt}} \qquad (\mathbf{1.17.})$$

Το σχετικό ποσοστό αύξησης μπορεί επίσης να θεωρηθεί σαν μια συνάρτηση αργής απόκρισης που ποικίλει με το χρόνο. Σε αυτή την περίπτωση η απλούστερη έκφραση είναι η:

$$\dot{y} = (\ln x)' = a - bt \qquad (\mathbf{1.18.})$$

όπου $b > 0$

Η λύση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης οδηγεί σε μια συνάρτηση Gauss που είναι η:

$$x = ce^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (\mathbf{1.19.})$$

όπου $\mu = a/b, \sigma^2 = b$ και η σταθερά ολοκλήρωσης C παράγεται μετά από την ομαλοποίηση.

Μια άλλη προσέγγιση είναι να θεωρηθεί το σχετικό ποσοστό αύξησης να ακολουθήσει μια συνάρτηση μείωσης του χρόνου της μορφής με τις παραμέτρους a και λ.

$$\dot{y} = (\ln x)' = a(\ln t)' - \lambda \qquad (\mathbf{1.20.})$$

όπου a και λ είναι παράμετροι.

Η ολοκλήρωση οδηγεί στη συνάρτηση Gamma (όπου c είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης)

$$x = c(\lambda t)^a e^{-\lambda t} \qquad (\mathbf{1.21.})$$

Μέχρι τώρα αποδείχθηκε παραπάνω ότι οι αρχικές ιδέες Gompertz θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε μια προσέγγιση μοντελοποίησης που ανέρχεται σε μια ποικιλία συναρτήσεων που εκφράζουν το νόμο της ανθρώπινης θνησιμότητας.

Ο Gompertz πηγαίνει παραπέρα να συζητήσει στην ύπαρξη ενός ορίου της ανθρώπινης ηλικίας που έχει σαν αποτέλεσμα ότι **"είναι εξαιρετικά πιθανό να είναι το καθεστώς της φύσης "**. Και αν το όριο στην πιθανή διάρκεια της ζωής είναι ένα θέμα μη πιθανό πάντα να καθορίζεται, ακόμη και εάν αυτό υπήρχε, ακόμα εμφανίζεται ενδιαφέρον να κατοικήσει σε μια συνέπεια που θα ακολουθούσε, πρέπει η θνησιμότητα των γηρατειών να είναι όπως παραπάνω έχει περιγραφεί. Για, θα ακολουθούσε ότι η μη - εμφάνιση στη σελίδα της ιστορίας μιας μονοσήμαντης περίστασης ενός προσώπου να φτάσει σε μια ορισμένη περιορισμένη ηλικία, **δεν θα ήταν η ελάχιστη απόδειξη ενός ορίου της ηλικίας του ατόμου** και παραπέρα ότι ούτε η βέβηλη ιστορία ούτε η σύγχρονη εμπειρία δεν θα μπορούσε να έρθει σε αντίθεση με τη δυνατότητα της μεγάλης ηλικίας των πατριαρχών της Ιερής γραφής. Και αυτό εάν οποιοδήποτε επιχείρημα μπορεί να προσκομιστεί για να αποδείξει την απαραίτητη λήξη της ζωής, αυτό δεν εμφανίζεται πιθανό τα υλικά για τέτοια μπορούν στην ακριβή λογική να μαζευτούν από τη σχέση της ιστορίας, όχι ακόμη εμείς θα ήμασταν ικανοί να αποδείξουμε (που **είναι εξαιρετικά πιθανό να είναι το καθεστώς της φύσης**) ότι πέρα από μια ορισμένη περίοδο η ζωή του ατόμου γίνεται συνεχώς χειρότερη.

Εισάγουμε τώρα την βασική έννοια της κατάστασης υγείας στο χρόνο t.

Η κατάσταση υγείας είναι μια τυχαία μεταβλητή, S(t),που εκφράζει την υγεία ενός ανθρώπου στο χρόνο t έτσι ώστε εάν αυτό r.v. έχει μια πάρα πολύ χαμηλή τιμή, το γεγονός θάνατος εμφανίζεται.

Διατυπώνοντας το με περισσότερη ακρίβεια, το γεγονός "θάνατος" εμφανίζεται όταν για πρώτη φορά, η στοχαστική διαδικασία

$$S = (S (t) , \ t \geq 0) \qquad (1.22)$$

εγκαθιστά μια κρίσιμη τιμή που αντιπροσωπεύεται από τον αυστηρά θετικό πραγματικό αριθμό α και αποκαλείται τιμή φράγματος.

Όταν το άτομο (άνθρωπος) γεννιέται, ξεκινά με μια αρχική τιμή S(0); φυσικά, όσο μεγαλύτερη η τιμή S, καλύτερα είναι για αυτό το άτομο.

Το μοντέλο που προτείνουμε είναι ένα στοχαστικό μοντέλο συνεχούς χρόνου με τη σταθερά σ να δίνεται από την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS(t) = \mu(t)dt + \sigma dW(t) \quad \text{(α)}$$

όπου S(t) είναι μια στοχαστική μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την κατάσταση της υγείας ενός ατόμου, μ(t) μια συνάρτηση του χρόνου που εκφράζει την απειροελάχιστη μέση ανάπτυξη της κατάστασης της ανθρώπινης υγείας, η απειροελάχιστη διαφορά της ανθρώπινης υγείας που υποτίθεται ότι ήταν σταθερή στο προτεινόμενο μοντέλο και W(t) η διαδικασία Wiener.

Λαμβάνουμε το S(t) εύκολα από την άμεση ολοκλήρωση από την ανωτέρω στοχαστική διαφορική εξίσωση.

Κατόπιν S(t) δίνεται από:

$$S(t) = S_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(s)ds + \sigma[W(t) - W_0] \quad \text{(β)}$$

όπου S(0) είναι η τιμή S(t) στο χρόνο t = 0.

Θεωρήστε ότι η μέση τιμή S(t) είναι μια συνάρτηση H = H(t) που παρέχεται από:

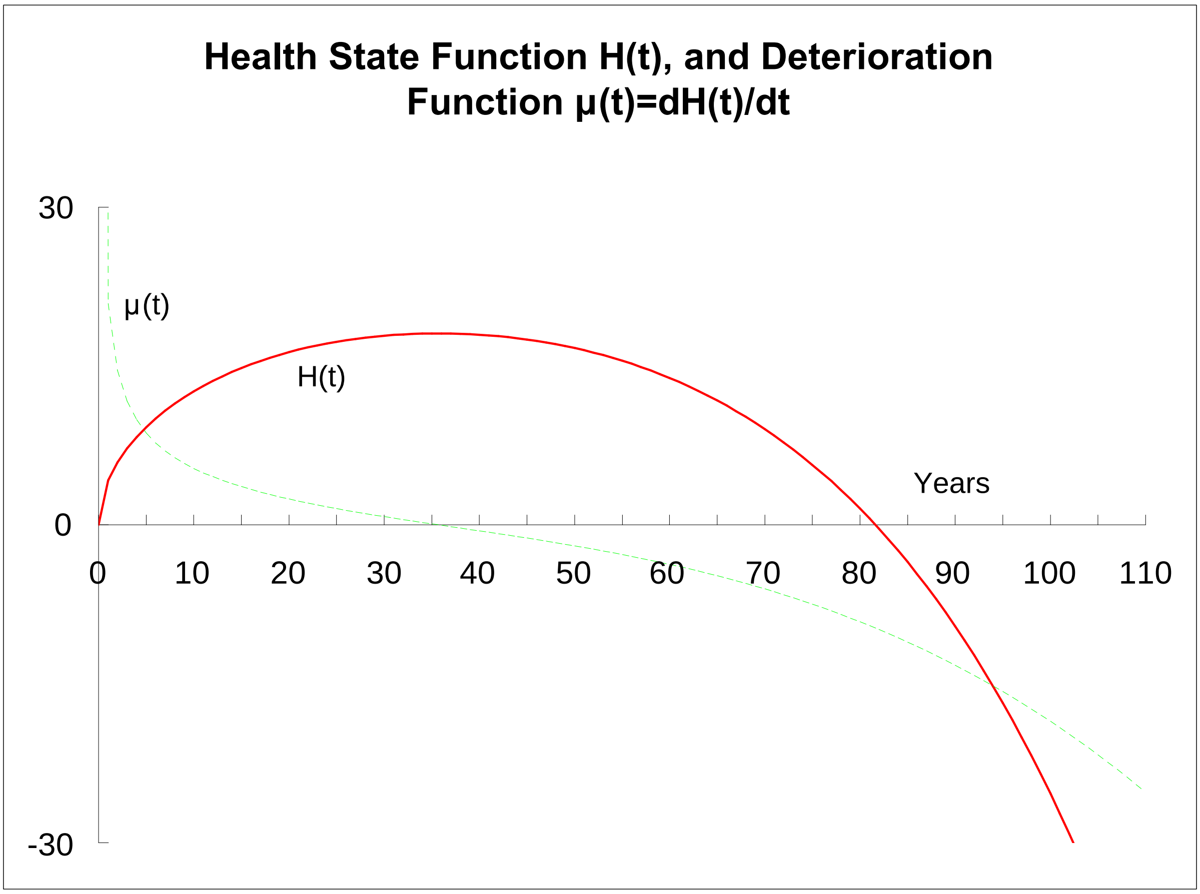
$$H(t) = \mathrm{E}\{S(t)\} = S_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(s)ds \quad \text{(γ)}$$

Η συνάρτηση μ(t) συσχετίζεται με H(t) από τον τύπο:

$$\mu(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial t} \quad \text{(δ)}$$

Η μέση τιμή $H(t)$ ή η μέση κατάσταση της συνάρτησης υγείας κατά τη διάρκεια της διάρκειας ζωής είναι αναμενόμενο να ακολουθήσει μια πορεία της γενικής μορφής που απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Συμβαίνει μια γρήγορη βελτίωση της κατάστασης της ανθρώπινης υγείας μετά από τη γέννηση του ατόμου όταν H είναι κοντά σε μια χαμηλή τιμή που παρουσιάζεται από το μηδέν στη γραφική παράσταση και έπειτα ακολουθεί μια περίοδο αργής βελτίωσης και πτώσης.

Η συνάρτηση $\mu(t)$ ως το παράγωγο της $H(t)$ πρέπει να ξεκινάει από πολύ υψηλές τιμές στην αρχή της διάρκειας ζωής για το χρόνο t κοντά στο μηδέν και μειώνεται συνεχώς φθάνοντας στο μηδέν όταν H είναι στο μέγιστο και τότε παίρνει αρνητικές τιμές. Αυτή η συνάρτηση, δεδομένου ότι πρέπει να έχει το αρνητικό παράγωγο $(d\mu / dt < 0)$, εκφράζει την αναπόφευκτη πτώση για τον απειροελάχιστο μέσο όρο της κατάστασης της ανθρώπινης υγείας και προτείνουμε να καλείται ως **συνάρτηση θνησιμότητας**.



Σχήμα 1. Συνάρτηση Υγείας H(t) και Συνάρτηση Θνησιμότητας μ(t).

Η βασική υπόθεση σχετικά με τη συνάρτηση $\mu(t)$ είναι ότι η $\mu(t)$ μπορεί να εκφράσει δύο ευδιάκριτες χρόνο-διαδικασίες που έχουν σχέση με την κατάσταση της ανθρώπινης υγείας. Η μία διαδικασία αφορά στην πρώτη περίοδο διάρκειας ζωής που μοντελοποιείται από μια συνάρτηση $u = u(1/sqr(t))$ που πρέπει να μειώνεται γρήγορα με το χρόνο και να εκφράζει τη γρήγορη βελτίωση της κατάστασης της ανθρώπινης υγείας κατά τη διάρκεια των πρώτων ετών μετά από τη γέννηση.

Η άλλη διαδικασία είναι μια συνάρτηση $v = v(t)$ που εκφράζει τη βαθμιαία αύξηση και έπειτα μείωση κατάσταση της υγείας κατά τη διάρκεια της συνολικής περιόδου της διάρκειας ζωής.

Ο παρακάτω τύπος αποδίδει τη συνάρτηση μ(t):

$$\mu(t) = u\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + v(t) \qquad (\varepsilon)$$

Η επιλεγμένη προσέγγιση για μ(t) έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\mu(t) = 2a_1 t + 3a_2 t^2 + 4a_3 t^3 + \frac{b_1}{2\sqrt{t}} \qquad (\zeta)$$

Βέβαια στις περιπτώσεις που t(0) = 1 και S(0) = 0, η μέση τιμή S(t) , η H(t) είναι ως εξής:

$$H(t) = \mathrm{E}\{S(t)\} = \int_1^t \mu(s)ds$$
$$= a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4 + b_1\sqrt{t} - c$$

(η)

όπου

$$c = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 \qquad (\theta)$$

Επιλέγουμε το χρόνο $t(0) = 1$ επειδή η σειρά των δεδομένων μας στους πίνακες δεδομένων ζωής για τους θανάτους στην ηλικία μεταξύ x και $x+1$ συμβολίζεται από $d(x)$ που αρχίζει από το πρώτο έτος όταν t είναι ίσο με 1.

2. *Αποτελέσματα για τις διαδικασίες διασποράς*

<u>*2.1 Η συνάρτηση πυκνότητας χρόνου*</u>

Επιστρέφοντας στη σχέση (α)., δίνεται τώρα η μορφή της σχετικής μετάβασης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Αυτή η συνάρτηση όπως παρήχθη στο Janssen and Skiadas, 1995 είναι :

$$p(S,t;S_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\int_{t_0}^{t}[\sigma(t')]^2\,dt'}}\exp\left[-\frac{[S-S_0-\int_{t_0}^{t}\mu(t')dt']^2}{2\int_{t_0}^{t}[\sigma(t')]^2\,dt'}\right] \quad \textbf{(2.1.)}$$

Με την εισαγωγή της συνάρτησης κατάστασης υγείας H(t) η συνάρτηση μετάβασης πυκνότητας πιθανότητας λαμβάνει τη μορφή:

$$p(S,t;S_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\int_{t_0}^{t}[\sigma(t')]^2\,dt'}}\exp\left[-\frac{[S-S_0-H(t')]^2}{2\int_{t_0}^{t}[\sigma(t')]^2\,dt'}\right] \quad \textbf{(2.2.)}$$

Όταν μ και σ είναι σταθερές τότε η γνωστή έκφραση παράγεται:

$$p(S,t;S_0,t_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\exp\left[-\frac{[S-S_0-\mu(t-t_0)]}{2\sigma^2(t-t_0)}\right] \quad \textbf{(2.3.)}$$

Την πρώτη φορά που η συνάρτηση υγείας συναντά τον οριζόντιο άξονα, η χρονική στιγμή Τα η οποία εντοπίζεται σε απόσταση α από την αρχή των αξόνων, μπορεί να εκφραστεί από τον ακόλουθο τύπο :

$$T = \inf\{ t \setminus S(t)\} \leq \alpha \qquad \textbf{(2.4.)}$$

και ο κύριος στόχος είναι να διατυπωθεί μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας g(t) αποκαλούμενη συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου της πρώτης διάβασης με την ακόλουθη ιδιότητα:

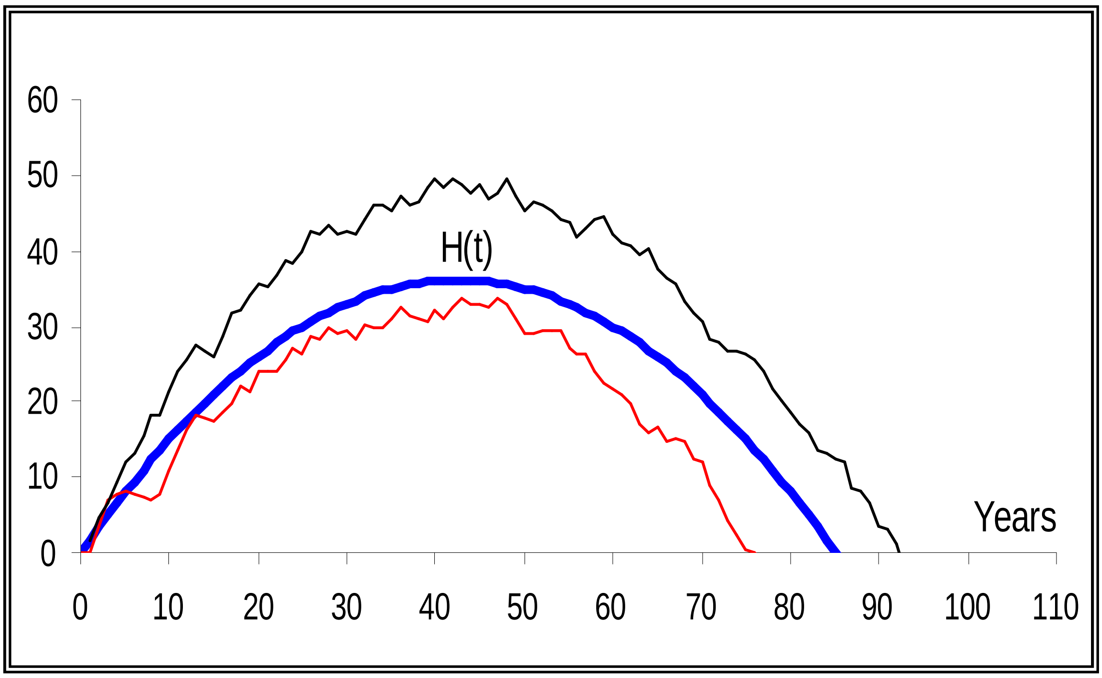
$$g(\alpha, t; S_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} \Pr\{T \leq t\}, \quad \mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0 \qquad \textbf{(2.5.)}$$

Μετά από την πρωτοποριακή εργασία του Siegert (1951) σχετικά με τις αναλυτικές λύσεις του προβλήματος πιθανότητας χρόνου πρώτης διάβασης εμφανίστηκε μια αρκετά εκτενής βιβλιογραφία. Ο στόχος ήταν είτε να παραχθούν οι αναλυτικές λύσεις είτε, όταν αυτό δεν είναι δυνατό, να προσεγγίσει ικανοποιητικά τη συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου της πρώτης διάβασης υπό εξέταση. Μια προσέγγιση είναι η χρήση μιας "προσέγγισης εφαπτόμενης" στην πρώτη πυκνότητα εξόδων της μορφής:

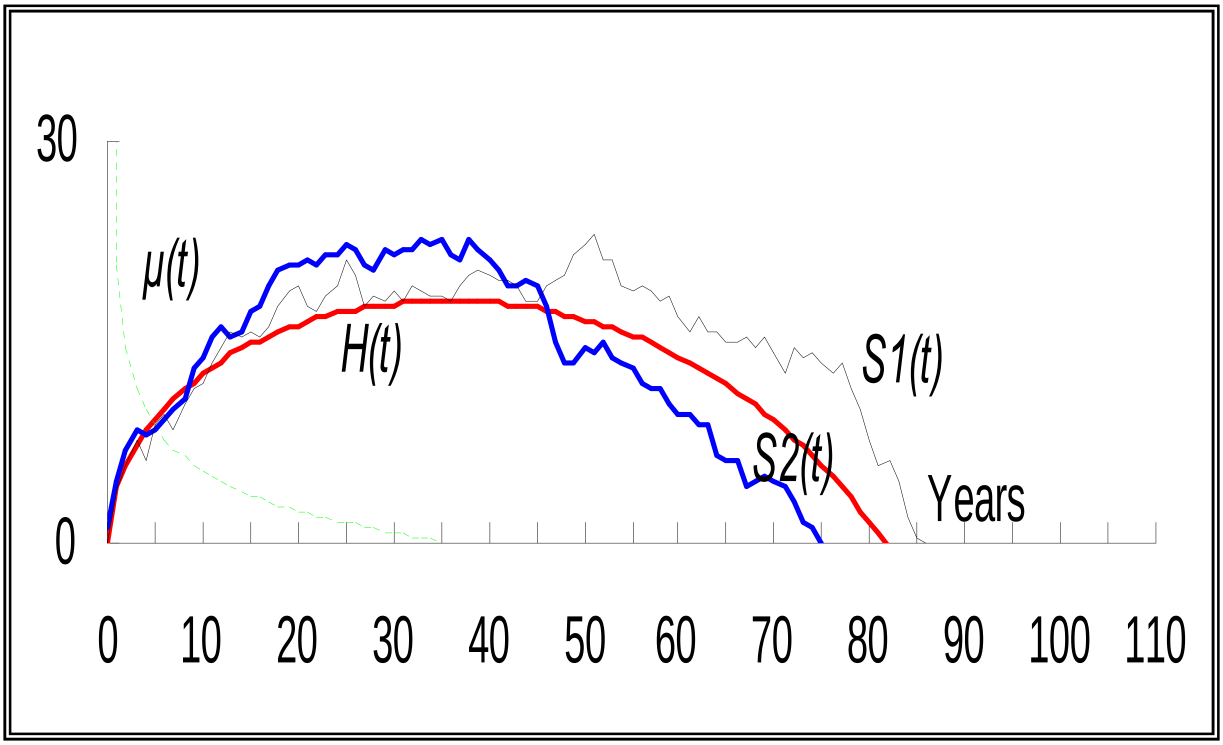
$$g_a(\lambda(t), t; x_0, t_0) = \frac{\lambda(t) - (t - t_0)\lambda'(t)}{t - t_0} f(\lambda(t), t; x_0, t_0) \qquad \textbf{(2.6.)}$$

όπου $\lambda(t)$ συμβολίζει μια ομαλή συνάρτηση του χρόνου που κόβει τις στοχαστικές πορείες που παρέχουν τη συνάρτηση πυκνότητας $g(t)$.

Η κυριότερη προϋπόθεση σχετικά με την κατάσταση της ανθρώπινης υγείας είναι ότι ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία που εκφράζεται από την $S(t)$ και ότι το τέλος της διάρκειας ζωής υπεισέρχεται όταν η στοχαστική μεταβλητή $S(t)$ φθάνει σε κατώτατο επίπεδο κατάστασης υγείας που εδώ συμβολίζεται με α. Αυτό το επίπεδο α σε όρους της θεωρίας του πρώτου χρόνου διαβάσεων εκφράζεται από ένα μονοσήμαντο εμπόδιο που βρίσκεται σε απόσταση α από την αρχή. Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2 για ένα άτομο και στο Σχήμα 2.3 όπου οι πορείες για δύο άτομα παρουσιάζονται μαζί με την συνάρτηση κατάστασης υγείας $H(t)$.



Σχήμα 2.2.: Συνάρτηση Κατάστασης Υγείας H(t) και Στοχαστικά Μονοπάτια.



Σχήμα 2.3.: Συνάρτηση Κατάστασης Υγείας Η(t), μ(t) και Στοχαστικά μονοπάτια S1(t) και S2(t).

Κατόπιν, σύμφωνα με τη θεωρία που παρουσιάζεται ανωτέρω, η συνάρτηση πυκνότητας g(t) εκφράζει την κατανομή της πρώτης μετάβασης από το εμπόδιο α, είναι ακριβώς η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που παρέχει τον αριθμό θανάτων μεταξύ του χρόνου t και του χρόνου t+dt όπου t δεν είναι τίποτα άλλο από την ηλικία των ατόμων. Αυτή η συνάρτηση για την περίπτωση της κατάστασης της ανθρώπινης υγείας που μελετάται εδώ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$g(t) = k \frac{|\alpha|}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left[-\frac{[\alpha - H(t)]^2}{2\sigma^2 t}\right] \quad \textbf{(2.7.)}$$

όπου k είναι μια σταθερά ομαλοποίησης που καθορίζεται από τον τύπο:

$$\int_0^\infty g(t)dt = 1 \quad \textbf{(2.8.)}$$

Μια έρευνα για την ανωτέρω μορφή g(t) δείχνει ότι όλες οι παράμετροι εκτός από k διαιρούνται από σ ή με άλλα λόγια όταν υπολογίζονται, υπολογίζονται σε μονάδες του σ. Κατά συνέπεια μπορεί να τεθεί σ = 1 και να χρησιμοποιηθεί την έκφραση για H(t) να λαμβάνει την τελική μορφή g(t) για να αντικατασταθούν τα δεδομένα του πινάκα θνησιμότητας. Αυτή η μορφή g(t) είναι η ακόλουθη:

$$g(t) = k\frac{|\alpha|}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha+c}{\sqrt{t}} - (b_1 + a_1 t\sqrt{t} + a_2 t^2\sqrt{t} + a_3 t^3\sqrt{t})\right]^2\right\} \quad \textbf{(2.9.)}$$

2.2 Μια τετραγωνική συνάρτηση κατάστασης υγείας

Η προτεινόμενη συνάρτηση πυκνότητας για τον αριθμό ετήσιων θανάτων δίνεται παραπάνω από την εξίσωση 2.16. Χωρίς την απώλεια γενικότητας μπορούμε να προτείνουμε τις ακόλουθες απλοποιήσεις: Το φράγμα a θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι συμπίπτει με τον Χ-άξονα υποθέτοντας ότι το επίπεδο θανάτου θα είναι στην τιμή μηδέν για την κατάσταση υγείας, το οποίο είναι $a = 0$. Τίθεται επίσης $\sigma = 1$. Ένας άλλος χρήσιμος μετασχηματισμός γίνεται με την αντικατάσταση της παραμέτρου k από k^* όπου $k=k^*T^{(3/2)}$. Κατά συνέπεια η προκύπτουσα συνάρτηση πυκνότητας λαμβάνει τη μορφή:

$$g(t) = \frac{k^*(t/T)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{[H(t)]^2}{2t}\right] \qquad (\mathbf{2.10.})$$

Η συνάρτηση κατάσταση υγείας $H(t)$ υποτίθεται να είναι κοντά στο μηδέν τη στιγμή της γέννησης και έπειτα ότι αυξάνεται σε ένα μέγιστο επίπεδο υγείας και να μειώνεται βαθμιαία σε ένα μηδενικό επίπεδο τη στιγμή του θανάτου. Υποθέτοντας ότι η αφετηρία είναι το μηδενικό επίπεδο κατάστασης υγείας μια πολύ απλή τετραγωνική συνάρτηση θα εκφράσει την συνάρτηση κατάστασης υγείας, η οποία και είναι η ακόλουθη:

$$H(t) = bt(1 - \frac{t}{T}) \qquad (\mathbf{2.11.})$$

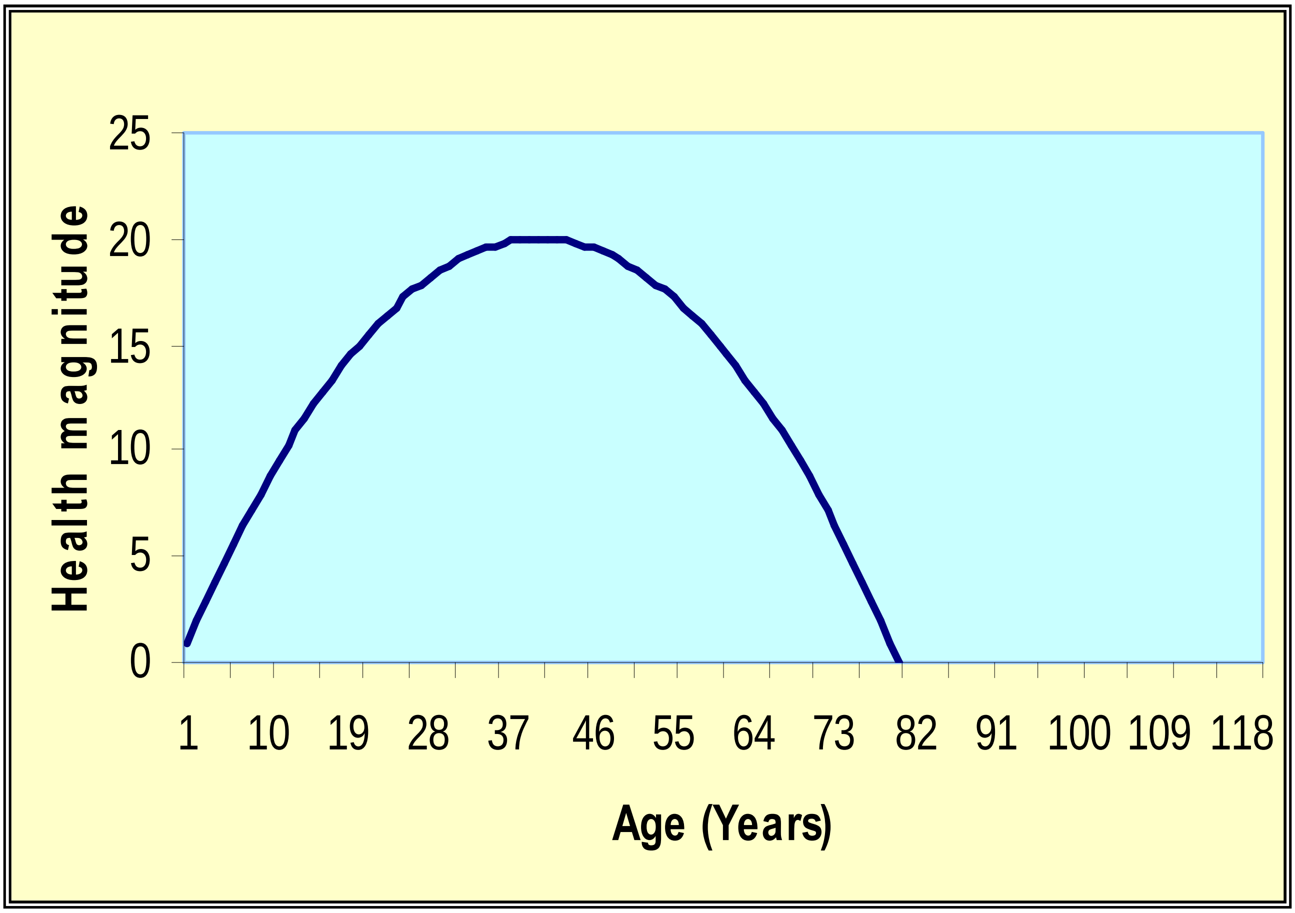
Όπου T είναι μια κρίσιμη ηλικία που καθορίζεται και b είναι η παράμετρος της κατάστασης υγείας. Η προκύπτουσα μορφή της συνάρτησης πυκνότητας δίνεται από τον τύπο που παρουσιάζεται αμέσως παρακάτω:

$$g(t) = \frac{k^*}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{t}{T}\right) - \frac{1}{2} b^2 t \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 \right] \quad \textbf{(2.12.)}$$

Είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι το ανώτατο όριο για τη συνάρτηση πυκνότητας επιτυγχάνεται όταν $t = T$. Κατόπιν T είναι η ηλικία με το μέγιστο ποσοστό θανάτου. Ήδη είναι γνωστό ότι αυτό το επίπεδο είναι πιο υψηλό αλλά κοντά στα 80 έτη για τις γυναίκες και λιγότερο από 80 για τους άνδρες.

Η τετραγωνική μορφή για την συνάρτηση κατάστασης υγείας είναι αρκετά απλή και δίνει αμέσως ένα ανώτατο όριο στην ηλικία $t = T/2$. Αυτό το επίπεδο είναι ίσο με $H_{max} = bT/4$. Δηλαδή η μέγιστη κατάσταση υγείας είναι ανάλογη προς το έτος T όπου υπεισέρχεται το μέγιστο ποσοστό θανάτου.

Η τετραγωνική συνάρτηση κατάστασης υγείας προσομοιώνεται εύκολα και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον επόμενο Σχήμα 2.4. Η παράμετρος $T = 80$ έτη δίνει ως μέγιστο επίπεδο κατάστασης υγείας $t = T/2 = 40$ έτη, ένα πολύ λογικό αποτέλεσμα. Το ανώτατο όριο της συνάρτησης κατάστασης υγείας είναι $H_{max} = bT/4=20b$



Σχήμα 2.4.: Η τετραγωνική συνάρτηση κατάστασης υγείας.

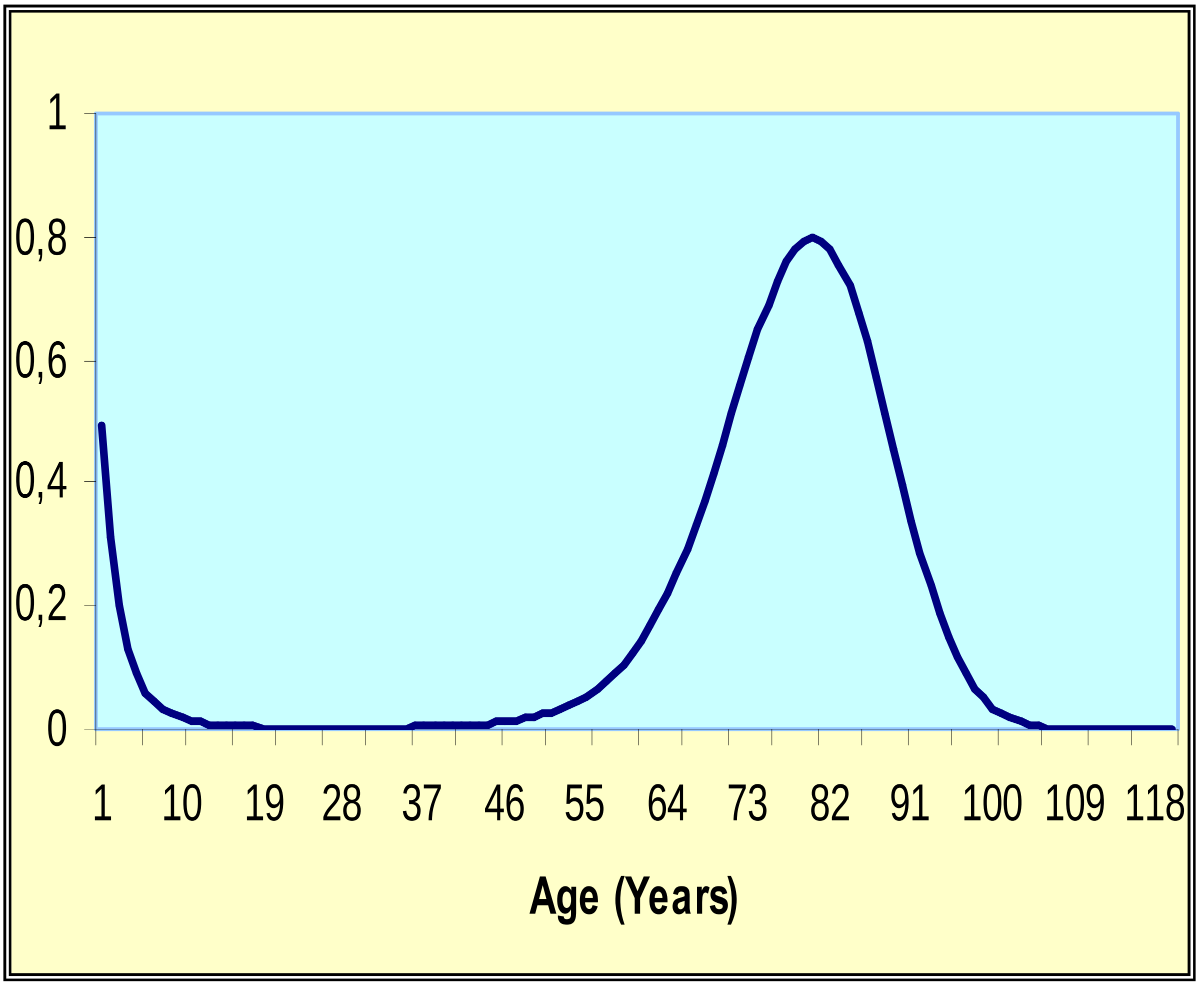
Η προκύπτουσα συνάρτηση πυκνότητας για μια τετραγωνική συνάρτηση κατάσταση υγείας παρουσιάζεται στο επόμενο Σχήμα. Επιλέξαμε το μέγιστο ποσοστό θανάτου $t = T = 80$ έτη. Τότε η μορφή της συνάρτησης πυκνότητας περιλαμβάνει επίσης το υψηλό επίπεδο θανάτων που εμφανίζονται στα πρώτα έτη της παιδικής ηλικίας.

Ένα άλλο πολύ ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της τετραγωνικής συνάρτησης κατάστασης υγείας είναι ότι η προκύπτουσα συνάρτηση πυκνότητας θα μπορούσε να εκφράσει αρκετά λογικά τα ακατέργαστα δεδομένα πινάκων ζωής που διατέθηκαν από το Γραφείο της Στατιστικής Υπηρεσίας. Μεταξύ άλλων χαρακτηριστικών του μοντέλου είναι επίσης το χαμηλό επίπεδο θνησιμότητας μεταξύ των ετών 10 και 45 το οποίο εκφράζεται πολύ καλά, και επίσης τα ποσοστά θνησιμότητας μετά από 100 έτη.

Φυσικά τα αποτελέσματα με το πιο περίπλοκο μοντέλο που χρησιμοποιείται στις προηγούμενες εργασίες είναι ακριβέστερα αλλά η χρήση ενός απλού τετραγωνικού μοντέλου παρέχει στον ερευνητή ένα αρκετά καλό επεξηγηματικό εργαλείο, ειδικά όταν δεν διαδίδεται ευρέως η προτεινόμενη θεωρία.

Οι υποψήφιοι βρίσκουν αρκετά δύσκολο το χειρισμό της πλήρους θεωρίας συμπεριλαμβανομένης της στοχαστικής και ντετερμινιστικής μοντελοποίησης, της θεωρίας του χρόνου πρώτης διάβασης, της στοχαστικής προσομοίωσης και της μη γραμμικής ανάλυσης παλινδρόμισης.

Εντούτοις, η προκύπτουσα συνάρτηση πυκνότητας όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5 και ο καθορισμός μιας συνάρτησης κατάστασης υγείας βασισμένη στην ισχυρότερη βάση δεδομένων που υπάρχει σε χρήση είναι αρκετά καλά επιτεύγματα για να εγκριθεί και να χρησιμοποιηθεί η προτεινόμενη θεωρία και η μέθοδος.



Σχήμα 2.5.: Η συνάρτηση πυκνότητας.

2.3 ***Τεχνικές στατιστικής εκτίμησης βασικών παραμέτρων***

Οι παράμετροι του τύπου g=g(t) υπολογίζονται με τη χρησιμοποίηση μιας μη γραμμικής τεχνικής ανάλυσης οπισθοδρόμησης. Ο μέσος όρος και η μεταβλητότητα δεν έχουν καμία αναλυτική έκφραση για τη γενική περίπτωση. Εντούτοις, είναι εύκολο να ληφθούν οι στενές προσεγγίσεις με την εκτέλεση των αριθμητικών μεθόδων. Ο μέσος όρος που παρέχει την αναμενόμενη διάρκεια ζωής υπολογίζεται για κάθε περίπτωση κατά τη διάρκεια των εφαρμογών που ακολουθούν. Οι παράμετροι g=g(t) υπολογίζονται με μια επαναληπτική άμεση μη γραμμική μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων που οδηγεί στην ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγωνικών λαθών.

$$SM = \sum e_t^2 \qquad \textbf{(2.13.)}$$

όπου το e (t) είναι ο όρος του σφάλματος της σχέσης:

$$y_t = g_t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_t}{\partial a_i} \Delta a_i + e_t, \qquad \mathrm{t=1, 2,..., n} \qquad \textbf{(2.14.)}$$

όπου το Y (t) δείχνει τα παρεχόμενα δεδομένα και οι πρώτοι δύο όροι στη δεξιά πλευρά είναι οι πρώτοι όροι μιας σειράς Taylor της μη γραμμικής συνάρτησης g (τ) γύρω από ένα δεδομένο σύνολο αρχικών τιμών των παραμέτρων α(i) του g (τ). Δα (i) είναι μια διαφορά που προστίθεται σε ένα α(ι) μετά από κάθε επανάληψη μέχρι μια τελική σύγκλιση του Δα(i) σε έναν αρκετά μικρό αριθμό. Με τη χρησιμοποίηση ενός παράγοντα απόσβεσης χ (που συνήθως ποικίλει μεταξύ 0 και 1) οι τιμές των παραμέτρων α (i) υπολογίζονται μετά από κάθε επανάληψη από την εξίσωση

$$a_{i,\,j+1} = a_{i,\,j} + h\Delta a_i \tag{2.15.}$$

Οι τιμές του Δα (i) υπολογίζονται από το σύνολο των μη γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν παίρνοντας τις μερικές παραγώγους τους όσον αφορά τις m παραμέτρους α (i) και θέτοντας αυτές ίσες με το μηδέν:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial g_t}{\partial a_i}\right)\left(\frac{\partial g_t}{\partial a_j}\right)\Delta a_i = u_t \sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial g_t}{\partial a_i}\right) \tag{2.16.}$$

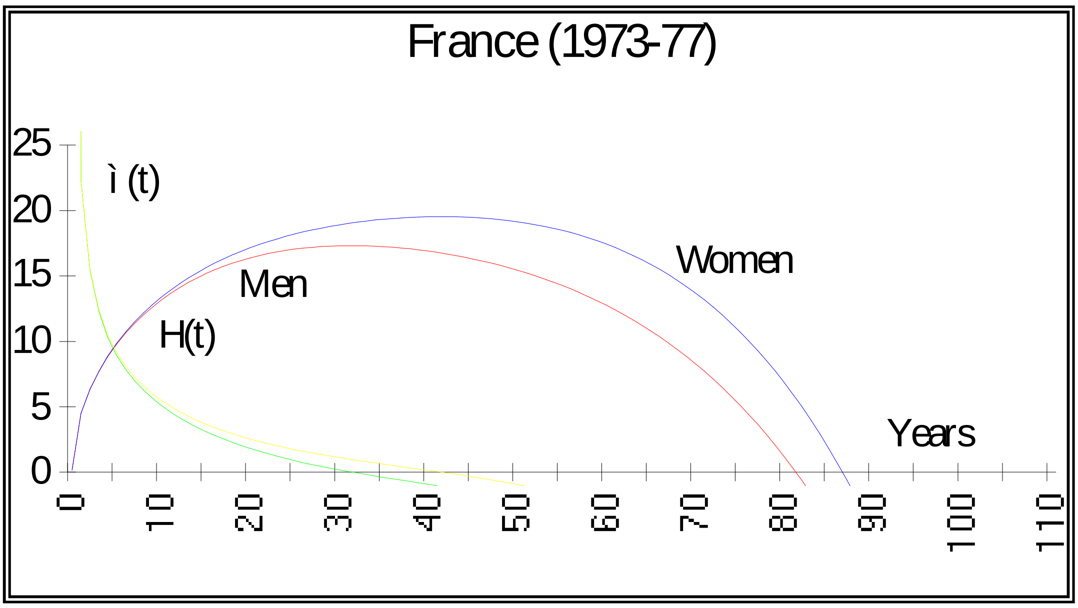
Όπου για την $\mathbf{u_t}$ ισχύει:

$$u_t = y_t - g_t \tag{2.17.}$$

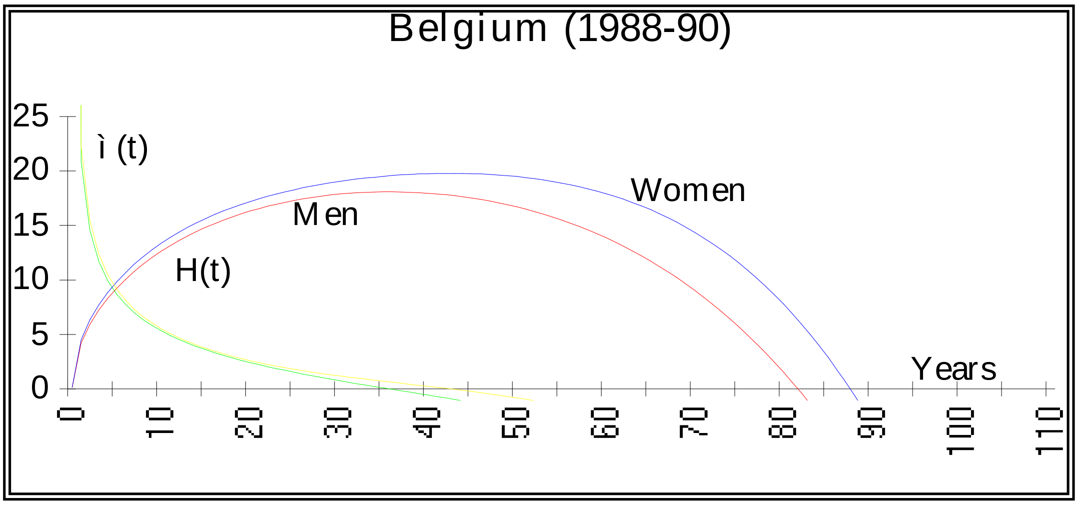
3. Εφαρμογές και Στοχαστική προσομοίωση στους πίνακες δεδομένων ανθρώπινης ζωής

3.1. <u>Περίπτωση Γαλλίας και Βελγίου</u>

Το κατά εκτίμηση μοντέλο που αναλύθηκε παραπάνω χρησιμοποιήθηκε για να παραγάγει μια διαδικασία προσομοίωσης των διάφορων πορειών εκφράζοντας την κατάσταση της υγείας των ατόμων και της προκύπτουσας συνάρτησης πυκνότητας για το χρόνο. Η προσομοίωση εμφανίζεται στο Σχήμα 3.1 για τη Γαλλία (άτομα, 1973-77)και στο Σχήμα 3.2 για το Βέλγιο (άτομα, 1967-72).



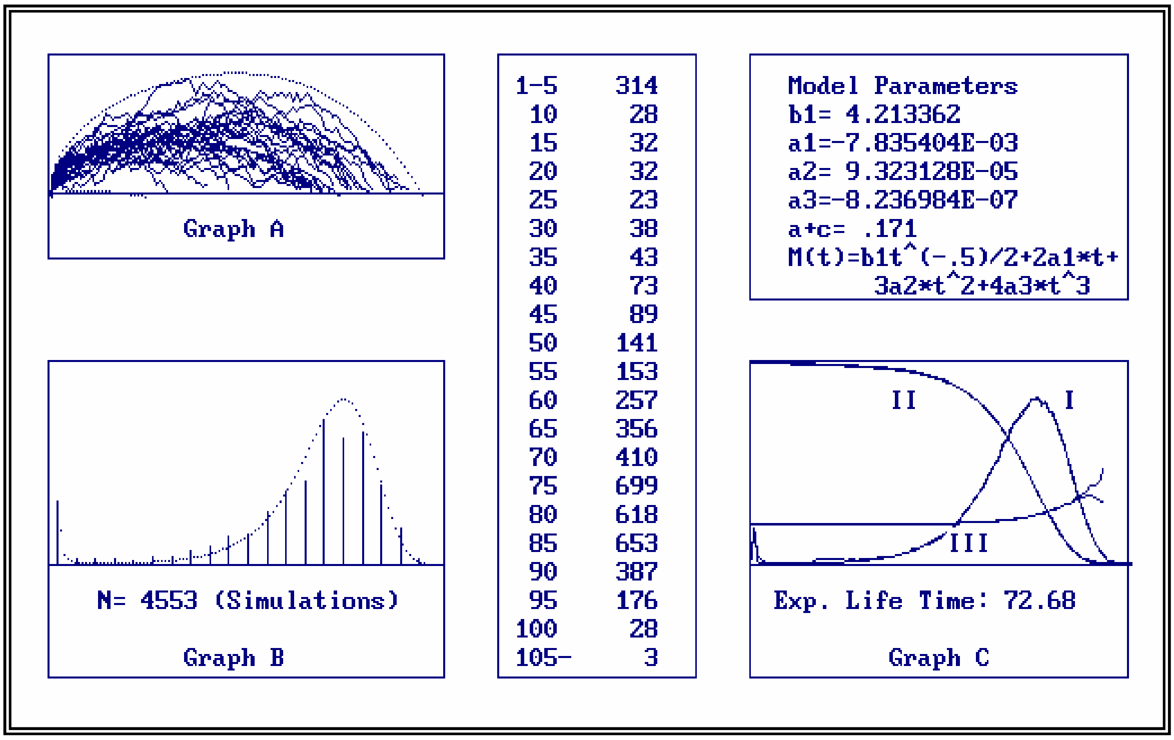
Σχήμα 3.1.: Συνάρτηση κατάστασης Υγείας (Γυναίκες και Άνδρες) για την Γαλλία (1973-1977).



Σχήμα 3.2.: Συνάρτηση κατάστασης Υγείας (Γυναίκες και Άνδρες) για το Βέλγιο (1973-1977).

Στοχαστική προσομοίωση των δεδομένων για το Βέλγιο (άντρες, 1988-1990), όπως παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα, πραγματοποιείται και απεικονίζεται στο Σχήμα 3.3. Η απεικόνιση των αρχικών δεδομένων και των κατά εκτίμηση τιμών δίνεται στη γραφική παράσταση C όταν στη γραφική παράσταση A παρουσιάζεται η στοχαστική προσομοίωση και στη γραφική παράσταση B η προκύπτουσα συνάρτηση πυκνότητας για το χρόνο μετά από εκτέλεση ενός μεγάλου αριθμού προσομοιώσεων. Το συνολικό διάστημα της διάρκειας ζωής μεταξύ 1 και 105 ετών διαιρείται σε 20 υποδιαστήματα κάθε ένα με διάρκεια 5 ετών και συμπεριλαμβάνεται επίσης το διάστημα πάνω από 105 έτη. Τα αποτελέσματα της μελέτης της προσομοίωσης συμπίπτουν στην πραγματική κατάσταση που παρουσιάζεται στη γραφική παράσταση C.

Στη γραφική παράσταση C οι καμπύλες I εκφράζουν το στιγμιαίο ποσοστό θανάτου dx (πραγματικό και εκτιμούμενο) ενώ οι καμπύλες II εκφράζουν τον υπόλοιπο πληθυσμό από τον αρχικό και οι καμπύλες III αντιπροσωπεύουν τον αριθμό θανάτων ετησίως που διαιρείται από τον υπόλοιπο πληθυσμό. Σε όλες τις τρεις παρουσιάσεις η προσαρμογή ήταν αρκετά καλή έτσι ώστε δεν είναι εύκολο να χωριστεί η γραφική παράσταση των πραγματικών δεδομένων σε αυτή των κατά εκτίμηση τιμών.



Σχήμα 3.3.: Στοχαστική Προσομοίωση δεδομένων για το Βέλγιο (άντρες, 1988-1990).

3.2 <u>*Περίπτωση ελληνικών πινάκων δεδομένων ανθρώπινης ζωής*</u>

Η εφαρμογή βασίστηκε στους πίνακες θνησιμότητας της Ελλάδας για τους άνδρες και τις γυναίκες για το έτος 1992. Τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται για τη συναρμολόγηση είναι εκείνα που εκφράζουν το στιγμιαίο ρυθμό θανάτου. Η ανωτέρω παρουσιασμένη μη γραμμική διαδικασία ανάλυσης οπισθοδρόμησης εφαρμόστηκε με τη χρησιμοποίηση του τύπου για *το g(t).* Τα αποτελέσματα για τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1.: Εκτιμήσεις παραμέτρων για τα δεδομένα πινάκων ζωής, Ελλάδα 1992.

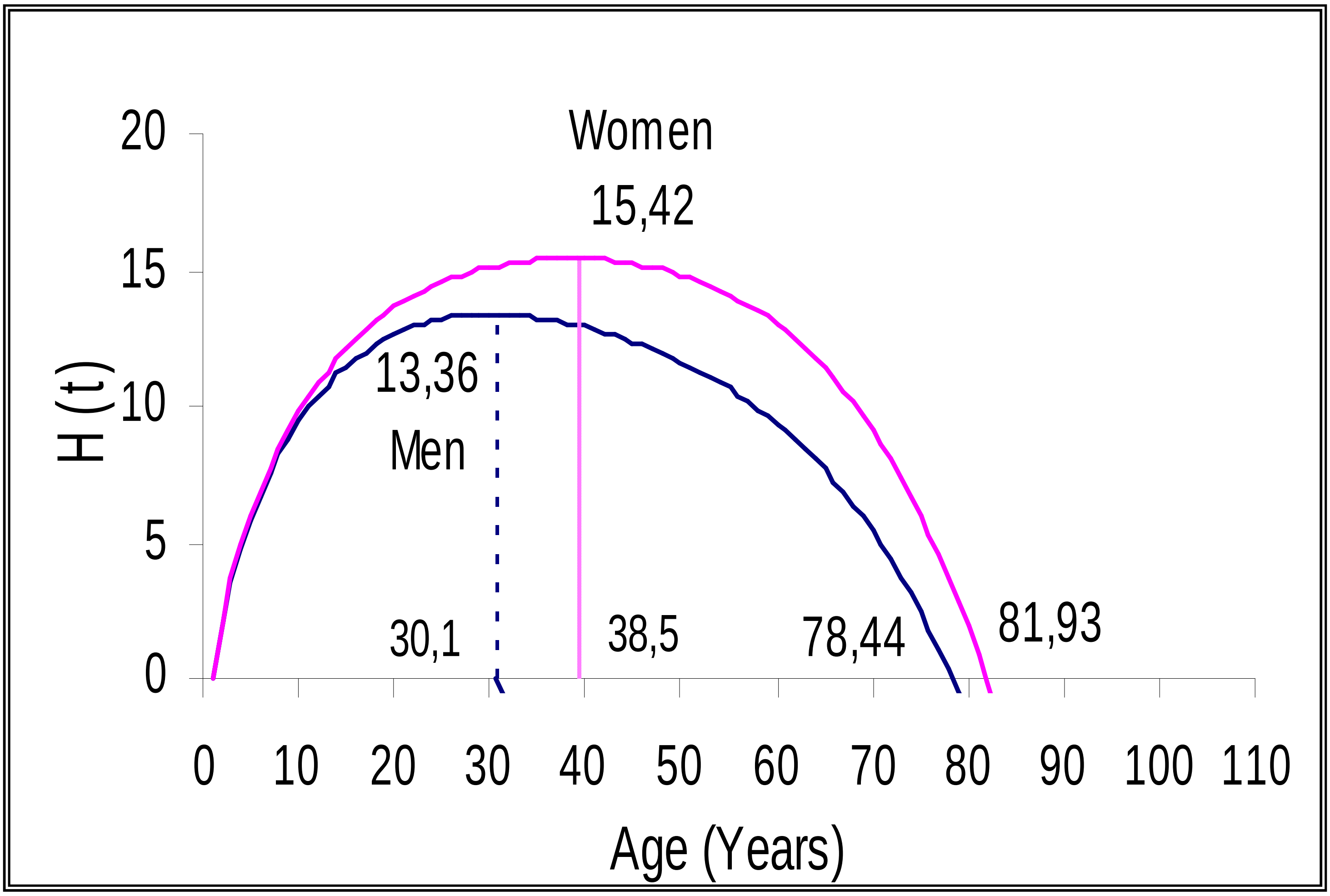
Παράμετροι	***Άντρες***	***Γυναίκες***
$ka*10^6$	61.600	84.500
b_1	4,990	5,081
a_1*10^{-2}	-1,6459	-1,4449
a_2*10^{-4}	2,6935	2.5261
a_3*10^{-6}	-1,7947	-1,8389
Χρόνος Εκτιμούμενης Ζωής	71,93	76,83
T_m για $H(t)_{max}$	30,1	38,5
$H(t)_{max}$	13,36	15,42
T_{cr} για $H(t) = 0$	78,44	81,93
R^2	0,980	0,987
$MSE*10^6$	2,351	2,241

Από τον ανωτέρω πίνακα είναι σαφές ότι και στις δύο εφαρμογές η συμπλήρωση ήταν αρκετά καλή δεδομένου ότι η εξηγημένη μεταβλητότητα που παρέχεται από *το* R^2 είναι 98,0% για τους άνδρες και 98,7% για τις γυναίκες. Όσον αφορά τις παραμέτρους υπάρχουν διαφορές στις κατ' εκτίμηση τιμές μεταξύ των ανδρών και των γυναικών. Η παράμετρος Κα είναι στο επίπεδο των 61.600 για τους άνδρες και σε 84.500 για τις γυναίκες. Αυτό σημαίνει ότι το ποσοστό θνησιμότητας για τους άνδρες και τις γυναίκες ακολουθεί διαφορετικό πρότυπο.

Στον ίδιο πίνακα εμφανίζεται η εκτίμηση του μέσου όρου ή της αναμενόμενης διάρκειας ζωής βασισμένα στο πρότυπο. Η αναμενόμενη διάρκεια ζωής είναι 4,9 έτη υψηλότερη για τις γυναίκες (76.83 έτη) από ότι για τους άνδρες (71.93 έτη).

Δεδομένου ότι έχουν υπολογιστεί οι πρότυπες παράμετροι είναι εύκολο να απεικονιστεί το πρότυπο στις γραφικές παραστάσεις και να υπολογιστεί ο χρόνος στον οποίο επιτυγχάνεται η μέγιστη κατάσταση υγείας. Η μέγιστη κατάσταση υγείας H(t) επιτυγχάνεται στο χρόνο T_m όταν μ (t) = 0, Όπως εμφανίζεται στον Πίνακα 6.1 η μέγιστη κατάσταση υγείας είναι σε 30,1 έτη για τους άνδρες και σε 38.5 έτη για τις γυναίκες. Η μέγιστη κατάσταση υγείας για τις γυναίκες (H(t)max= 15,42) είναι υψηλότερη από αυτή για τους άνδρες ($H(t)_{max}$= 13,36). Επίσης πολύ ενδιαφέρον είναι η εκτίμηση του χρόνου στον οποίο η συνάρτηση H(t) είναι ίση με μηδέν (H(t) = 0). Αυτό είναι μια κρίσιμη ηλικία T_{cr} όπου η συνάρτηση πυκνότητας είναι κοντά στην αιχμή. Η κρίσιμη ηλικία για τις γυναίκες είναι σε 81.93 έτη σε αντίθεση με τους άνδρες όπου αυτή η ηλικία είναι στα 78.44 έτη.

Στο Σχήμα 3.4 οι γραφικές παραστάσεις της κατάστασης συνάρτησης υγείας H(t) για τους άνδρες και τις γυναίκες είναι διαχωρισμένες. Η κατάσταση υγείας για τις γυναίκες είναι υψηλότερη από αυτή για τους άνδρες. Επίσης η μέγιστη κατάσταση υγείας εμφανίζεται σε μεγαλύτερες ηλικίες στις γυναίκες από τους άνδρες και το ίδιο ισχύει για την κρίσιμη ηλικία.



Σχήμα 3.4.: Συνάρτηση Κατάστασης Υγείας H(t) στην Ελλάδα (Γυναίκες και Άνδρες, 1992).

Το κατά εκτίμηση πρότυπο χρησιμοποιήθηκε για να παραγάγει μια διαδικασία προσομοίωσης των διάφορων πορειών εκφράζοντας την κατάσταση της υγείας των ατόμων και της προκύπτουσας συνάρτησης πυκνότητας για το δεδομένο χρόνο. Η προσομοίωση για τους άνδρες εμφανίζεται στο Σχήμα 3.5. Η απεικόνιση των αρχικών στοιχείων και των κατ' εκτίμηση τιμών δίνεται στη γραφική παράσταση C. Η στοχαστική προσομοίωση παρουσιάζεται στη γραφική παράσταση A.

Στη γραφική παράσταση B η προκύπτουσα συνάρτηση πυκνότητας για το δεδομένο χρόνο αφού έχουμε εκτελέσει έναν μεγάλο αριθμό προσομοιώσεων εμφανίζεται. Το συνολικό διάστημα της διάρκειας ζωής μεταξύ 1 και 105 ετών διαιρείται σε 20 υποδιαστήματα κάθε ένα διάρκειας 5 ετών και το διάστημα πάνω από 105 έτη συμπεριλαμβάνεται επίσης.

Τα αποτελέσματα της μελέτης προσομοίωσης συμπίπτουν με την πραγματική κατάσταση που παρουσιάζεται στη γραφική παράσταση C.

Στη γραφική παράσταση C οι καμπύλες εκφράζουν το ρυθμό θανάτου dx (πραγματικός και υπολογισμένος).

Η αντικατάσταση ήταν αρκετά καλή όπως επίσης πιστοποιείται από το υψηλό R^2 = 0,980 και το μικρό μέσο τετραγωνικό λάθος MSE = 2.351.

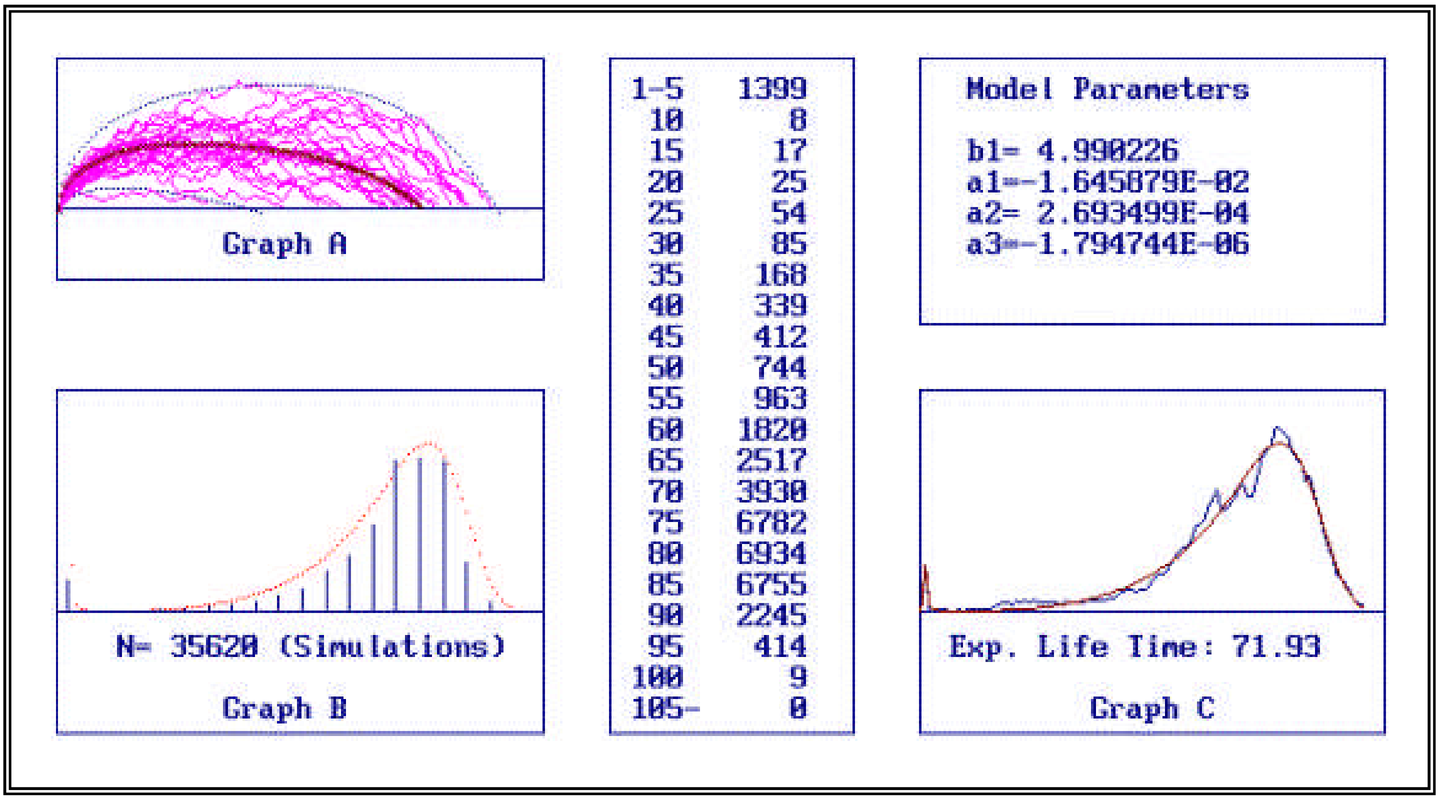
Ο αναμενόμενος χρόνος ζωής βρίσκεται να είναι ELT = 71,93 έτη.

Ο μέγιστος ρυθμός θανάτου είναι στα 81,21 έτη. Η σχετική στοχαστική προσομοίωση για τα θηλυκά είναι διευκρινισμένη στο Σχήμα 3.6.

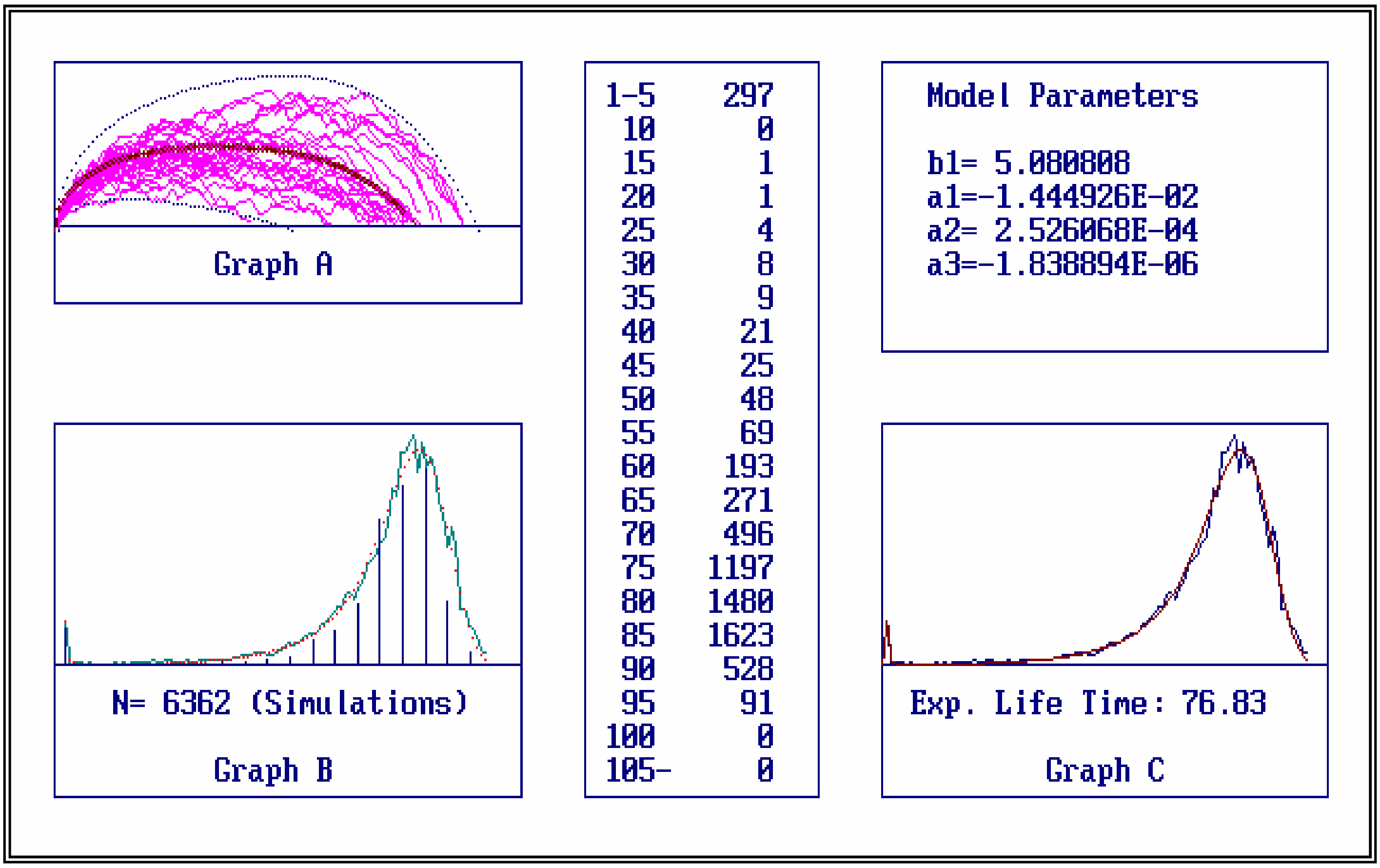
Η αντικατάσταση ήταν επίσης αρκετά καλή, R^2 = 0,987 και το μικρό μέσο τετραγωνικό λάθος MSE = 2.241.

Ο αναμενόμενος χρόνος ζωής βρίσκεται να είναι ELT = 76,83 έτη.

Το μέγιστο ποσοστό θανάτου είναι σε 84,85 έτη.



Σχήμα 3.5.: Στοχαστική προσομοίωση των ελληνικών στοιχείων πινάκων ζωής (Άνδρες, 1992).



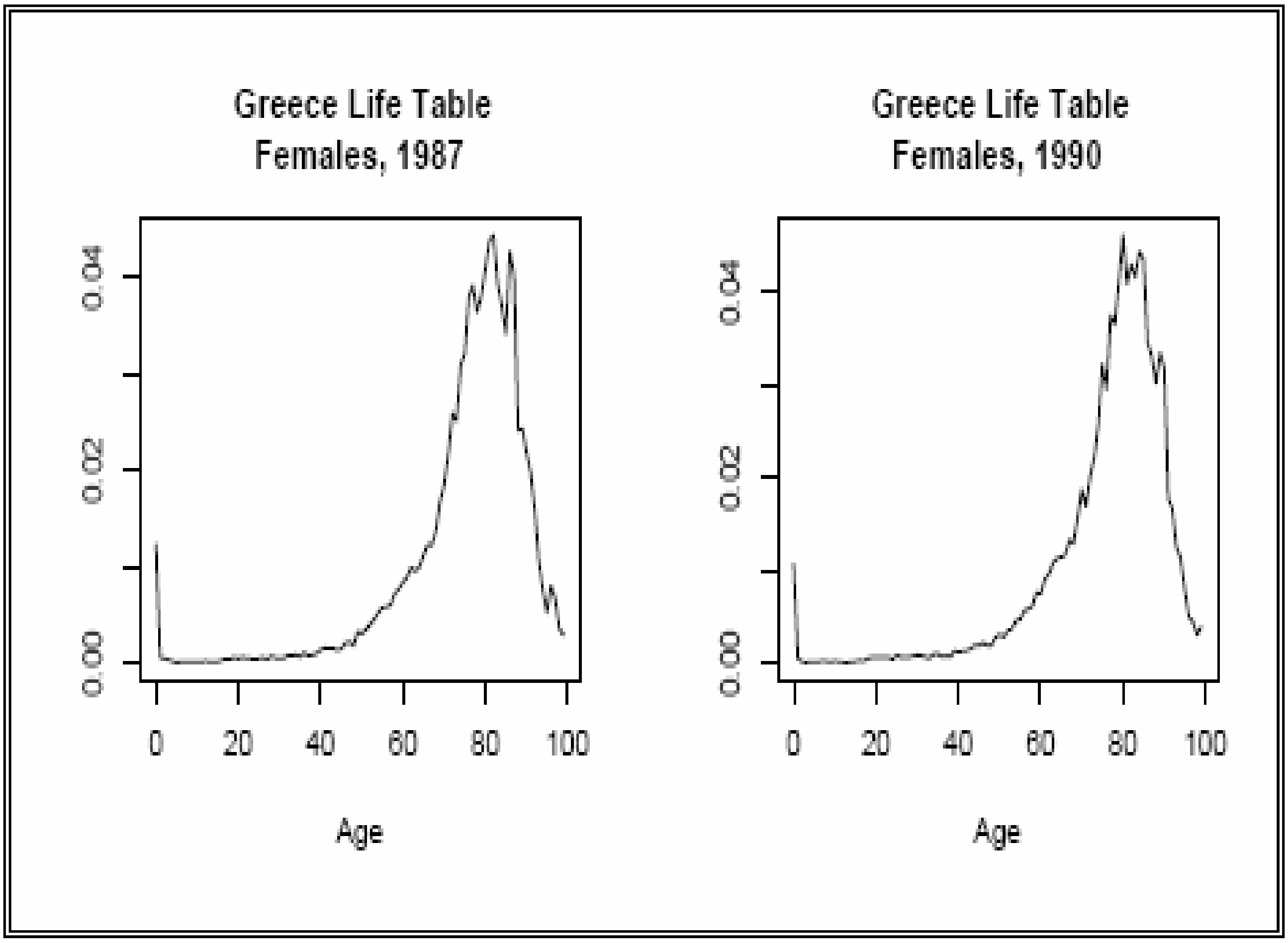
Σχήμα 3.6.: Στοχαστική προσομοίωση των στοιχείων πινάκων ζωής (Γυναίκες, 1992).

4. Ανάλυση Διακυμάνσεων Πινάκων Ζωής για τα Ελληνικά Δεδομένα

Τα ποσοστά θανάτου όπως απεικονίζονται από τον πίνακα θνησιμότητας στην εξιδανικευμένη μορφή του (η προσέγγιση "τέλειος κόσμος") πρέπει να προχωρήσουν ομαλά από μια κατηγορία ηλικίας στην επόμενη κατηγορία ηλικίας. Οι παρατυπίες μπορούν να προκύψουν από:

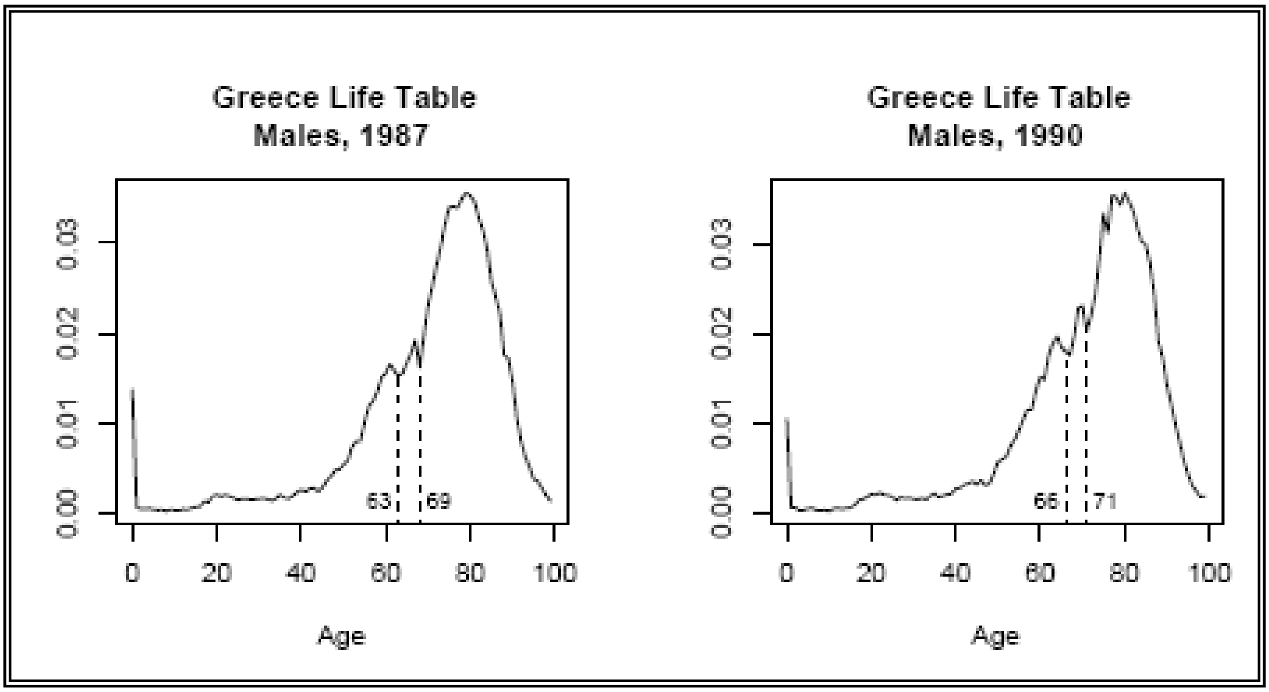
- στατιστικές διακυμάνσεις λόγω μιας ανεπαρκούς μεγάλης βάσης δεδομένων.
- χρήση των στατιστικών που δεν είναι ομοιογενή.
- στατιστικές μιας ιδιαίτερης μελέτης θνησιμότητας που δεν αντιπροσωπεύει άλλες μελέτες θνησιμότητας.
- στατιστικές θνησιμότητας για τα τελευταία πολιτικά έτη πολύ λίγα για να παραγάγουν τις αξιόπιστες πληροφορίες, και πάρα πολύ ισχυρά σταθμισμένα σε σχέση με τα πιο πρόσφατα πολιτικά έτη.

Ο πίνακας δεδομένων ζωής μελετάται για την Ελλάδα στα έτη από το 1982 ως το 2000. Αυτά τα δεδομένα ακολουθούν ως επί το πλείστον κοινά σχέδια, με ελάχιστες διακυμάνσεις. Το Σχήμα 4.1 παρουσιάζει σχηματικά τον πίνακα δεδομένων ζωής για τις γυναίκες στα έτη 1987 και 1990 αντίστοιχα.



Σχήμα 4.1.: Πίνακας δεδομένων ζωής, Ελλάδα, Γυναίκες, 1987 και 1990.

Εντούτοις, οι πίνακες για τους άνδρες παρουσιάζουν πολύ ευδιάκριτες διακυμάνσεις, οι οποίες εμμένουν κατά τη διάρκεια όλων των ετών. Αυτές οι διακυμάνσεις φαίνονται να αντιστοιχούν σε ένα ιδιαίτερο έτος γέννησης, όπως απεικονίζεται και στο Σχήμα 4.2.

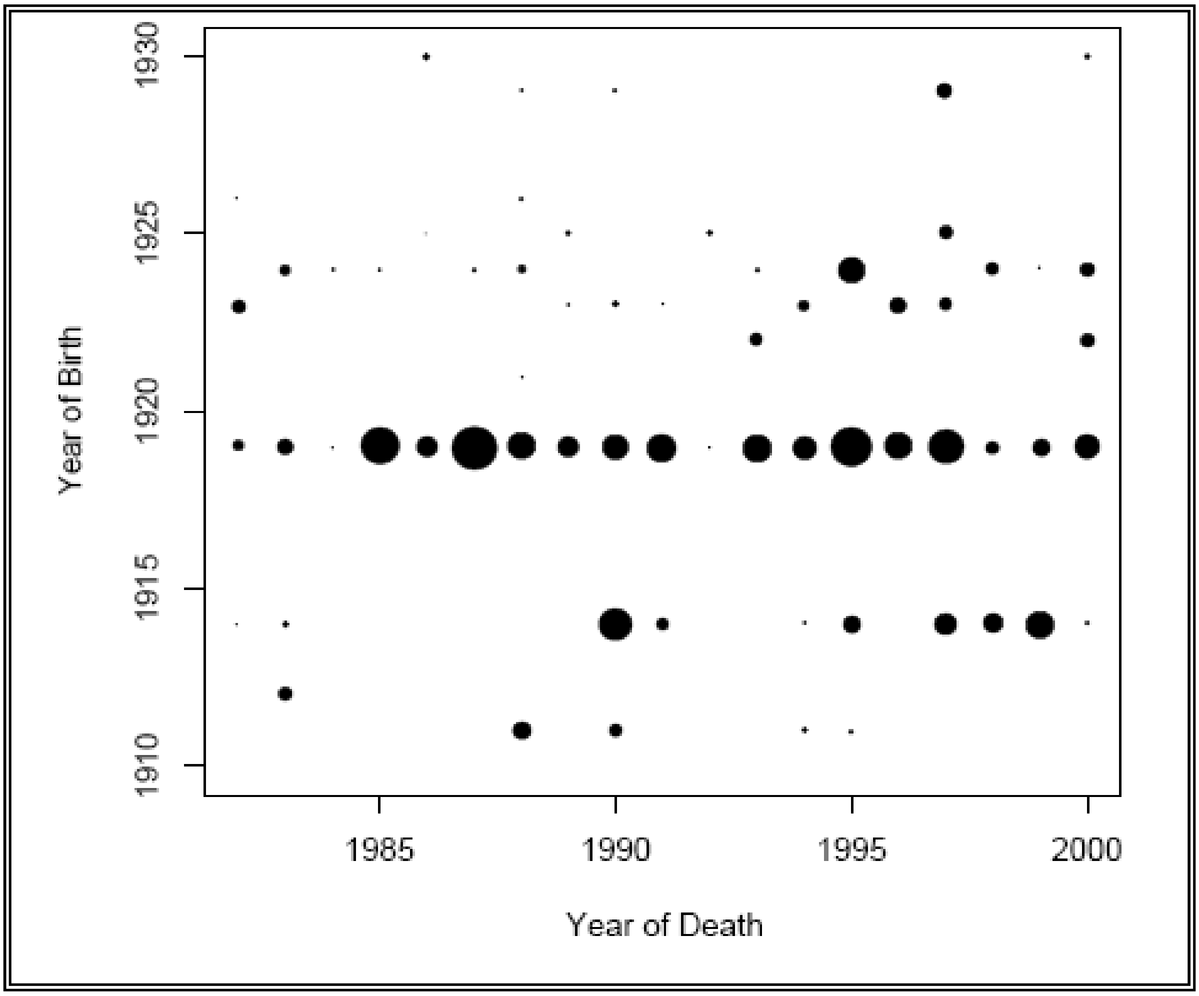


Σχήμα 4.2.: Πίνακας δεδομένων ζωής, Ελλάδα, άνδρες, 1987 και 1990.

Προτείνεται μια συστηματική μέθοδος για τη μελέτη αυτών των διακυμάνσεων, με την οποία η δύναμη της διακύμανσης σε μια ιδιαίτερη ηλικία μετριέται από την ελάχιστη διαφορά των στοιχείων θνησιμότητας για εκείνη την ηλικία από τα δεδομένα για τις πολύ κοντινές ηλικίες. Και τα δύο, τα τοπικά ελάχιστα και τα τοπικά μέγιστα μπορούν να μελετηθούν με αυτόν τον τρόπο.

Έπειτα οι γραφικές παραστάσεις κατασκευάζονται δείχνοντας την σχετική δύναμη των τοπικών ελάχιστων (αντίστοιχα μέγιστα).

Το έτος θανάτου σχεδιάζεται ενάντια στο έτος γέννησης, με κύκλους που χαρακτηρίζουν τις θέσεις των τοπικών ελάχιστων (αντίστοιχα μέγιστα). Οι ακτίνες των κύκλων είναι ανάλογες προς τη σχετική δύναμη των τοπικών ελάχιστων (αντίστοιχα μέγιστα) σε αντιστοιχία σε αυτά (Σχήμα 4.3).

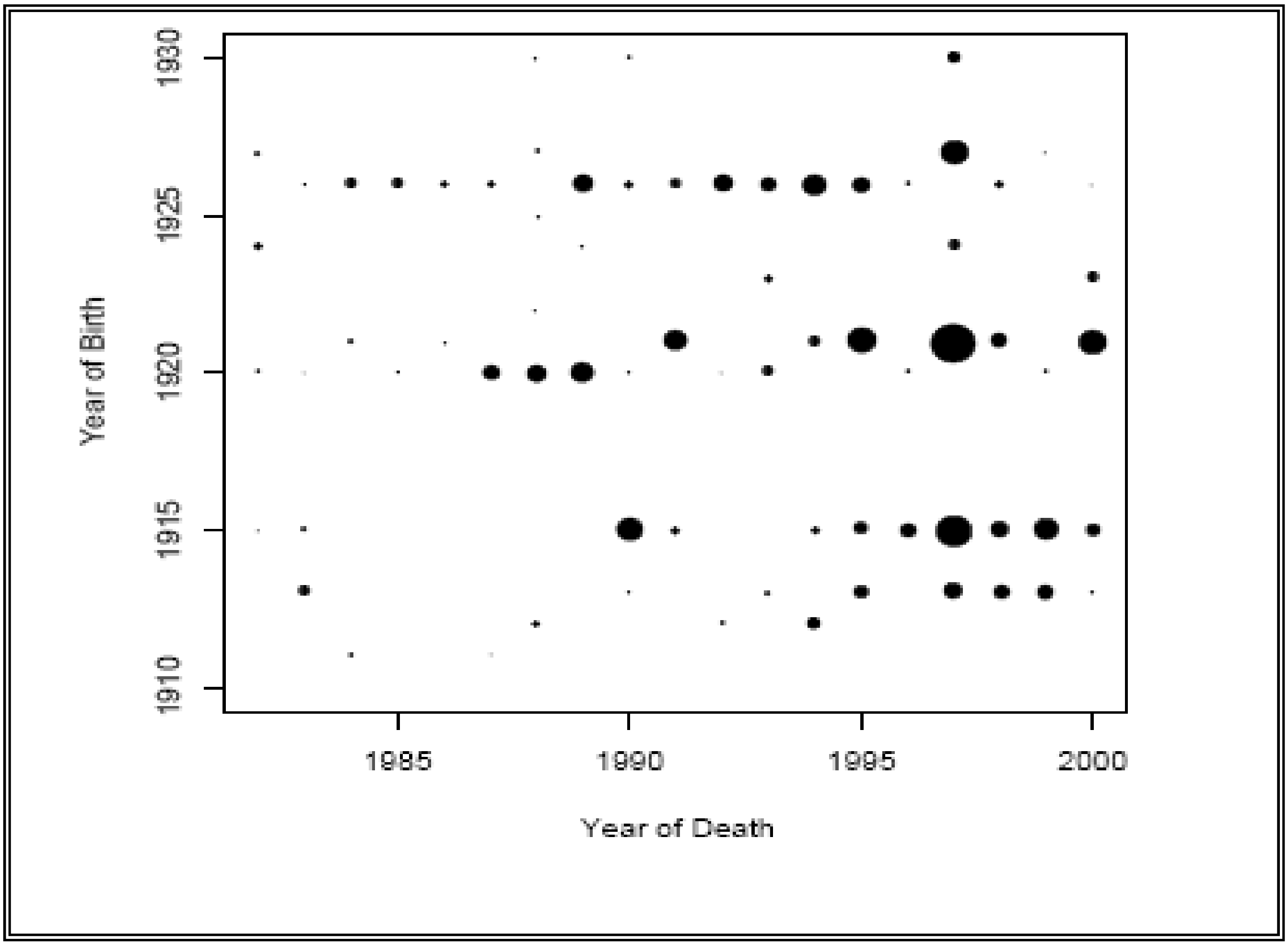


Σχήμα 4.3.: Πίνακας δεδομένων ζωής, διακυμάνσεις (Ελλάδα, Άνδρες, 1982-2000, Τοπικά Ελάχιστα).

Μια συστηματική παρουσία ενός τοπικού ελάχιστου αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο γεγονός στον ανδρικό πληθυσμό της Ελλάδας των ετών πριν από το θάνατο. Η συστηματική παρουσία του τοπικού ελάχιστου επαληθεύεται από την παρουσία της το επόμενο έτος μετά από την πρώτη εμφάνιση που οδηγεί σε μια οριζόντια γραμμή όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.3.

Η δύναμη και η διάρκεια του τοπικού ελάχιστου κατά τη διάρκεια του χρόνου υπολογίζονται από τον αριθμό των κύκλων που περιλαμβάνονται σε μια γραμμή και από το άθροισμα των απόλυτων τιμών για όλη την περίοδο του χρόνου από το 1982 ως το 2000.

Είναι σαφές ότι η γραμμή που αντιστοιχεί στους άνδρες που γεννήθηκαν κατά τη διάρκεια του 1919 είναι πολύ ισχυρή. Θεωρώντας ότι κατά τη διάρκεια 1922-1926 μια ανταλλαγή πληθυσμών πραγματοποιήθηκε μεταξύ της Ελλάδας και της Τουρκίας, κάποιος θα μπορούσε να δώσει έμφαση ότι οι άνδρες στο πρώτο σχολικό έτος που εγγράφηκαν όπως έχοντας μια ηλικία ένα έτος μικρότερη ή υψηλότερη από αυτήν που απαιτήθηκε για να μπει στο δημοτικό σχολείο (περίπου έξι ετών). Άλλες γραμμές με ισχυρά ελάχιστα αντιστοιχούν στους άνδρες γεννημένους περίπου το 1924, καθώς επίσης και στο 1914. Οι άνδρες γεννημένοι στο 1914 αντιστοιχούν στις ηλικίες που θα μπορούσαν να αποφύγουν να μπουν στο πρώτο σχολείο και να αρχίσουν να δουλεύουν για να βοηθούν την οικογένεια.

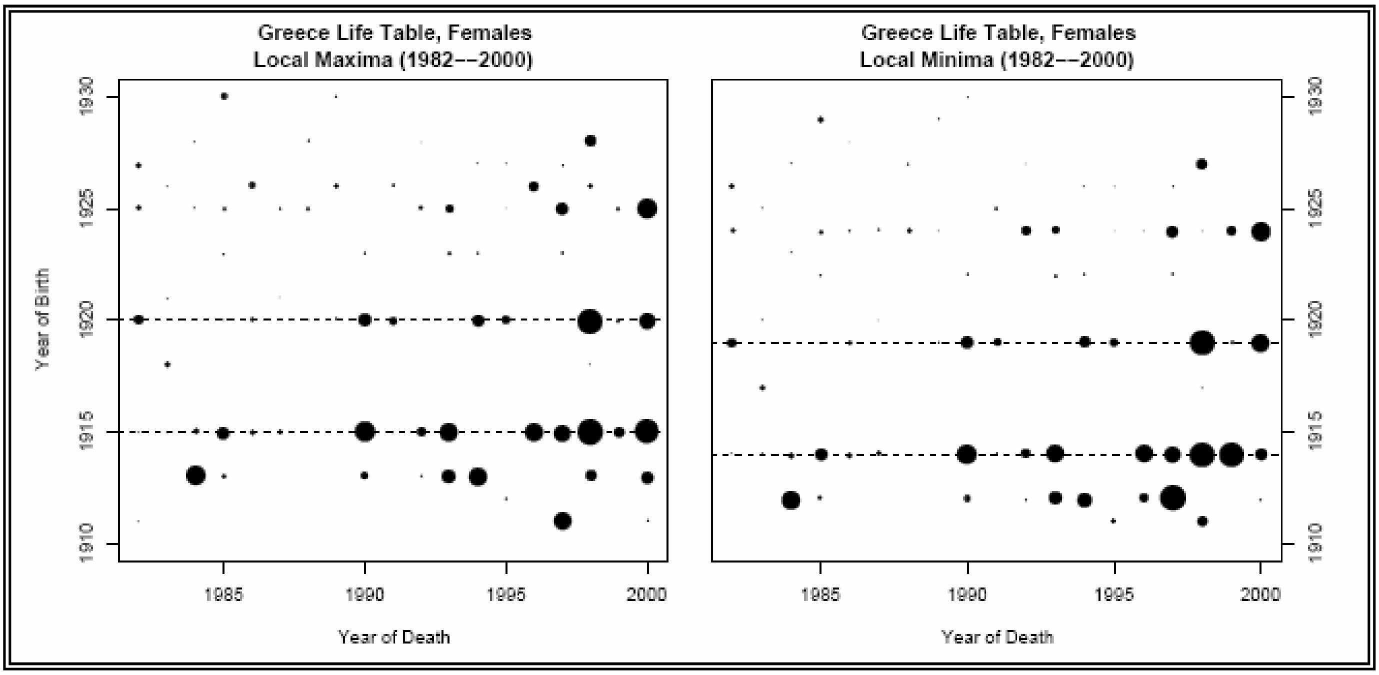


Σχήμα 4.4.: Πίνακας δεδομένων ζωής, διακυμάνσεις (Ελλάδα, Άνδρες, 1982-2000, Τοπικά Μέγιστα).

Το Σχήμα 4.4 απεικονίζει τα τοπικά μέγιστα για τους άνδρες από το 1982 ως το 2000. Η ισχυρότερη γραμμή είναι αυτή που αντιστοιχεί στην ηλικία 62 δηλαδή γεννημένοι κατά τη διάρκεια του 1920. Αυτό είναι ακριβώς μια ισχυρή ένδειξη, που επαληθεύει την υπόθεση ότι μια υπερεκτίμηση ηλικίας σε αυτό το έτος ακολουθήθηκε από μια υποτίμηση το προηγούμενο έτος έτσι ώστε να προκύπτει ένα τοπικό μέγιστο εδώ και ένα τοπικό ελάχιστο στην προηγούμενη γραφική παράσταση.

Μια καλύτερη απεικόνιση της περίπτωσης μέγιστου-ελάχιστης παρουσιάζεται στο επόμενο Σχήμα 4.5 όπου και οι δύο περιπτώσεις ανωτέρω συνοψίζονται.

Η αιχμηρή μορφή των μεγίστων και των ελάχιστων και η δύναμη των γραμμών κατά τη διάρκεια του χρόνου δείχνει ότι το γεγονός εμφανίστηκε στο παρελθόν και παρουσιάζεται στον πίνακα δεδομένων ζωής μερικές δεκαετίες αργότερα δεν ήταν κάτι σαν μια ασθένεια ή τα θύματα λόγω ενός πολέμου επειδή και στις δύο περιπτώσεις οι προκύπτουσες διακυμάνσεις εκφράζονται από τα μέγιστα-ελάχιστα των γραφικών παραστάσεων μπορούν να έχουν μια πιο πιθανολογική μορφή που επηρεάζει τη μορφή της χρονικής ανάπτυξης του γεγονότος σημαίνοντας ότι η αναπαράσταση των γραμμών στις παραπάνω γραφικές παραστάσεις θα ήταν όπως μια κατάλληλη γραμμή και όχι μια τέλεια κατάλληλη γραμμή όπως στην κύρια περίπτωση ανωτέρω.



Σχήμα 4.5.: Πίνακας δεδομένων ζωής, διακυμάνσεις (Γυναίκες, Τοπικά ελάχιστα και μέγιστα).

5. Συμπεράσματα

Το κατά εκτίμηση πρότυπο χρησιμοποιήθηκε για να παραγάγει μια διαδικασία προσομοίωσης των διάφορων πορειών εκφράζοντας την κατάσταση της υγείας των ατόμων και της προκύπτουσας συνάρτησης πυκνότητας για το δεδομένο χρόνο.

Η μελέτη της θνησιμότητας πραγματοποιείται μέσω της παρουσίασης του ιδιότυπου πίνακα που είναι ο πίνακας επιβίωσης ή πίνακας θνησιμότητας ο οποίος ουσιαστικά χρησιμοποιείται ως μέσο προτυποποίησης ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση ανάμεσα σε διαφορετικές χωρικές μονάδες υπό ίσους όρους.

Ο πίνακας δεδομένων ζωής μελετάται για την Ελλάδα στα έτη από το 1982 ως το 2000. Αυτά τα δεδομένα ακολουθούν ως επί το πλείστον κοινά σχέδια, με ελάχιστες διακυμάνσεις.

Παρουσιάζεται ένας τρόπος ανάλυσης στοιχείων θνησιμότητας χρησιμοποιώντας την έννοια του επιπέδου υγείας. Η στοχαστική προσέγγιση, βοηθά στο να βελτιωθεί ο τρόπος ανάλυσης των πινάκων θνησιμότητας .

Τα συμπεράσματα για τον ελλαδικό χώρο αναφέρονται παρακάτω:

- Η υγεία των γυναικών είναι καλύτερη σε σχέση με τους άντρες. Αυτό το συμπεραίνεται και για την Ελλάδα αλλά και για άλλες χώρες που είχε παρουσιασθεί και σε προηγούμενη εργασία για την δεκαετία πριν το 1993.

- Ο μέσος χρόνος ζωής των ανθρώπων έχει αυξηθεί αφού η υγεία έχει βελτιωθεί τα τελευταία χρόνια.

Από την ανάλυση των διακυμάνσεων των πινάκων ζωής για τα ελληνικά δεδομένα προέκυψαν τα παρακάτω για τους άνδρες: Η δύναμη και η διάρκεια του τοπικού ελάχιστου κατά τη διάρκεια του χρόνου υπολογίστηκαν για όλη την περίοδο του χρόνου από το 1982 ως το 2000. Είναι σαφές ότι η γραμμή που αντιστοιχεί στους άνδρες που γεννήθηκαν κατά τη διάρκεια του 1919 είναι πολύ ισχυρή. Θεωρώντας ότι κατά τη διάρκεια 1922-1926 μια ανταλλαγή πληθυσμών πραγματοποιήθηκε μεταξύ της Ελλάδας και της Τουρκίας.

Έτσι κάποιος θα μπορούσε να δώσει έμφαση στο ότι οι άνδρες στο πρώτο σχολικό έτος που εγγράφηκαν είχαν μια ηλικία ένα έτος μικρότερη ή μεγαλύτερη από αυτήν που απαιτήθηκε για να εισαχθούν στο δημοτικό σχολείο (περίπου η ηλικία των έξι ετών). Άλλες γραμμές με ισχυρά ελάχιστα αντιστοιχούν στους άνδρες γεννημένους περίπου το 1924, καθώς επίσης και στο 1914.

Οι άνδρες γεννημένοι στο 1914 αντιστοιχούν στις ηλικίες που θα μπορούσαν να αποφύγουν να μπουν στο γυμνάσιο και να αρχίσουν να δουλεύουν για να βοηθούν την οικογένεια.

Οι δημογραφικές αυτές εξελίξεις οριοθετούν για πολλούς μια νέα μη προβλεπόμενη φάση ή άλλως μια «Δεύτερη Δημογραφική Μετάβαση» στο βαθμό που καμία χώρα δεν κατόρθωσε να ανακάμψει το δείκτη γονιμότητας σε επίπεδα που να επιτρέπουν την πλήρη αναπαραγωγή των γενεών της.

6. Βιβλιογραφία

6.1. Ελληνική βιβλιογραφία

1. Κοτζαμάνης Β., Ανδρουλάκη Ελευθερία (1999), *Δημογραφία* Διδακτικές Σημειώσεις Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, Βόλος, σελ. 73.
2. Παπαδάκης Μ., Τσίμπος Κ. (1993), *Περιφερειακοί Πίνακες επιβίωσης του Ελληνικού πληθυσμού*, Αθήνα, εκδ. Βήτα, σελ. 83.
3. Σιάμπος Γ. (1993), *Δημογραφία*, Αθήνα, εκδ.επιχ. «Το οικονομικό» Κ.&Π. ΣΜΠΙΛΙΑΣ Α.Ε.Β.Ε., σελ. 496.
4. Στασινού Ελένη, Διπλωματική εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά-Φεβρουάριος 1995.
5. Στατιστική Υπηρεσία Ελλάδος.
6. Τσίρκας Ευάγγελος *«Το Δημογραφικό Πρόβλημα και το Μέλλον του Ελληνισμού».*

9.2. Ξένη Βιβλιογραφία

1. C.H SKIADAS, *“Two generalized rational models fos forcasting innovation diffusion”.*
2. C.H SKIADAS, *“The Development of the Expected Life Time in Greece During Last Decades: An Application of a Dynamic Model of Life* Table Data*”.*
3. C. SKIADAS, C.H SKIADAS, *“Analyzing Fluctuations on Life Table Data in Greece”.*
4. J. C. Chesnais, *“La transition démographique”*, Paris, INED-PUF, Tavaux et documents, Cahier no113, 1986.
5. J. JANSSEN, C.H SKIADAS *,”Dynamic Modelization of Human Life Table Data”.*
6. David Pearce, *Office for National Statistics* and Francois-Carlos Bovagnet *Eurostat, “the demographic situation in European Union”* Population Trends 119, Spring 2005.