ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τίτλος : Ἕλεγχος παραγωγής σε γραμμές παραγωγής δύο σταδίων με ζήτηση ενδιάμεσων προϊόντων.

ΠΡΕΒΕΖΑΝΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΧΑΝΙΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2015

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή μου κ. Ιωαννίδη Ευστράτιο για την ανάθεση της διπλωματικής αυτής εργασίας, είμαι ευγνώμων για τις εποικοδομητικές συμβουλές και επισημάνσεις του που με βοήθησαν να φέρω εις πέρας την παρούσα εργασία. Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τους φίλους μου- συνάδελφους μου για όλη τους την βοήθεια. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη της αλλά και την βοήθεια της όλα αυτά τα χρόνια, αφιερώνοντάς της αυτή την εργασία.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι να εξετάσουμε ένα σύστημα παραγωγής δύο σταδίων. Τα προϊόντα που παράγονται από το πρώτο στάδιο χρησιμοποιούνται τόσο ως πρώτη ύλη αλλά και ως τελικά προϊόντα. Οι αφίξεις πελατών είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson, ενώ οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικά κατανεμημένοι. Στόχος είναι η σύγκριση διαφόρων απλών πολιτικών ελέγχου αποθέματος και των εισερχόμενων παραγγελιών για τα ενδιάμεσα προϊόντα, ώστε να επιλεγούν οι πολιτικές που ελαχιστοποιούν το κόστος λειτουργίας του συστήματος. Για το σκοπό αυτό αναπτύσσονται αριθμητικά μοντέλα, που περιγράφουν τη λειτουργία του συστήματος για κάθε εξεταζόμενη πολιτική και επιτρέπουν την εκτίμηση του κόστους λειτουργιάς σε κάθε περίπτωση.

1.Εισαγωγή

Ένα από τα βασικότερα θεμέλια των σύγχρονων βιομηχανιών είναι τα συστήματα παραγωγής. Στις μέρες μας λόγω της ραγδαίας ανάπτυξης της τεχνολογίας και του ανταγωνισμού μεταξύ των επιχειρήσεων είναι επιτακτική η ανάγκη της βελτιστοποίησης της λειτουργίας των συστημάτων παραγωγής. Κάθε επιχείρηση στοχεύει στην μεγαλύτερη ευελιξία παραγωγής, στη μείωση του λειτουργικού κόστους, στην αύξηση του κέρδους και στην παραγωγή ανταγωνιστικότερων προϊόντων και υπηρεσιών ώστε να καλυφθούν με επιτυχία οι ανάγκες του σύγχρονου καταναλωτή. Με λίγα λόγια η επιχείρηση θα πρέπει να βρει την βέλτιστη πολιτική ώστε να είναι πιο ανταγωνιστική αλλά και να μεγιστοποιεί το κέρδος της.

Τον προηγούμενο αιώνα, η βιομηχανία είχε υιοθετήσει τη μαζική παραγωγή προϊόντων ως πρότυπο παραγωγής, όπου κάθε τμήμα του εργοστασίου παρήγαγε στο μέγιστο ρυθμό, εφόσον είχε ικανή τροφοδοσία και επαρκή χώρο αποθήκευσης. Μέχρι τα μέσα του αιώνα, το είδος αυτό της παραγωγής επικρατούσε στις μεγάλες βιομηχανίες όπου το περιθώριο κέρδους ήταν αρκετά μεγάλο καθώς βασιζόταν σε μονοπώλια της τότε εποχής.

Στην σύγχρονη εποχή τα δεδομένα έχουν αλλάξει δραματικά στον χώρο της βιομηχανίας. Πλέον για να εξασφαλίσει μια βιομηχανία την βιωσιμότητα της στο σύγχρονο ανταγωνιστικό περιβάλλον θα πρέπει να είναι σε θέση να παράγει με βέλτιστο τρόπο ποιοτικά και ποσοτικά. Έτσι λοιπόν η σύγχρονη παραγωγική διαδικασία περιλαμβάνει τη λήψη σημαντικών αποφάσεων που σχετίζονται με το συντονισμένο έλεγχο της παραγωγής σε κάθε τμήμα ώστε να αποφεύγεται η διατήρηση υψηλών αποθεμάτων και συγχρόνως η έλλειψη προϊόντων που οδηγεί σε ανικανοποίητη ζήτηση, δυο σημαντικές παραμέτρους για την διατήρηση του κόστους σε χαμηλά επίπεδα.
Συγκεκριμένα ο έλεγχος παραγωγής καλύπτει θέματα που σχετίζονται με το χρονικό προγραμματισμό της διαδικασίας παραγωγής και τον έλεγχο των αποθεμάτων με στόχο την βέλτιστη κάλυψη της ζήτησης. Σκοπός του ελέγχου είναι η βελτιστοποίηση ενός ή και περισσοτέρων

μέτρων απόδοσης του συστήματος. Αυτά μπορεί να είναι το καθαρό κέρδος από πωλήσεις, το κόστος λειτουργίας, το μέσο απόθεμα και η ικανοποίηση των πελατών από απόψεως χρόνου παράδοσης και ποιότητας.
Στα περισσότερα συστήματα παραγωγής οι αποφάσεις που λαμβάνονται στα θέματα ελέγχου των αποθεμάτων παίζουν σημαντικότατο ρόλο στην διαδικασία παραγωγής. Ο αντικειμενικός σκοπός είναι να διατηρείται μια ισορροπία μεταξύ υπερβολικού και ελάχιστου αποθέματος ώστε να μην οδηγεί σε μεγάλα κόστη αποθήκευσης και μεγάλες ελλείψεις, οι οποίες μετατρέπονται σε αδυναμία εξυπηρέτησης των πελατών αντίστοιχα.

Στην εργασία αυτή αναφερόμαστε σε ένα σύστημα παραγωγής δύο σταδίων. Τα ενδιάμεσα προϊόντα που παράγει το πρώτο στάδιο χρησιμοποιούνται ως πρώτη ύλη από το δεύτερο στάδιο για την παραγωγή των τελικών προϊόντων, αλλά μπορούν να πωληθούν σε μια συγκεκριμένη κατηγορία πελατών ως τελικά προϊόντα. Για παράδειγμα μια αυτοκινητοβιομηχανία μπορεί να παράγει εξολοκλήρου ένα μοντέλο και ο κινητήρας του συγκεκριμένου μοντέλου να χρησιμοποιείται ως ανταλλακτικό ή να χρησιμοποιείται από μια άλλη αυτοκινητοβιομηχανία για την κατασκευή ενός δικού της μοντέλου. Επίσης ένα εργοστάσιο που παράγει γάλα, το διαθέτει στους πελάτες του αλλά με το ίδιο γάλα μπορεί να παράγει και αλλά προϊόντα όπως γιαούρτι ή τυρί.

Στο κεφάλαιο 2 περιγράφουμε αναλυτικά το σύστημα παραγωγής που εξετάζουμε. Στο ίδιο κεφάλαιο περιγράφεται η μοντελοποίηση του συστήματος παραγωγής ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, η διαδικασία επίλυσης και εκτίμησης των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης του συστήματος όπως και ο υπολογισμός της συνάρτησης κέρδους.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3. Στο 4^{ο} κεφάλαιο καταγράφονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την εργασία.

2.Περιγραφή συστήματος παραγωγής και αντικείμενο εργασίας

Το σύστημα που μελετάμε διαθέτει δύο μηχανές, και δύο κατηγορίες πελατών. Η μηχανή 1 παράγει προϊόντα τύπου 1 τα οποία είτε διατίθενται άμεσα στους πελάτες τύπου 1 είτε χρησιμοποιούνται από την μηχανή 2 για την παραγωγή του προϊόντος 2 και την διάθεση του στους πελάτες τύπου 2. Οι πελάτες τύπου 2 είναι διατεθειμένοι να περιμένουν, οπότε σε περίπτωση έλλειψης αποθέματος τελικών προϊόντων σχηματίζεται λίστα εκκρεμών παραγγελιών, ενώ οι πελάτες τύπου 1 είναι ανυπόμονοι και σε περίπτωση μη άμεσης ικανοποίησης τους οι παραγγελίες τους χάνονται. Για την εξυπηρέτηση των πελατών τύπου 1 χρησιμοποιείται μια πολιτική προτεραιότητας τύπου κατωφλίου. Οι παραγγελίες της πρώτης κατηγορίας πελατών ικανοποιούνται άμεσα από το απόθεμα ενδιαμέσων προϊόντων όταν αυτό είναι μεγαλύτερο από ένα κατώφλι προτεραιότητας R_1. Διαφορετικά οι παραγγελίες τύπου πελατών τύπου 1 χάνονται. Όπως γίνεται αντιληπτό δίδεται προτεραιότητα στην παραγωγή προϊόντων τύπου 2 και γι' αυτό τον λόγο διατηρείται απόθεμα ασφαλείας ενδιαμέσων προϊόντων ώστε να εξασφαλιστεί κατά το δυνατόν η παραγωγή προϊόντων τύπου 2. Η πολιτική απόδοσης προτεραιότητας είναι συνηθισμένη σε συστήματα με πολλές κατηγορίες πελατών που ενδιαφέρονται για το ίδιο προϊόν (βλέπε [1 - 7]).Για τις εκκρεμείς παραγγελιές πελατών τύπου 2, που αγοράζουν τα προϊόντα του δεύτερου σταδίου χρησιμοποιείται η πολιτική μερικής αποδοχής παραγγελιών. Σύμφωνα με αυτή την πολιτική οι παραγγελίες πελατών τύπου 2 γίνονται δεκτές μέχρι το πλήθος τους να γίνει ίσο με το κατώφλι αποδοχής C_2. Ο έλεγχος αποδοχής παραγγελιών φαίνεται ότι συμβάλλει στην αύξηση της κερδοφορίας των συστημάτων παραγωγής ειδικά όταν η ζήτηση προσεγγίζει ή ξεπερνάει την δυναμικότητα τους (βλέπε [8 - 9]). Για τον έλεγχο παραγωγής χρησιμοποιείται η πολιτική *Βασικού Αποθέματος* (*Base stock*), και η συνολική αξιολόγηση του συστήματος εκφράζεται μέσω του αναμενόμενου συνολικού κέρδους λειτουργείας. Η φιλοσοφία της πολιτικής βασικού αποθέματος (ΒΑ) είναι ότι, η άφιξη μιας παραγγελίας μεταδίδεται αμέσως σε κάθε στάδιο του συστήματος, εξουσιοδοτώντας την μηχανή του αντίστοιχου τμήματος να αρχίσει την παραγωγή του αντίστοιχου προϊόντος. Πιο συγκεκριμένα σε κάθε στάδιο i υπάρχει ένα κατώφλι ελέγχου Z_i. Η παραγωγή στο στάδιο i συνεχίζεται όσο το πλεόνασμα του σταδίου είναι μικρότερο του Z_i. Ως πλεόνασμα ορίζουμε την αθροιστική παραγωγή του σταδίου μείον την αθροιστική πραγματική ζήτηση. Όταν το πλεόνασμα είναι αρνητικό τότε στην πραγματικότητα έχουμε έλλειμμα. Παρότι η συγκεκριμένη πολιτική ανταποκρίνεται αρκετά γρήγορα στην ζήτηση έχει δύο σημαντικά μειονεκτήματα, ο συντονισμός μεταξύ των σταδίων του συστήματος είναι πολύ χαλαρός και δεν υπάρχει περιορισμός του συνολικού αποθέματος προϊόντων στο σύστημα (βλέπε [10 - 11]).

Στην παρούσα εργασία οι αφίξεις πελατών τύπου 1 και τύπου 2 είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμούς $\boldsymbol{\lambda}_1$ και $\boldsymbol{\lambda}_2$ αντίστοιχα. Οι χρόνοι παραγωγής προϊόντων είναι και αυτοί εκθετικά κατανεμημένοι με ρυθμούς $\boldsymbol{\mu}_1$ και $\boldsymbol{\mu}_2$ αντίστοιχα.

2.1.Μοντελοποίηση του προβλήματος.

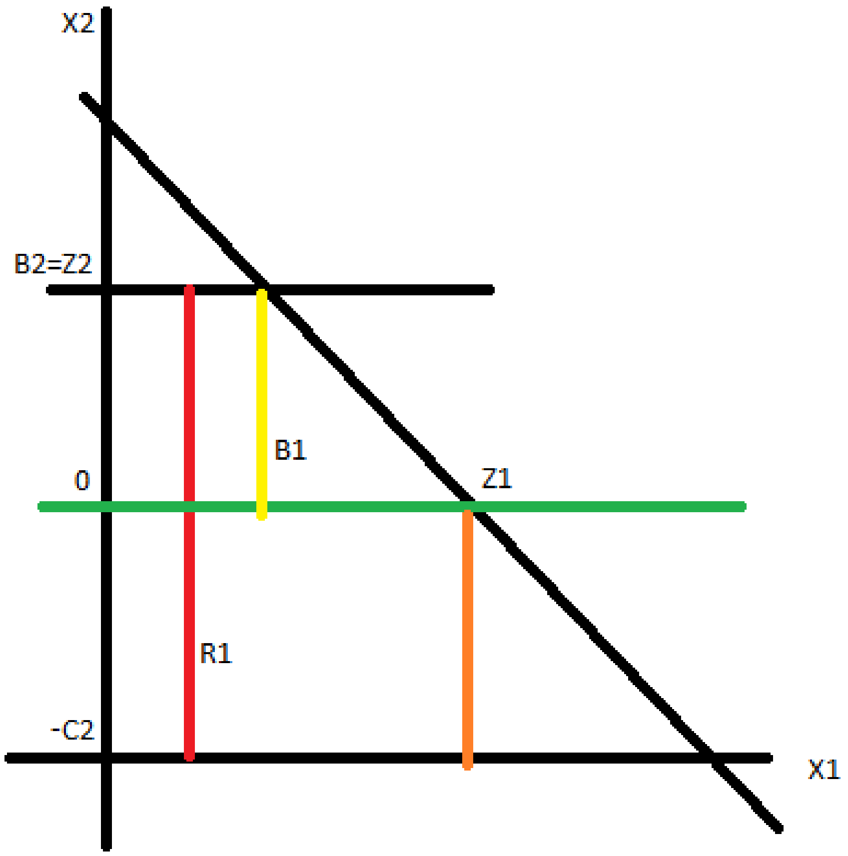
Επειδή οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι εκθετικά κατανεμημένοι το σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Σε αυτή την περίπτωση η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από ένα ζεύγος μεταβλητών (x_1, x_2), όπου η πρώτη εκφράζει το ύψος του αποθέματος των προϊόντων τύπου 1 και συνεπώς ισχύει ότι $0 \le x_1$, ενώ η δεύτερη αναφέρεται στο απόθεμα ή έλλειμμα προϊόντων τύπου 2. Όταν το x_2 είναι θετικό έχουμε απόθεμα ενώ όταν είναι αρνητικό έχουμε εκκρεμείς παραγγελίες. Επειδή εφαρμόζεται η πολιτική βασικού αποθέματος με μερική αποδοχή παραγγελιών πελατών τύπου 2 ισχύει ότι $-C_2 \le x_2 \le Z_2$. Ισχύει ακόμη ότι το πλεόνασμα προϊόντων τύπου 1 είναι $x_1 + x_2$ και συνεπώς θα πρέπει $x_1 + x_2 \le Z_1$ ή ισοδύναμα $x_1 \le Z_1 - x_2$ (βλέπε [11]). Βλέπουμε ότι το μέγιστο απόθεμα προϊόντων τύπου 1 εξαρτάται από το ύψος του πλεονάσματος προϊόντων τύπου 2 x_2. Όσο μικρότερο είναι το x_2 τόσο μεγαλύτερο είναι το επιτρεπόμενο όριο του x_1. Στο σχήμα 1 βλέπουμε τη μορφή του χώρου καταστάσεων, όπου:

- C_2 :κατώφλι εκκρεμών παραγγελιών τύπου 2.
- $Z_2 = B_2$: μέγιστο πλεόνασμα προϊόντων τύπου 2.
- Z_1: μέγιστο πλεόνασμα προϊόντων τύπου 1
- $B_1 = Z_1 - Z_2$: αρχική μέγιστη στάθμη αποθέματος προϊόντων τύπου 1 (μέγιστη στάθμη αποθέματος τύπου 1 όταν το απόθεμα τύπου 2 είναι πλήρες).
- R_1: κατώφλι αποδοχής/απόρριψης παραγγελιών τύπου 1. (για x_1 μικρότερο ή ίσο του R_1 απορρίπτω τους πελάτες τύπου 1).

Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman – Kolmogorov (C-K)

P(k)x(ρυθμός εξόδου από την κατάσταση k)=

$$\sum_{όλες\ οι\ καταστάσεις} P(\boldsymbol{i}) \text{ x (μετάβαση από } i \text{ σε } k\text{) , } \boldsymbol{i \neq k}$$



Σχήμα 1: Χώρος καταστάσεων του υπό εξέταση συστήματος.

2.1.1. Οι εξισώσεις Chapman – Kolmogorov.

Οι εξισώσεις Chapman – Kolmogorov για το σύστημα που εξετάζουμε είναι:

$$P(0, -C_2)\mu_1 = P(0, -C_2 + 1)\lambda_2, \quad (1)$$

$$P(0, x_2)(\lambda_2 + \mu_1) = P(0, x_2 + 1)\lambda_2 + P(1, x_2 - 1)\mu_2,\ -C_2 < x_2 < Z_2, \quad (2)$$

$$P(0, Z_2)(\lambda_2 + \mu_1) = P(1, Z_2 - 1)\mu_2 \quad (3)$$

$$P(R_1,Z_2)(\mu_1+\lambda_2)=P(R_1-1,Z_2)\mu_1+P(R_1+1,Z_2)\lambda_1+P(R_1+1,Z_2+1)\mu_2 \quad (4)$$

$$P(X_1,Z_2)(\mu_1+\lambda_2)=P(X_1-1,Z_2)\mu_1+P(X_1+1,Z_2-1)\mu_2,0<X_1<R_1 \quad (5)$$

$$P(X_1,Z_2)(\mu_1+\lambda_1+\lambda_2)=P(X_1-1,Z_2)\mu_1+P(X_1+1,Z_2)\lambda_1+P(X_1+1,Z_2-1)\mu_2,R_1<X_1<B_1 \quad (6)$$

$$P(B_1,Z_2)(\lambda_1+\lambda_2)=P(B_1-1,Z_2)\mu_1+P(B_1+1,Z_2-1)\mu_2,B_1=Z_1-Z_2 \quad (7)$$

$$P(Z_1-X_2,X_2)(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)=P(Z_1-X_2-1,X_2)\mu_1+P(Z_1-X_2+1,X_2-1)\mu_2,-C_2<X_2<Z_2 \quad (8)$$

$$P(Z_1+C_2,-C_2)(\lambda_1+\mu_2)=)P(Z_1+C_2-1,-C_2)\mu_1 \quad (9)$$

$$P(X_1,-C_2)(\lambda_1+\mu_1+\mu_2)=P(X_1-1,-C_2)\mu_1+P(X_1+1,-C_2)\lambda_1+P(X_1,-C_2+1)\lambda_2 \quad (10)$$

$$P(R_1,-C_2)(\mu_1+\mu_2)=P(R_1-1,-C_2)\mu_1+P(R_1+1,-C_2)\lambda_1+P(R_1,1-C_2)\lambda_2 \quad (11)$$

$$P(X_1,C_2)(\mu_1+\mu_2)=P(X_1-1,-C_2)\mu_1+P(X_1,-C_2+1)\lambda_2,0<X_1<R_1 \quad (12)$$

$$P(R_1,X_2)(\lambda_2+\mu_1+\mu_2)=P(R_1-1,X_2)\mu_1+P(R_1+1,X_2)\lambda_1+P(R_1,X_2+1)\lambda_2+P(R_1+1,X_2-1)\mu_2,$$
$$-C_2<X_2<Z_2 \quad (13)$$

$$P(X_1,X_2)(\mu_1+\mu_2+\lambda_2)=P(X_1-1,X_2)\mu_1+P(X_1,X_2+1)\lambda_2+P(X_1+1,X_2-1)\mu_2,$$
$$0<X_1<R_1\ \&\ -C_2<X_2<Z_2 \quad (14)$$

$$P(X_1,X_2)(\mu_1+\mu_2+\lambda_2+\lambda_1)=P(X_1-1,X_2)\mu_1+P(X_1+1,X_2)\lambda_1+P(X_1,X_2+1)\lambda_2+P(X_1+1,X_2-1)\mu_2$$
$$R_1<X_1<Z_1-X_2\ \ \&\ -C_2<X_2<Z_2 \quad (15)$$

Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος υπολογίζονται από την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων Chapman-Kolmogorov μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας με την βοήθεια πινάκων που η γενική τους μορφή παρουσιάζεται παρακάτω.

Έστω το διάνυσμα στήλη $P_{x_2}^{T}$ =[$P(0, x_2)$, $P(1, x_2)$, … ,$P(Z_1 - x_2 - 1, x_2)$, $P(Z_1 - x_2, x_2)$] που είναι το διάνυσμα πιθανοτήτων των καταστάσεων, οι οποίες αντιστοιχούν σε απόθεμα προϊόντων τύπου 2 μεγέθους x_2 όταν το $x_2>0$ ή σε έλλειμμα – x_2 όταν το $x_2 < 0$. Οι εξισώσεις Chapman–Kolmogorov (1) – (15) μπορούν με αυτό τον τρόπο να εκφρασθούν συνοπτικά ως εξής:

$$A_{Z_2}P_{Z_2} = B_{Z_2}P_{Z_2-1}, \tag{16}$$

$$A_{x_2}P_{x_2} = B_{x_2}P_{x_2-1} + C_{x_2}P_{x_2+1}, \quad -C_2 < x_2 < Z_2, \tag{17}$$

$$A_{-C_2}P_{-C_2} = C_{-C_2}P_{-C_2+1}. \tag{18}$$

όπου A_{x_2}, B_{x_2}, C_{x_2} είναι πίνακες που περιέχουν τους ρυθμούς μετάβασης από και προς τις καταστάσεις που αντιστοιχούν στην μεταβλητή x_2. Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μπορεί να επιλυθεί με τον ακόλουθο τρόπο

Βήμα 1: Επιλύουμε την Εξ. (16) ως προς P_{Z_2} και έχουμε $P_{Z_2} = G_{Z_2}P_{Z_2-1}$ όπου $G_{Z_2} = A_{Z_2}^{-1}B_{Z_2}$ που είναι και η αρχική μας συνθήκη.

Βήμα 2: Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την έκφραση που βρήκαμε στο βήμα 1 για να επιλύσουμε την Εξ. (17) ως προς $P_{x_2} = G_{x_2} P_{x_2-1}$, όπου $G_{x_2} = [A_{x_2} - C_{x_2} G_{x_2+1}]^{-1}B_{x_2}$ και $-C_2 \le x_2 < Z_2$.

Βήμα 3: Αντικαθιστούμε την έκφραση του $P_{-C_2+1} = G_{-C_2+1}P_{-C_2}$ στην Εξ. (18) και έχουμε ότι $[A_{-C_2} - C_{-C_2} G_{-C_2+1}]P_{-C_2} = 0$, όπου 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα. Υπολογίζουμε το διάνυσμα P_{-C_2} επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, όπου μια από τις εξισώσεις αντικαθίσταται από την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{x_2=-C_2}^{Z_2} \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x_2}} = 1$$

όπου 1^T είναι ένα διάνυσμα γραμμή, που όλα τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα. Στην εξίσωση κανονικοποίησης χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις του προηγούμενου βήματος έτσι ώστε όλα τα διανύσματα πιθανοτήτων να είναι εκφρασμένα συναρτήσει του P_{-C_2}.

Βήμα 4: Τέλος υπολογίζουμε επαναληπτικά τα υπόλοιπα διανύσματα πιθανοτήτων χρησιμοποιώντας τη σχέση $P_{x_2-1} = G_{x_2-1} P_{x_2}$, *για* $x_2 = -C_2 < x_2 \le Z_2$.

Ο πίνακας A_{x_2} είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $(Z_1-x_2+1)\times(Z_1-x_2+1)$ που πολλαπλασιάζει το διάνυσμα P_{x_2} και περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης από τις καταστάσεις του διανύσματος. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε τους ακόλουθους πίνακες όταν $-C_2 < x_2 < Z_2$:

$$A_{x_2} = \begin{bmatrix} \mu_1+\lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\mu_1 & \mu+\lambda_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -\mu_1 & \mu+\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu_1 & \mu+\lambda & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mu_1 & \mu_2+\lambda \end{bmatrix}$$

Όπου $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ και $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Ο πίνακας B_{x_2} πολλαπλασιάζει το διάνυσμα $P_{x_2\text{-}1}$ και περιέχει τους ρυθμούς μετάβασης από τις καταστάσεις που αναφέρονται στο $P_{x_2\text{-}1}$ στις καταστάσεις που περιέχονται στο P_{x_2}. Είναι ένας πίνακας διαστάσεων $(Z_1-x_2+1)\times(Z_1-x_2+2)$.

$$B_{x_2} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας C_{x_2} πολλαπλασιάζει το διάνυσμα P_{x_2+1} και περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης από τις καταστάσεις P_{x_2+1} στις καταστάσεις P_{x_2}. Κατά συνέπεια είναι ένας πίνακας $(Z_1-x_2+1)\times(Z_1-x_2)$.

$$C_{x_2} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2. Συνάρτηση κέρδους

Το συνολικό κέρδος είναι το μέσο σύγκρισης της κάθε πολιτικής με τον εαυτό της για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων αλλά και για σύγκριση με άλλες πολιτικές. Το συνολικό κέρδος στην προκείμενη περίπτωση αναφέρεται στο κέρδος από την πώληση των παραγόμενων προϊόντων μείον το κόστος αποθήκευσης έτοιμων προϊόντων αλλά και το κόστος εκκρεμών παραγγελιών τύπου 2. Επομένως οι συνιστώσες κέρδους και κόστους είναι

1) Κέρδος πώλησης πελατών τύπου i, i = 1, 2.

2) Κόστος αποθέματος τύπου i, i = 1, 2.

2) Κόστος εκκρεμών παραγγελιών τύπου 2.

Συνεπώς το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος στη μονάδα του χρόνου παίρνει τη μορφή

$$J = r_1\lambda_1(1 - PR_2) + r_2\lambda_2(1 - PR_1) - h_1H_1 - h_2H_2 - bB \qquad (19)$$

όπου

r_i: μοναδιαίο κέρδος πώλησης προϊόντων τύπου i.

h_i: μοναδιαίο κόστος αποθέματος προϊόντων τύπου i.

b: μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών τύπου 2.

PR_i: πιθανότητα απόρριψης πελατών τύπου i.

H_i: μέσο απόθεμα προϊόντων τύπου i.

B: μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών πελατών τύπου 2.

Αναλυτικές εκφράσεις για τα παραπάνω μεγέθη δίδονται ακολούθως.

$$PR_1 = \sum_{x2=-c2}^{Z}\sum_{x1=0}^{R1} P(x1, x2)$$

$$PR_2 = \sum_{x1=0}^{Z1+C2} P(x1, -c2)$$

$$H_1 = \sum_{x1=1}^{Z1-x2} x1\left(\sum_{x2=-c2}^{Z2} P(x1, x2)\right)$$

$$H_2 = \sum_{x2=1}^{Z2} x2(\sum_{x1=0}^{Z1-x2} P(x1, x2))$$

$$B = \sum_{x2=-c2}^{-1} -x2(\sum_{x1=0}^{Z1-x2} P(x1, x2))$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση (19) παίρνουμε την παρακάτω αναλυτική έκφραση της συνάρτησης αναμενόμενου κέρδους, που είναι φυσικά συνάρτηση των μεταβλητών ελέγχου Z_1, Z_2, R_1, C_2.

$$J_{(Z_1, Z_2, C_2, R_1)} = r_1 \lambda_1[1 - \sum_{x2=-c2}^{Z} * \sum_{x1=0}^{R1} P(x1, x2)]$$

$$+ r_2 \lambda_2[1 - \sum_{x1=0}^{Z1+C2} P(x1, -c2)]$$

$$- h_1 [\sum_{x1=1}^{Z1-x2} x1 * (\sum_{x2=-c2}^{Z2} P(x1, x2))]$$

$$- h_2 [\sum_{x2=1}^{Z2} x2 * (\sum_{x1=0}^{Z1-x2} P(x1, x2))]$$

$$- b [\sum_{x2=-c2}^{-1} -x2 * (\sum_{x1=0}^{Z1-x2} P(x1, x2))].$$

2.3. Βελτιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους

Όπως είδαμε το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος είναι συνάρτηση των μεταβλητών ελέγχου που είναι τα κατώφλια της κάθε πολιτικής. Έτσι πολιτική βασικού αποθέματος (ΒΑ) είναι συνάρτηση των τεσσάρων μεταβλητών Z_1, Z_2, R_1, C_2. Φυσικά πρέπει να υπολογισθούν οι τιμές των μεταβλητών ελέγχου που μεγιστοποιούν το αναμενόμενο κέρδος. Στην περίπτωση μας είναι δύσκολο να χρησιμοποιήσουμε αλγόριθμο εξαντλητικής αναζήτησης λόγω του πλήθους των μεταβλητών ελέγχου και γι' αυτό τον λόγο χρησιμοποιήσαμε έναν απλό αλγόριθμο εύρεσης της βέλτιστης πολιτικής. Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης στηρίζεται στην υπόθεση ότι η συνάρτηση κέρδους είναι *μονοκόρυφη* δηλαδή υπάρχει ένα μοναδικό υπάρχει ένα μοναδικό τοπικό και ολικό βέλτιστο. Φυσικά για να αποδειχθεί μια τέτοια ιδιότητα, απαιτείται θεωρητική απόδειξη των ιδιοτήτων δεύτερης τάξης της συνάρτησης κέρδους η οποία είναι ιδιαίτερα δύσκολο να ολοκληρωθεί στα πλαίσια αυτής της εργασίας.

Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκε είναι:

Βήμα 1: Ορίζουμε ένα αρχικό σημείο $M_0 = [Z_{10}, Z_{20}, R_{10}, C_{20}]^T$ του χώρου των μεταβλητών ελέγχου. Υπολογίζουμε την συνάρτηση κέρδους για αυτό το σημείο.

Βήμα 2: Εξετάζουμε τα γειτονικά σημεία και προσπαθούμε να εντοπίσουμε την κατεύθυνση που επιτυγχάνεται η μεγαλύτερη βελτίωση. Αν δεν επιτυγχάνεται βελτίωση έχουμε φτάσει σε τοπικό ελάχιστο και ο αλγόριθμος τερματίζεται.

Βήμα 3: Κινούμαστε προς αυτή την κατεύθυνση μέχρι να αρχίσει να μειώνεται η συνάρτηση κέρδους ή να φτάσουμε σε κάποιο όριο του χώρου των μεταβλητών ελέγχου. Επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2.

3.Αριθμητικά αποτελέσματα

Οι εξισώσεις που προέκυψαν από την μοντελοποίηση του συστήματος στο κεφάλαιο 2 επιλύθηκαν σε περιβάλλον matlab, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση που περιεγράφηκε στο κεφάλαιο 2. Με αυτό τον τρόπο υπολογίστηκαν όλες οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης καθώς και το συνολικό κόστος και κατ' επέκταση η βέλτιστη λύση. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την αριθμητική διερεύνηση της απόδοσης της εξεταζόμενης πολιτικής βασικού αποθέματος. Στα πλαίσια αυτής της διερεύνησης έγινε σύγκριση της πολιτικής ΒΑ με μια συχνότατα χρησιμοποιούμενη πολιτική ελέγχου γραμμών παραγωγής την πολιτική πεπερασμένων αποθηκών (ΠΑ).

Η πολιτική πεπερασμένων αποθηκών είναι παρόμοια με την πολιτική ΒΑ και χαρακτηρίζεται επίσης από τέσσερις μεταβλητές ελέγχου B_1, B_2, R_1, C_2. Οι μεταβλητές R_1, C_2 χρησιμοποιούνται όπως οι αντίστοιχες μεταβλητές της πολιτικής ΒΑ. Οι μεταβλητές B_1, B_2 είναι αντίστοιχες των Z_1, Z_2 και χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο αποθεμάτων στα αντίστοιχα στάδια. Τώρα ο έλεγχος αποθεμάτων είναι απλούστερος. Σε κάθε στάδιο i παράγουμε μέχρι το απόθεμα προϊόντων i να γίνει ίσο με τη μεταβλητή ελέγχου B_i.

3.1.Μελέτη της συνάρτησης κόστους για μεταβλητές τιμές των παραμέτρων.

Σε αυτό το στάδιο μελετάμε πως μεταβάλλεται το βέλτιστο μέσο συνολικό κόστος καθώς αλλάζουμε τις τιμές των παραμέτρων. Για κάθε συνδυασμό τιμών των διαφόρων παραμέτρων εκτιμούμε τις βέλτιστες τιμές των κατωφλίων ελέγχου που ελαχιστοποιούν το μέσο συνολικό κόστος.

Η βέλτιστη τιμή του μέσου συνολικού κόστους και τα βέλτιστα κατώφλια, που αντιστοιχούν στο συγκεκριμένο συνολικό κόστος παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες ανά πολιτική.

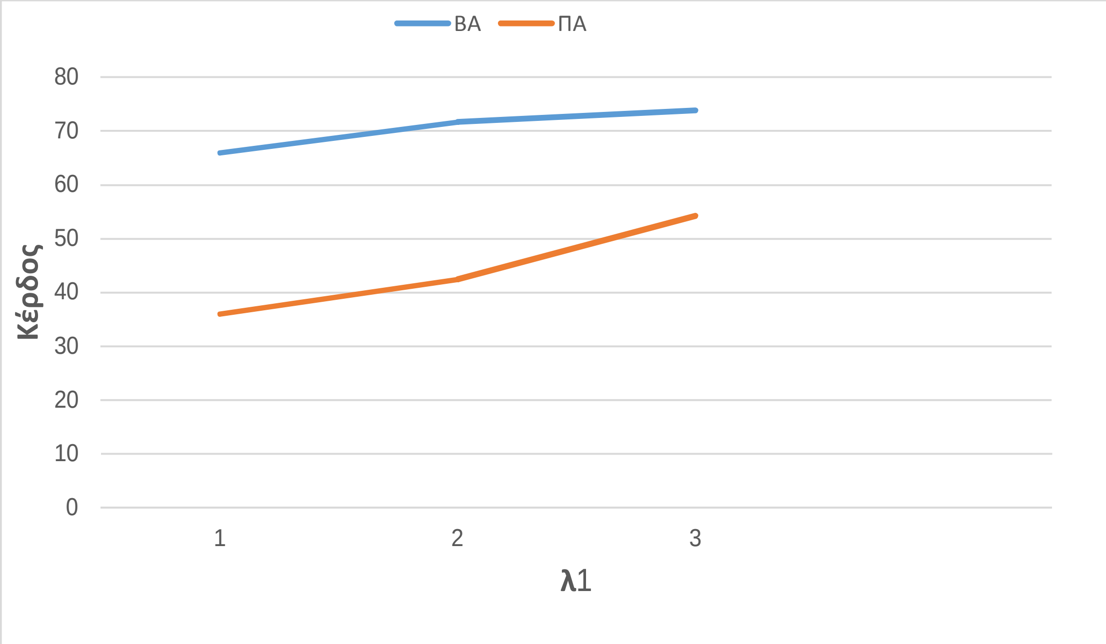
Οι τιμές των παραμέτρων, για το βασικό σενάριο που χρησιμοποιήσαμε κατά την διεξαγωγή των αριθμητικών πειραμάτων είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 3$, $R_1 = 2$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1.5$, $r_1 = 10$, $r_2 = 20$, $b = 3$

3.1.1.Επίδραση στη συνάρτηση κόστους λόγω μεταβολής του λ_1

Από τον πίνακα 1 προκύπτει ότι καθώς το λ_1 αυξάνεται το κέρδος και στις δύο πολιτικές αυξάνεται, όμως η πολιτική Βασικού Αποθέματος είναι αποδοτικότερη από την πολιτική Πεπερασμένων Αποθηκών.

***Πίνακας** 1 **:Επίδραση του λ_1 στην απόδοση του συστήματος**.*

	Βασικού Αποθέματος				Πεπερασμένων Αποθηκών			
Λ1	**ΚΕΡΔΟΣ**	**Ζ1**	**Ζ2**	R1	**ΚΕΡΔΟΣ**	Ζ1	Ζ2	R1
1	66	21	16	3	36	22	17	1
2	71,7	21	17	4	42,47	20	14	2
3	73,83	20	16	4	54,2	20	14	1



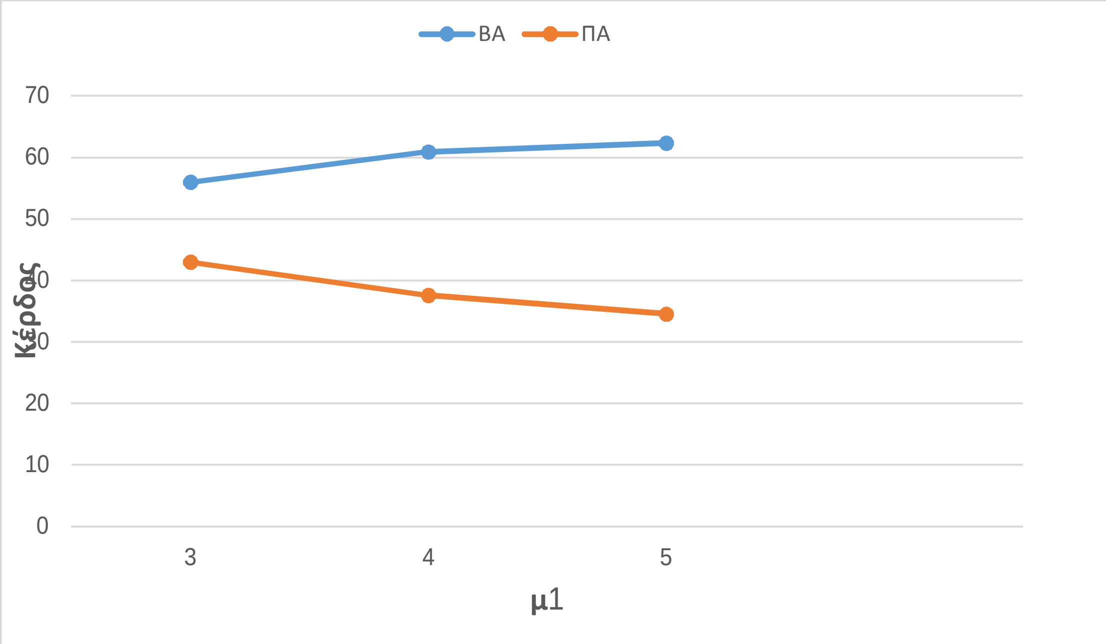
Γράφημα 1: **Απόδοση των διαφόρων πολιτικών για διάφορες τιμές του λ_1.**

3.1.2. Επίδραση στη συνάρτηση κόστους λόγω μεταβολής του μ_1

Όσο αφορά την πολιτική Βασικού Αποθέματος καθώς το μ1 αυξάνεται το κέρδος αυξάνεται, ενώ στην πολιτική Πεπερασμένων Αποθηκών συμβαίνει το αντίθετο, καθώς το μ1 αυξάνεται το κέρδος μειώνεται.

***Πίνακας** 2 : **Επίδραση του μ_1 στην απόδοση του συστήματος**.*

	Βασικού Αποθέματος				Πεπερασμένων Αποθηκών			
M1	**ΚΕΡΔΟΣ**	**Z1**	**Z2**	R1	**ΚΕΡΔΟΣ**	Z1	Z2	R1
3	56	15	10	4	43,01	16	11	1
4	60,94	13	9	3	37,59	14	10	1
5	62,36	14	10	2	34,54	14	10	1



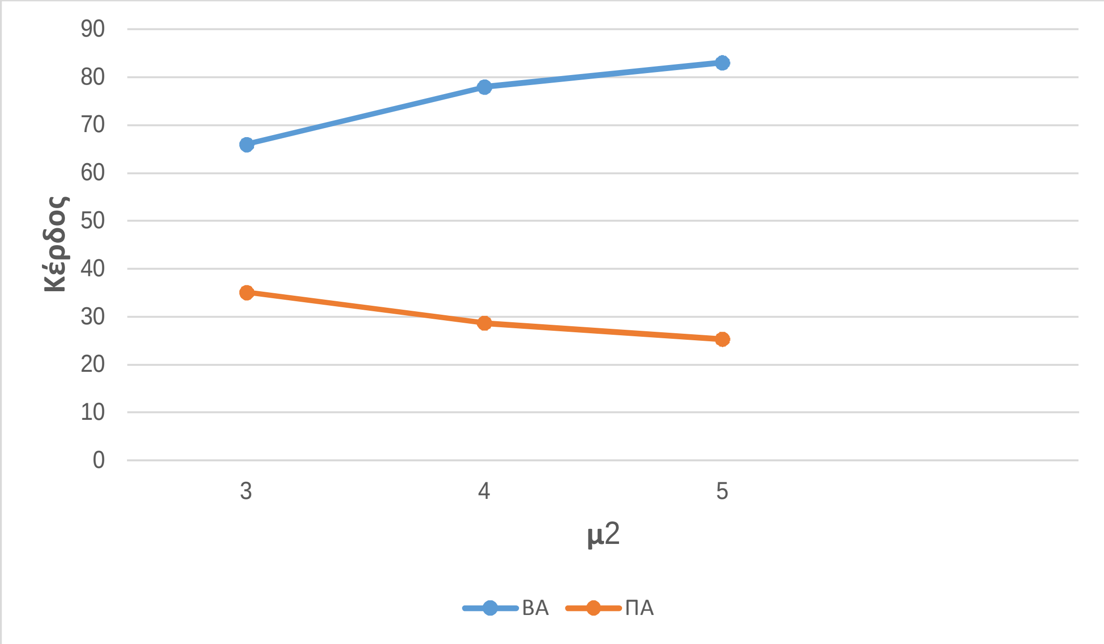
Γράφημα 2: **Απόδοση των διαφόρων πολιτικών για διάφορες τιμές του μ_1.**

3.1.3.Επίδραση στη συνάρτηση κόστους λόγω μεταβολής του μ_2.

Όσο αφορά την πολιτική Βασικού Αποθέματος καθώς το μ2 αυξάνεται το κέρδος αυξάνεται, ενώ στην πολιτική Πεπερασμένων Αποθηκών συμβαίνει το αντίθετο, καθώς το μ2 αυξάνεται το κέρδος μειώνεται.

***Πίνακας** 3 : **Επίδραση του μ_2 στην απόδοση του συστήματος**.*

	Βασικού Αποθέματος				Πεπερασμένων Αποθηκών			
Μ2	**ΚΕΡΔΟΣ**	**Z**1	**Z**2	R1	**ΚΕΡΔΟΣ**	Z1	Z2	R1
3	66	21	17	3	35,11	23	17	1
4	78	22	17	3	28,73	16	11	2
5	83,06	24	19	3	25,83	13	8	2



Γράφημα 3: **Απόδοση των διαφόρων πολιτικών για διάφορες τιμές του μ_2.**

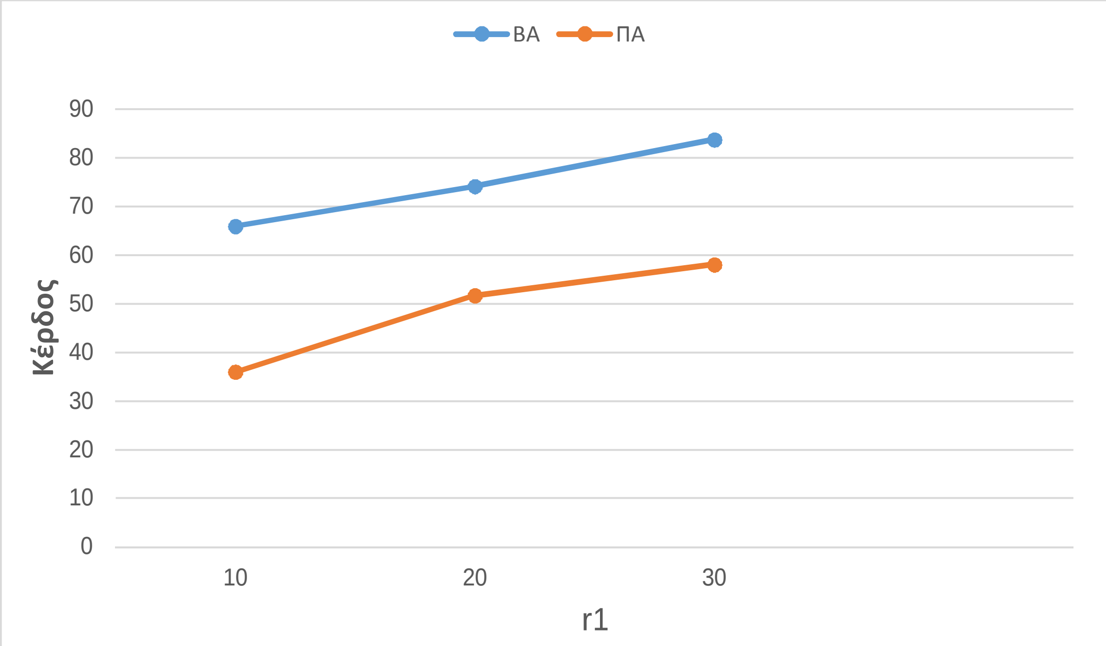
3.1.4. Επίδραση στη συνάρτηση κόστους λόγω μεταβολής του r_1.

Από τον πίνακα 4 προκύπτει ότι, καθώς αυξάνεται το r_1 αυξάνεται και το κέρδος και στις δύο πολιτικές. Όμως η πολιτική Βασικού Αποθέματος εμφανίζει υψηλότερα κέρδη σε σχέση με την πολιτική Πεπερασμένων Αποθηκών για τις ίδιες τιμές του r_1.Επομένως η πολιτική Βασικού Αποθέματος έχει καλύτερη απόδοση στην συγκεκριμένη περίπτωση.

Πίνακας** 4 : **Επίδραση του** r_1 **στην απόδοση του συστήματος.

Βασικού Αποθέματος					**Πεπερασμένων Αποθηκών**			
R1	**ΚΕΡΔΟΣ**	**Ζ1**	**Ζ2**	R1	**ΚΕΡΔΟΣ**	Ζ1	Ζ2	R1
10	66	21	16	3	36,03	22	17	1

20	74,2	17	15	1	51,73	20	18	1
30	83,8	19	17	1	58,1	20	18	1



Γράφημα 4: **Απόδοση των διαφόρων πολιτικών για διάφορες τιμές του** r_1.

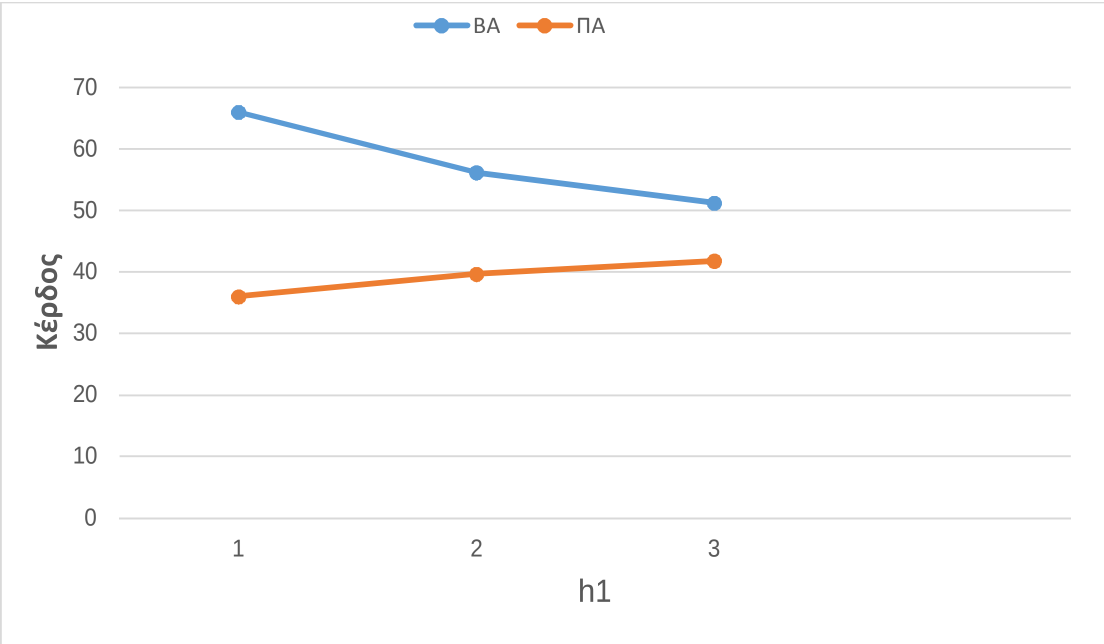
3.1.5. Επίδραση στη συνάρτηση κόστους λόγω μεταβολής του h_1.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τον πίνακα 5 είναι ότι καθώς αυξάνεται το h_1 , στην πολιτική Βασικού Αποθέματος το κέρδος μειώνεται ενώ στην πολιτική Πεπερασμένων Αποθηκών το κέρδος αυξάνεται. Αποδοτικότερη είναι λοιπόν η πολιτική Βασικού Αποθέματος γιατί έχει υψηλότερο κέρδος.

***Πίνακας** 5 : **Επίδραση του** h_1 **στην απόδοση του συστήματος**.*

Βασικού Αποθέματος **Πεπερασμένων Αποθηκών**

H1	**ΚΕΡΔΟΣ**	**Z1**	**Z2**	R1	**ΚΕΡΔΟΣ**	Z1	Z2	R1
1	66	21	16	3	36,03	22	17	1
2	56,5	14	10	2	39,68	15	11	1
3	51,23	12	8	2	41,83	13	9	1



***Γράφημα** 5:* **Απόδοση των διαφόρων πολιτικών για διάφορες τιμές του** h_1.

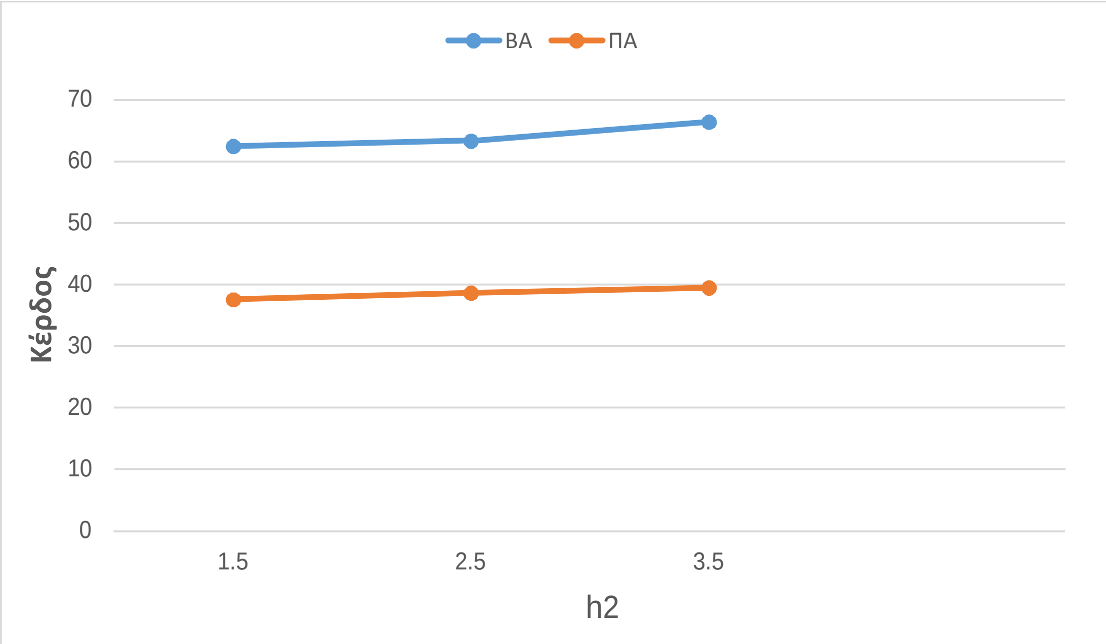
3.1.6. Επίδραση στη συνάρτηση κόστους λόγω μεταβολής του h_2.

Σε αυτήν την περίπτωση όσο μικρότερο το h_2 τόσο μικρότερο το συνολικό κέρδος. Βέβαια το κέρδος αυξάνεται με χαμηλούς ρυθμούς και στις δύο πολιτικές.

***Πίνακας** 6 : **Επίδραση του** h_2 **στην απόδοση του συστήματος**.*

Βασικού Αποθέματος **Πεπερασμένων Αποθηκών**

H2	ΚΕΡΔΟΣ	Z1	Z2	R1	ΚΕΡΔΟΣ	Z1	Z2	R1
1,5	62,46	15	11	3	37,57	16	12	1
2,5	63,33	15	11	3	38,63	15	11	1
3,5	66,4	15	11	2	39,51	12	8	1



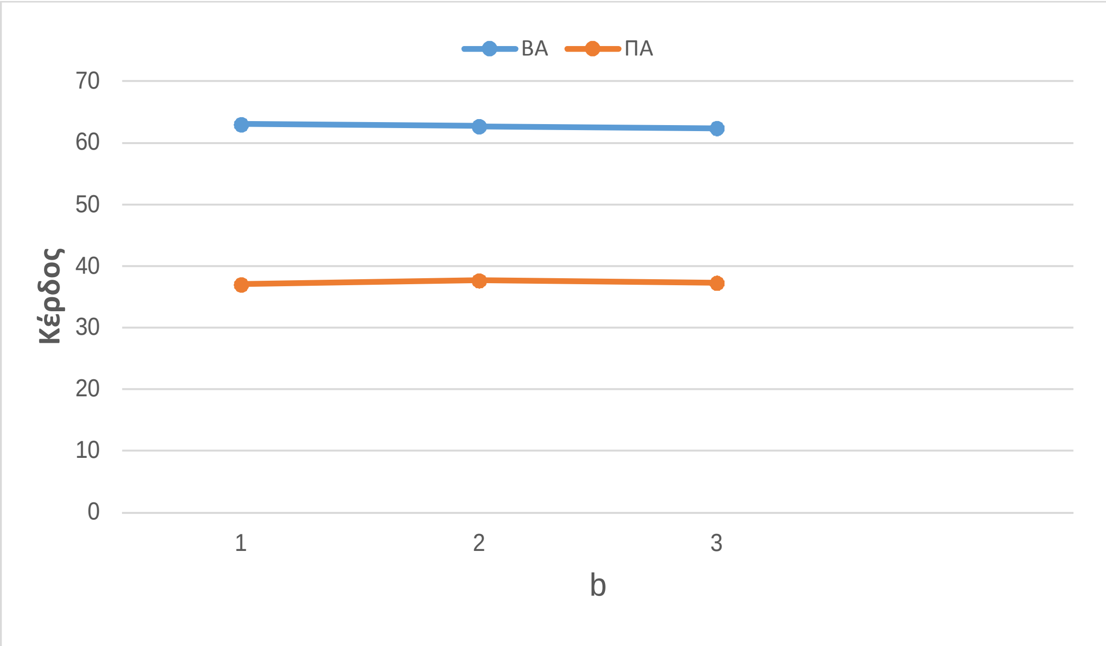
Γράφημα *6* **:** **Απόδοση των διαφόρων πολιτικών για διάφορες τιμές του** h_2.

3.1.7. Επίδραση στη συνάρτηση κόστους λόγω μεταβολής του b.

Από τον πίνακα 7 προκύπτει ότι, καθώς αυξάνεται το b μειώνεται το κέρδος στην πολιτική Βασικού Αποθέματος με αργούς ρυθμούς ενώ στην πολιτική Πεπερασμένων Αποθηκών αυξάνεται με αργούς ρυθμούς. Σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσε να υποθεί ότι η πολιτική Βασικού Αποθέματος έχει καλύτερη απόδοση σύμφωνα με το γράφημα 7.

Πίνακας 7 : Επίδραση του h_2 στην απόδοση του συστήματος.

	Βασικού Αποθέματος				Πεπερασμένων Αποθηκών			
B	**ΚΕΡΔΟΣ**	**Z1**	**Z2**	R1	**ΚΕΡΔΟΣ**	Z1	Z2	R1
1	63	15	11	2	37	15	11	1
2	62,7	15	11	3	37,66	15	11	1
3	62,4	15	11	3	37,57	16	12	1



***Γράφημα** 7 :* **Απόδοση των διαφόρων πολιτικών για διάφορες τιμές του** b.

4.Συμπεράσματα

Σκοπός της εργασίας αυτής ήταν η μελέτη του προβλήματος ελέγχου σε ένα μια γραμμή παραγωγής δύο σταδίων. Το προϊόν που παράγεται από το πρώτο στάδιο χρησιμοποιείται ως πρώτη ύλη από το δεύτερο στάδιο, ενώ επίσης πωλείται ως τελικό προϊόν από μια κατηγορία πελάτων. Ως βασική πολιτική ελέγχου παραγωγής χρησιμοποιήθηκε η πολιτική Βασικού Αποθέματος και συγκρίθηκε με την πολιτική Πεπερασμένων Αποθηκών.

Το σύστημα μοντελοποιήθηκε με την χρήση αλυσίδων Markov. Εκτιμήθηκαν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης και τα διάφορα μέτρα απόδοσης του συστήματος καθώς και το μέσο συνολικό κέρδος λειτουργίας του. Η συνάρτηση μέσου συνολικού κέρδους ήταν το εργαλείο με το οποίο μπορέσαμε να αξιολογήσουμε αλλά και να συγκρίνουμε τις υπό εξέταση πολιτικές. Αναπτύχθηκε ένας απλός κώδικας σε περιβάλλον Matlab για τον υπολογισμό του μέσου κέρδους για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων λειτουργείας του συστήματος.

Μετά από πολλά αριθμητικά παραδείγματα καταλήξαμε ότι η πολιτική ΒΑ είναι καλύτερη από την πολιτική Πεπερασμένων Αποθηκών καθώς επιτυγχάνει αύξηση του κέρδους λειτουργίας για τις περισσότερες περιπτώσεις που εξετάσθηκαν.

5.Βιβλιογραφία

1. Balakrishnan, N., Sridharan, V., Patterson, J.W., “Rationing capacity between two product classes.” *Decision Sciences*, vol. 27, pp. 185–214, 1996.
2. Benjaafar ,S., Elhafsi M. and Huang T., “Optimal Control of a Production-Inventory System with both Backorders and Lost Sales”, *Naval Research Logistics*, vol. 57, pp. 252-265, 2010.

3 Fransoo J.C., Sridharan V., Bertrand J.W.M., “A hierarchical approach for capacity coordination in multiple products single-machine production systems with stationary stochastic demands*”, European Journal of Operational Research*, vol. 86, pp. 57–72, 1995.

4. Gayon J. P., de Véricourt F., and Karaesmen F., “Stock rationing in an *M*/*Er*/1 multi-class make-to-stock queue with backorders”, *IIE Transactions*, vol. 41, pp. 1096-1109, 2009.
5. Ha A. Y., “Inventory rationing in a make-to-stock production system with several demand classes and lost sales”, *Management Science*, vol. 51, pp. 1093-1103, 1997.
6. Ha A. Y., “Stock-rationing policy for a make-to-stock production system with two priority classes and backordering”, *Naval Research Logistics*, vol. 44, pp. 457-472, 1997.
7. Ha A. Y., “Stock rationing in an *M*/*Ek*/1 make-to-stock queue”, *Management Science*, vol. 46, pp. 77-87, 2000.
8. Ioannidis S., Kouikoglou V.S., and Phillis Y.A., “Analysis of admission and inventory control policies for production networks”, *IEEE Transactions on Automation Science & Engineering*, vol. 5, pp. 275-288, 2008.

9. Ioannidis S., “An inventory and order admission control policy for production systems with two customer classes”, *International Journal of Production Economics*, vol. 131, pp. 663-673, 2011.
10. F. Karaesmen, Y. Dallery, "A Performance Comparison of Pull Type Control Mechanisms for Multi-Stage Manufacturing", *International Journal of Production Economics*, vol. 68, pp. 59-71, 2000.
11. George Liberopoulos and Yves Dallery, "A unified framework for pull control mechanisms in multi-stage manufacturing systems", *Annals of Operations Research*, Vol. 93, pp. 325–355, 2000.

6. Παράρτημα

```
clear all;
clc;
z1=8;
z2=4;
c2=-1;
R1=2;
l1=1;
l2=4;
m1=4;
m2=3;
r1=10;
r2=20;
h1=1;
h2=1.5;
b=3;
w=1;
%arxikoi pinakes A,B,C %



for i=1:z1-z2+1
       if i==1
        A(i,i)=l2+m1;
   else if i<R1+1
        A(i,i)=l2+m1;
        A(i,i-1)=-m1;
   else if i==R1+1
            A(i,i-1)=-m1;
            A(i,i)=l2+m1;
            A(i,i+1)=-l1;
      else if i<z1-z2+1
                A(i,i-1)=-m1;
                A(i,i)=l2+l1+m1;
                A(i,i+1)=-l1;
           else if i==z1-z2+1
                    A(i,i-1)=-m1;
                    A(i,i)=l1+l2;
```

```
            end
         end
      end
   end
   end

   B(i,i+1)=m2;
end
for i=1:z1-z2+1
   for j=1:z1-z2
      if i==j
         C(i,j)=l2;
      else
         C(i,j)=0;
      end
   end
end



G = inv(A)*B;                    % ypologismos arxikou G%

F{1,1}=G;

P=ones(1,z1-z2+1);

S(1,1:z1-z2+2)=P*F{1,1};
X{1}=F{1,1};
GG{1}=F{1,1};

%A,B,C pinakes mesa sthn epanalhpsh%

for z=z1-z2+2:z1-c2+1
   for i=1:z-1
      if i==1
         A(i,i)=l2+m1;
      else if i<=R1
            A(i,i-1)=-m1;
```

```
            A(i,i)=m1+m2+l2
        else if i==R1+1
            A(i,i-1)=-m1;
            A(i,i)=l2+m1+m2;
            A(i,i+1)=-l1;
             else
                A(i,i-1)=-m1;
                A(i,i)=l2+m1+m2+l1;
                A(i,i+1)=-l1;

        end
    end
    end
end


w=w+1;
A(z,z)=l1+l2+m2;
A(z,z-1)=-m1;



if z==z1-c2+1
    for i=1:z1-c2+1
        if i==1
            A(i,i)=m1;
        else if i<R1+1
                A(i,i-1)=-m1;
                A(i,i)=m1+m2;
            else if i==1+R1
                    A(i,i-1)=-m1;
                    A(i,i)=m2+m1;
                    A(i,i+1)=-l1;
                else if i<z1-c2+1
                        A(i,i-1)=-m1;
                        A(i,i)=l1+m2+m1;
                        A(i,i+1)=-l1;
                    else
                        A(i,i-1)=-m1;
                        A(i,i)=l1+m2;
```

```
            end
          end
        end
      end
    end

  end
  AA{z}=A;







  if z<z1-c2+1
    B(z,z+1)=m2;
  end

  for j=z-1:z
    if z-1==j
      C(j,j)=I2;
    else
      C(z,z-1)=0;
    end
  end

  if z<z1-c2+1
    K=C(1:z,1:z-1)*G;
    Y=A(1:z,1:z)-K;
    L=inv(Y);
    G=L*B(1:z,1:z+1);
    GG{w}=G;

  end
end
```

```
for i = 1: (z2-c2)
   temp = GG{1,i}
   for j = i+1: z1-3
      temp = temp*GG{1,j};
      %        size(temp)%
   end

   F{1,i} = temp;
end


a=1;
e=1;
for i=z1-z2+1:z1-c2
   J=eye(i);
   for j=i:z1-c2
      J=J*GG{e};
      e=e+1;
   end
   D{a}=J;%pinakas F%
   a=a+1;
   e=a;
end


u=1;
for i=z1-z2+1:z1-c2
   P=ones(1,i);
   S(u,1:z1-c2+1)=P*D{u};%p*f%
   u=u+1;
end



for z=1:z1-c2+1 %+1 to ebgala logo z%
   sum=0;
   for i=1:z2+1 %+1 logo i%
      sum=S(i,z)+sum;
   end
   Q(1,z)=sum;
```

```
end

for i=1:z1-c2+1
   Q(1,i)=Q(1,i)+1;
end


%upologismos pi8anothtwn monimhs katastashs%

T=A-C*G;
for i=1:z1-c2+1
   T(z1-c2+1,i)=Q(1,i);
end
for i=1:z1-c2+1
   if i<z1-c2+1
      E(i,1)=0;
   else
      E(i,1)=1;
   end
end
O=inv(T);
PC=O*E;




%YPOLOGISMOS KOSTOUS%
RC1=0;
PX2=0;
ALC1=0;
ALC2=0;
AB=0;
PAC1=0;
PX1X2=zeros(5);
PX1X2(1:z1-z2+1,1)=D{1}*PC;


for i=2:a-2
   PX1X2(1:z1-z2+i,i)=D{i}*PC;
```

```
end

%Gemisma pinaka PX1X2%

PX1X2(z1-c2+1,1:a-1)=0;
PX1X2(1:z1-c2+1,a)=PC;
%upologismos H1%
qq=1;
for i=2:z1-c2+1
  we=0;
   for j=1:a
      we=we+PX1X2(i,j);
   end

   LL(i)=we;
   LL(i)=LL(i)*qq;
   qq=qq+1;;

end
H1=0;
for i=1:z1-c2+1
   H1=H1+LL(i);
end

%upologismos H2%

op=4;
for i=1:z2
   qe=0;
   for j=1:z1
      qe=qe+PX1X2(j,i);
   end
   MM(i)=qe;
   MM(i)=MM(i)*op;
   op=op-1;
end
H2=0;
for i=1:z2
   H2=H2+MM(i);
end
```

```
%Ypologismos L1%
sumL1=0;
 for i=1:R1+1
   for j=1:z2+2 % Blepe sthles PX1X2 mexri ekei pou paei to R1%
      sumL1=sumL1+PX1X2(i,j);
   end
end
L1=sumL1*l1;
%Ypologismos RC1%
RC1=r1*(l1-L1);
%ypologismos L2%
sumL2=0;
for i=1:z1-c2+1
   sumL2=sumL2+PX1X2(i,a);
end
L2=sumL2*l2;
%ypologismos RC2%
RC2=r2*(l2-L2);
%ypologismos H1,H2 gia th synarthsh kostous%
H1=h1*H1;
H2=h2*H2;
%ypologismos BC%
xy=-1;
sumBC=0;
for i=1:z1-c2+1
   sumBC=sumBC+PX1X2(i,a);
end
BC=sumBC*(-xy);
BC=BC*b;
J=RC1+RC2-H1-H2-BC
```

7. Παράρτημα -Αποτελέσματα

ΓΙΑ λ_1=1	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	23,74
	9	5	3	-5	23,64
	10	5	3	-5	23,48
	10	6	3	-5	24,71
	10	4	3	-5	22,39
	11	6	3	-5	24,53
	10	6	3	-4	33,36
	10	6	3	-6	16,42
	10	6	2	-4	32,93
	11	6	3	-4	33,32
	12	6	3	-4	33,15
	11	7	3	-4	34,2
	11	7	3	-5	25,34
	11	7	3	-3	42,97
	11	7	3	-3	42,69
	12	7	3	-3	42,96
	12	8	3	-3	43,77
	13	8	3	-3	43,7
	13	9	3	-3	44,45
	13	9	2	-3	44,15
	13	9	3	-2	53,39
	13	9	2	-2	53,25
	14	9	3	-2	53,29
	14	10	3	-2	54,06
	14	10	2	-2	54
	15	10	2	-2	53,77
	15	10	3	-2	54
	15	11	3	-2	54,67
	15	11	2	-2	54,51
	16	11	3	-2	54,5
	17	11	3	-2	54,25
	17	12	3	-2	55
	17	13	3	-2	55,74
	17	13	3	-2	55,6
	17	13	2	-1	63,74
	18	13	2	-1	63,6

19	13	2	-1	63,34
19	14	2	-1	64,14
19	14	3	-1	64,12
19	14	4	-1	63,96
20	14	2	-1	63,91
20	15	2	-1	64,7
20	15	2	-2	55,25
20	15	3	-1	64,7
20	16	3	-1	65,5
21	16	3	-1	65,25
21	17	3	-1	66
22	17	3	-1	65,8
22	18	3	-1	66
22	16	3	-1	65
22	18	2	-1	65,9
22	18	3	-2	58

ΓΙΑ λ$_1$=2	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	28,84
	9	5	3	-5	28,7
	11	5	3	-5	28,9
	11	6	3	-5	29,56
	11	4	3	-5	28
	11	6	2	-5	27,93
	11	6	3	-6	21,6
	11	6	3	-4	37,14
	12	6	3	-4	37,23
	12	6	4	-4	38
	12	6	4	-5	30,7
	13	6	4	-4	38,24
	13	7	4	-4	38,84
	13	7	5	-4	39
	13	7	5	-3	46,85
	14	7	5	-3	46,91
	14	8	5	-3	47,7
	14	8	5	-2	57,69
	15	8	5	-2	57,8
	15	9	5	-2	58,52
	15	9	4	-2	58,65
	16	9	4	-2	58,67
	17	9	4	-2	58,68
	17	10	4	-2	59,4
	17	10	5	-2	59,34
	17	10	3	-2	59,03
	17	11	4	-2	60

17	11	4	-1	67,5
17	11	5	-1	67,21
17	11	3	-1	67,5
18	11	4	-1	67,5
18	12	4	-1	68,3
18	12	5	-1	68
18	12	3	-1	68,23
19	12	4	-1	68,3
19	13	4	-1	69
20	13	4	-1	69
20	14	4	-1	69,8
20	15	4	-1	70,56
20	16	4	-1	71,23
21	16	4	-1	71,31
21	17	4	-1	71,7
22	17	4	-1	71,7
21	18	4	-1	71,77
21	17	3	-1	71,63
21	17	4	-2	66,23

ΓΙΑ λ$_1$=3	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	33,6
	9	5	3	-5	33,45
	11	5	3	-5	33,6
	11	6	3	-5	34
	11	4	3	-5	32,97
	11	6	4	-5	33,2
	11	6	2	-5	32,2
	11	6	4	-6	30,03
	11	6	4	-4	41,21
	12	6	4	-4	41,32
	12	6	5	-4	41,72
	12	6	3	-4	40,1
	13	6	5	-4	41,81
	13	7	5	-4	42,52
	13	7	4	-4	42
	13	7	5	-5	36,31
	13	7	5	-3	49,17
	14	7	5	-3	49,27
	15	7	5	-3	49,3
	15	8	5	-3	50
	15	8	4	-3	49,6
	15	8	5	-2	61,73

16	8	5	-2	61,75
17	8	5	-2	61,76
17	9	5	-2	62,51
17	9	4	-2	62,43
17	10	5	-2	63,2
17	10	4	-2	63
17	10	5	-1	69,57
18	10	5	-1	69,6
18	11	5	-1	70,34
18	11	6	-1	69,97
18	11	4	-1	70,49
18	12	4	-1	71,21
18	12	5	-1	71
18	13	4	-1	72
19	13	4	-1	72
19	14	4	-1	72,7
20	14	4	-1	72,7
20	15	4	-1	73,41
20	15	3	-1	71,01
20	16	4	-1	73,83
21	16	4	-1	73,9
20	17	4	-1	73,94
20	16	3	-1	73,65
20	16	4	-2	67,6

ΓΙΑ **μ_1**=3	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	14,9
	9	5	3	-5	14,82
	11	5	3	-5	14,9
	11	6	3	-5	15,27
	11	4	3	-5	14,51
	11	6	4	-5	16,31
	11	6	2	-5	14
	11	6	4	-4	23,93
	11	6	4	-6	10,33
	12	6	4	-4	24
	12	7	4	-4	24,42
	12	7	3	-4	23,13
	12	7	4	-3	33,41
	13	7	4	-3	33,48
	13	8	4	-3	34
	13	8	3	-3	32,77
	13	8	3	-2	45,45
	14	8	3	-2	45,45

14	9	3	-2	46
14	9	3	-1	55,8
15	9	3	-1	55,8
15	10	4	-1	56
16	10	4	-1	55
15	11	4	-1	55,17
15	10	3	-1	54,86
15	10	4	-2	46,57

ΓΙΑ μ$_1$ =4	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	23,94
	9	5	3	-5	23,5
	10	6	3	-5	24,7
	10	6	2	-5	24,2
	10	6	3	-4	33,36
	11	6	3	-4	33,34
	11	7	3	-4	34,2
	11	7	2	-4	33,74
	11	7	3	-3	42,97
	12	7	3	-3	42,96
	12	8	3	-3	43,77
	12	8	2	-3	43,48
	12	8	3	-2	52,65
	13	8	3	-2	52,63
	13	9	3	-2	53,4
	13	9	2	-2	53,75
	13	9	3	-1	60,94
	14	9	3	-1	60,89
	13	10	3	-1	60,94
	13	9	2	-1	60,38
	13	9	3	-2	53,4

ΓΙΑ μ1 =5	Z1	Z2	R1	C2	J
	10	5	3	-5	24,97
	9	5	3	-5	25
	11	5	3	-5	24,9
	10	6	3	-5	26,38
	10	4	3	-5	23
	10	6	2	-5	26,5
	10	6	3	-4	35,6
	11	6	3	-4	35,68
	11	7	3	-4	36
	11	7	2	-4	36,21

11	7	2	-3	45,26
12	7	2	-3	45,13
12	8	2	-3	45,68
12	8	3	-3	45,52
12	8	2	-2	54,2
13	8	2	-2	54,32
13	9	2	-2	54,61
13	9	3	-2	54,44
14	9	2	-1	62
14	10	2	-1	62,36
14	10	3	-1	61,87

ΓΙΑ μ_2 =4	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	52,1
	9	5	3	-5	52,5
	11	6	3	-5	54,11
	11	4	3	-5	50,5
	11	6	2	-5	52,32
	11	6	4	-5	55
	11	6	4	-4	57,92
	11	6	4	-6	52
	12	6	4	-4	58,32
	12	7	4	-4	59,63
	12	7	3	-4	59
	12	7	4	-3	62,17
	12	7	4	-5	56,88
	13	7	4	-3	62,5
	13	8	4	-3	63,63
	13	8	3	-3	63,31
	13	8	4	-2	66,68
	14	8	4	-2	66,9
	14	9	4	-2	67,95
	14	9	3	-2	67,8
	14	9	4	-1	70
	15	9	4	-1	70
	15	10	4	-1	71
	15	10	3	-1	71,21
	16	10	3	-1	71,31
	16	11	3	-1	72,31
	16	12	3	-1	73,31
	16	12	2	-1	73,2
	17	12	3	-1	70,4

18	12	3	-1	73,45
18	13	3	-1	74,47
18	13	2	-1	74,31
19	13	3	-1	74,51
19	14	3	-1	75,53
19	14	4	-1	75,31
20	14	3	-1	75,56
20	15	3	-1	76,6
21	15	3	-1	76,6
21	15	2	-1	76,41
21	16	3	-1	77,65
22	16	3	-1	77,65
22	17	3	-1	78
23	17	3	-1	78
22	18	3	-1	78,13
22	17	4	-1	77,65
22	17	3	-2	76,61

ΓΙΑ μ$_2$ =5	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	62,93
	9	5	3	-5	61,8
	11	5	3	-5	62,93
	11	6	3	-5	64,2
	11	4	3	-5	61,35
	11	6	4	-5	64,73
	11	6	4	-4	65,6
	12	6	4	-4	66
	12	7	4	-4	67
	12	7	3	-4	66,8
	12	7	4	-3	67,8
	13	7	4	-3	68,2
	13	8	4	-3	69,1
	13	8	3	-3	69
	13	8	4	-2	70,63
	14	9	4	-2	70,91
	14	10	4	-2	71,77
	14	10	3	-2	71,23
	14	11	4	-2	72,4
	14	12	4	-2	73,53
	15	12	4	-2	73,73
	15	12	5	-2	73,43
	15	13	4	-2	74,9

15	14	4	-2	76,1
15	14	5	-2	75,82
16	14	4	-2	76,21
16	15	4	-2	77,41
16	15	3	-2	77,56
16	15	3	-1	78,56
17	15	3	-1	78,59
17	16	3	-1	79,8
17	16	4	-1	79,5
18	16	3	-1	79,8
18	17	3	-1	81
19	17	3	-1	81
19	17	4	-1	80,67
19	18	3	-1	82
20	18	3	-1	82
20	19	3	-1	82,31
20	19	4	-1	82
20	19	3	-2	81,89

ΓΙΑ r_1 =20	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	31,85
	9	5	3	-5	31,72
	11	5	3	-5	31,77
	10	6	3	-5	32,7
	10	4	3	-5	30,64
	10	6	2	-5	32,7
	11	6	3	-5	32,7
	11	7	3	-5	33,4
	11	7	2	-5	33,4
	11	7	3	-4	42
	12	7	3	-4	42
	12	8	3	-4	42,8
	12	8	2	-4	42,8
	12	8	3	-3	51,66
	13	8	2	-3	51,76
	13	9	2	-3	52,44
	13	9	3	-3	52,26
	13	9	2	-2	61,8
	14	9	2	-2	61,8
	14	10	2	-2	62,53
	15	10	2	-2	62,5
	15	11	2	-2	63,21
	15	11	3	-2	63

16	11	3	-2	63
16	12	3	-2	63,65
16	12	3	-2	63
17	12	3	-2	63,55
17	13	3	-2	64,25
17	13	2	-2	64,42
17	13	2	-1	72,5
18	13	2	-1	72,4
17	14	2	-1	73,3
17	14	1	-1	73,42
17	15	1	-1	74,2
18	15	1	-1	74,2
17	16	1	-1	74,28
17	15	2	-1	73,86
17	15	1	-2	68,42

ΓΙΑ r_1 =30	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	39,96
	9	5	3	-5	39,6
	11	5	3	-5	40
	11	6	3	-5	40,91
	11	6	4	-5	40,1
	11	6	4	-4	48,1
	12	6	4	-4	48,5
	12	7	4	-4	49,2
	12	7	3	-4	50
	12	8	3	-4	50,67
	12	8	2	-4	51,21
	13	8	2	-4	51,33
	13	9	2	-4	51,9
	13	9	3	-4	51,45
	13	9	2	-3	60,74
	14	9	2	-3	60,9
	14	10	2	-3	61,5
	14	10	3	-3	60,9
	14	10	2	-2	71,14
	14	11	2	-2	71,8
	15	11	2	-2	71,9
	15	11	3	-2	71,33
	16	11	2	-2	71,9
	16	12	2	-2	72,61
	16	12	3	-2	72

16	12	2	-1	80,5
17	12	2	-1	80,5
17	13	2	-1	81,3
18	13	2	-1	81,3
18	14	2	-1	82
18	14	3	-1	81,4
18	15	2	-1	82,7
18	15	1	-1	83,2
19	15	1	-1	83,1
18	16	1	-1	84
19	16	1	-1	83,5
18	17	1	-1	83,8
18	16	2	-1	83,76
18	16	1	-2	77,53

ΓΙΑ h_1 =2	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	11,6
	11	5	3	-5	10,5
	10	6	3	-5	12,75
	10	4	3	-5	10
	10	6	2	-5	12,64
	10	6	3	-4	23,8
	11	6	3	-4	23
	11	7	3	-4	24
	11	7	2	-4	23,88
	11	7	3	-3	35
	12	7	3	-3	34,4
	12	8	3	-3	35,33
	12	8	2	-3	35,3
	12	8	3	-2	46,25
	13	8	3	-2	45,7
	13	9	3	-2	46,55
	13	9	2	-2	46,6
	13	9	2	-1	56,17
	14	9	2	-1	55,7
	14	10	2	-1	56,5
	15	10	2	-1	56,5
	14	11	2	-1	56,53
	14	10	3	-1	55,86
	14	10	2	-2	46,49

ΓΙΑ h_1 =3	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	6	3	-5	0,8
	10	6	3	-4	14,22
	11	6	3	-4	12,7
	10	6	3	-4	14,44
	11	6	2	-4	12,97
	11	7	2	-4	14,02
	11	7	3	-4	13,83
	11	7	2	-3	27,4
	12	7	2	-3	26,2
	11	7	2	-2	40,23
	11	7	3	-2	39,9
	12	7	2	-2	39,22
	12	8	2	-2	40,2
	12	8	2	-1	51,23
	13	8	2	-1	50,4
	12	9	2	-1	51,15
	12	8	3	-1	50,76
	12	8	2	-2	42,38

ΓΙΑ h_2=2,5	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	23,41
	11	5	3	-5	23,14
	9	5	3	-5	23,53
	10	6	3	-5	24,57
	11	6	3	-5	24,5
	11	6	2	-5	23,93
	11	6	3	-4	33,15
	12	6	3	-4	33
	12	7	3	-4	34,2
	12	7	3	-3	43
	12	7	2	-3	42,5
	12	8	3	-3	44,22
	13	8	3	-3	44,15
	13	9	3	-3	45,26
	13	9	2	-3	44,95
	13	9	3	-2	54,31
	14	9	3	-2	54,23
	14	10	3	-2	55,4
	14	10	2	-2	55,2

14	10	3	-1	63,2
15	10	3	-1	63
15	11	3	-1	63,33
16	11	3	-1	63
15	12	3	-1	63,41
15	11	2	-1	62,88
15	11	3	-2	55,23

ΓΙΑ h_2=3,5	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	23
	9	5	3	-5	23,21
	11	5	3	-5	22,79
	10	6	3	-5	24,44
	10	6	2	-5	24
	10	6	3	-4	33
	11	6	3	-4	33
	11	7	3	-4	34,4
	11	7	2	-4	34
	11	7	2	-3	43,2
	12	7	3	-3	43,2
	12	8	3	-3	44,7
	12	8	2	-3	44,4
	12	8	3	-2	53,66
	13	8	3	-2	53,66
	13	9	3	-2	55,23
	13	9	2	-2	55
	13	9	3	-1	62,96
	14	9	3	-1	62,92
	14	10	3	-1	64,67
	15	10	3	-1	64,6
	15	10	2	-1	64,6
	15	11	2	-1	66,4
	16	11	2	-1	66,2
	15	12	2	-1	66,37
	15	11	3	-1	66,24
	15	11	2	-2	58,54

ΓΙΑ b=1	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	25

9	5	3	-5	25,11
11	5	3	-5	24,7
9	5	2	-5	24,67
9	5	3	-4	33,4
10	5	3	-4	33,4
10	6	3	-4	34,43
10	6	2	-4	34
10	6	3	-3	42,9
11	6	3	-3	42,9
11	7	3	-3	43,85
11	7	2	-3	43,6
11	7	3	-2	52,43
12	7	3	-2	52,43
12	8	3	-2	53,25
12	8	2	-2	53,25
12	8	2	-1	60,81
13	8	2	-1	60,8
13	9	2	-1	61,6
13	9	3	-1	61,5
14	9	2	-1	61,5
14	10	2	-1	62,33
14	10	1	-1	62,2
15	10	2	-1	62,2
15	11	2	-1	63
16	11	2	-1	62,88
15	12	2	-1	62,94
15	11	3	-1	62,57
15	11	2	-2	55,46

ΓΙΑ b=2	Z_1	Z_2	R_1	C_2	J
	10	5	3	-5	24,36
	9	5	3	-5	24,45
	11	5	3	-5	24,1
	10	6	3	-5	25,32
	10	6	2	-5	24,83
	10	6	3	-4	33,9
	11	6	3	-4	33,9
	11	7	3	-4	34,72
	11	7	2	-4	34,3
	11	7	3	-3	43,41
	12	7	3	-3	43,4
	12	8	3	-3	44,21

12	8	2	-3	43,93
12	8	3	-2	53
13	8	3	-2	53
13	9	3	-2	53,75
13	9	2	-2	53,61
13	9	3	-1	61,22
14	9	3	-1	61,2
14	10	3	-1	61,98
14	10	2	-1	62
15	10	2	-1	61,94
15	11	2	-1	62,74
15	11	3	-1	62,7
16	11	3	-1	62,7
15	12	3	-1	62,85
15	11	2	-1	62,18
155	11	2	-2	54,69