



**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ  
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ**

**«Ανάλυση γραμμών παραγωγής δύο σταδίων με ζήτηση  
ενδιάμεσων προϊόντων»**

Επιβλέπων: Επίκουρος καθηγητής κ. Ευστράτιος Ιωαννίδης

Επιτροπή: Επίκουρος καθηγητής κ. Ευστράτιος Ιωαννίδης

Καθηγητής κ. Βασίλειος Κουϊκόγλου

Επίκουρος καθηγητής κ. Ιωάννης Μαρινάκης

Φοιτητής: Θωμάς Καρύδης

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω κάποιους ανθρώπους που με στήριξαν στην πορεία μου όλα αυτά τα χρόνια. Κατ' αρχήν οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου και στους φίλους μου γιατί ήταν δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια δίνοντάς μου δύναμη και υποστήριξη να εκπληρώνω τους στόχους μου. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής, καθηγητή Ευστράτιο Ιωαννίδη τόσο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά την ανάθεση της διπλωματικής εργασίας, όσο και για την πολύτιμη καθοδήγησή του, τις υποδείξεις του και τις συμβουλές του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται μια γραμμή παραγωγής δύο σταδίων. Τα προϊόντα που παράγονται από το πρώτο στάδιο χρησιμοποιούνται τόσο ως πρώτη ύλη από το δεύτερο στάδιο αλλά και ως τελικά προϊόντα. Οι αφίξεις των πελατών είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson, ενώ οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικά κατανεμημένοι. Στόχος είναι η σύγκριση διαφόρων απλών πολιτικών ελέγχου των αποθεμάτων ενδιάμεσων και τελικών προϊόντων, ώστε να επιλεγούν αυτές που ελαχιστοποιούν το κόστος λειτουργίας του συστήματος. Για το σκοπό αυτό αναπτύσσονται αριθμητικά μοντέλα, που περιγράφουν τη λειτουργία του συστήματος για κάθε εξεταζόμενη πολιτική και επιτρέπουν την εκτίμηση του κόστους λειτουργίας σε κάθε περίπτωση.

## Περιεχόμενα

Ευχαριστίες .....	2
Περίληψη .....	3
1.Εισαγωγή και βιβλιογραφική ανασκόπηση .....	5
1.1.Πολιτικές ελέγχου σε συστήματα παραγωγής με πολλές κατηγορίες πελατών...	6
1.2.Γεωμετρική μέθοδος πινάκων .....	7
1.3.Αλγόριθμοι γεωμετρικής μεθόδου πινάκων .....	8
1.4.Δομή διπλωματικής εργασίας.....	8
2.Περιγραφή συστήματος παραγωγής και των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν .....	9
2.1.Περιγραφή της γραμμής παραγωγής.....	9
2.2.Περιγραφή του χώρου καταστάσεων του συστήματος .....	10
2.3.Εξισώσεις Charman-Kolmogoron του συστήματος .....	12
2.4.Περιγραφή των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του συστήματος .....	14
2.4.1.Περιγραφή της γεωμετρικής μεθόδου πινάκων.....	14
2.4.2.Περιγραφή του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του πίνακα G.....	18
2.5.Συνάρτηση κέρδους.....	20
2.6.Βελτιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους.....	21
3.Αριθμητικά αποτελέσματα .....	22
3.1.Μελέτη της συμπεριφοράς της συνάρτησης κέρδους ως προς τις μεταβλητές ελέγχου .....	22
3.2.Σύγκριση πολιτικής πλήρους αποδοχής .....	30
4.Συμπεράσματα .....	39
5.Βιβλιογραφία .....	40
6.Παράρτημα.....	42

## 1.Εισαγωγή και βιβλιογραφική ανασκόπηση

Το σύγχρονο περιβάλλον των επιχειρήσεων μεταβάλλεται συνεχώς λόγω του αυξανόμενου ανταγωνισμού. Η επίδραση της μεταβλητότητας φαίνεται τόσο στις πωλήσεις όσο και στις τεχνολογίες παραγωγής. Όσον αφορά τις πωλήσεις παρατηρείται μικρότερος κύκλος ζωής των προϊόντων και αλλαγές στα μέσα πώλησης (η ‘εισβολή’ του διαδικτύου σε κάθε τομέα της καθημερινότητάς μας δεν θα μπορούσε να λείπει και από εδώ). Τα συστήματα παραγωγής έχουν γίνει πιο ευέλικτα, υπάρχει αυξανόμενη τάση αυτοματοποίησης της παραγωγής και έχουν αναπτυχθεί καινοτόμες ψηφιακές τεχνολογίες στον τομέα της εφοδιαστικής αλυσίδας. Επίσης οι εξελίξεις στις επιστημονικές περιοχές της πληροφορικής, των συστημάτων παραγωγής, της επιχειρησιακής έρευνας, της διοίκησης επιχειρήσεων και της οικονομίας επηρεάζουν σημαντικά την οργάνωση των διαφόρων συστημάτων παραγωγής. Κάθε επιχείρηση στοχεύει στην μεγαλύτερη ευελιξία παραγωγής, στη μείωση του λειτουργικού κόστους, στην αύξηση του κέρδους και στην παραγωγή ανταγωνιστικότερων προϊόντων και υπηρεσιών ώστε να καλυφθούν με επιτυχία οι ανάγκες του σύγχρονου καταναλωτή. Με λίγα λόγια η επιχείρηση θα πρέπει να βρει την βέλτιστη πολιτική ώστε να είναι πιο ανταγωνιστική αλλά και να μεγιστοποιεί το κέρδος της. Λόγω των εξελίξεων της σύγχρονης εποχής που προαναφέραμε, για να εξασφαλίσει μια βιομηχανία την βιωσιμότητά της στο σύγχρονο ανταγωνιστικό περιβάλλον θα πρέπει να είναι σε θέση να παράγει με βέλτιστο τρόπο ποιοτικά και ποσοτικά. Έτσι λοιπόν η σύγχρονη παραγωγική διαδικασία περιλαμβάνει τη λήψη σημαντικών αποφάσεων που σχετίζονται με το συντονισμένο έλεγχο της παραγωγής σε κάθε τμήμα ώστε να αποφεύγεται η διατήρηση υψηλών αποθεμάτων και συγχρόνως η έλλειψη προϊόντων που οδηγεί σε ανικανοποίητη ζήτηση, δύο σημαντικές παραμέτρους για την διατήρηση του κόστους σε χαμηλά επίπεδα.

Συγκεκριμένα ο έλεγχος παραγωγής καλύπτει θέματα που σχετίζονται με το χρονικό προγραμματισμό της διαδικασίας παραγωγής και τον έλεγχο των αποθεμάτων με στόχο την βέλτιστη κάλυψη της ζήτησης. Σκοπός του ελέγχου είναι η βελτιστοποίηση ενός ή και περισσότερων μέτρων απόδοσης του συστήματος. Αυτά μπορεί να είναι το καθαρό κέρδος από τις πωλήσεις, το κόστος λειτουργίας, το μέσο απόθεμα και η ικανοποίηση των πελατών από άποψη χρόνου παράδοσης και ποιότητας.

Στα περισσότερα συστήματα παραγωγής οι αποφάσεις που λαμβάνονται στα θέματα ελέγχου των αποθεμάτων παίζουν σημαντικότερο ρόλο στην διαδικασία παραγωγής. Ο αντικειμενικός σκοπός είναι να διατηρείται μια ισορροπία μεταξύ υπερβολικού και ελάχιστου αποθέματος ώστε να μην οδηγεί σε μεγάλα κόστη αποθήκευσης και μεγάλες ελλείψεις, οι οποίες μετατρέπονται σε αδυναμία εξυπηρέτησης των πελατών αντίστοιχα.

Στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε ένα σύστημα παραγωγής δύο σταδίων. Τα ενδιάμεσα προϊόντα του πρώτου σταδίου χρησιμοποιούνται ως πρώτη ύλη από το δεύτερο στάδιο για την παραγωγή των τελικών προϊόντων, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως τελικά προϊόντα από συγκεκριμένη κατηγορία πελατών. Εδώ μπορούμε να αναφέρουμε ως παράδειγμα τις αυτοκινητοβιομηχανίες καθώς πολλά από τα αντικείμενα που χρησιμοποιούν για την κατασκευή ενός αυτοκινήτου διατίθεται και

ως ανταλλακτικά στα εξουσιοδοτημένα συνεργεία τους όπως είναι προφυλακτήρες, πλαστικά, κομμάτια ενός κινητήρα κ.α.

### 1.1. Πολιτικές ελέγχου σε συστήματα παραγωγής με πολλές κατηγορίες πελατών

Όσον αφορά τον έλεγχο της παραγωγής και τις διαφορετικές πολιτικές που μπορούν να εφαρμοστούν μπορεί κανείς να ανατρέξει στον Zipkin [1], όπου γίνεται αναλυτική παρουσίαση όλων των πολιτικών και επεξηγήσή τους. Για αυτήν την εργασία θα εφαρμόσουμε μια απλή πολιτική κατώφλιου. Σύμφωνα με αυτή την πολιτική το σύστημα παράγει στον μέγιστο ρυθμό όσο το απόθεμα έτοιμων προϊόντων είναι μικρότερο από ένα κατώφλι που ονομάζεται *μέγιστο απόθεμα* και διακόπτει την παραγωγή όταν το απόθεμα είναι ίσο με αυτό το κατώφλι. Οι πολιτικές μέγιστου αποθέματος αναπτύχθηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 1950 και εφαρμόζονται μέχρι σήμερα με μικρές παραλλαγές στην πλειοψηφία των συστημάτων παραγωγής. Σε κάθε στάδιο της παραγωγής ορίζεται ένα κατώφλι μέγιστου αποθέματος και όταν το απόθεμα προϊόντων φτάσει το μέγιστο απόθεμα τότε η παραγωγή σταματά και ξεκινάει πάλι όταν το απόθεμα πέσει κάτω από αυτό το κατώφλι.

Το πρόβλημα που εξετάζουμε παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με το πρόβλημα της διάθεσης σε πολλές διαφορετικές κατηγορίες πελατών του ίδιου τύπου προϊόντος (γνωστό στην διεθνή βιβλιογραφία ως *stock rationing*). Σε αυτή την περίπτωση συνήθως αποδίδουμε προτεραιότητα σε κάποιες κατηγορίες πελατών και γι' αυτό τον λόγο διατηρούμε αποθέματα ασφαλείας μόνο για αυτούς. Οι Benjaafar et al. [2] μελέτησαν ένα σύστημα παραγωγής ενός προϊόντος με δύο κατηγορίες πελατών όπου επιτρέπονται οι εκκρεμείς παραγγελίες αλλά εφαρμόζεται και η πολιτική απόρριψης πελατών. Ιδιαίτερα ενδιαφέρονσα είναι η εργασία του Zipkin [3] πάνω σε ένα σύστημα παραγωγής πεπερασμένης χωρητικότητας πολλών διαφορετικών προϊόντων. Εξετάζονται δύο πολιτικές για την απόφαση παραγωγής κάθε διαφορετικού προϊόντος, η πολιτική *πρώτος έρχεται- πρώτος εξυπηρετείται* (*first-come-first-served, FCFS*) και η πολιτική παραγωγής προϊόντος με την *μεγαλύτερη ουρά αναμονής* (*longest queue, LQ*). Τα συμπεράσματα είναι ότι η πολιτική μέγιστου αποθέματος σε συνδυασμό με την πολιτική LQ είναι ο βέλτιστος καλύτερος συνδυασμός για το σύστημα ως σύνολο.

Ανατρέχοντας σε παλιότερες μελέτες, έχουμε την μελέτη του Ha [4] όπου εξετάζεται ένα σύστημα παραγωγής ενός σταδίου με δύο κατηγορίες πελατών (χαμηλής και υψηλής προτεραιότητας) εφαρμόζοντας διαφορετική πολιτική για κάθε κατηγορία πελατών. Συγκεκριμένα, η απόφαση παραγωγής καθορίζεται από μια πολιτική κατώφλιου και η απόφαση κατανομής των αποθεμάτων καθορίζεται από ένα κατώφλι διανομής, το οποίο μειώνεται στον αριθμό παραγγελιών χαμηλής προτεραιότητας στο σύστημα. Πάνω σε παρόμοια συστήματα παραγωγής μπορεί κάποιος να δει την μελέτη του Ioannidis [5] όπου εξετάζεται ένα σύστημα παραγωγής ενός σταδίου με δύο κατηγορίες πελατών και εκτός των άλλων γίνεται έλεγχος αποδοχής παραγγελιών. Επίσης παρόμοιες μελέτες έχουμε από τους Gayon et al. [6] σε συστήματα ενός προϊόντος με πολλές κατηγορίες πελατών και με διαφορετικά κόστη εκκρεμών παραγγελιών.

## 1.2.Γεωμετρική μέθοδος πινάκων

Οι αλυσίδες Markov είναι στοχαστικά μοντέλα με τα οποία μπορεί κανείς να περιγράψει προσεγγιστικά την λειτουργία συστημάτων διακριτής κυκλοφορίας όπως είναι τα διακριτά συστήματα παραγωγής. Μία αλυσίδα Markov είναι μία στοχαστική διαδικασία της οποίας η κατάσταση παίρνει τιμές από ένα αριθμησιμο σύνολο και οι αλλαγές καταστάσεων γίνονται με τυχαίο τρόπο που εξαρτάται από την πιο πρόσφατη (τελευταία) κατάσταση αλλά είναι ανεξάρτητες από το παρελθόν της διαδικασίας. Τέτοιες διαδικασίες έχουν έλλειψη μνήμης (memoryless, M). Διαδικασίες συνεχούς χρόνου με έλλειψη μνήμης είναι η Poisson (όταν μετρούμε πλήθος ή συχνότητα εμφάνισης γεγονότων) και η εκθετική (όταν μετρούμε περίοδο ή χρόνο μέχρι επόμενη εμφάνιση). Παράδειγμα τέτοιας διαδικασίας είναι η ουρά που σχηματίζεται σε ένα σύστημα αναμονής M/M/1 ήτοι ένα σύστημα εξυπηρέτησης με αφίξεις πελατών κατά Poisson (M) και ένα (1) σημείο εξυπηρέτησης με εκθετικές διάρκειες εξυπηρέτησης (M επίσης).

Στο M/M/1 οι μέσοι ρυθμοί αφίξεων και εξυπηρέτησης είναι σταθεροί. Οι διαδικασίες γεννήσεως-θανάτου (*birth-death processes*) γενικεύουν το σύστημα M/M/1. Θεωρούν και αυτές έναν πληθυσμό όπου συμβαίνουν αυξήσεις με απλές γεννήσεις (όχι δίδυμες ή πολύδυμες) και μειώσεις (θάνατοι) αλλά οι μέσοι ρυθμοί αυξήσεων και μειώσεων εξαρτώνται από την τρέχουσα κατάσταση.

Μία ακόμη γενικότερη κατηγορία αποτελούν οι αλυσίδες Markov με πολυδιάστατες καταστάσεις που μπορούν να περιγράψουν συστήματα με πολλά σημεία αποθεμάτων και πολλές μηχανές. Οι λεγόμενες διαδικασίες οιονεί γεννήσεως-θανάτου (*quasi-birth-death processes, QBDs*) είναι δισδιάστατες αλυσίδες Markov όπου η μία διάσταση συμπεριφέρεται περίπου (οιονεί) ως διαδικασία γέννησης-θανάτου. Με τέτοιες διαδικασίες θα ασχοληθούμε εδώ. Αυτές οι διαδικασίες είναι γενικεύσεις της ουράς αναμονής M/M/1. Έχουν γίνει από τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα στοχαστικά μοντέλα σε πολλούς τομείς όπως είναι οι τηλεπικοινωνίες, βελτίωση απόδοσης υπολογιστών και ο έλεγχος απογραφής. Οι παρακάτω εργασίες είναι απλά δείγματα για τις εφαρμογές όπου οι δισδιάστατες αλυσίδες Markov διαδικασιών οιονεί γεννήσεως-θανάτου έχουν χρησιμοποιηθεί ως μοντέλα: ουρές αναμονής σε τυχαίο περιβάλλον Neuts [7],[9], μοντέλα πολλαπλών επεξεργαστών Latouche [8], πρόβλημα συντομότερης ουράς αναμονής Rao and Posner [10], ευρυζωνικά συστήματα πολυμέσων Ye and Li [11] και συστήματα επικοινωνίας πακέτων υψηλής ταχύτητας Zukerman [12], Zukerman and Kirton [13].

Η ανάλυση των δισδιάστατων αλυσίδων Markov διαδικασιών οιονεί γεννήσεως-θανάτου διευκολύνεται από την γεωμετρική μέθοδο πινάκων (*matrix geometric method*) που προτάθηκε από τους Evans [14] (1967) και Wallace [15] (1969) και αναπτύχθηκε εκτενώς από τον Neuts [16] και τους μαθητές του (1975) και από άλλους στην συνέχεια. Η γεωμετρική μέθοδος είναι μια μέθοδος για την ανάλυση των διαδικασιών οιονεί γεννήσεως-θανάτου, αλυσίδων Markov συνεχούς χρόνου των οποίων οι πίνακες ρυθμών μετάβασης δίνονται με επαναλαμβανόμενη μορφή μπλοκ. Στην γενική θεωρία της μεθόδου δύο πίνακες, που συνήθως υποδηλώνονται από τους R και G, παίζουν σημαντικό ρόλο στην μέθοδο και έχουν προταθεί αρκετοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό τους.

### 1.3.Αλγόριθμοι γεωμετρικής μεθόδου πινάκων

Όπως προαναφέραμε, υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό των πινάκων R και G. Αναφορικά μπορούμε να δούμε τους Neuts [17], [18], Loucantoni and Ramaswami [19], Ramaswami [20], Latouche [21], [22], [23]. Οι περισσότεροι από αυτούς χρησιμοποιούν διαδοχικές υποκαταστάσεις και συγκλίνουν γραμμικά, στοιχεία που τους κάνουν εύκολους στην χρήση τους και συχνά αποτελεσματικούς. Έχουν αναφερθεί περιπτώσεις ωστόσο, όπου ο αριθμός των επαναλήψεων είναι υπερβολικά υψηλός. Αυτοί οι αλγόριθμοι μπορούν να τροποποιηθούν από την μέθοδο του Newton [23], η οποία συγκλίνει τετραγωνικά. Το μειονέκτημα σε αυτή την περίπτωση είναι ότι κάθε επανάληψη είναι πολύ ακριβή, τόσο σε χρόνο εκτέλεσης όσο και σε απαιτήσεις μνήμης.

Την λύση σε αυτά τα προβλήματα δίνει ο αλγόριθμος λογαριθμικής μείωσης (*logarithmic reduction algorithm*) που παρουσιάστηκε από τους Latouche και Ramaswami [26]. Ο αλγόριθμος αυτός είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος, ο οποίος είναι τετραγωνικά συγκλίνων και αποτελεσματικός. Στην ίδια μελέτη έχει αποδειχθεί ότι παρουσιάζει πολύ καλά αριθμητικά αποτελέσματα, είναι σταθερός και ο αριθμός των επαναλήψεων είναι αρκετά μικρότερος από αυτούς των προηγούμενων αλγορίθμων. Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε και από τον Ye [27] με την διαφορά ότι παρουσίασε κάποιες μικρές αλλαγές στον αλγόριθμο για την περίπτωση που υπήρχε αδυναμία προσέγγισης αντιστρόφου πίνακα.

### 1.4.Δομή της διπλωματικής εργασίας

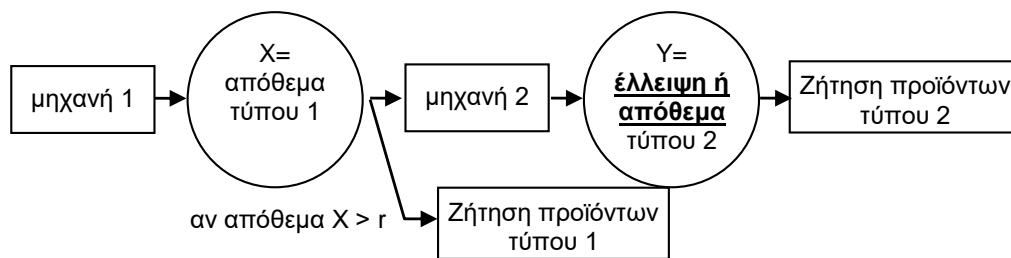
Η παρούσα εργασία είναι διαρθρωμένη ως εξής: στο κεφάλαιο 1 γίνεται εισαγωγή στα συστήματα παραγωγής και στο σύστημα που θα εξεταστεί. Στο κεφάλαιο 2 αναπτύσσεται διεξοδικά το σύστημα παραγωγής, η μοντελοποίησή του ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, αλλά και των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν για την διαδικασία επίλυσής του καθώς και ο υπολογισμός της συνάρτησης κέρδους. Στο κεφάλαιο 3 έχουμε την παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων βάση του προγράμματος που χρησιμοποιήθηκε για το εξεταζόμενο σύστημα παραγωγής και η σύγκρισή του με άλλες πολιτικές και διαφορετικές τιμές μεταβλητών. Τέλος, στο κεφάλαιο 4 καταγράφονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν στην παρούσα εργασία.



## 2. Περιγραφή συστήματος παραγωγής και των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν

### 2.1. Περιγραφή της γραμμής παραγωγής

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε ένα σύστημα που διαθέτει δύο μηχανές και εξυπηρετεί δύο κατηγορίες πελατών. Η μηχανή 1 παράγει προϊόντα τύπου 1 τα οποία είτε διατίθενται στους πελάτες που ενδιαφέρονται για προϊόντα τύπου 1 είτε χρησιμοποιούνται από την μηχανή 2 για την παραγωγή προϊόντων τύπου 2 και την διάθεσή τους στους πελάτες που ενδιαφέρονται για προϊόντα τύπου 2. Το σύστημα αναπαρίσταται με το Σχήμα 1. Η διαδικασία παραγωγής χρησιμοποιεί και για τα δύο προϊόντα κατώφλι ασφαλείας αποθέματος, δηλαδή η πρώτη μηχανή παράγει έως ότου το απόθεμα της αποθήκης προϊόντων τύπου 1 γίνει ίσο με  $S_1$  και η δεύτερη μηχανή μέχρι το απόθεμα αποθήκης προϊόντων 2 γίνει ίσο με  $S_2$ . Η διαδικασία αυτή είναι συνηθισμένη στα περισσότερα συστήματα παραγωγής για να προστατευτούν από ελλείψεις αποθέματος αλλά και από υπερβολική συσσώρευση αποθέματος. Οι πελάτες προϊόντων τύπου 2 είναι διατεθειμένοι να περιμένουν όσο χρειαστεί, οπότε σε περίπτωση έλλειψης αποθέματος προϊόντων τύπου 2 σχηματίζεται λίστα εκκρεμών παραγγελιών. Οι πελάτες προϊόντων τύπου 1 από την άλλη πλευρά, μπορούν να θεωρηθούν ανυπόμονοι, καθώς σε περίπτωση μη άμεσης ικανοποίησής τους οι παραγγελίες τους χάνονται.



Σχήμα 1: Το σύστημα παραγωγής

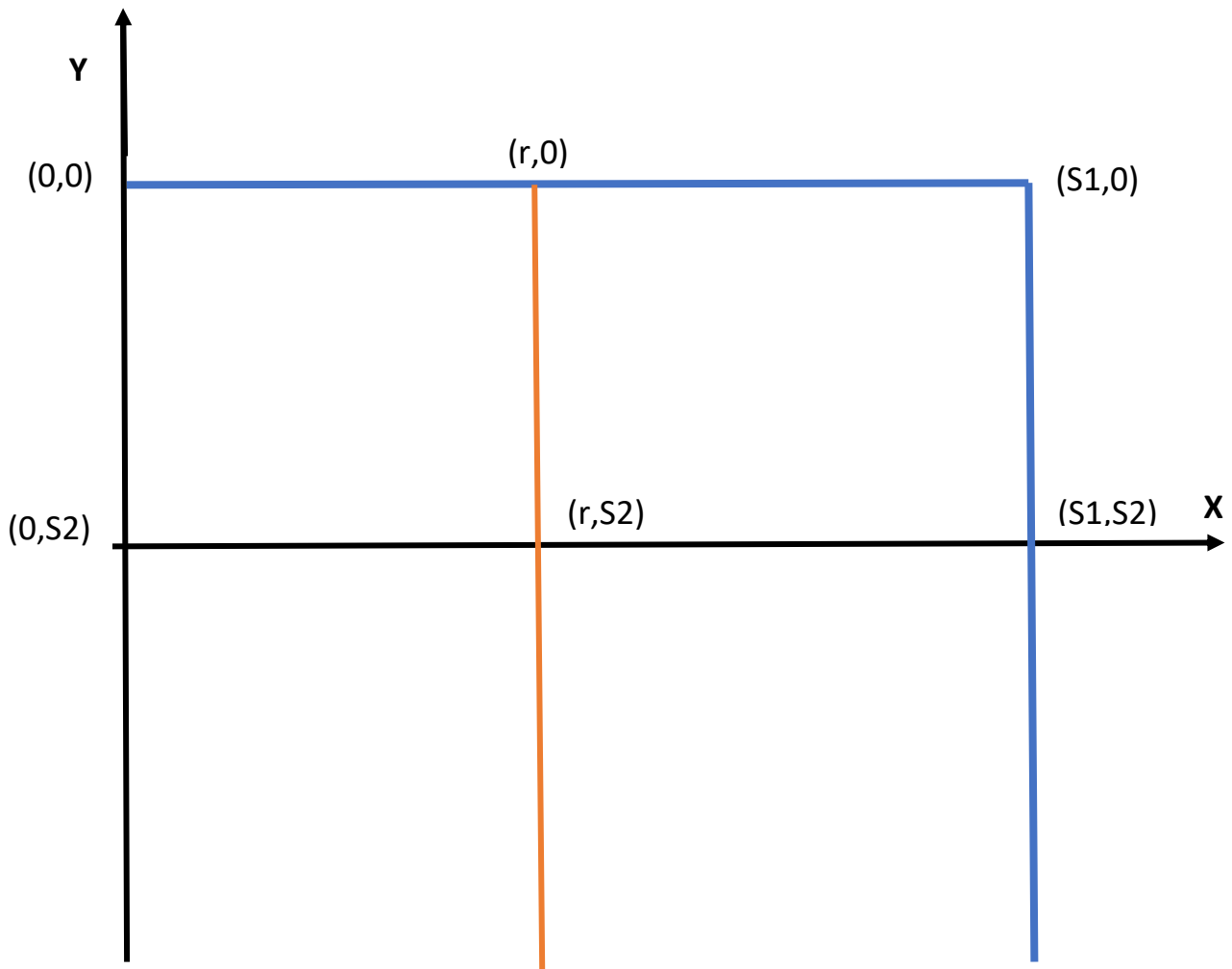
Για την εξυπηρέτηση των πελατών προϊόντων τύπου 1 χρησιμοποιείται πολιτική προτεραιότητας τύπου κατώφλιου. Σύμφωνα με αυτή την πολιτική, οι παραγγελίες των πελατών προϊόντων τύπου 1 ικανοποιούνται άμεσα από το απόθεμα ενδιάμεσων προϊόντων όταν αυτό είναι μεγαλύτερο από ένα κατώφλι προτεραιότητας  $r$ . Σε διαφορετική περίπτωση οι παραγγελίες τους χάνονται. Όπως έχει γίνει αντιληπτό δίνεται προτεραιότητα στην παραγωγή προϊόντων τύπου 2 και για αυτό τον λόγο διατηρείται απόθεμα ασφαλείας προϊόντων τύπου 1 ώστε να εξασφαλιστεί κατά το δυνατόν η παραγωγή προϊόντων τύπου 2. Όπως έχουμε προαναφέρει, αυτές οι πολιτικές συνηθίζονται σε συστήματα με πολλές κατηγορίες πελατών που ενδιαφέρονται για το ίδιο προϊόν.

Για την εξυπηρέτηση των πελατών 2 χρησιμοποιείται η πολιτική *πλήρους αποδοχής* (CB, Complete Backordering). Σύμφωνα με την πολιτική αυτή, όλες οι παραγγελίες προϊόντων τύπου 2 γίνονται δεκτές από το σύστημα και δεν χρησιμοποιείται κάποιο κατώφλι σε καμία περίπτωση. Η πολιτική αυτή παρόλο ότι συμβάλει στην αύξηση κερδοφορίας των συστημάτων παραγωγής, όταν η ζήτηση προσεγγίζει ή ξεπερνάει την δυναμικότητά τους υπάρχει περίπτωση να καταστεί ζημιολόγος για το σύστημα παραγωγής λόγω της αύξησης χωρίς όριο του πλήθους των ανικανοποίητων παραγγελιών.

Όσον αφορά τις αφίξεις πελατών τώρα, οι αφίξεις παραγγελιών πελατών της κατηγορίας τύπου 1 και της κατηγορίας τύπου 2 είναι τυχαίες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμούς  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα. Οι χρόνοι παραγωγής των προϊόντων τύπου 1 και τύπου 2 αντίστοιχα από τις μηχανές του συστήματος παραγωγής είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, εκθετικά κατανομημένες με ρυθμούς  $\mu_1$  και  $\mu_2$  αντίστοιχα.

## 2.2. Περιγραφή του χώρου καταστάσεων του συστήματος

Καθώς στο σύστημα που εξετάζουμε οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι εκθετικά κατανομημένοι το σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου με καταστάσεις που περιγράφονται από τους αριθμούς των παραγγελιών που εκκρεμούν και των αποθεμάτων προϊόντων στο σύστημα. Συγκεκριμένα, η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από ένα ζεύγος μεταβλητών  $(X, Y)$  όπου η πρώτη εκφράζει το ύψος του αποθέματος της αποθήκης προϊόντων τύπου 1, και άρα ισχύει  $S_1 \geq X \geq 0$ , ενώ η δεύτερη εκφράζει το απόθεμα ή τις εκκρεμείς παραγγελίες προϊόντων τύπου 2. Για  $Y=0$  η αποθήκη προϊόντων 2 είναι γεμάτη (δηλαδή έχουμε απόθεμα  $S_2$ ), για  $Y=1$  η αποθήκη είναι σχεδόν γεμάτη, ..., για  $Y = S_2$  η αποθήκη είναι άδεια, για  $Y = S_2 + 1$  η αποθήκη είναι άδεια και υπάρχει μία εκκρεμής παραγγελία (για προϊόν τύπου 2) και εν γένει για  $Y > S_2$  έχουμε  $Y - S_2$  εκκρεμείς παραγγελίες και καθόλου απόθεμα προϊόντων τύπου 2.



Σχήμα 2: Χώρος καταστάσεων του συστήματος

Στο Σχήμα 2 έχουμε την μορφή του χώρου καταστάσεων, όπου:

$X$  : απόθεμα της αποθήκης προϊόντος τύπου 1 με  $S_1$  το μέγιστο απόθεμα

$r$  : κατώφλι αποδοχής παραγγελιών προϊόντων τύπου 1 στην μεταβλητή  $X$ , όπου για  $X > r$  δεχόμαστε την παραγγελία διαφορετικά την απορρίπτουμε

$Y$  : εδώ ο ρόλος της μεταβλητής  $Y$  είναι πολύπλευρος. Για  $Y=0$  η αποθήκη προϊόντων τύπου 2 είναι γεμάτη και έχουμε απόθεμα για  $0 \leq Y < S_2$ . Μόλις το  $Y$  γίνει μεγαλύτερο ή ίσο του  $S_2$  σημαίνει ότι έχουμε εκκρεμείς παραγγελίες οι οποίες συσσωρεύονται μέχρι να ικανοποιηθούν. Οπότε το απόθεμα προϊόντων τύπου 2 είναι ίσο με  $\max(0, S_2 - Y)$  και το έλλειμα είναι ίσο με  $\max(0, Y - S_2)$ .

### 2.3.Εξισώσεις Charman-Kolmogorov του συστήματος

Οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης του συστήματος ικανοποιούν τις εξισώσεις Charman-Kolmogorov

$P(k)x(\text{ρυθμός μετάβασης από την κατάσταση } k) = \sum_{\text{όλες οι καταστάσεις } i, i \neq k} P(i)x(\text{ρυθμός μετάβασης από } i \text{ σε } k)$  ,  $i \neq k$

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι εξισώσεις Charman-Kolmogorov του συστήματος που εξετάζουμε για όλες τις πιθανές καταστάσεις:

$$P(0,0) (\mu_1 + \lambda_2) = P(1,1)\mu_2, \quad (1)$$

$$P(X,0) (\mu_1 + \lambda_2) = P(X-1,0)\mu_1 + P(X+1,1)\mu_2, \quad 0 < X < r \quad (2)$$

$$P(r,0) (\mu_1 + \lambda_2) = P(r-1,0)\mu_1 + P(r+1,1)\mu_2 + P(r+1,0)\lambda_1, \quad (3)$$

$$P(X,0) (\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2) = P(X-1,0)\mu_1 + P(X+1,1)\mu_2 + P(X+1,0)\lambda_1, \quad r < X < S_1 \quad (4)$$

$$P(S_1,0) (\lambda_1 + \lambda_2) = P(S_1-1,0)\mu_1, \quad (5)$$

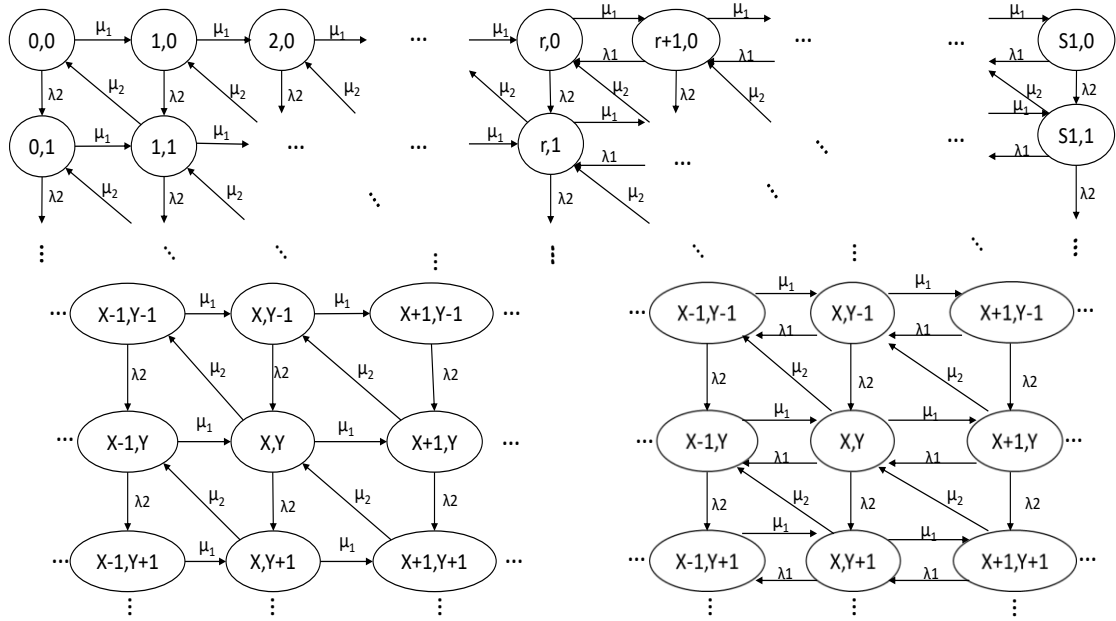
$$P(0,Y) (\mu_1 + \lambda_2) = P(0,Y-1)\lambda_2 + P(1,Y+1)\mu_2, \quad (6)$$

$$P(X,Y) (\mu_1 + \mu_2 + \lambda_2) = P(X-1,Y)\mu_1 + P(X,Y-1)\lambda_2 + P(X+1,Y+1)\mu_2, \quad 0 < X < r \quad (7)$$

$$P(r,Y) (\mu_1 + \mu_2 + \lambda_2) = P(r-1,Y)\mu_1 + P(r,Y-1)\lambda_2 + P(r+1,Y+1)\mu_2 + P(r+1,Y)\lambda_1, \quad (8)$$

$$P(X,Y) (\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1 + \lambda_2) = P(X-1,Y)\mu_1 + P(X,Y-1)\lambda_2 + P(X+1,Y+1)\mu_2 + P(X+1,Y)\lambda_1, \quad r < X < S_1 \quad (9)$$

$$P(S_1,Y) (\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_2) = P(S_1,Y-1)\lambda_2 + P(S_1-1,Y)\mu_1, \quad (10)$$



Σχήμα 3: Διάγραμμα μεταβάσεων της αλυσίδας Markov του συστήματος.

## 2.4. Περιγραφή των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του συστήματος

### 2.4.1. Περιγραφή της γεωμετρικής μεθόδου πινάκων

Για την επίλυση του συστήματος χρειάζεται να υπολογιστούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης μέσω των εξισώσεων Charman-Kolmogorov. Για να επιτευχθεί αυτό θα χρησιμοποιηθεί η γεωμετρική μέθοδος πινάκων (*matrix geometric method*). Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε κυρίως από τον Neuts και τους μαθητές του όπως προαναφέραμε [16] και μελετήθηκε ιδιαίτερα από τους Latouche and Ramaswami [24] και άλλους. Παρακάτω θα πραγματοποιηθεί μια συνοπτική παρουσίαση της μεθόδου αυτής. Η μέθοδος χρησιμοποιείται για την ανάλυση συστημάτων γεννήσεως-θανάτου, αλυσίδων Markov συνεχούς χρόνου των οποίων οι πίνακες των ρυθμών μετάβασης είναι σε μια επαναλαμβανόμενη μορφή μπλοκ. Για το σύστημα υπό εξέταση δημιουργούνται τα διανύσματα γραμμή  $\Pi_Y$  που περιέχουν τις πιθανότητες καταστάσεων  $P(X, Y)$ , όπου  $P(X, Y)$  οι πιθανότητες καταστάσεων του συστήματος που αναλύσαμε πριν, και η μορφή των διανυσμάτων αυτών είναι η εξής:

$$\Pi_Y = [P(0, Y) \dots P(X, Y) \dots P(r, Y) \dots P(S_1, Y)] \quad (11)$$

Δηλαδή το διάνυσμα  $\Pi_Y$  περιέχει τις πιθανότητες όλων των καταστάσεων για τις οποίες η τιμή της δεύτερης μεταβλητής  $Y$  είναι ίση με  $Y$ .

Οι εξισώσεις Charman – Kolmogorov (1) έως (10) τώρα σε συνδυασμό με τα διανύσματα  $\Pi_Y$  που προαναφέρθηκαν πλέον γράφονται στην εξής μορφή:

$$\Pi_0 B_{00} + \Pi_1 A_2 = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$\Pi_{Y-1} A_0 + \Pi_Y A_1 + \Pi_{Y+1} A_2 = \mathbf{0}, \quad (13)$$

Η μέθοδος μας τώρα απαιτεί πίνακα μετάβασης  $Q$  μπλοκ τριδιαγώνιας μορφής όπου δεδομένων όλων των πιθανοτήτων  $\Pi_Y$  του συστήματος θεωρείται ότι ισχύει η σχέση  $\Pi Q = \mathbf{0}$ , όπου  $\Pi = [\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots]$  και ο πίνακας  $Q$  έχει την εξής μορφή :

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & A_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ A_2 & A_1 & A_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & A_1 & \ddots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & A_2 & \ddots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθούμε στους πίνακες  $B_{00}, A_0, A_1, A_2$  οι οποίοι είναι όλοι διάστασης  $(S_1+1) \times (S_1+1)$  και περιέχουν τους ρυθμούς μετάβασης από και προς τις καταστάσεις που αντιστοιχούν στις μεταβλητές  $X, Y$ . Για τους πίνακες  $A_0, A_1, A_2$  και  $B_{00}$  θεωρείται ότι οι πίνακες  $A_0, A_2$  είναι μη αρνητικοί και οι πίνακες  $A_1$  και  $B_{00}$  έχουν μη αρνητικά μη-διαγώνια στοιχεία και αυστηρώς αρνητικά διαγώνια στοιχεία.

Ο πίνακας  $B_{00}$  χρησιμοποιείται στις τιμές της μεταβλητής  $Y=0$  (δηλαδή όταν είναι γεμάτη η αποθήκη 2) πολλαπλασιάζει το διάνυσμα  $\Pi_0$  και περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης από την κατάσταση  $\Pi_0$  στην κατάσταση  $\Pi_1$ .

$$B_{00} = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \lambda_2 & \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 - \lambda_2 & \mu_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -\mu_1 - \lambda_2 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_1 & -\mu_1 - \lambda & \mu_1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & -\mu_1 - \lambda & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & -\lambda_1 - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $A_0$  χρησιμοποιείται σε όλες τις τιμές της μεταβλητής  $Y>0$ , πολλαπλασιάζει το διάνυσμα  $\Pi_{Y-1}$  και περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης από τις καταστάσεις  $\Pi_{Y-1}$  στις καταστάσεις  $\Pi_Y$ .

$$A_0 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $A_2$  χρησιμοποιείται σε όλες τις τιμές της μεταβλητής  $Y$ , πολλαπλασιάζει το διάνυσμα  $\Pi_{Y+1}$  και περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης από τις καταστάσεις  $\Pi_{Y+1}$  στις καταστάσεις  $\Pi_Y$ .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $A_1$  χρησιμοποιείται για τις καταστάσεις  $Y > 0$  (δηλαδή η αποθήκη προϊόντων τύπου 2 δεν έχει μέγιστο απόθεμα οπότε παράγει) πολλαπλασιάζει το διάνυσμα  $\Pi_Y$  και περιέχει όλους τους ρυθμούς μετάβασης από τις καταστάσεις του διανύσματος.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \lambda_2 & \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \lambda_2 & \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -\mu - \lambda_2 & \mu_1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \lambda_1 & -\mu - \lambda & \mu_1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_1 & -\mu - \lambda & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_1 & -\mu_2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Όπου  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  και  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ .

Για να απλοποιηθούν οι σχέσεις (12) και (13) προκειμένου να υπολογιστούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης, δεδομένου ότι η διαδικασία Markov είναι ευσταθής (σχετικά με την ευστάθεια του συστήματος θα αναφερθούμε παρακάτω) σύμφωνα με τον Neuts [16] ισχύει η σχέση  $\Pi_Y = \Pi_1 R^{Y-1}$  για όλες τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης, όπου  $R$  ο πίνακας μετάβασης του Neuts [28], ο οποίος είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση της τετραγωνικής εξίσωσης

$$A_0 + R A_1 + R^2 A_2 = \mathbf{0} \quad (14).$$

Παίρνοντας τις εξισώσεις (12) και (13) για  $Y=1$ , και αντικαθιστώντας το  $\Pi_2$  με την σχέση  $\Pi_2 = \Pi_1 R$  έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\Pi_0 B_{00} + \Pi_1 A_2 = \mathbf{0},$$

$$\Pi_0 A_0 + \Pi_1 A_1 + \Pi_1 R A_2 = \mathbf{0},$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε ότι αρκεί να υπολογιστεί το  $\Pi_1$  για να βρεθούν και οι υπόλοιπες πιθανότητες, πράγμα που καθίσταται δύσκολο καθώς δεν γνωρίζουμε το  $\Pi_0$ . Καθώς θέλουμε να απλοποιηθεί η διαδικασία υπολογισμού των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης θα επικαλεστούμε τους Latouche και Ramaswami [24],[25] και την μελέτη πάνω σε τέτοια προβλήματα καθώς έχουν αποδείξει ότι για προβλήματα συνεχούς χρόνου με αυτή τη δομή η σχέση  $\Pi_Y = \Pi_1 R^{Y-1}$  γράφεται ως εξής:



$$\Pi_Y = \Pi_0 R^Y, \text{ για } Y \geq 0 \quad (15)$$

Αυτό διευκολύνει εξαιρετικά την διαδικασία υπολογισμού όλων των πιθανοτήτων του συστήματος.

Συνεχίζοντας για να χρησιμοποιήσουμε την γεωμετρική μέθοδο πινάκων ορίζουμε τους πίνακες  $G$  και  $U$  ίδιας διάστασης με τον πίνακα  $R$  έτσι ώστε να ισχύουν οι εξής σχέσεις και για τους τρεις πίνακες:

$$U = A_1 + A_0 G, \quad (16)$$

$$G = (-U)^{-1} A_2, \quad (17)$$

$$R = A_0 (-U)^{-1}, \quad (18)$$

Επιπλέον, ο πίνακας  $R$  ικανοποιεί την εξίσωση (14) όπως προαναφέραμε και ο  $G$  την παρακάτω εξίσωση

$$A_2 + A_1 G + A_0 G^2 = \mathbf{0} \quad (19)$$

Μέχρι τώρα έχει γίνει σαφές ότι για να βρεθούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης αρκεί να βρεθεί ο πίνακας  $R$  και η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης  $\Pi_0$ . Για αυτόν τον λόγο χρησιμοποιούνται οι σχέσεις (12) και (13) σε συνδυασμό με την (15) και την εξίσωση κανονικοποίησης και έχουμε

$$\Pi_0 (B_{00} + R A_2) = \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i \mathbf{1} = 1, \quad (21)$$

Όπου  $\mathbf{1}$  είναι το διάνυσμα-στήλη όπου όλα τα στοιχεία του είναι 1,  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης ίδιας με τον πίνακα  $R$  και  $\mathbf{0}$  το μηδενικό διάνυσμα. Για περαιτέρω διευκόλυνση για τον υπολογισμό του  $\Pi_0$  στην εξίσωση κανονικοποίησης (21) αντικαθιστούμε το  $\Pi_i$  με την σχέση (15) και το σύστημα εξισώσεων παίρνει τώρα την μορφή:

$$\Pi_0 (B_{00} + R A_2) = \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$\Pi_0 (I - R)^{-1} \mathbf{1} = 1, \quad (21)$$

Για την λύση των σχέσεων αντικαθιστούμε την τελευταία γραμμή της σχέσης (20) με την εξίσωση (21) και αυτό βοηθά στην άμεση επίλυσή του καθώς το διάνυσμα  $\Pi_0$  που επαληθεύει τις εξισώσεις είναι μοναδικό. Αφού υπολογιστεί το  $\Pi_0$  τα υπόλοιπα διανύσματα υπολογίζονται από την σχέση  $\Pi_Y = \Pi_0 R^Y, Y \geq 0$  που προαναφέραμε.

Πριν αναφερθήκαμε στην ευστάθεια της αλυσίδας Markov οπότε οφείλουμε να δώσουμε τον ορισμό της. Αν όλες οι καταστάσεις σε μια αλυσίδα Markov είναι ευσταθής, τότε η διαδικασία Markov είναι ευσταθής. Τώρα, μια κατάσταση  $Y$  σε μια αλυσίδα Markov είναι ευσταθής, αν είναι απεριοδική και θετικά επαναλαμβανόμενη (positive recurrent) Bellet [29], [30].

Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε πάντα αν το σύστημα που εξετάζουμε είναι ευσταθές, για αυτό το σκοπό λοιπόν μόλις

υπολογιστούν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης εξετάζουμε αν ισχύει η συνθήκη ευστάθειας  $\Pi A_0 \mathbf{1} < \Pi A_2 \mathbf{1}$ , όπου  $\Pi = [\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots]$  και  $\mathbf{1}$  είναι το διάνυσμα στήλη που προαναφέραμε. Ο όρος  $\Pi A_0 \mathbf{1}$  είναι ο ρυθμός μετάβασης από το επίπεδο  $Y$  στο επίπεδο  $Y+1$ , και ο όρος  $\Pi A_2 \mathbf{1}$  είναι ο ρυθμός μετάβασης από το επίπεδο  $Y+1$  στο επίπεδο  $Y$ . Προφανώς το σύστημα είναι ευσταθές αν η μετάβαση προς τα αριστερά είναι μεγαλύτερη από την μετάβαση προς τα δεξιά. Η συγκεκριμένη συνθήκη ευστάθειας είναι γνωστή ως συνθήκη του Neuts [16].

Αναλυτική και λεπτομερής παρουσίαση της μεθόδου τόσο για συνεχή όσο και για διακριτά προβλήματα γίνεται από τους Latouche and Ramaswami [24], [25], [26], [28] και (Neuts [16]).

## 2.4.2. Περιγραφή του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του πίνακα $G$

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι να υπολογίσουμε αρχικά τον πίνακα  $G$ , και μετά κατά συνέπεια τον πίνακα  $U$  ώστε να έχουμε τον πίνακα  $R$  που είναι αυτός που μας ενδιαφέρει. Για τον υπολογισμό των πινάκων αυτών χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος λογαριθμικής μείωσης (*logarithmic reduction algorithm*). Ο αλγόριθμος αυτός υπερτερεί σημαντικά ως προς τον ευρέως διαδεδομένο αλγόριθμο γραμμικής προόδου, καθώς συνηθίζεται να χρησιμοποιείται για την απλότητα και την αποτελεσματικότητά του, ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του πίνακα  $G$  καθώς και στην συμπεριφορά του για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων όπως θα δούμε παρακάτω. Όπως είπαμε ο αλγόριθμος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πίνακα  $G$  και στη συνέχεια από τις σχέσεις (15), (16) και (17) υπολογίζεται ο πίνακας  $R$ . (Σημαντική σημείωση ο αλγόριθμος εδώ είναι για προβλήματα συνεχούς χρόνου και με μικρή τροποποίηση στους πίνακες  $L$  και  $H$  εφαρμόζεται και σε διακριτά προβλήματα). Ξεκινάμε από την εξίσωση (19) την οποία μετασχηματίζουμε στην μορφή

$$G = L + HG^2, \quad (22)$$

όπου

$$L = (-A_1)^{-1} A_2, \quad (23)$$

$$\text{και } H = (-A_1)^{-1} A_0, \quad (24)$$

Ο πίνακας  $G$  δίνεται από τη σχέση:

$$G = \sum_{k \geq 0} \left( \prod_{0 \leq i \leq k-1} H^{(i)} \right) L^{(k)}, \quad (25)$$

όπου

$$H^{[0]} = (-A_1)^{-1} A_0, \quad (26)$$

$$L^{[0]} = (-A_1)^{-1} A_2, \quad (27)$$

$$H^{[k+1]} = (I - U^{[k]})^{-1} (H^{[k]})^2, \quad (28)$$

$$L^{[k+1]} = (I - U^{[k]})^{-1} (L^{[k]})^2, \quad (29)$$

$$\text{για } k \geq 0 \text{ με } U^{[k]} = H^{[k]} L^{[k]} + L^{[k]} H^{[k]}, \quad (30)$$

Παίρνοντας τις σχέσεις (25) - (30) και προσαρμόζοντάς τις κατάλληλα η δομή του αλγορίθμου είναι η εξής :

Εισαγωγή πινάκων  $A_1, A_2, A_0$

$$H := (-A_1)^{-1} A_0;$$

$$L := (-A_1)^{-1} A_2;$$

$$G := L;$$

$$T := H;$$

Επανάλαβε

$$U := HL + LH;$$

$$M := (H)^2;$$

$$H := (I-U)^{-1}M;$$

$$M := (L)^2;$$

$$L := (I-U)^{-1}M;$$

$$G := G + TL;$$

$$T := TH;$$

Μέχρι

$\min(\|H\|_\infty, \|L\|_\infty) \leq \varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  συνήθως ισούται με  $10^{-14}$  ή και μικρότερο.

Προτού προχωρήσουμε παρακάτω, οφείλουμε να ορίσουμε την νόρμα άπειρο. Για έναν οποιοδήποτε πίνακα  $A$  διάστασης  $n \times n$  με όλα του τα στοιχεία να ανήκουν στο  $\mathbf{R}$ , η νόρμα άπειρο ορίζεται ως το μέγιστο άθροισμα των απολύτων τιμών των γραμμών του πίνακα  $A$  και γράφεται  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$ .

Όπως προαναφέραμε, ο αλγόριθμος συμπεριφέρεται καλά ως προς τα αριθμητικά του αποτελέσματα και απέναντι σε άλλους αλγόριθμους και αυτό έχει αποδειχθεί από τους Latouche and Ramaswami [24] με συγκριτικά παραδείγματα καθώς επίσης έχει αποδειχθεί ότι οι πίνακες  $U^{[k]}$  τείνουν στο 0 όταν το  $k$  κινείται στο άπειρο, και συνεπώς δεν υπάρχει πρόβλημα υπολογισμού των (28) και (29) λόγω εύρεσης αντιστρόφου πίνακα. Ο αναγνώστης εάν επιθυμεί περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στον αλγόριθμο και στον υπολογισμό των πινάκων  $G, U, R$  μπορεί να απευθυνθεί στις εργασίες Latouche and Ramaswami [24], Neuts [16], Latouche and Ramaswami [26], Ye [27].

## 2.5. Συνάρτηση κέρδους

Κάθε πολιτική έχει ως μέτρο απόδοσης το κέρδος και το ίδιο ισχύει και σε αυτή την περίπτωση. Το μέσο κέρδος είναι το μέσον για την σύγκριση της πολιτικής του συστήματος με άλλες πολιτικές αλλά και με τον εαυτό της για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων και την βελτιστοποίηση του κέρδους με τον καλύτερο δυνατό συνδυασμό των τιμών των μεταβλητών ελέγχου. Στο συγκεκριμένο σύστημα παραγωγής το κέρδος προκύπτει από το κέρδος από την πώληση των προϊόντων τύπου 1 και τύπου 2, μείον το κόστος αποθήκευσης των προϊόντων στις αποθήκες, μείον το κόστος εκκρεμών παραγγελιών προϊόντων τύπου 2 και το κόστος απορριφθέντων παραγγελιών πελατών προϊόντων τύπου 1.

$$J = t_1 R_1 + t_2 \lambda_2 - h_1 I_1 - h_2 I_2 - b B_2 \quad (31)$$

όπου:

$t_i$ : το κέρδος από την πώληση μίας μονάδας προϊόντος τύπου  $i$  σε πελάτη κατηγορίας  $i$ , όπου  $i=1,2$ .

$\lambda_i$ : ρυθμοί αφίξεις πελατών προϊόντων τύπου  $i$ , όπου  $i=1,2$ .

$h_i$ : το μοναδιαίο κόστος αποθέματος προϊόντος τύπου  $i$ , όπου  $i=1,2$ .

$b$ : το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών προϊόντων πελατών τύπου 2.

$I_i$ : το μέσο απόθεμα αποθήκης προϊόντων τύπου  $i$ , όπου  $i=1,2$ .

$B_2$ : το μέσο πλήθος εκκρεμών παραγγελιών πελατών τύπου 2.

$R_1$ : οι πωλήσεις προϊόντων τύπου 1

Τα μεγέθη που προαναφέραμε εκφράζονται αναλυτικά ως εξής:

$$I_1 = \sum_{X=0}^{S_1} X \sum_{Y=0}^{\infty} P(X, Y) = \sum_{X=0}^{S_1} X \Pi_0 (I - R)^{-1}$$

$$I_2 = \sum_{Y=0}^{S_2} (S_2 - Y) \Pi_Y \mathbf{1} = \sum_{Y=0}^{S_2} (S_2 - Y) \sum_{X=0}^{S_1} P(X, Y)$$

$$B_2 = \sum_{Y=S_2}^{\infty} (Y - S_2) \Pi_Y \mathbf{1} = \sum_{Y=S_2}^{\infty} (Y - S_2) \sum_{X=0}^{S_1} P(X, Y)$$

$R_1 = \lambda_1 (1 - P_{\text{ΑΠΙ}})$ , όπου  $P_{\text{ΑΠΙ}}$  είναι η πιθανότητα απόρριψης πελατών τύπου 1

$$P_{\text{ΑΠΙ}} = P(X \leq r) = [1 - P(X > r)] = [1 - \sum_{X=r+1}^{S_1} \sum_{Y=S_2}^{\infty} P(X, Y)]$$

## 2.6.Βελτιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους

Όπως είδαμε και παραπάνω, το αναμενόμενο κέρδος του συστήματος είναι συνάρτηση των τιμών των μεταβλητών ελέγχου, δηλαδή των κατωφλίων βασικών αποθεμάτων των αποθηκών 1 και 2 ( $S_1, S_2$ ) και του κατωφλίου απόδοσης προτεραιότητας  $r$  των πελατών προϊόντων τύπου 1. Όπως έχει προαναφερθεί ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι η εκτίμηση των τιμών αυτών για την μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους του συστήματος.

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση κέρδους  $J(S_1, S_2, r)$  η οποία είναι τριών διαστάσεων και για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί ένας αλγόριθμος εξαντλητικής αναζήτησης. Η εξαντλητική αναζήτηση είναι μια απλή τεχνική, καθώς απλά υπολογίζεται το κέρδος του συστήματος από ένα τρισδιάστατο πλέγμα τιμών μέσα σε προκαθορισμένα όρια τιμών που δίνονται στο σύστημα. Η ευελιξία της μεθόδου αυτής είναι ότι είναι ιδιαίτερα απλή και δεν είναι δύσκολος ο σχεδιασμός ενός τέτοιου αλγορίθμου για σχεδόν οποιοδήποτε πρόβλημα που είναι υπολογιστικά δύσκολο. Οφείλουμε όμως να αναφέρουμε ότι ένα σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι ενώ μπορεί να έχουμε βρει την καλύτερη δυνατή λύση, ο αλγόριθμος να συνεχίζει να πραγματοποιεί αναζήτηση και στα επόμενα σετ τιμών έως ότου εξεταστούν όλοι οι πιθανοί δυνατοί συνδυασμοί τιμών. Όσον αφορά στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία τώρα, ορίζουμε ανώτατες τιμές στα  $S_1$  και  $S_2$  και για το  $r$  ανώτατη τιμή είναι η ανώτατη τιμή του  $S_1-1$  όπως έχει οριστεί εξαρχής το σύστημα. Γίνονται οι υπολογισμοί για όλα τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών και στη συνέχεια παίρνουμε την αυστηρώς μεγαλύτερη τιμή από όλες αυτές.

Παρακάτω παρουσιάζεται η δομή του αλγορίθμου εξαντλητικής αναζήτησης που χρησιμοποιήσαμε.

*Αλγόριθμος εξαντλητικής αναζήτησης*

Βήμα 1. Όρισε ανώτατες τιμές για τα  $S_1, S_2$  και  $r$ .

Βήμα 2. Αρχικά υπολόγισε το κέρδος για τιμές  $S_1, S_2$  και  $r$  (2,1,1); Στη συνέχεια υπολόγισε κέρδος για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των  $S_1, S_2$  και  $r$ ; Κάθε συνδυασμός τιμών και κέρδους αποθηκεύεται σε πίνακα  $K$ .

Βήμα 3. Από τον πίνακα  $K$  στην στήλη με τα κέρδη αναζήτησε το μεγαλύτερο κέρδος από όλα τα υπόλοιπα.

Βήμα 4. Τύπωσε τον συνδυασμό  $S_1, S_2, r$  που δίνει το μεγαλύτερο κέρδος.

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, χρησιμοποιώντας τον συγκεκριμένο αλγόριθμο και για υψηλές τιμές στα  $S_1$  και  $S_2$  απαιτούνται πολλές πράξεις λόγω των συνδυασμών που προκύπτουν.

### 3.Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήθηκε αριθμητικά η συμπεριφορά της συνάρτησης κέρδους της προτεινόμενης πολιτικής. Ακόμη πραγματοποιήθηκε συγκριτική μελέτη της προτεινόμενης πολιτικής με άλλες πολιτικές. Για να επιτευχθεί αυτό αλλά και για τον πρακτικό υπολογισμό του αναμενόμενου κέρδους αναπτύχθηκε κώδικας υπολογισμού σε περιβάλλον Matlab. Πιο αναλυτικά, εξετάζεται η συμπεριφορά της συνάρτησης του αναμενόμενου κέρδους ως προς τις παραμέτρους ελέγχου και πιο συγκεκριμένα αν είναι κοίλη συνάρτηση ή παρουσιάζει κάποια μορφή κυρτότητας. Αυτό γίνεται γιατί αν αποδειχθεί κυρτότητα μας εξασφαλίζει ότι ένα τοπικό βέλτιστο είναι και ολικό βέλτιστο καθώς όπως προαναφέραμε χρησιμοποιείται αλγόριθμος εξαντλητικής αναζήτησης οπότε μια ιδιότητα όπως αυτή θα μας διευκόλυνε σημαντικά. Επίσης γίνονται συγκρίσεις και υπολογισμοί όχι μόνο ως προς τα  $S_1$ ,  $S_2$  και  $r$ , αλλά και για άλλες παραμέτρους που επηρεάζουν το αναμενόμενο κέρδος όπως είναι τα  $h_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $t_i$  και  $b$ . Ο χρήστης μπορεί να πειραματιστεί και να δώσει δικές του τιμές στα κατώφλια ελέγχου του συστήματος αλλά και στους ρυθμούς άφιξης παραγγελιών και παραγωγής καθώς και στους συντελεστές μοναδιαίου κόστους. Όλα τα αρχεία του κώδικα παρουσιάζονται αναλυτικά στο παράρτημα στο τέλος της διπλωματικής εργασίας.

#### 3.1.Μελέτη της συμπεριφοράς της συνάρτησης κέρδους ως προς τις μεταβλητές ελέγχου

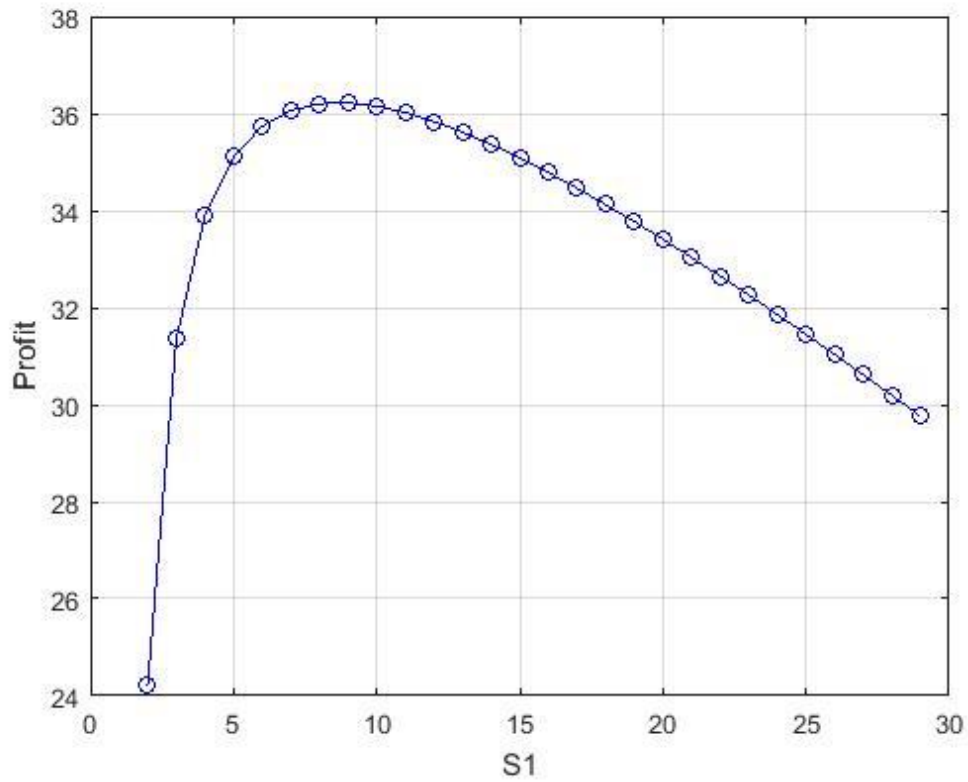
Σε αυτό το στάδιο μελετάται η επίδραση που έχει στην συνάρτηση κόστους η μεταβολή ενός εκ των τριών κατωφλίων ελέγχου, κρατώντας τα άλλα δύο σταθερά. Για να πραγματοποιηθεί αυτή η διερεύνηση οι τιμές των δύο κατωφλίων ορίζονται εξ αρχής και η τιμή του κατωφλίου που μεταβάλλεται παίρνει τιμές από ένα προκαθορισμένο εύρος τιμών.

Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση όπου μεταβάλλεται το απόθεμα  $S_1$  και τα άλλα δύο κατώφλια ελέγχου μένουν σταθερά. Όσον αφορά τις άλλες δύο μεταβλητές ελέγχου, για το  $S_2$  θα δώσουμε την τιμή 2 και στο  $r$  τις τιμές 1 και 2. Οι τιμές των παραμέτρων κατά την διεξαγωγή των αριθμητικών πειραμάτων είναι οι εξής:  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=4$ ,  $\mu_1=6$ ,  $\mu_2=7$ ,  $h_1=1$ ,  $h_2=2$ ,  $b=4$ ,  $t_1=5$ ,  $t_2=10$ . Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται οι τιμές της συνάρτησης κέρδους για τις διάφορες τιμές του  $S_1$  και για  $r=1$  και  $r=2$  αντίστοιχα.

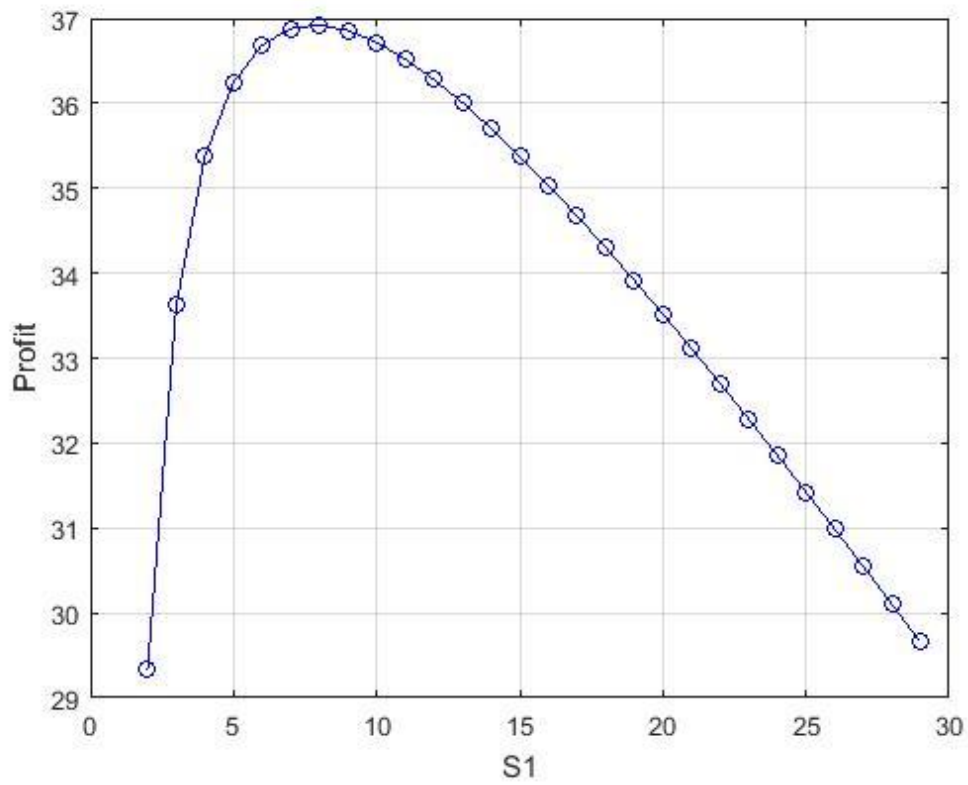
Πίνακας 1: Αναμενόμενο κέρδος ως προς το κατώφλι αποθέματος  $S_1$ 

$S_1$	$r$	$J$	$S_1$	$r$	$J$
2	1	-57.7541	2	2	33.94087
3	1	24.22464	3	2	29.33833
4	1	31.35714	4	2	33.61994
5	1	33.89886	5	2	35.37716
6	1	35.10751	6	2	36.24656
7	1	35.7383	7	2	36.68642
8	1	36.06233	8	2	36.8815
9	1	36.20143	9	2	36.9219
10	1	36.2186	10	2	36.8572
11	1	36.14981	11	2	36.71712
12	1	36.01725	12	2	36.52068
13	1	35.83546	13	2	36.28072
14	1	35.61449	14	2	36.0063
15	1	35.3616	15	2	35.70401
16	1	35.08222	16	2	35.37882
17	1	34.78052	17	2	35.03453
18	1	34.45981	18	2	34.67413
19	1	34.12272	19	2	34.30003
20	1	33.77143	20	2	33.91414
21	1	33.40773	21	2	33.51806
22	1	33.03311	22	2	33.11309
23	1	32.64884	23	2	32.70032
24	1	32.25599	24	2	32.28068
25	1	31.85547	25	2	31.85494
26	1	31.4481	26	2	31.42378
27	1	31.03454	27	2	30.98777
28	1	30.6154	28	2	30.54741
29	1	30.19121	29	2	30.10311
30	1	29.76241	30	2	29.65527

Από τις παραπάνω τιμές μπορούμε να πάρουμε τις γραφικές παραστάσεις που βλέπουμε στο γράφημα 1 και γράφημα 2. Παρατηρώντας και τις δύο γραφικές παραστάσεις έχουμε ότι η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη. Στην πρώτη περίπτωση για  $r=1$  το  $S_1$  είναι 10 με κέρδος 36.2186 ενώ για  $r=2$  το  $S_1$  είναι 9 με κέρδος 36.9219. Αυτό μας προϋδεάζει και για την καλύτερη τιμή του  $r$ , καθώς για τιμή 2 έχουμε καλύτερο αποτέλεσμα στην συνάρτηση κέρδους.



Γράφημα 1: : Κέρδος συστήματος ως προς το μέγιστο απόθεμα αποθήκης 1, για  $r=1$  και  $S_2=2$ .





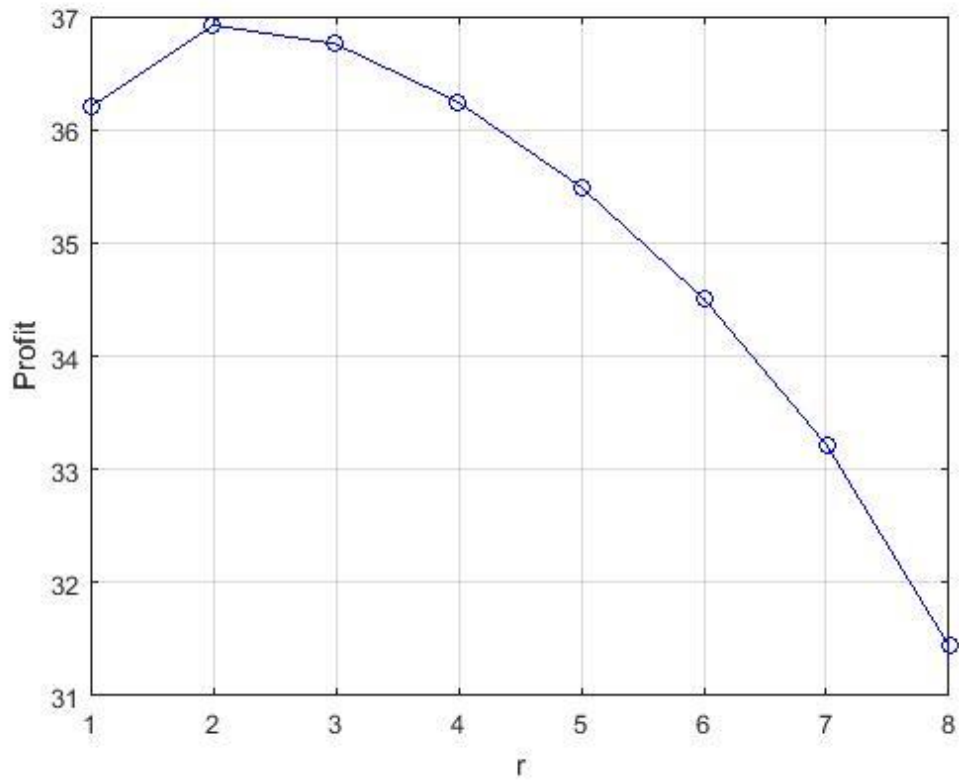
Γράφημα 2: Κέρδος συστήματος ως προς το μέγιστο απόθεμα αποθήκης 1 για  $r=2$  και  $S_2=2$ .

Στη συνέχεια θα εξεταστεί η μεταβολή του κατωφλίου απόδοσης προτεραιότητας  $r$  κρατώντας τα άλλα δύο κατώφλια σταθερά. Για αυτό το παράδειγμα οι τιμές του συστήματος είναι οι εξής :  $\lambda_1=2, \lambda_2=4, \mu_1=6, \mu_2=7, h_1=1, h_2=2, b=4, t_1=5, t_2=10$ . Για τα κατώφλια ελέγχου στο  $S_1$  θα δώσουμε την τιμή 9 και 10 και στο  $S_2$  την τιμή 2. Οι τιμές που παίρνει η συνάρτηση κέρδους παρουσιάζονται στον πίνακα 2.

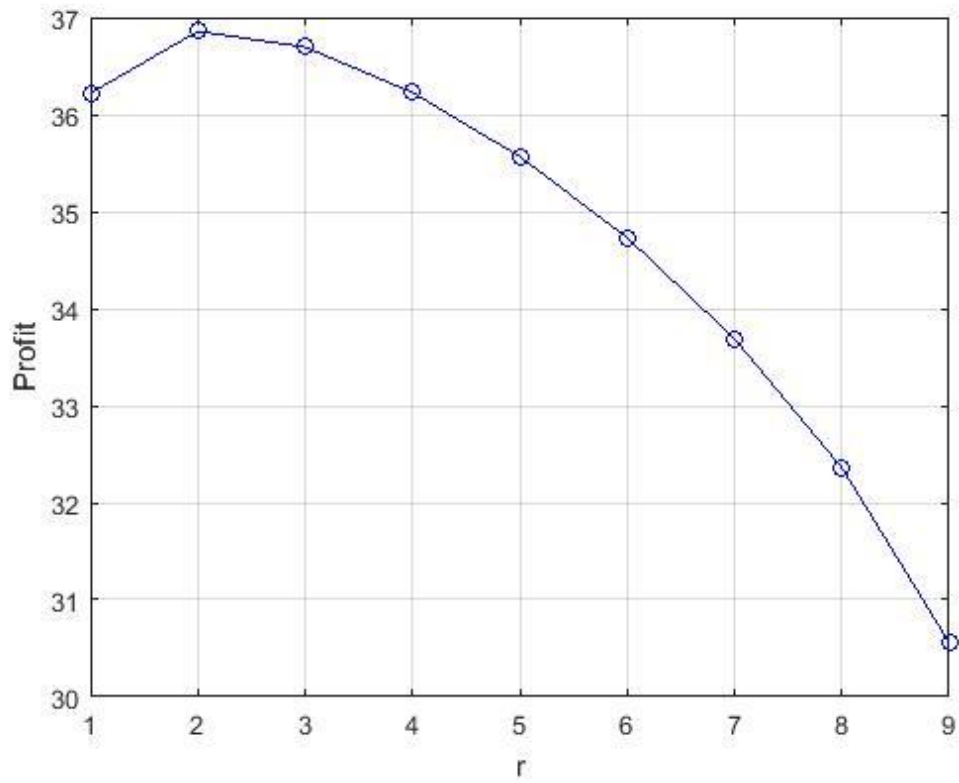
Πίνακας 2: Κέρδος συστήματος ως προς το  $S_1$ .

<b>S1</b>	<b>r</b>	<b>J</b>	<b>S1</b>	<b>r</b>	<b>J</b>
9	1	36.20143	10	1	36.2186
9	2	36.9219	10	2	36.8572
9	3	36.75621	10	3	36.69395
9	4	36.24218	10	4	36.22624
9	5	35.49255	10	5	35.56609
9	6	34.50769	10	6	34.73098
9	7	33.21635	10	7	33.69099
9	8	31.43858	10	8	32.36272
			10	9	30.56068

Οι γραφικές παραστάσεις από τις τιμές αυτές παρουσιάζονται στα γραφήματα 3 και 4. Και εδώ η συνάρτηση κέρδους φαίνεται ότι είναι κοίλη ως προς την μεταβλητή ελέγχου  $r$  και έρχεται σε συμφωνία με τα προηγούμενα αποτελέσματα ότι δηλαδή έχουμε τοπικό βέλτιστο το οποίο παρουσιάζεται για  $S_1=9, S_2=2$  και  $r=2$  και είναι 36.9219. Επίσης, ένα άλλο πολύ σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι όσο αυξάνεται το  $r$  μειώνεται το κέρδος του συστήματος και κατά συνέπεια για να υπάρχει υψηλό κέρδος πρέπει το κατώφλι προτεραιότητας πελατών προϊόντων τύπου 1 να παραμένει σε χαμηλές τιμές για μεγιστοποίηση του κέρδους.



Γράφημα 3: Κέρδος συστήματος ως προς το κατώφλι απόδοσης προτεραιότητας πελατών προϊόντων τύπου 1,  $S_1=9$ ,  $S_2=2$ .



Γράφημα 4: Κέρδος συστήματος ως προς το κατώφλι απόδοσης προτεραιότητας πελατών προϊόντων τύπου 1, για  $S_1=10$  και  $S_2=2$ .

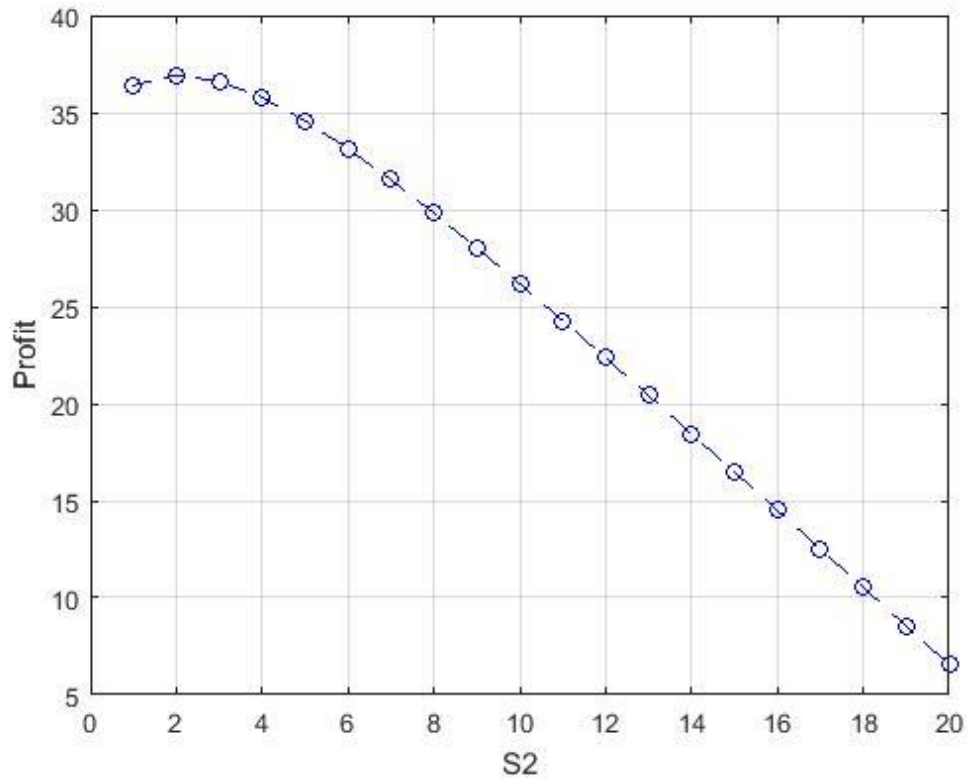
Έπειτα εξετάζεται η μεταβολή του τελευταίου κατωφλίου ελέγχου, του  $S_2$ , δηλαδή του ύψους του αποθέματος της αποθήκης προϊόντων τύπου 2, κρατώντας όπως και πριν τα υπόλοιπα κατώφλια ελέγχου σταθερά. Οι τιμές των παραμέτρων του συστήματος είναι οι εξής :  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=4$ ,  $\mu_1=6$ ,  $\mu_2=7$ ,  $h_1=1$ ,  $h_2=2$ ,  $b=4$ ,  $t_1=5$ ,  $t_2=10$  και τα κατώφλια ελέγχου  $S_1=9$  και  $r=2$ . Οι τιμές της συνάρτησης κέρδους για τις διάφορες τιμές του  $S_2$  παρουσιάζονται στον πίνακα 3.

Πίνακας 3: Κέρδος συστήματος συναρτήσει του μεγίστου αποθέματος της αποθήκης 2.

$S_2$	$J$
1	36.40433
2	36.9219
3	36.6112
4	35.76617
5	34.56797
6	33.13142
7	31.53114
8	29.81678
9	28.02203
10	26.17013
11	24.27731
12	22.35507
13	20.41157
14	18.45267
15	16.48261
16	14.50442
17	12.52032
18	10.53192
19	8.540383
20	6.546556

Η γραφική παράσταση που προκύπτει από τις τιμές αυτές φαίνεται στο γράφημα 5. Εδώ από αυτά τα αποτελέσματα έχουμε ότι ως προς αυτήν την μεταβλητή ελέγχου σε αντίθεση με τις άλλες η συνάρτηση κέρδους μπορεί να μην είναι κοίλη καθώς δεν είναι ξεκάθαρη η κυρτότητά της αλλά η συνάρτηση σίγουρα είναι μονοκόρυφη και η μέγιστη τιμή της παρουσιάζεται για  $S_2=2$  με κέρδος 36.9219 όπως και στα προηγούμενα. Πάλι όπως και στο κατώφλι απόδοσης προτεραιότητας πελατών προϊόντων τύπου 1, η συνάρτηση κέρδους μετά την τιμή 2 έχει φθίνουσα πορεία, πράγμα που συνεπάγεται

ότι η αύξηση του αποθέματος της αποθήκης προϊόντων τύπου 2 οδηγεί στην μείωση του κέρδους του συστήματος οπότε και αυτό πρέπει να παραμείνει σε χαμηλές τιμές.



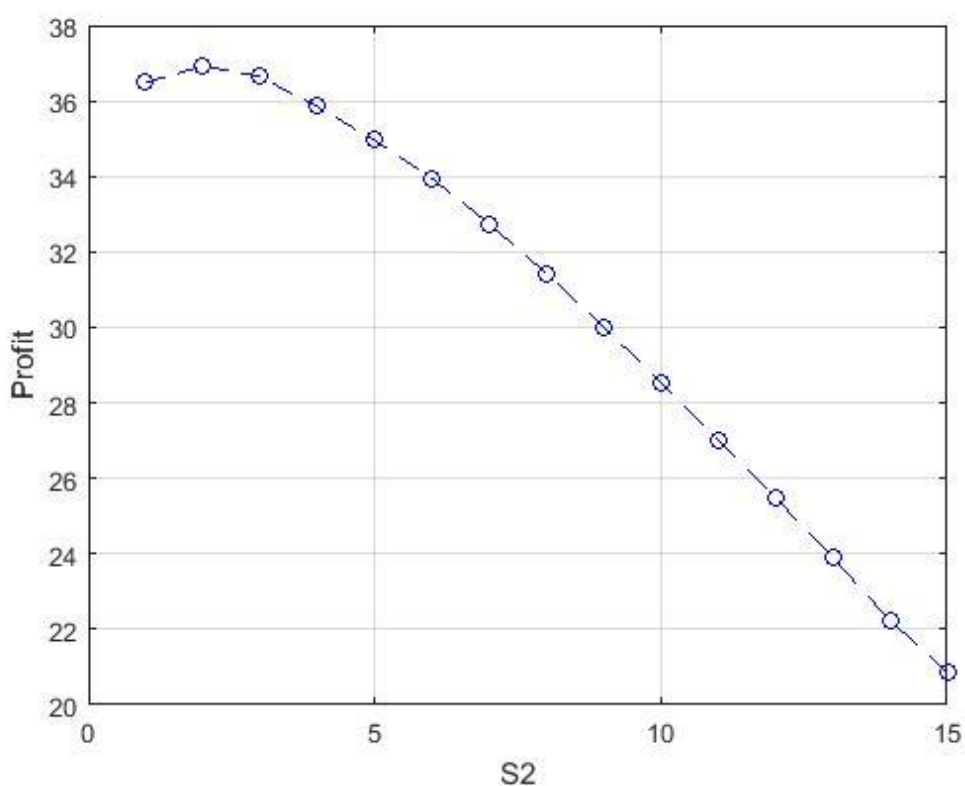
Γράφημα 5: Κέρδος συστήματος ως προς το μέγιστο απόθεμα αποθήκης 2 με  $S_1=9$  και  $r=2$ .

Για να μελετηθεί περαιτέρω η συνάρτηση κέρδους και για να έχουμε καλύτερη εικόνα για την κυρτότητα και τις βέλτιστες τιμές, παίρνουμε ένα διάστημα τιμών για το  $S_2$ , και για κάθε τιμή του  $S_2$  βρίσκουμε τις βέλτιστες τιμές των  $S_1$  και  $r$ . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα σε γραφική παράσταση.

Πίνακας 4: Αναμενόμενο κέρδος συναρτήσει του μέγιστου αποθέματος προϊόντων τύπου 2  $S_2$  ( Βέλτιστες τιμές των  $S_1$  και  $r$  για κάθε τιμή του  $S_2$ ).

$S_2$	$S_1$	$r$	$J$
1	9	3	36.4924
2	9	2	36.9219
3	8	2	36.6359
4	8	2	35.8503
5	7	1	34.9564
6	7	1	33.9454

7	6	1	32.7466
8	6	1	31.4273
9	5	1	30.0125
10	5	1	28.5372
11	4	1	26.9946
12	4	1	25.49
13	4	1	23.8968
14	3	1	22.2429
15	3	1	20.8702



Γράφημα 6: Κέρδος συστήματος ως προς το μέγιστο απόθεμα αποθήκης 2 (με βέλτιστες τιμές των  $S_1$  και  $r$  για κάθε  $S_2$ ).

Αρχικά πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι διατηρείται η κυρτότητα που είδαμε στα προηγούμενα γραφήματα αλλά σίγουρα το κέρδος φθίνει σταδιακά όσο αυξάνεται το  $S_2$ . Από τα παραπάνω αποτελέσματα για την συνάρτηση κέρδους δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι είναι κοίλη, παρόλα αυτά σίγουρα παρουσιάζει βέλτιστο για καθεμία από τις τρεις μεταβλητές ελέγχου, δηλαδή είναι μονοκόρυφη. Η μεταβολή των τιμών καθεμιάς από τις μεταβλητές ελέγχου επηρεάζει το κόστος λειτουργίας του συστήματος, και κατά συνέπεια του κέρδους, είτε προς το καλύτερο είτε προς το χειρότερο. Σε όλα τα πειράματα που πραγματοποιήσαμε παρατηρήσαμε παρόμοια συμπεριφορά. Η θεωρητική απόδειξη αυτών των ιδιοτήτων

της συνάρτησης κέρδους  $J$  θα μπορούσε να απλοποιήσει σημαντικά την διαδικασία αναζήτησης των βέλτιστων τιμών των μεταβλητών ελέγχου.

### 3.2. Σύγκριση πολιτικής πλήρους αποδοχής

Παρακάτω θα συγκρίνουμε την πολιτική πλήρους αποδοχής πελατών προϊόντων τύπου 2 (ΑΠ) που εφαρμόσαμε στο πρόβλημά μας με την πολιτική πλήρους απόρριψης (Lost Sales, LS) που προαναφέραμε για τους πελάτες προϊόντων τύπου 1. Υπολογιστικά αρκεί να θεωρήσουμε το κατώφλι  $r$  να είναι ίσο με  $S_1$  οπότε όλοι οι πελάτες προϊόντων τύπου 1 απορρίπτονται και δίνεται έμφαση στην εξυπηρέτηση πελατών προϊόντων τύπου 2. Για διευκόλυνση θα την καλούμε από δω και στο εξής πολιτική LS1. Αξίζει να σημειωθεί ότι για αυτή την πολιτική θεωρούμε ότι  $\lambda_1=0$  καθώς δεν δεχόμαστε πελάτες προϊόντων τύπου 1 επομένως δεν έχει νόημα να υπάρχει τιμή στο  $\lambda_1$ . Επιπλέον, θα συγκρίνουμε αποτελέσματα εφαρμόζοντας πολιτική πλήρους αποδοχής και για τους πελάτες προϊόντων τύπου 1, οπότε γίνονται δεκτές όλες οι παραγγελίες για όσο έχουμε απόθεμα. Πάλι θα θεωρήσουμε ότι  $r=1$ , δηλαδή κρατάμε μία μονάδα προϊόντος για την μηχανή 2 και παράγουμε κανονικά εξυπηρετώντας όλους τους πελάτες και των δύο προϊόντων. Αυτή την πολιτική θα την ονομάζουμε για συντομογραφία NP1. Αξίζει να αναφερθεί ότι οι πολιτικές αυτές είναι ειδικές περιπτώσεις της προτεινόμενης πολιτικής πλήρους αποδοχής πελατών που ακολουθήσαμε.

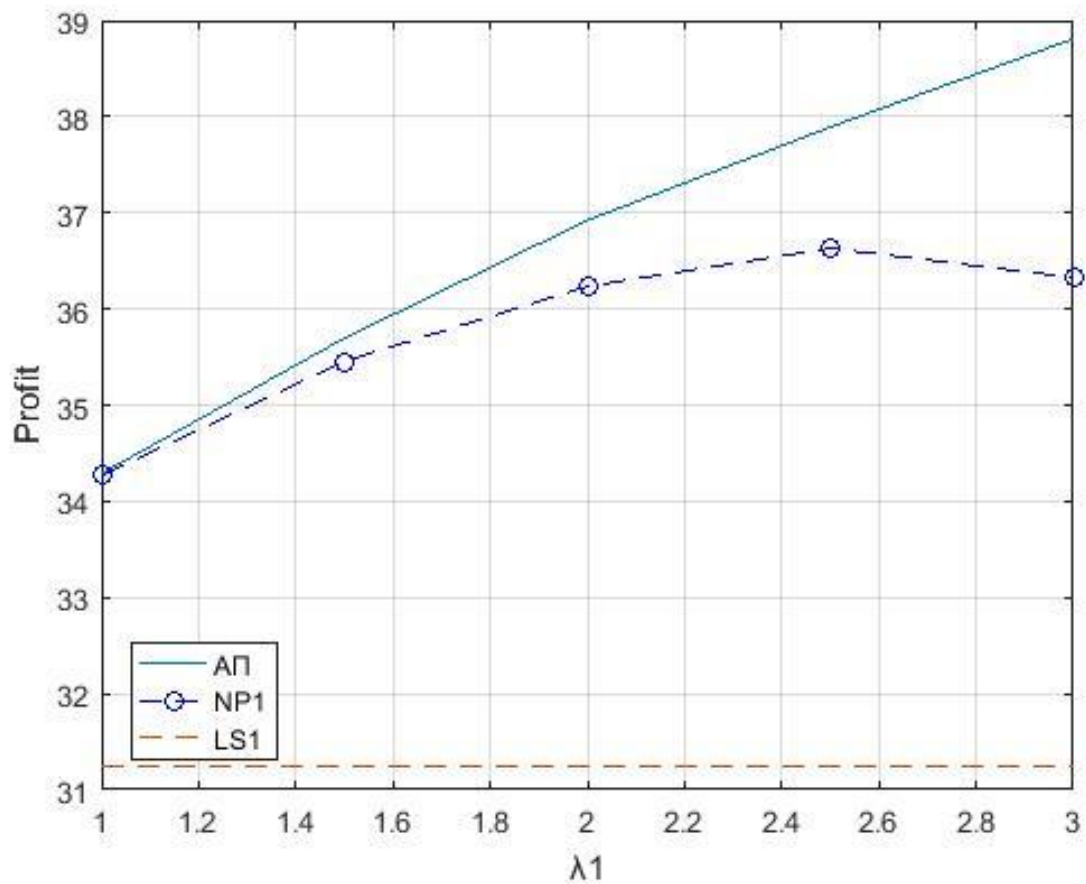
Για την διεξαγωγή των αριθμητικών πειραμάτων οι τιμές των παραμέτρων είναι:  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=4$ ,  $\mu_1=6$ ,  $\mu_2=7$ ,  $h_1=1$ ,  $h_2=2$ ,  $b=4$ ,  $t_1=5$ ,  $t_2=10$ . Μέσω των αριθμητικών αποτελεσμάτων θέλουμε να επιβεβαιώσουμε ότι η πολιτική που ακολουθήσαμε είναι καλύτερη από τις άλλες δύο και βελτιώνει την απόδοση του συστήματος.

Αρχικά θα εξεταστεί η επίδραση του ρυθμού άφιξης πελατών προϊόντων τύπου 1. Στον πίνακα 5 και στο γράφημα 7 έχουμε τα αποτελέσματα από διαφορετικές τιμές του  $\lambda_1$ .

Πίνακας 5: Επίδραση του  $\lambda_1$  για τις εξεταζόμενες πολιτικές.

$\lambda_1$		Πολιτική ΑΠ	Πολιτική NP1	Πολιτική LS1
1	<b>J</b>	34.2882	34.2703	31.2365
	<b>S1</b>	7	7	5
	<b>S2</b>	2	2	2
	<b>r</b>	2	1	5
1,5	<b>J</b>	35.6966	35.4546	31.2365
	<b>S1</b>	8	8	5
	<b>S2</b>	2	2	2
	<b>r</b>	2	1	5
2	<b>J</b>	36.9219	36.2352	31.2365
	<b>S1</b>	9	9	5
	<b>S2</b>	2	3	2
	<b>r</b>	2	1	5

2,5	<b>J</b>	37.8921	36.6303	31.2365
	<b>S1</b>	10	11	5
	<b>S2</b>	2	3	2
	<b>r</b>	3	1	5
3	<b>J</b>	38.8106	36.3271	31.2365
	<b>S1</b>	12	12	5
	<b>S2</b>	2	4	2
	<b>r</b>	3	1	5



Γράφημα 7: Κέρδος συστήματος ως προς τον ρυθμό άφιξης πελατών προϊόντων τύπου 1 (με βέλτιστες τιμές των  $S_1$ ,  $S_2$  και  $r$ ).

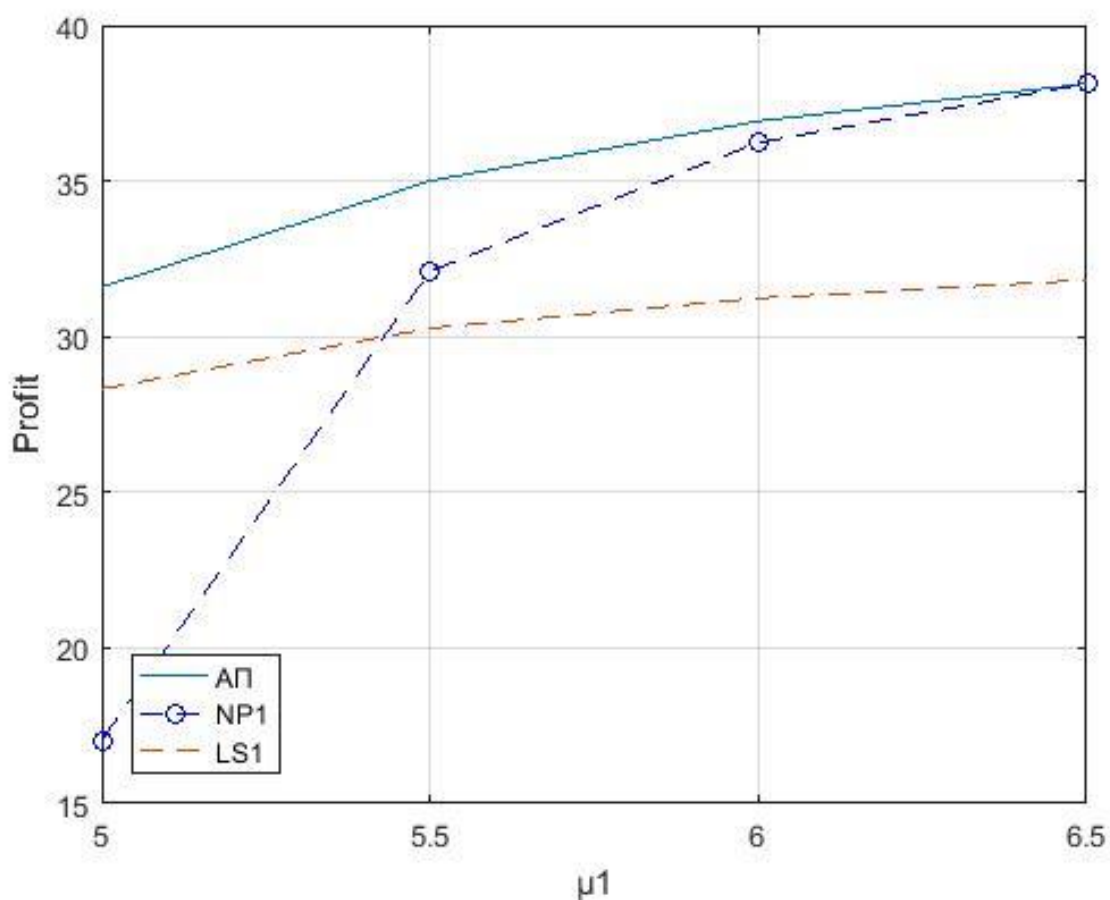
Όπως είναι αναμενόμενο, όσο αυξάνεται ο ρυθμός άφιξης πελατών προϊόντων τύπου 1 η πολιτική LS1 παραμένει στάσιμη καθώς δεν επηρεάζεται από τον ρυθμό άφιξης πελατών προϊόντων τύπου 1 από την στιγμή που απορρίπτονται όλοι. Η πολιτική NP1 αρχικά παρουσιάζει αύξηση στο κέρδος αλλά από ένα σημείο και μετά, συγκεκριμένα για  $\lambda_1=2.5$ , παρουσιάζεται μείωση καθώς η αύξηση των πελατών δεν είναι εύκολα

διαχειρίσιμη για την πολιτική αυτή λόγω της έλλειψης κατωφλίου σε αυτήν την κατηγορία πελατών. Η πολιτική που εφαρμόσαμε εμείς απεναντίας, έχει σταθερή αύξηση του κέρδους όσο αυξάνεται ο ρυθμός άφιξης πελατών τύπου 1 και υπερिशύει έναντι των άλλων δύο πολιτικών λόγω του κατωφλίου  $r$  το οποίο βοηθάει στο να καταστεί η οποιαδήποτε αύξηση πελατών προϊόντων τύπου 1 αντιμετωπίσιμη.

Πίνακας 6: Βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου και κέρδους εξεταζόμενων πολιτικών συναρτήσει του  $\mu_1$ .

$\mu_1$		Πολιτική ΑΠ	Πολιτική NP1	Πολιτική LS1
5	<b>J</b>	31.5902	17.034	28.3189
	<b>S1</b>	10	16	8
	<b>S2</b>	2	8	2
	<b>r</b>	5	1	8
5,5	<b>J</b>	35.0048	32.1062	30.2703
	<b>S1</b>	10	12	6
	<b>S2</b>	2	4	2
	<b>r</b>	3	1	6
6	<b>J</b>	36.9219	36.2352	31.2365
	<b>S1</b>	9	9	5
	<b>S2</b>	2	3	2
	<b>r</b>	2	1	5
6,5	<b>J</b>	38.1268	38.1268	31.8145
	<b>S1</b>	8	8	4
	<b>S2</b>	2	2	2
	<b>r</b>	1	1	4



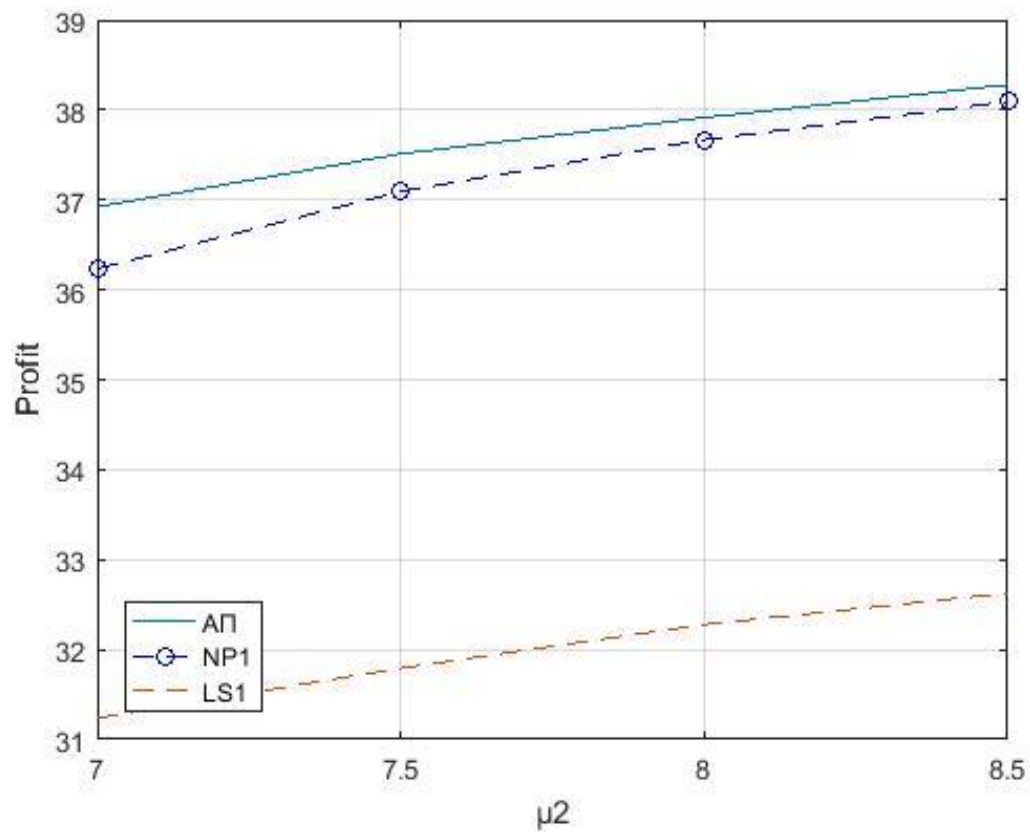


Γράφημα 8: Κέρδος συστήματος – ρυθμός παραγωγής μηχανής προϊόντων τύπου 1.

Εξετάζεται στη συνέχεια ο ρυθμός παραγωγής της μηχανής προϊόντων τύπου 1 όπου για την πολιτική LS1 έχουμε μια μικρή σταδιακή αύξηση στο κέρδος καθώς εξυπηρετούνται περισσότεροι πελάτες προϊόντων τύπου 2 λόγω αύξησης προϊόντων τύπου 1 χωρίς όμως να καταφέρει να ξεπεράσει ή να φτάσει την πολιτική CB ενώ απέναντι στην NP1 αρχικά έχει προβάδισμα αλλά αυτό δεν διαρκεί πολύ δυστυχώς. Τώρα για τις άλλες δύο πολιτικές έχουμε μια ξαφνική αύξηση του κέρδους για την NP1 αρχικά όσο αυξάνεται το  $\mu_1$  αλλά μετά γίνεται πιο ομαλά. Μια εξίσου σημαντική παρατήρηση είναι ότι οι πολιτικές CB και NP1 από ένα σημείο και μετά, συγκεκριμένα για  $\mu_1=6.5$ , ταυτίζονται το οποίο είναι εν μέρει αναμενόμενο καθώς με την αύξηση της παραγωγής των προϊόντων τύπου 1 παράγονται περισσότερα προϊόντα τύπου 2, οπότε κατά συνέπεια μπορούμε να εξυπηρετήσουμε την μηχανή 2 πιο εύκολα και υπάρχει περισσότερο διαθέσιμο απόθεμα προϊόντων τύπου 1 για τους πελάτες των προϊόντων αυτών. Άλλη μία σημαντική παρατήρηση πάνω στην ταύτιση των πολιτικών είναι ότι με την αύξηση του ρυθμού παραγωγής της μηχανής 1 δεν είναι απαραίτητη η ύπαρξη του κατωφλίου  $r$  λόγω αυξημένης παραγωγής και αυτό συντέλεσε στην ταύτιση των πολιτικών CB και NP1.

Πίνακας 7: Βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου και κέρδους εξεταζόμενων πολιτικών συναρτήσει του  $\mu_2$ .

$\mu_2$		Πολιτική ΑΠ	Πολιτική NP1	Πολιτική LS1
7	J	36.9219	36.2352	31.2365
	S1	9	9	5
	S2	2	3	2
	r	2	1	5
7.5	J	37.5127	37.0929	31.7928
	S1	8	9	5
	S2	2	2	2
	r	2	1	5
8	J	37.9145	37.6697	32.278
	S1	8	9	4
	S2	2	2	2
	r	2	1	4
8.5	J	38.2802	38.0921	32.6269
	S1	9	8	4
	S2	1	2	2
	r	2	1	4

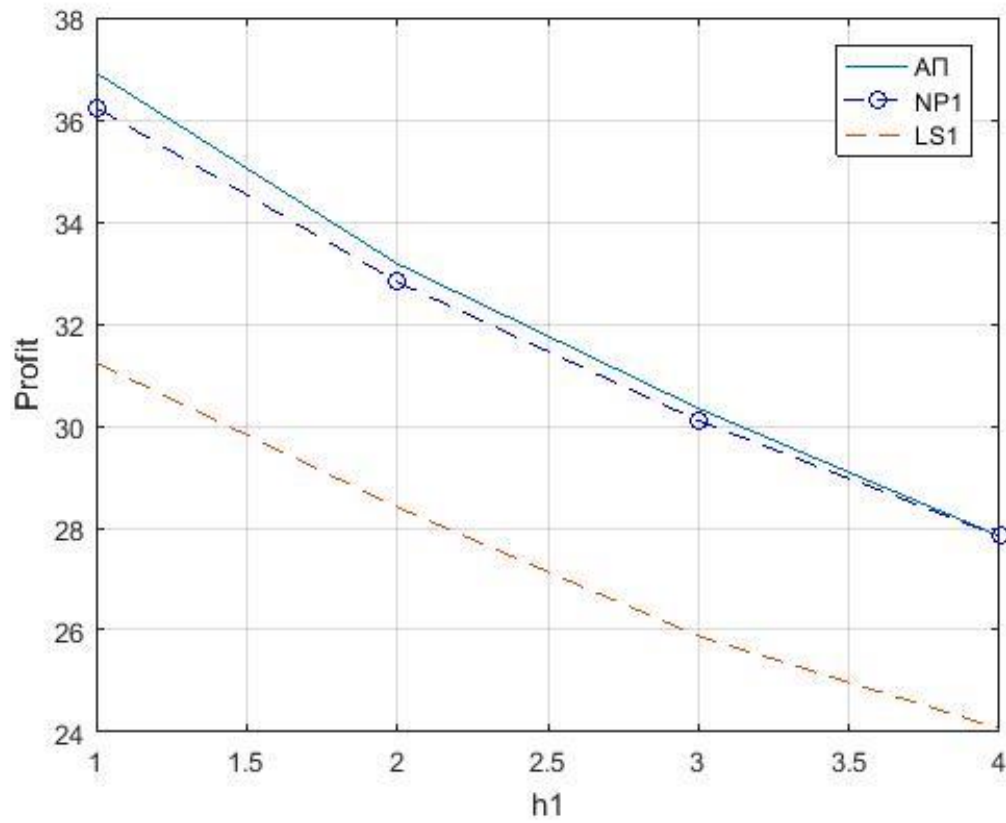


Γράφημα 9: Κέρδος εξεταζόμενων πολιτικών ως προς τον ρυθμό παραγωγής μηχανής προϊόντων τύπου 2.

Μετά την εξέταση του  $\mu_1$  εξετάζεται ο ρυθμός παραγωγής της μηχανής προϊόντων τύπου 2,  $\mu_2$ . Πάλι η πολιτική LS1 παρουσιάζει σημαντική αύξηση στο κέρδος όσο αυξάνεται το  $\mu_2$  καθώς εξυπηρετούνται περισσότεροι πελάτες προϊόντων τύπου 2, αλλά δεν καταφέρνει να ξεπεράσει ή έστω να φτάσει τις άλλες δύο. Οι πολιτικές CB και NP1 έχουν μια πολύ ικανοποιητική αύξηση στο κέρδος και αυτές, με την πολιτική που χρησιμοποιούμε να έχει καλύτερα αποτελέσματα από την NP1, η οποία πλησιάζει αρκετά την CB αλλά δεν καταφέρνει να υπερισχύσει καθιστώντας και εδώ την πολιτική μας σαφώς καλύτερη.

Πίνακας 8: Βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου και κέρδους εξεταζόμενων πολιτικών συναρτήσει του  $h_1$ .

$h_1$		Πολιτική ΑΠ	Πολιτική NP1	Πολιτική LS1
1	J	36.9219	36.2352	31.2365
	S1	9	9	5
	S2	2	3	2
	r	2	1	5
2	J	33.1782	32.8223	28.4096
	S1	6	7	4
	S2	2	3	2
	r	2	1	4
3	J	30.3421	30.1018	25.8808
	S1	5	6	4
	S2	3	3	2
	r	2	1	4
4	J	27.8384	27.8384	24.0716
	S1	5	5	3
	S2	4	4	4
	r	1	1	3

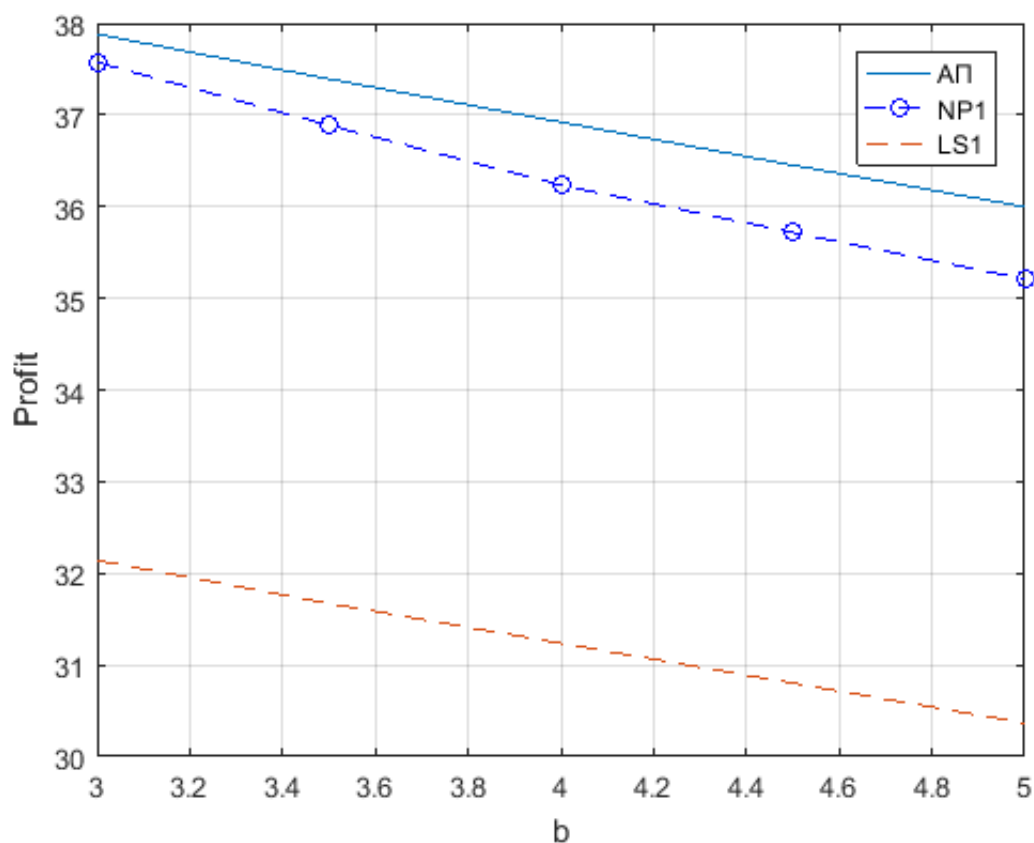


Γράφημα 10: Κέρδος εξεταζόμενων πολιτικών ως προς το μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης προϊόντων τύπου 1.

Παρατηρώντας τον πίνακα 8 και το γράφημα 10 για την εξέταση διαφορετικών τιμών για το μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης προϊόντων τύπου 1 έχουμε όπως είναι αναμενόμενο και στις τρεις πολιτικές σημαντική μείωση του κέρδους όσο αυξάνεται το  $h_1$ . Η πολιτική LS1 έχει πάλι την χαμηλότερη επίδοση από τις άλλες δύο καθώς το γεγονός ότι τα προϊόντα τύπου 1 διανέμονται αποκλειστικά στην μηχανή 2 οδηγεί σε μεγαλύτερη αύξηση του αποθεματικού κόστους. Τώρα οι άλλες δύο πολιτικές βλέπουμε ότι βρίσκονται αρκετά κοντά αλλά η πολιτική CB καταφέρνει να έχει λίγο καλύτερα αποτελέσματα στο κέρδος ως απόρροια της χρήσης του κατωφλίου  $r$  χωρίς να παραβλέπουμε το γεγονός ότι σε περαιτέρω αύξηση του κόστους αποθήκευσης προϊόντων τύπου 1 είναι πολύ πιθανόν να έχουμε μια ταύτιση πολιτικών καθώς η αποθήκευση πολλών προϊόντων θα είναι δυσβάσταχτη για την πολιτική μας.

Πίνακας 9: Βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου και κέρδους εξεταζόμενων πολιτικών συναρτήσει του  $b$ .

<b>b</b>		<b>Πολιτική ΑΠ</b>	<b>Πολιτική NP1</b>	<b>Πολιτική LS1</b>
3	J	37.8822	37.5735	32.1405
	S1	8	9	4
	S2	2	2	2
	r	2	1	4
3,5	J	37.392	36.8875	31.6714
	S1	9	9	5
	S2	2	2	2
	r	2	1	5
4	J	36.9219	36.2352	31.2365
	S1	9	9	5
	S2	2	3	2
	r	2	1	5
4,5	J	36.4518	35.7186	30.8016
	S1	9	9	5
	S2	2	3	2
	r	2	1	5
5	J	35.9977	35.212	30.3667
	S1	9	10	5
	S2	2	3	2
	r	2	1	5



Γράφημα 11: Κέρδος εξεταζόμενων πολιτικών ως προς το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών πελατών προϊόντων τύπου 2.

Τέλος εξετάζεται το μοναδιαίο κόστος εκκρεμών παραγγελιών πελατών προϊόντων τύπου 2 όπως φαίνεται στον πίνακα 9 και στο γράφημα 11. Και οι τρεις πολιτικές παρουσιάζουν μείωση στο κέρδος όσο αυξάνεται το  $b$ , πράγμα που είναι αναμενόμενο λόγω της έμφασης που δίνεται στους πελάτες προϊόντων τύπου 2. Η πολιτική LS1 παρουσιάζει για άλλη μια φορά την χαμηλότερη απόδοση από τις άλλες δύο. Όσον αφορά την πολιτική που εφαρμόσαμε, ενώ αρχικά το κέρδος που μας έδινε ήταν λίγο μεγαλύτερο από αυτό της πολιτικής NP1, όσο αυξάνεται το  $b$  καταφέρνει παρά την μείωση του κέρδους να υπερσχύσει με σημαντική διαφορά έναντι των άλλων δύο πολιτικών καθιστώντας την καλύτερη δυνατή πολιτική λόγω της ύπαρξης του κατωφλίου  $r$ .

#### 4.Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε μια γραμμή παραγωγής δύο σταδίων με ζήτηση ενδιάμεσων προϊόντων. Τα προϊόντα που παράγονται από το πρώτο στάδιο χρησιμοποιούνται τόσο ως πρώτη ύλη από το δεύτερο στάδιο αλλά και ως τελικά προϊόντα. Για τα προϊόντα δεύτερου σταδίου χρησιμοποιήθηκε η πολιτική πλήρους αποδοχής παραγγελιών ενώ για τα προϊόντα πρώτου σταδίου χρησιμοποιήθηκε πολιτική προτεραιότητας τύπου κατωφλίου. Για την μοντελοποίηση του συστήματος χρησιμοποιήθηκαν αλυσίδες Markov συνεχούς χρόνου και εκτιμήθηκαν οι πιθανότητες μόνιμης κατάστασης και η συνάρτηση κέρδους. Με την εκτίμηση της συνάρτησης κέρδους μπορέσαμε να υπολογίσουμε τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων ελέγχου και για τον σκοπό αυτό αναπτύχθηκε κώδικας σε περιβάλλον Matlab. Χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος εξαντλητικής αναζήτησης για την εύρεση του μέγιστου δυνατού κέρδους. Τέλος πραγματοποιήσαμε πληθώρα αριθμητικών πειραμάτων προκειμένου να εξεταστούν οι ιδιότητες της συνάρτησης κέρδους ως προς τις μεταβλητές ελέγχου και για να πραγματοποιηθούν συγκρίσεις με άλλες πολιτικές για τα προϊόντα πρώτου σταδίου. Τα αποτελέσματα από τα αριθμητικά πειράματα φαίνεται να επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι η συνάρτηση κέρδους είναι μονοκόρυφη ως προς τις μεταβλητές ελέγχου άρα πιθανόν υπάρχει μοναδικό τοπικό και ολικό βέλτιστο. Τέλος η πολιτική που ακολουθήσαμε υπερτερεί των υπολοίπων που εξετάστηκαν καθώς το κέρδος του συστήματος ήταν μεγαλύτερο σε όλα τα αριθμητικά πειράματα που έγιναν.

## 5.Βιβλιογραφία

- [1] Zipkin, P. (2000) *Foundations of inventory management*. New York, Mc-Graw-Hill.
- [2] Benjaafar, S., ElHafsi, M., and Huang, T. (2010) ‘Optimal Control of a Production-Inventory System with both Backorders and Lost Sales’, *Naval Research Logistics*, vol.57, issue 3, pp.252-265.
- [3] Zipkin, P. (1995) ‘Performance analysis of a multi-item production inventory system under alternative policies’, *Management Sci.* **41**, pp.690–703.
- [4] Ha, A. (1997) ‘Stock-Rationing Policy for a Make-to-Stock Production System with Two Priority Classes and Backordering’, *Naval Research Logistics*, vol.44, issue 5, pp.457-472.
- [5] Ioannidis, S. (2011) “An inventory and order admission control policy for production systems with two customer classes”, *International Journal of Production Economics*, Vol.131, Issue 2, pp.663-673.
- [6] Gayon, J., Vericourt, F. and Karaesmen, F. (2009) ‘Stock rationing in an M/Er/1 multi-class make-to-stock queue with backorders’, *IIE Transactions*, vol.41, issue 12, pp.1096-1109.
- [7] Neuts, M. F. (1978) ‘The *M/M/1* queue with randomly varying arrival and service rates’, *Opsearch* **15**, pp.139-157.
- [8] Latouche, G. (1981) ‘Algorithmic analysis of a multiprogramming-multiprocessor computer system’, *J. Assoc. Compo Mach.* 28, pp.662-679.
- [9] Neuts, M. F. (1978) ‘Further results on the *M/M/1* queue with randomly varying rates’, *Opsearch* **15**, pp.158-168.
- [10] Rao, B. M. S. and Posner, M. J. M. (1987) ‘Algorithmic and approximation analyses of the shorter queue model’, *Naval Res. Logist. Quart.* **34**, pp.381-398.
- [11] Ye, J. and Li, S. (1991) ‘Analysis of multi-media traffic queues with finite buffer and overload control- Part I: Algorithm’, *Proc.IEEE Infocom '91*, Bal Harbour, pp.1464-1474.
- [12] Zukerman, M. (1989) ‘Applications of matrix-geometric solutions for queueing performance evaluation of a hybrid switching system’, *J. Austral. Math. Soc. B* **31**, pp.219-239.
- [13] Zukerman, M. and Kirton, P. (1988) ‘Applications of matrix-geometric solutions to the analysis of the bursty data queue in a B-ISDN switching system’, *Proc. GLOBECOM '88*, pp.1635-1639.
- [14] Evans, R. V. (1967) ‘Geometric distribution in some two-dimensional queueing systems’, *Operat. Res.* **15**, pp.830-846.



- [15] Wallace, V. (1969) *The solution of quasi birth and death processes arising from multiple access computer systems*. Ph.D. dissertation, Systems Engineering Laboratory, University of Michigan, Tech. Rept. No. 07742-6-T.
- [16] Neuts, M.F. (1981) *Matrix-geometric solutions in stochastic models*. The John Hopkins University Press, Baltimore.
- [17] Neuts, M. F. (1981) *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models. An Algorithmic Approach*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore MD.
- [18] Neuts, M. F. (1986) ‘The caudal characteristic curve of queues’, *Adv. Appl. Prob.* **18**, pp.221-254.
- [19] Lucantoni, D. M. and Ramaswami, V. (1985) ‘Efficient algorithms for solving the non-linear matrix equations arising in phase type queues’, *Commun. Statist. Stoch. Models* **1**, pp.29-52.
- [20] Ramaswami, V. (1988) ‘Nonlinear matrix equations in applied probability – Solution techniques and open problems’, *SIAM Rev.* **30**, pp.256-263.
- [21] Latouche, G. (1992) *Algorithms for infinite Markov chains with repeating columns*. IMA Workshop on Linear Algebra, Markov Chains and Queuing Models.
- [22] Latouche, G. (1992) *Algorithms for evaluating the matrix G in Markov chains of PH/G/1 type*. Bellcore, Technical Report.
- [23] Latouche, G. (1992) Newton's iterations for nonlinear equations in Markov chains. Bellcore, Technical Report.
- [24] Latouche, G. and Ramaswami, V.(1999) *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*, SIAM.
- [25] Ramaswami, V. and Latouche, G. (1986) ‘A general class of Markov processes with explicit matrix-geometric solutions’, *OR Spektrum*, 8 , pp. 209-218.
- [26] Latouche, G. and Ramaswami, V. (1993) ‘A logarithmic reduction algorithm for quasi-birth-death process’, *J.Appl. Prob.* 30 , pp.650-674.
- [27] Qiang Ye, (2002) ‘On Latouche-Ramaswami’s Logarithmic Reduction Algorithm for Quasi-birth-and-death Process’, Vol.18, 3 , pp.449-467.
- [28] Ramaswami, V. (1990) "A duality theorem for the matrix paradigms in queueing theory". *Communications in Statistics. Stochastic Models.* **6**: pp.151–161.
- [29] Bellet L.R. (2006) ‘Ergodic properties of Markov processes’. *Open Quantum Systems II*. pp.1-39.
- [30] Wikipedia (2018). **Markov Chain**. Διαθέσιμο στο: [https://en.wikipedia.org/wiki/Markov\\_chain](https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain) [Πρόσβαση 28 Ιουνίου 2018]

## 6.Παράρτημα

### Πρώτο αρχείο κώδικα

Ο κώδικας αυτός για κάθε τιμή  $S1, S2$  και  $r$  καλεί την συνάρτηση για τον υπολογισμό κέρδους Profit, συγκεντρώνει τα αποτελέσματα και μας δίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος.

```

%%%% compare function %%%%
clear
clc

S1max=16; %megisto apothema apothikis 1
S2max=8; %megisto apothema apothikis 2
rmax=S1max-1; %megisto katwfli
G=rmax*S1max*2;
K=NaN(G,5);
e=1;

%euresh olwn twn pithanwn sunduasmwn kai tou kerdous
for s1=2:S1max
    for s2=1:S2max
        for r=1:s1-1;
            P=Profit(s1,s2,r);
            K(e,:) = [e,s1,s2,r,P]; %pinakas pithanwn sunduasmwn S1,S2,r

            e=e+1;
        end
    end
end
end

[a,b]=find(K==max(K(:,5)));

```

```
fprintf('To megalutero kerdos pou exoume einai: \n')  
fprintf('%g ',K(a,b));  
fprintf(' gia s1=: \n')  
fprintf('%g ',K(a,2));  
fprintf(' gia s2=: \n')  
fprintf('%g ',K(a,3));  
fprintf(' kai gia r=: \n')  
fprintf('%g ',K(a,4));
```

## Δεύτερο αρχείο κώδικα

```

function P=Profit(s1,s2,r)

% clear

% clc

%metavlhtes

% s1=9; %apothema 1ou stadiou
% s2=2; %apothema 2ou stadiou
% r=2; %katwfli 1ou stadiou
b=4; %monadiaio kostos ekkremwn paraggeliwn
h1=1; %monadiaia kosh apothematwn
h2=2;
cr=5; %monadiaio kostos aporripshs pelatwn proiontwn 1
lamda1=2;
lamda2=4;
m1=6;
m2=7;
n=s1+1; %diastash pinakwn
M2=ones(1,s1);
M2=M2*m2; %katw diag A2
M1=ones(1,s1);
M1=M1*m1; %panw diag B00
l2=ones(1,n);
l2=l2*lamda2; %diag A0
l1=ones(1,s1);

for j=1:n; %dianusma gia pinaka A1
    if j<=r
        l1(j)=0;
    end

```

```

end
l1=l1*lamda1;

A0=diag(-l2); %pinakas A0
A2=diag(-M2,-1); %pinakas A2
%dhmiourgia A1
T1=diag(-M1,+1);
T2=diag(-l1,-1);
T=T1+T2;
A1=zeros(n,n);

for a1=1:n; %diagwnia stoixeia A1
    if a1<r+2
        A1(a1,a1)=m1+m2+lamda2;
    else
        A1(a1,a1)=m1+m2+lamda1+lamda2;
    end
end

end
A1(1,1)=m1+lamda2;
A1(n,n)=m2+lamda1+lamda2;
A1=A1+T; %pinaks A1

clear T T1 T2
%dhmiourgia B00
B00=zeros(n,n);
K1=diag(-M1,+1);
K2=diag(-l1,-1);
Q=K1+K2;

```

```

for k0=1:n; %diagwnia stoixeia B00
    if k0<r+2
        B00(k0,k0)=m1+lamda2;
    else
        B00(k0,k0)=m1+lamda1+lamda2;
    end

end

B00(n,n)=lamda1+lamda2;
B00=B00+Q;
clear Q Q1 Q2

%logarithmic reduction gia ypologismo R
A0=-A0;
A1=-A1;
A2=-A2;

L=(-A1)^(-1);
H=L*A0;
L=L*A2;
G=L;
T=H;
check=1;
i=0;

while (check > 10^(-14) && i<=50)
    U=H*L+L*H;
    M1=H^2;
    M2=L^2;
    H3=(eye(n)-U)^(-1);

```

```

L=H3*M2;
H=H3*M1;
G=G+T*L;
T=T*H;

i=i+1;
check=min(norm(H,inf),norm(L,inf));
end

U=A1+A0*G;
R=A0*(-U)^(-1);
clear U H L M1 M2 T G H3 i check

%euresh pithanohtwn monimhs katastashes
%ypologismos P0
e=ones(n,1);
II1=((eye(n)-R)^(-1))*e;
C=B00+R*(-A2);
C(:,n)=II1;
C=C';
y=zeros(n,1);
y(n)=1;
X=C\y;
P0=X';
PXY=P0;

clear X C II1 e y
%Eksiswsh pou ikanopoei o R
RR=A0+R*A1+((R)^(2))*A2;
%ypologismos upoloipwn pithanohtwn

```

```

num=1;
%Logw apeirwn paraggeliwn megala s2 apaitoun polles pithanothtes
if s2<=9
    n1=200*n;
else
    n1=400*n;
end

while num<n1

    PXY(num+1,1:n)=PXY(num,:)*R;
    num=num+1;

end

clear num

PXY; %pithanothtes monimhs katastashs

%elegxos sunthikis eustatheias
e=ones(n,1);
for i=1:n
    if PXY(i,:)*A0*e<PXY(i,:)*A2*e

    else
        warning('stability condition error')
        fprintf('%g ',s1,s2,r);
        break
    end
end
clear e

```



```
% Υπολογισμός Κόστους
```

```
% υπολογισμός I1
```

```
K1=(eye(n)-R)^(-1);
```

```
K2=P0*K1;
```

```
I1=0;
```

```
for i=1:s1
```

```
    I1=I1+(i)*K2(i+1);
```

```
end
```

```
I1=I1*h1;
```

```
clear K1 K2
```

```
% υπολογισμός I2
```

```
kk=0;
```

```
for j=1:s2
```

```
    ke=0;
```

```
    for i=1:s1+1
```

```
        ke=ke+PXY(j,i);
```

```
    end
```

```
    II2(j)=ke;
```

```
    II2(j)=II2(j)*(s2-j+1);
```

```
    kk=kk+1;
```

```
end
```

```
I2=0;
```

```
for j=1:s2
```

```
    I2=I2+II2(j);
```

```
end
```

```

I2=I2*h2;
clear ke kk II2

%ypologismos B2
sumB2=0;
i=1;
check2=1;

while ( check2>10^(-14) && i<=n1-10)
    sumB2old=sumB2;
    for j=1:s1+1
        sumB2=sumB2+i*PXY(i+s2+1,j);
    end
    i=i+1;
    check2=sumB2-sumB2old;
end

B2=sumB2*b;
clear sumB2 sumB2old check2

%ypologismos L1

sumL1=0;
i=1;
j=1;
check3=1;
while (check3>10^(-14) && i<=n1-10 )
    sumL1old=sumL1;
    for j=1:r+1
        sumL1=sumL1+PXY(i,j);

```

```

end

i=i+1;

check3=sumL1-sumL1old;

end

P1AP=1-sumL1;
PAP1=lamda1*cr*sumL1;
clear check3 sumL1old

%ypologismos kostous
Kostos=I1+I2+B2+PAP1;

%ypologismos kerdous
t1=5; %monadiaio kerdos pwlisis proiontos 1
t2=10; %monadiaio kerdos pwlisis proiontos 2

e=ones(n,1);
for i=1:n1
    if PXY(i,)*A0*e>PXY(i,)*A2*e
        P=-100000000; %ean den ikanopoieitai h synthiki eustatheias kostos pairnei
ypervolika xamhlih timh
        break
    else

        P=t1*lamda1+t2*lamda2-Kostos;
    end
end
end

```