

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ



## Συμπερασμός με Ανταλλαγή Μηνυμάτων ως Κατανεμημένος Υπολογισμός

Καραταράκης Ευάγγελος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΠΟΥ ΥΠΟΒΑΛΛΕΤΑΙ ΓΙΑ  
ΤΗ ΜΕΡΙΚΗ ΕΚΠΛΗΡΩΣΗ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΓΙΑ  
ΤΗ ΛΗΨΗ ΤΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

18 Ιουλίου 2019

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Καθηγητής Άγγελος Μπλέτσας, *Επιβλέπων*  
Αναπληρωτής Καθηγητής Μιχαήλ Λαγουδάκης  
Αναπληρωτής Καθηγητής Βασίλειος Σαμολαδάς

# Περίληψη

Με χρήση του πιθανοτικού συμπερασμού λύνονται προβλήματα, όπως η εύρεση μιας οριακής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, χωρίς διαδοχική ολοκλήρωση ή η λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων μεγάλων διαστάσεων. Αλγόριθμοι, όπως ο Gaussian Belief Propagation (GaBP), εφαρμόζονται με ανταλλαγή μηνυμάτων σε πιθανοτικά γραφικά μοντέλα, ενώ η εφαρμογή τους γίνεται σε ασύγχρονη και σε σύγχρονη εκδοχή, με διαφορετικά πλεονεκτήματα ανά περίπτωση. Επομένως, είναι απαραίτητη η μελέτη ικανών και αναγκαίων συνθηκών σύγκλισης για κάθε εκδοχή. Οι σύγχρονοι αλγόριθμοι χαρακτηρίζονται από ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύγκλισης, πράγμα το οποίο ισχύει και για τον GaBP. Οι ασύγχρονοι χαρακτηρίζονται κυρίως από ικανές (και όχι αναγκαίες) συνθήκες σύγκλισης και έχουν μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Ανταλλαγή μηνυμάτων μπορεί να συμβεί και κατά την ασύγχρονη κατανεμημένη εκδοχή του αλγορίθμου Jacobi, με χρήση ενός πλήθους επεξεργαστών. Ο αλγόριθμος αυτός, αν και δεν ανήκει στην κατηγορία του πιθανοτικού συμπερασμού, μπορεί να προσφέρει χρήσιμες ιδέες στην μελέτη της ασύγχρονης εκδοχής του GaBP. Σημειώνεται ότι ο αλγόριθμος Jacobi αποτελεί ειδική περίπτωση του αλγορίθμου GaBP, όπως πρόσφατα αναφέρθηκε στην βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, αξιοποιούνται πρόσφατα ευρήματα για τον ασύγχρονο Jacobi, όπου το ελάχιστο μονοπάτι στον γράφο που περιγράφει το χρονοδιάγραμμα ανταλλαγής μηνυμάτων, καθορίζει μετρικές σύγκλισης. Στην εργασία αυτή έγινε αξιοποίηση αυτής της μεθοδολογίας στην μελέτη του ασύγχρονου GaBP, κατόπιν παρατήρησης ότι οι αναδρομικές εξισώσεις ανανέωσης των μηνυμάτων του είναι εν μέρει γραμμικές. Το τελευταίο προέκυψε από πρόσφατες μελέτες, όπου φαίνεται ότι ο αλγόριθμος GaBP μπορεί να περιγραφεί μέσω της επίλυσης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, το οποίο καταλήγει σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Επίσης, μελετήθηκε η συμπεριφορά του ελάχιστου μονοπατιού στο γράφο για μια σειρά προβλημάτων, στα οποία εκτελείται ο ασύγχρονος κατανεμημένος Jacobi.

# Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Καθ. Άγγελο Μπλέτσα για όλη τη καθοδήγηση, την υποστήριξη και τις γνώσεις που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους και συνεργάτες μου για όλη την υποστήριξή τους, καθώς και όλους τους ανθρώπους που βρίσκονται στη ζωή μου, πιστεύουν σε εμένα και με βοηθούν να συνεχίσω. Χρωστάω ένα κέρασμα στον καθένα. Φυσικά δεν θα μπορούσα να ξεχάσω την οικογένεια μου για όλη την ψυχολογική και οικονομική στήριξη που έλαβα και γιατί χωρίς αυτήν δεν θα βρισκόμουν σήμερα σε αυτή τη θέση.

# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	4
1 Εισαγωγή	6
2 Σύγχρονος συμπερασμός σε πιθανοτικά γραφικά μοντέλα	9
2.1 Σύγχρονος αλγόριθμος Gaussian Belief Propagation (GaBP)	9
2.1.1 Σύγκλιση μηνυμάτων στον GaBP	13
2.1.2 Σύγκλιση παραμέτρων συμπερασμού στο σύγχρονο GaBP	15
2.2 Αλγόριθμος Jacobi	15
2.2.1 Ο αλγόριθμος Jacobi - Γενική μορφή	16
2.2.2 Συνθήκες σύγκλισης του αλγορίθμου Jacobi	17
3 Ασύγχρονοι αλγόριθμοι ανταλλαγής μηνυμάτων	19
3.1 Ασύγχρονος κατανεμημένος αλγόριθμος Jacobi	21
3.2 Πιθανότητα αστοχίας $P_m$	22
3.3 Κατευθυνόμενος άκυκλος γράφος	23
3.4 Μη αρνητικοί πίνακες επανάληψης $\mathbf{M}$	27
3.5 Πίνακες επανάληψης $\mathbf{M}$ - Γενική περίπτωση	29
3.6 Ο ασύγχρονος κατανεμημένος Jacobi στην εκτέλεση του GaBP	30
3.7 Ασύγχρονος Gaussian Belief Propagation και συνθήκες σύγκλισης	31
3.8 Ο αλγόριθμος Jacobi ως υποπερίπτωση του GaBP	33
4 Η σύγχρονη εκδοχή σε σύγκριση με την ασύγχρονη	34
4.1 Σύγκλιση GaBP - Αριθμητικό παράδειγμα	34
4.2 Συμπερασμός με APJ για τα $\beta_{i \rightarrow j}^a$	41
4.3 Σύγκλιση παραμέτρων $\beta_{i \rightarrow j}^a$ για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου $\zeta$	44
4.4 Εκτίμηση μέσω ελάχιστων μονοπατιών στον DAG - $E[s(t)]$ και $E[s^*]$	46

---

<b>5</b>	<b>Μελλοντική μελέτη</b>	<b>51</b>
<b>6</b>	<b>Παράρτημα 1</b>	<b>52</b>
6.1	Απόδειξη Πρότασης 1	52
6.2	Απόδειξη Πρότασης 2	53
6.3	Απόδειξη Συμπεράσματος 1	56
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>57</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Σε τομείς της μηχανικής, όπως η επεξεργασία σημάτων, η ανάπτυξη τηλεπικοινωνιακών συστημάτων και η μηχανική μάθηση (machine learning), καλούμαστε συχνά να υπολογίσουμε μια οριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Function - PDF) με δεδομένη μια από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Ακολουθώντας τη πεπατημένη μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς όλες τις τυχαίες μεταβλητές εκτός από την τυχαία μεταβλητή ενδιαφέροντος και να προκύψει η οριακή PDF. Όμως, σε περιπτώσεις που η από κοινού PDF είναι εξαρτημένη από έναν μεγάλο αριθμό μεταβλητών, αυτό είναι πρακτικά και υπολογιστικά χρονοβόρο και δεν συστήνεται. Από την άλλη πλευρά, είναι δυνατό να κατασκευάσουμε ένα πιθανοτικό γραφικό μοντέλο του οποίου οι κόμβοι αντιστοιχούν στις τυχαίες μεταβλητές της από κοινού PDF και να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία συμπερασμού, όπως είναι οι αλγόριθμοι ανταλλαγής μηνυμάτων και πιο συγκεκριμένα αλγόριθμοι, όπως ο Gaussian Belief Propagation - GaBP, ο οποίος αποτελεί και ένα από τα αντικείμενα της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Ο αλγόριθμος GaBP αποτελεί υποπερίπτωση του αλγορίθμου Belief Propagation (BP). Ο αλγόριθμος BP έχει εφαρμοστεί και έχει γνωρίσει μεγάλη επιτυχία σε πολλές εφαρμογές, όπως είναι η αποκωδικοποίηση των Turbo κωδίκων. Η εκτέλεση του GaBP γίνεται με ανταλλαγή μηνυμάτων πραγματικών τιμών από κόμβο σε κόμβο του γράφου, μέσω των ακμών που τους συνδέει. Κάθε κόμβος καταλαμβάνεται από μια τυχαία μεταβλητή. Έτσι, έστω δυο κόμβοι του γράφου, οι  $i$  και  $j$  οι οποίοι καταλαμβάνονται από τις τυχαίες μεταβλητές  $x_i$  και  $x_j$  αντίστοιχα και ενώνονται με μια ακμή. Οι κόμβοι αυτοί είναι γείτονες και ανταλλάσσουν μηνύματα από τον κόμβο  $i$  προς τον κόμβο  $j$  και αντίστροφα, κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Η από κοινού πιθανοτική κατανομή, η οποία περιγράφει τον γράφο είναι Gaussian. Συνεπώς, και η οριακή PDF θα είναι και εκείνη Gaussian και απαιτείται μόνο η μέση τιμή και η διασπορά για τον υπολογισμό της, οι οποίες ονομάζονται και παράμετροι

συμπερασμού. Όταν τα μηνύματα συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές, τότε είναι δυνατός ο υπολογισμός των παραμέτρων συμπερασμού και συνεπώς ο υπολογισμός της οριακής PDF. Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται σε σύγχρονη (synchronous) και σε ασύγχρονη (asynchronous) εκδοχή.

Από τους Qinliang Su και Yik-Chung Wu [1] προτάθηκαν νέες συνθήκες σύγκλισης, ώστε να είναι γνωστό a priori το εύρος των προβλημάτων που μπορεί να αντιμετωπίσει ο αλγόριθμος GaBP. Για τον σύγχρονο αλγόριθμο GaBP προτάθηκε νέα ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης, ενώ για τον ασύγχρονο προτάθηκε μια ικανή συνθήκη, αλλά όχι αναγκαία, για τη σύγκλισή του. Και για τις δυο συνθήκες χρησιμοποιήθηκε ένα νέο και ευρύτερο σύνολο αρχικοποίησης. Επιπλέον, παρουσιάστηκαν οι εξισώσεις ενημέρωσης των παραμέτρων των μηνυμάτων σε διανυσματική μορφή, καθώς και η εύρεση της τιμής σύγκλισης μιας από αυτές μέσα από την επίλυση ενός προβλήματος Semi Definite Programming - SDP.

Εξίσου σημαντική είναι η επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων της μορφής  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , όπου ο  $\mathbf{A}$  είναι ένας πίνακας με  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και τα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{b}$  είναι διανύσματα με  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Μπορεί να θεωρηθεί ότι  $n \rightarrow \infty$ , καταλήγοντας σε συστήματα γραμμικών εξισώσεων με μεγάλο αριθμό μεταβλητών. Συνεπώς, είναι αναγκαία η γρήγορη και αποτελεσματική επίλυσή τους. Μια γνωστή επαναληπτική μέθοδος επίλυσης τέτοιου είδους συστημάτων είναι ο αλγόριθμος Jacobi, του οποίου η ασύγχρονη κατανεμημένη εκδοχή (Asynchronous Parallel Jacobi - APJ) παρουσιάστηκε από τους James Hook και Nicholas Dingle [2], όπου χρησιμοποιείται ένα πλήθος επεξεργαστών για την ενημέρωση τμημάτων (blocks) του ζητούμενου διανύσματος  $\mathbf{x}$ , ενώ κατασκευάζεται ένας κατευθυνόμενος άκυκλος γράφος (Directed Acyclic Graph - DAG) με κόμβους τις ενημερώσεις όλων των επεξεργαστών.

Από τον Danny Bickson [3], στα πλαίσια της διδακτορικής του διατριβής, προτάθηκε η χρήση του αλγορίθμου GaBP για τη λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων ταυτίζοντας την μέση τιμή συμπερασμού με την λύση του συστήματος. Στην ίδια διατριβή αποδείχτηκε ότι ο αλγόριθμος Jacobi αποτελεί υποπερίπτωση του αλγορίθμου GaBP.

Στη συνέχεια, η παρούσα διπλωματική εργασία ακολουθεί την εξής διάρθρωση. Αρχικά, παρουσιάζεται ο σύγχρονος συμπερασμός μέσα από τη παρουσίαση του αλγορίθμου GaBP. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο αλγόριθμος Jacobi μαζί με τις συνθήκες σύγκλισης που τον χαρακτηρίζουν. Έπειτα, γίνεται αναφορά στην α-

νταλλαγή μηνυμάτων με τη χρήση του APJ, καθώς και στη κατασκευή του DAG. Επίσης, παρουσιάζεται ο ρόλος του APJ στην ενημέρωση των παραμέτρων  $\beta^a(t)$  του GaBP, όπου εκμεταλλευόμαστε την γραμμική μορφή της αναδρομικής σχέσης των παραμέτρων αυτών. Πιο συγκεκριμένα, αφού λυθεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης δημιουργείται ένας πίνακας επανάληψης  $\mathbf{G}^*$ , σύμφωνα με τον οποίο ενημερώνονται οι παράμετροι  $\beta^a(t)$  με χρήση του APJ και κατασκευάζεται ο αντίστοιχος DAG. Στη συνέχεια, γίνεται η παρουσίαση του ασύγχρονου αλγορίθμου GaBP. Τέλος, το Κεφάλαιο 4 περιλαμβάνει αριθμητικά παραδείγματα με τις μετρικές σύγκλισης του GaBP (σύγχρονου και ασύγχρονου), παραδείγματα σύγκλισης από την εφαρμογή του APJ στην εκτέλεση του GaBP, καθώς και την εκτίμηση της μέσης τιμής των μονοπατιών στον DAG που αντιστοιχεί στα  $\beta^a(t)$ . Το τελευταίο κεφάλαιο αναπτύσσει ιδέες για μελλοντική μελέτη, οι οποίες λόγω χρόνου δεν περιλαμβάνονται σε αυτή τη διπλωματική εργασία. Οι αποδείξεις κάποιων συγκεκριμένων θεωρημάτων βρίσκονται συγκεντρωμένες στα παραρτήματα.



## Κεφάλαιο 2

# Σύγχρονος συμπερασμός σε πιθανοτικά γραφικά μοντέλα

Ο σύγχρονος συμπερασμός είναι η πιο διαδεδομένη και απλούστερη μορφή συμπερασμού, η οποία προσφέρει συγκεκριμένες ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύγκλισης, ώστε να είναι γνωστή η σύγκλιση a priori. Οι αλγόριθμοι σύγχρονου συμπερασμού χαρακτηρίζονται από μεγάλες ευκολίες όσον αφορά την υλοποίηση και από το γεγονός ότι, κατά τη διάρκεια της ανταλλαγής μηνυμάτων ανάμεσα σε κόμβους - γείτονες, ο εκάστοτε κόμβος περιμένει όλους τους γείτονες του, από τους οποίους θα λάβει μηνύματα, να ενημερώσουν τα μηνύματα τους όσες φορές απαιτείται, ώστε να φτάσουν όλα στον ίδιο βαθμό ακρίβειας και στη συνέχεια να λάβει ένα σύνολο μηνυμάτων, τα οποία είναι τα πλέον ενημερωμένα κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή εκτέλεσης του αλγορίθμου.

### 2.1 Σύγχρονος αλγόριθμος Gaussian Belief Propagation (GaBP)

Ο GaBP κατέχει σπουδαίο ερευνητικό ενδιαφέρον, ενώ χρησιμοποιείται ευρέως σε πληθώρα εφαρμογών υλοποιημένος στη σύγχρονη εκδοχή του.

Έστω λοιπόν, μια Gaussian PDF  $f(\mathbf{x}) \propto \exp\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{h}^T\mathbf{x}\}$ , όπου  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$  ένα τυχαίο διάνυσμα,  $\mathbf{P} \succ 0$  είναι ο πίνακας ακρίβειας (precision matrix) με  $p_{ij}$ , τα  $(i, j)$ -οστά στοιχεία του και  $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$ . Η  $f(\mathbf{x})$  εκφράζεται ως γινόμενο παραγόντων στην μορφή  $f(\mathbf{x}) \propto \prod_{i=1}^N f_i(x_i) \prod_{j=1}^N \prod_{k=j+1}^N f_{jk}(x_j, x_k)$ , όπου  $f_i(x_i) = \exp\{-\frac{p_{ii}}{2}x_i^2 + h_i x_i\}$  και  $f_{jk}(x_j, x_k) = \exp\{-p_{jk}x_j x_k\}$  οι συσχετιζόμενοι παράγοντες. Τα μηνύματα που ανταλλάσσονται κατά την εκτέλεση του GaBP έχουν την παρακάτω μορφή [1].

$$m_{i \rightarrow j}^d(x_i, t) \propto \prod_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} m_{k \rightarrow i}^a(x_i, t) f_i(x_i) \quad (2.1)$$

$$m_{i \rightarrow j}^a(x_j, t+1) \propto \int m_{i \rightarrow j}^d(x_i, t) f_{ij}(x_i, x_j) dx_i, \quad (2.2)$$

όπου  $(i, j) \in \mathcal{E} \triangleq \{(i, j) | i \neq j, p_{ij} \neq 0, \forall i, j \in \mathcal{V}\}$  με  $\mathcal{V} \triangleq \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{N}(i) \triangleq \{j | j \neq i, p_{ij} \neq 0, \forall j \in \mathcal{V}\}$ , το οποίο παριστάνει το σύνολο των κόμβων που είναι γείτονες με τον κόμβο  $i$  και το σύνολο  $\mathcal{N}(i) \setminus j$  είναι το σύνολο  $\mathcal{N}(i)$  χωρίς τον κόμβο  $j$ . Μετά τον υπολογισμό των μηνυμάτων άφιξης (arriving messages), η πεποίθηση (belief) στον κόμβο  $i$  υπολογίζεται ως εξής.

$$b_i(x_i, t) \propto \prod_{k \in \mathcal{N}(i)} m_{k \rightarrow i}^a(x_i, t) f_i(x_i) \quad (2.3)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί ότι το μήνυμα άφιξης στον κόμβο  $j$ ,  $m_{i \rightarrow j}^a(x_j, t)$  και το μήνυμα αναχώρησης από τον κόμβο  $i$  στον κόμβο  $j$ ,  $m_{i \rightarrow j}^d(x_j, t)$  ακολουθούν Gaussian κατανομή με μορφή

$$m_{i \rightarrow j}^a(x_j, t) \propto \exp \left\{ \frac{v_{i \rightarrow j}^a(t)}{2} x_j^2 + \beta_{i \rightarrow j}^a(t) x_j \right\} \quad (2.4)$$

$$m_{i \rightarrow j}^d(x_j, t) \propto \exp \left\{ \frac{v_{i \rightarrow j}^d(t)}{2} x_j^2 + \beta_{i \rightarrow j}^d(t) x_j \right\}, \quad (2.5)$$

όπου τα  $v_{i \rightarrow j}^a$  και  $\beta_{i \rightarrow j}^a$  είναι τα arriving precision και arriving linear coefficient αντίστοιχα, ενώ τα  $v_{i \rightarrow j}^d$  και  $\beta_{i \rightarrow j}^d$  είναι τα departing precision και departing linear coefficient. Για τις παραμέτρους αναχώρησης (departing parameters) έχουμε

$$v_{i \rightarrow j}^d(t) = p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} v_{k \rightarrow i}^a(t) \quad (2.6)$$

$$\beta_{i \rightarrow j}^d(t) = h_i + \sum_{j \in \mathcal{N}(i) \setminus j} \beta_{k \rightarrow i}^a(t) \quad (2.7)$$

Επιπλέον, αντικαθιστώντας την ποσότητα  $m_{i \rightarrow j}^d(x_i, t)$  στην σχέση (2.2) έχουμε

$$m_{i \rightarrow j}^a(x_j, t+1) \propto$$

$$\exp \left\{ \frac{p_{ij}^2}{2v_{i \rightarrow j}^d(t)} x_j^2 - \frac{p_{ij}\beta_{i \rightarrow j}^d(t)}{v_{i \rightarrow j}^d(t)} x_j \right\} \times \int \exp \left\{ -\frac{v_{i \rightarrow j}^d(t)}{2} \left( x_i - \frac{\beta_{i \rightarrow j}^d(t) - p_{ij}x_j}{v_{i \rightarrow j}^d(t)} \right)^2 \right\} dx_i \quad (2.8)$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε  $v_{i \rightarrow j}^d(t) > 0$ , το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.8) είναι ίσο με μια σταθερά. Συνεπώς,  $m_{i \rightarrow j}^a(x_j, t+1) \propto \exp \left\{ \frac{p_{ij}^2}{2v_{i \rightarrow j}^d(t)} x_j^2 - \frac{p_{ij}\beta_{i \rightarrow j}^d(t)}{v_{i \rightarrow j}^d(t)} x_j \right\}$ . Ενώ, για τις παραμέτρους άφιξης (arriving parameters) έχουμε

$$v_{i \rightarrow j}^a(t+1) = \begin{cases} \frac{-p_{ij}^2}{v_{i \rightarrow j}^d(t)}, & \text{αν } v_{i \rightarrow j}^d(t) > 0 \\ \text{not defined}, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\beta_{i \rightarrow j}^a(t+1) = \begin{cases} \frac{-p_{ij}\beta_{i \rightarrow j}^d(t)}{v_{i \rightarrow j}^d(t)}, & \text{αν } v_{i \rightarrow j}^d(t) > 0 \\ \text{not defined}, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.10)$$

Αφού καθοριστούν πλήρως οι παράμετροι  $v_{k \rightarrow i}^a(t)$  και  $\beta_{k \rightarrow i}^a(t)$ , προσδιορίζονται η μέση τιμή και η διασπορά στον κόμβο  $i$ , οι οποίες ονομάζονται παράμετροι συμπερασμού (belief parameters).

$$\sigma_i^2(t) = \frac{1}{p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} v_{k \rightarrow i}^a(t)} \quad (2.11)$$

$$\mu_i(t) = \frac{h_i + \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} \beta_{k \rightarrow i}^a(t)}{p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} v_{k \rightarrow i}^a(t)} \quad (2.12)$$

Η διαδικασία καθορισμού των  $(\sigma_i^2(t), \mu_i(t))$  ξεκινάει με την εκτέλεση του αλγορίθμου GaBP και την σύγκλιση των παραμέτρων  $v_{k \rightarrow i}^a(t)$  και  $\beta_{k \rightarrow i}^a(t)$  στις πραγματικές τιμές τους. Αφού συγκλίνουν οι παράμετροι άφιξης, μπορεί να υπολογιστεί πλήρως τόσο η μέση τιμή όσο και η διασπορά της οριακής PDF, που ζητείται να εκτιμηθεί. Επιπλέον, είναι σημαντικό να παρατηρηθεί ότι κατά τον υπολογισμό των μηνυμάτων από τον κόμβο  $i$  προς τον κόμβο  $j$  απαιτούνται όλα τα μηνύματα από τους γείτονες κόμβους του  $i$  με εξαίρεση τον κόμβο  $j$  για τον οποίο και προορίζεται το μήνυμα.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η παραπάνω διαδικασία ανταλλαγής μηνυμάτων με χρήση διανυσματικών σχέσεων για την ενημέρωση των παραμέτρων άφιξης και των παραμέτρων αναχώρησης [1]. Αυτή η διανυσματική μορφή θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια της παρούσας εργασίας. Αντικαθιστώντας την παράμετρο  $v_{i \rightarrow j}^d(t)$  από την σχέση (2.6) στη σχέση (2.9) και γράφοντας την παράμετρο  $v_{i \rightarrow j}^a(t+1)$  σε διανυσματική μορφή προκύπτει ότι

$$\mathbf{v}^a(t+1) = \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{v}^a(t)), & \text{αν } \mathbf{v}^a(t) \in \mathcal{W} \\ \text{not defined,} & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad (2.13)$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{v}^a(t)$  περιέχει όλα τα στοιχεία  $\mathbf{v}_{i \rightarrow j}^a$  με  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά από το  $j$  προς το  $i$  και η  $\mathbf{g}(\cdot)$  είναι μια συνάρτηση διανυσματικών τιμών (vector valued function) με στοιχεία

$$g_{ij}(\mathbf{w}) \triangleq -\frac{p_{ij}^2}{p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki}} \quad (2.14)$$

όπου τα  $(i, j) \in \mathcal{E}$  είναι ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά από το  $j$  προς το  $i$  και το σύνολο  $\mathcal{W}$  είναι

$$\mathcal{W} \triangleq \left\{ \mathbf{w} \mid p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki} > 0, \forall (i, j) \in \mathcal{E} \right\} \quad (2.15)$$

Ομοίως, αντικαθιστώντας από την  $v_{i \rightarrow j}^d(t)$  από την σχέση (2.6) και την παράμετρο  $\beta_{i \rightarrow j}^d(t)$  από τη σχέση (2.7), στη σχέση (2.10) και ξαναγράφοντας τη σχέση της παραμέτρου  $\beta_{i \rightarrow j}^a(t+1)$  σε διανυσματική μορφή προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\beta}^a(t+1) = \begin{cases} \mathbf{G}(t)\boldsymbol{\beta}^a(t) + \mathbf{b}(t), & \text{αν } \mathbf{v}^a(t) \in \mathcal{W} \\ \text{not defined,} & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.16)$$

όπου το  $\boldsymbol{\beta}^a(t)$  είναι ένα διάνυσμα, το οποίο περιέχει τα στοιχεία  $\beta_{i \rightarrow j}^a$  με  $(i, j) \in \mathcal{E}$  ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά από το  $j$  προς το  $i$  και οι ποσότητες  $\mathbf{G}(t)$  και  $\mathbf{b}(t)$  ορίζονται ως εξής,

$$\mathbf{G}(t) \triangleq -\text{diag}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{v}^a(t) + \mathbf{u})\text{diag}(\mathbf{p})\mathbf{A}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{b}(t) \triangleq -\text{diag}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{v}^a(t) + \mathbf{u})\text{diag}(\mathbf{p})\boldsymbol{\xi} \quad (2.18)$$

όπου ο  $\mathbf{A}$  είναι ένας  $|\mathcal{E}| \times |\mathcal{E}|$  ορισμένος έτσι ώστε το  $\mathbf{A}\mathbf{v}^a(t)$  να είναι ένα διάνυσμα στήλης, το οποίο περιέχει τα στοιχεία  $\sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} v_{k \rightarrow i}^a(t)$  με τα  $(i, j)$  να είναι ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά από το  $j$  προς το  $i$ , το  $\mathbf{p}$  περιέχει τα στοιχεία  $p_{ij}$  με τα  $(i, j)$  να είναι ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά από το  $j$  προς το  $i$ , το

$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \dots, \mathbf{u}_N^T]^T$  με κάθε  $\mathbf{u}_i$  ένα διάνυσμα στήλης, το οποίο περιέχει τα στοιχεία  $p_{jj}$  για όλα τα  $j \in \mathcal{N}(i)$  ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά και  $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\xi}_1^T, \boldsymbol{\xi}_2^T, \dots, \boldsymbol{\xi}_N^T]^T$ , όπου το  $\boldsymbol{\xi}_i$  είναι ένα διάνυσμα, στήλης το οποίο περιέχει τα στοιχεία  $h_j$  για όλα τα  $j \in \mathcal{N}(i)$ , ταξινομημένα κατά αύξουσα σειρά.

### 2.1.1 Σύγκλιση μηνυμάτων στον GaBP

Κατά την εκτέλεση του GaBP, είναι σημαντικό να συγκλίνουν τα μηνύματα που ανταλλάσσουν οι κόμβοι σε συγκεκριμένες πραγματικές τιμές. Η σύγκλιση των μηνυμάτων χαρακτηρίζεται από τη σύγκλιση των παραμέτρων τους. Άρα, αν συγκλίνουν οι παράμετροι των μηνυμάτων τότε συγκλίνουν και τα μηνύματα. Για το λόγο αυτό είναι σημαντική η μελέτη των συνθηκών σύγκλισης των μηνυμάτων, η οποία είναι αντικείμενο αυτής της υποενότητας. Αρχικά, παρουσιάζεται η συνθήκη σύγκλισης της παραμέτρου  $\mathbf{v}^a(t)$  [1]

**Θεώρημα 1 :** *Κάτω απο οποιοδήποτε χρονοδιάγραμμα - (scheduling) του αλγορίθμου GaBP, οι παράμετροι άφιξης  $\mathbf{v}^a(t)$  συγκλίνουν στις ίδιες τιμές για όλα τα  $\mathbf{v}^a(0) \in \mathcal{A}$ , αν και μόνο αν  $S_1 \neq \emptyset$ , όπου*

$$S_1 \triangleq \{\mathbf{w} | \mathbf{w} \leq \mathbf{g}(\mathbf{w}) \text{ and } \mathbf{w} \in \mathcal{W}\} \quad (2.19)$$

$$\mathcal{A} \triangleq \{\mathbf{w} \geq \mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{w} \geq \mathbf{w}_0 | \mathbf{w}_0 \in \text{int}(S_1)\} \cup \{\mathbf{w} \geq \mathbf{w}_0 | \mathbf{w}_0 \in S_1 \text{ and } \mathbf{w}_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{g}^{(t)}(\mathbf{0})\} \quad (2.20)$$

με

$$\mathbf{g}^{(t)}(\mathbf{w}) \triangleq \mathbf{g}(\mathbf{g}^{(t-1)}(\mathbf{w})) \text{ and } \mathbf{g}^{(0)}(\mathbf{w}) \triangleq \mathbf{w}. \quad (2.21)$$

Απόδειξη: [4]  $\square$

Για να εξασφαλιστεί αν  $S_1 = \emptyset$  ορίζεται το παρακάτω Semi - Definite Programming (SDP) πρόβλημα [1].

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{w}\|^2 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki} & p_{ij} \\ p_{ij} & -w_{ij} \end{bmatrix} \succeq 0, \forall (i, j) \in \mathcal{E} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να λυθεί με επιτυχία με τη χρήση λογισμικών, όπως το εργαλείο CVX της Matlab.

**Πρόταση 1** :  $S_1 \neq \emptyset$ , αν και μόνο αν το (2.23) έχει εφικτή λύση.

Απόδειξη: Παράρτημα 1.  $\square$

Η βέλτιστη λύση του προβλήματος (2.22) δείχνει αν το σύνολο  $S_1 = \emptyset$ . Επίσης, η λύση αυτή έχει μια εξίσου σημαντική συνεισφορά στον καθορισμό των τιμών σύγκλισης των παραμέτρων  $\mathbf{v}^a(t)$ , η οποία φαίνεται στην παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 2** : Υπό την προϋπόθεση ότι  $S_1 \neq \emptyset$ , η βέλτιστη λύση του προβλήματος (2.22)  $\mathbf{w}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)$  για  $\mathbf{v}^a(0) \in \mathcal{A}$

Απόδειξη: Παράρτημα 1.  $\square$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2, είναι δυνατό να επιλυθεί πρώτα το SDP, από το οποίο θα προκύψουν οι πραγματικές τιμές των  $\mathbf{v}^a(t)$  και κατόπιν να υπολογιστούν οι παράμετροι  $\beta^a(t)$ , μέσω της επαναληπτικής εφαρμογής της σχέσης

$$\beta^a(t+1) = \mathbf{G}^* \beta^a(t) + \mathbf{b}^*, \quad (2.23)$$

όπου

$$\mathbf{G}^* \triangleq -\text{diag}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{w}^* + \mathbf{u})\text{diag}(\mathbf{p})\mathbf{A} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{b}^* \triangleq -\text{diag}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{w}^* + \mathbf{u})\text{diag}(\mathbf{p})\boldsymbol{\xi} \quad (2.25)$$

Οι παράμετροι  $\beta^a(t)$  θα συγκλίνουν για όλες τις τιμές των  $\beta^a(0) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  αν και μόνο αν το  $\rho(\mathbf{G}^*) < 1$ . Είναι σημαντικό όμως να τονισθεί ότι στον αλγόριθμο GaBP οι παράμετροι άφιξης  $\mathbf{v}^a(t)$  και  $\beta^a(t)$  ενημερώνονται κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι αναγκαίο να περιμένει η μια παράμετρος την άλλη να συγκλίνει, ώστε να μπορέσει να συγκλίνει και εκείνη. Στο παρακάτω θεώρημα φαίνεται ότι ακόμα και με ταυτόχρονη ενημέρωση, οι παράμετροι αυτές συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές για όλες τις αρχικές επιλογές  $\mathbf{v}^a(0) \in \mathcal{A}$  και  $\beta^a(0) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ .

**Θεώρημα 2** : Οι παράμετροι των μηνυμάτων  $(\mathbf{v}^a(t), \beta^a(t))$  συγκλίνουν στις ίδιες τιμές για όλες τις αρχικές επιλογές των  $\mathbf{v}^a(0) \in \mathcal{A}$  και  $\beta^a(0) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ , αν και μόνο αν  $S_1 \neq \emptyset$  και  $\rho(\mathbf{G}^*) < 1$ .

Απόδειξη : [1]  $\square$

### 2.1.2 Σύγκλιση παραμέτρων συμπερασμού στο σύγχρονο GaBP

Στο τέλος της ημέρας, αυτό που ζητείται είναι η εύρεση της οριακής PDF ως προς μια τυχαία μεταβλητή  $x_i$ , η οποία αποτελεί και κόμβο στον πιθανοτικό γράφο. Έτσι, το τελικό στάδιο του αλγορίθμου είναι ο υπολογισμός των παραμέτρων συμπερασμού, οι οποίες θα ταυτίζονται με τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν τη ζητούμενη οριακή κατανομή. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης των παραμέτρων συμπερασμού του αλγορίθμου GaBP [1]. Το παρακάτω θεώρημα μεταφέρει την συνθήκη σύγκλισης στον αναγνώστη.

**Θεώρημα 3 :** Στο σύγχρονο *Gaussian Belief Propagation*, οι παράμετροι συμπερασμού  $(\sigma_i^2(t), \mu_i(t))$  συγκλίνουν στις ίδιες τιμές, για όλες τις επιλογές των αρχικών συνθηκών  $\mathbf{v}^a(0) \in \mathcal{A}$  και  $\beta^a(0) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ , αν και μόνο αν  $\mathcal{S}_1 \neq \emptyset$ ,  $\rho(\mathbf{G}^*) < 1$  και  $p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} w_{ki}^* \neq 0$ .

Απόδειξη: [1]  $\square$

## 2.2 Αλγόριθμος Jacobi

Μια από τις αρχαιότερες επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης συστημάτων της μορφής  $Ax = b$  είναι ο αλγόριθμος Jacobi, [5] ο οποίος πήρε το όνομα του από τον μαθηματικό Carl Gustav Jacob Jacobi. Πριν προχωρήσει η ανάλυση του αλγορίθμου, είναι σημαντικό να καταγραφεί ότι η βασική ιδέα πίσω από την επίλυση συστημάτων με τον αλγόριθμο Jacobi βασίζεται στην κατασκευή ενός πίνακα επανάληψης (iteration matrix), ο οποίος ενημερώνει επαναληπτικά τη λύση του συστήματος, την οποία θέλουμε να εκτιμήσουμε μέχρι να συγκλίνει στην βέλτιστη τιμή της.

Πιο συγκεκριμένα, στην κατασκευή του πίνακα επανάληψης συμβάλει ο πίνακας  $\mathbf{A}$ , ο οποίος διασπάται σε έναν διαγώνιο πίνακα, με τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου, σε έναν άνω τριγωνικό πίνακα ο οποίος περιέχει τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}$  από την κύρια διαγώνιο και κάτω, χωρίς αυτήν και σε έναν κάτω τριγωνικό πίνακα, ο οποίος περιέχει τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}$  από την κύρια διαγώνιο και πάνω, χωρίς αυτήν.

Εκτός από τον πίνακα επανάληψης, σημαντικό ρόλο στην επαναληπτική φόρμουλα έχει ο σταθερός όρος ο οποίος αποτελείται από τον αντίστροφο του διαγώνιου πίνακα του πίνακα  $\mathbf{A}$  και από το διάνυσμα  $\mathbf{b}$ . Ο αλγόριθμος Jacobi, κατά την εκτέλεση του υποθέτει ότι για τον πίνακα  $\mathbf{A}$  ισχύει  $\forall i, A_{ii} \neq 0$ .

### 2.2.1 Ο αλγόριθμος Jacobi - Γενική μορφή

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για να κατασκευαστεί ο πίνακας επανάληψης θα πρέπει ο πίνακας  $\mathbf{A}$  να διαμεριστεί σε έναν διαγώνιο πίνακα με μορφή [5]

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

και σε δυο τριγωνικούς πίνακες, άνω και κάτω, με μορφή

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Η λύση τους συστήματος  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  προσεγγίζεται εκτελώντας επαναληπτικά την σχέση

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{c}, \quad (2.28)$$

όπου  $\mathbf{x}(k)$  η  $k$ -οστή ενημέρωση του διανύσματος  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{M}$  ο πίνακας επανάληψης με  $\mathbf{M} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$  και  $\mathbf{c}$  ένας σταθερός όρος με  $\mathbf{c} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$ . Η σχέση (2.28) μπορεί να γραφτεί σε μια διαφορετική φόρμουλα η οποία αντιστοιχεί στη ενημέρωση κάθε στοιχείου του διανύσματος  $\mathbf{x}$  ξεχωριστά ως εξής,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{c} - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}(k-1) \Rightarrow \mathbf{x}(k) = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}(k-1) \Rightarrow \\ &\mathbf{x}(k) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}(k-1)) \\ &\Rightarrow x_i(k) = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j(k-1)) \end{aligned} \quad (2.29)$$



### 2.2.2 Συνθήκες σύγκλισης του αλγορίθμου Jacobi

Για τον αλγόριθμο Jacobi [5] έχουν μελετηθεί συγκεκριμένες συνθήκες σύγκλισης, οι οποίες παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα. Η πρώτη ικανή συνθήκη αφορά τον πίνακα  $\mathbf{A}$ , ο οποίος πρέπει να είναι αυστηρά διαγώνια υπεροχικός (strictly diagonally dominant), σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 1** (Αυστηρή διαγώνια υπεροχή): Ένας τετραγωνικός πίνακας έχει την ιδιότητα της αυστηρής διαγώνιας υπεροχής, αν και μόνο αν κάθε στοιχείο της κύριας διαγώνιου του είναι μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή από το άθροισμα των απολύτων τιμών των στοιχείων της γραμμής στην οποία ανήκει. Για παράδειγμα, για έναν πίνακα  $3 \times 3$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

θα πρέπει

$$|a_{11}| > \sum_{j \neq 1} a_{1j}, \quad |a_{22}| > \sum_{j \neq 2} a_{2j}, \quad |a_{33}| > \sum_{j \neq 3} a_{3j}$$

Η συνεισφορά της διαγώνιας υπεροχής του πίνακα  $A$  στην σύγκλιση του αλγορίθμου φαίνεται πιο αναλυτικά στον παρακάτω ισχυρισμό.

**Ισχυρισμός 1** : Αν ο πίνακας  $\mathbf{A}$  είναι αυστηρά διαγώνια υπεροχικός, τότε ο αλγόριθμος Jacobi συγκλίνει σταδιακά στη λύση του συστήματος  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , για κάθε αρχική κατάσταση  $\mathbf{x}_0$ .

Σύμφωνα με τον ορισμό 1, όταν ένας πίνακας  $\mathbf{A}$  είναι αυστηρά διαγώνια υπεροχικός (πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι είναι και πλήρους βαθμού (full rank)) ισχύει για τα στοιχεία του ότι

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \quad (2.30)$$

Επιπλέον, από την σχέση (2.28), αντικαθιστώντας το  $\mathbf{M}$  και το  $\mathbf{c}$ , προκύπτει η παρακάτω έκφραση για τη σχέση ενημέρωσης του αλγορίθμου Jacobi

$$\mathbf{x}(k) = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \quad (2.31)$$

Το άθροισμα των απόλυτων στοιχείων μιας γραμμής του πίνακα  $-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$  θα είναι της μορφής

$$\sum_j \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad (2.32)$$

, καθώς μια γραμμή του πίνακα  $-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$  θα έχει την παρακάτω μορφή

$$\left[ \frac{-a_{i1}}{a_{ii}} \quad \dots \quad \frac{-a_{i,i-1}}{a_{ii}} \quad 0 \quad \frac{-a_{i,i+1}}{a_{ii}} \quad \dots \quad \frac{-a_{in}}{a_{ii}} \right] \quad (2.33)$$

Υπενθυμίζεται, ότι και οι τρεις πίνακες  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{L}$  και  $\mathbf{U}$  περιέχουν στοιχεία από τον αρχικό πίνακα  $\mathbf{A}$ . Επιπλέον, το spectral radius του πίνακα  $-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$  ορίζεται ως

$$\rho(-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})) \quad (2.34)$$

Η σχέση (2.32) συνεπάγεται τη σχέση

$$\|-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\|_{\infty} < 1 \quad (2.35)$$

και γνωρίζοντας ότι γενικά ισχύει  $\rho(\cdot) \leq \|\cdot\|_{\infty}$  προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\rho(-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})) = \rho(\mathbf{M}) \leq 1 \quad (2.36)$$

Ξεκινώντας από τον Ισχυρισμό 1, ο οποίος αφορά τη διαγώνια υπεροχή του πίνακα  $\mathbf{A}$ , προέκυψε η συνθήκη (2.36), η οποία αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης του αλγορίθμου Jacobi. Πιο συγκεκριμένα, η επαναληπτική μέθοδος Jacobi, η οποία χρησιμοποιεί τη σχέση (2.28) για την ενημέρωση του διανύσματος  $\mathbf{x}$ , συγκλίνει στην λύση του συστήματος, για κάθε αρχική κατάσταση  $\mathbf{x}_0$ , αν και μόνο αν  $\rho(\mathbf{M}) < 1$ .

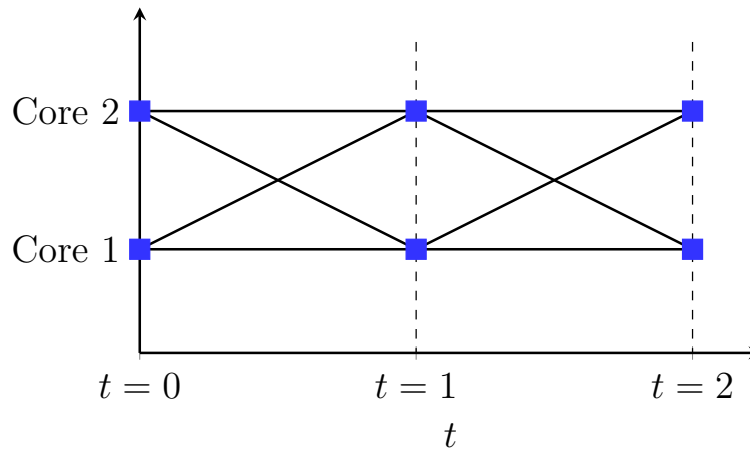
## Κεφάλαιο 3

# Ασύγχρονοι αλγόριθμοι ανταλλαγής μηνυμάτων

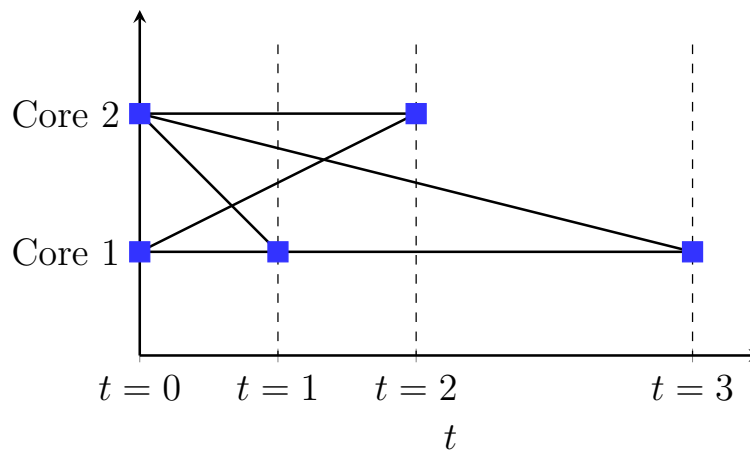
Πηγαίνοντας ένα στάδιο παραπέρα, βρίσκεται η ιδέα της ασύγχρονης ανταλλαγής μηνυμάτων. Για να συμβεί η ασύγχρονη ανταλλαγή μηνυμάτων είναι απαραίτητο ένας κόμβος που προετοιμάζεται να στείλει ένα μήνυμα σε έναν γείτονα του και χρειάζεται να επεξεργαστεί μηνύματα από άλλους κόμβους, να μην περιμένει απαραίτητα οι γείτονες, από τους οποίους περιμένει μηνύματα, να τα έχουν ενημερώσει μέχρι το ίδιο σημείο. Αντίθετα, χρησιμοποιεί οποιαδήποτε έκδοση των μηνυμάτων τους, η οποία είναι διαθέσιμη εκείνη τη χρονική στιγμή.

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε 5 κόμβους τους,  $i, j, k, l$  και  $m$ , οι οποίοι σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή εκτέλεσης του αλγορίθμου θα έχουν ενημερωθεί 2, 4, 7, 15 και 10 φορές αντίστοιχα. Έστω, ότι ο κόμβος  $i$  θέλει να στείλει ένα νέο μήνυμα στον κόμβο  $j$  και οι κόμβοι  $k, l$  και  $m$  είναι γείτονες του. Αυτό που χρειάζεται να γίνει είναι να συνυπολογίσει τα μηνύματα από τους γείτονες κόμβους του, κατά την αποστολή του νέου μηνύματος προς τον  $j$ . Συνεπώς, αναγκαστικά θα χρησιμοποιήσει τον κόμβο  $k$ , ο οποίος έχει κάνει 7 ενημερώσεις, τον κόμβο  $l$ , ο οποίος έχει κάνει 15 ενημερώσεις και τον κόμβο  $m$ , ο οποίος έχει κάνει 10 ενημερώσεις. Δεν χρειάζεται να έχουν κάνει τον ίδιο αριθμό ενημερώσεων για να προχωρήσει ο αλγόριθμος στην νέα ενημέρωση. Μαθηματικοποιώντας την ασύγχρονη ανταλλαγή μηνυμάτων και προσαρμόζοντας τη στον αλγόριθμο Jacobi, προκύπτει η εκδοχή της ασύγχρονης ανταλλαγής μηνυμάτων με τον αλγόριθμο Jacobi, όπως παρουσιάζεται στην ενότητα 3.1. Η εκδοχή αυτή βασίζεται στην ιδέα της κατανομής του προβλήματος και του υπολογιστικού φόρτου σε πολλούς διαφορετικούς επεξεργαστές, οι οποίοι επικοινωνούν μεταξύ τους ανταλλάσσοντας μηνύματα ασύγχρονα. Ένας επεξεργαστής  $i$  χρησιμοποιεί την πιο πρόσφατη ενημέρωση ενός γείτονα του επεξεργαστή ή αλλιώς την ενημέρωση που είναι διαθέσιμη εκείνη τη χρονική στιγμή. Η διαδικασία

αυτή μπορεί να γίνει περισσότερο κατανοητή μέσα από τα σχήματα 3.1 και 3.2, όπου παρουσιάζεται η εκτέλεση ενός αλγορίθμου χρησιμοποιώντας τη σύγχρονη και την ασύγχρονη εκδοχή με δυο επεξεργαστές.



Σχήμα 3.1: Σύγχρονη εκδοχή



Σχήμα 3.2: Ασύγχρονη εκδοχή.

Στο σχήμα 3.1 παρατηρείται ότι και οι δυο επεξεργαστές πραγματοποιούν τις ενημερώσεις τους χρησιμοποιώντας τις ενημερώσεις των γειτόνων τους από την ακριβώς προηγούμενη χρονική στιγμή εκτέλεσης του αλγορίθμου. Αντίστοιχα, στο σχήμα 3.2 οι επεξεργαστές πραγματοποιούν τις ενημερώσεις τους χρησιμοποιώντας όποιες ενημερώσεις των γειτόνων τους είναι διαθέσιμες τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η χρονική στιγμή  $t = 3$  όπου ο επεξεργαστής 1 δεν χρησιμοποιεί την ενημέρωση του επεξεργαστή 2 που πραγματοποιήθηκε τη χρονική στιγμή  $t = 2$  αλλά την ενημέρωση που πραγματοποιήθηκε τη στιγμή  $t = 0$ .

Ένα παράδειγμα εφαρμογής της ασύγχρονης εκδοχής είναι στον τομέα των ασύρματων δικτύων, όπου ένας ασύρματος επεξεργαστής (Wireless Core - WC) δεν περιμένει της νεότερες ενημερώσεις από τους γείτονες - επεξεργαστές αλλά χρησιμοποιεί παλαιότερες ενημερώσεις, οι οποίες όμως είναι διαθέσιμες. Η ασύγχρονη κατανεμημένη εκδοχή του αλγορίθμου Jacobi παρουσιάζεται εκτενώς στο [2] ενώ η θεωρία πίσω από τα παραπάνω σχήματα μαζί με πλήθος εφαρμογών παρουσιάζονται στο [6].

### 3.1 Ασύγχρονος κατανεμημένος αλγόριθμος Jacobi

Ο ασύγχρονος αλγόριθμος Jacobi [2] χρησιμοποιεί τη σχέση (2.28) για την επαναληπτική ενημέρωση του διανύσματος  $\mathbf{x}$  χρησιμοποιώντας ένα πλήθος από επεξεργαστές, ώστε να κατανεμηθεί ο υπολογιστικός φόρτος του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, τα διανύσματα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{c}$  διαμερίζονται σε  $N$  - τμήματα (blocks) και ο πίνακας επανάληψης  $M$  διαμερίζεται σε  $N \times N$  υποπίνακες. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ορίζουμε το  $i$  - οστό τμήμα του  $\mathbf{x}$  ως  $x_i$  και το  $(i, j)$  - οστό υποπίνακα του  $M$  ως  $M_{ij}$ . Έτσι, ο επεξεργαστής  $i$  είναι υπεύθυνος για την επαναληπτική ενημέρωση του τμήματος  $x_i$  και υπολογίζει επαναληπτικά την ακολουθία  $x_i(1), x_i(2), \dots$  χρησιμοποιώντας τη σχέση.

$$x_i(k) = \sum_{j=1}^N M_{ij} x_j(\Psi(i, j, k)) + c_i \quad (3.1)$$

όπου  $\Psi(i, j, k) = m$  αν ο επεξεργαστής  $i$  χρησιμοποιεί τη  $m$  - οστή ενημέρωση (update) του επεξεργαστή  $j$  για τον υπολογισμό της  $k$  - οστής ενημέρωσης (update) του. Το  $\Psi : \{1, \dots, N\}^2 \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  ονομάζεται input index. Το input index δεν μπορεί να είναι γνωστό a priori, γι' αυτό είναι καλύτερο να θεωρηθεί ως μια ψευδοτυχαία μεταβλητή, η οποία καθορίζεται πρακτικά από τον χρόνο, τους υπολογισμούς και την επικοινωνία μεταξύ των επεξεργαστών κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του αλγορίθμου. Μια αξιόλογη παρατήρηση είναι ότι αν ισχύει  $m = k - 1$  και κατά συνέπεια

$\Psi(i, j, k) = k - 1 \forall i, j, k$ , τότε προκύπτει μια σύγχρονη κατανομημένη εκδοχή του αλγορίθμου Jacobi, καθώς ο επεξεργαστής  $i$  χρησιμοποιεί τη  $(k - 1)$ -οστή, δηλαδή την ακριβώς προηγούμενη ενημέρωση του επεξεργαστή  $j$  για τον υπολογισμό της  $k$ -οστής ενημέρωσης του.

Επιπλέον, σε περίπτωση που για κάποιο υποπίνακα του πίνακα επανάληψης ισχύει  $M_{ij} = 0$ , τότε δεν υπάρχει επικοινωνία από τον επεξεργαστή  $i$  προς τον επεξεργαστή  $j$  και κατά συνέπεια ο επεξεργαστής  $i$  δεν χρησιμοποιεί καμία ενημέρωση του επεξεργαστή  $j$ . Ορίζονται επίσης τα μεγέθη  $v_i(t)$  και  $x[t]$ , τα οποία εκφράζουν το σύνολο των ενημερώσεων που έχει πραγματοποιήσει ένας επεξεργαστής μέχρι τη χρονική στιγμή  $t$  και τη κατάσταση του συστήματος τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$ , αντίστοιχα, με

$$x[t] = (x_1(v_1(t)), \dots, x_N(v_N(t))) \quad (3.2)$$

### 3.2 Πιθανότητα αστοχίας $P_m$

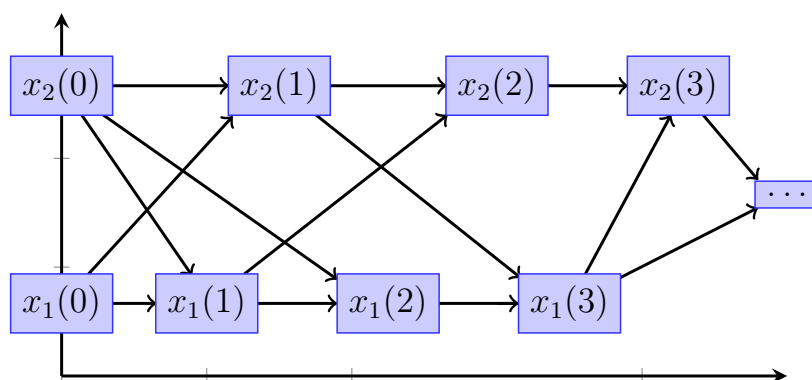
Στο σημείο αυτό, είναι σημαντικό να αναφερθεί ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται η ασύγχρονη εκτέλεση των αλγορίθμων. Για παράδειγμα, για τον APJ χρειάζεται να προσομοιωθεί με κάποιο τυχαίο τρόπο η σχέση  $\Psi(i, j, k) = m$ . Εδώ, εισάγεται η έννοια της πιθανότητας αστοχίας (probability of miss)  $P_m$ . Για την πιθανότητα αστοχίας, όπως και για κάθε άλλη πιθανότητα, ισχύει  $0 \leq P_m \leq 1$ . Έτσι, μπορούμε να καθορίσουμε την τιμή της, π.χ.  $P_m = 0.75$  και έπειτα να αντιστοιχίσουμε κάθε παράμετρο  $x_i(k)$  με έναν τυχαίο αριθμό στο διάστημα  $[0, 1]$ . Στη συνέχεια μπορούμε να ορίσουμε ότι για όσα στοιχεία οι αριθμοί τους είναι μικρότεροι από την  $P_m$  δεν ενημερώνονται και διατηρούν τις παλαιότερες τιμές τους, ενώ στην περίπτωση που οι αριθμοί τους είναι μεγαλύτεροι από το  $P_m$ , τότε πραγματοποιούνται νέες ενημερώσεις.

Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται η ασύγχρονη εκτέλεση των αλγορίθμων, καθώς κάποια στοιχεία θα ενημερώνονται λιγότερες φορές, διατηρώντας τις παλαιότερες τιμές τους, ενώ κάποια άλλα θα πραγματοποιούν νέες ενημερώσεις. Για να ενημερωθεί ένα τμήμα  $x_i$  από τον επεξεργαστή  $i$  για  $k$ -οστή φορά δεν χρειάζεται τα μηνύματα που θα λάβει από τους γείτονες επεξεργαστές του να έχουν ενημερωθεί και αυτά  $k$  φορές. Αντίθετα, αξιοποιεί μηνύματα από γείτονες επεξεργαστές, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι μαζί του και μπορεί να έχουν ενημερωθεί λιγότερες ή περισσότερες φορές,

όπως για παράδειγμα  $(k - 1)$ ,  $(k - 2)$ ,  $(k - 5)$ ,  $(k - 10)$  ή ακόμα  $(k + 10)$ ,  $(k + 8)$  κ.ο.κ.

### 3.3 Κατευθυνόμενος άκυκλος γράφος

Η ασύγχρονη κατανεμημένη εκδοχή του αλγορίθμου Jacobi συνοδεύεται από την κατασκευή ενός κατευθυνόμενου άκυκλος γράφου (directed acyclic graph - DAG) [2], ο οποίος εκφράζει το χρονοδιάγραμμα του αλγορίθμου και για αυτό το λόγο, ονομάζεται γράφος χρονοδιαγράμματος (scheduling graph). Οι κόμβοι του DAG αντιστοιχούν στις ενημερώσεις όλων των επεξεργαστών, δηλαδή στο σύνολο  $\{x_i(k) : i = 1, \dots, N : k = 1, 2, \dots\}$ . Δυο τυχαίοι κόμβοι,  $x_j(m)$  και  $x_i(k)$ , συνδέονται με μια ακμή όταν ικανοποιείται η συνθήκη  $\Psi(i, j, k) = m$ . Έτσι, το πλήθος των ενημερώσεων ενός επεξεργαστή ταυτίζεται με το πλήθος των κόμβων που συνεισφέρει στο γράφο και καθορίζεται από τη ψευδοτυχαία μεταβλητή  $\Psi$ . Στο Σχήμα 3.3, παρουσιάζεται ένα παράδειγμα σχεδίασης ενός DAG που προκύπτει από την εκτέλεση του ασύγχρονου κατανεμημένου Jacobi, όπου γίνεται χρήση δύο επεξεργαστών. Είναι φανερό ότι γίνεται ασύγχρονη εκτέλεση του αλγορίθμου, καθώς οι ενημερώσεις κάθε επεξεργαστή δεν χρησιμοποιούν, απαραίτητα, τις πιο πρόσφατες ενημερώσεις του γείτονα - επεξεργαστή του. Για παράδειγμα, η δεύτερη ενημέρωση του επεξεργαστή 1,  $x_1(2)$ , χρησιμοποιεί την αρχική κατάσταση του επεξεργαστή 2,  $x_2(0)$  και όχι τη πρώτη ενημέρωσή του,  $x_2(1)$ , η οποία είναι η πιο πρόσφατη.



Σχήμα 3.3: DAG με 2 επεξεργαστές

Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε ήδη στην προηγούμενη ενότητα, ο αριθμός των

ενημερώσεων που θα πραγματοποιήσει ένας επεξεργαστής ελέγχεται με τυχαίο τρόπο από την πιθανότητα αστοχίας  $P_m$ . Συνεπώς, επιβεβαιώνεται σε αυτό το σημείο η σχέση μεταξύ της παραμέτρου  $\Psi$  και της πιθανότητας  $P_m$ .

Εξετάζοντας τώρα τη μορφή του γράφου με βάση τις τιμές της πιθανότητας  $P_m$  αναμένεται, διαισθητικά, ότι για τιμή  $P_m = 0$  οι επεξεργαστές θα πραγματοποιούν συνεχώς νέες ενημερώσεις και κατά συνέπεια ο DAG που θα προκύψει θα έχει μεγάλο αριθμό κόμβων. Αντίστοιχα, για την τιμή  $P_m = 1$  οι επεξεργαστές θα πραγματοποιήσουν ελάχιστες ως και καθόλου ενημερώσεις και ο DAG που θα προκύψει μπορεί να έχει ακόμα και μηδενικό αριθμό κόμβων. Επιπλέον, σημειώνεται το διαισθητικό συμπέρασμα ότι όσο αυξάνει σε τιμή η  $P_m$  τόσο λιγότερες ενημερώσεις θα πραγματοποιούνται από τους επεξεργαστές και κατά συνέπεια τόσο λιγότεροι κόμβοι θα περιλαμβάνονται στον DAG.

Μια ακόμα ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι η περίπτωση όπου  $P_m = 0$  ταυτίζεται με την περίπτωση όπου ισχύει η συνθήκη  $\Psi(i, j, k) = k - 1$  και περιγράφει τη σύγχρονη εκδοχή του αλγορίθμου Jacobi. Στη περίπτωση αυτή κατασκευάζεται ένας DAG υψηλού βαθμού, καθώς κάθε επεξεργαστής λαμβάνει μηνύματα από κάθε γείτονά του, από την ακριβώς προηγούμενη ενημέρωση.

Επιπλέον, επεκτείνοντας την περίπτωση όπου για έναν υποπίνακα του πίνακα επανάληψης ισχύει η συνθήκη  $M_{ij} = 0$ , πρέπει να σημειωθεί ότι το αντίκτυπο της συνθήκης αυτής στην κατασκευή του γράφου είναι ότι ο επεξεργαστής  $j$  δεν θα έχει επικοινωνία με τον επεξεργαστή  $i$ , πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι δεν θα υπάρχει ακμή από τους κόμβους του επεξεργαστή  $j$  προς τους κόμβους του επεξεργαστή  $i$  στον γράφο.

Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στα μονοπάτια που ανήκουν στο γράφο, καθώς και στα βάρη των μονοπατιών αυτών. Έστω,  $P(i, j, k)$  ένα σύνολο από μονοπάτια πάνω στον γράφο, τα οποία ξεκινούν από την αρχική κατάσταση του επεξεργαστή  $j$ ,  $x_j(0)$  και καταλήγουν στην  $k$ -οστή ενημέρωση του επεξεργαστή  $i$ ,  $x_i(k)$ . Ένα μονοπάτι είναι μια ακολουθία από μεταβάσεις από κόμβο σε κόμβο το οποίο ορίζεται ως εξής,

$$\sigma = (x_{i(0)}(k_0), x_{i(1)}(k_1), \dots, x_{i(l)}(k_l)) \quad (3.3)$$

Το μονοπάτι  $\sigma \in P(i, j, k)$ , αν και μόνο αν  $i(0) = j$ ,  $k_0 = 0$ ,  $i(l) = i$ ,  $k_l = k$  και  $\Psi(i(m), i(m-1), k_m) = k_{m-1}$  για  $m = 1, \dots, l$ . Οι τέσσερις πρώτες συνθήκες



διασφαλίζουν ότι η έναρξη του μονοπατιού θα είναι στον κόμβο  $x_j(0)$ , ενώ η πέμπτη συνθήκη διασφαλίζει ότι κάθε μετάβαση στο μονοπάτι  $\sigma$  αντιστοιχεί σε μια ακμή στον DAG.

Κάθε μονοπάτι του γράφου έχει συγκεκριμένο μήκος. Το μήκος αυτό συμβολίζεται ως  $L(\sigma)$  και ισχύει ότι  $L(\sigma) = l$ , δηλαδή το μήκος του μονοπατιού είναι ίσο με τον αριθμό των μεταβάσεων, από κόμβο σε κόμβο, πάνω στο γράφο. Στη συνέχεια, μπορεί να οριστεί και το βάρος ενός μονοπατιού του DAG, το οποίο ορίζεται ως το γινόμενο μιας ακολουθίας υποπινάκων του πίνακα επανάληψης  $\mathbf{M}$ , οι οποίοι αντιστοιχούν στις μεταβάσεις του μονοπατιού και δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$W(\sigma) = M_{i(l),i(l-1)} \times \dots \times M_{i(2),i(1)} \times M_{i(1),i(0)} \quad (3.4)$$

Ένα ακόμα μέγεθος που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια είναι ο διαχειριστής σφάλματος (error operator) [2] που ορίζεται ως εξής

$$\Omega(\Psi, M, t) : x[0] - x(*) \mapsto x[t] - x(*) \quad (3.5)$$

Ο διαχειριστής σφάλματος συνδέει το αρχικό σφάλμα, δηλαδή τη διαφορά της βέλτιστης λύσης του συστήματος  $x(*)$  από την αρχική κατάσταση  $x[0]$ , με το σφάλμα τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$ , δηλαδή τη διαφορά της κατάστασης τη στιγμή  $t$ ,  $x[t]$  με τη βέλτιστη λύση του συστήματος,  $x(*)$ . Ιδανικά, σε συνθήκες όπου ο αλγόριθμος συγκλίνει είναι αναμενόμενο ότι το σφάλμα σε μια χρονική στιγμή  $t$  θα είναι μικρότερο από το σφάλμα στην αρχική κατάσταση μέχρι να τείνει προς το μηδέν, καθώς ο αλγόριθμος προσεγγίσει με επιτυχία τη βέλτιστη λύση  $x(*)$ .

**Θεώρημα 4 :**  $O(i, j)$  - οστός υποπίνακας του διαχειριστή σφάλματος (error operator) είναι ίσος με το άθροισμα των βαρών όλων των μονοπατιών πάνω στον DAG, τα οποία ξεκινούν από την αρχική κατάσταση του επεξεργαστή  $j$  μέχρι τη πιο πρόσφατη ενημέρωση του επεξεργαστή  $i$ .

$$\Omega(\Psi, \mathbf{M}, t)_{ij} = \sum_{\sigma \in P(i,j,v_i(t))} W(\sigma) \quad (3.6)$$

Απόδειξη: [2]  $\square$

Το Θεώρημα 4 δείχνει την άμεση σχέση ανάμεσα στο σφάλμα της αρχικής κατάστασης και της συγκεκριμένης χρονικής στιγμής  $t$  και στα βάρη των μονοπατιών πάνω στον DAG

Ομοίως, ορίζονται το μήκος του μικρότερου, καθώς και το μήκος του μεγαλύτερου μονοπατιού πάνω στο γράφο [2]. Το μήκος του μικρότερου μονοπατιού από μια αρχική συνθήκη ως την τρέχουσα ενημέρωση του αλγορίθμου θα είναι

$$s(t) = \min\{L(\sigma) : \sigma \in \cup_{i,j=1,\dots,N} P(i,j,v_i(t))\} \quad (3.7)$$

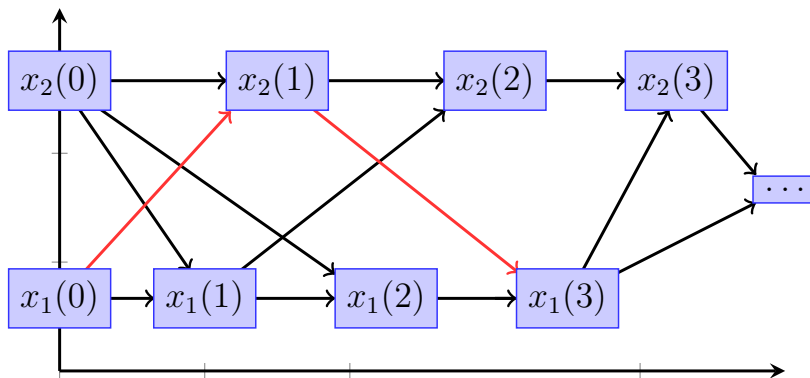
Αντίστοιχα, το μήκος του μεγαλύτερου μονοπατιού ορίζεται ως

$$l(t) = \max\{L(\sigma) : \sigma \in \cup_{i,j=1,\dots,N} P(i,j,v_i(t))\} \quad (3.8)$$

Δυο ακόμα χρήσιμα μεγέθη είναι ο ρυθμός αύξησης του μικρότερου μονοπατιού,  $s^*$  και ο ρυθμός αύξησης του μεγαλύτερου μονοπατιού,  $l^*$ , οι οποίοι ορίζονται ως εξής

$$s^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s(t)}{t}, \quad l^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(t)}{t} \quad (3.9)$$

Στο Σχήμα 3.4, παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ενός DAG που προκύπτει από την εκτέλεση του ασύγχρονου κατανεμημένου Jacobi με τη χρήση δύο επεξεργαστών. Στο ίδιο σχήμα, φαίνεται το ελάχιστο μονοπάτι από τη τρίτη ενημέρωση του επεξεργαστή 1,  $x_1(3)$ , μέχρι την αρχική κατάσταση του,  $x_1(0)$ , με κόκκινο χρώμα.



Σχήμα 3.4: Ελάχιστο μονοπάτι σε DAG με 2 επεξεργαστές

### 3.4 Μη αρνητικοί πίνακες επανάληψης $\mathbf{M}$

Σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξέταση του APJ ανάλογα με το αν ο πίνακας επανάληψης είναι μη αρνητικός ή όχι. Ένας πίνακας είναι μη αρνητικός, αν για κάθε στοιχείο του  $m_{ij} \in \mathbb{R}_+ \forall i, j = 1, \dots, n$ . Η ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ισχύει για τον πίνακα  $\mathbf{A}$ , ώστε ο πίνακας επανάληψης να είναι μη αρνητικός είναι ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο εκτός της κύριας διαγώνιου,  $a_{ij}$ , πρέπει να έχει αντίθετο πρόσημο με το διαγώνιο στοιχείο στην γραμμή που ανήκει,  $a_{ii}$ . Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται σημαντικά αποτελέσματα που προκύπτουν θεωρώντας τον πίνακα επανάληψης μη αρνητικό. Πριν από αυτά όμως, παρουσιάζεται ένα χρήσιμο λήμμα για την ανάπτυξη των επόμενων θεωρημάτων.

**Λήμμα 1 :** Έστω,

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

η  $l_2$  νόρμα. Ισχύει ότι,

1. Αν ο  $\mathbf{A}$  είναι μη αρνητικός και ο  $\mathbf{B}$  ένας υποπίνακας του  $\mathbf{A}$  τότε  $\|\mathbf{A}\| \geq \|\mathbf{B}\|$ .
2. Αν οι  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  είναι δυο  $d \times d$  πίνακες τότε  $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \geq \max\{\|\mathbf{A}\|, \|\mathbf{B}\|\}$ .
3.  $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ .
4.  $\|\mathbf{A}\| \geq \rho(\mathbf{A})$ .
5.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \|\mathbf{A}^k\|}{k} = \log(\rho(\mathbf{A}))$ .
6. Αν  $\rho(\mathbf{A}) < 1$  τότε υπάρχει  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $1 \leq \max_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{A}^k\| \leq \mathbf{C}$ .
7. Αν  $\rho(\mathbf{A}) > 1$  τότε  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\max_{m=1}^k \log \|\mathbf{A}^m\|}{k} = \log(\rho(\mathbf{A}))$ .

Απόδειξη: [2]  $\square$

**Θεώρημα 5 :** Έστω, ότι το πρόβλημα της επίλυσης του συστήματος  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  έχει έναν μη αρνητικό πίνακα επανάληψης  $\mathbf{M}$ , σύμφωνα με τον οποίο εκτελείται ασύγχρονα ο αλγόριθμος με input index  $\Psi$ . Έστω,  $M_{ii}$  ο υποπίνακας που χρησιμοποιεί ο επεξεργαστής  $i$  και  $v_i(t)$  το πλήθος ενημερώσεων του επεξεργαστή  $i$  μέχρι τη χρονική

στιγμή  $t$ . Ισχύει το φράγμα,

$$\|\Omega(\Psi, \mathbf{M}, t)\| \geq \|M_{ii}^{v_i(t)}\| \quad (3.10)$$

έτσι ώστε για τη γενική αρχική κατάσταση  $x(0)$  να ισχύει

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log\|x[t] - x(*)\|}{t} \geq \max_i \{a_i^* \log(\rho(M_{ii}))\} \quad (3.11)$$

, όπου

$$a_i^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_i(t)}{t} \quad (3.12)$$

ο ρυθμός ενημέρωσης του επεξεργαστή  $i$ .

Απόδειξη: [2]  $\square$

Το Θεώρημα 5 αναφέρει ότι η απόδοση του APJ περιορίζεται πάντα από το πιο αργό υποσύστημα του, δηλαδή από τον πιο αργό επεξεργαστή. Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζεται το γεγονός ότι υπάρχει ένα όριο στο πόσο αργή μπορεί να είναι η απόδοση του APJ, το οποίο καθορίζεται από το μήκος του μικρότερου μονοπατιού πάνω στον DAG, δηλαδή του  $s(t)$ .

**Θεώρημα 6 :** Έστω, ότι το πρόβλημα της επίλυσης του συστήματος  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  έχει έναν μη αρνητικό πίνακα επανάληψης  $\mathbf{M}$ , σύμφωνα με τον οποίο ο αλγόριθμος εκτελείται ασύγχρονα με *input index*  $\Psi$ , τότε

$$\|\Omega(\Psi, \mathbf{M}, t)\| \leq \left\| \sum_{k=s(t)}^{l(t)} \mathbf{M}^k \right\| \quad (3.13)$$

Αν  $\rho(\mathbf{M}) < 1$ , τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log\|x[t] - x(*)\|}{t} \leq s^* \log(\rho(\mathbf{M})) \quad (3.14)$$

Αλλιώς αν  $\rho(\mathbf{M}) > 1$ , τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log\|x[t] - x(*)\|}{t} \leq l^* \log(\rho(\mathbf{M})) \quad (3.15)$$

Απόδειξη: [2]  $\square$

### 3.5 Πίνακες επανάληψης $\mathbf{M}$ - Γενική περίπτωση

Γενικά, ένας πίνακας επανάληψης δεν είναι απαραίτητα μη αρνητικός. Για την περίπτωση αυτή παρουσιάζεται το παρακάτω συμπέρασμα.

**Συμπέρασμα 1 :** Έστω, ότι για το πρόβλημα της επίλυσης του συστήματος γραμμικών εξισώσεων  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  δεν απαιτείται ο πίνακας επανάληψης  $\mathbf{M}$  να είναι μη αρνητικός, ενώ ισχύει ότι  $\rho(|\mathbf{M}|)$ , όπου  $|\mathbf{M}|$  είναι ένας πίνακας με στοιχεία τις απόλυτες τιμές των στοιχείων του πίνακα επανάληψης  $\mathbf{M}$ . Ισχύει το παρακάτω άνω φράγμα.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|x[t] - x^*\|}{t} \leq s^* \log(\rho(|\mathbf{M}|)) \quad (3.16)$$

Απόδειξη: Παράρτημα 1.  $\square$

Το Συμπέρασμα 1 διασφαλίζει την εκθετική σύγκλιση του APJ θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν διακοπές στην επικοινωνία μεταξύ επεξεργαστών και ότι  $\rho(|\mathbf{M}|) < 1$ . Η συνθήκη  $\rho(|\mathbf{M}|) < 1$  μπορεί να διασφαλιστεί αν ο πίνακας  $\mathbf{A}$  είναι αυστηρά διαγώνια υπεροχικός.

Μια γενικότερη περίπτωση είναι όταν ο πίνακας επανάληψης μπορεί όχι μόνο να μην είναι μη αρνητικός, αλλά και να μην είναι απαραίτητα πραγματικός. Η περίπτωση αυτή είναι πολύ πιο δύσκολη. Το Θεώρημα 5 δεν εφαρμόζεται ενώ το Θεώρημα 6 απλοποιείται στο Συμπέρασμα 1 και διασφαλίζει τη σύγκλιση αν  $\rho(|\mathbf{M}|) < 1$ . Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα πινάκων επανάληψης, οι οποίοι παρουσιάζουν μια σταθερή συμπεριφορά χρησιμοποιώντας τη σύγχρονη εκδοχή του αλγορίθμου επιτυγχάνοντας σύγκλιση, ενώ ταυτόχρονα παρουσιάζουν ασταθή συμπεριφορά χρησιμοποιώντας την ασύγχρονη εκδοχή. Η σταθερότητα στην ασύγχρονη εκδοχή παρουσιάζει ισχυρή εξάρτηση με τις ακριβείς ιδιότητες του DAG. Έτσι, έχοντας έναν πίνακα επανάληψης ο οποίος είναι σταθερός χρησιμοποιώντας τη σύγχρονη εκδοχή, ενώ είναι ασταθής χρησιμοποιώντας την ασύγχρονη εκδοχή είναι σίγουρο ότι δεν θα είναι ασταθής για

κάθε DAG. Για να αντιμετωπίσουμε την αστάθεια στη χρήση της ασύγχρονης εκδοχής του αλγορίθμου, στην γενική περίπτωση, χρειάζεται να δοθεί ένα παράδειγμα τυχαίου μοντέλου κατασκευής ενός ασύγχρονου DAG και κατόπιν να αποδειχθεί ότι με συγκεκριμένη πιθανότητα, το αποτέλεσμα της ασύγχρονης εκτέλεσης θα παρουσιάζει συγκεκριμένες ιδιότητες σταθερότητας.

Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το εκθετικό Lyapunov των ασύγχρονων συστημάτων. Η θεωρία γύρω από τα εκθετικό Lyapunov αφορά την ανάλυση της σταθερότητας ασυσχέτιστων συνόλων σε μη γραμμικά δυναμικά συστήματα και η εφαρμογή της στον APJ υπερβαίνει το αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας.

### 3.6 Ο ασύγχρονος κατανεμημένος Jacobi στην εκτέλεση του GaBP

Για να εφαρμοστεί η θεωρία του APJ, στον αλγόριθμο GaBP και να κατασκευαστεί ένας DAG, απαραίτητη προϋπόθεση είναι ο ίδιος ο GaBP να εκφραστεί από μια γραμμική αναδρομική σχέση, δηλαδή η εξίσωση σύμφωνα με την οποία θα ενημερώνει τις παραμέτρους ενδιαφέροντος να είναι γραμμική. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να υπάρχει και ένας πίνακας επανάληψης, όπως ακριβώς ο πίνακας  $\mathbf{M}$  για την μέθοδο Jacobi, σύμφωνα με τον οποίο θα εκτελείται ο αλγόριθμος. Γενικά όμως, ο αλγόριθμος GaBP δεν εκφράζεται σαν γραμμική μέθοδος. Αυτό φαίνεται και από τον κανόνα ενημέρωσης της μέσης τιμής συμπερασμού (2.12). Για το λόγο αυτό, έπρεπε να υπάρξει μια διαφορετική ιδέα, ώστε να λειτουργήσει η θεωρία APJ προς όφελος του GaBP. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η αναδρομική σχέση που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος Jacobi έχει τη παρακάτω γραμμική μορφή

$$\mathbf{x}(k) \mapsto \mathbf{M}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{c} \quad (3.17)$$

Η παράμετρος του GaBP που ενημερώνεται χρησιμοποιώντας γραμμική αναδρομική σχέση είναι η  $\beta^{\mathbf{a}}(t)$ , η οποία χρησιμοποιεί τη σχέση

$$\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{a}}(t) \mapsto \mathbf{G}\beta_{\mathbf{k}-1}^{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{b} \quad (3.18)$$

Οι σχέσεις (3.17) και (3.18) έχουν χαρακτηριστική ομοιότητα. Ο πίνακας  $\mathbf{G}$  αποτελεί

τον πίνακα επανάληψης για τον κανόνα (3.18), ενώ τόσο ο πίνακας  $\mathbf{G}$  όσο και το σταθερό διάνυσμα  $\mathbf{b}$  είναι ανεξάρτητα του αριθμού επανάληψης  $k$ . Συνεπώς, δεν υπάρχει κανένα εμπόδιο για να εφαρμοστεί ο APJ στον υπολογισμό των παραμέτρων  $\beta_k^a(t)$  του GaBP.

Για την ολοκλήρωση του συμπερασμού, απαιτείται και η παράμετρος  $\mathbf{v}^a(t)$  που μπορεί να δοθεί επιλύοντας το Semi - Definite Programming πρόβλημα που ορίζεται από τη σχέση (2.22). Σύμφωνα με τη Πρόταση 2, η βέλτιστη λύση του προβλήματος  $(w)^*$  προσεγγίζει τις πραγματικές τιμές σύγκλισης για τις παραμέτρους  $\mathbf{v}^a(t)$ . Άρα, επιλύοντας το SDP πρόβλημα προκύπτουν άμεσα οι τιμές σύγκλισης των παραμέτρων  $\mathbf{v}^a(t)$ . Στη συνέχεια, έχοντας την ποσότητα  $\mathbf{w}^*$  υπολογίζονται τα  $\mathbf{G}^*$  και  $\mathbf{b}^*$  με χρήση των σχέσεων (2.24) και (2.25). Ο πίνακας  $\mathbf{G}^*$  είναι ο πίνακας επανάληψης και η σχέση (3.18) γράφεται ως εξής,

$$\beta_k^a(t) \mapsto \mathbf{G}^* \beta_{k-1}^a(t) + \mathbf{b}^* \quad (3.19)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία του APJ, τα διανύσματα  $\beta^a$  και  $\mathbf{b}^*$  διαμερίζονται σε τμήματα, ενώ ο πίνακας  $\mathbf{G}^*$  διαμερίζεται σε υποπίνακες, έτσι ώστε ο κάθε επεξεργαστής να ενημερώνει το κάθε τμήμα  $\beta_i^a$  χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο υποπίνακα  $G_{ii}^*$ . Κατά την υλοποίηση της ιδέας αυτής, μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι σε κάθε στοιχείο του διανύσματος  $\beta^a(t)$  αντιστοιχεί ένας επεξεργαστής. Έτσι, κάθε επεξεργαστής  $i$  είναι υπεύθυνος να ενημερώνει το στοιχείο - τμήμα  $\beta_i^a$ . Αμέσως μετά τη σύγκλιση του αλγορίθμου υπολογίζεται η μέση τιμή συμπερασμού ή αλλιώς η λύση του συστήματος χρησιμοποιώντας τις τιμές, στις οποίες συνέκλιναν οι παράμετροι  $\beta^a(t)$ , καθώς επίσης και τις παραμέτρους  $\mathbf{w}^*$ .

### 3.7 Ασύγχρονος Gaussian Belief Propagation και συνθήκες σύγκλισης

Η διαφοροποίηση του σύγχρονου GaBP από τη σύγχρονη εκδοχή του έγκειται στο γεγονός ότι για να πραγματοποιηθεί μια ασύγχρονη ανταλλαγή μηνυμάτων δεν απαιτείται ο κόμβος που πρόκειται να στείλει ένα μήνυμα σε έναν γείτονα του, να χρησιμοποιήσει μηνύματα, τα οποία είναι ενημερωμένα όλα στον ίδιο βαθμό [1]. Συνεπώς, δεν είναι απαραίτητο να περιμένει να ενημερωθούν όλα τα μηνύματα τα ο-

ποία χρειάζεται να χρησιμοποιήσει για να στείλει το δικό του. Αντίθετα, μπορεί να χρησιμοποιήσει οποιοσδήποτε ενημερώσεις είναι διαθέσιμες τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η διαδικασία αυτή θα φαίνεται γνώριμη στον αναγνώστη, καθώς ταυτίζεται με την διαδικασία της ασύγχρονης εκτέλεσης του αλγορίθμου Jacobi που αναφέρθηκε παραπάνω. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι εξισώσεις ενημέρωσης των παραμέτρων άφιξης σε ασύγχρονη μορφή.

$$v_{i \rightarrow j}^a(t+1) = -\frac{p_{ij}^2}{p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} v_{k \rightarrow i}^a(\tau_{k \rightarrow i}^a(t))} \quad (3.20)$$

$$\beta_{i \rightarrow j}^a(t+1) = -\frac{p_{ij}(h_i + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} \beta_{k \rightarrow i}^a(\tau_{k \rightarrow i}^a(t)))}{p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} v_{k \rightarrow i}^a(\tau_{k \rightarrow i}^a(t))}, \quad (3.21)$$

όπου το  $\mathcal{T}_{i \rightarrow j}$  είναι το σύνολο των χρονικών στιγμών, στις οποίες οι παράμετροι  $v_{i \rightarrow j}^a(t)$  και  $\beta_{i \rightarrow j}^a$  ενημερώνονται και τα  $\tau_{i \rightarrow j}^a(t)$  ικανοποιούν το καθολικό ασύγχρονο χρονοδιάγραμμα (Totally Asynchronous Scheduling) [1], όπως ορίζεται παρακάτω.

**Ορισμός 2** (Καθολικό Ασύγχρονο Χρονοδιάγραμμα - *Totally Asynchronous Scheduling*): Τα σύνολα  $\mathcal{T}_{i \rightarrow j}$  είναι άπειρα και τα  $\tau_{i \rightarrow j}^a(t)$  ικανοποιούν τις συνθήκες  $0 \leq \tau_{i \rightarrow j}^a \leq t$  και  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{i \rightarrow j}^a(t) = \infty$  για όλα τα  $(i, j) \in \mathcal{E}$ .

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, προκύπτει ότι η ενημέρωση κάθε μηνύματος εκτελείται ανεξάρτητα σε χρονικές στιγμές  $t \in \mathcal{T}_{i \rightarrow j}$  με  $(i, j) \in \mathcal{E}$ . Επιπλέον, σε κάθε ενημέρωση είναι απαραίτητες μόνο οι διαθέσιμες παράμετροι  $v_{k \rightarrow i}^a(\tau_{k \rightarrow i}^a(t))$  και  $\beta_{k \rightarrow i}^a(\tau_{k \rightarrow i}^a(t))$  από διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Μετά την παρουσίαση της μορφής των σχέσεων στον ασύγχρονο GaBP, σειρά έχει η μελέτη των συνθηκών σύγκλισης του αλγορίθμου. Το παρακάτω θεώρημα [1] παρέχει μια ικανή, αλλά όχι αναγκαία συνθήκη σύγκλισης για τον ασύγχρονο GaBP.

**Θεώρημα 7** : Στον ασύγχρονο Gaussian Belief Propagation αν  $\mathcal{S}_1 \neq \emptyset$ ,  $\rho(|\mathbf{G}^*|) < 1$  και  $p + ii + \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} w_{ki}^* \neq 0$ , τότε οι παράμετροι συμπερασμού  $(\sigma_i^2(t), \mu_i(t))$  συγκλίνουν στις ίδιες τιμές για όλες τις επιλογές των αρχικών συνθηκών  $\mathbf{v}^a(0) \in \mathcal{A}$  και  $\beta^a(0) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times |\mathcal{E}|}$ .

Απόδειξη: [1]  $\square$



Είναι αρκετά ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι για τις ποσότητες  $\rho(\mathbf{G}^*)$  και  $\rho(|\mathbf{G}^*|)$  ισχύει η σχέση  $\rho(\mathbf{G}^*) \leq \rho(|\mathbf{G}^*|)$ . Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι η συνθήκη σύγκλισης του ασύγχρονου GaBP είναι αυστηρότερη από τη συνθήκη σύγκλισης του σύγχρονου. Φαινομενικά λοιπόν, ο ασύγχρονος GaBP είναι ικανός να αντιμετωπίσει μικρότερη γκάμα προβλημάτων σε σχέση με τον σύγχρονο αντίπαλο του. Το συμπέρασμα αυτό είναι ένας από τους λόγους, για τους οποίους προτιμάται συχνότερα η σύγχρονη εκδοχή. Όμως, η φύση της συνθήκης σύγκλισης του ασύγχρονου αλγορίθμου η οποία είναι μη αναγκαία αφήνει περιθώριο για την εύρεση προβλημάτων πέρα από αυτή, τα οποία επιλύονται με επιτυχία με τη χρήση του ασύγχρονου GaBP. Στην πραγματικότητα, έχουν βρεθεί αρκετά προβλήματα αυτής της μορφής ενώ πολλά από αυτά δεν μπορούν να επιλυθούν με τον σύγχρονο GaBP, καθώς υπερβαίνουν την ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης που έχει.

### 3.8 Ο αλγόριθμος Jacobi ως υποπερίπτωση του GaBP

Εξαιρετικά ενδιαφέρον ερευνητικό αποτέλεσμα είναι η απόδειξη ότι ο αλγόριθμος Jacobi αποτελεί υποπερίπτωση του αλγορίθμου GaBP [3]. Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος GaBP μπορεί, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, να απλοποιηθεί στον αλγόριθμο Jacobi. Το συμπέρασμα αυτό γίνεται ξεκάθαρο στην παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση 3 :** *Ο αλγόριθμος Gaussian Belief Propagation*

1. θέτοντας τις αντίστροφες παραμέτρους διασποράς των μηνυμάτων ίσες με το μηδέν, δηλαδή  $v_{i \rightarrow j}^d(t) = p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} v_{k \rightarrow i}^a(t) \Rightarrow v_{i \rightarrow j}^d(t) = p_{ii}$
2. και συμπεριλαμβάνοντας το μήνυμα από τον κόμβο  $j$  προς τον κόμβο  $i$  κατά τον υπολογισμό του μηνύματος από τον κόμβο  $i$  στον κόμβο  $j$ , δηλαδή αντικαθιστώντας τη συνθήκη  $k \in \mathcal{N}(i) \setminus j$  με τη συνθήκη  $k \in \mathcal{N}(i)$

ταυτίζεται με τον αλγόριθμο Jacobi.

Απόδειξη: [3].  $\square$

## Κεφάλαιο 4

# Η σύγχρονη εκδοχή σε σύγκριση με την ασύγχρονη

Έχοντας αναφερθεί τόσο στις συνθήκες σύγκλισης όσο και στους τρόπους εφαρμογής της ασύγχρονης και της σύγχρονης εκδοχής των αλγορίθμων στα προηγούμενα κεφάλαια, σειρά έχει τώρα η σύγκριση των δυο εκδοχών καθώς και η παρουσίαση γραφικών αποτελεσμάτων.

### 4.1 Σύγκλιση GaBP - Αριθμητικό παράδειγμα

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τις συνθήκες σύγκλισης τόσο του σύγχρονου όσο και του ασύγχρονου GaBP [1]. Έστω, ένας συντελεστής  $\mathbf{h} = [1, 1, \dots, 1]^T$  μήκους  $N = 20$  και μια σειρά από precision matrices, οι οποίοι κατασκευάζονται με την παρακάτω σχέση.

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ \zeta^{a_{\text{mod}(i+j,10)+1}}, & \text{αν } i \neq j \end{cases}, \quad (4.1)$$

όπου ο  $\zeta$  είναι ένας συντελεστής, ο οποίος καθορίζει την ισχύ συσχέτισης (correlation strength) μεταξύ των μεταβλητών και  $a_k$  είναι το  $k$ -οστό στοιχείο του διανύσματος

$$\mathbf{a} = [0.13, 0.10, 0.71, -0.05, 0, 0.12, 0.07, 0.11, -0.02, -0.03]^T \quad (4.2)$$

Οι τιμές του  $\zeta$  καθορίζουν μια σειρά από πίνακες ακριβείας, οι οποίοι είναι θετικά ορισμένοι,  $P \succ 0$ , όταν  $\zeta \leq 0.5978$ . Περαιτέρω αριθμητικοί υπολογισμοί δείχνουν ότι όταν  $\zeta \leq 0.5859$ , τότε ισχύει ότι  $\mathcal{S}_1 \neq \emptyset$  και  $p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} w_{ki}^* \neq 0$ , επιλύοντας το SDP πρόβλημα. Στη συνέχεια, για  $\zeta \leq 0.5859$  εξετάζονται οι συνθήκες  $\rho(\mathbf{G}^*) < 1$  και  $\rho(|\mathbf{G}^*|) < 1$  για τον σύγχρονο και τον ασύγχρονο GaBP, αντίστοιχα.

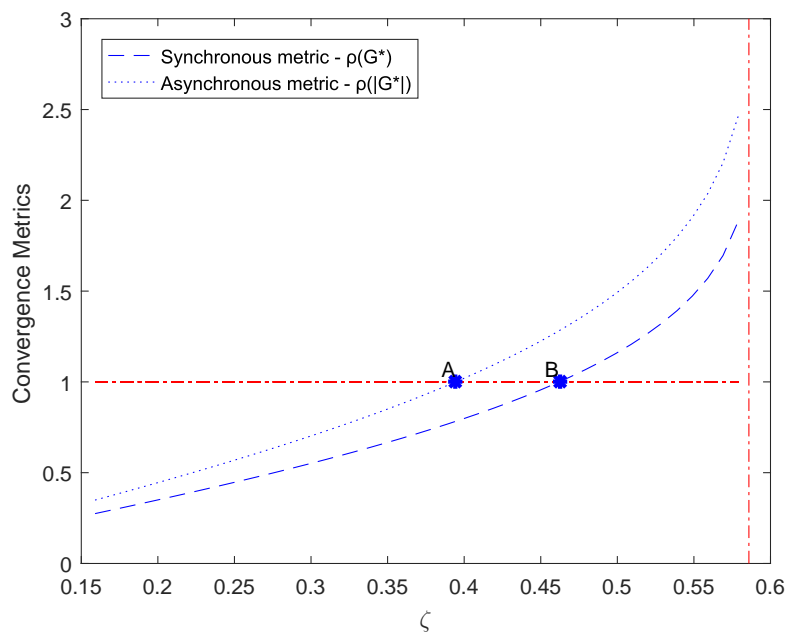
Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται ο τρόπος, με τον οποίο μεταβάλλονται οι ποσότητες  $\rho(\mathbf{G}^*) < 1$  και  $\rho(|\mathbf{G}^*|) < 1$ , καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος  $\zeta$ . Οι καμπύλες έχουν σχεδιαστεί για  $\zeta \leq 0.5859$ , ώστε να εξασφαλιστεί ότι ο πίνακας ακρίβειας θα είναι θετικά ορισμένος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα σημεία των καμπυλών, τα οποία τέμνουν την οριζόντια γραμμή  $\rho(\mathbf{G}^*) = \rho(|\mathbf{G}^*|) = 1$ , καθώς από αυτά προκύπτουν συμπεράσματα για το εύρος των προβλημάτων που μπορεί να επιλύσει η σύγχρονη και η ασύγχρονη εκδοχή. Πιο συγκεκριμένα, για τον σύγχρονο GaBP ισχύει ότι  $\rho(\mathbf{G}^*) = 1$  στο σημείο  $B$  όπου  $\zeta = 0.4621$ . Η ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης, έτσι όπως ορίστηκε στο Θεώρημα 3 δεν επιτρέπει μεγαλύτερες τιμές του  $\zeta$  και συνεπώς την αντιμετώπιση περισσότερων προβλημάτων από τον σύγχρονο GaBP. Αντίστοιχα, η καμπύλη του ασύγχρονου GaBP τέμνει την οριζόντια γραμμή  $\rho(\mathbf{G}^*) = \rho(|\mathbf{G}^*|) = 1$  στο σημείο  $A$ , όπου  $\zeta = 0.3945$ . Η πρώτη παρατήρηση που προκύπτει είναι ότι ο ασύγχρονος GaBP εφαρμόζεται σε ένα μικρότερο εύρος προβλημάτων από τη σύγχρονη εκδοχή του. Όμως, αυτό που πρέπει να ληφθεί υπόψιν είναι το γεγονός ότι υπάρχει μόνο ικανή και όχι αναγκαία συνθήκη σύγκλισης για τον ασύγχρονο GaBP, κάτι το οποίο αφήνει ανοιχτό το δρόμο για την εύρεση προβλημάτων εκτός της αυτής συνθήκης, τα οποία επιλύει ο ασύγχρονος αλγόριθμος με επιτυχία.

Προχωρώντας πέρα από τη μελέτη των μετρικών σύγκλισης, είναι δυνατόν να απομονωθούν συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου  $\zeta$ , οι οποίες βρίσκονται πολύ κοντά στα σημεία  $A$  και  $B$ , ώστε να φανεί η διαφορετική συμπεριφορά του ασύγχρονου GaBP, επιλέγοντας διαφορετικές τιμές της πιθανότητας  $P_m$ . Ο βαθμός της επιτυχίας σύγκλισης ελέγχεται χρησιμοποιώντας την ευκλείδεια νόρμα

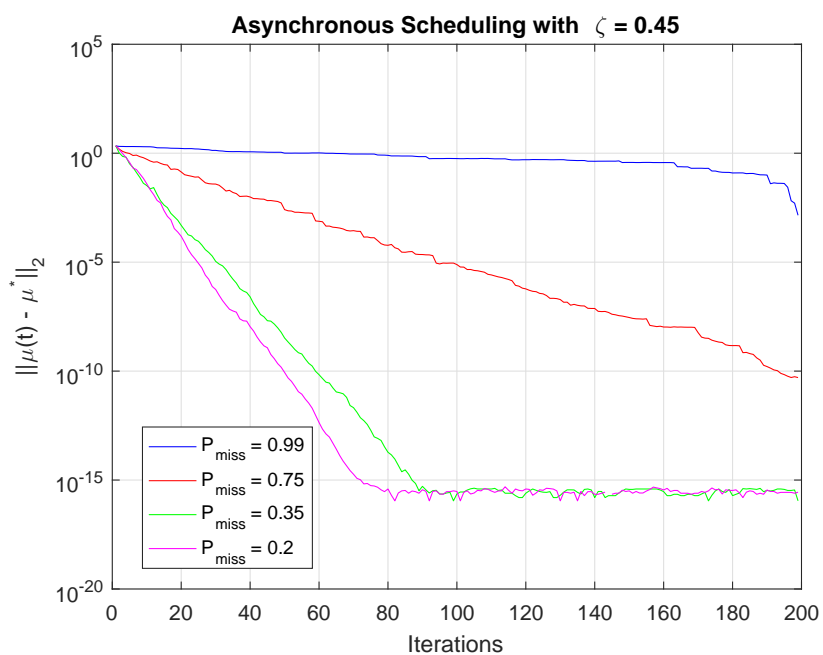
$$\|\mu(t) - \mu^*\|_2 \quad (4.3)$$

όπου  $\mu(t)$  είναι η τιμή της μέσης τιμής συμπερασμού τη χρονική στιγμή  $t$  και  $\mu^*$  η βέλτιστη τιμή της μέσης τιμής συμπερασμού και ταυτόχρονα η λύση του συστήματος  $Ax = b$ . Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για πολλές διαφορετικές τιμές των παραμέτρων  $\zeta$  και  $P_m$  παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα.

Στο Σχήμα 4.2, η τιμή  $\zeta = 0.45$  είναι εκτός του ορίου που θέτει η ικανή συνθήκη σύγκλισης για τον ασύγχρονο GaBP. Επιλέγοντας όμως κατάλληλη τιμή για την πιθανότητα  $P_m$ , είναι δυνατόν να συμβεί η σύγκλιση του αλγορίθμου στη σωστή λύση του συστήματος, έστω και κατά προσέγγιση. Από το σχήμα 4.2 παρατηρείται

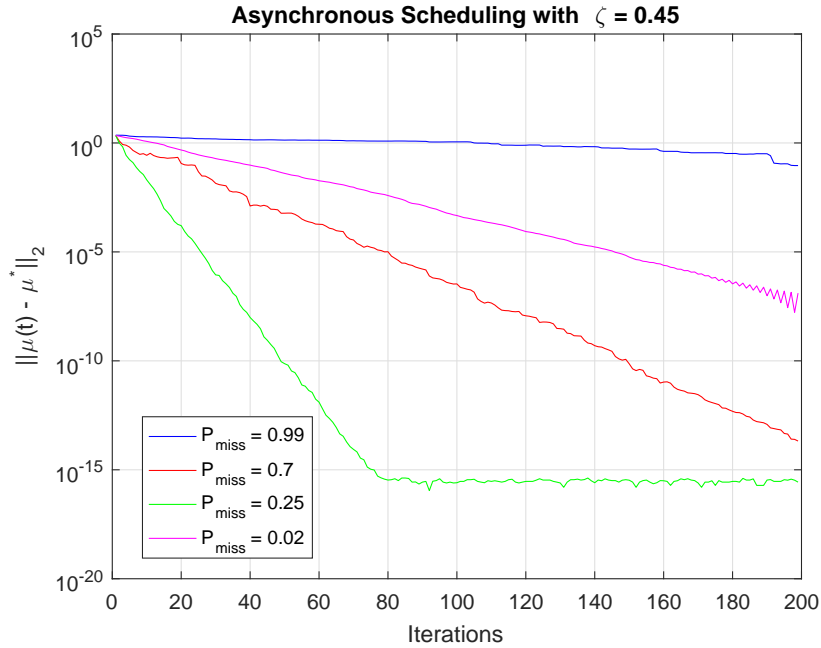


Σχήμα 4.1: Μετρικές σύγκλισης του συγχρονου και ασύγχρονου GaBP.



Σχήμα 4.2: Ευκλείδεια νόρμα  $\|\mu(t) - \mu^*\|_2$  με  $\zeta = 0.45$

ότι θέτοντας  $P_m = 0.99$ , μια τιμή η οποία είναι αρκετά υψηλή, επιτυγχάνεται καλύτερη σύγκλιση. Στη συνέχεια, ακολουθεί η τιμή  $P_m = 0.75$  με λιγότερη επιτυχία και έπειτα οι τιμές  $P_m = 0.35$  και  $P_m = 0.2$ , οι οποίες φαίνεται να αποκλίνουν. Διατηρώντας την παράμετρο  $\zeta = 0.45$  και μεταβάλλοντας ελαφρά τις τιμές της  $P_m$  προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 4.3.

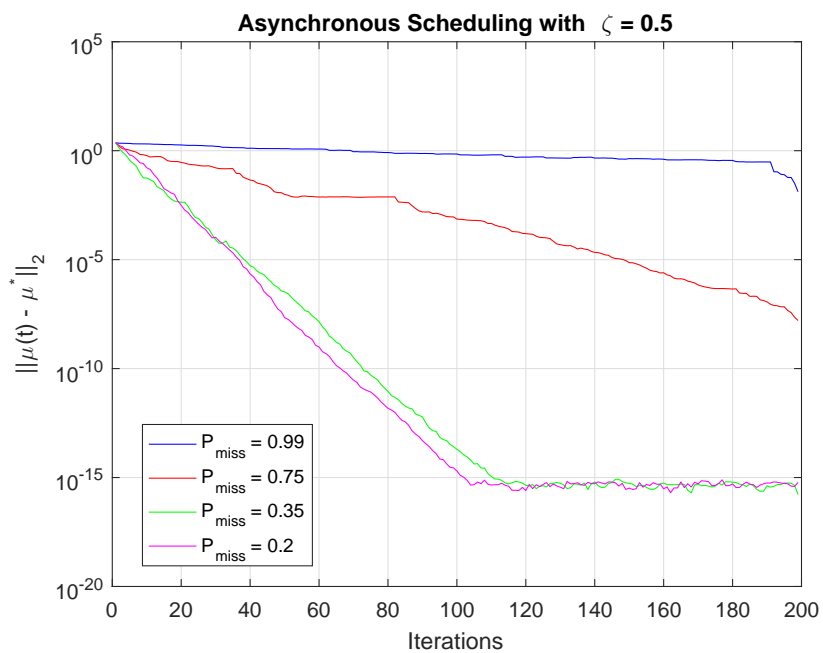
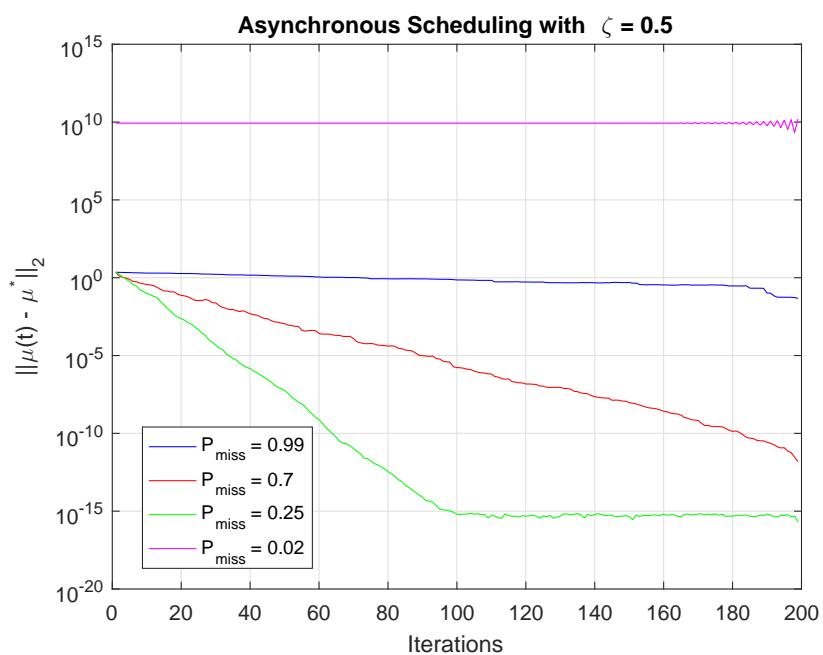


Σχήμα 4.3: Νόρμα  $\|\mu(t) - \mu^*\|_2$  με  $\zeta = 0.45$

Στο Σχήμα 4.3, φαίνονται αρκετές διαφοροποιήσεις στη συμπεριφορά του ασύγχρονου GaBP, οι οποίες προκύπτουν από τις διαφορετικές τιμές της πιθανότητας  $P_m$ . Ομοίως με το σχήμα 4.2, η τιμή  $P_m = 0.99$  φαίνεται να είναι η καλύτερη, ενώ ακολουθεί η τιμή  $P_m = 0.02$  ως δεύτερη καλύτερη και κατόπιν οι δυο επόμενες τιμές  $P_m = 0.7$  και  $P_m = 0.25$ , οι οποίες όμως φαίνεται να αποκλίνουν.

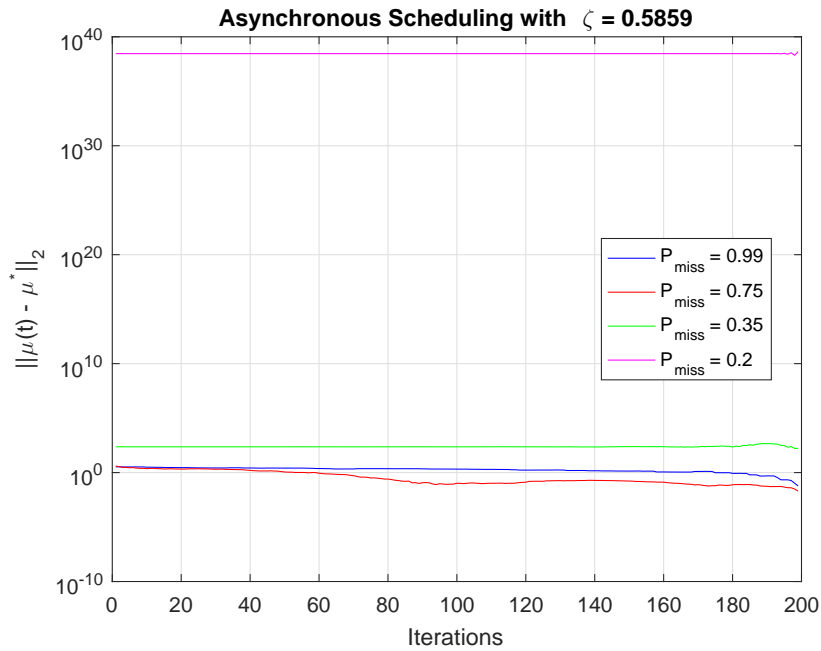
Για το επόμενο παράδειγμα θέτουμε  $\zeta = 0.5$ . Η απόδοση του αλγορίθμου φαίνεται γραφικά στα Σχήματα 4.4 και 4.5, όπου παρουσιάζεται και εκεί η ευκλείδεια νόρμα  $\|\mu(t) - \mu^*\|_2$  σε συνάρτηση του αριθμού των επαναλήψεων  $t$ , επιλέγοντας διαφορετικές τιμές της πιθανότητας  $P_m$ .

Στο Σχήμα 4.4 η καλύτερη απόδοση επιτυγχάνεται με τιμή  $P_m = 0.99$ , ενώ ακολουθεί η τιμή  $P_m = 0.75$  ως δεύτερη καλύτερη και έπειτα οι τιμές  $P_m = 0.35$  και

Σχήμα 4.4: Ευκλείδεια νόρμα  $\|\mu(t) - \mu^*\|_2$  με  $\zeta = 0.5$ Σχήμα 4.5: Νόρμα  $\|\mu(t) - \mu^*\|_2$  με  $\zeta = 0.5$

$P_m = 0.2$ , οι οποίες φαίνεται σταδιακά να αποκλίνουν. Όσον αφορά το Σχήμα 4.5, η τιμή  $P_m = 0.99$  εξακολουθεί να είναι η καλύτερη με την τιμή  $P_m = 0.7$  να την ακολουθεί. Τρίτη έρχεται η τιμή  $P_m = 0.25$ , η οποία φαίνεται να αποκλίνει, ενώ η τιμή  $P_m = 0.02$  αποκλίνει σχεδόν από την πρώτη επανάληψη.

Εξαιρετικά ενδιαφέρουσα παρατήρηση αποτελεί το γεγονός ότι χρησιμοποιώντας λιγότερο ενημερωμένα μηνύματα, ο αλγόριθμος συγκλίνει πολύ πιο αποδοτικά. Η παρατήρηση αυτή αφορά τα συγκεκριμένα προβλήματα, για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου  $\zeta$ , ενώ έρχεται σε αντίφαση με την πεποίθηση ότι όσο περισσότερες ενημερώσεις πραγματοποιούνται τόσο πιο κοντά στη λύση πλησιάζει ο αλγόριθμος. Εξάλλου, όπως αναφέρθηκε αρκετές φορές ήδη, σχεδόν όλες οι επαναληπτικές τεχνικές στηρίζουν τη λειτουργία τους στην διαρκή ενημέρωση με την εφαρμογή μιας επαναληπτικής φόρμουλας.

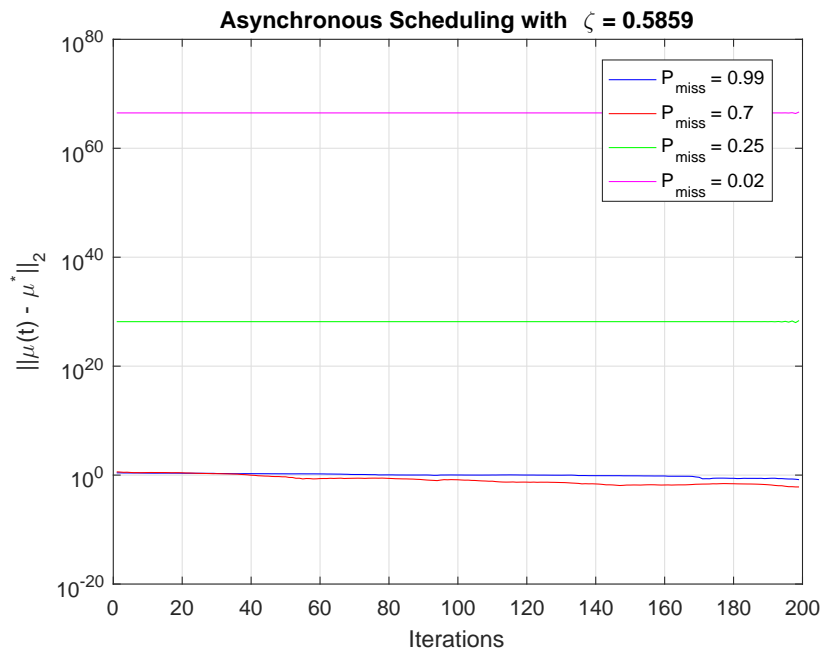


Σχήμα 4.6: Ευκλείδεια νόρμα  $\|\mu(t) - \mu^*\|_2$  με  $\zeta = 0.5859$

Στην ασύγχρονη εκδοχή όμως και πιο συγκεκριμένα στον ασύγχρονο GaBP, η έλλειψη ενημέρωσης μπορεί να οδηγήσει σε σύγκλιση είτε στη σωστή λύση είτε πολύ κοντά σε αυτή. Έτσι, οι ασύγχρονοι αλγόριθμοι καταλαμβάνουν μια καίρια θέση στον ερευνητικό τομέα, καθώς έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη του τρόπου

υλοποίησης τους και η εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών σύγκλισης για την εφαρμογή τους.

Για τη συνέχεια, θέτοντας την οριακή τιμή  $\zeta = 0.5859$ , προκύπτουν τα γραφήματα των Σχημάτων 4.6 και 4.7. Η τιμή αυτή είναι οριακή, καθώς βρίσκεται πολύ κοντά στη τιμή  $\zeta < 0.5978$  πέρα από την οποία δεν ισχύει ότι  $P > 0$  για τον πίνακα ακρίβειας. Έτσι, παρατηρείται στο Σχήμα 4.6, ότι για τις τιμές  $P_m = 0.2$  και  $P_m = 0.35$ , ο αλγόριθμος αποκλίνει σχεδόν αμέσως, ενώ οι δυο επόμενες τιμές, δηλαδή  $P_m = 0.75$  και  $P_m = 0.99$  φαίνεται να οδηγούν τον ασύγχρονο GaBP σε σύγκλιση με την καλύτερη να είναι η τιμή  $P_m = 0.99$ .



Σχήμα 4.7: Νόρμα  $\|\mu(t) - \mu^*\|_2$  με  $\zeta = 0.5859$

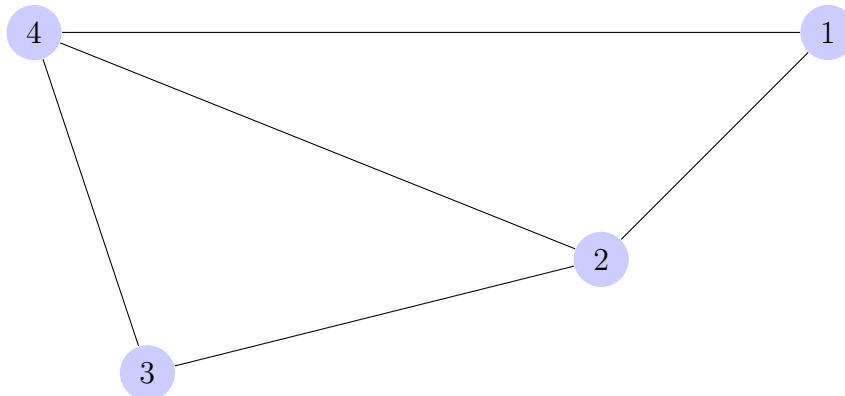
Στο Σχήμα 4.7 παρατηρείται μια παρόμοια συμπεριφορά, καθώς και εδώ οι τιμές οι οποίες οδηγούν τον αλγόριθμο σε σύγκλιση είναι οι τιμές  $P_m = 0.7$  και  $P_m = 0.99$ , των οποίων οι συμπεριφορές σχεδόν ταυτίζονται. Από την άλλη πλευρά, για τις τιμές  $P_m = 0.02$  και  $P_m = 0.25$  είναι φανερό ότι ο αλγόριθμος αποκλίνει. Θέτοντας την τιμή της πιθανότητας αστοχίας  $P_m = 0$ , ο ασύγχρονος αλγόριθμος GaBP απλοποιείται στη σύγχρονη εκδοχή του. Με λίγα λόγια, είναι σαν να εκτελείται ο σύγχρονος GaBP. Έτσι, για το συγκεκριμένο παράδειγμα αν το  $\zeta$  λάβει τιμές  $\zeta > 0.4621$  τότε



είναι σίγουρο ότι ο αλγόριθμος δεν θα συγκλίνει.

## 4.2 Συμπερασμός με APJ για τα $\beta_{i \rightarrow j}^a$

Η ενότητα αυτή παρουσιάζει υπολογιστικά αποτελέσματα με βάση την εφαρμογή του APJ στον GaBP που αναπτύχθηκε στην Ενότητα 3.6. Μέσα από τη μελέτη της προσέγγισης της Ενότητας 3.6 διαπιστώθηκε ότι ο πίνακας  $\mathbf{G}^*$ , εν γένει δεν παρουσιάζει την ιδιότητα του μη αρνητικού. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρηθεί το αριθμητικό παράδειγμα της Ενότητας 4.1 με  $N = 4$  αντί για  $N = 20$  κόμβους, δηλαδή το ζητούμενο είναι η επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων  $4 \times 4$  και επιλέγοντας  $\zeta = 0.5$ , ο αρχικός γράφος που δημιουργείται, σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα,  $\mathbf{A}$  είναι ο παρακάτω



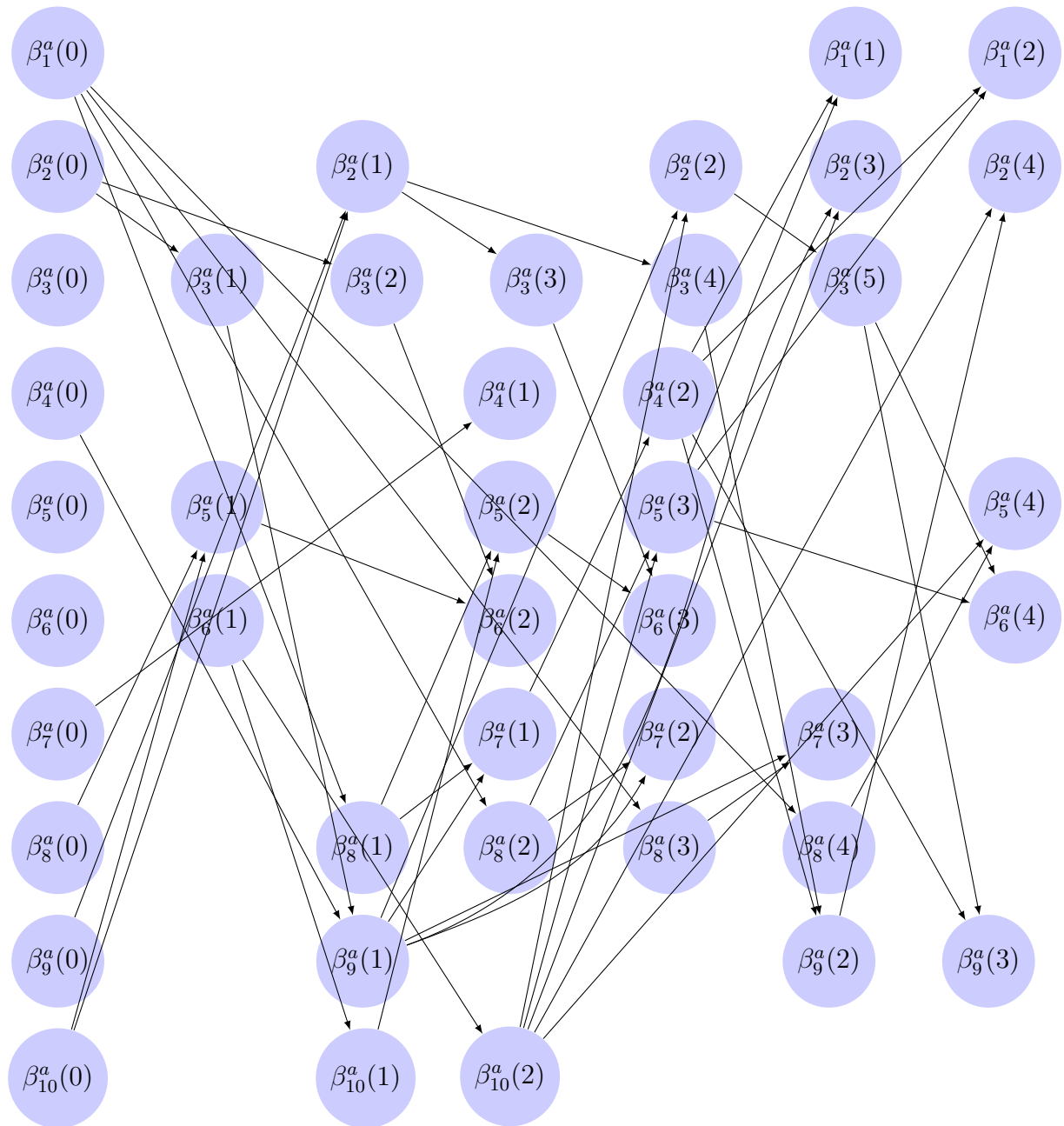
Σχήμα 4.8: Μη κατευθυνόμενος γράφος περιγραφής του συστήματος  $4 \times 4$ .

Καθένας από τους κόμβους στον παραπάνω γράφο δέχεται μηνύματα από τους γείτονες του και στέλνει μηνύματα σε αυτούς. Έτσι, σε κάθε ακμή του γράφου θεωρείται ότι ταξιδεύουν 2 μηνύματα, ένα μήνυμα αναχώρησης και ένα μήνυμα άφιξης. Συνεπώς, για τους τέσσερις κόμβους και τις πέντε ακμές του γράφου στο Σχήμα 4.8 υπάρχουν συνολικά δέκα παράμετροι αναχώρησης και δέκα παράμετροι άφιξης. Έτσι, εκφράζοντας τις παραμέτρους  $\beta_{i \rightarrow j}^a(t)$  σε διανυσματική μορφή, θα προκύψει ένα διάνυσμα  $\beta^a(t)$  το οποίο θα περιέχει δέκα στοιχεία, δηλαδή όλες τις παραμέτρους  $\beta_{i \rightarrow j}^a(t)$  που υπάρχουν στον γράφο. Ο πίνακας  $\mathbf{G}^*$  είναι τετραγωνικός πίνακας και έχει ίδιες διαστάσεις με το διάνυσμα  $\beta^a(t)$ , δηλαδή για το συγκεκριμένο παράδειγμα ισχύει ότι  $\mathbf{G}^* \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$  με

$$G^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0180 & 0.0180 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0433 & -0.0433 \\ 0 & 0.180 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0433 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0253 & 0 & -0.0253 \\ 0 & 0 & -0.0432 & 0 & -0.0432 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0397 & -0.0397 & 0 \\ -0.0432 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0253 & -0.0253 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0397 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι δεν ικανοποιείται η ιδιότητα της μη αρνητικότητας για τον  $\mathbf{G}^*$ , καθώς υπάρχουν αρκετά από τα μη μηδενικά στοιχεία του τα οποία είναι αρνητικά. Υπενθυμίζεται ότι όταν για έναν υποπίνακα του πίνακα επανάληψης  $\mathbf{M}$  ισχύει η σχέση  $M_{ij} = 0$ , τότε ο επεξεργαστής  $i$  δεν επικοινωνεί με τον επεξεργαστή  $j$  και κατά την κατασκευή του DAG δεν υπάρχει ακμή από τους κόμβους του επεξεργαστή  $i$  στους αντίστοιχους κόμβους του επεξεργαστή  $j$ . Ομοίως, στο παράδειγμα αυτό όταν ισχύει η σχέση  $G_{ij}^* = G^*(i, j) = 0$ , τότε δεν υπάρχει επικοινωνία από τον επεξεργαστή  $i$  προς τον επεξεργαστή  $j$  και αντίστροφα. Για παράδειγμα, στον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι ο επεξεργαστής 1 (γραμμή 1 του πίνακα  $\mathbf{G}^*$ ) έχει επικοινωνία μόνο με τους επεξεργαστές 4 και 5 (στήλες 4 και 5 του πίνακα  $\mathbf{G}^*$  αντίστοιχα), ο επεξεργαστής 2 έχει επικοινωνία μόνο με τους επεξεργαστές 9 και 10 κ.ο.κ. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω πίνακα  $\mathbf{G}^*$ , κατασκευάστηκε ο DAG του σχήματος 4.9 για 7 επαναλήψεις. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι οι ακμές του γράφου καθορίζονται ακριβώς από τον  $\mathbf{G}^*$ .

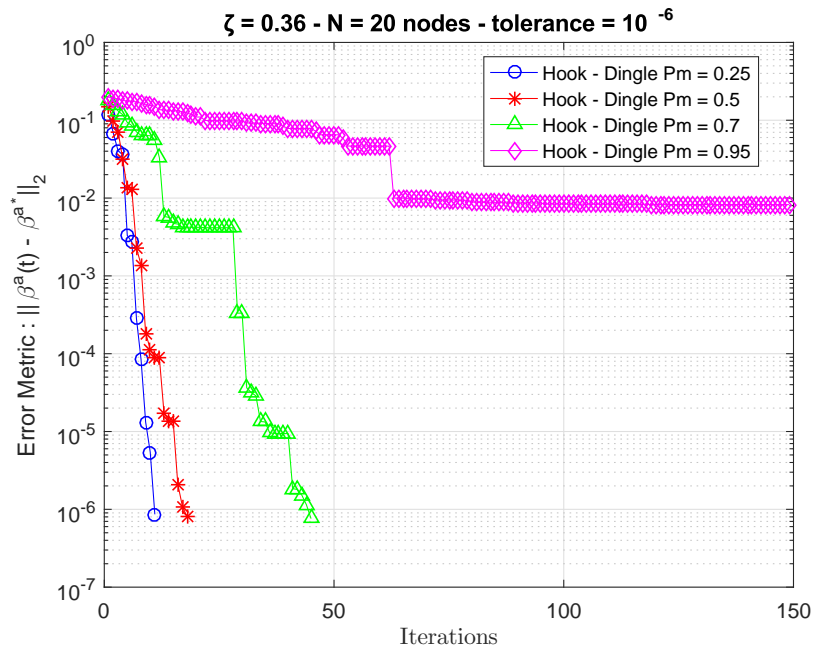
Το τελικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι όσον αφορά την συνδεσιμότητα του γράφου, δηλαδή τη δημιουργία των ακμών ανάμεσα στους κόμβους, αυτή καθορίζεται από τη δομή του πίνακα επανάληψης  $\mathbf{G}^*$ . Φυσικά, οι ακμές στον DAG συνδέουν κόμβους, οι οποίοι αντιπροσωπεύουν συγκεκριμένες ενημερώσεις επεξεργαστών, όμως ο πίνακας  $\mathbf{G}^*$  καθορίζει τους επεξεργαστές εκείνους, των οποίων οι ενημερώσεις θα συνδέονται. Ωστόσο, η πιθανότητα αστοχίας είναι εκείνη η οποία καθορίζει ποιοι επεξεργαστές θα πραγματοποιήσουν νέες ενημερώσεις σε κάθε επανάληψη κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου.



Σχήμα 4.9: DAG με 10 επεξεργαστές για ένα σύστημα  $4 \times 4$

### 4.3 Σύγκλιση παραμέτρων $\beta_{i \rightarrow j}^a$ για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου $\zeta$

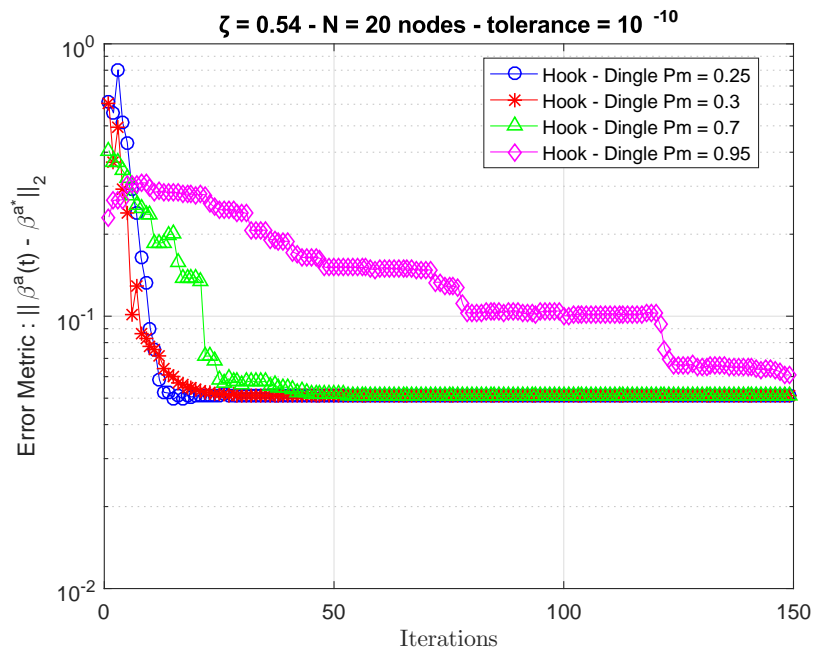
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του ρυθμού σύγκλισης του αλγορίθμου για πολλές διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $\zeta$  και της πιθανότητας αστοχίας, όταν χρησιμοποιείται η προσέγγιση της Ενότητας 3.6. Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιηθεί το παράδειγμα της Ενότητας 4.1 θεωρώντας  $N = 20$  κόμβους. Αρχικά, η παράμετρος  $\zeta$  έχει τη τιμή  $\zeta = 0.36$ . Σημειώνεται ότι η τιμή αυτή είναι εντός τόσο της ικανής και αναγκαίας συνθήκης σύγκλισης για τον σύγχρονο GaBP όσο και της ικανής συνθήκης σύγκλισης για τον ασύγχρονο GaBP. Ο ρυθμός σύγκλισης του αλγορίθμου για τέσσερις διαφορετικές τιμές της πιθανότητας  $P_m$  φαίνεται στο Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10: Ευκλείδεια Νόρμα  $\|\beta^a(t) - \beta^{a*}\|_2$  με  $\zeta = 0.36$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10, η καλύτερη τιμή της πιθανότητας  $P_m$ , για την οποία ο αλγόριθμος συγκλίνει, είναι η  $P_m = 0.95$ . Ακολουθεί η τιμή  $P_m = 0.7$ , ενώ στη συνέχεια ακολουθούν οι τιμές  $P_m = 0.5$  και  $P_m = 0.25$ , οι οποίες παρέχουν τη λιγότερη ακρίβεια στη σύγκλιση. Είναι φανερό ότι χρησιμοποιώντας παλαιότερες

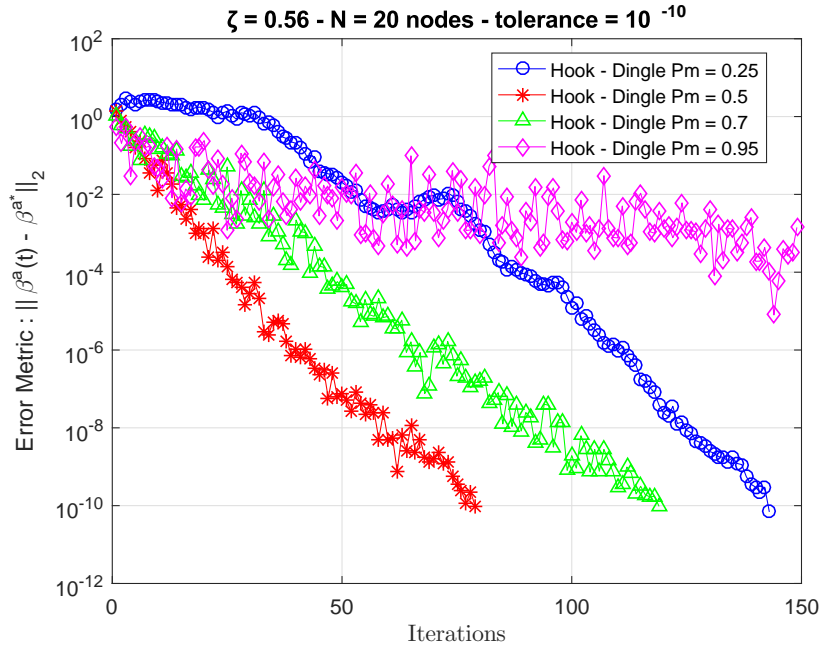
τιμές των παραμέτρων, δηλαδή κάνοντας λιγότερες νέες επαναλήψεις, επιτυγχάνεται καλύτερη ακρίβεια στη λύση. Η παράμετρος tolerance χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της ακρίβειας, με την οποία προσεγγίζεται η λύση του συστήματος  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  και είναι αρκετά μικρή. Στο Σχήμα 4.11 έχουμε την τιμή  $\zeta = 0.54$ . Σημειώνεται ότι η τιμή αυτή είναι εκτός τόσο της ικανής και αναγκαίας συνθήκης σύγκλισης του σύγχρονου όσο και της ικανής συνθήκης σύγκλισης του ασύγχρονου GaBP.



Σχήμα 4.11: Ευκλείδεια Νόρμα  $\|\beta^a(t) - \beta^{a*}\|_2$  με  $\zeta = 0.54$

Στο ίδιο σχήμα φαίνεται ότι η συμπεριφορά του αλγορίθμου δεν έχει σημαντικές αλλαγές, καθώς και εδώ η καλύτερη τιμή είναι η  $P_m = 0.95$ , ενώ ακολουθεί η τιμή  $P_m = 0.7$  με λιγότερη ακρίβεια και στη συνέχεια οι τιμές  $P_m = 0.3$  και  $P_m = 0.25$ . Στη συνέχεια, αυξάνεται ακόμα περισσότερο η τιμή της παραμέτρου  $\zeta$ , πλησιάζοντας το όριο  $\zeta \leq 0.5859$  πέρα από το οποίο δεν ισχύει η σχέση  $P > 0$ . Θέτοντας λοιπόν  $\zeta = 0.56$ , ο ρυθμός σύγκλισης του αλγορίθμου για τέσσερις διαφορετικές τιμές της πιθανότητας  $P_m$  φαίνεται στο Σχήμα 4.12.

Για την τιμή της πιθανότητας  $P_m = 0.95$ , ο αλγόριθμος φαίνεται να έχει την καλύτερη προσέγγιση της σύγκλισης. Μια διαφοροποίηση από τα Σχήματα 4.11 και 4.12 είναι ότι εδώ τη δεύτερη καλύτερη θέση φαίνεται να καταλαμβάνει η τιμή της πιθα-



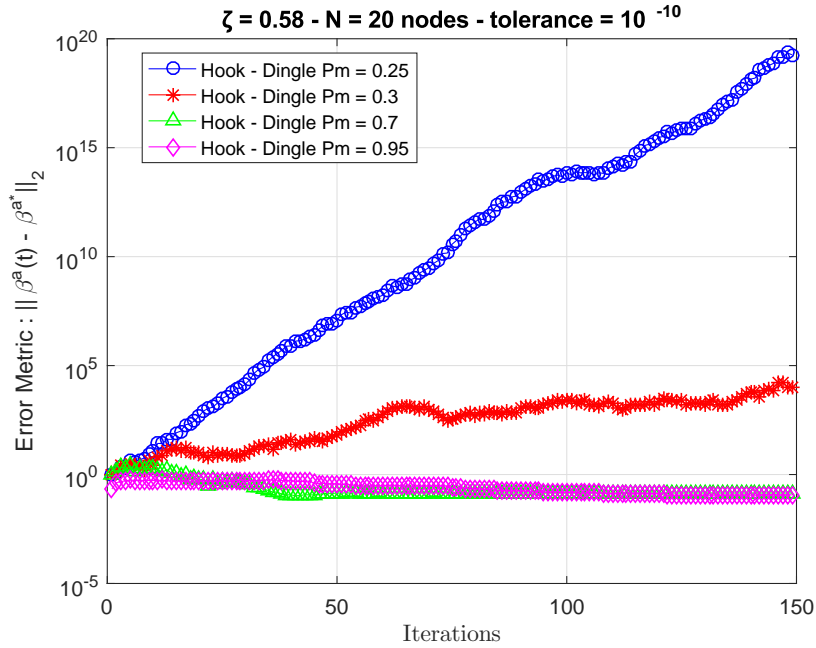
Σχήμα 4.12: Ευκλείδεια Νόρμα  $\|\beta^a(t) - \beta^{a*}\|_2$  με  $\zeta = 0.56$

νότητας  $P_m = 0.25$ , ενώ ακολουθεί η τιμή  $P_m = 0.7$  ως τρίτη καλύτερη και τελευταία η τιμή  $P_m = 0.5$ . Η συμπεριφορά αυτή δηλώνει έμπρακτα την ανάγκη ύπαρξης ικανών και αναγκαίων συνθηκών σύγκλισης για τους ασύγχρονους αλγόριθμους, καθώς φαίνεται ότι αλλάζοντας το πρόβλημα, πιθανό να αλλάζουν και οι τιμές της πιθανότητας  $P_m$ , οι οποίες οδηγούν σε σύγκλιση. Για τη συνέχεια, χρησιμοποιείται η τιμή  $\zeta = 0.58$  και στο Σχήμα 4.13 φαίνονται τα αποτελέσματα του ρυθμού σύγκλισης.

Παρατηρώντας το Σχήμα 4.13 προκύπτει ότι για την τιμή της πιθανότητας  $P_m = 0.25$ , ο αλγόριθμος φαίνεται σταδιακά να αποκλίνει, ενώ η αμέσως επόμενη καλύτερη τιμή είναι η τιμή  $P_m = 0.3$ . Έπειτα, οι τιμές  $P_m = 0.7$  και  $P_m = 0.95$  δίνουν ακριβείς προσεγγίσεις της λύσης, οι οποίες απέχουν λίγο μεταξύ τους.

#### 4.4 Εκτίμηση μέσω ελάχιστων μονοπατιών στον DAG - $E[s(t)]$ και $E[s^*]$

Στην Ενότητα 5.2 παρουσιάστηκε ένα παράδειγμα ενός πίνακα επανάληψης  $\mathbf{G}^*$ , το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό ότι ο πίνακας  $\mathbf{G}^*$  εν γένει δεν είναι μη αρνητικός.



Σχήμα 4.13: Ευκλείδεια Νόρμα  $\|\beta^a(t) - \beta^{a^*}\|_2$  με  $\zeta = 0.58$

Στην περίπτωση όμως που ο πίνακας  $\mathbf{G}^*$  δεν είναι μη αρνητικός, τότε το πρόβλημα γίνεται πιο περίπλοκο και μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία πίσω από το Συμπέρασμα 1. Η συνθήκη (3.16) του Συμπεράσματος 1 παρέχει ένα άνω φράγμα για το σφάλμα  $\|x[t] - x^*\|$ , το οποίο αποτελείται από τους παράγοντες  $s^*$  και  $\log(\rho(|\mathbf{M}|))$ . Χρησιμοποιώντας διαφορετικό συμβολισμό, η συνθήκη (3.16) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|x[t] - x^*\|}{t} \leq s^* \log(\rho(|\mathbf{G}^*|)) \quad (4.4)$$

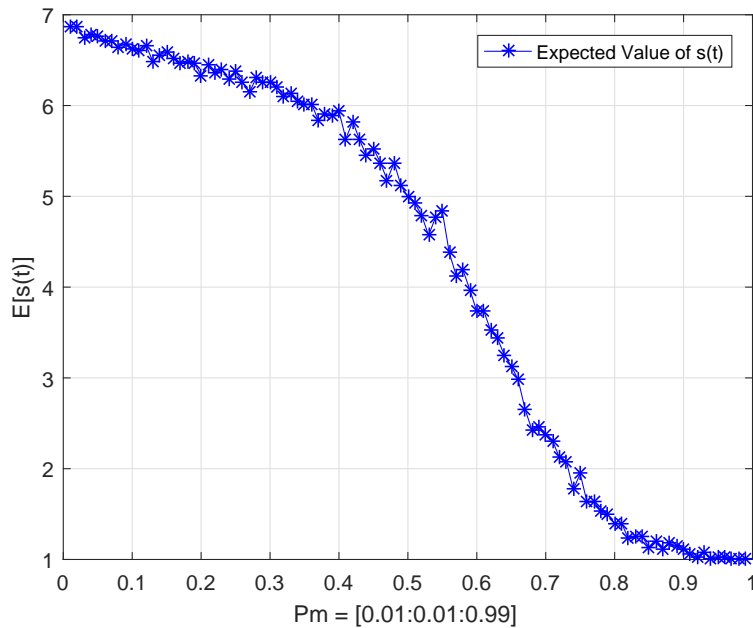
Το άνω φράγμα της σχέσης (4.4) επηρεάζεται κυρίως από την ποσότητα  $s^*$ , καθώς η ποσότητα  $\log(\rho(|\mathbf{G}^*|))$  είναι σταθερή για έναν συγκεκριμένο πίνακα  $\mathbf{G}^*$ . Συνεπώς, είναι σημαντική η μελέτη της ποσότητας  $s^*$  και των ιδιοτήτων της. Μια πρώτη προσέγγιση είναι η μελέτη της ποσότητας  $s(t)$ , δηλαδή του ελάχιστου μονοπατιού πάνω στον DAG μέχρι τη χρονική στιγμή  $t$  και ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλεται και η πιθανότητα αστοχίας  $P_m$ . Έτσι, ορίζεται αρχικά μια σειρά από τιμές για την πιθανότητα  $P_m$  στο διάστημα  $0.01 \leq P_m \leq 0.99$  και εκτελείται η προσέγγιση της Ενότητας 3.6, για μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\zeta$ . Η λύση

ενός συγκεκριμένου προβλήματος για πολλές διαφορετικές τιμές της πιθανότητας  $P_m$  οδηγεί σε μια σχέση ανάμεσα στις ποσότητες  $P_m$  και  $s(t)$ . Η απαιτούμενη ποσότητα  $s(t)$  για κάθε γράφο υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Viterbi με βάση την συνδεσιμότητα που καθορίζεται από τον πίνακα  $\mathbf{G}^*$ .

Έστω ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων της μορφής  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , το οποίο χρησιμοποιεί την μέθοδο της Ενότητας 3.6 με  $\zeta = 0.5$  και πίνακα επανάληψης  $\mathbf{G}^*$ . Το Σχήμα 4.14 παρουσιάζει γραφικά τη σχέση ανάμεσα στην πιθανότητα  $P_m$  και στο ελάχιστο μονοπάτι του DAG μέχρι τη χρονική στιγμή  $t$ . Για τη μελέτη αυτή δημιουργήθηκαν 19800 DAGs, δηλαδή 200 γράφοι για κάθε τιμή της πιθανότητας  $P_m$ . Ο αλγόριθμος εκτελείται χρησιμοποιώντας μια παράμετρο ανοχής (tolerance) και συνεπώς κάθε εκτέλεση του δεν ολοκληρώνεται σε συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων για όλα τα  $P_m$ . Παρατηρώντας το Σχήμα 4.14, φαίνεται ότι καθώς αυξάνεται η τιμή της πιθανότητας αστοχίας, μειώνεται το ελάχιστο μήκος μονοπατιού πάνω στον DAG. Η παρατήρηση αυτή είναι ακριβής διαισθητικά, καθώς όσο αυξάνεται η τιμή της  $P_m$  τόσο μειώνεται το πλήθος των νέων ενημερώσεων που θα πραγματοποιήσουν οι επεξεργαστές και κατά συνέπεια τόσο μειώνεται το πλήθος των νέων κόμβων στο γράφο. Άρα, σε έναν αραιό DAG τα μονοπάτια θα έχουν μικρότερο μήκος από τα μονοπάτια σε έναν πυκνότερο γράφο.

Ένα άλλο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό που αξίζει να μελετηθεί είναι ο ρυθμός αύξησης του ελάχιστου μονοπατιού στο γράφο, δηλαδή η ποσότητα  $s^*$ , η οποία ορίζεται από τη σχέση (3.9). Ακολουθώντας παρόμοια προσέγγιση με τη μελέτη της μέσης τιμής  $E[s(t)]$ , ορίζεται και εδώ μια σειρά από τιμές για την πιθανότητα  $P_m$  στο διάστημα  $0.01 \leq P_m \leq 0.99$ , ενώ εφαρμόζεται η μέθοδος της Ενότητας 3.6 για κάθε μια από αυτές. Ομοίως με πριν, ζητείται η εύρεση μιας σχέσης ανάμεσα στις ποσότητες  $P_m$  και  $s^*$ . Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 4.15 φαίνεται ότι καθώς αυξάνει η τιμή της πιθανότητας αστοχίας, ο ρυθμός αύξησης του μικρότερου μονοπατιού,  $s^*$  φαίνεται να μειώνεται μέχρι μια συγκεκριμένη τιμή της πιθανότητας έπειτα από την οποία φαίνεται να αυξάνει. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι αυξάνοντας την τιμή της πιθανότητας  $P_m$ , μειώνεται σταδιακά το πλήθος των νέων ενημερώσεων που θα πραγματοποιήσουν οι επεξεργαστές. Ο μικρότερος αριθμός των ενημερώσεων συνεπάγεται και μικρότερο αριθμό κόμβων στον τελικό DAG και ένας πιο αραιός γράφος συνεπάγεται και μικρότερο μήκος στα μονοπάτια. Αυξάνοντας όμως την πιθανότητα, από μια τιμή της και έπειτα, μειώνεται ο αριθμός των νέων ενημερώσεων σε σημείο



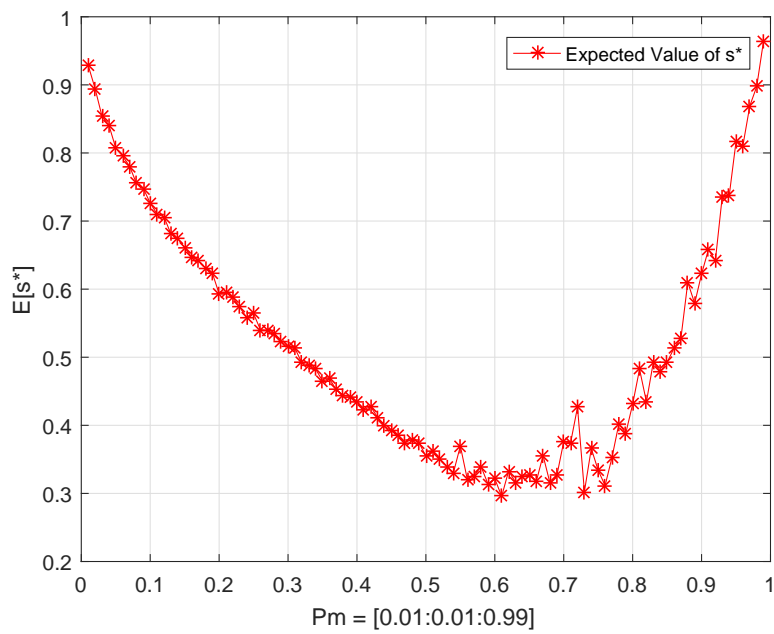


Σχήμα 4.14: Μέση τιμή ελάχιστου μονοπατιού  $E[s(t)]$  με  $\zeta = 0.5$

όπου προσεγγίζει το αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι ο αλγόριθμος να συγκλίνει. Έτσι, ο αριθμητής με τον παρονομαστή του κλάσματος στη σχέση

$$s^* = \frac{s(t)}{t} \quad (4.5)$$

προσεγγίζουν ο ένας τον άλλον με αποτέλεσμα η τιμή του κλάσματος να αυξάνεται και συνεπώς να αυξάνεται και η τιμή της ποσότητας  $s^*$ . Εκεί, οφείλεται η άνοδος της γραφικής παράστασης, από μια τιμή της πιθανότητας  $P_m$  και έπειτα, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.15. Παράλληλα, έχει παρατηρηθεί μέσα από πειραματικούς υπολογισμούς ότι η αύξηση της πιθανότητας  $P_m$  σε σημείο όπου προσεγγίζει τη μονάδα, δηλαδή όταν  $P_m \rightarrow 1$  μπορεί να επιφέρει αποκλίσεις στη λύση στην οποία θα συγκλίνει τελικά ο αλγόριθμος.



Σχήμα 4.15: Μέση τιμή  $E[s^*]$  με  $\zeta = 0.5$

## Κεφάλαιο 5

### Μελλοντική μελέτη

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται ιδέες οι οποίες πρόκειται να αποτελέσουν μελλοντικό αντικείμενο έρευνας, ως προεκτάσεις της θεωρίας που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Το πρώτο και κύριο μέλημα της μελλοντικής έρευνας είναι η εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών σύγκλισης για τους ασύγχρονους αλγόριθμους όπως ο GaBP. Οι δυνατότητες που κρύβουν μέσα τους οι ασύγχρονες τεχνικές δεν έχουν ανακαλυφθεί ακόμα στην πλειοψηφία τους και συνεπώς μένουν ανεξεμετάλλευτες, ενώ ταυτόχρονα η εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων κρύβει μέσα της εκπλήξεις και μπορεί να φέρει θεαματικά αποτελέσματα. Οι ασύγχρονοι αλγόριθμοι είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν προβλήματα και εφαρμογές, τις οποίες οι σύγχρονοι αδυνατούν, καθώς περιορίζονται από τις συνθήκες σύγκλισης τους. Συνεπώς, προκύπτει επιτακτική ανάγκη εύρεσης ικανών και αναγκαίων συνθηκών, ώστε να είναι γνωστά a priori τα προβλήματα και οι εφαρμογές που μπορούν να αντιμετωπισθούν με μεθόδους όπως ο ασύγχρονος Gaussian Belief Propagation.

Σε δεύτερο επίπεδο, ένα πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο μελλοντικής μελέτης είναι η εύρεση ενός τρόπου έκφρασης του αλγόριθμου GaBP μέσα από μια γραμμική αναδρομική σχέση, παρόμοια με τον αλγόριθμο Jacobi. Πιο συγκεκριμένα, ζητείται η τροποποίηση του GaBP, ώστε να έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει έναν πίνακα επανάληψης, έστω  $\mathbf{Q}$ , καθώς και ένα σταθερό διάνυσμα, έστω  $\mathbf{d}$ , για την επαναληπτική ενημέρωση της μέσης τιμής συμπερασμού μέσα από μια σχέση της μορφής

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{k}-1}(t) + \mathbf{d} \quad (5.1)$$

Επίσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ανάπτυξη μιας ασύγχρονης κατανεμημένης εκδοχής του αλγορίθμου GaBP με πολλούς διαφορετικούς επεξεργαστές. Οι επεξεργαστές θα είναι συνδεδεμένοι σε ένα δίκτυο και θα εκτελείται ο αλγόριθμος GaBP είτε στη κλασική του μορφή είτε σε γραμμική επαναληπτική μορφή.

# Κεφάλαιο 6

## Παράρτημα 1

### 6.1 Απόδειξη Πρότασης 1

Αρχικά, η απόδειξη της Πρότασης 1 παρουσιάστηκε αναλυτικά στο [1] και παρουσιάζεται και στο παράρτημα αυτό. Χρησιμοποιώντας το συμπλήρωμα Schur των περιορισμών (2.22), μπορούν να γραφούν ως εξής,

$$w_{ij} - g_{ij}(\mathbf{w}) \leq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \quad (6.1)$$

$$-p_{ii} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki} \leq 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \quad (6.2)$$

Έστω, ότι  $S_1 \neq \emptyset$  τότε υπάρχει σίγουρα ένα στοιχείο  $\mathbf{w} \in S_1$ . Από τον ορισμό του  $S_1$  στη σχέση (2.19), για το συγκεκριμένο  $\mathbf{w}$  ισχύει ότι  $\mathbf{w} \leq \mathbf{g}(\mathbf{w})$  και  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ . Καθένας από τους δυο αυτούς περιορισμούς συνεπάγεται ότι  $w_{ij} - g_{ij}(\mathbf{w}) \leq 0$  και  $p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki} < 0 \Rightarrow -p_{ii} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki} < 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}$ . Συνεπώς, είναι φανερό ότι το διάνυσμα  $\mathbf{w}$  ικανοποιεί τους περιορισμούς (6.1) και (6.2) και αποτελεί εφικτή λύση για το πρόβλημα (2.23).

Έστω τώρα ότι το πρόβλημα (2.23) έχει ως εφικτή λύση το διάνυσμα  $\mathbf{w}$ , τότε το  $\mathbf{w}$  πρέπει να ικανοποιεί τους περιορισμούς (6.1) και (6.2). Επιπλέον, έστω ότι  $-p_{ii} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki} = 0$ , τότε έχω

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki} & p_{ij} \\ p_{ij} & -w_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_{ij} \\ p_{ij} & -w_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{Z}) = -p_{ij}^2 < 0$$

Έτσι, ο πίνακας  $\mathbf{Z}$  δεν είναι θετικά ημιορισμένος, πράγμα το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τις απαιτούμενες προϋποθέσεις για να είναι το διάνυσμα  $\mathbf{w}$  εφικτή λύση του προβλήματος (2.22). Έτσι, αναγκαστικά πρέπει να ισχύει ότι  $-p_{ii} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki} \neq 0$

0. Συνδυάζοντας τη τελευταία σχέση με το γεγονός ότι  $-p_{ii} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki} \leq 0$  προκύπτει ως τελικό αποτέλεσμα ότι  $-p_{ii} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki} < 0$  και σε συνδυασμό με τη σχέση  $w_{ij} - g_{ij}(\mathbf{w}) \leq 0$ , η οποία απορρέει από τον ορισμό του  $S_1$  προκύπτει ότι  $\mathbf{w} \in S_1$  και κατά συνέπεια  $S_1 \neq \emptyset$ , ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$

## 6.2 Απόδειξη Πρότασης 2

Εκτός από την ενότητα αυτή, η απόδειξη της πρότασης 2 έχει παρουσιαστεί στο [1]. Αρχικά, πρέπει να αναφερθούν δυο συγκεκριμένα γεγονότα που χαρακτηρίζουν το διάνυσμα  $\mathbf{w}^*$ . Αφού το  $\mathbf{w}^*$  είναι ταυτόχρονα και η βέλτιστη λύση του προβλήματος (2.22), καθώς και ένα από τα διανύσματα  $\mathbf{w}$ , τα οποία ανήκουν στο  $S_1$ , δηλαδή ισχύει ότι  $\mathbf{w}^* \in S_1$  τότε θα πρέπει να ισχύει ο περιορισμός (6.1) για όλα τα  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , ο οποίος γράφεται ισοδύναμα ως

$$\mathbf{w}^* \leq \mathbf{g}(\mathbf{w}^*) \quad (6.3)$$

Επιπλέον, όπως για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{w}$  έτσι και για τη βέλτιστη λύση του προβλήματος (2.22), θα ισχύει ο περιορισμός (6.2), ο οποίος μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$-p_{ii} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki}^* \leq 0 \quad (6.4)$$

Όμως, στην περίπτωση που ο περιορισμός αυτός ικανοποιείται με ισότητα, δηλαδή  $-p_{ii} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki}^* = 0$ , τότε η συνάρτηση  $g_{ij}(\mathbf{w}^*) = -\frac{p_{ij}^2}{p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki}^*}$  οδηγείται σε απροσδιοριστία. Επομένως, πρέπει απαραίτητα να ισχύει ότι

$$-p_{ii} - \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki}^* < 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathbf{w}^* \in \mathcal{W} \quad (6.5)$$

Θέτοντας τη σχέση (6.5) στη σχέση (2.14) προκύπτει ότι  $g_{ij}(\mathbf{w}^*) < 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathbf{g}(\mathbf{w}^*)$ . Σε συνδυασμό με τη σχέση (6.3) προκύπτει ότι

$$\mathbf{w}^* \leq \mathbf{g}(\mathbf{w}^*) < 0 \Rightarrow \mathbf{w}^* < 0 \quad (6.6)$$

Στη συνέχεια θα εξεταστεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης  $g_{ij}(\mathbf{w}^*)$  ως προς

τη μεταβλητή  $w_{ki}$  για  $k \in \mathcal{N}(i) \setminus j$ . Η παράγωγος αυτή είναι

$$\frac{\partial g_{ij}(\cdot)}{\partial w_{ki}} = \frac{p_{ij}^2}{(p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} w_{ki})^2} \quad (6.7)$$

Είναι φανερό ότι η παράγωγος αυτή είναι  $\frac{\partial g_{ij}(\cdot)}{\partial w_{ki}} > 0$ , ενώ ταυτόχρονα η συνάρτηση  $g_{ij}(\mathbf{w})$  είναι συνεχής για όλα τα  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ . Κατά συνέπεια, η συνάρτηση  $g_{ij}(\mathbf{w})$  είναι γνησίως αύξουσα για όλα τα  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ . Έτσι από τη σχέση (6.6), εφαρμόζοντας τη συνάρτηση  $\mathbf{g}(\cdot)$ , προκύπτει ότι

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}^*) \leq \mathbf{g}(0) \quad (6.8)$$

Σε συνδυασμό με τον περιορισμό  $\mathbf{w}^* \leq \mathbf{g}(\mathbf{w}^*)$  προκύπτει ότι

$$\mathbf{w}^* \leq \mathbf{g}(0) \quad (6.9)$$

Εφαρμόζοντας ξανά τη συνάρτηση  $\mathbf{g}(\cdot)$  στη σχέση (6.9) ισχύει ότι

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}^*) \leq \mathbf{g}^{(2)}(0) \quad (6.10)$$

Λόγω της σχέσης (6.3), σε συνδυασμό με την (6.10) προκύπτει ότι  $\mathbf{w}^* \leq \mathbf{g}^{(2)}(0)$ . Με χρήση επαγωγής μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$\mathbf{w}^* \leq \mathbf{g}^{(t)}(0) \quad \forall t \geq 0. \quad (6.11)$$

Λαμβάνοντας το όριο και στις δυο πλευρές της σχέσης (6.11) και δεδομένου ότι  $\mathbf{g}^{(t)}(0) = \mathbf{v}^a(t)$  με  $\mathbf{v}^a(0) = 0$  προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{w}^* \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{g}^{(t)}(0) \Rightarrow \mathbf{w}^* \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t) \quad (6.12)$$

με την αρχικοποίηση  $\mathbf{v}^a(0) = 0$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα 1, το όριο  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)$  με  $\mathbf{v}^a(0) = 0$  ταυτίζεται με το όριο  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)$  με  $\mathbf{v}^a(0) \in \mathcal{A}$ , πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{w}^* \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t) \quad (6.13)$$

$\forall \mathbf{v}^a(0) \in \mathcal{A}$ . Παράλληλα, αφού το  $\mathbf{v}^a(t) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)$  για  $\mathbf{v}^a(0) \in \mathcal{A}$ , τότε

εφαρμόζοντας τη σχέση (2.13) προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t) = \mathbf{g}(\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)) \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t) \in \mathcal{W} \quad (6.14)$$

Ξαναγράφοντας τις σχέσεις (6.14) σε βαθμωτή μορφή προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_{i \rightarrow j}^a(t) = g_{ij}(\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)) \text{ and } p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} \lim_{t \rightarrow \infty} v_{i \rightarrow j}^a(t) > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \quad (6.15)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (6.15) με τους περιορισμούς (6.1) και (6.2) είναι φανερό ότι το  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)$  είναι εφικτή λύση για το πρόβλημα (2.22). Όμως, είναι ήδη γνωστό ότι το  $\mathbf{w}^*$  είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος (2.22) και συνεπώς,

$$\|\mathbf{w}^*\|^2 \leq \|\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)\|^2 \quad (6.16)$$

Έπειτα, αντικαθιστώντας τη σχέση  $p_{ii} + \sum_{k \in \mathcal{N}(i) \setminus j} \lim_{t \rightarrow \infty} v_{i \rightarrow j}^a(t) > 0$  στη σχέση (2.14) είναι φανερό ότι

$$g_{ij}(\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)) < 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathbf{g}(\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)) < \mathbf{0} \quad (6.17)$$

Επειδή όμως το όριο  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t) = \mathbf{g}(\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t))$ , τότε προκύπτει ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t) < \mathbf{0}$ , όπου σε συνδυασμό με τη σχέση (6.13) προκύπτει ότι

$$\mathbf{w}^* \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t) < \mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{w}^*\|^2 \geq \|\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)\|^a \quad (6.18)$$

Μετά από τη σύγκριση των σχέσεων (6.16) και (6.18) επικρατεί η ισότητα, η οποία οδηγεί στη σχέση.

$$\|\mathbf{w}^*\|^2 = \|\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)\|^2 \quad (6.19)$$

Έστω, ότι  $\mathbf{w}^* \neq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)$ , τότε σύμφωνα με τη σχέση (6.13) θα πρέπει να ισχύει ότι  $\|\mathbf{w}^*\|^2 < \|\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)\|^2$ , πράγμα το οποίο οδηγεί σε αντίφαση με τη σχέση (6.19). Συνεπώς, πρέπει αναγκαστικά να ισχύει ότι  $\mathbf{w}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}^a(t)$ , ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$

### 6.3 Απόδειξη Συμπεράσματος 1

Η απόδειξη του Συμπεράσματος 1 αναπτύχθηκε στο [2] και παρουσιάζεται στη συνέχεια. Το Συμπέρασμα 1 αποδεικνύεται ορίζοντας δυο διαφορετικούς διαχειριστές σφάλματος (error operators)  $\Omega(\Psi, \mathbf{M}, t)$  και  $\Omega(\Psi, |\mathbf{M}|, t)$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα 1, καθένας από αυτούς του διαχειριστές σφάλματος εκφράζεται ως ένα άθροισμα από μονοπάτια πάνω στον ίδιο DAG με τη διαφορά ότι το άθροισμα των μονοπατιών, το οποίο εκφράζει τον διαχειριστή σφάλματος  $\Omega(\Psi, |\mathbf{M}|, t)$  λαμβάνεται ως η απόλυτη τιμή των όρων του αθροίσματος μονοπατιών που εκφράζει τον  $\Omega(\Psi, \mathbf{M}, t)$ . Έτσι,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|x[t] - x(*)\|}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|\Omega(\Psi, \mathbf{M}, t)\|}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|\Omega(\Psi, |\mathbf{M}|, t)\|}{t} \leq s^* \log(\rho(|\mathbf{M}|)) \quad (6.20)$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$



# Βιβλιογραφία

- [1] Q. Su and Y.-C. Wu, “On convergence conditions of gaussian belief propagation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 63, pp. 1144–1155, Jan. 2015.
- [2] J. Hook and N. Dingle, “Performance analysis of asynchronous parallel jacobi,” *Springer*, vol. 77, pp. 831–866, Mar. 2018.
- [3] D. Bickson, *Gaussian Belief Propagation : Theory and Application*. PhD thesis, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israel, 2009.
- [4] Q. Su and Y.-C. Wu, “Convergence analysis of the variance in gaussian belief propagation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, pp. 5119–5131, Oct. 2014.
- [5] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [6] A. Bletsas, “Batteryless, ambiently-powered internet of things that think: An asynchronous message passing approach,” in *IEEE International Conference on RFID-Technologies and Applications (RFID-TA)*, (Orlando, FL), Apr. 2018.