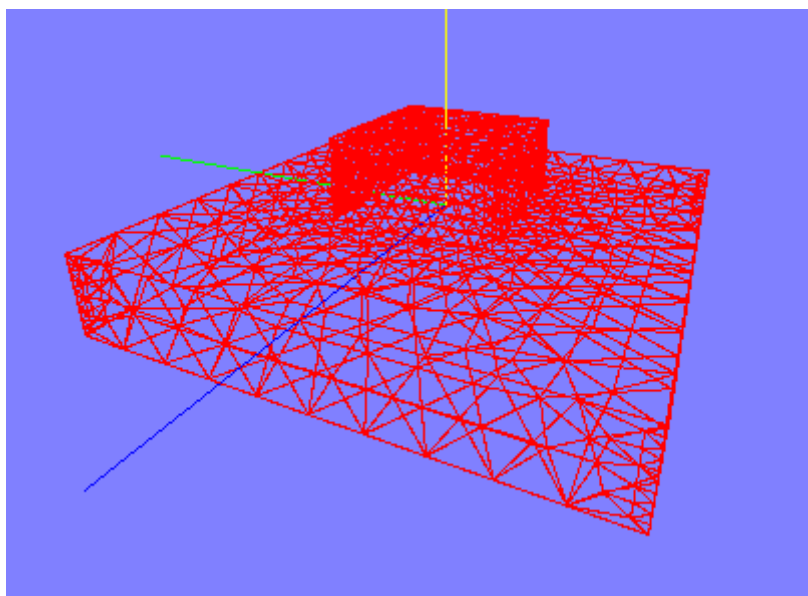




ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΗ ΔΟΜΗΜΕΝΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ ΣΕ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FRONTAL DELAUNAY



ΝΤΙΠΤΕΝΗ ΜΑΡΙΝΑ

Επιβλέπων:

Νικολός Ιωάννης, Λέκτορας

Μέλη τριμελούς επιτροπής:

Κουϊκόγλου Βασίλειος, Αν. Καθ.

Τσουρβελούδης Νικόλαος, Επ. Καθ.

Χανιά 2004

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω καταρχήν τον υπεύθυνο καθηγητή κ. Ιωάννη Κ. Νικολό για την καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας μου, καθώς επίσης και για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με τον προγραμματισμό και να γνωρίσω νέους τομείς.

Πολλές ευχαριστίες οφείλω στην οικογένεια μου για την εμπιστοσύνη και την στήριξη που μου παρέχουν σε κάθε επιλογή μου, καθώς επίσης και για την οικονομική τους συνεισφορά τα πέντε χρόνια των σπουδών μου.

Τέλος δεν θα μπορούσα να παραλείψω τον φίλο και συνάδελφο Γιάννη Κοντολάτη για την βοήθεια, την συνεργασία και την συμπαράσταση του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	6
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΜΕΘΟΔΟΣ DELAUNAY	8
1.1 Εισαγωγή	8
1.2 Μέθοδος Delaunay	8
1.3 Διάγραμμα Voronoi και Τριγωνοποίηση Delaunay	10
1.4 Αλγόριθμος Bowyer-Watson	11
1.5 Αλγόριθμος Tanemura-Ogawa-Ogita	13
1.6 Ανταλλαγή Ακμών/Εδρών	14
1.7 Βελτιστοποίηση Πλέγματος	15
1.8 Εξαναγκασμένη Τριγωνοποίηση Delaunay	16
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΕΧΝΙΚΗ ADVANCING FRONT (AFT)	18
2.1 Εισαγωγή	18
2.2 Απαιτήσεις Παραγωγής Πλέγματος	18
2.3 Μοντελοποίηση Γεωμετρίας	19
2.3.1 Περιγραφή του Υπολογιστικού Πεδίου Αναφοράς	19
2.3.2 Η Τεχνική Advancing Front	21
2.3.3 Ενημέρωση Μετώπου	22
2.3.4 Χαρακτηρισμός Πλέγματος: Παράμετροι Πλέγματος	23
2.3.5 Έλεγχος Πλέγματος	25
2.3.6 Υπόβαθρο Πλέγμα	25
2.3.7 Διανομή Πηγών	26
2.3.8 Υπολογισμός του Μετασχηματισμού T	27
2.3.9 Διακριτοποίηση Καμπυλών	27
2.3.10 Παραγωγή Τριγώνων σε Δισδιάστατα Πεδία Αναφοράς	28
2.3.11 Αύξηση της Ποιότητας του Πλέγματος	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΣ FRONTAL DELAUNAY (FROD)	32
3.1 Εισαγωγή	32
3.2 Δημιουργία Τριγωνοποίησης Delaunay	33
3.3 Η Εξαναγκασμένη Τριγωνοποίηση Delaunay	34
3.4 Σύνοψη του Αλγορίθμου Frontal Delaunay	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ	36
4.1 Εισαγωγή	36
4.2 Μοντελοποίηση Επιφάνειας	37
4.2.1 Γεωμετρικός Ορισμός	38
4.2.1.1 Καμπύλες	38
4.2.1.2 Επιφάνειες	39
4.2.2 Τοπολογική Περιγραφή	40
4.3 Διακριτοποίηση Επιφάνειας	40
4.4 Τριγωνοποίηση Επιφανειών	41
4.4.1 Υπολογισμός των Τοπικών Συντεταγμένων των Σημείων των Ακμών	42
4.4.2 Διακριτοποίηση Καμπύλης	43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΗ ΔΟΜΗΜΕΝΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΣΕ ΣΤΕΡΕΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ MESH.....45

5.1 Εισαγωγή.....	45
5.2 Στάδια Παραγωγής μη Δομημένου Πλέγματος με το Πρόγραμμα Mesh.....	47
5.2.1 Πρώτο Στάδιο-Είσοδος Δεδομένων.....	47
5.2.2 Δεύτερο Στάδιο-Διακριτοποίηση των Ακμών του Ορίου.....	48
5.2.3 Τρίτο Στάδιο-Μετασχηματισμός στις Δύο Διαστάσεις.....	48
5.2.4 Τέταρτο Στάδιο-Παραγωγή μη Δομημένου Πλέγματος.....	50
5.2.5 Πέμπτο Στάδιο-Αντίστροφος Μετασχηματισμός της Τριγωνοποιημένης Επιφάνειας από τις Δύο στις Τρεις Διαστάσεις.....	50
5.2.6 Έκτο Στάδιο-Επεξεργασία και Εξαγωγή Αποτελεσμάτων.....	50
5.3 Λογισμικό Delaundo για την Παραγωγή μη Δομημένου Πλέγματος σε Επιφάνειες στις Δύο Διαστάσεις	51
5.4 Τύποι Αρχείων που Χρησιμοποιούνται στο Πρόγραμμα.....	51
5.4.1 Αρχείο Εισόδου Τύπου .dip.....	51
5.4.2 Αρχείο Καθορισμού Παραμέτρων Τύπου .ctr.....	52
5.4.3 Αρχείο Εισόδου Τύπου .pts.....	52
5.4.4 Αρχείο Εξόδου Τύπου .dpl.....	52
5.5 Εφαρμογές του λογισμικού σε περιπτώσεις στερεών	52

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΗ ΔΟΜΗΜΕΝΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ MESH.....69

6.1 Εισαγωγή.....	69
6.2 Παραγωγή Πλέγματος σε Καμπύλες Επιφάνειες NURBS.....	69
6.2.1 Στάδια Παραγωγής μη Δομημένου Πλέγματος σε Καμπύλες Επιφάνειες με το Πρόγραμμα Mesh.....	70
6.2.1.1 Είσοδος Δεδομένων.....	71
6.2.1.2 Μετασχηματισμός στον Παραμετρικό Χώρο.....	72
6.2.1.3 Παραγωγή μη Δομημένου Πλέγματος στο Παραμετρικό Επίπεδο.....	72
6.2.1.4 Αντίστροφος Μετασχηματισμός της Τριγωνοποιημένης Επιφάνειας από το Παραμετρικό Επίπεδο στον Τρισδιάστατο Χώρο.....	73
6.2.1.5 Εξαγωγή Αποτελεσμάτων.....	73
6.3 Τύποι Αρχείων που Χρησιμοποιούνται στο Πρόγραμμα.....	73
6.3.1 Αρχείο Εισόδου Τύπου .nbs.....	73
6.4 Παραδείγματα Παραγωγής Πλέγματος σε Καμπύλες Επιφάνειες NURBS	74
6.5 Παραγωγή Πλέγματος σε Τεμνόμενες Επιφάνειες NURBS.....	83
6.5.1 Περιγραφή της Διαδικασίας Παραγωγής Πλέγματος σε δύο Τεμνόμενες Επιφάνειες NURBS.....	84
6.5.1.2 Παρατηρήσεις.....	86
6.6 Παραδείγματα Παραγωγής Πλέγματος σε δύο Τεμνόμενες Επιφάνειες NURBS.....	86

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....92

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	94
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι.....	97
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ.....	103

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παραγωγή μη δομημένου πλέγματος έχει τις ρίζες της στον κόσμο των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν αρχικά για υπολογισμό αντοχής και παραμόρφωσης. Η εισαγωγή τους στην κοινότητα της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής (CDF-Computational Fluid Dynamics) ξεκίνησε στη δεκαετία του '80 αρχικά από τους Baker, Weatherill, και Lohner. Αν και γίνονται σημαντικές προσπάθειες αυτοματοποίησης, ώστε να μειωθεί ο χρόνος που απαιτείται από τον χρήστη για την παραγωγή πολλαπλών δομημένων πλεγμάτων σε σύνθετες γεωμετρίες, η πλειοψηφία των χρηστών προτιμά τις μεθόδους μη δομημένου πλέγματος σε γεωμετρίες αυξημένης πολυπλοκότητας.

Η ευελιξία των μη δομημένων πλεγμάτων μειώνει εντυπωσιακά το χρόνο παραγωγής ενός υπολογιστικού πλέγματος γύρω από μια σύνθετη γεωμετρία, από εργατομήνες για ένα δομημένο πολύπλοκο πλέγμα σε μερικά λεπτά CPU για ένα τετράεδρο μη δομημένο πλέγμα. Εκτός από το κέρδος κατά τη διάρκεια της παραγωγής πλέγματος, ακόμα σημαντικότερο είναι το κέρδος κατά τη διάρκεια του υπολογισμού της λύσης, λόγω της βελτιστοποίησης του πλέγματος που προσαρμόζεται στη λύση. Ενώ η προσαρμογή της πυκνότητας του πλέγματος είναι μια αυτοματοποιημένη διαδικασία στην περίπτωση ενός μη δομημένου πλέγματος, είναι μια μάλλον δύσκολη διαδικασία στα δομημένα πλέγματα.

Τα μη δομημένα πλέγματα έχουν έμφυτη την απλότητα κατασκευής, δεδομένου ότι, εξ ορισμού, δεν απαιτείται καμία δομή. Επίσης δεν είναι απαραίτητο να διαβιβαστεί η πραγματική τοπολογία της διαμόρφωσης στη γεννήτρια πλέγματος. Αν και συνήθως είναι συνώνυμα με πλέγματα τετραέδρων κελιών, τα μη δομημένα πλέγματα μπορούν εναλλακτικά να αποτελούνται από εξάεδρα κελιά (χωρίς κατευθυντικές δομές). Ο όρος καλύπτει αυστηρά οποιοδήποτε συνδυασμό μορφών κελιών, αλλά στη βιβλιογραφία παραγωγής πλέγματος οι συνδυασμοί περιοχών με δομή (π.χ., δομημένα ή πρισματικά πλέγματα κοντά στις επιφάνειες σωμάτων) με περιοχές χωρίς δομή καλούνται γενικά υβριδικά πλέγματα. Για αυτό το λόγο, τα δομημένα κατά τμήματα πλέγματα είναι μη δομημένα στο σύνολο τους.

Παραδοσιακά, τα μη δομημένα πλέγματα έχουν χρησιμοποιηθεί με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Υπάρχει, επομένως, μια εκτενής βιβλιογραφία που καλύπτει τις τεχνικές για να παραχθούν μη δομημένα πλέγματα. Επειδή, δεν είναι δυνατό να παρουσιαστούν, λεπτομερώς, όλες οι διαφορετικές τεχνικές, άντ' αυτού, η έμφαση θα δοθεί στις δύο κύριες τεχνικές, την τεχνική Delaunay και την τεχνική Advancing Front, καθώς και στον συνδυασμό τους την τεχνική Frontal Delaunay, η οποία και θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία.

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας αναπτύχθηκε κώδικας FORTRAN, με σκοπό την παραγωγή μη δομημένου πλέγματος, αποτελούμενο από τριγωνικά στοιχεία αρχικά στις επιφάνειες στερεών που συντίθενται από επίπεδες επιφάνειες. Στη συνέχεια η μέθοδος επεκτάθηκε για τη δημιουργία μη δομημένου πλέγματος σε καμπύλες επιφάνειες NURBS με τυχαία όρια, καθώς και σε επιφάνειες NURBS που δημιουργούνται από την τομή δύο ανεξάρτητων επιφανειών NURBS.

Ο κώδικας που αναπτύχθηκε βασίστηκε στον κώδικα «delaundo» του Jens-Dominik Muller [36], που δημιουργήθηκε για τις ανάγκες της διδακτορικής του διατριβής. Ο κώδικας «delaundo» παράγει τριγωνικό πλέγμα σε επιφάνειες που περιγράφονται μόνο στις δύο διαστάσεις. Η κατασκευή του πλέγματος βασίζεται στη μέθοδο Frontal Delaunay (συνδυασμός των μεθόδων Delaunay και Advancing Front).

Η παρούσα εργασία έχει την ακόλουθη δομή. Στα κεφάλαια 1 έως 3 περιγράφονται αναλυτικά η μέθοδος Delaunay, η μέθοδος Advancing Front και η συνδυασμένη μέθοδος Frontal Delaunay αντίστοιχα. Το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στην παραγωγή πλέγματος σε επιφάνειες και καμπύλες και περιγράφει όλες τις απαραίτητες διαδικασίες για υλοποίηση της. Στο πέμπτο κεφάλαιο δίνεται αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθήθηκε κατά την ανάπτυξη του προγράμματος «Mesh» για παραγωγή πλέγματος στις επιφάνειες στερεών αποτελούμενων από επίπεδες επιφάνειες και περιγράφονται τα στοιχεία εκείνα του delaundo που κρίνονται απαραίτητα για την κατανόηση του προγράμματος. Στο έκτο κεφάλαιο περιγράφεται η διαδικασία για την κατασκευή μη δομημένου πλέγματος σε καμπύλες επιφάνειες, που αποτελούνται από μία ή περισσότερες NURBS επιφάνειες. Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο αναφέρονται κάποια συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτή την εργασία και περιγράφονται οι δυσκολίες και τα προβλήματα που χρειάστηκε να αντιμετωπιστούν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΕΘΟΔΟΣ DELAUNAY

1.1 Εισαγωγή

Γεγονός αποτελεί ότι φαινομενικά απλές σκέψεις μπορούν συχνά να οδηγήσουν σε τελείως καινούργια πεδία έρευνας και να βρουν εφαρμογή σε πολλούς διαφορετικούς τομείς. Αυτό το φαινόμενο παρατηρείται στην περίπτωση της τριγωνοποίησης Delaunay [16] και του διαγράμματος Voronoi [57]. Παρόλο που διατυπώθηκαν στις αρχές του εικοστού αιώνα, αυτές η θεμελιώδεις γεωμετρικές ιδέες έχουν βρει πρόσφατα πλήθος εφαρμογών σε πολλούς τομείς όπως η παρεμβολή δεδομένων [17], η ιατρική [10], η κινούμενη εικόνα και η δημιουργία μη δομημένων πλεγμάτων [14, 49, 2, 21, 59, 48].

Στην παραγωγή πλέγματος δίνεται έμφαση στο να επιτευχθεί μια καλή απεικόνιση της γεωμετρίας της επιφάνειας. Αυτό απαιτεί στενή σχέση μεταξύ λογισμικού CAD και γεννήτριας πλέγματος, και την ανάγκη να εξασφαλιστεί ότι όχι μόνο τα σημεία της επιφάνειας αλλά και οι ακμές και οι έδρες της επιφάνειας του πλέγματος θα βρίσκονται πάνω στην πραγματική επιφάνεια. Παράλληλα, σημαντικό στοιχείο είναι η αυτοματοποίηση της διαδικασίας παραγωγής πλέγματος και η παροχή της δυνατότητας στο χρήστη να προχωρήσει άμεσα από τη σχεδίαση μέσω συστήματος CAD σε δημιουργία πλέγματος επιφάνειας και όγκου, και μετά στην επίλυση του προβλήματος με χρήση μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων ή πεπερασμένων όγκων, χωρίς να απαιτείται άλλη παρέμβαση από τον χρήστη.

1.2 Μέθοδος Delaunay

Παρά το γεγονός ότι πολλές επιστημονικές δημοσιεύσεις, που αφορούν στην παραγωγή πλέγματος, έχουν στον τίτλο τους το επίθετο «αυτόματη», η αληθινά αυτόματη παραγωγή πλέγματος παραμένει δυστυχώς ακόμη άπιαστος στόχος. Αν και ολοκληρωμένα αυτόματη παραγωγή πλέγματος έχει επιτευχθεί για πολύ συγκεκριμένα προβλήματα, δεν είναι ακόμα δυνατό να περιγραφεί παραγωγή πλέγματος τελείως αυτόματα για αυθαίρετο πεδίο αναφοράς. Παρά το γεγονός αυτό, πρέπει να τονιστεί πως η παραγωγή τετράπλευρων πλεγμάτων, και συγκεκριμένα οι μέθοδοι που είναι βασισμένες στην Delaunay, διαθέτουν υψηλό επίπεδο αυτοματοποίησης και στοχεύουν στην επίτευξη του ύψιστου στόχου, της τελείως αυτόματης δημιουργίας πλέγματος.

Το δυσκολότερο σημείο είναι η διατήρηση της ακεραιότητας της επιφάνειας. Δεδομένου ότι η τριγωνοποίηση Delaunay ενός συνόλου σημείων μπορεί να έχει ακμές και έδρες που να μην συμπίπτουν με την επιθυμητή οριακή επιφάνεια, για να εξασφαλιστεί αυτή η ιδιότητα απαιτούνται κάποιοι επιπλέον αλγόριθμοι ή διαδικασίες. Μια αρχική μέθοδος [2, 3] επιτρέπει να οριστεί η οριακή επιφάνεια από ένα νέφος σημείων διευθετημένα σαν σειρά τομών ή χωρικών καμπυλών [10]. Ένας

αλγόριθμος εξασφαλίζει τη δημιουργία μιας τριγωνοποίησης Delaunay, της οποίας οι ακμές και οι έδρες να βρίσκονται σχεδόν πάντα πάνω στην οριακή επιφάνεια [5], δημιουργώντας ένα στρώμα από πρόσθετα σημεία μετατοπισμένα από την οριακή πλευρά. Σε μερικά παραδείγματα που η τεχνική αποτυγχάνει να διατηρήσει την ακεραιότητα του ορίου, μπορεί να τροποποιηθεί το καθορισμένο νέφος σημείων μέχρι να επιτευχθεί το επιθυμητό τέλος της διαδικασίας. Το μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι η έλλειψη άμεσου ελέγχου πάνω στην ακεραιότητα της επιφάνειας του ορίου. Επιπλέον, απαιτείται πλήθος αλληλεπιδράσεων με το χρήστη, που εξαρτώνται από την πολυπλοκότητα του πεδίου αναφοράς που τριγωνοποιείται.

Μια εναλλακτική προσέγγιση που, κατ' αρχήν, οδηγεί σε πλήρη αυτοματισμό, βασίζεται στην ιδέα τροποποίησης της τριγωνοποίησης Delaunay με σειρές ανταλλαγής ακμών / εδρών μέχρι να επιτευχθεί η ακεραιότητα της επιφάνειας του ορίου. Η ιδέα αυτή αρχικά προτάθηκε από τους George et al. [21], και στη συνέχεια ακολουθήθηκε από διάφορους άλλους [59, 48] και πλέον είναι διαθέσιμος μεγάλος αριθμός γεννητριών πλέγματος που εκμεταλλεύεται αυτή την τεχνική. Ένα πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι η ευκαιρία που δίνεται να αναπτυχθούν διαδικασίες παραγωγής πλέγματος επιφανειών και όγκων σαν ανεξάρτητες λειτουργίες. Γι' αυτό η παραγωγή πλέγματος επιφανειών μπορεί να συνδεθεί στενά με συστήματα CAD, επιτρέποντας στο χρήστη να δημιουργήσει καλής ποιότητας πλέγμα επιφάνειας που συμμορφώνεται με το πραγματικό όριο. Η γεννήτρια πλέγματος όγκου έπειτα, σαν ξεχωριστή λειτουργία, δημιουργεί πλέγμα τετραέδρων που συμμορφώνεται στο προκαθορισμένο πλέγμα επιφάνειας. Η συγκεκριμένη λογική ακολουθείται και στην παρούσα εργασία, όπου στόχος είναι αρχικά να παράγεται ένα ολοκληρωμένο επιφανειακό πλέγμα, όσο το δυνατόν καλύτερα προσαρμοσμένο στην γεωμετρική επιφάνεια που παρέχει ένα λογισμικό CAD.

Για δισδιάστατα πεδία αναφοράς η κατάσταση είναι λιγότερο πολύπλοκη. Σ' αυτή την περίπτωση, η επιφάνεια του ορίου δίνεται από ένα προκαθορισμένο σύνολο σημείων και ακμών, και απαιτείται ένα πλέγμα τριγώνων που συμμορφώνεται στις ακμές του ορίου. Δεδομένου ενός ζεύγους τριγώνων με κοινή ακμή που σχηματίζουν ένα κυρτό τετράπλευρο, μπορεί κανείς να αντικαταστήσει την κοινή ακμή ενώνοντας το άλλο ζεύγος σημείων. Χρησιμοποιώντας την τεχνική της διαγώνιας ανταλλαγής, είναι γνωστό [24] ότι οποιαδήποτε δισδιάστατη τριγωνοποίηση ενός σταθερού συνόλου σημείων μπορεί να μετατραπεί ισοδύναμα σε τριγωνοποίηση Delaunay. Επιπλέον είναι πιθανό η τριγωνοποίηση Delaunay ενός συνόλου οριακών σημείων να μετατραπεί σε τριγωνοποίηση όπου οι ακμές της ταιριάζουν στις προκαθορισμένες ακμές του ορίου [29]. Τέλος η εισαγωγή σημείων επιλεκτικά μέσα στο πεδίο αναφοράς μπορεί να οδηγήσει σε τριγωνοποίηση στις δύο διαστάσεις της οποίας τα τρίγωνα θα ικανοποιούν συγκεκριμένα ποιοτικά κριτήρια [47], [15], [6].

Στις τρεις διαστάσεις η θεωρία είναι πολύ λιγότερο αναπτυγμένη. Οι κύριες δυσκολίες είναι οι ακόλουθες: (1) Υπάρχουν διατάξεις οριακών σημείων και εδρών για τα οποία δεν υπάρχει συμμορφωμένο πλέγμα τετραέδρων, αν δεν εισαχθούν επιπλέον σημεία. (2) Αν και υπάρχουν αναλογίες διαγώνιας ανταλλαγής στις τρεις διαστάσεις μια αυθαίρετη τρισδιάστατη τριγωνοποίηση δεν μπορεί να μετατραπεί σε αντίστοιχη τριγωνοποίηση Delaunay. (3) Η παρουσία «ελαττωμάτων», που σχηματίζονται από τέσσερα ομοεπίπεδα σημεία, μπορεί να αρθεί με προσπάθεια δημιουργίας εξαναγκασμένης τριγωνοποίησης Delaunay που να συμμορφώνεται με το προκαθορισμένο όριο.

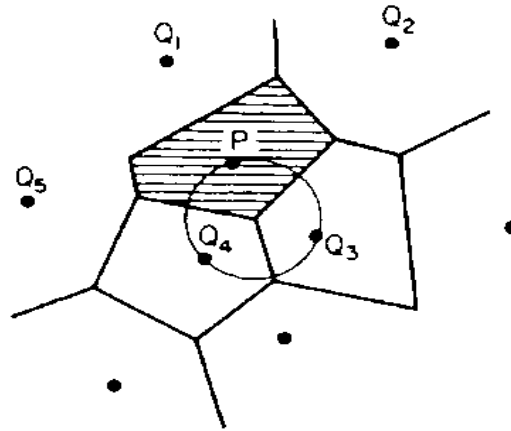
Στην πράξη, είναι πιθανό να δημιουργηθεί εξαναγκασμένη τριγωνοποίηση Delaunay στις τρεις διαστάσεις εάν είναι αρκετά καλή η προκαθορισμένη τριγωνοποίηση της επιφάνειας. Μια καλή γεννήτρια πλέγματος τετραέδρων διακρίνεται από το πόσο καλή πρέπει να είναι η τριγωνοποίηση επιφάνειας, για να δημιουργήσει ένα αποτελεσματικό πλέγμα τετραέδρων προσαρμοσμένο στο όριο. Για παράδειγμα, εάν η τριγωνοποίηση της επιφάνειας του ορίου είναι Delaunay, δεν πρέπει να υπάρχει καμία δυσκολία στη δημιουργία προσαρμοσμένου πλέγματος τετραέδρων, δεδομένου ότι αυτό ακριβώς είναι η τριγωνοποίηση Delaunay η οποία αντιστοιχεί στην επιφάνεια του ορίου. Εάν, όπως γίνεται συνήθως, η τριγωνοποίηση της επιφάνειας προσεγγίζει αλλά όχι τελείως την Delaunay, μπορεί να παραχθεί εξαναγκασμένη τριγωνοποίηση Delaunay που προσαρμόζεται στο όριο, χρησιμοποιώντας ένα συνδυασμό ανταλλαγών ακμών / εδρών και εισαγωγής σημείων. Για τριγωνοποιήσεις στο όριο που παρεκκλίνουν πολύ από την κατάσταση Delaunay, είναι δύσκολο και ίσως αδύνατο να κατασκευαστεί ένα προσαρμοσμένο σύνολο τετραέδρων. Μόλις δημιουργηθεί το αρχικό προσαρμοσμένο στο όριο σύνολο τετραέδρων, μπορεί, προσθέτοντας επιλεκτικά σημεία, να δημιουργηθεί ένα τελικό πλέγμα στο πεδίο αναφοράς, προκειμένου να παραχθεί ένα σύνολο καλών ποιοτικών τετραέδρων των οποίων το μέγεθος θα ποικίλλει βαθμιαία, οδηγώντας σε ένα πλέγμα κατάλληλο για επίλυση με μια μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης, λόγω της εμφάνισης των «ελαττωμάτων», είναι απαραίτητο να εφαρμοστεί μια διαδικασία βελτιστοποίησης του πλέγματος, ώστε να αφαιρεθούν αυτά τα προβληματικά τετράεδρα.

1.3 Διάγραμμα Voronoi και Τριγωνοποίηση Delaunay

Η τριγωνοποίηση Delaunay [16] ενός συνόλου σημείων και η γεωμετρική σχεδίαση με τη χρήση διαγράμματος Voronoi [57], είναι δυο μέθοδοι ιδιαίτερα σημαντικές που έχουν βρει αναρίθμητες πρακτικές εφαρμογές. Για ένα σύνολο σημείων, το διάγραμμα Voronoi καθορίζει την περιοχή του χώρου που βρίσκεται πλησιέστερα σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο από ότι σε οποιοδήποτε άλλο. Στην **Εικόνα 1.1** δίνεται ένα διάγραμμα Voronoi για την περίπτωση δισδιάστατου συνόλου σημείων. Στο διάγραμμα Voronoi, οι συνεχείς γραμμές δημιουργούν ένα μωσαϊκό στο χώρο που περιβάλλει τα σημεία. Κάθε πλακάκι Voronoi (**Εικόνα 1.1**: σκιασμένη περιοχή γύρω από το σημείο P) αποτελείται από την περιοχή του επιπέδου που είναι πλησιέστερα στο συγκεκριμένο σημείο που περιβάλλει, σε σχέση με οποιοδήποτε άλλο σημείο του επιπέδου. Οι ακμές του διαγράμματος Voronoi σχηματίζονται από τις μεσοκαθέτους των γραμμών που ενώνουν τα γειτονικά σημεία (**Εικόνα 1.1**: σημεία P, Q₃, Q₄) και γι' αυτό κάθε κορυφή είναι το περίκεντρο του τριγώνου που σχηματίζεται από τρία σημεία. Αυτή η διαδικασία αποτελεί την τριγωνοποίηση Delaunay και έχει την ιδιότητα, ο περιγεγραμμένος κύκλος κάθε τριγώνου να μην περιλαμβάνει άλλα σημεία εκτός αυτών που το σχηματίζουν (**Εικόνα 1.1**).

Όλα τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν και σε περισσότερες διαστάσεις. Συγκεκριμένα, η τρισδιάστατη τριγωνοποίηση Delaunay είναι η μοναδική τριγωνοποίηση που η περιγεγραμμένη σφαίρα κάθε τετραέδρου δεν περιέχει άλλα σημεία εκτός αυτών που το σχηματίζουν. Στις δύο διαστάσεις το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου μπορεί να αποδειχθεί [51] ισοδύναμο της ισογωνίας ιδιότητας, κατά το οποίο επιλέγεται η τριγωνοποίηση που μεγιστοποιεί την μικρότερη εκ των έξι γωνιών σε οποιοδήποτε ζεύγος δύο τριγώνων που σχηματίζουν ένα κυρτό τετράπλευρο. Δεν έχει αποδειχθεί αντίστοιχη ισοδυναμία για τις τρεις διαστάσεις,

αλλά το κριτήριο της περιγεγραμμένης σφαίρας θεωρείται ότι παράγει αρκετά καλή τριγωνοποίηση για δεδομένο σύνολο σημείων.



Εικόνα 1.1: Διάγραμμα Voronoi για δισδιάστατο σύνολο σημείων [7]

1.4 Αλγόριθμος Bowyer-Watson

Ο αλγόριθμος Bowyer-Watson [12, 58] αποτελεί μια ακριβή μέθοδο για την δημιουργία τριγωνοποίησης Delaunay, και μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα σε οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων. Είναι ένας αυξητικός αλγόριθμος που εκμεταλλεύεται απευθείας το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου για την τριγωνοποίηση Delaunay ως ακολούθως:

Έστω T_n η τριγωνοποίηση Delaunay συνόλου n σημείων, $V_n = \{P_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Για οποιοδήποτε απλό $S \in T_n$, έστω R_S το περιακτίνιο και το Q_S το περίκεντρο.

Εισάγουμε ένα νέο σημείο P_{n+1} μέσα στον κυρτό χώρο του V_n και ορίζουμε $B = \{S \mid S \in T_n, d(P_{n+1}, Q_S) < R_S\}$, όπου $d(P, Q)$ είναι η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων P και Q .

Τώρα το B δεν είναι κενό, δεδομένου ότι το P_{n+1} είναι μέσα στον κυρτό χώρο του V_n και ως εκ τούτου μέσα σε μερικά απλά $S' \in T_n$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $S' \in B$. Η περιοχή C που συνδέεται απλά, διαμορφώνεται όταν το B αφαιρείται από το T , περιέχει το P_{n+1} (δεδομένου ότι το P_{n+1} είναι μέσα στο $S' \in B$), και το P_{n+1} είναι ορατό από όλα τα σημεία στο όριο της C .

Είναι επομένως πιθανό να παραχθεί μια τριγωνοποίηση του συνόλου σημείων $V_{n+1} = V_n \cup \{P_{n+1}\}$ με τη σύνδεση του P_{n+1} με όλα τα σημεία στο όριο της C . Επιπλέον, αυτή η τριγωνοποίηση αποτελεί την τριγωνοποίηση Delaunay T_{n+1} .

Η υλοποίηση του αλγορίθμου Bowyer-Watson στις τρεις διαστάσεις αρχίζει με ένα υπερτετράεδρο ή έναν υπερκύβο χωρισμένο σε πέντε τετράεδρα, τα οποία περιλαμβάνουν όλα τα υπόλοιπα σημεία. Τα εναπομείναντα σημεία που αποτελούν το νέφος των σημείων που θα τριγωνοποιηθούν εισάγονται ένα τη φορά και μετά την

εισαγωγή κάθε σημείου εφαρμόζεται ο αλγόριθμος Bowyer-Watson για να δημιουργήσει τριγωνοποίηση Delaunay.

Σε αυτόν τον αλγόριθμο είναι απαραίτητο να δεσμευτούν δύο λίστες μήκους 4 η καθεμία, για κάθε τετράεδρο. Η πρώτη λίστα κρατάει τα σημεία μορφοποίησης του τετραέδρου, ενώ η δεύτερη κρατάει τις διευθύνσεις των τεσσάρων γειτονικών τετραέδρων που έχουν κοινή έδρα. Η τελευταία λίστα, η οποία παρέχει πληροφορίες για τις γειτνιάσεις των τετραέδρων, δεν είναι απαραίτητη για την υλοποίηση του αλγορίθμου. Ωστόσο, επιτρέπει την εύκολη εύρεση όλων των τετραέδρων που ανήκουν σε μια κοιλότητα με τη βοήθεια μιας αναζήτησης δέντρου, εάν έχει βρεθεί ένα από αυτά. Χωρίς αυτές τις πληροφορίες ο αλγόριθμος θα είναι ανεπαρκής. Χρήσιμο είναι επίσης να αποθηκεύονται η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας και οι συντεταγμένες του περίκεντρου για κάθε τετράεδρο.

Το εναπομείναν βήμα του αλγορίθμου Bowyer-Watson είναι η ενημέρωση των δομών δεδομένων. Τα τετράεδρα που ανήκουν στο σύνολο B σβήνονται από τις λίστες και προστίθενται τα νέα τετράεδρα, που δημιουργούνται από την ένωση του νέου σημείου με όλες τις τριγωνικές έδρες της κοιλότητας του ορίου. Τέλος είναι απαραίτητο να προσδιοριστούν οι γειτνιάσεις που υπάρχουν μεταξύ των νέων τετραέδρων και μεταξύ των νέων και παλιών τετραέδρων που έχουν έδρες στο όριο της κοιλότητας.

Όταν εισάγεται ένα νέο σημείο, γίνεται αναζήτηση στις λίστες των τετραέδρων για να βρεθεί το πρώτο τετράεδρο που αποτυγχάνει στο τεστ Delaunay. Τα εναπομείναντα τετράεδρα που σχηματίζουν την κοιλότητα μπορούν να βρεθούν με μια αναζήτηση δέντρου. Έπειτα από την αφαίρεση των τετραέδρων αυτών, τα σημεία στο όριο της κοιλότητας ενώνονται με το νέο σημείο P και τα νέα τετράεδρα που δημιουργούνται προστίθενται στη δομή δεδομένων. Ο χρόνος που απαιτείται να τριγωνοποιηθούν N σημεία δίνεται από τη σχέση:

$$T = \sum_k^N (T_k + T_k') \quad (1.1)$$

όπου, T_k είναι ο χρόνος που απαιτείται για την αναζήτηση του πρώτου τετραέδρου της κοιλότητας που προκύπτει από την εισαγωγή του k -οστού σημείου σε τριγωνοποίηση $K-1$ σημείων. Το T_k' είναι ο χρόνος που απαιτείται για να βρεθούν όλα τα τετράεδρα που απέμειναν στην κοιλότητα και να δημιουργηθεί η νέα τριγωνοποίηση. Ο χρόνος T_k' θα είναι ανάλογος προς τον αριθμό των τετραέδρων στην κοιλότητα. Εάν τα σημεία εισάγονται τυχαία, που σημαίνει μεγάλη διασπορά [2], το μέγεθος κοιλοτήτων, και ως εκ τούτου ο χρόνος T_k , πρέπει να είναι κατά προσέγγιση ανεξάρτητο του k . Κάτω από όχι ακραίες συνθήκες στην παρούσα κατάσταση της τριγωνοποίησης, ο χρόνος T_k μπορεί να θεωρηθεί ως $O(1)$. Κατά συνέπεια, η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου εξουσιάζεται από το χρόνο αναζήτησης T_k . Γενικά, η λίστα τετραέδρων θα διαταχτεί τυχαία και, στη χειρότερη περίπτωση, ο T_k θα είναι $O(k)$, που οδηγεί σε μια γενική χρονική πολυπλοκότητα για την τριγωνοποίηση που είναι $O(N^2)$.

Είναι επομένως απαραίτητο να εισαχθεί μια δομή στοιχείων που επιτρέπει μια αποδοτική αναζήτηση του πρώτου τετραέδρου που αποτυγχάνει στο τεστ Delaunay, ανεξάρτητα από τον έλεγχο του σημείου. Για να επιτευχθεί αυτό, μπορεί κανείς να

εκμεταλλευτεί τη δομή «octree» για να καταχωρήσει τα σημεία που έχουν παρεμβληθεί προηγουμένως [3]. Η δομή στοιχείων «octree» χρησιμοποιείται για να βρεθεί το κοντινότερο σημείο στο σημείο που εισάγεται. Το τετράεδρο που έχει αυτό το σημείο ως κορυφή, συνδέεται με σημείο που εισήχθηκε προηγουμένα. Η αναζήτηση του πρώτου τετραέδρου στην κοιλότητα Delaunay αρχίζει με το τετράεδρο που συνδέεται με το σημείο που είναι πλησιέστερα στο νέο σημείο, και προχωρά να εξετάσει όλα τα γειτονικά τετράεδρα που έχουν αυτό το κοντινότερο σημείο ως κορυφή. Κατ' αυτό τον τρόπο, είναι πιθανό να βρεθεί το πρώτο τετράεδρο της κοιλότητας σε χρόνο T_k που είναι $O(\log K)$. Συνεπώς, η γενική χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(N \log N)$. Εκτός από την δομή «octree», έχουν προταθεί και άλλες δομές στοιχείων που επιτυγχάνουν επίσης έναν γρήγορο χρόνο αναζήτησης [11].

1.5 Αλγόριθμος Tanemura-Ogawa-Ogita

Ένας εναλλακτικός αλγόριθμος [52] για την δημιουργία τριγωνοποίησης Delaunay μπορεί να περιγραφεί για την δισδιάστατη περίπτωση ως εξής.

Δεδομένου ενός συνόλου σημείων V_n και μιας ακμής Delaunay e , μπορεί να κατασκευαστεί ένας κύκλος C_i δια μέσου των ακραίων σημείων του e και οποιωνδήποτε εναπομεινάντων σημείων P_i . Έστω ότι ένας από αυτούς τους κύκλους C_i είναι κενός, οπότε καθορίζει έτσι το τρίγωνο Delaunay T που περιέχει το σημείο P_i , ενώ e είναι η ακμή απέναντι από P_i . Για εξαναγκασμένη τριγωνοποίηση Delaunay, όσον αφορά μια σταθερή ακμή e , απαιτείται να είναι κενό μόνο το τμήμα του κύκλου, από την πλευρά της e που βρίσκεται και το υποψήφιο σημείο P_i . Το τρίγωνο T περιέχει άλλες δύο ακμές εκτός από την e . Εάν κάποια από αυτές τις ακμές δεν είναι μεταξύ της λίστας των ακμών που έχουν ήδη παραχθεί, προστίθεται στην λίστα. Οποιαδήποτε εσωτερική ακμή (δηλ., μη οριακή ακμή) συνδέεται μόνο με ένα τρίγωνο, θεωρείται ενεργός ακμή, στην οποία πρέπει να κατασκευαστεί ένα νέο τρίγωνο Delaunay με την παραπάνω διαδικασία. Ο αλγόριθμος σταματά, και η τριγωνοποίηση ολοκληρώνεται όταν κάθε ακμή του ορίου αντιστοιχεί σε έδρα ενός τριγώνου και κάθε εσωτερική ακμή διαμορφώνει την κοινή έδρα ακριβώς δύο τριγώνων. Αυτή η προσέγγιση είναι η βάση ενός αλγορίθμου που αρχικά προτάθηκε από τους Tanemura et al. [52] και που χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια από τους Merriam [34] και Mavriplis [33].

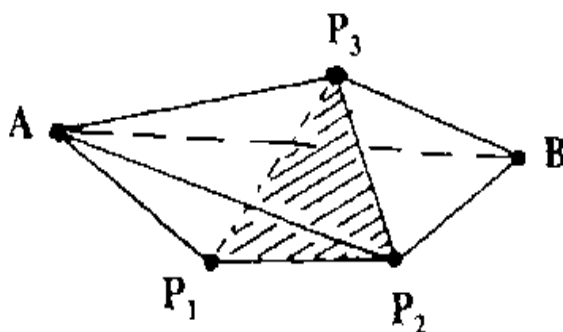
Στην δισδιάστατη περίπτωση, ο αλγόριθμος Tanemura-Ogawa-Ogita ανταποκρίνεται αρκετά καλά στη στοιχειώδη εξαναγκασμένη τριγωνοποίηση Delaunay, όσον αφορά σε ένα ορισμένο σύνολο ακμών ορίου. Μετά από τη δημιουργία μιας τριγωνοποίησης που αποτελείται από σημεία του ορίου και που προσαρμόζεται στις ακμές του ορίου, είναι πιθανό να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος Bowyer-Watson για να προσθέσει επιλεκτικά σημεία, έως ότου δημιουργηθεί ένα αποδεκτό πλέγμα. Έχουν προταθεί και έχουν αναλυθεί διάφορες στρατηγικές τοποθέτησης σημείων, συμπεριλαμβανομένης της εισαγωγής σημείου περίκεντρου [59] και της τμηματικής μεθόδου Voronoi [45, 15, 6].

Στις τρεις διαστάσεις η πιθανή μη ύπαρξη εξαναγκασμένης τριγωνοποίησης Delaunay που θα συμμορφωθεί σε προκαθορισμένη τριγωνοποίηση επιφάνειας περιορίζει σοβαρά τη χρησιμότητα του αλγορίθμου Tanemura-Ogawa-Ogita. Σε αυτήν την

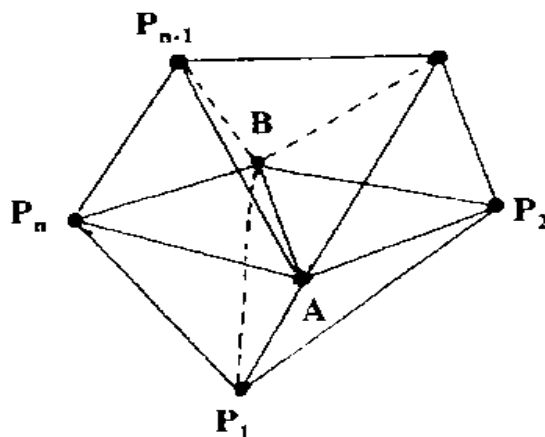
περίπτωση, η προτιμώμενη προσέγγιση βασίζεται στον αλγόριθμο Bowyer-Watson, που ακολουθείται από σειρές ανταλλαγών ακμών / εδρών, για να ενσωματώσει τις ακμές και τις έδρες της προκαθορισμένης επιφάνειας του ορίου [21, 59, 48].

1.6 Ανταλλαγή Ακμών / Εδρών

Ο απλούστερος συνδυασμός ανταλλαγής στις τρεις διαστάσεις εμφανίζεται όταν τρία τετράεδρα μοιράζονται μια κοινή ακμή. Στην **Εικόνα 1.2**, τα τρία τετράεδρα ABP_1P_2 , ABP_2P_3 και ABP_3P_1 μαζί με την κοινή ακμή AB μπορούν να αντικατασταθούν από τα δύο τετράεδρα $AP_1P_2P_3$ και $BP_1P_2P_3$ μαζί με την κοινή έδρα $P_1P_2P_3$. Υπό τον όρο ότι το σύνολο των τετραέδρων είναι κυρτό (δηλ., η ακμή AB τέμνει την έδρα $P_1P_2P_3$), μπορεί να υπάρξει κάθε συνδυασμός χωρίς να επηρεάζεται από το εναπομείναν τετράεδρο. Στη γενική περίπτωση, όταν n τετράεδρα μοιράζονται μια κοινή ακμή (**Εικόνα 1.3**), μπορεί να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που αντικαθιστά τα n τετράεδρα από $2(n - 2)$, υπό τον όρο ότι το σύνολο των τετραέδρων είναι κυρτό. Προκειμένου να καθοριστεί το νέο σύνολο τετραέδρων είναι απαραίτητο να καλυφθεί το εσωτερικό του πολυγώνου (P_1, \dots, P_n) από τριγωνικές όψεις. Για $n \geq 4$ το σύνολο των νέων τετραέδρων δεν είναι μοναδικό [13].



Εικόνα 1.2: Τρία τετράεδρα με κοινή ακμή AB , ή δύο τετράεδρα με κοινή έδρα $P_1P_2P_3$ [7]



Εικόνα 1.3: Διάφορα τετράεδρα που περιβάλλουν την ακμή AB [7]

Η χρησιμότητα αυτών των διαδικασιών ανταλλαγής έγκειται στο γεγονός ότι μπορούν να ενσωματωθούν οποιεσδήποτε ακμές και έδρες του ορίου που δεν υπάρχουν στο πλέγμα του όγκου. Ας υποθέσουμε π.χ. ότι μια δεδομένη ακμή AB βρίσκεται στο προκαθορισμένο όριο αλλά δεν υπάρχει στο πλέγμα όγκου. Μετά την αναγνώριση της έδρας $P_1P_2P_3$ στο πλέγμα του όγκου που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AB , μπορεί να εφαρμοστεί η αντιστροφή της ανταλλαγής ακμών / εδρών που φαίνεται στην **Εικόνα 1.2**. Είναι πιθανόν, εντούτοις, το ευθύγραμμο τμήμα AB να βρίσκεται πάνω ή πολύ κοντά σε κάποια από τις έδρες AP_1P_2 , AP_2P_3 , AP_3P_1 . Παραδείγματος χάριν, ας υποθέσουμε ότι η AB βρίσκεται στην έδρα AP_3P_1 και τέμνει έτσι την ακμή P_1P_3 . Σε αυτήν την περίπτωση είναι απαραίτητο να αναγνωριστεί ο δακτύλιος των τετραέδρων που συμπίπτουν με την ακμή P_1P_3 και να χρησιμοποιηθεί μια ανταλλαγή ακμών / εδρών που αφαιρεί την ακμή P_1P_3 και παρεμβάλλει την ακμή AB , υποθέτοντας φυσικά ότι τα σημεία A B είναι και τα δύο κορυφές που συνδέονται με τον τετραεδρικό δακτύλιο. Εάν αυτό δεν ισχύει, ή εάν ο τετραεδρικός δακτύλιος δεν είναι κυρτός, τότε το ευθύγραμμο τμήμα AB μπορεί να καθιερωθεί ως ακμή του πλέγματος όγκου. Στην πράξη, μια ακμή που δεν ενσωματώθηκε αρχικά μπορεί συχνά να εμφανιστεί στο πλέγμα όγκου ή να ενσωματωθεί με τις διαδικασίες ανταλλαγής μετά την προσθήκη επιπλέον ακμών του ορίου. Εάν μερικές ανεπιθύμητες οριακές ακμές παραμένουν επίμονα, τότε μπορεί κανείς να προσφύγει στην εισαγωγή πρόσθετων σημείων στο πλέγμα, είτε μέσα στο πεδίο αναφοράς [21] είτε ίσως στην επιφάνεια του ορίου [59, 48] στο μέσο των ακμών αυτών.

Αφότου έχουν καθιερωθεί όλες οι ακμές του ορίου και οι πιθανές προσθήκες νέων σημείων και ακμών του ορίου, είναι απαραίτητο να εξασφαλιστεί ότι στο πλέγμα του όγκου περιέχονται όλες οι έδρες του ορίου. Στην πράξη, ένα πλέγμα όγκου που περιέχει όλες τις ακμές του ορίου στη χειρότερη περίπτωση θα χάνει μόνο ένα μέρος των εδρών του ορίου. Υποθέστε, παραδείγματος χάριν, ότι μια απύσχα έδρα έχει κορυφές $P_1P_2P_3$. Κατόπιν (**Εικόνα 1.2**) είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί η ακμή AB που τέμνει την απύσχα έδρα και να πραγματοποιηθεί η ανταλλαγή ακμών/εδρών που αφαιρεί την ακμή AB και καθιερώνει την έδρα $P_1P_2P_3$.

1.7 Βελτιστοποίηση Πλέγματος

Ο στόχος της βελτιστοποίησης πλέγματος είναι η επίτευξη ενός πλέγματος όγκου με ομαλό διαχωρισμό στο μέγεθος των τετραέδρων και καλή ποιότητα τετραέδρων, που καθορίζεται από κάποια κριτήρια όπως η διέδρη γωνία ή η αναλογία μεταξύ περιεκτικότητας και εσωκτικότητας. Ίσως το σημαντικότερο είναι η αναγνώριση και αφαίρεση των «ελαττωμάτων». Αυτά τα τετράεδρα διαμορφώνονται από τέσσερα ομοεπίπεδα ή σχεδόν ομοεπίπεδα σημεία και ως εκ τούτου έχουν εξαιρετικά μικρό όγκο [14]. Αν και είναι πιθανό να ελεγχθεί ο σχηματισμός τέτοιων τετραέδρων κατά τη διάρκεια της διαδικασίας παραγωγής πλέγματος, οποιαδήποτε προσπάθεια να αποτραπεί ο σχηματισμός τους σε αυτή τη φάση υπονομεύει συνήθως τις προσπάθειες να καθιερωθεί η επιφάνεια του ορίου ή οδηγεί σε τελικό πλέγμα όγκου, του οποίου στην πραγματικότητα η γενική ποιότητα είναι χειρότερη. Είναι καλύτερο να εφαρμοστεί η βελτιστοποίηση πλέγματος στη συνέχεια, ως λειτουργία επεξεργασίας στο τελικό πλέγμα [13]. Τέτοια «ελαττώματα» τετραέδρων μπορούν να βρεθούν με αναζήτηση ακμών που ανήκουν σε γειτονικές έδρες με διέδρη γωνία κοντά στις 180° . Συνεπάγεται ότι τουλάχιστον ένα από αυτά τα τετράεδρα είναι ένα «ελάττωμα», και μια ανταλλαγή ακμών / εδρών που αφαιρεί αυτήν την ακμή θα

αφαιρέσει επίσης και το «ελάττωμα». Εάν ο δακτύλιος των τετραέδρων που προσπίπτουν στην ακμή είναι μη κυρτός, τότε αυτή η προσέγγιση αποτυγχάνει. Στην πράξη, είναι συνηθισμένο να εφαρμόζεται η διαδικασία ανταλλαγής ακμών για να αφαιρέσει όσο το δυνατόν περισσότερα «ελαττώματα» και να ομαλοποιήσει έπειτα το πλέγμα. Αυτή η σε δύο στάδια διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί έως ότου επιτευχθεί ένα πλέγμα αποδεκτής ποιότητας. Μια δημοφιλής τεχνική ομαλοποίησης είναι η τεχνική «Laplacian», αν και πρέπει να δοθεί προσοχή ώστε να εξασφαλιστεί ότι κανένα σημείο του πλέγματος δεν διαπερνά οποιαδήποτε έδρα, οδηγώντας κατά συνέπεια σε άκυρο πλέγμα. Μια άλλη τεχνική είναι βασισμένη στην μετακίνηση κάθε σημείου του πλέγματος έως ότου όλες οι προσπίπτουσες ακμές έχουν σχεδόν το ίδιο μήκος. Κάποιες άλλες τεχνικές που υπάρχουν βασίζονται στον γραμμικό προγραμματισμό. Η ομαλοποίηση αλλάζει τις θέσεις των μη οριακών σημείων του πλέγματος αλλά αφήνει την τοπολογία άθικτη. Οι ανταλλαγές ακμών/εδρών αφήνουν τις θέσεις του πλέγματος σταθερές αλλά αλλάζουν την τοπολογία. Είναι επομένως αναμενόμενο ότι μια επαναληπτική διαδικασία που εναλλάσσεται μεταξύ αυτών των δύο διαδικασιών θα βελτιώσει το πλέγμα.

1.8 Εξαναγκασμένη Τριγωνοποίηση Delaunay

Η βασική διαδικασία που εφαρμόζεται στον αλγόριθμο Bowyer-Watson είναι ο προσδιορισμός της κοιλότητας των τετραέδρων των οποίων τα περισφαίρια περιέχουν το νέο σημείο P . Για τριγωνοποίηση Delaunay, η κοιλότητα συνδέεται απλά και το σημείο P είναι ορατό από όλες τις έδρες της κοιλότητας. Όταν η τριγωνοποίηση δεν είναι πλέον Delaunay αλλά εξαναγκασμένη από την παρουσία σταθερών πλευρών, που προκύπτουν, για παράδειγμα, όταν μια ή περισσότερες από τις εσωτερικές έδρες της κοιλότητας είναι έδρες της επιφάνειας του ορίου, τότε το θέμα ορατότητας πρέπει να επανεξεταστεί. Δεδομένου ότι μερικές από τις έδρες της εξαναγκασμένης κοιλότητας δεν χρειάζεται να είναι ορατές από το P , είναι απαραίτητο να βρεθεί το τετράεδρο που περιέχει το P και έπειτα να εξεταστούν τα γειτονικά τετράεδρα με τη βοήθεια μιας αναζήτησης δέντρου. Σαφώς το P βρίσκεται μέσα στην περιγεγραμμένη σφαίρα του τετραέδρου που περιέχει το P και κάθε έδρα αυτού του τετραέδρου είναι ορατή από το P . Κάθε έδρα αυτού του τετραέδρου εξετάζεται για να καθοριστεί εάν είναι σταθερή (δηλ., προστατευμένη) έδρα που δεν πρέπει να αφαιρεθεί. Εάν δεν είναι προστατευμένη έδρα, τότε η αναζήτηση δέντρου προχωρά στο γειτονικό τετράεδρο από την άλλη πλευρά αυτής της έδρας. Εάν το P βρίσκεται μέσα στην περιγεγραμμένη σφαίρα του νέου τετραέδρου και το P είναι ορατό από τις άλλες τρεις έδρες του, τότε αυτό το τετράεδρο προστίθεται στη λίστα των τετραέδρων της κοιλότητας. Αφού εξεταστούν κατ' αυτό τον τρόπο κάθε μια από τις γειτονικές έδρες και τετράεδρα, η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε ένα από τα τετράεδρα που αναγνωρίστηκαν πρόσφατα στη λίστα της κοιλότητας.

Ξεκινώντας από το αρχικό σύνολο B των τετραέδρων των οποίων οι περιγεγραμμένες σφαίρες περιέχουν το σημείο P , φθάνουμε σε ένα μικρότερο σύνολο $B_I \subset B$, του οποίου οι έδρες βρέθηκαν από την αναζήτηση δέντρου που κρίθηκε ότι είναι ορατές από το σημείο P . Δεδομένου ότι η αναζήτηση δέντρου εξετάζει τα τετράεδρα με μια ιδιαίτερη ακολουθία, είναι πιθανό, όταν το τεστ ορατότητας επανεφαρμόζεται στο σύνολο B_I , να υπάρχουν ένα ή περισσότερα τετράεδρα στο υποσύνολο B_I των οποίων οι έδρες δεν είναι ορατές από το P . Η αναζήτηση δέντρου και το τεστ ορατότητας πρέπει επομένως να επαναληφθούν για το σύνολο B_I για να δημιουργηθεί ένα νέο

υποσύνολο $B_2 \subset B_1$. Εάν τα σύνολα B_2 και B_1 είναι ίδια, τότε όλες οι έδρες του B_1 είναι ορατές από το P . Τα σημεία στο όριο της περιορισμένης κοιλότητας C_1 , που διαμορφώνονται όταν αφαιρείται το B_1 από την τριγωνοποίηση T , μπορούν στη συνέχεια να ενωθούν με το σημείο P ώστε να διαμορφωθεί μια έγκυρη τριγωνοποίηση [61].

Έστω $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ οι συντεταγμένες διανύσματος της i -οστής κορυφής ενός τετραέδρου όπου $i = 1, \dots, 4$ και έστω $r_p = (x_p, y_p, z_p)$ οι συντεταγμένες διανύσματος του σημείου P . Η έδρα απέναντι από την κορυφή 4 είναι ορατή όσον αφορά το σημείο P εάν το σημείο P βρίσκεται στην ίδια πλευρά με την κορυφή 4. Μια εναλλακτική παρουσίαση είναι ότι το σημείο P και η κορυφή 4 πρέπει να βρίσκονται στο ίδιο ημιδιάστημα που διαμορφώνεται από το επίπεδο που περιέχει τις κορυφές 1, 2 και 3. Το τεστ ορατότητας ισοδυναμεί με έλεγχο εάν ο όγκος του τετραέδρου που διαμορφώνεται από τα σημεία r_1, r_2, r_3 και r_4 , δίνει τα ίδια αποτελέσματα με τον όγκο του τετραέδρου που διαμορφώνεται από τα σημεία r_1, r_2, r_3 και r_p . Με άλλα λόγια, το αποτέλεσμα της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

πρέπει να συγκριθεί με το αποτέλεσμα της ορίζουσας που διαμορφώνεται με την αντικατάσταση των x_4, y_4 και z_4 με τα x_p, y_p και z_p . Η ισχύς της επανατριγωνοποίησης επομένως στηρίζεται στην ακρίβεια υπολογισμού της ορίζουσας και ως εκ τούτου στην ακρίβεια του υπολογιστή που χρησιμοποιείται. Δυσκολίες προκύπτουν όταν μια ή δύο ορίζουσες είναι πολύ κοντά στο μηδέν, οδηγώντας έτσι στην αβεβαιότητα εάν έχει υπολογιστεί το σωστό αποτέλεσμα [50].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΕΧΝΙΚΗ ADVANCING FRONT (AFT)

2.1 Εισαγωγή

Η τεχνική προωθούμενου μετώπου (AFT-Advancing Front Technique) για την παραγωγή μη δομημένων τριγωνικών πλεγμάτων διατυπώθηκε αρχικά από τον George [20], αλλά αυτή η αρχική δημοσίευση δεν έλαβε τη πρέπουσα προσοχή. Η πρώτη αναφορά σε αυτή την τεχνική φαίνεται να έγινε σε ένα παράρτημα του βιβλίου του Tomasset [56]. Η πρώτη δημοσίευση αυτής της μεθόδου ήταν από τον Lo [30], όπου η AFT χρησιμοποιήθηκε για να παραχθεί τριγωνοποίηση με σύνδεση ενός συνόλου σημείων, το οποίο είχε προηγούμενα παραχθεί σε καρτεσιανή διαμόρφωση.

Ο αλγόριθμος τροποποιήθηκε από τον Peraire et al. [39], χρησιμοποιώντας μια νέα διατύπωση, στην οποία τα κελιά και τα σημεία παράγονταν ταυτόχρονα. Η μέθοδος εισήχθη μέσω του προσδιορισμού μιας χωρικής μεταβολής του επιθυμητού μεγέθους και της μορφής των παραγόμενων στοιχείων. Αυτή η δυνατότητα χρησιμοποιήθηκε αργότερα στην Υπολογιστική Ρευστομηχανική για την παραγωγή προσαρμοζόμενων πλεγμάτων.

Η μεθοδολογία επεκτάθηκε στη συνέχεια στις τρεις διαστάσεις [32, 40, 31, 22, 26]. Επιπλέον, η μέθοδος έχει τροποποιηθεί για την παραγωγή μη δομημένων πλεγμάτων τετραπλεύρων [62, 8] και εξαπλεύρων [9].

2.2 Απαιτήσεις Παραγωγής Πλέγματος

Ένα υπολογιστικό πεδίο σύνθετης γεωμετρικής μορφής μπορεί να διακριτοποιηθεί με τη χρήση ενός μη δομημένου πλέγματος τετραέδρων ή με τη χρήση πολλαπλών διακριτών δομημένων πλεγμάτων, που κάθε ένα καλύπτει ξεχωριστό υποχώρο του υπολογιστικού πεδίου [1], [53], [60]. Η προσέγγιση της χρήσης μη δομημένου πλέγματος είναι ιδιαίτερα ελκυστική, δεδομένου ότι προσφέρει τη δυνατότητα αυτοματοποίησης της διαδικασίας, έτσι ώστε οι χρόνοι παραγωγής πλέγματος να μειωθούν σημαντικά. Σε ένα μη δομημένο πλέγμα ο αριθμός σημείων και στοιχείων που είναι γειτονικά σε ένα εσωτερικό σημείο ποικίλει μέσα στο πεδίο αναφοράς. Αυτή η έλλειψη τακτικότητας στο πλέγμα σημαίνει ότι η χρήση ενός αλγορίθμου λύσης μη δομημένου πλέγματος περιλαμβάνει γενικά ένα πρόσθετο κόστος, σε σχέση με τον χρόνο και τη μνήμη των υπολογιστών, σε σύγκριση με τα αντίστοιχα δομημένα πλέγματα. Από την άλλη πλευρά, η προσέγγιση μη δομημένων πλεγμάτων προσφέρει, ως αντιστάθμιση, μεγαλύτερη γεωμετρική ευελιξία στη διαδικασία παραγωγής πλέγματος.

Για να γίνει πλήρης εκμετάλλευση αυτών των χαρακτηριστικών, η διαδικασία παραγωγής πλέγματος πρέπει να συμμορφωθεί με τις ακόλουθες απαιτήσεις:

- Ο αλγόριθμος πρέπει να είναι σε θέση να χειριστεί αυθαίρετες γεωμετρίες με πλήρως αυτόματο τρόπο και με ελάχιστη επέμβαση του χρήστη.
- Τα δεδομένα εισόδου πρέπει να μειωθούν κατά το δυνατόν, με την υιοθέτηση αυτοματοποιημένης γεωμετρικής περιγραφής του πεδίου αναφοράς.
- Η ακολουθούμενη προσέγγιση πρέπει να μπορεί να ελέγχει τη χωρική μεταβολή του μεγέθους και της μορφής των στοιχείων μέσα στο πεδίο αναφοράς.
- Στη διαδικασία πρέπει να ενσωματωθούν προσαρμοστικές μέθοδοι, με στόχο την παραγωγή ακριβέστερης προσέγγισης της λύσης για δεδομένο αριθμό σημείων.

Η αλγοριθμική διαδικασία για την παραγωγή στοιχείων και κόμβων που περιγράφεται στην συνέχεια είναι μια τρισδιάστατη επέκταση της μεθόδου AFT [39].

2.3 Μοντελοποίηση Γεωμετρίας

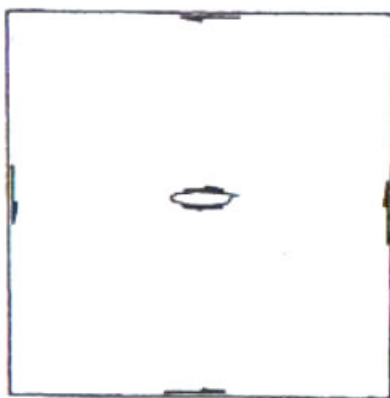
Το όριο του υπολογιστικού πεδίου αναφοράς πρέπει να περιγραφεί με μια κατάλληλη μαθηματική φόρμα, προκειμένου να αρχίσει η διαδικασία της επίλυσης. Στόχος είναι η διακριτοποίηση ενός πεδίου αναφοράς αυθαίρετης γεωμετρικής πολυπλοκότητας να μπορεί να ολοκληρωθεί με αυτόματο τρόπο. Η μέθοδος που υιοθετείται για να επιτύχει αυτήν την μαθηματική περιγραφή οφείλει να κατέχει τη μεγαλύτερη δυνατή γενικότητα. Επιπλέον, η υπολογιστική εφαρμογή αυτής της περιγραφής πρέπει να παρέχει τα μέσα για αυτόματους υπολογισμούς οποιασδήποτε γεωμετρικής ποσότητας σχετικής με τη διαδικασία παραγωγής. Ο χώρος της στερεάς μοντελοποίησης παρέχει [46] το γενικότερο σύνολο μεθόδων για την υπολογιστική περιγραφή και την ανάλυση των γενικών γεωμετρικών μορφών που ταιριάζουν με τις παραπάνω απαιτήσεις.

2.3.1 Περιγραφή του Υπολογιστικού Πεδίου Αναφοράς

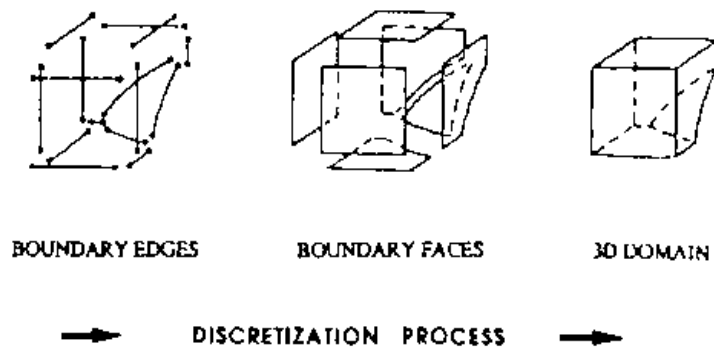
Στην περίπτωση επίπεδης δισδιάστατης ανάλυσης, το όριο του υπολογιστικού πεδίου αναφοράς αντιπροσωπεύεται από κλειστούς βρόχους προσανατολισμένων σύνθετων κυβικών καμπυλών spline [18]. Για απλά συνδεδεμένα πεδία αναφοράς αυτές οι οριακές καμπύλες είναι προσανατολισμένες αριστερόστροφα ενώ για πολλαπλά συνδεδεμένες περιοχές, οι εξωτερικές οριακές καμπύλες προσανατολίζονται αριστερόστροφα και όλες οι εσωτερικές οριακές καμπύλες προσανατολίζονται δεξιόστροφα (**Εικόνα 2.1**).

Στις τρεις διαστάσεις, ακολουθώντας την ιδέα της στερεάς μοντελοποίησης, το πεδίο αναφοράς για να διακριτοποιηθεί αντιμετωπίζεται ως περιοχή στο R^3 , που οριοθετείται από ένα γενικό πολύεδρο, του οποίου οι κορυφές είναι σημεία στις κυρτές επιφάνειες, που τέμνονται κατά μήκος των καμπυλών. Οι ακμές του πολυέδρου είναι τμήματα σε αυτές τις καμπύλες διατομές. Τα τμήματα αυτών των καμπυλών και επιφανειών, που απαιτούνται για να καθορίσουν το όριο του τρισδιάστατου πεδίου αναφοράς, καλούνται τμήματα καμπυλών (curve segments) και περιοχές επιφάνειας (surface regions), αντίστοιχα. Μια περιοχή επιφάνειας παριστάνεται ως «μπάλωμα» σε μια επιφάνεια που οριοθετείται από τμήματα καμπυλών. Κάθε τμήμα καμπύλης είναι κοινό σε δύο περιοχές επιφάνειας και είναι

τμήμα της καμπύλης τομής μεταξύ των αντίστοιχων επιφανειών στήριξης τους. Η **Εικόνα 2.2** εμφανίζει την αποσύνθεση του ορίου ενός τρισδιάστατου πεδίου στις επιφάνειες και τις καμπύλες που το συστήνουν. Η κατά προσέγγιση αναπαράσταση των καμπυλών και των επιφανειών, που είναι τα τμήματα καμπυλών και οι περιοχές επιφάνειας, ολοκληρώνεται με τη βοήθεια σύνθετων καμπυλών και επιφανειών [18]. Αυτά καλούνται συστατικά καμπυλών και επιφανειών.

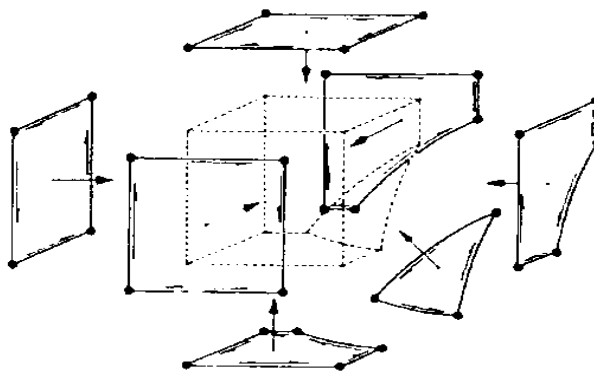


Εικόνα 2.1: Προσανατολισμός ορίων για δισδιάστατο πεδίο αναφοράς [42]



Εικόνα 2.2: Αποσύνθεση των ορίων τρισδιάστατου πεδίου αναφοράς στις επιφάνειες και τα συστατικά καμπύλης του [42]

Επιπλέον, οι καμπύλες και οι επιφάνειες του ορίου είναι προσανατολισμένες (**Εικόνα 2.3**). Αυτό είναι σημαντικό κατά τη διάρκεια της διαδικασίας παραγωγής, καθώς καθορίζει τη τοποθεσία της περιοχής που πρόκειται να διακριτοποιηθεί. Ο προσανατολισμός μιας επιφάνειας ορίου καθορίζεται από την κατεύθυνση των προς τα μέσα κάθετων μοναδιαίων διανυσμάτων. Ο προσανατολισμός των καμπυλών ορίου ορίζεται με βάση τις επιφάνειες ορίου που τις περιέχουν. Κάθε καμπύλη ορίου είναι κοινή σε δύο επιφάνειες ορίου και έχει αντίθετο προσανατολισμό με κάθε μια από αυτές.



Εικόνα 2.3: Προσανατολισμός των συστατικών του ορίου στις τρεις διαστάσεις [42]

2.3.2 Η Τεχνική Advancing Front

Η αλγοριθμική αυτή διαδικασία προτάθηκε αρχικά στις δύο διαστάσεις [39] και στη συνέχεια επεκτάθηκε στις τρεις [40, 41]. Η προσέγγιση θεωρείται ως γενίκευση της τεχνικής advancing front [20, 30] με το διακριτικό χαρακτηριστικό ότι τα στοιχεία, τρίγωνα ή τετράεδρα, και τα σημεία παράγονται ταυτόχρονα. Αυτό επιτρέπει την παραγωγή στοιχείων μεταβλητού μεγέθους και ελαστικότητας και διαφέρει από την προσέγγιση που ακολουθείται στις τετράεδρες γεννήτριες που βασίζονται στις έννοιες Delaunay [4, 14], οι οποίες γενικά συνδέουν τα σημεία του πλέγματος που έχουν διανεμηθεί ήδη στο χώρο.

Το πρόβλημα παραγωγής μη δομημένου πλέγματος συνίσταται στην υποδιαίρεση ενός αυθαίρετου σύνθετου πεδίου αναφοράς σε μια συλλογή κελιών – στοιχείων του πλέγματος. Η εγκυρότητα του παραγόμενου πλέγματος επιτυγχάνεται εάν τα παραγόμενα στοιχεία καλύπτουν ολόκληρο το πεδίο αναφοράς και τομή μεταξύ στοιχείων εμφανίζεται μόνο σε κοινά σημεία, πλευρές ή τριγωνικές έδρες στην τρισδιάστατη περίπτωση. Το τελικό πλέγμα κατασκευάζεται ακολουθώντας τη διαδικασία «από κάτω προς τα επάνω». Αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία αρχίζει από τη διακριτοποίηση κάθε καμπύλης του ορίου. Οι κόμβοι τοποθετούνται στα συστατικά των καμπυλών του ορίου και έπειτα οι γειτονικοί κόμβοι ενώνονται με ευθύγραμμα τμήματα. Στα επόμενα στάδια της διαδικασίας παραγωγής, αυτά τα τμήματα θα γίνουν πλευρές των τριγωνικών εδρών. Το μήκος αυτών των τμημάτων πρέπει επομένως, να είναι συνεπές προς την επιθυμητή τοπική διανομή του μεγέθους του πλέγματος. Αυτή η λειτουργία στη συνέχεια επαναλαμβάνεται για κάθε καμπύλη του ορίου.

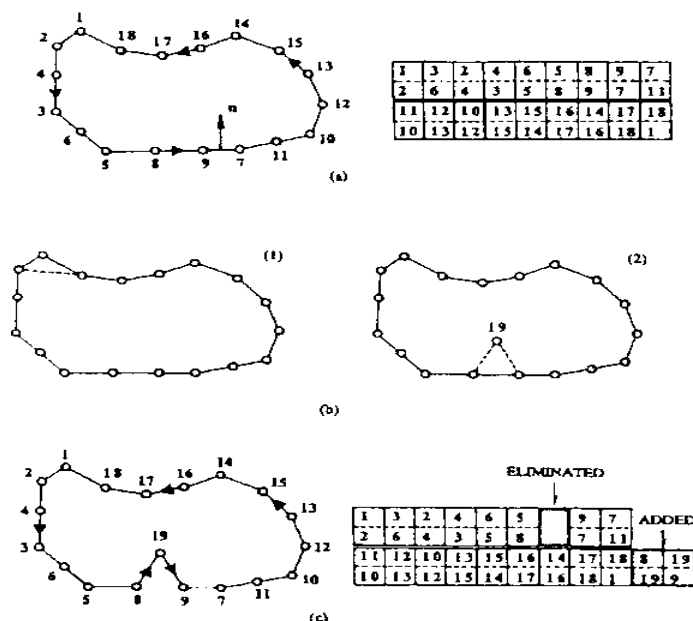
Το επόμενο στάδιο αποτελείται από την παραγωγή επίπεδων εδρών. Για κάθε δισδιάστατη περιοχή ή επιφάνεια που θα διακριτοποιηθεί, όλες οι πλευρές παράγονται όταν διακριτοποιώντας τις καμπύλες του ορίου συναρμολογείται το αποκαλούμενο αρχικό μέτωπο. Πρέπει να ληφθεί υπόψη ο σχετικός προσανατολισμός των συστατικών της καμπύλης σε σχέση με την επιφάνεια, προκειμένου να δοθεί σωστός προσανατολισμός στις πλευρές στο αρχικό μέτωπο. Αυτό το μέτωπο χρησιμοποιείται για να παραχθεί ένα τριγωνικό πλέγμα στην επιφάνεια. Το μέγεθος και η μορφή των παραγομένων τριγώνων πρέπει να είναι συνεπή προς το τοπικό επιθυμητό μέγεθος και μορφή. Αυτά τα τρίγωνα θα γίνουν οι έδρες των τετραέδρων, που θα παραχθούν στη συνέχεια.

Για την παραγωγή των τετραέδρων η διαδικασία advancing front απαιτεί ένα βήμα περαιτέρω. Το μέτωπο σχηματίζεται τώρα από τις τριγωνικές έδρες που είναι διαθέσιμες για να διαμορφωθεί το τετράεδρο. Το αρχικό μέτωπο λαμβάνεται συνδέοντας τις τριγωνοποιήσεις των επιφανειών του ορίου. Κόμβοι και στοιχεία θα δημιουργηθούν ταυτόχρονα. Κατά τη διαμόρφωση νέου τετραέδρου, οι τρεις κόμβοι που ανήκουν σε μια τριγωνική έδρα από το μέτωπο συνδέονται είτε με έναν υπάρχοντα κόμβο ή με έναν νέο κόμβο. Μετά την παραγωγή ενός τετραέδρου, το μέτωπο ενημερώνεται. Η διαδικασία παραγωγής ολοκληρώνεται όταν ο αριθμός τριγώνων στο μέτωπο είναι μηδέν.

2.3.3 Ενημέρωση Μετώπου

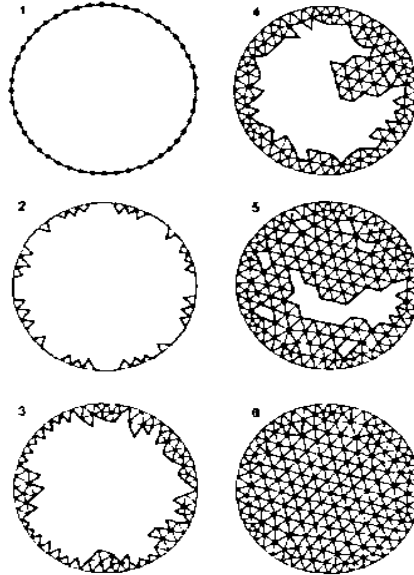
Ο αλγόριθμος παραγωγής τριγώνων χρησιμοποιεί την έννοια της παραγωγής μετώπου. Το μέτωπο είναι μια δυναμική δομή δεδομένων, που αλλάζει συνεχώς κατά τη διάρκεια της διαδικασίας παραγωγής. Στην έναρξη της διαδικασίας το μέτωπο αποτελείται από μια ακολουθία ευθύγραμμων τμημάτων, τα οποία συνδέουν διαδοχικούς οριακούς κόμβους. Κάθε χρονική στιγμή, το μέτωπο περιέχει το σύνολο όλων των διαθέσιμων πλευρών που μπορούν να διαμορφώσουν μια τριγωνική έδρα.

Οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα που είναι διαθέσιμο για να διαμορφώσει μια πλευρά στοιχείου καλείται ενεργό, ενώ οποιοδήποτε τμήμα που δεν είναι πλέον ενεργό αφαιρείται από το μέτωπο. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας παραγωγής επιλέγεται από το μέτωπο μια ενεργή πλευρά και παράγεται ένα τριγωνικό στοιχείο. Αυτό μπορεί να περιλαμβάνει τη δημιουργία ενός νέου κόμβου ή την απλή σύνδεση με έναν ήδη υπάρχον. Αφότου έχει παραχθεί το τρίγωνο, το μέτωπο ενημερώνεται. Αυτή η διαδικασία ενημέρωσης δίνεται στην **Εικόνα 2.4**.



Εικόνα 2.4: Διαδικασία προώθησης μετώπου στις δύο διαστάσεις. α) Το αρχικό μέτωπο παραγωγής. β) Δημιουργία νέου στοιχείου: 1) δεν δημιουργείται νέο σημείο, 2) δημιουργείται νέο σημείο το 19. γ) Ενημέρωση του μετώπου για την περίπτωση β)2) [42]

Κατά συνέπεια όσο το πεδίο αναφοράς παραμένει αμετάβλητο, το μέτωπο παραγωγής αλλάζει συνεχώς και χρειάζεται να ενημερώνεται όποτε διαμορφώνεται ένα νέο στοιχείο. Η παραγωγή προχωρά έως ότου το μέτωπο είναι κενό. Η **Εικόνα 2.5** επεξηγεί την ιδέα της τεχνικής advancing front για ένα κυκλικό δισδιάστατο πεδίο αναφοράς, δείχνοντας το αρχικό μέτωπο και τη μορφή του πλέγματος στα διάφορα στάδια κατά τη διάρκεια της διαδικασίας παραγωγής.



Εικόνα 2.5: Διαφορετικά στάδια της διαδικασίας τριγωνοποίησης με την τεχνική προωθούμενου μετώπου [42]

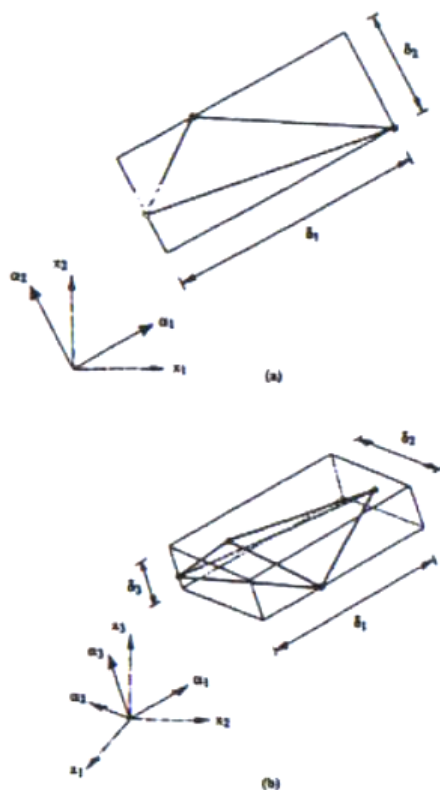
2.3.4 Χαρακτηρισμός Πλέγματος: Παράμετροι Πλέγματος

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενός γενικού πλέγματος είναι τοπικά ορισμένα σε σχέση με σταθερές παραμέτρους του πλέγματος. Εάν N είναι ο αριθμός των διαστάσεων (δύο ή τριών) τότε οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται είναι ένα σύνολο N αμοιβαίων ορθογώνιων κατευθύνσεων a_i $i = 1, \dots, N$, και N συνδεδεμένα στοιχεία μεγέθους δ_i , $i = 1, \dots, N$ (**Εικόνα 2.6**). Κατά συνέπεια, σε ένα σταθερό σημείο, εάν όλα τα N μεγέθη στοιχείων είναι ίσα, το πλέγμα κοντά σε εκείνο το σημείο θα αποτελείται από περίπου ισόπλευρα στοιχεία. Για υποβοήθηση της διαδικασίας παραγωγής πλέγματος, καθορίζεται ένας μετασχηματισμός T που είναι συνάρτηση των a_i , και δ_i . Αυτός ο μετασχηματισμός αναπαρίσταται με έναν συμμετρικό πίνακα $N \times N$ και απεικονίζει το φυσικό χώρο επάνω σε ένα χώρο στον οποίο τα στοιχεία, στη γειτονιά του υπό εξέταση σημείου, θα είναι περίπου ισόπλευρα. Αυτός ο νέος χώρος θα αναφέρεται ως κανονικοποιημένο διάστημα. Σε ένα γενικό πλέγμα αυτός ο μετασχηματισμός είναι μια συνάρτηση θέσης. Ο μετασχηματισμός T είναι το αποτέλεσμα N κλιμακωτών πράξεων με παράγοντες $\frac{1}{\delta_i}$

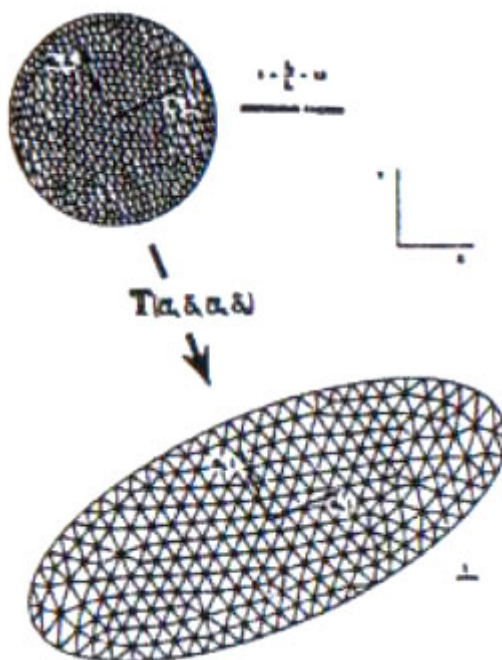
σε κάθε κατεύθυνση a_i . Κατά συνέπεια

$$T(a_i, \delta_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta_i} a_i \otimes a_i \quad (2.1)$$

όπου το \otimes ορίζει τη συνέλιξη δύο διανυσμάτων. Η επίδραση αυτού του μετασχηματισμού στις δύο διαστάσεις φαίνεται στην **Εικόνα 2.7** για την περίπτωση σταθερών παραμέτρων πλέγματος σε όλο το πεδίο αναφοράς.



Εικόνα 2.6: Χαρακτηρισμός του πλέγματος: α) παράμετροι πλέγματος στις δύο διαστάσεις, β) παράμετροι πλέγματος στις τρεις διαστάσεις [42]



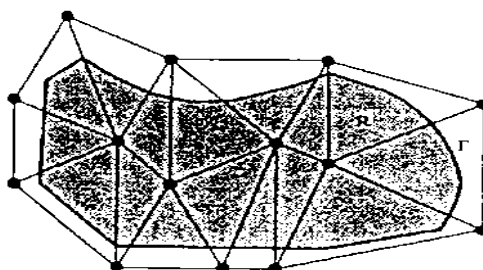
Εικόνα 2.7: Η επίδραση του μετασχηματισμού T για σταθερή διανομή των παραμέτρων του πλέγματος [42]

2.3.5 Έλεγχος Πλέγματος

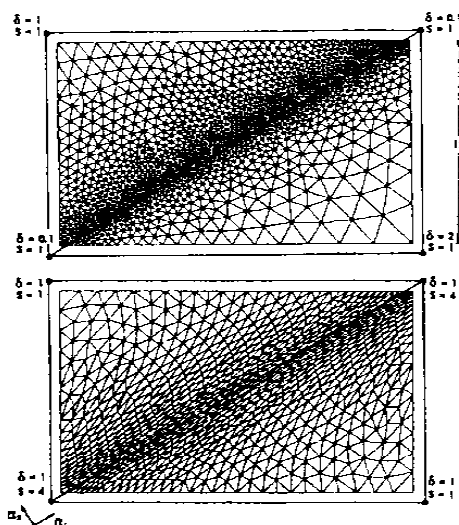
Ο επαρκής έλεγχος του πλέγματος είναι ένα βασικό συστατικό για να εξασφαλιστεί η παραγωγή πλέγματος επιθυμητής μορφής. Ο έλεγχος των χαρακτηριστικών γίνεται με βάση τις προδιαγραφές της χωρικής διανομής των παραμέτρων του πλέγματος. Αυτό ολοκληρώνεται με τη βοήθεια ενός υποβάθρου πλέγματος που συμπληρώνεται από μια διανομή πηγών.

2.3.6 Υπόβαθρο Πλέγμα

Το υπόβαθρο πλέγμα χρησιμοποιείται μόνο για σκοπούς παρεμβολής τιμών και σχηματίζεται από τρίγωνα στις δύο διαστάσεις και τετράεδρα στις τρεις διαστάσεις. Οι τιμές των α_i και δ_i είναι καθορισμένες στους κόμβους του υπόβαθρου πλέγματος. Το υπόβαθρο πλέγμα που υιοθετείται πρέπει να καλύψει την περιοχή που θα διακριτοποιηθεί (**Εικόνα 2.8**). Για την παραγωγή ενός αρχικού πλέγματος για την ανάλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, το υπόβαθρο πλέγμα αποτελείται συνήθως από έναν μικρό αριθμό στοιχείων. Η παραγωγή υπόβαθρου πλέγματος μπορεί σε αυτήν την περίπτωση να ολοκληρωθεί χωρίς προσφυγή σε περίπλοκες διαδικασίες, π.χ., ένα υπόβαθρο πλέγμα που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τις απαιτήσεις μιας γραμμικής μεταβολής.



Εικόνα 2.8: Το υπόβαθρο πλέγμα για την προδιαγραφή μιας χωρικής διανομής παραμέτρων πλέγματος [42]



Εικόνα 2.9: Παραγωγή πλέγματος για ορθογώνιο πεδίο αναφοράς χρησιμοποιώντας υπόβαθρο πλέγμα αποτελούμενο από δύο στοιχεία. [42]

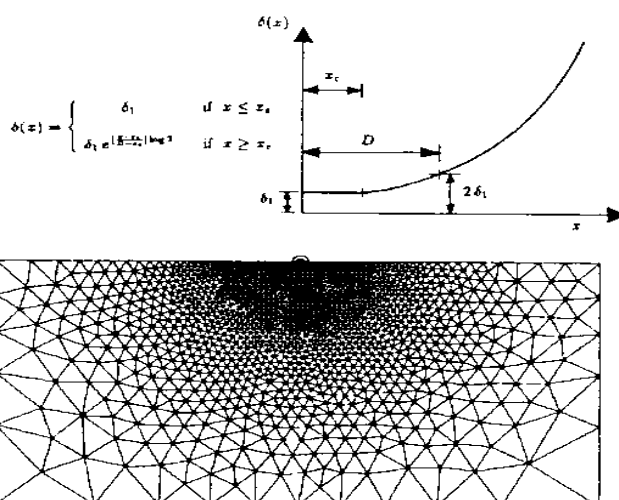
Στην **Εικόνα 2.9** φαίνεται το αποτέλεσμα του προκαθορισμού ενός μεταβλητού σε αποστάσεις μεταξύ των σημείων και σε ελαστικότητα πλέγματος για πρόβλημα που περιλαμβάνει ορθογώνιο πεδίο αναφοράς, χρησιμοποιώντας υπόβαθρο πλέγμα που αποτελείται από δύο μόνο τριγωνικά στοιχεία.

2.3.7 Διανομή Πηγών

Για σύνθετες γεωμετρίες, ο χειρωνακτικός καθορισμός ενός υπόβαθρου πλέγματος μπορεί να είναι πολύ επίπονη εργασία. Η χρήση διανομής πηγών διευκολύνει το πρόβλημα, εξασφαλίζοντας την επιθυμητή προδιαγραφή των παραμέτρων του πλέγματος σε συγκεκριμένες περιοχές στο υπολογιστικό πεδίο αναφοράς. Σε αυτήν την προσέγγιση, προσδιορίζεται μια ισότροπη χωρική διανομή των μεγεθών των στοιχείων συναρτήσει της απόστασης x από το σημείο του ενδιαφέροντος και μιας «πηγής». Η πηγή μπορεί να έχει τη μορφή σημείου, ευθύγραμμου τμήματος ή τριγώνου. Η μορφή που υιοθετείται για τη συνάρτηση είναι

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_1 & , x \leq x_c \\ \delta_1 e^{\left| \frac{x-x_c}{D-x_c} \right| \log 2} & , x \geq x_c \end{cases} \quad (2.2)$$

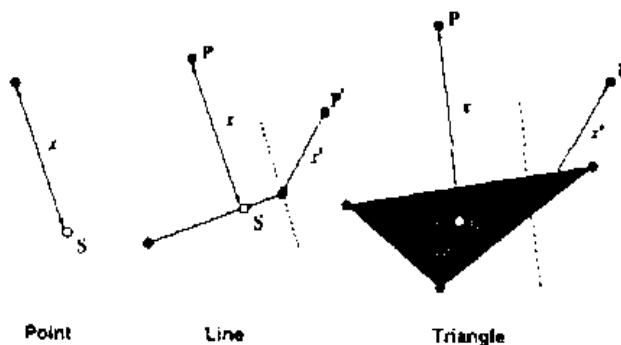
Αυτή η συνάρτηση είναι τοπική και επιτρέπει γρήγορη αύξηση στο μέγεθος των στοιχείων, εξασφαλίζοντας κατά συνέπεια ότι ο αριθμός των παραγομένων στοιχείων γύρω από την πηγή θα κρατηθεί μέσα σε λογικά πλαίσια. Οι ποσότητες δ_1 , D και x_c αντιστοιχούν σε καθορισμένες από τον χρήστη παραμέτρους, που μπορούν να αλλάξουν για να ελέγξουν τη μορφή του $\delta(x)$. Ένα παράδειγμα πλέγματος, που παράγεται από μια τέτοια λειτουργία, εμφανίζεται στην **Εικόνα 2.10**.



Εικόνα 2.10: Παραγωγή πλέγματος για ορθογώνιο πεδίο αναφοράς χρησιμοποιώντας σημειακή πηγή [42]

Για τις γραμμικές και τριγωνικές πηγές το διάστημα δ σε ένα σημείο P καθορίζεται με παρόμοιο τρόπο. Επιλέγουμε το κοντινότερο σημείο S της γραμμής ή του τριγώνου από το σημείο ενδιαφέροντος P (**Εικόνα 2.11**). Η απόσταση x είναι τώρα η απόσταση μεταξύ των σημείων P και S και οι ποσότητες δ_1 , D και x_c στο σημείο S

παρεμβάλλονται γραμμικά από τις κομβικές τιμές στα σημεία που καθορίζουν οι πηγές τύπου γραμμής ή τριγώνου. Η απόσταση σε ένα σημείο υπολογίζεται για το υπόβαθρο πλέγμα και για κάθε μια από τις καθορισμένες από το χρήστη πηγές σημείου, γραμμής και τριγώνου. Η τελική απόσταση υπολογίζεται ως η ελάχιστη όλων αυτών.



Εικόνα 2.11: Πηγές σημείου, γραμμής και τριγώνου [42]

2.3.8 Υπολογισμός του Μετασχηματισμού T

Η διαδικασία παραγωγής εκτελείται πάντα σε κανονικοποιημένο χώρο. Ο μετασχηματισμός T , που δίνεται από την εξίσωση (2.1), χρησιμοποιείται επανειλημμένα για να μετασχηματίσει περιοχές του φυσικού χώρου σε περιοχές κανονικοποιημένου χώρου. Μ' αυτόν τον τρόπο η διαδικασία απλοποιείται πολύ, δεδομένου ότι το επιθυμητό μέγεθος για πλευρά, τρίγωνο, ή τετράεδρο σε αυτόν τον χώρο είναι πάντα μονάδα. Αφότου παραχθεί το στοιχείο, οι συντεταγμένες του νέου αυτού σημείου, αν υπάρχει, μετασχηματίζονται πίσω στον φυσικό χώρο, χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό.

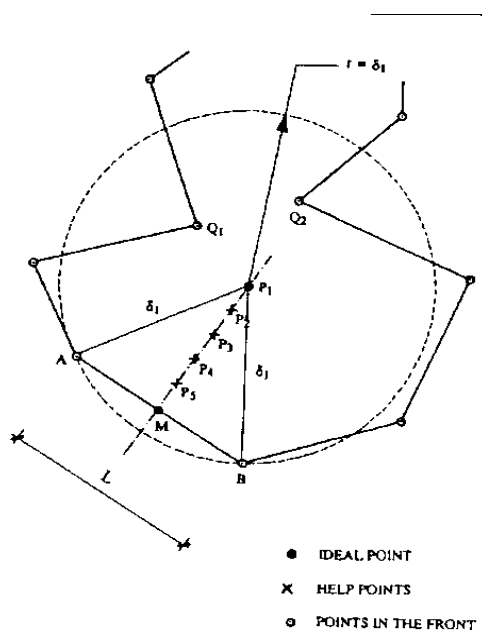
Σε οποιοδήποτε σημείο του υπολογιστικού πεδίου αναφοράς ο μετασχηματισμός T υπολογίζεται ως εξής. Πρώτα, βρίσκεται το στοιχείο του υπόβαθρου πλέγματος που περιέχει το σημείο και ο μετασχηματισμός T^b υπολογίζεται παρεμβάλλοντας γραμμικά τα συστατικά του από τις κομβικές τιμές των στοιχείων. Οι κατευθύνσεις πυκνότητας a_i^b και οι αντίστοιχες αποστάσεις δ_i^b , όπου $i = 1, 2, 3$, λαμβάνονται από τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα T^b . Τα διαστήματα δ_i^b τροποποιούνται στη συνέχεια για να υπολογίσουν την διανομή των πηγών. Τα νέα διαστήματα δ_i^* στο σημείο υπολογίζονται ως τα μικρότερα των διαστημάτων που καθορίζονται από όλες τις πηγές και τα τρέχοντα διαστήματα δ_i^b . Τελικά, ο μετασχηματισμός T λαμβάνεται αντικαθιστώντας τις τιμές a_i^b και δ_i^* στην (2.1).

2.3.9 Διακριτοποίηση Καμπυλών

Η διακριτοποίηση των ενώσεων των καμπυλών του ορίου επιτυγχάνεται προσδιορίζοντας τη θέση των κόμβων κατά μήκος της καμπύλης, σύμφωνα με ένα διάστημα που υπαγορεύεται από την τοπική τιμή των παραμέτρων του πλέγματος. Διαδοχικά σημεία ενώνονται με ευθύγραμμα τμήματα για να διαμορφώσουν τις πλευρές.

2.3.10 Παραγωγή Τριγώνων σε Δισδιάστατα Πεδία Αναφοράς

Στην αρχή της διαδικασίας, το μέτωπο ακολουθίας ευθύγραμμων τμημάτων συνδέει τους διαδοχικούς οριακούς κόμβους. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας παραγωγής, οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα που είναι διαθέσιμο να διαμορφώσει πλευρά στοιχείου καλείται ενεργό, ενώ οποιοδήποτε τμήμα που δεν είναι πλέον ενεργό αφαιρείται από το μέτωπο. Κατά συνέπεια, ενώ το όριο του πεδίου αναφοράς παραμένει αμετάβλητο, η παραγωγή μετώπου αλλάζει συνεχώς και πρέπει να ενημερώνεται κάθε φορά που διαμορφώνεται ένα νέο στοιχείο κατά τη διάρκεια των βημάτων που περιγράφηκαν παραπάνω.



Εικόνα 2.12: Η παραγωγή ενός νέου τριγώνου [42]

Στη διαδικασία παραγωγής ενός νέου τριγώνου συμπεριλαμβάνονται τα ακόλουθα βήματα (**Εικόνα 2.12**):

1. Επιλέγεται μια πλευρά AB του μετώπου για να χρησιμοποιηθεί ως βάση για το τρίγωνο που θα παραχθεί. Εδώ, το κριτήριο είναι να επιλεγεί η πλευρά με το μικρότερο μήκος. Αυτό είναι ιδιαίτερα επωφελές κατά την παραγωγή ακανόνιστων πλεγμάτων.
2. Παρεμβάλλεται από το υπόβαθρο πλέγμα ο μετασχηματισμός T στο κέντρο της πλευράς M και εφαρμόζεται στους κόμβους του μετώπου που σχετίζονται με την τριγωνοποίηση. Σε αυτήν την εφαρμογή τα σχετικά σημεία καθορίζονται να είναι όλα εκείνα που βρίσκονται μέσα στον κύκλο με κέντρο M και ακτίνα τρεις φορές το μήκος της υπό εξέταση πλευράς. Έστω \hat{A}, \hat{B} και \hat{M} οι θέσεις των σημείων A, B και M , αντίστοιχα, στον κανονικοποιημένο χώρο.

3. Καθορίζεται, στον κανονικοποιημένο χώρο, η ιδανική θέση \hat{P}_1 για την κορυφή του τριγωνικού στοιχείου. Το σημείο \hat{P}_1 βρίσκεται στην κάθετη στην πλευρά γραμμή, που περνά από το σημείο \hat{M} και σε απόσταση δ_l από τα σημεία \hat{A} και \hat{B} . Η κατεύθυνση στην οποία το \hat{P}_1 παράγεται, καθορίζεται από τον προσανατολισμό της πλευράς. Η τιμή δ_l επιλέγεται σύμφωνα με το κριτήριο

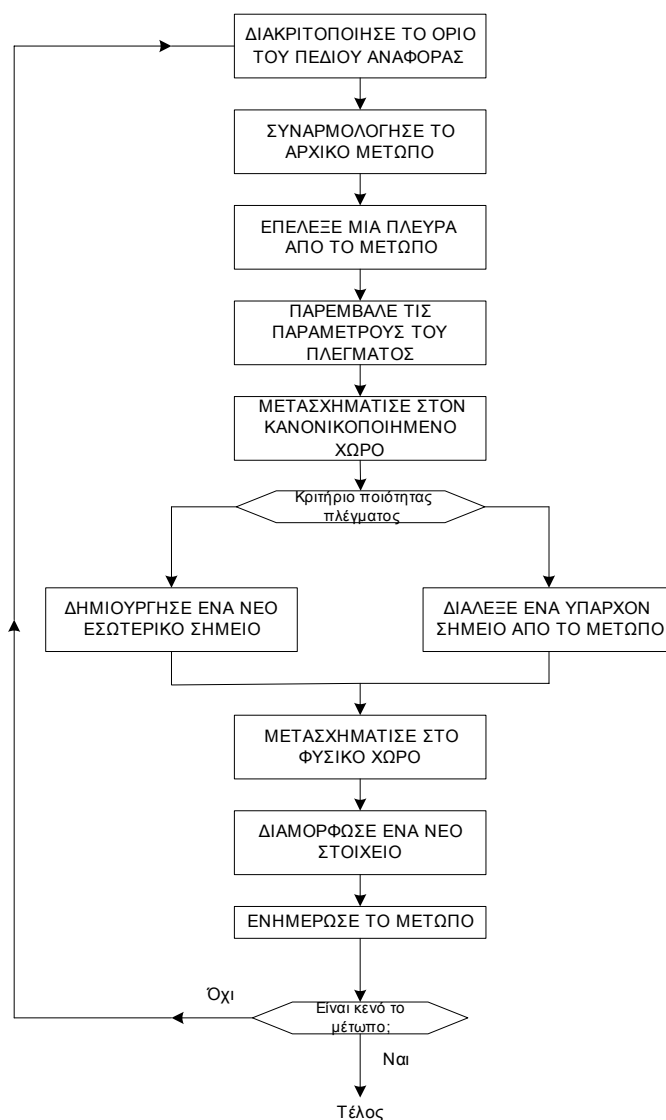
$$\delta_l = \begin{cases} 1.00 & , 0.55 \times L < 1.00 < 2.00 \times L \\ 0.55 \times L & , 0.55 \times L < 1.00 \\ 2.00 \times L & , 1.00 > 2.00 \times L \end{cases} \quad (2.3)$$

όπου το L είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων \hat{A} και \hat{B} . Μόνο στις καταστάσεις όπου η πλευρά AB τυχαίνει να έχει χαρακτηριστικά πολύ διαφορετικά από εκείνα που προσδιορίζονται από το υπόβαθρο πλέγμα, η τιμή του δ_l θα είναι διαφορετική από την μονάδα. Εντούτοις, οι ανωτέρω ανισότητες πρέπει να ληφθούν υπόψη για να εξασφαλιστεί γεωμετρική συμβατότητα. Η σχέση (2.3) είναι καθαρά εμπειρική, και θα μπορούσαν να επινοηθούν διαφορετικές ανισότητες για να εξυπηρετήσουν τον ίδιο σκοπό.

4. Επιλέγονται άλλα πιθανά υποψήφια σημεία για τις κορυφές και διατάσσονται σε μια λίστα. Δύο τύποι σημείων ελέγχονται, (α) όλοι οι κόμβοι $\hat{Q}^1, \hat{Q}^2, \dots$ στο τρέχον μέτωπο παραγωγής που είναι, στον κανονικοποιημένο χώρο, εσωτερικοί σε έναν κύκλο με το κέντρο \hat{P}^1 και ακτίνα $r = \delta_l$, και (β) το σύνολο σημείων $\hat{P}^1, \dots, \hat{P}^5$ που παράγεται κατά μήκος του ύψους $\hat{P}^1 \hat{M}$. Για κάθε σημείο \hat{Q}^i , κατασκευάζεται κύκλος με κέντρο \hat{C}^i_Q στη γραμμή που καθορίζεται από τα σημεία \hat{P}^1 και \hat{M} , και που περνά από τα σημεία \hat{Q}^i, \hat{A} και \hat{B}^1 . Η θέση των κέντρων \hat{C}^i_Q αυτών των κύκλων, στη γραμμή $\hat{P}^1 \hat{M}$, καθορίζει μια διευθέτηση των σημείων \hat{Q}^i . Δημιουργείται μια λίστα που περιέχει όλα τα σημεία \hat{Q}^i , από τα οποία το σημείο με το αιώτατο από το \hat{P}^1 κέντρο στην κατεύθυνση $\hat{P}^1 \hat{M}$ εμφανίζεται στην κεφαλή της λίστας. Τα σημεία $\hat{P}^1, \dots, \hat{P}^5$ προστίθενται στο τέλος αυτής της λίστας.
5. Επιλέγεται το καλύτερα συνδεδεμένο σημείο. Αυτό είναι το πρώτο σημείο στην λίστα κατάταξης που δίνει ένα συνεπές τρίγωνο. Συνεπώς είναι έγκυρο εξασφαλίζοντας ότι καμία από τις πλευρές που δημιουργήθηκαν πρόσφατα δεν τέμνει οποιεσδήποτε από τις υπάρχουσες πλευρές στο μέτωπο.

6. Τελικά, εάν δημιουργηθεί ένας νέος κόμβος, οι συντεταγμένες του στον φυσικό χώρο λαμβάνονται με τη χρησιμοποίηση του αντίστροφου μετασχηματισμού T^{-1} .
7. Καταχωρείται το νέο τρίγωνο και ενημερώνεται το μέτωπο για την προσθήκη/αφαίρεση των σχετικών πλευρών.

Αυτή η διαδικασία παραγωγής πλέγματος παρουσιάζεται σχηματικά στο διάγραμμα ροής που φαίνεται στην **Εικόνα 2.13**.



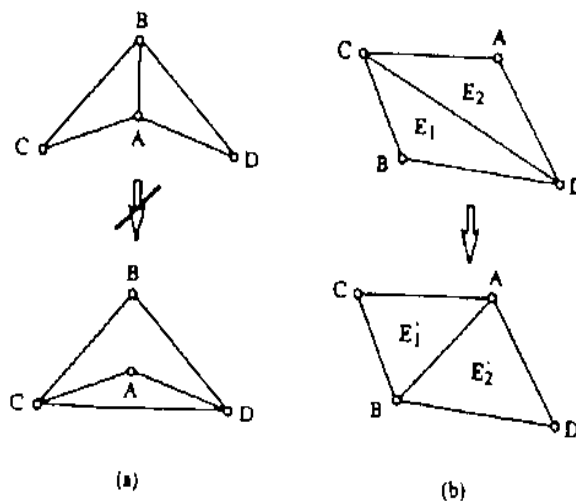
Εικόνα 2.13: Διάγραμμα ροής για την παραγωγή πλέγματος χρησιμοποιώντας την τεχνική advancing front.

2.3.11 Αύξηση της Ποιότητας του Πλέγματος

Προκειμένου να αυξηθεί η ποιότητα του παραγόμενου πλέγματος, εφαρμόζονται δύο διαδικασίες μετεπεξεργασίας. Αυτές οι διαδικασίες, τοπικές στη φύση τους, δεν αλλάζουν το συνολικό αριθμό σημείων ή στοιχείων στο πλέγμα.

- Διαγώνια ανταλλαγή: Αυτή η διαδικασία αλλάζει τις συνδέσεις μεταξύ των κόμβων στο πλέγμα χωρίς να αλλάξει τη θέση τους. Απαιτείται ένας βρόχος πάνω σε όλες τις πλευρές των στοιχείων, αποκλείοντας εκείνες στο όριο. Για κάθε πλευρά AB (*Εικόνα 2.14*), κοινή στα τρίγωνα ABC και ADB, θεωρείται η πιθανότητα ανταλλαγής της AB με την CD, αντικαθιστώντας κατά συνέπεια τα δύο τρίγωνα ABC και ADB από τα τρίγωνα ADC και BCD. Η ανταλλαγή εκτελείται εάν ένα προκαθορισμένο κριτήριο κανονικότητας ικανοποιείται καλύτερα από τη νέα διαμόρφωση παρά από την υπάρχουσα. Σε αυτήν την εφαρμογή, η διαδικασία ανταλλαγής εκτελείται εάν η ελάχιστη γωνία που εμφανίζεται στη νέα διαμόρφωση είναι μεγαλύτερη από αυτή στην αρχική διαμόρφωση.
- Ομαλοποίηση πλέγματος: Αυτή η διαδικασία αλλάζει τις θέσεις των εσωτερικών κόμβων χωρίς να αλλάξει την τοπολογία του πλέγματος. Οι πλευρές των στοιχείων θεωρούνται ως ελατήρια και η σκληρότητα κάθε ελατηρίου θεωρείται ανάλογη του μήκους του. Οι κόμβοι μετακινούνται έως ότου το σύστημα ελατηρίων έρθει σε ισορροπία. Οι θέσεις ισορροπίας βρίσκονται με επανάληψη. Κάθε επανάληψη σημαίνει εκτέλεση ενός βρόχου στα εσωτερικά σημεία και μετακίνηση των συντεταγμένων τους ώστε να συμπίσουν με εκείνα του κέντρου μάζας των γειτονικών σημείων. Συνήθως εκτελούνται τρεις έως πέντε επαναλήψεις.

Η συνδυασμένη εφαρμογή αυτών των δύο αλγορίθμων μετεπεξεργασίας είναι πολύ αποτελεσματική στη βελτίωση της ομαλότητας και της κανονικότητας του παραγομένου πλέγματος.



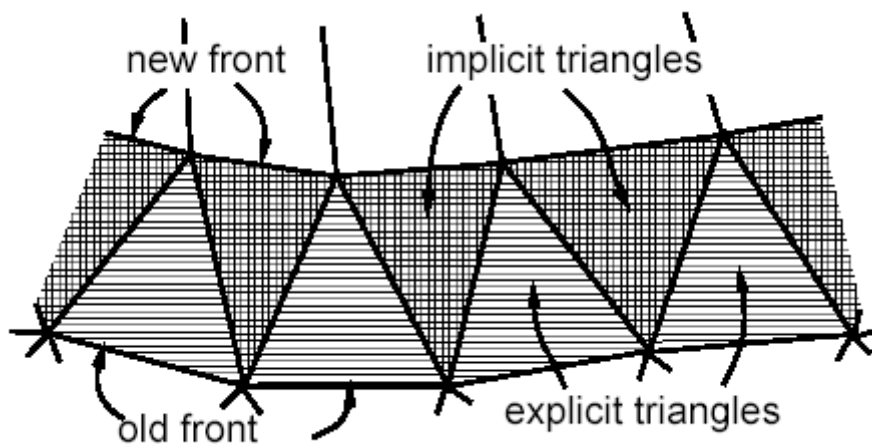
Εικόνα 2.14: Διαδικασία διαγώνιας ανταλλαγής: α) μη αποδεκτή, β) αποδεκτή [42]

ΜΕΘΟΔΟΣ FRONTAL DELAUNAY (FROD)

3.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος Frontal Delaunay (FroD) ενσωματώνει τις ιδέες από τη στρατηγική της μετωπικής τοποθέτησης κορυφών της μεθόδου Advancing Front (AFM) [39] που επιτυγχάνουν κανονικότητα και την τριγωνοποίηση Delaunay (DT), που παρέχει υψηλής ποιότητας νέφος σημείων με τη βέλτιστη σύνδεση και επιδιώκει ομαλή μεταβολή μεγέθους.

Στην μέθοδο FroD, οι κορυφές παράγονται και παρεμβάλλονται σε σύνολα, μια σειρά κάθε φορά, όπως φαίνεται στην **Εικόνα 3.1**. Μετά την εισαγωγή κάθε κορυφής, η DT επαληθεύεται, έτσι ώστε να υπάρχει έγκυρη DT, η οποία καλύπτει ολόκληρη την περιοχή σε οποιοδήποτε στάδιο του αλγορίθμου. Εντούτοις, το κριτήριο Delaunay δεν προσθέτει απαραίτητα τρίγωνα μεταξύ της νέας κορυφής και της μετωπικής ακμής που προβάλλονται όπως θεωρήθηκε από την στρατηγική της εισαγωγής (σίγουρα τρίγωνα **Εικόνα 3.1**): εάν ένα τρίγωνο δεν είναι μέρος της DT, δεν θα διαμορφωθεί. Άλλα τρίγωνα που διαμορφώνονται κλείνουν τη DT γύρω από τη νέα κορυφή (ενδεχόμενα τρίγωνα **Εικόνα 3.1**).



Εικόνα 3.1: Υπάρχοντα τρίγωνα (μονή γραμμοσκίαση) και ενδεχόμενα τρίγωνα (διπλή γραμμοσκίαση) που διαμορφώνονται κατά μήκος του παλιού μετώπου και δημιουργούν το νέο μέτωπο [36]

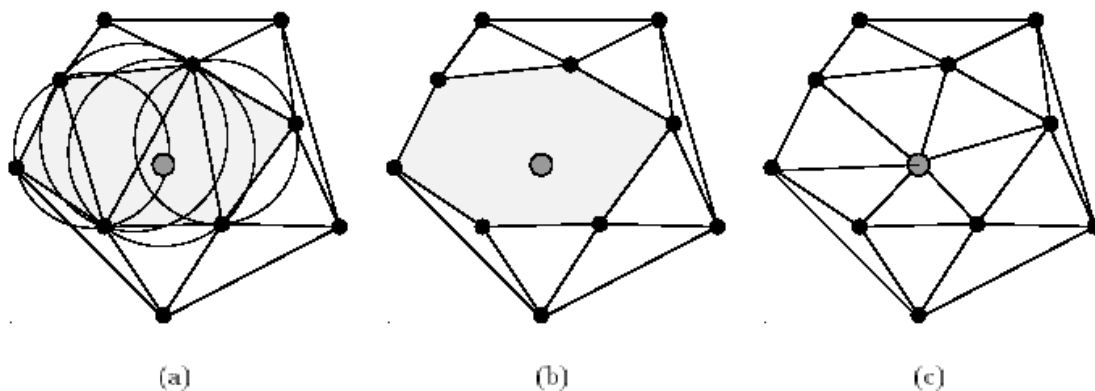
Προκειμένου αυτά τα ενδεχόμενα τρίγωνα να συμπεριφέρονται, καλά πρέπει να επιβληθεί μια ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κορυφών, έστω ένα ορισμένο κλάσμα ah του τοπικού πλέγματος διαστήματος h . Αυτό αποτρέπει τις απότομες άκρες που οδηγούν σε τρίγωνα με οξείες γωνίες και δίνει έναν μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων ορίου στην τριγωνοποίηση. Η απαραίτητη απόσταση λαμβάνεται από ένα υπόβαθρο πλέγμα, το οποίο καθορίζει τις αποστάσεις στο πλέγμα σε κάθε θέση. Για ένα συμμετρικό καθορισμό αποστάσεων σε αυτόν τον μη-ευκλείδειο χώρο, οι αποστάσεις

στο πλέγμα πρέπει να παρεμβάλλονται στο μεσαίο σημείο μεταξύ των δύο εν λόγω σημείων. Στην περίπτωση που μια νέα κορυφή είναι ασύμβατη με κάποια από προηγούμενη σειρά, η νέα κορυφή απορρίπτεται. Στην περίπτωση που δύο κορυφές της ίδιας σειράς είναι πάρα πολύ κοντά συγχωνεύονται.

3.2 Δημιουργία Τριγωνοποίησης Delaunay

Οι μέθοδοι βελτίωσης Delaunay εισάγουν περιοδικά νέες κορυφές σε μια έγκυρη τριγωνοποίηση Delaunay. Κατά συνέπεια οποιαδήποτε μέθοδος που παράγει αυξητικά τριγωνοποίηση Delaunay είναι κατάλληλη. Έχουν παρουσιαστεί πολλοί τέτοιοι αλγόριθμοι.

Ο αλγόριθμος Bowyer [12] υπολογίζει και τροποποιεί το διάγραμμα Voronoi αλλά είναι σχετικά δύσχρηστος. Μια άλλη πιθανή επιλογή είναι ο αλγόριθμος Green and Sibson [23] ή ο αλγόριθμος Lawson [28], που εισάγει μια νέα κορυφή στο περιεχόμενο τρίγωνο, συνδέοντας την με τις τρεις κορυφές διαμόρφωσης ή επάνω σε μια υπάρχουσα ακμή συνδέοντας την με τις τέσσερις κορυφές διαμόρφωσης των δύο τριγώνων που μοιράζονται την ακμή. Οι ακμές που δημιουργούνται είναι απαραίτητως DT, ωστόσο κάποιες παρακείμενες παλαιότερες μπορεί να μην είναι, οπότε γίνεται ανταλλαγή ακμών έως ότου η τριγωνοποίηση να γίνει πάλι DT.



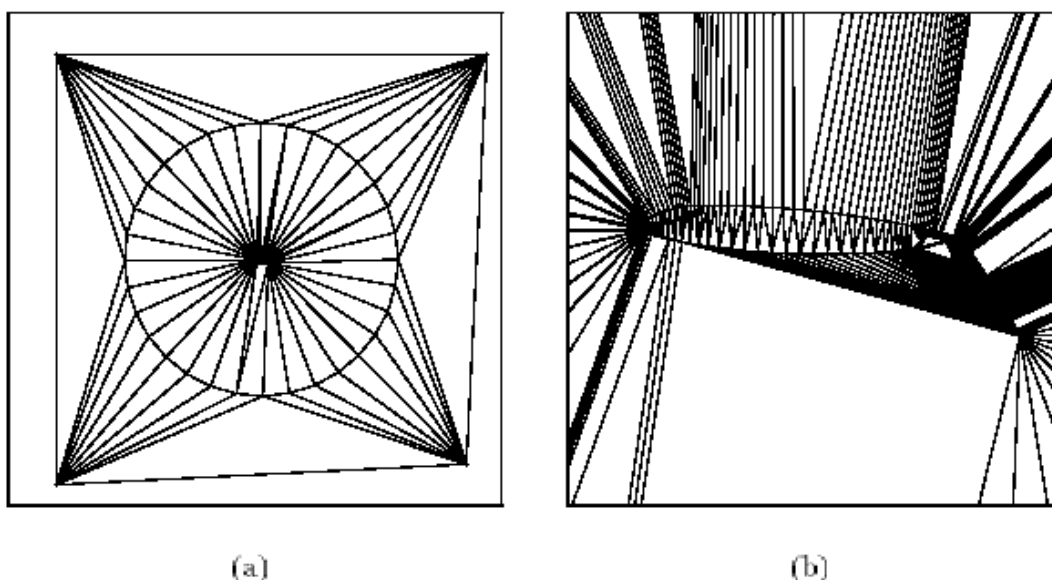
Εικόνα 3.2: Εισαγωγή κορυφών με τον αλγόριθμο Watson. (α) Δείχνει την έγκυρη τριγωνοποίηση Delaunay με την νέα κορυφή να περιέχεται σε διάφορα περικύκλια. Η κοιλότητα που πρέπει να επανατριγωνοποιηθεί φαίνεται στην εικόνα (b) και στο (c) φαίνεται η επανατριγωνοποιημένη κοιλότητα. [36]

Ο αλγόριθμος Watson [58] παραποιείται συχνά ως Bowyer αλλά είναι διαφορετικός και πρακτικότερος. Εκμεταλλεύεται άμεσα το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου, βρίσκοντας την περιοχή που καλύπτεται από όλα τα τρίγωνα που περιέχουν στους περιγεγραμμένους κύκλους τους θέση στην οποία πρόκειται να εισαχθεί νέο σημείο. Η κοιλότητα μπορεί να βρεθεί με την εντόπιση ενός πρώτου κελιού, το οποίο περιέχει την νέα κορυφή και έπειτα προχωρώντας από γειτονικό σε γειτονικό. Όλα τα κελιά της κοιλότητας πρέπει να μοιράζονται μια ακμή, δεδομένου ότι η κοιλότητα είναι κυρτή σύμφωνα με το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου. Αυτή η κοιλότητα επανατριγωνοποιείται, αφαιρώντας όλα τα τρίγωνα που την καλύπτουν και επανασυνδέοντας τις ακμές της κοιλότητας με τη νέα κορυφή για μια νέα έγκυρη DT

(**Εικόνα 3.2**). Για απλότητά αυτή η μέθοδος επιλέχτηκε για την μέθοδο FroD. Αυτή η επιλογή οδηγεί σε μια δομή δεδομένων που για κάθε τρίγωνο αποθηκεύει:

- τις τρεις κορυφές διαμόρφωσης,
- τα τρία γειτονικά τρίγωνα και
- τον περιγεγραμμένο κύκλο και την ακτίνα του.

Όλες οι περιοδικά επαναλαμβανόμενες μέθοδοι πρέπει να ξεκινούν από μια αρχική έγκυρη DT, έστω ένα ή δύο τρίγωνα που καλύπτουν ολόκληρο το πεδίο αναφοράς (**Εικόνα 3.3(α)**). Τα τρίγωνα έξω από το πεδίο αναφοράς αφαιρούνται στο τέλος της τριγωνοποίησης, αυτά δηλαδή που βρίσκονται εκτός του εξωτερικού ορίου ή εντός των τρυπών στο πεδίο αναφοράς.

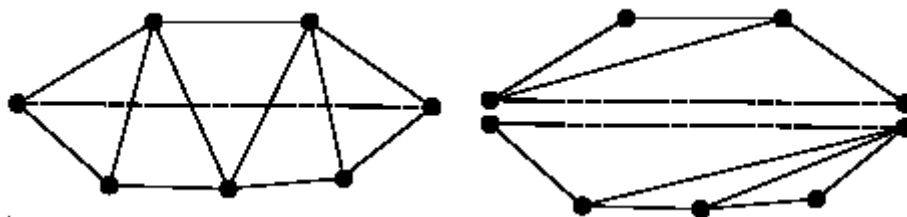


Εικόνα 3.3: (α) Αρχική τριγωνοποίηση των οριακών κορυφών που εισάγονται σε μια έγκυρη τριγωνοποίηση Delaunay τεσσάρων κορυφών, που καλύπτουν όλο το πεδίο αναφοράς. (β) Τελική τριγωνοποίηση της διαμόρφωσης. [36]

3.3 Η Εξαναγκασμένη Τριγωνοποίηση Delaunay

Η γεωμετρική κατασκευή της τριγωνοποίησης Delaunay δεν διακρίνει μεταξύ κορυφών ορίου και εσωτερικών και έτσι δεν σέβεται τη συνδετικότητα μεταξύ κορυφών ορίου. Εντούτοις, για τους σκοπούς παραγωγής υπολογιστικών πλεγμάτων, η συμμόρφωση με το όριο είναι επιβεβλημένη. Ένας τρόπος που εξασφαλίζει συμμόρφωση του ορίου είναι η εξαναγκασμένη τριγωνοποίηση Delaunay (CDT). Στη μέθοδο CDT οι απαιτούμενες ακμές μεταξύ κορυφών προστίθενται στο σύνολο των κορυφών που θα τριγωνοποιηθούν. Αυτές οι ακμές περικλύπτουν τους περιγεγραμμένους κύκλους κατά τέτοιο τρόπο ώστε η κορυφή που βρίσκεται στην άλλη πλευρά της ακμής σε σχέση με το περικύκλιο να μην περιλαμβάνεται ποτέ στο περικύκλιο, αποτρέποντας έτσι το σχηματισμό μιας ακμής που θα διέσχιζε και θα ακύρωνε την απαιτούμενη ακμή. Αυτό είναι ισοδύναμο με την εύρεση της κοιλότητας που διαμορφώνεται από όλα τα κελιά που μοιράζονται τις ακμές που

διασχίζουν την απαιτούμενη ακμή, χωρίζοντας την κοιλότητα κατά μήκος της και επανατριγωνοποιώντας κάθε μέρος χωριστά (Εικόνα 3.4).



Εικόνα 3.4: Κανονική τριγωνοποίηση που παραβιάζει το όριο στα αριστερά και η ισοδύναμη εξαναγκασμένη τριγωνοποίηση Delaunay με την απαιτούμενη ακμή στα δεξιά. [36]

3.4 Σύνοψη του Αλγορίθμου Frontal Delaunay

Ο βασικός βρόχος στην παραγωγή κορυφών μπορεί να συνοψιστεί σε ψευδοκώδικα ως εξής:

```

κάνε έως ότου να βρεθούν νέες κορυφές
  για κάθε τρίγωνο στο πλέγμα
    για κάθε πλευρά του τριγώνου
      εάν αυτή η πλευρά είναι μετωπική
        Βρες μια κορυφή για να διαμορφώσεις ένα τρίγωνο με
        την πλευρά.
      τέλος εάν
    τέλος
  τέλος
  για κάθε νέα κορυφή
    Βρες την πλησιέστερη κορυφή στο πλέγμα
    εάν η νέα κορυφή έχει την κατάλληλη απόσταση
      Εισήγαγε την κορυφή στη δομή.
    αλλιώς εάν η ασύμβατη κορυφή είναι σε χαμηλότερη σειρά
      Απέρριψε την νέα κορυφή.
    αλλιώς
      Έξαγε την ασύμβατη κορυφή από το πλέγμα, συγχώνεψε την
      με τη νέα κορυφή, επανεισήγαγε την συγχωνευμένη κορυφή.
    τέλος εάν
  τέλος
τέλος

```

Ο αριθμός των απαραίτητων διαδικασιών για την εισαγωγή μιας κορυφής στην ισοτροπική διαδικασία είναι $O(1)$ για την κατασκευή και $O(\log n)$ για τον έλεγχο των αποστάσεων εάν χρησιμοποιηθεί δομή δέντρων αναζήτησης στο υπόβαθρο πλέγμα [27]. Ως εκ τούτου, το κόστος παραγωγής πλέγματος με N κορυφές, $O(N \log N)$, είναι ασυμπτωτικά βέλτιστο [44].

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

4.1 Εισαγωγή

Η διαδικασία παραγωγής τριγωνικού πλέγματος σε επιφάνειες έχει αναπτυχθεί αρχικά για να εφαρμοστεί σαν πρώτο βήμα σε μεθόδους παραγωγής πλέγματος σε τρισδιάστατα τετράεδρα, όπως οι τεχνικές Delaunay και Advancing Front. Παρόλα αυτά, η προσέγγιση που θα γίνει εδώ θα είναι γενικότερου ενδιαφέροντος, με πιθανές εφαρμογές σε άλλες περιοχές, όπως για παράδειγμα, η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων κελυφών, η γραφική αναπαράσταση επιφανειών και ο υπολογισμός επιφανειακών διατομών σε συστήματα CAD.

Η κατασκευή ενός επιφανειακού πλέγματος αποτελείται από την προσέγγιση της επιφάνειας από ένα σύνολο επίπεδων τριγωνικών όψεων. Στη συνέχεια θα μελετηθούν μόνο πλέγματα προσαρμοσμένα στα όρια όπου οι κορυφές της τριγωνοποίησης θα βρίσκονται πάνω στην υπό μελέτη επιφάνεια. Η διακριτοποίηση της επιφάνειας με χρήση πλέγματος συνίσταται στην τοποθέτηση σημείων στην επιφάνεια, τα οποία θα αποτελέσουν τους κόμβους του πλέγματος, καθώς και στον καθορισμό των σχέσεων που θα διαμορφωθούν μεταξύ των κόμβων και των γειτονικών τους.

Συνήθως, τα γεωμετρικά δεδομένα που απαιτούνται για το σχεδιασμό μιας επιφάνειας παράγονται, αποθηκεύονται και διαχειρίζονται χρησιμοποιώντας συστήματα CAD [25]. Όμως εφαρμογές όπως η μοντελοποίηση καιρικών προβλέψεων και η ιατρική απεικόνιση απαιτούν παραγωγή και χειρισμό διακριτών δεδομένων μεγάλου όγκου. Αυτός ο τύπος δεδομένων μπορεί είτε να διαμορφωθεί κατάλληλα σε ένα πρότυπο συμβατό με συστήματα CAD, είτε να αντιμετωπιστεί με τη διακριτή μορφή που έχει. Στη συνέχεια της εργασίας υποθέτουμε ότι τα απαιτούμενα γεωμετρικά δεδομένα είναι διαθέσιμα σε μορφή παραμετρικών καμπυλών και επιφανειών, όπως οι Bezier και οι NURBS [35].

Παρόλο που η τοπολογία μιας επιφάνειας βρίσκεται στην περιοχή των δύο διαστάσεων, η θέση των κόμβων του πλέγματος είναι στις τρεις διαστάσεις. Αυτό επιτρέπει την ανάπτυξη δύο πιθανών στρατηγικών για την παραγωγή τριγωνικού πλέγματος σε επιφάνειες. Μπορεί κανείς είτε να παράγει κόμβους πλέγματος και συνδέσεις κατευθείαν στις τρεις διαστάσεις, είτε να εκμεταλλευτεί το πλεονέκτημα του δισδιάστατου χαρακτήρα της επιφάνειας και να αναγάγει την παραγωγή πλέγματος σε δισδιάστατο πρόβλημα. Και οι δύο στρατηγικές έχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Η παραγωγή τριγωνοποίησης κατευθείαν στην επιφάνεια παρουσιάζει πολλές δυσκολίες. Η τεχνική Advancing Front μπορεί εύκολα να επεκταθεί ώστε να διαχειρίζεται επιφάνειες. Ωστόσο ο καθορισμός της αξιοπιστίας ενός νέου τριγώνου στις τρεις διαστάσεις, επαληθεύοντας εάν τέμνεται με τις ακμές του μετώπου παραγωγής, δεν είναι εύκολη υπόθεση. Ένα τρίγωνο και μια ακμή μπορεί να μην τέμνονται στο χώρο αλλά να εμπλέκονται και να παράγουν ένα άκυρο

τρίγωνο. Το κύριο πρόβλημα, που συνδέεται με τις μεθόδους που είναι βασισμένες στην μέθοδο Delaunay, είναι η έλλειψη, για επιφάνειες με πλήθος καμπυλοτήτων, κριτηρίων περιγεγραμμένου κύκλου και περιγεγραμμένης σφαίρας, αντίστοιχων αυτών που είναι διαθέσιμων για την παραγωγή πλέγματος στις δύο και στις τρεις διαστάσεις αντίστοιχα.

Από την άλλη εάν ο γεωμετρικός ορισμός της επιφάνειας υπάρχει ως μετάβαση από μια δισδιάστατη περιοχή στις τρεις διαστάσεις, αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή πλέγματος στις δύο διαστάσεις και σε επόμενο στάδιο να μετασχηματιστεί πάνω στην επιφάνεια. Η συγκεκριμένη προσέγγιση ακολουθήθηκε και στην παρούσα εργασία, όπως θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Στην παρούσα προσέγγιση, οι επιφάνειες ορίζονται ως επιφάνειες NURBS, οι οποίες ορίζονται παραμετρικά με τη χρήση δύο ανεξάρτητων παραμέτρων. Οι παράμετροι κινούνται σε δύο διαστάσεις, ενώ η τελική παραγόμενη επιφάνεια είναι τρισδιάστατη. Αυτό επιτρέπει τη δημιουργία του πλέγματος στον χώρο των παραμέτρων και στη συνέχεια τον μετασχηματισμό του στον πραγματικό χώρο των τριών διαστάσεων, με βάση τον ορισμό της συγκεκριμένης NURBS επιφάνειας. Εάν πρόκειται για επίπεδες επιφάνειες, τότε η διαδικασία είναι απλούστερη. Μετασχηματίζεται η επίπεδη επιφάνεια από τις τρεις στις δύο διαστάσεις και στη μετασχηματισμένη επιφάνεια παράγεται το δισδιάστατο πλέγμα, στη συνέχεια το πλέγμα υπόκειται στον ανάστροφο μετασχηματισμό, ώστε να επανέλθει στις τρεις διαστάσεις.

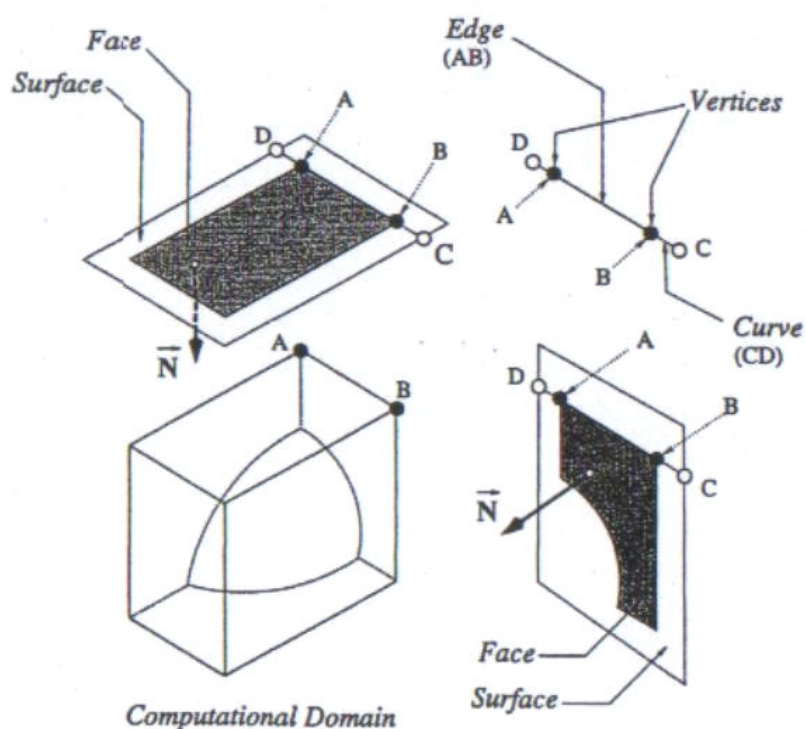
4.2 Μοντελοποίηση Επιφάνειας

Στη συνέχεια το πεδίο αναφοράς που θα διακριτοποιηθεί, που αναφέρεται σαν υπολογιστικό πεδίο, θα αντιμετωπίζεται ως ένα τρισδιάστατο αντικείμενο, που θα διακριτοποιηθεί με τη βοήθεια των επιφανειών που το περικλείουν. Αυτό είναι γνωστό ως οριακή αναπαράσταση του πεδίου αναφοράς [25, 35]. Αυτή η στερεά αναπαράσταση χρησιμοποιείται στην πλειονηφία των εμπορικών και ερευνητικών εφαρμογών παραγωγής πλεγμάτων.

Σε μια οριακή αναπαράσταση το υπολογιστικό πεδίο είναι η περιοχή στο εσωτερικό μιας οριακής επιφάνειας. Αυτή η επιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα γενικευμένο πολύεδρο, που είναι μια ένωση από ένα σύνολο πλευρών, οι οποίες καθορίζονται από ακμές, που με τη σειρά τους καθορίζονται από κορυφές. Οι πλευρές βρίσκονται στις επιφάνειες, οι ακμές βρίσκονται στις καμπύλες και οι κορυφές είναι τα άκρα των ακμών. Μια απεικόνιση της παραπάνω λογικής δίνεται στην **Εικόνα 4.1**. Συνεπώς η οριακή αναπαράσταση απαιτεί την αποθήκευση δύο τύπων δεδομένων, γεωμετρικών και τοπολογικών.

Τα γεωμετρικά δεδομένα αποτελούν τις βασικές παραμέτρους που καθορίζουν το σχήμα των επιφανειών και των καμπυλών, και των συντεταγμένων των κορυφών. Τα τοπολογικά δεδομένα αφορούν στις σχέσεις γειτνίασης μεταξύ διαφορετικών στοιχείων της οριακής επιφάνειας (κορυφές, ακμές, πλευρές). Τέλος, μια σύμβαση προσανατολισμού προσδιορίζει την πλευρά της κάθε έδρας που αντιστοιχεί στην μεριά του υπολογιστικού πεδίου. Αποδεικνύεται ότι, περιορίζοντας το πεδίο και τις πλευρές που διαμορφώνουν τα όρια των περιοχών προς ένωση (μια περιοχή θεωρείται προς ένωση εάν δύο οποιαδήποτε σημεία στο εσωτερικό της περιοχής

μπορούν να ενωθούν με μια συνεχόμενη καμπύλη της οποίας τα σημεία όλα είναι εσωτερικά της περιοχής) μπορεί να ληφθεί αυτόματα ένας προσανατολισμός συμβατός με τον γεωμετρικό ορισμό.



Εικόνα 4.1: Οριακή αναπαράσταση του υπολογιστικού πεδίου αναφοράς, δείχνοντας τον προσανατολισμό των πλευρών [38]

4.2.1 Γεωμετρικός Ορισμός

Η οριακή αναπαράσταση του πεδίου αναφοράς παρέχει μια περιγραφή του υπολογιστικού πεδίου σε σχέση με ένα σύνολο προσανατολισμένων πλευρών. Η παραγωγή πλέγματος προσαρμοσμένου στο όριο γι αυτό το πεδίο αναφοράς θα απαιτήσει έναν αναλυτικό καθορισμό των επιφανειών, στις οποίες ορίζονται οι πλευρές και οι καμπύλες ακμές. Αυτή η μαθηματική αναπαράσταση πρέπει να επιτρέπει την εκτέλεση χειρισμών όπως για παράδειγμα, τοποθέτηση σημείων στο χώρο και υπολογισμό μηκών και εφαπτόμενων διανυσμάτων των καμπυλών, όπως επίσης κάθετων διανυσμάτων και επιφανειών.

4.2.1.1 Καμπύλες

Παρόλο που οι καμπύλες στο μοντέλο οριακής αναπαράστασης του υπολογιστικού πεδίου αναπαριστώνται σαν την τομή δύο επιφανειών, η χρήση αυτής της προσέγγισης για τη παραγωγή πλέγματος δεν συνιστάται, καθώς καταλήγει σε μια προβληματική αναπαράσταση της καμπύλης. Αυτή η καμπύλη προκύπτει ως η λύση ενός συστήματος δυο μη γραμμικών εξισώσεων που η καθεμία αναπαριστά την τεμνόμενη επιφάνεια (συνήθως πολυώνυμα υψηλού βαθμού). Αυτό σημαίνει ότι οι συνήθεις χειρισμοί που απαιτούνται στην παραγωγή πλέγματος όπως η τοποθέτηση

σημείου στην καμπύλη, ο υπολογισμός του μήκους της καμπύλης κ.τ.λ., θα περιλαμβάνουν συνεχείς επαναληπτικές διαδικασίες για τη λύση ενός τέτοιου συστήματος.

Η πιο άμεση προσέγγιση που διευκολύνει την διαδικασία της διακριτοποίησης είναι η υιοθέτηση μιας παραμετρικής αναπαράστασης της καμπύλης που προσεγγίζει επακριβώς την αληθινή διατομή. Αυτή η καμπύλη υπολογίζεται μια φορά κατά τη διάρκεια ενός σταδίου της επεξεργασίας. Μια μέθοδος που συχνά χρησιμοποιείται είναι η τοποθέτηση ενός συνόλου σημείων ελέγχου κατά μήκος της τομής των επιφανειών, από τα οποία αργότερα θα παρεμβληθεί μια καμπύλη spline. Η κατανομή των σημείων θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε η απόσταση μεταξύ της παρεμβαλλόμενης καμπύλης και της πραγματικής τομής των επιφανειών, χρησιμοποιώντας έναν κατάλληλο κανόνα, να βρίσκεται μέσα στα αποδεκτά όρια ακρίβειας.

Υιοθετώντας την αναπαράσταση CAD για τις καμπύλες Spline, π.χ., Ferguson, Bezier, NURBS, οι καμπύλες δίνονται με παραμετρική αναπαράσταση όπως ακολούθως:

$$r(u) = \begin{Bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{Bmatrix} \quad 0 \leq u \leq U \quad (4.1)$$

Από εδώ και στη συνέχεια, το r θα συμβολίζει το διάνυσμα θέσης ενός σημείου σε ένα καρτεσιανό σύστημα που αναφέρεται στα (x, y, z) . Το εφαπτόμενο διάνυσμα t στην καμπύλη, σε ένα σημείο με παραμετρική συντεταγμένη u , δίνεται από:

$$t(u) = \frac{dr}{du} \quad (4.2)$$

4.2.1.2 Επιφάνειες

Τα ανυσματικά γινόμενα των καμπυλών spline είναι η πιο κοινή μορφή σε CAD αναπαράσταση επιφανειών. Τέτοιες επιφάνειες μπορούν να περιγραφούν με παραμετρική αναπαράσταση ως εξής:

$$r(u_1, u_2) = \begin{Bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{Bmatrix} \quad 0 \leq u \leq U, \quad 0 \leq v \leq V \quad (4.3)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα n στην επιφάνεια, σε ένα σημείο παραμετρικών συντεταγμένων (u, v) , δίνεται από την

$$n(u, v) = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \quad (4.4)$$

όπου το \times δηλώνει το διανυσματικό γινόμενο.

Η εξίσωση (4.3) ορίζει την επιφάνεια σαν τον μετασχηματισμό μεταξύ μιας δισδιάστατης ορθογώνιας περιοχής σε ένα επίπεδο παραμέτρων (u, v) , στις τρεις διαστάσεις. Μια τέτοια παραμετρική αναπαράσταση παρέχεται από την πλειοψηφία των συστημάτων επιφανειακής αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στα προγράμματα CAD.

Για τους σκοπούς παραγωγής πλέγματος, απαιτείται ότι ο ορισμός της σχεδίασης της επιφάνειας θα είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού και ότι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια θα μπορεί να οριστεί και να είναι συνεχόμενο για όλα τα εσωτερικά σημεία. Τα ιδιαίτερα σημεία, αυτά π.χ. που το κάθετο διάνυσμα δεν ορίζεται, όπως για παράδειγμα, η κορυφή ενός κώνου ή ο πόλος μιας σφαίρας, επιτρέπεται να υπάρχουν μόνο στο όριο.

4.2.2 Τοπολογική Περιγραφή

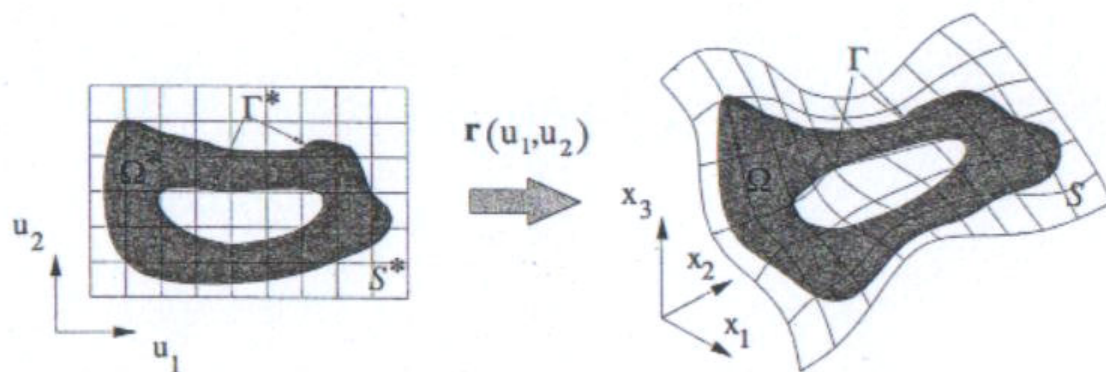
Το μοντέλο οριακής αναπαράστασης παρέχει έναν ορισμό του υπολογιστικού πεδίου ως μια τρισδιάστατη περιοχή εσωτερική σε ένα όριο διαιρεμένο σε ένα σύνολο πλευρών. Μια πλευρά είναι μια περιοχή σε μια επιφάνεια που οριοθετείται από ένα σύνολο προσανατολισμένων ακμών. Τέλος μια ακμή είναι το τμήμα μιας καμπύλης που ορίζεται από δύο κορυφές.

Τα τοπολογικά δεδομένα που απαιτούνται από το μοντέλο είναι ο ορισμός του ορίου μιας περιοχής σε ένα κύριο επίπεδο του ιεραρχικού μοντέλου, (πεδίο αναφοράς, πλευρά και ακμή) σε σχέση με μια λίστα περιοχών στο επόμενο χαμηλότερο επίπεδο (πλευρά, ακμή, κορυφή), αντίστοιχα.

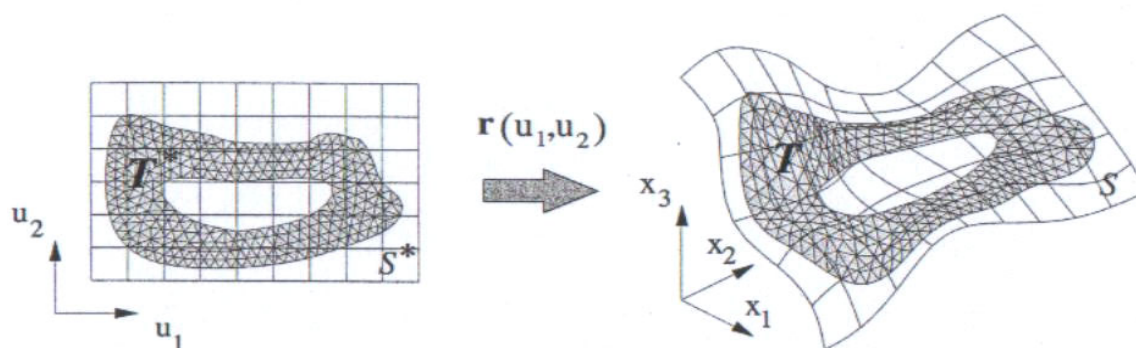
Οι κορυφές είναι σημεία κοινά σε τρεις ή περισσότερες πλευρές και αντιπροσωπεύονται από τις τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες τους. Μια ακμή ορίζεται από την παραμετρική καμπύλη στην οποία βρίσκεται και από τις δύο κορυφές στις άκρες της. Αυτή η αναπαράσταση επιτρέπει τον ορισμό διαφόρων μη επικαλυπτόμενων ακμών στην ίδια καμπύλη. Εάν το υπολογιστικό πεδίο θεωρείται συνδεδεμένο, τότε μια ακμή θα είναι κοινή σε δύο μόνο πλευρές. Μια πλευρά ορίζεται από την επιφάνεια στην οποία βρίσκεται και από ένα σύνολο ακμών που διαμορφώνουν το όριο. Και πάλι διάφορες μη επικαλυπτόμενες πλευρές μπορούν να οριστούν στην ίδια επιφάνεια.

4.3 Διακριτοποίηση Επιφάνειας

Η αναπαράσταση μιας επιφάνειας S που δίνεται από τη εξίσωση (4.3) επιτρέπει τον ορισμό μιας πλευράς σαν μια περιοχή Ω πάνω στην επιφάνεια με όριο Γ , το οποίο είναι η εικόνα του μετασχηματισμού μιας περιοχής Ω^* του επιπέδου των παραμέτρων (u, v) (ή (u_1, u_2) στην εικόνα 4.2). Αυτή η περιοχή οριοθετείται από ένα όριο Γ^* που είναι η απεικόνιση στο επίπεδο των παραμέτρων του ορίου της πλευράς Γ (Εικόνα 4.2).



Εικόνα 4.2: Μετασχηματισμός από το επίπεδο των παραμέτρων στο φυσικό χώρο [38]



Εικόνα 4.3: Μετασχηματισμός τριγωνικού πλέγματος T^* από το παραμετρικό επίπεδο στον φυσικό τρισδιάστατο χώρο [38]

Εάν η σχεδίαση που αναπαριστά την επιφάνεια είναι διαφορίσιμη, π.χ., το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα δεν μηδενίζεται και είναι συνεχές, για όλα τα εσωτερικά στην πλευρά σημεία, τότε μια τέτοια σχεδίαση θα μετασχηματίσει μια έγκυρη τριγωνοποίηση T^* του επιπέδου των παραμέτρων σε έγκυρη τριγωνοποίηση επιφάνειας T (Εικόνα 4.3). Αυτό εισάγει την ιδέα της παραγωγής πλέγματος στο επίπεδο των παραμέτρων, το οποίο στη συνέχεια μπορεί να μετασχηματιστεί πάνω στην καμπύλη επιφάνεια για να παράγει μια κατάλληλη διακριτοποίηση της επιφάνειας. Αυτό ολοκληρώνεται εξασφαλίζοντας ότι το μέγεθος και το σχήμα των παραγόμενων τριγώνων στο επίπεδο των παραμέτρων θα είναι τέτοια ώστε όταν σχεδιαστούν πάνω στην επιφάνεια το μέγεθος και το σχήμα των τριγώνων που θα προκύψουν θα συμμορφώνονται με αυτά που καθορίζονται από μία κατάλληλη συνάρτηση ελέγχου πλέγματος.

4.4 Τριγωνοποίηση Επιφανειών

Οι καμπύλες ακμές διακριτοποιούνται αρχικά σε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα. Τα τριγωνικά πλέγματα δημιουργούνται ανεξάρτητα σε κάθε επιφάνεια που διαμορφώνει το όριο του υπολογιστικού πεδίου. Το σύνολο από πλευρές που δημιουργήθηκαν προηγουμένως, διαμορφώνουν στη συνέχεια την αρχική δημιουργία μετώπου στην επιφάνεια.

Τα βήματα της διαδικασίας είναι τα ακόλουθα:

1. Διάβασε τα γεωμετρικά ορίσματα και μια κατάλληλη κατανομή των παραμέτρων του πλέγματος.
2. Διακριτοποίησε τις ακμές.
 - a. Υπολόγισε την τοπική συντεταγμένη u των σημείων που ορίζουν το τέλος των ακμών.
 - b. Τοποθέτησε τα σημεία κατά μήκος της ακμής σύμφωνα με μία συνάρτηση ελέγχου του πλέγματος.
3. Διακριτοποίησε τις πλευρές.
 - a. Υπολόγισε τις τοπικές συντεταγμένες (u, v) στο επίπεδο των παραμέτρων των σημείων (που δημιουργήθηκαν στο προηγούμενο βήμα) που ανήκουν στις ακμές στο όριο της εκάστοτε πλευράς.
 - b. Δημιούργησε μια κατάλληλη τριγωνοποίηση στο επίπεδο των παραμέτρων χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη δισδιάστατη τεχνική.
 - c. Μετασχημάτισε το προκύπτον πλέγμα στον φυσικό χώρο.
4. Προσανατόλισε το διακριτοποιημένο όριο.

4.4.1 Υπολογισμός των Τοπικών Συντεταγμένων των Σημείων των Ακμών

Μια ακμή σε μια περιοχή μιας καμπύλης οριοθετείται από δύο σημεία. Αυτά τα σημεία είναι κορυφές του ορίου του υπολογιστικού πεδίου. Ωστόσο, αφού η καμπύλη είναι μόνο μια προσέγγιση της πραγματικής τομής των επιφανειών, οι κορυφές γενικά δεν θα βρίσκονται ακριβώς πάνω στην καμπύλη. Γι αυτό το λόγο, τα σημεία οριοθέτησης των ακμών επιλέγονται να είναι τα σημεία της καμπύλης που είναι πιο κοντά στις κορυφές. Η απόσταση μεταξύ της κορυφής και του κοντινότερου σημείου στην καμπύλη πρέπει να είναι μικρότερη από μια καθορισμένη οριακή απόσταση D_c . Οι τιμές της χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν πότε δυο σημεία συμπίπτουν και πρέπει να προκύπτει είτε από τη γεωμετρική ακρίβεια που χρησιμοποιείται στην δημιουργία των δεδομένων του σχεδίου CAD, είτε, αν αυτό δεν είναι εφικτό, να υπολογίζεται με βάση την ακρίβεια του μηχανήματος.

Το πρόβλημα της εύρεσης των παραμετρικών συντεταγμένων μιας κορυφής μπορεί να διατυπωθεί σαν ένα πρόβλημα προβολής σημείου, π.χ., δίνεται μια κορυφή r^* , βρες την παραμετρική συντεταγμένη u του σημείου $r(u)$ στην καμπύλη έτσι ώστε

$$D = \|r(u) - r^*\| = \min \quad (4.5)$$

Η λύση στην παραπάνω εξίσωση εξασφαλίζεται με τη βοήθεια μιας τυποποιημένης επαναληπτικής διαδικασίας για ελαχιστοποίηση της συνάρτησης [19]. Μια αρχική εύρεση του διαστήματος στο οποίο θα βρίσκεται το ελάχιστο της εξίσωσης 4.5 δίνεται από μια τριάδα παραμετρικών συντεταγμένων $u_{(1)} \leq u_{(2)} \leq u_{(3)}$. Το διάστημα και οι τιμές παίρνονται τέτοιες ώστε να ανταποκρίνονται στα ακραία σημεία της καμπύλης, $u_{(1)} = 0$ και $u_{(3)} = U$, ενώ η τρίτη τιμή, $u_{(2)}$, λαμβάνεται ως ακολούθως. Η καμπύλη αρχικά διαιρείται σε μερικά ευθύγραμμα τμήματα, έπειτα βρίσκεται το

τμήμα που είναι πλησιέστερα στο σημείο και τέλος, το $u_{(2)}$ λαμβάνεται σαν η μέση τιμή των παραμετρικών συντεταγμένων των ακραίων σημείων του πλησιέστερου τμήματος. Μόλις πραγματοποιηθεί η αρχική εύρεση ενός διαστήματος στο οποίο θα βρίσκεται το ελάχιστο, το διάστημα μικραίνει, χρησιμοποιώντας ένα συνδυασμό αλγορίθμου εύρεσης χρυσής τομής και παραβολικής παρεμβολής, έως ότου να βρεθεί μια θέση που να ανταποκρίνεται στο ελάχιστο της απόστασης, $D=D_{min}$. Εάν τα γεωμετρικά δεδομένα είναι σωστά ορισμένα, η τιμή αυτής της απόστασης δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την οριακή απόσταση ($D_{min} \leq D_t$).

4.4.2 Υπολογισμός των Συντεταγμένων στο Παραμετρικό Επίπεδο

Μια πλευρά ορίζεται σαν η περιοχή μιας επιφάνειας που οριοθετείται από ένα σύνολο ακμών. Αυτές πρέπει να διακριτοποιηθούν στο προηγούμενο βήμα της παραγωγικής διαδικασίας, και η συναρμολόγηση των διακριτοποιημένων ακμών διαμορφώνουν το όριο του τριγωνικού πλέγματος που θα παραχθεί. Ωστόσο, στην προσέγγιση που υιοθετείται εδώ, η διαδικασία για την παραγωγή τριγωνικού πλέγματος λαμβάνει χώρα στο παραμετρικό επίπεδο. Συνεπώς, για τη διαμόρφωση του αρχικού μετώπου παραγωγής στο παραμετρικό επίπεδο, πρέπει να υπολογιστούν οι παραμετρικές συντεταγμένες (u, v) των κόμβων που παράγονται στις ακμές. Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός $r(u, v)$ δεν μπορεί εν γένει, να αντιστραφεί αναλυτικά, οι συντεταγμένες (u, v) αυτών των σημείων βρίσκονται αριθμητικά με τη βοήθεια επαναληπτικής διαδικασίας.

Η καμπύλη στην οποία ορίζεται η ακμή είναι απλά μια προσέγγιση της τομής των επιφανειών στις οποίες ανήκουν οι διπλανές ακμές. Σαν αποτέλεσμα αυτού, οι κόμβοι παράγονται σε ακμές που δεν βρίσκονται ακριβώς επάνω στην επιφάνεια. Η απόσταση μεταξύ αυτών των κόμβων και της επιφάνειας εξαρτώνται από την ακρίβεια που χρησιμοποιείται στην προσέγγιση της πραγματικής τομής μεταξύ των επιφανειών με την καμπύλη Spline.

Σε αυτή τη διατύπωση, οι παραμετρικές συντεταγμένες (u, v) ενός κόμβου, που δηλώνονται r^* , λαμβάνονται να είναι αυτές του σημείου $r(u, v) = (x, y, z)$ της επιφάνειας που είναι πλησιέστερα στο r^* . Αυτό μπορεί να διατυπωθεί σαν την ελαχιστοποίηση του προβλήματος εύρεσης των παραμετρικών συντεταγμένων (u, v) για τις οποίες

$$\|r^* - r(u, v)\| = \min \quad (4.6)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η διακριτοποίηση των ακμών γίνεται κατευθείαν στον τρισδιάστατο χώρο και όχι στο παραμετρικό επίπεδο, έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η συμβατότητα των κομβικών συντεταγμένων μεταξύ γειτονικών πλευρών.

Η μη γραμμική εξίσωση 4.6 λύνεται με τη βοήθεια μια επαναληπτικής διαδικασίας που περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα.

1. Η απόσταση $\|r - r^*\|$ υπολογίζεται για τα ακραία σημεία στο όριο της επιφάνειας. Εάν για κάποιο από αυτά, η τιμή είναι μικρότερη από το κατώφλι

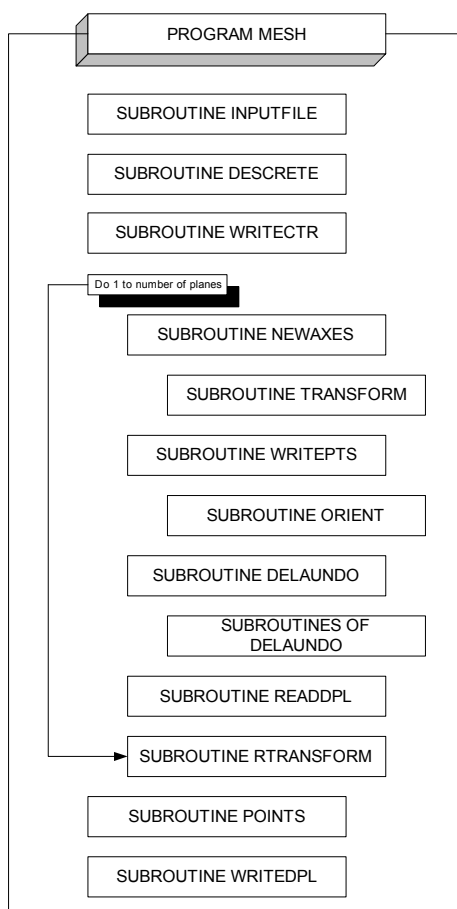
- απόστασης D_i που χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί πότε δύο σημεία γειτονεύουν, τότε η ζητούμενη λύση είναι οι παραμετρικές συντεταγμένες.
2. Εάν η απάντηση δεν βρίσκεται μεταξύ των ακραίων σημείων του ορίου, η έρευνα για το ελάχιστο συνεχίζεται στο όριο. Η ελαχιστοποίηση εκτελείται χρησιμοποιώντας την μονοδιάστατη διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο 4.4.2. Η επανάληψη σταματάει εάν βρεθεί ένα σημείο που επαληθεύει το $\|r - r^*\| < D_i$.
 3. Τέλος, το ελάχιστο αναζητείται στην εσωτερική περιοχή. Το πλησιέστερο σημείο που βρίσκεται στο όριο χρησιμοποιείται σαν η αρχική εκτίμηση για την μέθοδο της ελαχιστοποίησης Conjugate Gradient [19]. Αυτή η μέθοδος είναι πολύ αποδοτική αλλά μπορεί να αποτύχει σε κάποιες περιπτώσεις. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται, μια πιο εύρωστη, αλλά και υπολογιστικά ακριβότερη προσέγγιση. Αυτή η μέθοδος ξεκινά με μια αρχική ομοιόμορφη υποδιαίρεση του παραμετρικού επιπέδου σε ορθογώνιες περιοχές κατά μήκος των γραμμών συντεταγμένων. Μεταξύ αυτών των τετραγώνων, για περαιτέρω υποδιαίρεση στα τέσσερα επιλέγεται το πλησιέστερο στο σημείο στόχο. Για αυτό το σκοπό χρησιμοποιείται η απόσταση μεταξύ του κέντρου μάζας του τετραγώνου και του σημείου στόχου. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου βρεθεί ένα σημείο r το οποίο επαληθεύει τα κριτήρια σύγκλισης, π.χ., $\|r - r^*\| < D_i$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΗ ΔΟΜΗΜΕΝΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΣΕ ΣΤΕΡΕΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ MESH

5.1 Εισαγωγή

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε μεθοδολογία, καθώς και το αντίστοιχο λογισμικό, για την δημιουργία μη δομημένου επιφανειακού πλέγματος σε στερεά, τα οποία δομούνται από επίπεδες επιφάνειες. Το σχετικό λογισμικό ονομάζεται **Mesh v3.5** και αναπτύχθηκε σε γλώσσα FORTRAN. Για την τριγωνοποίηση των επιφανειών στο πρόγραμμα ενσωματώθηκε με τη μορφή υπορουτίνας το πρόγραμμα **Delaundo v5.4**, που παράγει τριγωνοποίηση στις δύο διαστάσεις με χρήση της μεθόδου Frontal Delaunay. Το συγκεκριμένο λογισμικό είναι διαθέσιμο στο διαδίκτυο σε μορφή πηγαίου κώδικα. Η δομή του λογισμικού που αναπτύχθηκε, δίνεται σχηματικά στην **Εικόνα 5.1**.



Εικόνα 5.1: Δομή του προγράμματος Mesh για παραγωγή πλέγματος σε επίπεδες επιφάνειες

Όπως φαίνεται και στην **Εικόνα 5.1**, οι υπορουτίνες που χρησιμοποιούνται είναι οι ακόλουθες:

INPUTFILE: Διαβάζει ένα αρχείο εισόδου τύπου .dip για τις παραμέτρους του στερεού το οποίο θα τριγωνοποιηθεί.

DESCRET: Διαιρεί κάθε ακμή που ορίζεται από δύο σημεία σε ίσα τμήματα. Υπολογίζει τα νέα σημεία και τις νέες ακμές που δημιουργούνται και ενημερώνει τον πίνακα των επιφανειών για τα νέα σημεία και τις ακμές από τα οποία πλέον αποτελείται η επιφάνεια.

WRITECTR: Δημιουργεί ένα αρχείο .ctr το οποίο προσδιορίζει πως θα διαχειριστεί το λογισμικό Delaundo τους κόμβους που διαβάζονται από ένα αρχείο .pts.

NEWAXES: Υπολογίζει τους νέους άξονες X_1 , Y_1 , Z_1 . Η επιφάνεια X_1Y_1 καθορίζεται από το επίπεδο της επιφάνειας που ορίζουν τα σημεία.

TRANSFORM: Υπολογίζει το μετασχηματισμό των συντεταγμένων των σημείων από τις τρεις διαστάσεις στις δύο.

WRITEPTS: Δημιουργεί ένα αρχείο .pts το οποίο περιέχει πληροφορίες με τις οποίες ξεκινά το Delaundo.

ORIENT: Βρίσκει τον προσανατολισμό κάθε ακμής κάθε ορίου της επιφάνειας.

DELAUNDO: Εκτελεί την τριγωνοποίηση Delaunay ενός δεδομένου συνόλου οριακών σημείων. Είτε χρησιμοποιείται ένα δεδομένο εσωτερικό νέφος σημείων είτε κατασκευάζεται ένα νέφος σημείων με τη μετωπική προσέγγιση DOMINO. Αυτό το νέφος σημείων κατασκευάζεται είτε ισοτροπικά είτε με κάποια πύκνωση, ανάλογα με τις τιμές που παρεμβάλλονται σε ένα υπόβαθρο πλέγμα. Το υπόβαθρο πλέγμα προέρχεται από την αρχική τριγωνοποίηση των οριακών κόμβων και τις πληροφορίες για τρίγωνα που δεν πρέπει να σχηματιστούν για να συνδέσει ορισμένα τμήματα ορίου. Το πλέγμα κατασκευάζεται με τον αλγόριθμο Bowyer και χρησιμοποιείται διαγώνια ανταλλαγή για να εξασφαλιστεί ακεραιότητα του ορίου.

ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΕΣ ΤΟΥ DELAUNDO: Το Delaundo αποτελείται από 64 subroutines, 4 real functions, 3 functions και 2 integer functions. Πληροφορίες για τις υπορουτίνες και τις συναρτήσεις που χρησιμοποιεί δίνονται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι.

READDPL: Διαβάζει για κάθε επιφάνεια το .dpl αρχείο που εξάγει το Delaundo και κρατάει τον αριθμό των τριγώνων, τις τρεις κορυφές που διαμορφώνουν κάθε τρίγωνο, τον αριθμό των κόμβων και τις συντεταγμένες x , y κάθε κόμβου.

RTRANSFORM: Υπολογίζει τον αντίστροφο μετασχηματισμό των συντεταγμένων των σημείων από τις δύο διαστάσεις στις τρεις.

POINTS: Δημιουργεί μια κοινή δομή δεδομένων για τους κόμβους όλων των επιφανειών, διαγράφοντας όσους επαναλαμβάνονται. Συνδέει τις δομές δεδομένων των ακμών και των επιφανειών με την κοινή δομή δεδομένων των κόμβων και βρίσκει τα γειτονικά τρίγωνα σε κάθε τρίγωνο.

WRITEDPL: Γράφει ένα τελικό .dpl αρχείο που περιέχει πληροφορίες για τα τρίγωνα, τα γειτονικά σε αυτά τρίγωνα και τους κόμβους όλων των πλευρών του στερεού.

5.2 Στάδια Παραγωγής μη Δομημένου Πλέγματος με το Πρόγραμμα Mesh

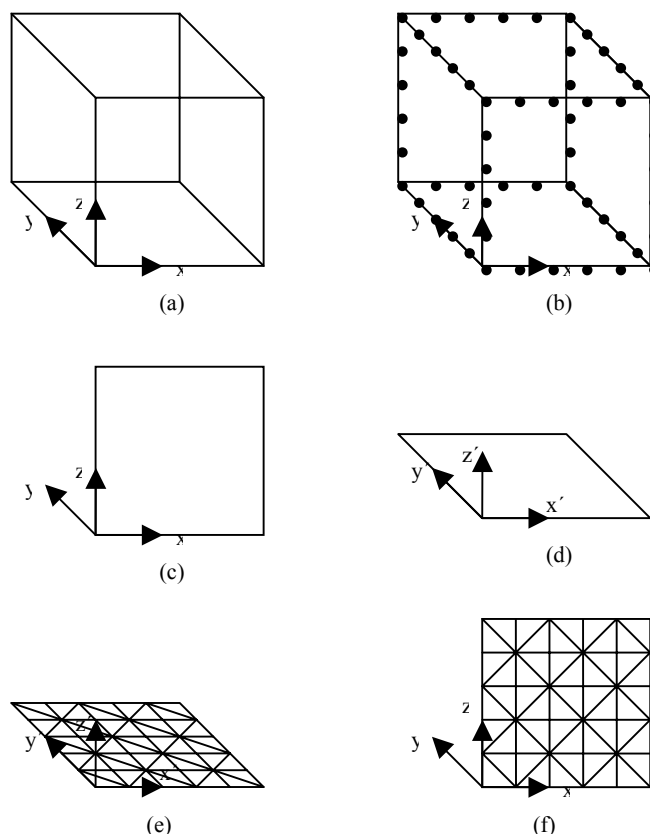
Η λογική του λογισμικού που αναπτύχθηκε είναι να μετασχηματίζονται οι τρισδιάστατες συντεταγμένες κάθε επίπεδης επιφάνειας διαδοχικά στις δύο διαστάσεις, θεωρώντας ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων για κάθε επίπεδη έδρα του στερεού. Στις δύο πλέον διαστάσεις παράγεται το πλέγμα στην εν λόγω επιφάνεια, με τη χρήση του λογισμικού Delaundo. Το πλέγμα στη συνέχεια μετασχηματίζεται στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε έδρα. Στη συνέχεια όλα τα επιμέρους πλέγματα ενοποιούνται σε ένα, με την αφαίρεση των πολλαπλών αναφορών στα ίδια σημεία και στις ίδιες ακμές. Το ενιαίο πλέγμα εξάγεται σε κατάλληλο αρχείο.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να αναλυθεί σε έξι στάδια. Αρχικά εισάγονται τα δεδομένα που προσδιορίζουν τη γεωμετρία του στερεού. Στη συνέχεια αυτά τα δεδομένα επεξεργάζονται και τροποποιούνται κατάλληλα έτσι ώστε να έρθουν στην μορφή την οποία χρησιμοποιεί το Delaundo. Σε αυτό το στάδιο δημιουργείται η τριγωνοποίηση για κάθε έδρα, βάσει της μεθόδου Frontal Delaunay, στις δυο διαστάσεις. Τα δεδομένα που εξάγει το Delaundo συλλέγονται και ύστερα από επεξεργασία επαναφέρονται στις τρεις διαστάσεις. Τέλος εξάγονται τα αποτελέσματα σε μορφή αρχείου ενός ενιαίου πλέον πλέγματος. Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά όλα τα βήματα της διαδικασίας.

5.2.1 Πρώτο Στάδιο - Είσοδος Δεδομένων

Για την παραγωγή μη δομημένου πλέγματος στην επιφάνεια ενός στερεού πρωτίστως απαιτείται η γεωμετρία του στερεού. Συνεπώς το πρώτο βήμα της διαδικασίας είναι ο καθορισμός αυτής της γεωμετρίας (**Εικόνα 5.2(a)**) και η δημιουργία ενός αρχείου εισόδου. Το αρχείο εισόδου αυτό είναι τύπου .dip και έχει συγκεκριμένη δομή (βλ. Παράρτημα II). Αρχικά το πρόγραμμα ζητά από τον χρήστη το όνομα του αρχείου τύπου .dip και στη συνέχεια, εφόσον αυτό υπάρχει, διαβάζει τα δεδομένα για την γεωμετρία του στερεού. Τα δεδομένα αυτά αποθηκεύονται σε κατάλληλες δομές. Οι κυριότερες δομές που χρησιμοποιούνται από τον κώδικα είναι οι συντεταγμένες όλων των σημείων που ορίζουν τις κορυφές του στερεού, τα ζεύγη σημείων που ορίζουν κάθε ακμή του στερεού και οι ακμές που ορίζουν κάθε επιφάνεια (δοσμένες με συγκεκριμένο προσανατολισμό).

Η διαδικασία αυτή στο πρόγραμμα εκτελείται από την υπορουτίνα *inputfile*. Σε αυτή την υπορουτίνα δίδεται από τον χρήστη το όνομα του αρχείου εισόδου και στη συνέχεια το αρχείο αυτό ανοίγεται και διαβάζονται ένα προς ένα τα δεδομένα που περιέχονται σε αυτό, αριθμός σημείων, συντεταγμένες, αριθμός ακμών και ούτω καθ' εξής.



Εικόνα 5.2: Στάδια παραγωγής μη δομημένου πλέγματος σε επίπεδες επιφάνειες με το πρόγραμμα Mesh

5.2.2 Δεύτερο Στάδιο - Διακριτοποίηση των Ακμών του Ορίου

Αφού το πρόγραμμα αναγνώσει τα δεδομένα εισόδου, στη συνέχεια ακολουθεί το στάδιο της διακριτοποίησης των ακμών κάθε έδρας (**Εικόνα 5.2(b)**). Σε αυτό το στάδιο εκτελείται ένας βρόχος ο οποίος σαρώνει μια προς μια τις επιφάνειες του στερεού ως προς τις ακμές και διαιρεί την κάθε ακμή σε ίσα τμήματα με γραμμική παρεμβολή.

Κάθε ακμή ορίζεται από τα δύο ακραία σημεία (κορυφές) της. Ξεκινώντας από αυτά, εκτελείται γραμμική παρεμβολή και λαμβάνονται για κάθε ακμή τα νέα εσωτερικά σημεία, που δημιουργούν τις νέες ακμές (υποδιαίρέσεις της αρχικής). Για τα νέα σημεία ενημερώνεται η δομή δεδομένων που αφορά στα σημεία, καθώς επίσης και αυτή των ακμών, κρατώντας για κάθε νέα ακμή σε κατάλληλη δομή τον πατέρα της (την αρχική ακμή από την οποία προήλθε) και στη συνέχεια τροποποιείται η δομή κάθε επιφάνειας, αφού πλέον αποτελείται από ένα μεγαλύτερο σύνολο σημείων και ακμών. Όλες αυτές οι λειτουργίες εκτελούνται στην υπορουτίνα *descrct*.

5.2.3 Τρίτο Στάδιο - Μετασχηματισμός στις Δύο Διαστάσεις

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το πρόγραμμα Delaundo έχει τη δυνατότητα δημιουργίας μη δομημένου πλέγματος μόνο σε επίπεδες επιφάνειες στο δισδιάστατο

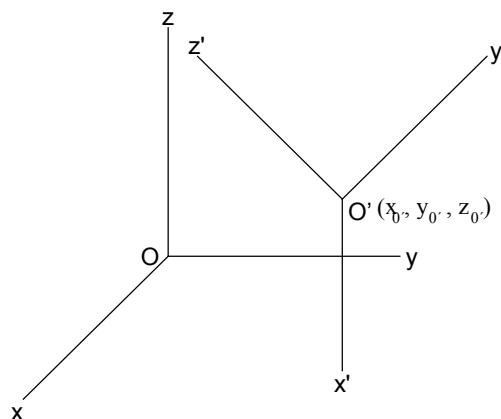
χώρο. Συνεπώς θα πρέπει να γίνει μετασχηματισμός των συντεταγμένων των σημείων από τις τρεις διαστάσεις στις δύο, έτσι ώστε κάθε επιφάνεια να περιγράφεται από δύο συντεταγμένες x και y (**Εικόνα 5.2(c)-(d)**). Στην ουσία ορίζεται ένα νέο τοπικό σύστημα αξόνων $x_I y_I z_I$ για κάθε έδρα του στερεού, όπου το επίπεδο $x_I y_I$ είναι αυτό που ορίζει η τρέχουσα έδρα, ενώ ο άξονας z_I είναι κάθετος σε αυτή.

Η διαδικασία για αυτόν τον μετασχηματισμό έχει ως εξής. Σε ένα βρόχο σαρώνονται όλες οι έδρες του στερεού. Υπολογίζονται τα μοναδιαία διανύσματα (συνημίτονα κατεύθυνσης) για κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων, με το k μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του z_I κάθετο στην επιφάνεια. Έτσι, αφού υπολογίζονται τα συνημίτονα κατεύθυνσης των νέων αξόνων ως προς τους παλιούς, στη συνέχεια, βάσει των εξισώσεων (5.1) για μετασχηματισμό συντεταγμένων σε μεταφορά και στροφή, υπολογίζονται οι καινούριες συντεταγμένες των σημείων όπου η συντεταγμένη z υπολογίζεται προφανώς ίση με μηδέν και παραλείπεται.

$$\begin{aligned}x' &= I_1 \cdot (x - x_0') + I_2 \cdot (y - y_0') + I_3 \cdot (z - z_0') \\y' &= J_1 \cdot (x - x_0') + J_2 \cdot (y - y_0') + J_3 \cdot (z - z_0') \\z' &= K_1 \cdot (x - x_0') + K_2 \cdot (y - y_0') + K_3 \cdot (z - z_0')\end{aligned}\quad (5.1)$$

Η αρχή O' του νέου συστήματος συντεταγμένων $x' y' z'$ έχει συντεταγμένες (x_0, y_0, z_0) ως προς το παλιό σύστημα συντεταγμένων xyz , ενώ (I_1, I_2, I_3) , (J_1, J_2, J_3) , (K_1, K_2, K_3) είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης των αξόνων x' , y' , z' ως προς τους άξονες x , y , z αντίστοιχα (**Εικόνα 5.3**).

Οι διαδικασίες που περιγράφηκαν προηγουμένως, στο πρόγραμμα εκτελούνται από τις ακόλουθες υπορουτίνες: Η *newaxes* καλείται για κάθε επιφάνεια και υπολογίζει τους αντίστοιχους νέους άξονες. Η *transform* καλείται μέσα στην *newaxes* και, χρησιμοποιώντας τους νέους άξονες που υπολογίστηκαν για κάθε επιφάνεια, μετασχηματίζει τα σημεία που την αποτελούν στο νέο τοπικό σύστημα συντεταγμένων.



Εικόνα 5.3: Μετασχηματισμός συντεταγμένων σε μεταφορά και στροφή

5.2.4 Τέταρτο Στάδιο - Παραγωγή μη Δομημένου Πλέγματος

Για την τριγωνοποίηση των επιφανειών στο **Mesh** έχει τροποποιηθεί κατάλληλα και ενσωματωθεί το πρόγραμμα Delaundo για παραγωγή μη δομημένου πλέγματος στις δύο διαστάσεις. Η υπορουτίνα Delaundo παράγει τριγωνικό πλέγμα σε κάθε επίπεδη επιφάνεια του στερεού (**Εικόνα 5.2(e)**). Η έξοδος αυτής της υπορουτίνας είναι ένα προσωρινό αρχείο .dpl που περιέχει τον αριθμό των τριγώνων της επιφάνειας, τις τρεις κορυφές κάθε τριγώνου, τον αριθμό των κόμβων και τις συντεταγμένες τους. Αυτά τα δεδομένα αποθηκεύονται σε κατάλληλες δομές δεδομένων για κάθε επιφάνεια (υπορουτίνα *readdpl*).

5.2.5 Πέμπτο Στάδιο - Αντίστροφος Μετασχηματισμός της Τριγωνοποιημένης Επιφάνειας από τις Δύο στις Τρεις Διαστάσεις

Βάσει των εξισώσεων (5.2) γίνεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός των συντεταγμένων των κορυφών του πλέγματος (**Εικόνα 5.2(f)**), από τις δύο διαστάσεις στις τρεις, με τη βοήθεια των συνημίτονων κατεύθυνσης που υπολογίστηκαν νωρίτερα για κάθε επιφάνεια.

$$\begin{aligned}x &= I_1 \cdot x' + J_1 \cdot y' + K_1 \cdot z' \\y &= I_2 \cdot x' + J_2 \cdot y' + K_2 \cdot z' \\z &= I_3 \cdot x' + J_3 \cdot y' + K_3 \cdot z'\end{aligned}\tag{5.2}$$

Οι συντεταγμένες όλων των σημείων, όλων των επιφανειών αποθηκεύονται σε μια ενιαία δομή δεδομένων, αποθηκεύοντας επίσης για κάθε σημείο την επιφάνεια στην οποία ανήκει και τη θέση του σε αυτή. Αυτές οι λειτουργίες εκτελούνται στην υπορουτίνα *rtransform*.

5.2.6 Έκτο Στάδιο - Επεξεργασία και Εξαγωγή Αποτελεσμάτων

Σε αυτό το στάδιο, τα δεδομένα που έχουν ληφθεί μεμονωμένα για κάθε επιφάνεια, πρέπει να επεξεργαστούν κατάλληλα και να αποθηκευτούν σε ενιαίες για όλες τις επιφάνειες δομές δεδομένων. Μέσα στην υπορουτίνα *points* ένας βρόχος σαρώνει όλα τα σημεία ελέγχοντας τις τρεις συντεταγμένες και διαγράφει από τη λίστα όποιο επαναλαμβάνεται, ενημερώνοντας τις δομές που αφορούν σε αυτό για τη νέα θέση στην οποία πρέπει να αναφέρονται. Αυτό απαιτείται διότι τα σημεία των ακμών και των κορυφών έχουν χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορές για την παραγωγή τριγώνων, μία φορά για κάθε διακριτή έδρα του στερεού.

Στη συνέχεια αποθηκεύονται σε μια ενιαία δομή όλα τα τρίγωνα όλων των επιφανειών και στη συνέχεια σαρώνονται για να βρεθούν τα γειτονικά σε κάθε τρίγωνο τρίγωνα, ψάχνοντας για τον εντοπισμό μιας και μόνο κοινής ακμής ανάμεσα σε δύο τρίγωνα. Για κάθε τρίγωνο αποθηκεύονται σε έναν πίνακα τα τρία γειτονικά του.

Τέλος τα αποτελέσματα εξάγονται σε ένα αρχείο με όνομα *output* σε format .dpl. Το αρχείο αυτό περιέχει τον αριθμό των τριγώνων, τις τρεις κορυφές που απαρτίζουν

κάθε ένα τρίγωνο, καθώς και τα τρία γειτονικά τρίγωνα για κάθε τρίγωνο, και στη συνέχεια τον αριθμό των κόμβων και τις τρεις συντεταγμένες κάθε κόμβου. Περισσότερα για τη δομή των αρχείων αυτού του τύπου στο Παράρτημα II.

5.3 Λογισμικό Delaundo για την Παραγωγή μη Δομημένου Πλέγματος σε Επιφάνειες στις Δύο Διαστάσεις

Το λογισμικό Delaundo δημιουργεί τριγωνικό πλέγμα βασισμένο στη μέθοδο Frontal Delaunay (Method-FroD). Ο αλγόριθμος παραγωγής μη δομημένου πλέγματος που υιοθετείται είναι ο Bowyer-Watson, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του περιγεγραμμένου κύκλου. Η ασάφεια που οφείλεται στο σφάλμα στρογγυλοποίησης αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας διπλής ακρίβειας συντεταγμένες και ακτίνες. Αυτό οδηγεί σε μια ορισμένη ελάχιστη απόσταση κόμβων που πρέπει να ξεπεραστεί, προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι το πάχος του κύκλου θα παραμένει μικρό σε σύγκριση με την ακτίνα. Αυτή η ελάχιστη απόσταση υπολογίζεται ως $10E-10$ φορές τη μέγιστη-απόσταση στα x ή y .

Το λογισμικό Delaundo εξετάστηκε και αναλύθηκε εκτενώς, ώστε να μπορέσει να τροποποιηθεί κατάλληλα και να ενσωματωθεί στον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε. Επίσης αναπτύχθηκε και κατάλληλος οδηγός χρήσης των υπορουτινών του, για τη διευκόλυνση μελλοντικών χρηστών του λογισμικού. Για να μην ανακύψει ανάγκη μεγάλων τροποποιήσεων στον κώδικα, τα δεδομένα για κάθε διαφορετική έδρα εισάγονται στο λογισμικό Delaundo μέσω των τυποποιημένων αρχείων του προγράμματος. Με τον ίδιο τρόπο γίνεται και η διαχείριση των αποτελεσμάτων του πλέγματος που παράγεται για κάθε έδρα του στερεού.

5.4 Τύποι Αρχείων που Χρησιμοποιούνται στο Πρόγραμμα

5.4.1 Αρχείο Εισόδου Τύπου .dip

Τα αρχεία τύπου .dip είναι αρχεία εισόδου, που περιέχουν πληροφορίες για την γεωμετρία του στερεού. Περιέχουν το πλήθος των κόμβων, τις συντεταγμένες τους, το πλήθος των ακμών, τους κόμβους που αποτελούν κάθε ακμή, το πλήθος των επιφανειών, το πλήθος των ορίων που ορίζουν κάθε επιφάνεια, το πλήθος των ακμών που ορίζουν κάθε όριο και τέλος τις ακμές που το αποτελούν. Το πρόγραμμα **Mesh** κατά την εκτέλεση του χρειάζεται απαραίτητα ένα τέτοιο αρχείο, το όνομα του οποίου δίνεται από τον χρήστη και πρέπει να περιέχει μέχρι 9 γράμματα το πολύ και την επέκταση .dip. Οι πληροφορίες που περιέχονται σε κάθε αρχείο .dip είναι οι ακόλουθες:

- Πλήθος των κόμβων που περιγράφουν το στερεό.
- Συντεταγμένες x , y , z των κόμβων που το πλήθος τους πρέπει να συμφωνεί με το πλήθος των κόμβων που δόθηκε παραπάνω.
- Πλήθος των ακμών που ορίζουν στο στερεό.
- Ο πρώτος κόμβος και ο δεύτερος κόμβος της κάθε ακμής.

- Πλήθος των επιφανειών που αποτελούν το στερεό.
- Πλήθος των ορίων της επιφάνειας.
- Πλήθος των ακμών κάθε ορίου της επιφάνειας.
- Με τη σειρά και με προσανατολισμό οι ακμές που αποτελούν κάθε όριο της επιφάνειας.

Στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II δίνεται ένα παράδειγμα αρχείου τύπου .dip.

5.4.2 Αρχείο Καθορισμού Παραμέτρων Τύπου .ctr

Ένα αρχείο .ctr προσδιορίζει τον τρόπο με τον οποίο το λογισμικό Delaundo θα χειριστεί τους κόμβους που λαμβάνονται από ένα αρχείο .pts. Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί αρχείο .ctr, καθώς μπορεί όλα τα δεδομένα του να δοθούν από το πληκτρολόγιο. Με τη χρήση του αρχείου αυτοματοποιείται η όλη διαδικασία. Εντούτοις, δεδομένου ότι η FroD είναι σχετικά γρήγορη μέθοδος παραγωγής πλέγματος, το να παίζει κανείς με τις παραμέτρους δίνει τη δυνατότητα να καταλάβει πως συμπεριφέρεται η FroD. Η χρησιμοποίηση ενός αρχείου .ctr καθιστά την παραπάνω διαδικασία ιδιαίτερα εύκολη. Περισσότερες πληροφορίες για τη δομή των αρχείων αυτού του τύπου δίνονται στο Παράρτημα II.

5.4.3 Αρχείο Εισόδου Τύπου .pts

Ένα αρχείο .pts παρέχει τις πληροφορίες γεωμετρίας με τις οποίες αρχίζει το λογισμικό delaundo. Η γεωμετρία χωρίζεται σε τμήματα, τα οποία δίνονται από διατεταγμένα σύνολα οριακών κόμβων, κατά προτίμηση με το πεδίο αναφοράς στα αριστερά. Τα τμήματα συνδέονται με άλλα τμήματα στα τέλη τους ή ενδεχομένως με τον εαυτό τους. Οι κοινοί κόμβοι, όπου συνδέονται τα τμήματα, μπαίνουν στις λίστες και των δύο τμημάτων. Περισσότερες πληροφορίες για τη δομή των αρχείων αυτού του τύπου δίνονται στο Παράρτημα II.

5.4.4 Αρχείο Εξόδου Τύπου .dpl

Η μορφή αρχείων .dpl είναι η προτιμώμενη μορφή εξόδου για το λογισμικό Delaundo. Είναι ένα μάλλον συμπαγές αρχείο ASCII, που μπορεί να διαβαστεί στα λογισμικά σχεδίασης dplot και xcfd. Περισσότερες πληροφορίες για τη δομή των αρχείων αυτού του τύπου δίνονται στο Παράρτημα II.

5.5 Εφαρμογές του λογισμικού σε περιπτώσεις στερεών

Στη συνέχεια παρουσιάζονται επτά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση του λογισμικού **Mesh**, καθώς και για την επιβεβαίωση της ορθής λειτουργία του λογισμικού. Λόγω ελλείψεως χώρου, δίδεται σε κάθε περίπτωση μία όψη του πλέγματος που εξήχθη από το λογισμικό.

Παράδειγμα 1

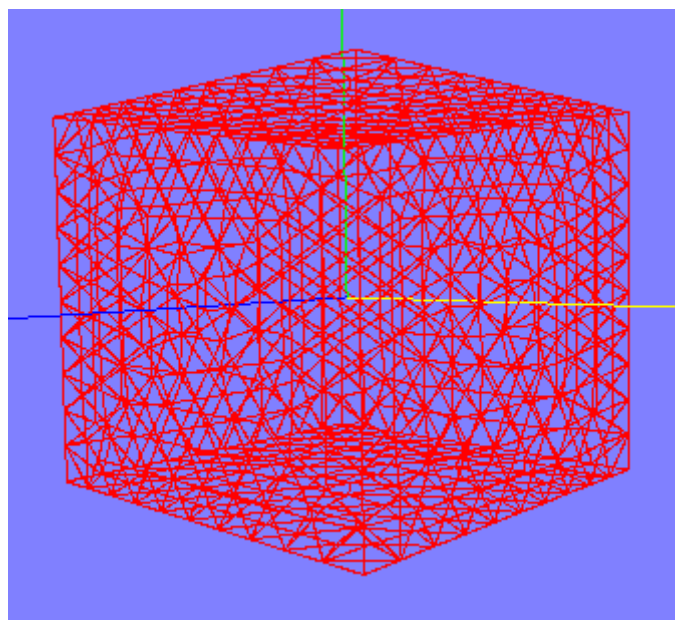
Αρχικά για την ανάπτυξη του λογισμικού χρησιμοποιήθηκε ως «test case» ένα απλό γεωμετρικό στερεό, ο κύβος. Ως δεδομένα εισόδου δόθηκαν οι συντεταγμένες των οκτώ κορυφών του, οι δώδεκα πλευρές του, δίνοντας τα δύο σημεία από τα οποία αποτελείται η κάθε μια και οι έξι επιφάνειες (δεδομένων των τεσσάρων ακμών που τις αποτελούν). Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι όλες οι επιφάνειες του κύβου είναι απλές και αποτελούνται μόνο από ένα όριο. Στη συνέχεια θα δοθούν παραδείγματα με επιφάνειες που αποτελούνται από περισσότερα όρια. Στη συνέχεια δίνεται η μορφή του αρχείου .dip που χρησιμοποιήθηκε ως είσοδος στο λογισμικό **Mesh**.

```

8                (ο αριθμός των κορυφών του στερεού)
0.0 0.0 0.0      (οι συντεταγμένες των κορυφών)
1.0 0.0 0.0
1.0 1.0 0.0
0.0 1.0 0.0
0.0 0.0 1.0
1.0 0.0 1.0
1.0 1.0 1.0
0.0 1.0 1.0
12              (ο αριθμός των ακμών του στερεού)
1 2             (τα δύο σημεία από τα οποία αποτελείται η κάθε ακμή)
2 3
3 4
4 1
5 6
6 7
7 8
8 5
1 5
2 6
3 7
4 8
6              (ο αριθμός των -επίπεδων- επιφανειών του στερεού)
1              (ο αριθμός των ορίων που αποτελούν την πρώτη επιφάνεια)
4              (ο αριθμός των ακμών που αποτελούν το κάθε όριο της επιφάνειας)
1 2 3 4        (οι ακμές από τις οποίες αποτελείται το κάθε όριο της επιφάνειας)
1
4
5 8 7 6
1
4
1 9 5 10
1
4
2 10 6 11
1
4
3 11 7 12
    
```

1
4
4 12 8 9

Το πρόγραμμα αποθηκεύει σε κατάλληλες δομές όλα αυτά τα δεδομένα. Αρχικά γίνεται η διακριτοποίηση της κάθε ακμής σε δέκα ίσα τμήματα, έπειτα γίνεται ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων όλων των σημείων από τις τρεις στις δύο διαστάσεις και ακολουθεί το στάδιο της τριγωνοποίησης με τη χρήση του λογισμικού delaundo. Οι συντεταγμένες των παλιών σημείων και των νέων, που δημιουργήθηκαν με την τριγωνοποίηση, επαναφέρονται στις τρεις διαστάσεις και αφού επεξεργαστούν κατάλληλα τα αποτελέσματα εξάγονται σε αρχείο μορφής .dpl. Το αρχείο αυτό με την βοήθεια κατάλληλου προγράμματος (όπως του Mesh Viewer που χρησιμοποιήθηκε εδώ) εμφανίζει το πλεγματοποιημένο στερεό. Στην **Εικόνα 5.4** δίνεται ο κύβος με το πλέγμα που έχει παραχθεί όπως φαίνεται στο **Mesh Viewer**.



Εικόνα 5.4: Πλέγμα στο στερεό του παραδείγματος 1

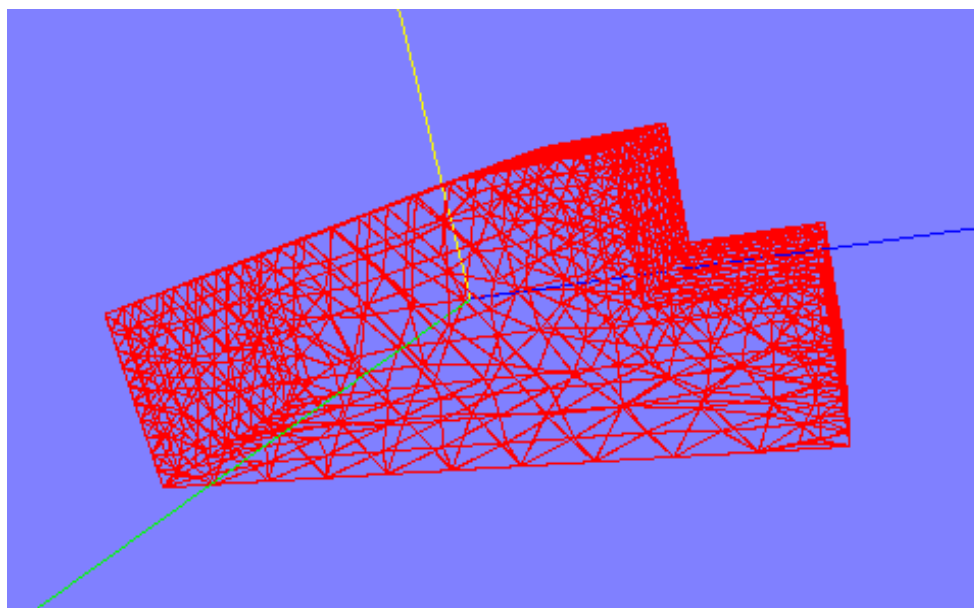
Παράδειγμα 2

Το δεύτερο παράδειγμα είναι ένα στερεό με απλές επιφάνειες (αποτελούμενες από ένα όριο η κάθε μια) αλλά πιο πολύπλοκη γεωμετρία. Η γεωμετρία του ορίζεται από περισσότερες κορυφές, ακμές και επιφάνειες. Δίνεται το αρχείο εισόδου που χρησιμοποιήθηκε καθώς επίσης και η **Εικόνα 5.5** που παρουσιάζει το πλέγμα σε αυτό το στερεό.

14	(ο αριθμός των κορυφών του στερεού)
0.0 0.0 5.0	(οι συντεταγμένες των κορυφών)
0.0 0.0 0.0	
1.5 0.0 0.0	
2.0 0.0 3.0	
2.0 0.0 4.0	

1.0 0.0 4.0
 1.0 0.0 5.0
 0.0 2.0 0.0
 1.5 2.0 0.0
 2.0 2.0 3.0
 2.0 2.0 4.0
 1.0 2.0 4.0
 1.0 2.0 5.0
 0.0 2.0 5.0
 21 (ο αριθμός των ακμών του στερεού)
 1 2 (τα δύο σημεία από τα οποία αποτελείται η κάθε ακμή)
 2 3
 3 4
 4 5
 5 6
 6 7
 7 1
 14 8
 8 9
 9 10
 10 11
 11 12
 12 13
 13 14
 1 14
 7 13
 6 12
 5 11
 4 10
 3 9
 2 8
 9 (ο αριθμός επιφανειών του στερεού)
 1 (ο αριθμός των ορίων που αποτελούν την πρώτη επιφάνεια)
 7 (ο αριθμός των ακμών που αποτελούν το κάθε όριο της επιφάνειας)
 1 2 3 4 5 6 7 (οι ακμές από τις οποίες αποτελείται το όριο της επιφάνειας)
 1
 7
 8 14 13 12 11 10 9
 1
 4
 1 15 8 21
 1
 4
 15 7 16 14
 1
 4
 16 6 17 13
 1
 4
 17 5 18 12

1
4
18 4 19 11
1
4
19 3 20 10
1
4
20 2 21 9



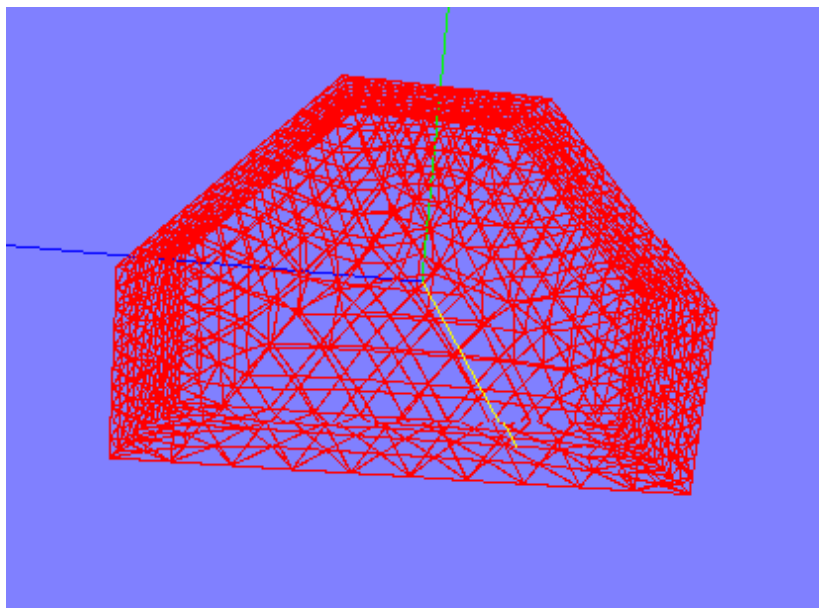
Εικόνα 5.5: Πλέγμα στο στερεό του παραδείγματος 2

Παράδειγμα 3

Στο 3^ο παράδειγμα παρουσιάζεται άλλο ένα γεωμετρικό στερεό με απλές επιφάνειες και διαφορετική γεωμετρία που αποτελείται από δώδεκα κορυφές, δεκαοκτώ ακμές και οκτώ επιφάνειες. Όμοια με πριν δίνεται το αρχείο εισόδου και η **Εικόνα 5.6** που παρουσιάζει το πλέγμα που παράχθηκε.

12	(ο αριθμός των κορυφών του στερεού)
0.0 0.0 0.0	(οι συντεταγμένες των κορυφών)
0.0 0.0 6.0	
2.0 0.0 6.0	
2.0 0.0 0.0	
0.0 2.0 0.0	
0.0 2.0 6.0	
2.0 2.0 6.0	
2.0 2.0 0.0	
0.0 4.0 2.0	
0.0 4.0 4.0	
2.0 4.0 4.0	
2.0 4.0 2.0	

18	(ο αριθμός των ακμών του στερεού)
1 2	(τα δύο σημεία από τα οποία αποτελείται η κάθε ακμή)
3 2	
4 3	
1 4	
1 5	
2 6	
3 7	
4 8	
5 8	
5 9	
9 12	
12 8	
7 6	
6 10	
10 11	
11 7	
10 9	
11 12	
8	(ο αριθμός επιφανειών του στερεού)
1	(ο αριθμός των ορίων που αποτελούν την πρώτη επιφάνεια)
4	(ο αριθμός των ακμών που αποτελούν το κάθε όριο της επιφάνειας)
1 2 3 4	(οι ακμές από τις οποίες αποτελείται το κάθε όριο της επιφάνειας)
1	
4	
4 8 9 5	
1	
4	
2 6 13 7	
1	
4	
13 14 15 16	
1	
4	
9 12 11 10	
1	
4	
11 18 15 17	
1	
6	
3 7 16 18 12 8	
1	
6	
5 10 17 14 6 1	



Εικόνα 5.6: Πλέγμα στο στερεό του παραδείγματος 3

Παράδειγμα 4

Στο παράδειγμα 4 παρουσιάζεται ένα πιο πολύπλοκο στερεό με έντεκα επιφάνειες η μία από τις οποίες αποτελείται από δύο όρια. Τα όρια στην επιφάνεια πρέπει να προσανατολίζονται αντίστροφα. Στην **Εικόνα 5.7** δίνεται τριγωνοποιημένη ξεχωριστά αυτή η επιφάνεια.

Το αρχείο εισόδου που χρησιμοποιήθηκε είναι το ακόλουθο:

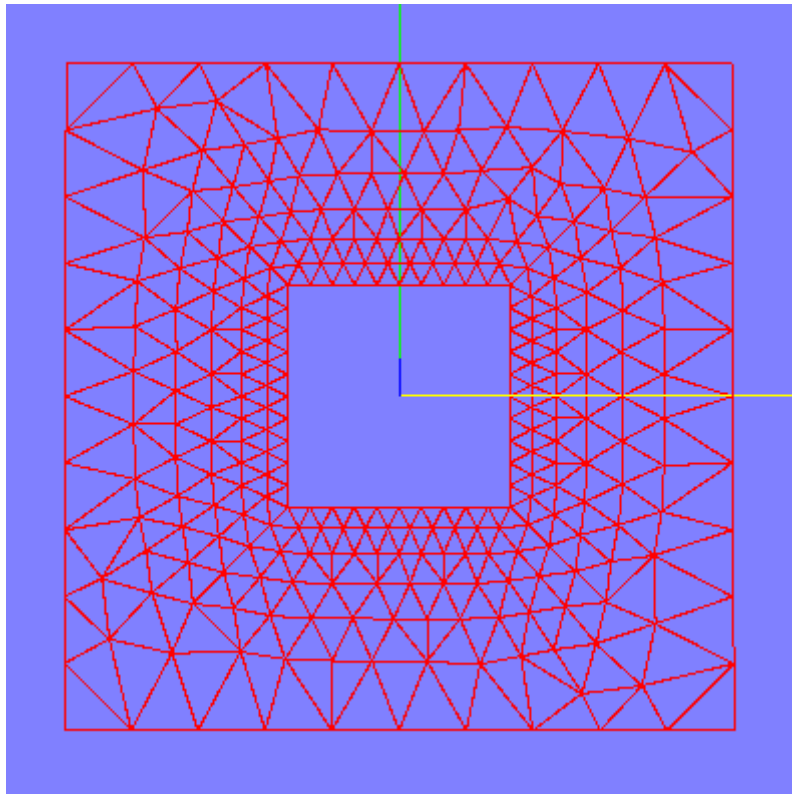
```

16          (ο αριθμός των κορυφών του στερεού)
0.0 0.0 0.0  (οι συντεταγμένες των κορυφών)
1.0 0.0 0.0
1.0 6.0 0.0
0.0 6.0 0.0
0.0 0.0 6.0
1.0 0.0 6.0
1.0 6.0 6.0
0.0 6.0 6.0
1.0 2.0 2.0
2.0 2.0 2.0
2.0 4.0 2.0
1.0 4.0 2.0
1.0 2.0 4.0
2.0 2.0 4.0
2.0 4.0 4.0
1.0 4.0 4.0
24          (ο αριθμός των ακμών του στερεού)
2 1          (τα δύο σημεία από τα οποία αποτελείται η κάθε ακμή)
2 3
3 4
4 1
    
```

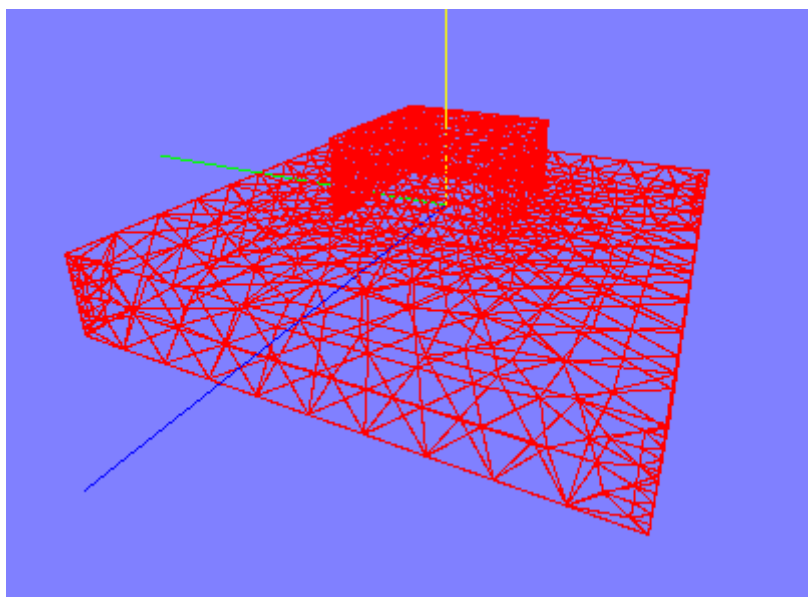
6 5
 6 7
 7 8
 8 5
 1 5
 2 6
 3 7
 4 8
 10 9
 10 11
 12 11
 12 9
 14 13
 14 15
 15 16
 16 13
 13 9
 14 10
 15 11
 16 12
 11 (ο αριθμός επιφανειών του στερεού)
 1 (ο αριθμός των ορίων που αποτελούν την πρώτη επιφάνεια)
 4 (ο αριθμός των ακμών που αποτελούν το κάθε όριο της επιφάνειας)
 1 4 3 2 (οι ακμές από τις οποίες αποτελείται το κάθε όριο της επιφάνειας)
 1
 4
 3 12 7 11
 1
 4
 7 8 5 6
 1
 4
 5 9 1 10
 1
 4
 4 9 8 12
 2
 4 4
 2 11 6 10
 16 21 20 24
 1
 4
 13 16 15 14
 1
 4
 14 23 18 22
 1
 4
 23 15 24 19
 1

4
19 20 17 18
1
4
17 21 13 22

και το αποτέλεσμα της τριγωνοποίησης δίδεται στην **Εικόνα 5.8**.



Εικόνα 5.7: Πλέγμα σε επιφάνεια που αποτελείται από δύο όρια του στερεού του παραδείγματος 4



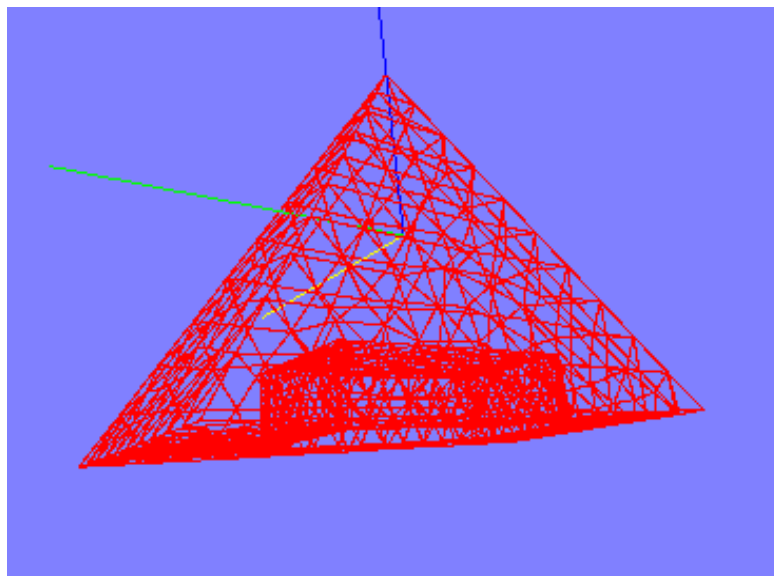
Εικόνα 5.8: Πλέγμα στο στερεό του παραδείγματος 4

Παράδειγμα 5

Το επόμενο στερεό έχει μορφή πυραμίδας με μία εσοχή στη βάση της. Αποτελείται από τέσσερις τριγωνικές επιφάνειες και μία ορθογώνια βάση που αποτελείται από δύο όρια καθώς παρουσιάζει ορθογώνια εσοχή. Στη συνέχεια δίνεται το αρχείο εισόδου που περιγράφει τη γεωμετρία του και η **Εικόνα 5.9** που παρουσιάζει το πλέγμα στο στερεό.

13	(ο αριθμός των κορυφών του στερεού)
0.0 8.0 0.0	(οι συντεταγμένες των κορυφών)
0.0 0.0 0.0	
4.0 0.0 0.0	
4.0 8.0 0.0	
2.0 4.0 6.0	
1.0 6.0 0.0	
1.0 2.0 0.0	
3.0 2.0 0.0	
3.0 6.0 0.0	
1.0 6.0 1.0	
1.0 2.0 1.0	
3.0 2.0 1.0	
3.0 6.0 1.0	
20	(ο αριθμός των ακμών του στερεού)
1 2	(τα δύο σημεία από τα οποία αποτελείται η κάθε ακμή)
3 2	
4 3	
4 1	
1 5	
2 5	
3 5	
4 5	
7 6	
7 8	
8 9	
9 6	
10 11	
11 12	
13 12	
13 10	
10 6	
7 11	
8 12	
13 9	
10	(ο αριθμός επιφανειών του στερεού)
2	(ο αριθμός των ορίων που αποτελούν την πρώτη επιφάνεια)
4 4	(ο αριθμός των ακμών που αποτελούν το κάθε όριο της επιφάνειας)
1 2 3 4	(οι ακμές από τις οποίες αποτελείται το κάθε όριο της επιφάνειας)
9 12 11 10	
1	
3	

5 6 1
 1
 3
 8 5 4
 1
 3
 3 7 8
 1
 3
 2 6 7
 1
 4
 19 14 18 10
 1
 4
 15 19 11 20
 1
 4
 20 12 17 16
 1
 4
 17 9 18 13
 1
 4
 13 14 15 16



Εικόνα 5.9: Πλέγμα στο στερεό του παραδείγματος 5

Παράδειγμα 6

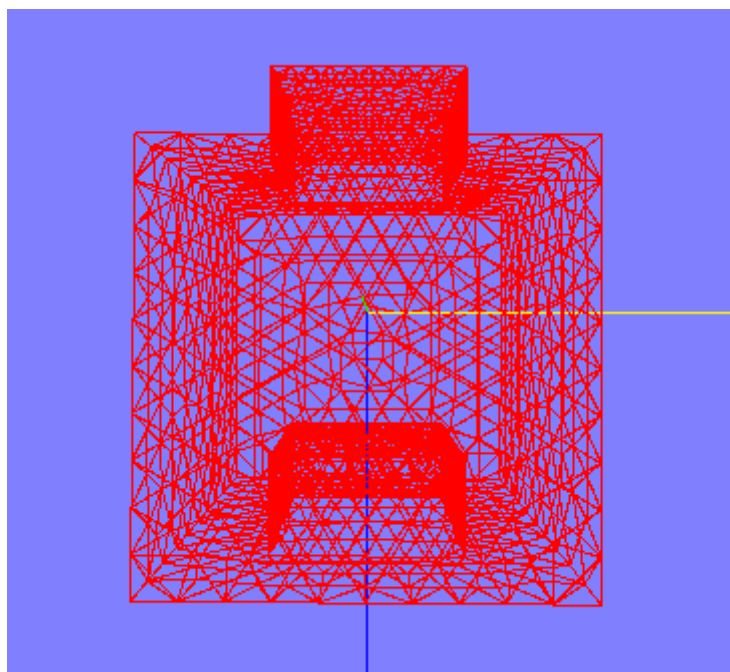
Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα στερεό που δύο από τις επιφάνειες του αποτελούνται από δύο όρια. Το στερεό είναι ένα κύβος που στη βάση του έχει μια εσοχή ενώ στην απέναντι από αυτή επιφάνεια παρουσιάζει μια προεξοχή. Στο αρχείο εισόδου δίνονται οι συντεταγμένες των είκοσι τεσσάρων κορυφών, καθώς επίσης και οι τριάντα έξι ακμές και οι δέκα έξι επιφάνειες.

24	(ο αριθμός των κορυφών του στερεού)
0.0 0.0 0.0	(οι συντεταγμένες των κορυφών)
0.0 0.0 4.0	
4.0 0.0 4.0	
4.0 0.0 0.0	
0.0 4.0 0.0	
0.0 4.0 4.0	
4.0 4.0 4.0	
4.0 4.0 0.0	
3.0 1.0 0.0	
1.0 1.0 0.0	
1.0 3.0 0.0	
3.0 3.0 0.0	
3.0 1.0 -1.0	
1.0 1.0 -1.0	
1.0 3.0 -1.0	
3.0 3.0 -1.0	
3.0 1.0 4.0	
1.0 1.0 4.0	
1.0 3.0 4.0	
3.0 3.0 4.0	
3.0 1.0 3.0	
1.0 1.0 3.0	
1.0 3.0 3.0	
3.0 3.0 3.0	
36	(ο αριθμός των ακμών του στερεού)
1 2	(τα δύο σημεία από τα οποία αποτελείται η κάθε ακμή)
2 3	
3 4	
1 4	
5 6	
6 7	
8 7	
8 5	
1 5	
2 6	
3 7	
4 8	
9 10	
10 11	
12 11	
12 9	

14 13
 14 15
 15 16
 16 13
 9 13
 14 10
 15 11
 12 16
 17 18
 18 19
 19 20
 17 20
 21 22
 22 23
 23 24
 24 21
 17 21
 22 18
 23 19
 20 24
 16 (ο αριθμός επιφανειών του στερεού)
 1 (ο αριθμός των ορίων που αποτελούν την πρώτη επιφάνεια)
 4 (ο αριθμός των ακμών που αποτελούν το κάθε όριο της επιφάνειας)
 1 2 3 4 (οι ακμές από τις οποίες αποτελείται το κάθε όριο της επιφάνειας)
 1
 4
 7 6 5 8
 2
 4 4
 4 12 8 9
 16 13 14 15
 1
 4
 9 5 10 1
 2
 4 4
 10 6 11 2
 28 27 26 25
 1
 4
 11 7 12 3
 1
 4
 24 20 21 16
 1
 4
 15 23 19 24
 1
 4
 23 14 22 18


```
1
4
22 13 21 17
1
4
17 20 19 18
1
4
33 32 36 28
1
4
25 34 29 33
1
4
34 26 35 30
1
4
35 27 36 31
1
4
31 32 29 30
```

Η **Εικόνα 5.10** δίνει το στερεό που περιγράφηκε παραπάνω με το πλέγμα που παράχθηκε από το πρόγραμμα.



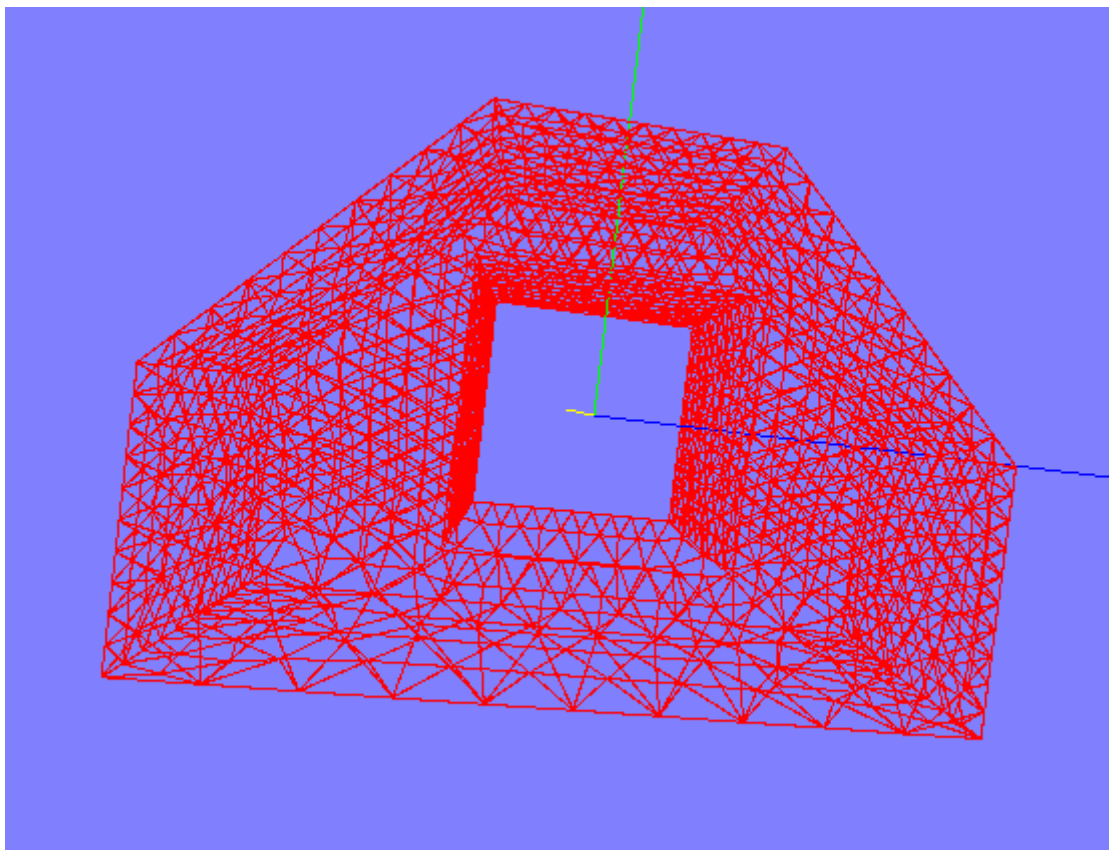
Εικόνα 5.10: Πλέγμα στο στερεό του παραδείγματος 6

Παράδειγμα 7

Το τελευταίο παράδειγμα που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό είναι το στερεό που περιγράφηκε στο παράδειγμα 3 με μια τετράγωνη οπή στο κέντρο, η οποία αποτελείται από τρεις επιφάνειες. Αποτελείται από είκοσι κορυφές, τριάντα ακμές και έντεκα επιφάνειες. Δίνεται το αρχείο εισόδου που χρησιμοποιήθηκε και στην **Εικόνα 5.11** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που έδωσε το πρόγραμμα.

20	(ο αριθμός των κορυφών του στερεού)
0.0 0.0 0.0	(οι συντεταγμένες των κορυφών)
0.0 0.0 6.0	
2.0 0.0 6.0	
2.0 0.0 0.0	
0.0 2.0 0.0	
0.0 2.0 6.0	
2.0 2.0 6.0	
2.0 2.0 0.0	
0.0 4.0 2.0	
0.0 4.0 4.0	
2.0 4.0 4.0	
2.0 4.0 2.0	
0.0 1.0 2.0	
0.0 1.0 4.0	
2.0 1.0 4.0	
2.0 1.0 2.0	
0.0 3.0 2.0	
0.0 3.0 4.0	
2.0 3.0 4.0	
2.0 3.0 2.0	
30	(ο αριθμός των ακμών του στερεού)
1 2	(τα δύο σημεία από τα οποία αποτελείται η κάθε ακμή)
3 2	
4 3	
1 4	
1 5	
2 6	
3 7	
4 8	
5 8	
5 9	
9 12	
12 8	
7 6	
6 10	
10 11	
11 7	
10 9	
11 12	
13 14	
14 15	

15 16
 13 16
 17 18
 18 19
 19 20
 20 17
 13 17
 14 18
 15 19
 20 16
 11 (ο αριθμός επιφανειών του στερεού)
 1 (ο αριθμός των ορίων που αποτελούν την πρώτη επιφάνεια)
 4 (ο αριθμός των ακμών που αποτελούν το κάθε όριο της επιφάνειας)
 1 2 3 4 (οι ακμές από τις οποίες αποτελείται το κάθε όριο της επιφάνειας)
 1
 4
 4 8 9 5
 1
 4
 2 6 13 7
 1
 4
 13 14 15 16
 1
 4
 9 12 11 10
 1
 4
 11 18 15 17
 2
 6 4
 3 7 16 18 12 8
 21 30 25 29
 2
 6 4
 5 10 17 14 6 1
 19 28 23 27
 1
 4
 23 24 25 26
 1
 4
 20 29 24 28
 1
 4
 22 27 26 30



Εικόνα 5.11: Πλέγμα στο στερεό του παραδείγματος 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΗ ΔΟΜΗΜΕΝΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ MESH

6.1 Εισαγωγή

Γενικά, μια δεδομένη επιφάνεια ορίζεται ως ένα σύνολο σημείων, που τη περιγράφουν σε μια κανονική σειρά. Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι δυνατό να καθοριστεί η επιφάνεια με τη βοήθεια δύο παραμετρικών συντεταγμένων (u, v) όπου κάθε ζευγάρι περιγράφει ένα σημείο στην επιφάνεια. Με αυτήν την περιγραφή μιας επιφάνειας είναι δυνατό να κατασκευαστούν πλέγματα στις επιφάνειες με τη χρησιμοποίηση 2D τεχνικών, οι οποίες εφαρμόζονται στις παραμετρικές συντεταγμένες. Το τελικό πλέγμα στην επιφάνεια λαμβάνεται έπειτα από τη μετάβαση από τον παραμετρικό στον φυσικό χώρο. Οι συνδέσεις των σημείων παραμένουν σταθερές μέσω του μετασχηματισμού.

6.2 Παραγωγή Πλέγματος σε Καμπύλες Επιφάνειες NURBS

Η δομή του προγράμματος για παραγωγή πλέγματος σε καμπύλες επιφάνειες βασίζεται στην ίδια λογική που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 5 για παραγωγή πλέγματος σε επίπεδες επιφάνειες. Στην **Εικόνα 6.1** δίνεται σχηματικά αυτή η δομή.

Οι υπορουτίνες που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα για την τριγωνοποίηση καμπύλων επιφανειών είναι οι εξής:

SURFFILE: Διαβάζει ένα αρχείο εισόδου τύπου .nbs με τις παραμέτρους της NURBS επιφάνειας και ένα αρχείο εισόδου τύπου .dir για τις παραμέτρους της καμπύλης που ορίζει το όριο της τριγωνοποίησης.

WRITECTR: Δημιουργεί ένα αρχείο τύπου .ctr.

FINDUV: Υπολογίζει τις παραμετρικές συντεταγμένες (u, v) ενός σημείου της επιφάνειας με συντεταγμένες (x, y, z).

WRITESPTS: Δημιουργεί ένα αρχείο .pts, το οποίο περιέχει πληροφορίες με τις οποίες ξεκινά το Delaundo.

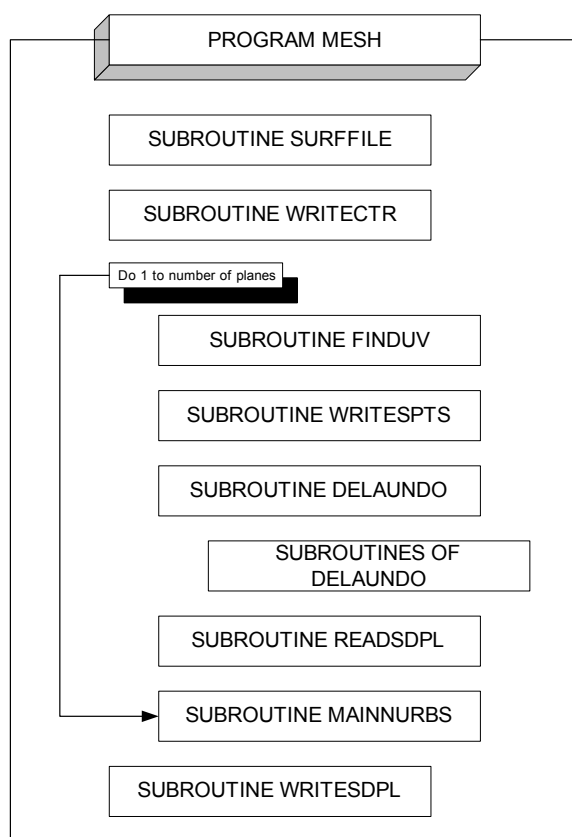
DELAUNDO: Εκτελεί την τριγωνοποίηση Delaunay με βάση δεδομένο σύνολο οριακών σημείων (βλ. § 5.1).

ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΕΣ ΤΟΥ DELAUNDO: Το Delaundo αποτελείται από 64 subroutines, 4 real functions, 3 functions και 2 integer functions. Πληροφορίες για τις υπορουτίνες και τις συναρτήσεις που χρησιμοποιεί δίνονται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι.

READSDPL: Διαβάζει για κάθε επιφάνεια το .dpl αρχείο που εξάγει το Delaundo και κρατάει τον αριθμό των τριγώνων, τις τρεις κορυφές που διαμορφώνουν κάθε τρίγωνο, τον αριθμό των κόμβων και τις παραμετρικές συντεταγμένες u, v κάθε κόμβου.

MAINNURBS: Μετασχηματίζει τις παραμετρικές συντεταγμένες (u, v) που λαμβάνονται από το Delaundo στον φυσικό χώρο (x, y, z) .

WRITESDPL: Γράφει ένα τελικό .dpl αρχείο που περιέχει πληροφορίες για τα τρίγωνα, τα γειτονικά σε αυτά τρίγωνα και τους κόμβους όλων των πλευρών του στερεού.



Εικόνα 6.1: Δομή του προγράμματος Mesh για παραγωγή πλέγματος σε καμπύλες επιφάνειες

6.2.1 Στάδια Παραγωγής μη Δομημένου Πλέγματος σε καμπύλες επιφάνειες NURBS με το Πρόγραμμα Mesh

Η διαδικασία παραγωγής μη δομημένου πλέγματος σε καμπύλες επιφάνειες με βάση το πρόγραμμα **Mesh** είναι παρόμοια με αυτή που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 5, που αφορά σε επίπεδες επιφάνειες. Αρχικά εισάγονται τα χαρακτηριστικά της NURBS επιφάνειας και τα δεδομένα που προσδιορίζουν τη γεωμετρία της καμπύλης που βρίσκεται πάνω σε αυτή την επιφάνεια και θα αποτελέσει το όριο της

τριγωνοποίησης (**Εικόνα 6.2(a)**). Οι συντεταγμένες που περιγράφουν το όριο δίδονται στις φυσικές συντεταγμένες x, y, z . Στη συνέχεια, γίνεται ο μετασχηματισμός της οριακής καμπύλης (ή των οριακών καμπυλών) από τον φυσικό χώρο στον παραμετρικό (**Εικόνα 6.2(b)**), έτσι ώστε να περιγράφεται από δύο συντεταγμένες που μπορεί να χρησιμοποιήσει το λογισμικό Delaunay. Δημιουργείται έπειτα η τριγωνοποίηση, βάσει της μεθόδου Frontal Delaunay (**Εικόνα 6.2(c)**), στο παραμετρικό επίπεδο και τα δεδομένα που εξάγονται μετασχηματίζονται στις τρεις διαστάσεις (**Εικόνα 6.2(d)**). Τέλος εξάγονται τα αποτελέσματα σε μορφή αρχείου τύπου .dpl.

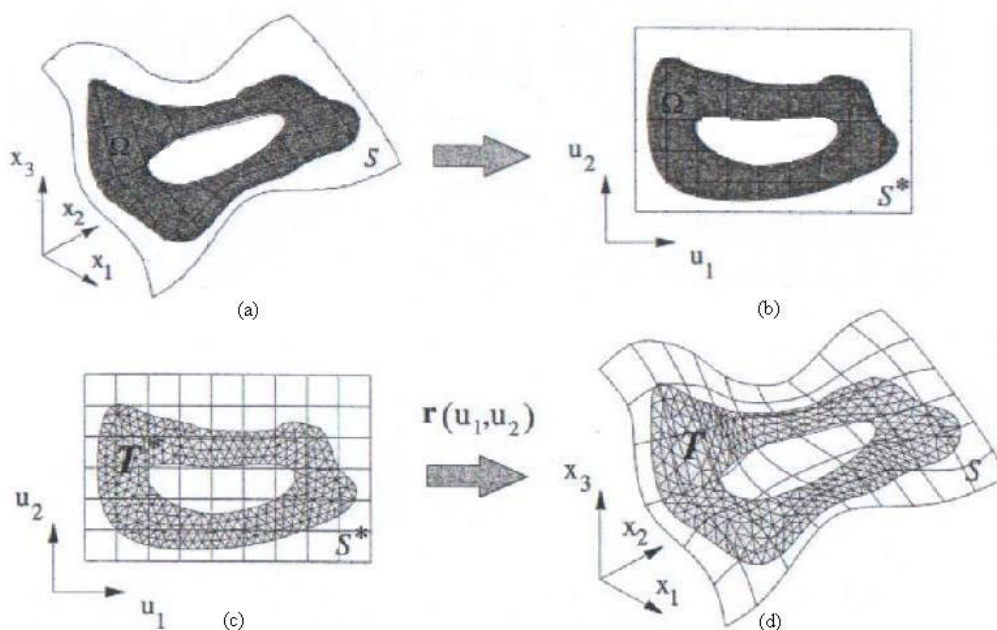
6.2.1.1 Είσοδος Δεδομένων

Οι επιφάνειες που μπορεί να διαχειρίζεται το λογισμικό είναι επιφάνειες NURBS. Για την περιγραφή μιας επιφάνειας NURBS απαιτούνται τα ακόλουθα στοιχεία:

- Ο αριθμός των σημείων ελέγχου στις δύο διευθύνσεις u, v .
- Οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου.
- Το βάρος κάθε σημείου ελέγχου.
- Ο βαθμός της καμπύλης σε κάθε διεύθυνση u, v .

Στην υπορουτίνα *surffile* ζητείται αρχικά το όνομα κάποιου αρχείου τύπου .nbs που περιέχει τα παραπάνω στοιχεία που περιγράφουν την επιφάνεια.

Η περιοχή που θα πλεγματοποιηθεί πάνω στην επιφάνεια NURBS περιορίζεται από κάποιες οριακές καμπύλες (**Εικόνα 6.2(a)**). Οι καμπύλες αυτές ανήκουν στην επιφάνεια και περιγράφονται στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων από ένα σύνολο σημείων, τις φυσικές συντεταγμένες τους και τις ακμές που ορίζουν. Όλα αυτά περιέχονται (για κάθε οριακή καμπύλη) σε ένα αρχείο τύπου .dip. Το αρχείο εισόδου τύπου .dip έχει τη δομή που περιγράφηκε στη παράγραφο 5.4.1, ενώ στη συνέχεια θα δοθούν λεπτομέρειες για τη δομή του αρχείου τύπου .nbs. Τα δεδομένα, που εισάγονται από τα δύο αρχεία, αποθηκεύονται σε κατάλληλες δομές.



Εικόνα 6.2: Στάδια παραγωγής μη δομημένου πλέγματος σε καμπύλες επιφάνειες με το πρόγραμμα Mesh

6.2.1.2 Μετασχηματισμός στον Παραμετρικό Χώρο

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για την παραγωγή πλέγματος με το πρόγραμμα **Mesh**, έχει ενσωματωθεί σε αυτό με την μορφή υπορουτίνας το πρόγραμμα *delaundo*, που δημιουργεί πλέγμα στις δύο διαστάσεις. Για να χρησιμοποιηθεί αυτή η δυνατότητα, πρέπει να εργαστούμε στον δισδιάστατο παραμετρικό χώρο (u, v) . Όμως οι οριακές καμπύλες του πλέγματος περιγράφονται στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων. Για το λόγο αυτό απαιτείται να γίνει μετασχηματισμός των φυσικών συντεταγμένων των σημείων των ορίων στις παραμετρικές συντεταγμένες (u, v) . Λόγο μη ύπαρξης αναλυτικών εξισώσεων που να περιγράφουν αυτόν το μετασχηματισμό, αναπτύχθηκε κατάλληλη επαναληπτική διαδικασία, η οποία περιγράφεται στη συνέχεια.

Έστω ότι επιθυμούμε να βρούμε τις παραμετρικές συντεταγμένες του οριακού σημείου x_i, y_i, z_i . Με βάση την τάξη και τον αριθμό των σημείων ελέγχου κάθε NURBS επιφάνειας, ορίζεται μια επίπεδη ορθογωνική επιφάνεια στον παραμετρικό χώρο (**Εικόνα 6.2(b)**), με διαστάσεις:

$$\begin{aligned}\delta u &= n - \text{order}(u) + 2 \\ \delta v &= m - \text{order}(v) + 2\end{aligned}\tag{6.1}$$

όπου δu και δv είναι οι διαστάσεις στις u και v διευθύνσεις αντίστοιχα, n και m ο αριθμός των control points μείων 1 στις u και v διευθύνσεις αντίστοιχα και $\text{order}(u)$ και $\text{order}(v)$ η τάξη (βαθμός συν 1) στις u και v διευθύνσεις αντίστοιχα.

Δύο βρόχοι σαρώνουν όλη αυτή την επιφάνεια από αριστερά προς τα δεξιά και από κάτω προς τα πάνω, με ακρίβεια που έχει καθοριστεί στο πρόγραμμα, και για κάθε ζεύγος τιμών u, v υπολογίζονται οι φυσικές συντεταγμένες x, y, z (χρησιμοποιώντας τις υπορουτίνες *mainnurbs*, *findxyz* και *basisfuns* καθώς και τις συναρτήσεις *iknot* και *ifindspar*). Στη συνέχεια, υπολογίζεται η απόσταση μεταξύ κάθε σημείου της σάρωσης και του σημείου του οποίου αναζητούνται οι παραμετρικές συντεταγμένες. Εφόσον η απόσταση αυτή είναι μικρότερη από μία προκαθορισμένη τιμή, τότε οι δεδομένες συντεταγμένες (u, v) θεωρούνται οι παραμετρικές συντεταγμένες του συγκεκριμένου σημείου (x_i, y_i, z_i) που ελέγχουμε. Η διαδικασία, που περιγράφηκε, είναι αναγκαστικά προσεγγιστική, ενώ δεν είναι και η ταχύτερη δυνατή. Εκτελείται στην υπορουτίνα *finduv* και εφαρμόζεται για όλα τα σημεία που περιγράφουν τα όρια της περιοχής τριγωνοποίησης. Στη συνέχεια τα αποτελέσματα γράφονται σε αρχείο τύπου .pts, ώστε να γίνει στο επόμενο βήμα η τριγωνοποίηση της επιφάνειας.

6.2.1.3 Παραγωγή μη Δομημένου Πλέγματος στο παραμετρικό επίπεδο

Αφού έχουν δημιουργηθεί τα κατάλληλα αρχεία στην προηγούμενη φάση, το λογισμικό *delaundo* πραγματοποιεί την τριγωνοποίηση της επιφάνειας στον παραμετρικό χώρο σαν τριγωνοποίηση στις δύο διαστάσεις, με βάση τα σημεία των μετασχηματισμένων ορίων. Η λειτουργία του λογισμικού *delaundo* αναλύθηκε στο κεφάλαιο 5.

6.2.1.4 Αντίστροφος Μετασχηματισμός της Τριγωνοποιημένης Επιφάνειας από το Παραμετρικό Επίπεδο στον Τρισδιάστατο Χώρο

Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από την έξοδο του delaunado αποθηκεύονται σε κατάλληλες δομές ώστε να επεξεργαστούν κατάλληλα και να εξαχθούν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Οι συντεταγμένες κάθε κόμβου του πλέγματος στο παραμετρικό επίπεδο u, v μετασχηματίζονται σε x, y, z στον τρισδιάστατο χώρο, με βάση τις εξισώσεις ορισμού των επιφανειών NURBS [43] (χρησιμοποιώντας τις υπορουτίνες *mainnurbs*, *findxyz* και *basisfun*s καθώς και τις συναρτήσεις *iknot* και *ifindspan*).

6.2.1.5 Εξαγωγή Αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα εξάγονται σε ένα αρχείο με το όνομα *output* σε format *.dpl*. Το αρχείο αυτό περιέχει τον αριθμό των τριγώνων, τις τρεις κορυφές κάθε τριγώνου καθώς και τα τρία γειτονικά για κάθε τρίγωνο, τον αριθμό των κόμβων και τις τρεις συντεταγμένες αυτών.

6.3 Τύποι Αρχείων που Χρησιμοποιούνται στο Πρόγραμμα

Τα αρχεία τύπου *.dip*, *.ctr*, *.pts* και *.dpl*, που χρησιμοποιούνται και εδώ, έχουν περιγραφεί αναλυτικά στο κεφάλαιο 5.

6.3.1 Αρχείο Εισόδου Τύπου *.nbs*

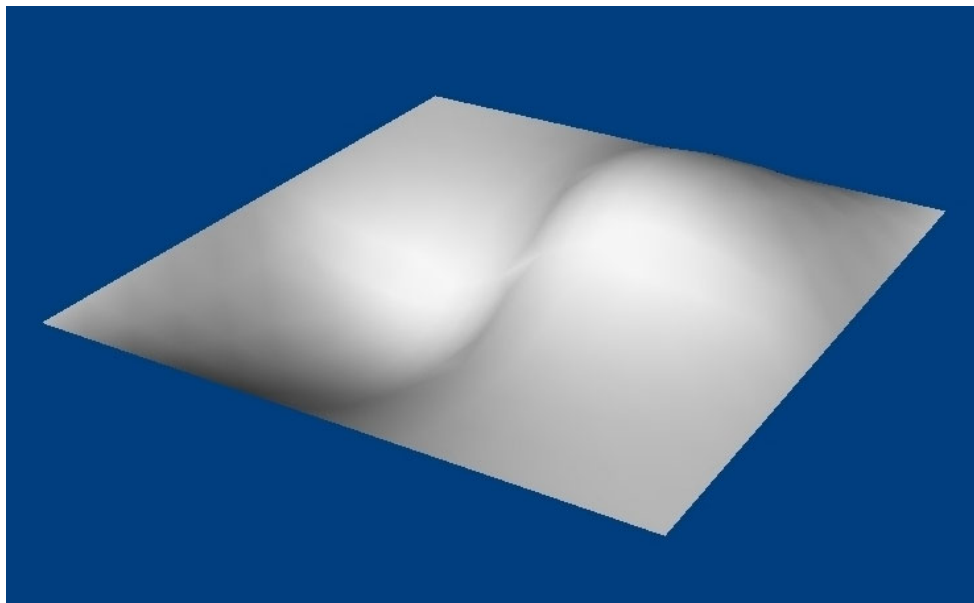
Τα αρχεία τύπου *.nbs* είναι αρχεία εισόδου που περιέχουν πληροφορίες για την NURBS επιφάνεια. Περιέχουν το πλήθος των control points σε κάθε διάσταση, το βαθμό της καμπύλης σε κάθε διάσταση, τις συντεταγμένες των control points και τα βάρη τους. Το πρόγραμμα **Mesh** για την παραγωγή πλέγματος σε καμπύλη επιφάνεια κατά την εκτέλεση του χρειάζεται απαραίτητα ένα τέτοιο αρχείο, το όνομα του οποίου δίνεται από τον χρήστη και πρέπει να περιέχει μέχρι 9 γράμματα το πολύ, με επέκταση *.nbs*. Στο αρχείο περιέχονται οι ακόλουθες πληροφορίες:

- Πλήθος των σημείων ελέγχου που περιγράφουν την επιφάνεια NURBS σε κάθε διάσταση u, v .
- Βαθμός της καμπύλης σε κάθε διάσταση u, v .
- Συντεταγμένες x, y, z των σημείων ελέγχου που το πλήθος τους πρέπει να συμφωνεί με το πλήθος των σημείων ελέγχου που δόθηκε παραπάνω.
- Βάρη των σημείων ελέγχου που το πλήθος τους πρέπει να συμφωνεί με το πλήθος των σημείων ελέγχου που έχουν δηλωθεί στη αρχή.

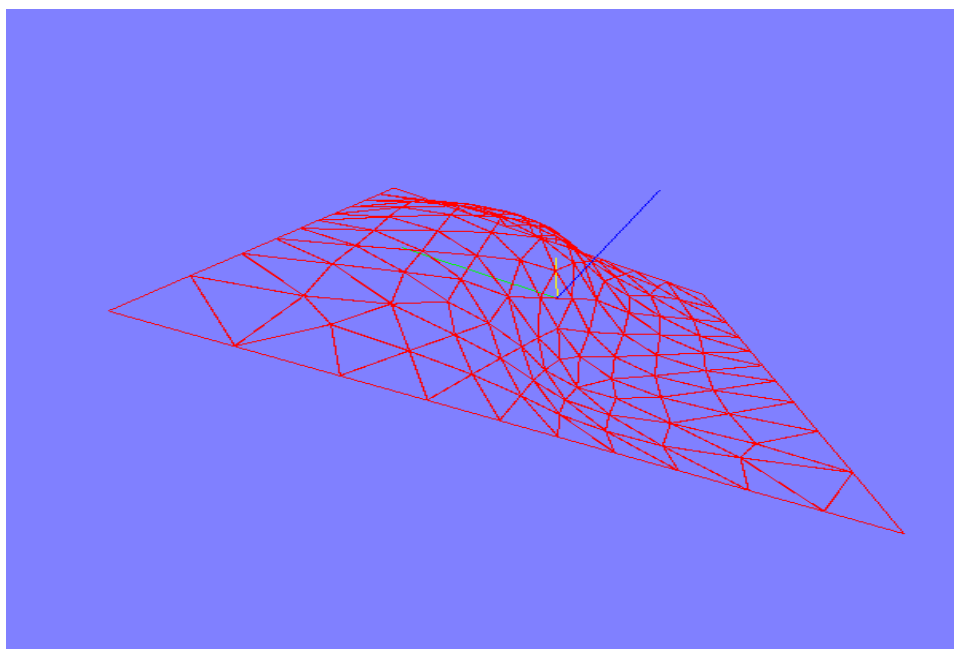
Στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II δίνεται ένα παράδειγμα αρχείου τύπου *.nbs*.

6.4 Παραδείγματα Παραγωγής Πλέγματος σε Καμπύλες Επιφάνειες NURBS

Στη συνέχεια δίνονται επτά παραδείγματα τριγωνοποίησης επιφανειών NURBS. Στις **Εικόνες 6.3(α), 6.4(α), 6.5(α), 6.6(α), 6.7(α), 6.8(α) και 6.9(α)** φαίνεται η μορφή της επιφάνειας ενώ, στις **Εικόνες 6.3(β), 6.4(β), 6.5(β), 6.6(β), 6.7(β), 6.8(β) και 6.9(β)** φαίνεται το πλέγμα που κατασκευάστηκε με το πρόγραμμα **Mesh** σε κάθε μια από αυτές. Τα παραδείγματα των εικόνων 6.2 έως 6.8, αναφέρονται σε τριγωνοποίηση ολόκληρης της επιφάνειας NURBS, ενώ οι **Εικόνες 6.10** έως **6.12** παρουσιάζουν δύο παραδείγματα τριγωνοποίησης επιφανειών εντός κλειστών οριακών καμπυλών που ορίζονται πάνω στις αντίστοιχες NURBS επιφάνειες.

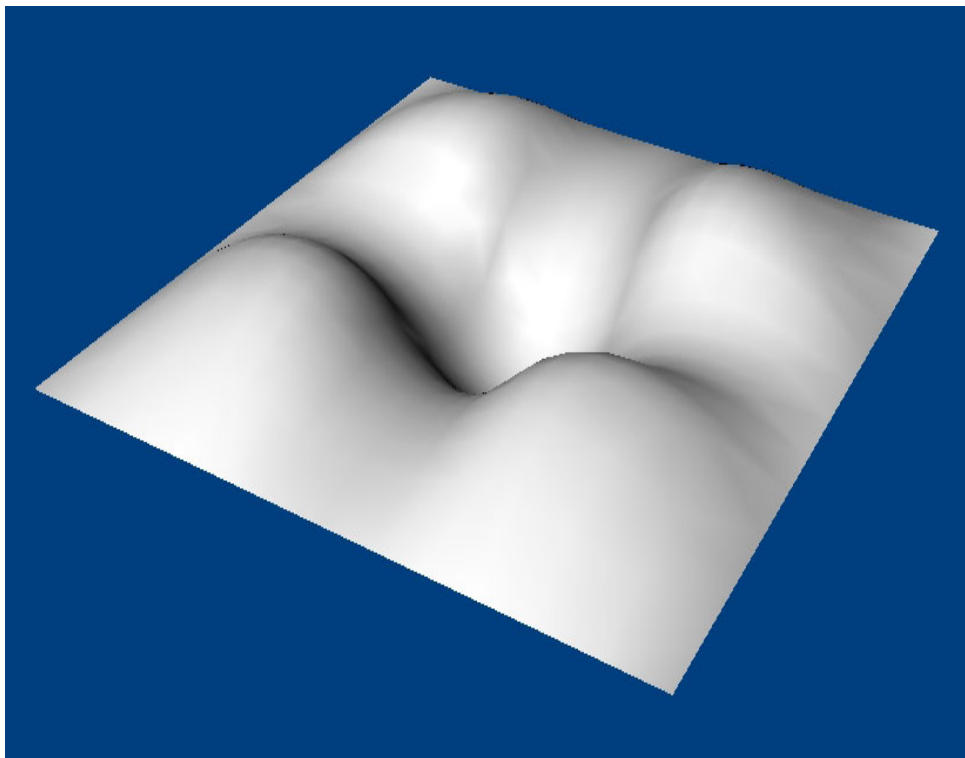


(α)

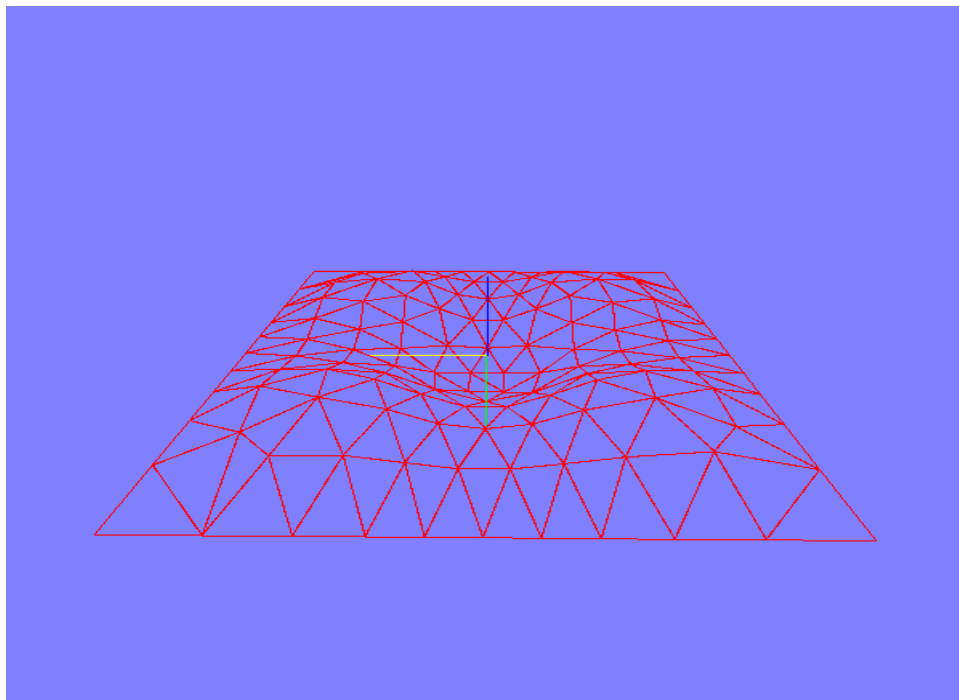


(β)

Εικόνα 6.3: Παράδειγμα 1, (α) επιφάνεια NURBS, (β) το πλέγμα που παράχθηκε στην επιφάνεια με το πρόγραμμα Mesh

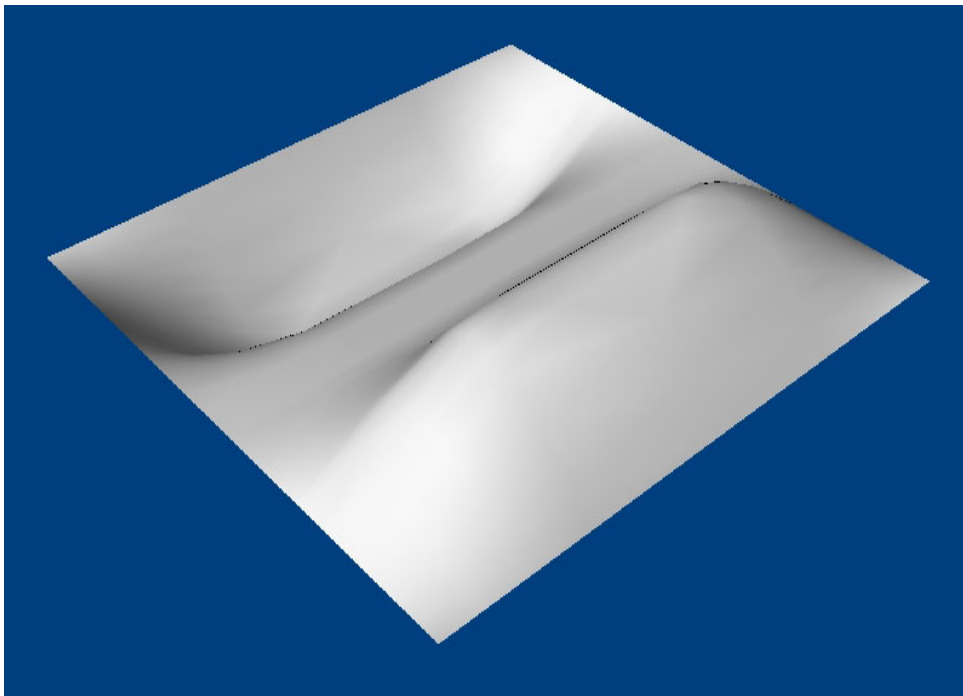


(α)

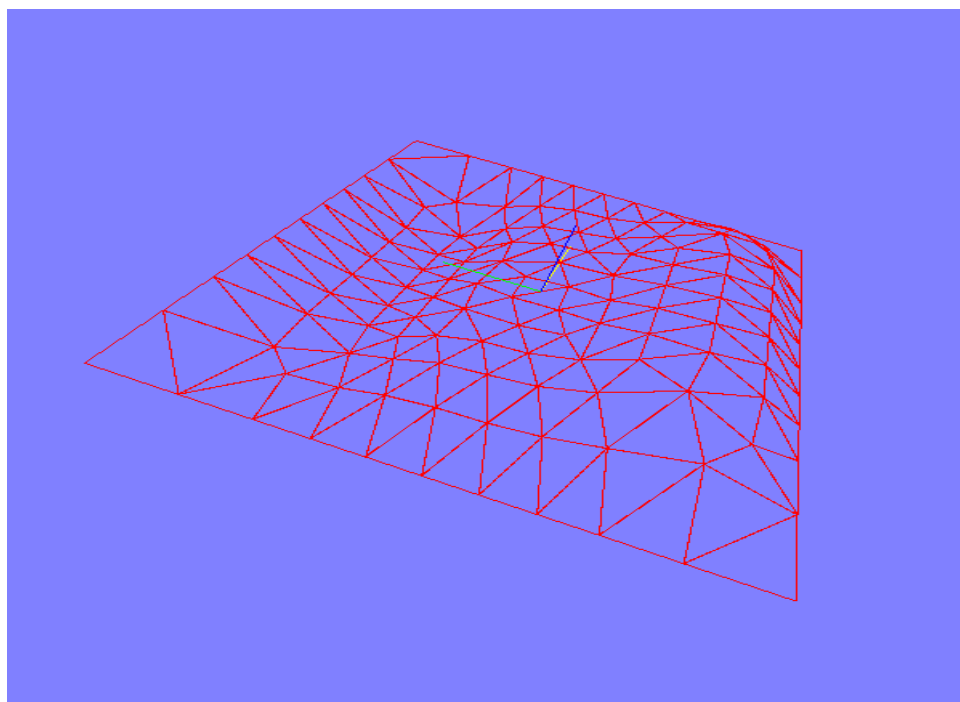


(β)

Εικόνα 6.4: Παράδειγμα 2, (α) επιφάνεια NURBS, (β) το πλέγμα που παράχθηκε στην επιφάνεια με το πρόγραμμα Mesh

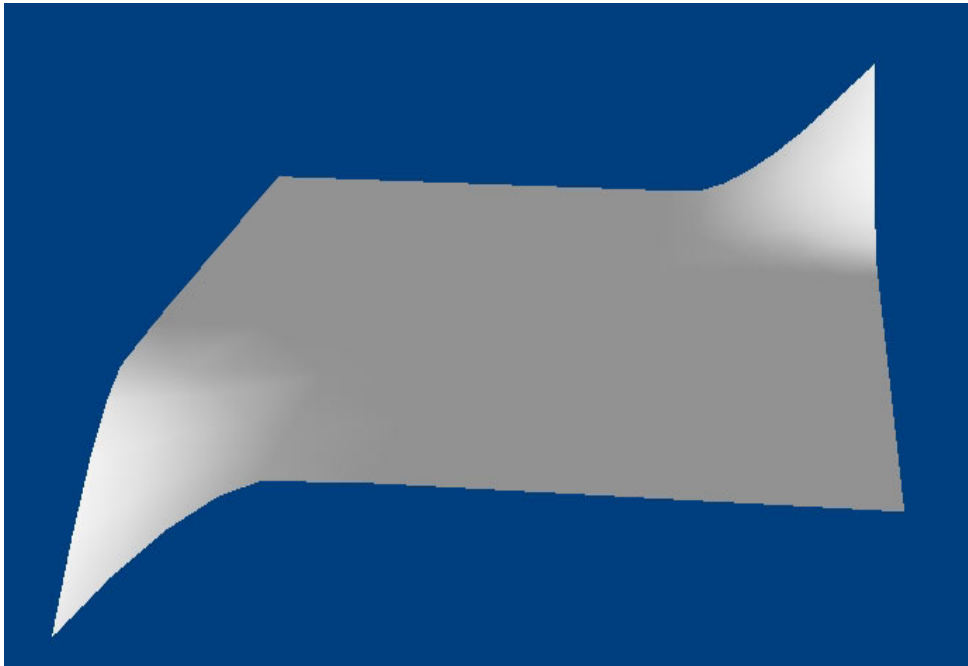


(α)

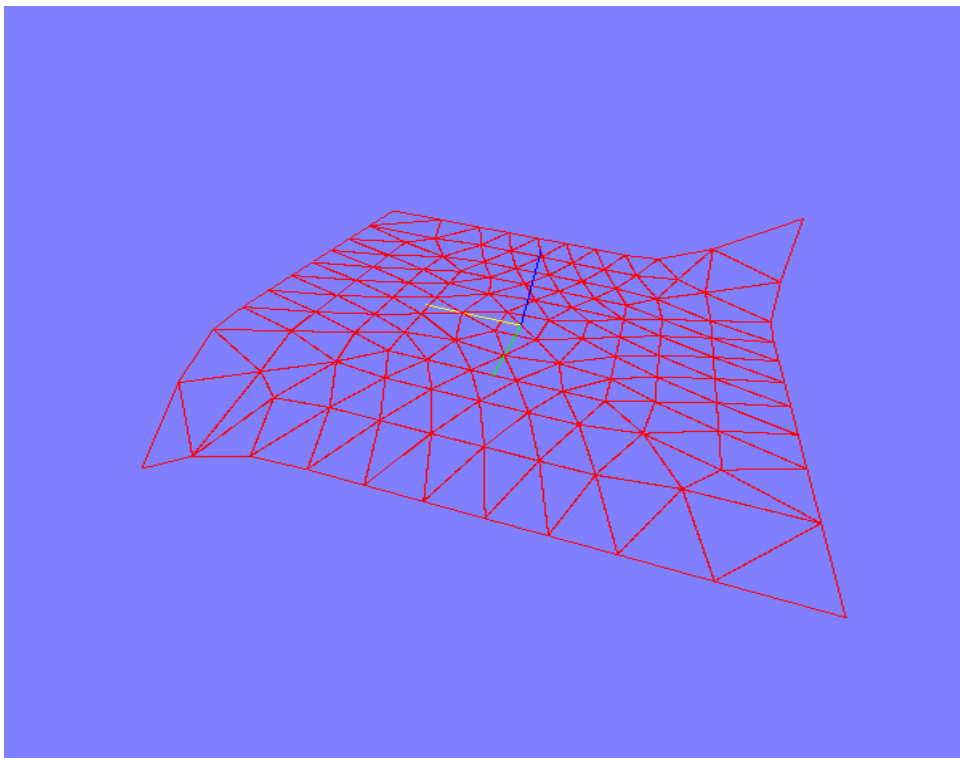


(β)

Εικόνα 6.5: Παράδειγμα 3, (α) επιφάνεια NURBS, (β) το πλέγμα που παράχθηκε στην επιφάνεια με το πρόγραμμα Mesh

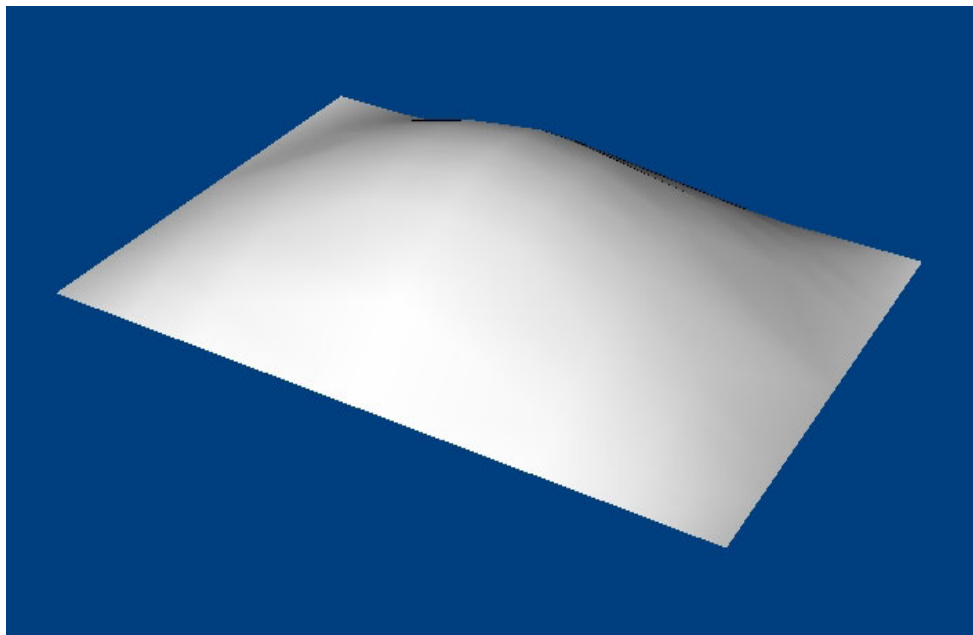


(α)

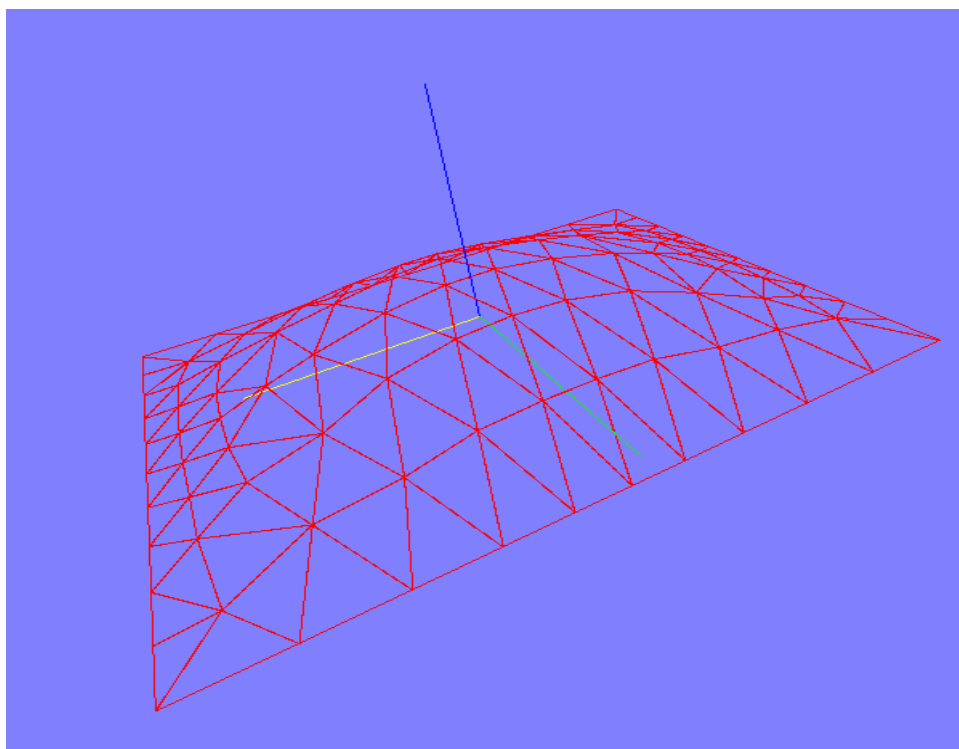


(β)

Εικόνα 6.6: Παράδειγμα 4, (α) επιφάνεια NURBS, (β) το πλέγμα που παράχθηκε στην επιφάνεια με το πρόγραμμα Mesh

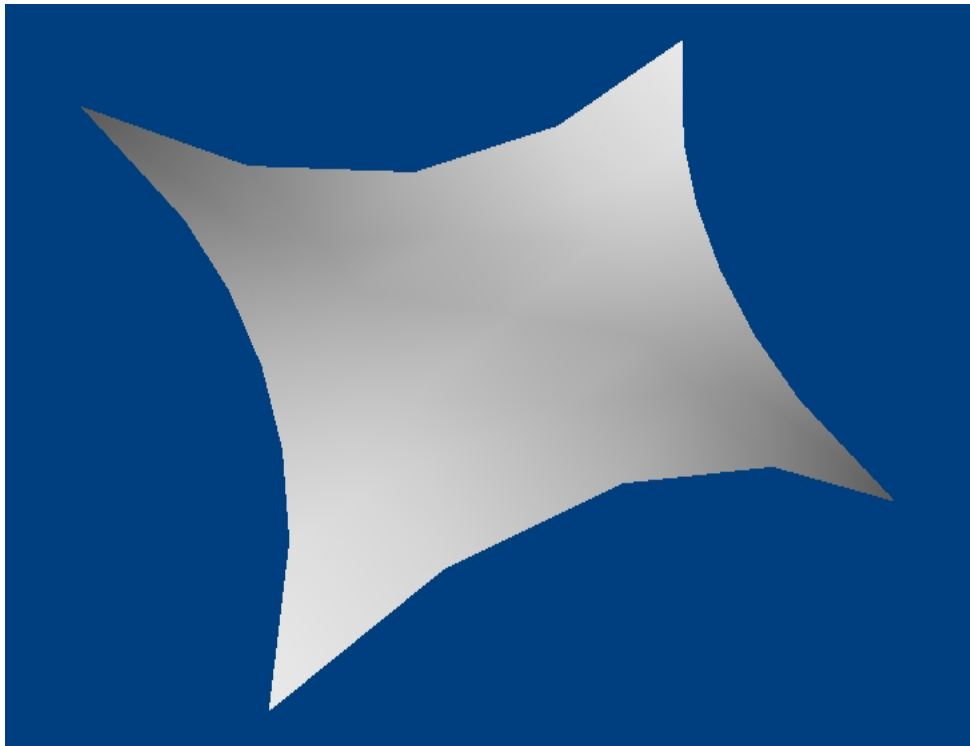


(α)

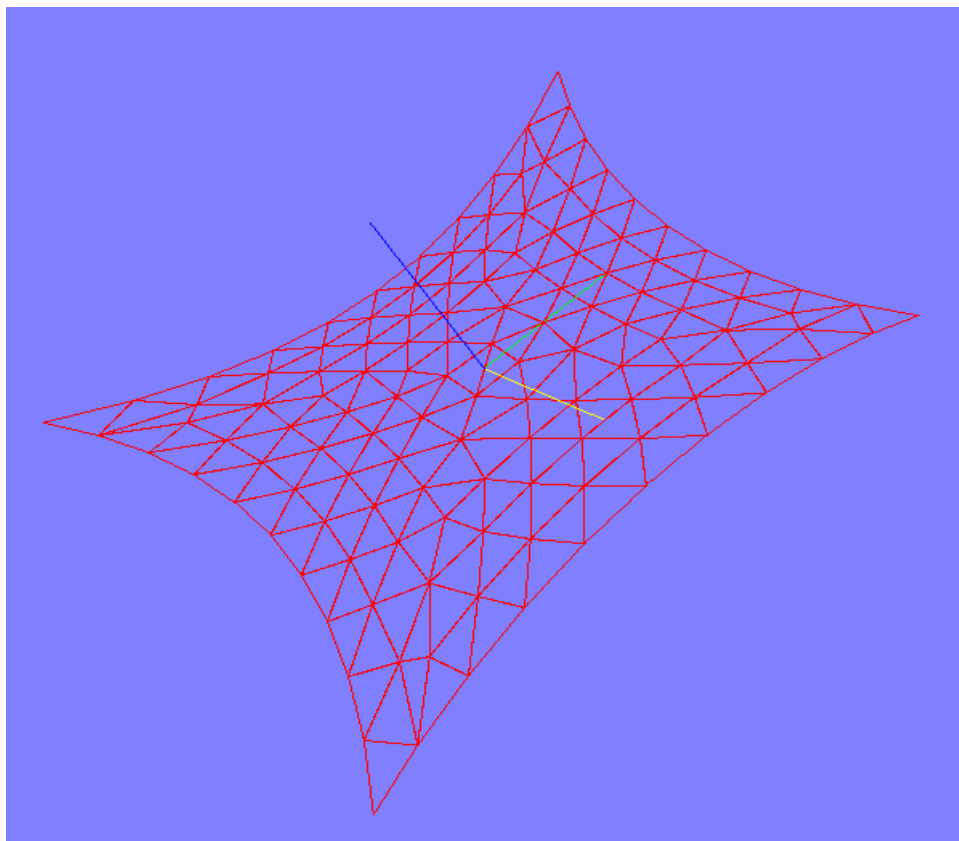


(β)

Εικόνα 6.7: Παράδειγμα 5, (α) επιφάνεια NURBS, (β) το πλέγμα που παράχθηκε στην επιφάνεια με το πρόγραμμα Mesh

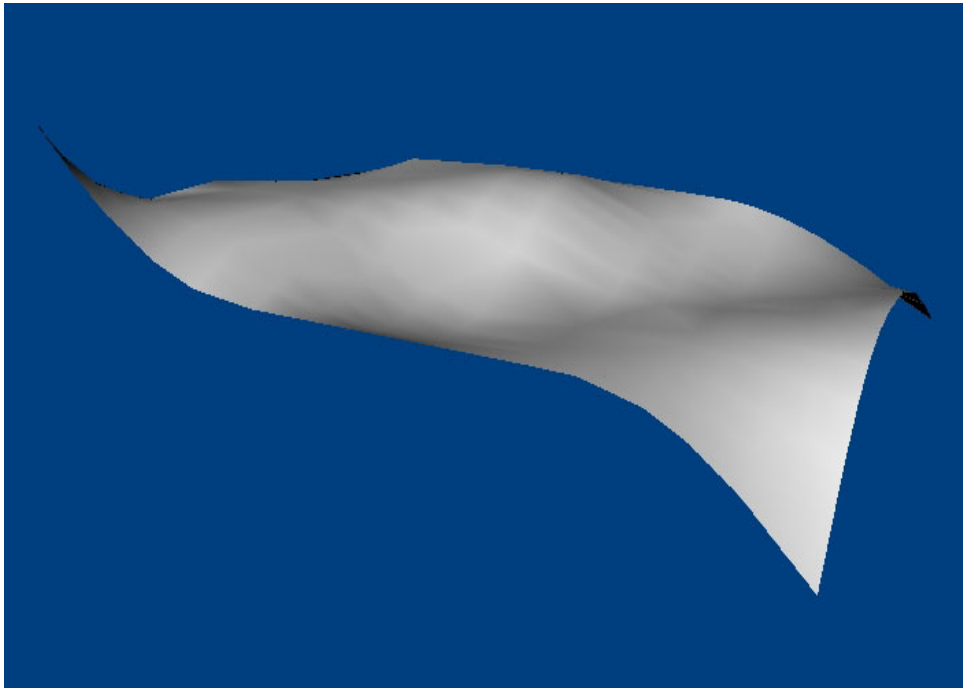


(α)

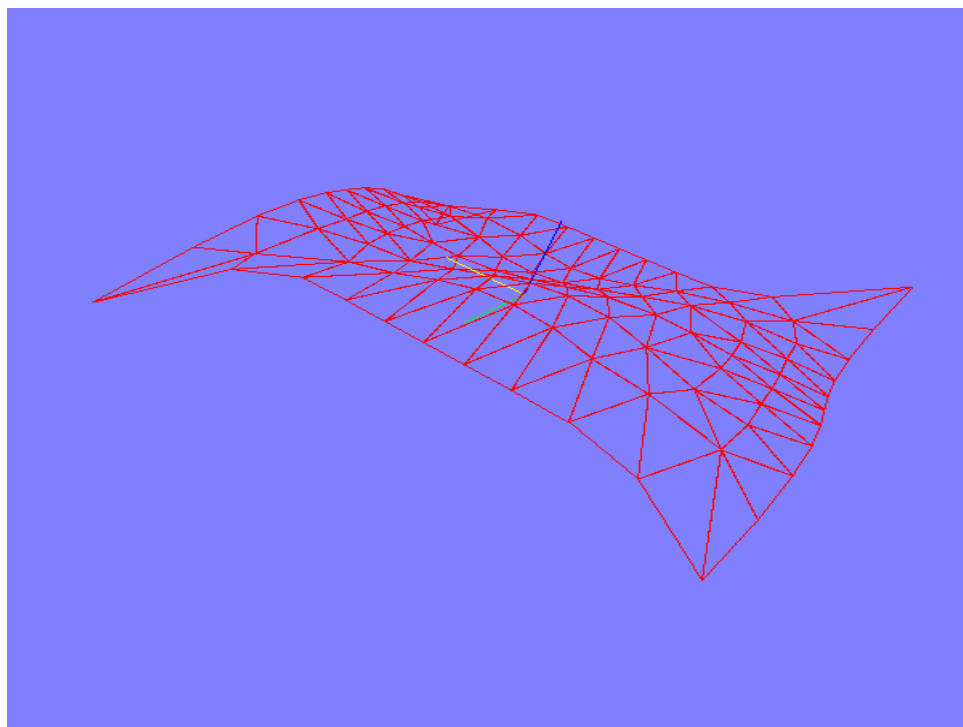


(β)

Εικόνα 6.8: Παράδειγμα 6, (α) επιφάνεια NURBS, (β) το πλέγμα που παράχθηκε στην επιφάνεια με το πρόγραμμα Mesh

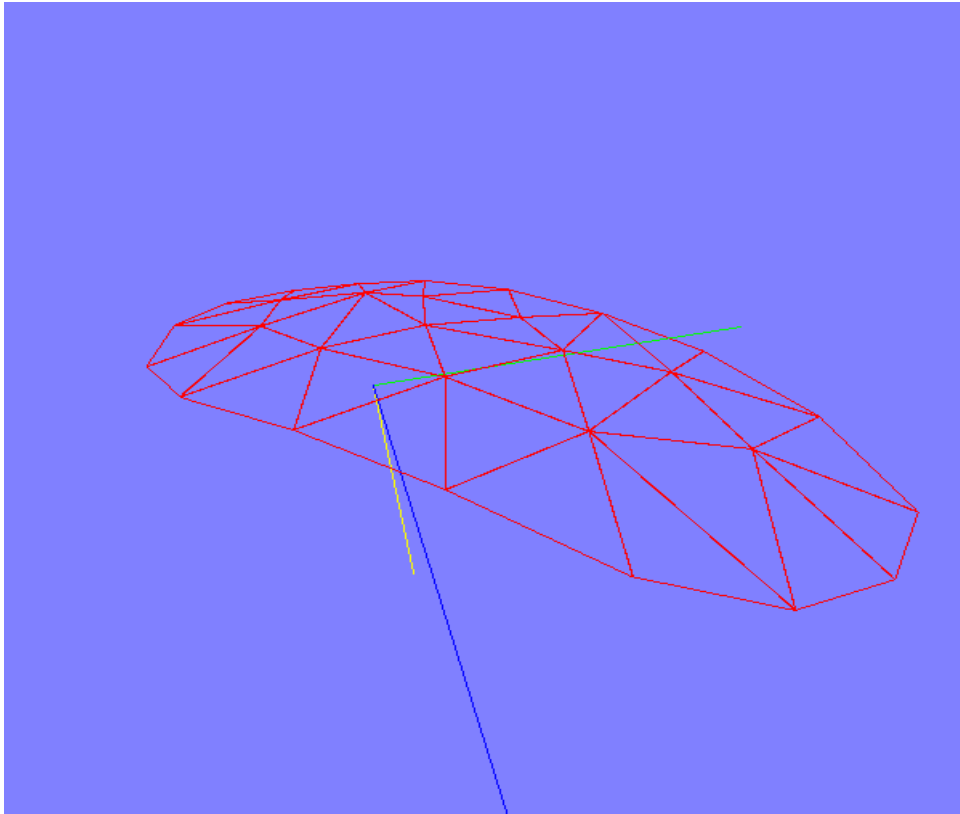


(α)

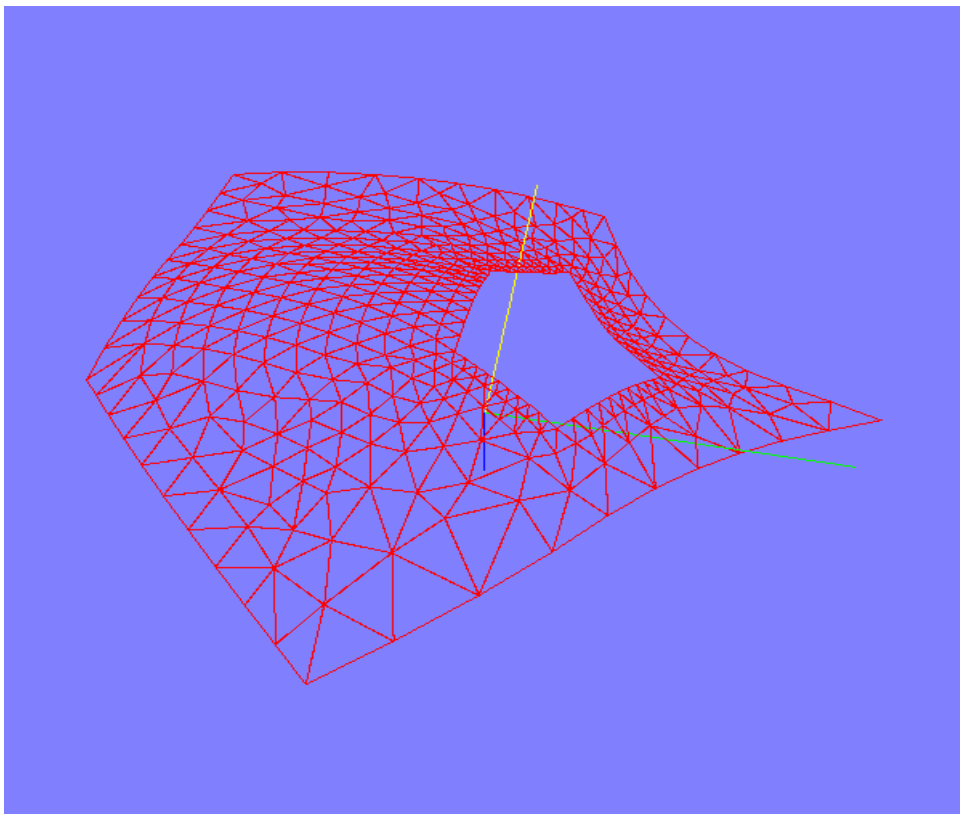


(β)

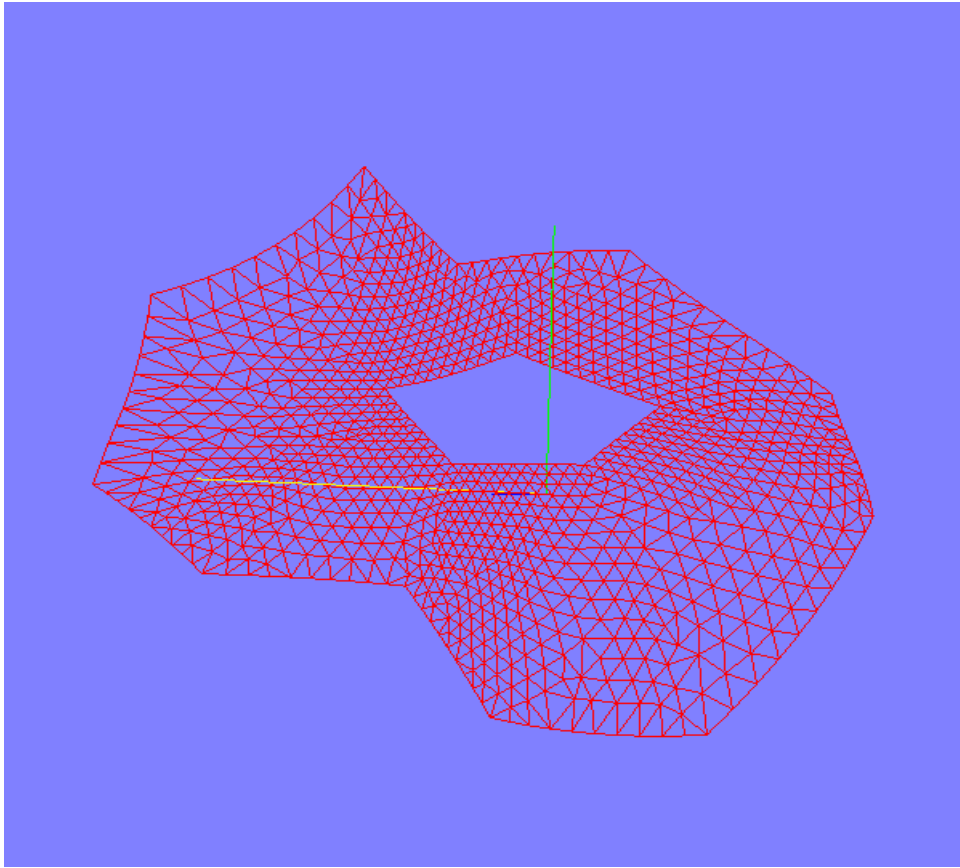
Εικόνα 6.9: Παράδειγμα 7, (α) επιφάνεια NURBS, (β) το πλέγμα που παράχθηκε στην επιφάνεια με το πρόγραμμα Mesh



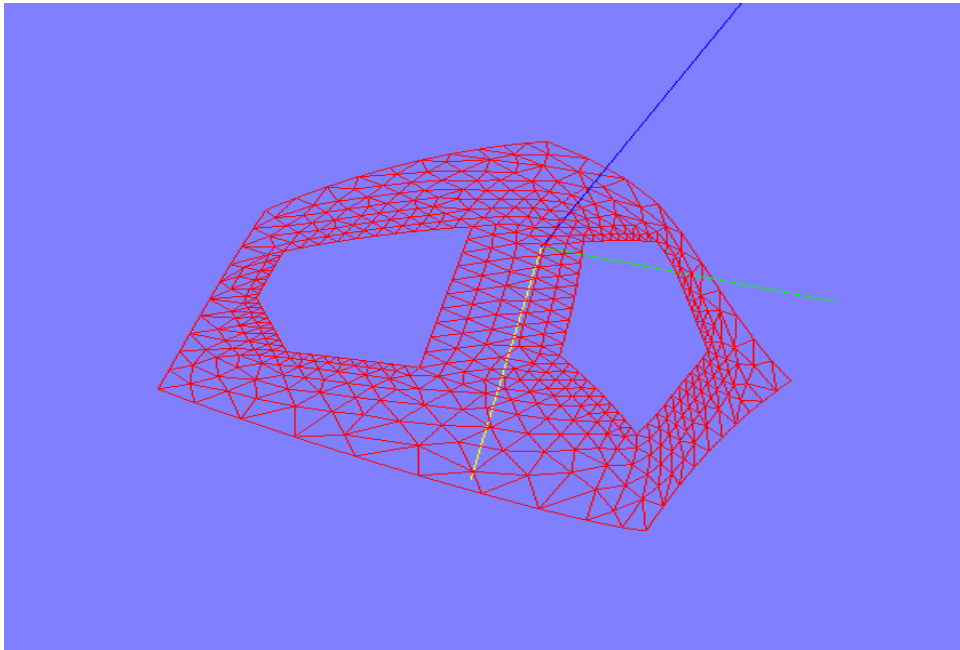
Εικόνα 6.10: Παράδειγμα 8, πλεγματοποίηση επιφάνειας NURBS, εντός ορίου που δίδεται από μία κλειστή καμπύλη



Εικόνα 6.11: Παράδειγμα 9, πλεγματοποίηση επιφάνειας NURBS, εντός ορίου που δίδεται από δέκα (10) καμπύλες που ορίζουν δύο κλειστά όρια.



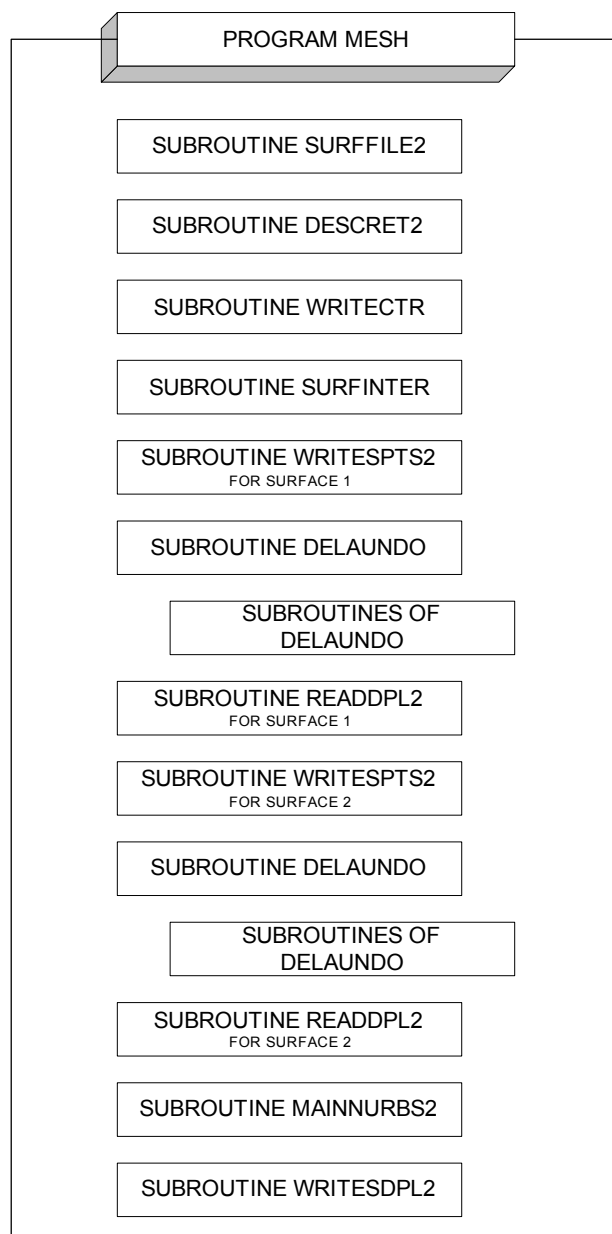
Εικόνα 6.12: Παράδειγμα 10, πλεγματοποίηση επιφάνειας NURBS, εντός ορίου που δίδεται από δεκαέξι (16) καμπύλες που ορίζουν δύο κλειστά όρια.



Εικόνα 6.13: Παράδειγμα 11, πλεγματοποίηση επιφάνειας NURBS, εντός ορίου που δίδεται από δεκαπέντε (15) καμπύλες που ορίζουν τρία κλειστά όρια.

6.5 Παραγωγή Πλέγματος σε Τεμνόμενες Επιφάνειες NURBS

Μετά την παραγωγή πλέγματος σε μοναδικές καμπύλες επιφάνειες NURBS, το πρόγραμμα Mesh επεκτάθηκε για την παραγωγή πλέγματος σε δύο τεμνόμενες επιφάνειες NURBS. Το πλέγμα κατασκευάζεται μόνο στο ένα από τα δύο τμήματα κάθε τεμνόμενης επιφάνειας, ενώ είναι ενιαίο και για τις δύο επιφάνειες. Η συγκεκριμένη διαδικασία είναι το πρώτο βήμα για την πλεγματοποίηση στερεών που ορίζονται από πολλαπλές καμπύλες επιφάνειες που τέμνονται μεταξύ τους. Η δομή του προγράμματος δίνεται στην **Εικόνα 6.14** ενώ, στη συνέχεια περιγράφονται αναλυτικά οι υπορουτίνες που χρησιμοποιεί.



Εικόνα 6.14: Δομή του προγράμματος Mesh για παραγωγή πλέγματος σε τμήμα τομής δυο επιφανειών NURBS

SURFFILE2: Ανοίγει και διαβάζει ένα αρχείο τύπου .nbs, που περιέχει τις παραμέτρους δύο επιφανειών NURBS που τέμνονται.

DESCRET2: Διαιρεί κάθε μια από τις τέσσερις ακμές της κάθε επιφάνειας, στο παραμετρικό επίπεδο, που ορίζεται από δύο σημεία σε ίσα τμήματα. Υπολογίζει τα νέα σημεία και τις νέες ακμές που δημιουργούνται και ενημερώνει τον πίνακα των επιφανειών για τα νέα σημεία και τις ακμές από τα οποία πλέον αποτελείται η επιφάνεια.

WRITECTR: (βλ. § 5.1)

SURFINTER: Βρίσκει τα σημεία τομής των δύο επιφανειών και ορίζει το τμήμα της κάθε επιφάνειας, το οποίο θα τριγωνοποιηθεί, θεωρώντας δύο νέες επιφάνειες.

WRITESPTS2: Παίρνει σαν ορίσματα τα σημεία του τμήματος που θα τριγωνοποιηθεί της εκάστοτε επιφάνειας και τα σημεία τομής της και, αφού τα τοποθετήσει σε σειρά, έτσι ώστε να ορίζουν μια κλειστή επιφάνεια, γράφει ένα αρχείο τύπου .pts.

DELAUNDO: (βλ. § 5.1)

ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΕΣ ΤΟΥ DELAUNDO: (βλ. § 5.1 και ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι)

READDPL2: Διαβάζει το αρχείο .dpl, που εξάγει το delaundo, και εξάγει με την μορφή ορισμάτων τις δομές στις οποίες έχουν αποθηκευτεί τα αποτελέσματα.

MAINNURBS: Μετασχηματίζει τις συντεταγμένες των δύο επιφανειών από το παραμετρικό επίπεδο (u, v) στον φυσικό χώρο (x, y, z) και αποθηκεύει σε μια ενιαία δομή τα αποτελέσματα, καθορίζοντας τις απαραίτητες σχέσεις μεταξύ τους.

WRITESDPL2: Γράφει το αρχείο εξόδου .dpl του Mesh με τα αποτελέσματα της τριγωνοποίησης του τμήματος της τομής των δύο επιφανειών.

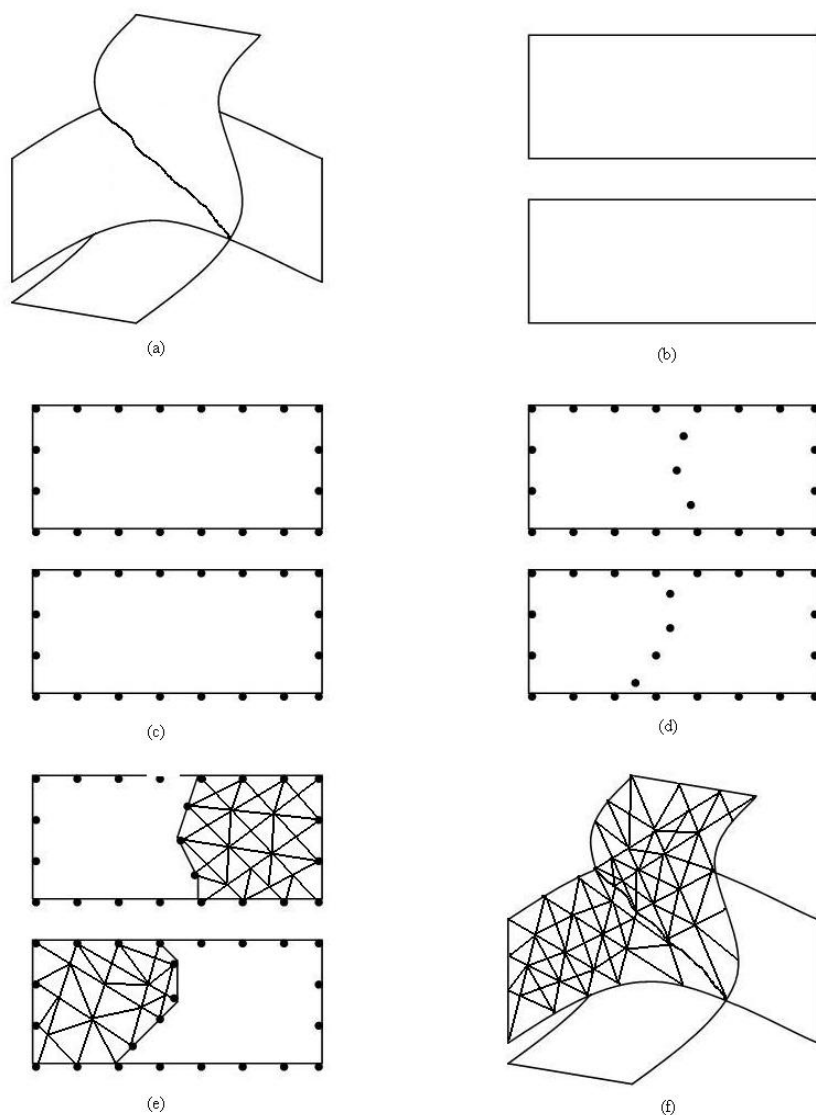
6.5.1 Περιγραφή της Διαδικασίας Παραγωγής Πλέγματος σε δύο Τεμνόμενες Επιφάνειες NURBS

Αρχικά κατασκευάζεται ένα αρχείο εισόδου τύπου .nbs, με τις παραμέτρους που ορίζουν τις δύο επιφάνειες (**Εικόνα 6.15(a)**). Το αρχείο αυτό έχει τη δομή που περιγράφηκε στην παράγραφο 6.3.1 μόνο που μετά την πρώτη επιφάνεια ακολουθούν τα δεδομένα της δεύτερης, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως για την πρώτη. Στη συνέχεια, στην υπορουτίνα *surf2* τα δεδομένα αυτά διαβάζονται, αποθηκεύονται σε κατάλληλες δομές.

Στην υπορουτίνα *descr2* πραγματοποιείται στο παραμετρικό επίπεδο κάθε επιφάνειας, με την βοήθεια γραμμικής παρεμβολής, διακριτοποίηση κάθε ακμής, κάθε επιφάνειας σε ίσα τμήματα και αποθηκεύονται τα νέα σημεία (u, v) και οι ακμές που υπολογίστηκαν (**Εικόνα 6.15(b)-(c)**). Στη συνέχεια εξάγεται αρχείο τύπου .ctr με τις παραμέτρους που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα delaundo (*writctr*).

Η υπορουτίνα *surfinter* εκτελώντας βρόχους και στις δύο κατευθύνσεις u, v και για τις δύο επιφάνειες (σαρώνεται η κάθε επιφάνεια με κάποιο βήμα από αριστερά προς τα δεξιά και από κάτω προς τα πάνω) προσπαθεί να ανιχνεύσει σημεία τομής των δύο

επιφανειών και αποθηκεύει σε ένα πίνακα για κάθε επιφάνεια τα κοινά σημεία στις παραμετρικές τους συντεταγμένες (u_1, v_1) και (u_2, v_2) (**Εικόνα 6.15(d)**). Για να επιτευχθεί αυτό κάθε ζεύγος (u_1, v_1) και (u_2, v_2) μετασχηματίζεται σε (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) αντίστοιχα, ώστε να ελεγχθεί αν αποτελεί σημείο τομής των δύο επιφανειών, ελέγχοντας την απόσταση μεταξύ τους και χρησιμοποιώντας κάποια ελάχιστη απόσταση ως κριτήριο. Επειδή η αποτελεσματικότητα αυτού του ελέγχου, βάσει του βήματος που θα επιλεγθεί, επιβαρύνει σημαντικά το χρόνο εκτέλεσης της διαδικασίας, ο έλεγχος γίνεται σε δύο βήματα. Αρχικά επιλέγεται ένα αρκετά μεγάλο βήμα και μεγάλη ανοχή ώστε να προσδιοριστεί σε κάθε επιφάνεια ένα μικρότερο τμήμα της που περιέχει τα σημεία τομής. Στη συνέχεια σε αυτή την περιοχή κάθε επιφάνειας, επιλέγεται μικρό βήμα και μικρή ανοχή ώστε να εντοπιστούν τα κοινά σημεία. Αφού βρεθεί η τομή των επιφανειών (υπό μορφή σημείων), αναζητούνται τα σημεία του ορίου της κάθε επιφάνειας που βρίσκονται από την ίδια πλευρά της τομής. Τα τελευταία σημεία μαζί με αυτά της τομής αποθηκεύονται σε πίνακα, που καθορίζει το όριο πλεγματοποίησης για κάθε μία από τις δύο επιφάνειες.



Εικόνα 6.15: Στάδια παραγωγής μη δομημένου πλέγματος σε τμήμα τομής δύο NURBS επιφανειών με το πρόγραμμα Mesh

Τα οριακά σημεία για την πρώτη επιφάνεια επανατοποθετούνται σε κατάλληλη διάταξη, έτσι ώστε να ορίζουν μια συνεχή κλειστή γραμμή. Στη συνέχεια δημιουργείται το αρχείο τύπου .pts, που αποτελεί την είσοδο του λογισμικού delaundo (*writespts2*). Καλείται η υπορουτίνα *delaundo* και εκτελείται η τριγωνοποίηση (**Εικόνα 6.15(e)**). Ακολουθεί η αποθήκευση των αποτελεσμάτων σε κατάλληλες δομές (*readdpl2*). Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για την δεύτερη επιφάνεια.

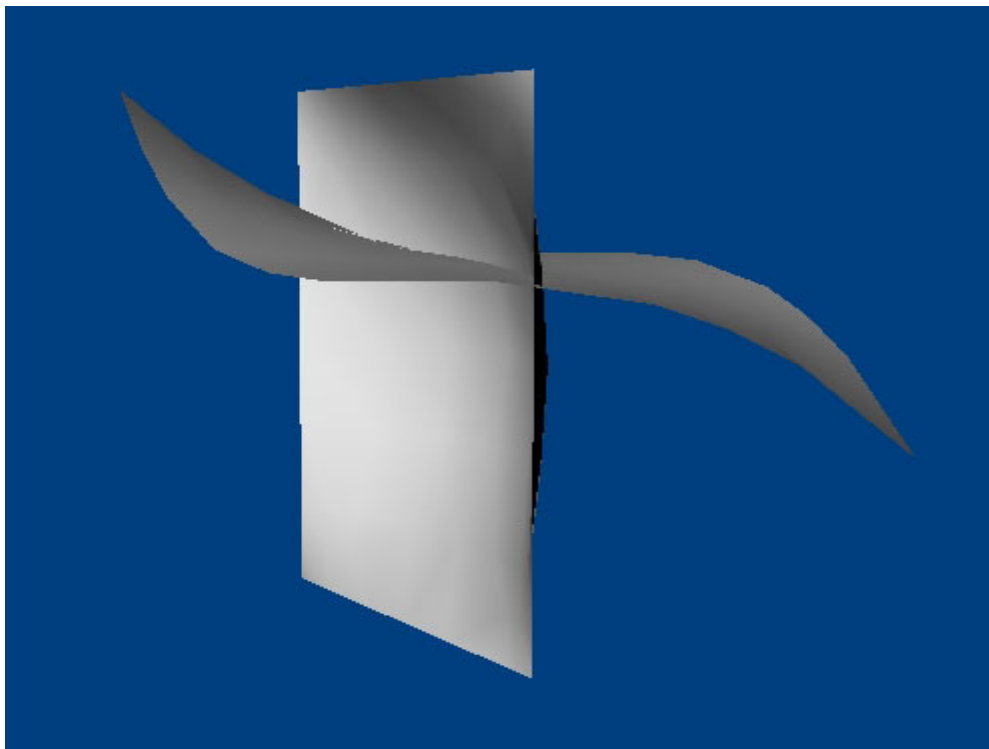
Τα αποτελέσματα της τριγωνοποίησης που έχουν ληφθεί στο παραμετρικό επίπεδο και για τις δύο επιφάνειες μετασχηματίζονται στις τρεις διαστάσεις και αποθηκεύονται σε μια ενιαία δομή. Για να γίνει αυτό αφαιρούνται οι κόμβοι στην καμπύλη τομής που υπάρχουν και στις δύο επιφάνειες, καθώς και οι αντίστοιχες κοινές ακμές. Στη συνέχεια, με κριτήριο την κοινή ακμή, σαρώνονται όλα τα τρίγωνα, ώστε να βρεθούν τα γειτονικά κάθε ενός τριγώνου. Τέλος τα αποτελέσματα γράφονται σε format .dpl (*writesdpl2*) (**Εικόνα 6.15(f)**).

6.5.1.2 Παρατηρήσεις

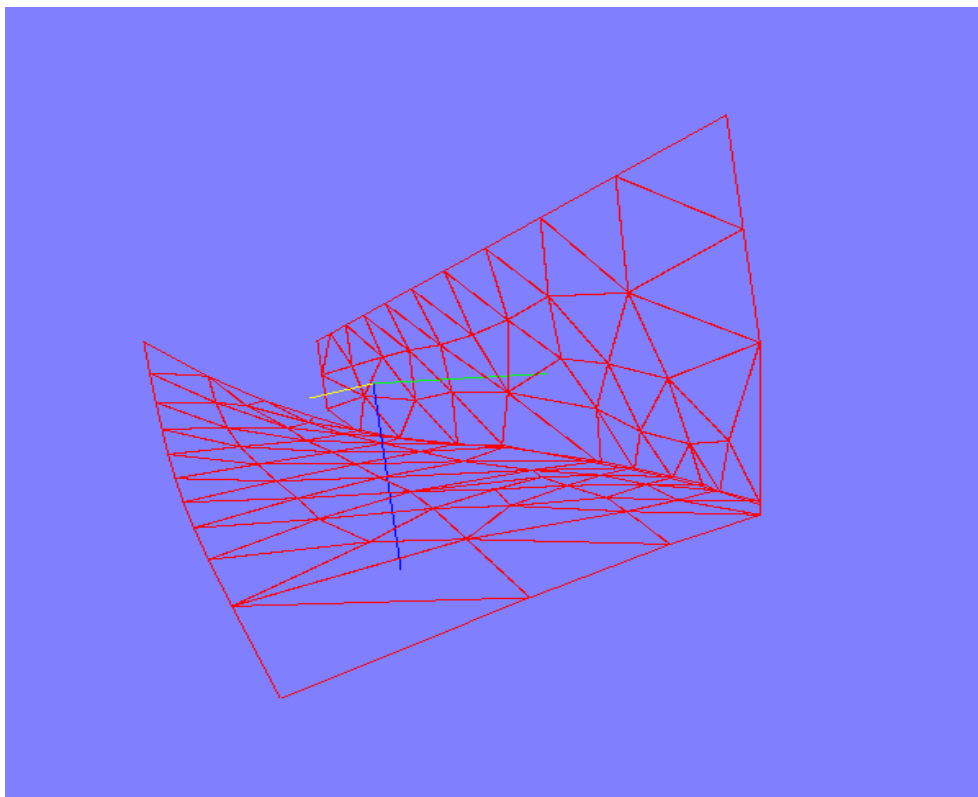
Όπως γίνεται φανερό στα παραδείγματα που ακολουθούν (**Εικόνες 6.16-6.20**), υπάρχουν ατέλειες όσον αφορά στον ακριβή προσδιορισμό της τομής των επιφανειών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το βήμα και η ανοχή που χρησιμοποιήθηκαν κατά τον έλεγχο των επιφανειών δεν ήταν ικανοποιητικά μικρά, καθώς κάτι τέτοιο θα καθιστούσε την διαδικασία ιδιαίτερα χρονοβόρα. Στις μελλοντικές εργασίες προγραμματίζεται η εύρεση πιο αποδοτικού αλγορίθμου για την επίτευξη της συγκεκριμένης λειτουργίας.

6.6 Παραδείγματα Παραγωγής Πλέγματος σε δύο Τεμνόμενες Επιφάνειες NURBS

Ακολουθούν πέντε παραδείγματα παραγωγής πλέγματος με το πρόγραμμα **Mesh** σε τμήμα τομής δύο επιφανειών NURBS. Οι **Εικόνες 6.16(α), 6.17(α), 6.18(α), 6.19(α)** και **6.20(α)** παρουσιάζουν παραδείγματα επιφανειών NURBS που τέμνονται ενώ στις **Εικόνες 6.16(β), 6.17(β), 6.18(β), 6.19(β)** και **6.20(β)** φαίνεται το τμήμα της τομής με το παραγόμενο πλέγμα.

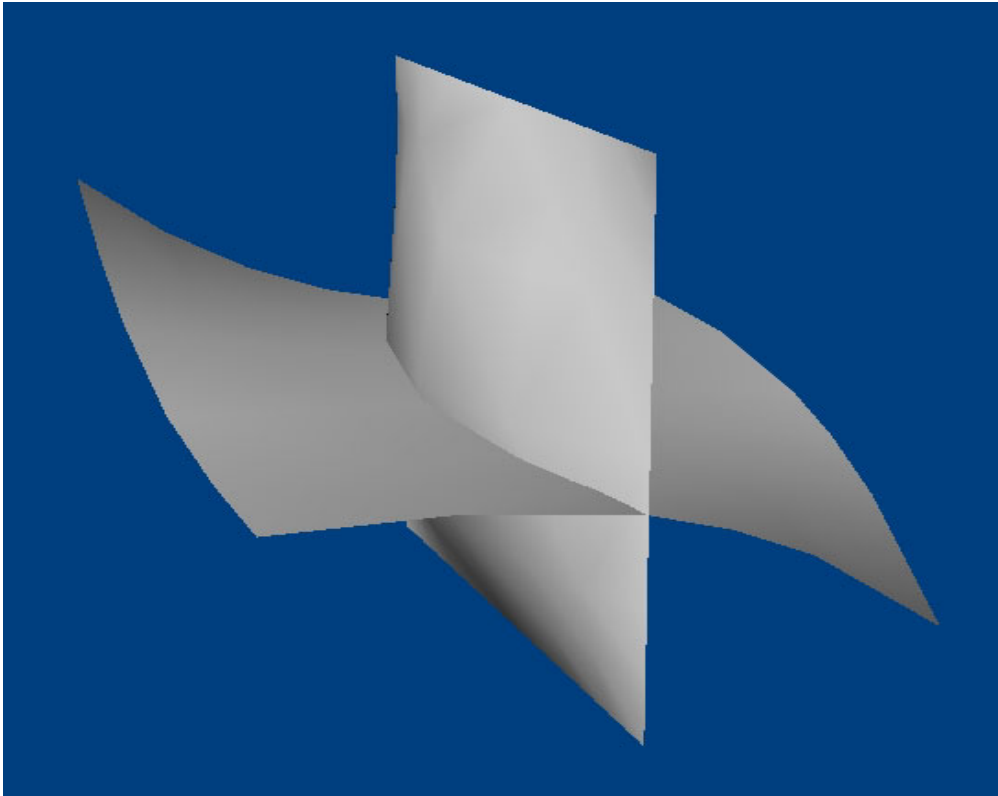


(α)

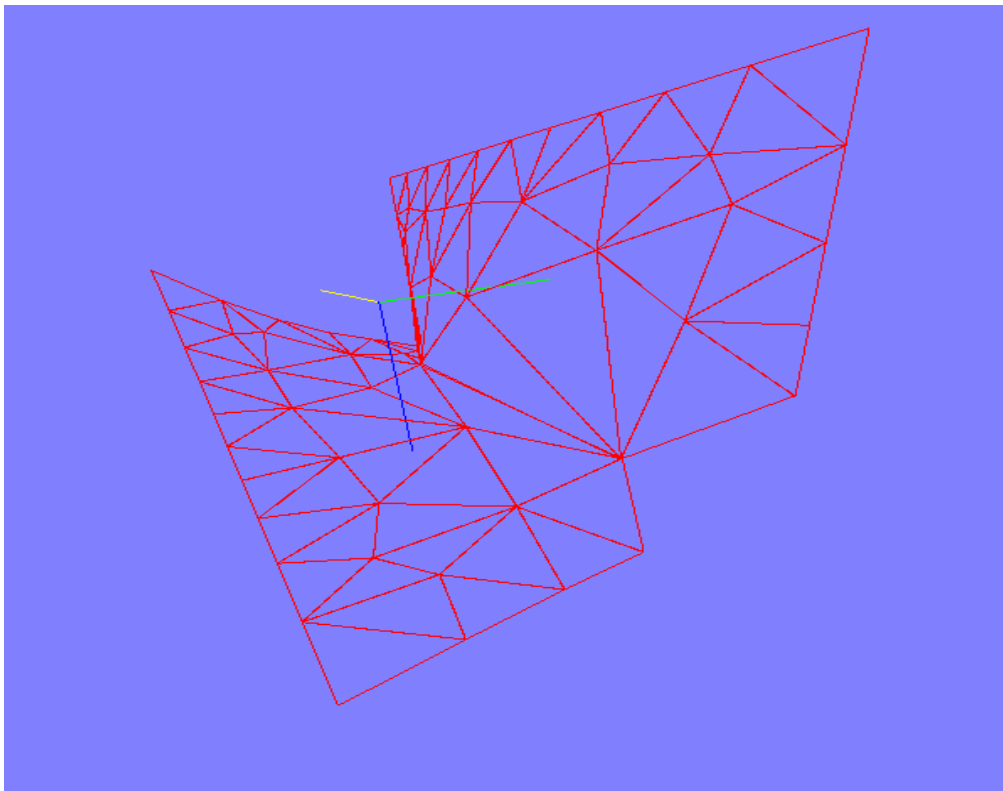


(β)

Εικόνα 6.16: Παράδειγμα 1, (α) επιφάνειες NURBS, (β) πλέγμα σε τμήμα της τομής των επιφανειών

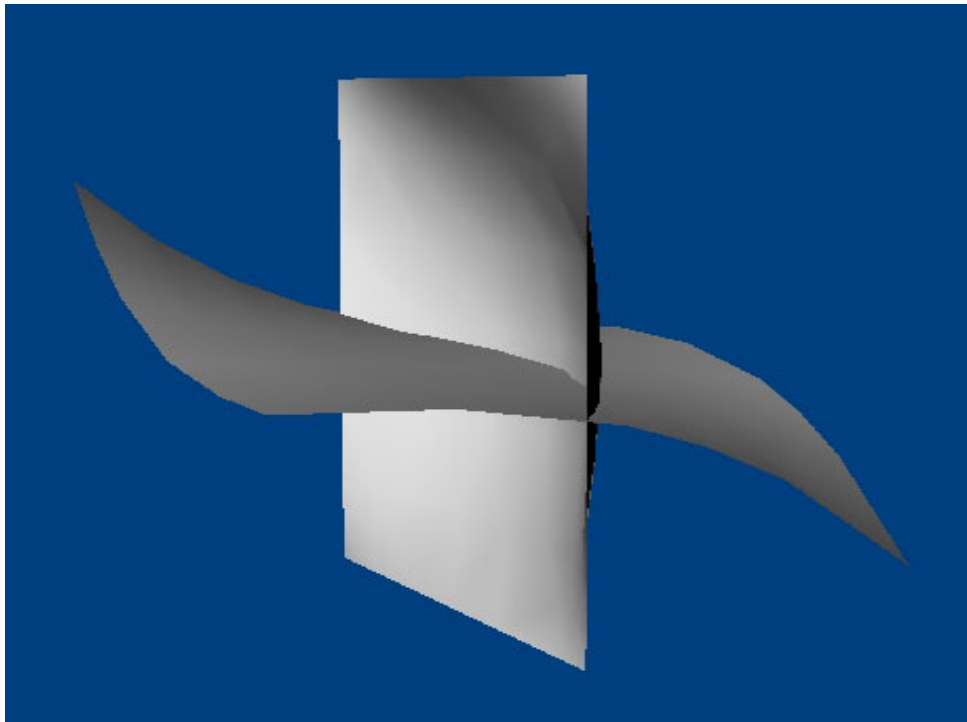


(α)

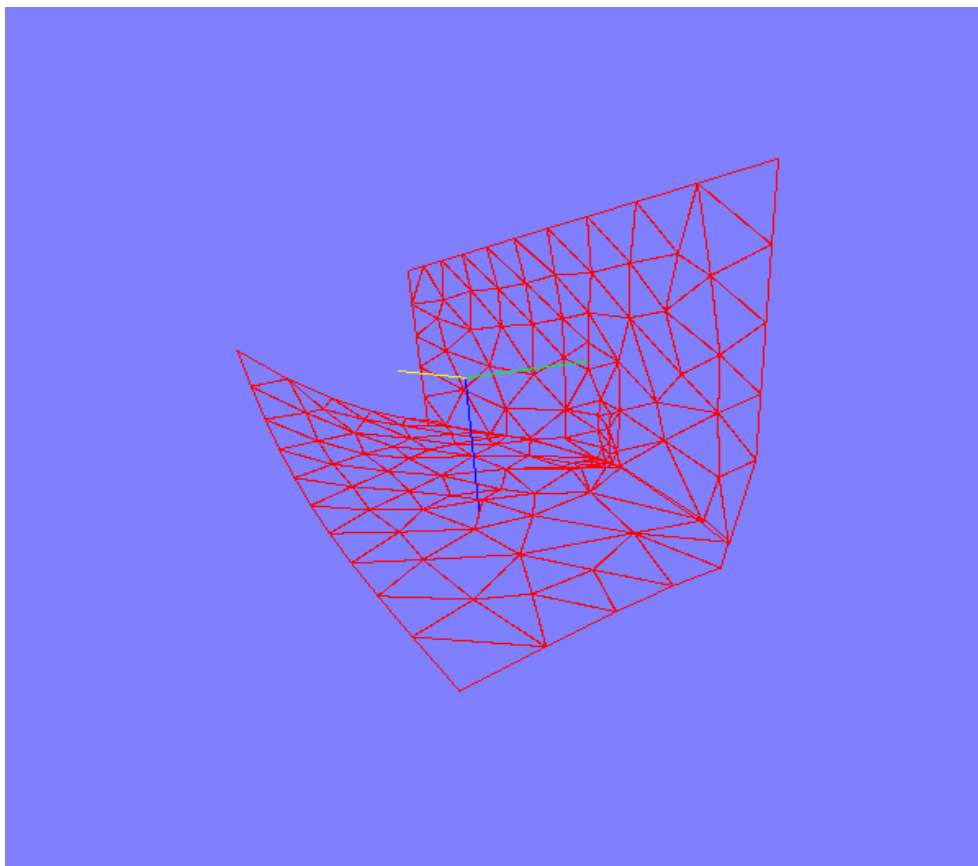


(β)

Εικόνα 6.17: Παράδειγμα 2, (α) επιφάνειες NURBS, (β) πλέγμα σε τμήμα της τομής των επιφανειών

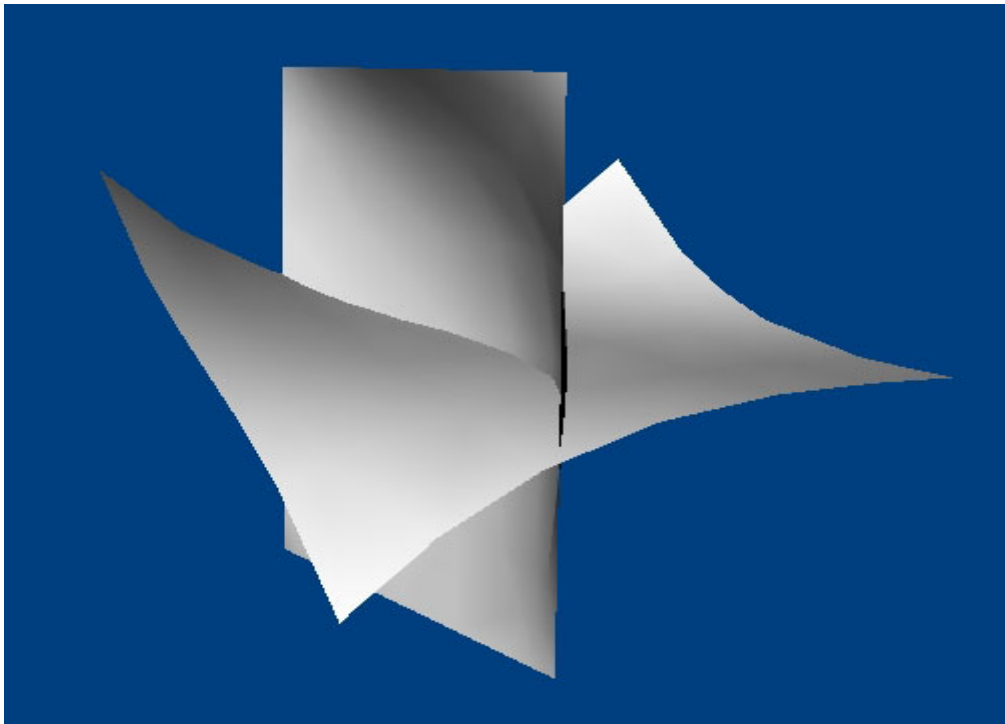


(α)

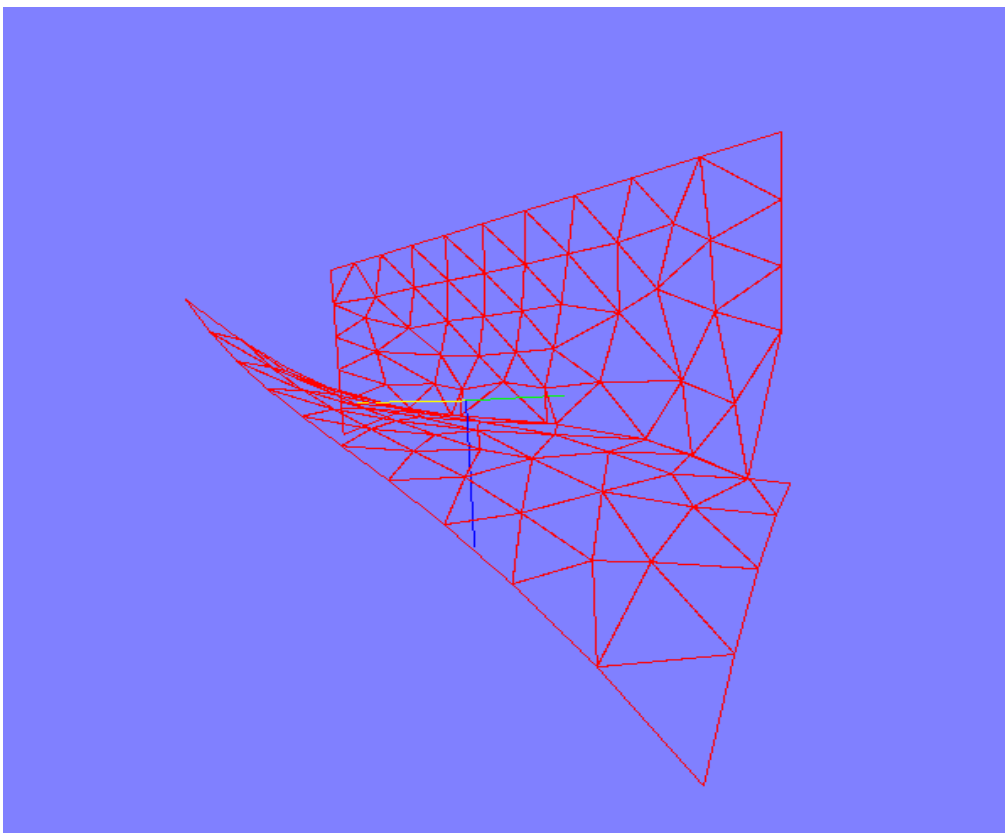


(β)

Εικόνα 6.18: Παράδειγμα 3, (α) επιφάνειες NURBS, (β) πλέγμα σε τμήμα της τομής των επιφανειών



(α)

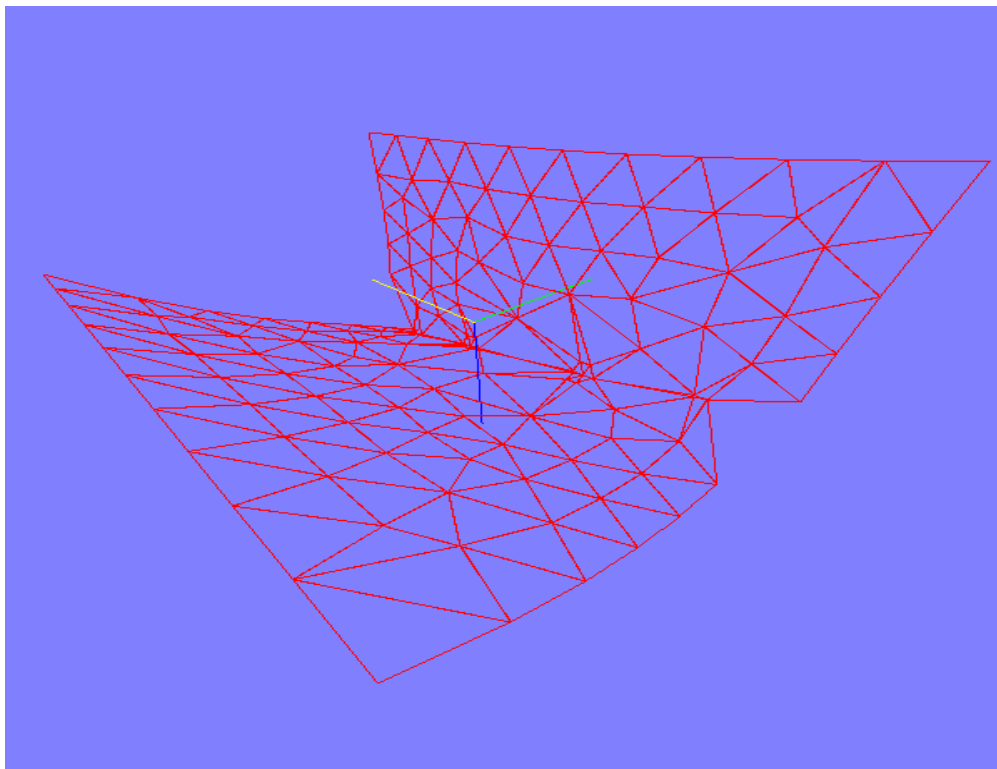


(β)

Εικόνα 6.19: Παράδειγμα 4, (α) επιφάνειες NURBS, (β) πλέγμα σε τμήμα της τομής των επιφανειών



(α)



(β)

Εικόνα 6.20: Παράδειγμα 5, (α) επιφάνειες NURBS, (β) πλέγμα σε τμήμα της τομής των επιφανειών

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάγκη προσομοίωσης σημαντικών φαινομένων στη ρευστομηχανική, την αντοχή των υλικών, στον ηλεκτρομαγνητισμό και αλλού, καθιστά ιδιαίτερα σημαντική την ανάπτυξη μεθόδων και λογισμικών για την παραγωγή πλέγματος. Τα μη δομημένα πλέγματα έχουν την ικανότητα να παράγονται εύκολα σε πολύπλοκες γεωμετρίες, σε αντίθεση με τα δομημένα.

Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε με την παραγωγή επιφανειακών μη δομημένων πλεγμάτων με τριγωνικά στοιχεία. Αυτό είναι το πρώτο βήμα για την παραγωγή δομημένων πλεγμάτων με τετραεδρικά στοιχεία στον όγκο του στερεού. Η διακριτοποίηση του όγκου θα ακολουθήσει σε επόμενο στάδιο.

Στην αρχή της εργασίας έγινε ανάλυση των διαφορετικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μη δομημένων πλεγμάτων. Η μέθοδος Advancing Front προσφέρει τα πλεονεκτήματα των υψηλής ποιότητας στοιχείων και της ακεραιότητας του ορίου. Η μέθοδος Delaunay προσφέρει τα πλεονεκτήματα της αποδοτικότητας και της στερεής μαθηματικής βάσης. Καμία από αυτές τις διαδικασίες δεν προσφέρει τα συνδυασμένα πλεονεκτήματα της αποτελεσματικότητας, της ποιότητας, της ευρωστίας, και των υγιών μαθηματικών. Η έρευνα εστιάζει στη βελτίωση αυτών των μεθόδων και τον συνδυασμό τους προκειμένου να υπάρξει βελτίωση στα γενικά χαρακτηριστικά. Για τριγωνικά στοιχεία έχουν αναπτυχθεί κυρίως μέθοδοι που χρησιμοποιούν συνδυασμένη προσέγγιση τοποθέτησης σημείων τύπου advancing front και συνδετικότητας τύπου Delaunay. Αυτές οι μέθοδοι μπορούν να παραγάγουν πλέγματα με ποιότητα παρόμοια με αυτήν των παραδοσιακών μεθόδων advancing front μαζί με την ευρωστία και τα υγιή μαθηματικά μιας προσέγγισης Delaunay. Μία τέτοια μέθοδος, η Frontal Delaunay, χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, για την παραγωγή επιφανειακού μη δομημένου πλέγματος με τριγωνικά στοιχεία.

Αρχικά, η μέθοδος Frontal Delaunay χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή πλέγματος στην επιφάνεια στερεών που ορίζονται από επίπεδες επιφάνειες. Η διαδικασία στηρίχθηκε στον μετασχηματισμό από τον τρισδιάστατο φυσικό χώρο σε τοπικό δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων σε κάθε έδρα του στερεού. Εκεί πραγματοποιείται τριγωνοποίηση με την μέθοδο Frontal Delaunay και στη συνέχεια το πλέγμα μετασχηματίζεται στις φυσικές συντεταγμένες. Τα διαφορετικά πλέγματα που δημιουργούνται για κάθε διαφορετική έδρα ενοποιούνται σε κοινή δομή, αφαιρώντας τα σημεία και τις ακμές που αναφέρονται περισσότερες από μία φορές και αναδιανέμοντας τα υπόλοιπα.

Στη συνέχεια η μέθοδος εφαρμόστηκε για τριγωνοποίηση σε καμπύλες επιφάνειες NURBS. Η τριγωνοποίηση πραγματοποιείται στον παραμετρικό (δισδιάστατο) χώρο και το πλέγμα στη συνέχεια μετασχηματίζεται στο φυσικό τρισδιάστατο χώρο. Εάν η προς τριγωνοποίηση επιφάνεια περιορίζεται από οριακές καμπύλες (οριζόμενες στον φυσικό χώρο), αυτές, με χρήση επαναληπτικής διαδικασίας μετασχηματίζονται στον παραμετρικό χώρο και παράγεται το πλέγμα. Ανάλογη διαδικασία ακολουθείται για παραγωγή πλέγματος σε τεμνόμενες επιφάνειες.

Στην τελευταία περίπτωση των τεμνόμενων επιφανειών τα αποτελέσματα δεν ήταν στον ίδιο βαθμό επιτυχημένα όσο στις προηγούμενες περιπτώσεις. Αιτία είναι ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση της τομής και των ορίων κάθε επιφάνειας. Παρ' όλα αυτά, κατασκευάστηκε ένα λογισμικό με πολλές δυνατότητες, που μπορεί να αποτελέσει τη βάση για παραγωγή πλέγματος σε τρεις διαστάσεις. Αυτός είναι ουσιαστικά ο τελικός στόχος και η συνέχεια της παρούσας εργασίας.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Allwright, S., Multiblock topology specification and grid generation for complete aircraft configurations, *Applications of Mesh Generation to Complex 3D Configurations*, AGARD Conference Proceedings, 1990.
2. Baker, T.J., Three-dimensional mesh generation by triangulation of arbitrary points sets, *Computational Fluid Dynamics Conference*, Hawaii, June 1987.
3. Baker, T.J., Automatic mesh generation for complex three-dimensional regions using a constrained Delaunay triangulation, *Engineering with Computers*, 1989.
4. Baker, T.J., Unstructured mesh generation by a generalized Delaunay algorithm, *Applications of Mesh Generation to Complex 3D Configurations*, AGARD Conference Proceedings, 1990.
5. Baker, T.J., Shape reconstruction and volume meshing for complex solids, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1991.
6. Baker, T.J., Triangulations, mesh generation and point placement strategies, *Frontiers of Computational Fluid Dynamics*, Caughey, D.A. and Hafez, M.M., editors, John Wiley and Sons, 1994.
7. Baker, T.J., Delaunay-Voronoi Methods. In Joe F. Thompson, Bharat K. Soni and Nigel P. Weatherill, editors, *Handbook of Grid Generation*, CRC Press, 1999.
8. Blacker T.D. and Sthepenson, M.B., Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1991.
9. Blacker T.D. and Meyers, R.J., Seams and wedges in plastering: a 3d hexahedral mesh generation algorithm, *Eng. Computers*, 1993.
10. Boissonnat, J.D., Shape reconstruction from planar cross sections, *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1988.
11. Bonet, J. and Peraire, J., An Alternating Digital Tree (ADT) algorithm for geometric searching and intersection problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1991.
12. Bowyer, A., Computing Dirichlet tessellations, *Comput. J.*, 1981.
13. Briere de L'isle, E. and George, P.L., Optimisation de maillages tridimensionnels, *INRIA Report*, 1993.
14. Cavendish, J.C., Field, D.A., and Frey, W.H., An approach to automatic tree-dimensional finite element mesh generation, *Meth. Eng.*, 1985.
15. Chew, P., Guaranteed quality mesh generation for curved surfaces, *Proc. 9th Symp. On Comp. Geom.* ACM Press, 1993.
16. Delaunay, B., Sur la sphere vide, *Bull. Acad. Science USSR VII: Class Sci. Mat. Nat.*, 1934.
17. Farin, G., Surfaces over Dirichlet tessellations. *Computer Aided Geometric Desing*, 1990.
18. Faux, I.D. and Pratt, M.J., *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood, Chichester, 1981.
19. Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, John Wiley, New York, 1987.
20. George, A.J., Computer implementation of the finite element method, Ph.D. Thesis, Stanford University, STAN-CS-71-208, 1971.
21. George, P.L., Hecht, F., and Saltel, E., Constraint of the boundary and automatic mesh generation, *Proc. 2nd International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics*, Sengupta, S., editors, Pineridge Press, 1988.
22. Golgolab, A., Mailleur 3D automatique des geometries complexes, INRIA Research Report, March 1989.

23. Green, P.J. and Sibson, R., Computing the Dirichlet tessellation in the plane. *The Comp. J.*, 1977.
24. Guibas, L. and Stolfi, J., Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams, *ACM Trans. Graphics*, 1985.
25. Hoffmann, C.M., *Geometric and Solid Modeling*, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1989.
26. Huet, F., Generation de maillage automatique dans des configurations tridimensionnelles complexes. Utilisation d' une Methode de Front, *Applications of Mesh Generation to Complex 3D Configurations*, AGARD Conference Proceeding, No. 464, 1990.
27. Knuth, D., *The Art Of Computer Programming-Sorting And Searching*, Vol. 3, Addison-Wesley, 1973.
28. Lawson, C.L., Properties of n-dimensional triangulations. *CAGD*, 1986.
29. Lee, D. and Lin, A., Generalized Delaunay Triangulation for planar graphs, *Discrete Comp. Geom.*, 1986.
30. Lo, S.H., A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1985.
31. Lo, S.H., Volume discretization into tetrahedral-II. 3D triangulation by advancing front approach, *Comp. Struct.*, 1991.
32. Lohner, R., Regridding surface triangulations, *J. Comp. Phys.*, 1996.
33. Mavriplis, D., An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness, AIAA Paper 93-0671, 1993.
34. Merriam, M., An efficient advancing front algorithm for Delaunay triangulation, AIAA Paper 91-0792, 1991.
35. Mortenson, M.E., *Geometric Modeling*, John Wiley, New York, 1985.
36. Jens-Dominik Muller. *On Triangles and Flow*, Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1996.
37. Patrikalakis M. Nicholas and Maekawa Takashi, *Shape Interrogation for Computer Aided Desing and Manufacturing*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
38. Peiro J., Surface Grid Generation. In Joe F. Thompson, Bharat K. Soni and Nigel P. Weatherill, editors, *Handbook of Grid Generation*, CRC Press, 1999.
39. Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K., and Zienkiewicz, O.C., Adaptive remeshing for compressible flow computations, *J. Comp. Phys.*, 1987.
40. Peraire, J. Peiro, J. Formaggia, L., Morgan, K. and Zienkiewicz, O.C., Finite element Euler computations in three dimensions, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1988.
41. Peraire, J., Morgan, K., and Peiro, J., Unstructured finite element mesh generation and adaptive procedures for CFD, *Applications of Mesh Generation to Complex 3D Configurations*, AGARD Conference Proceeding, No. 464, 1990.
42. Peraire J., Peiro J. and Morgan K., Advancing Front Grid Generation. In Joe F. Thompson, Bharat K. Soni and Nigel P. Weatherill, editors, *Handbook of Grid Generation*, CRC Press, 1999.
43. Piege, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.
44. Preparata, F.P. and Shamos, M.I., *Computational Geometry: an Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1985.
45. Rebay, S., Efficient unstructured mesh generation by means of delaunay triangulation and Bowyer-Watson algorithm, *J., Comp. Physics*, 1993.
46. Requicha, A.A.G. and Voelcher, H.B., Solid modeling: a historical summary and contemporary assessment, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1982.

47. Ruppert, J., Results on Triangulation and high quality mesh generation, Ph.D. thesis. University of California at Berkley, 1992.
48. Sharov, D. and Nakahashi, K., A boundary recovery algorithm for Delaunay tetrahedral meshing, *Proc. 5th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, Soni, B.K. and Thompson, J.F., editors, NSF Engineering Research Center for Computational Field Simulation, 1996.
49. Shenton, D.N. and Cendes, Z.J., Three-dimensional finite element mesh generation using Delaunay tessellation, *IEEE Trans. Magnetics*, MAG-21, 1985.
50. Shewchuk, J.R., Adaptive precision floating-point arithmetic and fast robust geometric predicates, *Computer Science Report*. Carnegie Mellon University, CMU-CS-96-140, 1996.
51. Sibson, R., Locally equiangular triangulations, *Comput. J.*, 1978.
52. Tanemura, M., Ogawa, T., and Ogita, N., A new algorithm for three-dimensional Voronoi tessellation, *J. Comp. Physics*, 1983.
53. Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A., and Mastin, C.W., *Numerical Grid Generation-Foundations and Applications*, North-Holland, 1985.
54. Thompson F. Joe, Soni K. Bharat and Weatherill P. Nigel, An Elementary Introduction. In Joe F. Thompson, Bharat K. Soni and Nigel P. Weatherill, editors, *Handbook of Grid Generation*, CRC Press, 1999.
55. Thompson F. Joe and Weatherill P. Nigel, Fundamental Concepts and Approaches. In Joe F. Thompson, Bharat K. Soni and Nigel P. Weatherill, editors, *Handbook of Grid Generation*, CRC Press, 1999.
56. Thomasset, F., *Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer Series in Comp. Physics, 1981.
57. Voronoi, G., Nouvelles applications des parametres continues a la theorie des formes quadratiques, dieuxieme memoire: recherches sur les paralleloedres primitive, *J. Reine Angew. Math.*, 1908.
58. Watson, D., Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes, *Comput. J.*, 1981.
59. Weatherill, N.P. and Hassan, O., Efficient three-dimensional grid generation using the Delaunay triangulation, *Proc. First European Computational Fluid Dynamics Conference*, Brussels, 1992.
60. Weatherill, N.P., Mesh generation in computational fluid dynamics, von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series 1989-04, Brussels, 1989.
61. Wright, J.P. and Jack, A.G., Aspects of three-dimensional constrained Delaunay meshing, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1994.
62. Zhu, J.Z., Zienkiewicz, O.C., Hinton, E., and Wu, J., A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1991.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΔΟΜΗ ΚΩΔΙΚΑ DELAUNDO

REAL FUNCTION AREA: Υπολογίζει την περιοχή ενός αυθαίρετου πολυγώνου με κορυφές που δίνονται αριστερόστροφα, αξιολογώντας το ανυσματικού γινομένου των διανυσμάτων κατά μήκος των εδρών των υπο-τριγώνων.

SUBROUTINE BACKGRD: Αντιγράφει την υπάρχουσα τριγωνοποίηση των ορίων του μπροστινού μέρους και εισάγει πρότυπο 9 ορίων στο υπόβαθρο πλέγμα. Εισάγει πρόσθετους κόμβους για να αφαιρέσει τις ανεπιθύμητες συνδέσεις μεταξύ των ορίων. Εισάγει κόμβους για να καθορίσει ένα στρώμα πυκνώσης.

SUBROUTINE BOXWALK: Βρίσκει την κοντινότερη κορυφή στα X,Y χωρίς να απαιτεί τις ιδιότητες Delaunay, δηλ. όταν το IVVALK αποτυγχάνει. Καταγράφει έναν δείκτη σε ένα κελί στην γειτονία, αρχικοποιεί μια ελάχιστη θέση με την κοντινότερη κορυφή αυτού του κελιού, και περικλείει όλα τα κελιά στην διαδρομή της οποίας οι δεσμευμένες θέσεις επικαλύπτονται με την ελάχιστη θέση.

SUBROUTINE BSPCCHK: Ελέγχει εάν οι αποστάσεις μεταξύ των νέων κόμβων είναι επαρκείς.

REAL FUNCTION BSPCINT: Παρεμβάλει τιμές αποστάσεων που έχουν ανατεθεί στους κόμβους ενός υπόβαθρου τριγώνου στο τρίγωνο.

REAL FUNCTION BSTRINT: Παρεμβάλει τιμές πυκνότητας που έχουν ανατεθεί στους κόμβους ενός υπόβαθρου τριγώνου στο τρίγωνο.

SUBROUTINE BUILDNDE: Παίρνει το κάθετο διάνυσμα, την απόσταση και τον κόμβο και δημιουργεί μια θέση με αυτά.

SUBROUTINE CALCVVR: Υπολογίζει τη θέση της κορυφής Voronoi δεδομένων των τριών κόμβων που τη διαμορφώνουν.

SUBROUTINE CHARTOINT: Διαβάζει έναν πραγματικό αριθμό από ένα αρχείο .ctr για το Delaundo.

SUBROUTINE CHARTOREAL: Μετατρέπει ένα αλφαριθμητικό χαρακτήρων σε έναν πραγματικό αριθμό.

SUBROUTINE CHKBND: Ελέγχει την συμμόρφωση των ορίων και ανταλλάσσει ακμές όταν είναι απαραίτητο.

SUBROUTINE CNCTNDE: Συνδέει το νέο σημείο με τα γειτονικά του σημεία.

SUBROUTINE COARSEINI: Εκτραχύνει τη διανομή των οριακών κόμβων από περίπου έναν παράγοντα 2, διπλασιάζει τις αποστάσεις στο υπόβαθρο πλέγμα και δημιουργεί μια αρχική τριγωνοποίηση με τη διακριτοποίηση του τραχέως ορίου.

SUBROUTINE COSANGL: Υπολογίζει τα συνημίτονα των εσωτερικών γωνιών των τριγώνων 123, 243, 124 και 143.

SUBROUTINE DEFCTRL: Θέτει τις προεπιλεγμένες τιμές για όλες τις παραμέτρους που καθορίζονται από το READCTRL όσο το δυνατόν είναι εφαρμόσιμο. Σημειώνεται ότι μερικές από αυτές τις προεπιλογές επαναρυθμίζονται στο `plausctrl.f`. Χάριν της απλότητας, δεν υπάρχει καμία επικοινωνία μεταξύ των δύο ρουτινών για τις προεπιλεγμένες ρυθμίσεις τους (other than your favorite editor).

PROGRAM DELAUNDO: Το DELAUNDO εκτελεί την τριγωνοποίηση Delaunay ενός δεδομένου συνόλου οριακών σημείων. Είτε χρησιμοποιείται ένα δεδομένο εσωτερικό νέφος σημείων είτε κατασκευάζεται ένα νέφος σημείων με τη μετωπική προσέγγιση DOMINO. Αυτό το νέφος σημείων κατασκευάζεται είτε ισοτροπικά είτε με κάποια πύκνωση, ανάλογα με τις τιμές που παρεμβάλλονται σε ένα υπόβαθρο πλέγμα. Το υπόβαθρο πλέγμα προέρχεται από την αρχική τριγωνοποίηση των οριακών κόμβων και τις πληροφορίες για τρίγωνα που δεν πρέπει να σχηματιστούν για να συνδέσει ορισμένα τμήματα ορίου. Για περαιτέρω πληροφορίες του πυκνώματος σε σχέση με το πάχος του στρώματος πύκνωσης κοντά στα στερεά τοιχώματα απαιτείται η μέγιστη αναλογία. Το πλέγμα κατασκευάζεται με τον αλγόριθμο Bowyer και χρησιμοποιείται διαγώνια ανταλλαγή για να εξασφαλιστεί ακεραιότητα του ορίου. Είναι διαθέσιμες διαφορετικές μορφές εξόδου συμβατές με VKB's decplot, DDZ's dplot ή AvS.

SUBROUTINE DIASWAP: Παίρνει ένα υπάρχον πλέγμα και ανταλλάσσει τις διαγωνίους σύμφωνα με διαφορετικά κριτήρια.

SUBROUTINE DLNYRSTR: Ανανεώνει ένα δεδομένο πλέγμα σε Delaunay, δηλ. επιβάλλει την συνθήκη MaxMin στις γωνίες.

SUBROUTINE DPWNTPL1: Παρεμβάλει τις τιμές που έχουν ανατεθεί στους κόμβους ενός υπόβαθρου τριγώνου στο τρίγωνο με δύναμη RP.

REAL FUNCTION DTIME: Παίρνει το IBM's `mclock` και το μετατρέπει στο πιο τυποποιημένο `dtime`.

SUBROUTINE FIXIAREA: Βρίσκει μια τιμή IArea για ένα τρίγωνο που καθορίζει την πύκνωση αλλά δεν προσδιορίζεται σε οποιοδήποτε μετωπικό στοιχείο.

SUBROUTINE FLGOUT: Εισάγει ένα flag για τα τρίγωνα έξω από το πεδίο αναφοράς.

SUBROUTINE FLGVVRCN: Βρίσκει την περιορισμένη κοιλότητα του σημείου NNde για να εισαχθεί.

SUBROUTINE FNDIAREA: Καθορίζει εάν τα υπόβαθρα τρίγωνα για ιξώδη πλεγματοποίηση είναι κατάλληλα συνδεδεμένα, τονίζει την πρώτη παραβίαση ή προσδιορίζει τη σχέση IArea δείχνοντας ένα ορισμένο στοιχείο για κάθε τρίγωνο.

SUBROUTINE FNDNDE: Βρίσκει μια έδρα ενός τριγώνου με μια ανεπαρκή αναλογία μήκους πλευράς για να βελτιώσει. Βρίσκει έναν κόμβο για κάθε τέτοια έδρα και ελέγχει την απόσταση μεταξύ των κόμβων.

SUBROUTINE FNDVSCND: Για ένα δεδομένο πλέγμα τριγώνων, βρίσκει έναν υπόβαθρο κόμβο για να καθορίσει τα όρια ενός στρώματος πύκνωσης.

FUNCTION JCYCL: Αυτή η συνάρτηση φέρνει την τιμή του I back στο διάστημα [1, 3] με κυκλικό τρόπο.

FUNCTION JVVR: Υπολογίζει τη γειτονική κορυφή Voronoi στην ακμή που διαμορφώνεται από το Node1 και το Node2.

FUNCTION ICYCL: Αυτή η συνάρτηση φέρνει την τιμή του I back στο διάστημα [1, NCYC] με κυκλικό τρόπο.

SUBROUTINE GETCTRL: Διαβάζει τις απαραίτητες παραμέτρους ελέγχου για το Delaundo από το stdin ή ένα αρχείο .ctr.

SUBROUTINE HELPMF: Εμφανίζει το μενού βοήθειας και βάζει σε έναν κατάλογο τις επιλεγμένες σελίδες βοήθειας.

SUBROUTINE HSORT: Κάνει μια ταξινόμηση σωρού (heapsort) στο ARRIN.

SUBROUTINE HULDPL: Γράφει τον κυρτό χώρο ή το υπόβαθρο πλέγμα σε μορφή .DPL.

INTEGER FUNCTION IFFYWALK: Βρίσκει τη θέση στην οποία βρίσκεται το σημείο X,Y, δεδομένης μιας θέσης από την οποία ξεκινάει την αναζήτηση. Η αναζήτηση γίνεται στην κατεύθυνση του μέγιστου γινόμενου ανυσμάτων του διανύσματος από το μέσο πλευράς μιας έδρας στο σημείο x,y και του προς τα έξω μοναδιαίου διανύσματος σε αυτήν την έδρα. Η διαφορά στο IWALK είναι ότι χρησιμοποιούνται τα κλιμακωμένα διανύσματα για το γινόμενο ανυσμάτων, προκειμένου να αποφευχθεί ο τερματισμός της αναζήτησης σε μια κοντινή θέση στις πολύ λεπτά διακριτοποιημένες περιοχές.

SUBROUTINE ILLICIT: Ελέγχει εάν ένα υπόβαθρο τρίγωνο συνδέεται μη επιτρεπτά.

SUBROUTINE INFOCTRL: Αναφέρει πληροφορίες για τις επιλεγμένες παραμέτρους.

SUBROUTINE INTCLD: Εισάγει εσωτερικούς κόμβους αφότου τα όρια έχουν τριγωνοποιηθεί. Σε περίπτωση τραχέων επιπέδων MG, παραμορφώνει τους τραχείς κόμβους του πλέγματος στις κορυφές του λεπτότερου πλέγματος.

SUBROUTINE INTROVIS: Παίρνει έναν κόμβο και τον εισάγετε σε μια περιορισμένη τριγωνοποίηση δεδομένης της θέσης που περιέχει το νέο κόμβο.

SUBROUTINE IVVALK: Βρίσκει την κορυφή Voronoi πιο κοντά στο στόχο «περπατώντας» στο διάγραμμα Voronoi και το υψηλότερο επίπεδο πλέγματος που βρίσκεται σε όλες τις γειτονικές κορυφές του πλέγματος που συνδέονται με το NNdePvt, συμπεριλαμβανομένου του NNdePvt.

SUBROUTINE IVVNX: Προσπαθεί να βρει μια κορυφή που συνδέεται με το NNdePvt και έχει γειτονιές μόνο από το NLevel-1 και δεν είναι κορυφή ορίου.

INTEGER FUNCTION IWALK: Βρίσκει τη θέση που βρίσκεται το σημείο X,Y, δεδομένης μιας θέσης από την οποία ξεκινάει την αναζήτηση. Η αναζήτηση γίνεται στην κατεύθυνση του μέγιστου γινόμενου ανυσμάτων του διανύσματος από το μέσο της πλευράς μίας έδρας στο σημείο x,y και το προς τα έξω μοναδιαίο διάνυσμα σε εκείνη την έδρα.

SUBROUTINE LPLC: Εφαρμόζει ένα φίλτρο Laplacian σε ένα δεδομένο τριγωνικό πλέγμα. Η μέθοδος του Richter του βαρύκεντρου (barycentrage pond'er'e) εφαρμόζεται για να μειώσει το βάρος των γειτονικών κόμβων που διαμορφώνουν πολλές ακμές. Η επίδραση ελέγχεται θέτοντας μια παράμετρο βήτα [0, 1].

SUBROUTINE NDEMGR: Εξάγει έναν κόμβο από τη DT, τον συγχωνεύει με έναν δεδομένο κόμβο, ελέγχει την συνθήκη απόστασης του νέου κόμβου και σε περίπτωση κατάλληλου διαστήματος, επανεισάγει το συγχωνευμένο κόμβο.

SUBROUTINE NDEX: Εξάγει έναν κόμβο από την τριγωνοποίηση και κλείνει το πλέγμα.

SUBROUTINE NGHBNDE: Βρίσκει τον επόμενο κόμβο πάνω ή κάτω στο στοιχείο.

SUBROUTINE PATH: Παίρνει ένα όνομα διαδρομής (υποκαταλόγου) από μια μεταβλητή του περιβάλλοντος. Βρίσκει το μήκος του για την προσάρτηση ονομάτων αρχείου και προσαρτεί μια κάθετο (/) (trailing slash), εάν είναι απαραίτητο.

SUBROUTINE PLAUSCTRL: Εκτελεί μερικές αληθοφανείς δοκιμές και ενδεχόμενες διορθώσεις των εισόδων του χρήστη στο αρχείο .ctr. Σημειώστε ότι αυτές οι προεπιλογές θέτονται στο defctrl.f. Χάριν της απλότητας, δεν υπάρχει καμία επικοινωνία μεταξύ των δύο ρουτινών για τις προεπιλεγμένες ρυθμίσεις τους (other than your favorite editor).

SUBROUTINE PSTPRC: Αντικαθιστά τις flagged καταχωρήσεις στους καταλόγους της τριγωνοποίησης με τις τελευταίες καταχωρήσεις.

SUBROUTINE PSTPRCS: Αντικαθιστά τις flagged καταχωρήσεις στους καταλόγους της τριγωνοποίησης με τις τελευταίες καταχωρήσεις.

SUBROUTINE PULLSTACK: Εξάγει ένα ζεύγος θέσεων για μια πιθανή ανταλλαγή εκτός της στοίβας.

SUBROUTINE PUSHSTACK: Βάζει μια θέση με μια καθορισμένη έδρα στο κατώτατο σημείο της στοίβας.

SUBROUTINE PWNTPL: Παρεμβάλλει τις τιμές που έχουν ανατεθεί στους κόμβους ενός υπόβαθρου τριγώνου στο τρίγωνο με δύναμη RP.

SUBROUTINE QUADDPL: Γράφει την έξοδο μιας τριγωνοποίησης Delaunay που έχει μετατραπεί σε τετραγωνικά στοιχεία με έξι κόμβους ανά τρίγωνο σε μορφή .DPL.

SUBROUTINE READCHAR: Διαβάζει έναν χαρακτήρα από ένα αρχείο .ctr για το Delaundo.

SUBROUTINE READCTRL: Διαβάζει το περιεχόμενο του αρχείου .ctr ή προτρέπει για τις επιλεγμένες παραμέτρους. Εμφανίζει ένα Hello-banner, ανοίγει και κλείνει το αρχείο .ctr, ανοίγει το αρχείο log.

SUBROUTINE READFIP: Διαβάζει τα δεδομένα εισόδου για το DELAUNDO από ένα τυποποιημένο αρχείο .PTS.

SUBROUTINE READINTEGER: Διαβάζει έναν ακέραιο αριθμό από ένα αρχείο .ctr για το Delaundo.

SUBROUTINE READKEY: Διαβάζει μια λέξη κλειδί από ένα αρχείο .ctr για το Delaundo.

SUBROUTINE READPTS: Διαβάζει τα δεδομένα εισόδου για το DELAUNDO από ένα μη τυποποιημένο αρχείο dpl.pts.

SUBROUTINE READREAL: Διαβάζει έναν πραγματικό αριθμό από ένα αρχείο .ctr για το Delaundo.

SUBROUTINE READSTRING: Διαβάζει ένα αλφαριθμητικό από ένα αρχείο .ctr για το Delaundo.

SUBROUTINE RMBKG: Αφαιρεί πρόσθετες υπόβαθρες κορυφές. Ξαναπακετάρει τον κατάλογο των κορυφών, ρυθμίζει το NFrmNde σε όλα τα επίπεδα.

SUBROUTINE SCANBND: Παίρνει το δεδομένο όριο μεταξύ του NdeLo και του NdeHi και το σαρώνει στη δεδομένη κατεύθυνση NdeInc στους κατασκευασμένους ιξώδεις κόμβους.

SUBROUTINE SETUP: Εγκαθιστά ένα αρχικό απλό (τετράπλευρο) έτσι ώστε όλα τα σημεία που προστίθενται είναι μέσα στον κυρτό χώρο.

SUBROUTINE SPCNWCHK: Ελέγχει εάν οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι επαρκείς θεωρώντας μη-Ευκλείδεια απόσταση.

SUBROUTINE SPCOLCHK: Εξετάζει το νέο κόμβο για κατάλληλη απόσταση με όλους τους παλαιούς κόμβους που εισήχθησαν ήδη στη δομή.

SUBROUTINE SUPCALC: Υπολογίζει τον εκθέτη ενός υπερκύκλου για να ταιριάξει την μεταβολή ύψους στο στρώμα πυκνώσης.

SUBROUTINE SUPNTPL: Παρεμβάλει τις τιμές αναθέτοντας τους κόμβους ενός υπόβαθρου τριγώνου σε αυτό το τρίγωνο γραμμικά. Χαρτογραφεί την προκύπτουσα κλιμάκωση σε ένα υπερκύκλο με δύναμη SP μεταξύ των σημείων (VL, UL, VR, UR).

SUBROUTINE SWAPDIAG: Ανταλλάσσει μια διαγώνιο σε έναν τετράπλευρο που διαμορφώνεται από δύο τρίγωνα.

SUBROUTINE SWAPS: Παίρνει ένα υπάρχον πλέγμα και ανταλλάσσει τις διαγωνίους για να MinMax ή να MaxMin τη γωνία.

SUBROUTINE TRICAV: Τριγωνοποιεί μια κοιλότητα.

SUBROUTINE TRIDPL: Γράφει την έξοδο μιας τριγωνοποίησης Delaunay σε μορφή .DPL.

SUBROUTINE VISBOX: Εξομοιώνει δομημένη τριγωνοποίηση σε μορφή επίπεδων θέσεων που ευθυγραμμίζονται με την επιφάνεια στις περιοχές που ανήκουν αποκλειστικά σε μια επιφάνεια.

SUBROUTINE XAMPLE: Γεμίζει τις παραμέτρους ελέγχου που είναι απαραίτητες για το Delaundo για ένα παράδειγμα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II

ΑΡΧΕΙΑ ΕΙΣΟΔΟΥ ΚΑΙ ΕΞΟΔΟΥ

Τα αρχεία .ctr

Το λογισμικό Delaundo αναζητά αρχικά ένα αρχείο "Delaundo.ctr" στον τοπικό κατάλογο. Ανάλογα με τις παραμέτρους που τίθενται σε αυτό το αρχείο, προτρέπει ή όχι για οποιαδήποτε άλλη είσοδο. Εάν δεν υπάρχει τέτοιο αρχείο, προτρέπει για ένα όνομα αρχείου. Με την εισαγωγή σε αυτήν την προτροπή:

- "?", θα ζητηθούν όλες οι απαιτούμενες παράμετροι, π.χ. όνομα αρχείου εισόδου, όνομα αρχείου εξόδου, κτλ.
- του αλφαριθμητικού "ALLPAR" (σε κεφαλαία!), θα ζητηθούν όλες οι παράμετροι που απαιτούνται στις ισχύουσες επιλογές. Π.χ. δεν θα ζητηθεί αναλογία εάν δεν χρησιμοποιείται πλέγματα πυκνώσης. Εάν εισαχθεί ακατάλληλη απάντηση, π.χ. ένας ακέραιος αντί χαρακτήρα, λαμβάνεται η προεπιλεγμένη τιμή, εάν είναι κατάλληλη.
- του αλφαριθμητικού "HELPME", ανοίγει τον κατάλογο βοήθειας με διαφορετικές υπό-επιλογές.
- του αλφαριθμητικού "XAMPLE", τρέχει μερικά παραδείγματα.
- του αλφαριθμητικού "RELEAS", παρέχει πληροφορίες σχετικά με την ισχύουσα έκδοση, όπως ο αριθμός της έκδοσης που τρέχει ή αλλαγές από την τελευταία έκδοση.
- ενός ονόματος αρχείου, το DELAUNDO θα προσπαθήσει να διαβάσει αυτό το αρχείο για να εξαγάγει τις απαραίτητες πληροφορίες.

Σε ένα αρχείο .ctr, οι πληροφορίες δίνονται με λέξεις κλειδιά έξι κεφαλαίων γραμμάτων. Η επιθυμητή επιλογή ή τιμή ή οτιδήποτε άλλο, ακολουθεί στη γραμμή μετά από τη λέξη κλειδί. Οι λέξεις κλειδιά και οι επιλογές είναι:

IGNORE

Το υπόλοιπο αυτής της γραμμής θα αγνοηθεί. Το "%" δίνει τα ίδια αποτελέσματα.

HELPME

Εμφανίζεται ο κατάλογος βοήθειας και επιτρέπει την επιλογή κάποια σελίδας βοήθειας.

XAMPLE

Εμφανίζεται ο κατάλογος παραδειγμάτων και επιτρέπει την επιλογή κάποιου από τα παραδείγματα.

RELEAS

Παρέχει πληροφορίες για την ισχύουσα έκδοση.

VERBOS

Καθορίζει την διεξοδικότητα. Το 0 δεν δίνει καμία έξοδο, εκτός από προειδοποιήσεις και μηνύματα σημαντικών σφαλμάτων, το 5 δίνει όλες τις εξόδους. Η προεπιλεγμένη τιμή είναι 3.

ALLPAR

Θέτοντας "t" ή "y" ζητούνται όλες οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται στις ισχύουσες επιλογές. Π.χ. δεν θα ζητηθεί αναλογία εάν δεν χρησιμοποιείται πλέγμα πυκνώσης. Εάν εισαχθεί μια ακατάλληλη απάντηση, π.χ. ένας ακέραιος αριθμός αντί χαρακτήρα, λαμβάνεται η προεπιλεγμένη τιμή, εάν είναι κατάλληλη. Η προεπιλογή είναι "n", "f".

INFILE

Το όνομα του αρχείου .pts με τους κόμβους. Η προεπιλογή είναι "Delaundo.pts".

INFORM

Το αρχείο εισόδου μπορεί να είναι τυποποιημένο "t", "y", ή μη τυποποιημένο "n", "f". Οι μορφές αρχείων εισόδου, .pts, εξηγούνται παρακάτω. Η προεπιλογή είναι "t".

NODEUS

Θέτοντας "t" ή "y", το DELAUNDO θα χρησιμοποιήσει ένα δεδομένο σύνολο εσωτερικών κόμβων. Σημειώνεται ότι μπορεί να οριστεί μόνο ένα από τα NODEUS ή NODECO εξαιτίας των περιορισμών κωδικοποίησης. Η προεπιλογή είναι "f", "n".

NODECO

Θέτοντας "t" ή "y", το DELAUNDO θα κατασκευάσει ένα σύνολο εσωτερικών κόμβων με τη μέθοδο FroD. Η προεπιλογή είναι "t", "y".

ASKROW

Θέτοντας "t" ή "y", το DELAUNDO θα προτρέψει το χρήστη να κατασκευαστούν περισσότερες σειρές, μόλις υπερβούν τους ισχύοντες υπολογισμούς. Διαφορετικά η διαδικασία θα δώσει έξοδο το πλέγμα στο ισχύον στάδιο. Η προεπιλογή είναι "f", "n".

ANTICO

Θέτοντας "t" ή "y", το DELAUNDO θα χρησιμοποιήσει τις πληροφορίες για μη σύνδεση που προσδιορίζονται στο αρχείο .pts. Η προεπιλογή είναι "f", "n".

ALLDIS

Θέτοντας "t" ή "y", το DELAUNDO θα αφαιρέσει όλες τις ακμές στο υπόβαθρο πλέγμα που συνδέουν μη διαδοχικούς οριακούς κόμβους, ακόμα κι αν βρίσκονται στο ίδιο τμήμα ορίου. Η χρήση του με διακριτοποίηση μπορεί να οδηγήσει σε πολλούς πρόσθετους κόμβους που απαιτούνται για αποσύνδεση των κοντινών επιφανειών.

SPCRAT

Αυτή η δεκαδική τιμή προσδιορίζει την αναλογία μεταξύ της μεταβολής της απόστασης στα σημεία των υψηλότερων και χαμηλότερων αποστάσεων. Τιμές μεγαλύτερες του 1 ωθούν το DELAUNDO να κάνει παρεμβολή με έναν νόμο ισχύος που θα επεκτείνει τις περιοχές των «καλών» αποστάσεων περαιτέρω στο πεδίο αναφοράς. Η προεπιλογή είναι 1.

DTOLER

Αυτή η δεκαδική τιμή προσδιορίζει το κλάσμα του μεγέθους του υπόβαθρου πλέγματος που χρησιμοποιείται ως ελάχιστη απόσταση μεταξύ κόμβων. Η προεπιλεγμένη τιμή είναι 0.65

QTOLER

Αυτή η δεκαδική τιμή προσδιορίζει το ελάχιστο κλάσμα του μέγιστου μήκους πλευράς που οι μικρότερες πλευρές πρέπει να έχουν προκειμένου να κατασταθεί το τρίγωνο αποδεκτό. Η προεπιλεγμένη τιμή είναι 0.65

STRETC

Θέτοντας "t" ή "y", το DELAUNDO θα κατασκευάσει ένα στρώμα πύκνωσης τριγώνων τύπου σφήνας σχηματίζοντας ορθογώνια boxes γύρω από τις μετωπικές επιφάνειες. Η προεπιλογή είναι "f", "n".

BTOLER

Αυτή η δεκαδική τιμή προσδιορίζει το ελάχιστο κλάσμα του μεγέθους του υπόβαθρου πλέγματος που χρησιμοποιείται ως ελάχιστη απόσταση μεταξύ κόμβων στο υπόβαθρο πλέγμα. Η προεπιλεγμένη τιμή είναι 2.

DELTAS

Αυτή η δεκαδική τιμή προσδιορίζει το πάχος του στρώματος πύκνωσης στην κλίμακα των άλλων σημείων. Εάν το STRETC προσδιορίζεται ως "t" ή "y", απαιτείται αυτή η παράμετρος.

MAXASP

Αυτή η δεκαδική τιμή προσδιορίζει τη μέγιστη αναλογία στο στρώμα πύκνωσης. Εάν το STRETC προσδιορίζεται ως "t" ή "y", απαιτείται αυτή η παράμετρος.

MVISRO

Αυτή η ακέραια τιμή προσδιορίζει πόσες ιξώδεις σειρές πρόκειται να χτιστούν. Εάν το ASKROW έχει τεθεί "t" ή "y", ζητούνται από τον χρήστη περισσότερες σειρές. (Ο περιορισμός του αριθμού σειρών θεωρείται εργαλείο διόρθωσης προγραμματιστικών λαθών.) Η προεπιλογή είναι 30000.

ISMOOT

Αυτή ακέραια τιμή προσδιορίζει πόσες σειρές πύκνωσης κελιών θα ανοίξουν για την ισοτροπική επανατριγωνοποίηση μόλις ολοκληρωθεί η διαδικασία πύκνωσης. Το 0 δεν επιτρέπει καμία επανατριγωνοποίηση, το 1 επιτρέπει την επανατριγωνοποίηση των πιο ακραίων κελιών, το 2 επιτρέπει την επανατριγωνοποίηση των γειτονικών των πιο ακραίων κελιών επίσης. (Σημειώνεται ότι όποτε τα στρώματα πύκνωσης από διαφορετικά τμήματα γεωμετρίας προσκρούουν το ένα στο άλλο, η "συρραφή" γίνεται πιο ομαλά με ISMOOT: 2). Η προεπιλογή είναι 2.

MISORO

Αυτή η ακέραια τιμή προσδιορίζει πόσες ισοτροπικές σειρές πρόκειται να χτιστούν. Εάν το ASKROW έχει τεθεί "t" ή "y", ζητούνται από τον χρήστη για περισσότερες σειρές. (Ο περιορισμός του αριθμού σειρών θεωρείται εργαλείο διόρθωσης προγραμματιστικών λαθών.) Η προεπιλογή είναι 30000.

LAPLAC

Θέτοντας "t" ή "y", εφαρμόζεται ένα φίλτρο Laplacian για την ομαλοποίηση του πλέγματος. Η προεπιλογή είναι "f". Σημειώστε ότι η εφαρμογή Laplacian σε ένα πλέγμα πυκνώσης πιθανότατα θα αποτύχει λόγω της επικάλυψης πλέγματος. Η διαδικασία πίσω προς τη Delaunay δεν είναι σε θέση να ανακτηθεί.

RSWEEP

Αυτή η ακέραια τιμή προσδιορίζει τον αριθμό των σαρώσεων χαλάρωσης για το Laplacian. Η προεπιλογή είναι 10.

LPBETA

Αυτή η δεκαδική τιμή προσδιορίζει πόσο αυξάνει το βάρος των σημείων με την αύξηση του βαθμού κορυφής. Το 0 σημαίνει σταθερά βάρη, το 1 είναι η μέγιστη διακύμανση. Η προεπιλογή είναι 0.5.

RELFAC

Αυτή η δεκαδική τιμή προσδιορίζει τον παράγοντα χαλάρωσης για το Laplacian. Τα όρια σταθερότητας είναι [0, 1], η προεπιλογή είναι 0.75.

MLEVEL

Αυτή η ακέραια τιμή προσδιορίζει τον αριθμό επιπέδων πολύ-πλέγματος που πρόκειται να παραχθεί. Το μέγιστο επιτρεπόμενο βάθος είναι 10, η προεπιλογή είναι 1.

FLATSW

Θέτοντας "t" ή "y", το DELAUNDO κάνει διαγώνια ανταλλαγή στο τελικό πλέγμα προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν οι μέγιστες γωνίες. (Σημειώνεται ότι αν και η εφαρμογή είναι σχετικά αποδοτική στο να αποτρέψει οποιαδήποτε χειρότερη περίπτωση, χρησιμοποιείται μόνο για να διορθώσει τις περιπτώσεις όπου η διαδικασία πυκνώσης έχει σταματήσει πριν φθάσει σε ισοτροπία και η ισοτροπική διαδικασία δημιουργεί επίπεδα κελιά.) Η προεπιλογή είναι "f", "n".

ANGMAX

Αυτή η δεκαδική τιμή προσδιορίζει τη μέγιστη ανεκτή γωνία κελιών πριν το FLATSW συμβάλει. (Σημειώνεται ότι αυτό δεν εγγυάται ότι όλες οι γωνίες είναι κάτω από αυτή την τιμή. Η διαγώνια ανταλλαγή δεν πραγματοποιείται εάν η μέγιστη γωνία στον τετράπλευρο είναι να αυξηθεί.) Η προεπιλογή είναι 120.

MCYCSW

Αυτή η ακέραια τιμή προσδιορίζει πόσοι κύκλοι ανταλλαγής πρόκειται να εκτελεστούν. Η προεπιλογή είναι 10.

OUTFIL

Αυτό το αλφαριθμητικό είναι το όνομα αρχείου εξόδου. Η προεπιλογή είναι "delaundo.dpl".

OUTTYP

Αυτός ο χαρακτήρας καθορίζει τον τύπο εξόδου. Οι πιθανοί τύποι είναι:

t: η τριγωνοποίηση με τα κελιά έξω από το πεδίο αναφοράς αφαιρείται.

- q: η τριγωνοποίηση t, αλλά με 6 κόμβους ανά τρίγωνο για τα τετραγωνικά στοιχεία.
- h: ο κυρτός χώρος με όλα τα τρίγωνα. Αυτό είναι χρήσιμο για τη δημιουργία ενός πλέγματος διεσπαρμένων κόμβων για σκοπούς παρεμβολής ή για διόρθωση προγραμματιστικών λαθών σε περίπτωση που ένας έλεγχος επιβολής ορίου αποτυγχάνει.
- b: το υπόβαθρο πλέγμα με τους αυτόματα προστιθέμενους κόμβους υποβάθρου. Οι κομβικές τιμές που δίνονται είναι η απόσταση κόμβων ως rho (1. ποσότητα κατάστασης) και το μέγεθος πυκνώσης που πολλαπλασιάζεται με τη απόσταση ως rho*u (2. ποσότητα κατάστασης).
- i: η αρχική τριγωνοποίηση του συνόλου δεδομένων κόμβων για σκοπούς διόρθωσης προγραμματιστικών λαθών.
- Η προεπιλογή είναι "t".

OUTFOR

Αυτός ο χαρακτήρας καθορίζει τη μορφή εξόδου. Οι πιθανές μορφές είναι:

- g: ένα VKB .gri αρχείο με πλέγμα. Μόνο για τύπους t, q, h.
- o: ένα VKB .out αρχείο με πλέγμα και λύση. Μόνο για τύπους t, q, h.
- d: ένα αρχείο dplot. Όλοι οι τύποι.
- u: ένα AvS ucd αρχείο. Δεν υποστηρίζεται πραγματικά, να μην χρησιμοποιείται. Μόνο τύποι t, b, h.

Η προεπιλογή είναι "d".

TITLE1,...,TITLE4

Τίτλοι για τις μορφές εξόδου g και o. Οι τίτλοι 2-4 εφαρμόζουν μόνο στο o. Η προεπιλογή είναι " ".

DOLOGF

Θέτοντας "t" ή "y", το DELAUNDO θα γράψει ένα αρχείο log. Η προεπιλογή είναι "f", "n".

LOGFIL

Αυτό το αλφαριθμητικό είναι το όνομα του αρχείου log. Η προεπιλογή είναι "delaundo.log".

ENDDAT

Οποιοσδήποτε πληροφορίες μετά από αυτήν την λέξη κλειδί θα αγνοηθούν.

Αρχεία τύπου .pts

Οι πληροφορίες στα τυποποιημένα .pts αρχεία δίνονται με λέξεις κλειδιά, που αποτελούνται από έξι κεφαλαία γράμματα. Οι πληροφορίες που αφορούν στην κάθε λέξη κλειδί ακολουθούν μετά από αυτή. Οι λέξεις κλειδιά που είναι αναγνωρίσιμες από το DELAUNDO είναι οι ακόλουθες:

NEWBND

Ανοίγει ένα νέο τμήμα ορίου και κλείνει το προηγούμενο (εάν υπάρχει). Οποιοσδήποτε πληροφορίες σχετικά με ένα όριο πρέπει να δοθούν πριν από την επόμενη δήλωση NEWBND, INDEXY ή ENDDAT.

%

Σημάδι σχολίου. Μια γραμμή που αρχίζει με "%" αγνοείται.

NAMEBN

Όνομα ορίου. Κάθε τμήμα μπορεί να πάρει σαν όνομα έναν αριθμό μεταξύ 1 και 20. Τα τμήματα έχουν σαν διεύθυνση αυτό το όνομα. Εάν το όνομα παραληφθεί, το προεπιλεγμένο όνομα που λαμβάνεται είναι ο αριθμός του ορίου από τη θέση στο αρχείο .pts εάν αυτό το όνομα δεν έχει ήδη χρησιμοποιηθεί. Διαφορετικά επιλέγεται το πρώτο ανοικτό όνομα που αρχίζει από 1. Σημειώνεται ότι είναι κακή πρακτική να παραλειφθεί το όνομα εκτός από τα μόνα συνδεδεμένα όρια που δεν φέρουν καμία πληροφορία για μη σύνδεση. Επίσης, μπορεί να δημιουργηθεί πρόβλημα εάν ένα όνομα που επιλέγεται από το χρήστη για ένα όριο, συμπίπτει με ένα όνομα που δίνεται από το πρόγραμμα σε ένα όριο που είναι νωρίτερα στη λίστα στο .pts αρχείο.

NRBNDE

Αριθμός κόμβων. Ο αριθμός των κόμβων που δίνονται στο αρχείο .pts για αυτό το όριο συγκρίνεται με αυτόν τον ακέραιο. Εάν δεν συμπίπτουν εμφανίζεται προειδοποίηση.

NFRSBN

Το όνομα του ορίου που είναι συνδεδεμένο με τον πρώτο κόμβο αυτού του ορίου. Εάν το NFRSBN παραλείπεται, το όριο θεωρείται ότι συνδέεται με τον εαυτό του. Το NFRSBN είναι λίγο δυσνόητο για τα όρια τύπου wake που συνδέονται με μια στερεά επιφάνεια. Από σύμβαση, για έναν αριστερόστροφο όριο wake, δηλ. ITYPBN = + 4, το NFRSBN είναι το όριο αριστερά της σύνδεσης, όπως φαίνεται από το wake. Σε αυτήν την περίπτωση, το NLSTBN = 0. Σημειώνεται ότι, για λόγους διατήρησης απλής δομής δεδομένων, τα όρια τύπου wake δεν μπορούν να συνδεθούν με άλλα όρια ίδιου τύπου. Μπορούν μόνο να αφεθούν ανοικτά, NFRSBN = 0, ή να συνδεθούν με μια στερεά επιφάνεια σε μια ένωση τμημάτων ορίου σε ένα από τα τέλη τους.

NLSTBN

Το όνομα του ορίου που είναι συνδεδεμένο με τον τελευταίο κόμβο αυτού του ορίου. Εάν το NLSTBN παραλείπεται, το όριο θεωρείται ότι συνδέεται με τον εαυτό του. Στην περίπτωση όπου ITYPBN = -4, το NLSTBN είναι το όριο αριστερά της σύνδεσης, όπως φαίνεται από το όριο wake. Οι περιορισμοί στη σύνδεση τμημάτων τύπου wake είναι αμετάβλητοι, φυσικά.

ITYPBN

Αρχεία τύπου .pts

Ο τύπος του ορίου. Οι πιθανοί τύποι είναι:

- 1 ένα μετωπικό, ενισχυμένο όριο. (Π.χ. στερεό σώμα.)
- 2 ένα μη-μετωπικό, ενισχυμένο όριο. (Π.χ. εξωτερικό όριο.)
- 3 ένα μη-μετωπικό, μη-ενισχυμένο σύνολο κόμβων. (Π.χ. ένα σύνολο εσωτερικών κόμβων που χρησιμοποιούνται όταν επίσης κατασκευάζονται εσωτερικοί κόμβοι. Σημειώνεται ότι δεδομένου ότι δεν υπάρχει καμία κομβική επικάλυψη οφειλόμενη στα συνδεδεμένα τμήματα, χρησιμοποιούνται όλοι οι κόμβοι.)
- 4 ένα μετωπικό, μη-ενισχυμένο όριο. (Π.χ. ένα wake. Σημειώνεται ότι δεδομένου ότι δεν υπάρχει καμία κομβική επικάλυψη οφειλόμενη στα συνδεδεμένα τμήματα, χρησιμοποιούνται όλοι οι κόμβοι.)
- 9 ένα όριο στο υπόβαθρο πλέγμα. (Π.χ. για να αλλάξει την διανομή αποστάσεων.)

Όλα τα όρια με θετικό τύπο έχουν το πεδίο αναφοράς αριστερά, ενώ με αρνητικό τύπο δεξιά. Η προεπιλογή είναι 1.

MINRES

Ο ελάχιστος απαιτούμενος διαχωρισμός για αυτό το τμήμα. Το τμήμα δεν θα εκτραχυνθεί πέρα από αυτήν την τιμή. Η προεπιλογή είναι 2.

ANTICO

Το σύνολο των ονομάτων των τμημάτων που δεν πρέπει να συνδεθούν. Η σύνδεση μεταξύ των κοινών ορίων ANTICO θα αφαιρεθεί από εισαγωγή κόμβων με τιμή απόστασης που εξάγεται από τις επιφάνειες με μέση βαθμωτή μεταβολή. Αυτές οι πληροφορίες χρησιμοποιούνται μόνο εάν το ANTICO έχει τεθεί στο αρχείο .ctr.

BNDEXY

Το σύνολο των οριακών κόμβων ως ζεύγη x, y.

NRINDE

Ο αριθμός των εσωτερικών κόμβων που βρίσκονται στο αρχείο .pts συγκρίνεται με αυτόν τον ακέραιο. Εάν δεν συμπίπτουν εμφανίζεται προειδοποίηση. Σημειώνεται ότι το NRINDE και το NRBNDE είναι ισοδύναμα.

INDEXY

Το σύνολο των οριακών κόμβων ως ζεύγη x, y. Μια δήλωση INDEXY ανοίγει ένα όριο τύπου 3, το οποίο είναι ένα σύνολο μη-ενισχυμένων κορυφών μπροστινού επιπέδου. Είναι ισοδύναμο με τον καθορισμό ITYPBN: 3, NFRSBN: 0, NLSTBN: 0. Κάθε νέα δήλωση INDEXY θα ανοίξει έναν νέο τμήμα τύπου 3.

ENDDAT

Οτιδήποτε μετά από μια δήλωση ENDDAT θα αγνοηθεί.

Αρχεία τύπου .dpl

δεδομένα μη δομημένου πλέγματος

(μια πρώτη γραμμή με μια επικεφαλίδα.)

8.0 1

(ο αριθμός κελιών, και δύο θέσεις ακέραιων αριθμών, π.χ. αριθμός των προηγούμενων επαναλήψεων και της μεταβλητής για να ελέγξει τη σύγκλιση).

3 9 4 5 13 6 4 1

3 9 1 2 10 4 5 2

3 4 2 3 11 12 4 3

(για κάθε κελί, ο αριθμός γωνιών, οι κόμβοι σε κάθε γωνία σε αριστερόστροφη φορά, τα γειτονικά κελιά με το γειτονικό #1 που είναι απέναντι από τον κόμβο # 1, δηλ γειτονικό #1 και αυτό το κελί μοιράζονται τους κόμβους # 2,3, και ένας τρέχων μετρητής).

3 9 2 4 3 1 2 4

3 9 8 1 9 2 8 5

3 9 5 7 7 8 1 6

3 7 5 6 14 15 6 7

3 9 7 8 16 5 6 8

9

(ο αριθμός των κόμβων.)

1. 1. 1. 1. 0. 0.

(τέσσερις ποσότητες γενικών πληροφοριών και δύο θέσεις δεκαδικών, π.χ., αναφορές κανονικοποίησης για L2 και νόρμες Linfinity για την επανεκκίνηση).

0.3000000E+01 0.0000000E+00 1. 1. 1. 1. 1

0.3000000E+01 0.2000000E+01 1. 1. 1. 1. 2

0.3000000E+01 0.3000000E+01 1. 1. 1. 1. 3

0.2000000E+01 0.3000000E+01 1. 1. 1. 1. 4

(για κάθε κόμβο, οι συντεταγμένες x και y, τέσσερις ποσότητες δήλωσης, και ένας τρέχων μετρητής)

0.1000000E+01 0.3000000E+01 1. 1. 1. 1. 5

0.0000000E+00 0.3000000E+01 1. 1. 1. 1. 6

0.0000000E+00 0.2000000E+01 1. 1. 1. 1. 7

0.0000000E+00 0.0000000E+00 1. 1. 1. 1. 8

0.1267948E+01 0.1000000E+01 1. 1. 1. 1. 9

4 4 1 3 6 8 2 4 3 1

(ο αριθμός τμημάτων ορίου, ο αριθμός γωνιών μεταξύ των τμημάτων ορίου, οι αριθμοί κόμβων σε κάθε γωνία και το αριστερά προσανατολισμένο όνομα ορίου για κάθε γωνία, δηλ το όνομα του ορίου που προσανατολίζεται με το πεδίο αναφοράς αριστερά, που έχει αυτούς τους κόμβους ως πρώτο κόμβο).

1 2

(Για κάθε τμήμα ο αριθμός κόμβων κατά μήκος του τμήματος και το όνομα του τμήματος)

1 8 5 9

(για κάθε έδρα ορίου, οι δύο κόμβοι διαμόρφωσης, ο εσωτερικός γειτονικός και ένας μετρητής. Σημειώνεται ότι ο προσανατολισμός οποιασδήποτε έδρας αλλάζει κατά την όψη της από το άλλο κελί που μοιράζεται την έδρα. Για τα κελιά ορίου αυτό σημαίνει ότι διαπερνώντας από τον πρώτο εμφανισμένο κόμβο στη λίστα ενός στοιχείου στο δεύτερο, το πεδίο αναφοράς είναι δεξιά).

```

2 4
2 1 2 10
3 2 3 11
3 3
4 3 3 12
5 4 1 13
6 5 7 14
2 1
7 6 7 15
8 7 8 16
0 -1

```

(ένας δείκτης ότι δεν υπάρχει καμία εξωτερική έδρα ορίου (βλ dplot για καθορισμό) και ένα ψευδές όνομα ορίου).

Το αρχείο .dpl που εξάγει το **Mesh** παραλείπει κάποιες από τις παραπάνω πληροφορίες όπως οι θέσεις ακέραιων και δεκαδικών αριθμών, ποσότητες που δηλώνουν γενικές πληροφορίες και το κομμάτι που ακολουθεί μετά τις συντεταγμένες των κόμβων, επειδή δεν παρουσιάζουν άμεση χρησιμότητα σε αυτό το σημείο.

Παραδείγματα αρχείων

Αρχείο .dip

8
0.0 0.0 0.0
1.0 0.0 0.0
1.0 1.0 0.0
0.0 1.0 0.0
0.0 0.0 1.0
1.0 0.0 1.0
1.0 1.0 1.0
0.0 1.0 1.0
12
1 2
2 3
3 4
4 1
5 6
6 7
7 8
8 5
1 5
2 6
3 7
4 8
6
1
4
1 2 3 4
1
4
5 8 7 6
1
4
1 9 5 10
1
4
2 10 6 11
1
4
3 11 7 12
1
4
4 12 8 9

Αρχείο .ctr

VERBOSe:

3

ALLPARameters:

f

INFILE:

plane1.pts

INFORMatted:

t

NODEUSe:

f

NODECOonstr.:

t

ANTICOnnect.:

f

SPCRATio:

1.000000

STRETChing

f

BTOLERance:

1.500000

DELTAStar:

0.2000000

MAXASPect ratio:

10.00000

MVISROw:

1000

ASKROW

f

ISMOOTh:

2

MISOROW:

1000

ANGMAX:

133.0000

MCYCSWAP:

20

OUTFILE:

plane1.dpl

OUTTYPe:

t

OUTFORmat:

dpl

DOLOGFile:

t

LOGFILE:

plane1.log

ENDDAT:

Αρχείο .pts

NEWBND

NAMEBN

6

NRBNDE

41

NFRSBN

6

NLSTBN

6

ITYPBN

1

MINRES

2

BNDEXY

0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
0.100000000000000	0.000000000000000E+000
0.200000000000000	0.000000000000000E+000
0.300000000000000	0.000000000000000E+000
0.400000000000000	0.000000000000000E+000
0.500000000000000	0.000000000000000E+000
0.600000000000000	0.000000000000000E+000
0.700000000000000	0.000000000000000E+000
0.800000000000000	0.000000000000000E+000
0.900000000000000	0.000000000000000E+000
1.000000000000000	0.000000000000000E+000
1.000000000000000	0.100000000000000
1.000000000000000	0.200000000000000
1.000000000000000	0.300000000000000
1.000000000000000	0.400000000000000
1.000000000000000	0.500000000000000
1.000000000000000	0.600000000000000
1.000000000000000	0.700000000000000
1.000000000000000	0.800000000000000
1.000000000000000	0.900000000000000
1.000000000000000	1.000000000000000
0.900000000000000	1.000000000000000
0.800000000000000	1.000000000000000
0.700000000000000	1.000000000000000
0.600000000000000	1.000000000000000
0.500000000000000	1.000000000000000
0.400000000000000	1.000000000000000
0.300000000000000	1.000000000000000
0.200000000000000	1.000000000000000
0.100000000000000	1.000000000000000
0.000000000000000E+000	1.000000000000000
0.000000000000000E+000	0.900000000000000
0.000000000000000E+000	0.800000000000000
0.000000000000000E+000	0.700000000000000

```
0.0000000000000000E+000 0.6000000000000000
0.0000000000000000E+000 0.5000000000000000
0.0000000000000000E+000 0.4000000000000000
0.0000000000000000E+000 0.3000000000000000
0.0000000000000000E+000 0.2000000000000000
0.0000000000000000E+000 0.1000000000000000
0.0000000000000000E+000 0.0000000000000000E+000
ENDDAT
```

Αρχείο .dpl (delaundo)

unstructured grid data by Delaundo 5.4

86 0 1

3	54	22	23	109	40	53	1
3	42	2	3	89	82	4	2
3	50	25	26	112	36	46	3
3	45	2	42	2	5	81	4
3	64	45	42	4	25	7	5
3	48	12	59	73	65	86	6
3	64	39	45	23	5	68	7
3	62	60	50	12	13	9	8
3	62	31	60	83	8	19	9
3	43	30	31	117	19	62	10
3	62	58	43	43	19	13	11
3	60	51	50	46	8	21	12
3	62	50	58	58	11	8	13
3	44	4	5	91	85	80	14
3	61	47	11	72	22	17	15
3	61	44	46	75	17	79	16
3	61	46	47	67	15	16	17
3	46	6	7	93	69	75	18
3	62	43	31	10	9	11	19
3	47	8	9	95	71	67	20
3	63	51	60	12	48	28	21
3	61	11	48	86	51	15	22
3	45	39	40	126	77	7	23
3	52	36	37	123	49	59	24
3	64	42	44	80	79	5	25
3	56	15	16	102	39	27	26
3	49	15	56	26	54	29	27
3	63	54	51	40	21	34	28
3	49	14	15	101	27	76	29
3	43	28	29	115	62	43	30
3	55	18	41	84	55	32	31
3	55	17	18	104	31	66	32
3	56	57	34	60	38	39	33
3	63	53	54	53	28	41	34
3	57	16	17	103	66	39	35
3	50	26	27	113	58	3	36
3	57	55	33	56	60	66	37
3	56	34	35	121	54	33	38
3	56	16	57	35	33	26	39
3	51	54	23	1	52	28	40
3	63	19	53	47	34	48	41
3	53	21	22	108	53	45	42
3	58	28	43	30	11	64	43
3	51	24	25	111	46	52	44
3	53	20	21	107	42	47	45
3	50	51	25	44	3	12	46

3	53	19	20	106	45	41	47
3	63	60	19	50	41	21	48
3	59	52	37	24	74	63	49
3	60	41	19	84	48	83	50
3	64	61	48	22	68	79	51
3	51	23	24	110	44	40	52
3	54	53	22	42	1	34	53
3	49	56	35	38	61	27	54
3	55	41	32	57	56	31	55
3	55	32	33	119	37	55	56
3	41	31	32	118	55	83	57
3	58	50	27	36	64	13	58
3	52	49	36	61	24	76	59
3	57	33	34	120	33	37	60
3	49	35	36	122	59	54	61
3	43	29	30	116	10	30	62
3	59	13	52	70	49	73	63
3	58	27	28	114	43	58	64
3	48	59	38	74	78	6	65
3	57	17	55	32	37	35	66
3	46	8	47	20	17	69	67
3	64	48	39	78	7	51	68
3	46	7	8	94	67	18	69
3	52	13	14	100	76	63	70
3	47	9	10	96	72	20	71
3	47	10	11	97	15	71	72
3	59	12	13	99	63	6	73
3	59	37	38	124	65	49	74
3	46	44	6	85	18	16	75
3	52	14	49	29	59	70	76
3	45	40	1	87	81	23	77
3	48	38	39	125	68	65	78
3	64	44	61	16	51	25	79
3	44	42	4	82	14	25	80
3	45	1	2	88	4	77	81
3	42	3	4	90	80	2	82
3	60	31	41	57	50	9	83
3	41	18	19	105	50	31	84
3	44	5	6	92	75	14	85
3	48	11	12	98	6	22	86

64

1. 1. 1. 1. 0. 0.

0.1000000E+00	0.0000000E+00	1. 1. 1. 1.	1
0.2000000E+00	0.0000000E+00	1. 1. 1. 1.	2
0.3000000E+00	0.0000000E+00	1. 1. 1. 1.	3
0.4000000E+00	0.0000000E+00	1. 1. 1. 1.	4
0.5000000E+00	0.0000000E+00	1. 1. 1. 1.	5
0.6000000E+00	0.0000000E+00	1. 1. 1. 1.	6
0.7000000E+00	0.0000000E+00	1. 1. 1. 1.	7
0.8000000E+00	0.0000000E+00	1. 1. 1. 1.	8

0.9000000E+00	0.0000000E+00	1.	1.	1.	1.	9
0.1000000E+01	0.0000000E+00	1.	1.	1.	1.	10
0.1000000E+01	0.6000000E+00	1.	1.	1.	1.	11
0.1000000E+01	0.1200000E+01	1.	1.	1.	1.	12
0.1000000E+01	0.1800000E+01	1.	1.	1.	1.	13
0.1000000E+01	0.2400000E+01	1.	1.	1.	1.	14
0.1000000E+01	0.3000000E+01	1.	1.	1.	1.	15
0.1000000E+01	0.3600000E+01	1.	1.	1.	1.	16
0.1000000E+01	0.4200000E+01	1.	1.	1.	1.	17
0.1000000E+01	0.4800000E+01	1.	1.	1.	1.	18
0.1000000E+01	0.5400000E+01	1.	1.	1.	1.	19
0.1000000E+01	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	20
0.9000000E+00	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	21
0.8000000E+00	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	22
0.7000000E+00	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	23
0.6000000E+00	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	24
0.5000000E+00	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	25
0.4000000E+00	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	26
0.3000000E+00	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	27
0.2000000E+00	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	28
0.1000000E+00	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	29
0.0000000E+00	0.6000000E+01	1.	1.	1.	1.	30
0.0000000E+00	0.5400000E+01	1.	1.	1.	1.	31
0.0000000E+00	0.4800000E+01	1.	1.	1.	1.	32
0.0000000E+00	0.4200000E+01	1.	1.	1.	1.	33
0.0000000E+00	0.3600000E+01	1.	1.	1.	1.	34
0.0000000E+00	0.3000000E+01	1.	1.	1.	1.	35
0.0000000E+00	0.2400000E+01	1.	1.	1.	1.	36
0.0000000E+00	0.1800000E+01	1.	1.	1.	1.	37
0.0000000E+00	0.1200000E+01	1.	1.	1.	1.	38
0.0000000E+00	0.6000000E+00	1.	1.	1.	1.	39
0.0000000E+00	0.0000000E+00	1.	1.	1.	1.	40
0.5000000E+00	0.5100000E+01	1.	1.	1.	1.	41
0.3000000E+00	0.1354952E+00	1.	1.	1.	1.	42
0.1000000E+00	0.5859505E+01	1.	1.	1.	1.	43
0.5000000E+00	0.1354952E+00	1.	1.	1.	1.	44
0.1000000E+00	0.1404949E+00	1.	1.	1.	1.	45
0.7000000E+00	0.1354953E+00	1.	1.	1.	1.	46
0.9000000E+00	0.1404948E+00	1.	1.	1.	1.	47
0.5000000E+00	0.9000000E+00	1.	1.	1.	1.	48
0.5000000E+00	0.2700000E+01	1.	1.	1.	1.	49
0.4000000E+00	0.5864505E+01	1.	1.	1.	1.	50
0.6000000E+00	0.5864505E+01	1.	1.	1.	1.	51
0.5000000E+00	0.2100000E+01	1.	1.	1.	1.	52
0.9000000E+00	0.5859505E+01	1.	1.	1.	1.	53
0.7500000E+00	0.5864505E+01	1.	1.	1.	1.	54
0.5000000E+00	0.4500000E+01	1.	1.	1.	1.	55
0.5000000E+00	0.3300000E+01	1.	1.	1.	1.	56
0.5000000E+00	0.3900000E+01	1.	1.	1.	1.	57
0.2500000E+00	0.5864505E+01	1.	1.	1.	1.	58

0.5000000E+00	0.1500000E+01	1.	1.	1.	1.	59
0.5000000E+00	0.5576018E+01	1.	1.	1.	1.	60
0.6963629E+00	0.4264829E+00	1.	1.	1.	1.	61
0.2536371E+00	0.5645013E+01	1.	1.	1.	1.	62
0.7463629E+00	0.5645013E+01	1.	1.	1.	1.	63
0.3036371E+00	0.4264829E+00	1.	1.	1.	1.	64
1	1	40			1	
40	1					
1	40	77	87			
2	1	81	88			
3	2	2	89			
4	3	82	90			
5	4	14	91			
6	5	85	92			
7	6	18	93			
8	7	69	94			
9	8	20	95			
10	9	71	96			
11	10	72	97			
12	11	86	98			
13	12	73	99			
14	13	70	100			
15	14	29	101			
16	15	26	102			
17	16	35	103			
18	17	32	104			
19	18	84	105			
20	19	47	106			
21	20	45	107			
22	21	42	108			
23	22	1	109			
24	23	52	110			
25	24	44	111			
26	25	3	112			
27	26	36	113			
28	27	64	114			
29	28	30	115			
30	29	62	116			
31	30	10	117			
32	31	57	118			
33	32	56	119			
34	33	60	120			
35	34	38	121			
36	35	61	122			
37	36	24	123			
38	37	74	124			
39	38	78	125			
40	39	23	126			
0	-1					

Αρχείο .dpl (Trinagulation)

Unstructured grid by Triangulation v3.6.

216

```

3  31  29  30   0   0  56   1
3  50  47  12  18  16 102   2
3  57  19  21  40  42  89   3
3  57  54  18 110  89 156   4
3 129 125 124  23   9   7   5
3  44  22  23   0  91  90   6
3 129 126 125  15   5  11   7
3  48  13  14   0 105  14   8
3 129 124 120  47  32   5   9
3  51   6  41  46 115  48  10
3 129 128 126  31   7  49  11
3 127 120 123  27  29  32  12
3 127 122 128  19  49  21  13
3  50  13  48   8 153  16  14
3 126 118 125  25   7  17  15
3  50  12  13   0  14   2  16
3 126 117 118 215  15  31  17
3  47  11  12   0   2  96  18
3 128 122 121  33  45  13  19
3  11   9  10   0   0  95  20
3 127 119 122  35  13  29  21
3  63   2   3   0 121  74  22
3 125 115 124  41   5  37  23
3  49   8   9   0  95 100  24
3 125 118 100  39  37  15  25
3  59  16  43  38 158 120  26
3 123 120 101 200  72  12  27
3  55  32  53  62 129  83  28
3 127 123 119  43  21  12  29
3  42  21  22   0  90  42  30
3 128 117 126  17  11  45  31
3 129 120 127  12  49   9  32
3 122 108 121 208  19 205  33
3  62  27  28   0  66  70  34
3 122 119  97 199 205  21  35
3  56   1   2   0  74 113  36
3 125 100 115  59  23  25  37
3  43  16  17   0 109  26  38
3 118 105 100 201  25  55  39
3  21  19  20   0   0   3  40
3 124 115 114 204 211  23  41
3  57  21  42  30  97   3  42
3 123 111 119  82  29  72  43
3  73  44  45  91 104  86  44
3 128 121 117 209  31  19  45
3  41   6   7   0  93  10  46

```

3	124	104	120	200	9	57	47
3	51	5	6	0	10	128	48
3	129	127	128	13	11	32	49
3	61	53	33	62	108	130	50
3	117	103	109	79	215	209	51
3	116	102	111	82	193	53	52
3	116	79	102	148	52	195	53
3	108	74	85	165	169	216	54
3	118	99	105	73	39	61	55
3	64	29	31	1	111	88	56
3	124	113	104	210	47	211	57
3	88	69	74	117	172	178	58
3	115	100	90	190	98	37	59
3	58	24	25	0	132	64	60
3	118	109	99	207	55	215	61
3	53	32	33	0	50	28	62
3	113	91	77	123	210	65	63
3	58	45	24	92	60	124	64
3	113	112	91	67	63	187	65
3	64	62	28	34	88	85	66
3	112	92	91	125	65	69	67
3	76	48	52	105	118	101	68
3	112	93	92	186	67	189	69
3	65	27	62	34	184	112	70
3	111	101	75	196	171	72	71
3	123	101	111	71	43	27	72
3	110	105	99	55	175	75	73
3	63	56	2	36	22	146	74
3	110	73	105	202	73	116	75
3	75	68	70	141	180	149	76
3	109	81	78	134	207	79	77
3	72	71	38	144	107	103	78
3	109	103	81	152	77	51	79
3	40	1	39	114	0	0	80
3	121	107	98	197	133	208	81
3	119	111	102	52	199	43	82
3	55	31	32	0	28	111	83
3	87	42	44	90	86	97	84
3	92	62	64	66	147	186	85
3	87	44	73	44	116	84	86
3	66	25	26	0	126	132	87
3	64	28	29	0	56	66	88
3	57	18	19	0	3	4	89
3	44	42	22	30	6	84	90
3	45	44	23	6	92	44	91
3	45	23	24	0	64	91	92
3	46	41	7	46	94	99	93
3	46	7	8	0	100	93	94
3	49	9	11	20	96	24	95
3	49	11	47	18	154	95	96

3	87	57	42	42	84	156	97
3	115	90	94	164	204	59	98
3	82	41	46	93	170	166	99
3	49	46	8	94	24	168	100
3	84	48	76	68	127	153	101
3	83	47	50	2	167	154	102
3	96	71	72	78	159	194	103
3	86	73	45	44	124	202	104
3	52	48	14	8	106	68	105
3	52	14	15	0	119	105	106
3	72	38	39	0	114	78	107
3	61	33	34	0	135	50	108
3	54	43	17	38	110	162	109
3	54	17	18	0	4	109	110
3	64	31	55	83	147	56	111
3	65	26	27	0	70	126	112
3	72	1	56	36	159	114	113
3	72	39	1	80	113	107	114
3	85	51	41	10	166	165	115
3	110	87	73	86	75	212	116
3	74	69	51	128	165	58	117
3	81	76	52	68	157	152	118
3	59	52	15	106	120	157	119
3	59	15	16	0	26	119	120
3	63	3	60	122	150	22	121
3	60	3	4	0	139	121	122
3	91	61	77	131	63	130	123
3	86	45	58	64	181	104	124
3	92	53	91	130	67	129	125
3	66	26	65	112	185	87	126
3	98	84	76	101	163	213	127
3	69	5	51	48	117	140	128
3	92	55	53	28	125	147	129
3	91	53	61	50	123	125	130
3	77	61	67	135	191	123	131
3	66	58	25	60	87	182	132
3	121	98	103	163	209	81	133
3	81	59	78	158	77	157	134
3	67	61	34	108	136	131	135
3	67	34	35	0	137	135	136
3	68	67	35	136	138	192	137
3	68	35	36	0	141	137	138
3	69	60	4	122	140	178	139
3	69	4	5	0	128	139	140
3	70	68	36	138	142	76	141
3	70	36	37	0	143	141	142
3	71	70	37	142	144	160	143
3	71	37	38	0	78	143	144
3	96	63	79	150	195	146	145
3	96	56	63	74	145	159	146

3	92	64	55	111	129	85	147
3	102	79	88	177	179	53	148
3	95	68	75	76	196	192	149
3	79	63	60	121	177	145	150
3	99	78	80	161	175	207	151
3	103	76	81	118	79	163	152
3	84	50	48	14	101	167	153
3	83	49	47	96	102	168	154
3	104	77	95	191	203	210	155
3	87	54	57	4	97	176	156
3	81	52	59	119	134	118	157
3	78	59	43	26	161	134	158
3	96	72	56	113	146	103	159
3	89	70	71	143	194	180	160
3	80	78	43	158	162	151	161
3	80	43	54	109	176	161	162
3	103	98	76	127	152	133	163
3	94	90	66	182	185	98	164
3	85	74	51	117	115	54	165
3	85	41	82	99	173	115	166
3	83	50	84	153	174	102	167
3	83	46	49	100	154	170	168
3	108	85	107	173	208	54	169
3	83	82	46	99	168	198	170
3	111	75	89	180	193	71	171
3	97	88	74	58	216	179	172
3	107	85	82	166	214	169	173
3	106	83	84	167	213	198	174
3	110	99	80	151	212	73	175
3	87	80	54	162	156	212	176
3	88	79	60	150	178	148	177
3	88	60	69	139	58	177	178
3	102	88	97	172	199	148	179
3	89	75	70	76	160	171	180
3	90	86	58	124	182	190	181
3	90	58	66	132	164	181	182
3	94	65	93	184	188	185	183
3	93	65	62	70	186	183	184
3	94	66	65	126	183	164	185
3	93	62	92	85	69	184	186
3	114	112	113	65	211	189	187
3	114	94	93	183	189	204	188
3	114	93	112	69	187	188	189
3	100	86	90	181	59	201	190
3	95	77	67	131	192	155	191
3	95	67	68	137	149	191	192
3	116	111	89	171	206	52	193
3	96	89	71	160	103	206	194
3	116	96	79	145	53	206	195
3	101	95	75	149	71	203	196

3	107	106	98	213	81	214	197
3	106	82	83	170	174	214	198
3	119	102	97	179	35	82	199
3	120	104	101	203	27	47	200
3	105	86	100	190	39	202	201
3	105	73	86	104	201	75	202
3	104	95	101	196	200	155	203
3	115	94	114	188	41	98	204
3	122	97	108	216	33	35	205
3	116	89	96	194	195	193	206
3	109	78	99	151	61	77	207
3	121	108	107	169	81	33	208
3	121	103	117	51	45	133	209
3	113	77	104	155	57	63	210
3	124	114	113	187	57	41	211
3	110	80	87	176	116	175	212
3	106	84	98	127	197	174	213
3	107	82	106	198	197	173	214
3	118	117	109	51	61	17	215
3	108	97	74	172	54	205	216

129

0.1000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.2000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.3000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.4000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.5000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.6000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.7000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.8000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.9000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.1000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.2000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.3000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.4000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.5000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.6000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.7000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.8000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.9000000E+00	0.0000000E+00
0.1000000E+01	0.1000000E+01	0.0000000E+00
0.9000000E+00	0.1000000E+01	0.0000000E+00
0.8000000E+00	0.1000000E+01	0.0000000E+00
0.7000000E+00	0.1000000E+01	0.0000000E+00
0.6000000E+00	0.1000000E+01	0.0000000E+00
0.5000000E+00	0.1000000E+01	0.0000000E+00
0.4000000E+00	0.1000000E+01	0.0000000E+00
0.3000000E+00	0.1000000E+01	0.0000000E+00
0.2000000E+00	0.1000000E+01	0.0000000E+00
0.1000000E+00	0.1000000E+01	0.0000000E+00

0.0000000E+00	0.1000000E+01	0.0000000E+00
0.0000000E+00	0.9000000E+00	0.0000000E+00
0.0000000E+00	0.8000000E+00	0.0000000E+00
0.0000000E+00	0.7000000E+00	0.0000000E+00
0.0000000E+00	0.6000000E+00	0.0000000E+00
0.0000000E+00	0.5000000E+00	0.0000000E+00
0.0000000E+00	0.4000000E+00	0.0000000E+00
0.0000000E+00	0.3000000E+00	0.0000000E+00
0.0000000E+00	0.2000000E+00	0.0000000E+00
0.0000000E+00	0.1000000E+00	0.0000000E+00
0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
0.6500000E+00	0.8660258E-01	0.0000000E+00
0.8500000E+00	0.9133974E+00	0.0000000E+00
0.9133974E+00	0.6500000E+00	0.0000000E+00
0.7500000E+00	0.9133974E+00	0.0000000E+00
0.6500000E+00	0.9133974E+00	0.0000000E+00
0.7500000E+00	0.8660258E-01	0.0000000E+00
0.9133974E+00	0.1500000E+00	0.0000000E+00
0.9133974E+00	0.3500000E+00	0.0000000E+00
0.8693814E+00	0.9891993E-01	0.0000000E+00
0.9133974E+00	0.2500000E+00	0.0000000E+00
0.5500000E+00	0.8660258E-01	0.0000000E+00
0.9133974E+00	0.4500000E+00	0.0000000E+00
0.8660258E-01	0.7500000E+00	0.0000000E+00
0.9133974E+00	0.7500000E+00	0.0000000E+00
0.8660258E-01	0.8500000E+00	0.0000000E+00
0.1500000E+00	0.8660258E-01	0.0000000E+00
0.9010801E+00	0.8693814E+00	0.0000000E+00
0.5500000E+00	0.9133974E+00	0.0000000E+00
0.9133974E+00	0.5500000E+00	0.0000000E+00
0.3500000E+00	0.8660258E-01	0.0000000E+00
0.8660258E-01	0.6500000E+00	0.0000000E+00
0.2500000E+00	0.9133974E+00	0.0000000E+00
0.2500000E+00	0.8660258E-01	0.0000000E+00
0.1306186E+00	0.9010801E+00	0.0000000E+00
0.3500000E+00	0.9133974E+00	0.0000000E+00
0.4500000E+00	0.9133974E+00	0.0000000E+00
0.8660258E-01	0.5500000E+00	0.0000000E+00
0.8660258E-01	0.4500000E+00	0.0000000E+00
0.4500000E+00	0.8660258E-01	0.0000000E+00
0.8660258E-01	0.3500000E+00	0.0000000E+00
0.8660258E-01	0.2500000E+00	0.0000000E+00
0.9891993E-01	0.1306186E+00	0.0000000E+00
0.7000000E+00	0.8267948E+00	0.0000000E+00
0.5000000E+00	0.1732052E+00	0.0000000E+00
0.1732052E+00	0.4000000E+00	0.0000000E+00
0.8267948E+00	0.4000000E+00	0.0000000E+00
0.1732052E+00	0.6000000E+00	0.0000000E+00
0.8267948E+00	0.6000000E+00	0.0000000E+00
0.3000000E+00	0.1732052E+00	0.0000000E+00

0.8267948E+00	0.7000000E+00	0.0000000E+00
0.8267948E+00	0.5000000E+00	0.0000000E+00
0.7000000E+00	0.1732052E+00	0.0000000E+00
0.8137987E+00	0.1894533E+00	0.0000000E+00
0.8267948E+00	0.3000000E+00	0.0000000E+00
0.6000000E+00	0.1732052E+00	0.0000000E+00
0.6000000E+00	0.8267948E+00	0.0000000E+00
0.8105467E+00	0.8137987E+00	0.0000000E+00
0.4000000E+00	0.1732052E+00	0.0000000E+00
0.1732052E+00	0.3000000E+00	0.0000000E+00
0.5000000E+00	0.8267948E+00	0.0000000E+00
0.1732052E+00	0.7000000E+00	0.0000000E+00
0.1862013E+00	0.8105467E+00	0.0000000E+00
0.3000000E+00	0.8267948E+00	0.0000000E+00
0.4000000E+00	0.8267948E+00	0.0000000E+00
0.1732052E+00	0.5000000E+00	0.0000000E+00
0.1894533E+00	0.1862013E+00	0.0000000E+00
0.4500000E+00	0.2598077E+00	0.0000000E+00
0.7401923E+00	0.3500000E+00	0.0000000E+00
0.7401923E+00	0.6500000E+00	0.0000000E+00
0.5500000E+00	0.7401923E+00	0.0000000E+00
0.2598077E+00	0.4500000E+00	0.0000000E+00
0.3500000E+00	0.2598077E+00	0.0000000E+00
0.7401923E+00	0.4500000E+00	0.0000000E+00
0.2598077E+00	0.5500000E+00	0.0000000E+00
0.6500000E+00	0.7401923E+00	0.0000000E+00
0.7394725E+00	0.2609503E+00	0.0000000E+00
0.6500000E+00	0.2598077E+00	0.0000000E+00
0.5500000E+00	0.2598077E+00	0.0000000E+00
0.7401923E+00	0.5500000E+00	0.0000000E+00
0.7390497E+00	0.7394725E+00	0.0000000E+00
0.2598077E+00	0.3500000E+00	0.0000000E+00
0.2605275E+00	0.7390497E+00	0.0000000E+00
0.2598077E+00	0.6500000E+00	0.0000000E+00
0.3500000E+00	0.7401923E+00	0.0000000E+00
0.4500000E+00	0.7401923E+00	0.0000000E+00
0.2609503E+00	0.2605275E+00	0.0000000E+00
0.6535897E+00	0.5000000E+00	0.0000000E+00
0.6218621E+00	0.6352596E+00	0.0000000E+00
0.4000000E+00	0.3464103E+00	0.0000000E+00
0.3464103E+00	0.5000000E+00	0.0000000E+00
0.6218621E+00	0.3647404E+00	0.0000000E+00
0.5000000E+00	0.3464103E+00	0.0000000E+00
0.3464103E+00	0.4000000E+00	0.0000000E+00
0.3781379E+00	0.6352596E+00	0.0000000E+00
0.5000000E+00	0.6535897E+00	0.0000000E+00
0.5507307E+00	0.5533189E+00	0.0000000E+00
0.4415065E+00	0.4415065E+00	0.0000000E+00
0.5507307E+00	0.4466811E+00	0.0000000E+00
0.4492693E+00	0.5533189E+00	0.0000000E+00