ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Ανάλυση συστημάτων παραγωγής, όπου οι διάρκειες ζωής των παραγόμενων προϊόντων ακολουθούν την κατανομή Cox-2.

Διπλωματική Εργασία

Βαρδάκης Βασίλειος

Χανιά, 2020

Επιβλέπων

Ιωαννίδης Ευστράτιος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη

Προτείνεται η μελέτη ενός συστήματος παραγωγής του οποίου τα προϊόντα έχουν τυχαίες διάρκειες ζωής. Οι αφίξεις των πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson, ενώ οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικά κατανεμημένοι και οι διάρκειες ζωής των προϊόντων ακολουθούν την κατανομή Cox-2. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την φάση της ζωής στην οποία βρίσκεται κάθε προϊόν. Αναπτύξαμε ακριβές μαθηματικό μοντέλο για την περιγραφή του συστήματος και την εκτίμηση των διαφόρων μέτρων απόδοσής του.

Εξετάσαμε ακόμη την περίπτωση ενός συστήματος με τα ίδια χαρακτηριστικά, αλλά χωρίς να γνωρίζουμε την φάση της ζωής στην οποία βρίσκεται κάθε προϊόν. Στόχος είναι η σύγκριση των δύο συστημάτων.

1. Εισαγωγή

Η ποιότητα και η αξία των φθαρτών προϊόντων μειώνεται με την πάροδο του χρόνου ακόμα και αν γίνεται σωστή διαχείρισή τους στα πλαίσια της εφοδιαστικής αλυσίδας. Απαιτούν σωστή μεταχείριση, αποθήκευση και εξοπλισμό για να αποφευχθούν τυχόν καταστροφές, φθορές ή μολύνσεις. Αυτή η μεταχείριση περιλαμβάνει τον καθαρισμό, την πλύση, την ταξινόμηση, την συσκευασία, τον τακτικό ποιοτικό έλεγχο και άλλες διαδικασίες. Πιθανές διαταραχές στις παραπάνω διαδικασίες μπορούν να έχουν σοβαρές αρνητικές επιδράσεις στο ετήσιο εισόδημα μιας επιχείρησης [1].

Οι κύριες κατηγορίες φθαρτών προϊόντων ειναι τα τρόφιμα, τα φαρμακευτικά-ιατρικά είδη και τα γαλακτοκομικά προϊόντα. Υπάρχουν και πιο εδικές κατηγορίες προϊόντων με πεπερασμένο χρόνο ζωής όπως είναι για παράδειγμα τα αεροπορικά εισιτήρια ή τα εισιτήρια ποδοσφαιρικών αγώνων, όπου εκεί οι επιχειρήσεις εφαρμόζουν πιο εξειδικευμένες πολιτικές.

Η κατάσταση της διάρκεια ζωής των προϊόντων περιπλέκει την αποθεματική διοίκηση καθώς πρέπει να προωθηθούν στην εφοδιαστική αλυσίδα πρωτού φθαρούν ή λήξουν και χάσουν την αξία τους. Τα προϊόντα μπορούν να φθείρονται και να μεγαλώνουν την διάρκεια ζωής τους ή μπορούν να καταστραφούν και τελείως [4].

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε προϊόντα των οποίων η διάρκεια ζωής είναι τυχαία και ακολουθεί την κατανομή Cox-2. Η κατανομή Cox-2 είναι μια κατανομή τύπου φάσεων, δηλαδή είναι μια κατανομή που χρησιμοποιεί ως κύριο δομικό της στοιχείο την εκθετική κατανομή. Μια πολύ σηματική ιδιότητα των κατανομών Cox είναι ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως προσεγγίσεις μεγάλης ακρίβειας οποιασδήποτε μη αρνητικής κατανομής [2]. Συνεπώς η κατανομή Cox-2 που εξετάζουμε εδώ μπορεί να προκύψει και ως προσέγγιση της πραγματικής κατανομής της διάρκειας ζωής των παραγόμενω προϊόντων. Εδώ εξετάζουμε αν η γνώση της κατάστασης φθοράς του προϊόντος μπορεί να οδηγήσει στην επιλογή μιας κατάλληλης πολιτικής προώθησης των προϊόντων του συστήματος. Για τον λόγο αυτό εξετάζουμε δύο πολιτικές. Στην πρώτη υποθέτουμε ότι είναι γνωστή η κατάσταση των προϊόντων και η πολιτική που ακολουθείται δίνει προτεραιότητα στην προώθηση των προϊόντων με μεγαλύτερη φθορά. Στη δεύτερη πολιτική υποθέτουμε ότι δεν γνωρίζουμε ή αγνοούμε την κατάσταση των προϊόντων και αυτά διατίθενται σύμφωνα με τον κανόνα “First-in First-out” (FIFO), που σημαίνει ότι το προϊόν το οποίο παράγεται πρώτο είναι το προϊόν που διατίθεται και πρώτο.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής:

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται ανάλυση της πρώτης πολιτικής. Παρουσιάζουμε την αλυσίδα Markov που χρησιμοποιείται για τη μαθηματική περιγραφή και ανάλυση του συστήματος. Έπειτα, υπολογίζουμε αναλυτικά τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης. Τέλος, υπολογίζουμε τα μέτρα απόδοσης.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται ανάλυση της δεύτερης πολιτικής. Παρουσιάζουμε την αντίστοιχη αλυσίδα Markov. Έπειτα, υπολογίζουμε τους ρυθμούς απωλειών καθώς και τις πιθανότητες μόνιμης κατάστασης. Τέλος, υπολογίζουμε τα μέτρα απόδοσης.

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται πειραματική σύγκριση των δύο πολιτικών, μεταβάλοντας τις παραμέτρους λειτουργίας του συστήματος παραγωγής.

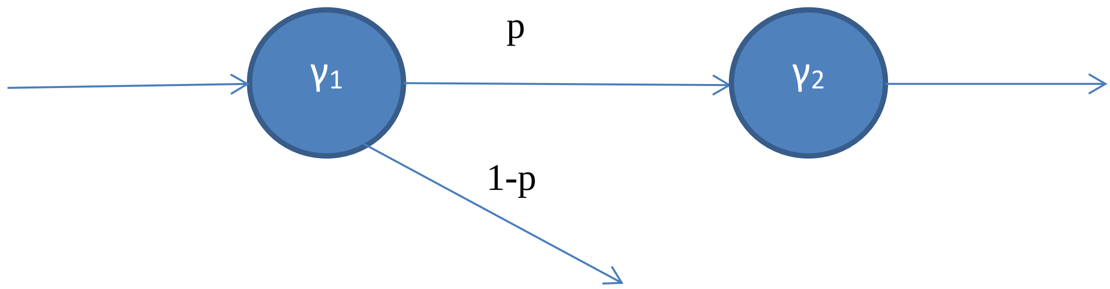
Έπειτα, γίνεται η παρατήρηση των μεταβολών του κέρδους μέσω διαγραμμάτων.

Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται η τελική σύγκριση των δύο πολιτικών και η εξαγωγή συμπερασμάτων.

2. Πολιτική 1 (είναι γνωστή η φάση της ζωής των προϊόντων).

2.1. Ανάλυση του συστήματος παραγωγής

Έστω ένα σύστημα παραγωγής που παράγει ένα προϊόν για να ικανοποιήσει τυχαία ζήτηση. Οι αφίξεις των πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμο λ και κάθε πελάτης ζητάει μία μονάδα προϊόντος. Οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικά κατανεμημένοι με ρυθμό μ. Οι διάρκειες ζωής των προϊόντων ακολουθούν την κατανομή Cox-2, πράγμα που σημαίνει ότι τα προϊόντα έχουν δύο εκθετικά κατανεμημένες φάσεις ζωής, την 1 με μέσο ρυθμό γ_1 και την 2 με μέσο ρυθμό γ_2. Τα προϊόντα πάνε από την φάση 1 στην φάση 2 με πιθανότητα p ενώ καταστρέφονται με πιθανότητα 1-p (σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα φάσης για την Cox-2 κατανομή.

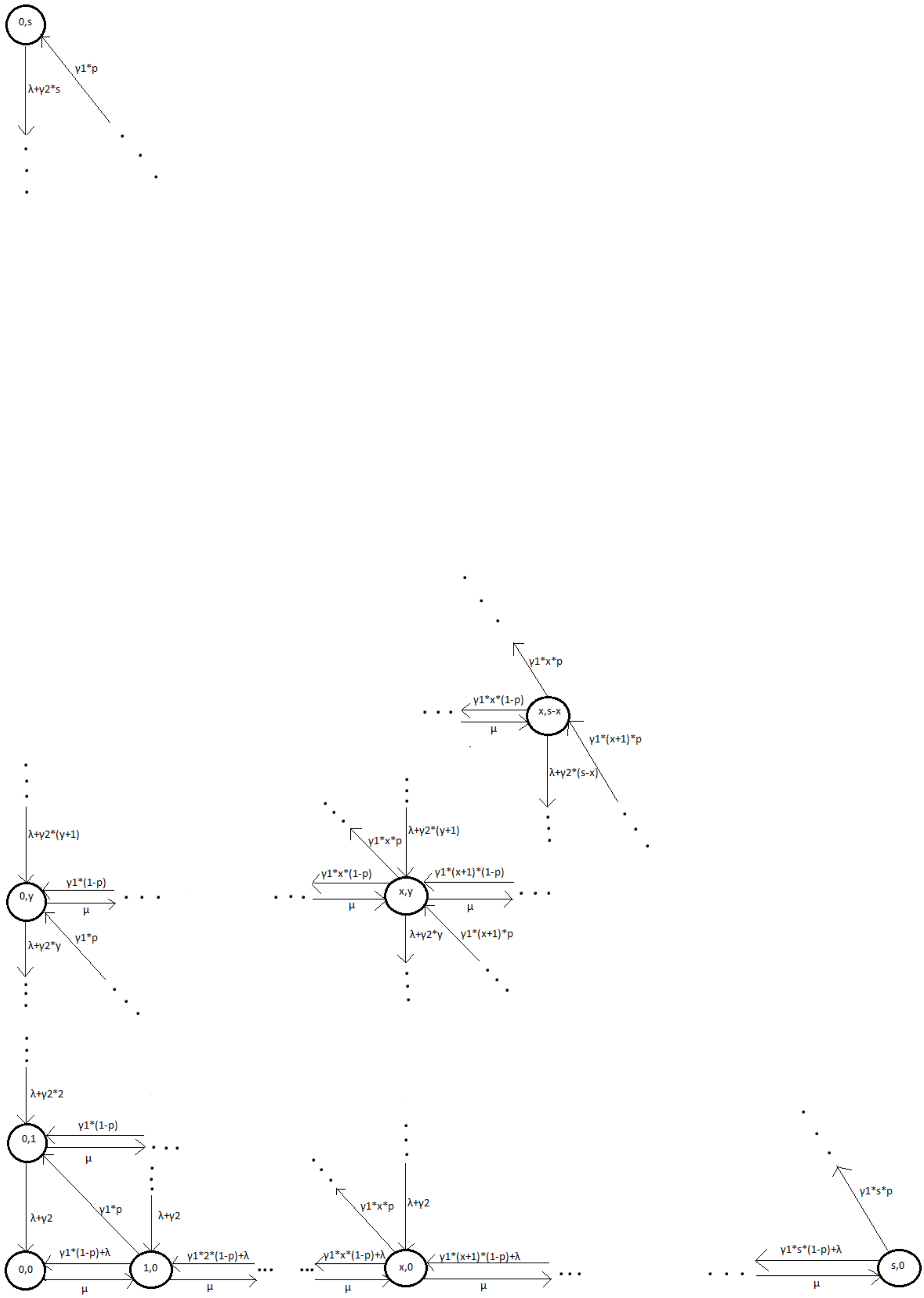
Το σύστημά μας ακολουθεί την πολιτική απόδοσης προτεραιότητας στα πρϊόντα που είναι περισσότερο «φθαρμένα». Αυτό σημαίνει ότι τα προϊόντα που βρίσκονται στη δεύτερη φάση πωλούνται πρώτα, δηλαδή δίνεται προτεραιότητα στην πώληση των προϊόντων που βρίσκονται στη δεύτερη φάση της ζωής τους έναντι αυτών που βρίσκονται στην πρώτη φάση. Επίσης, ακολουθείται η πολιτική βασικού αποθέματος, δηλαδή παράγονται προϊόντα μέχρι το απόθεμα να γίνει ίσο με το βασικό απόθεμα s. Επιπλέον, στο σύστημά μας δεν επιτρέπονται εκκρεμείς παραγγελίες. Αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχουν παραγγελίες που δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν λόγω χαμηλού αποθέματος, τότε οι πελάτες αποχωρούν.

2.2. Αλυσίδα Markov

Όπως έχουμε ήδη δει οι χρόνοι εκτέλεσης όλων των γεγονότων είναι τυχαίοι και εκθετικά κατανεμημένοι ή ακολουθούν κατανομές τύπου φάσεων που έχουν ως δομικό στοιχείο την εκθετική κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα μας μπορεί να περιγραφεί ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από το ζεύγος μεταβλητών (x, y). Η μεταβλητή x εκφράζει τα προϊόντα που βρίσκονται στην πρώτη φάση της ζωής τους και η δεύτερη μεταβλητή y τα προϊόντα που βρίσκονται στη δεύτερη φάση της ζωής τους. Με s συμβολίζεται το βασικό απόθεμα. Το απόθεμα προϊόντων είναι ίσο με το άθροισμα των μεταβλητών x + y και μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα [0, s]. Όπως βλέπουμε η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει είναι s είναι δηλαδή ίση με το βασικό απόθεμα.

Η αλυσίδα είναι σχηματικά ένα ορθογώνιο τρίγωνο όπου η οριζόντια κάθετος συμβολίζει τις περιπτώσεις που υπάρχουν μόνο προϊόντα τα οποία βρίσκονται στην πρώτη φάση της ζωής τους, ενώ η κατακόρυφη κάθετος συμβολίζει τις περιπτώσεις που υπάρχουν μόνο προϊόντα τα οποία βρίσκονται στη δεύτερη φάση της ζωής τους. Η διαγώνιος συμβολίζει τις περιπτώσεις όπου το άθροισμα των προϊόντων ισούται με το βασικό απόθεμα. Στο σημείο (0,0) το άθροισμα των προϊόντων είναι μηδέν. Στο εσωτερικό του τριγώνου περιλαμβάνονται όλες οι ενδιάμεσες περιπτώσεις.

Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζονται οι πιθανές καταστάσεις του προβλήματός μας, μαζί με τις πιθανές μεταβάσεις.


0,s
γ1*p
λ+γ2*s
x,s-x
γ1*x*p
γ1*x*(1-p)
μ
γ1*(x+1)*p
λ+γ2*(s-x)
λ+γ2*(y+1)
0,y
γ1*(1-p)
μ
γ1*p
λ+γ2*y
x,y
γ1*x*p
λ+γ2*(y+1)
γ1*x*(1-p)
γ1*(x+1)*(1-p)
μ
μ
λ+γ2*y
γ1*(x+1)*p
λ+γ2*2
0,1
γ1*(1-p)
μ
λ+γ2
γ1*p
λ+γ2
0,0
γ1*(1-p)+λ
μ
1,0
γ1*2*(1-p)+λ
μ
γ1*x*p
λ+γ2
γ1*x*(1-p)+λ
x,0
γ1*(x+1)*(1-p)+λ
μ
μ
γ1*s*p
γ1*s*(1-p)+λ
s,0
μ

Σχήμα 2.2: Διάγραμμα πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης για την πολιτική 1

Η αλυσίδα Markov έχει πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Στη μόνιμη κατάσταση, οι πιθανότητες $P(x,y)$ να βρεθούμε στην οποιαδήποτε κατάσταση του συστήματος ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov σύμφωνα με τις οποίες η ροή εξόδου από κάθε κατάσταση είναι ίση με την ροή εισόδου στην κατάσταση [2, 5]:

Περίπτωση: $x=0$, $y=0$

$$P(0,0)\mu = P(0,1)(\lambda+\gamma_2) + P(1,0)(\gamma_1(1-p)+\lambda)$$

Περίπτωση: $0<x<s$, $y=0$

$$P(x,0)(\mu+\gamma_1 x+\lambda) = P(x-1,0)\mu + P(x+1,0)(\lambda+\gamma_1(x+1)(1-p)) + P(x,1)(\lambda+\gamma_2)$$

Περίπτωση: $0<y<s$, $x=0$

$$P(0,y)(\lambda+\gamma_2 y+\mu) = P(0,y+1)(\lambda+\gamma_2(y+1)) + P(1,y)\gamma_1(1-p) + P(1,y-1)\gamma_1 p$$

Περίπτωση: $x+y<s$, $0<x<s$, $0<y<s$

$$P(x,y)(\lambda+\mu+\gamma_1 x+\gamma_2 y) = P(x-1,y)\mu + P(x+1,y)\gamma_1(x+1)(1-p) + P(x,y+1)(\lambda+\gamma_2(y+1)) + P(x+1,y-1)\gamma_1(x+1)p$$

Περίπτωση: $x=s$

$$P(s,0)(\gamma_1 s+\lambda) = P(s-1,0)\mu$$

Περίπτωση: $y=s$

$$P(0,s)(\lambda+\gamma_2 s) = P(1,s-1)\gamma_1 p$$

Περίπτωση: $x + y=s$

$$P(x,s-x)(\gamma_1 x+\lambda+\gamma_2(s-x)) = P(x-1,s-x) + P(x+1,s-x-1)\gamma_1 p(x+1)$$

2.3 Υπολογισμός των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

Οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov είναι γραμμικές εξισώσεις και μπορούν να επιλυθούν με την επαναληπτική μέθοδο πινάκων που περιγράφουμε στη συνέχεια.

Έστω τα διανύσματα στήλης της μορφής $P_n = [P(n, 0), P(n-1, 1), \dots P(0, n)]^T$, που είναι τα διανύσματα πιθανοτήτων των καταστάσεων που αντιστοιχούν σε απόθεμα ίσο με n.

Η γενική μορφή των συνθηκών ισορροπίας με τη χρησιμοποίση των διανυσμάτων είναι: $\mathbf{A_n P_n = B_n P_{n-1} + C_n P_{n+1}}$.

Για παράδειγμα, για x+y=2 έχουμε τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} 2\gamma_1+\lambda+\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\gamma_2+\gamma_1+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2\gamma_2+\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(2,0) \\ P(1,1) \\ P(0,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(1,0) \\ P(0,1) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 3\gamma_1(1-p)+\lambda & \lambda+\gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma_1(1-p) & \lambda+2\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1(1-p) & \lambda+3\gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(3,0) \\ P(2,1) \\ P(1,2) \\ P(0,3) \end{bmatrix}$$

<u>Περίπτωση: x+y=0</u>

$A_0 = \mu$, $B_0 = 0$, $C_0 = [\gamma_1(1-p)+\lambda \quad \lambda+\gamma_2]$

<u>Περίπτωση: 0<x+y<s</u>

Αν n=x+y είναι η κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε, τότε με διαστάσεις (n+1×n+1) ο πίνακας A έχει μορφή:

$$A_n = \begin{bmatrix} \gamma_1 x + \lambda + \mu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -(x+1)\gamma_1 p & \lambda + \gamma_2 y + \gamma_1 x + \mu & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda + \gamma_2 y + \gamma_1 x + \mu & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -(x+1)\gamma_1 p & \lambda + \gamma_2 y + \mu \end{bmatrix}$$

Αν n=x+y είναι η κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε, τότε με διαστάσεις (n+1×n) ο πίνακας B έχει μορφή:

$$B_n = \begin{bmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Αν n=x+y είναι η κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε, τότε με διαστάσεις (n+1×n+2) ο πίνακας C έχει μορφή:

$$C_n = \begin{bmatrix} \gamma_1(x+1)(1-p) + \lambda & \lambda + \gamma_2(y+1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1(x+1)(1-p) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_1(x+1)(1-p) & \lambda + \gamma_2(y+1) \end{bmatrix}$$

<u>Περίπτωση: x + y = s</u>

Αν s=x+y είναι η κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε, τότε με διαστάσεις (s×s) ο πίνακας A έχει μορφή:

$$A_s = \begin{bmatrix} \lambda + s\gamma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -(x+1)\gamma_1 p & \lambda + \gamma_1 x + \gamma_2(s-x) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda + \gamma_1 x + \gamma_2(s-x) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -(x+1)\gamma_1 p & \lambda + s\gamma_2 \end{bmatrix}$$

Αν s=x+y είναι η κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε, τότε με διαστάσεις (s×s-1) ο πίνακας B έχει μορφή:

$$B_s = \begin{bmatrix} \mu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$C_s = 0$

Ορίζουμε ένα νέο πίνακα G, με τη βοήθεια του οποίου συσχετίζουμε το διάνυσμα πιθανοτήτων P_n με το προηγούμενό του P_{n-1} (για n=1 , 2 , …, s) ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} A_nP_n=B_nP_{n-1}+C_nP_{n+1} \\ \\ P_{n-1}=G_nP_n \end{array}\right\} \Rightarrow A_nP_n=B_nG_nP_n+C_nP_{n+1} \Rightarrow [A_n-B_nG_n]P_n=C_nP_{n+1} \Rightarrow P_n=[A_n-B_nG_n]^{-1}C_nP_{n+1}$$

Επομένως: $G_{n+1}=[A_n-B_nG_n]^{-1}C_n$ ή $G_n=[A_{n-1}-B_{n-1}G_{n-1}]^{-1}C_{n-1}$

Έπειτα, ορίζουμε ένα νέο πίνακα F, με τη βοήθεια του οποίου συσχετίζουμε το διάνυσμα πιθανοτήτων P_n με το τελευταίο διάνυσμα P_s (για n=0 , 1 , ... , s-1) , ως εξής:

$P_0 = G_1G_2 \cdots G_sP_s = F_0P_s$

$P_1 = G_2G_3 \cdots G_sP_s = F_1P_s$

$\vdots$

$P_{s-1} = G_sP_s = F_{s-1}P_s$

Έχουμε την συνοριακή συνθήκη: $A_sP_s = B_sP_{s-1} \Rightarrow P_s = A_s^{-1}B_sP_{s-1} \Rightarrow$

$P_s = A_s^{-1}B_sG_sP_s \Rightarrow [I-A_s^{-1}B_sG_s]P_s=0 \Rightarrow \mathbf{[A_s-B_sG_s]P_s = 0}$.

Αυτό είναι το σύστημα που πρέπει να λύσουμε αλλά είναι ένα σύστημα εξισώσεων με s+1 εξισώσεις και s+1 αγνώστους. Το σύστημα αυτό είναι γραμμικά εξαρτημένο και για να το επιλύσουμε αντικαθιστούμε μια περιττή εξίσωση με την συνθήκη κανονικοποίησης: $\sum_{n=0}^{s} I_n \times P_n = 1 \Rightarrow$ $(\sum_{n=0}^{s} I_n \times F_n)P_s = 1$, όπου $I_n = [1 , 1 , ... , 1]$ με διαστάσεις 1 , … , s+1.

Πάμε στον πίνακα $[A_s-B_sG_s]$ και αντικαθιστούμε την τελευταία του γραμμή με το $\sum_{n=0}^{s} I_s \times F_n$. Επίσης βάζουμε 1 στην αντίστοιχη τελευταία θέση του μηδενικού διανύσματος. Οπότε το σύστημα που πρέπει να λύσουμε γίνεται:

Τελευταία γραμμή $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} A_s - B_s G_s \\ \\ \sum_{n=0}^{s} I_s \times F_n \end{bmatrix} P_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το P_s ώστε να υπολογίσουμε διαδοχικά όλα τα υπόλοιπα διανύσματα πιθανοτήτων P_n με την βοήθεια των πινάκων F_n.

2.4 Υπολογισμός μέτρων απόδοσης και κέρδους

Τα μέτρα απόδοσης του συστήματος είναι τα εξείς:

TH: μέσος ρυθμός πωλήσεων

$$TH = \lambda[1-P(0,0)]$$

H: μέσο απόθεμα

$$H = \sum_{x=0}^{s} \sum_{y=0}^{x} xP(x,y)$$

P_r: μέσος ρυθμός αλλοίωσης προϊόντων

$$P_r = \sum_{x=0}^{s} \sum_{y=0}^{x} P(x,y)[\gamma_1(1-p)x + \gamma_2 y]$$

Συνάρτηση κέρδους: **$J = qTH-hH-c_pP_r$**

Όπου, q: το κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος

h: το μοναδιαίο κόστος αποθέματος

c_p: το κόστος από την αλλοίωση μιας μονάδας προϊόντος

3 Πολιτική 2 (δε γνωρίζουμε τη φάση της ζωής των προϊόντων).

3.1 Ανάλυση του συστήματος παραγωγής

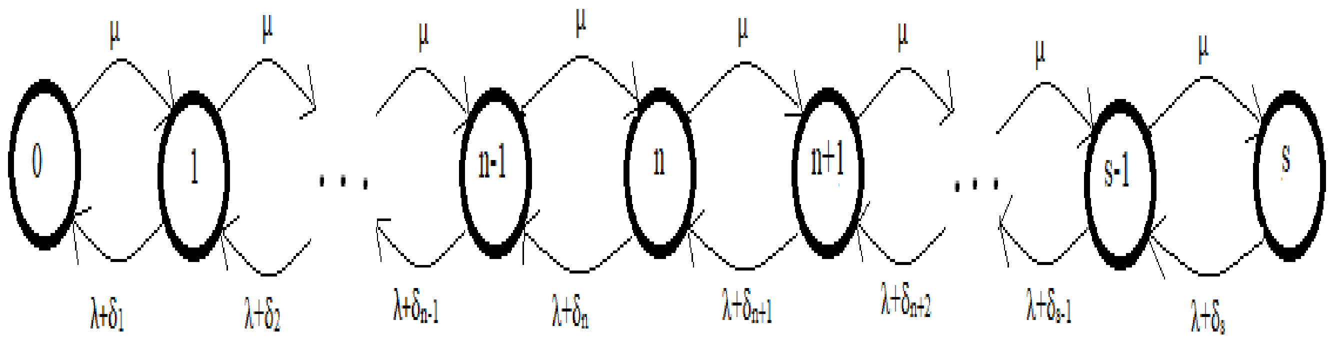
Το σύστημα παραγωγής είναι όμοιο με αυτό της πολιτικής 1. Δηλαδή, οι αφίξεις των πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμο λ και κάθε πελάτης ζητάει μία μονάδα προϊόντος. Οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικά κατανεμημένοι με ρυθμό μ. Οι διάρκειες ζωής των προϊόντων ακολουθούν την κατανομή Cox-2, πράγμα που σημαίνει ότι τα πρϊόντα έχουν δύο εκθετικές φάσεις ζωής με μέσους ρυθμούς γ_1 και γ_2. Τα πρϊόντα πάνε από την φάση 1 στην φάση 2 με πιθανότητα p ενώ καταστρέφονται με πιθανότητα 1-p.

Η μόνη διαφορά με την πολιτική 1 είναι ότι δε γνωρίζουμε τη φάση της ζωής των προϊόντων. Αυτό σημαίνει τα προϊόντα διατίθενται ακολουθώντας τον κανόνα FIFO (First In First Out) δηλαδή διατίθενται στην αγορά σύμφωνα με την σειρά παραγωγής. Τα προϊόντα πωλούνται με τη σειρά με την οποία αυτά έφτασαν στα χέρια μας. Σε αυτήν την πολιτική βασιζόμαστε στον Movaghar [3] ο οποίος αναλύει συστήματα με εκθετικά κατανεμημένους χρόνους παραγωγής, αφίξες πελατών που ακολουθούν την κατανομή Poisson και με ανυπόμονους πελάτες όπου η ανυπομονησία είναι τυχαία και γενικά κατανεμημένη. Τέτοια συστήματα είναι ισοδύναμα με το σύστημα της πολιτικής 2 όπου έχουμε προϊόντα που φθείρονται, των οποίων οι διάρκειες ζωής είναι τυχαίες και γενικά κατανεμημένες. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις μεθοδολογίες του Movaghar [3] και για την κατανομή Cox, υπολογίζοντας τους ρυθμούς απωλειών των προϊόντων (Ενότητα 3.3).

3.2 Αλυσίδα Markov

Αποδεικνύεται ότι η πολιτική 2 είναι στοχαστικά ισοδύναμη με ένα σύστημα γέννησης – θανάτου [2, 3]. Εφόσον δε γνωρίζουμε τη φάση στην οποία βρίσκεται κάθε προϊόν, η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από την μεταβλητή n που εκφράζει το απόθεμα του συστήματος.

Η αλυσίδα Markov έχει την εξής μορφή:



Σχήμα 3.2: Διάγραμμα πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης για την πολιτική 2

Η αλυσίδα Markov έχει πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Στη μόνιμη κατάσταση, οι πιθανότητες P_n να βρεθούμε στην οποιαδήποτε κατάσταση του συστήματος ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov:

Περίπτωση: n=0

$P_0\mu = P_1(\lambda+\delta_1)$

Περίπτωση: n=s

$P_s(\lambda+\delta_s) = P_{s-1}\mu$

Γενική περίπτωση n

$P_n(\mu+\lambda+\delta_n) = P_{n-1}\mu + P_{n+1}(\lambda+\delta_{n+1})$

3.3 Υπολογισμός ρυθμού απωλειών

Για να υπολογίσουμε στη συνέχεια το διάνυσμα πιθανοτήτων(πιθανότητες των καταστάσεων των αποθεμάτων) και τα μέτρα απόδοσης του συστήματος, θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τους ρυθμούς απωλειών δ_n των προϊόντων που σύμφωνα με τον Movaghar [2] προκύπτουν ως ακολούθως.

$\delta_n = \frac{nF_{n-1}}{F_n} - \lambda$, $\delta_0=0$ και n=(1, 2 , … , s)

όπου ως F_n ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace του $\left[\int_0^t (1 - G(\tau))d\tau\right]^n$

και ως G(τ) ορίζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του χρόνου ζωής των πρϊόντων που για την Cox-2 ισούται με:

$$G(\tau) = (1- p)(1- e^{-\gamma_1\tau}) + \left(\frac{p\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}\right)(1- e^{-\gamma_2\tau}) - \left(\frac{p\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_2}\right)(1- e^{-\gamma_1\tau}) \Rightarrow$$

$$G(\tau) = \left(\frac{p\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}\right)(1 - e^{-\gamma_2\tau}) + \left[1 - \left(\frac{p\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}\right)\right](1- e^{-\gamma_1\tau})$$

Επομένως, έχουμε:

$$F_n = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{t}\left(1 - G(\tau)\right)d\tau\right]^{n} e^{-\lambda t}\, dt$$

3.4 Υπολογισμός των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης

Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε το P_0 για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε και τις υπόλοιπες πιθανότητες P_n .

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{s}\prod_{n=1}^{s}\frac{\mu}{\lambda+\delta_n}}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες πιθανότητες ως εξής:

$$P_n = P_{n-1}\frac{\mu}{\lambda+\delta_n} \quad , \text{για } n = (1 , 2 , \ldots , s) .$$

3.5 Υπολογισμός μέτρων απόδοσης και κέρδους

Τα μέτρα απόδοσης του συστήματος είναι τα εξείς:

TH: μέσος ρυθμός πωλήσεων

$$TH = \lambda(1- P_0)$$

H: μέσο απόθεμα

$$H = \sum_{n=0}^{s} nP_n$$

P_r: μέσος ρυθμός αλλοίωσης προϊόντων

$$P_r = \sum_{n=0}^{s} P_n\,\delta_n$$

Συνάρτηση κέρδους: $\mathbf{J = qTH\text{-}hH\text{-}c_pP_r}$

Όπου, q: το κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος

h: το μοναδιαίο κόστος αποθέματος

c_p: το κόστος από την αλλοίωση μιας μονάδας προϊόντος

4. Πειραματική σύγκριση των δύο πολιτικών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την διεξαγωγή μιας σειράς αριθμητικών πειραμάτων. Στόχος μας ήταν να εξετάσουμε τη συμπεριφορά των δύο υπό εξέταση πολιτικών στις μεταβολές των διαφόρων παραμέτρων λειτουργίας του συστήματος. Για τον σκοπό αυτό αναπτύξαμε κώδικα σε περιβάλλον Matlab (οι σχετικοί κώδικες παρουσιάζονται στα παραρτήματα Α και Β αντίστοιχα). Για την αναλυτική επίλυση των δύο μοντέλων δώσαμε τις εξείς τιμές στα δεδομένα εισόδου:

$\boldsymbol{\gamma_1}$: διάρκεια ζωής προϊόντων στην πρώτη φάση = 1.5

$\boldsymbol{\gamma_2}$: διάρκεια ζωής προϊόντων στη δεύτερη φάση = 1

λ: ρυθμός αφίξεων = 5

μ: ρυθμός παραγωγής = 8

p: πιθανότητα μετάβασης = 0.8

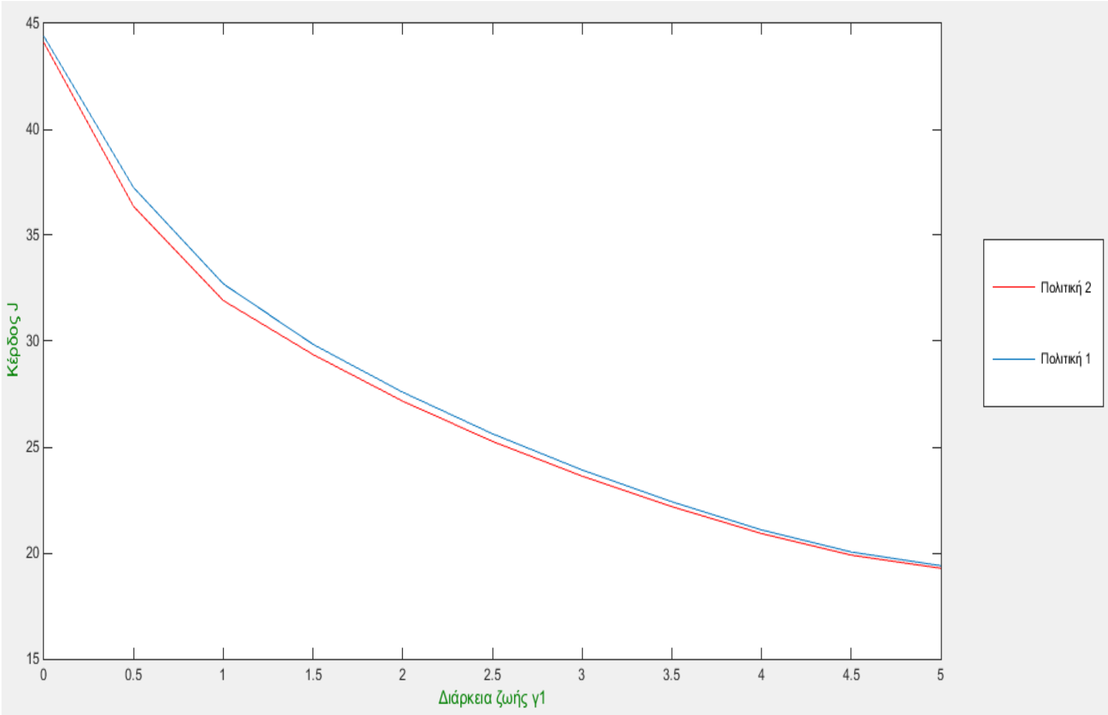
q: κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος = 10

h: μοναδιαίο κόστος αποθέματος = 1

$\mathbf{c_p}$: κόστος από την αλλοίωση μιας μονάδας προϊόντος = 15

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα γραφήματα όπου παρατηρείται η μεταβολή του κέρδους συναρτήσει των δεδομέμων εισόδου, καθώς θα μεταβάλουμε τις τιμές των δεδομένων αυτών. Για κάθε μεταβολή των δεδομένων μεταβάλουμε και το απόθεμα s ψάχνοντας την βέλτιστη τιμή του, αυτή δηλαδή που μεγιστοποιεί το κέρδος J. Αυτές οι τιμές παρουσιάζονται παρακάτω σε πίνακες.

4.1 Μεταβολή κέρδους συναρτήσει της διάρκειας ζωής γ_1



Γράφημα 4.1 (Σύγκριση μεταβολής κέρδους συναρτήσει της διάρκειας ζωής γ_1)

Παρατηρούμε ότι και στις δύο πολιτικές, όσο αυξάνεται η διάρκεια ζωής γ_1 τόσο μειώνεται το κέρδος J. Η μεταβολή αυτή συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο στην πολιτική 1 και στην πολιτική 2 με τη διαφορά ότι στην πολιτική 1, το κέρδος J είναι μεγαλύτερο.

Πίνακες βέλτιστων τιμών αποθέματος s

Πολιτική 1

γ_1=0	γ_1=0.5	γ_1=1	γ_1=1.5	γ_1=2	γ_1=2.5	γ_1=3	γ_1=3.5	γ_1=4	γ_1=4.5	γ_1=5
s=5	s=3	s=3	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=1	s=1

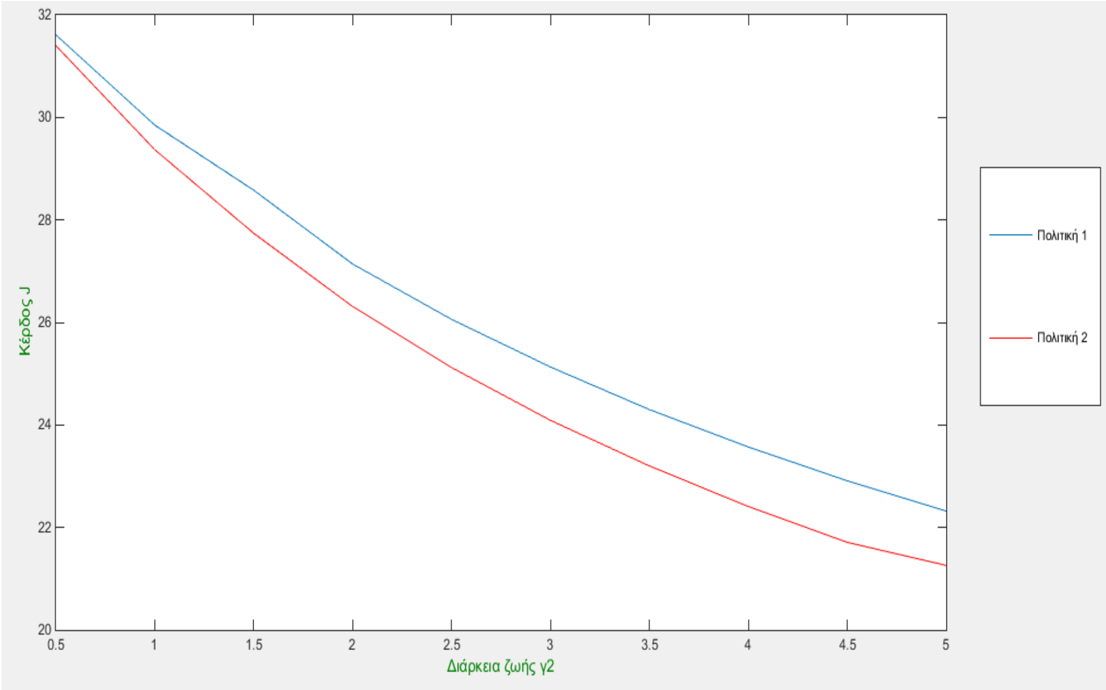
Πίνακας 4.1.1

Πολιτική 2

γ_1=0	γ_1=0.5	γ_1=1	γ_1=1.5	γ_1=2	γ_1=2.5	γ_1=3	γ_1=3.5	γ_1=4	γ_1=4.5	γ_1=5
s=5	s=3	s=3	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=1	s=1

Πίνακας 4.1.2

4.2 Μεταβολή κέρδους συναρτήσει της διάρκειας ζωής γ_2



Γράφημα 4.2 (Σύγκριση μεταβολής κέρδους συναρτήσει της διάρκειας ζωής γ_2)

Παρατηρούμε ότι και στις δύο πολιτικές, όσο αυξάνεται η διάρκεια ζωής γ_2 τόσο μειώνεται το κέρδος J. Η μεταβολή αυτή συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο στην πολιτική 1 και στην πολιτική 2 με τη διαφορά ότι στην πολιτική 1, το κέρδος J είναι μεγαλύτερο.

Πίνακες βέλτιστων τιμών αποθέματος s

Πολιτική 1

γ_2=0.5	γ_2=1	γ_2=1.5	γ_2=2	γ_2=2.5	γ_2=3	γ_2=3.5	γ_2=4	γ_2=4.5	γ_2=5
s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2

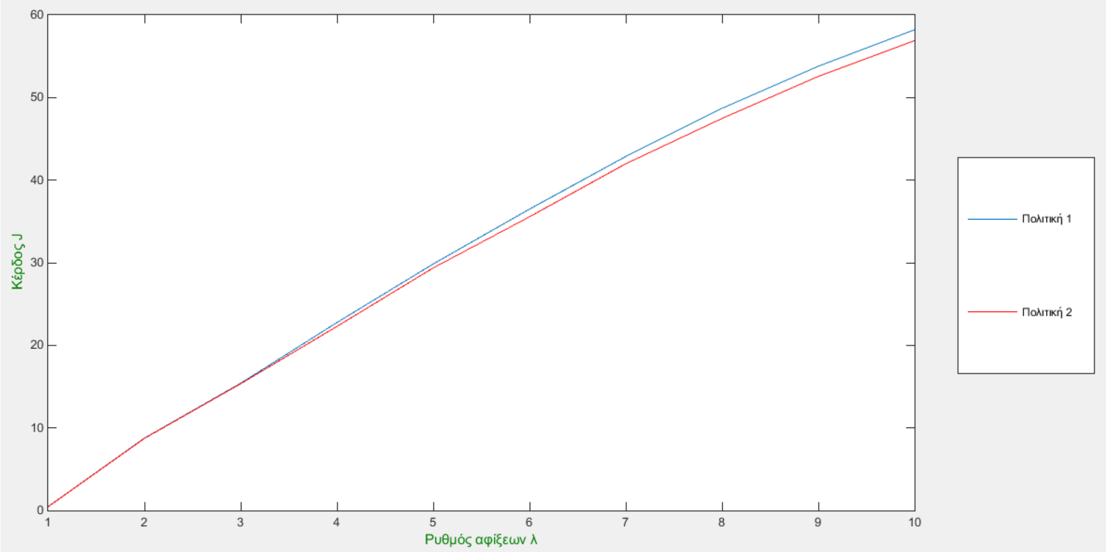
Πίνακας 4.2.1

Πολιτική 2

γ_2=0.5	γ_2=1	γ_2=1.5	γ_2=2	γ_2=2.5	γ_2=3	γ_2=3.5	γ_2=4	γ_2=4.5	γ_2=5
s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=1

Πίνακα2 4.2.2

4.3 Μεταβολή κέρδους συναρτήσει του ρυθμού αφίξεων λ



Γράφημα 4.3 (Σύγκριση μεταβολής κέρδους συναρτήσει του ρυθμού αφίξεων λ)

Παρατηρούμε ότι και στις δύο πολιτικές, όσο αυξάνεται ο ρυθμός αφίξεων λ τόσο αυξάνεται και το κέρδος J. Η μεταβολή αυτή συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο στην πολιτική 1 και στην πολιτική 2 με τη διαφορά ότι στην πολιτική 1, το κέρδος J είναι μεγαλύτερο. Επίσης, παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του λ οι δύο πολιτικές έχουν παρόμοια απόδοση. Προφανώς για πολύ μικρό λ (φαίνεται και από τους πίνακες) δεν παράγουμε πολλά προϊόντα οπότε δεν έχει νόημα να διαφοροποιήσουμε την πολιτική μας.

Πίνακες βέλτιστων τιμών αποθέματος s

Πολιτική 1

λ=1	λ=2	λ=3	λ=4	λ=5	λ=6	λ=7	λ=8	λ=9	λ=10
s=1	s=1	s=1	s=2	s=2	s=3	s=3	s=4	s=5	s=5

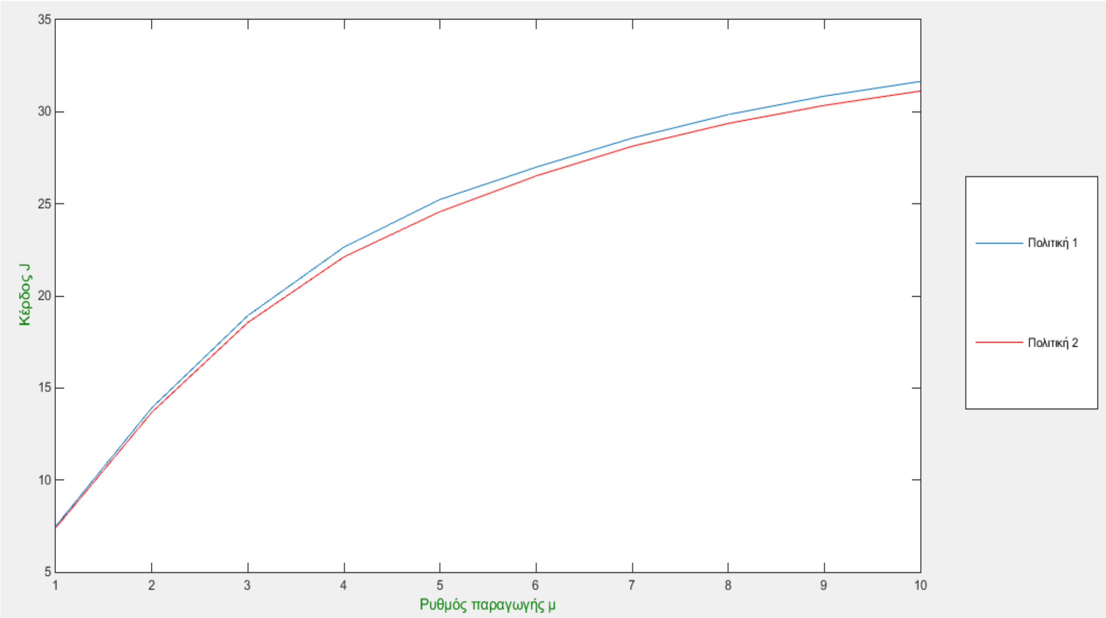
Πίνακας 4.3.1

Πολιτική 2

λ=1	λ=2	λ=3	λ=4	λ=5	λ=6	λ=7	λ=8	λ=9	λ=10
s=1	s=1	s=1	s=2	s=2	s=3	s=3	s=4	s=4	s=5

Πίνακας 4.3.2

4.4 Μεταβολή κέρδους συναρτήσει του ρυθμού παραγωγής μ



Γράφημα 4.4 (Σύγκριση μεταβολής κέρδους συναρτήσει του ρυθμού παραγωγής μ)

Παρατηρούμε ότι και στις δύο πολιτικές, όσο αυξάνεται ο ρυθμός παραγωγής μ τόσο αυξάνεται και το κέρδος J. Η μεταβολή αυτή συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο στην πολιτική 1 και στην πολιτική 2 με τη διαφορά ότι στην πολιτική 1, το κέρδος J είναι μεγαλύτερο. Επίσης, παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του λ οι δύο πολιτικές έχουν παρόμοια απόδοση. Προφανώς για πολύ μικρό μ (φαίνεται και από τους πίνακες) δεν παράγουμε πολλά προϊόντα οπότε δεν έχει νόημα να διαφοροποιήσουμε την πολιτική μας.

Πίνακες βέλτιστων τιμών αποθέματος s

Πολιτική 1

μ=1	μ=2	μ=3	μ=4	μ=5	μ=6	μ=7	μ=8	μ=9	μ=10
s=5	s=3	s=3	s=3	s=3	s=3	s=2	s=2	s=2	s=2

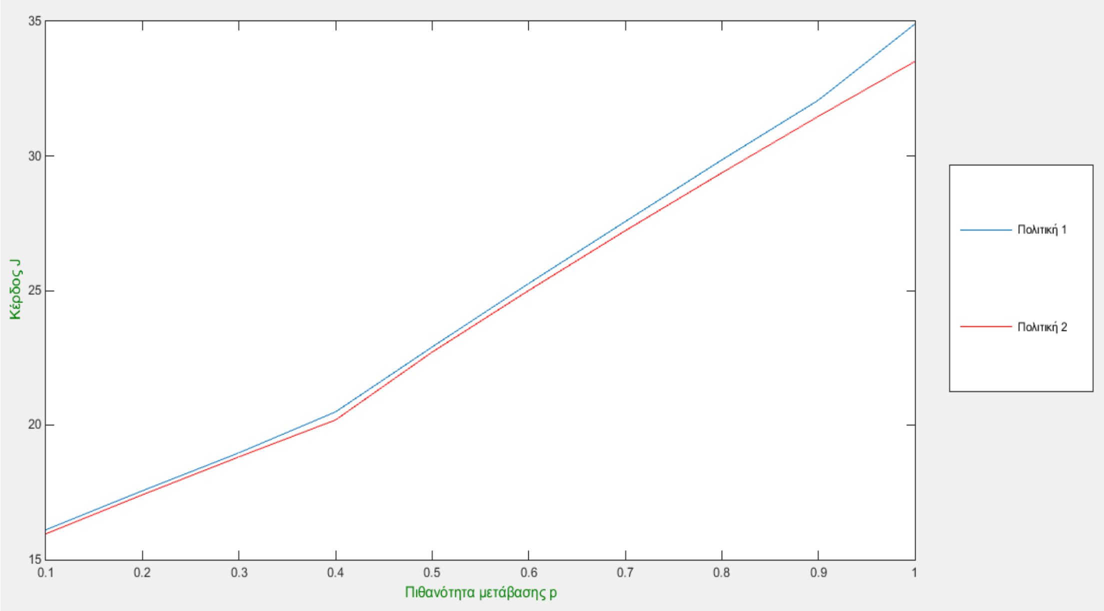
Πίνακας 4.4.1

Πολιτική 2

μ=1	μ=2	μ=3	μ=4	μ=5	μ=6	μ=7	μ=8	μ=9	μ=10
s=3	s=4	s=3	s=3	s=3	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2

Πίνακας 4.4.2

4.5 Μεταβολή κέρδους συναρτήσει της πιθανότητας μετάβασης p



Γράφημα 4.5 (Σύγκριση μεταβολής κέρδους συναρτήσει της πιθανότητας μετάβασης p)

Παρατηρούμε ότι και στις δύο πολιτικές, όσο αυξάνεται η πιθανότητα μετάβασης p τόσο αυξάνεται και το κέρδος J. Η μεταβολή αυτή συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο στην πολιτική 1 και στην πολιτική 2 με τη διαφορά ότι στην πολιτική 1, το κέρδος J είναι μεγαλύτερο. Το κέρδος λοιπόν αυξάνεται καθώς αυξάνεται η μέση διάρκεια ζωής.

Πίνακες βέλτιστων τιμών αποθέματος s

Πολιτική 1

p=0.1	p=0.2	p=0.3	p=0.4	p=0.5	p=0.6	p=0.7	p=0.8	p=0.9	p=1
s=1	s=1	s=1	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=3

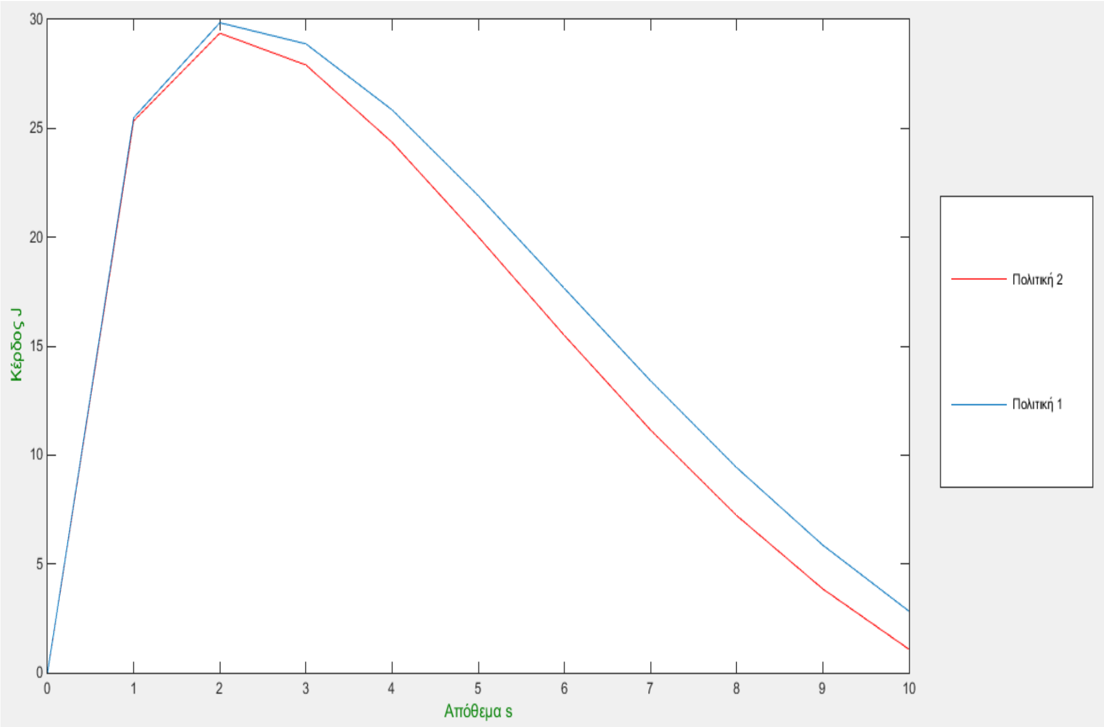
Πίνακας 4.5.1

Πολιτική 2

p=0.1	p=0.2	p=0.3	p=0.4	p=0.5	p=0.6	p=0.7	p=0.8	p=0.9	p=1
s=1	s=1	s=1	s=1	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2	s=2

Πίνακας 4.5.2

4.6 Μεταβολή κέρδους συναρτήσει του αποθέματος s



Γράφημα 4.6 (Σύγκριση μεταβολής κέρδους συναρτήσει του αποθέματος s)

Παρατηρούμε ότι και στις δύο πολιτικές, κατά την αύξηση του αποθέματος s το κέρδος J αυξάνεται μέχρι ένα σημείο και μετά μειώνεται σταδιακά. Η μεταβολή αυτή συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο στην πολιτική 1 και στην πολιτική 2 με τη διαφορά ότι στην πολιτική 1, το κέρδος J είναι μεγαλύτερο. Τα αποτελέσματα αυτά είναι μια ένδειξη ότι η συνάρτηση κέρδους και για τις δύο πολιτικές είναι κοίλη ή έστω μονοκόρυφη συνάρτηση ως προς τη μεταβλητή ελέγχου s και συνεπώς αρκεί να εντοπίσουμε ένα τοπικό βέλτιστο της συνάρτησης κέρδους για να σταματήσουμε την αναζήτηση του ολικά βέλτιστου s. Η θεωρητική τεκμηρίωση αυτής της παρατήρησης μπορεί να συμβάλλει στην μείωση του υπολογιστικού φόρτου που απαιτείται για την εύρεση της βέλτιστης τιμής του βασικού αποθέματος.

Έπειτα από εξαντλητική αναζήτηση που πραγματοποιήσαμε σε ένα εύρος 50 τιμών, συμπεράναμε ότι και στις δύο πολιτικές, το κατώφλι του αποθέματος s που μεγιστοποιεί το κέρδος J είναι το s=2, όπως φαίνεται και στο Γράφημα 4.6.

5 Συμπεράσματα

Σύμφωνα με τα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν και με τα γραφήματα που είδαμε παραπάνω, το κέρδος J στην πολιτική 1 είναι λίγο μεγαλύτερο από το κέρδος J στην πολιτική 2.

Επομένως, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι για το συγκεκριμένο συστημα παραγωγής που μελετάμε, η πολιτική της απόδοσης προτεραιότητας στα προϊόντα με μεγαλύτερη φθορά όταν είναι γνωστή η κατάστασή τους (πολιτική 1) αποφέρει μεγαλύτερο κέρδος από το να διατίθενται σύμφωνα με τη σειρά παραγωγής τους (πολιτική 2).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. J. Smith, Definition of Perishable Products in Marketing, June 07, 2018. Available on line: https://bizfluent.com/facts-6088827-definition-perishable-products-marketing.html

2. I.J.B.F. Adan, and J. van der Wal, Difference and differential equations in stochastic operation research. Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology. Eindhoven, Netherlands, 1998.

3. A. Movaghar, “On queueing with customer impatience until the end of service”, Stochastic Models, 22, 149–173, 2006

4. S. Ioannidis, O. Jouini, A.A. Economopoulos and V.S. Kouikoglou, “An (s-1, s) Inventory System with General Product Lifetimes and Customer Impatience”, Annals of OR, 209, 115-138, 2013.

Παράρτημα Α (Κώδικας για την πολιτική 1)

Σχόλια: Αρχικά εισάγουμε τις τιμές εισόδου. Έπειτα φτιάχνουμε τους πίνακες που αντιπροσωπεύουν την κάθε πιθανή κατάσταση στην οποία μπορεί να βρισκόμαστε ανάλογα με το απόθεμα s που έχουμε εισάγει. Στη συνέχεια, με τη χρήση βοηθητικών πινάκων και μαθηματικών σχέσεων, υπολογίζουμε τα διανύσματα πιθανοτήτων. Τέλος, υπολογίζουμε τα μέτρα απόδοσης και το κέρδος J.

```
close all
clear all
clc
format long g
g1=input('dwse diarkeia zwis g1:');
g2=input('dwse diarkeia zwis g2:');
l=input('dwse rithmo afiksis l:');
m=input('dwse rithmo paragwgis m:');
p=input('dwse pithanotita p:');
s=input('dwse stathmi s:');
q=input('dwse kerdos apo tin pwlisi mias monadas
proiontos q:');
h=input('dwse monadiaio kostos apothematos h:');
cp=input('dwse kostos apo tin alloiwsi mias monadas
proiontos cp:');
%% ipologismos pinaka A
x=0; % proionta prwtis fasis
y=0; %proionta deuteris fasis
katastasi=x+y;
for n=1:s+1
    if(katastasi==0) %periptwsi x+y=0
        A=m;
    elseif( katastasi>0 && katastasi<s )%periptwsi
0<x+y<s

        x=katastasi;
        y=0;
        for M=1:katastasi+1
            for N=1:katastasi+1
                if(M==N)
                    A(M,N,n)=l+g2*y+g1*x+m;
                elseif   (N==(M-1))
                    A(M,N,n)=-(x+1)*g1*p;
                else
                    A(M,N,n)=0;
                end
            end
            x=x-1;
            y=y+1;
        end
```

```
            A(1,1,n)=g1*(katastasi)+l+m;
            A(katastasi+1,katastasi+1,n)=l+g2*(katastasi)+m;
            A(katastasi,katastasi,n)=l+g2*(katastasi-1)+g1+m;
        elseif(katastasi==s) %periptwsi diagwniou x,s-x
            katastasi=s+1;
            x=s;
            y=0;
            for M=1:katastasi
                for N=1:katastasi
                    if(M==N)
                        A(M,N,n)=l+g1*x+g2*(s-x);
                    elseif(N==(M-1))
                        A(M,N,n)=-(x+1)*g1*p;
                    else
                        A(M,N,n)=0;
                    end
                end
                x=x-1;
                y=y+1;
            end
            A(1,1,n)=l+s*g1;
            A(katastasi,katastasi,n)=l+s*g2;
        end
        katastasi=katastasi+1;
    end
    %% ipologismos pinaka B
    x=0;
    y=0;
    katastasi=x+y;
    for n=1:s+1
        if(katastasi==0) % periptwsi x+y=0
            B=zeros;
        elseif( katastasi>0 && katastasi<s ) % periptwsi
    0<x+y<s
            for M=1:katastasi+1
                for N=1:katastasi+1
                    if(M==N)
                        B(M,N,n)=m;
                    else
                        B(M,N,n)=0;
                    end
                end
            end
            B(katastasi+1,katastasi)=0;
        elseif(katastasi==s) % periptwsi diagwniou x,s-x
            for M=1:s+1
                for N=1:s+1
                    if(M==N)
                        B(M,N,n)=m;
                    else
                        B(M,N,n)=0;
```

```
                    end
                end
            end
        end
        katastasi=katastasi+1;
    end
    %% ipologismos pinaka C
    x=0;
    y=0;
    katastasi=x+y;
    for n=1:s+1
        if(katastasi==0) % periptwsi x+y=0
            C=[g1*(1-p)+l l+g2;0 0];
        elseif( katastasi>0 && katastasi<s ) % periptwsi
    0<x+y<s
            x=katastasi;
            y=0;
            for M=1:katastasi+2
                for N=1:katastasi+2
                    if(M==N)
                        C(M,N,n)=g1*(x+1)*(1-p);
                    elseif(N==M+1)
                        C(M,N,n)=l+g2*(y+1);
                    else
                        C(M,N,n)=0;
                    end
                end
                x=x-1;
                y=y+1;
            end
            C(1,1,n)=g1*(katastasi+1)*(1-p)+l;
            C(katastasi+1,katastasi+1,n)=g1*(1-p);
        end
        katastasi=katastasi+1;
    end
    C(:,:,s+1)=0; % ipologismos pinaka C stin periptwsi tis
    diagwniou y=s-x
    %% vazw assous sta peritta stoixeia tis diagwniou twn
    pinakwn gia na vgainoun oi prakseis stin sunexeia
    for n=1:s+1
        for M=n+1:s+1
            for N=1:s+1
                if(M==N)
                    A(M,N,n)=1;
                end
            end
        end
        for M=n:s+1
            for N=1:s+1
                if M==N
                    B(M,N,n)=1;
```

```
            end
        end
    end
end
B(1,1,1)=0;
%% ipologismos pinakwn G
G(:,:,2)=inv(A(:,:,1))*C(:,:,1);
for n=3:s+1
    G(:,:,n)=inv(A(:,:,n-1)-B(:,:,n-1)*G(:,:,n-
1))*C(:,:,n-1);
end
%% ipologismos pinakwn F
F(:,:,s+1)=eye(s+1,s+1);
F(:,:,s)=G(:,:,s+1);
for n=1:s-1
    F(:,:,s-n)=G(:,:,s+1-n)*F(:,:,s+1-n);
end
%% ipologismos dianismatwn pithanotitwn P
W=(A(:,:,s+1)-B(:,:,s+1)*G(:,:,s+1));
sum=0;
for n=1:s+1
    sum=sum+ones(1,s+1)*F(:,:,n);
end
W(s+1,:)=sum;
b=zeros(s+1,1);
b(s+1,1)=1;
P(:,:,s+1)=inv(W)*b;
for n=1:s
    P(:,:,n)=F(:,:,n)*P(:,:,s+1);
end
%% ipologismos metrwn apodosis
% ipologismos mesoy rithmou pwlisewn TH
TH=l*(1-P(1,1,1));
% ipologismos mesou rithmou alloiwsis proiontwn Pr
Pr=0;
for x=1:s+1
    for y=1:x
        Pr=Pr+(P(y,1,x)*(g1*(1-p)*(x-y)+g2*(y-1)));
    end
end
%ipologismos mesou apothematos H
H=0;
for x=1:s+1
    for y=1:x
        H=H+((x-1)*P(y,1,x));
    end
end
%% ipologismos sinartisis kerdous
J=q*TH-h*H-cp*Pr;
```

Παράρτημα Β (Κώδικας για την πολιτική 2)

Σχόλια: Αρχικά εισάγουμε τις τιμές εισόδου. Έπειτα, με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος F και τη χρήση μαθηματικών σχέσεων υπολογίζουμε το ρυθμό απωλειών και στη συνέχεια το διάνυσμα πιθανοτήτων. Τέλος, υπολογίζουμε τα μέτρα απόδοσης και το κέρδος J.

```
close all
clear all
clc
g1=input('dwse diarkeia zwis g1:');
g2=input('dwse diarkeia zwis g2:');
l=input('dwse rithmo afiksis l:');
m=input('dwse rithmo paragwgis m:');
p=input('dwse pithanotita p:');
s=input('dwse stathmi s:');
q=input('dwse kerdos apo tin pwlisi mias monadas
proiontos q:');
h=input('dwse monadiaio kostos apothematos h:');
cp=input('dwse kostos apo tin alloiwsi mias monadas
proiontos cp:');
a=(p*g1)/(g1-g2); % sxesi gia mathimatiki dieukolinsi
am=1-a; % sxesi gia mathimatiki dieukolinsi
step=0.001;
% ipologismos oloklirómatos F
for n=1:s+1
    t=0;
    y=1;
    E(y)=0;
    E(y+1)=E(y)+((a/g2)*(1-exp(-g2*t))+(am/g1)*(1-exp(-
g1*t)))^(n-1)*exp(-l*t);
    for k=0:10000
        t=t+step;
        y=y+1;
        E(y+1)=E(y)+((a/g2)*(1-exp(-g2*t))+(am/g1)*(1-
exp(-g1*t)))^(n-1)*exp(-l*t);
    end
    F(n)=E(y+1)*step;
end
% ipologismos rithmwn apwleiwn g
d(1)=0;
for n=2:s+1
    d(n)=((n-1)*F(n-1)/F(n))-l;
end
% ipologismos pithanotitwn P
A(1)=1;
for i=2:s+1
    A(i)=A(i-1)*(m/(l+d(i)));
```

```
end
sum=0;
for i=1:s+1
    sum=sum+A(i);
end
P(1)=1/sum;
for n=2:s+1
    P(n)=P(n-1)*(m/(l+d(n)));
end
% ipologismos metrwn apodosis
TH=l*(1-P(1));
Pr=0;
for n=1:s+1
    Pr=Pr+(P(n)*d(n));
end
H=0;
for n=1:s+1
    H=H+((n-1)*P(n));
end
%ipologismos sinartisis kerdous
J=q*TH-h*H-cp*Pr;
```