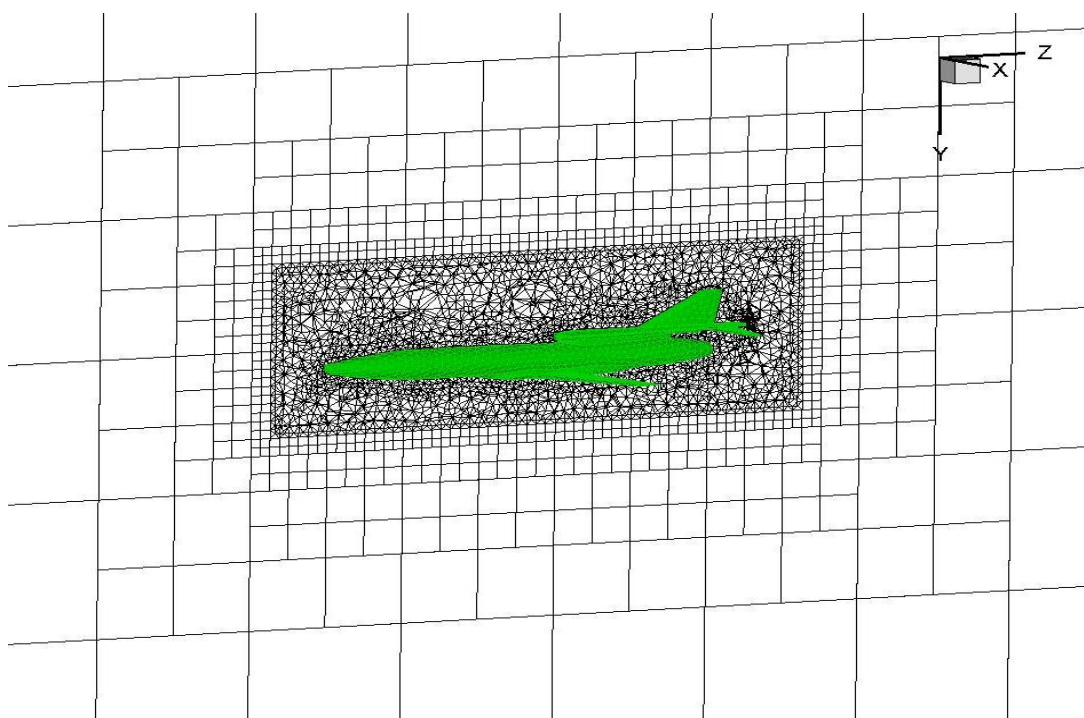




ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ



Ανάπτυξη μεθοδολογία και του αντίστοιχου λογισμικού για τη δημιουργία τρισδιάστατων καρτεσιανών και υβριδικών πλεγμάτων

Διατριβή που υπεβλήθη για τη μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

υπό

Δημήτρη Έκτορα Α. Κατεμή

Επιβλέπων καθηγητής: Ιωάννης Κ. Νικολός

Χανιά, Ιούλιος 2010

Η διατριβή του Δημήτρη Έκτορα Κατεμή, εγκρίνεται

Ιωάννης Κ. Νικολός
Επίκουρος Καθηγητής, Επιβλέπων

Δημήτριος Ρόβας
Επίκουρος Καθηγητής

Γεώργιος Σταυρουλάκης
Καθηγητής

Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα

Ο Δημήτρης Έκτορας Κατεμής γεννήθηκε στη Αθήνα το 1983, όπου μεγάλωσε και ολοκλήρωσε τη βασική του εκπαίδευση. Το 2000 εισήχθη στο Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης. Το 2006 αποφοίτησε με βαθμό 7,79 και εισήχθη στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης του ιδίου τμήματος, στον Τομέα Συστημάτων Παραγωγής. Με την εργασία αυτή ολοκληρώνει τις μεταπτυχιακές σπουδές του.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας και των μεταπτυχιακών σπουδών μου θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Ι. Νικολό, ο οποίος ήταν ο επιβλέπων της εργασίας αυτής. Η προσφορά του στο πρόσωπό μου είναι πολύ μεγάλη και τον ευχαριστώ για την πολύ καλή συνεργασία, καθοδήγηση και υπομονή. Επίσης ευχαριστώ τους καθηγητές Δ. Ρόβας και Γ. Σταυρουλάκη, για την τιμή που μου έκαναν με το να είναι μέλη της εξεταστικής επιτροπής. Τέλος ευχαριστώ την μητέρα μου και τον αδερφό για τη στήριξή τους και το κουράγιο που εξακολουθούν να επιδεικνύουν.

Πίνακας Περιεχομένων

Πρόλογος.....	11
Κεφάλαιο 1	12
1.1 Γενικά στοιχεία για τη δημιουργία πλέγματος	12
1.2 Γενικά στοιχεία	13
1.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση	14
Κεφάλαιο 2	26
2.1 Δημιουργία καρτεσιανών εξάεδρων	26
2.1.1 Μοντελοποίηση της γεωμετρίας	26
2.1.2 Δομές δεδομένων για τα εξαεδρικά στοιχεία	26
2.1.3 Καρτεσιανό εξάεδρο	28
2.1.4 Γεωμετρικές τομές μεταξύ εξάεδρων και επιφανειακών πλεγμάτων	29
2.1.5 Πύκνωση πλέγματος	31
2.1.6 Ομαλοποίηση του πλέγματος	31
2.1.7 Υποδιαίρεση λόγω επιφανειακής κλίσης	32
2.2 Δημιουργία πρισμάτων	33
2.2.1 Διάνυσμα κατεύθυνσης	33
2.2.2 Τοποθέτηση του νέου κόμβου	34
2.3 Η τεχνική του προελαύνοντος μετώπου	34
2.3.1 Μοντελοποίηση της γεωμετρίας	34
2.3.2 Η μέθοδος προελαύνοντος μετώπου (Advancing Front)	35
2.3.3 Σύσταση διαδοχικών μετώπων	36
2.3.4 Δημιουργία τετραέδρων	36
2.3.5 Εκτίμηση της ποιότητας του πλέγματος	38
2.4 Το εναλλασσόμενο ψηφιακό δέντρο	40
2.4.1 Το εναλλασσόμενο ψηφιακό δέντρο (ADT)	41
2.4.1 Γεωμετρική αναζήτηση	43
2.4.2 Γεωμετρική τομή	43
2.4.3 Η χρήση του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου στη δημιουργία πλέγματος	45
2.5 Ακριβής έλεγχος γεωμετρικής τομής	46
2.6 Διαχείριση προβληματικών δεδομένων	47
Κεφάλαιο 3	49
3.1 Ο αλγόριθμος δημιουργίας εξάεδρων	50
3.1.1 Δεδομένα εισόδου	51
3.1.2 Καθορισμός του υπερκύβου	52
3.1.3 Η υποδιαίρεση του εξάεδρου	53
3.1.4 Διαδικασία χαρακτηρισμού των νέων εξάεδρων	54
3.1.5 Εξισορρόπηση της δομής octree	60
3.1.6 Υποδιαίρεση των εξάεδρων με βάση την επιφανειακή καμπυλότητα	62
3.2 Ο αλγόριθμος δημιουργίας πρισμάτων	66
3.2.1 Δεδομένα εισόδου	67
3.2.2 Η διαδικασία	67
3.3 Ο αλγόριθμος δημιουργίας πυραμίδων	71
3.3.1 Η διαδικασία	71
3.4 Ο αλγόριθμος δημιουργίας τετράεδρων	75
3.4.1 Δεδομένα εισόδου	75
3.4.2 Αρχική επεξεργασία	75
3.4.3 Βασική επαναληπτική διαδικασία	76

3.4.4 Σύσταση διαδοχικών μετώπων	78
3.4.5 Περιορισμοί	78
Κεφάλαιο 4	83
4.1 Πρώτη γεωμετρία	83
4.2 Δεύτερη γεωμετρία	90
Κεφάλαιο 5	99
5.1 Ανακεφαλαίωση	99
5.2 Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα	99
5.3 Μελλοντικές προεκτάσεις	100

Περιεχόμενα Σχημάτων

Σχήμα 1α	Κακή ποιότητα του πρισματικού πλέγματος πριν την εφαρμογή περιορισμών	17
Σχήμα 1β	Καλή ποιότητα του πρισματικού πλέγματος με την εφαρμογή περιορισμών	18
Σχήμα 2	Προβληματικές περιπτώσεις πρισματικού πλέγματος σε 2D	21
Σχήμα 3	Η μέθοδος προελαύνοντος μετώπου σε 2 διαστάσεις	22
Σχήμα 4	Δύο περιπτώσεις όπου η εξέταση τομής είναι προβληματική.	25
Σχήμα 5	Παράδειγμα octree δομής δεδομένων	27
Σχήμα 6	Quadtree δομή	28
Σχήμα 7	Ένα εξάεδρο με τα οκτώ παιδιά του και ένα πλέγμα εξάεδρων	29
Σχήμα 8	Η octree δομή που αντιστοιχεί στο πλέγμα του σχήματος 7	29
Σχήμα 9	Διαδικασία ray casting για τον έλεγχο της θέσης του q σε σχέση με το πολύγωνο P	30
Σχήμα 10α	Η γωνία θ	32
Σχήμα 10β	Η γωνία φ	32
Σχήμα 11	Κατεύθυνση των οριακών επιφανειών	35
Σχήμα 12	Δημιουργία τετραεδρικού στοιχείου	38
Σχήμα 13	Στρέβλωση τύπου «stretching» ενός τετραεδρικού στοιχείου.	40
Σχήμα 14	Στρέβλωση τύπου «shearing» ενός τετραεδρικού στοιχείου	40
Σχήμα 15	Συσχέτιση μεταξύ του δυαδικού δέντρου και της διαδικασίας διχοτόμησης	42
Σχήμα 16	Ορισμός των ορίων συντεταγμένων ενός τριγωνικού στοιχείου και ενός ευθυγράμμου τμήματος.	44
Σχήμα 17	Αναπαράσταση του ελέγχου τομής του ευθύγραμμου τμήματος ab με το επίπεδο του τριγώνου (0,1,2) με την χρήση του όγκου δύο τετράεδρων	47
Σχήμα 18	Αναπαράσταση του ελέγχου τομής του ευθύγραμμου τμήματος ab με το τριγώνου (0,1,2) με την χρήση του όγκου τριών τετράεδρων	47
Σχήμα 19	Διάγραμμα ροής του συνολικού αλγορίθμου	49
Σχήμα 20	Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου παραγωγής εξάεδρων	50
Σχήμα 21	Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου παραγωγής πρισματικών στοιχείων	66

Περιεχόμενα εικόνων

Εικόνα 1	Καρτεσιανό πλέγμα από εξάεδρα	15
Εικόνα 2	Δείγμα του υβριδικού πλέγματος που παράγεται	19
Εικόνα 3	Οριζόντια τομή του πλέγματος, όπως υπολογίστηκε από τη βασική επαναληπτική διαδικασία.	23
Εικόνα 4	Απεικόνιση του χώρου, που αδυνατεί να διακριτοποιήσει η βασική επαναληπτική διαδικασία.	24
Εικόνα 5	Άποψη του εσωτερικού επιφανειακού πλέγματος	51
Εικόνα 6	Άποψη του εσωτερικού επιφανειακού πλέγματος μέσα στο εξωτερικό πλέγμα.	52
Εικόνα 7	Άποψη του υπερκύβου μετά την υποδιαίρεση του	53
Εικόνα 8	Άποψη δυο εξάεδρων που τα παιδιά τους μοιράζονται κόμβους	54
Εικόνα 9	Η θέση των κόμβων Α και Β σε σχέση με τα σύνορα	55
Εικόνα 10	Τομή εξάεδρου με το επιφανειακό πλέγμα. Έλεγχος με ακμές	56
Εικόνα 11	Επιφανειακός κόμβος μέσα στο εξάεδρο	57
Εικόνα 12	Άποψη των εξάεδρων μετά την τέταρτη υποδιαίρεση	58
Εικόνα 13	Άποψη της έκτης υποδιαίρεσης	59
Εικόνα 14	Άποψη της έκτης υποδιαίρεσης με χρήση πηγής πύκνωσης	60
Εικόνα 15	Άποψη της όγδοης υποδιαίρεσης χωρίς εξισορρόπηση του πλέγματος	61
Εικόνα 16	Άποψη της όγδοης υποδιαίρεσης με εξισορρόπηση του πλέγματος	62
Εικόνα 17	Άποψη πλέγματος μετά το πέρας της διαδικασίας	63
Εικόνα 18α	Άποψη πλέγματος z slice	64
Εικόνα 18β	Άποψη πλέγματος x slice	64
Εικόνα 19	Άποψη πλέγματος φαίνεται η πύκνωση στοιχείων γύρω από την γεωμετρία	64
Εικόνα 20	Άποψη πλέγματος σε τομή $y=620$	65
Εικόνα 21	Άποψη του εξαεδρικού επιφανειακού πλέγματος	65
Εικόνα 22	Πρισματικό πλέγμα	69
Εικόνα 23	Τομή του πρισματικού πλέγματος	69
Εικόνα 24α	Το πίσω μέρος της γεωμετρίας	70
Εικόνα 24β	μετά από 5 στρώματα πρισμάτων	70
Εικόνα 24γ	μετά από 10 στρώματα πρισμάτων	70
Εικόνα 24δ	μετά από 15 στρώματα πρισμάτων	70
Εικόνα 25	Οξεία γωνία της γεωμετρίας.	71
Εικόνα 26	Οι βάσεις των πυραμίδων πριν την επεξεργασία τους	73
Εικόνα 27	Οι βάσεις των πυραμίδων μετά από επεξεργασία	73
Εικόνα 28	Κοντινή άποψη των πυραμίδων.	74
Εικόνα 29	Το στρώμα των πυραμίδων με το ενεργό εξαεδρικό πλέγμα	74
Εικόνα 30	Το στρώμα των πυραμίδων με το ενεργό εξαεδρικό και το πρισματικό πλέγμα	75
Εικόνα 31	Άποψη του τετρεδρικού πλέγματος	80
Εικόνα 32α	Άποψη του τετρεδρικού πλέγματος	80
Εικόνα 32β	Άποψη του τετρεδρικού και πρισματικού πλέγματος	81
Εικόνα 33	Άποψη του τελικού υβριδικού πλέγματος	81
Εικόνα 34	Άποψη του τελικού υβριδικού πλέγματος	82
Εικόνα 35	Το επιφανειακό πλέγμα που ορίζει την εσωτερική γεωμετρία	82

Εικόνα 36	Η εξωτερική και εσωτερική γεωμετρία	84
Εικόνα 37	Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος. Φαίνεται η πύκνωση των στοιχείων	84
Εικόνα 38	Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος. Φαίνεται η πύκνωση των στοιχείων	85
Εικόνα 39	Το πλέγμα από πρίσματα περικλείει την γεωμετρία	86
Εικόνα 40	Λεπτομέρεια των στρωμάτων από πρίσματα	86
Εικόνα 41	Το τελικό υβριδικό πλέγμα	88
Εικόνα 42	Το τελικό υβριδικό πλέγμα	89
Εικόνα 43	Το τελικό υβριδικό πλέγμα	90
Εικόνα 44	Το επιφανειακό πλέγμα που ορίζει την εσωτερική γεωμετρία	91
Εικόνα 45	Η εξωτερική και η εσωτερική γεωμετρία που καθορίζουν τα όρια του χωρίου	91
Εικόνα 46	Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος. Φαίνεται η πύκνωση των στοιχείων	92
Εικόνα 47	Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος. Φαίνεται η πύκνωση των στοιχείων	93
Εικόνα 48	Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος στην επιφάνεια του αεροσκάφους.	93
Εικόνα 49	Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος.	94
Εικόνα 50	Το πρισματικό πλέγμα που περικλείει την γεωμετρία της εικόνας 44	95
Εικόνα 51	Λεπτομέρεια του πρισματικού πλέγματός	95
Εικόνα 52	Τομή του πρισματικού πλέγματός	96
Εικόνα 53	Το υβριδικό πλέγμα σε τομή ΧΥ	97
Εικόνα 54	Το υβριδικό πλέγμα σε τομή ΧΥ	97
Εικόνα 55	Το υβριδικό πλέγμα σε τομή ΥΖ	98

Πρόλογος

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη μεθοδολογίας και του αντίστοιχου λογισμικού για τη διακριτοποίηση αυθαίρετων γεωμετριών με τη δημιουργία τρισδιάστατου υβριδικού πλέγματος εξαεδρικών, τετραεδρικών, πρισματικών και πυραμιδικών στοιχείων. Η προς διακριτοποίηση γεωμετρία περιγράφεται από ένα επιφανειακό πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, το οποίο αποτελεί το μοναδικό δεδομένο εισόδου. Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε αντιμετωπίζει γεωμετρίες ανεξαρτήτως πολυπλοκότητας και επιφανειακής πύκνωσης, δίνοντας έμφαση στην αξιοπιστία, στην αυτοματοποίηση, στην ταχύτητα και στην οικονομία υπολογιστικών πόρων.

Για τη δοκιμή της προτεινόμενης μεθοδολογίας χρησιμοποιήθηκαν επιφανειακά πλέγματα, που κατασκευάστηκαν με το λογισμικό πακέτο CATIA. Οι αντίστοιχες γεωμετρίες ποικίλουν ως προς την πολυπλοκότητα, την κυρτότητα, την πύκνωση και τον όγκο τους. Η εγκυρότητα του πλέγματος ελέγχθηκε τόσο υπολογιστικά, όσο και οπτικά με τη βοήθεια του λογισμικού Tecplot 9.0.

Στη συνέχεια γίνεται μια σύντομη αναφορά στα αντικείμενα που εξετάζονται σε κάθε κεφάλαιο της εργασίας. Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται γενικά στοιχεία για την δημιουργία πλέγματος και τη χωρική διακριτοποίηση. Δίνονται επιγραμματικά οι βασικότερες μεθοδολογίες και η μέχρι σήμερα πρόοδος. Επίσης παρουσιάζεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήσαμε. Στο κεφάλαιο 2 καταγράφονται τα σημαντικότερα στοιχεία των τεχνικών που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των διάφορων πλεγμάτων. Παρουσιάζονται τα βήματα των μεθόδων, οι σχετικές δομές δεδομένων και η εφαρμογή τους. Στο κεφάλαιο 3 περιγράφονται τα βήματα του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία, με τη σειρά εφαρμογής τους. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται εφαρμογές του αλγορίθμου για την πιστοποίηση της καλής λειτουργίας του, ενώ στο κεφάλαιο 5 ανακεφαλαιώνεται η εργασία και παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 1

1.1 Γενικά στοιχεία για τη δημιουργία πλέγματος

Η αυτοματοποιημένη παραγωγή μη δομημένου πλέγματος αποτελεί ένα επιστημονικό πεδίο το οποίο γνωρίζει ιδιαίτερη ανάπτυξη τα τελευταία 20 χρόνια. Η κατασκευή μη δομημένου πλέγματος στις δύο διαστάσεις αφορά μεθόδους τριγωνικών και τετραπλευρικών στοιχείων, ενώ στις τρεις διαστάσεις οι αντίστοιχες μέθοδοι αφορούν κυρίως τετραεδρικά και εξαεδρικά στοιχεία. Μεταξύ των μεθόδων αυτών περιλαμβάνονται μέθοδοι κατασκευής επιφανειακού πλέγματος, ενώ ένας άλλος κλάδος αφορά την μετα-επεξεργασία του πλέγματος και τη βελτίωσή του μέσω εξομάλυνσης, εκκαθάρισης και τοπικής βελτίωσης.

Αρκετές από τις σύγχρονες ανάγκες δημιουργίας πλέγματος αφορούν στη διαμόρφωση επιφανειακών πλεγμάτων σε αυθαίρετες τρισδιάστατες επιφάνειες. Τα επιφανειακά στοιχεία των επιφανειών, που συνήθως αναπαριστώνται από επιφάνειες NURBS, χρησιμοποιούνται είτε άμεσα ως δομικά στοιχεία, είτε ως δεδομένα εισόδου σε μια γεννήτρια χωρικού πλέγματος. Οι αλγόριθμοι δημιουργίας επιφανειακού πλέγματος διακρίνονται σε αλγορίθμους παραμετρικού χώρου και σε απευθείας τρισδιάστατου χώρου.

Οι αλγόριθμοι παραμετρικού χώρου αναπτύσσουν στοιχεία στον δισδιάστατο παραμετρικό χώρο της επιφάνειας. Συχνά είναι πολύ αποδοτική η ανάπτυξη των στοιχείων στις δύο διαστάσεις και στη συνέχεια, ως τελικό στάδιο, οι συντεταγμένες των κορυφών μεταφέρονται στο φυσικό χώρο. Αντίθετα, οι αλγόριθμοι τρισδιάστατου χώρου αναπτύσσουν εξ αρχής στοιχεία στην πραγματική τρισδιάστατη γεωμετρία, χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψη η παραμετρική αναπαράστασή της.

Σπάνια ένας αλγόριθμος δημιουργίας πλέγματος είναι ικανός να δημιουργήσει ένα βέλτιστο πλέγμα χωρίς την εφαρμογή μιας μετα-διαδικασίας βελτίωσης της συνολικής ποιότητας των στοιχείων. Οι δύο βασικότερες κατηγορίες βελτίωσης του πλέγματος είναι η εξομάλυνση και η εκκαθάριση. Η εξομάλυνση αφορά σε μεθόδους τροποποίησης των συντεταγμένων των κόμβων, διατηρώντας όμως αμετάβλητη τη συνδεσμολογία των στοιχείων του πλέγματος. Η εκκαθάριση αναφέρεται γενικά σε κάθε διαδικασία που τροποποιεί τη συνδεσμολογία των στοιχείων του πλέγματος.

Οι περισσότερες διαδικασίες εξομάλυνσης αποτελούν επαναληπτικές μεθοδολογίες, που μεταθέτουν μεμονωμένους κόμβους, βελτιώνοντας την τοπική ποιότητα των στοιχείων. Η εκκαθάριση ενός πλέγματος περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό αλγορίθμων. Η βελτίωση της ποιότητας επιτυγχάνεται προχωρώντας σε τοπικές αλλαγές στη συνδεσμολογία των στοιχείων.

Τέλος, εφαρμόζονται και διαδικασίες τοπικής βελτίωσης του πλέγματος (π.χ. τοπικής πύκνωσης), που αποσκοπούν στην αποδοτική τοπική μείωση του μεγέθους των στοιχείων. Η μείωση του όγκου είναι συνήθως χρήσιμη στη σύλληψη τοπικών φυσικών φαινομένων, ή απλά στη τοπική βελτίωση της ποιότητας των στοιχείων.

Εννοιολογικά, ένα δομημένο πλέγμα διαφέρει από ένα μη δομημένο από το χαρακτηριστικό γνώρισμα του σταθερού πλήθους γειτονικών στοιχείων για

κάθε εσωτερικό κόμβο του. Οι αλγόριθμοι δομημένου πλέγματος εφαρμόζουν συχνά τεχνικές “block-structured”, που χρησιμοποιούνται συνήθως στις εφαρμογές Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD), όπου συχνά απαιτείται αυστηρή ευθυγράμμιση των στοιχείων για τη σύλληψη φυσικών φαινομένων. Αντίθετα, στα μη δομημένα πλέγματα επιτρέπεται το μεταβλητό πλήθος γειτονικών στοιχείων για κάθε κόμβο.

1.2 Γενικά στοιχεία

Την τελευταία δεκαετία παρατηρήθηκε ένα έντονο ενδιαφέρον για την δημιουργία καρτεσιανών πλεγμάτων. Σε αντίθεση με δομημένες ή μη δομημένες μεθόδους στα καρτεσιανά πλέγματα η δομή του πλέγματος είναι ανεξάρτητη από τη γεωμετρία των σωμάτων, που ορίζουν το χώρο προς διακριτοποίηση. Το χαρακτηριστικό αυτό δίνει την δυνατότητα για αυξημένη αυτοματοποίηση, μειώνει την επεξεργασία που απαιτούν τα επιφανειακά πλέγματα και μειώνει την επανεπεξεργασία που απαιτείται αν η τοπολογία των σωμάτων αλλάξει. Ένας καλά σχεδιασμένος αλγόριθμος μπορεί να κατασκευάσει καρτεσιανά πλέγματα γύρω από πολύ πολύπλοκες γεωμετρίες, παράγοντας μεγάλα πλέγματα σε μικρό χρονικό διάστημα.

Το μεγαλύτερο υπολογιστικό βάρος των γεννητριών καρτεσιανών εξάεδρων, που προκαλείται από πολύπλοκες γεωμετρίες, πέφτει στα καρτεσιανά στοιχεία που εισχωρούν στα σώματα. Η γενικότητα της διαδικασίας παραγωγής καρτεσιανού πλέγματος μεταφέρει το πρόβλημα από το να ταιριάξουν τα στοιχεία του πλέγματος με την γεωμετρία του χωρίου για την συγκεκριμένη περίπτωση, σε ένα γενικότερο πρόβλημα της τομής εξάεδρων με την γεωμετρία. Χρησιμοποιώντας τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί από την υπολογιστική γεωμετρία και για εφαρμογές γραφικών υπολογιστή, μπορούμε να επιλύσουμε το γενικό πρόβλημα και να το εφαρμόσουμε σε κάθε γεωμετρία.

Ένα άλλο πλεονέκτημα των καρτεσιανών εξάεδρων είναι ότι μπορούν να καλύψουν μεγαλύτερο χώρο με μικρότερο κόστος σε σχέση με άλλου τύπου μη δομημένα πλέγματα. Τέλος η πολύ γρήγορη διαδικασία παραγωγής τους επιτρέπει την κατασκευή πλεγμάτων της τάξης του ενός εκατομμυρίου στοιχείων σε ένα δεκάλεπτο και πάλι υπερέχει κατά πολύ σε σχέση με άλλες μεθόδους όπως τα τετραεδρικά πλέγματα. Όμως τα καρτεσιανά πλέγματα εξάεδρων έχουν το μειονέκτημα ότι δεν είναι κατάλληλα για τυρβώδεις ροές. Καθώς η χρήση τους οδηγεί σε απαράδεκτα μεγάλο αριθμό στοιχείων στα στρώματα που είναι κοντά στις γεωμετρίες.

Για αυτό αναπτύχθηκε η ιδέα των υβριδικών πλεγμάτων. Δηλαδή παράγεται γύρω από την γεωμετρία ένα πλέγμα που την αγκαλιάζει. Το πλέγμα αυτό παράγεται σε αρκετά στρώματα μακριά από την γεωμετρία έτσι ώστε να καλύπτει τον χώρο των οριακών στρωμάτων. Ο υπόλοιπος χώρος διακριτοποιείται είτε χρησιμοποιώντας εξάεδρικά είτε τετραεδρικά στοιχεία.

Το στοιχείο που είναι κατάλληλο για αυτό τον σκοπό είναι το πρίσμα. Οι τριγωνικές έδρες του είναι κατάλληλες για την ακριβή ένωση του με την παρεχόμενη γεωμετρία. Επίσης οι κόμβοι του πλέγματος από πρισματικά στοιχεία διαμοιράζονται κοντά στην γεωμετρία με ορθοκανονικό τρόπο. Το αποτέλεσμα είναι τα πρίσματα να έχουν μικρό πάχος σε σχέση με το μέγεθος

τους. Έτσι επιτυγχάνεται καλή προσομοίωση των συνεκτικών στρωμάτων με μικρό αριθμό στοιχείων.

Θέλοντας να συνδυάσουμε τα πλεονεκτήματα των καρτεσιανών εξάεδρων και των μη δομημένων πρισμάτων αποφασίσαμε να δημιουργήσουμε ένα υβριδικό πλέγμα που να συνδυάζει καρτεσιανά εξάεδρα, και πρίσματα. Ο αλγόριθμός θα διακριτοποιεί πρώτα το χωρίο με εξάεδρα. Το καρτεσιανό πλέγμα θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί από μόνο του σε διάφορες εφαρμογές. Στην συνέχεια θα παράγει ένα πρισματικό πλέγμα στοιχείων γύρω από τη γεωμετρία.

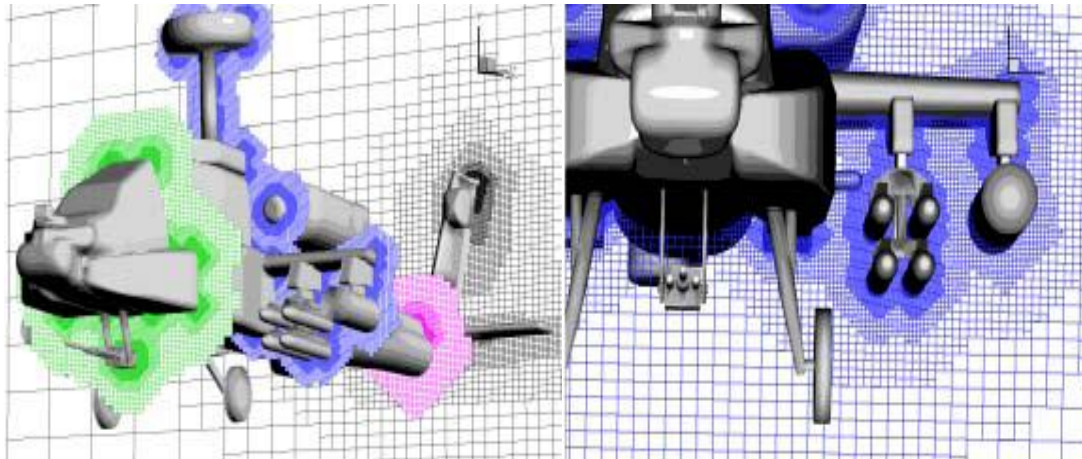
Για να αποφύγουμε την επίλυση των τομών μεταξύ του εξαεδρικού και του πρισματικού πλέγματος, τα δύο πλέγματα θα ενωθούν με την βοήθεια ενός τετραεδρικού πλέγματος, το οποίο παράγεται με την μέθοδο Προελαύνοντος Μετώπου (Advancing Front). Η τριγωνική έδρα των πρισμάτων είναι κατάλληλη για να εκκινήσουν τα τετράεδρα και από την πλευρά των εξάεδρων δημιουργείται ένα πλέγμα από πυραμοειδή στοιχεία με τετραγωνική βάση. Έτσι και τα εξάεδρα μπορούν να ενωθούν με τα τετράεδρα χωρίς την χρήση τομών.

1.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Οι Aftosmis, Berger και Melton ασχολούνται με καρτεσιανά εξαεδρικά πλέγματα ([1] και [2]). Τα καρτεσιανά πλέγματα εξαεδρικών στοιχείων έχουν τα πλεονεκτήματα της υψηλής αυτοματοποίησης, γρήγορης παραγωγής του πλέγματος, ευελιξία καθώς μπορούν να διακριτοποιήσουν οποιαδήποτε γεωμετρία.

Η κατηγοριοποίηση των εξάεδρων σε στοιχεία που τέμνουν την γεωμετρία ή σε στοιχεία που βρίσκονται στο χώρο ροής έχει το αποτέλεσμα να μην μας ενδιαφέρει η ακριβής λεπτομέρεια μιας τομής καθώς και η τοπολογική πληροφορία αυτής να μην παίζει κάποιο ρόλο στην διαδικασία παραγωγής πλέγματος. Για αυτό η μέθοδος δεν χρειάζεται κάποιο συγκεκριμένο τρόπο αναπαράστασης της γεωμετρίας.

Επίσης αυτή η ιδιότητα δίνει την δυνατότητα να μπορούν να αναπαραχθούν πολύπλοκες γεωμετρίες. Στην Εικόνα 1 παρουσιάζεται ένα καρτεσιανό πλέγμα 5,81 εκατομμυρίων στοιχείων το οποίο διακριτοποιεί τον χώρο γύρω από ένα επιθετικό ελικόπτερο. Το ελικόπτερο αποτελείται από 82 διαφορετικά στοιχεία. Το πλέγμα παράχθηκε σε 5 λεπτά και 20 δευτερόλεπτα σε ένα workstation (RISC R10000 CPU at 195 Mhz). Ο χρήστης έπρεπε να δώσει το όριο του υπολογιστικού τομέα και ένα όριο για να σταματήσει η διαδικασία.



Εικόνα 1: Καρτεσιανό πλέγμα από εξάεδρα [1].

Άλλες μέθοδοι δημιουργίας μη δομημένων πλεγμάτων, οι οποίες εξαρτώνται από την γεωμετρία, χρειάζονται αρκετό χρόνο για να επεξεργαστούν την παραπάνω γεωμετρία. Τεχνικές παραγωγής τετραέδρων όμως θα δώσουν πλέγματα ίσης ή και καλύτερης ποιότητας σε σχέση με το καρτεσιανό.

Η επιφανειακή μοντελοποίηση για μη δομημένα τετραεδρικά πλέγματα είναι απαραίτητη. Πρώτον είναι απαραίτητη η παραγωγή τριγωνικού πλέγματος πάνω στην επιφάνεια. Αν η επιφάνεια αποτελείται από διαφορετικά στοιχεία, όπως το ελικόπτερο, τότε θα πρέπει η επιφανειακή τριγωνοποίηση να λαμβάνει υπόψη το μέγεθος και την διασπορά των κόμβων σε κάθε στοιχείο. Επίσης οι ακμές των τριγωνικών στοιχείων πρέπει να ακολουθούν τις ακμές της γεωμετρίας και ειδικά τις τομές μεταξύ των στοιχείων που την περιγράφουν.

Αυτή η προετοιμασία της γεωμετρίας καταλήγει να είναι η πιο χρονοβόρα διαδικασία στην παραγωγή ενός μη δομημένου τετραεδρικού πλέγματος και να απαιτεί την μεγαλύτερη αλληλεπίδραση με τον χρήστη. Αν ένα στοιχείο της γεωμετρίας μετακινηθεί ή αλλάξει η μορφή του, η διαδικασία θα πρέπει να επαναληφτεί τουλάχιστον τοπικά.

Αντίθετα οι απαιτήσεις για την μοντελοποίηση της γεωμετρίας που χρησιμοποιεί μια Καρτεσιανή μέθοδος είναι λιγότερες. Τα στοιχεία που αποτελούν την γεωμετρία μπορούν να τριγωνοποιηθούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Οι τομές μεταξύ τους δεν εμποδίζουν τη διαδικασία παραγωγής πλέγματός, οπότε δεν χρειάζεται να εντοπιστούν και να περιορισθούν. Επίσης δεν είναι ανάγκη τα γειτονικά στοιχεία της γεωμετρίας να έχουν παρόμοιο μέγεθος τριγωνικών στοιχείων, καθώς το εξαιδρικό πλέγμα δεν επηρεάζεται από αυτό.

Ένα άλλο θετικό στοιχείο που προσφέρει η Καρτεσιανή μεθοδολογία είναι ότι ο χρόνος δημιουργίας του πλέγματος συσχετίζεται σχεδόν γραμμικά με τον αριθμό των στοιχείων που παράγονται για μη συγκεκριμένη γεωμετρία. Η γραμμική πολυπλοκότητα ($O(N)$) της Καρτεσιανής μεθόδου για την δημιουργία μη δομημένων εξαιδρικών πλεγμάτων είναι πολύ καλή σε σχέση με την απόδοση 3-D Delaunay μεθόδων για την δημιουργία μη δομημένων τετραεδρικών στοιχείων που έχουν πολυπλοκότητα μεταξύ $O(N^{5/3})$ και $O(N^2)$.

Η τεχνική που περιγράφουν ([1] και [2]) για την δημιουργία καρτεσιανού πλέγματος, βλέπει το πλέγμα ως μη δομημένη (ή δομημένη σε octree) συλλογή από εξάεδρα. Η τεχνική ξεκινάει με ένα αρχικό στοιχείο, το οποίο υποδιαιρείται

σε μικρότερα, έτσι ώστε η γεωμετρία που εξετάζεται να αναπαριστάται επαρκώς. Κύρια έμφαση δίνεται στους αλγορίθμους που αφορούν στον εντοπισμό των γεωμετρικών τόμων του επιφανειακού πλέγματος με το καρτεσιανό πλέγμα καθώς και την προσαρμοστικότητα του καρτεσιανού πλέγματος στη γεωμετρία.

Οι Kallinderis, Khawaja, και McMorris [3] αναπτύσσουν μια μεθοδολογία για την παραγωγή αυτοματοποιημένων υβριδικών πρισματικών/τετραεδρικών πλεγμάτων για 3D γεωμετρίες. Τα πρίσματα χρησιμοποιούνται για να καλύψουν την περιοχή γύρω από την γεωμετρία και παράγονται πρώτα. Τα τετράεδρα, με μία τεχνική βασισμένη σε octree δομή δεδομένων, καλύπτουν τον υπόλοιπο χώρο. Οι τεχνικές για τη δημιουργία των πρισματικών πλεγμάτων περιγράφονται αναλυτικά στην παραπάνω εργασία.

Η μεθοδολογία ξεκινάει με ένα μη δομημένο επιφανειακό πλέγμα, που περιγράφει την γεωμετρία. Αυτό το πλέγμα μετακινείται σε τακτά βήματα, με αποτέλεσμα την δημιουργία ημη-δομημένων πρισματικών στρωμάτων προς τη διεύθυνση της μετακίνησης. Με αυτή την διαδικασία η καμπυλότητα της γεωμετρίας εξομαλύνεται. Οι τρεις βασικές διαδικασίες της μεθόδου περιγράφονται στη συνέχεια.

Η πρώτη είναι η εύρεση της κατεύθυνσης στην οποία θα μετακινηθεί ο κάθε κόμβος του πλέγματος. Συγκεκριμένα θα πρέπει ο νέος κόμβος να είναι ορατός από όλα τα τρίγωνα που περικλείουν τον αρχικό κόμβο. Για να ικανοποιείται η παραπάνω απαίτηση προτείνουν την μεγιστοποίηση της ελάχιστης γωνίας μεταξύ του κάθετου διανύσματος των τριγώνων και του διανύσματος αρχικού κόμβου τελικού κόμβου.

Η δεύτερη διαδικασία είναι ο υπολογισμός της απόστασης μεταξύ του αρχικού και τελικού κόμβου. Η σχέση που δίνει το βήμα είναι:

$$\Delta n = (1 + \alpha) \Delta n_{layer}$$

Το α βρίσκεται με βάση των μέσο όρο των γωνιών που σχηματίζουν τα τρίγωνα που περικλείουν τον κόμβο. Το μέσο βήμα για κάθε στρώμα υπολογίζεται με βάση ένα αρχικό βήμα και ένα παράγοντα παραμόρφωσης st . Η σχέση υπολογισμού του δίνεται στη συνέχεια:

$$\Delta n_{layer} = \Delta n_0 \times st^{(layer-1)}$$

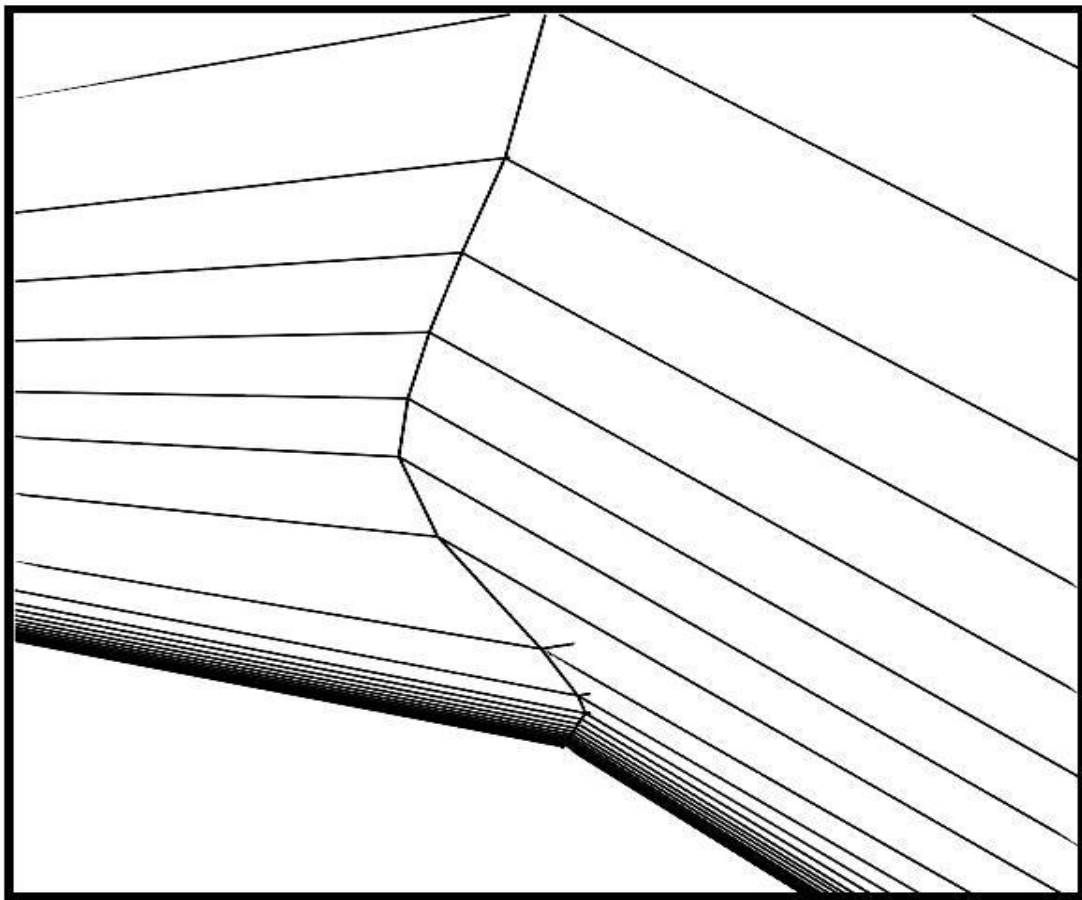
Η τελευταία διαδικασία είναι η εφαρμογή μιας διαδικασίας ομαλοποίησης του πλέγματος. Εφαρμόζεται και στο διάνυσμα κατεύθυνσης και στο μέγεθος του βήματος. Η εφαρμογή της κρίνεται απαραίτητη για την ομαλοποίηση του πλέγματος, καθώς και για την αποφυγή δημιουργίας στοιχείων που τέμνονται μεταξύ τους, που είναι πιθανό να δημιουργηθούν σε περιοχές με μεγάλη πυκνότητα κόμβων και έντονη κυρτότητα. Προτείνουν την εφαρμογή της Laplacian διαδικασίας με βάρη.

Τέλος επιβάλουν δύο περιορισμούς για να αποφύγουν την στρεβλή ανάπτυξη του πλέγματος. Συγκεκριμένα ο λόγος του μεγέθους του βήματος δυο διαδοχικών στρωμάτων για μια γραμμή μεταφοράς πρέπει να είναι μικρότερος από ένα παράγοντα παραμόρφωσης st .

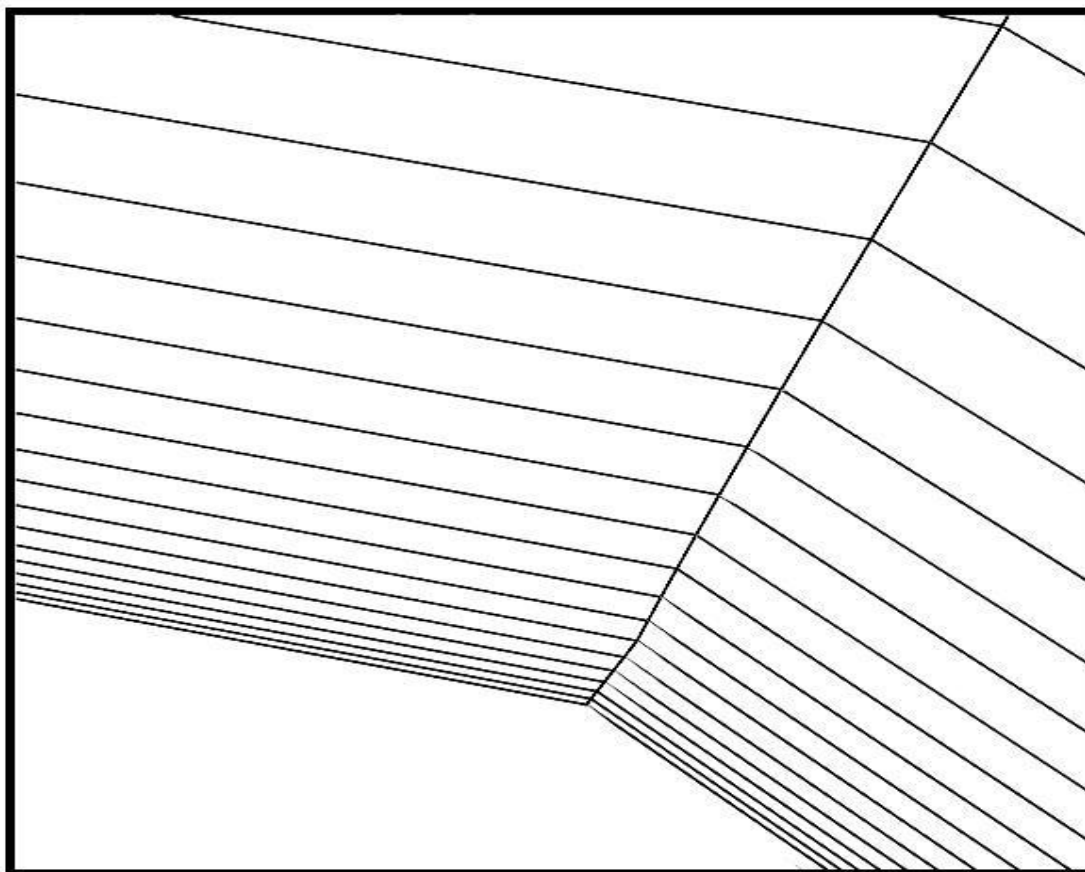
$$(1 - st) \Delta n_{j-1} < \Delta n_j < (1 + st) \Delta n_{j-1}$$

Όπου $j-1$ και j δείχνουν την σειρά των σημείων πάνω στην γραμμή μεταφοράς τους. Για τον όρο st προτείνουν την τιμή 0,2. Ο άλλος περιορισμός εφαρμόζεται στο διάνυσμα κατεύθυνσης και αφορά στη διαφοροποίηση της κατεύθυνσης από το ένα στρώμα στο άλλο. Η μέγιστη διαφορά δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 30° . Η διαφορά στο τελικό πλέγμα, που επιφέρουν οι περιορισμοί ποιότητας, είναι εμφανής στις παρακάτω εικόνες.

Σε περιπτώσεις όπου έχουμε διαφορετικές γεωμετρίες, τα πρισματικά πλέγματα που παράγονται γύρω από αυτές μπορεί να αλληλεπικαλύπτονται. Ο αλγόριθμος βρίσκει αυτά τα σημεία και μετακινεί τους κόμβους του πλέγματος έτσι ώστε να αποφευχθεί η κάλυψη. Η μετακίνηση των κόμβων γίνεται πάνω στις γραμμές μετακίνησής τους.



Σχήμα 1α: Κακή ποιότητα του πρισματικού πλέγματος πριν την εφαρμογή περιορισμών [3].



Σχήμα 1β: Καλή ποιότητα του πρισματικού πλέγματος με την εφαρμογή περιορισμών [3].

Στη συνέχεια αναπτύσσουν μια μεθοδολογία παραγωγής τετράεδρων με χρήση octree δομής. Η παραδοσιακή μέθοδος Advancing Front, που περιγράφεται στο [7], ζητεί από το χρήστη να καθορίσει ένα πλέγμα υποβάθρου το οποίο δίνει στοιχεία για την πύκνωση των κόμβων, την εξάπλωση του πλέγματος και την κατεύθυνση στην οποία συμβαίνει αυτή. Η χρησιμοποίηση της octree δομής δίνει αυτές τις πληροφορίες αυτόματα.

Το μέγεθος των στοιχείων αυξάνεται προοδευτικά όσο το πλέγμα απομακρύνεται από την τελευταία επιφάνεια των πρισμάτων. Η πληροφορία αυτή δίνεται από κύβους που αποτελούν μέλη του octree, το οποίο έχει υποδιαιρεθεί έτσι ώστε οι κύβοι να είναι προοδευτικά μεγαλύτεροι όσο απομακρύνονται από το πρισματικό πλέγμα.

Η δημιουργία των τετράεδρων ξεκινάει από τα τρίγωνα που αποτελούν την εξωτερική επιφάνεια του τελευταίου στρώματος πρισμάτων. Τα τρίγωνα επιλέγονται διαδοχικά και για καθένα δημιουργείται μια λίστα με κόμβους του μετώπου καθώς και ένα νέο. Από αυτούς αν μπορεί θα δημιουργηθεί ένα τετράεδρο. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί δομές *alternating digital tree* (ADT) για την εύρεση τομών αλλά και για την ενημέρωση όλων των δομών. Η διαδικασία χρησιμοποιείται μια φορά.

Ένα αρχικό εξάεδρο χρησιμοποιείται για να ξεκινήσει η διαδικασία. Το εξάεδρο υποδιαιρείται σε οκτώ εξάεδρα. Από αυτά όποια τέμνουν το πρισματικό πλέγμα υποδιαιρούνται μέχρι το μέγεθος των παιδιών τους να είναι ίσο με το πάχος των πρισμάτων. Στη συνέχεια ακολουθεί μια διαδικασία

εξισορρόπησης του πλέγματος, έτσι ώστε κάθε εξάεδρο να έχει το πολύ κατά μια φορά μεγαλύτερο μέγεθος σε σχέση με τα ακριβώς γειτονικά του.

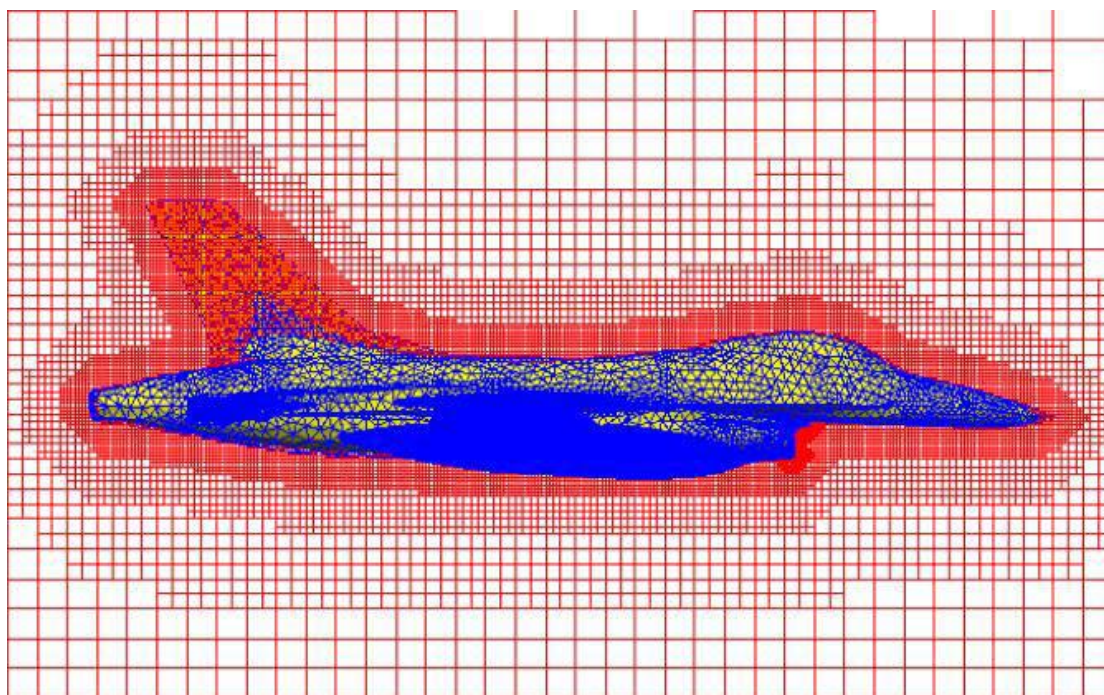
Για κάθε κόμβο και για κάθε τρίγωνο του μετώπου πρέπει να εντοπίζεται σε ποιο εξάεδρο βρίσκεται. Η φύση του octree επιτρέπει την εύρεση αυτού σε γρήγορο χρόνο, πιο γρήγορο από τις συνήθεις μεθόδους αναζήτησης, που χρησιμοποιούνται για την παρεμβολή των παραμέτρων του πλέγματος υποβάθρου.

Ο νέος κόμβος δημιουργείται σε απόσταση από το τρίγωνο δ . Το δ υπολογίζεται από το εξάεδρο στο οποίο ανήκει το τρίγωνο.

$$\delta = Hst^l$$

Όπου H είναι το μέγεθος των εξάεδρων που τέμνουν το πρισματικό πλέγμα, το st είναι ένας παράγοντας παραμόρφωσης και το l καθορίζει το επίπεδο που βρίσκεται το εξάεδρο στο octree. Τα εξάεδρα που τέμνουν το πρισματικό πλέγμα έχουν τιμή 0. Το st επηρεάζει την ομαλότητα της διακύμανσης του μεγέθους των τετραέδρων. Πολύ μικρό st οδηγεί σε πλέγματα με πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων.

Οι Wang και Kannan [4] χρησιμοποιούν ένα υβριδικό καρτεσιανό πλέγμα για να υπολογίσουν ροές γύρω από κινούμενη γεωμετρία. Πρισματικά πλέγματα δημιουργούνται γύρω από την γεωμετρία. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούν είναι βασισμένες στο [3] και χρησιμοποιούνται και στην παρούσα εργασία. Το καρτεσιανό πλέγμα δημιουργείται μετά τη δημιουργία πρισμάτων με την μέθοδο octree. Η διαδικασία που παρουσιάζουν είναι πλήρως αυτοματοποιημένη.



Εικόνα 2: Δείγμα του υβριδικού πλέγματος που παράγεται [4].

Η αυτοματοποιημένη διαδικασία δίνει τη δυνατότητα για χρήση του αλγορίθμου σε κινούμενες γεωμετρίες χωρίς επέμβαση από τον χρήστη. Βασικό στοιχείο της διαδικασίας είναι να εντοπίζονται τα εξάεδρα, που, μετά τη μετακίνηση της γεωμετρίας, βρίσκονται μέσα σε αυτήν. Γίνεται χρήση δένδρων αναζήτησης (ADT) για καλύτερη αποτελεσματικότητα. Τα πρίσματα, που περικλείουν την γεωμετρία, μετακινούνται μαζί της. Το καρτεσιανό πλέγμα παραμένει σταθερό και τροποποιείται όπου απαιτείται.

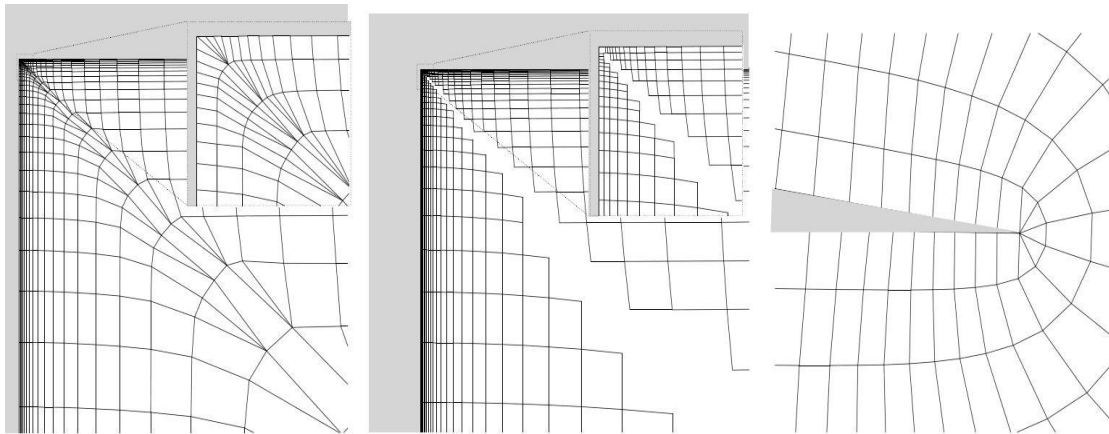
Οι Delanaye, Aftosmis, Berger, Liu και Pulliam [5] παρουσιάζουν μια μεθοδολογία για την ανάπτυξη ενός 2D υβριδικού καρτεσιανού πλέγματος, κατάλληλου για τυρβώδεις ροές. Παρουσιάζουν μια μεθοδολογία για την δημιουργία πρισματών καθώς και τεχνικές για τη διόρθωση του πλέγματος όταν τα πρίσματα τέμνονται μεταξύ τους. Οι μεθοδολογίες είναι παρόμοιες με αυτές στις εργασίες [1] και [3].

Η αρχική επιφάνεια επεξεργάζεται με την χρήση ενός καρτεσιανού πλέγματος. Τα σημεία τομής του πλέγματος με την αρχική επιφάνεια θα αποτελέσουν τους κόμβους του τελικού επιφανειακού πλέγματος. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η αυτοματοποίηση καθώς η αρχική επιφάνεια δεν χρειάζεται ιδιαίτερη επεξεργασία. Υπολογίζονται οι συντεταγμένες των σημείων τομής του καρτεσιανού πλέγματος με την απλοποιημένη γεωμετρία. Στη συνέχεια τα σημεία τομής προβάλλονται πάνω στην γεωμετρία που αναπαριστάται με μια ομάδα κυβικών splines.

Στην Εικόνα 3 παρουσιάζονται τρεις προβληματικές περιπτώσεις που αντιμετωπίζονται. Στις 2 πρώτες το πρισματικό πλέγμα παράγεται σε κυρτή περιοχή και αναγκαστικά παράγονται στοιχεία που τέμνονται μεταξύ τους. Στην πρώτη τα τετράπλευρα, που έχουν εντοπιστεί να προκαλούν τομές, διαλύονται σε τρίγωνα. Τα τριγωνικά στοιχεία περιπλέκουν την δομή των στοιχείων αλλά λύνουν το πρόβλημα της τομής των τετραπλεύρων.

Στην δεύτερη εικόνα έχει εφαρμοστεί διαφορετική μεθοδολογία. Το αρχικό μέτωπο έχει χωριστεί σε δυο διαφορετικά μέτωπα. Αυτά αναπτύσσονται κανονικά. Τα στοιχεία που θα προκαλούν τομές στο πλέγμα αφαιρούνται μετά το τέλος της διαδικασίας. Έτσι δημιουργείται το κενό που φαίνεται στην εικόνα. Το κενό θα συμπληρωθεί με καρτεσιανά στοιχεία. Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η ύπαρξη αυτών των στοιχείων βαθιά μέσα στο πρισματικό πλέγμα και κατά επέκταση στη περιοχή όπου εντοπίζονται συνεκτικά στρώματα.

Στην τρίτη εικόνα έχουμε μια έντονη γωνία της γεωμετρίας. Για να μπορεί το πλέγμα να αναπτυχθεί κανονικά «επεκτείνεται» το επιφανειακό πλέγμα με την χρήση τριγωνικών στοιχείων.

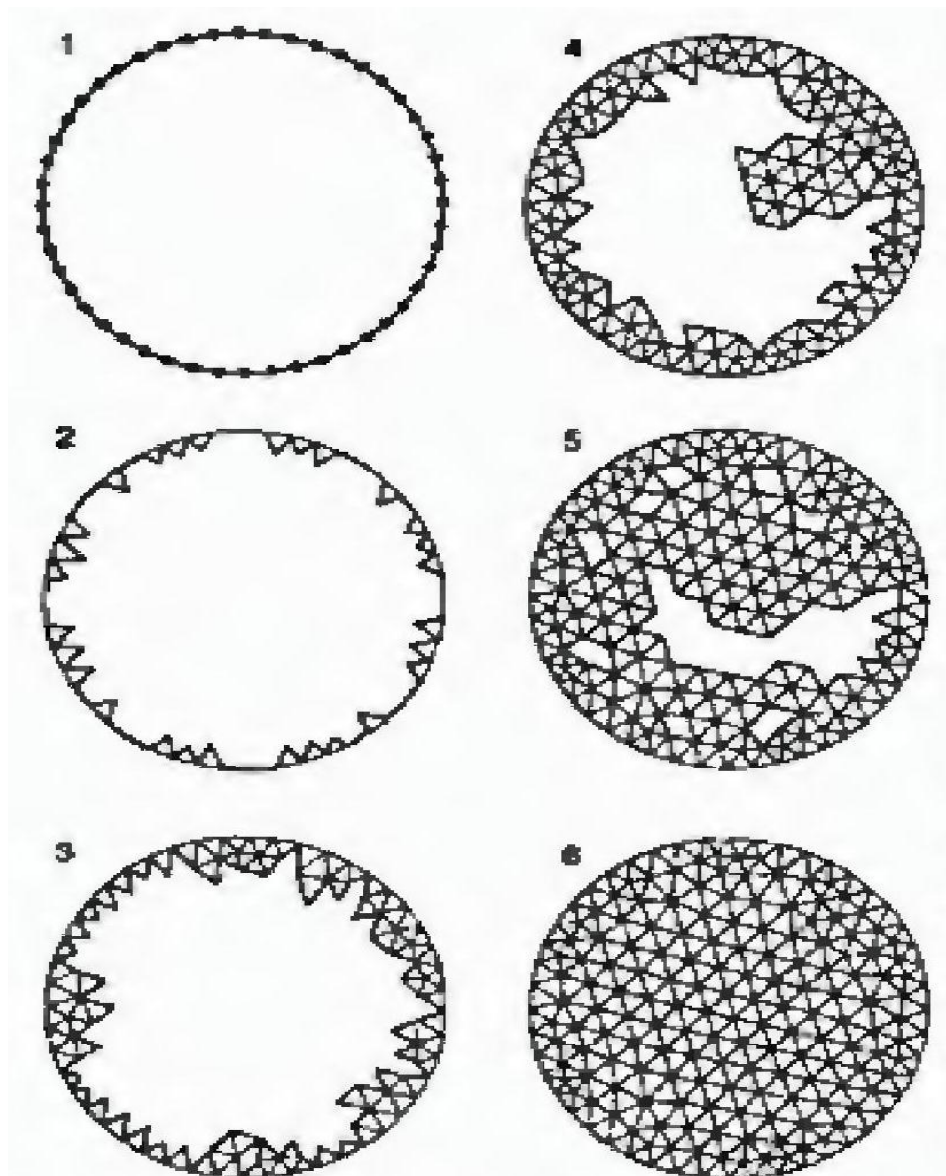


Σχήμα 2: Προβληματικές περιπτώσεις πρισματικού πλέγματος σε 2D [5].

Στην [7] οι Peraire, Peiro και Morgan παρουσιάζουν την τεχνική Προελαύνοντος Μετώπου (Advancing Front) για τη δημιουργία τετράεδρων. Σκοπός του αλγορίθμου είναι η διακριτοποίηση ενός υπολογιστικού χωρίου περίπλοκης γεωμετρίας με τη μορφή ενός μη δομημένου πλέγματος τετραεδρικών στοιχείων. Η προσέγγιση αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς μπορεί να αυτοματοποιηθεί πλήρως και να εξασφαλίσει μικρούς υπολογιστικούς χρόνους. Στη μη δομημένη μορφή, το πλήθος των κόμβων και των στοιχείων που συνορεύουν με έναν εσωτερικό κόμβο του πλέγματος δεν είναι σταθερό στο σύνολο του χωρίου. Η έλλειψη κανονικότητας στο πλέγμα συνεπάγεται αυξημένο υπολογιστικό κόστος, με την έννοια του χρόνου και της υπολογιστικής μνήμης, σε σύγκριση με αντίστοιχα δομημένα πλέγματα. Ωστόσο, το μη δομημένο πλέγμα προσφέρει προσαρμοστικότητα και γεωμετρική ευκαμψία. Για τη βέλτιστη αξιοποίηση των παραπάνω χαρακτηριστικών η διαδικασία ανάπτυξης του πλέγματος θα πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

- Ο αλγόριθμος πρέπει να χειρίζεται αυθαίρετες γεωμετρίες αυτόματα, με την ελάχιστη δυνατή παρέμβαση του χρήστη.
- Τα δεδομένα εισόδου πρέπει να περιοριστούν σε μια υπολογιστική γεωμετρική αναπαράσταση του χωρίου.
- Η διαδικασία πρέπει να υποστηρίζει την τοπική διαφοροποίηση του μεγέθους και του σχήματος των στοιχείων.
- Η διαδικασία πρέπει να υποστηρίζει τη χρήση προσαρμοστικών μεθόδων με στόχο την ανάπτυξη της ακριβέστερης δυνατής προσέγγισης για δεδομένο πλήθος κόμβων.

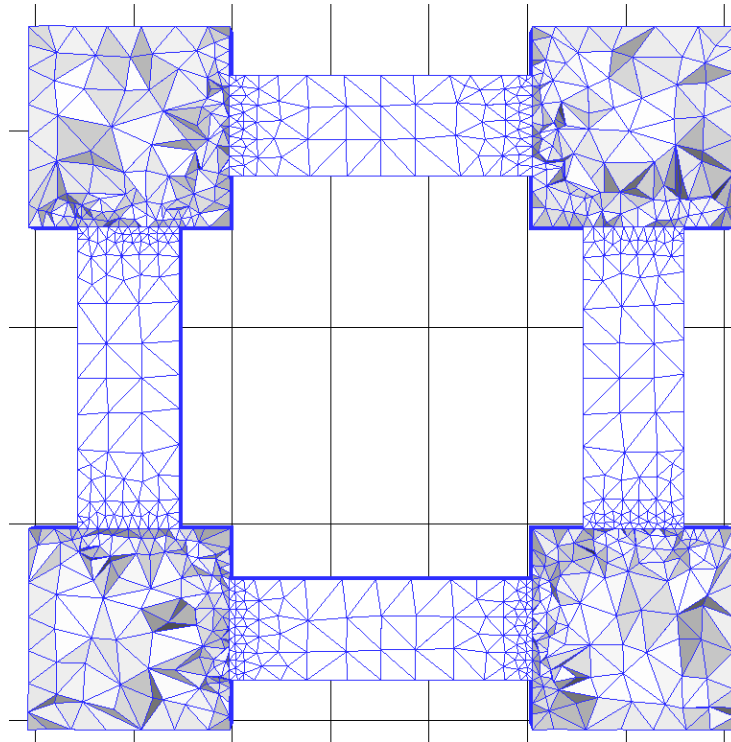
Στην Εικόνα 5 παρουσιάζεται μία εφαρμογή της τεχνικής σε ένα δισδιάστατο κύκλο. Το αρχικό μέτωπο είναι ο κύκλος, ενώ προοδευτικά παράγονται τρίγωνα τα οποία δίνουν νέες ακμές για να δημιουργηθούν νέα τρίγωνα. Η διαδικασία σταματάει όταν θα έχει διακριτοποιηθεί όλος ο κύκλος.



Σχήμα 3: Η μέθοδος προελαύνοντος μετώπου σε 2 διαστάσεις [7].

Στην μεταπτυχιακή εργασία [6] ο Λάζαρος Αδαμούδης αναπτύσσει ένα λογισμικό για τη δημιουργία τρισδιάστατου πλέγματος τετράεδρων βασισμένο σε μια παραλλαγή της τεχνικής *Advancing Front*. Χρησιμοποιούμε το λογισμικό αυτό για να παράξουμε ένα μεγάλο μέρος από το τετραεδρικό πλέγμα στην παρούσα εργασία.

Μια βασική παραλλαγή της μεθόδου είναι να μην απαιτείται από τον χρήστη ορισμός πλέγματος υποβάθρου. Για να κατασκευαστεί το πλέγμα υποβάθρου απαιτείται ιδιαίτερος χρόνος και προσοχή. Πολλές φορές οι παράμετροι πύκνωσης του πλέγματος υποβάθρου έρχονται σε αντίθεση με το επιφανειακό πλέγμα. Ο αλγόριθμος παράγει ένα επαρκές πλέγμα υποβάθρου και ορίζει αυτόματα κατάλληλες ουδέτερες παραμέτρους στους κόμβους του, που δεν εμφανίζουν καμία επίδραση στη δημιουργία του τελικού πλέγματος



Εικόνα 3: Οριζόντια τομή του πλέγματος, όπως υπολογίστηκε από τη βασική επαναληπτική διαδικασία [6].

Στην παραπάνω Εικόνα 3 φαίνεται το τετραεδρικό πλέγμα που παράγεται μετά το πέρας της βασική διαδικασίας. Τις περισσότερες φορές υπάρχουν χωρία τα οποία δεν έχουν διακριτοποιηθεί. Η αδυναμία της διαδικασίας να προχωρήσει στην διακριτοποίηση τους οφείλεται στο γεγονός ότι οι τομείς, που απομένουν μη διακριτοποιημένου, αποτελούν μη κυρτούς χώρους με ακατάλληλη επιφανειακή διακριτοποίηση (Εικόνα 4). Σε αυτούς τους χώρους εφαρμόζεται μια διαδικασία αποκατάστασης

Η διαδικασία αποκατάστασης εφαρμόζει ουσιαστικά μια σειρά από γεωμετρικούς τελεστές, που σκοπεύουν στη μείωση αρχικά του πλήθους των υποχώρων και εν συνεχεία στη διαμόρφωση κατά το δυνατό κυρτών όγκων, με βελτιωμένο επιφανειακό πλέγμα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται εν συντομία οι τελεστές με την σειρά που χρησιμοποιούνται. Με τον τελεστή εμφύτευσης κόμβου διακριτοποιούνται σχετικά εύκολα οι περισσότεροι τομείς που απέμειναν από την βασική διαδικασία με έναν μόνο κόμβο. Ο τελεστής Laplacian εξομάλυνσης επιβάλλεται στο χωρικό πλέγμα και βελτιώνει σημαντικά την ποιότητά του.

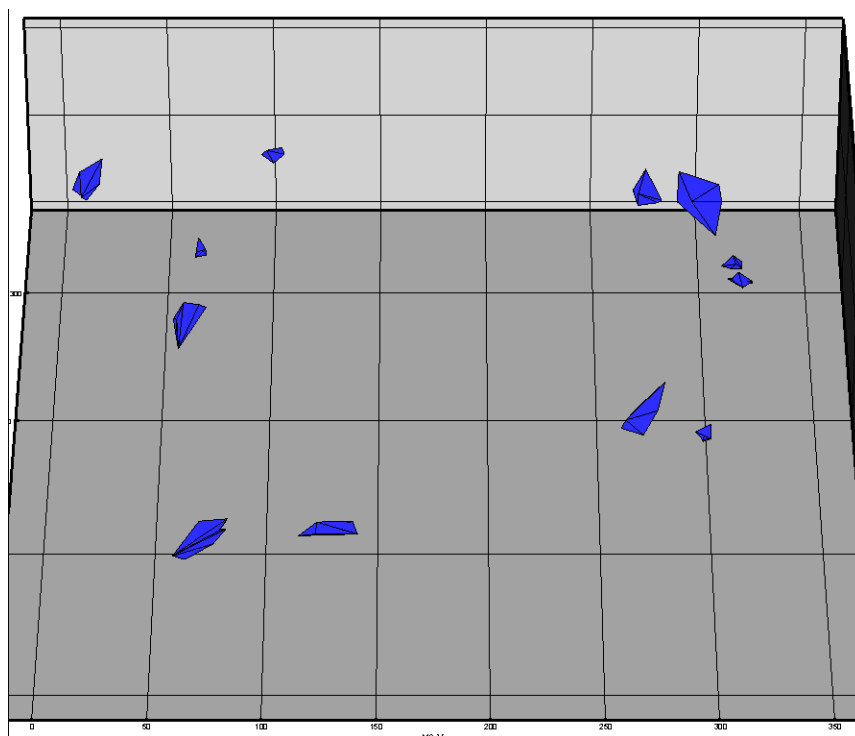
Ο τελεστή διέυρυνσης τομέων έχει ως σκοπό τη διαγραφή κάποιων τετραέδρων, που δημιουργήθηκαν σε προηγούμενα στάδια, ώστε οι τομείς να διευρυνθούν και να προκύψουν κατά το δυνατόν περισσότερο κυρτοί χώροι. Ο τελεστής διαγράφει γειτονικά τετράεδρα του κάθε τομέα, τα οποία μπορούν να επιλεγούν με διάφορα κριτήρια. Μετά τη διέυρυνση των τομέων, η διαδικασία αποκατάστασης προχωρά στην εξομάλυνση των επιφανειών τους. Η νέα θέση ενός επιφανειακού κόμβου υπολογίζεται ως η μέση τιμή των συντεταγμένων των γειτονικών επιφανειακών κόμβων του.

Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο τελεστής αφαίρεσης κορυφών στους τομείς. Ο τελεστής εξομάλυνσης οριακών επιφανειών έχει ήδη δώσει μια περισσότερο

κυρτή μορφή στους τομείς. Ωστόσο κάποιοι από τους οριακούς κόμβους δεν έχουν μετακινηθεί, προκύπτοντας έτσι έντονες κορυφές στις επιφάνειες. Ο τελεστής αφαίρεσης κορυφών έχει στόχο να δημιουργήσει άμεσα τετράεδρα, απομακρύνοντας αυτές τις κορυφές.

Ο τελεστής διακριτοποίησης υποχώρων έχει τη δυνατότητα να επιλέγει γειτονικά τρίγωνα, που ανήκουν στην επιφάνεια των τομέων και να δημιουργεί νέα τετράεδρα, χρησιμοποιώντας τα ως βάσεις. Ως τέταρτη κορυφή για τα νέα τετράεδρα χρησιμοποιείται ένας βοηθητικός κόμβος, που δημιουργείται με παρόμοια λογική με αυτή του τελεστή εμφύτευσης κόμβου. Σκοπός του τελεστή είναι η διακριτοποίηση ενός υποχώρου, στον οποίο ανήκει ένα συγκεκριμένο τρίγωνο, ώστε να αυξηθεί η πιθανότητα διακριτοποίησης του εναπομείναντα τομέα, μέσω του τελεστή εμφύτευσης βοηθητικού κόμβου.

Η διαδικασία αποκατάστασης περιλαμβάνει μια επαναληπτική ρουτίνα κάποιων εκ των παραπάνω τελεστών. Συγκεκριμένα, ακριβώς μετά την εφαρμογή του τροποποιημένου τελεστή εμφύτευσης κόμβου, εφαρμόζονται κυκλικά οι τελεστές αφαίρεσης κορυφών, διακριτοποίησης υποχώρων και εμφύτευσης κόμβου. Οι τρεις τελεστές συνεργάζονται μεταξύ τους με σκοπό τη σταδιακή διακριτοποίηση των τομέων που προκύπτουν από τον τροποποιημένο τελεστή εμφύτευσης κόμβου. Η λογική της ρουτίνας είναι η σταδιακή διακριτοποίηση κρίσιμων σημείων των τομέων, ώστε αυτοί να καταστούν σχεδόν κυρτοί χώροι, ή να διασπαστούν σε σχεδόν κυρτούς τομείς, ώστε να διαφοροποιηθούν πλήρως από τον τελεστή εμφύτευσης κόμβου που ακολουθεί. Η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται όταν διαφοροποιηθούν όλοι οι τομείς, το οποίο συνεπάγεται την πλήρη διακριτοποίηση του χωρίου που ορίζεται από το αρχικό επιφανειακό πλέγμα. Μετά την ολοκλήρωση του πλέγματος, εφαρμόζεται ο τελεστής Laplacian εξομάλυνσης σε 3 κύκλους, ώστε να βελτιωθεί η ποιότητα του πλέγματος.

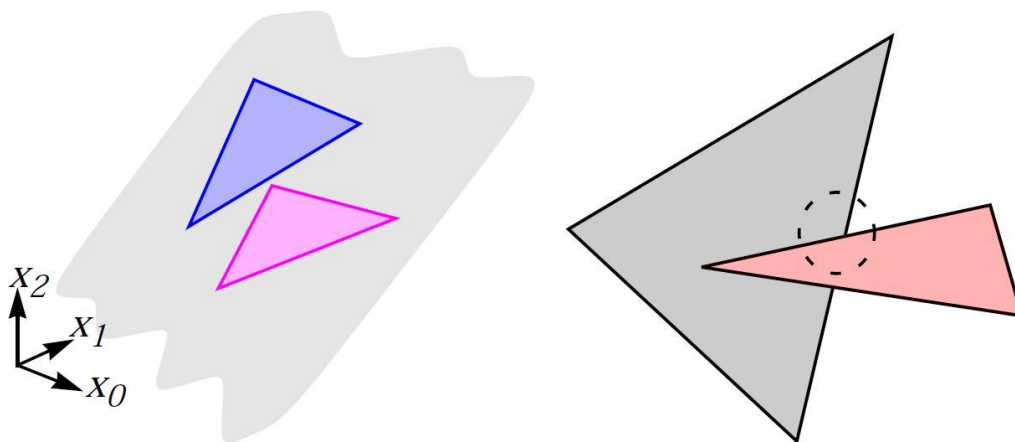


Εικόνα 4: Απεικόνιση του χώρου (των τομέων), που αδυνατεί να διακριτοποιήσει η βασική επαναληπτική διαδικασία [6].

Στην [8] οι Bonet και Peraire αναπτύσσουν έναν αλγόριθμο γεωμετρικής αναζήτησης. Είναι ικανός να βρίσκει τα αντικείμενα από μία ομάδα αντικειμένων που τέμνονται με ένα συγκεκριμένο αντικείμενο. Ο αλγόριθμος ονομάζεται *alternating digital tree* (ADT) και χωρίς αυτόν οι αλγόριθμοι που θα παρουσιαστούν παρακάτω ουσιαστικά θα ήταν πολύ αργοί.

Ο αλγόριθμος του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου (ADT) επιτρέπει την επαρκή αντιμετώπιση της γεωμετρικής αναζήτησης. Προσφέρει τη δυνατότητα εισαγωγής και εξαγωγής σημείων από κατάλληλη δομή δεδομένων και βέλτιστης αναζήτησης σημείων, που περιέχονται σε δεδομένο υποχώρο. Ο αλγόριθμος ADT αποτελεί μια επέκταση της τεχνικής αναζήτησης ψηφιακών δυαδικών δέντρων. Εφαρμόζεται για οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων και αντιμετωπίζει ένα γεωμετρικό στοιχείο στις N διαστάσεις ως ένα σημείο στον $2N$ -διάστατο χώρο.

Οι Edelsbrunner και Miicke [9] παρουσιάζουν τη μέθοδο *Simulation of Simplicity*, η οποία μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα από εκφυλισμένα δεδομένα εισόδου σε γεωμετρικούς αλγόριθμους. Ειδικά στους ελέγχους τομών οι συντεταγμένες των στοιχείων που ελέγχονται μπορεί να παρουσιάζουν κοινά σημεία. Η τεχνική που χρησιμοποιούν, στην ουσία είναι ο υπολογισμός του πρόσημου ορισμένων οριζουσών. Η μεθοδολογία που προτείνουν δεν επηρεάζει τα δεδομένα αλλά προκαλεί μια τεχνητή μετατόπιση χωρίς να επηρεάζει τον υπολογισμό του πρόσημου της ορίζουσας. Η τεχνική είναι αρκετά γενική και αντιμετωπίζει με αξιοπιστία προβληματικά δεδομένα.



Coplanar (3-D) Improper Intersection (3-D)

Σχήμα 4: Δύο περιπτώσεις όπου η εξέταση τομής είναι προβληματική [1].

Κεφάλαιο 2

2.1 Δημιουργία καρτεσιανών εξάεδρων

Σκοπός του αλγορίθμου είναι η διακριτοποίηση ενός υπολογιστικού χωρίου περίπλοκης γεωμετρίας με τη μορφή ενός πλέγματος εξαεδρικών στοιχείων. Το πλέγμα είναι βασισμένο σε octree δομή δεδομένων. Σαν διαδικασία είναι πλήρως αυτόματη και πολύ γρήγορη σε σχέση με το μέγεθος των πλεγμάτων που παράγονται. Μπορούμε να συνοψίσουμε τις απαιτήσεις τους αλγορίθμου στα εξής.

- Ο αλγόριθμος πρέπει να χειρίζεται αυθαίρετες γεωμετρίες αυτόματα, με την ελάχιστη δυνατή παρέμβαση του χρήστη.
- Τα μόνα δεδομένα που απαιτούνται είναι η γεωμετρική αναπαράσταση του προς διακριτοποίηση χωρίου και η θέση πιθανών πηγών πύκνωσης.
- Η διαδικασία πρέπει να υποστηρίζει τη διαφοροποίηση του μεγέθους των στοιχείων.

2.1.1 Μοντελοποίηση της γεωμετρίας

Η οριακή επιφάνεια του προς διακριτοποίηση χωρίου πρέπει να παρασταθεί με κατάλληλο τρόπο, ώστε να είναι εφαρμόσιμος ο αλγόριθμος. Η αναπαράσταση αυτή θα πρέπει να παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δυνατή γενικότητα. Η ακριβέστερη προσέγγιση επιτυγχάνεται με τη χρήση τριγωνικών στοιχείων με μεταβαλλόμενο σχήμα και μέγεθος. Το σύνολο των τριγωνικών τρισδιάστατων στοιχείων συνιστούν ένα επιφανειακό, μη δομημένο πλέγμα. Επιπλέον, το μεταβλητό μέγεθος των τριγωνικών στοιχείων επιτρέπει την πύκνωση του επιφανειακού πλέγματος, που αναπαριστά το χωρίο, στις περιοχές αυξημένου ενδιαφέροντος. Επιπλέον, τα οριακά στοιχεία που αναπαριστούν τη γεωμετρία δεν χρειάζεται να παρουσιάζουν συγκεκριμένο προσανατολισμό.

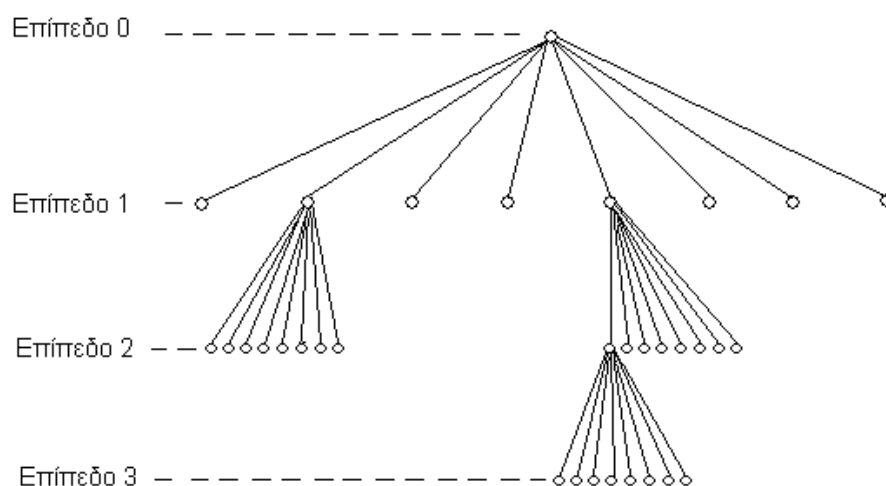
2.1.2 Δομές δεδομένων για τα εξαεδρικά στοιχεία

Οι αλγόριθμοι που δημιουργούν καρτεσιανά πλέγματα μπορούν να εφαρμοστούν χρησιμοποιώντας διάφορες δομές δεδομένων. Η επιλογή μας είναι οι δένδρικές δομές octrees, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά για την αποθήκευση χωρικών δεδομένων στις τρεις διαστάσεις.

Οι πληροφορίες για τη συνδεσιμότητα των στοιχείων (πατέρας-γιός), που αποτελούν το πλέγμα, μπορούν να αποδοθούν εύκολα λόγω της λογικής δομής του δέντρου. Επίσης η γεωμετρία ενός στοιχείου ορίζεται από τη θέση του στο δέντρο και τη γεωμετρία της ρίζας του. Συνεπώς, αυτές οι δομές

δεδομένων μπορούν να μας παράσχουν όχι μόνο τοπολογικές πληροφορίες αλλά και γεωμετρικές. Παρακάτω παρουσιάζονται μερικοί όροι.

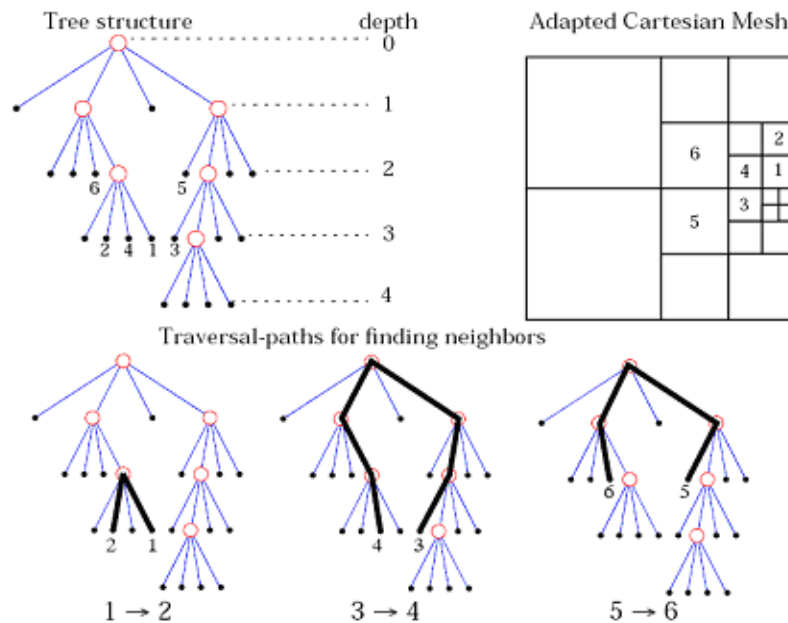
Στις περισσότερες εφαρμογές τα δέντρα quadtree και octree ξεκινάνε από ένα κόμβο, ο οποίος καλύπτει όλο το χώρο που θέλουμε να αναπαραστήσουμε, αυτός ο κόμβος ονομάζεται ρίζα (*root*). Τα στοιχεία του καρτεσιανού πλέγματος, που αποθηκεύονται στο τέλος του δέντρου, ονομάζονται φύλλα (*leaves*) του δέντρου. Τέλος ο όρος κόμβος του δέντρου (*node*) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε στοιχείο του. Ένας κόμβος από τον οποίο θα δημιουργηθούν φύλλα είναι ο πατέρας (*father*) αυτών και αυτά τα παιδιά (*children*) του. Ο αρχικός κόμβος έχει μόνο παιδιά ενώ τα φύλλα στο τέλος ενός δένδρου έχουν μόνο πατέρα. Τέλος σε κάποιες περιπτώσεις μας ενδιαφέρει το βάθος (*depth*) του δένδρου, καθώς και το επίπεδο (*level*) που βρίσκεται ένας κόμβος. Στο Σχήμα 5 παρουσιάζεται ένα γραφικά μία αντίστοιχη δομή.



Σχήμα 5: Παράδειγμα octree δομής δεδομένων

Μια βασική λειτουργία του δένδρου είναι να παρέχει πληροφορία για τις τοπολογικές σχέσεις ενός εξάεδρου σε σχέση με άλλα στο χωρίο. Όπως είναι φανερό από το Σχήμα 5 κάποια γειτονικά στοιχεία είναι εύκολο να βρεθούν γιατί είναι παιδιά του ίδιου πατέρα. Όμως για στοιχεία διαφορετικών γονέων δεν είναι τόσο απλό, καθώς η αναζήτηση στο δένδρο για τα γειτονικά στοιχεία είναι αρκετά χρονοβόρα.

Στο Σχήμα 6 φαίνονται το μονοπάτια που πρέπει να ακολουθήσει ο αλγόριθμος για να βρει τους βόρειους γείτονες των στοιχείων 1,3 και 5 ,σε ένα 2D καρτεσιανό πλέγμα αποθηκευμένο σε ένα quadtree. Για το στοιχείο 1 χρειάζεται μόνο μια κλήση στον πατέρα του για να εντοπιστεί ο βόρειος γείτονας του (στοιχείο 2) . Όμως το στοιχείο 3 πρέπει να φτάσει μέχρι την ρίζα για να τον εντοπίσει (στοιχείο 4).



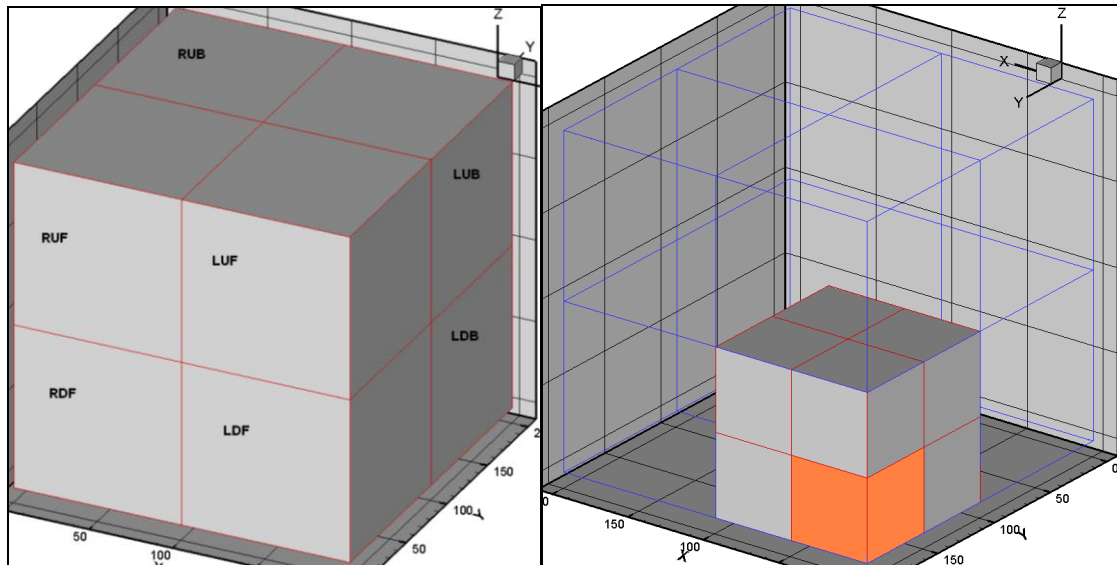
Σχήμα 6 : Quadtree δομή [1].

Από το παράδειγμα είναι φανερό ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια συμπληρωματική δομή δεδομένων στην οποία να αποθηκεύονται οι γείτονες κάθε στοιχείου. Η δομή είναι ένας απλός πίνακας στον οποίο αποθηκεύονται όλοι οι γείτονες κάθε στοιχείου. Έτσι με κόστος περισσότερη μνήμη ο αλγόριθμος δημιουργίας εξάεδρων κερδίζει ταχύτητα.

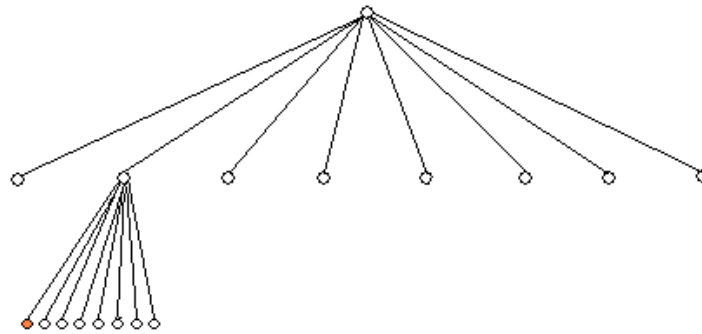
2.1.3 Καρτεσιανό εξάεδρο

Τα καρτεσιανά εξάεδρα είναι, σε σχέση με άλλα είδη στοιχείων, εύκολο να κατασκευαστούν. Ορίζεται ένα εξάεδρο που να καλύπτει το χωρίο που θέλουμε να διακριτοποιήσουμε και θα είναι και η ρίζα της δομής δεδομένων octree. Ο αλγόριθμός σε κάθε επανάληψη του θα υποδιαιρέσει τα υπάρχοντα εξάεδρα, που έχουν καταχωρηθεί για υποδιάρθρωση, ενώ τα νέα εξάεδρα δεν θα υποδιαιρεθούν σε αυτήν την επανάληψη αλλά στην επόμενη.

Σε κάθε υποδιάρθρωση το εξάεδρο αποκτά οκτώ παιδιά και δημιουργούνται το πολύ 19 νέοι κόμβοι, καθώς γειτονικά εξάεδρα έχουν κοινούς κόμβους. Οι δομές των γειτόνων είναι πολύ βοηθητική σε αυτό το σημείο για το καθορισμό του αριθμού από νέους κόμβους που χρειάζεται να δημιουργηθούν. Στο Σχήμα 7 παρουσιάζεται ένα εξάεδρο με τα οκτώ παιδιά του, καθώς και ένα πλέγμα εξάεδρων. Στο Σχήμα 8 παρουσιάζεται ένα τμήμα του octree, που αντιστοιχεί στο πορτοκαλί εξάεδρο.



Σχήμα 7: Ένα εξάεδρο με τα οκτώ παιδιά του και ένα πλέγμα εξάεδρων.



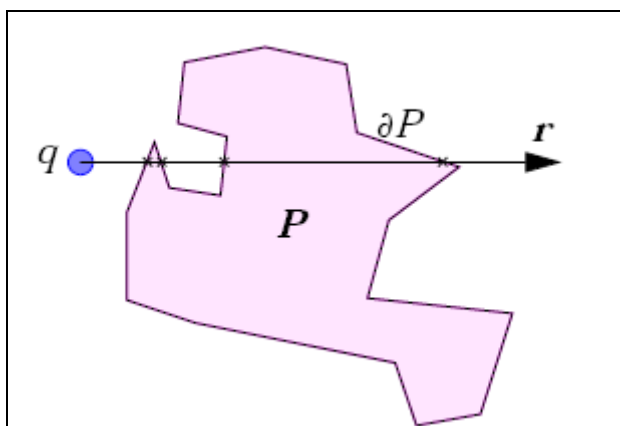
Σχήμα 8 : Η octree δομή που αντιστοιχεί στο πλέγμα του Σχήματος 7.

2.1.4 Γεωμετρικές τομές μεταξύ εξάεδρων και επιφανειακών πλεγμάτων

Μετά την υποδιαίρεση ενός εξάεδρου και την δημιουργία των παιδιών του είναι απαραίτητο ο αλγόριθμός να μπορεί να καταλάβει εάν κάποιο από τα εξάεδρα τέμνει τα γεωμετρικά σώματα, που περιγράφουν (ορίζουν) το χωρίο. Για τα εξάεδρα, που έχουν καταχωρηθεί ως μέσα/έξω σε σχέση με ένα σώμα, θα ήταν απλός τρόπος να περνάει ο πατέρας την ιδιότητα του στα παιδιά του, όμως αυτό δεν είναι απαραίτητα σωστό. Επίσης η πλειονότητα των εξάεδρων τέμνουν τα επιφανειακά πλέγματα, οπότε είναι απαραίτητος ο ακριβής έλεγχος των παιδιών. Οι έλεγχοι που αναφέρονται παρακάτω πραγματοποιούνται για κάθε σώμα που περιέχεται το χωρίο. Ο αλγόριθμος αποφασίζει την κατάσταση (μέσα, έξω και πάνω του) του εξάεδρου σε σχέση με το κάθε σώμα και, ανάλογα με το εάν ένα το σώμα έχει καταχωρηθεί ως εξωτερικό ή εσωτερικό, αποφασίζει εάν τα νέα εξάεδρα θα πρέπει να υποδιαιρεθούν.

Έλεγχος των νέων κόμβων

Οι νέοι κόμβοι πρέπει να ελεγχθούν για την θέση τους στο χωρίο σε σχέση με τα γεωμετρικά σώματα που το αποτελούν. Ένας καλός τρόπος για να βρούμε την θέση ενός σημείου σε σχέση με ένα πολύγωνο είναι η μέθοδος "ray casting". Όπως δηλώνει και το όνομα της μεθόδου, δημιουργούμε από το υπό εξέταση σημείο ευθύγραμμο τμήμα (ακτίνα) αρκετά μεγάλο έτσι ώστε η ακτίνα να διαπεράσει το πολύγωνο σε οποία θέση και να βρίσκεται το σημείο. Αν ο αριθμός των τομών της ακτίνας με το πολύγωνο είναι ζυγός τότε το σημείο βρίσκεται εκτός πολυγώνου, αλλιώς είναι εντός. Η μέθοδος φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω Σχήμα 9.



Σχήμα 9 : Διαδικασία ray casting για τον έλεγχο της θέσης του q σε σχέση με το πολύγωνο P [1].

Η μέθοδος εφαρμόζεται ως εξής. Επιλέγεται μία κατεύθυνση στην οποία θα αναπτύξουμε την ακτίνα, που είναι κοινή για όλους τους κόμβους. Εμείς επιλέξαμε τον άξονα $+x$, η ακτίνα στην διαδικασία ελέγχου αναπαριστάται ως το ευθύγραμμο τμήμα από το υπό εξέταση κόμβο (q_0, q_1, q_2) έως το σημείο (q_0+E, q_1, q_2) , το E πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το δεύτερο σημείο να είναι έξω από (στο $+x$) το γεωμετρικό σώμα.

Με την χρήση ενός εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου για την αποθήκευση των επιφανειακών τριγώνων είναι δυνατό να καθορισθούν τα τρίγωνα που έχουν τοπολογική συγγένεια με τον κόμβο, που είναι υπό εξέταση. Πλέον εξετάζεται η τομή του ευθύγραμμου τμήματος με τα υποψήφια τρίγωνα, χρησιμοποιώντας την μέθοδο που περιγράφεται σε επόμενο κεφάλαιο.

Έλεγχος των ακμών των εξάεδρων

Εάν η προηγούμενη διαδικασία δεν έχει καθορίσει την κατάσταση των νέων εξάεδρων, ελέγχεται η τομή των ακμών τους με το επιφανειακό πλέγμα. Πριν ελεγχθεί κάθε επιφανειακό τρίγωνο πρώτα καθορίζεται η τοπολογική συγγένεια με το εξάεδρο. Γι' αυτόν τον έλεγχο χρησιμοποιείται μια δομή ενός εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου. Εάν υπάρχει τοπολογική συγγένεια με ένα τρίγωνο, ελέγχεται ακριβώς η τομή των ακμών του εξάεδρου με το τρίγωνο. Χρησιμοποιείται η ίδια μέθοδος με τον παραπάνω έλεγχο. Εάν υπάρχει τομή ο έλεγχος τερματίζεται και το εξάεδρο μαρκάρεται για υποδιαίρεση.

Έλεγχος επιφανειακών κόμβων

Εάν δεν έχει καθοριστεί έως τώρα η κατάσταση των εξάεδρων, ο αλγόριθμος θα ελέγξει εάν κάποιος κόμβος των επιφανειακών πλεγμάτων βρίσκεται μέσα σε ένα εξάεδρο. Αυτή η κατάσταση μπορεί να συμβεί γιατί οι παραπάνω έλεγχοι δεν μπορούν να ελέγξουν την περίπτωση που επιφανειακά τρίγωνα τέμνουν μία έδρα του εξάεδρου.

Ο έλεγχος είναι απλός. Πριν ελεγχθεί κάθε σημείο πρώτα καθορίζεται η τοπολογική συγγένεια με το εξάεδρο. Γι' αυτόν τον έλεγχο χρησιμοποιείται μια δομή ενός εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου.

2.1.5 Πύκνωση πλέγματος

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον υπάρχει για την δυνατότητα πύκνωσης του πλέγματος στοιχείων, σε περιοχές του χωρίου που αυτό απαιτείται. Με αυτό τον τρόπο το πλέγμα μπορεί να παραμείνει σε σχετικά μικρό μέγεθος, ενώ σε ευαίσθητες περιοχές να έχουμε ικανοποιητικό αριθμό στοιχείων. Μπορούμε να ξεχωρίσουμε την πύκνωση με πηγή και την επιφανειακή πύκνωση.

Το καρτεσιανό πλέγμα έχει την δυνατότητα να «καταλάβει» γεωμετρίες που να δίνονται σε διαφορετικά πακέτα δεδομένων. Το κάθε πακέτο αντιπροσωπεύει μια περιοχή της συνολικής γεωμετρίας του χωρίου. Με μία παράμετρο που δίνει ο χρήστης για κάθε πακέτο μπορούμε να καθορίσουμε τον μέγιστο αριθμό υποδιαιρέσεων που θα υποβληθούν τα εξάεδρα, που τέμνουν το επιφανειακό πλέγμα. Έτσι σε περιοχές που απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στους υπολογισμούς μπορούμε να έχουμε περισσότερα και μικρότερα στοιχεία σε σχέση με άλλες περιοχές που θα έχουμε λιγότερα.

Ένας άλλος τρόπος για να δημιουργηθεί πύκνωση πλέγματος είναι η χρήση μίας πηγής. Στο χωρίο ορίζεται ένα ή περισσότερα σημεία τα οποία χαρακτηρίζονται από μία ένταση (αριθμός) που επάγει σε κάθε σημείο του χώρου μια επιθυμητή "πυκνότητα". Αυτή χρησιμοποιείται για να επιβάλει η όχι την επιπλέον πύκνωση του πλέγματος, ανάλογα με το εάν η υπάρχουσα πυκνότητα των κόμβων υπολείπεται η μη της επαγόμενης "πυκνότητας".

2.1.6 Ομαλοποίηση του πλέγματός

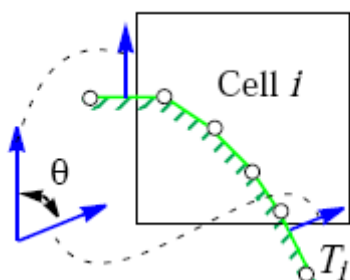
Όπως περιγράψαμε παραπάνω, μία από της απαιτήσεις για ένα πλέγμα εξάεδρων είναι η δυνατότητα να υπάρχουν στοιχεία διαφορετικού μεγέθους. Στα επιφανειακά πλέγματα των σωμάτων, που αποτελούν το χωρίο, συνήθως τα εξαεδρικά στοιχεία υποδιαιρούνται όσες φορές επαναλαμβάνεται η διαδικασία υποδιαιρέσης. Παράλληλα διάφορες πηγές «έντασης» στο χωρίο επιβάλουν τέτοιες υποδιαιρέσεις.

Το αποτέλεσμα είναι ότι πολύ μικρά εξάεδρα μπορεί να βρίσκονται δίπλα σε μεγάλα εξάεδρα. Αυτό δεν είναι επιθυμητό, καθώς κάνει το πλέγμα μη ομαλό. Για αυτό χρειάστηκε να φτιαχτεί ένα αλγόριθμος ομαλοποίησης του πλέγματος.

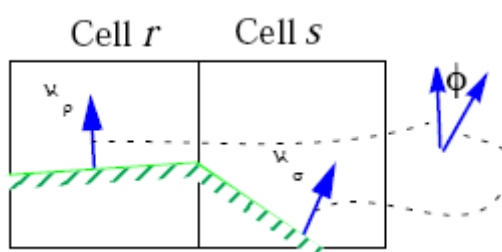
Σε κάθε επανάληψη τις διαδικασίας υποδιαίρεσης, πριν ξεκινήσει αυτή ελέγχονται τα εξάεδρα με τα γειτονικά τους. Αν η διαφορά μεγέθους των δύο εξάεδρων είναι μεγαλύτερη από μία υποδιαίρεση τότε το μεγαλύτερο εξάεδρο καταχωρείται για υποδιαίρεση. Η διαδικασία κάνει χρήση των ιδιοτήτων των δομών δεδομένων, που περιγράφηκαν παραπάνω, για την γρήγορη περάτωση της.

2.1.7 Υποδιαίρεση λόγω επιφανειακής κλίσης

Είναι ενδιαφέρον να μπορούμε να θέσουμε τα εξάεδρα για υποδιαίρεση όχι γιατί τέμνουν κάποια γεωμετρία αλλά λόγω έντονης επιφανειακής κλίσης. Για να γίνεται αυτό πρέπει πρώτα να υπολογίζεται η γωνία μεταξύ των κάθετων διανυσμάτων των τριγώνων που τέμνει το εξάεδρο και μετά την γωνία μεταξύ δύο γειτονικών εξάεδρων.



Σχήμα 10α : Η γωνία θ [2].



Σχήμα 10β : Η γωνία ϕ [2].

Για να υπολογιστεί η γωνία θ πρώτα υπολογίζεται η μέγιστη διαφορά των κάθετων διανυσμάτων προς κάθε κατεύθυνση. Έχοντας υπολογίσει το $V_j = \max_k(n_j) - \min_k(n_j)$ μπορούμε να υπολογίσουμε την γωνία θ για κάθε κατεύθυνση χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο

$$\cos(\theta_j) = \frac{V_j}{|\bar{V}|}$$

Για τον υπολογισμό της γωνίας ϕ μεταξύ δύο εξάεδρων r και s χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\cos(\phi_j)_{r,s} = \frac{|n_{jr} - n_{js}|}{|\hat{n}_r - \hat{n}_s|}$$

όπου με $\hat{n}_i$ συμβολίζεται η μέση τιμή των κάθετων διανυσμάτων μέσα στο αντίστοιχο εξάεδρο i [Aftosmis et al, 1999]

2.2 Δημιουργία πρισμάτων

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω ένα τριγωνικό πλέγμα χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση των αντικειμένων. Το πρισματικό πλέγμα δημιουργείται με την μετακίνηση του τριγωνικού επιφανειακού πλέγματος σε διαδοχικά βήματα προς την επιθυμητή κατεύθυνση (το εσωτερικό του χωρίου). Κάθε πρίσμα αποτελείται από τριγωνικές έδρες στην κατεύθυνση της γεωμετρίας και τετράπλευρες έδρες στην κατεύθυνση των κάθετων διανυσμάτων.

Αυτό δείχνει ότι τα πρίσματα είναι ιδανικά για την αναπαράσταση στοιχείων με μικρό πάχος πάνω στην γεωμετρία. Ένας άλλος στόχος της παραπάνω διαδικασίας είναι σε κάθε βήμα να μειώνεται η καμπυλότητα της προηγούμενης επιφάνειας. Μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο κύρια μέρη της διαδικασίας για κάθε στρώμα πρισμάτων που θέλουμε να κατασκευάσουμε.

- Εύρεση της κατεύθυνσης στην οποία οι κόμβοι θα προχωρήσουν
- Εύρεση της απόστασης

2.2.1 Διάνυσμα κατεύθυνσης

Για το αρχικό διάνυσμα κατεύθυνσης χρησιμοποιείται ο μέσος όρος των κάθετων διανυσμάτων των τριγώνων που έχουν κοινό το συγκεκριμένο κόμβο. Το διάνυσμα κατεύθυνσης πρέπει να πλήρη ορισμένες προϋποθέσεις και συγκεκριμένα να είναι ορατό από όλα τα τρίγωνα που έχουν κοινό το συγκεκριμένο κόμβο. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται η τομή γειτονικών πρισμάτων. Δευτερεύουσα απαίτηση είναι η ορθοκανονικότητα.

Για να διασφαλιστούν οι απαιτήσεις το διάνυσμα κατεύθυνσης υποβάλλεται σε ομαλοποίηση. Η Laplacian ομαλοποίηση με βάρη, που χρησιμοποιήθηκε, προτείνεται από τον Kallinderis [Kallinderis et al, 1999] και είναι η εξής :

$$M_i = aM_i + \frac{\sum_j (1-a) \frac{M_j}{d_{ij}}}{\sum_j \frac{1}{d_{ij}}} \quad (2.1)$$

όπου i ο κόμβος για τον οποίο θέλουμε να βρούμε την κατεύθυνση και j οι γειτονικοί του κόμβοι, M_i και M_j είναι τα αντίστοιχα διανύσματα κατεύθυνσης, d_{ij} είναι η απόσταση μεταξύ των γειτονικών κόμβων. Τέλος $a=(1-\cos(\theta_{max}))$, όπου θ_{max} είναι η μέγιστη γωνία μεταξύ του διανύσματος κατεύθυνσης και των κάθετων διανυσμάτων των τριγώνων, που έχουν κοινό τον συγκεκριμένο κόμβο.

Το διάνυσμα εξετάζεται για το εάν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις. Παραβίαση της πρώτης σημαίνει απόρριψη του διανύσματος ενώ επιλέγεται αυτό που εξασφαλίζει την καλύτερη ορθοκανονικότητα.

2.2.2 Τοποθέτηση του νέου κόμβου

Η απόσταση από τον κόμβο i , στην οποία θα τοποθετηθεί ο νέος κόμβος, εξαρτάται από τρεις παράγοντες. Από ένα βασικό βήμα που δίνει ο χρήστης, από το πλήθος των στρωμάτων πρισμάτων που έχουν ήδη δημιουργηθεί και από την καμπυλότητα της τοπολογικά κοντινής του περιοχής.

Ο στόχος που αποσκοπούμε με την δημιουργία πρισμάτων είναι να μειωθεί η καμπυλότητα της γεωμετρίας του σώματος. Οπότε είναι λογικό να επιθυμούμε τους κόμβους που βρίσκονται σε κοίλες περιοχές της γεωμετρίας του σχήματος να πρέπει να <<προχωρήσουν>> πιο γρήγορα σε σχέση με τους κόμβους που βρίσκονται σε κυρτές περιοχές. Για να έχουμε ομαλό πλέγμα η αναλογία της απόστασης του βήματος μεταξύ δύο κόμβων που βρίσκονται σε διαφορετικές περιοχές πρέπει να είναι μεταξύ 0.5 και 2

Για να βρούμε την καμπυλότητα της γεωμετρίας χρησιμοποιούμε την παρακάτω μέθοδο. Υπολογίζονται οι γωνίες μεταξύ του διανύσματος κατεύθυνσης και των ακμών που ανήκει ο κόμβος i . Εάν όλες οι γωνίες είναι μεγαλύτερες των 90° μοιρών τότε η επιφάνεια είναι κοίλη, εάν όλες οι γωνίες είναι μικρότερες των 90° μοιρών τότε η επιφάνεια είναι κυρτή. Στα σημεία που δεν μπορούμε να καθορίσουμε την καμπυλότητα υπολογίζεται η μέση τιμή των γωνιών και αν είναι μεγαλύτερη των 90° τότε η επιφάνεια θα θεωρηθεί ως κοίλη αλλιώς ως κυρτή.

Τέλος, η απόσταση μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων πρέπει να μεγαλώνει. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους. Όπως να υψώνουμε το βασικό βήμα με τον αριθμό του αντίστοιχού στρώματος ή να χρησιμοποιείται μια σχέση σαν την παρακάτω [Kallinderis et al, 1999]

$$\Delta n_{layer} = \Delta n_0 \times st^{(layer-1)} \quad (2.2)$$

όπου Δn_0 είναι το βασικό βήμα και st ένας παράγοντας. Φυσικά αυτό είναι το βασικό βήμα για το συγκεκριμένο στρώμα πρισμάτων και για κάθε κόμβο θα πολλαπλασιαστεί με τον ανάλογο συντελεστή της καμπυλότητας του κόμβου.

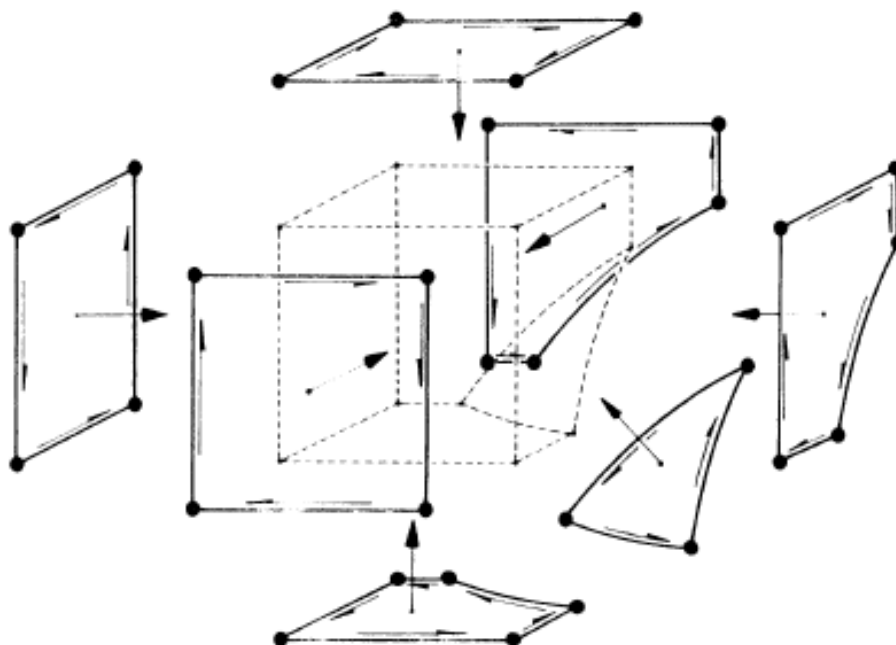
Το βήμα υποβάλλεται σε παρόμοια Laplacian ομαλοποίηση με βάρη, για την εξασφάλιση ομαλού πλέγματος.

2.3 Η τεχνική του προελαύνοντας μετώπου

2.3.1 Μοντελοποίηση της γεωμετρίας

Οι γεωμετρία δίνεται με την μορφή τριγωνικού επιφανειακού πλέγματος. Τα οριακά στοιχεία που αναπαριστούν τη γεωμετρία οφείλουν να παρουσιάζουν συγκεκριμένο προσανατολισμό. Η φορά αρίθμησης των κόμβων, που συνθέτουν κάθε τριγωνικό στοιχείο, θα πρέπει να είναι τέτοια

ώστε ο προσανατολισμός κάθε στοιχείου να υποδεικνύει το χώρο που πρόκειται να διακριτοποιηθεί (Σχήμα 11).



Σχήμα 11 : Κατεύθυνση των οριακών επιφανειών [7].

2.3.2 Η μέθοδος προελαύνοντος μετώπου (Advancing Front)

Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό της τεχνικής του προελαύνοντος μετώπου είναι η ταυτόχρονη δημιουργία νέων κόμβων, ακμών, τριγώνων και τετραέδρων [6], [7]. Το χαρακτηριστικό αυτό δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας στοιχείων μεταβλητού σχήματος και αποτελεί τη βασικότερη διαφορά από τις μεθόδους που βασίζονται στην τακτική Delaunay, οι οποίες γενικά συνδέουν σημεία τα οποία έχουν προηγουμένως διαταχθεί στο χώρο.

Το πρόβλημα συνίσταται στη διαίρεση ενός αυθαίρετα πολύπλοκου γεωμετρικού χώρου σε μια έγκυρη συναρμογή τριδιάστατων στοιχείων. Η εγκυρότητα του παραγόμενου πλέγματος εξασφαλίζεται αν τα στοιχεία που δημιουργούνται καλύπτουν το σύνολο του χωρίου, ενώ η τομή των στοιχείων επιτρέπεται μόνο στις κοινές κορυφές, ακμές και τριγωνικές επιφάνειές τους [7].

Η διακριτοποίηση του χωρίου ξεκινά από το τελευταίο στρώμα των πρισμάτων και από τις ελεύθερες τριγωνικές πλευρές των πυραμίδων και συνεχίζεται σε διαδοχικά μέτωπα προς το εσωτερικό του. Τα τριγωνικά στοιχεία, που συνθέτουν την εσωτερική επιφάνεια του πρισματικού πλέγματος, θα αποτελέσουν έδρες των αρχικών τετραέδρων. Συνεπώς, η κατανομή των κόμβων και η πυκνότητά τους στην οριακή επιφάνεια πρέπει να συμβαδίζει με την απαίτηση του χρήστη αναφορικά με το μέγεθος των τετραεδρικών στοιχείων.

Κατά τη δημιουργία ενός νέου τετραέδρου, οι τρεις κορυφές ενός τριγώνου του τρέχοντος μετώπου συνδέονται μέσω ακμών με έναν νέο, ή με

έναν υπάρχοντα κόμβο. Κατά την προτεινόμενη μεθοδολογία στην παρούσα εργασία το τρέχον μέτωπο δεν ανανεώνεται συνεχώς, όπως προτείνει η κλασσική τεχνική AFT. Αντιθέτως, η διαδικασία λειτουργεί με διαδοχικά μη δυναμικά μέτωπα και τερματίζεται όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμα τρίγωνα για τη σύσταση νέου μετώπου.

2.3.3 Σύσταση διαδοχικών μετώπων

Στην κλασσική εκδοχή της AFT υιοθετείται η λογική ενός δυναμικού μετώπου. Αποτελεί μια δυναμική δομή, που ανανεώνεται συνεχώς παράλληλα με τη δημιουργία νέων τετραέδρων. Αρχικά το μέτωπο συνίσταται από τα τρίγωνα του επιφανειακού πλέγματος. Σε μια τυχαία χρονική στιγμή, το μέτωπο αποτελείται από τα τριγωνικά στοιχεία που δύνανται να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή ενός νέου τετραέδρου.

Η τροποποιημένη τεχνική, που εφαρμόζεται στην παρούσα εργασία, αντικαθιστά το δυναμικό μέτωπο με ένα σύνολο διαδοχικών στατικών μετώπων. Τα τρίγωνα του μετώπου αποτελούν μία εκ των τεσσάρων εδρών των τετραέδρων, που πρόκειται να δημιουργηθούν κατά το τρέχων μέτωπο. Εφόσον όλα τα τρίγωνα αξιοποιηθούν για τη δημιουργία τετραέδρων, συνίσταται το επόμενο μέτωπο από παλαιά και νέα τριγωνικά στοιχεία, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την δημιουργία τετραέδρων.

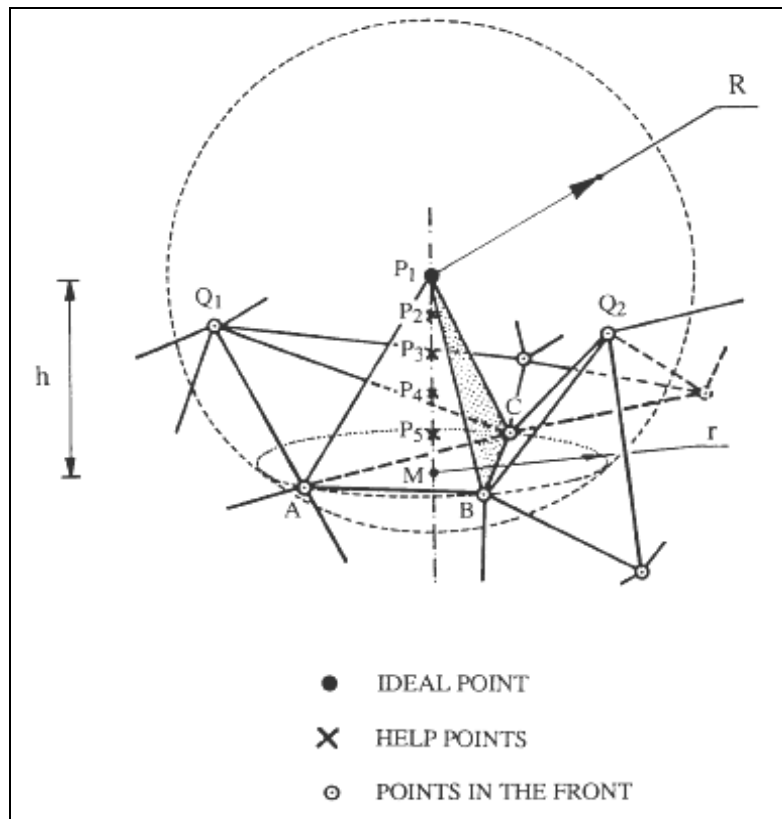
Το μέτωπο δεν ανανεώνεται μετά από κάθε δημιουργία τετραέδρου, αλλά μετά την αξιοποίηση όλων των τριγώνων του. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου κανένα τρίγωνο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έδρα ενός νέου τετραέδρου, κάτι που συμβαίνει όταν διακριτοποιηθεί πλήρως το ζητούμενο χωρίο.

2.3.4 Δημιουργία τετραέδρων

Κατά την έναρξη της διαδικασίας ορίζεται το πρώτο μέτωπο από τα τριγωνικά στοιχεία του επιφανειακού πλέγματος, το οποίο λαμβάνεται ως δεδομένο εισόδου. Αποτελείται από προσανατολισμένα τρίγωνα, που αποτελούν τη διακριτοποιημένη οριακή επιφάνεια του προς διακριτοποίηση χωρίου. Ο προσανατολισμός των τριγώνων επιτυγχάνεται με την κατάλληλη φορά αρίθμησης των κορυφών τους. Κατά τη βασική επαναληπτική διαδικασία, η δημιουργία ενός τετραεδρικού στοιχείου γενικευμένης μορφής εμπεριέχει τα ακόλουθα στάδια [6], [7]:

1. Επιλογή ενός τριγώνου ABC από το μέτωπο, που θα αποτελέσει τη βάση του νέου τετραέδρου. Γενικά, μπορεί να επιλεχθεί οποιοδήποτε τρίγωνο του μετώπου. Ωστόσο, πρακτικά είναι σκόπιμο να επιλέγεται το μικρότερο τρίγωνο. Το μέγεθος κάθε τριγώνου του μετώπου καθορίζεται από το μήκος του μικρότερου ύψους του. Συνεπώς, το μέτωπο αποτελεί ουσιαστικά μια διατεταγμένη λίστα τριγώνων.
2. Καθορισμός της ιδανικής κορυφής P^1 του νέου τετραέδρου. Το σημείο P^1 ανήκει στην κάθετη ευθεία στο τρίγωνο ABC , που διέρχεται από το

- κέντρο M του τριγώνου. Η κατεύθυνση στην οποία εντοπίζεται το P^1 ορίζεται από τον προσανατολισμό του τριγώνου, έτσι ώστε να βρίσκεται στο εσωτερικό του χωρίου. Επίσης, το σημείο P^1 πρέπει να βρίσκεται στην κατάλληλη θέση, ώστε οι τρεις εν δυνάμει ακμές AP^1 , BP^1 , CP^1 να έχουν μήκος περίπου ίσο με το βέλτιστο μήκος. Το τελευταίο καθορίζεται από το μέσο μήκος των ακμών που ανήκουν στη γειτονιά του τριγώνου ABC . Υπολογίζεται το μήκος δ_1 που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη απόσταση του P^1 από τις κορυφές του τριγώνου ABC .
3. Εντοπισμός των υποψηφίων σημείων, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κορυφές των νέων τετραέδρων. Τα υποψήφια σημεία είναι (α) οι κόμβοι $Q^1, Q^2, \dots$ του πλέγματος οι οποίοι περιέχονται σε σφαίρα με κέντρο το σημείο M και ακτίνα δ_1 , και (β) ένα σύνολο νέων σημείων $P^1, P^2, \dots, P^n$, τα οποία τοποθετούνται κατά μήκος του ύψους P^1M . Έστω D ένα εκ των σημείων A, B και C , το οποίο έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το M . Για κάθε σημείο Q^i , κατασκευάζεται νοητά η σφαίρα με κέντρο το σημείο C^i_Q που ανήκει στην ευθεία P^1M , και ταυτόχρονα η σφαίρα διέρχεται από τα σημεία Q^i και D . Η θέση των κέντρων C^i_Q πάνω στην ευθεία P^1M ορίζει μια κατάταξη των αντίστοιχων σημείων Q^i , κατά την οποία το σημείο με το αντίστοιχο κέντρο που απέχει περισσότερο από το P^1 προς την κατεύθυνση P^1M κατέχει την πρώτη θέση στην κατάταξη. Στην διατεταγμένη λίστα των υποψηφίων σημείων που σχηματίζεται προστίθενται στο τέλος και τα σημεία $P^1, P^2, \dots, P^n$. Η βιβλιογραφία προτείνει την προσθήκη έως και 5 νέων σημείων P , ενώ στην τροποποιημένη εφαρμογή της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκαν μόνο τα σημεία P^1 και P^2 .
 4. Επιλογή του βέλτιστου σημείου εκ των υποψηφίων για την ένωσή του με τις κορυφές του τριγώνου ABC . Το βέλτιστο σημείο είναι το πρώτο από τη διατεταγμένη λίστα για το οποίο προκύπτει έγκυρο τετράεδρο. Η εγκυρότητα ενός τετραέδρου εξασφαλίζεται με τη διαβεβαίωση ότι καμία από τις νέες ακμές δεν τέμνει κανένα από τα τρίγωνα του πλέγματος, και καμία από τις νέες τριγωνικές έδρες δεν τέμνει καμία από τις ακμές. Επιπλέον, στην τροποποιημένη έκδοση της τεχνικής, που προτείνεται στην παρούσα εργασία, το νέο τετράεδρο ικανοποιεί τους περιορισμούς που έχει θέσει ο χρήστης. Οι περιορισμοί αυτοί αφορούν κυρίως τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των εδρών και των ακμών του πλέγματος, και εξασφαλίζουν ικανοποιητική ποιότητα στο πλέγμα που σχηματίζεται.
 5. Αποθήκευση του νέου τετραέδρου και ενημέρωση των αντίστοιχων δομών.
 6. Τα παραπάνω βήματα επαναλαμβάνονται για όλα τα τρίγωνα του μετώπου. Όταν αυτά εξαντληθούν, σχηματίζεται το επόμενο μέτωπο, από τα τρίγωνα του πλέγματος που ανήκουν μόνο σε ένα τετράεδρο και μπορούν να αποτελέσουν βάσεις για νέα στοιχεία. Στην πραγματικότητα η τροποποιημένη διαδικασία δεν υιοθετεί τη λογική του προελαύνοντος μετώπου, αλλά τη λογική των διαδοχικών μετώπων. Καταχρηστικά, η ονομασία της τεχνικής διατηρείται, αν και δεν είναι η πλέον δόκιμη.



Σχήμα 12: Δημιουργία τετραεδρικού στοιχείου [7].

2.3.5 Εκτίμηση της ποιότητας του πλέγματος

Κάθε εκτίμηση της ποιότητας ενός πλέγματος είναι σχετική με την επιθυμητή μορφή της λύσης που προσεγγίζεται κάθε φορά. Γενικά λαμβάνονται υπ' όψη τα ακόλουθα [6], [7]:

1. Τα χαρακτηριστικά του βέλτιστου πλέγματος για το εκάστοτε πρόβλημα. Το παραπάνω εισάγει και την έννοια της προσαρμοστικότητας στο επιφανειακό πλέγμα. Για παράδειγμα, το πλέγμα που δημιουργείται πρέπει να ακολουθεί την πύκνωση του επιφανειακού πλέγματος και να την διαδίδει ομοιόμορφα στο εσωτερικό του.
2. Εκτίμηση της στατιστικής κατανομής συγκεκριμένων μετρικών. Τέτοιες μετρικές μπορεί να είναι το πλήθος των στοιχείων που συνορεύουν με κάθε ακμή, οι διέδρες γωνίες κάθε τετραέδρου, καθώς και σύνθετες συναρτήσεις όπως ο λόγος των ακτίνων της περιγεγραμμένης και της εγγεγραμμένης σφαίρας κάθε τετραέδρου.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε μια μετρική συνάρτηση για την αξιολόγηση του παραγόμενου πλέγματος. Η συνάρτηση αυτή είναι ο λόγος της ακτίνας της περιγεγραμμένης σφαίρας σε κάθε τετράεδρο προς την ακτίνα της εγγεγραμμένης σφαίρας. Η συνάρτηση αυτή είναι μια από τις πιο διαδεδομένες μετρικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται. Η εγγεγραμμένη σφαίρα ορίζεται ως η μεγαλύτερη σφαίρα που μπορεί να περιέχεται στο τετράεδρο, ενώ η περιγεγραμμένη σφαίρα είναι η μικρότερη σφαίρα η οποία το περιβάλλει.

Η ακτίνα της εγγεγραμμένης σφαίρας $R_{inscribed}$ υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$R_{inscribed} = \frac{3V}{\sum_{i=1}^4 A_i} \quad (2.3)$$

όπου V είναι ο όγκος του τετραέδρου και A_i είναι το εμβαδόν της i -όστις έδρας του.

Η ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση :

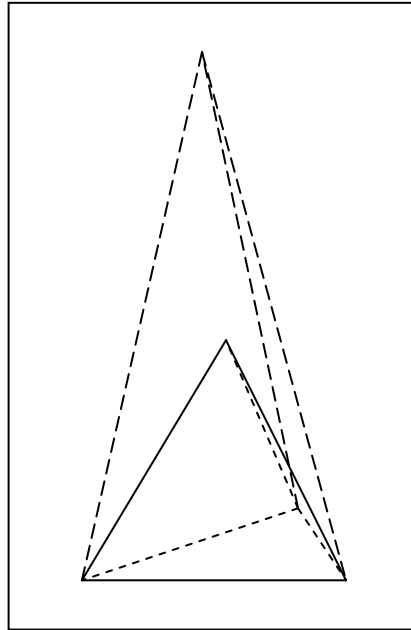
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & R_{circ}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & R_{circ}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & R_{circ}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & R_{circ}^2 \\ 1 & R_{circ}^2 & R_{circ}^2 & R_{circ}^2 & R_{circ}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

όπου με R_{circ} συμβολίζεται η ζητούμενη ακτίνα και με d_{ij} συμβολίζεται η απόσταση μεταξύ των κορυφών i και j .

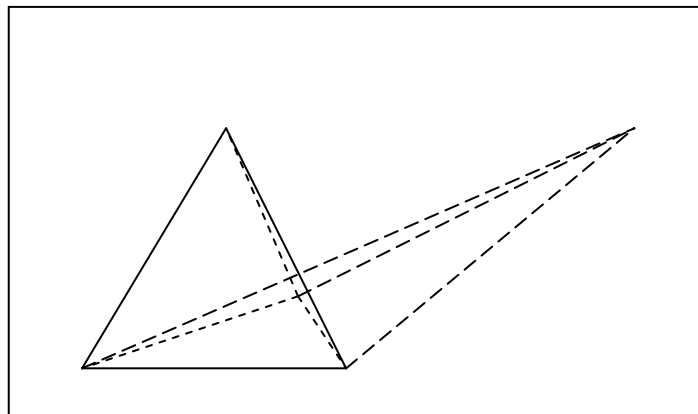
Ο λόγος των ακτίνων υπολογίζεται ως:

$$Ratio = \frac{R_{circ}}{R_{inscribed}} \quad (2.5)$$

Για ένα κανονικό τετράεδρο, το οποίο έχει ίσες αποστάσεις μεταξύ των κορυφών του και έδρες ίσων εμβαδών, η τιμή του λόγου είναι 3. Η τιμή του λόγου αυξάνεται γραμμικά όσο αυξάνεται η στρέβλωση τύπου «stretching» του τετραεδρικού στοιχείου (Σχήμα 13), ενώ παρουσιάζει τετραγωνική αύξηση για την στρέβλωση τύπου «shearing» (Σχήμα 14).



Σχήμα 13: Στρέβλωση τύπου «stretching» ενός τετραεδρικού στοιχείου [7].



Σχήμα 14: Στρέβλωση τύπου «shearing» ενός τετραεδρικού στοιχείου [7].

2.4 Το εναλλασσόμενο ψηφιακό δέντρο

Από τη φύση των διαδικασιών που περιγράφηκαν στο προηγούμενο μέρος του κεφαλαίου γίνεται αντιληπτό ότι μια επιτυχημένη εφαρμογή απαιτεί την αξιοποίηση δομών δεδομένων, που εξασφαλίζουν επαρκείς διαδικασίες ταξινόμησης και γεωμετρικής αναζήτησης [8]. Είναι απαραίτητη η αξιόπιστη εισαγωγή και διαγραφή τριγώνων, ακμών και σημείων από κατάλληλες δομές, ώστε να αναγνωρίζονται γρήγορα οι ακμές και τα τρίγωνα που τέμνονται με συγκεκριμένους υποχώρους.

Το πρόβλημα του καθορισμού των μελών ενός συνόλου n σημείων, που εμπεριέχονται σε έναν N -διάστατο υποχώρο, είναι γνωστό ως γεωμετρική αναζήτηση. Διάφοροι αλγόριθμοι έχουν προταθεί για την επίλυση του προβλήματος με υπολογιστικό κόστος ανάλογο του $\log(n)$. Η πολυπλοκότητα

του προβλήματος αυξάνεται σημαντικά στις περιπτώσεις που το σύνολο των n σημείων αντικαθίσταται από ένα σύνολο στοιχείων πεπερασμένου όγκου, όπως τμήματα ευθειών, τρίγωνα ή τετράεδρα. Ένα πρόβλημα γεωμετρικής αναζήτησης που συναντάται στην δημιουργία εξάεδρων, πρισμάτων και στην τεχνική του προελαύνοντος μετώπου αφορά τον εντοπισμό στοιχείων που τέμνουν έναν συγκεκριμένο υποχώρο. Ο αλγόριθμος, που χρησιμοποιείται για την επαρκή αντιμετώπιση του προβλήματος, βασίζεται στη χρήση του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου (alternating digital tree, ADT) [8].

Ο αλγόριθμος του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου (ADT) επιτρέπει την επαρκή αντιμετώπιση της γεωμετρικής αναζήτησης. Προσφέρει τη δυνατότητα εισαγωγής και εξαγωγής σημείων από κατάλληλη δομή δεδομένων και βέλτιστης αναζήτησης σημείων που περιέχονται σε δεδομένο υποχώρο. Ο αλγόριθμος ADT αποτελεί μια επέκταση της τεχνικής αναζήτησης ψηφιακών δυαδικών δέντρων. Εφαρμόζεται για οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων και αντιμετωπίζει ένα γεωμετρικό στοιχείο στις N διαστάσεις ως ένα σημείο στον $2N$ -διάστατο χώρο.

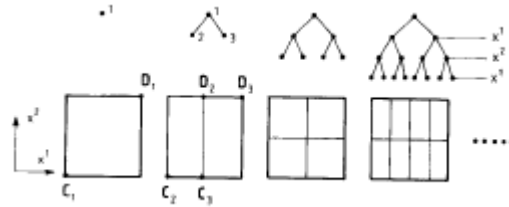
2.4.1 Το εναλλασσόμενο ψηφιακό δέντρο (ADT)

Τα δυαδικά δέντρα αποτελούν τη βάση για μια πληθώρα αλγορίθμων αναζήτησης, συμπεριλαμβανομένου και του ακόλουθου [7]. Έστω ένα σύνολο n σημείων στον N -διάστατο χώρο. Για ευκολία υποτίθεται ότι μετά από κατάλληλη αδιαστατοποίηση οι τιμές των συντεταγμένων τους $x_1, x_2, \dots, x_n$ ανήκουν στο διάστημα $[0,1)$. Η τελευταία παραδοχή δεν είναι απαραίτητη, οπότε στην παρούσα εφαρμογή του αλγορίθμου παραλήφθηκε. Ο σκοπός των αλγορίθμων γεωμετρικής αναζήτησης είναι η επιλογή των σημείων που εντοπίζονται στο εσωτερικό ενός συγκεκριμένου υποχώρου. Ο υποχώρος συνιστά ένα γενικευμένο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, οπότε ο ορισμός του έγκειται στον ορισμό μιας ελάχιστης a και μιας μέγιστης τιμής b των συντεταγμένων των κορυφών του σε κάθε διάσταση.

Η σύγκριση των συντεταγμένων κάθε σημείου με τις συντεταγμένες των κορυφών του υποχώρου, με σκοπό τη διαπίστωση αν ισχύει $a^i \leq x_k^i \leq b^i$ για $i=1,2,\dots,N$, καθιστά το υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας αναζήτησης ανάλογο με το πλήθος των σημείων n . Το κόστος αυτό μπορεί να μειωθεί σημαντικά με την αποθήκευση των σημείων σε ένα δυαδικό δέντρο με κατάλληλο τρόπο, ώστε η δομή του δέντρου να αναπαριστά τη θέση των σημείων στο χώρο. Οι πιο γνωστοί αλγόριθμοι, που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα στη μονοδιάστατη μορφή του, χρησιμοποιούν δυαδικά και ψηφιακά δέντρα αναζήτησης. Τα δυαδικά δέντρα έχουν επεκταθεί και στα N -διάστατα προβλήματα, αλλά το αντίστοιχο N -d δέντρο δεν υποστηρίζει την επαρκή διαγραφή κόμβων. Ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται αποτελεί φυσική επέκταση του μονοδιάστατου αλγορίθμου ψηφιακού δέντρου και ξεπερνά τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα N -d δέντρα.

Γενικά, ένα εναλλασσόμενο ψηφιακό δέντρο μπορεί να οριστεί ως ένα ψηφιακό δέντρο στο οποίο αποθηκεύεται ένα σύνολο n σημείων σύμφωνα με καθορισμένα γεωμετρικά κριτήρια. Τα κριτήρια αυτά βασίζονται στις ομοιότητες που προκύπτουν μεταξύ της ιεραρχικής και πατρικής δομής ενός δυαδικού δέντρου, καθώς και σε μια επαναληπτική διαδικασία διχοτόμησης. Κάθε κόμβος

στο δέντρο έχει δύο παιδιά, όπως η διαδικασία διχοτόμησης διαιρεί ένα χώρο σε δύο μικρότερους υποχώρους. Αντίστοιχα, είναι δυνατή η συσχέτιση των κόμβων ενός δέντρου και των υποχώρων του μοναδιαίου υπερκύβου: η ρίζα του δέντρου αντιπροσωπεύει τον ίδιο τον υπερκύβο. Ο χώρος αυτός διχοτομείται κατά μήκος του x^1 άξονα, και η περιοχή για την οποία ισχύει $0 \leq x^1 \leq 0.5$ αντιστοιχίζεται στο αριστερό παιδί της ρίζας, ενώ η περιοχή $0.5 \leq x^1 \leq 1$ αντιστοιχίζεται στο δεξί παιδί. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε ένα από αυτούς τους κόμβους κατά μήκος της x^2 κατεύθυνσης, όπως εικονίζεται στο Σχήμα 15. Στον διδιάστατο χώρο η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί εναλλάσσοντας τους x^1 και x^2 άξονες. Αντίστοιχα, στον N -διάστατο χώρο η διαδικασία συνεχίζεται επιλέγοντας τις κατευθύνσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ με κυκλική σειρά.



Σχήμα 15: Συσχέτιση μεταξύ του δυαδικού δέντρου και της διαδικασίας διχοτόμησης [7].

Το επίπεδο της ρίζας του δέντρου ορίζεται ως 0. Αν ο κόμβος k του επιπέδου m αναπαριστά μια περιοχή (c_k, d_k) , οι υποπεριοχές, που συσχετίζονται με το αριστερό και δεξί παιδί (c_k^l, d_k^l) και (c_k^r, d_k^r) αντίστοιχα, προκύπτουν από τη διαίρεση της (c_k, d_k) κατά μήκος του κάθετου επιπέδου στον j -οστό άξονα συντεταγμένων. Ο j -οστός άξονας έχει επιλεγθεί κυκλικά από τις διευθύνσεις του N -διάστατου χώρου, σύμφωνα με τη σχέση (2.6) :

$$j = 1 + \text{mod}(m, N) \quad (2.6)$$

Κατά συνέπεια, προκύπτουν:

$$c_{kl}^i = c_k^i, d_{kl}^i = d_k^i \text{ για } i \neq j, \text{ και } c_{kl}^j = c_k^j, d_{kl}^j = \frac{1}{2}(c_k^j + d_k^j) \quad (2.7)$$

$$c_{kr}^i = c_k^i, d_{kr}^i = d_k^i \text{ για } i \neq j, \text{ και } c_{kr}^j = \frac{1}{2}(c_k^j + d_k^j), d_{kr}^j = d_k^j \quad (2.8)$$

Η συσχέτιση μεταξύ κόμβων και υποχώρων του μοναδιαίου υπερκύβου επιτρέπει έναν περαιτέρω ορισμό του ADT, ορίζοντας ότι κάθε σημείο στο δέντρο περιλαμβάνεται στον υποχώρο που αντιστοιχεί στον κόμβο στον οποίο έχει αποθηκευτεί. Συνεπώς, αν ο κόμβος k μιας ADT δομής περιέχει ένα σημείο με συντεταγμένες x_k , πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη (2.8) :

$$c_k^i \leq x_k^i < d_k^i \text{ για } i=1,2,\dots,N \quad (2.8)$$

2.4.1 Γεωμετρική αναζήτηση

Έστω ένα σύνολο σημείων αποθηκευμένο σε μια ADT δομή [7]. Η παραπάνω συνθήκη προσφέρει τη δυνατότητα επαρκούς αντιμετώπισης του προβλήματος γεωμετρικής αναζήτησης. Η επαναληπτική δομή της διαδικασίας διχοτόμησης που περιγράφηκε, εξασφαλίζει ότι η περιοχή που συσχετίζεται με έναν κόμβο k περικλείει όλες τις υποπεριοχές που συσχετίζονται με τους κόμβους κατάντη του k . Για παράδειγμα, όλα τα σημεία σε μια δομή ADT αποθηκεύονται σε κόμβους που βρίσκονται προφανώς κατάντη της ρίζας του δέντρου, και προφανώς περικλείονται στον μοναδιαίο υπερκύβο, ο οποίος συσχετίζεται με τη ρίζα. Ανάλογα, όλο το σύνολο των σημείων, που αποθηκεύεται σε ένα υποδέντρο, περικλείεται στο χώρο που αντιπροσωπεύεται από τη ρίζα του υποδέντρου.

Το χαρακτηριστικό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να μειωθεί το κόστος της γεωμετρικής αναζήτησης, ελέγχοντας, σε οποιοδήποτε κόμβο k , την περίπτωση τομής μεταξύ του εύρους αναζήτησης (a,b) και της περιοχής που αντιστοιχεί στον κόμβο k , ο οποίος ορίζεται ως (c_k, d_k) . Αν οι περιοχές αυτές δεν συμπίπτουν, τότε όλο το σύνολο των σημείων, που είναι αποθηκευμένο στο υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο k , παραλείπεται από την αναζήτηση, οπότε αποφεύγεται η εξέταση των συντεταγμένων όλων αυτών των σημείων.

Αντίστοιχα, μια συστηματική διαδικασία επιλογής των σημείων, που περικλείονται σε ένα δεδομένο εύρος αναζήτησης (a,b) , προκύπτει από τον αλγόριθμο προσπέλασης. Η γενικευμένη λειτουργία προσπέλασης της ρίζας παίρνει την έννοια του ελέγχου αν το σημείο, που είναι αποθηκευμένο σε αυτή, προσπίπτει στο εύρος αναζήτησης. Επιπλέον, το αριστερό και δεξί υποδέντρο προσπελάζονται μόνο αν οι περιοχές που συσχετίζονται με τις αντίστοιχες ρίζες τους επικαλύπτονται με το εύρος αναζήτησης.

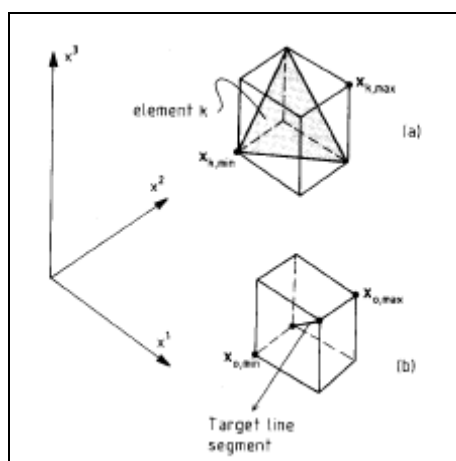
2.4.2 Γεωμετρική τομή

Προβλήματα γεωμετρικής τομής παρουσιάζονται σε πολλές εφαρμογές. Για παράδειγμα [8] οι εφαρμογές αφαίρεσης κρυφών γραμμών, αλλά και στον αλγόριθμο προελαύνοντος μετώπου που παρουσιάστηκε, όπου πρέπει να αναγνωριστούν τα τρίγωνα ενός συνόλου τριγωνικών στοιχείων, τα οποία τέμνονται με ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα. Γενικά, το πρόβλημα της γεωμετρικής τομής είναι ο εντοπισμός των γεωμετρικών οντοτήτων ενός συνόλου που τέμνονται με μια δεδομένη οντότητα. Στην περίπτωση που ελέγχονται όλες οι πιθανές τομές μία προς μία, η λύση αυτών των προβλημάτων μπορεί να έχει τεράστιο υπολογιστικό κόστος, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που αφορούν σε περίπλοκες γεωμετρίες, όπως αυθαίρετες καμπύλες και επιφάνειες. Πολλοί από αυτούς τους αναλυτικούς ελέγχους τομής μπορούν να αντικατασταθούν από απλές συγκρίσεις μεταξύ των οριακών συντεταγμένων οποιουδήποτε ζεύγους αντικειμένων. Για παράδειγμα, ένα

τρίγωνο με x -συντεταγμένες στο διάστημα $(0,5, 0,7)$ δεν μπορεί να τέμνεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα με x -συντεταγμένες μεταξύ $0,1$ και $0,3$. Γενικά, η τομή μεταξύ δύο αντικειμένων στο N -διάστατο Ευκλείδειο χώρο απαιτεί κάθε ένα από τα N ζεύγη από εύρη συντεταγμένων να υπερκαλύπτονται

Έστω το πρόβλημα τομής μεταξύ τριγωνικών στοιχείων και ενός ευθυγράμμου τμήματος στον R^3 . Αν $(\mathbf{x}_{k,\min}, \mathbf{x}_{k,\max})$ είναι οι οριακές συντεταγμένες του στοιχείου k και αν $(\mathbf{x}_{0,\min}, \mathbf{x}_{0,\max})$ είναι το κατώτατο και ανώτατο όριο του ευθυγράμμου τμήματος (Σχήμα 16), τότε ένα σημαντικό βήμα για τη λύση του προβλήματος γεωμετρικής τομής είναι η επιλογή των τριγωνικών στοιχείων που ικανοποιούν την ανισότητα (2.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k,\min}^i &\leq \mathbf{x}_{0,\max}^i \\ \mathbf{x}_{k,\max}^i &\leq \mathbf{x}_{0,\min}^i \end{aligned} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$



Σχήμα 16 Ορισμός των ορίων συντεταγμένων ενός τριγωνικού στοιχείου και ενός ευθυγράμμου τμήματος [7].

Το κόστος του ελέγχου της ανισότητας (2.9) για κάθε στοιχείο αυξάνεται ανάλογα με το n , οπότε για πολυάριθμα σύνολα καθίσταται απαγορευτικό. Ωστόσο, η μείωσή του είναι εφικτή εισάγοντας το πρόβλημα της γεωμετρικής αναζήτησης. Εφόσον το πλήθος των στοιχείων, που θα ικανοποιούν την ανισότητα (2.9), θα είναι λογικά πολύ μικρότερο από n , το κόστος διερεύνησης πιθανής τομής μόνο για τα στοιχεία που θα εντοπιστούν από τη γεωμετρική αναζήτηση γίνεται ανεκτό.

Για την ερμηνεία της ανισότητας (2.9) ως πρόβλημα γεωμετρικής αναζήτησης, είναι ευνοϊκή η θεώρηση ότι όλα τα στοιχεία εντοπίζονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου υπερκύβου. Η θεώρηση αυτή προφανώς είναι προαιρετική και εδώ γίνεται για λόγους ευκολίας, ενώ πρακτικά εφαρμόζεται εύκολα μέσω κατάλληλης αδιαστατοποίησης. Κατά συνέπεια, η ανισότητα (2.9) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbf{x}_{k,\min}^1 \leq \mathbf{x}_{0,\max}^1 \\
&\vdots \\
0 &\leq \mathbf{x}_{k,\min}^N \leq \mathbf{x}_{0,\max}^N \\
\mathbf{x}_{0,\min}^1 &\leq \mathbf{x}_{k,\max}^1 \leq 1 \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_{0,\min}^N &\leq \mathbf{x}_{k,\max}^N \leq 1
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Έστω ένα στοιχείο k στον R^N με όρια συντεταγμένων $\mathbf{x}_{k,\min}$ και $\mathbf{x}_{k,\max}$. Συνδυάζοντας τα δύο αυτά σύνολα συντεταγμένων, το στοιχείο k στον R^N μετασχηματίζεται σε σημείο στον R^{2N} με συντεταγμένες $\mathbf{x}_k^i$ για $i=1,2,...,2N$ ορισμένες ως:

$$\mathbf{x}_k = \left[x_{k,\min}^1, \dots, x_{k,\min}^N, x_{k,\max}^1, \dots, x_{k,\max}^N \right]^T \tag{2.11}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ερμηνεία για κάθε στοιχείο k , η ανισότητα (2.10) απλοποιείται στην ακόλουθη:

$$a^i \leq x_k^i \leq b^i \text{ για } i=1,2,...,2N \tag{2.12}$$

Όπου $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ ερμηνεύονται ως η χαμηλότερη και υψηλότερη κορυφή ενός υπερ-ορθογώνιου χώρου στον R^{2N} με τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \left[0, \dots, 0, x_{0,\max}^1, \dots, x_{0,\max}^N \right]^T \\
\mathbf{b} &= \left[x_{0,\min}^1, \dots, x_{0,\min}^N, 1, \dots, 1 \right]^T
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Κατά συνέπεια, το πρόβλημα εντοπισμού των στοιχείων στον R^N , που ικανοποιούν τη σχέση (2.9), είναι αντίστοιχο με ένα πρόβλημα γεωμετρικής αναζήτησης στον R^{2N} . Αφού συσταθεί το σύνολο των σημείων, που περιλαμβάνονται σε έναν υποχώρο, ελέγχεται η πιθανή τομή καθενός από αυτά με το στοιχείο-στόχο για την εύρεση της λύσης στο πρόβλημα γεωμετρικής τομής.

2.4.3 Η χρήση του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου στη δημιουργία πλέγματος

Οι αλγόριθμοι δημιουργίας εξάεδρων, πρισμάτων και τετράεδρων, που περιγράφηκαν στις παραπάνω παραγράφους, απαιτούν την συχνή χρήση λειτουργιών, όπως η αναζήτηση σημείων μέσα σε προκαθορισμένο υποχώρο, τον καθορισμό της θέσης σημείων στο χώρο σε σχέση με άλλα γεωμετρικά σημεία και τον εντοπισμό τομών μεταξύ γεωμετρικών στοιχείων [7]. Προφανώς, για μεγάλα πλέγματα πολλών στοιχείων οι διαδικασίες αυτές μπορεί να γίνουν ιδιαίτερα απαιτητικές.

Η επιτυχημένη εφαρμογή των παραπάνω αλγορίθμων, που παρουσιάζονται στη παρούσα εργασία, χρησιμοποιούν εκτενώς τη δομή δεδομένων του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου. Στην περίπτωση της δημιουργίας εξαέδρων χρησιμοποιούνται δύο δομές ADT, μία για τα τριγωνικά στοιχεία του επιφανειακού πλέγματος και μία για τους κόμβους του. Στην περίπτωση της δημιουργίας πρισμάτων, χρησιμοποιούνται τόσες δομές ADT όσα είναι και τα στρώματα των πρισμάτων, και περιέχουν τα ίδια τα πρίσματα. Στην περίπτωση της δημιουργίας τετραέδρων, χρησιμοποιούνται τρεις δομές ADT, μία για τα τριγωνικά στοιχεία του μετώπου, μία για τις ακμές του και μία για τους ενεργούς κόμβους του.

Η συνδυασμένη χρήση τους προσφέρει μεγάλη ευελιξία, ώστε οι διαδικασίες εισαγωγής και διαγραφής στοιχείων, γεωμετρικής αναζήτησης και γεωμετρικής τομής να παρουσιάζουν βέλτιστη λειτουργία από πλευράς ταχύτητας και αξιοπιστίας.

2.5 Ακριβής έλεγχος γεωμετρικής τομής

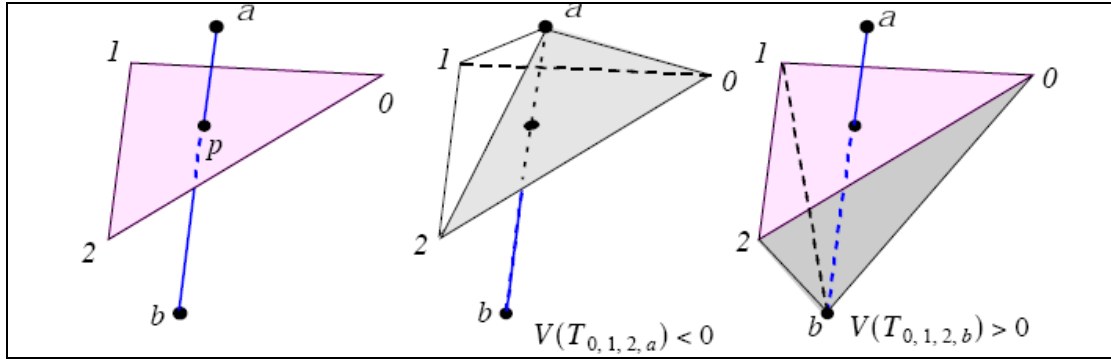
Με την χρήση της δομή δεδομένων του εναλλασσόμενου ψηφιακού δέντρου, μπορούμε γρήγορα και αξιόπιστα να καθορίσουμε την τοπολογική συνδεσιμότητα μεταξύ ενός ευθύγραμμου τμήματος και ενός τριγώνου. Πλέον πρέπει τα υποψήφια στοιχεία να ελεγχθούν ακριβώς για το εάν τέμνονται μεταξύ τους.

Για να καθορίσουμε τη θέση στο χώρο ενός σημείου σε σχέση με αλλά τρία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πρόσημο του όγκου του τετράεδρου, που σχηματίζουν τα τέσσερα σημεία. Δηλαδή το πρόσημο της παρακάτω ορίζουσας [Aftosmis et al, 1999]

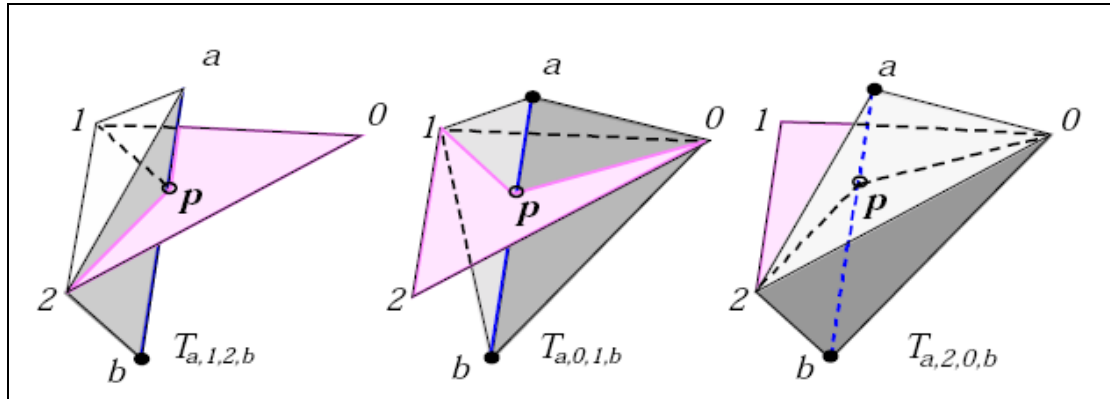
$$\det(T) = \begin{vmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & 1 \\ q_0 & q_1 & q_2 & 1 \\ s_0 & s_1 & s_2 & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Αυτό μας δίνει έναν τρόπο για να καθορίσουμε και την τομή ενός ευθύγραμμου τμήματος με ένα τρίγωνο. Πρώτα καθορίζεται εάν το ευθύγραμμο τμήμα τέμνει το επίπεδο, στο οποίο βρίσκεται το τρίγωνο. Απαιτείται ο υπολογισμός του πρόσημου των δυο οριζουσών. Εάν τα πρόσημα είναι διαφορετικά τότε ο έλεγχος είναι θετικός και πρέπει να ελεγχθεί η ακριβής τομή. Χρειάζεται ο υπολογισμός τριών οριζουσών και για να υπάρχει τομή πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο.

Έστω το τρίγωνο $T1$ με κορυφές $(0,1,2)$ και το ευθύγραμμο τμήμα $T2$ με κορυφές (a,b) . Το $T2$ τέμνει το επίπεδο του τριγώνου εάν η ορίζουσες $\det(T_{0,1,2,a})$ και $\det(T_{0,1,2,b})$ έχουν διαφορετικό πρόσημο. Το $T2$ θα τέμνει το τρίγωνο $T1$ εάν οι τρεις ορίζουσες $\det(T_{a,1,2,b})$, $\det(T_{a,0,1,b})$ και $\det(T_{a,2,0,b})$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Το παράδειγμα παρουσιάζεται σχηματικά στα επόμενα σχήματα.



Σχήμα 17: Αναπαράσταση του ελέγχου τομής του ευθύγραμμου τμήματος ab με το επίπεδο του τριγώνου $(0,1,2)$ με την χρήση του όγκου δύο τετράεδρων [1].



Σχήμα 18: Αναπαράσταση του ελέγχου τομής του ευθύγραμμου τμήματος ab με το τριγώνου $(0,1,2)$ με την χρήση του όγκου τριών τετράεδρων [1].

2.6 Διαχείριση προβληματικών δεδομένων

Η χρήση οριζουσών για το καθορισμό τομής μεταξύ ενός ευθύγραμμου τμήματος και ενός τριγώνου μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι εάν τέσσερα σημεία ανήκουν στο ίδιο επίπεδο τότε η ορίζουσα T θα είναι μηδέν.

Μια μέθοδος για την αποτελεσματική διαχείριση προβληματικών γεωμετριών είναι η “simulation of simplicity”, η οποία ουσιαστικά είναι μια μέθοδος εικονικών μετατοπίσεων [9]. Αν θεωρηθεί ότι όλα τα σημεία p_k διαταράσσονται κατά ε_k , με ε αρκετά μεγάλο έτσι ώστε να αποφευχθούν όλοι οι εκφυλισμοί αλλά και αρκετά μικρό έτσι ώστε να μην διαταράσσει το γενικό πλέγμα και σε όλους τους υπολογισμούς οριζουσών εφαρμόζεται η ίδια διαταραχή, τότε αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να επιλύει τέτοια προβλήματα, υπολογίζοντας πλέον το πρόσημο της διαταραγμένης ορίζουσας.

Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται ως εξής. Εάν $\det(T)=0$, υπολογίζεται η ορίζουσα $\det(T+E)=0$, όπου E είναι η διαταραχή και μπορεί να οριστεί ως εξής [Edelsbrunner et al,].

$$(E)_{i,j} = \varepsilon_{i,j} = \varepsilon^{2^{i\delta-j}}, \quad 1 \leq j \leq d, \quad \delta \geq d$$

το i δηλώνει τον δείκτη των σημείων και d είναι η χωρική διάσταση ($d=3$ για τρίγωνα στον R^3).

Όπως έχουμε αναφέρει, αυτό που μας ενδιαφέρει, για τον καθορισμό της θέσης ενός σημείου σε σχέση με άλλα τρία, είναι το πρόσημο τις ορίζουσας T . Ο πρώτος όρος της αναπτυγμένης ορίζουσας $\det(T+E)$, που έχει μη μηδενικό παράγοντα, μας δίνει το πρόσημο της ορίζουσας. Παρακάτω δίνονται οι 15 όροι, που θα χρειαστούν για να δώσουν το πρόσημο της ορίζουσας $\det(T+E)$ [Edelsbrunner et al,].

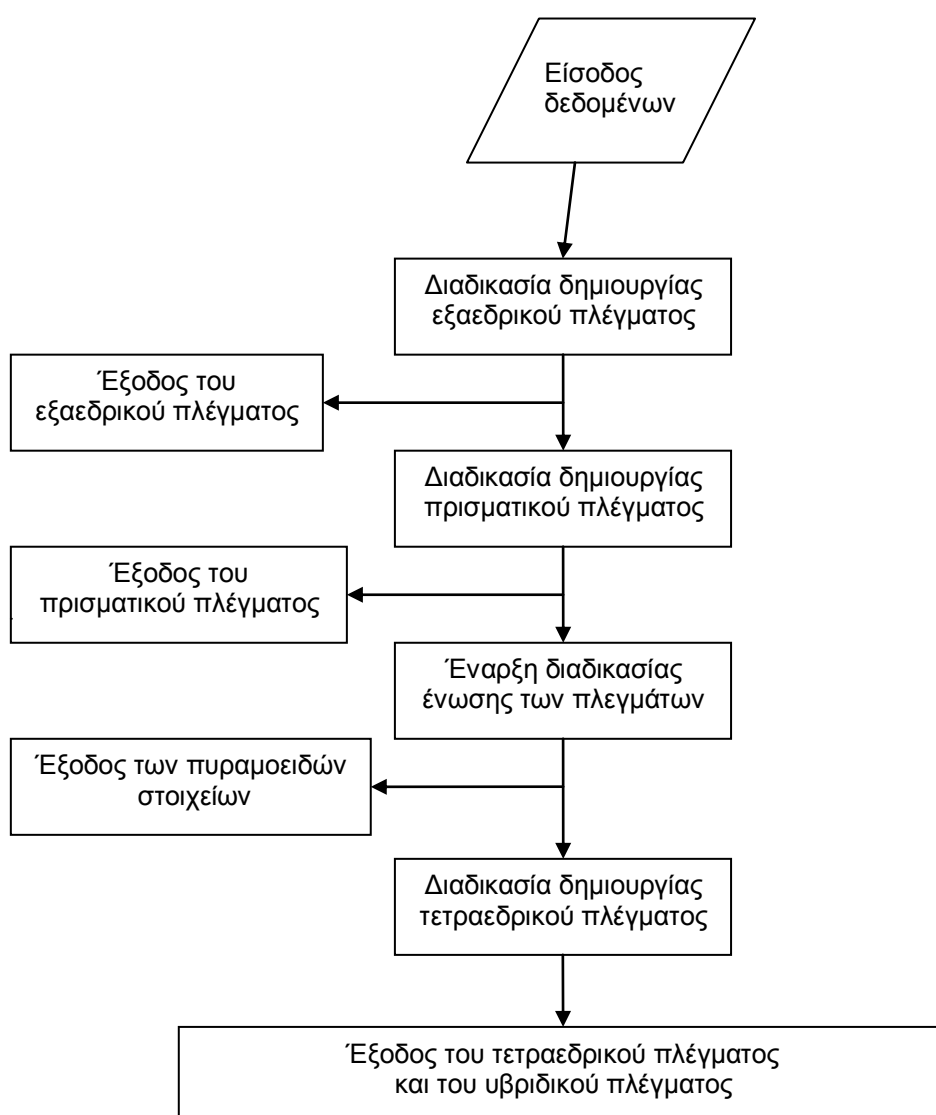
$$\det(T+E) = \begin{vmatrix} r_0 + \varepsilon^{1/2} & r_1 + \varepsilon^{1/4} & r_2 + \varepsilon^{1/8} & 1 \\ q_0 + \varepsilon^4 & q_1 + \varepsilon^2 & q_2 + \varepsilon & 1 \\ s_0 + \varepsilon^{32} & s_1 + \varepsilon^{16} & s_2 + \varepsilon^8 & 1 \\ p_0 + \varepsilon^{256} & p_1 + \varepsilon^{128} & p_2 + \varepsilon^{64} & 1 \end{vmatrix}$$

1. $\det(T)$
2. $[p_0 * q_1 + q_0 * s_1 - p_0 * s_1 + s_0 * p_1 - q_0 * p_1 - s_0 * q_1] * \varepsilon^{0.125}$
3. $[q_0 * p_2 + s_0 * q_2 + p_0 * s_2 - p_0 * q_2 - s_0 * p_2 - q_0 * s_2] * \varepsilon^{0.25}$
4. $[s_1 * p_2 + q_1 * s_2 - p_1 * s_2 - s_1 * q_2 - q_1 * p_2 + p_1 * q_2] * \varepsilon^{0.5}$
5. $[r_0 * p_1 - r_0 * s_1 + s_0 * r_1 + p_0 * s_1 - p_0 * r_1 - s_0 * p_1] * \varepsilon$
6. $[s_0 - p_0] * \varepsilon^{1.25}$
7. $[-s_1 + p_1] * \varepsilon^{1.5}$
8. $[-p_0 * s_2 + p_0 * r_2 + s_0 * p_2 + r_0 * s_2 - s_0 * r_2 - r_0 * p_2] * \varepsilon^2$
9. $[s_2 - p_2] * \varepsilon^{2.5}$
10. $[s_1 * r_2 + p_1 * s_2 - p_1 * r_2 - s_1 * p_2 - r_1 * s_2 + r_1 * p_2] * \varepsilon^4$
11. $[q_0 * p_1 - r_0 * p_1 - p_0 * q_1 - q_0 * r_1 + p_0 * r_1 + r_0 * q_1] * \varepsilon^8$
12. $[p_0 - q_0] * \varepsilon^{8.25}$
13. $[-p_1 + q_1] * \varepsilon^{8.5}$
14. $[r_0 - p_0] * \varepsilon^{10}$
15. $[+1] * \varepsilon^{10.5}$

Ο τελευταίος όρος θα είναι πάντα μη μηδενικός και δεν χρειάζεται να προχωρήσουμε παρακάτω σε καμία περίπτωση. Επίσης παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι η ίδια η ορίζουσα $\det(T)$.

Κεφάλαιο 3

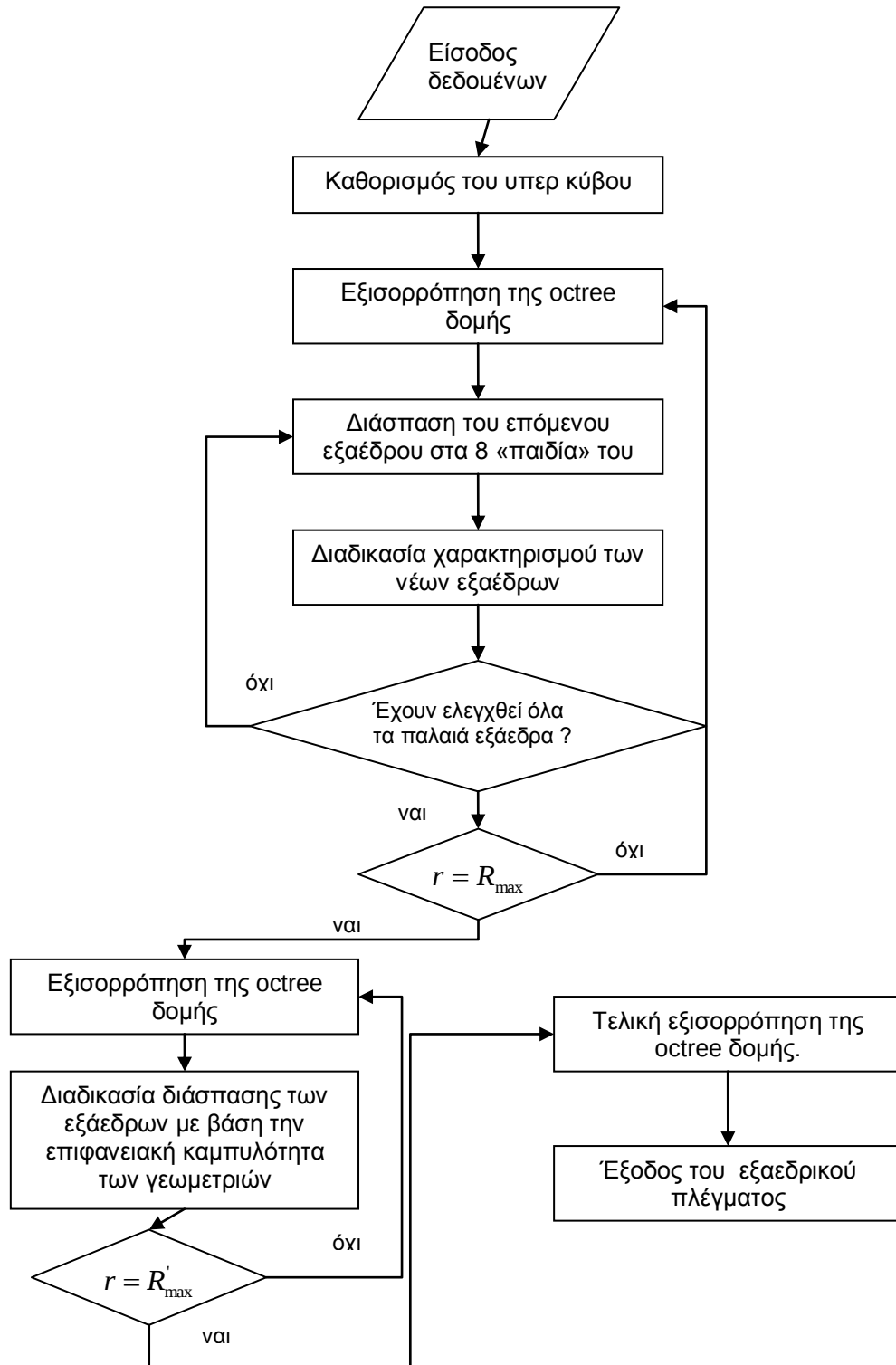
Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα διάφορα βήματα του αλγόριθμου που αναπτύχθηκε. Ο αλγόριθμος μπορεί να διαχωριστεί σε τέσσερα τμήματα. Τη διαδικασία παραγωγής εξαέδρων, τη διαδικασία παραγωγής πρισμάτων, τη διαδικασία παραγωγής τετράεδρων και τη διαδικασία ένωσης αυτών. Οι διαδικασίες περιγράφονται στα παρακάτω υποκεφάλαια. Στην Σχήμα 19 φαίνεται το γενικό διάγραμμα ροής του προγράμματος.



Σχήμα 19 : Διάγραμμα ροής του συνολικού αλγορίθμου.

3.1 Ο αλγόριθμος δημιουργίας εξαέδρων

Ο αλγόριθμος δημιουργίας καρτεσιανού εξαεδρικού πλέγματος χρειάζεται την ελάχιστη παρέμβαση από τον χρήστη. Παρακάτω παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου.



Σχήμα 20 : Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου παραγωγής εξαέδρων.

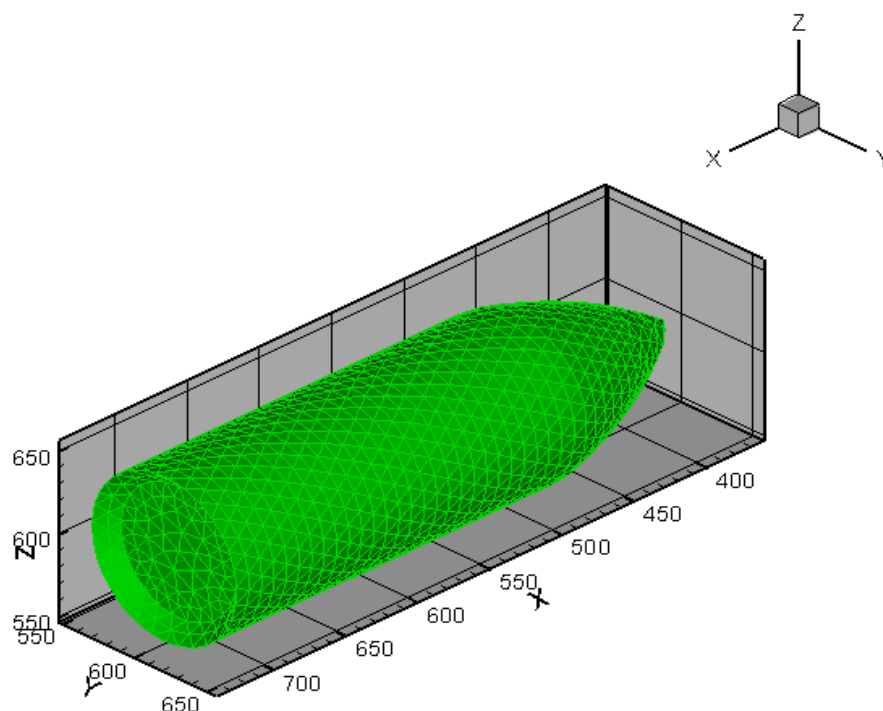
Εννοιολογικά θα πρέπει να ξεχωρίσουμε τους όρους υποδιαίρεση ενός εξάεδρου και κύκλος υποδιαίρεσης. Με τον πρώτο εννοούμε ότι ένα εξάεδρο υποδιαιρείται στα οκτώ παιδιά του και για το τελικό εξαεδρικό πλέγμα δεν υφίσταται πλέον ως εξάεδρο (παρόλο που δεν καταστρέφεται). Με τον δεύτερο όρο εννοούμε μια στιγμή της διαδικασίας δημιουργίας εξάεδρων στην οποία όλα τα εξάεδρα, που έχουν χαρακτηριστεί προς υποδιαίρεση στην προηγούμενη στιγμή, υποδιαιρούνται.

Ο χρήστης θα πρέπει να δηλώσει τον μέγιστο αριθμό κύκλων $R_{\max}$ της βασικής διαδικασίας δημιουργίας εξάεδρων και, αν επιθυμεί επιπλέον πυκνωση τον επιφανειακών εξάεδρων με βάση την κλίση της γεωμετρίας, τον αριθμό $R'_{\max}$.

3.1.1 Δεδομένα εισόδου

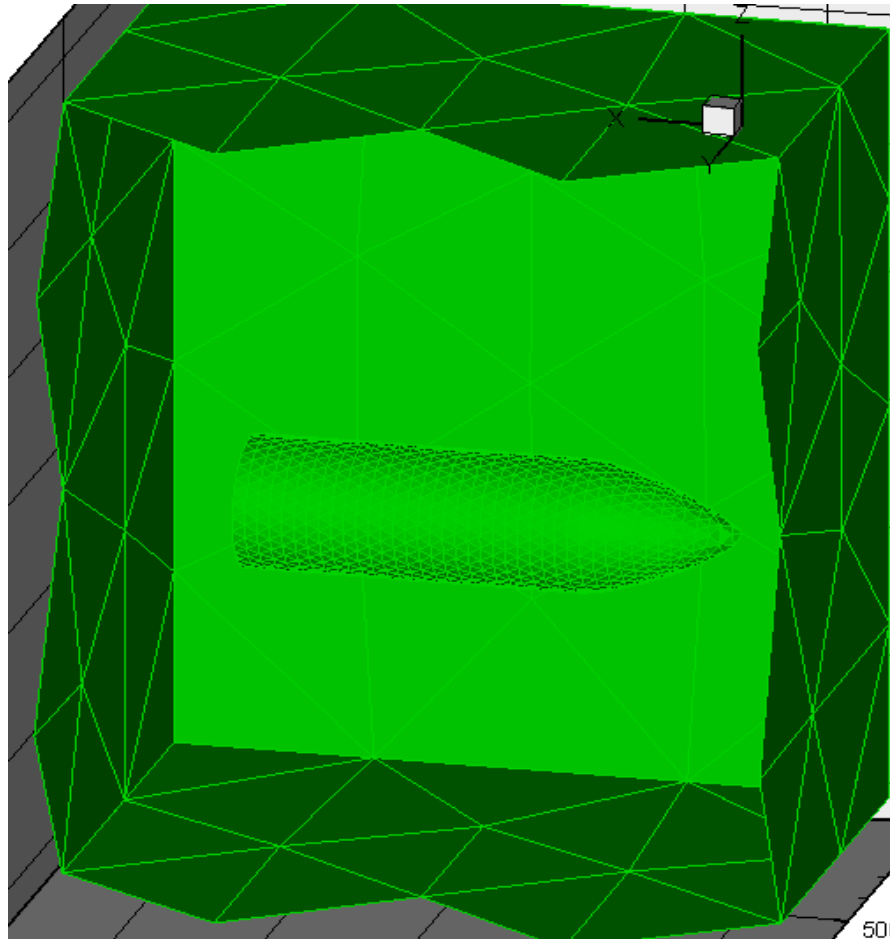
Το μοναδικό δεδομένο εισόδου, που απαιτείται από τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε, είναι ένα επιφανειακό πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, που συνιστά την οριακή επιφάνεια του υπό διακριτοποίηση χωρίου. Ο αλγόριθμος αντιμετωπίζει είτε κυρτούς, είτε μη κυρτούς χώρους. Επίσης δεν είναι απαραίτητη η αρίθμηση των κόμβων κάθε τριγωνικού στοιχείου, ώστε το κάθετο διάνυσμα σε ένα τρίγωνο να έχει φορά προς το εσωτερικό του χωρίου.

Στην Εικόνα 5, που ακολουθεί, εικονίζεται ένα επιφανειακό πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, που ορίζει τον υπό διακριτοποίηση χώρο. Αποτελείται από 1273 κόμβους και 2542 τριγωνικά στοιχεία. Το επιφανειακό πλέγμα κατασκευάστηκε με το λογισμικό CATIA και δίνεται ως δεδομένο εισόδου στον αλγόριθμο με τη μορφή ενός αρχείου κειμένου.



Εικόνα 5 : Άποψη του εσωτερικού επιφανειακού πλέγματος.

Όπως έχουμε αναφέρει, ο αλγόριθμος μπορεί να διαχειριστεί παραπάνω από μία οριακή γεωμετρία. Στην Εικόνα 6 απεικονίζεται το παραπάνω εσωτερικό πλέγμα και ένα πλέγμα, το οποίο ορίζει εξωτερικά τον χώρο προς διακριτοποίηση. Τα δύο πλέγματα θα πρέπει να είναι ενωμένα σε ένα αρχείο εισόδου και θα πρέπει να υπάρχει κατάλληλος χαρακτηρισμός ως εσωτερικού ή εξωτερικού συνόρου.



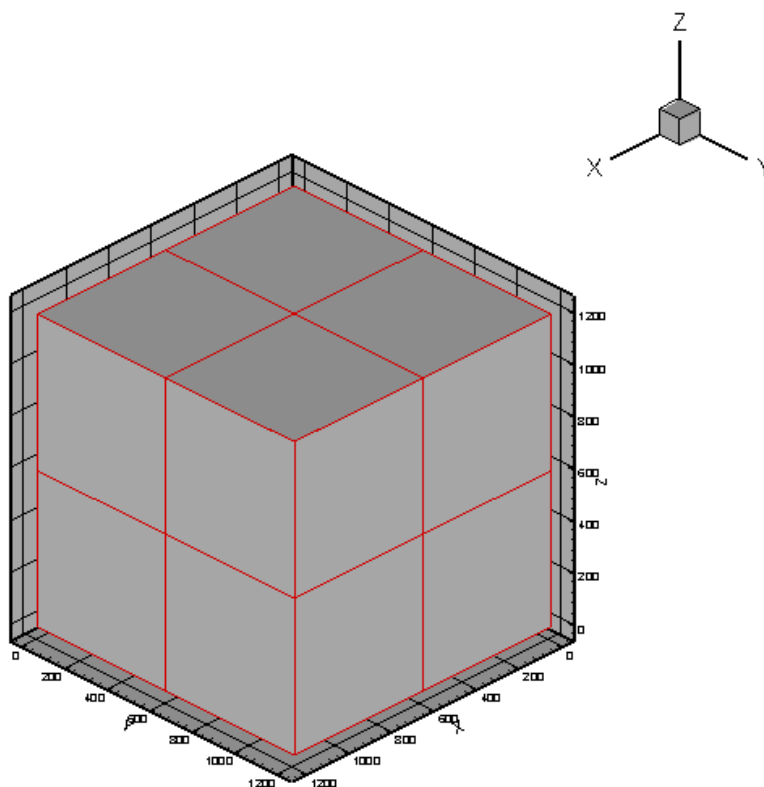
Εικόνα 6 : Άποψη του εσωτερικού επιφανειακού πλέγματος μέσα στο εξωτερικό πλέγμα.

3.1.2 Καθορισμός του υπερκύβου

Για να ξεκινήσει η διαδικασία παραγωγής νέων εξάεδρων πρέπει να οριστεί ένας υπερκύβος, ο οποίος περικλείει τον προς διακριτοποίηση χώρο. Ο υπερκύβος ορίζεται ως το πρώτο εξάεδρο και θα υποδιαιρεθεί για να ξεκινήσει η διαδικασία. Η θέση που θα έχει ο πραγματικός χώρος διακριτοποίησης σε σχέση με τον χώρο που ορίζει ο υπέρ κύβος επηρεάζει τον αριθμό των εξάεδρων σε κάθε στάδιο της διαδικασίας. Σε αυτό το σημείο ο αλγόριθμος αρχικοποιεί της δομές δεδομένων που χρησιμοποιεί (octree και ADT) .

3.1.3 Η υποδιαίρεση του εξάεδρου

Η διαδικασία υποδιαίρεσης ενός εξάεδρου μπορεί να φαίνεται απλή διαδικασία, αλλά δεν είναι καθώς πρέπει να κρατείται η σωστή αρίθμηση των κορυφών των εξάεδρων καθώς και οι τοπολογικές πληροφορίες του κάθε εξάεδρου. Σε κάθε υποδιαίρεση πάντα δημιουργούνται οκτώ νέα εξάεδρα και το πολύ 19 νέοι κόμβοι. Στην Εικόνα 7 παρουσιάζεται η υποδιαίρεση του υπερκύβου στα οκτώ παιδιά του.

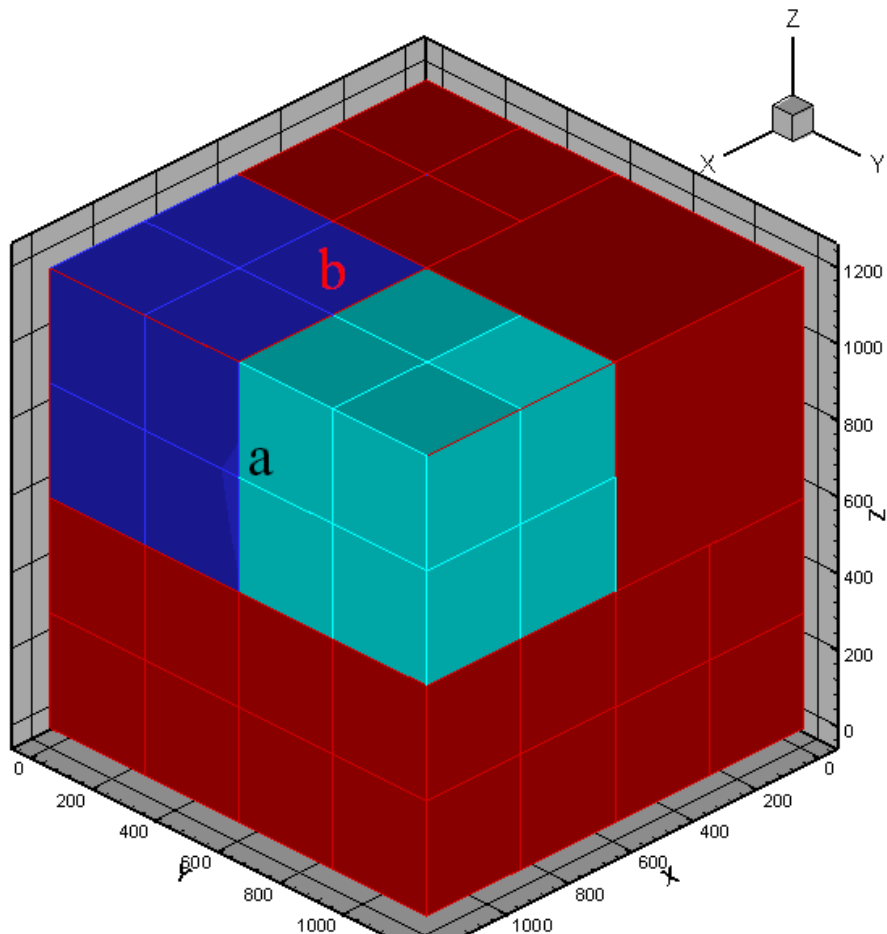


Εικόνα 7 : Άποψη του υπερκύβου μετά την υποδιαίρεση του.

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 7, πρώτα δημιουργούνται οι νέοι κόμβοι στον μέσο της κάθε ακμής του αρχικού εξάεδρου. Στη συνέχεια στα μέσα των ακμών, που ορίζουν οι νέοι κόμβοι, θα δημιουργηθούν οι υπόλοιποι που βρίσκονται στο κέντρο της κάθε έδρας του εξάεδρου. Ξέροντας τους νέους κόμβους μπορούμε να ορίσουμε του νέα εξάεδρα.

Στην Εικόνα 8 φαίνονται τα εξάεδρα της Εικόνας 7 πριν τελειώσει ο επόμενος κύκλο υποδιαίρεσης. Το μπλε εξάεδρο υποδιαιρείται πρώτα από το γαλάζιο. Οπότε οι κόμβοι a,b έχουν υπολογιστεί όταν ξεκινάει η υποδιαίρεση του γαλάζιου εξάεδρου. Ο αλγόριθμος, χρησιμοποιώντας τις συμπληρωματικές τοπολογικές δομές δεδομένων, μπορεί να ελέγξει γρήγορα την ύπαρξη των κόμβων και να τους χρησιμοποιήσει στα νέα εξάεδρα.

Ο έλεγχος αυτός δείχνει την αδυναμία της octree δομής εάν χρησιμοποιηθεί μόνη της, καθώς η αναζήτηση των πιθανών κοινών κόμβων θα χρειαζόταν πολύ χρόνο ιδίως σε περιπτώσεις παρόμοιες του Σχήματος 2 στο υποκεφάλαιο 2.1.2 .



Εικόνα 8 : Άποψη δυο εξάεδρων που τα παιδιά τους μοιράζονται κόμβους.

Σε αυτό το σημείο του αλγορίθμου ενημερώνονται οι δομές octree, που παρέχουν την γενεαλογική πληροφορία, καθώς και οι δομές που περιέχουν την τοπολογική πληροφορία του κάθε εξάεδρου.

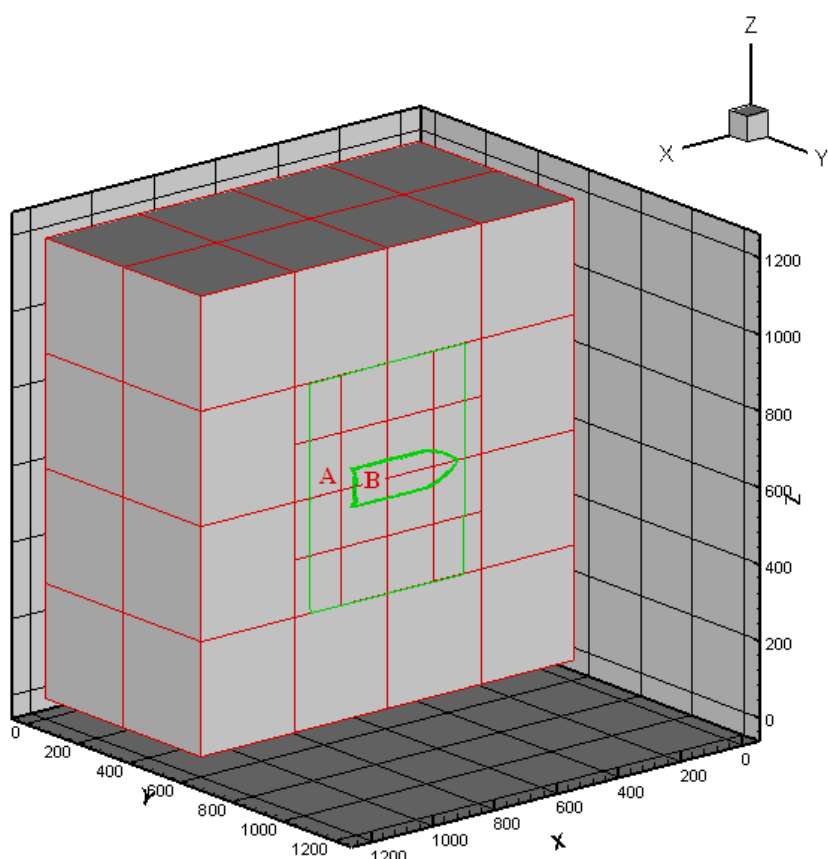
3.1.4 Διαδικασία χαρακτηρισμού των νέων εξάεδρων

Για τα νέα εξάεδρα, που δημιουργήθηκαν από την διαδικασία υποδιαίρεσης, πρέπει να αποφασιστεί αν στον επόμενο κύκλο υποδιαίρεσης θα υποδιαιρεθούν και αυτά. Υπάρχουν τρεις λόγοι για να συμβεί αυτό. Ο πρώτος είναι για να διατηρηθεί η ισορροπία του δένδρου octree και κατά συνέπεια η ομαλή διαφοροποίηση του μεγέθους των εξάεδρων στο χώρο. Αυτός ο λόγος θα αναλυθεί στη συνέχεια. Οι άλλοι δύο λόγοι έχουν να κάνουν με την θέση του εξάεδρου στο χώρο. Δηλαδή είτε εάν τέμνει την γεωμετρία που ορίζει τον χώρο διακριτοποίησης, είτε εάν βρίσκεται κοντά σε μία πηγή πύκνωσης

Παρακάτω θα περιγραφτούν οι έλεγχοι θέσης, που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος. Η αναζήτηση υποψηφίων για γεωμετρική τομή γίνεται με την χρήση του αλγορίθμου «γεωμετρικής τομής» του υποκεφαλαίου 2.4.2 και ο ακριβής έλεγχος της γεωμετρικής τομής γίνεται με την μέθοδο που περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 2.5.

Έλεγχος θέσης κόμβου

Για κάθε νέο κόμβο από την διαδικασία υποδιαίρεσης χρησιμοποιείται η μέθοδος ray casting που περιγράφηκε στο υποκεφάλαιο 2.1.4 για τον καθορισμό της θέσης των κόμβων σε σχέση με κάθε γεωμετρία του χώρου. Ο αλγόριθμος βρίσκει τη θέση του κόμβου σε σχέση με την κάθε γεωμετρία και ανάλογα με τη θέση της γεωμετρίας στον χώρο διακριτοποίησης βρίσκει και την θέση του κόμβου. Στην Εικόνα 9 εικονίζεται μετά τον τρίτο κύκλο υποδιαίρεσης το διακριτοποιημένο χωρίο. Όπως φαίνεται και στην εικόνα, ο κόμβος A βρίσκεται εσωτερικά του χωρίου διακριτοποίησης, καθώς βρίσκεται εσωτερικά του εξωτερικού συνόρου και εξωτερικά του εσωτερικού συνόρου, ενώ ο κόμβος B εξωτερικά του χωρίου γιατί βρίσκεται εσωτερικά του εσωτερικού συνόρου. Με αυτό τον συνδυασμό καταστάσεων ο αλγόριθμος μπορεί να καταλάβει την θέση των κόμβων για οποιονδήποτε αριθμό γεωμετριών, που ορίζουν τον χώρο διακριτοποίησης.



Εικόνα 9 : Η θέση των κόμβων A και B σε σχέση με τα σύνορα.

Ξέροντας την θέση των κόμβων μπορούμε να βρούμε τη θέση του εξάεδρου στο οποίο ανήκουν. Είναι εμφανές ότι τα εξάεδρα της Εικόνας 9 στα

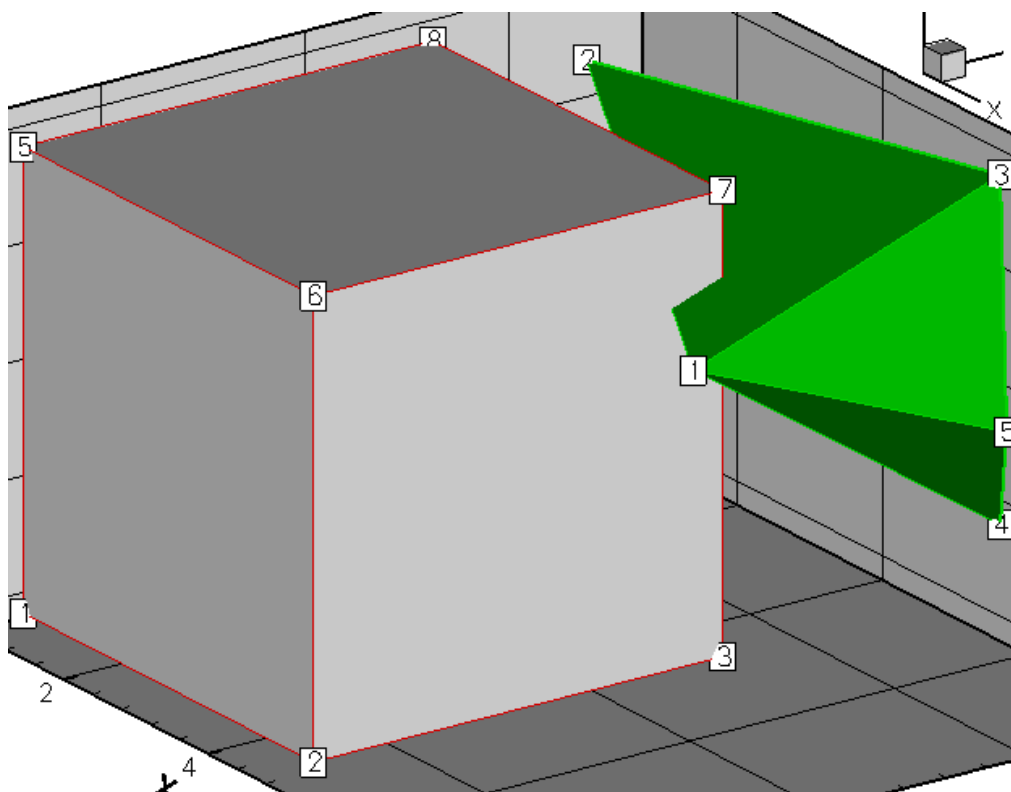
οποία ανήκουν οι κόμβοι A και B τέμνουν το εσωτερικό σύνορο. Επίσης τα εξάεδρα που έχουν μόνο τον κόμβο A δεν τέμνουν το εσωτερικό σύνορο αλλά το εξωτερικό.

Στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούμε να καθορίσουμε την θέση του εξάεδρου με τον έλεγχο των κόμβων του. Όμως υπάρχουν δύο περιπτώσεις στις οποίες αυτή η θέση των κόμβων είναι εκτός τις γεωμετρίας αλλά το εξάεδρο την τέμνει. Οι περιπτώσεις και οι έλεγχοι που χρησιμοποιούνται παρουσιάζονται παρακάτω.

Έλεγχος ακμής

Στην Εικόνα 610 απεικονίζεται μια περίπτωση στην οποία το εξάεδρο που τέμνει την γεωμετρία δεν θα έχει καταχωρηθεί με βάση τον έλεγχο θέσης κόμβων ως τεμνόμενο. Ο αλγόριθμός για να είναι αποτελεσματικός πρέπει να αναγνωρίζει και αντίστοιχες περιπτώσεις.

Συγκεκριμένα, τα εξάεδρα, που δεν καταχωρήθηκαν ως τεμνόμενα από τον έλεγχο θέσης, ελέγχονται αν είναι κοντά στο επιφανειακό πλέγμα. Αυτό γίνεται ελέγχοντας αν ο πατέρας τους είχε καταχωρηθεί ότι τέμνει το πλέγμα. Αν ναι, τότε ελέγχονται οι ακμές του εξάεδρου για τομή με το επιφανειακό πλέγμα.

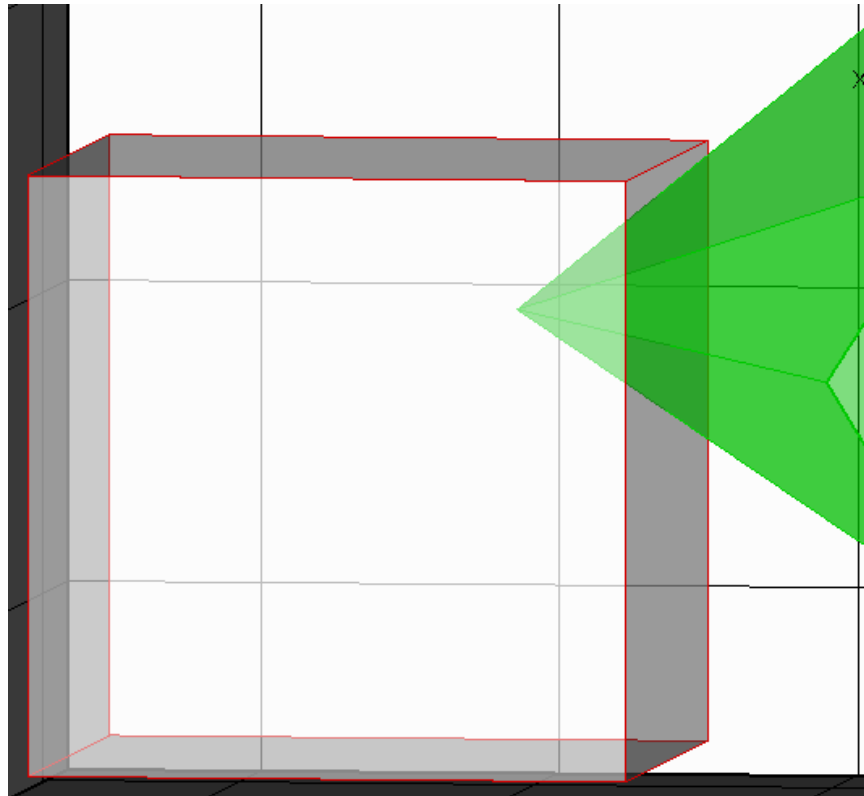


Εικόνα 10 : Τομή εξάεδρου με το επιφανειακό πλέγμα. Έλεγχος με ακμές.

Έλεγχος θέσης επιφανειακού κόμβου

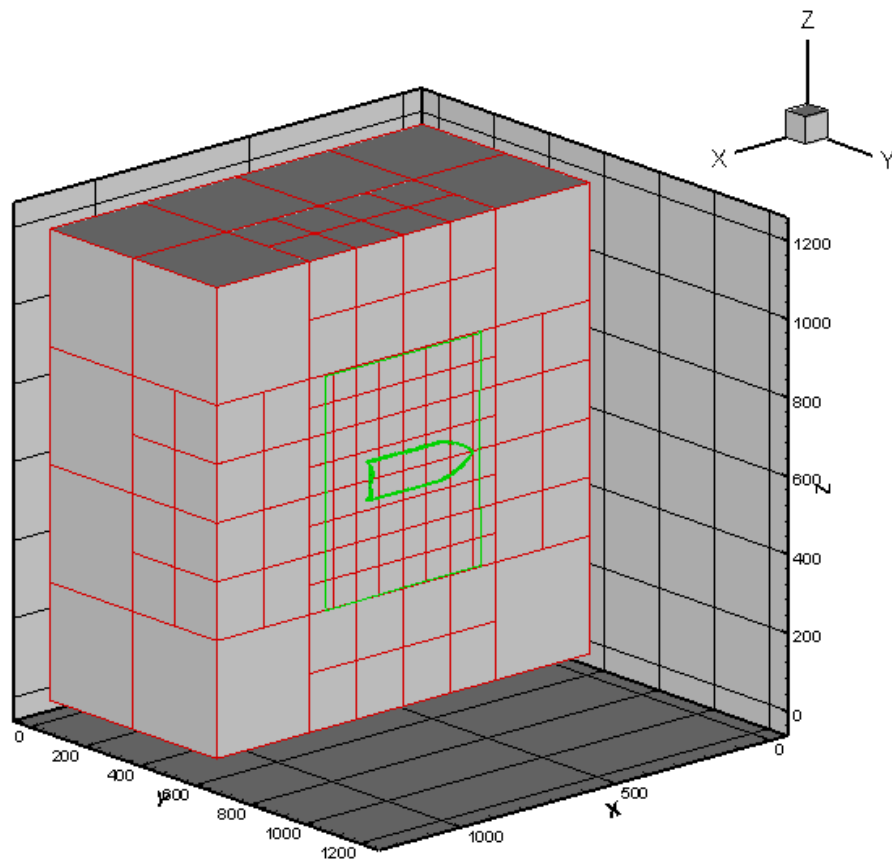
Στην Εικόνα 11 βλέπουμε μία περίπτωση στην οποία το εξάεδρο τέμνει την γεωμετρία αλλά όλοι οι κόμβοι του βρίσκονται από την ίδια πλευρά της γεωμετρίας. Το αποτέλεσμα είναι ότι με βάση τον έλεγχο θέσης των κόμβων τους το εξάεδρο δεν θα έπρεπε να τέμνει την γεωμετρία. Επίσης καμία από τις ακμές του εξάεδρου δεν τέμνει το επιφανειακό πλέγμα.

Ο αλγόριθμός ξεπερνάει το συγκεκριμένο πρόβλημα ελέγχοντας τα εξάεδρα, που με βάση τον έλεγχο θέσης των κόμβων τους και τον έλεγχό με ακμές έχουν καταχωρηθεί ως μη τεμνόμενα και ξέρει ότι βρίσκονται κοντά στην γεωμετρία. Σε αυτά, που καταχωρούνται για έλεγχο, θα ελεγχθεί αν κάποιος επιφανειακός κόμβος βρίσκεται μέσα στο εξάεδρο. Δεν χρησιμοποιείται η μέθοδος της παραγράφου 2.5 αλλά ελέγχονται οι συντεταγμένες των υποψήφιων κόμβων σε σχέση με τους κόμβους των εξάεδρων.



Εικόνα 11 : Επιφανειακός κόμβος μέσα στο εξάεδρο.

Στην Εικόνα 9 όλα τα εξάεδρα, που βρίσκονται μέσα στο χωρίο, τέμνονται με τα επιφανειακά πλέγματα και για το λόγο αυτό στον επόμενο κύκλο υποδιαιρέσεων θα υποδιαιρεθούν. Στην Εικόνα 12 απεικονίζεται το αποτέλεσμα αυτό του κύκλου. Φαίνεται μόνο ο χώρος που οι κόμβοι έχουν την y διάσταση μικρότερη από 620.



Εικόνα 12: Άποψη των εξάεδρων μετά την τέταρτη υποδιαίρεση.

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 12, υπάρχουν αρκετά εξάεδρα που δεν τέμνουν καμία γεωμετρία και θα έχουν καταχωρηθεί μέσα στο χώρο διακριτοποίησης. Σε αυτά τα εξάεδρα πρέπει να επιβληθεί ακόμα ένας έλεγχος για να αποφασιστεί αν θα υποδιαιρεθούν τελικά.

Μέτρηση πυκνότητας του εξάεδρου

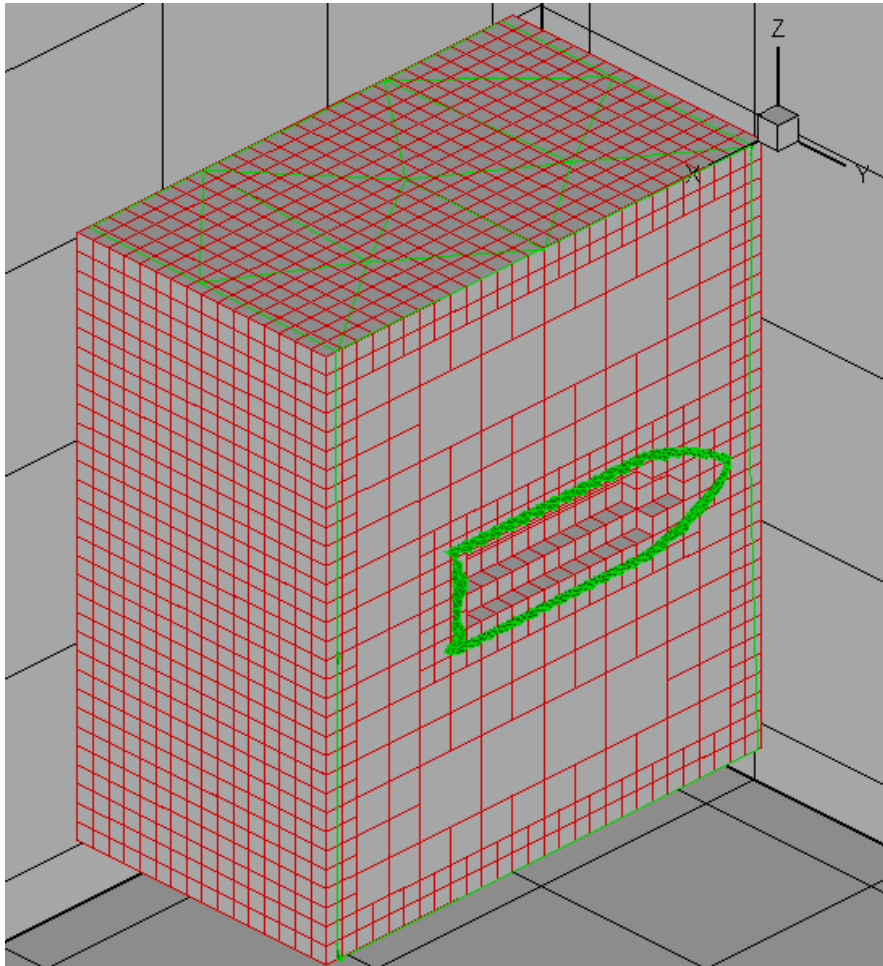
Με την χρήση των πηγών πύκνωσης μπορούμε να πυκνώσουμε (υποδιαιρώντας τα εξάεδρα) το πλέγμα σε χώρους που επιθυμούμε μακριά από τις γεωμετρίες που ορίζουν το χωρίο. Ο χρήστης πρέπει να ορίσει τις συντεταγμένες της πηγής καθώς και την ένταση της.

Για κάθε νέο κόμβο υπολογίζεται η επίδραση της πηγής πάνω του. Συγκεκριμένα η ένταση του κόμβου είναι η ένταση της πηγής διαιρεμένη με την περιφέρεια της σφαίρας με κέντρο την πηγή και ακτίνα την απόσταση του κόμβου από την πηγή. Έτσι στους κόμβους, που είναι μακρύτερα από αυτήν, η πηγή έχει μικρότερη επίδραση. Εάν υπάρχουν περισσότερες πηγές η ένταση του κόμβου είναι το άθροισμα όλων των επιδράσεων σε αυτόν.

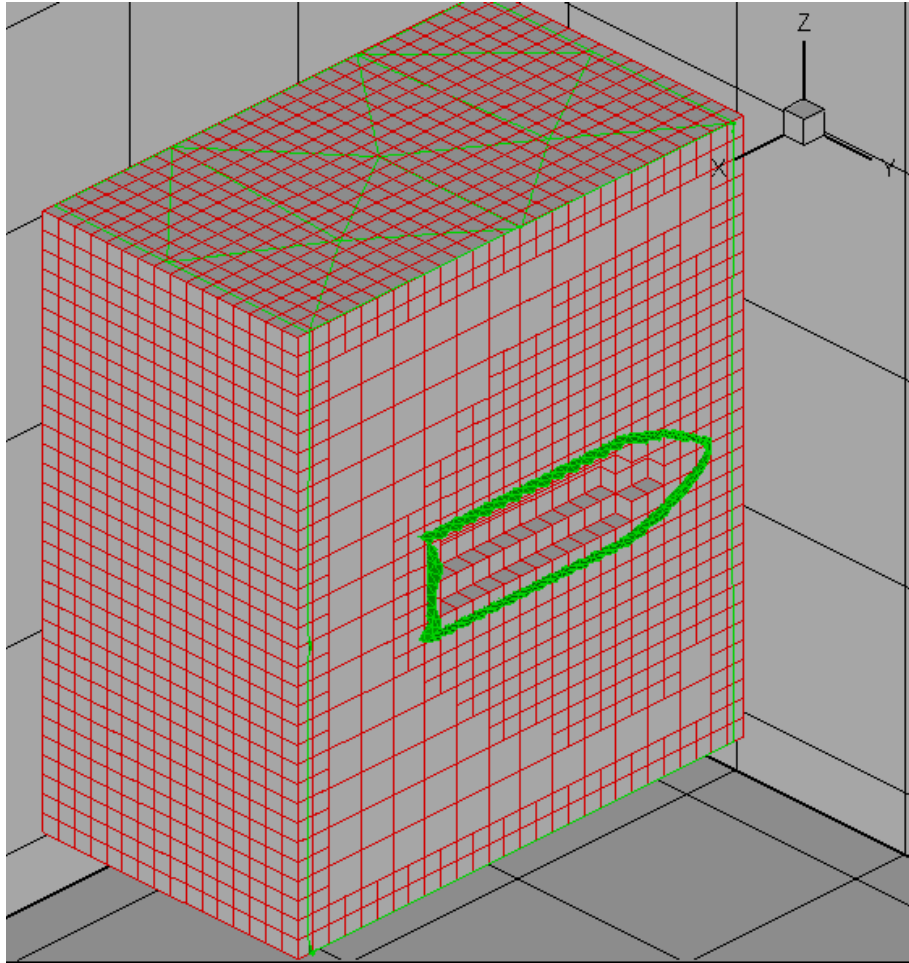
Αν η θέση του εξάεδρου δεν δείχνει για τον αν πρέπει να υποδιαιρεθεί ή όχι τότε πρέπει να αποφασιστεί η επίδραση της πηγής έντασης σε αυτό. Η έντασή του εξάεδρου είναι η μέση τιμή των εντάσεων των κόμβων του. Στην συνέχεια συγκρίνεται ο όγκος του με την έντασή του και αν ο όγκος είναι μεγαλύτερος τότε το εξάεδρο πρέπει να υποδιαιρεθεί.

Στην Εικόνα 13 εικονίζεται ο διακριτοποιημένος χώρος της Εικόνας 9 μετά τον έκτο κύκλο υποδιαίρεσεων. Δηλώνοντας μία πηγή με συντεταγμένες

$x=500$, $y=300$ και $z=600$ (στην Εικόνα 5 φαίνονται οι συντεταγμένες του εσωτερικού συνόρου) έχουμε το αποτέλεσμα τις Εικόνας 14. Είναι φανερό η πύκνωση που προκαλεί η πηγή. Συγκεκριμένα, στο παράδειγμα της Εικόνας 13 έχουν δημιουργηθεί 17737 εξάεδρα ενώ στην εικόνα 14 με την χρήση της πηγής έχουν δημιουργηθεί 71177 εξάεδρα.



Εικόνα 13 : Άποψη της έκτης υποδιαίρεσης χωρίς παρουσία πηγής πύκνωσης.

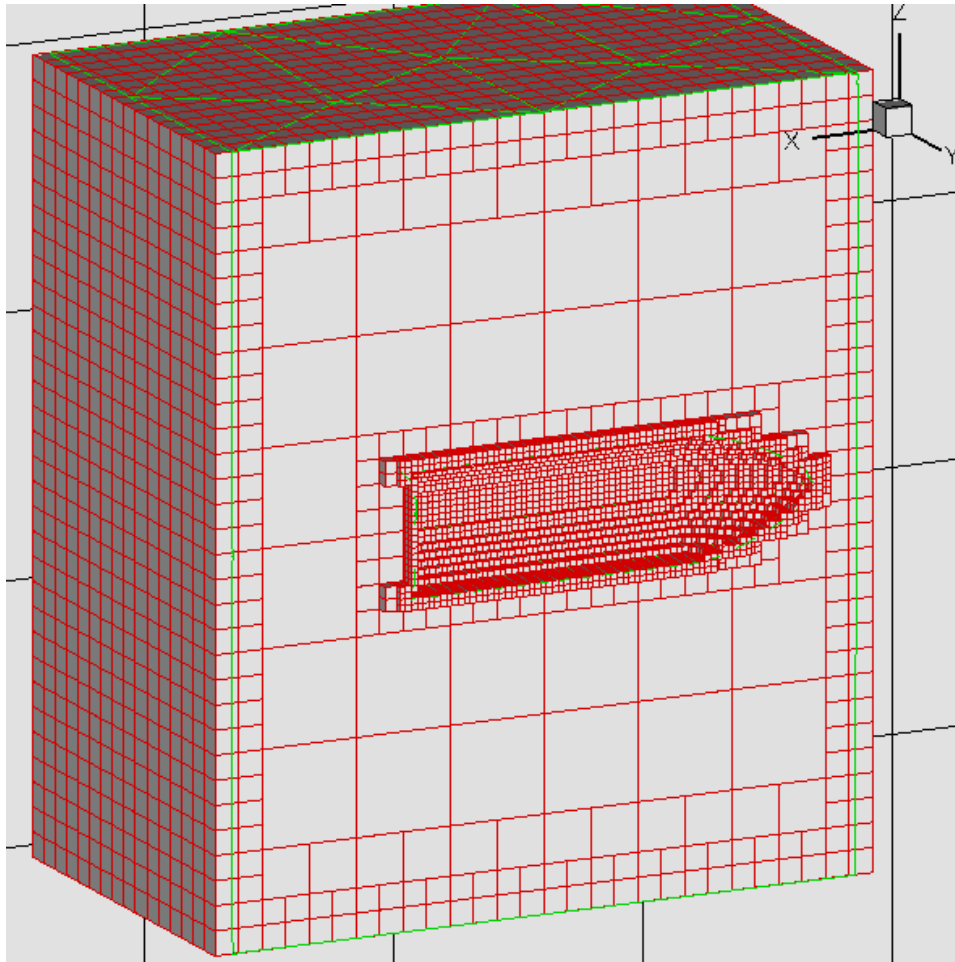


Εικόνα 14 : Άποψη της έκτης υποδιαίρεσης με χρήση πηγής πύκνωσης.

3.1.5 Εξισορρόπηση της δομής octree

Πριν ξεκινήσουν η διαδικασίες σε κάθε κύκλο υποδιαίρεσης το πλέγμα εξετάζεται αν είναι ισορροπημένο. Με τον όρο ισορροπημένο εννοούμε τα διπλανά εξάεδρα να μην διαφέρουν στο μέγεθος πάνω από ένα στάδιο υποδιαίρεσης. Αν δεν ισχύει αυτή η προϋπόθεση τότε παρατηρείται ένα μη ομαλό πλέγμα. Ο αλγόριθμος εξισορρόπησης εξετάζει αν υπάρχουν τέτοιες διαφορές, αν ναι τότε προχωρά σε χαρακτηρισμό των εξάεδρων (που θα ισορροπήσουν το πλέγμα) σε υποψήφια προς υποδιαίρεση.

Στην Εικόνα 15 εικονίζεται η όγδοη υποδιαίρεση του χώρου της εικόνας 6, έχοντας απενεργοποιήσει τις διαδικασίες εξισορρόπησης τους πλέγματος.

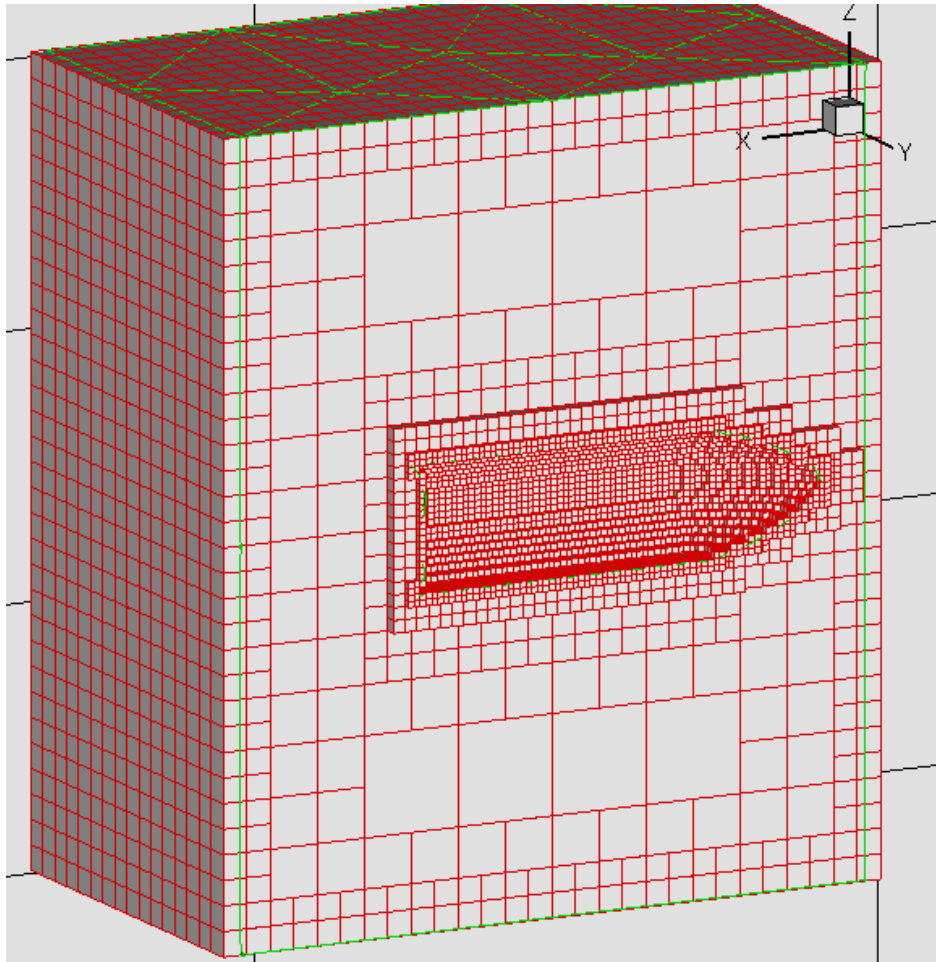


Εικόνα 15 : Αποψη της όγδης υποδιαίρεσης χωρίς εξισορρόπηση του πλέγματος.

Είναι φανερό ότι το πλέγμα παρουσιάζει έντονες διαφοροποιήσεις του μεγέθους των στοιχείων του. Αυτό είναι κακό για την ποιότητα της λύσης ενός αλγορίθμου επίλυσης ροής, που θα χρησιμοποιούσε αυτό το πλέγμα. Ο ακόλουθος ψευδοκώδικας μπορεί να αναγνωρίζει καταστάσεις, στις οποίες το πλέγμα δεν θα είναι ισορροπημένο.

1. Για κάθε εξάεδρο ($1 \rightarrow n$)
2. Αν πρόκειται να υποδιαιρεθεί
3. Βρες ποίο παιδί είναι και έλεγξε τους ανάλογους γείτονες
4. Αν υπάρχουν και δεν έχουν υποδιαιρεθεί τότε καταχώρησέ τους για υποδιαίρεση σε αυτόν τον κύκλο

Με την εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου το πλέγμα μπορεί να ισορροπηθεί. Στην Εικόνα 16 απεικονίζετε η όγδη υποδιαίρεση του χώρου της Εικόνας 6, έχοντας ενεργοποιήσει τις διαδικασίες εξισορρόπησης τους πλέγματος, όπου διακρίνονται εμφανώς οι διαφορές με την Εικόνα 15, χωρίς εξισορρόπηση.



Εικόνα 16 : Άποψη της όγδοης υποδιαίρεσης με εξισορρόπηση του πλέγματος.

3.1.6 Υποδιαίρεση των εξάεδρων με βάση την επιφανειακή καμπυλότητα

Έως τώρα είδαμε ότι αν ένα εξάεδρο τέμνει την γεωμετρία τότε κατατάσσεται για υποδιαίρεση. Ο χρήστης δηλώνοντας την μεταβλητή $R_{\max}$ μπορεί να καθορίσει πόσες φορές θα πραγματοποιηθούν τέτοιες υποδιαιρέσεις. Είναι χρήσιμο να μπορούμε να προκαλέσουμε περαιτέρω υποδιαιρέσεις σε περιοχές της γεωμετρίας με έντονη καμπυλότητα. Αυτό γίνεται με τον υπολογισμό των γωνιών θ και φ .

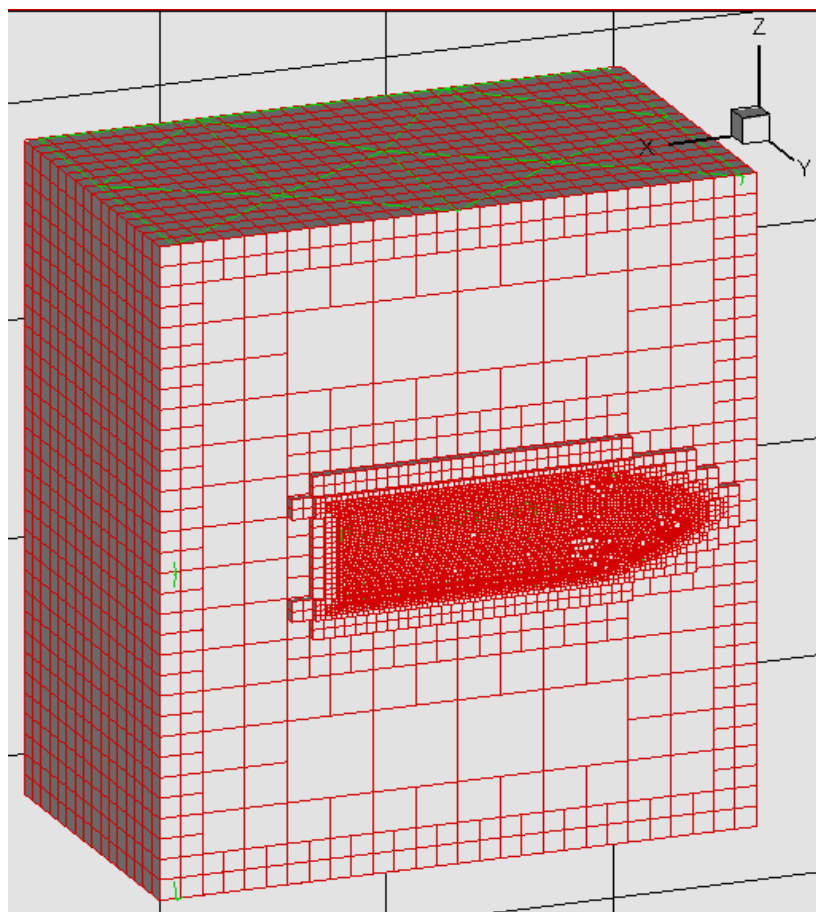
Ο αλγόριθμος όταν θα τελειώσει ο κύκλος των υποδιαιρέσεων $R_{\max}$, αν του έχει ζητηθεί να πραγματοποιήσει μερικούς κύκλους υποδιαιρέσεων χρησιμοποιώντας την καμπυλότητα της γεωμετρίας, υπολογίζει μια λίστα με τα τρίγωνα που τέμνει κάθε εξάεδρο.

Για τον υπολογισμό της λίστα χρησιμοποιούνται ο έλεγχος τομής ακμών του εξάεδρου με τρίγωνο και ο έλεγχος σημείου τριγώνου μέσα σε εξάεδρο. Επίσης ελέγχονται και οι τομές των ακμών του τριγώνου με τις έδρες του εξάεδρου. Αυτή η διαδικασία μας δίνει για κάθε εξάεδρο τη λίστα με τα τρίγωνα που τέμνει.

Στην συνέχεια υπολογίζονται για αυτά τα εξάεδρα οι γωνίες θ και φ με βάση την διαδικασία του υποκεφαλαίου 2.1.7. Αν ένα εξάεδρο τέμνει μόνο ένα τρίγωνο η γωνία θ δεν υπολογίζεται. Τα εξάεδρα που θα υπερβούν την γωνία που έχουμε θέσει ως κατώφλι κατατάσσονται για υποδιαίρεση.

Τα παιδιά τους θα ελεγχθούν για την θέση τους σε σχέση με τις γεωμετρίες που αποτελούν το χωρίο. Αυτά που τέμνουν την επιφάνεια θα ελεγχθούν για το ποιά τρίγωνα τέμνουν με βάση την λίστα του πατέρα τους. Η διατήρηση αυτής της λίστας είναι απαραίτητη, καθώς οι έλεγχοι αυτού του τύπου είναι χρονοβόροι σε σχέση με τους ελέγχους θέσης. Με την δικιά του λίστα τριγώνων υπολογίζονται οι γωνίες που αντιστοιχούν στο εξάεδρο.

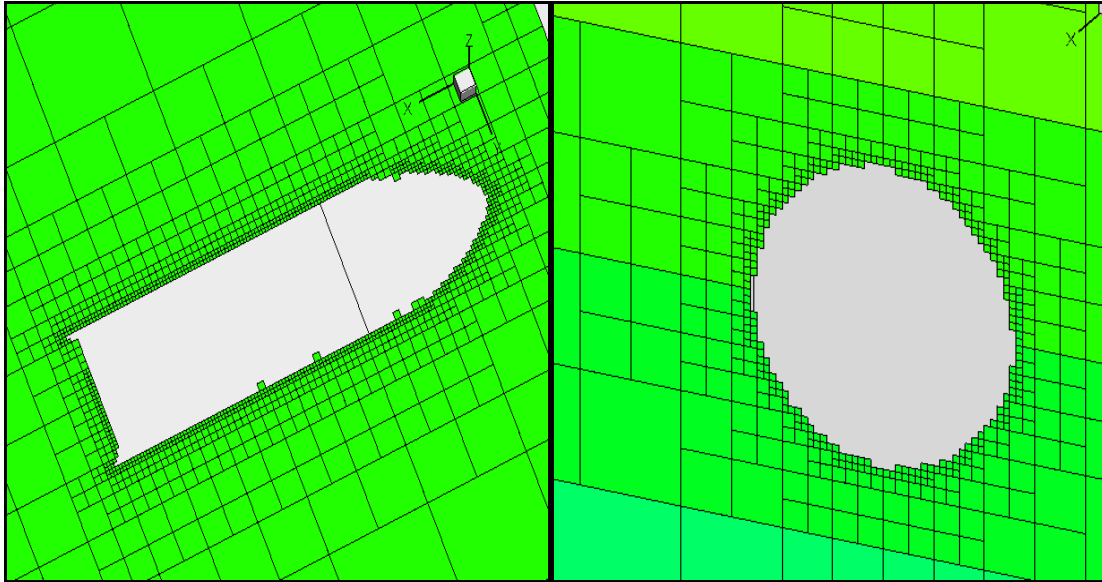
Ο έλεγχος εξισορρόπησης των εξάεδρων είναι ίδιος με αυτόν που χρησιμοποιείται στην κανονική διαδικασία. Η παραπάνω διαδικασία δημιουργεί πλέγματα παρόμοιου μεγέθους, σε σχέση με τα πλέγματα που θα υποδιαιρεθούν μόνο με την κανονική διαδικασία, αλλά το άθροισμα των κύκλων υποδιαιρέσεων είναι το ίδιο. Το πρόβλημα είναι ότι εξαρτάται από την ποιότητα του επιφανειακού πλέγματος, με αποτέλεσμα όπως φαίνεται και στην Εικόνα 17, εξάεδρα που θα αναμέναμε να έχουν υποδιαιρεθεί να μην υποδιαιρούνται.



Εικόνα 17 : Άποψη πλέγματος μετά το πέρας της διαδικασίας.

Στην Εικόνα 17 απεικονίζεται το διακριτοποιημένο χωρίο μετά την ένατη συνολική υποδιαίρεση. Στο χωρίο έχουν υποβληθεί 6 κύκλοι κανονικών υποδιαιρέσεων και τρεις με βάση την καμπυλότητα. Στην εικόνα 18β φαίνεται μία φέτα του πλέγματος για $x=650$. Όμως στην Εικόνα 18α φαίνεται ο

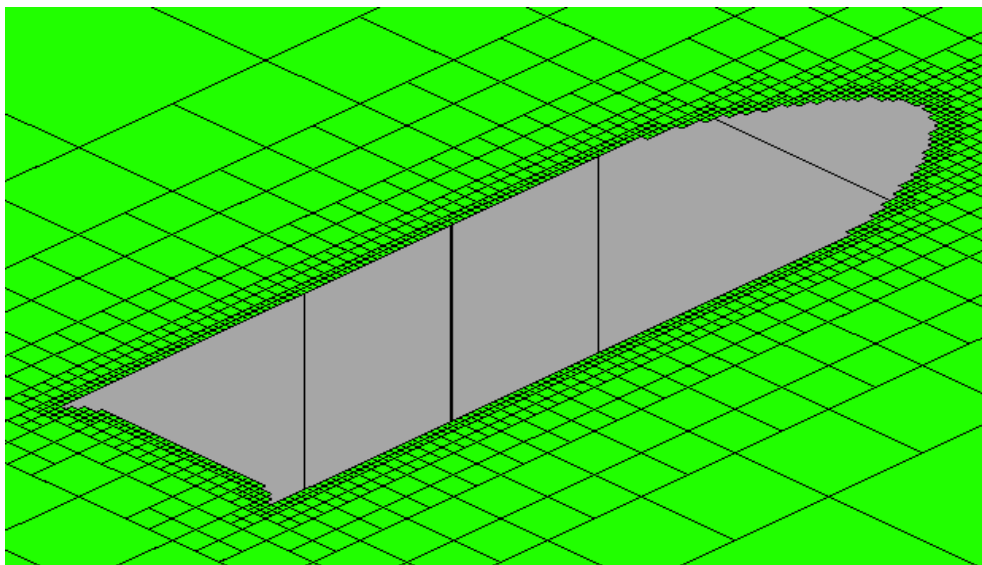
περιορισμός της συγκεκριμένης μεθόδου, καθώς τα επιφανειακά εξάεδρα που δεν έχουν υποδιαιρεθεί θα έπρεπε κανονικά να υποδιαιρεθούν. Όμως οι γωνίες που υπολογίζονται δεν το επιβάλλουν αυτό.



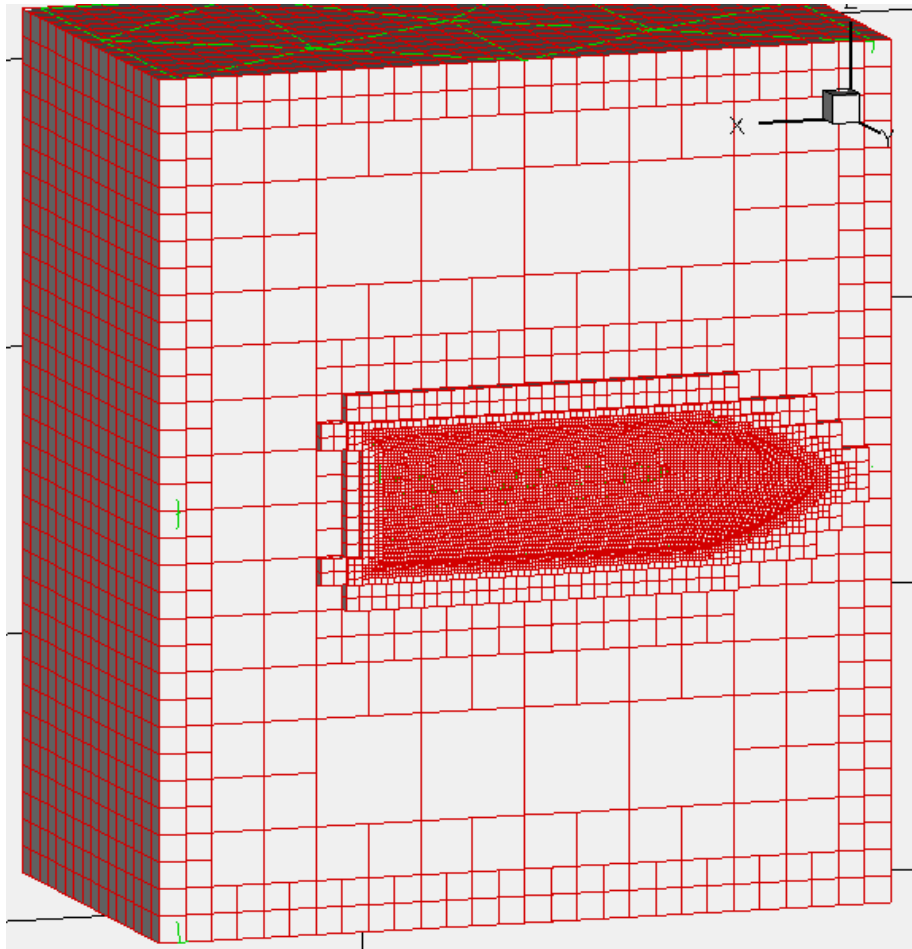
Εικόνα 18α : Άποψη πλέγματος z slice.

Εικόνα 18β : Άποψη πλέγματος x slice.

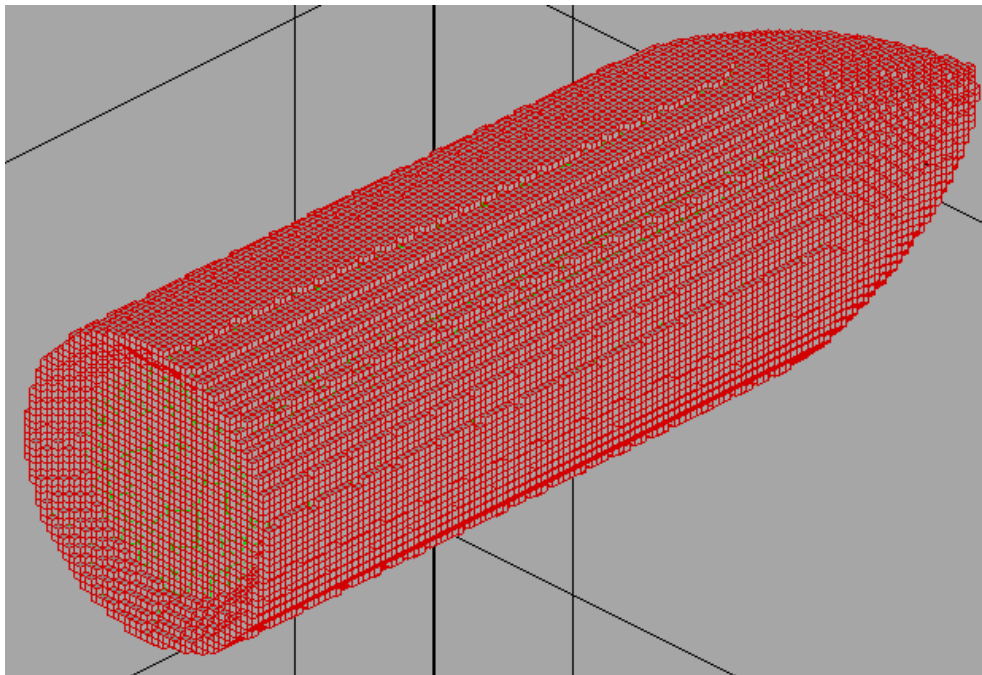
Μια κανονική υποδιαίρεση εννέα κύκλων θα δημιουργούσε το πλέγμα που απεικονίζεται στις παρακάτω Εικόνες 19, 20 και 21. Στην Εικόνα 19 φαίνεται η τομή του πλέγματος για $y=620$, στην Εικόνα 20 φαίνεται μία φέτα από το πλέγμα για $z=626$ και στην Εικόνα 21 απεικονίζεται άποψη του εξαεδρικού πλέγματος πάνω στην επιφάνεια του στερεού.



Εικόνα 19 : Άποψη πλέγματος όπου διακρίνεται η πύκνωση των στοιχείων γύρω από τη γεωμετρία.



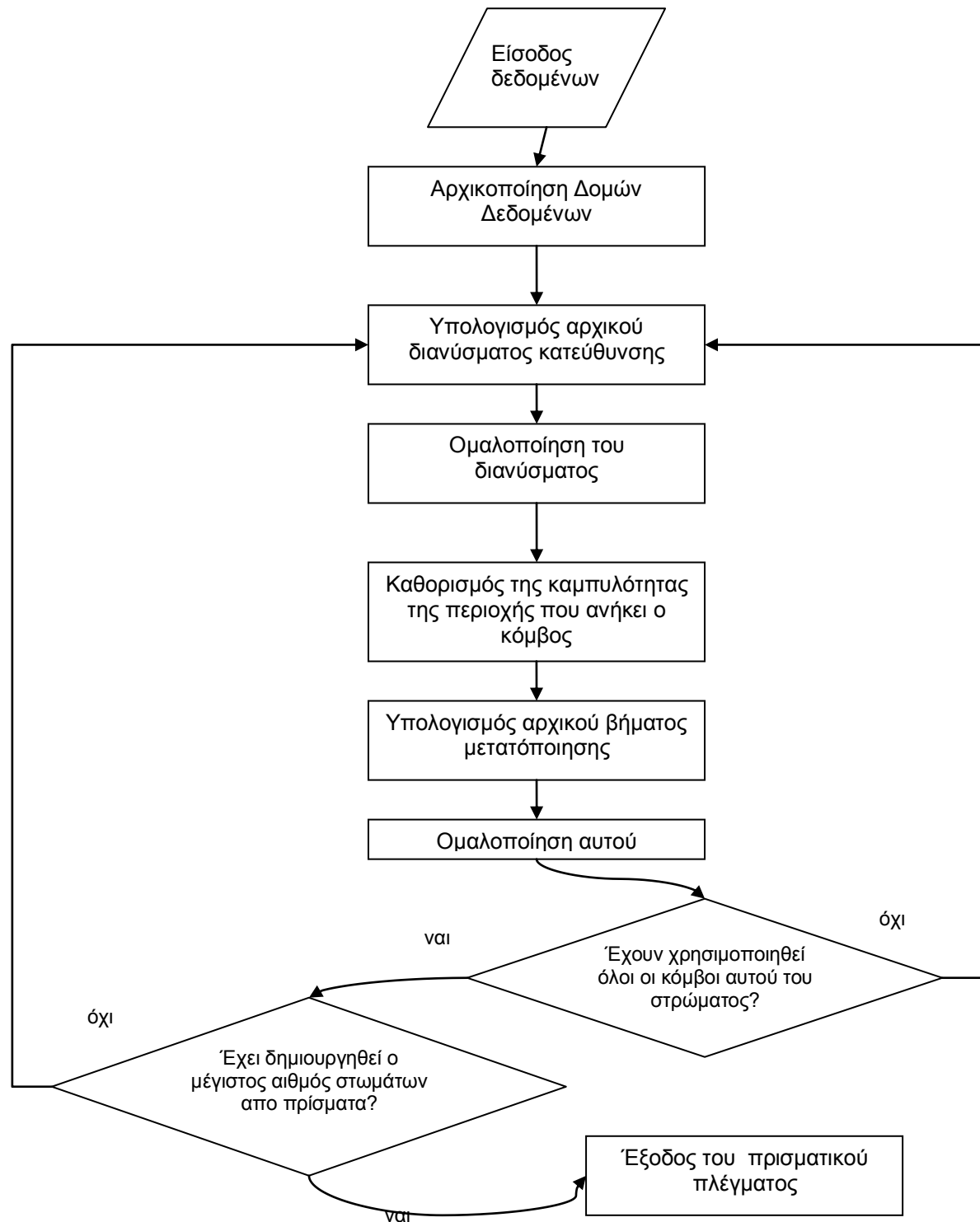
Εικόνα 20 : Άποψη πλέγματος σε τομή $y=620$.



Εικόνα 21 : Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος στην επιφάνεια του στερεού.

3.2 Ο αλγόριθμος δημιουργίας πρισμάτων

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο που δημιουργεί το πλέγμα από πρισματικά στοιχεία. Στο Σχήμα 17 παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής του αλγόριθμου.



Σχήμα 17: Διάγραμμα ροής του αλγορίθμου παραγωγής πρισματικών στοιχείων.

3.2.1 Δεδομένα εισόδου

Το μοναδικό δεδομένο εισόδου, που απαιτείται από τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε, είναι ένα επιφανειακό πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, που συνιστά την οριακή επιφάνεια του υπό διακριτοποίηση χωρίου. Ο αλγόριθμος αντιμετωπίζει είτε κυρτούς, είτε μη κυρτούς χώρους. Επίσης είναι απαραίτητη η αρίθμηση των κόμβων κάθε τριγωνικού στοιχείου, ώστε το κάθετο διάνυσμα σε ένα τρίγωνο να έχει φορά προς το εσωτερικό του χωρίου. Το επιφανειακό πλέγμα της Εικόνας 5 θα χρησιμοποιηθεί στις παρακάτω εικόνες.

Ο χρήστης είναι απαραίτητο να καθορίσει μερικές παραμέτρους του αλγορίθμου. Συγκεκριμένα, πρέπει να δηλώσει τον αριθμό των στρωμάτων που θα δημιουργηθούν, το βασικό βήμα μετατόπισης και τον παράγοντα st της εξίσωσης 2.2, καθώς και δύο παράγοντες που αφορούν στη διαφορά του βήματος από κυρτές και κοίλες περιοχές. Τέλος πρέπει να δηλωθούν οι παράγοντες που εξασφαλίζουν την ποιότητα του πλέγματος.

Το πλέγμα χρειάζεται αυτές τις μεταβλητές λόγω της μη-δομημένης φύσης του και είναι φανερό ότι η ποιότητα και η χρησιμότητα του πλέγματος εξαρτάται από αυτές τις μεταβλητές. Επειδή τις ορίζει ο χρήστης θα πρέπει να διαθέτει εμπειρία για το πώς θα επηρεάσουν το πλέγμα.

3.2.2 Η διαδικασία

Για τη δημιουργία πρισμάτων είναι βασικό να καθοριστούν οι σωστοί άξονες κατεύθυνσης. Η βασική προϋπόθεση είναι ότι ο νέος κόμβος θα είναι ορατός από όλα τα τρίγωνα που έχουν τον αρχικό κόμβο. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα κατεύθυνσης θα πρέπει να σχηματίζει με το κάθετο διάνυσμα των τριγώνων γωνίες μικρότερες των 90° μοιρών. Η δεύτερη προϋπόθεση είναι η ορθοκανονικότητα. Παρόλο που είναι επιθυμητή δεν θα πρέπει να παραβιαστεί η πρώτη προϋπόθεση.

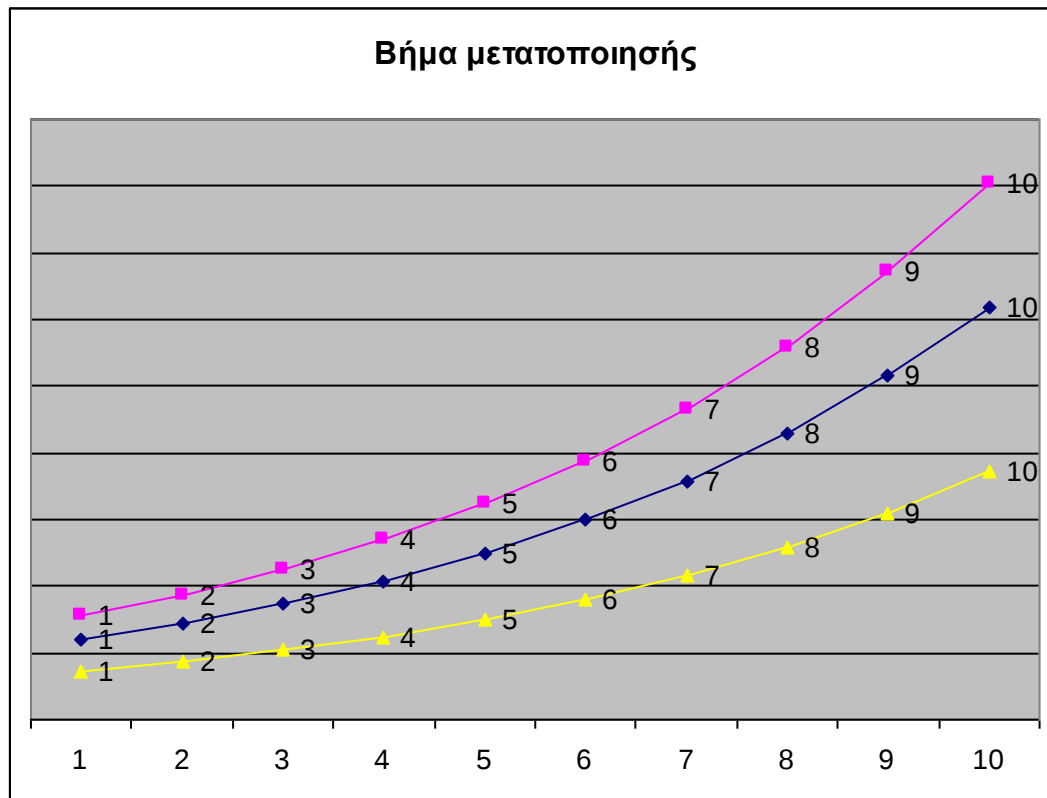
Ως αρχικό διάνυσμα κατεύθυνσης επιλέγεται η μέση τιμή των κάθετων διανυσμάτων των τριγώνων και για την ικανοποίηση των προϋποθέσεων εφαρμόζεται ομαλοποίηση με την σχέση 2.1. Μετά τις πέντε πρώτες επαναλήψεις το διάνυσμα που υπολογίζεται ελέγχεται για την εγκυρότητα του (έλεγχος ορατότητας) και αν δεν την καλύπτει το διάνυσμα απορρίπτεται και ο αλγόριθμός προχωράει στην επόμενη επανάληψη.

Τα διανύσματα που είναι έγκυρα ελέγχονται για την ικανοποίηση του δεύτερου κριτηρίου και επιλέγεται το διάνυσμα που δίνει τη μικρότερη γωνία θ_{max} . Για την ικανοποίηση της ομαλής διαφοροποίησης μεταξύ δύο διαδοχικών στρωμάτων ελέγχεται η διαφορά γωνίας μεταξύ του διανύσματος κατεύθυνσης αυτού του κόμβου και του διανύσματος κατεύθυνσης με τον οποίο παράχθηκε ο κόμβος.

Ένας στόχος του πρισματικού πλέγματος είναι να εξομαλύνει την καμπυλότητα της επιφανειακής γεωμετρίας. Επίσης είναι απαραίτητο τα στρώματα που είναι κοντά στην γεωμετρία να έχουν μικρό πάχος. Αυτό επηρεάζει το βήμα του κάθε στρώματος. Χρησιμοποιώντας τον τύπο 2.2 και θέτοντας $st=1.2$ παίρνουμε την μπλε καμπύλη του παρακάτω γραφήματος (Γράφημα 1). Στο γράφημα ο άξονας των y αντιστοιχεί σε κάθε στρώμα και ο

άξονας των x στις τιμές που παίρνει το βήμα. Όπως φαίνεται η σχέση 2.2 παράγει μέσα βήματα για κάθε στρώμα τα οποία αυξάνονται μη γραμμικά.

Η ανάγκη για εξομάλυνση της καμπυλότητας επιβάλλει την διαφοροποίηση του βήματος ανάλογα αν ο κόμβος βρίσκεται σε κυρτή η κοίλη περιοχή. Με την χρήση 2 συντελεστών ο αλγόριθμος μπορεί να διαφοροποιήσει το βήμα. Στο γράφημα με κίτρινο χρώμα απεικονίζεται η καμπύλη με τα μέσα βήματα των κυρτών περιοχών, ενώ με ροζ των αντίστοιχων κοίλων περιοχών.



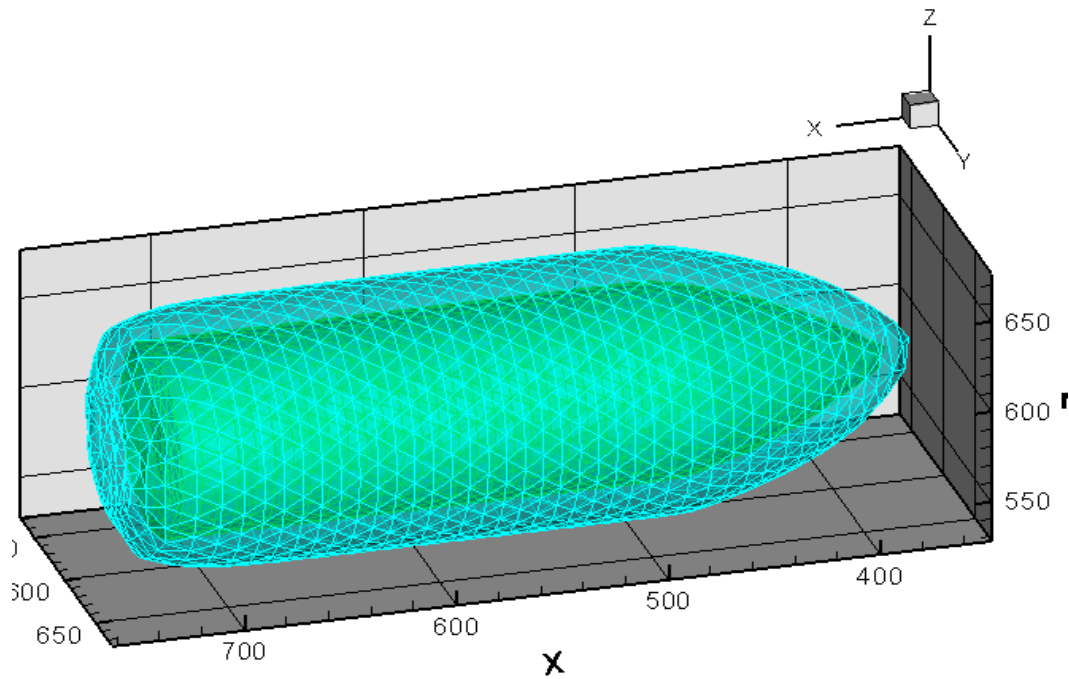
Γράφημα 1: Εκθετικές καμπύλες αύξησης του βήματος για 10 στρώματα.

Επειδή ο υπολογισμός του βήματος δεν παίρνει υπόψη του το μέγεθος της καμπυλότητας της περιοχής του κόμβου, το βήμα θα πρέπει να υποστεί μια εξομάλυνση παρόμοια με αυτήν του διανύσματος κατεύθυνσης. Η εξομάλυνση επιτρέπει την ομαλή μετάβαση από έναν κόμβο κυρτής περιοχής σε ένα κόμβο κοίλης.

Τέλος όλα τα βήματα μετατόπισης θα πρέπει να πληρούν το παρακάτω κριτήριο.

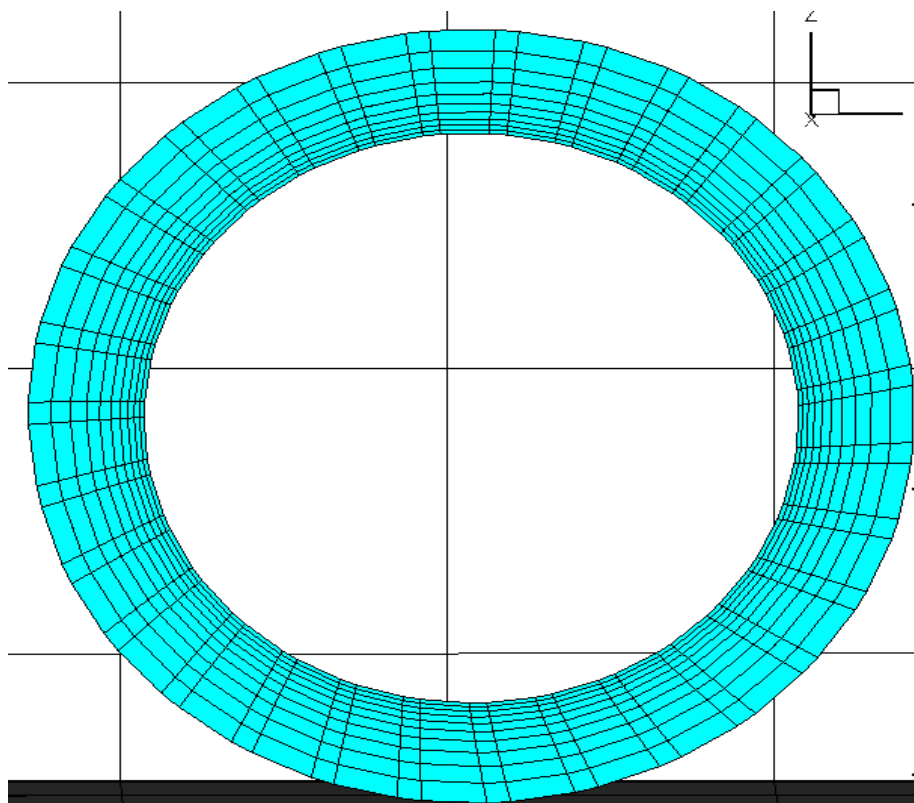
$$0.8\Delta n_{layer-1}^i \leq \Delta n_{layer}^i \leq 1.2\Delta n_{layer-1}^i$$

Η τήρηση του κριτηρίου επιτρέπει στην ομαλή διαφοροποίηση του βήματος μεταξύ δύο διαδοχικών στρωμάτων. Η διαδικασία έδωσε το πλέγμα που απεικονίζεται στις παρακάτω Εικόνες 22 έως 25.



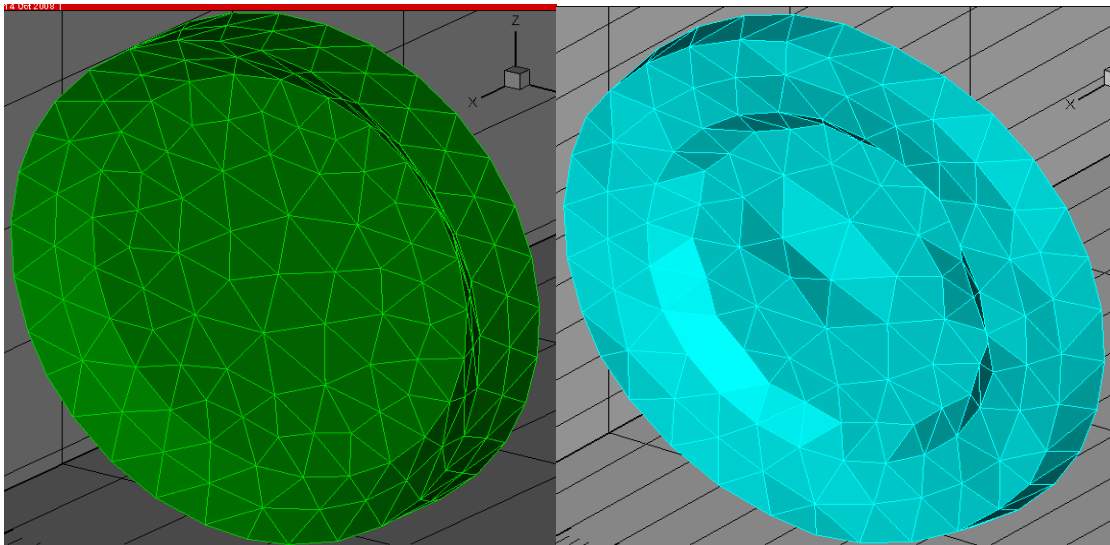
Εικόνα 22 : Πρισματικό πλέγμα.

Στην Εικόνα 22 παρατηρούμε το πρισματικό πλέγμα που παράχθηκε γύρω από το επιφανειακό πλέγμα της Εικόνας 5. Φαίνεται η διόγκωση του πλέγματός καθώς και η εξομάλυνση της καμπυλότητας. Στην Εικόνα 23 φαίνεται μία φέτα του πλέγματος για $x=550$. Η μη γραμμική αύξηση του βήματος μετατόπισης είναι φανερή.



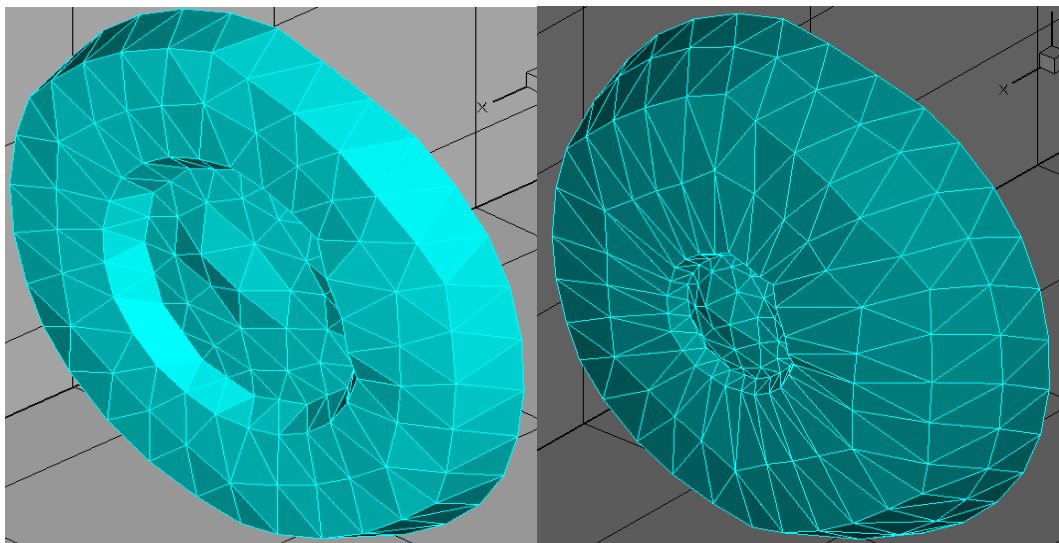
Εικόνα 23 : Τομή του πρισματικού πλέγματος.

Στην Εικόνα 24α απεικονίζεται το πίσω μέρος της γεωμετρίας της Εικόνας 5, ενώ στις Εικόνες 24β, 24γ και 24δ απεικονίζεται η προοδευτική εξομάλυνση της καμπυλότητας του πλέγματος.



Εικόνα 24α : Το πίσω μέρος της γεωμετρίας.

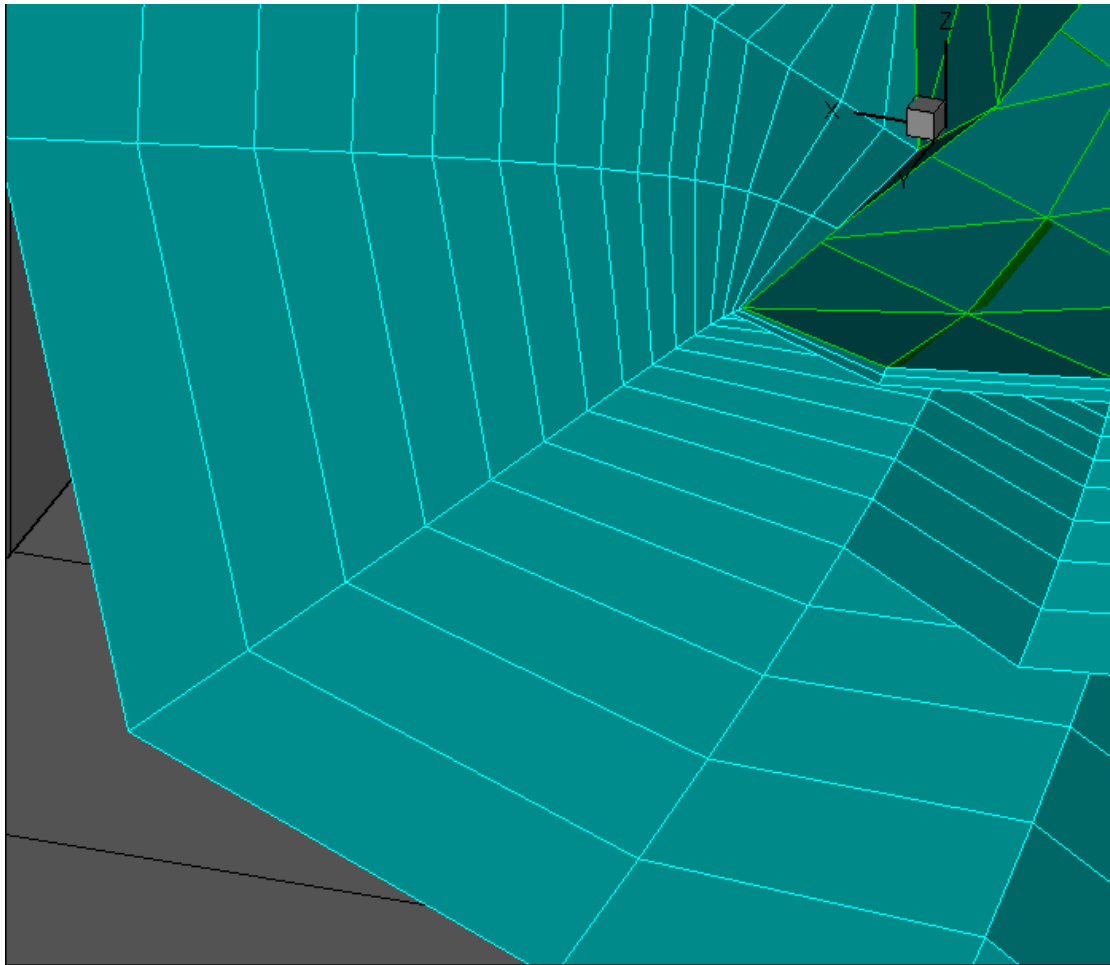
Εικόνα 24β : μετά από 5 στρώματα πρισμάτων.



Εικόνα 24γ : μετά από 10 στρώματα πρισμάτων.

Εικόνα 24δ : μετά από 15 στρώματα πρισμάτων.

Τέλος, στην Εικόνα 25 παρουσιάζεται μία δύσκολη περίπτωση που αντιμετωπίστηκε. Η γεωμετρία σχηματίζει μια οξεία γωνία. Τα πρίσματα σε αυτόν τον κόμβο πρέπει να αυξάνονται πολύ λίγο σε σχέση με τους διπλανούς μέχρι να εξομαλυνθεί το πλέγμα στην περιοχή, κάτι που επιτυγχάνει ο αλγόριθμος.



Εικόνα 25: Οξεία γωνία της γεωμετρίας.

3.3 Ο αλγόριθμος δημιουργίας πυραμίδων

Όπως έχουμε αναφέρει, το εξαεδρικό και το πρισματικό πλέγμα θα ενωθούν με ένα πλέγμα από τετράεδρα να αποτελεί το συνδετικό στρώμα. Για να μπορούν τα τετράεδρα να ενωθούν με τα εξάεδρα είναι απαραίτητο να παρεμβληθούν πυραμίδες. Οι πυραμίδες με τετράγωνη βάση μπορούν να συνδεθούν με τα εξάεδρα και λόγω των τριγωνικών τους πλευρών μπορούν να συνδεθούν και με τα τετράεδρα.

Όπως φάνηκε και στον αλγόριθμό παραγωγής τετραέδρων πρώτα φτιάχνεται ένα αρχικό στρώμα από τετράεδρα πάνω στα πρίσματα και μετά δημιουργούνται τα πυραμιδικά στοιχεία. Το μοναδικό δεδομένο εισόδου, που ο αλγόριθμος χρειάζεται, είναι μία μεταβλητή για τον καθορισμό του χώρου από εξάεδρα που θα απενεργοποιηθούν. Εκτός από την μεταβλητή αυτή, λαμβάνεται υπόψη και το μέγεθος του πλέγματος από πρίσματα.

3.3.1 Η διαδικασία

Το πλέον βασικό στοιχείο των πυραμίδων είναι ο όγκος τους. Καθώς θέλουμε ομαλή μετάβαση των μεγεθών των στοιχείων του πλέγματος δίνεται

ιδιαίτερη βαρύτητα σε αυτό το χαρακτηριστικό. Να υπενθυμίσουμε ότι στην δημιουργία εξάεδρων η διάφορα μεταξύ δύο εξάεδρων μίας τάξης μεγέθους είναι αποδεκτή. Αυτή η διαφορά σημαίνει ότι το μικρότερο εξάεδρο θα έχει το $1/8$ του όγκου του μεγαλύτερου εξάεδρου.

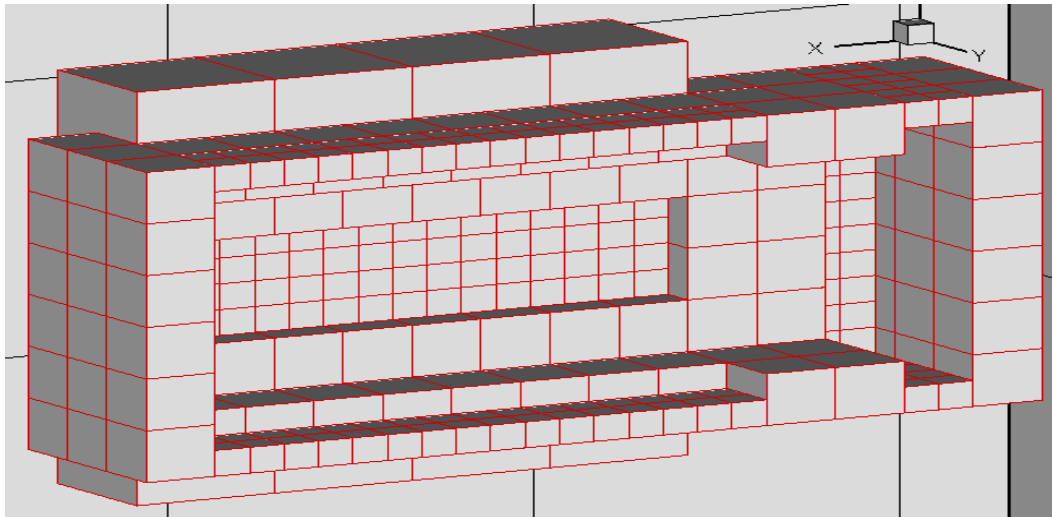
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η χρήση μιας πυραμίδας που έχει για βάση την πλευρά ενός εξάεδρου και για κορυφή το κέντρο βάρους του κύβου που η βάση της πυραμίδας είναι και έδρα του θα εξασφαλίσει την ομαλότητα του πλέγματος. Αυτό γιατί ο όγκος μιας τέτοιας πυραμίδας είναι ίσος με το $1/6$ του όγκου του κύβου στον οποίο περιέχεται. Εξασφαλίζοντας ότι το εξάεδρο που περικλείει την πυραμίδα και το γειτονικό του εξάεδρο, που θα είναι το όριο του εξαεδρικού πλέγματος, έχουν το ίδιο μέγεθος, επιτυγχάνει την ομαλή διαφοροποίηση του μεγέθους των στοιχείων του υβριδικού πλέγματος.

Ένα άλλο πλεονέκτημα με την χρήση τέτοιου τύπου πυραμίδας είναι η δυνατότητα καθορισμού κοινών πλευρών μεταξύ δύο γειτονικών πυραμίδων, χρησιμοποιώντας τις δομές γειννίας των εξάεδρων.

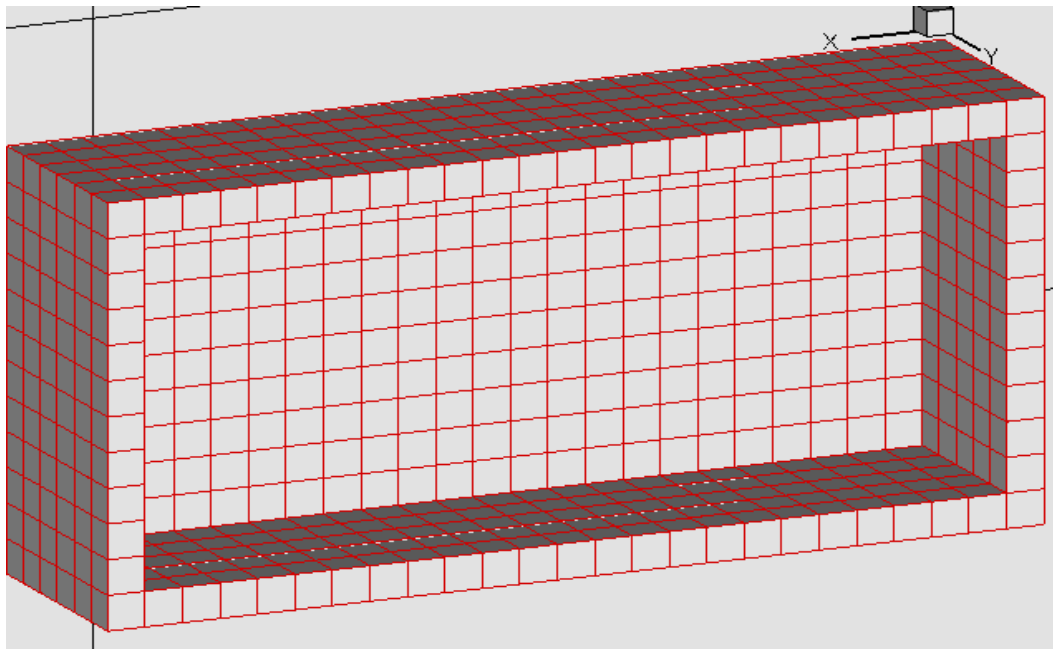
Υπολογίζοντας τα τετράεδρα πάνω στο τελευταίο στρώμα πρισμάτων μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο τους. Ο αλγόριθμος θα δημιουργήσει πυραμίδες με παρόμοιο όγκο. Όμως τα εξάεδρα, που αποτελούν το όριο του εξαεδρικού πλέγματος δεν έχουν όλα το ίδιο μέγεθος. Από αυτά καθορίζεται αυτό που θα δώσει επιθυμητό μέγεθος πυραμίδας. Αν αυτό δεν είναι δυνατό ο αλγόριθμός υπολογίζει τον όγκο εξάεδρων που δεν έχουν δημιουργηθεί ακόμα ή αν ο επιθυμητός όγκος είναι μεγαλύτερος βρίσκει ποιούς από τους προγόνους των εξάεδρων μπορεί να χρησιμοποιήσει αποτελεσματικά.

Στην περίπτωση που απαιτείται περαιτέρω διάσπαση η διαδικασία είναι παρόμοια με αυτήν της κλασσικής δημιουργίας εξάεδρων εκτός του ότι δεν χρειάζονται έλεγχοι θέσης σε σχέση με τη γεωμετρία. Αυτό μειώνει πολύ το χρόνο της διαδικασίας. Το υπόλοιπο εξαεδρικό πλέγμα διακριτοποιείται όταν είναι απαραίτητο για να διατηρηθεί η ισορροπία του μεγέθους των στοιχείων. Στις Εικόνες 26 και 27 παρουσιάζονται τα εξάεδρα, που θα αποτελέσουν τις βάσεις των πυραμίδων.

Αντίθετα, στην περίπτωση που απαιτείται η χρήση προγόνου για την επίτευξη του κατάλληλου μεγέθους τα εξάεδρα απενεργοποιούνται και χρησιμοποιούνται οι γονείς τους. Η συγκεκριμένη διαδικασία όμως μπορεί να προκαλέσει πρόβλημα, αφού καθώς το μέγεθος των εξάεδρων αυξάνει μπορεί αυτά να τέμνουν τον χώρο που θα έχει οριστεί για το τετραεδρικό πλέγμα και να μην του αφήνουν χώρο για να δημιουργηθεί σωστά. Οπότε είναι προτιμότερο να αποφεύγονται τέτοιες καταστάσεις.

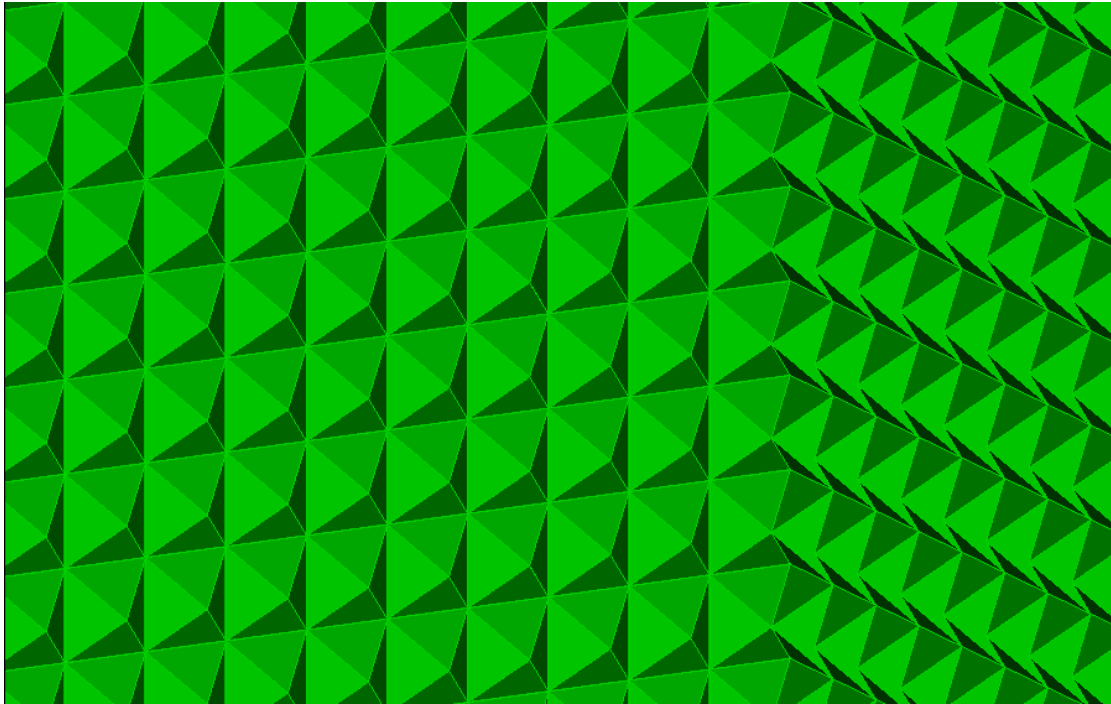


Εικόνα 26: Οι βάσεις των πυραμίδων πριν την επεξεργασία τους.

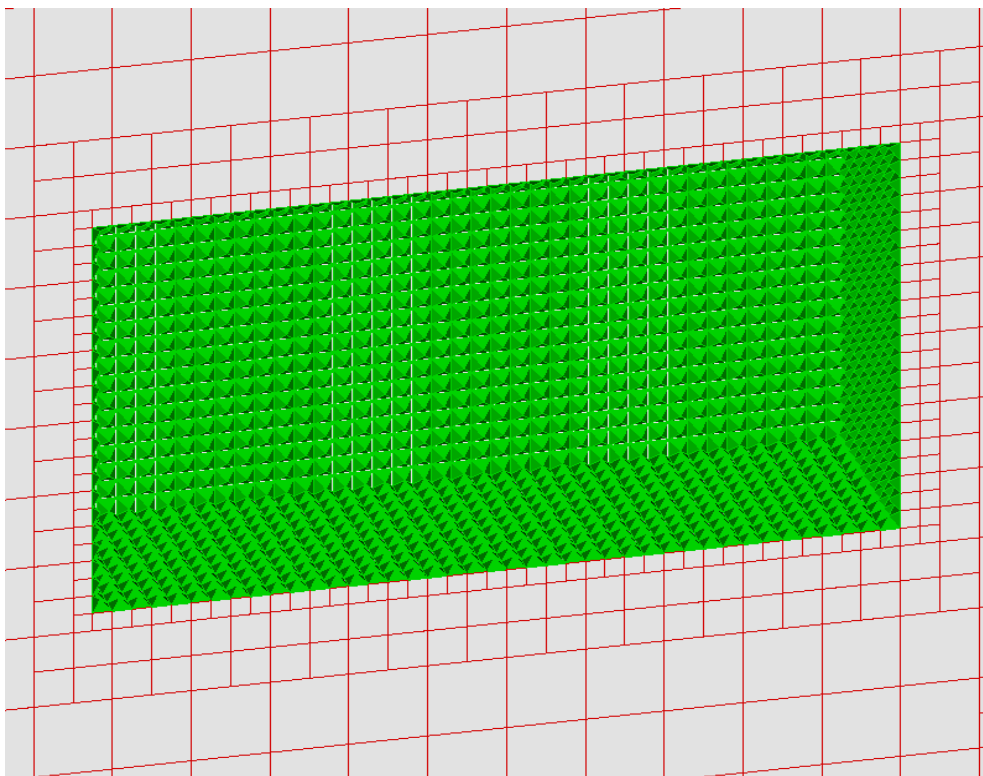


Εικόνα 27: Οι βάσεις των πυραμίδων μετά από επεξεργασία.

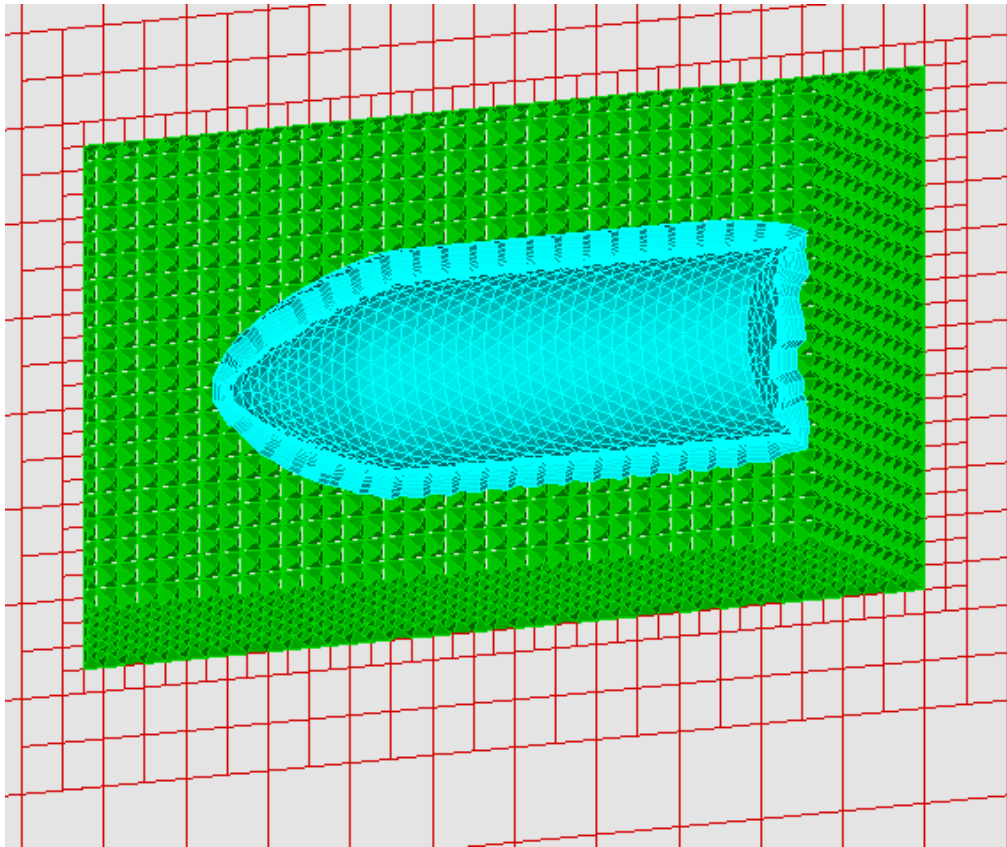
Μετά την τελική επεξεργασία των βάσεων των πυραμίδων ο αλγόριθμος προχωρά στην δημιουργία αυτών. Η διαδικασία είναι πιο απλή από τις άλλες και λόγω του δομημένου χαρακτήρα του πλέγματος πολύ εύκολο να ελεγχθεί. Όλες οι πυραμίδες έχουν ίδιο μέγεθος, το οποίο αποτρέπει την περίπτωση τομών. Θεωρώντας τις πυραμίδες σαν παιδιά των εξαέδρων που χρησιμοποιούν για βάση, μπορούμε εύκολα να χρησιμοποιήσουμε τις δομές γειτνίασης αυτών για να βρεθούν οι γειτονικές πυραμίδες, με τις οποίες έχουν κοινούς κόμβους. Στην Εικόνα 28 παρουσιάζεται ένα στρώμα πυραμίδων ενώ στην Εικόνα 29 παρουσιάζεται αυτό μαζί με το υπόλοιπο εξαεδρικό πλέγμα και στην Εικόνα 30 έχει προστεθεί και το πρισματικό πλέγμα που περικλείει την εσωτερική γεωμετρία.



Εικόνα 28: Κοντινή άποψη των πυραμίδων.



Εικόνα 29: Το στρώμα των πυραμίδων με το εξαεδρικό πλέγμα.



Εικόνα 30: Το στρώμα των πυραμίδων μαζί με το εξαεδρικό και το πρισματικό πλέγμα.

3.4 Ο αλγόριθμος δημιουργίας τετράεδρων

3.4.1 Δεδομένα εισόδου

Τα δεδομένα εισόδου του αλγορίθμου δημιουργίας τετραεδρικού πλέγματος εκτός από κάποιες παραμέτρους δεν δίνονται από τον χρήστη. Το τελευταίο στρώμα από ένα πρισματικό πλέγμα (Εικόνα 30) και το στρώμα από πυραμίδες αποτελούν τα σύνορα του χώρου διακριτοποίησης.

3.4.2 Αρχική επεξεργασία.

Το στρώμα των πυραμίδων δεν δημιουργεί την πιο ομαλή επιφάνεια για να ξεκινήσει η διαδικασία δημιουργίας τετράεδρων. Η ιδιαίτερη φύση του, που είναι εμφανής στην Εικόνα 28, μας αναγκάζει να εφαρμόσουμε μια αυστηρά ελεγχόμενη εφαρμογή της διαδικασίας δημιουργίας του πρώτου μετώπου των τετράεδρων. Βασική διαφορά από την κλασική διαδικασία είναι ότι η τελική μορφή του πλέγματός είναι γνωστή, αφού θα πρέπει να "γεμίσουν τα κενά μεταξύ των πυραμίδων:

- Δεν επιτρέπεται η δημιουργία νέων κόμβων

- Οι περιορισμοί, εκτός από των έλεγχο των τομών, είναι απενεργοποιημένοι.
- Υπολογίζονται μόνο 2 διαδοχικά μέτωπα. Το πρώτο, που αποτελείται από τα ελεύθερα τριγωνικά στοιχεία που αποτελούν τις πυραμίδες και το δεύτερο από τα ελεύθερα τριγωνικά στοιχεία των τετραέδρων που παράχθηκαν από το πρώτο μέτωπο. Για να ξεκινήσει το επόμενο μέτωπο πρέπει όλα τα στοιχεία του υπάρχοντος μετώπου να έχουν χρησιμοποιηθεί στη δημιουργία τετραέδρων.

Στην συνέχεια συνδυάζεται με τα τριγωνικά στοιχεία του τελευταίου στρώματος των πρισμάτων για να δώσουν τα δεδομένα εισόδου του αλγόριθμου δημιουργίας τετραέδρων.

3.4.3 Βασική επαναληπτική διαδικασία

Η βασική επαναληπτική διαδικασία δημιουργίας του τρισδιάστατου τετραεδρικού πλέγματος αρχίζει με τη σύσταση μετώπου τριγωνικών στοιχείων. Το μέτωπο είναι ουσιαστικά μια διατεταγμένη λίστα τριγώνων, τα οποία θα αποτελέσουν τις έδρες-βάσεις των νέων τετραέδρων. Σε αυτό συμμετέχει κάθε τρίγωνο, το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί για τη δημιουργία ενός νέου στοιχείου. Η διάταξή τους στη λίστα καθορίζεται σε σχέση με το μήκος του μικρότερου ύψους τους.

Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία δημιουργεί πολλά διαδοχικά, στατικά, μέτωπα. Κατά τη δημιουργία ενός νέου τετραέδρου αφαιρείται από το μέτωπο το τρίγωνο που αξιοποιήθηκε, αλλά δεν προστίθενται τα νέα τριγωνικά στοιχεία, που δημιουργούνται στο ενεργό μέτωπο. Αφού το μέτωπο εξαντληθεί, με τη εξέταση όλων των τριγωνικών του στοιχείων, συστήνεται το επόμενο μέτωπο από τα τρίγωνα που θεωρούνται 'ενεργά', δηλαδή όσα ανήκουν σε ένα, ή και σε κανένα τετράεδρο. Συνεπώς, η έννοια του προελαύνοντος μετώπου αντικαθίσταται από διαδοχικά μέτωπα.

Η τροποποίηση αυτή έχει βασιστεί στην πειραματική διαπίστωση ότι ο αλγόριθμος παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά στην περίπτωση των διαδοχικών μετώπων. Η διακριτοποίηση του χωρίου γίνεται ομαλά, από το εξωτερικό προς το εσωτερικό του, αποφεύγοντας γενικά τη δημιουργία εσωτερικών κοιλοτήτων στο προς διακριτοποίηση χωρίο. Η χρήση διαδοχικών μετώπων αφορά σε διακριτοποίηση διαδοχικών ομαλών χωρίων, που ισοδυναμούν με ανεξάρτητα επιφανειακά πλέγματα. Η προσέγγιση αυτή κρίνεται πειραματικά πλεονεκτικότερη έναντι της διακριτοποίησης ενός χωρίου που σταδιακά αναπτύσσει κοιλότητες στο εσωτερικό του.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα τρίγωνα, που συνιστούν ένα μέτωπο, διατάσσονται σύμφωνα με το μήκος του μικρότερου ύψους τους. Το πρώτο τρίγωνο του μετώπου έχει το μικρότερο ύψος συγκριτικά με τα αντίστοιχα ύψη όλων των τριγώνων. Ως αποτέλεσμα, ο αλγόριθμος αξιοποιεί πρώτα τα μικρότερα τρίγωνα, δημιουργώντας αντίστοιχα μικρά τετράεδρα. Θεωρητικά, ο αλγόριθμος μπορεί να λειτουργήσει και με μια τυχαία διάταξη των τριγώνων του μετώπου, αλλά πρακτικά είναι σκόπιμο να κατασκευάζονται πρώτα τα μικρότερα τετράεδρα, τα οποία συνήθως έχουν κρίσιμη σημασία για τη σταθερότητα του αλγόριθμου.

Εφόσον συσταθεί ένα μέτωπο σε οποιαδήποτε φάση του αλγορίθμου, εξάγεται ένα τριγωνικό στοιχείο από την κορυφή της λίστας, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί ως έδρα-βάση κατά τη δημιουργία ενός νέου τετραέδρου.

Για το υπό εξέταση τρίγωνο αρχικά εκτιμάται το ιδανικό τετράεδρο, που μπορεί να δημιουργηθεί, χρησιμοποιώντας ως βάση το παραπάνω τριγωνικό στοιχείο. Προφανώς, οι τρεις από τις τέσσερις κορυφές του τετραέδρου είναι οι τρεις κορυφές του τριγώνου, ενώ η τέταρτη κορυφή P_1 θα εντοπιστεί πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το μέσο του τριγώνου-βάση και είναι κάθετη σ' αυτή. Επιπλέον, η κορυφή P_1 , που αναζητείται, πρέπει να ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου-βάση, ώστε οι τρεις νέες ακμές, που θα δημιουργηθούν ταυτόχρονα με το νέο τετράεδρο, να έχουν ίσο μήκος. Πρακτικά, σε κάθε τρίγωνο πρέπει να υπολογιστεί η απόσταση που πρέπει να έχει το σημείο P_1 από τις κορυφές της βάσης. Η απόσταση αυτή λαμβάνεται ίση με το μέσο μήκος των ακμών, που γειτνιάζουν με το εκάστοτε τρίγωνο-βάση. Με την τακτική αυτή, οι τρεις νέες ακμές, που δημιουργούνται ταυτόχρονα με το νέο τετράεδρο, έχουν περίπου ίσο μήκος με τις κοντινές ακμές του πλέγματος, ώστε τελικά να εξασφαλίζεται η ομοιόμορφη διάδοση της επιφανειακής πύκνωσης στο εσωτερικό του πλέγματος.

Μετά τον εντοπισμό της βέλτιστης κορυφής P_1 , εντοπίζονται οι κόμβοι Q του πλέγματος, που είναι σχετικοί με τη δημιουργία του νέου τετραέδρου. Ο αλγόριθμος προσπαθεί να χρησιμοποιήσει έναν από τους υπάρχοντες κόμβους του πλέγματος, ώστε να δημιουργήσει ένα υποβέλτιστο τετράεδρο, αν βέβαια αυτό είναι εφικτό. Αν αυτό είναι αδύνατο, καταφεύγει στη δημιουργία και αξιοποίηση των σημείων P , αν βέβαια είναι επίσης εφικτό. Η λογική αυτή κρατάει σε χαμηλά επίπεδα το πλήθος των κόμβων που δημιουργούνται, οπότε διατηρεί σε χαμηλό επίπεδο και τις υπολογιστικές απαιτήσεις της εφαρμογής. Οι κόμβοι Q , που θεωρούνται σχετικοί με τη δημιουργία του νέου τετραέδρου, είναι οι κόμβοι του πλέγματος που βρίσκονται κοντά στο τρίγωνο-βάση. Πρακτικά, είναι οι κόμβοι που εντοπίζονται στο εσωτερικό μιας σφαίρας με κέντρο το κέντρο του τριγώνου και ακτίνα ίση με τη μεγαλύτερη απόσταση του σημείου P_1 από τις κορυφές του.

Τα παραπάνω σημεία αποτελούν υποψήφια σημεία, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως τέταρτη κορυφή του νέου τετραέδρου, ενώ εξαιρούνται από αυτά οι κορυφές του τριγώνου-βάσης. Για κάθε σημείο A που απομένει, σχεδιάζεται νοητά μια σφαίρα, που διέρχεται από αυτό και από την κορυφή του τριγώνου-βάση, που έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το κέντρο του. Το κέντρο A της σφαίρας εντοπίζεται στην ευθεία που ορίζεται από το σημείο P_1 και από το κέντρο του τριγώνου. Η θέση των κέντρων A των νοητών σφαιρών κατατάσσει τα αντίστοιχα υποψήφια σημεία Q . Το πρώτο σημείο Q της κατάταξης αντιστοιχεί στο κέντρο A που απέχει περισσότερο από το σημείο P_1 προς το κέντρο του τριγώνου.

Εφόσον καταταχθούν τα σημεία Q , στο τέλος της διατεταγμένης λίστας των υποψηφίων σημείων προστίθενται τα σημεία P . Τα σημεία αυτά, ένα εκ των οποίων είναι και το σημείο P_1 , είναι ισαπέχοντα σημεία, που τοποθετούνται στο τμήμα που ενώνει το P_1 και το κέντρο του τριγώνου-βάση. Στην παρούσα εφαρμογή, πέραν του P_1 εντοπίζεται και χρησιμοποιείται ένα μόνο ακόμη σημείο P , το P_2 , το οποίο τοποθετείται στην ευθεία που περιγράφεται παραπάνω, αλλά βρίσκεται κοντά στο σημείο P_1 . Ο λόγος που περνούμε μόνο ένα ακόμα σημείο είναι ότι τα υπόλοιπα σημεία P μπορούν να προκαλέσουν τη δημιουργία παραμορφωμένων τετραέδρων και ασυνήθιστα μικρών τριγωνικών

στοιχείων. Το αποτέλεσμα είναι η αδικαιολόγητη και ανεπιθύμητη πύκνωση του πλέγματος, που, υπό συνθήκες, θέτει σε κίνδυνο τη σταθερότητα του αλγορίθμου.

Εφόσον συσταθεί πλήρως η διατεταγμένη λίστα των υποψηφίων κορυφών του νέου τετραέδρου, η διαδικασία προχωρά στην επιλογή ενός από αυτά και στη δημιουργία του νέου στοιχείου [7].

3.4.4 Σύσταση διαδοχικών μετώπων

Η βασική διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε ένα τρίγωνο του τρέχοντος μετώπου, δημιουργώντας κάθε φορά ένα νέο τετράεδρο, εφόσον αυτό είναι έγκυρο. Το πρώτο μέτωπο, που χρησιμοποιεί η διαδικασία, αποτελείται από τα τριγωνικά στοιχεία των πυραμίδων και της ελεύθερης επιφάνειας του τελευταίου στρώματος πρισμάτων.

Όταν ολοκληρωθεί η εξέταση όλων των τριγώνων ενός μετώπου, δημιουργείται το επόμενο από όλα τα τρίγωνα που αποτελούν έδρα μόνο ενός τετράεδρου. Τα στοιχεία αυτά είναι τα τρίγωνα που δημιουργήθηκαν σε προηγούμενο μέτωπο και δεν ανήκουν σε δύο τετράεδρα, ή δεν ανήκουν σε κανένα τετράεδρο, εφόσον είναι τρίγωνα του αρχικού επιφανειακού πλέγματος.

Η διαδικασία συνεχίζεται με την εξέταση των στοιχείων του νέου μετώπου. Κατά τη σύσταση διαδοχικών μετώπων επανεξετάζονται τριγωνικά στοιχεία, που ήδη έχουν εξεταστεί μία ή περισσότερες φορές, χωρίς να ήταν εφικτή η δημιουργία ενός τετράεδρου με βάση τα εν λόγω. Σε κάθε επανεξέταση τα τρίγωνα αντιμετωπίζονται με χαλαρότερους περιορισμούς, όπως θα εξηγηθεί στη συνέχεια [7].

3.4.5 Περιορισμοί

Η εγκυρότητα ενός νέου τετράεδρου διασφαλίζει ότι τα νέα τρίγωνα, που δημιουργούνται ταυτόχρονα με τη δημιουργία του τετράεδρου, δεν παρουσιάζουν τομή με καμία ακμή του υπάρχοντος πλέγματος, και επιπλέον οι νέες ακμές δεν τέμνουν τα τρίγωνα του πλέγματος. Η αξιοπιστία του αλγορίθμου δημιουργίας τρισδιάστατου πλέγματος κρίνεται από την αξιοπιστία της διαδικασίας ελέγχου πιθανής τομής μεταξύ ενός τριγώνου και μιας ακμής.

Η διαδικασία αυτή είναι επίσης κρίσιμη και για την αποδοτικότητα του αλγορίθμου, καθώς απαιτεί ένα μεγάλο μέρος του συνολικού υπολογιστικού χρόνου. Για τους λόγους αυτούς η διαδικασία ελέγχου της εγκυρότητας ενός τετράεδρου αξιοποιεί σύνθετες δομές δεδομένων, όπως τα εναλλασσόμενα ψηφιακά δέντρα, που επινοήθηκαν ακριβώς για τη συγκεκριμένη διαδικασία. Η ανάλυση της συγκεκριμένης δομής προηγήθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Εκτός από την προϋπόθεση της μη ύπαρξης τομής μεταξύ στοιχείων του πλέγματος, η εγκυρότητα ενός τετράεδρου προϋποθέτει και την ικανοποίηση κάποιων περιορισμένων που αφορούν σε γωνίες μεταξύ εδρών, ακμών, και μεταξύ έδρας και ακμής. Συνοπτικά οι προϋποθέσεις για να είναι ένα νέο τετράεδρο αποδεκτό, είναι οι ακόλουθες [7].

1. δεν παρουσιάζει τομή με κανένα στοιχείο του πλέγματος.
2. οι γωνίες μεταξύ των εδρών του δεν ξεπερνάνε μια μέγιστη τιμή.
3. οι διέδρες γωνίες μεταξύ κάθε έδρας του και των γειτονικών εδρών του πλέγματος είναι μεγαλύτερες από μια ελάχιστη τιμή.
4. οι γωνίες μεταξύ κάθε ακμής του και των ακμών του πλέγματος είναι μεγαλύτερες από μια ελάχιστη τιμή.
5. οι γωνίες που σχηματίζει κάθε ακμή του με τις γειτονικές έδρες του πλέγματος είναι μεγαλύτερες από μια ελάχιστη τιμή.
6. το νέο τετράεδρο δεν εσωκλείει κανέναν κόμβο του πλέγματος.

Η επιβολή των περιορισμών έχει σκοπό τη διασφάλιση ότι τα τετράεδρα που δημιουργούνται έχουν αποδεκτό σχήμα και αποφεύγεται όσο το δυνατό η δημιουργία υπερβολικά στρεβλών τετραέδρων. Επιπλέον, οι περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι κάθε νέο τετράεδρο δημιουργείται με τον καταλληλότερο δυνατό τρόπο, ώστε να διασφαλίζεται ικανοποιητικός χώρος γύρω του για τη δημιουργία γειτονικών τετραέδρων.

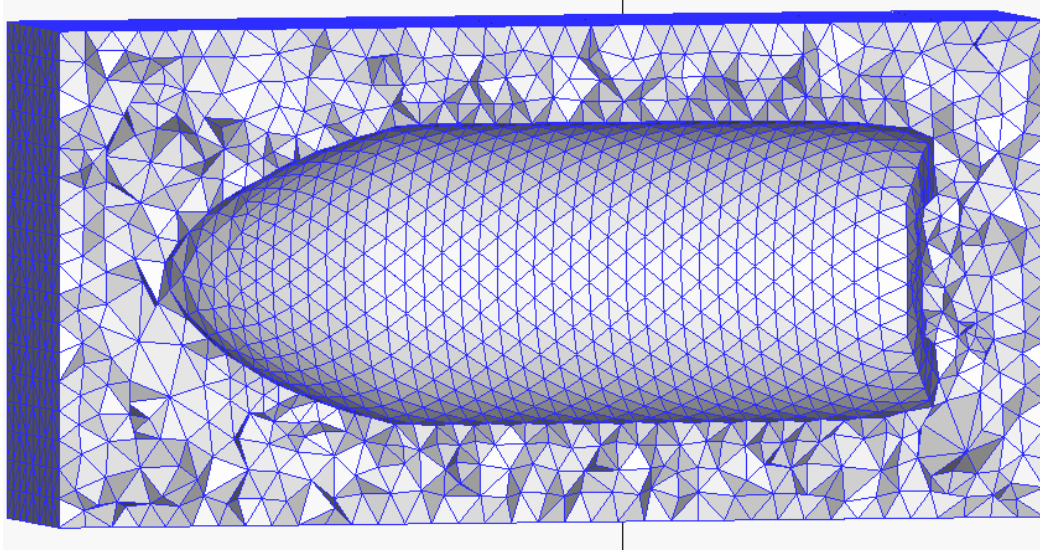
Η αυστηρότητα των περιορισμών αυτών δεν είναι σταθερή, αλλά προσαρμόζεται σε κάθε τριγωνικό στοιχείο του μετώπου, ανάλογα με το πλήθος των επανεξετάσεων που έχει υποστεί. Σε πολλές περιπτώσεις εξετάζεται ένα τριγωνικό στοιχείο χωρίς όμως να καθίσταται τελικά δυνατή η δημιουργία ενός νέου τετραέδρου, που να ικανοποιεί το σύνολο των περιορισμών. Στις περιπτώσεις αυτές δεν αναλαμβάνεται καμία ενέργεια και τα στοιχεία αυτά συμμετέχουν και στα επόμενα μέτωπα. Κατά την επανεξέτασή τους οι περιορισμοί που καλείται να ικανοποιεί ένα νέο τετράεδρο (έχοντας ως έδρα-βάση τα συγκεκριμένα τρίγωνα) είναι χαλαρότεροι, αυξάνοντας έτσι την πιθανότητα να βρεθεί μια εφικτή λύση. Οι περιορισμοί που επιβάλλονται χαλαρώνουν με την έννοια της μείωσης της ελάχιστης επιτρεπτής γωνίας και την αύξηση της μέγιστης επιτρεπτής.

Η σταδιακή χαλάρωση των περιορισμών επιτρέπει την εύρεση εφικτής λύσης σε αρκετές δύσκολες περιπτώσεις, χωρίς ωστόσο να μειώνεται δραματικά η ποιότητα του πλέγματος. Για ένα δεδομένο τριγωνικό στοιχείο, οι περιορισμοί χαλαρώνουν αναλογικά με το πλήθος των επανεξετάσεων που έχει υποστεί, μέχρι ένα μέγιστο αριθμό επανεξετάσεων.

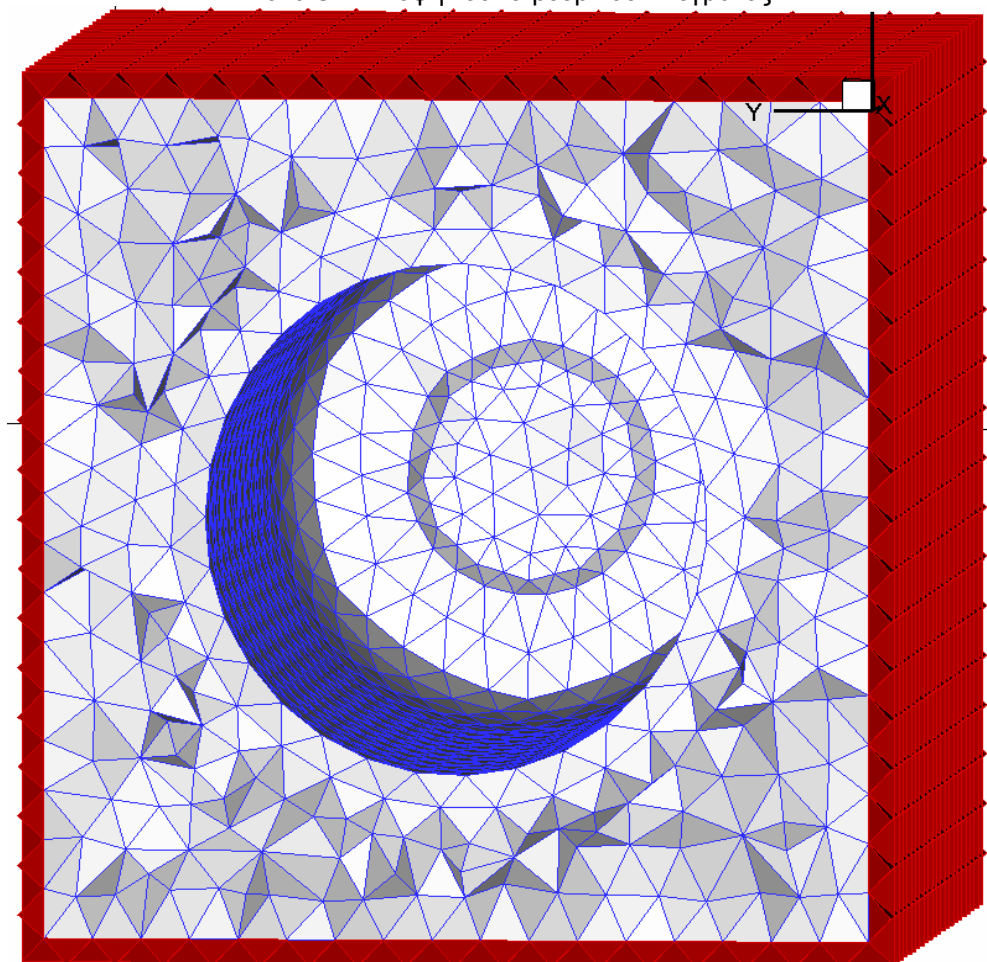
Σε κάθε περίπτωση, που καλείται να αντιμετωπίσει ο αλγόριθμος, μπορεί να απαιτείται διαφορετικός συνδυασμός περιορισμών, με διαφορετικά επιτρεπτά όρια των γωνιών, συντελεστή μεγέθυνσης των τριγώνων, ρυθμό χαλάρωσης των περιορισμών και μέγιστο αριθμό επανεξετάσεων ενός τριγώνου. Επιπλέον, κάποιοι περιορισμοί δύναται να μην χαλαρώνουν, αλλά να παραμένουν σταθεροί για οποιοδήποτε τρίγωνο, ώστε να διασφαλίζεται υψηλή ποιότητα του τελικού πλέγματος, μειώνοντας όμως την αξιοπιστία του αλγορίθμου. Εν γένει, ο χρήστης μπορεί να χρησιμοποιήσει διαφορετικούς συνδυασμούς περιορισμών, σταθμίζοντας την αύξηση της ποιότητας του παραγόμενου πλέγματος και την μείωση της ευρωστίας της βασικής μεθοδολογίας. Σε κάθε περίπτωση όμως πρέπει να διατηρείται μια σχετική ισορροπία μεταξύ των ανταγωνιστικών αυτών χαρακτηριστικών, για την ομαλή λειτουργία του αλγορίθμου.

Στην Εικόνα 31 παρουσιάζεται μια τομή του τετραεδρικού πλέγματος που παράχθηκε. Στην Εικόνα 32α δίνεται μια άλλη τομή του πλέγματος. Εδώ είναι εμφανές και το στρώμα που παράγεται με την αρχική επεξεργασία (με κόκκινο χρώμα). Επίσης, στην Εικόνα 32β παρουσιάζεται το τετραεδρικό

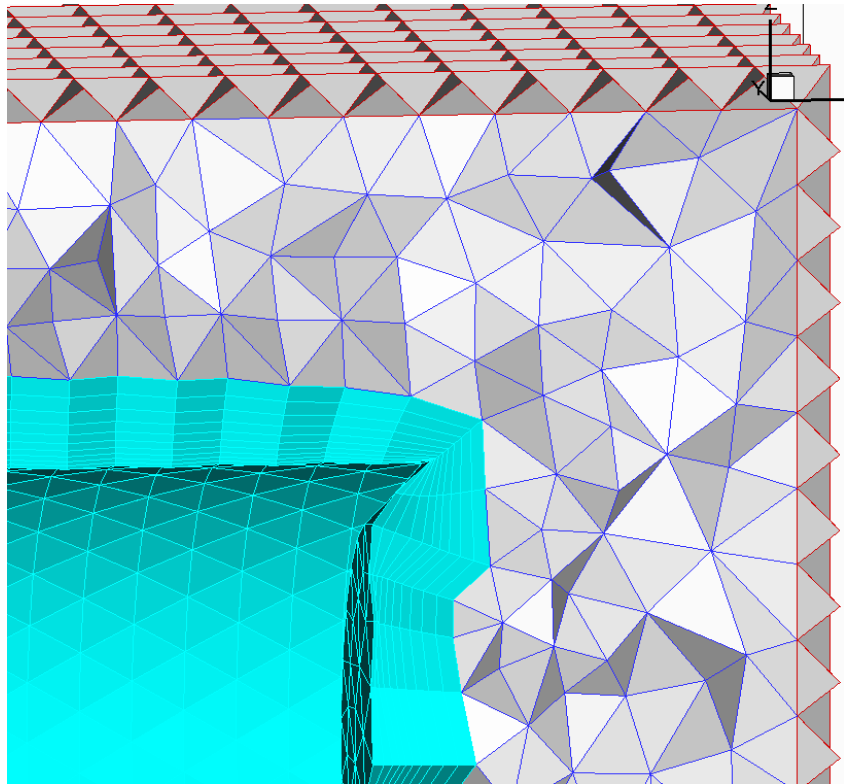
πλέγμα μαζί με το πλέγμα από πρίσματα. Τέλος στις Εικόνες 33 και 34 παρουσιάζονται απόψεις του τελικού υβριδικού πλέγματος. Το στρώμα των πυραμίδων φαίνεται με πράσινο χρώμα και το βοηθητικό στρώμα των τετράεδρων, που παράγονται αρχικά σε επαφή με τις πυραμίδες, εμφανίζεται με κόκκινο χρώμα.



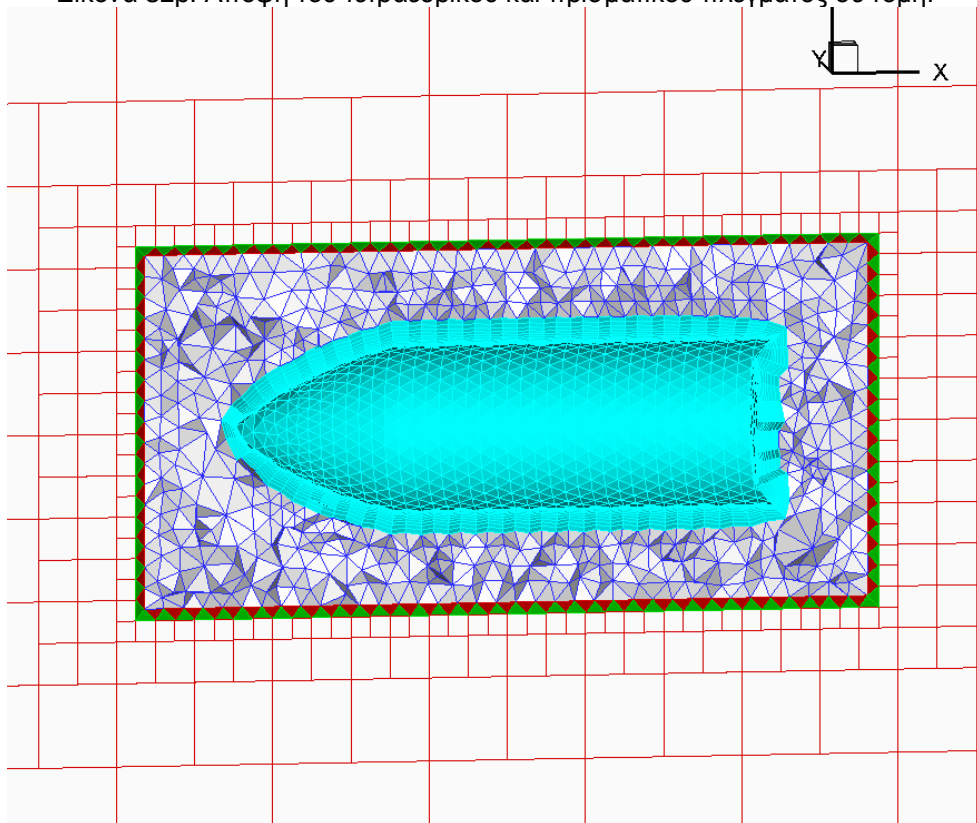
Εικόνα 31: Άποψη του τετρεδρικού πλέγματος.



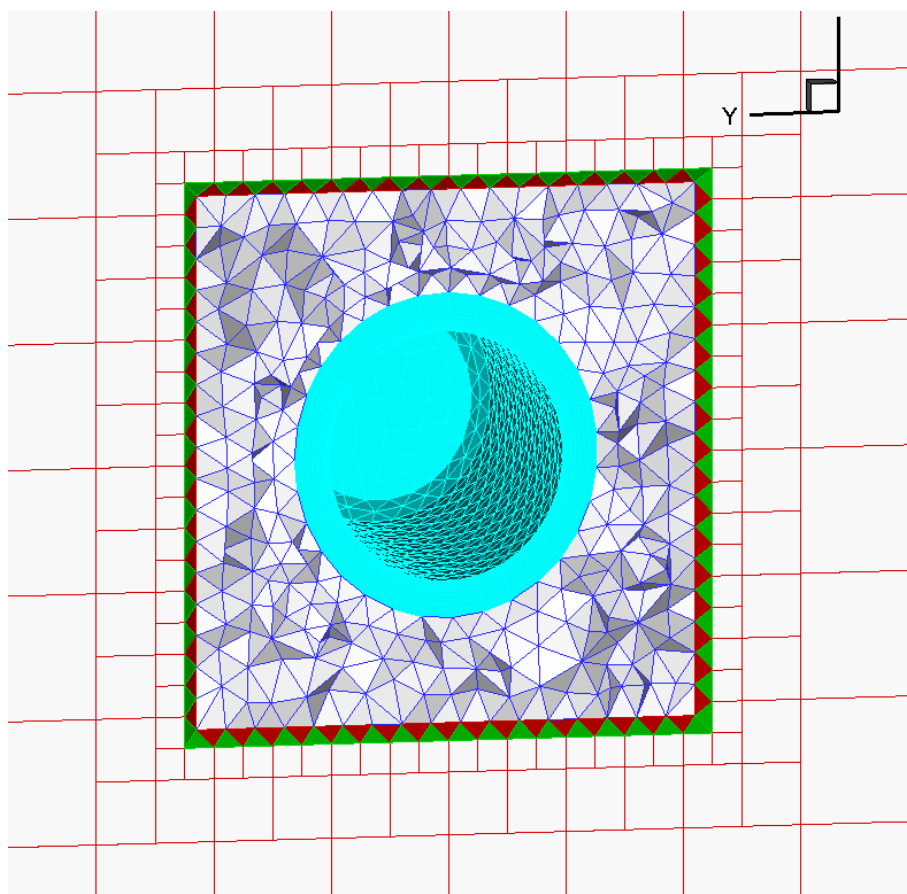
Εικόνα 32α: Άποψη του τετρεδρικού πλέγματος σε τομή.



Εικόνα 32β: Άποψη του τετραεδρικού και πρισματικού πλέγματος σε τομή.



Εικόνα 33: Άποψη του τελικού υβριδικού πλέγματος σε τομή.



Εικόνα 34 Άποψη του τελικού υβριδικού πλέγματος σε τομή.

Κεφάλαιο 4

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε παραδείγματα, που πιστοποιούν την εγκυρότητα του αλγορίθμου.

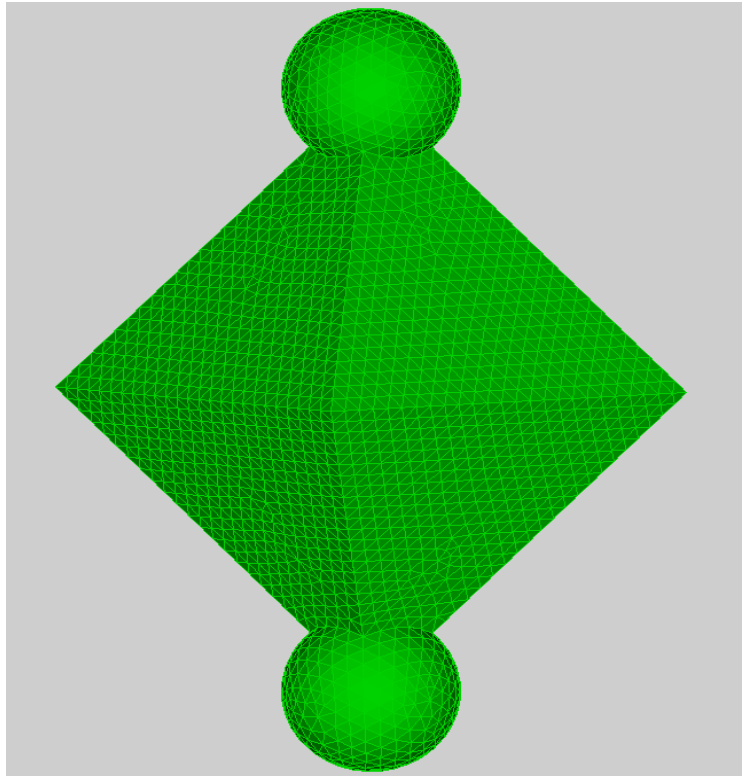
4.1 Πρώτη γεωμετρία

Στη περίπτωση αυτή διακριτοποιήθηκε η γεωμετρία που φαίνεται στην Εικόνα 36. Το τριγωνικό πλέγμα, που την καθορίζει, παρουσιάζει μεγάλη επιφανειακή πύκνωση, ενώ η γεωμετρία παρέχει διαφορετικά σχήματα για την πιστοποίηση του αλγορίθμου. Η εξωτερική γεωμετρία αφήνει πολύ χώρο για να δημιουργηθεί το υβριδικό πλέγμα. Ο αλγόριθμος «έτρεξε» για 10 υποδιαίρέσεις του εξαεδρικού πλέγματος και για την δημιουργία 5 στρωμάτων από πρίσματα. Οι γεωμετρίες, που δέχθηκε ο αλγόριθμος ως όρια, παρουσιάζονται στις Εικόνες 36 και 37, ενώ τα στατιστικά στοιχεία είναι το πλέγματος είναι τα ακόλουθα:

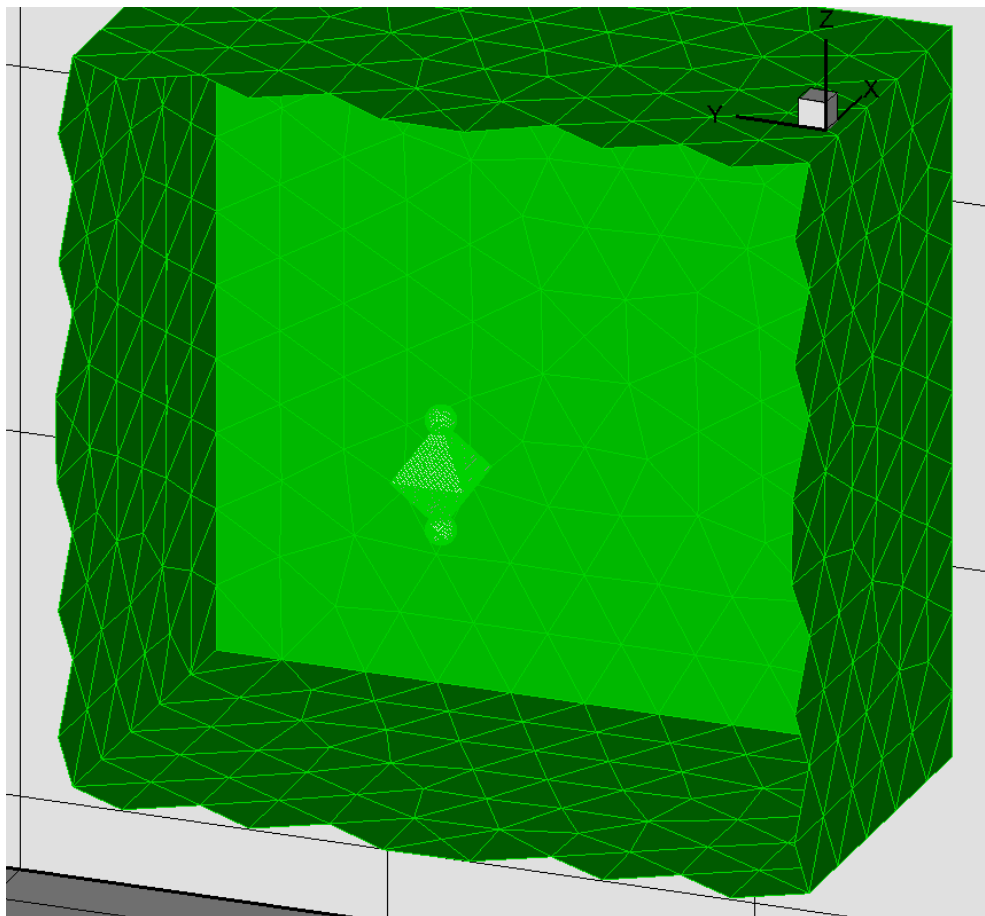
- Εξωτερικό επιφανειακό πλέγμα:
 - Κόμβοι: 674
 - Τρίγωνα: 1344
 - Μεγίστη υποδιαίρεση στοιχείων: 5
- Εσωτερικό επιφανειακό πλέγμα:
 - Κόμβοι: 3156
 - Τρίγωνα: 6308
 - Μεγίστη υποδιαίρεση στοιχείων: 10
- Πηγές Πύκνωσης
 - Καμιά

Μετά τους 10 κύκλους υποδιαίρεσεων για την παραγωγή εξαεδρικού πλέγματος δημιουργήθηκε το πλέγμα που παρουσιάζεται στις Εικόνες 38 και 39. Η διαφορετική πύκνωση στις διαφορετικές γεωμετρίες είναι εμφανής καθώς και η ισορροπημένη ανάπτυξη του πλέγματος.

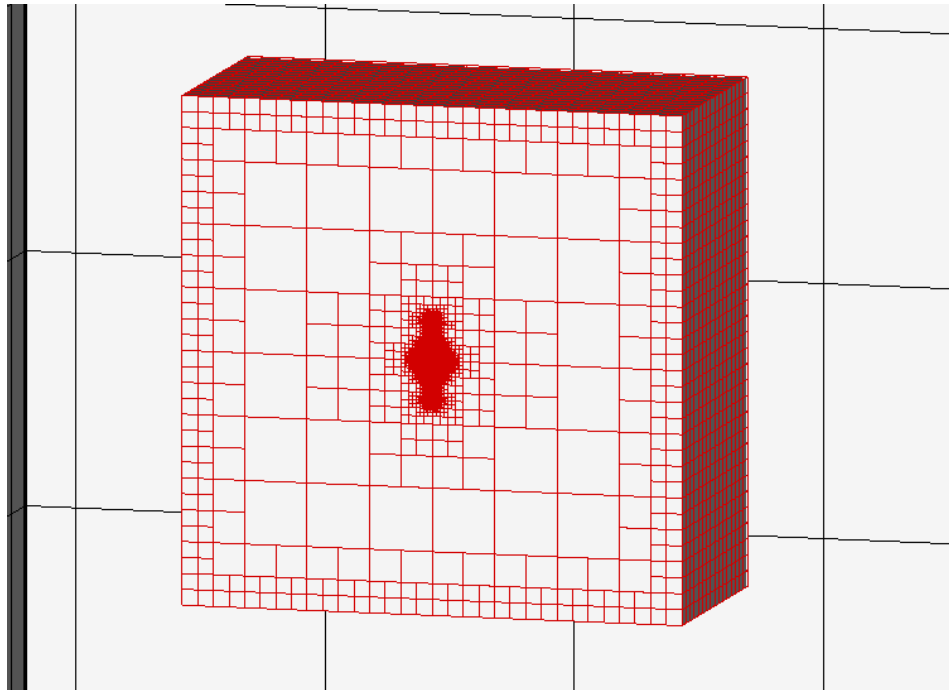
- Εξαεδρικό Πλέγμα:
 - Κόμβοι: 82372
 - Εξάεδρα: 67713
 - Ενεργά εξάεδρα: 46005
 - Επιφανειακά Εξάεδρα:
 1. 15973 στην εσωτερική γεωμετρία
 2. 5768 στην εξωτερική γεωμετρία
 - Χρόνος εκτέλεσης: 55 δευτερόλεπτα



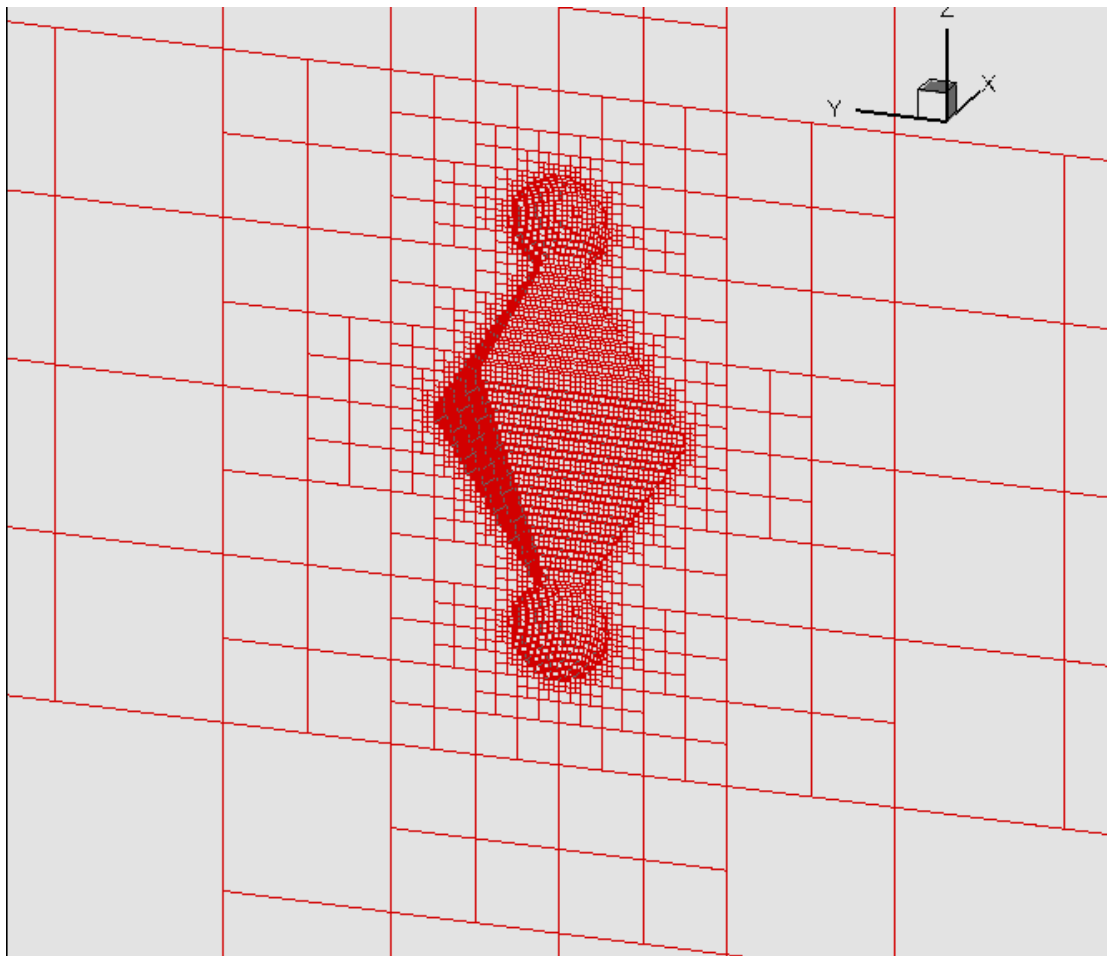
Εικόνα 35: Το επιφανειακό πλέγμα, που ορίζει την εσωτερική γεωμετρία.



Εικόνα 36: Η εξωτερική και η εσωτερική γεωμετρία που ορίζουν τα όρια του χωρίου.



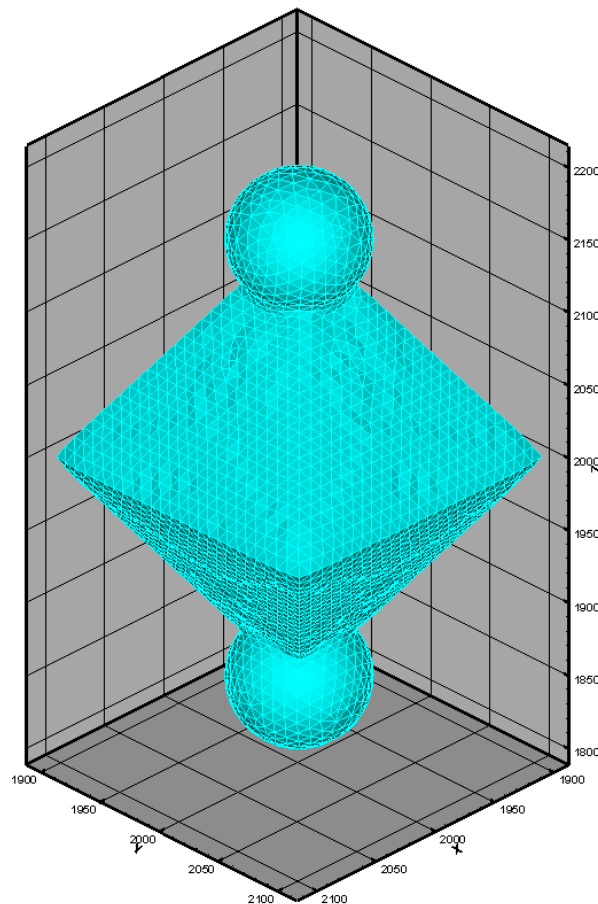
Εικόνα 37 : Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος, όπου φαίνεται η πύκνωση των στοιχείων του.



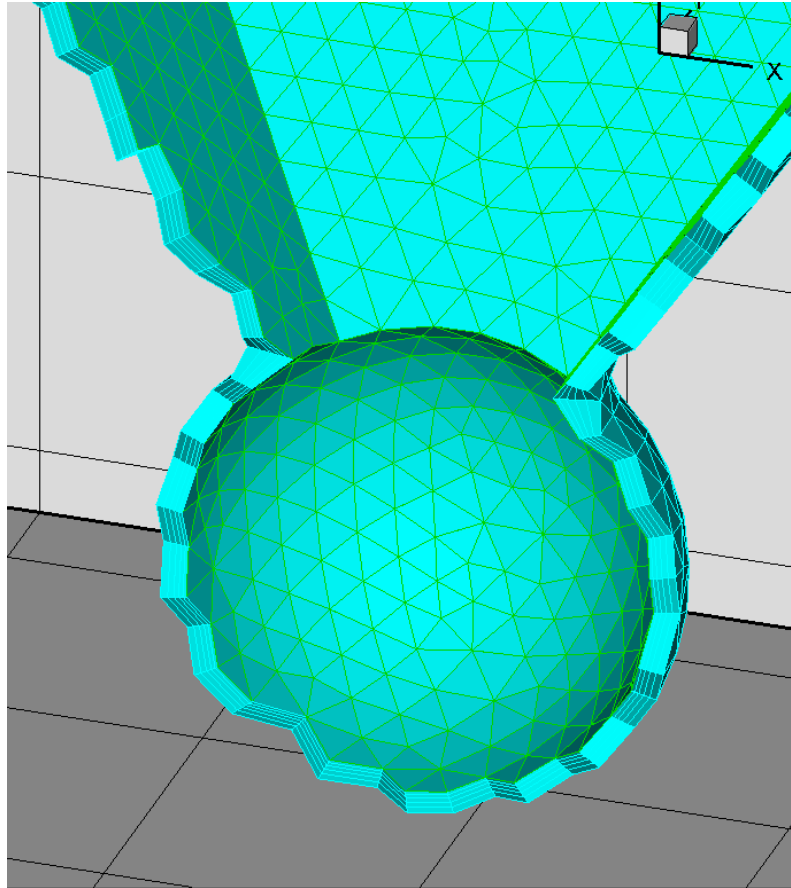
Εικόνα 38 : Κοντινή άποψη του εξαεδρικού πλέγματος.

Στη συνέχεια ο αλγόριθμος προχώρησε στη δημιουργία του πρισματικού πλέγματός. Όπως έχει αναφερθεί τα πρίσματα δημιουργούνται σε στρώματα γύρω από την εσωτερική γεωμετρία. Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας ο αλγόριθμος παράγει τις πυραμίδες, που είναι απαραίτητες για την ένωση του εξαεδρικού και του τετραεδρικού πλέγματος.

- Πρισματικό Πλέγμα:
 - Κόμβοι: 18936
 - Πρίσματα: 31540
 - Πρίσματα ανά στρώμα: 6308
 - Συνολικός χρόνος: 45 δευτερόλεπτα
- Πυραμίδες:
 - Κόμβοι: 9216
 - Πυραμίδες: 18029
 - Συνολικός χρόνο: 1,5 λεπτά (μαζί με την επεξεργασία των βάσεων)



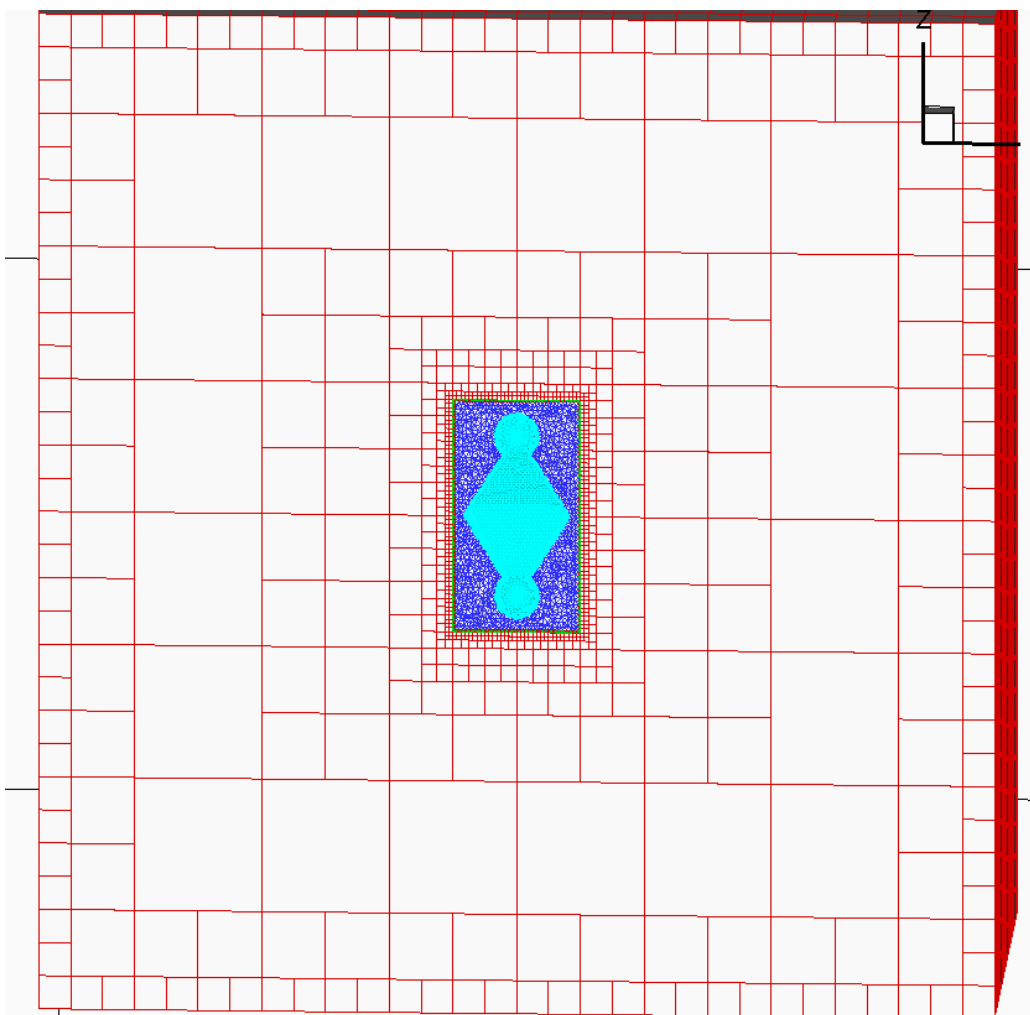
Εικόνα 39: Το πλέγμα από πρίσματα που περικλείει τη γεωμετρία.



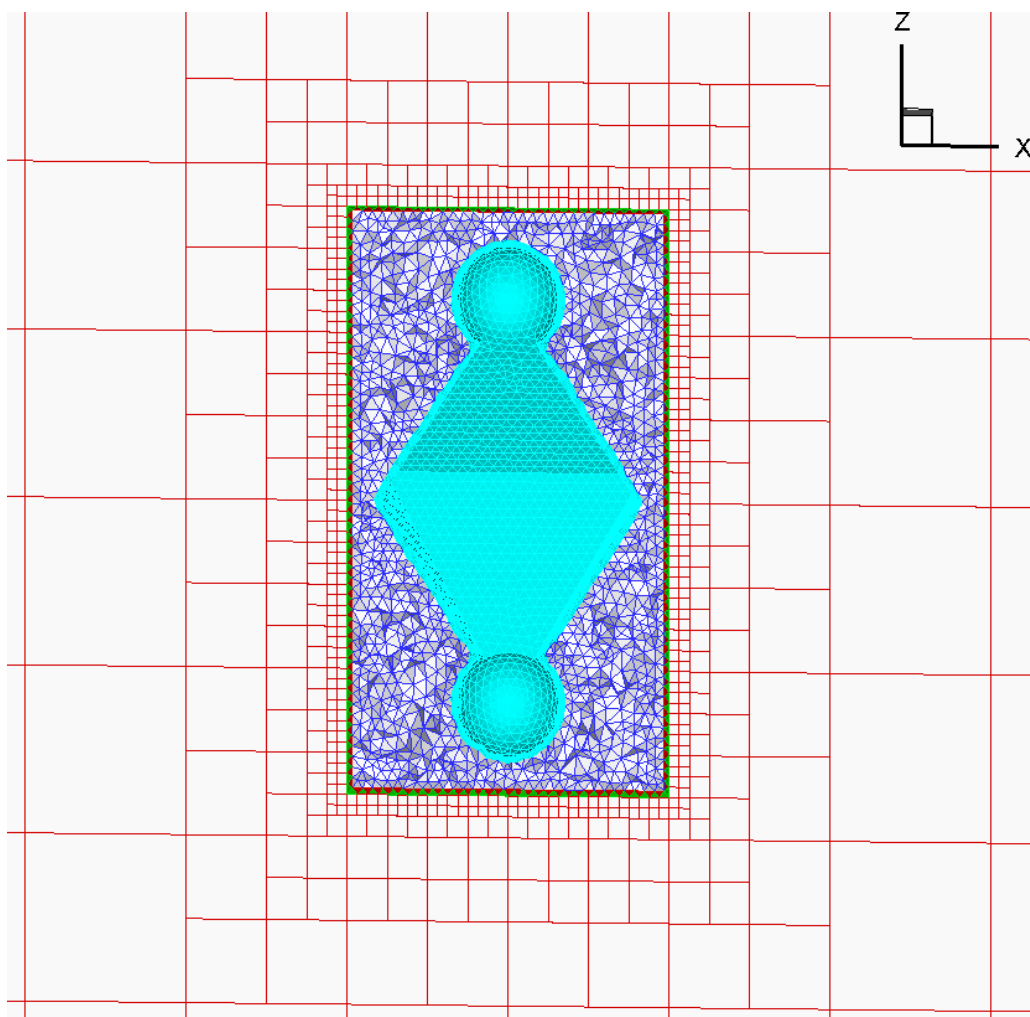
Εικόνα 40 : Λεπτομέρεια των στρωμάτων από πρίσματα.

Τέλος, ο αλγόριθμος κατασκευής τετραέδρων καλείται για να ολοκληρωθεί η διακριτοποίηση του χωρίου. Κατασκευάζεται το διπλό αρχικό στρώμα από τετράεδρα, που ομαλοποιεί την επιφάνεια των πυραμίδων. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται το πρόγραμμα του Λ. Αδαμούδη [7] για τη δημιουργία των υπόλοιπων τετραέδρων. Παρακάτω δίνονται τα στατιστικά στοιχεία του πλέγματος. Τέλος στις Εικόνες 42, 43 και 44 παρουσιάζεται το υβριδικό πλέγμα σε τομή.

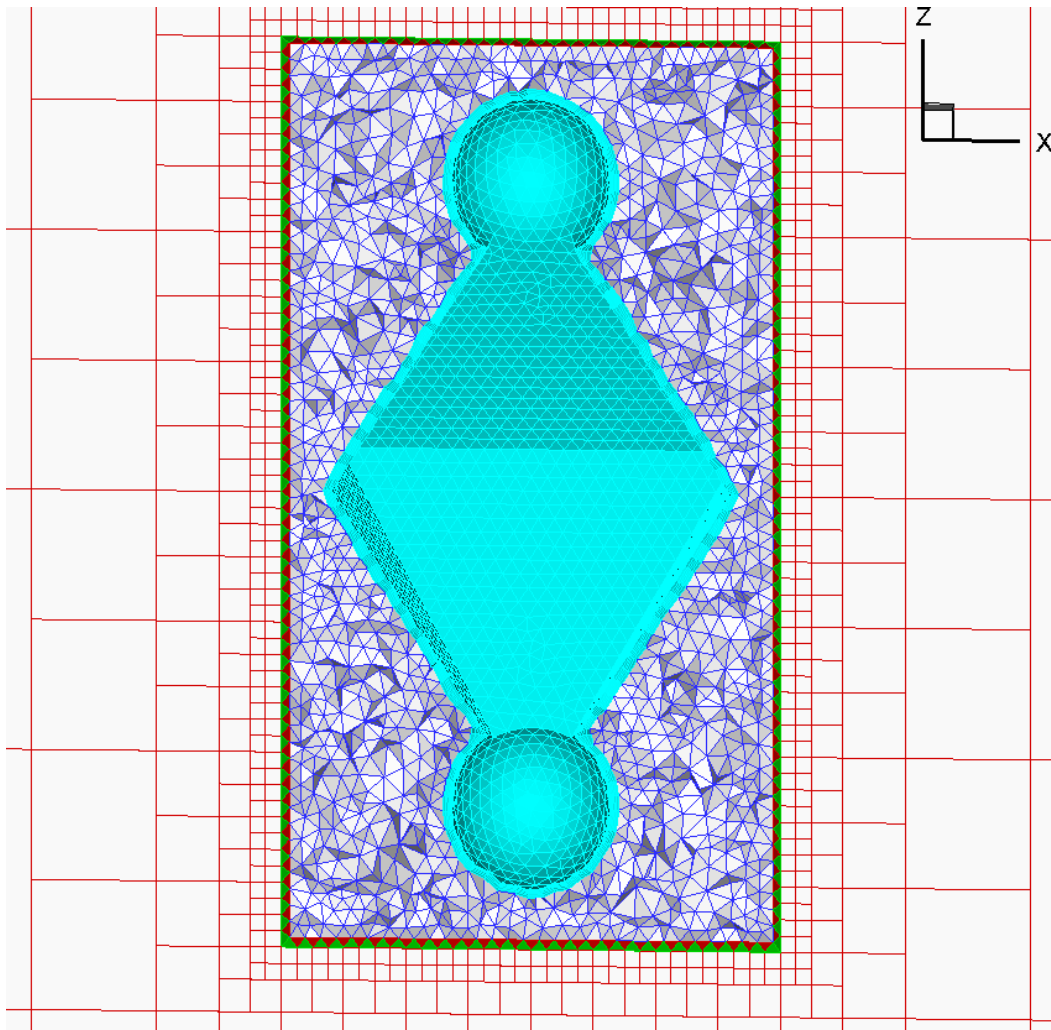
- Τετραεδρικό πλέγμα:
 - Κόμβοι: 51955
 - Τετράεδρα: 220330
 - Συνολικός Χρόνος 39 Λεπτά



Εικόνα 41: Το τελικό υβριδικό πλέγμα.



Εικόνα 42: Το τελικό υβριδικό πλέγμα.



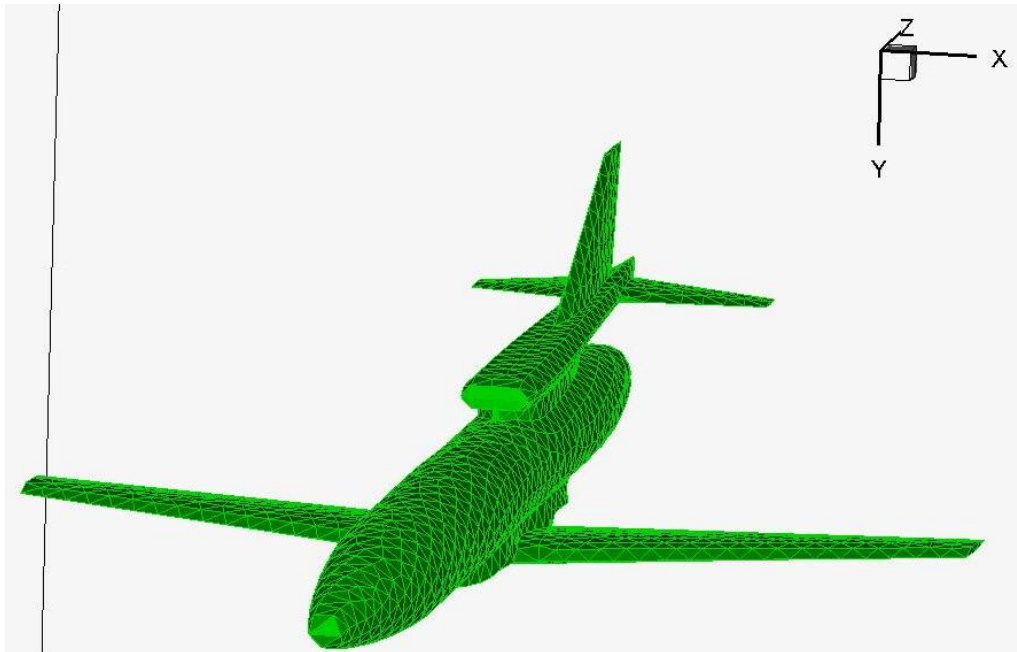
Εικόνα 43 : Το τελικό υβριδικό πλέγμα.

4.2 Δεύτερη γεωμετρία

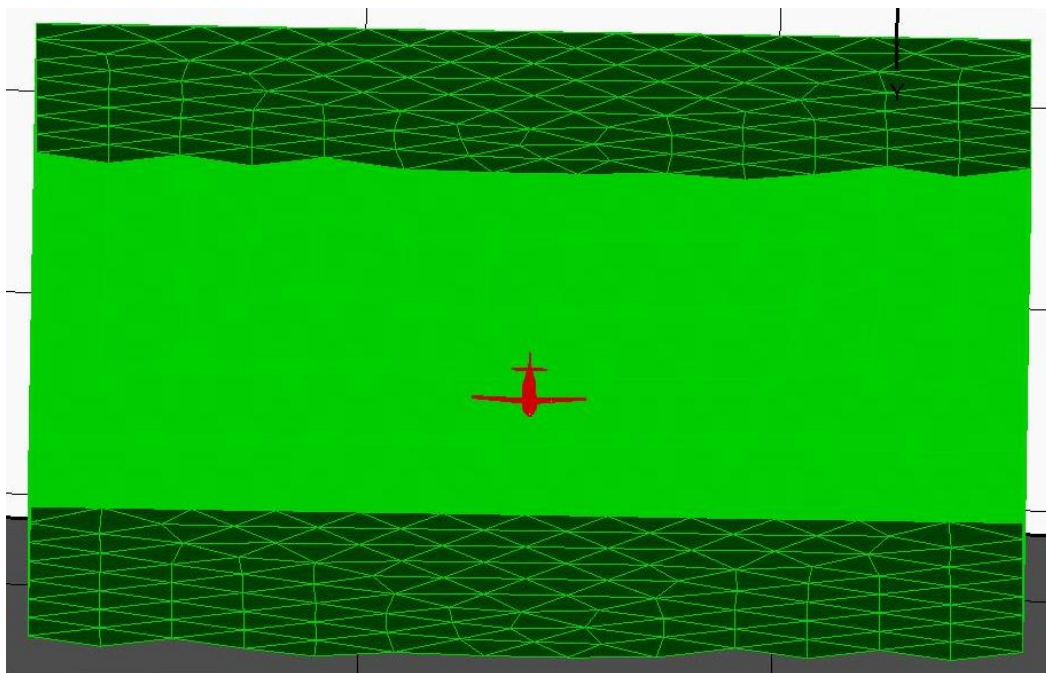
Στην δεύτερη περίπτωση εξετάστηκε η δυνατότητα διακριτοποίησης του χώρου γύρω από μία γεωμετρία πιο κοντά σε πρακτική εφαρμογή. Ένα σχέδιο αεροπλάνου χρησιμοποιήθηκε για να πάρουμε το τριγωνικό πλέγμα που παρουσιάζεται στην Εικόνα 44. Η εσωτερική γεωμετρία είναι ιδιαίτερα απαιτητική, καθώς έχει πολλά δύσκολα σημεία, όπως οι πτέρυγες και τα σημεία ένωσής τους με την άτρακτο. Η εξωτερική γεωμετρία επιλέχθηκε να είναι αρκετά μεγάλη σε σχέση με την εσωτερική γεωμετρία. Οι γεωμετρίες που δέχθηκε ο αλγόριθμος ως όρια του χωρίου παρουσιάζονται στις Εικόνες 44 και 45, ενώ τα στατιστικά στοιχεία είναι:

- Εξωτερικό επιφανειακό πλέγμα
 - Κόμβοι: 654
 - Τρίγωνα: 1304
 - Μεγίστη υποδιαίρεση στοιχείων: 3

- Εσωτερικό επιφανειακό πλέγμα
 - Κόμβοι: 1783
 - Τρίγωνα: 3562
 - Μεγίστη υποδιαίρεση στοιχείων: 11
- Πηγές Πύκνωσης
 - Καμιά



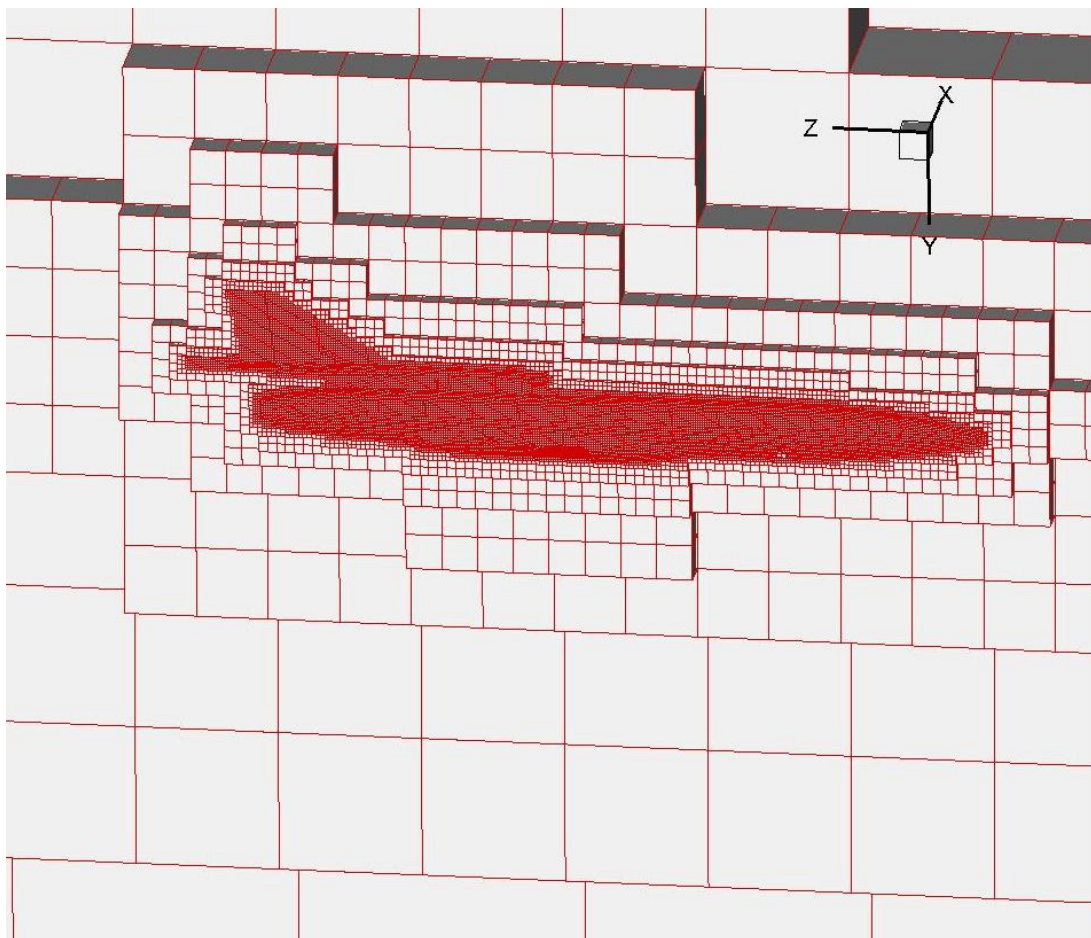
Εικόνα 44 : Το επιφανειακό πλέγμα που ορίζει την εσωτερική γεωμετρία.



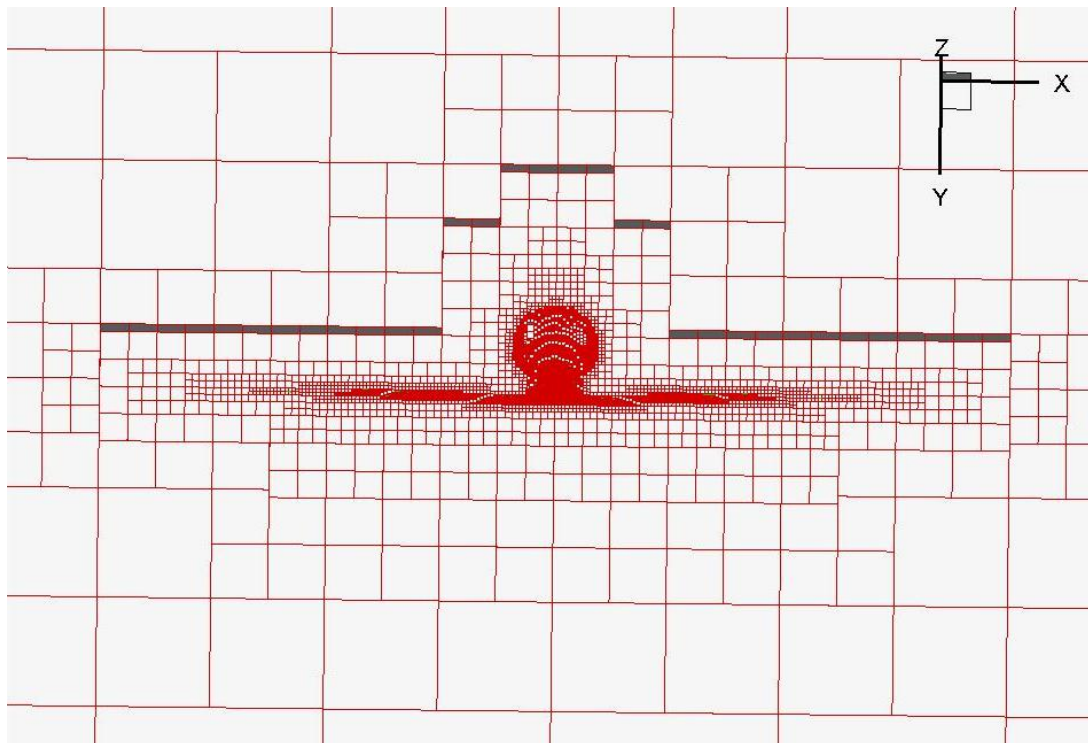
Εικόνα 45 : Η εξωτερική και η εσωτερική γεωμετρία που καθορίζουν τα όρια του χωρίου.

Μετά τους 10 κύκλους υποδιαιρέσεων για την παραγωγή εξαεδρικού πλέγματος δημιουργήθηκε το πλέγμα που παρουσιάζεται στις Εικόνες 46 έως 49. Η διαφορετική πύκνωση στις διαφορετικές γεωμετρίες είναι εμφανής καθώς και η ισορροπημένη ανάπτυξη του πλέγματος

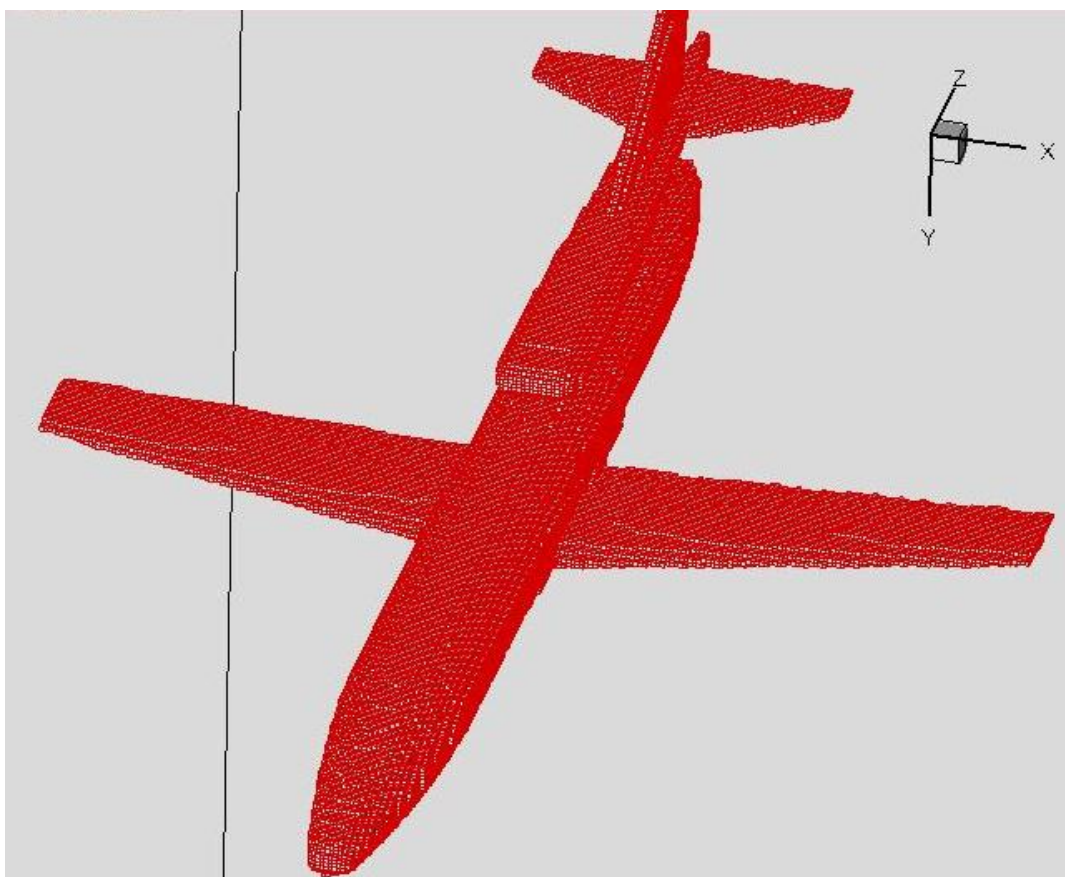
- Εξαεδρικό Πλέγμα:
 - Κόμβοι: 233763
 - Εξάεδρα: 197201
 - Ενεργά εξάεδρα: 136542
 - Επιφανειακά Εξάεδρα: 59982 στην εσωτερική γεωμετρία
 - Χρόνος εκτέλεσης : 3,5 Λεπτά



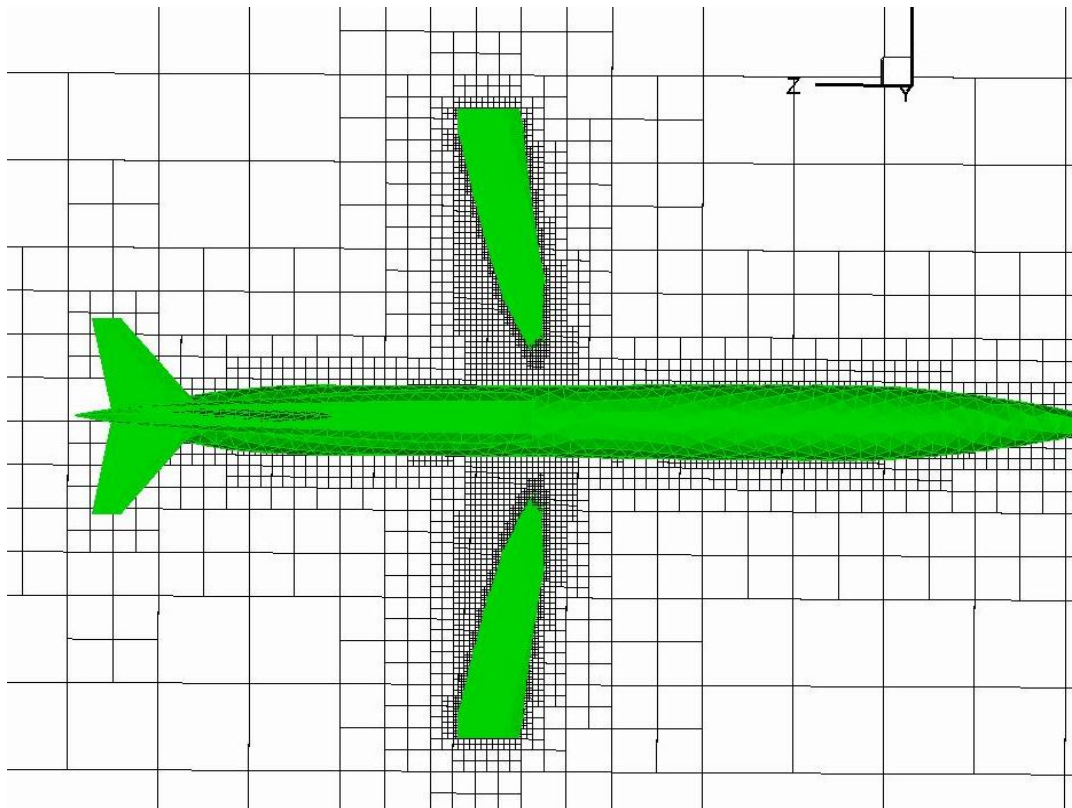
Εικόνα 46 : Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος, όπου φαίνεται η πύκνωση των στοιχείων.



Εικόνα 47 : Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος, όπου φαίνεται η πύκνωση των στοιχείων.



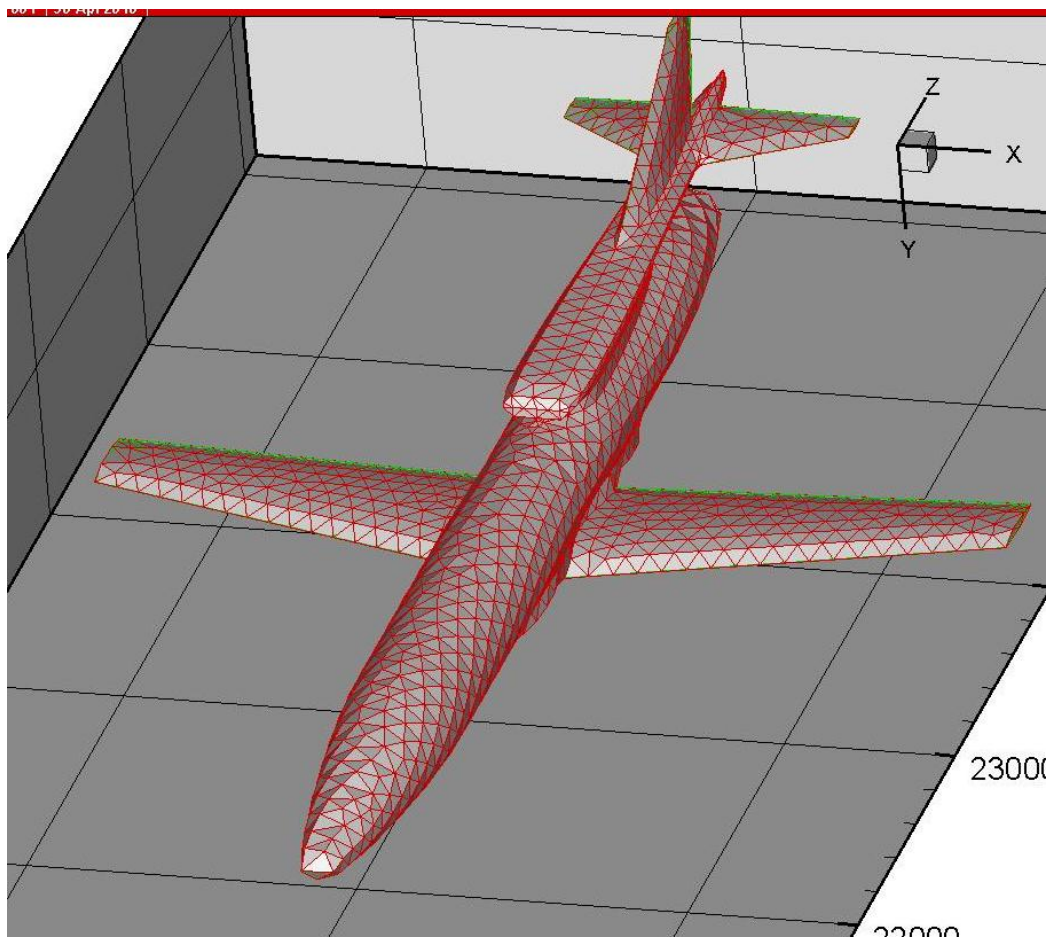
Εικόνα 48 : Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος στην επιφάνεια του αεροσκάφους.



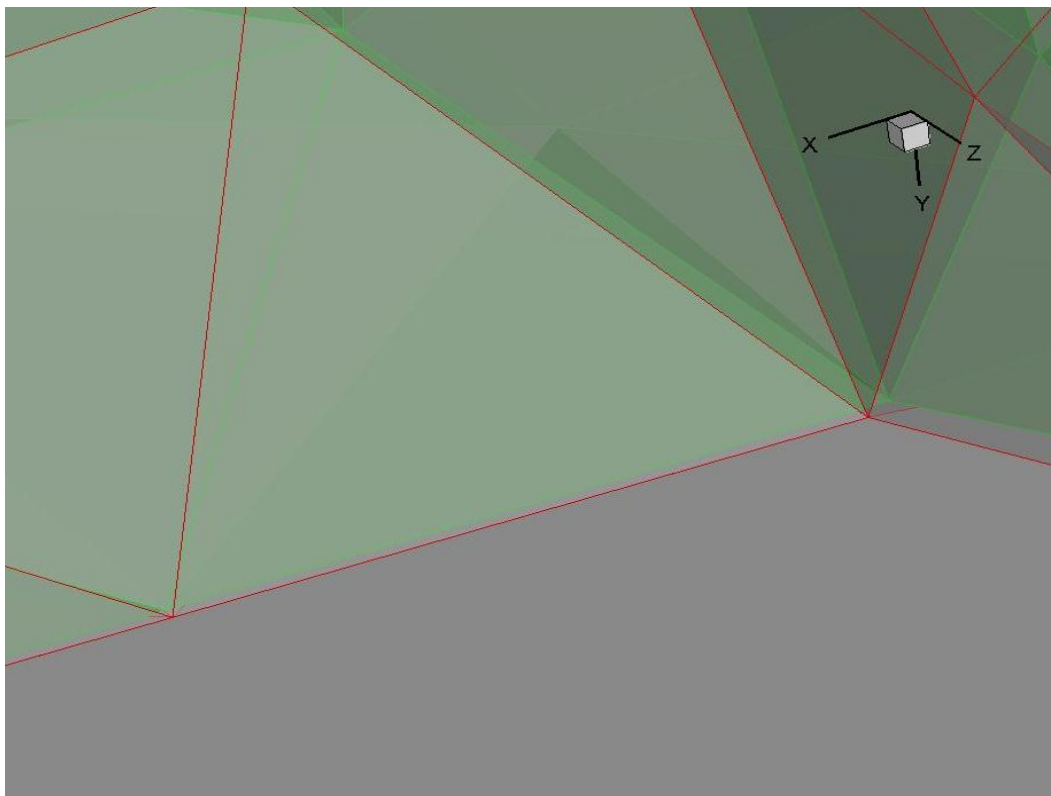
Εικόνα 49 : Άποψη του εξαεδρικού πλέγματος σε τομή.

Στη συνέχεια ο αλγόριθμος προχωρεί στην δημιουργία του πρισματικού πλέγματός. Όπως έχει αναφερθεί, τα πρίσματα φτιάχνονται σε στρώματα γύρω από την εσωτερική γεωμετρία. Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας ο αλγόριθμος παράγει τις πυραμίδες, που είναι απαραίτητες για την ένωση του εξαεδρικού και του τετραεδρικού πλέγματος.

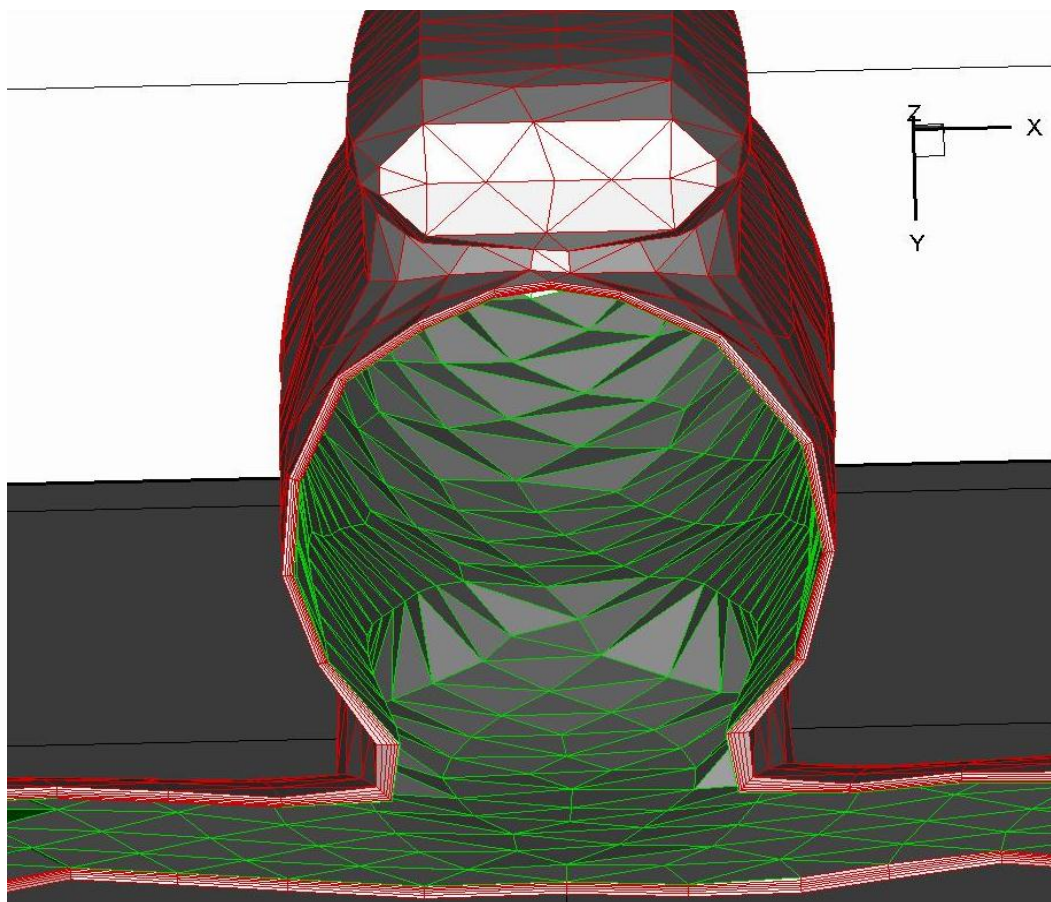
- Πρισματικό Πλέγμα:
 - Κόμβοι: 12481
 - Πρίσματα: 21372
 - Πρίσματα ανά στρώμα: 3562
 - Συνολικός χρόνος: 45 δευτερόλεπτα
- Πυραμίδες
 - Κόμβοι: 8320
 - Πυραμίδες: 16192
 - Συνολικός χρόνος: 8 Λεπτά (μαζί με την επεξεργασία των βάσεων).



Εικόνα 50 : Το πρισματικό πλέγμα που περικλείει την γεωμετρία της Εικόνας 44.



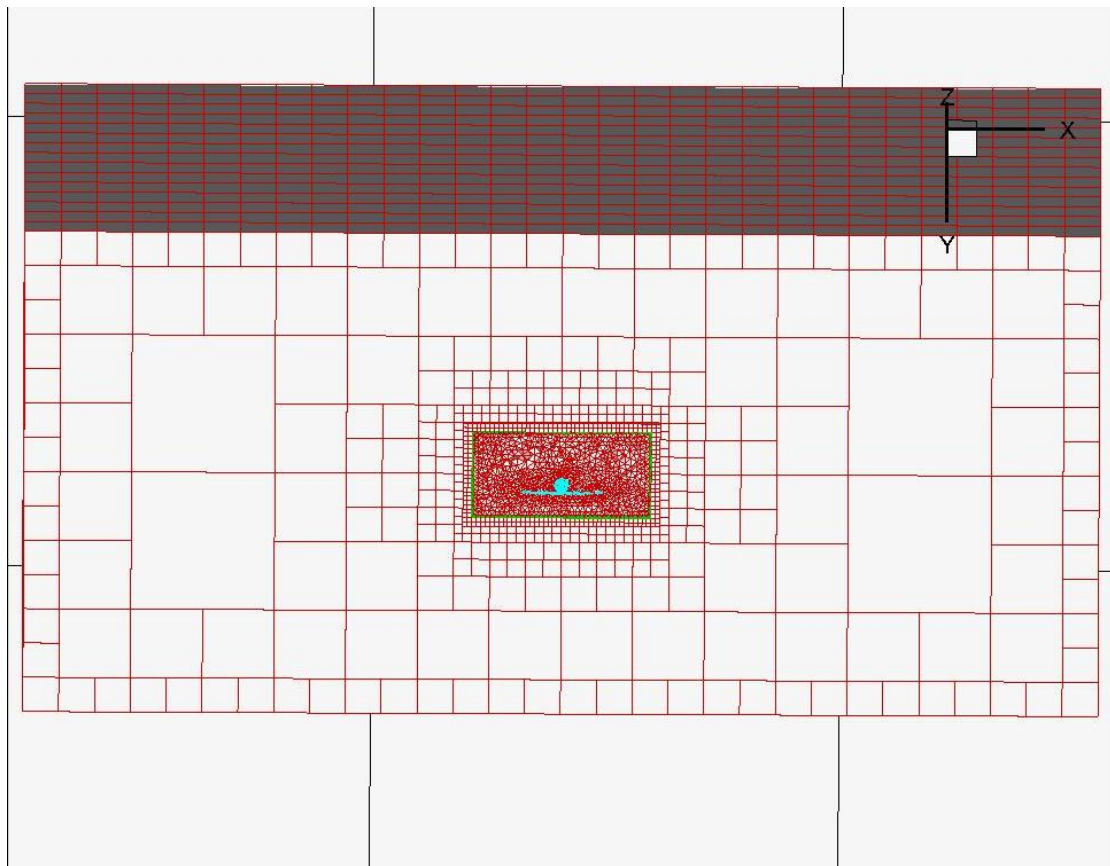
Εικόνα 51 : Λεπτομέρεια του πρισματικού πλέγματος.



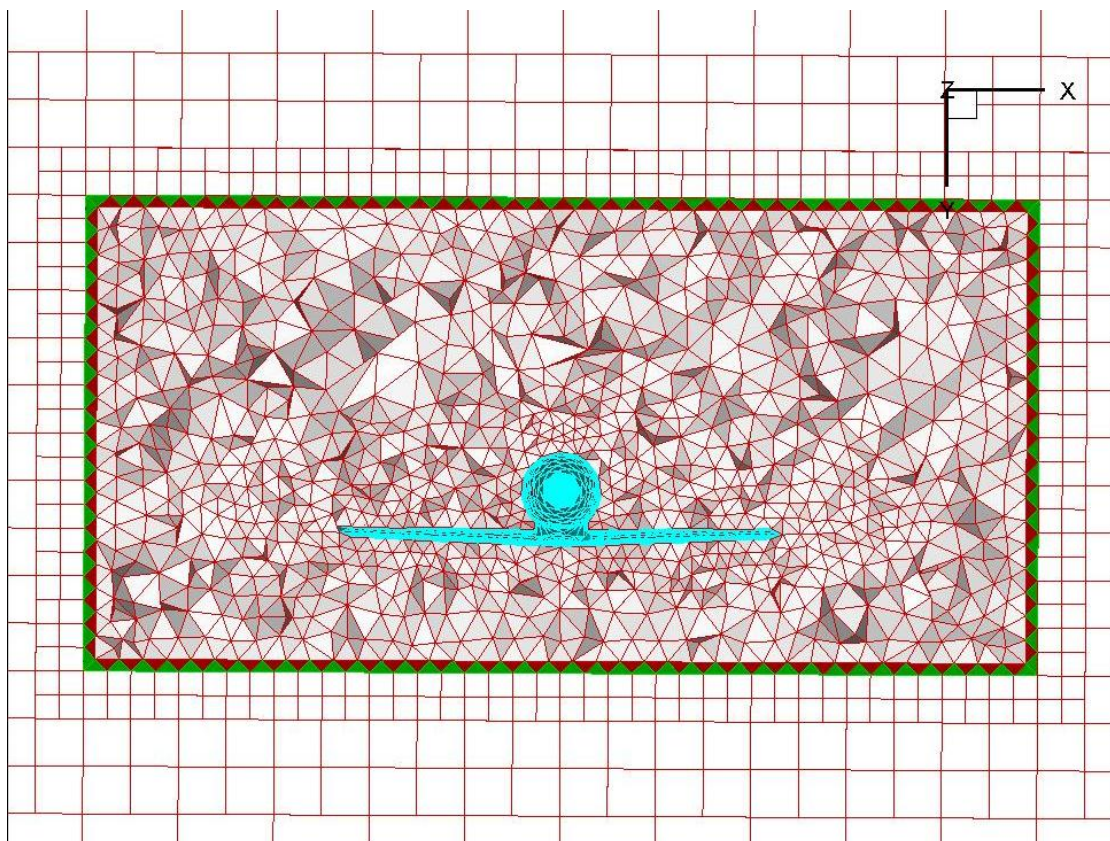
Εικόνα 52 : Τομή του πρισματικού πλέγματος.

Τέλος, ο αλγόριθμος κατασκευής τετραέδρων [7] καλείται για να ολοκληρωθεί η διακριτοποίηση του χωρίου. Κατασκευάζεται το διπλό αρχικό στρώμα από τετράεδρα, που ομαλοποιεί την επιφάνεια των πυραμίδων. Στη συνέχεια διακριτοποιείτε το υπόλοιπο χωρίο. Παρακάτω δίνονται τα στατιστικά στοιχεία του πλέγματος, ενώ στις Εικόνες 53, 54 και 55 παρουσιάζεται το υβριδικό πλέγμα σε τομή.

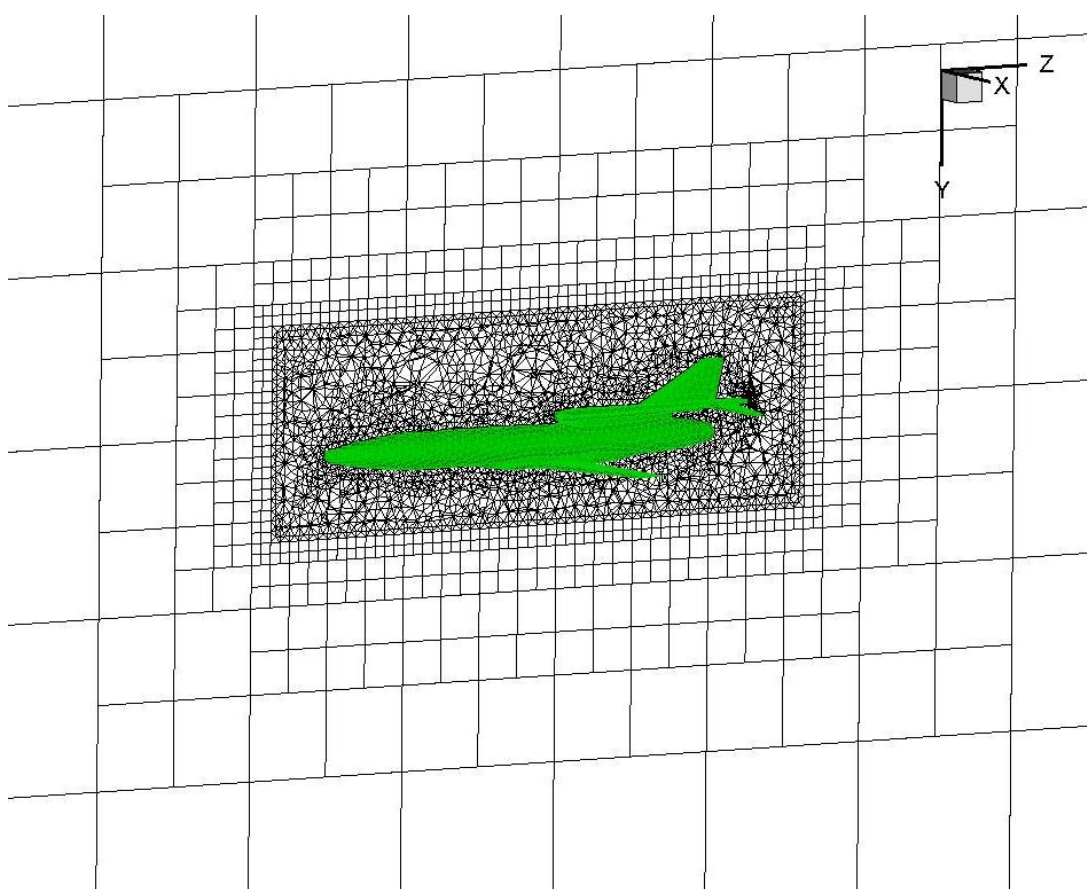
- Τετραεδρικό πλέγμα:
 - Κόμβοι: 52505
 - Τετράεδρα: 223522
 - Συνολικός Χρόνος: 79 Λεπτά



Εικόνα 53 : Το υβριδικό πλέγμα σε τομή XY.



Εικόνα 54 : Το υβριδικό πλέγμα σε τομή XY (λεπτομέρεια) .



Εικόνα 55 : Το υβριδικό πλέγμα σε τομή YZ.

Κεφάλαιο 5

5.1 Ανακεφαλαίωση

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε μεθοδολογία και το αντίστοιχο λογισμικό χωρικής διακριτοποίησης με χρήση τεσσάρων διαφορετικών τύπων στοιχείων (υβριδικό πλέγμα). Συγκεκριμένα, αναπτύχθηκε μια μεθοδολογία για την ανάπτυξη εξάεδρων βασισμένη σε octree δομή δεδομένων, μια μεθοδολογία για την δημιουργία πρισματικών στοιχείων γύρω από την γεωμετρία του στερεού, εφαρμόστηκε η μεθοδολογία που ανέπτυξε ο Λ. Αδαμούδης στην μεταπτυχιακή του εργασία για την παραγωγή τετραεδρικών στοιχείων, και τέλος αναπτύχθηκε μία μεθοδολογία για την ένωση των διαφορετικών πλεγμάτων με την χρήση πυραμιδικών στοιχείων.

5.2 Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα

Ο αλγόριθμος μπορεί να παράγει πλέγματα με πολύ μεγάλο αριθμό εξάεδρων σε σύντομο, σχετικά με άλλες μεθόδους, χρονικό διάστημα. Παράλληλα παραμένει ευέλικτος, μιας και δεν περιορίζεται από αρχικές γεωμετρίες. Αυτό του δίνει την δυνατότητα να διακριτοποιεί οποιοδήποτε χωρία με πολλαπλές εσωτερικές γεωμετρίες. Η δυνατότητα πύκνωσης των στοιχείων είτε με πηγές είτε με βάση τις αρχικές γεωμετρίες δίνει τη δυνατότητα να εστιάζει στις προβληματικές περιοχές του χωρίου.

Το βασικό αρνητικό αυτών των πλεγμάτων είναι η κακή απόδοση τους σε υπολογισμούς που γίνονται στην περιοχή των συνεκτικών στρωμάτων. Επίσης αδυνατούν να εφαρμόσουν στην επιφανειακή γεωμετρία (μη σύμμορφα). Τα δύο αυτά μειονεκτήματα μπορούν να περιοριστούν με την δημιουργία ιδιαίτερα πυκνών πλεγμάτων ή να εξαιρεθούν με την χρήση υβριδικών πλεγμάτων.

Ο αλγόριθμος παραγωγής πρισμάτων είναι γρήγορος, το μικρό μέγεθος του πλέγματος και η δομημένη φύση του βοηθάει σε αυτό. Το πρισματικό πλέγμα που παράγεται εξομαλύνει την αρχική εσωτερική γεωμετρία. Παράλληλα καλύπτει τον προβληματικό χώρο με βέλτιστα σχήματα, χωρίς να χρειάζεται μεγάλο αριθμό στοιχείων. Τέλος η τριγωνική επιφάνειά τους επιτρέπει να ενωθούν με ευκολία με τετράεδρα.

Η φύση του πλέγματος έχει και ορισμένα αρνητικά στοιχεία, τα οποία ο αλγόριθμος δεν είναι εύκολο να αντιμετωπίσει. Το πλέγμα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την αρχική γεωμετρία. Σε περίπτωση που αυτή είναι έντονα μη κυρτή δεν θα μπορούν να παραχθούν αρκετά στρώματα από πρίσματα.

Οι τετραγωνικές πυραμίδες αποδείχθηκαν ένας γρήγορος τρόπος για να ενωθούν τα δύο πλέγματα από διαφορετικά στοιχεία. Δυστυχώς η μεθοδολογία δεν επιτρέπει την ύπαρξη πυραμίδων με διαφορετικό μέγεθος, με αποτέλεσμα η τοπική πύκνωση του πλέγματός να μην είναι εφικτή.

Η τροποποιημένη μέθοδος του προελαύνοντος μετώπου δημιουργεί ποιοτικά και αξιόπιστα πλέγματα για μη κυρτές γεωμετρίες. Ο χώρος που

αναλαμβάνει να διακριτοποιήσει κατά την δημιουργία του υβριδικού πλέγματος είναι πάντα τέτοιος. Επίσης αυτός ο χώρος πρέπει να είναι όσο πιο μικρός γίνεται για να μειώνεται ο αριθμός των τελικών τετραεδρικών στοιχείων που πρέπει να τον καλύψουν. Παρόλη την έλλειψη ικανού χώρου για να αναπτυχθεί το πλέγμα, η μέθοδος καταφέρνει να δώσει ένα ποιοτικό πλέγμα. Η τεχνική είναι αναγκαστικά πιο αργή από το σύνολό του υπόλοιπου αλγορίθμου του υβριδικού πλέγματος. Όσο πιο πολλά στοιχεία παράγονται τόσο ο αλγόριθμος επιβραδύνεται.

Γενικά πρέπει να πούμε ότι ο κυριότερος λόγος επιβράδυνσης είναι η αναζήτηση τομής μεταξύ των στοιχείων. Χρησιμοποιείται σε όλους τους αλγόριθμους δημιουργίας νέων στοιχείων και είναι απαραίτητη για την αποφυγή λανθασμένων τελικών πλεγμάτων.

5.3 Μελλοντικές προεκτάσεις

Ο χρόνος επεξεργασίας για πραγματικά μεγέθη πλεγμάτων μπορεί να γίνει υπερβολικά μεγάλος. Η χρήση παράλληλων εναλλασσόμενων ψηφιακών δέντρων (ADT) μπορεί να βελτιώσει τον χρόνο αναζήτησης.

Η μελέτη για την δυνατότητα πύκνωσης του υβριδικού πλέγματος είναι ενδιαφέρουσα και πολύ πιθανόν χρηστική. Ο αλγόριθμος octree, που δημιουργεί τα εξάεδρα, μπορεί να χρησιμοποιήσει πηγές πύκνωσης. Ο αλγόριθμος δημιουργίας τετραέδρων ακολουθεί την πύκνωση των γεωμετριών που ορίζουν το χωρία διακριτοποίησης. Το μόνο που μένει είναι η δυνατότητα πύκνωσης των πρισμάτων. Ο διαφορετικός αριθμός στοιχείων και κόμβων μεταξύ δύο διαδοχικών στρωμάτων μπορεί να μην παράγει χρήσιμα πλέγματα για χρήση σε CFD.

Η δυνατότητα άμεσης σύνδεσης πρισμάτων και εξάεδρων είναι ενδιαφέρουσα καθώς θα ελαχιστοποιήσει τον χρόνο παραγωγής του πλέγματος, αποφεύγοντας την δημιουργία τετράεδρων. Για να ενωθούν τα εξάεδρα με τα πρίσματα θα πρέπει να σπάσουν στα κατάλληλα σημεία, που τέμνουν το τελευταίο στρώμα των πρισμάτων. Η διαδικασία είναι ίδια με αυτή που χρησιμοποιείται για την εφαρμογή του εξαεδρικού πλέγματος με μια γεωμετρία. Αυτό θα δώσει διαφορετικά στοιχεία στο σημείο ένωσης των δύο πλεγμάτων και θα πρέπει να ελεγχθεί κατά πόσο το τελικό πλέγμα είναι χρήσιμο για χρήση σε CFD.

Η μέθοδος του προελαύνοντος μετώπου θα μπορούσε να βελτιωθεί με την εισαγωγή δυνατότητας συνεργασίας με αλγόριθμο Det, ο οποίος θα παρέχει τους κόμβους, που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια από την προτεινόμενη μεθοδολογία για τη δημιουργία του πλέγματος.

Βιβλιογραφία

- [1] : **Aftosmis M. J., Berger M. J., Melton J. E.** , *Adaptive Cartesian Mesh Generation*, in J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill (Eds.), *Handbook of Grid Generation*, CRC Pres, 1999.
- [2] : **Aftosmis, M. J.** , *Solution Adaptive Cartesian Grid Methods for Aerodynamic Flows with Complex Geometries*, Lecture notes for 28th Computational Fluid Dynamics Lecture Series, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode-Saint-Genese-Belgium, Mar. 3-7,1997
- [3]: **Kallinderis Y, Khawaja A, and McMorris H.** *Hybrid prismatic/tetrahedral grid generation for complex geometries*. AIAA Journal 1996; 34:291-298.
- [4] : **Z.J. Wang, Ravishekar Kannan,** *An Overset Adaptive Cartesian/Prism Grid Method for Moving Boundary Flow Problems*, Department of Mechanical Engineering, Michigan State University, East Lansing, MI 48824
- [5] : **Delanaye M., Aftosmis M. J., Berger M. J., Liu Y., Pulliam T.H.,** *Automatic Hybrid-Cartesian Grid Generation for High-Reynolds Number Flows around Complex Geometries*, AIAA, 99-0777
- [6] : **Λάζαρου Δ. Αδαμούδη** ,*Ανάπτυξη λογισμικού δημιουργίας τρισδιάστατου μη δομημένου πλέγματος με δυνατότητες προσαρμογής της πυκνώσης*, Πολυτεχνείο Κρήτης.
- [7] : **Peraire J., Peiro J., Morgan K.,** *Advancing Front Grid Generation*, in J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill (Eds.), *Handbook of Grid Generation*, CRC Pres, 1999.
- [8] : **Bonet J., Peraire J.,** *An alternating digital tree (adt) algorithm for geometric searching and intersection problems*, Int. J. Num. Meth. Eng. , 31, pp. 1-17, 1990.
- [9] : **Herbert Edelsbrunner, Ernst Peter Mücke** ,*Simulation of Simplicity: A Technique to Cope with Degenerate Cases in Geometric Algorithms*, Department of Computer Science, University of Illinois at Urbana-Champaign