

Υλοποίηση Κβαντικών Αλγορίθμων Αναζήτησης σε Κοιλότητες Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής

Μιχάλης Ν. Καλογεράκης

Χανιά, Κρήτη, 2013

Υλοποίηση Κβαντικών Αλγορίθμων Αναζήτησης σε Κοιλότητες Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής.

**Διπλωματική διατριβή για το Μ.Δ.Ε. "Εφαρμοσμένη και
Τεχνολογική Φυσική και Τεχνολογία των Laser", Γενικό
Τμήμα, Πολυτεχνείο Κρήτης.**

Χανιά, Κρήτη 2013

Εξεταστική Επιτροπή:

Καθηγητής Δ. Έλληνας	Πολυτεχνείο Κρήτης
Επικ. Καθηγητής Κομίνης Ι.	Πανεπιστήμιο Κρήτης
Επικ. Καθηγητής Δ.Γ. Αγγελάκης	Πολυτεχνείο Κρήτης (Επιβλέπων)

©2013 Μιχάλης Ν. Καλογεράκης
email συγγραφέα: neo24483 [at] gmail . com

Στους δάσκαλους και τους μαθητές που ποτέ δεν έχασαν την επιμονή τους

Abstract

Cavity QED systems have been proved to be excellent platforms for the implementation of quantum information processing algorithms. In this thesis we review the major results in this field and conclude by proposing how to implement the Deutsch-Jozsa in a system of two evanescently coupled cavities. In the first part we review the physics of both the ideal and dissipative cases of a two-level-atom coupled to an optical cavity mode. We analyze in detail the corresponding Jaynes-Cummings model and derive the dynamics of the system in the presence of dissipation using both the Master Equation and the Quantum Trajectories approach. We then proceed with a presentation of the Deutsch-Jozsa, Grover and Shor search algorithms and review in detail some early results regarding their implementation using flying Rydberg atoms in open microwave cavities. We extend our study to novel systems by analyzing the quantum dynamics of a system of two evanescently coupled optical cavities, each interacting with atomic emitters. This is done for different regimes of interactions (dispersive, resonant and strongly coupled) using both the Schrödinger and the Master equation approach. We conclude with a proposal for the implementation of Deutsch-Jozsa algorithm in the presence of significant cavity losses and analyze the robustness for different regimes by calculating the fidelity of the basic entangling gate of the algorithm.

Περίληψη

Έχει γίνει αποδεκτό ότι τα συστήματα κοιλότητων Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής αποτελούν πολύ καλές πλατφόρμες για την υλοποίηση αλγορίθμων κβαντικής πληροφορίας. Σε αυτή τη διπλωματική διατριβή κάνουμε ανασκόπηση των σημαντικότερων αποτελεσμάτων σε αυτό το ερευνητικό πεδίο και καταλήγουμε προτείνοντας μια μέθοδο υλοποίησης του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa σε ένα σύστημα δύο συζευγμένων κοιλότητων. Στο πρώτο μέρος κάνουμε ανασκόπηση της ιδανικής περίπτωσης καθώς και της περίπτωσης με απώλειες για ένα σύστημα ενός ατόμου δύο επιπέδων συζευγμένου με έναν τρόπο ταλάντωσης της οπτικής κοιλότητας. Αναλύουμε λεπτομερώς το μοντέλο Jaynes-Cummings και βρίσκουμε τις εξισώσεις της δυναμικής του συστήματος παρουσία απωλειών χρησιμοποιώντας την Master Equation, αλλά και τη Μέθοδο Κβαντικών Τροχιών. Συνεχίζουμε μετέπειτα με την παρουσίαση των κβαντικών αλγορίθμων αναζήτησης Deutsch-Jozsa, Grover και Shor και παρουσιάζουμε αναλυτικά δύο από τις αρχικές προτάσεις που αφορούν την υλοποίησή τους χρησιμοποιώντας ιπτάμενα άτομα Rydberg σε ανοικτές κοιλότητες μικροκυμάτων. Επεκτείνουμε τη μελέτη μας αναλύοντας τη δυναμική συμπεριφορά ενός νέου συστήματος δύο συζευγμένων κοιλότητων, κάθε μία εκ των οποίων αλληλεπιδρά με άτομα ξεχωριστά. Αυτή η μελέτη γίνεται για διάφορες περιοχές αλληλεπίδρασης (περιοχή αποσυντονισμού, συντονισμού και ισχυρής σύζευξης), χρησιμοποιώντας και την εξίσωση Schrödinger και την Master Equation. Καταλήγουμε, παρουσιάζοντας μια καινούργια πρόταση υλοποίησης του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa και αναλύουμε την αποτελεσματικότητα της υλοποίησής του, παρουσία σημαντικών απωλειών, υπολογίζοντας την πιστότητα (fidelity) της βασικής πύλης εναγκαλισμού του αλγορίθμου.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	iii
Εισαγωγή	v
1 Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε Κοιλότητες	1
1.1 Κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου	1
1.2 Κβαντικές καταστάσεις του HM πεδίου	5
1.2.1 Καταστάσεις Fock	5
1.2.2 Σύμφωνες Καταστάσεις	7
1.2.3 Θερμικές Καταστάσεις	10
1.3 Το μοντέλο Jaynes-Cummings	11
1.3.1 Αλληλεπίδραση φωτονίου ατόμου	11
1.3.2 Η προσέγγιση των «ντυμένων» καταστάσεων.	22
1.4 Πειράματα σε Cavity QED	25
1.4.1 Ρυθμίζοντας ενεργειακά επίπεδα και ρυθμούς αυθόρμητης εκπομπής σε κοιλότητες	26
1.4.2 Κοιλότητες μικροκυμάτων και η περιοχή ισχυρής σύζευξης	27
1.5 Η μη-ιδανική περίπτωση: διαδικασίες με απώλειες	29
1.5.1 Προσομείωση Monte Carlo- Κβαντικές Τροχιές	31
2 Κβαντικοί Αλγόριθμοι και Κβαντική Υπολογιστική	37
2.1 Κβαντικά Bits και Πύλες	38
2.1.1 Πράξεις με ένα qubit	40
2.1.2 Πύλες με δύο qubits	41
2.1.3 Πύλες με τρία qubits	42
2.2 Ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa	43
2.3 Ο αλγόριθμος αναζήτησης του Grover	45
2.3.1 Παράδειγμα της χρήσης του Grover με τέσσερα αντικείμενα.	48
2.4 Ο αλγόριθμος του Shor	49
2.4.1 Ο Κβαντικός μετασχηματισμός Fourier	52
2.4.2 Εύρεση της περιόδου μιας συνάρτησης με τον QFT	54

3	Υλοποίηση αλγορίθμων σε συστήματα Cavity QED	57
3.1	Υλοποίηση του Grover	58
3.1.1	Εναλλακτική υλοποίηση της κβαντικής πύλης φάσης	63
3.2	Υλοποίηση του Κβαντικού Μετασχηματισμού Fourier	66
4	Υλοποίηση κβαντικών πυλών σε συστοιχίες συζευγμένων κοιλοτήτων	71
4.1	Δυναμική στο μοντέλο δύο συζευγμένων κοιλοτήτων	72
4.2	Αναλυτική μέθοδος	75
4.2.1	Περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης	77
4.2.2	Περιοχή μεγάλου αποσυντονισμού	79
4.2.3	Περίπτωση συντονισμού	81
4.3	Δυναμική του συστήματος δύο συζευγμένων κοιλοτήτων παρουσία απωλειών.	83
4.4	Πρόταση για την υλοποίηση του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa σε ένα σύστημα δύο συζευγμένων κοιλοτήτων.	86
5	Επίλογος	91
	Παράρτημα Α. Υπολογιστικές Τεχνικές Κβαντικής Οπτικής	93
1	Υπολογιστικά πακέτα για την Κβαντική Οπτική	93
2	Λεπτομέρειες για τον κώδικα της Mathematica	93
3	Κώδικας της Python	95
	Παράρτημα Β. Θεωρητικά εργαλεία Κβαντικής Οπτικής	101
1	Αρμονικός ταλαντωτής με φορμαλισμό Dirac	101
2	Η εικόνα Schrödinger	109
3	Εικόνα Heisenberg	110
4	Εικόνα Αλληλεπίδρασης	112
5	Διαδικασίες με απώλειες σε cavity QED	114
51	Η Lindblad Master Equation	115
	Κατάλογος Σχημάτων	119
	Κατάλογος Πινάκων	123
	ΑΝΑΦΟΡΕΣ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	125
	Ευχαριστίες	139

Εισαγωγή

Αδιαμφισβήτητα, ένα από τα σημαντικότερα επιστημονικά πεδία που αναπτύχθηκαν κατά τον 20^ο αιώνα ήταν η Κβαντομηχανική[1, 2, 3, 4, 5]. Έχουμε αυτή τη στιγμή στη διάθεσή μας ένα σύνολο από τους βασικούς κανόνες που κυβερνούν το Σύμπαν και στην πραγματικότητα, έχουμε φτάσει σε σημείο να μπορούμε να ανακαλύπτουμε το πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτούς τους κανόνες σε διάφορα πεδία της Επιστήμης και της Τεχνολογίας, προκειμένου να φτιάξουμε όλες τις συσκευές της καθημερινής μας ζωής: από τα ηλεκτρονικά συστήματα των αυτοκινήτων μας και τα κινητά μας τηλέφωνα, έως τα υπερσύγχρονα υπολογιστικά συστήματα.

Στα πρώτα βήματα της Κβαντομηχανικής, καθιερώθηκε ο όρος "*Gedankenexperimenten*" ή «Νοητικό Πείραμα», προκειμένου να περιγραφούν διάφορες εξιδανικευμένες καταστάσεις που θα μπορούσαν να μας επιτρέψουν να κατανοήσουμε τα προβλήματα που ανέκυπταν, τα οποία σε πολλές περιπτώσεις ήταν ενάντια στη «Φυσική Διάισθησή» μας.

Κατά πάσα πιθανότητα, το πιο γνωστό «Νοητικό Πείραμα» ήταν αυτό της περιφημής «Γάτας του Schrödinger»¹

Ένα άλλο διάσημο Νοητικό Πείραμα, που αφορούσε την κατάσταση στην οποία έχει παγιδευτεί ένα **φωτόνιο σε ένα κουτί**, χρησιμοποιήθηκε στα επιχειρήματα που αναπτύχθηκαν από τους Niels Bohr και Albert Einstein. Στις ανοιχτές επιστολές που δημοσίευσαν, η διαφωνία τους αφορά την παραβίαση της απροσδιοριστίας ενέργειας-χρόνου, στην περίπτωση που ένα φωτόνιο παγιδευμένο σε ένα κουτί με κλείστρο, επιτρέπεται να διαφύγει από το κουτί καθώς ανοίγει το κλείστρο.

Ήταν αυτό το νοητικό πείραμα, που οδήγησε στα συστήματα των σύγχρονων Κοιλοτήτων Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής Cavity QED[6, 7], στα οποία, κατά διαβολική σύμπτωση, παρατηρήθηκε για πρώτη φορά η κατάσταση της γάτας του Schroödinger. Όλα ξεκίνησαν από τον Purcell το 1946 [8], στη μελέτη ενός από τα πιο μυστήρια έως τότε φαινόμενα που συνόδευαν το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Η μελέτη των παραμέτρων που επηρεάζουν τους ρυθμούς της αυθόρμητης εκπομπής

¹Στην πραγματικότητα, ο Schrödinger συγκλονισμένος από το ενδεχόμενο να υπάρχει ένα σύστημα σε μια τέτοια εναγκαλισμένη κατάσταση, έδωσε αυτό το παράδειγμα με σκοπό να δείξει πόσο γελοίο θα ήταν το να υπάρχει ένα σύστημα σε τέτοια κατάσταση.

και η κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου [9], προετοίμασαν το έδαφος στο οποίο στηρίχτηκαν τα lasers, τα masers και μια ολόκληρη εποχή στη Σύγχρονη Φυσική, εμπλουτίζοντας τα πεδία της Κβαντικής Οπτικής [10, 11, 12, 13, 14, 15] και προσφέροντας ένα αξιόπιστο πεδίο δοκιμών για το ανερχόμενο πεδίο της Κβαντικής Πληροφορίας και της Κβαντικής Υπολογιστικής [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

Πρωταρχικός στόχος σ' αυτή τη μεταπτυχιακή διατριβή είναι να γίνει μια σύντομη και περιεκτική περιγραφή στα χαρακτηριστικά της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής σε Κοιλοότητες και να δείξουμε πώς αυτά τα συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την υλοποίηση Κβαντικών Αλγορίθμων.

Στο Κεφάλαιο 1, περιγράφουμε την κβάντιση του ΗΜ πεδίου και το μοντέλο Jaynes-Cummings, με το οποίο περιγράφεται η απλούστερη, ιδανική περίπτωση αλληλεπίδρασης φωτός-ύλης, όταν και το πεδίο και το άτομο είναι πλήρως κβαντισμένα. Συνεχίζουμε, δίνοντας μια σύντομη περιγραφή των Κοιλοτήτων Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής, ακολουθώντας κυρίως τα [7, 11, 14] και αναλύοντας τα βασικά χαρακτηριστικά των Ανοικτών Συστημάτων (Open Systems) όπως παρουσιάζονται στα [25], [26, 27].

Στο Κεφάλαιο 2 δίνουμε το περίγραμμα του πεδίου της Κβαντικής Πληροφορίας και περιγράφουμε την κλάση των *κβαντικών αλγορίθμων αναζήτησης*, δηλαδή των αλγορίθμων Deutsch-Jozsa[22, 28, 23], Grover[29, 30, 31, 32] και του αλγορίθμου παραγοντοποίησης του Shor[33].

Στο Κεφάλαιο 3 θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την υλοποίηση των αλγορίθμων Grover και Shor σε cavity QED, ακολουθώντας την προσέγγιση δύο πρώιμων εργασιών από τους M.O. Scully [34] και της ομάδας του S. Haroche[35].

Στο Κεφάλαιο 4, θα συναντήσουμε το νέο πεδίο των *«Συστοιχιών Συζευγμένων Κοιλοτήτων»* (Coupled Cavity Arrays) που βρίσκει εφαρμογές στην «Κβαντική Εξομείωση» (Quantum Simulation)[21, 36, 37]. Αφού παρουσιάσουμε σύντομα το πεδίο, προτείνουμε ένα νέο πρωτόκολλο για την υλοποίηση κβαντικών αλγορίθμων σε μικρής κλίμακας συστοιχίες που αποτελούνται από ζευγάρια συζευγμένων κοιλοτήτων. Θα δείξουμε το πώς καθίσταται υλοποιήσιμος ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa σε αυτή τη διάταξη, καθώς και το πόσο αξιόπιστες είναι οι πύλες που μπορούν να υλοποιηθούν μέσω αυτής όταν το σύστημα έχει απώλειες.

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εστιάζει κυρίως σε θέματα που αφορούν τις κοιλοότητες που λειτουργούν στα μικροκύματα και τις τις εφαρμογές τους στην Κβαντική Υπολογιστική όπως διερευνάται από την ομάδα του **S. Haroche** στο ENS Paris. Ισότιμα σημαντική και σχολαστική δουλειά ωστόσο έχει πραγματοποιηθεί και από άλλες πειραματικές ομάδες που δουλεύουν σε οπτικές συχνότητες στο cavity QED, ανάμεσα στις οποίες οι ομάδες των **J. Kimble**[38],[39],[40, 41] και **D. Meschede**[42],[43],[44].

Εκτός από το cavity QED, έχει σημειωθεί εξαιρετική πρόοδος όσον αφορά την υλοποίηση Κβαντικών Αλγορίθμων και σε άλλες πειραματικές πλατφόρμες που

παρέχονται από **παγίδες ιόντων**(ion traps) [45, 46, 47], **Πυρηνικό Μαγνητικό Συντονισμό** [48] και πολύ πρόσφατα από την κοινότητα των **Υπεραγώγιμων Κυκλωμάτων** και τις ομάδες στο Yale και το E.T.H., που αφορούν ένα νέο είδος πειραματικής επίδειξης του μοντέλου Jaynes-Cummings, που έχει οδηγήσει στην καθιέρωση του πεδίου της **Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής σε Κυκλώματα**(circuit QED) [49], [50], [51].

Στη διάρκεια της συγγραφής αυτής της διατριβής, η οποία γράφτηκε κατά την περίοδο Αυγούστου 2012-Δεκεμβρίου 2012, ανακοινώθηκε ότι «*Το βραβείο Νόμπελ Φυσικής για το 2012 απονέμεται από κοινού στους S. Haroche και David J. Wineland για τις ρηξικέλευθες πειραματικές μεθόδους που ανέπτυξαν και δίνουν τη δυνατότητα μέτρησης και μεταχείρισης μεμονομένων κβαντικών συστημάτων*».

Κεφάλαιο 1

Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε Κοιλότητες

1.1 Κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Στην απλή περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή¹, περιγράφουμε την ιδανική περίπτωση ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται υπό την επίδραση ενός αρμονικού δυναμικού σε μία διάσταση. Έχοντας ως σημείο εκκίνησης την έννοια των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, σκοπός μας είναι να καταλήξουμε στις ισοδύναμες σχέσεις που εμπεριέχουν τις αντίστοιχες ποσότητες του ηλεκτρομαγνητισμού, στην κβαντομηχανική τους εκδοχή, πράγμα που δικαιολογεί την επιλογή του όρου «Κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου». Οι εξισώσεις του Maxwell σε ένα χώρο όπου δεν υπάρχουν φορτία, γράφονται ως:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.1}$$

όπου $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, μ_0 και ϵ_0 είναι η μαγνητική επιδεκτικότητα και η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού και $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$.

Οι εξισώσεις Maxwell έχουν το χαρακτηριστικό της αναλλοίωτης βαθμίδας στην περίπτωση που δεν υπάρχουν πηγές HM πεδίων. Αυτό στην ουσία μας επιτρέπει να

¹Η απόδειξη της λεγόμενης "κβάντισης του HM πεδίου" περιγράφεται στα περισσότερα βιβλία Κβαντομηχανικής, ωστόσο θεωρούμε τις προσεγγίσεις στα [2], [4] και [12] να είναι από τις πιο πλήρεις.

επιλέξουμε μια βαθμίδα κατάλληλη για το πεδίο που επιθυμούμε να μελετήσουμε. Μια βολική επιλογή βαθμίδας στα προβλήματα Κβαντικής Οπτικής είναι η βαθμίδα Coulomb, στην οποία αντικαθιστούμε το ηλεκτρικό \vec{E} και το μαγνητικό \vec{B} πεδίο από τις εκφράσεις που προκύπτουν με τη χρήση ενός νέου διανυσματικού πεδίου $\vec{A}(\vec{r}, t)$, ως:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.3)$$

με τη συνθήκη της βαθμίδας Coulomb να είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.4)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση για το \vec{B} από την εξίσωση 1.2 στο σύνολο εξισώσεων 1.1 βρίσκουμε ότι το $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

Το γεγονός αυτό μας νομιμοποιεί να διαχωρίσουμε το διανυσματικό δυναμικό σε δύο μιγαδικούς όρους:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) + \vec{A}^{(-)}(\vec{r}, t) \quad (1.6)$$

όπου ο όρος $\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t)$ περιέχει όλα τα πλάτη που μεταβάλλονται ανάλογα με το $e^{-i\omega t}$ για $\omega > 0$ ενώ ο όρος $\vec{A}^{(-)}(\vec{r}, t)$ περιέχει όλα τα πλάτη που μεταβάλλονται ανάλογα με την ποσότητα $e^{i\omega t}$ και $\vec{A}^{(-)} = \left(\vec{A}^{(+)}\right)^*$

Τώρα επιλέγουμε να περιορίσουμε τη διαδικασία σε ένα διακριτό σύνολο μεταβλητών, αντί για ολόκληρο το συνεχές, δηλαδή θα περιγράψουμε ένα ΗΜ πεδίο που είναι περιορισμένο σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου και θα αναπτύξουμε το διανυσματικό δυναμικό σε ένα σύνολο εξισώσεων διακριτών, ορθογώνιων τρόπων:

$$\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_k c_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} \quad (1.7)$$

Εδώ, οι συντελεστές Fourier c_k έχουν σταθερές τιμές για ένα ελεύθερο πεδίο. Το σύνολο των συναρτήσεων που περιγράφουν τους τρόπους του διανυσματικού πεδίου $\vec{u}_k(\vec{r})$ που αντιστοιχούν σε συχνότητες ω_k θα ικανοποιούν την εξίσωση

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2} \right) \vec{u}_k(\vec{r}) = 0, \quad (1.8)$$

υπό τον όρο ότι στον όγκο δεν περιέχεται κάποιο διαθλαστικό υλικό. Επιπλέον, οι συναρτήσεις των τρόπων απαιτούμε να ικανοποιούν την συνθήκη εγκαρσιότητας.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_k(\vec{r}) = 0 \quad (1.9)$$

Οι συναρτήσεις των τρόπων ταλάντωσης του πεδίου, συνιστούν ένα πλήρες, ορθοκανονικό σύνολο, το οποίο μπορούμε να δηλώσουμε με τη σχέση:

$$\int_V \vec{u}_k^*(\vec{r}) \vec{u}_{k'}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{kk'} \quad (1.10)$$

Αυτές οι συναρτήσεις τρόπων ταλάντωσης καθορίζονται από τις οριακές συνθήκες του φυσικού όγκου που μελετάται κάθε φορά, γεγονός που θα αποδειχθεί εξέχουσας σημασίας στη συνέχεια. Αν θεωρήσουμε τις κατάλληλες εξισώσεις των τρόπων ενός επιπέδου κύματος για ένα κύβο πλευράς L , μπορούμε να τις γράψουμε ως:

$$\vec{u}_k(\vec{r}) = L^{-\frac{3}{2}} \hat{e}^{(\lambda)} \exp \left[i \vec{k} \cdot \vec{r} \right] \quad (1.11)$$

όπου με $\hat{e}^{(\lambda)}$ έχουμε ορίσει το μοναδιαίο διάνυσμα πόλωσης. Ο δείκτης k κάθε τρόπου του κύματος περιγράφει αρκετές διακριτές μεταβλητές, τον δείκτη της πόλωσης ($\lambda = 1, 2$) καθώς και τις τρεις Καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος διάδοσης \vec{k} :

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.12)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συνθήκη εγκαρσιότητας, 1.9, το διάνυσμα πόλωσης $\hat{e}^{(\lambda)}$ πρέπει να είναι κάθετο στο \vec{k} , οπότε το διανυσματικό δυναμικό μπορεί να ξαναγραφτεί στη μορφή:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0}} \left[a_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t} \right] \quad (1.13)$$

Η αντίστοιχη έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο, τώρα θα είναι:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0}} \left[a_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t} \right] \quad (1.14)$$

Στην κλασσική θεωρία του Ηλεκτρομαγνητισμού, αυτά τα πλάτη Fourier είναι μιγαδικοί αριθμοί. Λόγω του ότι τα φωτόνια είναι μποζόνια, δηλαδή ισχύουν οι γνώριμες μεταθετικές σχέσεις του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, είναι εύκολο να επιλέξουμε τα \hat{a}_k και \hat{a}_k^\dagger να είναι μεταξύ τους αμοιβαία αναστροφосоσυγείς (adjoint) τελεστές.

Η δυναμική συμπεριφορά των πλάτων του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο ανεξάρτητων αρμονικών ταλαντωτών που υπακούουν στις μεταθετικές σχέσεις των μποζονικών τελεστών:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (1.15)$$

Οι κβαντικές καταστάσεις κάθε τρόπου πλέον, μπορούν να αναλυθούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Η κατάσταση στην οποία κάθε τρόπος μπορεί να περιγραφεί από ένα καταστασιακό διάνυσμα $|\Psi\rangle_k$ του χώρου Hilbert, κατάλληλα προσαρμοσμένο σ' αυτόν τον τρόπο. Οι καταστάσεις ολόκληρου του πεδίου ορίζονται τότε ως το τανυστικό γινόμενο των χώρων Hilbert για όλους τους τρόπους ταλάντωσης. Η Χαμιλτονιανή για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δίδεται από τη σχέση [4]

$$H = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2) d\vec{r} \quad (1.16)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση 1.14 για το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} , την ισοδύναμη έκφραση για το βοηθητικό πεδίο \vec{H} και κάνοντας χρήση των συνθηκών ορθοκανονικότητας και εγκαρσιότητας η Χαμιλτονιανή φτάνει στην απλούστερη μορφή:

$$H = \sum_k \hbar \omega_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \frac{1}{2} \right) \quad (1.17)$$

Συνεπώς έχουμε αποδείξει ότι η ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δεν είναι τίποτα παραπάνω από το άθροισμα του αριθμού φωτονίων σε κάθε τρόπο ταλάντωσης του πεδίου, συν την ποσότητα $\frac{1}{2} \hbar \omega_k$, που αναπαριστά τις αυξομειώσεις του κενού σε κάθε τρόπο ταλάντωσης. Σ' αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στην αναπαράσταση του χώρου των φάσεων χρησιμοποιώντας τις τετραγωνικές μορφές του πεδίου. Οι κανονικές μεταβλητές \hat{X}_1 και \hat{X}_2 αναπαριστούν την κανονική θέση και ορμή αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{X}_2 &= i\sqrt{2\hbar\omega} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκφράσεις για ένα επίπεδο κύμα ενός μοναδικού τρόπου ταλάντωσης, μπορούμε να γράψουμε την έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο ως:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} \epsilon_k \left[\hat{X}_1 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - \hat{X}_2 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \right] \quad (1.19)$$

Οι κανονικές μεταβλητές \hat{X}_1 και \hat{X}_2 είναι τα πλάτη των τετραγωνικών μορφών στις οποίες μπορεί να αναλυθεί το πεδίο.

1.2 Κβαντικές καταστάσεις του ΗΜ πεδίου

Η διαδικασία της κβάντισης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δημιουργεί εύλογα την περιέργεια της εφαρμογής ορισμένων τεχνικών της κβαντιμηχανικής για την εξερεύνηση των ιδιοτιμών της Χαμιλτονιανής του πεδίου. Στα παρακάτω, θα αναφέρουμε συνοπτικά ορισμένες από τις συχνότερα χρησιμοποιούμενες καταστάσεις του φωτός στα πλαίσια της Κβαντομηχανικής.

1.2.1 Καταστάσεις Fock

Η χαμιλτονιανή 1.17 έχει ιδιοτιμές $\hbar\omega_k (n_k + \frac{1}{2})$ όπου η n_k είναι φυσικός αριθμός. Οι ιδιοκαταστάσεις της γράφονται ως $|n_k\rangle$ και είναι γνωστές ως καταστάσεις Fock ή καταστάσεις αρίθμησης (number states). Είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή αρίθμησης $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$, δηλαδή:

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |n_k\rangle = n_k \hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle \quad (1.20)$$

Η θεμελιώδης κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή στην οποία συνήθως αναφερόμαστε ως *κατάσταση κενού* (vacuum state), ορίζεται ως:

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0 = |0\rangle \hat{a}_k^\dagger \quad (1.21)$$

πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οι μέση τιμή των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής μηδενίζονται σ' αυτήν την κατάσταση. Δρώντας την Χαμιλτονιανή στην κατάσταση κενού $|0\rangle$, παίρνουμε τη σχέση:

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k \quad (1.22)$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Όπως φαίνεται, δεν υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο ανώτερο φράγμα στις συχνότητες του αθροίσματος των τρόπων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, οπότε η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης είναι *άπειρη*. Αυτή η απροσδιοριστία στο σημείο μηδενικής ενέργειας (Z.P.E.) δεν είναι η μόνη περίπτωση ιδιότροπων απειρισμών στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική. Η διαδικασία της επακανονικοποίησης καταφέρει να διαχειριστεί σε μεγάλο βαθμό αυτές τις περιπτώσεις. Στην πραγματικότητα όμως, η ενέργεια του κενού και οι διακυμάνσεις της, είναι η αιτία μιας μεγάλης ποικιλίας παρατηρήσιμων φαινομένων όπως το φαινόμενο Cassimir και η μετατόπιση Lamb. Στη σύγχρονη θεωρία βαθμωτών πεδίων, η έννοια της "θάλασσας Fermi" που περιγράφει το κενό ως μια οντότητα κάθε άλλο παρά "αδεια", με δισεκατομμύρια σωματίδια να δημιουργούνται και να εξαϋλώνονται ταυτόχρονα, δίνει την ακριβή εικόνα που περιγράφει ωμά η εξίσωση 1.22. Μια άλλη σημαντική λεπτομέρεια που θα πρέπει να σημειωθεί,

είναι το γεγονός ότι η κατάσταση κενού, όπως και όλες οι στάσιμες καταστάσεις του πεδίου είναι επίσης ιδιοτιμή της Χαμιλιτονιανής, όμως όχι των τελεστών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Συνεπώς στην κατάσταση κενού το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο δεν έχουν καθορίσιμες τιμές. Μπορούμε εύκολο να υπολογίσουμε τη μηδενική μέση τιμή του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου για την κατάσταση κενού, όμως στην πραγματικότητα οι τιμές τους διακυμαίνονται γύρω από τη μηδενική μέση τους τιμή για την περίπτωση του πεδίου ενός τρόπου ταλάντωσης. Εκτενής συζήτηση για τα ζητήματα που προκύπτουν από αυτές τις ιδιαίτερες ιδιότητες της κατάστασης κενού, μπορούν να βρεθούν στα [13] και [10]. Όσον αφορά τα ονόματα που χρησιμοποιήσαμε για τους τελεστές \hat{a} και \hat{a}^\dagger , πλέον είναι προφανές ότι σε μια δεδομένη κατάσταση Fock $|n\rangle$ με n φωτόνια, ο τελεστής δημιουργίας \hat{a}^\dagger δημιουργεί ένα επιπλέον φωτόνιο δίνοντας την κατάσταση $|n+1\rangle$, ενώ ο τελεστής καταστροφής \hat{a} δίνει την $|n-1\rangle$ με τις αντίστοιχες σταθερές κανονικοποίησης:

$$\hat{a}_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle, \quad \hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle \quad (1.23)$$

Ξεκινώντας από την κατάσταση κενού $|0\rangle$, είναι ξεκάθαρο ότι για να φτάσει το σύστημα στην κατάσταση $|n_k\rangle$, θα πρέπει να δράσει ο τελεστής δημιουργίας n φορές, συνεπώς:

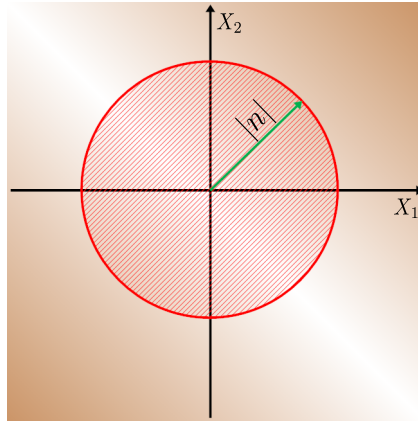
$$|n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle, \quad n_k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Οι καταστάσεις Fock είναι ορθοκανονικές και πλήρεις, πράγμα που δηλώνεται με τις σχέσεις:

$$\langle n_k | m_k \rangle = \delta_{nm} \quad (1.25)$$

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle \langle n_k| = 1 \quad (1.26)$$

Ενώ οι καταστάσεις αρίθμησης αποτελούν μια χρήσιμη αναπαράσταση για φωτόνια υψηλών ενεργειών, πχ. ακτίνες-γ, όπου ο αριθμός των φωτονίων είναι πολύ μικρός, δεν είναι η καλύτερη δυνατή αναπαράσταση για οπτικά πεδία όπου ο συνολικός αριθμός φωτονίων είναι πολύ μεγάλος. Επιπλέον, παρά το ότι μπορούν να παραχθούν πειραματικά, λ.χ. όταν ένα άτομο αλληλεπιδρά με ένα ΗΜ πεδίο σε μια υψηλού συντελεστή ποιότητας Q κοιλότητα και εκπέμπει ένα μοναδικό φωτόνιο, δεν είναι δυνατόν να δημιουργηθούν πολλά φωτόνια στην ίδια κοιλότητα. Συνήθως λέμε ότι **οι καταστάσεις Fock είναι οι καταστάσεις που εκδηλώνεται περισσότερο απ'όλες τις αναπαραστάσεις, ο κβαντικός χαρακτήρας του φωτός**. Χρησιμοποιώντας το χώρο των φάσεων, έχοντας στους άξονες τις κανονικές συντεταγμένες σε φυσικές μονάδες, είμαστε σε θέση να οπτικοποιήσουμε τις ιδιότητες



Σχήμα 1.1: Αναπαράσταση μιας κατάστασης αρίθμησης στο χώρο των φάσεων

των καταστάσεων Fock. Οι κανονικές συντεταγμένες όπως ορίστηκαν στις σχέσεις 1.18 δεν μετατίθενται, λέμε ότι το σύστημα δεν είναι *καλά εντοπισμένο στον χώρο των φάσεων*. Επιπλέον, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι οι καταστάσεις αρίθμησης *μεγιστοποιούν την αβεβαιότητα της φάσης*, δηλαδή ότι $\Delta\phi = 2\pi$.

1.2.2 Σύμφωνες Καταστάσεις

Οι σύμφωνες καταστάσεις είναι υπερθέσεις των καταστάσεων αρίθμησης $|n\rangle$. Συμβολίζοντας με $|\alpha\rangle$ και θα πρέπει να αποφεύγεται η σύγχυση με τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Οι εφαρμογές τους συμπεριλαμβάνουν την ακριβή περιγραφή καταστάσεων μονοχρωματικής ακτινοβολίας σε συνεχή κυματομορφή (CW) πάνω από το όριο κατωφλίου ενώ τα κυματοπακέτα που σχηματίζονται από σύμφωνες καταστάσεις περιγράφουν με καλή προσέγγιση τις καταστάσεις των παλμικών laser.

Ίσως ο πιο απλός τρόπος για την κατανόηση των σύμφωνων καταστάσεων να είναι αυτός που ακολουθήθηκε ανεξάρτητα από τους Glauber[52] και Sudarshan[53], που δικαιολογεί την ονομασία τους ως καταστάσεις Glauber-Sudarshan.

Αν θεωρήσουμε ένα μονοχρωματικό κύμα, ούτως ώστε να αφήσουμε στην άκρη τον δείκτη k , μπορούμε με τη χρήση του τελεστή μετατόπισης

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})} \quad (1.27)$$

και τον τύπο Baker-Hausdorff για δύο τελεστές \hat{A} και \hat{B} τέτοιους ώστε $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, να γράψουμε:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} \quad (1.28)$$

Συνεπώς η έκφραση για τον τελεστή μετατόπισης γίνεται:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}} \quad (1.29)$$

Η απόδειξη του τύπου Baker-Hausdorff εμπεριέχει τη χρήση της ακόλουθης ταυτότητας που ισχύει για δύο οποιουσδήποτε τελεστές:

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{1!} + \frac{[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]}{2!} + \dots \quad (1.30)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) &= \hat{a} + \alpha \\ \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) &= \hat{a}^\dagger + \alpha^* \end{aligned} \quad (1.31)$$

Αυτή η έκφραση μας εξηγεί για ποιο λόγο ο τελεστής $\hat{D}(\alpha)$ ονομάζεται τελεστής μετατόπισης. Πλέον είμαστε σε θέση να ορίσουμε τη *σύμφωνη κατάσταση* $|\alpha\rangle$, ως μια **μετατοπισμένη κατάσταση κενού** $|0\rangle$.

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle \quad (1.32)$$

Η εναλλακτική προσέγγιση στον ορισμό της σύμφωνης κατάστασης στηρίζεται στην ακόλουθη ιδιότητα:

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} |\alpha\rangle &= \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) |0\rangle \\ &= \alpha |0\rangle \\ &= \alpha \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\alpha) |0\rangle \\ &= \alpha \hat{D}^\dagger(\alpha) |\alpha\rangle \end{aligned} \quad (1.33)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (1.34)$$

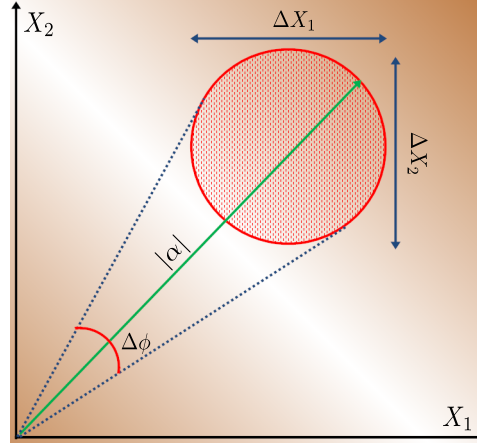
$$\langle\alpha| \hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha| \quad (1.35)$$

Αν σταθούμε λίγο στις δύο αυτές εξισώσεις, διαπιστώνουμε ότι *οι συμφωνες καταστάσεις είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή καταστροφής*. Εφόσον ο τελεστής \hat{a} δεν είναι ερμιτιανός, οι ιδιοτιμές του είναι μιγαδικοί αριθμοί. Σε αντίθεση με τις καταστάσεις αρίθμησης που περιέχουν ορισμένο και σταθερό αριθμό φωτονίων, οι συμφωνες καταστάσεις είναι υπερθέσεις των καταστάσεων αρίθμησης με μια αβεβαιότητα στον αριθμό των φωτονίων. Για να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι $|n\rangle \hat{a} = \sqrt{n+1} |n+1\rangle = \alpha |n+1\rangle$ και της εξίσωσης 1.34, που μας οδηγεί στη σχέση:

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{a} | \alpha \rangle &= \sqrt{n+1} \langle n+1 | \alpha \rangle = \alpha \langle n | \alpha \rangle \Rightarrow \\ \langle n | \alpha \rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \langle n-1 | \alpha \rangle \Rightarrow \\ \langle n | \alpha \rangle &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (1.36)$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή μετατόπισης 1.29, την ανάπτυξη του εκθετικού όρου και την ιδιότητα $\hat{a}|0\rangle = 0$, φτάνουμε στη σχέση:

$$\langle 0|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \quad (1.37)$$



Σχήμα 1.2: Αναπαράσταση στο χώρο των φάσεων για μια σύμφωνη κατάσταση.

Συνεπώς, οι σύμφωνες καταστάσεις έχουν την ακόλουθη αναπαράσταση σε όρους καταστάσεων αρίθμησης:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.38)$$

Αν υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να έχουμε n φωτόνια, είναι εύκολο να δείξουμε ότι αυτή η πιθανότητα ακολουθεί την κατανομή *Poisson*.

$$p_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \exp[-|\alpha|^2] \quad (1.39)$$

Προκειμένου να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός φωτονίων μπορούμε να δράσουμε τον τελεστή αρίθμησης, οπότε προκύπτει ότι:

$$\bar{n} = \langle \alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle \alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha^* \langle \alpha|\alpha|\alpha\rangle = \alpha^* \alpha \langle \alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \quad (1.40)$$

Για να μελετήσουμε την ορθογωνιότητα των σύμφωνων καταστάσεων, υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο σύμφωνες καταστάσεις, έστω α και β . Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι:

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{D}^\dagger(\beta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha\beta^*\right] \quad (1.41)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι σύμφωνες καταστάσεις δεν είναι μεταξύ τους ορθογώνιες, οπότε η επικάλυψη δύο σύμφωνων καταστάσεων θα είναι:

$$|\langle \beta|\alpha\rangle|^2 = \exp[-|\alpha - \beta|^2] \quad (1.42)$$

1.2.3 Θερμικές Καταστάσεις

Οι καταστάσεις αρίθμησης και οι σύμφωνες καταστάσεις ανήκουν στις λεγόμενες **καθαρές καταστάσεις**, υπό την έννοια ότι περιγράφονται επαρκώς από τα καταστασιακά τους διανύσματα και τον πίνακα πυκνότητάς τους ρ , για τον οποίο ισχύει

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.43)$$

κι έχει την ιδιότητα $\rho^2 = \rho$ (αφού είναι καθαρές καταστάσεις). Ένα στατιστικό μείγμα μπορεί να αναπαρασταθεί επαρκώς με τη χρήση του πίνακα πυκνότητας. Το κλασσικό παράδειγμα μιας ανάμεικτης κατάστασης (mixed state) είναι οι *θερμικές καταστάσεις*. Εισάγοντας την έννοια των θερμικών καταστάσεων, οι οποίες αντιστοιχούν στο είδος της ακτινοβολίας που συναντάμε στο μέλαν σώμα, έχουμε τη δυνατότητα να περιγράψουμε σε καλή προσέγγιση το θερμικό φως, δηλαδή την ακτινοβολία που είναι παρούσα λόγω της θερμοκρασίας ενός σώματος. Ανακαλώντας την συνάρτηση επιμερισμού Z από τη Στατιστική Φυσική και ορίζοντας $\beta = \frac{1}{k_B T}$, γράφουμε:

$$\rho \equiv \frac{e^{-\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}}}{Z} = (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) e^{-\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}} \quad (1.44)$$

Ο μέσος αριθμός φωτονίων σε μια τέτοια κατάσταση δίδεται από τη σχέση:

$$\bar{n} = (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta \hbar \omega n} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \quad (1.45)$$

συνεπώς είμαστε σε θέση να ξαναγράψουμε τον πίνακα πυκνότητας ρ ως:

$$\rho = \frac{1}{\bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \quad (1.46)$$

Η κατανομή του αριθμού των φωτονίων, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι γεωμετρική, δηλαδή:

$$p_n = \frac{1}{\bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n \quad (1.47)$$

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των θερμικών καταστάσεων που κάνει ακόμα πιο εμφανές το στοχαστικό τους χαρακτήρα, είναι το γεγονός ότι η τάξη της διακύμανσης του μέσου αριθμού φωτονίων τους, που χαρακτηρίζει τη διακύμανση του αριθμού των φωτονίων σε μια θερμική κατάσταση είναι:

$$(\Delta n)^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2 \quad (1.48)$$

Ο υπολογισμός για τη μέση τιμή $\overline{n^2}$ μας δίνει:

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2 \bar{n}^2}{\bar{n} + 1} \right)^{n+1} = \frac{1}{(\bar{n} + 1)} x \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big|_{x=\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}} = 2\bar{n}^2 + \bar{n} \quad (1.49)$$

Άρα βρίσκουμε ότι όντως η διακύμανση του αριθμού φωτονίων σε μια θερμική κατάσταση, είναι της τάξης της μέσης τιμής του αριθμού φωτονίων, πράγμα που υποδεικνύει πολύ μεγάλες διακυμάνσεις.

$$(\Delta n) = \bar{n}^2 + \bar{n} \quad (1.50)$$

1.3 Το μοντέλο Jaynes-Cummings

Η απλούστερη περίπτωση αλληλεπίδρασης ύλης-ακτινοβολίας, είναι η περίπτωση ενός ατόμου δύο επιπέδων που αλληλεπιδρά με ένα μοναδικό τρόπο ταλάντωσης του κβαντισμένου πεδίου. Σε ό,τι ακολουθεί αναλύουμε τις βασικές μαθηματικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται προκειμένου να αποδειχθεί η πλήρως κβαντιμηχανική εκδοχή της αλληλεπίδρασης πεδίου-ύλης, το μοντέλο Jaynes-Cummings.

1.3.1 Αλληλεπίδραση φωτονίου ατόμου

Η πλήρως κβαντομηχανική έκδοση του μοντέλου Rabi, που μπορεί να βρεθεί αναλυτικά στο [11], θεωρεί την αλληλεπίδραση ενός ατόμου δύο επιπέδων με καταστάσεις $|g\rangle$ (θεμελιώδη) και $|e\rangle$ (διεγερμένη), με ένα μονοχρωματικό πεδίο της μορφής:

$$\hat{E} = \vec{e} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \cdot (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \quad (1.51)$$

Με \vec{e} έχουμε συμβολίσει το αυθαίρετα κατευθυνόμενο διάνυσμα πόλωσης. Συμβολίζοντας ως \hat{d} τον τελεστή διπολικής ροπής, η Χαμιλτονιανή ατόμου-πεδίου θα είναι:

$$\hat{H} = -\hat{d} \cdot \hat{E} \quad (1.52)$$

Θέτοντας $g = -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \cdot \sin(kz)$, η Χαμιλτονιανή γράφεται στη μορφή:

$$\hat{H}^{(I)} = \hat{d}g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (1.53)$$

Θα πρέπει να τονιστεί για την αποφυγή παρερμηνειών, ότι το g είναι αριθμός, ενώ το $|g\rangle$ είναι μία κατάσταση του ατόμου. Θα αποδειχθεί χρήσιμο στη συνέχεια το να ορίσουμε τους τελεστές που περιγράφουν τις ατομικές μεταβάσεις. Δεδομένου ότι μιλάμε για ένα σύστημα δύο επιπέδων, θα πρέπει να υπάρχει ένας τελεστής για να

περιγράψει τη μετάβαση του ατόμου από την κατάσταση $|e\rangle$ στην κατάσταση $|g\rangle$, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $\hat{\sigma}_+$ κι ένας τελεστής που θα συμβολίζει την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή τη μετάβαση του ατόμου από την $|e\rangle$ στην $|g\rangle$, τον οποίο και συμβολίζουμε με $\hat{\sigma}_-$. Συνεπώς, οι τελεστές ατομικής αναβίβασης και καταβίβασης ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_+ &= |e\rangle \langle g| \\ \hat{\sigma}_- &= |g\rangle \langle e| \\ \hat{\sigma}_3 &= |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|\end{aligned}\tag{1.54}$$

Ο τελεστής $\hat{\sigma}_3$ (ή συχνά στη βιβλιογραφία $\hat{\sigma}_z$) ονομάζεται *τελεστής ατομικής αναστροφής* και η μέση του τιμή είναι μέτρο της αναστροφής πληθυσμών $W(t)$ όπως υποδεικνύει και η ονομασία του. Οι τελεστές της σχέσης 1.54 υπακούουν στους κανόνες των πινάκων Pauli, δηλαδή μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τις μεταθετικές σχέσεις μεταξύ τους θέτοντας ως: $|g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $|e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ή απλά χρησιμοποιώντας τους ορισμούς τους από την 1.54.

$$\begin{aligned}[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] &= \hat{\sigma}_3 \\ [\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_\pm] &= 2\hat{\sigma}_\pm\end{aligned}\tag{1.55}$$

Τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του τελεστή διπολικής ροπής είναι τα μη-διαγώνια στοιχεία του καθώς $\langle e|\hat{d}|e\rangle = \langle g|\hat{d}|g\rangle = 0$, οπότε αποδεικνύεται ότι:

$$\hat{d} = d|g\rangle \langle e| + d^*|e\rangle \langle g| = d\hat{\sigma}_- + d^*\hat{\sigma}_+ = d(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+)\tag{1.56}$$

Εδώ θέσαμε $\langle e|\hat{d}|g\rangle = d$ και υποθέσαμε ότι το d είναι πραγματικός αριθμός. Συνεπώς, θέτοντας $\lambda = \frac{dg}{\hbar}$, η Χαμιλτονιανή γράφεται στη μορφή:

$$\hat{H}^{(I)} = \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\tag{1.57}$$

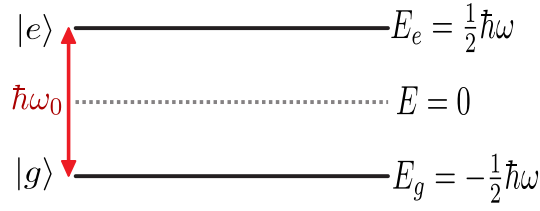
Αν ορίσουμε ως σημείο αναφοράς της ενέργειας το μέσο των ενεργειακών επιπέδων των δύο καταστάσεων (βλ. σχήμα 1.3), τότε η Χαμιλτονιανή του ελεύθερου ατόμου γράφεται ως εξής:

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}(E_e - E_g)\hat{\sigma}_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3\tag{1.58}$$

Εδώ το ω_0 συμβολίζει την ιδιοσυχνότητα μετάβασης του ατόμου (που πολλές φορές γράφεται και ως ω_{eg}). Η Χαμιλτονιανή του ελεύθερου πεδίου μετά την αλλαγή του επιπέδου μηδενικής ενέργειας, μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$\hat{H}_F = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}\tag{1.59}$$

²Συνήθως αυτή η σταθερά «λ» στη βιβλιογραφία συμβολίζεται ως «g» και ονομάζεται σταθερά σύζευξης ατόμου-πεδίου. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε έχει διαστάσεις συχνότητας.



Σχήμα 1.3: Ενεργειακά επίπεδα του ατόμου μετά τον ορισμό του μέσου της διαφοράς των E_g και E_e ως σημείο μηδενικής ενέργειας. Η ιδιοσυχνότητα μετάβασης του ατόμου έχει συμβολιστεί με ω_0 .

Η συνολική Χαμιλτονιανή λοιπόν για την περιγραφή της αλληλεπίδρασης ατόμου-πεδίου θα είναι:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}^{(I)} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (1.60)$$

Στην περίπτωση του ελεύθερου πεδίου, όπως είναι γνωστό, η χρονική εξέλιξη των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t} \quad (1.61)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t} \quad (1.62)$$

Η χρονική εξέλιξη των ατομικών τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης είναι:

$$\hat{\sigma}_\pm(t) = \hat{\sigma}_\pm(0)e^{\pm i\omega_0 t} \quad (1.63)$$

Θεωρώντας λοιπόν τη χρονική εξέλιξη της Χαμιλτονιανής 1.60 αυτού του συστήματος, χρειάζεται να λάβουμε υπόψιν τις ακόλουθες αναλογίες:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_+\hat{a} &\sim e^{i(\omega_0-\omega)t} \\ \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger &\sim e^{-i(\omega_0-\omega)t} \\ \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger &\sim e^{i(\omega_0+\omega)t} \\ \hat{\sigma}_-\hat{a} &\sim e^{-i(\omega_0+\omega)t} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Υποθέτοντας ότι $\omega_0 \simeq \omega$ το οποίο ουσιαστικά υποδηλώνει ότι η συχνότητα του μονοχρωματικού πεδίου είναι σχεδόν ίση με την ιδιοσυχνότητα του ατόμου, οι δύο τελευταίοι όροι δεν διατηρούν την ενέργεια του συστήματος! Ο όρος $\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$ αντιστοιχεί στην εκπομπή ενός φωτονίου με την αναβίβαση του ατόμου, ενώ ο όρος $\hat{\sigma}_-\hat{a}$ περιγράφει την καταβίβαση του ατόμου με απορρόφηση φωτονίου. Λαμβάνοντας υπόψιν την «Προσέγγιση Στρεφόμενου Κύματος» (Rotating Wave Approximation), οι ποσότητες που είναι ανάλογες με τους όρους $\omega_0 + \omega$ είναι ίσες με 0 καθώς ταλαντώνονται πολύ πιο γρήγορα από τους όρους που περιέχουν την ποσότητα $\omega_0 - \omega$,

συνεπώς η Χαμιλτονιανή παίρνει τη μορφή:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \quad (1.65)$$

Στη βιβλιογραφία η εξίσωση 1.65 αναφέρεται ως «**μοντέλο Jaynes-Cummings**»³. Μια εξαιρετική αναθεώρηση του θέματος υπάρχει στο [55]. Έχοντας την Χαμιλτονιανή, μπορούμε να υπολογίσουμε τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Πρώτα απ' όλα θα ορίσουμε δύο σταθερές της κίνησης: Τον τελεστή \hat{P}_e που μετρά τον αριθμό των ηλεκτρονίων που εμπλέκονται στη διαδικασία και τον αριθμό των συνολικών διεγέρσεων \hat{N}_e στο πεδίο και το άτομο:

$$\hat{P}_e = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = 1, \quad [H, P_e] = 0 \quad (1.66)$$

$$\hat{N}_e = \hat{a}^\dagger\hat{a} + |e\rangle\langle e|, \quad [\hat{H}, \hat{N}_e] = 0 \quad (1.67)$$

Η Χαμιλτονιανή της 1.65 παρατηρούμε ότι μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη:

$$\hat{H}_I = \hbar\omega\hat{N}_e + \hbar\left(\frac{\omega_0}{2} - \omega\right)\hat{P}_e \quad (1.68)$$

$$\hat{H}_{II} = -\hbar\Delta + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \quad (1.69)$$

ούτως ώστε για τους δύο όρους να ισχύει η σχέση: $[\hat{H}_I, \hat{H}_{II}] = 0$. Ο πρώτος όρος συνεισφέρει στη λύση μόνο κάποιους όρους φάσης, ενώ ο δεύτερος όρος εμπεριέχει όλη τη δυναμική του προβλήματος. Η ποσότητα $\Delta = \omega_0 - \omega$ ονομάζεται «**αποσυντονισμός**» και προφανώς είναι η διαφορά της συχνότητας του πεδίου από την ιδιοσυχνότητα του ατόμου.

Το μοντέλο Jaynes Cummings στην περίπτωση του συντονισμού.

Υποθέτοντας ότι έχουμε ένα σύστημα που βρίσκεται αρχικά στη διεγερμένη κατάσταση του $|e\rangle$, ενώ το πεδίο βρίσκεται στην κατάσταση $|n\rangle$, θα μπορούσαμε να συμβολίσουμε αυτή την αρχική κατάσταση του συστήματος ως $|i\rangle = |e\rangle|n\rangle$, ενώ η αρχική ενέργεια θα είναι $E_i = \frac{1}{2}\hbar\omega + n\hbar\omega$. Η κατάσταση $|i\rangle$ είναι συζευγμένη με την τελική κατάσταση $|f\rangle = |g\rangle|n+1\rangle$, καθώς υποθέσαμε ότι υπάρχουν μόνο δύο ατομικά επίπεδα. Η τελική κατάσταση $|f\rangle$ έχει ενέργεια $E_f = -\frac{1}{2}\hbar\omega + (n+1)\hbar\omega$ και είναι τόσο προφανές όσο κι αναμενόμενο ότι οι δύο καταστάσεις έχουν ίσες

³Η αρχική εργασία [54] στην ουσία ήταν η διδακτορική διατριβή του Fred W. Cummings με επιβλέποντα τον E.T. Jaynes και για πολλά χρόνια από τη δημοσίευσή της το 1963 ήταν διάσημη σε πολύ στενούς ακαδημαϊκούς κύκλους, καθώς ήταν πειραματικά πολύ δύσκολο το να επιτευχθούν οι συνθήκες του HM πεδίου (υψηλού συντελεστή ποιότητας συντονιστής) καθώς και του ατόμου δύο επιπέδων.

ενέργειες. Εφόσον προσπαθούμε να πάρουμε μια εξίσωση που να περιγράφει ρητά τη χρονική εξάρτηση αυτού του συστήματος, θα ξεκινήσουμε με το καταστασιακό διάνυσμα $|\psi(t)\rangle$ και θα λύσουμε την εξίσωση Schrödinger.

$$|\psi(t)\rangle = C_i(t) |i\rangle + C_f(t) |f\rangle \quad (1.70)$$

όπου $C_i(0) = 1$ αφού το άτομο για $t = 0$ βρίσκεται στην αρχική κατάσταση, ενώ $C_f(0) = 0$. Η χρήση του όρου \hat{H}_{II} της Χαμιλτονιανής 1.69 στην εξίσωση Schrödinger, δίνει:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} &= \hat{H}_{II} |\psi(t)\rangle \Leftrightarrow \\ i\hbar \frac{d(C_i(t) |i\rangle + C_f(t) |f\rangle)}{dt} &= [\hbar\lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{\alpha} + \hat{\sigma}_- \hat{\alpha}^\dagger)] \cdot [C_i(t) |i\rangle + C_f(t) |f\rangle] \Leftrightarrow \\ i\hbar \left(\dot{C}_i(t) |e\rangle |n\rangle + \dot{C}_f(t) |g\rangle |n+1\rangle \right) &= \hbar\lambda C_i(t) (\hat{\sigma}_+ \hat{\alpha} |e\rangle |n\rangle + \hat{\sigma}_- \hat{\alpha}^\dagger |e\rangle |n\rangle) + \\ &+ \hbar\lambda C_f(t) (\hat{\sigma}_+ \hat{\alpha} |g\rangle |n+1\rangle + \hat{\sigma}_- \hat{\alpha}^\dagger |g\rangle |n+1\rangle) \Leftrightarrow \\ i\hbar \left(\dot{C}_i(t) |e\rangle |n\rangle + \dot{C}_f(t) |g\rangle |n+1\rangle \right) &= \hbar\lambda \left[C_i(t) (|e\rangle \langle g| \hat{\alpha} |e\rangle |n\rangle + |g\rangle \langle e| \hat{\alpha}^\dagger |e\rangle |n\rangle) \right. \\ &+ C_f(t) (|e\rangle \langle g| \hat{\alpha} |g\rangle |n+1\rangle + |g\rangle \langle e| \hat{\alpha}^\dagger |g\rangle |n+1\rangle) \left. \right] \Leftrightarrow \\ i \left(\dot{C}_i(t) |e\rangle |n\rangle + \dot{C}_f(t) |g\rangle |n+1\rangle \right) &= \lambda C_i(t) |g\rangle \langle e| \hat{\alpha}^\dagger |e\rangle |n\rangle + \\ &+ \lambda C_f(t) |e\rangle \langle g| \hat{\alpha} |g\rangle |n+1\rangle \Leftrightarrow \\ i \left(\dot{C}_i(t) |e\rangle |n\rangle + \dot{C}_f(t) |g\rangle |n+1\rangle \right) &= \lambda C_i(t) |g\rangle \hat{\alpha}^\dagger |n\rangle + \lambda C_f(t) |e\rangle \hat{\alpha} |n+1\rangle \Leftrightarrow \\ i \left(\dot{C}_i(t) |e\rangle |n\rangle + \dot{C}_f(t) |g\rangle |n+1\rangle \right) &= \lambda C_i(t) \sqrt{n+1} |g\rangle |n+1\rangle + \\ &+ \lambda C_f(t) \sqrt{n+1} |e\rangle |n\rangle \end{aligned}$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \dot{C}_i &= -i\lambda\sqrt{n+1}C_f \\ \dot{C}_f &= -i\lambda\sqrt{n+1}C_i \end{aligned} \quad (1.72)$$

Απαλείφοντας το C_f παίρνουμε τη σχέση:

$$\ddot{C}_i + \lambda^2(n+1)C_i = 0 \quad (1.73)$$

ενώ η αντικατάσταση στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων δίνει:

$$C_f(t) = -i \sin(\lambda t \sqrt{n+1}) \quad (1.74)$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος θα είναι :

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) |e\rangle |n\rangle - i \sin(\lambda t \sqrt{n+1}) |g\rangle |n+1\rangle \quad (1.75)$$

Από το καταστασιακό διάνυσμα, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του να βρούμε το σύστημα στην κατάσταση $|i\rangle$ ως :

$$P_i(t) = |C_i(t)|^2 = \cos^2(\lambda t \sqrt{n+1}) \quad (1.76)$$

ενώ η πιθανότητα να βρούμε το σύστημα στην $|f\rangle$ θα είναι :

$$P_f(t) = |C_f(t)|^2 = \sin^2(\lambda t \sqrt{n+1}) \quad (1.77)$$

Η ατομική αναστροφή, ως μέση τιμή του τελεστή ατομικής αναστροφής, δίδεται από τη σχέση :

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_3 | \psi(t) \rangle \\ &= P_i(t) - P_f(t) \\ &= \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}) \end{aligned} \quad (1.78)$$

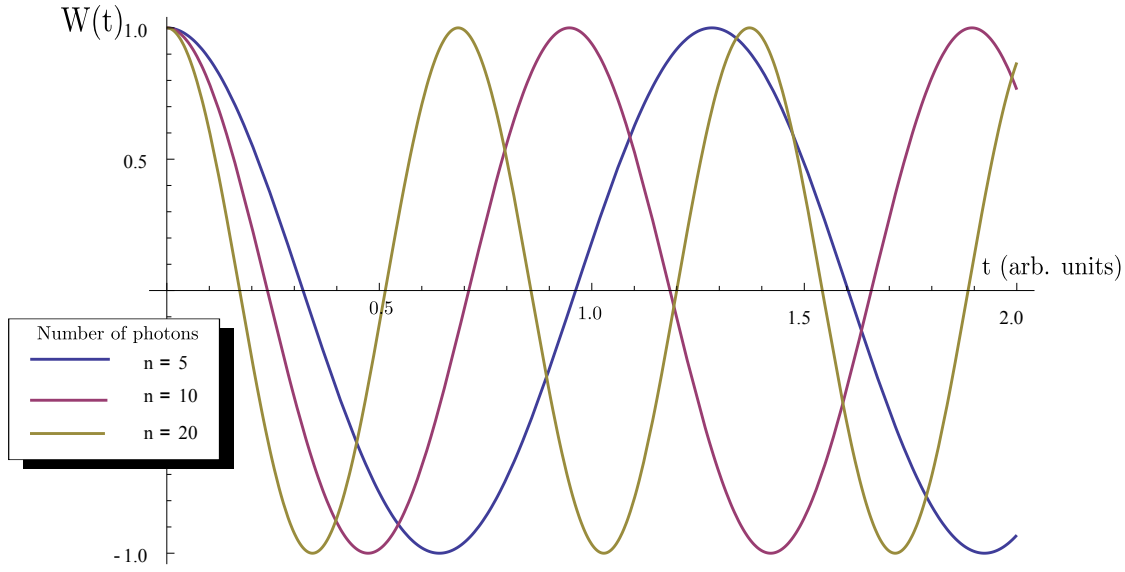
Σ' αυτό το σημείο είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε το ανάλογο της συχνότητας Ραβι στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική, ως: $\Omega(n) = 2\lambda \sqrt{n+1}$. Με τη χρήση της «συχνότητας Rabi» η ατομική αναστροφή θα γραφτεί ως :

$$W(t) = \cos[\Omega(n)t] \quad (1.79)$$

Όπως είναι καθαρό από την εξίσωση 1.79 και την εικόνα 1.4, η ατομική αναστροφή για ένα πεδίο που δίδεται από μια κατάσταση αρίθμησης, είναι περιοδικό, όπως και στην ημικλασσική περιοχή του μοντέλου Rabi, όμως υπάρχουν κάποιες εξέχουσες διαφορές.

Στην περίπτωση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, υπάρχουν ταλαντώσεις Rabi ακόμα και στην περίπτωση $n = 0$ δηλαδή για την κατάσταση κενού. Αυτές ονομάζονται «**ταλαντώσεις Rabi του κενού**» και δεν υπάρχει κλασσικό ανάλογό τους. Οφείλονται στην αυθόρμητη απορρόφηση κι επανεκπομπή ενός φωτονίου, ένα φαινόμενο που οφείλεται στο φαινόμενο Purcell[8] και μπορεί να παρατηρηθεί σε κοιλότητες μεγάλου συντελεστή ποιότητας Q , όπως θα δούμε σύντομα. Ίσως είναι ενάντια στην διαίσθησή μας το γεγονός ότι οι καταστάσεις αρίθμησης, οι πιο «κβαντικές» απ' όλες τις καταστάσεις του φωτός εκδηλώνουν αυτήν την σχεδόν κλασσική συμπεριφορά. Μάλιστα, θα περίμενε κανείς αυτή η περιοδικότητα να εμφανίζεται σε ένα αρχικά σύμφωνο πεδίο. Εξετάζοντας αυτή την περίπτωση, ας υποθέσουμε ότι το άτομο είναι αρχικά σε μια υπέρθεση της θεμελιώδους και της διεγερμένης του κατάστασης, δηλαδή :

$$|\psi(0)\rangle_{atom} = C_g |g\rangle + C_e |e\rangle \quad (1.80)$$



Σχήμα 1.4: Ατομική αναστροφή για καταστάσεις αρίθμησης με διαφορετικό αριθμό n φωτονίων.

Αν το πεδίο είναι σε μια υπέρθεση καταστάσεων αρίθμησης, τότε

$$|\psi(0)\rangle_{field} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (1.81)$$

Συνεπώς η αρχική κατάσταση του συστήματος μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle_{atom} \otimes |\psi(0)\rangle_{field} \quad (1.82)$$

Η λύση της εξίσωσης Schrödinger για αυτή την περίπτωση μας δίνει:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \{ [C_e C_n \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) - i C_g C_{n+1} \sin(\lambda t \sqrt{n+1})] |e\rangle + [-i C_e C_{n-1} \sin(\lambda t \sqrt{n}) + C_g C_n (\cos \lambda t \sqrt{n})] |g\rangle \} |n\rangle \quad (1.83)$$

Γενικά, αυτή είναι μια «εναγκαλισμένη κατάσταση» (entangled state). Στην περίπτωση που το άτομο είναι αρχικά στην διεγερμένη κατάσταση όπου $C_e = 1$ και $C_g = 0$ μπορούμε να γράψουμε τη λύση ως:

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_g(t)\rangle |g\rangle + |\psi_e(t)\rangle |e\rangle \quad (1.84)$$

όπου, $|\psi_g(t)\rangle$ και $|\psi_e(t)\rangle$ είναι οι συνιστώσες του πεδίου που ορίζονται από τη

σχέση :

$$\begin{aligned} |\psi_g(t)\rangle &= -i \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(\lambda t \sqrt{n+1}) |n+1\rangle, \\ |\psi_g(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) |n\rangle \end{aligned} \quad (1.85)$$

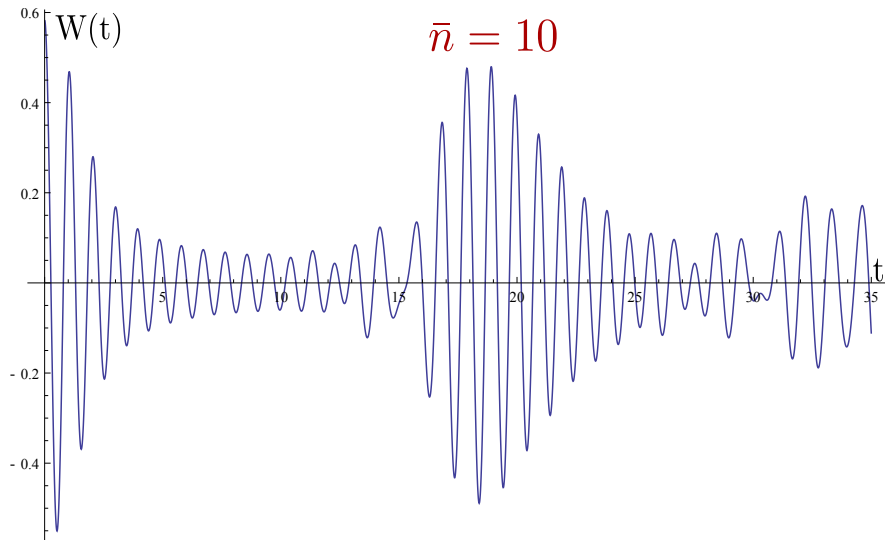
Τώρα, η ατομική αναστροφή είναι:

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_3 | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \psi_e(t) | \psi_e(t) \rangle - \langle \psi_g(t) | \psi_g(t) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}) \end{aligned} \quad (1.86)$$

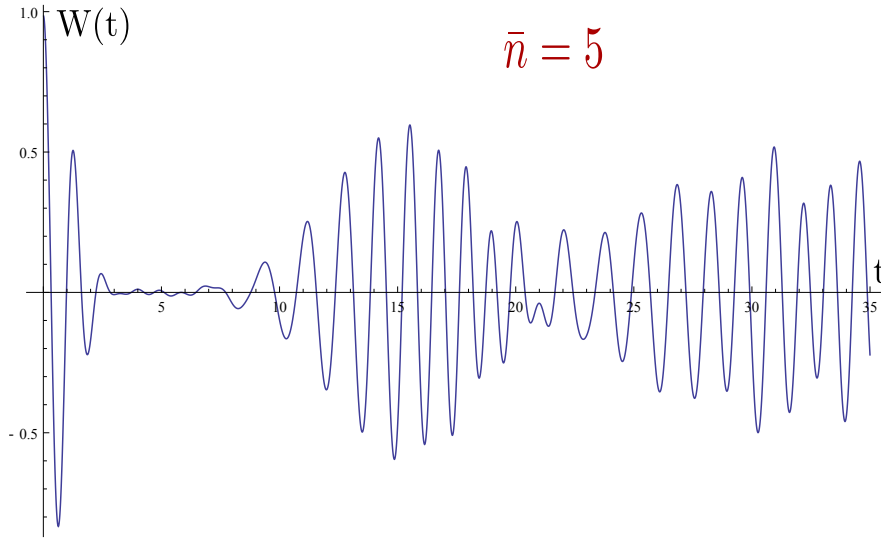
κι υποθέτοντας ότι έχουμε μια σύμφωνη κατάσταση ούτως ώστε $C_n = e^{-\frac{|a|^2}{2}} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$, η αναστροφή θα γράφεται ως:

$$W(t) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}) \quad (1.87)$$

Η διαφορά από την εξίσωση 1.79 γίνεται προφανής αν κάνουμε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης 1.87, όπως φαίνεται στις εικόνες 1.5 και 1.6. Καταρχήν



Σχήμα 1.5: Ατομική αναστροφή για $\bar{n} = 10$



Σχήμα 1.6: Ατομική αναστροφή για $\bar{n} = 5$

παρατηρούμε ότι οι ταλαντώσεις Rabi καταρρέουν και αναγεννούνται, ωστόσο δεν ανακάμπτουν πλήρως στο αρχικό πλάτος τους. Χρησιμοποιώντας μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε αυτή την ακολουθία καταρρέουσων και αναγεννήσεων, με τις αναγεννήσεις να γίνονται όλο και πιο δυσδιάκριτες όσο εξελίσσεται το φαινόμενο. Αυτή είναι ίσως η σημαντικότερη διαφορά μεταξύ των μοντέλων Rabi και Jaynes-Cummings. Προκειμένου να εξηγήσουμε αυτή τη διαφορά θα πρέπει να βρούμε μια έκφραση για τους χρόνους κατάρρευσης. Ο μέσος αριθμός φωτονίων είναι $\bar{n} = |\alpha|^2$, συνεπώς η κυρίαρχουσα συχνότητα Rabi είναι:

$$\Omega(\bar{n}) = 2\lambda\sqrt{\bar{n} + 1} \approx 2\lambda\sqrt{\bar{n}}, \quad \bar{n} \gg 1 \quad (1.88)$$

Ωστόσο, θα υπάρχει ένα φάσμα δευτερευόντων συχνοτήτων, ως αποτέλεσμα του εύρους των πιθανοτήτων $|C_n|^2$ γύρω από το \bar{n} , στην περιοχή $\bar{n} + \Delta n$. Για παράδειγμα οι συχνότητες στην περιοχή από $\Omega(\bar{n} - \Delta n)$ έως $\Omega(\bar{n} + \Delta n)$. Ο χρόνος κατάρρευσης t_c μπορεί να προσεγγιστεί από την απροσδιοριστία ενέργειας-χρόνου:

$$t_c[\Omega(\bar{n} + \Delta n) - \Omega(\bar{n} - \Delta n)] \simeq 1 \quad (1.89)$$

Εδώ, το εύρος των συχνοτήτων είναι υπεύθυνο για τη διαφορά φάσης στις ταλαντώσεις Rabi. Για μια σύμφωνη κατάσταση γνωρίζουμε ότι $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$, συνεπώς:

$$\begin{aligned} \Omega(\bar{n} \pm \sqrt{\bar{n}}) &\simeq 2\lambda\sqrt{\bar{n} \pm \sqrt{\bar{n}}} \\ &= 2\lambda\sqrt{\bar{n}} \left(1 \pm \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}\right) \\ &= 2\lambda\sqrt{\bar{n}} \pm \lambda \end{aligned} \quad (1.90)$$

Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε το χρόνο κατάρρευσης $t_c = \frac{1}{2\lambda}$, ο οποίος είναι μια ποσότητα που δεν εξαρτάται από το μέσο αριθμό φωτονίων. Μια περισσότερο «προσεκτική» εκτίμηση [11] του χρόνου κατάρρευσης μας δίνει την έκφραση

$$t_c = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \quad (1.91)$$

Όσον αφορά το χρόνο αναγέννησης, με μια παρόμοια διαδικασία βρίσκουμε ότι είναι:

$$t_R \simeq k \sqrt{\frac{2\pi\bar{n}}{\lambda}} \quad (1.92)$$

Πώς φτιάχνονται οι γάτες του Schrödinger: Η περιοχή διασποράς.

Ορίζουμε ως «περιοχή διασποράς» dispersive regime το σύνολο των συχνοτήτων της κοιλότητας που ικανοποιούν την απαίτηση:

$$\Delta = (\omega - \omega_0), \quad \hbar |\Delta| \gg \lambda \quad (1.93)$$

Όταν έχουμε πολύ υψηλές τιμές αποσυντονισμού σε σύγκριση με τη σταθερά σύζευξης, η σύζευξη μεταξύ ατόμου και πεδίου δεν μπορεί να προκαλέσει μεταβάσεις, όμως ακόμα και τότε ο όρος σύζευξης ατόμου-πεδίου επανακανονικοποιεί τις ενέργειες του συστήματος. Με τη χρήση της θεωρίας διαταραχών για την παράμετρο λ/Δ μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η «ενεργός»(effective) Χαμιλτονιανή για αυτή την περίπτωση διασποράς είναι:

$$\hat{H}_{disp} = -\frac{1}{2} \left(\hbar\omega_0 + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta} \right) \hat{\sigma}_z + \left(\hbar\omega - \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta} \hat{\sigma}_z \right) \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.94)$$

Αυτή η έκφραση μας δείχνει το γεγονός ότι η ενεργός συχνότητα της κοιλότητας τώρα εξαρτάται από την κατάσταση του ατόμου και ισοδύναμα η διαφορά των ενεργειακών επιπέδων στον αριθμό των φωτονίων που περιέχει η κοιλότητα. Ο όρος που είναι ανάλογος με το $(\hat{\sigma}_z \hat{a}^\dagger \hat{a})$ αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως μετατόπιση Stark AC, ενώ η μετατόπιση του επιπέδου του κενού $(\hat{\sigma}_z \lambda^2/\hbar\Delta)$ ονομάζεται μετατόπιση Lamb. Μια άλλη προσέγγιση για την περιοχή διασποράς, συνιστά το να επιστρέψουμε στον όρο της σχέσης 1.69 που περιέχει τη δυναμική του προβλήματος και να υπολογίσουμε την ενεργό Χαμιλτονιανή.

$$\hat{H}_{eff} = \hbar\chi (\hat{\sigma}_+ \hat{\alpha} + \hat{\sigma}_- \hat{\alpha}^\dagger) \quad (1.95)$$

όπου ορίσαμε ως $\chi = \frac{\lambda^2}{\Delta}$. Υποθέτοντας ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι μια κατάσταση αρίθμησης

$$|\psi(0)\rangle = |g\rangle|n\rangle, \quad (1.96)$$

η χρονική εξέλιξη του συστήματος μας οδηγεί στην εξίσωση

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iH_{\text{εφφ}}t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle = e^{i\chi nt}|g\rangle|n\rangle \quad (1.97)$$

Συνεπώς προκύπτει ένας παράγοντας φάσης που δεν μπορεί να μετρηθεί για να μας δώσει κάποια επιπλέον πληροφορία.

Υποθέτοντας ότι αντί για μια κατάσταση αρίθμησης έχουμε μια σύμφωνη κατάσταση $|\alpha\rangle$, η χρονική εξέλιξη του συστήματος μας οδηγεί στην εξίσωση:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\chi t}|e\rangle|\alpha e^{-i\chi t}\rangle \quad (1.98)$$

Βλέπουμε ότι στην περίπτωση που το πεδίο βρίσκεται σε μια σύμφωνη κατάσταση, το πλάτος του συστήματος περιστρέφεται στο χώρο των φάσεων κατά μια γωνία χt , ενώ η κατεύθυνση του καταστασιακού διανύσματος εξαρτάται από την κατάσταση του ατόμου $|e\rangle$. Υποθέτοντας τώρα ότι το άτομο είναι προετοιμασμένο σε μια υπέρθεση καταστάσεων $|g\rangle$ και $|e\rangle$, ούτως ώστε:

$$|\psi_{\text{atom}}\rangle = \frac{|g\rangle + e^{i\phi}|e\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.99)$$

η αρχική κατάσταση του ατόμου γίνεται:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_{\text{ατομ}}\rangle|\alpha\rangle \quad (1.100)$$

Η χρονική εξέλιξη αυτής της εκδοχής του συστήματος θα μας δώσει την έκφραση:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{H_{\text{εφφ}}t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|\alpha e^{i\chi t}\rangle + e^{-i(\chi t - \phi)}|e\rangle|\alpha e^{-i\chi t}\rangle) \quad (1.101)$$

Η παραπάνω έκφραση δηλώνει ξεκάθαρα ότι η χρονική εξέλιξη στην περιοχή διασποράς οδηγεί στον **εναγκαλισμό μεταξύ του ατόμου και του πεδίου**. Επιλέγοντας το χρόνο να είναι $\chi t = \frac{\pi}{2}$ (στο οποίο αναφερόμαστε ως παλμό $\frac{\pi}{2}$ βρίσκουμε ότι:

$$\left| \psi \left(\frac{\pi}{2\chi} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|i\alpha\rangle - ie^{i\phi}|e\rangle|-i\alpha\rangle) \quad (1.102)$$

Οι καταστάσεις $|g\rangle|i\alpha\rangle$ και $|-i\alpha\rangle$ διαφέρουν κατά 180° στο χώρο των φάσεων και ονομάζονται «μέγιστα διαχωρίσιμες καταστάσεις». Το μέτρο του $|\alpha|$ καθορίζει αν είναι μακροσκοπικά ή μεσοσκοπικά διαχωρίσιμες. Η παραπάνω διαδικασία μας επιτρέπει να προετοιμάσουμε συστήματα που εμφανίζουν την υπέρθεση της «γάτας του Schrödinger».

Μια διαφορετική εκδοχή που χρησιμοποιείται πειραματικά, συμπεριλαμβάνει ένα ακόμα ενεργειακό επίπεδο του ατόμου, που είναι πολύ μακριά από τα επίπεδα $|e\rangle$ και $|g\rangle$ και θα συμβολίζεται με $|f\rangle$ (far), ούτως ώστε $E_f \ll E_g$, με την μετάβαση

$|f\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ να μην υποστηρίζεται από την πειραματική διάταξη. Αυτή η ιδιότητα δεν επιτρέπει τη χρονική εξέλιξη της κατάστασης $|f\rangle|\alpha\rangle$, οπότε αν προετοιμάσουμε το άτομο σε μια υπέρθεση των $|f\rangle$ και $|g\rangle$, αυτό θα μας οδηγήσει στη χρονική εξέλιξη του όρου που περιέχει το $|g\rangle$ και απλά θα συνεισφέρει έναν παράγοντα φάσης ϕ . Η αναλυτική χρονική εξέλιξη αυτής της περίπτωσης, θα μας δώσει:

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_{\text{atom}}\rangle|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{time evolution}} |\Psi(t)\rangle = (|g\rangle|\alpha e^{i\chi t}\rangle + e^{i\phi}|f\rangle|\alpha\rangle) \quad (1.103)$$

Θέτοντας το χρόνο αλληλεπίδρασης να είναι τέτοιος ώστε $\chi t = \frac{\pi}{2}$ παίρνουμε:

$$\left| \psi \left(\frac{\pi}{2\chi} \right) \right\rangle = \frac{1}{2} (|g\rangle|-\alpha\rangle + e^{i\phi}|f\rangle|\alpha\rangle) \quad (1.104)$$

το οποίο περιγράφει και πάλι μια «γάτα του Schrödinger» .

1.3.2 Η προσέγγιση των «ντυμένων» καταστάσεων.

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να αποδείξει κανείς το σύνολο εξισώσεων του μοντέλου Jaynes-Cummings. Όπως είδαμε και νωρίτερα κατά τη διαδικασία της αλληλεπίδρασης ενός ατόμου δύο επιπέδων με ένα μονοχρωματικό πεδίο, υπάρχουν δύο πιθανές καταστάσεις για το σύστημα: η $|g\rangle|n+1\rangle$ και η $|e\rangle|n\rangle$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις λεγόμενες «γυμνές» καταστάσεις, καθώς δεν περιέχουν κάποιον ξεκάθαρο περιορισμό για τον αριθμό φωτονίων, ως **νέα βάση** για να λύσουμε τη δυναμική του προβλήματος με έναν πιο κομψό τρόπο. Το γεγονός ότι αναφερόμαστε σε καταστάσεις ενός ατόμου συζευγμένου με ένα πεδίο μέσω της Χαμιλτονιανής Jaynes-Cummings, μας εξηγεί το λόγο για τον οποίο χρησιμοποιούμε τον όρο «ντυμένες καταστάσεις του ατόμου» ή «διπλέτα Jaynes-Cummings». Ο λόγος για τον οποίο εισαγάγουμε τη νέα αυτή βάση έχει να κάνει με το γεγονός ότι η Χαμιλτονιανή μέσω αυτής της διαδικασίας λύνεται με απλούστερο τρόπο στην περίπτωση που υπάρχει αποσυντονισμός, καθώς εμφανίζονται σε πιο απλή μορφή οι ιδιοκαταστάσεις του συστήματος. Αρχικά ορίζουμε τη βάση:

$$\begin{aligned} |\psi_{1n}\rangle &= |e\rangle|n\rangle \\ |\psi_{2n}\rangle &= |g\rangle|n+1\rangle \end{aligned} \quad (1.105)$$

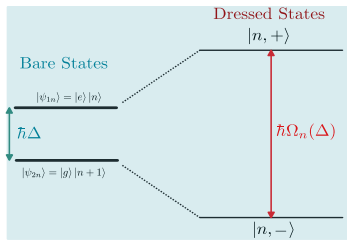
Αυτές οι καταστάσεις είναι ορθογώνιες και γράφοντας τα μητροστοιχεία της Χαμιλτονιανής 1.65 $\hat{H}_{ij}^{(n)} = \langle \psi_{in} | \hat{H} | \psi_{jn} \rangle$, βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{11}^{(n)} &= \hbar \left[n\omega + \frac{1}{2}\omega_0 \right] \\ \hat{H}_{22}^{(n)} &= \hbar \left[(n+1)\omega - \frac{1}{2}\omega_0 \right] \\ \hat{H}_{12}^{(n)} &= \hbar \lambda \sqrt{n+1} = \hat{H}_{21}^{(n)} \end{aligned} \quad (1.106)$$

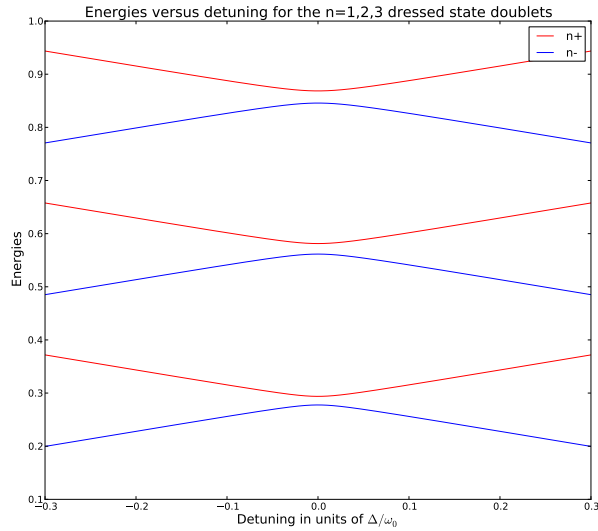
Το γεγονός αυτό μας οδηγεί σε μια Χαμιλτονιανή της μορφής

$$H^{(n)} = \begin{bmatrix} n\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 & \hbar\lambda\sqrt{n+1} \\ \hbar\lambda\sqrt{n+1} & (n+1)\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

Στην εικόνα 1.7 δείχνουμε τον ενεργειακό διαχωρισμό μεταξύ των γυμνών καταστά-



Σχήμα 1.7: Διαχωρισμός των ενεργειακών επιπέδων των γυμνών καταστάσεων (αριστερά) λόγω της αλληλεπίδρασης με το πεδίο και οι «ντυμένες» καταστάσεις (δεξιά).



Σχήμα 1.8: Ενέργειες των ντυμένων καταστάσεων $|1, \pm\rangle$, $|2, \pm\rangle$ και $|3, \pm\rangle$, συναρτήσει του αποσυντονισμού.

σεων $|\psi_{1n}\rangle, |\psi_{2n}\rangle$ και των ντυμένων καταστάσεων $|n, +\rangle, |n, -\rangle$ λόγω της αλληλεπίδρασης ατόμου-πεδίου, που συχνά συναντάται ως *διαχωρισμός Jaynes-Cummings*. Η έκφραση της Χαμιλτονιανής συμπεριλαμβάνει μόνο καταστάσεις που διαφέρουν κατά ± 1 στον αριθμό φωτονίων, συνεπώς για ένα δεδομένο n η ιδιοτιμή του γίνεται:

$$E_{\pm}(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \pm \hbar\Omega_n(\Delta) \quad (1.108)$$

όπου

$$\Omega_n(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)}, \quad (\Delta = \omega_0 - \omega) \quad (1.109)$$

είναι η συχνότητα Rabi, η οποία τώρα συμπεριλαμβάνει και τον αποσυντονισμό. Στην εικόνα 1.8 δείχνουμε την εξάρτηση των ενεργειακών επιπέδων των ντυμένων καταστάσεων από τον αποσυντονισμό, για τρεις διαφορετικές διπλέτες. Αυτή η έκφραση για τη συχνότητα Rabi, μας δίνει τη δυνατότητα να γράψουμε μια πιο

γενική έκφραση για το σύστημα, δηλαδή τις «ντυμένες καταστάσεις».

$$\begin{aligned} |n, +\rangle &= \cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |\psi_{1n}\rangle + \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |\psi_{2n}\rangle \\ |n, -\rangle &= -\sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |\psi_{1n}\rangle + \cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |\psi_{2n}\rangle \end{aligned} \quad (1.110)$$

όπου Φ_n είναι η γωνία μείξης που διαισθητικά περιγράφει τη συνεισφορά καθενός από τα διανύσματα της βάσης στην υπέρθεση των καταστάσεων και ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Delta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\Omega_n(0)}{\Delta}\right) \\ \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) - \Delta}{2 \cdot \Omega_n(\Delta)}} \\ \cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) + \Delta}{2 \cdot \Omega_n(\Delta)}} \end{aligned} \quad (1.111)$$

Οι ντυμένες καταστάσεις μας επιτρέπουν να περιγράψουμε τη δυναμική του συστήματος, για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση αυτού. Υποθέτοντας ότι έχουμε ένα πεδίο σε μια αρχική κατάσταση που είναι υπέρθεση άλλων καταστάσεων, να αλληλεπιδρά με ένα άτομο δύο επιπέδων που βρίσκεται στη διεγερμένη κατάστασή του, η αρχική κατάσταση του συστήματος «άτομο-πεδίο», μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} |\psi_{af}(0)\rangle &= |\psi_f(0)\rangle |e\rangle \\ &= \sum_n C_n |n\rangle |e\rangle \\ &= \sum_n C_n |\psi_{1n}\rangle \end{aligned} \quad (1.112)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 1.110 για να εκφράσουμε το $|\psi_{1n}\rangle$ σε όρους ντυμένων καταστάσεων, $|n, \pm\rangle$ θα πάρουμε:

$$|\psi_{1n}\rangle = \cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, +\rangle - \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, -\rangle \quad (1.113)$$

Συνεπώς το σύστημα ατόμου-πεδίου, εκφράζεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$|\psi_{af}(0)\rangle = \sum_n C_n \left[\cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, +\rangle - \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, -\rangle \right], \quad (1.114)$$

ενώ η χρονική εξέλιξη του συστήματος δίδεται από τη σχέση :

$$\begin{aligned} |\psi_{af}(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \cdot |\psi_{af}(0)\rangle = \\ &= \sum_n C_n \left[\cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, +\rangle \cdot e^{-\frac{iE_+(n)t}{\hbar}} - \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, -\rangle e^{-\frac{iE_-(n)t}{\hbar}} \right] \end{aligned} \quad (1.115)$$

1.4 Πειράματα σε Cavity QED

Έως τώρα έχουμε αναφερθεί στο θεωρητικό μοντέλο της αλληλεπίδρασης ενός κβαντισμένου μονοχρωματικού πεδίου με ένα άτομο δυο επιπέδων. Όπως σε κάθε περίπτωση, η θεωρία προβλέπει πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα, που πρέπει όμως να απορριφθούν ή να επαληθευθούν μέσα στο εργαστήριο, προκειμένου να υιοθετηθεί, τροποποιηθεί ή εντελώς απορριφθεί ένα συγκεκριμένο θεωρητικό μοντέλο. Οι κοιλότητες (cavities ή microcavities) είναι οι συσκευές με τη βοήθεια των οποίων έχει γίνει εφικτή η πειραματική επιβεβαίωση μιας πληθώρας φαινομένων της Κβαντομηχανικής⁴. Η απλότητα της βασικής ιδέας του συστήματος (δεν διαφέρει πολύ από το «κουτί φωτονίων»), σε συνδυασμό με το σχολαστικό και αναλυτικό έργο που έχει επιδειχθεί από πολλές πειραματικές ομάδες σε ολόκληρο τον κόσμο με κυριότερες τις ομάδες των *S. Haroche, J. Kimble, D. Meschede, G. Rempe and H. Walther* [56],[57] και άλλους, έχει προσφέρει στην τεχνογνωσία της *προετοιμασία, ελέγχου και καθορισμού* ατόμων σε τέτοιο βαθμό, που πλέον να είναι αυτά τα άτομα κατάλληλοι υποψήφιοι για εφαρμογές της Κβαντικής Πληροφορίας. Βέβαια, δεν είναι το cavity QED ο μόνος υποψήφιος για την υλοποίηση αλγορίθμων σε πλήρη κλίμακα. Στην πραγματικότητα υπάρχουν πάρα πολλοί περιορισμοί όπως η «*αποσυμφώνηση*» (decoherence) λόγω της αλληλεπίδρασης ενός συστήματος με το περιβάλλον του [27] που περιορίζει αυτά τα συστήματα από το να είναι ιδανικά για την υλοποίηση Κβαντικών Αλγορίθμων.

Στη διάρκεια της τελευταίας δεκαετίας, έκανε την εμφάνισή της μία νέα γενιά νονοδιατάξεων στις οποίες έγινε εφικτός ο έλεγχος των θεωρητικών προβλέψεων της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής σε Κοιλότητες, για διάφορες συνθήκες, σε συσκευές στερεάς κατάστασης. Αυτές περιλαμβάνουν *Φωτονικούς Κρυστάλλους* στους οποίους έχουν ενσωματωθεί *Κβαντικές Τετλείες* και πιο πρόσφατα το *Circuit QED* (*Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε Κυκλώματα*). Το τελευταίο εξ αυτών, εμφανίζει πολύ χαμηλούς ρυθμούς απωλειών, συνεπώς θεωρείται μια από τις πιο υποσχόμενες τεχνικές όσον αφορά την επίτευξη του στόχου της δημιουργίας ενός Κβαντικού Υπολογιστή.

⁴Αυτή η αξιοσημείωτη πρόοδος αναγνωρίστηκε στους ιδρυτές του πεδίου με το βραβείο Nobel Φυσικής για το 2012

1.4.1 Ρυθμίζοντας ενεργειακά επίπεδα και ρυθμούς αυθόρμητης εκπομπής σε κοιλότητες

Ο τύπος του Purcell [8] για την τροποποίηση του ρυθμού αυθόρμητης εκπομπής, έχει ως εξής:

$$\frac{\Gamma_{\text{cavity}}}{\Gamma_{\text{free}}} = \frac{\rho_c(\omega_0)}{\rho_f(\omega_0)} = \frac{2\pi Q}{V_c \omega_0^3} = Q \frac{\lambda_0^3}{4\pi^2 V_c}, \quad (1.116)$$

όπου Γ_{cavity} , Γ_{free} είναι οι ρυθμοί αυθόρμητης εκπομπής στο εσωτερικό της κοιλότητας και στον ελεύθερο χώρο, τα $\rho_i(\omega_0)$ συμβολίζουν τις πυκνότητες καταστάσεων για τη συχνότητα ω_0 , το Q είναι ο συντελεστής ποιότητας της κοιλότητας, λ_0 είναι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο κενό και V_c είναι ο όγκος της κοιλότητας.

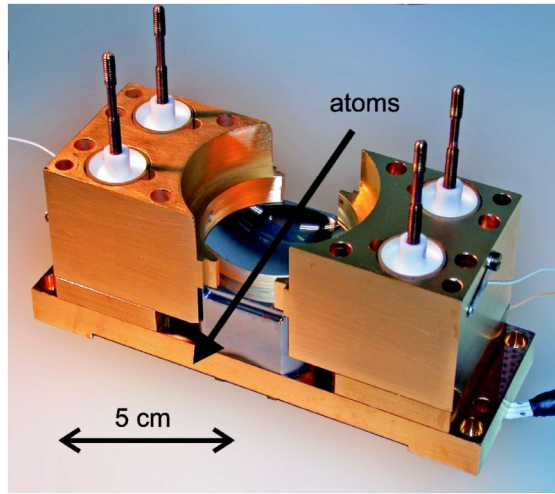
Η φυσική διάταξη που μας επιτρέπει να αλλάξουμε τον ρυθμό αυθόρμητης εκπομπής, είναι μία κοιλότητα που αποτελείται από υπεραγωγίσιμους καθρέφτες, σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Αρχικά, οι κοιλότητες χρησιμοποιήθηκαν για να παρατηρηθεί αυτή καθαυτή η μεταβολή στο ρυθμό αυθόρμητης εκπομπής. Για όγκο κοιλότητας $V \simeq \lambda_0^3$ (όπου λ_0 το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο κενό, ο ρυθμός αυθόρμητης εκπομπής αυξάνεται κατά έναν παράγοντα σχεδόν ίσο με το συντελεστή ποιότητας Q της κοιλότητας. Ωστόσο, αν η κοιλότητα δεν είναι σε συντονισμό, παρατηρείται μείωση του ρυθμού αυθόρμητης εκπομπής. Η πρώτη παρατήρηση της ενίσχυσης του ρυθμού της αυθόρμητης εκπομπής σε μια κοιλότητα σε συντονισμό δημοσιεύτηκε από τους *Goy et al.* το 1983 [9]. Σ' αυτά τα πειράματα χρησιμοποιήθηκαν τα λεγόμενα άτομα *Rydberg*, τα οποία είναι άτομα αλκαλίων στα οποία το ηλεκτρόνιο της εξωτερικής στοιβάδας έχει διεγερθεί σε τροχιακά με πολύ υψηλό κύριο κβαντικό αριθμό, με αποτέλεσμα να έχουν για τη μετάβαση $n = 51 \rightarrow n = 50$ μια τεράστια διπολική ροπή της τάξης των $\simeq 1776ea_0$ με $\omega_{eg}/2\pi = 51.1GHz$. Πρόκειται για άτομα τεράστια σε μέγεθος, καθώς έχουν διάμετρο της τάξης μερικών μm . Στο πείραμα αυτο, χρησιμοποιήθηκαν άτομα νατρίου διεγερμένα στην κατάσταση $23s$, τα οποία διοχετεύθηκαν μέσα σε μια υπεραγώγιμη κοιλότητα νιοβίου, που υποστήριζε τη συχνότητα $340 GHz$. Η ψύξη της κοιλότητας έδινε τη δυνατότητα ελάττωσης του θερμικού πεδίου εντός της κοιλότητας. Σε μια άλλη κατηγορία παρεμφερών πειραμάτων σε οπτικά μήκη κύματος, αυτό το θερμικό πεδίο μπορεί να κατασταλλεί εντελώς και τα πρώτα πειράματα έγιναν από την ομάδα του *Feld* το 1987 [58],[59], όπου παρατηρήθηκε η ενίσχυση του ρυθμού της αυθόρμητης εκπομπής σε οπτικές κοιλότητες Όσον αφορά τις μετατοπίσεις των ενεργειακών επιπέδων, η πόλωση του ατόμου από τα αποσυντονισμένα μέρη ενός HM πεδίου μεγάλου εύρους, προκαλεί μετατοπίσεις στα ενεργειακά επίπεδα, με τη μετατόπιση *Lamb* να είναι η πιο εξέχουσα. Η μετατόπιση *Lamb* μπορεί να περιγραφεί ως το αποτέλεσμα της εκπομπής κι επαναπορρόφησης ιδεατών φωτονίων, οπότε λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι ο αληθινός ρυθμός εκπομπής μπορεί να τροποποιηθεί σε έναν κατάλληλα περιορισμένο χώρο, το ίδιο θα πρέπει

να ισχύσει και για τα «ιδεατά» αυτά φωτόνια, ενώ η μετατόπιση ενέργειας της ακτινοβολίας έχει τις ρίζες της στις «διακυμάνσεις του κενού» και είναι ανάλογη με το φαινόμενο Casimir [60].

1.4.2 Κοιλότητες μικροκυμάτων και η περιοχή ισχυρής σύζευξης

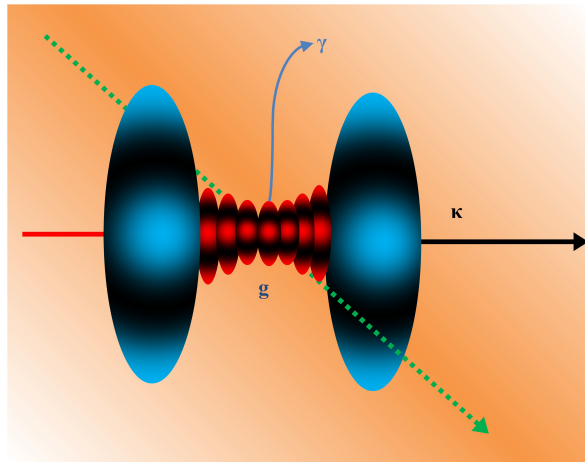
Η επιλογή της κατάλληλης περιοχής στην οποία τα φαινόμενα που μελετάμε μπορούν να παρατηρηθούν, δίνει δύο εξέχοντες υποψήφιους: την περιοχή των μικροκυμάτων και τις οπτικές συχνότητες. Στα επόμενα, περιορίζουμε τη συζήτησή μας στις συχνότητες μικροκυμάτων, ωστόσο μια πολύ καλή αναθεώρηση για ότι αφορά τις οπτικές συχνότητες μπορεί να βρεθεί στο [56]. Τις κοιλότητες μπορούμε να τις φανταστούμε ως ένα πολύ μικρό σωλήνα laser με υψηλής ανακλαστικότητας κάτοπτρα και διαστάσεις τέτοιες ώστε ο ρυθμός αυθόρμητης εκπομπής να τροποποιείται για την επιθυμητή περιοχή συχνοτήτων. Σε συχνότητες μικροκυμάτων, η κύρια τεχνική που χρησιμοποιείται συμπεριλαμβάνει κοιλότητες με υψηλής ανακλαστικότητας υπεραγωγίμα κάτοπτρα κατασκευασμένα από νιόβιο, τα οποία είναι ικανά να αναγκάσουν ένα φωτόνιο να ανακλαστεί γύρω στις 10^{10} φορές στο εσωτερικό της κοιλότητας, πριν βρει το δρόμο της εξόδου στο περιβάλλον. Τα φωτόνια στις περιοχές μικροκυμάτων είναι ιδιαίτερα δύσκολο να ανιχνευτούν, οπότε η κατάσταση του πεδίου της κοιλότητας συνάγεται από την αλληλεπίδραση που προκαλούν σε άτομα *Rydberg* που χρησιμοποιούνται ως «μετρητές». Στις οπτικές συχνότητες συμβαίνει η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η κατάσταση της κοιλότητας χρησιμοποιείται για να συναχθεί η κατάσταση του ατόμου. Η ροή των ατόμων ελέγχεται κυρίως μέσω της επιλογής των ταχυτήτων τους χρησιμοποιώντας *laser* που λειτουργούν ως «παγίδες» ή χρησιμοποιώντας κλείστρο για να ελεγχθεί η ροή των ατόμων. Προκειμένου να παρατηρηθούν τα φαινόμενα που περιγράψαμε νωρίτερα, η σταθερά σύζευξης ατόμου πεδίου g θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τους ρυθμούς ανάκαμψης του ατόμου και της κοιλότητας T_a^{-1} και T_c^{-1} και πολύ μεγαλύτερη από το αντίστροφο του χρόνου αλληλεπίδρασης του ατόμου με την κοιλότητα. Σ' αυτές τις δύο συνθήκες συνοψίζεται η ιδέα της «περιοχής ισχυρής σύζευξης». Η ισχυρή σύζευξη μεταξύ της κοιλότητας και του ατόμου υποδηλώνει ότι ακόμα και ένα φωτόνιο μέσα στην κοιλότητα είναι αρκετό για να προκαλέσει ισχυρά μη γραμμικά φαινόμενα στο άτομο, καθώς και ότι ακόμα κι ένα άτομο στην κοιλότητα είναι αρκετό για να υποστηρίξει μια ταλάντωση *laser*. Μια ενδεικτική παράμετρος του σθένους της σύζευξης ατόμου-πεδίου, είναι η «συνεργασιμότητα του συστήματος» (*cooperativity*), η οποία ορίζεται ως:

$$C = \frac{g^2}{\kappa\gamma} \quad (1.117)$$



Σχήμα 1.9: Φωτογραφία της κοιλότητας που χρησιμοποιήθηκε στο [61] πριν την τοποθέτηση του πάνω κατόπτρου. Απεικονίζεται η πορεία της δέσμης των ατόμων με το βέλος, ενώ οι τέσσερις υποδοχές χρησιμοποιούνται για την εγκατάσταση του πάνω κατόπτρου.

όπου g είναι η σταθερά σύζευξης ατομου-πεδίου, κ είναι ο ρυθμός απωλειών λόγω του περιβάλλοντος και γ ο ρυθμός αυθόρμητης εκπομπής, όπως απεικονίζονται στο σχήμα 1.10. Στο [61], η κατασκευή μιας σύγχρονης υπεραγώγιμης κοιλότητας



Σχήμα 1.10: Αναπαράσταση των κύριων παραμέτρων μιας διάταξης *cavity QED*

περιγράφεται αναλυτικά. Σ' αυτή την κοιλότητα ο συντελεστής ποιότητας για την επιθυμητή συχνότητα ($51.1GHz$) είναι $Q = 4.2 \times 10^{10}$, επιτρέποντας σε ένα φωτόνιο να μείνει μέσα στην κοιλότητα για χρόνο $T_c = 130ms$. Σ' αυτή τη διάταξη, χρησιμοποιώντας τη σχέση $Q = \frac{\omega_{cav}}{\kappa}$ μπορούμε να υπολογίσουμε ότι ο ρυθμός απωλειών είναι $\kappa = 1,26$ Hz. Παλαιότερες διατάξεις για την περιοχή των μικροκυμάτων,

χρησιμοποιούσαν κοιλότητες με συντελεστή ποιότητας $Q = 3 \times 10^8$ στην ίδια συχνότητα [62]. Όσον αφορά τους ρυθμούς αυθόρμητης εκπομπής, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Fermi([1], μπορούμε να βρούμε ότι :

$$\Gamma_{cav}^{resonant} = \Gamma_{free} \frac{3Q}{4\pi^2} \left(\frac{\lambda_0^3}{V} \right) \text{ with } \lambda_0 = 2\pi \frac{c}{\omega} \quad (1.118)$$

Στην περίπτωση που το άτομο είναι εκτός συντονισμού με την κοιλότητα ο ρυθμός μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση :

$$\Gamma_{cav}^{off resonant} = \Gamma_{free} \frac{3}{16Q\pi^2} \left(\frac{\lambda_0^3}{V} \right) \text{ with } \lambda_0 = 2\pi \frac{c}{\omega} \quad (1.119)$$

Αυτές οι σχέσεις μοιάζουν με τον τύπο του *Purcell* 1.116 για την ενίσχυση της αυθόρμητης εκπομπής. Προκειμένου να έχουμε μια εικόνα για κάποιες συνήθεις τιμές των (g, κ, γ) , ανατρέχουμε στα [62], [38], όπου και βρίσκουμε ότι :

$$\begin{aligned} (g, \kappa, \gamma) / 2\pi &= (120, 40, 5.2) \text{ MHz με } C = 69 \text{ για οπτικές συχνότητες} \\ (g, \kappa, \gamma) / 2\pi &= (25, 0.36, 0.005) \text{ kHz με } C = 3.4 \times 10^5 \text{ για μικροκύματα} \end{aligned} \quad (1.120)$$

1.5 Η μη-ιδανική περίπτωση· διαδικασίες με απώλειες

Master Equation για τις απώλειες μιας κοιλότητας

Χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που περιγράφονται συνοπτικά με βάση τα [25, 26, 27] στο Παράρτημα Β. Θεωρητικά εργαλεία Κβαντικής Οπτικής, θεωρούμε μια κοιλότητα που υποστηρίζει μια συχνότητα ω_c , ενώ το πεδίο της κυβερνάται από τη δράση των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής \hat{a}^\dagger και \hat{a} . Το περιβάλλον της είναι μια συλλογή αρμονικών ταλαντωτών με συχνότητες ω_j , ενώ κάθε τρόπος του περιβάλλοντος συνοδεύεται από τους τελεστές \hat{r}_j^\dagger και \hat{r}_j . Υποθέτοντας ότι η συχνότητα που επιζεί στην κοιλότητα συζεύγεται με τον τρόπο ταλάντωσης j του περιβάλλοντος μέσω του ρυθμού κ_j , οι Χαμιλτονιανές στην προσέγγιση στρεφόμενου κύματος, αγνοώντας τη συνεισφορά των διακυμάνσεων του κενού, θα είναι :

$$\begin{aligned} \hat{H}_S &= \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ \hat{H}_R &= \sum_j \hbar\omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j \\ \hat{H}_{SR} &= \sum_j \hbar \left(\kappa_j^* \hat{a} \hat{r}_j^\dagger + h.c \right) = \hbar \left(\hat{a} \hat{\Gamma}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\Gamma} \right) \end{aligned} \quad (1.121)$$

Επιστρέφοντας στη γενική διαδικασία απόδειξης της Άρχουσας Εξίσωσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους όρους της, σε αυτούς του συγκεκριμένου μας παραδείγματος.

$$\begin{aligned} s_1 &= \hat{a} \\ s_2 &= \hat{a}^\dagger \\ R_1 &= \hat{\Gamma}^\dagger \\ R_2 &= \hat{\Gamma} \end{aligned} \quad (1.122)$$

Χρησιμοποιώντας την εικόνα αλληλεπίδρασης για τους παραπάνω τελεστές, έχουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 &= \tilde{\hat{a}} e^{-i\omega_c t} \\ \tilde{s}_2 &= \tilde{\hat{a}}^\dagger e^{i\omega_c t} \\ \tilde{R}_1 &= \tilde{\hat{\Gamma}}^\dagger e^{i\omega_c t} \\ \tilde{R}_2 &= \tilde{\hat{\Gamma}} e^{-i\omega_c t} \end{aligned} \quad (1.123)$$

Οι συναρτήσεις συσχέτισης για το περιβάλλον με τη χρήση της προσέγγισης Markov δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}(t) \rangle &= 0 \\ \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \rangle &= 0 \\ \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t) \rangle &= \kappa \bar{n} \delta(t - t') \\ \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \rangle &= \kappa (\bar{n} + 1) \delta(t - t') \end{aligned} \quad (1.124)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις, είναι $\bar{n} = \left(e^{\frac{\hbar\omega_c}{kT}} - 1 \right)^{-1}$, κ είναι ο ρυθμός απωλειών της κοιλότητας., k η σταθερά του Boltzmann και T η θερμοκρασία του περιβάλλοντος ή πιο αφηρημένα η θερμοκρασία της «μπανιέρας» των ταλαντωτών του περιβάλλοντος. Χρησιμοποιώντας αυτές τις συναρτήσεις συσχέτισης, προκύπτει η Master Equation⁵ για τον πίνακα πυκνότητας στην εικόνα αλληλεπίδρασης, ως:

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\kappa \bar{n} (\hat{a} \hat{a}^\dagger \tilde{\rho} - \hat{a}^\dagger \tilde{\rho} \hat{a}) - \kappa (\bar{n} + 1) (\hat{a}^\dagger \hat{a} \tilde{\rho} - \hat{a} \tilde{\rho} \hat{a}^\dagger) + \text{η.ς.} \quad (1.125)$$

Η περαιτέρω ενασχόληση με αυτή την εξίσωση, μας φέρνει σε θέση να διαχωρίσουμε τους όρους που έχουν το \bar{n} , κι έτσι η Master Equation γράφεται στη μορφή:

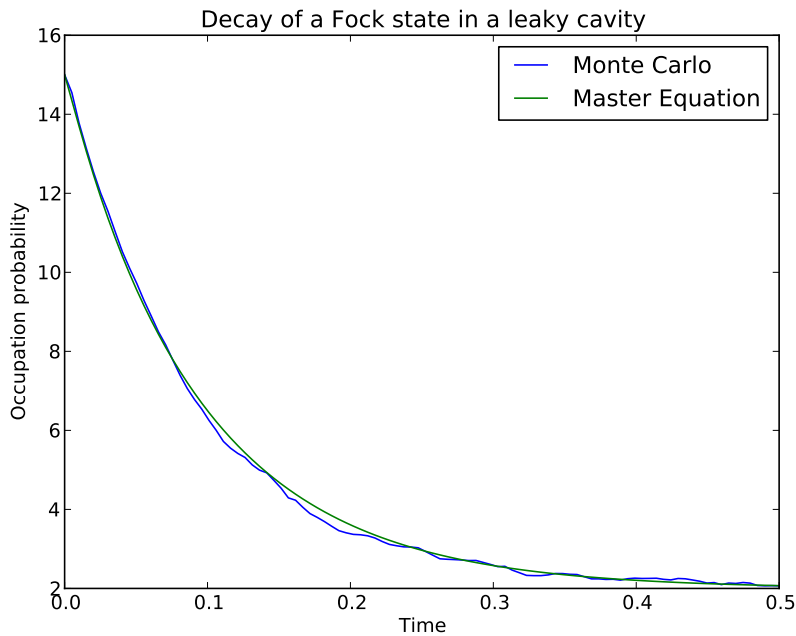
$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\kappa (\hat{a}^\dagger \hat{a} \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} - 2\hat{a} \tilde{\rho} \hat{a}^\dagger) - 2\kappa \bar{n} (\hat{a} \hat{a}^\dagger \tilde{\rho} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \tilde{\rho} - \hat{a}^\dagger \tilde{\rho} \hat{a} - \hat{a} \tilde{\rho} \hat{a}^\dagger) \quad (1.126)$$

⁵Στα Ελληνικά, ο όρος που θεωρούμε κατάλληλο για την απόδοση της έννοιας της Master Equation, είναι «Άρχουσα Εξίσωση», καθώς είναι η εξίσωση που «κυβερνά» την εξέλιξη ενός συστήματος με απώλειες.

Στο «ακαδημαϊκό» όριο $\bar{n} = 0$, η εξίσωση γίνεται:

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\kappa (\hat{a}^\dagger \hat{a} \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} - 2\hat{a} \tilde{\rho} \hat{a}^\dagger) \quad (1.127)$$

Ουσιαστικά, οι αριθμητικές εφαρμογές για τον υπολογισμό της χρονικής εξέλιξης ενός συστήματος με απώλειες χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Άρχουσας Εξίσωσης, συγκλίνουν στην επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων με διαστάσεις που καθορίζονται από τις καταστάσεις αρίθμησης που περιέχει αρχικά η κοιλότητα. Θέτοντας φερ' ειπείν τις τιμές που παρουσιάστηκαν στην 1.120, μπορούμε να απεικονίσουμε τη χρονική εξέλιξη ενός συστήματος που περιέχει μία διέγερση στην κοιλότητα, θέτοντας τις τιμές ως: $(g, \kappa, \gamma) = (1000, 10, 0)$, μένοντας στις απαιτήσεις της περιοχής ισχυρής σύζευξης.



Σχήμα 1.11: Απώλειες μιας κοιλότητας που περιέχει την κατάσταση αρίθμησης $|15\rangle$ με $\kappa = 10$ και μέσο αριθμό θερμικών φωτονίων $\bar{n}_{th} = 0$, χρησιμοποιώντας την μέθοδο αριθμητικής επίλυσης της Master Equation (πράσινη γραμμή) και των κβαντικών τροχιών (μπλε γραμμή).

1.5.1 Προσομείωση Monte Carlo- Κβαντικές Τροχιές

Μια άλλη μέθοδος αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος της κοιλότητας με απώλειες, είναι η στοχαστική ανέλιξη του συστήματος στο χρόνο και η διεξαγωγή

προσομείωσης Monte Carlo. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου, υποθέτοντας ότι έχουμε ρυθμό απωλειών κ και θερμοκρασία $T = 0$. Ξεκινάμε γράφοντας την Master Equation του συστήματος:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}\rho = -\frac{i}{\hbar} + \frac{\kappa}{2} (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (1.128)$$

Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις για να διαχωρίσουμε το αναστρέψιμο κομμάτι της δυναμικής του προβλήματος από τη συνολική δυναμική, παίρνουμε την

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}_0\rho + \kappa (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (1.129)$$

Η επίσημη λύση της Άρχουσας Εξίσωσης δίδεται από τη σχέση:

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t}\rho(0) \quad (1.130)$$

Ξαναγράφοντας τον Υπερτελεστή Lindblad \mathcal{L} ως:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} + (\mathcal{L} - \mathcal{T}), \quad (1.131)$$

όπου το αποτέλεσμα του υπερτελεστή \mathcal{T} στον πίνακα πυκνότητας δίδεται από την:

$$\mathcal{T} = \hat{C}\rho\hat{C}^\dagger \quad (1.132)$$

Ο τελεστής \hat{C} αναφέρεται ως «τελεστής κατάρρευσης» [26, 63]. Ουσιαστικά, περιγράφει το πώς το περιβάλλον καταστρέφει την συμφωνία που υπάρχει μέσα στην κοιλότητα, οδηγώντας το πεδίο της κοιλότητας να καταρρέει μη-αναστρέψιμα. Η χρήση του μας εφοδιάζει με μια μη-μοναδιαία πράξη που σταδιακά καταστρέφει το πεδίο της κοιλότητας. Είναι ανάλογος με τον τελεστή καταστροφής της κοιλότητας και δίδεται από τη σχέση:

$$\hat{C} = \sqrt{2\kappa}\hat{a} \quad (1.133)$$

Πλέον, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα των υπερτελεστών

$$e^{(\mathcal{L}+a\mathcal{S})x} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \int_0^x dx_k \int_0^{x_k} dx_{k-1} \cdots \int_0^{x_2} (e^{\mathcal{L}(x-x_k)} \mathcal{S} e^{\mathcal{L}(x_k-x_{k-1})} \mathcal{S} \cdots \mathcal{S} e^{\mathcal{L}x_1}) dx_1, \quad (1.134)$$

προκειμένου να βρούμε μια έκφραση για τον πίνακα πυκνότητας σε χρόνο t .

$$\begin{aligned} \rho(t) &= e^{\mathcal{L}t}\rho(0) = e^{[T+(\mathcal{L}-\mathcal{T})]t}\rho(0) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} [\mathcal{S}(t-t_m) \mathcal{T} \mathcal{S}(t_m-t_{m-1}) \cdots \mathcal{T} \mathcal{S}(t_1) \rho(0)] dt_1 \end{aligned} \quad (1.135)$$

Εδώ, χρησιμοποιήσαμε το \mathcal{S} που ορίζεται ως: $\mathcal{S} = e^{(\mathcal{L}-\mathcal{T})t}$. Η παραπάνω ανάπτυξη ισχύει για κάθε \mathcal{T} . Ωστόσο για αυτή τη συγκεκριμένη επιλογή του $\mathcal{T} = \hat{C}\rho\hat{C}^\dagger$, οι όροι στο ανάπτυγμα του $\rho(T)$ έχουν μια μοναδική φυσική σημασία. Η πιθανότητα για έναν τέλειο φωτοανιχνευτή που είναι εγκατεστημένος με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε να ανιχνεύει όλα τα φωτόνια που θα διαφύγουν από την κοιλότητα μέσα σε ένα χρονικό διάστημα $[0, t]$ να καταγράψει ακριβώς m γεγονότα, ένα σε κάθε απειροστό μικρό χρονικό διάστημα $[t_m, t_m + dt_m] \in [0, t]$ δίδεται από:

$$p_m(t_1, t_2, \dots, t_m; [0, t]) = \text{Tr}[\mathcal{S}(t - t_m)\mathcal{T}\mathcal{S}(t_m - t_{m-1}) \dots \mathcal{T}\mathcal{S}(t_1)\rho(0)] \quad (1.136)$$

Στην παραπάνω εξίσωση ως $\rho(0)$ ορίσαμε την αρχική κατάσταση του πεδίου της κοιλότητας. Μπορούμε να ορίσουμε ένα μη-κανονικοποιημένο υπο-συνθήκη πίνακα πυκνότητας $\tilde{\rho}_c(t)$ του συστήματος, που θα καθορίζεται κάθε φορά από την καταγραφή του φωτορρεύματος -όπως το ορίσαμε πριν-, ως:

$$\tilde{\rho}_c(t) = \mathcal{S}(t - t_m)\mathcal{T}\mathcal{S}(t_m - t_{m-1}) \dots \mathcal{T}\mathcal{S}(t_1)\rho(0) \quad (1.137)$$

Αυτός ο ορισμός μας φέρνει σε θέση να γράψουμε ότι:

$$p_m(t_1, t_2, \dots, t_m; [0, t]) = \text{Tr}[\tilde{\rho}_c(t)] \quad (1.138)$$

Αν έχουμε έναν κανονικοποιημένο, υπο-συνθήκη πίνακα πυκνότητας $\rho_c(t)$ του συστήματος, αυτός συνδέεται με τον μη κανονικοποιημένο πίνακα πυκνότητας από τη σχέση:

$$\rho_c(t) = \frac{\tilde{\rho}_c(t)}{\text{Tr}[\tilde{\rho}_c(t)]} \quad (1.139)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις μπορεί κανείς να γράψει τον «άνευ συνθηκών» πίνακα πυκνότητας $\rho(t)$ ως:

$$\rho(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 p_m(t_1, t_2, \dots, t_m; [0, t]) \rho_c(t) \quad (1.140)$$

Μετά από αυτή τη μαθηματική συζήτηση, θα πρέπει να συζητήσουμε το φυσικό νόημα. Ο υπο-συνθήκη πίνακας πυκνότητας $\rho_c(t)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η «πραγματική» κατάσταση του συστήματος, υπό τον όρο ότι γνωρίζουμε ακριβώς το ιστορικό της φωτοανίχνευσης. Για να πάρουμε τον «άνευ-συνθήκης» πίνακα πυκνότητας, $\rho(t)$, πρέπει να πάρουμε τη μέση τιμή ενός συνόλου από αυτούς τους «υπό-συνθήκη» πίνακες πυκνότητας, σταθμισμένη από τις πιθανότητες καταγραφής των αντίστοιχων πιθανοτήτων ανίχνευσης. Ο τρόπος υπολογισμού της δυναμικής είναι η διεξαγωγή αριθμητικών προσομοιώσεων και τον οποίο συνήθως συναντάμε ως **Quantum Trajectory Simulation** ή «Προσομείωση Κβαντικών Τροχιών»

κατ' αντιστοιχία με τους «Τυχαίους Περιπάτους» των Στοχαστικών Ανελιξεων. Για να πραγματοποιηθεί μια αριθμητική προσομείωση με ένα πεπερασμένο χρονικό «βήμα» Δt , θα πρέπει να δημιουργήσουμε έναν τυχαίο αριθμό r στο διάστημα από 0 έως 1. Η πιθανότητα να ανιχνεύσουμε ένα φωτόνιο -η οποία στην ουσία δίδεται από τη μέση τιμή του τελεστή κατάρρευσης- σε αυτό το διάστημα $[t, t + dt]$, ενώ καταγράφουμε το ιστορικό των ανιχνεύσεων, είναι:

$$p_c = \text{Tr} [\mathcal{T} \rho_c(t)] \quad (1.141)$$

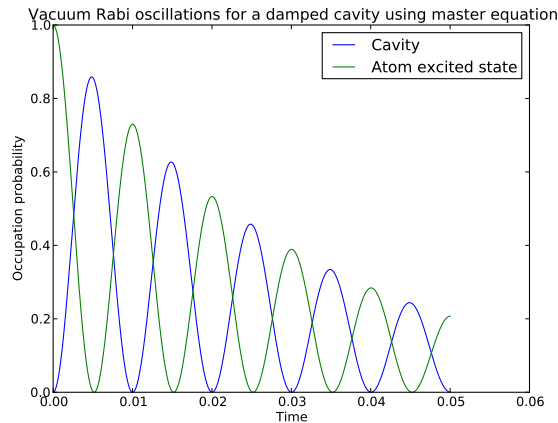
Ο πίνακας πυκνότητας εξελίσσεται χρονικά προς τα εμπρός, αποφασίζοντας με κριτήριο τη σύγκριση του τυχαίου αριθμού r με το γινόμενο $p_c \Delta t$. Αν $r \leq p_c \Delta t$, τότε έχει συμβεί ένα γεγονός φωτοανίχνευσης και η νέα κατάσταση θα δίδεται από τη σχέση:

$$\tilde{\rho}_c(t + \Delta t) = \mathcal{T} \rho_c(t) \Delta t \quad (1.142)$$

Σ' αντιθετη περίπτωση, δεν έχει ανιχνευθεί φωτόνιο, οπότε η κατάσταση θα είναι:

$$\tilde{\rho}_c(t + \Delta t) = \mathcal{S}(\Delta t) \rho_c(t) \quad (1.143)$$

Το νόημα του όρου «Πορεία» πρέπει τώρα να είναι εμφανές: Δηλώνει την *τυχαία έκβαση* ενός γεγονότος. Μετά την επανάληψη αυτής της διαδικασίας για μια σειρά τυχαίων αριθμών r , αθροίζουμε πάνω τους για να πάρουμε την έκβαση της κοιλότητας και κανονικοποιούμε το αποτέλεσμα ώστε το ίχνος του κανονικοποιημένου πίνακα πυκνότητας να είναι ίσο με τη μονάδα. Αυτός ο τρόπος στοχαστικής ανέλιξης ενός πίνακα πυκνότητας, επίσης ονομάζεται «Στοχαστική Master Equation». Ωστόσο, για ένα σύστημα N διαστάσεων ο πίνακας πυκνότητας περιέχει N^2 στοι-



Σχήμα 1.12: Το μοντέλο Jaynes-Cummings σε μια κοιλότητα με απώλειες χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των Κβαντικών Τροχιών για $n_{traj} = 1000$, $\omega_0 = \omega = 1000$, $g = 100$, $\kappa = 10$.

χεία, το οποίο καθιστά τη μέθοδο υπολογιστικά απαιτητική. Ένας πιο εύκολος τρόπος για να υπολογιστεί η δυναμική του συστήματος είναι η επίλυση της εξίσωσης Schrödinger, που βέβαια είναι χειρότερη ως προσέγγιση όμως είναι λιγότερο απαιτητική. Απ' όσα είπαμε πριν, γνωρίζουμε πλέον ότι μπορούμε να γράψουμε: $\mathcal{S} = e^{(\mathcal{L}-\mathcal{T})t}$. Για να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα αυτού του υπερτελεστή στον πίνακα πυκνότητας ρ , χρειάζεται πρώτα να υπολογίσουμε το:

$$\begin{aligned} [(\mathcal{L} - \mathcal{T})t]\rho &= (\mathcal{L}\rho)t - (\mathcal{T}\rho)t \\ &= -\frac{it}{\hbar} [H_0, \rho] + \kappa t (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) - t(\mathcal{T}\rho) \\ &= -\frac{it}{\hbar} [H_0, \rho] + \kappa t (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) - t(\mathcal{T}\rho) - t(\mathcal{T}\rho) \\ &= \left[\left(\frac{H_0}{i\hbar} - \kappa\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) t, \rho \right] \end{aligned} \quad (1.144)$$

Συνεπώς, το αποτέλεσμα της δράσης του υπερτελεστή, μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\mathcal{S}(t)\rho = \hat{N}(t)\rho\hat{N}^\dagger(t) \quad (1.145)$$

όπου ο τελεστής $\hat{N}(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$N(t) = \exp \left[\left(\frac{H_0}{i\hbar} - \kappa\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) t \right] \quad (1.146)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του πίνακα πυκνότητας για μια καθαρή κατάσταση και την προηγούμενη σχέση, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \hat{N}\rho(0)\hat{N}^\dagger(t) = \hat{N}(t)|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|\hat{N}^\dagger(t) \quad (1.147)$$

Συνεπώς, μπορούμε επίσης να γράψουμε τη χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης $|\psi(t)\rangle$ ως:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{N}(t)|\psi(0)\rangle = \exp \left[\left(\frac{H_0}{i\hbar} - \kappa\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) t \right] |\psi(0)\rangle \quad (1.148)$$

Συμβολίζοντας την ενεργό Χαμιλτονιανή ως:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{eff} &= \hat{H}_0 - \frac{i\hbar}{2}\hat{C}^\dagger\hat{C} \\ &= \hat{H}_0 - i\hbar\kappa\hat{a}^\dagger\hat{a} \end{aligned} \quad (1.149)$$

μπορούμε εν τέλει να γράψουμε ότι:

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[\frac{\hat{\mathcal{H}}_{eff}}{i\hbar} t \right] |\psi(0)\rangle \quad (1.150)$$

Εκ πρώτης όψεως, αυτό μπορεί να φαίνεται ως ένας πολύ εξεζητημένος τρόπος να αποδείξουμε την εξίσωση Schrödinger. Πάραυτα, εφόσον η Χαμιλτονιανή \mathcal{H}_{eff} περιέχει μη-μοναδιαίους όρους για τη δυναμική της, δεν πρόκειται ακριβώς για την ίδια περίπτωση. Για να λυθεί αριθμητικά η στοχαστική εξίσωση Schrödinger, χρειαζόμαστε μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών για να πάρουμε τον αριθμό r και να πραγματοποιήσουμε τη σύγκριση που θα μας δώσει την έκβαση της πορείας, εξελίσσοντας την κατάσταση με δύο διαφορετικούς τρόπους. Συνεπώς, η πολυπλοκότητα της διαδικασίας είναι της τάξης $O(N)$, σε αντίθεση με το $O(N^2)$ για την ανάλυση της στοχαστικής Άρχουσας Εξίσωσης. Η πιθανότητα φωτοανίχνευσης και οι κανόνες εξέλιξης της κατάστασης, σε όρους της υπό-συνθήκη κατάστασης αυτή τη φορά ($|\psi(t)\rangle$), περιγράφονται με τις σχέσεις:

$$p_c = \langle \psi_c(t) | \hat{C}^\dagger \hat{C} | \psi_c(t) \rangle \quad (1.151)$$

Στη συνέχεια συγκρίνουμε το γινόμενο $p_c \Delta t$ με το r . Όταν το $r \leq p_c \Delta t$, τότε υπάρχει φωτοανίχνευση, συνεπώς η κατάσταση εξελίσσεται ως:

$$|\tilde{\psi}_c(t + \Delta t)\rangle = \hat{C} |\psi_c(t)\rangle \sqrt{\Delta t} \quad (1.152)$$

Αν το $r > p_c \Delta t$, τότε η εξέλιξη του συστήματος για τη μη ανίχνευση φωτονίου, θα είναι:

$$|\tilde{\psi}_c(t + \Delta t)\rangle = \hat{N}(\Delta t) |\psi_c(t)\rangle \quad (1.153)$$

Κεφάλαιο 2

Κβαντικοί Αλγόριθμοι και Κβαντική Υπολογιστική

Η καθιέρωση του όρου «Κβαντική Υπολογιστική» συχνά αποδίδεται στον Richard Feynman που σε μια εργασία του [21], προσπάθησε να προσομοιώσει τη Κβαντομηχανική με Κλασσικούς Υπολογιστές. Στην πραγματικότητα, ο David Deutsch είχε κυκλοφορήσει μια προεκτύπωση της εργασίας του στην οποία πρότεινε έναν έλεγχο της εξήγησης των πολλών-συμπάντων το 1978, η οποία δεν δημοσιεύτηκε έως και το 1985[22], ενώ ο Bennioff το 1980[20], δημοσίευσε το πρώτο μοντέλο ενός υπολογιστή που λειτουργούσε με «εξαρτήματα» που υπάκουαν στους νόμους της Κβαντομηχανικής. Σε αντίθεση με τον Feynman ο Bennioff έκανε το ακριβώς αντίθετο· προσπάθησε να χρησιμοποιήσει Κβαντομηχανική για να προσομοιώσει έναν κλασσικό υπολογιστή. Η κεντρική ιδέα πίσω από την «Κβαντική Υπολογιστική» ήταν να αντικατασταθούν τα 0 και 1 των ημιαγώγιμων συσκευών, από καταστάσεις υπέρθεσης ή από εναγκαλισμένες καταστάσεις των $|0\rangle$ και $|1\rangle$ που εμφανίζονται στην Κβαντομηχανική. Μετά από αυτή τη δήλωση που συγκέντρωσε την προσοχή ενός μεγάλου μέρους της ακαδημαϊκής κοινότητας στην εποχή της, υπήρξαν εξαιρετες εργασίες που περιέγραφαν την αφηρημένη έννοια και τη λειτουργικότητα ενός Κβαντικού Υπολογιστή. Αναφορές για όλα αυτά μπορούν να βρεθούν στο καθιερωμένο βιβλίο των Nielsen, Chuang, Quantum Computation and Quantum Information[16], ενώ μια πιο εκλαϊκευμένη προσέγγιση ακολουθείται στο [24].

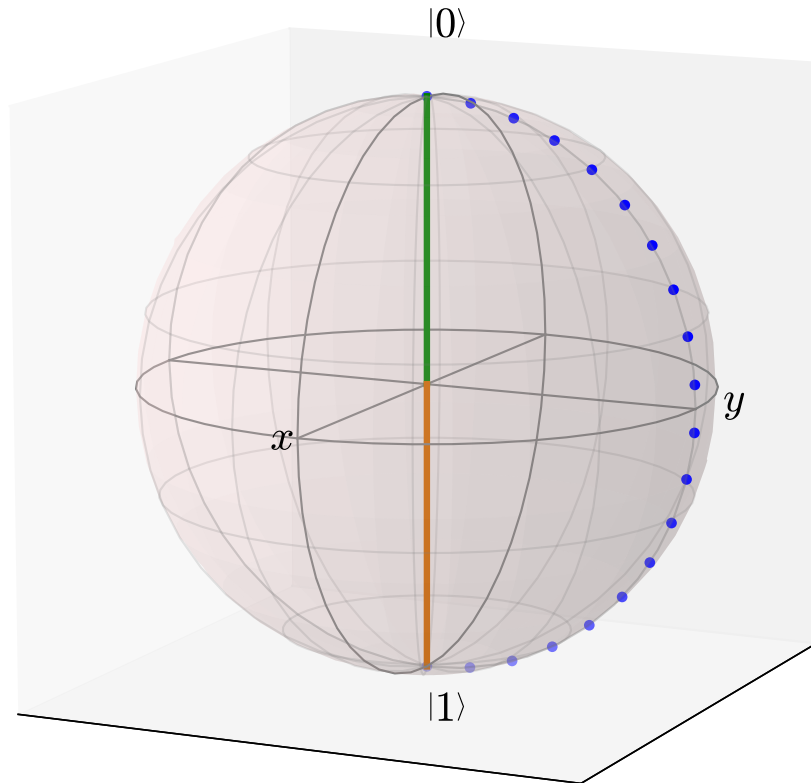
Σε ό,τι ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τις κύριες πύλες που χρησιμοποιούνται για την εκμετάλλευση αυτού του νέου πόρου που μας δίνει η εφαρμογή της Κβαντομηχανικής στην Επιστήμη των Υπολογιστών, δηλαδή τις «Κβαντικές Πύλες» που δείχνουν τις αρχές που χρησιμοποιούνται για να γίνουν διάφορες διεργασίες της Κβαντικής Υπολογιστικής, ανεξάρτητα από το σύστημα στο οποίο γίνεται η υλοποίηση των πυλών και του αλγορίθμου. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τρεις αλγόριθμους θεμελιώδους σημασίας για την κατανόηση του πεδίου: 1) Τον αλγόριθμο Deutsch-Jozsa που χρησιμοποιείται για να ελεγχθεί το κατά πόσον έ-

να νόμισμα είναι μεροληπτικό (έχει πχ. δύο κορώνες) ή αμερόληπτο. Όπως θα δούμε, στο συγκεκριμένο αλγόριθμο γίνεται χρήση της ιδιότητας του «Κβαντικού Παραλληλισμού» και αξίζει να αναφέρουμε ότι ιστορικά, ήταν ο αλγόριθμος που εγκαινίασε το πεδίο της Κβαντικής Υπολογιστικής. 2) Ο αλγόριθμος αναζήτησης του Grover, που χρησιμοποιείται για να διεξάγει σε μια αναζήτηση σε μη ταξινομημένη βάση δεδομένων, κάνοντας τον χρόνο υλοποίησης πολύ μικρότερο από τους κλασσικούς αλγόριθμους. 3) Ο αλγόριθμος του Shor για την επίλυση του θεμελιώδους προβλήματος της θεωρίας αριθμών που αφορά την εύρεση των πρώτων παραγόντων ενός αριθμού. Ιδιαίτερα ο αλγόριθμος του Shor είναι η απάντηση σε ένα ερώτημα που απασχολεί τα Μαθηματικά εδώ και 2.000 περίπου χρόνια και έχει ένα τεράστιο εύρος εφαρμογών.

2.1 Κβαντικά Bits και Πύλες

Ο σχεδιασμός κβαντικών αλγορίθμων, απαιτεί αρχικά τον προσδιορισμό του «υπολογιστικού πόρου» που θα υποστεί επεξεργασία. Στην κλασσική επιστήμη υπολογιστών, αυτή η ποσότητα ορίζεται από την κατάσταση ενός κυκλώματος, δηλαδή αν το ρεύμα περνάει (1) ή δεν περνάει (0), επιτρέποντάς μας να έχουμε μια άμεση βάση στην επικοινωνία μας με το κύκλωμα και συνεπώς να διεξάγουμε συγκεκριμένες πράξεις που πραγματοποιούνται με τη χρήση των κλασσικών πυλών. Στην Κβαντική Υπολογιστική, τα πράγματα είναι κάπως ενάντια στη διαίθησή μας. Έχοντας μια πληθώρα συστημάτων τα οποία έχουν πολλές διαφορετικές καταστάσεις, χρειάζεται να ορίσουμε σε κάθε σύστημα, σε τι θα αντιστοιχεί το $|0\rangle$ και το $|1\rangle$, πράγμα που όπως θα δούμε καθορίζεται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Στο Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε Κοιλότητες είδαμε τι συμβαίνει στην απλή περίπτωση αλληλεπίδρασης φωτός-ύλης και είδαμε τα συστήματα δύο επιπέδων. Από τα πρώτα βήματα του κλάδου της Κβαντικής Υπολογιστικής, η κβαντική ηλεκτροδυναμική σε κοιλότητες, έδειχνε ότι είναι ένας εξαιρετικός υποψήφιος για τη δημιουργία κβαντικών πυλών με τη χρήση ατόμων δύο επιπέδων και τις καλές δυνατότητες ανάγνωσης των καταστάσεων των συστημάτων με τις μετρήσεις Κβαντικής Μη Κατάρρευσης (Quantum Non Demolition Measurements[7]. Αυτός ο νέος υπολογιστικός πόρος που προκύπτει από την κβαντική φύση αυτών των συστημάτων, μας δίνει τη δυνατότητα αφενός να σχεδιάσουμε όλες τις κλασσικές πύλες εκ νέου, αφετέρου να φτιάξουμε πύλες με αποκλειστική εφαρμογή και νέα χαρακτηριστικά για την Κβαντική Υπολογιστική. Ο ιδιαίτερα ενδιαφέρων αυτός υπολογιστικός πόρος, φαίνεται στο σχήμα 2.1, όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σφαίρα Bloch για να απεικονίσουμε ένα qubit στην κατάσταση $|0\rangle$. Το διάνυσμα (σημειωμένο με κόκκινο χρώμα) στην Κβαντική Υπολογιστική, έχει τη δυνατότητα να δείξει οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας.

Η αναθεώρηση των βασικών πράξεων που συμβαίνουν στα διάφορα στάδια ενός



Σχήμα 2.1: Αναπαράσταση ενός qubit στην κατάσταση $|0\rangle$ (κόκκινη γραμμή), με χρήση της σφαίρας Bloch. Οι μοναδιαίοι μετασχηματισμοί μετακινούν την κόκκινη γραμμή σε διαφορετικά σημεία στην επιφάνεια της σφαίρας χωρίς να αλλοιώνουν το μήκος της. Η εικόνα έγινε με τη χρήση του *Qubits on the Bloch Sphere*

κβαντικού αλγόριθμου και περιγράφουν τα κύρια χαρακτηριστικά τους, ακολουθεί. Θα παρουσιάσουμε πρώτα τις κβαντικές πύλες ανάλογα με το πόσα qubits δέχονται ως δεδομένα καθώς και το ποιες διεργασίες υφίστανται τα qubits από πλευράς Φυσικής.

2.1.1 Πράξεις με ένα qubit

Προκειμένου να φτιάξουμε ένα κβαντικό αλγόριθμο, τα qubits θα πρέπει να υφίστανται ορισμένους μοναδιαίους (και αναστρέψιμους) μετασχηματισμούς. Οι πράξεις που εμπλέκουν ένα qubit στην ουσία κάνουν «περιστροφές» του διανύσματος του qubit πάνω στη σφαίρα Bloch.

Πύλη	Όνομα	Πίνακας
$\text{---}[X]\text{---}$	Pauli X	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\text{---}[Y]\text{---}$	Pauli Y	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
$\text{---}[Z]\text{---}$	Pauli Z	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\text{---}[H]\text{---}$	Hadamard	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
$\text{---}[S]\text{---}$	Φάσης	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\text{---}[T]\text{---}$	$\frac{\pi}{8}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix}$

Πίνακας 2.1: Κβαντικές πύλες που δρουν σε ένα qubit

Η πύλη Pauli X κάνει μια στροφή του διανύσματος του qubit γύρω από τον άξονα x κατά π . Ουσιαστικά είναι η κβαντική πύλη NOT , αφού απεικονίζει το $|0\rangle$ στο $|1\rangle$ και αντίστροφα. Η πύλη Pauli Y κάνει μια στροφή του διανύσματος του qubit γύρω από τον άξονα y κατά π . Απεικονίζει το $|0\rangle$ στο $i|1\rangle$ και το $|1\rangle$ στο $-i|0\rangle$. Η πύλη Pauli Z αναπαριστά μια περιστροφή γύρω από τον άξονα z κατά π . Οι περιστροφές γύρω από τον z , αλλάζουν τη φάση του qubit, δηλαδή η γωνία θ στη σφαίρα Bloch. Η πύλη Pauli Z , αφήνει αναλλοίωτο το $|0\rangle$ και απεικονίζει το $|1\rangle$ στο $-|1\rangle$. Η πύλη Hadamard είναι ίσως η πιο σημαντική απ' όλες τις πύλες που αφορούν ένα μοναδικό qubit. Στην αναπαράσταση Bloch περιστρέφει ένα qubit κατά γωνία π γύρω από τους άξονες x και z , δηλαδή απεικονίζει την κατάσταση $|0\rangle$ στην $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ και την $ket1$ στην $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$, δημιουργώντας υπερθέσεις καταστάσεων. Η πύλη κβαντικής φάσης S αφήνει το $|0\rangle$ ως έχει και αλλάζει τη φάση του $|1\rangle$ σε $e^{\frac{i\pi}{2}}|1\rangle$. Ανήκει στην οικογένεια των πυλών αλλαγής φάσης που διεξάγουν περιστροφές μόνο όσον αφορά τη φάση του qubit, δηλαδή δεν αλλάζουν την πιθανότητα να μετρηθεί ένα εκ των $|0\rangle$ ή $|1\rangle$, αλλά στην ουσία αφήνουν το ίχνος ενός ισημερινού που καλύπτει γωνία θ . Για την πύλη φάσης S είναι $\theta = \frac{\pi}{2}$. Καλό θα ήταν να πούμε ότι στην ουσία η πύλη Pauli- Z είναι υποπερίπτωση της κβαντικής πύλης φάσης για $\theta = \pi$. Μια ακόμα συνηθισμένη πύλη αλλαγής φάσης είναι η πύλη $\frac{\pi}{8}$, όπου

$\theta = \frac{\pi}{4}$. Αφήνει το $|0\rangle$ ως έχει και αλλάζει τη φάση του $|1\rangle$ ώστε να δείχνει στη θέση $e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle$. Ο πίνακας 2.1 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τα σύμβολα, τα ονόματα και τις αναπαραστάσεις πινάκων των πιο σημαντικών πράξεων σε ένα qubit.

2.1.2 Πύλες με δύο qubits

Οι πράξεις με δύο qubits είναι θεμελιώδους σημασίας για όλους τους αλγορίθμους. Στην κλασσική επιστήμη υπολογιστών, χρησιμοποιούμε συγκεκριμένες πύλες για να κάνουμε τη λογική πράξη πχ. «Αν A τότε κάνε το B ». Στην κβαντική υπολογιστική, τα πράγματα είναι αρκετά πιο περίπλοκα. Δεδομένου ότι υπάρχουν περιορισμοί όσον αφορά τις διαδικασίες που περιέχονται στους κβαντικούς αλγόριθμους, για να αποφύγουμε την **καταστροφή** της κβαντικής πληροφορίας. Από τα σημαντικότερα εγχειρίδια στις αρχές της Κβαντικής Υπολογιστικής, υπήρξαν οι σημειώσεις του Preskill στις οποίες εξετάζονται εκτός των άλλων και αυτοί οι περιορισμοί. Μας αρκεί να πούμε ότι δεν επιτρέπεται η αντιγραφή μιας κατάστασης, που είναι πιο γνωστό με τον όρο *no-cloning theorem*, οπότε είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε αντιστρέψιμες διαδικασίες (που χρησιμοποιούν δηλαδή μοναδιαίους τελεστές) για να διατηρήσουμε τις κβαντικές ιδιότητες του συστήματος. Ευτυχώς, η διαδικασία χρήσης αναστρέψιμων αλγορίθμων, υπήρξε αντικείμενο έρευνας πολλά χρόνια πριν την εμφάνιση της Κβαντικής Υπολογιστικής και αποδείχθηκε ότι βοήθησε αποφασιστικά σ' αυτό που θα φαινόταν σε κάποιον ανυπέρβλητο εμπόδιο. Ένα άλλο χαρακτηριστικό που δεν επιτρέπεται, είναι οι βρόχοι πάνω σε ένα αλγόριθμο, οπότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι κβαντικοί αλγόριθμοι είναι άκυκλοι (acyclic). Η πρώτη πύλη δύο qubit που θα παρουσιάσουμε είναι η πύλη control-NOT ή πύλη C-NOT. Δέχεται ως δεδομένα δύο qubits που παίζουν το ρόλο του «ελεγκτή» και του «στόχου» αντίστοιχα. Η πράξη που πραγματοποιείται από την C-NOT είναι $|c\rangle|t\rangle \rightarrow |c\rangle|t \oplus c\rangle$, όπου φυσικά $|c\rangle$ το qubit-ελεγκτής και $|t\rangle$ qubit-στόχος. Το σύμβολο \oplus αναπαριστά την πράξη modulo 2, η οποία μεταφράζεται σε «ανθρώπινη γλώσσα» ως: αν το qubit-ελεγκτής είναι $|1\rangle$, το qubit-στόχος αναποδογυρίζει, ειδάλλως μένει ως έχει. Η πύλη SWAP κάνει αυτό ακριβώς που δηλώνει η ονομασία της: εναλλάσσει δύο qubits. Μπορεί να φαίνεται απλή, όμως θα αποδειχθεί στη συνέχεια πάρα πολύ χρήσιμη αυτή η διαδικασία. Η πύλη Control-Z είναι παρόμοια με την C-NOT, ωστόσο αντί να κάνει την πράξη NOT, διεξάγει μια στροφή Pauli Z στο qubit-στόχο αν αυτό βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$, ειδάλλως το αφήνει όπως είναι. Γενικεύοντας, μπορούμε να φτιάξουμε οποιαδήποτε πύλη του τύπου Controlled-U, όπου U είναι ένας οποιοσδήποτε μοναδιαίος μετασχηματισμός. Ένα ακόμα παράδειγμα είναι η πύλη ελεγχόμενης φάσης (ή πύλη κβαντικής φάσης) (Controlled-Phase Gate ή Quantum Phase Gate), η οποία αλλάζει τη φάση αν το qubit-στόχος βρεθεί στην κατάσταση $|1\rangle$, μετατρέποντάς το στην κατάσταση $i|1\rangle$, αλλάζοντας τη φάση του κατά $\frac{\pi}{2}$.


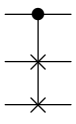
Πύλη	Όνομα	Πίνακας
	Control NOT	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
	SWAP	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	Controlled Z	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
	Controlled -Phase	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$

Πίνακας 2.2: Πύλες με δύο qubits

2.1.3 Πύλες με τρία qubits

Λέμε ότι μια λογική πύλη L είναι **αναστρέψιμη**, αν για ένα οποιοδήποτε αποτέλεσμα της y , υπάρχει ένα μοναδικό δεδομένο εισόδου x τέτοιο ώστε εφαρμόζοντας την L να πάρουμε $L(x) = y$. Αν μια πύλη L είναι αναστρέψιμη, τότε υπάρχει μια αντίστροφη πύλη L' τέτοια ώστε $L'(y) = x$.

Από τις κοινές πύλες λογικής, μόνο η NOT είναι αναστρέψιμη. Η γνωστή AND για παράδειγμα, δεν είναι αναστρέψιμη. Ωστόσο υπάρχει ένας τρόπος για να παρακαμφθεί η ανάγκη της. Δύο εξαιρετικά παραδείγματα παράκαμψης των κλασσικών λογικών πυλών είναι οι πύλες Toffoli και Fredkin, οι οποίες περιγράφονται παρακάτω. Η πύλη Toffoli, επίσης πύλη $CCNOT$ προτάθηκε από τον Tomasso Toffoli το 1980 και ανήκει στην κατηγορία των «καθολικών» αναστρέψιμων πυλών, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οποιαδήποτε συνάρτηση μπορεί να φτιαχτεί αποκλειστικά με τη χρήση της. Χρησιμοποιεί τρία qubits εισόδου (ας πούμε $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$) και τα απεικονίζει στα $|a\rangle, |b\rangle$ και $|c\rangle XOR (|a\rangle AND |b\rangle)$. Αργότερα αποδείχτηκε ότι μια πύλη Toffoli μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας 5 πύλες για 2 qubits[64]. Μια άλλη συχνά χρησιμοποιούμενη καθολική αναστρέψιμη λογική πύλη είναι η πύλη Fredkin, η οποία εναλλάσσει τα δύο τελευταία qubits αν το qubit είναι στην κατάσταση $|1\rangle$.

Πύλη	Όνομα	Πίνακας
	Πύλη Toffoli	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
	Fredkin (Control Swap)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

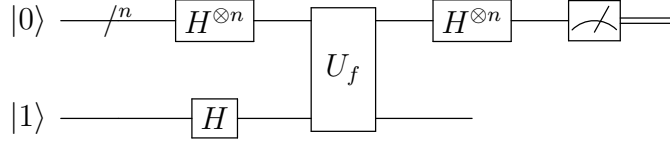
Πίνακας 2.3: Πύλες τριών qubits

2.2 Ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa

Έχοντας περιγράψει και ορίσει τα βασικά στοιχεία ενός κβαντικού αλγόριθμου, θα περιγράψουμε τον πρώτο κβαντικό αλγόριθμο που θα μας απασχολήσει σ' αυτή την εργασία. Αναφερόμαστε στον αλγόριθμο Deutsch-Jozsa, που παρά το ότι δεν λύνει κάποιο ιδιαίτερα δύσκολο πρόβλημα, αποδεικνύει την ισχύ των κβαντικών αλγορίθμων.

Το πρόβλημα: Υποθέτοντας ότι έχουμε μια συνάρτηση $f(x)$ που έχει ως πεδίο ορισμού τις τιμές $x = 0$ or $x = 1$ και τις απεικονίζει στο $0, 1$, θέλουμε να γνωρίζουμε αν η f είναι σταθερή ή όχι. Ένα απλό παράδειγμα για να κατανοήσουμε τι σημαίνει η παραπάνω πρόταση είναι φανταστούμε ότι έχουμε ένα νόμισμα το οποίο θέλουμε να μάθουμε αν έχει και στις δύο πλευρές του κορώνα/γράμματα ή αν είναι κανονικό. Η αρχική δημοσίευση από τον Deutsch[22], περιέγραφε ένα μη-ντετερμινιστικό αλγόριθμο, ο οποίος έδινε την απάντηση με πιθανότητα $1/2$. Έκτοτε, ακολούθησε η εκδοχή του στη δημοσίευση μαζί με τον Jozsa το 1992 [28], η οποία τελειοποιήθηκε από τους Arthur Ekert, Richard Cleve και Michele Mosca[23].

Ο αλγόριθμος δέχεται ως δεδομένα την κατάσταση $n + 1$ και την $|0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$. Δηλαδή, τα πρώτα n qubits είναι στην κατάσταση $|0\rangle$ και το επιπλέον qubit στην κατάσταση $|1\rangle$. Μια πύλη Hadamard εφαρμόζεται σε κάθε qubit για να λάβουμε



Σχήμα 2.2: Αλγόριθμος Deutsch-Jozsa

τελικά την κατάσταση:

$$\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \quad (2.1)$$

Η πύλη U_f είναι η καρδιά του συστήματος. Απεικονίζει την κατάσταση $|x\rangle|y\rangle$ στην $|x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$. Εφαρμόζοντας την U_f παίρνουμε την κατάσταση:

$$\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle(|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle) \quad (2.2)$$

Για κάθε x , $f(x) = 0$ ή 1 , οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \quad (2.3)$$

Σε αυτό το σημείο το βοηθητικό qubit που αρχικά προετοιμάστηκε στην κατάσταση $|1\rangle$ μπορεί να αγνοηθεί. Εφαρμόζοντας μια ακόμα πύλη Hadamard σε καθένα από τα qubits παίρνουμε

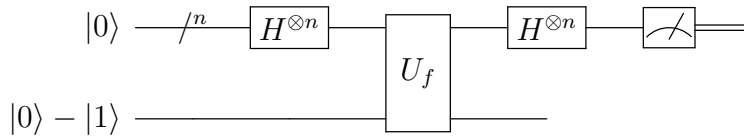
$$\frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{y=0}^{2^n-1} \left[\sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} (-1)^{x \cdot y} \right] |y\rangle \quad (2.4)$$

όπου $x \cdot y = x_0 y_0 \oplus x_1 y_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1} y_{n-1}$ είναι το άθροισμα των γινομένων των qubits. Τελικά, εξετάζουμε την πιθανότητα μέτρησης του $|0\rangle^{\otimes n}$

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \right|^2 \quad (2.5)$$

Αυτή μας δίνει 1 αν η $f(x)$ είναι **σταθερή** και 0 αν η $f(x)$ είναι **σταθμισμένη**. Αξίζει να αναφερθεί ότι ακόμα και στην απλούστερη περίπτωση ενός qubit χρειαζόμαστε το βοηθητικό qubit. Αυτό το επιπλέον qubit είναι το κόστος για την υλοποίηση των αναστρέψιμων αλγορίθμων.

Η βελτίωση του αλγορίθμου που συνεισφέρθηκε από τους Ekert et al[23], χρησιμοποίησε ως βοηθητικό qubit την κατάσταση $|0\rangle - |1\rangle$, χωρίς έτσι να υπάρχει



Σχήμα 2.3: Βελτιωμένη έκδοση του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa[23]

ανάγκη για μια πύλη Hadamard σε αυτό. Η προετοιμασία των qubits εισόδου στην κατάσταση υπέρθεσης, είναι που μας δίνει τη δυνατότητα να κάνουμε χρήση του χαρακτηριστικού του κβαντικού παραλληλισμού. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ο αλγόριθμος αποφαίνεται σε ένα μόλις βήμα, καθώς οι πύλες Hadamard δημιουργούν υπερθέσεις των καταστάσεων $|0\rangle$ και $|1\rangle$, δίνοντάς μας τη δυνατότητα να χειριστούμε παράλληλα τα qubits εισόδου, και να πάρουμε το αποτέλεσμα του μοναδιαίου μετασχηματισμού U_f .

2.3 Ο αλγόριθμος αναζήτησης του Grover

Ο αλγόριθμος του Deutsch σηματοδότησε μια σειρά δημοσιεύσεων σχετικά με τα πιθανά προβλήματα που θα μπορούσαν να επιλύσουν οι Κβαντικοί Υπολογιστές. Όπως είδαμε, η χρήση του μετασχηματισμού U_f στην ουσία θέτει στα δεδομένα το ερώτημα για το αν η συνάρτηση f είναι σταθερή ή σταθμισμένη για να αποφανθεί σε ένα μόνο βήμα του αλγορίθμου. Αυτή η λειτουργία, έδωσε την ιδέα της χρήσης αντίστοιχων μετασχηματισμών για προβλήματα μεγαλύτερης πολυπλοκότητας, προβλήματα σαν αυτό που χειρίζεται ο αλγόριθμος του Grover.

Το πρόβλημα: Δεδομένης μιας μη ταξινομημένης βάσης δεδομένων μεγέθους $N = 2^n$ βρείτε το αντικείμενο που έχει την ετικέτα i .

Ένα πρακτικό παράδειγμα είναι η αντίστροφη αναζήτηση σε έναν τηλεφωνικό κατάλογο, δηλαδή, γνωρίζοντας τον αριθμό τηλεφώνου κάποιου, να βρούμε το όνομα στο οποίο αντιστοιχεί. Αυτή είναι μια πολύ απαιτητική (υπολογιστικά) εργασία, καθώς κλασσικά αν εξετάσουμε k καταγραφές του καταλόγου, έχουμε πιθανότητα $\frac{k}{N}$ να βρούμε το επιθυμητό αντικείμενο. Ο κλασσικός αλγόριθμος με την καλύτερη απόδοση έχει κόστος της τάξης $O(n/2)$ για να εντοπίσει το επιθυμητό αντικείμενο.

Ο αλγόριθμος αναζήτησης του Grover [29],[30], δεν είναι κάτι διαφορετικό από μια επέκταση του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa. Η βασική ιδέα είναι η δημιουργία μιας συνάρτησης που θα λειτουργεί ως «μάντις» για να υποδείξει το επιθυμητό αντικείμενο. Συνεπώς, για κάθε αντικείμενο πρέπει να ορίσουμε μια διαφορετική συνάρτηση, προκειμένου να ολοκληρώσουμε επιτυχώς τον αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος του Grover είναι επίσης ντετερμινιστικός, που σημαίνει ότι πάντα θα δίνει το σωστό αποτέλεσμα, ενώ ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται είναι πολύ μικρότερος από τους κλασσικούς αλγόριθμους όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια. Η περιέργη οντότητα του «μάντι» έχει κάποιες ιδιότητες οι οποίες θα μας

απασχολήσουν σε αυτό το σημείο. Μια καλή διαισθητική προσέγγιση ακολουθείται από τον Jozsa στο [32] για το πώς ακριβώς δουλεύει ο «μάντης». Πρόκειται στην ουσία για έναν μοναδιαίο μετασχηματισμό, που ορίζεται από τη σχέση:

$$I_{x_0} |x\rangle = \begin{cases} |x\rangle & \text{if } x \neq x_0 \\ -|x_0\rangle & \text{if } x = x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Για απλότητα θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό I_τ για να αναφερθούμε στον «μάντη» που εντοπίζει το στοιχείο τ της βάσης δεδομένων. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από τον ορισμό του, ο τελεστής I_τ , αντιστρέφει το στοιχείο $|\tau\rangle$. Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$U \cdot I_{|\tau\rangle} \cdot U^{-1} = I_{U|\tau\rangle} \quad (2.7)$$

καθώς επίσης και

$$-I_v = I_{v^\perp} \quad (2.8)$$

Μια ακόμα πιο χρήσιμη μορφή του τελεστή «μάντη» είναι η

$$I_\tau = I_n - 2|\tau\rangle\langle\tau| \quad (2.9)$$

όπου I_n είναι ο μοναδιαίος πίνακας με διαστάσεις n . Αν χρησιμοποιήσουμε το $|0\rangle$ στην παραπάνω έκφραση, παίρνουμε τον τελεστή

$$I_0 = I_n - 2|0\rangle\langle 0| \quad (2.10)$$

ο οποίος ονομάζεται **τελεστής διάχυσης**.

Τα βήματα του αλγορίθμου έχουν ως εξής:

1. Φτιάξε μια υπέρθεση όλων των διανυσμάτων που ορίζουν τα αντικείμενα, στην κατάλληλη βάση
2. Εφάρμοσε τον τελεστή μάντη για να ταυτοποιήσεις το επιθυμητό αντικείμενο αντιστρέφοντας το πλάτος του.
3. Εφάρμοσε τον τελεστή διάχυσης προκειμένου να ενισχύσεις το πλάτος της επιθυμητής κατάστασης.

Η γεωμετρική απόδειξη της λειτουργικότητας του αλγορίθμου του Grover μας δίνει διαίσθηση για το πώς ακριβώς δουλεύει ο αλγόριθμος και γιατί οι τελεστές I_τ και I_0 έχουν την μορφή που δώσαμε πριν [18].

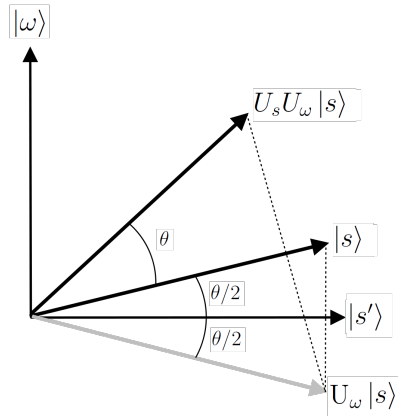
Ας θεωρήσουμε το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $|s'\rangle$ και $|\omega\rangle$, όπου $|s'\rangle$ είναι ένα ket στον υπόχωρο που είναι κάθετος στο $|\omega\rangle$. Στην πρώτη επανάληψη

του αλγορίθμου πάνω στην αρχική κατάσταση $|s\rangle$, εφόσον το $|\omega\rangle$ είναι ένα από τα διανύσματα της βάσης του $|s\rangle$ η επικάλυψή τους είναι:

$$|s'\rangle = \sqrt{\frac{N-1}{N}} \quad (2.11)$$

Σε γεωμετρικούς όρους, η γωνία $\theta/2$ μεταξύ του $|s\rangle$ και του $|s'\rangle$ δίδεται από τη σχέση:

$$\sin \theta/2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (2.12)$$



Σχήμα 2.4: Γεωμετρική απόδειξη του αλγορίθμου του Grover

Ο τελεστής U_ω είναι μια ανάκλαση στο υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στο $|\omega\rangle$ για διανύσματα στο επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $|s'\rangle$ και $|\omega\rangle$, δηλαδή λειτουργεί ως ανάκλαση πάνω στο $|s'\rangle$. Ο τελεστής U_s είναι μια ανάκλαση διαμέσου του $|s\rangle$. Συνεπώς, το διάνυσμα παραμένει στο επίπεδο που ορίζουν τα $|s'\rangle$ και $|\omega\rangle$ μετά από κάθε εφαρμογή των τελεστών U_s και U_ω , ενώ είναι στο ίδιο μοτίβο το να ελέγξουμε το γεγονός ότι ο τελεστής $U_s U_\omega$ κάθε μιας από τις επαναλήψεις του αλγορίθμου περιστρέφει το διάνυσμα κατά μια γωνία $\theta = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{N}}$. Πρέπει να σταματήσουμε όταν το διάνυσμα φτάσει κοντά στο $|\omega\rangle$, καθώς αν περάσουμε από αυτό, ο αλγόριθμος θα έχει μικρότερη πιθανότητα να δώσει τη σωστή απάντηση. Η ακριβής πιθανότητα να λάβουμε τη σωστή απάντηση είναι:

$$\sin^2 \left(\left(r + \frac{1}{2} \right) \theta \right)$$

όπου r είναι ο ακέραιος αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου Grover. Ο μικρότερος χρόνος στον οποίο μπορούμε να έχουμε τη βέλτιστη απάντηση είναι συνεπώς τοσος ώστε να γίνουν επαναλήψεις πλήθους $r \approx \frac{\pi\sqrt{N}}{4}$.

Έχοντας περιγράψει πώς ο «μάντης» μας οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα, είμαστε έτοιμοι να περιγράψουμε τη διαδικασία που μας επιτρέπει να πάρουμε το επιθυμητό αντικείμενο. Πρώτα απ' όλα πρέπει να προετοιμάσουμε το σύστημά μας σε μια υπέρθεση όλων των πιθανών καταστάσεων, οι οποίες όπως είπαμε πρέπει να εκφραστούν σε μια κατάλληλη βάση. Σ αυτή την υπέρθεση καταστάσεων, θα δράσουμε τον «μάντη» του στοιχείου τ δηλαδή τον I_τ ο οποίος θα αντιστρέψει το πλάτος της επιθυμητής κατάστασης. Η λειτουργία του αλγορίθμου κάνει χρήση του χαρακτηριστικού του κβαντικού παραλληλισμού, το οποίο απαιτεί τον εναγκαλισμό. Προκειμένου να εναγκαλιστούν δύο (ή περισσότερα) qubits χρησιμοποιούμε μια πύλη Hadamard. Το επόμενο βήμα θα είναι να εφαρμόσουμε τον τελεστή διάχυσης $I_0 = I - 2|0\rangle\langle 0|$, προκειμένου να ενισχυθεί η κατάσταση που αντιστράφηκε από τον τελεστή I_τ και τελικά να εφαρμόσουμε άλλη μια πύλη Hadamard για να γίνει αναγνώσιμο το αποτέλεσμα του αλγορίθμου. Συνεπώς ο αλγόριθμος του Grover είναι μια σειρά από επαναλήψεις του μοναδιαίου μετασχηματισμού

$$Q = -HI_0HI_\tau \quad (2.13)$$

όπου $I_0 = I - 2|0\rangle\langle 0|$, $I_\tau = I - 2|\tau\rangle\langle \tau|$ και $H = \prod_{i=1}^n H_i$ είναι το γινόμενο των πυλών Hadamard που δρουν στο qubit- i . Αυτή η έκφραση του αλγορίθμου [32], είναι ισοδύναμη με την αρχική έκφραση όπως διατυπώθηκε στα [29],[30].

$$Q^{GR} = -I_0HI_\tau H \quad (2.14)$$

Η ακριβής έκφραση του μετασχηματισμού που πραγματοποιεί η πύλη Hadamard είναι:

$$H_i = \begin{cases} |0\rangle_i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_i + |1\rangle_i) \\ |1\rangle_i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_i - |1\rangle_i) \end{cases} \quad (2.15)$$

Στην πραγματικότητα ο αλγόριθμος του Grover μπορεί να χρησιμοποιήσει οποιοδήποτε μοναδιαίο μετασχηματισμό αντί για την πύλη Hadamard, πράγμα που στη χειρότερη των περιπτώσεων προκαλεί μια σταθερή αύξηση του αριθμού των επαναλήψεων που χρειάζεται για να συγκλίνει ο αλγόριθμος στο επιθυμητό αποτέλεσμα [31], οπότε μπορεί να γραφεί στη γενική μορφή:

$$Q = -UI_0U^{-1}I_\tau \quad (2.16)$$

2.3.1 Παράδειγμα της χρήσης του Grover με τέσσερα αντικείμενα.

Αν φανταστούμε ότι έχουμε χρωματιστές κάρτες (Κόκκινη, Πράσινη, Μπλε και Κίτρινη) οι οποίες είναι γυρισμένες με την δεύτερη πλευρά τους που είναι σε όλες

μαύρη, όπως σε μια τράπουλα και θέλουμε να βρούμε ποια από αυτές είναι η πράσινη. Κλασσικά, αυτό το πρόβλημα απαιτεί 2,25 επαναλήψεις κατά μέσο όρο, προκειμένου να εντοπίσουμε την επιθυμητή κάρτα, ωστόσο ο αλγόριθμος του Grover μας υπόσχεται να βρούμε την απάντηση με ένα βήμα. Πρώτα πρέπει να ορίσουμε την κατάλληλη βάση για το πρόβλημά μας. Αυτή η βάση μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{aligned} |Y\rangle &= |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |G\rangle &= |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |B\rangle &= |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |R\rangle &= |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\perp \end{aligned} \quad (2.17)$$

Έχοντας ορίσει τη βάση, πρέπει να δημιουργήσουμε μια υπέρθεση $|\Psi\rangle$ όλων των καταστάσεων ως:

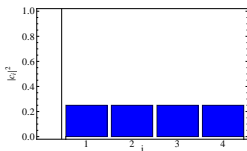
$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{4}} \quad (2.18)$$

Εφόσον θέλουμε να εντοπίσουμε την πράσινη κάρτα, θα ορίσουμε τον αντίστοιχο «μάντη» ως:

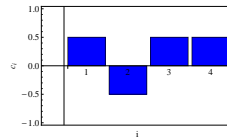
$$I_G = I_4 - 2|G\rangle\langle G| \quad (2.19)$$

ενώ ο τελεστής διάχυσης I_0 θα ορίζεται ως:

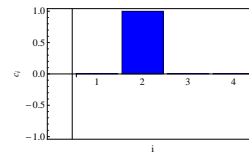
$$I_0 = I_4 - 2|\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (2.20)$$



Σχήμα 2.5: Πιθανότητα για τις τέσσερις καταστάσεις σε υπέρθεση.



Σχήμα 2.6: Πιθανότητα μετά την εφαρμογή του τελεστή αναστροφής



Σχήμα 2.7: Πιθανότητα μετά την εφαρμογή του τελεστή διάχυσης

Στις εικόνες 2.5, 2.6, 2.7, φαίνεται το πώς αλλάζει το πλάτος πιθανότητας των τεσσάρων καταστάσεων μετά τη δράση κάθε τελεστή.

2.4 Ο αλγόριθμος του Shor

Η κρυπτογράφηση και η αποκρυπτογράφηση υπάρχουν όσο υπάρχει η ανάγκη για την προστασία «ευαίσθητων» δεδομένων. Στη διάρκεια του Β Παγκοσμίου Πολέμου έγινε ξεκάθαρο ότι προκειμένου να αποκτήσει κάποια από τις δύο πλευρές

το πλεονέκτημα σε μια συγκεκριμένη φάση του πολέμου, η αποτελεσματικότητα της αντικατασκοπείας και η ικανότητα παρακολούθησης των τηλεπικοινωνιών του αντιπάλου θα ήταν καθοριστική σημασίας για την έκβαση του πολέμου. Η κρυπτογράφηση πληροφοριών εξασφαλίζει ότι μόνο ο επιθυμητός παραλήπτης θα μπορέσει να αποκωδικοποιήσει το μήνυμα, πράγμα που στην εποχή μας βρίσκει εφαρμογές από τις τραπεζικές συναλλαγές έως τις τηλεπικοινωνίες σε μια ιδιαίτερα απαιτητικά εποχή. Ο αλγόριθμος RSA (για περισσότερες πληροφορίες βλ. [65]), στον οποίο στηρίζονται όλες οι σύγχρονες μέθοδοι κρυπτογράφησης χρησιμοποιεί τρία βήματα: **Δημιουργία κλειδιού, κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση**. Η διαδικασία δημιουργίας κλειδιών, η κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση ενός μηνύματος **M**, μεταξύ δύο ατόμων, (ας τους πούμε **Αλίκη** και **Βασίλη**) έχει ως εξής:

1. Διαλέγουμε δύο διακριτούς πρώτους αριθμούς **p** και **q**. Για λόγους ασφαλείας θα πρέπει αυτοί οι δύο αριθμοί να είναι τυχαίοι και να έχουν το ίδιο μήκος σε bits.
2. Υπολογίζουμε το γινόμενο $n = pq$
3. Υπολογίζουμε το $\phi(n) = (p-1)(q-1)$ όπου ϕ είναι η συνάρτηση υπολοίπου του Euler (Euler's totient function).
4. Επιλέγουμε έναν αριθμό e τέτοιον ώστε $1 < e < \phi(n)$ και ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $(e, \phi(n)) = 1$ (να είναι πρώτοι μεταξύ τους). Ο αριθμός e **αποδεσμεύεται ως το δημόσιο κλειδί επικοινωνίας**
5. Προσδιορίζουμε έναν αριθμό d τέτοιον ώστε: $d = e^{-1}(\text{mod } \phi(n))$. Ο d φυλάσσεται ως το ιδιωτικό εκθετικό του κλειδιού. Κατά τη διάρκεια της **κρυπτογράφησης** συμβαίνει η ακόλουθη διαδικασία:
6. Η **Αλίκη** στέλνει το δημόσιο κλειδί της **(n,e)** στον **Βασίλη** και κρατάει μυστικό το ιδιωτικό της κλειδί.
7. Ο **Βασίλης** τότε επιθυμεί να στείλει ένα μήνυμα **M** στην **Αλίκη**, οπότε πρώτα μετατρέπει το μήνυμά του **M** σε έναν ακέραιο **m** ούτως ώστε $0 < m < n$ χρησιμοποιώντας ένα προσυμφωνημένο πρωτόκολλο και μετά υπολογίζει το κρυπτοκείμενο (ciphertext (ς) υπολογίζοντας την ποσότητα $m = c^d(\text{mod } n)$.
8. Έχοντας αποκρυπτογραφήσει το μήνυμα, ο **Βασίλης** στέλνει το κρυπτοκείμενο **c** στην **Αλίκη**. Η **Αλίκη**, μπορεί να πάρει τον ακέραιο **m** από το κρυπτοκείμενο **c** υπολογίζοντας το $m = c^d(\text{mod } n)$ και χρησιμοποιώντας το προσυμφωνημένο πρωτόκολλο για να το μετατρέψει ξανά στο **M**.

Είναι εμφανές ότι η ισχύς του αλγορίθμου RSA στηρίζεται στο γεγονός ότι *δεν υπάρχουν κλασσικοί αλγόριθμοι αρκετά αποδοτικοί για να παραγοντοποιήσουν μεγάλους αριθμούς*, καθώς ο καλύτερος αλγόριθμος για έναν αριθμό μήκους $b - \text{bits}$ (μεγαλύτερος από 100 *bits* είναι ο αλγόριθμος «γενικού κόσκινου» (general number field sieve), που έχει χρόνο υποεκθετικό, της τάξης

$$O\left(\exp\left(\left(\frac{64}{9}b\right)^{1/3}(\log b)^{2/3}\right)\right) \quad (2.21)$$

Ο αλγόριθμος του Shor χρειάζεται χρόνο τάξης μόλις $O(b^3)$ (πολυωνυμικό) και χώρο της τάξης $O(b)$ για τα δεδομένα που χρησιμοποιεί. Η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου του Shor οφείλεται στην αποδοτικότητα του **Κβαντικού Μετασχηματισμού Fourier** όπως θα δούμε σε λίγο.

Η θεωρία αριθμών μας παρέχει μια συντομευση για την παραγοντοποίηση μεγάλων αριθμών. Εμπεριέχει την εύρεση της περιόδου μιας συγκεκριμένης συνάρτησης. Για να κάνουμε τα πράγματα πιο απλά, θα δώσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε το 15.

1. Βρίσκουμε έναν αριθμό πρώτο με το 15 (ας πούμε το 11).
2. Διαιρούμε το 11 με το 15 για να πάρουμε 0 με υπόλοιπο **11**
3. Υψώνουμε στο τετράγωνο το υπόλοιπο για να πάρουμε 121.
4. Διαιρούμε το 121 με το 15 για να πάρουμε 8 με υπόλοιπο **1**.
5. Υψώνουμε στην τρίτη δύναμη το 11 για να πάρουμε 1331.
6. Διαιρούμε το 1331 με το 15 για να πάρουμε 88 με υπόλοιπο **11**.
 - Παρατηρούμε ότι τα υπόλοιπα 11 και 1 εναλλάσσονται με περίοδο 2. Λέμε λοιπόν ότι «η περίοδος του 11 όταν διαιρείται με το 15 είναι 2»
7. Γνωρίζοντας την περίοδο (2) υψώνουμε το 11 στην περίοδό του με τη διαίρεση με το 15, δηλαδή το 2 για να πάρουμε $11^2 = 121$.
8. Βρίσκουμε τη ρίζα του $\sqrt{121} = 11$.
9. Αφαιρούμε και προσθέτουμε 1 για να πάρουμε το ζευγάρι αριθμών 10 και 12.
10. Βρίσκουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των ζευγαριών $(10, 15) = 5$ και $(12, 15) = 3$ (με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη).

Αυτή η διαδικασία είναι τουλάχιστον γελοίο να γίνει για μικρούς αριθμούς, όμως για μεγάλους αριθμούς ο κβαντικός μετασχηματισμός Fourier για την εύρεση της περιόδου, δίνει τεράστια ταχύτητα στον αλγόριθμο. Πριν περιγράψουμε αυτή την υπορουτίνα του Shor, θα δώσουμε τη γενική μορφή του αλγορίθμου. **Το πρόβλημα:** Έχοντας έναν περιττό (οι άρτιοι έχουν τον τετριμμένο διαιρέτη 2), σύνθετο αριθμό N , βρείτε έναν ακέραιο d αυστηρά μεταξύ των 1 και N που να διαιρεί τον N . **Η λύση:**

1. Τρέξε ένα κριτήριο για να επαληθεύσεις αν ο N είναι όντως σύνθετος αριθμός και όχι πρώτος.
2. Διάλεξε έναν τυχαίο αριθμό $a < N$
3. Υπολόγισε τον Μ.Κ.Δ. $\gcd(a, N)$ με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη.
4. Αν $\gcd(a, N) \neq 1$ τότε υπάρχει ένας μη τετριμμένος παράγοντας του N , οπότε σταματάμε.
5. Αλλιώς, χρησιμοποίησε την υπορουτίνα εύρεσης της περιόδου, για να βρεις το r , την περίοδο δηλαδή της ακόλουθης συνάρτησης:

$$f(x) = a^x \bmod N \quad (2.22)$$

δηλαδή την τάξη r του a στο $(\mathbb{Z}_N)^\times$, το οποίο είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός r για τον οποίο $f(x+r) = f(x)$ ή $f(x+r) = a^{x+r} \bmod N = a^x \bmod N$.

6. Αν ο r είναι περιττός γύρνα στο βήμα 1.
7. Αν $\sqrt{a} \equiv -1 \pmod{N}$ γύρνα στο βήμα 1.
8. Ο $\gcd(\sqrt{a} \pm 1, N)$ είναι ένας μη τετριμμένος παράγοντας του N και ο αλγόριθμος ολοκληρώθηκε.

2.4.1 Ο Κβαντικός μετασχηματισμός Fourier

Η σημασία του Κβαντικού Μετασχηματισμού Fourier τον καθιστά ικανό να ορίζει ένα ολόκληρο σύνολο προβλημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με αυτόν. Τέτοια προβλήματα εκτός από τον αλγόριθμο του Shor είναι ο αλγόριθμος εκτίμησης φάσης που επιτρέπει την εκτίμηση των ιδιοτιμών ενός μοναδιαίου τελεστή και το πρόβλημα της κρυμμένης υποομάδας [66], [67]. Ο κβαντικός μετασχηματισμός Fourier είναι το ανάλογο του κλασσικού Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier

(D.F.T., ο οποίος παίρνει ένα διάνυσμα στον \mathbb{C}^N , $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ και το απεικονίζει σε ένα διάνυσμα $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1})$ σύμφωνα με τον τύπο:

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega^{jk} \quad (2.23)$$

Ανακαλώντας την ταυτότητα του Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$ θέτουμε ως ω την N -οστή πρωτεύουσα ρίζα της μονάδας, δηλαδή: $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$. Παρόμοια ο QFT μετατρέπει ένα διάνυσμα

$$ket\psi = a_0|\psi\rangle + a_1|\psi\rangle + \dots a_{N-1}|\psi\rangle \quad (2.24)$$

εφαρμόζοντας τον DFT στα πλάτη του, δίνοντας δηλαδή:

$$|\psi\rangle = \beta_0|\psi\rangle + \beta_1|\psi\rangle + \dots \beta_{N-1}|\psi\rangle \quad (2.25)$$

Δεδομένου ενός τυχαίου διανύσματος $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} a_x |x\rangle \quad (2.26)$$

όπου n είναι ο αριθμός των qubits, ο $QFT|\psi\rangle$ ορίζεται ως:

$$|\psi'\rangle = QFT|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} \frac{a_x e^{\frac{2\pi i}{2^n} xy}}{\sqrt{2^n}} |y\rangle \quad (2.27)$$

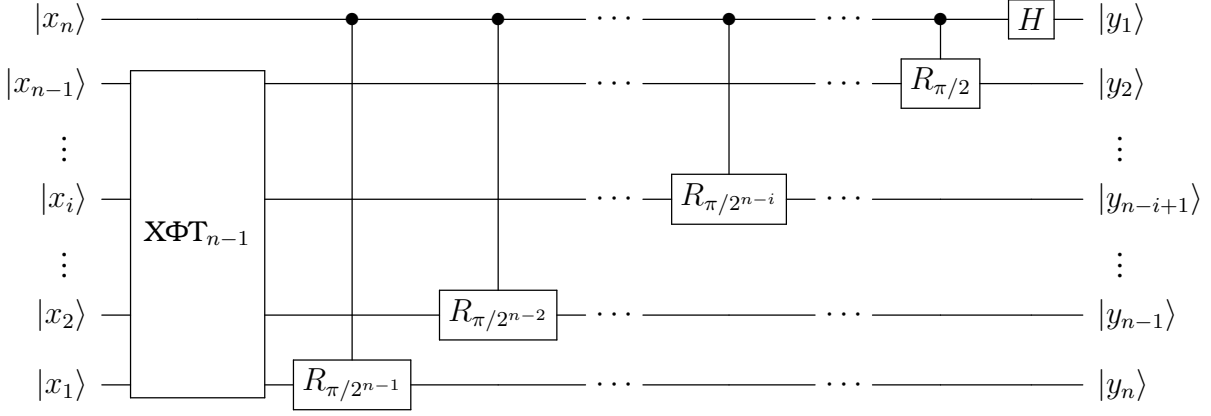
Ξαναγράφοντας το προηγούμενο άθροισμα θέτοντας $M_{xy} = e^{2\pi i xy/2^n}$ βρίσκουμε ότι:

$$\sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} \frac{a_x e^{\frac{2\pi i}{2^n} xy}}{\sqrt{2^n}} |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} \left(\sum_{y=0}^{2^n-1} M_{xy} a_x \right) |\psi\rangle \quad (2.28)$$

Συνεπώς ο πίνακας μετασχηματισμού που ορίζει ο QFT αποτελείται από τα στοιχεία M_{xy} και μπορεί να υπολογιστεί ότι είναι:

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Το κύκλωμα που υλοποιεί τον QFT απεικονίζεται στην εικόνα 2.8



Σχήμα 2.8: Αναπαράσταση του Κβαντικού Αλγορίθμου που απεικονίζει τον Κβαντικό Μετασχηματισμό Fourier για n qubits

2.4.2 Εύρεση της περιόδου μιας συνάρτησης με τον QFT

Η υλοποίηση του αλγορίθμου του Shor όπως δηλώνεται από το ίδιο το πρόβλημα, απαιτεί συγκεκριμένα κυκλώματα για κάθε πρόβλημα. Στη γενική περίπτωση ενός αριθμού N κι ενός τυχαίου a , απαιτούμε δύο μητρώα για input και output που αποτελούνται από L qubits, ούτως ώστε $N^2 \leq 2^L \leq 2N^2$. Αυτή η απαίτηση εξασφαλίζει ότι υπάρχουν τουλάχιστον N διαφορετικά x τα οποία θα παράγουν την ίδια $f(y)$, ακόμα κι αν η περίοδος r πλησιάζει το $N/2$. Αυτή η διαδικασία για την εύρεση της περιόδου, έχει ως εξής:

1. Προετοίμασε 2 μητρώα με L qubits στην αρχική τους κατάσταση.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{x=0}^{2^L-1} |x\rangle \right) |0\rangle \quad (2.30)$$

2. Εφάρμοσε τον μοναδιαίο μετασχηματισμό U_f που ορίζει τις $f_{a,N}(x) = a^x \text{ mod } N$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{x=0}^{2^L-1} |x\rangle \right) |0\rangle \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{x=0}^{2^L-1} |x\rangle \right) |f_{a,N}(x)\rangle \quad (2.31)$$

3. Εφάρμοσε τον QFT στο πρώτο μητρώο:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{x=0}^{2^L-1} |x\rangle \right) |f_{a,N}(x)\rangle \rightarrow \frac{1}{2^L} \sum_{y=0}^{2^L-1} \left(\sum_{x=0}^{2^L-1} e^{2\pi i xy/2^L} |y\rangle \right) |f(x)\rangle \quad (2.32)$$

4. Κάνε μια μέτρηση στο πρώτο μητρώο για να βρεις το y .
5. Βρες την περίοδο της συνάρτησης, r , κατασκευάζοντας συνεχόμενα κλάσματα για το $\frac{y}{2^L}$. Αν αποτύχει αυτό το βήμα επέστρεψε στο βήμα 1.

Κεφάλαιο 3

Υλοποίηση αλγορίθμων σε συστήματα Cavity QED

Οι αλγόριθμοι που αναφέραμε, στην ουσία είναι οδηγίες που εξηγούν ποιοι μετασχηματισμοί πρέπει να εφαρμοστούν σε ένα σύστημα από qubits προκειμένου να υλοποιηθεί ένας αλγόριθμος. Η προσαρμοστικότητα των κβαντικών συστημάτων επιτρέπει μια πολύ μεγάλη ποικιλία από πιθανές πειραματικές υλοποιήσεις των κβαντικών αλγορίθμων. Τα τελευταία χρόνια υπάρχει έντονη ερευνητική δραστηριότητα στο σχεδιασμό και την ανάπτυξη συστημάτων που επιτρέπουν το να χειριστούμε qubits, πράγμα που είναι και το ζητούμενο για την κατασκευή διατάξεων που θα μπορούν να εκτελέσουν με υψηλή πιστότητα κβαντικούς αλγόριθμους. Αυτές οι τεχνικές συμπεριλαμβάνουν τις παγίδες ιόντων [68, 45, 69], τον Πυρηνικό Μαγνητικό Συντονισμό [48], φωτονικά συστήματα([70],[71]), την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική σε Κυκλώματα circuit QED[49],[50],[51] και βέβαια το cavity QED. Θα αναφέρουμε το πώς οι αλγόριθμοι Grover και Shor μπορούν να υλοποιηθούν σε microwave QED, ακολουθώντας δύο εργασίες των ομάδων του Serge Haroche (Grover)[35] και του Marlan O. Scully (Shor) [34]. Το πρώτο πράγμα που χρειάζεται να αναφέρουμε για να συνεχίσουμε, είναι το γεγονός ότι στα συστήματα cavity QED έχουμε την ελευθερία επιλογής μεταξύ ατομικών καταστάσεων ή καταστάσεων της κοιλότητας όταν πρέπει να ορίσουμε «τι είναι το qubit» στη συγκεκριμένη διάταξη. Αυτό το γεγονός επιτρέπει πολλές παραλλαγές και τροποποιήσεις οι οποίες πάντα γίνονται στα όρια που θέτει η πειραματική διάταξη και οι απαιτήσεις του αλγορίθμου. Υπάρχει μια μεγάλη κληρονομιά πειραματικών τεχνικών που έχουν ναπτυχθεί στις διατάξεις cavity QED που μας επιτρέπουν να δημιουργούμε εναγκαλισμένες καταστάσεις κατά βούληση [72], να διαζάγουμε Κβαντικές Μετρήσεις Μη-Κατάρρευσης [73], [74] και να χειριζόμαστε με εξαιρετική ακρίβεια τις καταστάσεις και των ατόμων και των πεδίων των κοιλοτήτων χρησιμοποιώντας τεχνικές που αναφέρονται αναλυτικά στα [6, 7].

3.1 Υλοποίηση του Grover

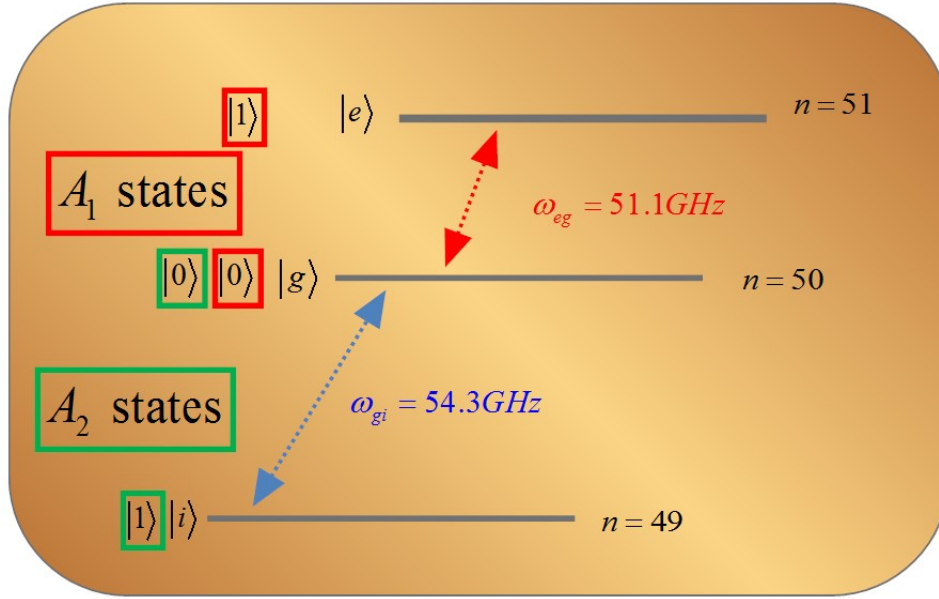
Η μεγαλύτερη πρόκληση που αντιμετωπίζουμε στην υλοποίηση του αλγορίθμου του Grover είναι το να καθορίσουμε μια σειρά παλμών και αλληλεπιδράσεων που θα αποτελέσουν τον τελεστή «μάντι», ο οποίος στην ουσία είναι μια πύλη conditional phase (ή συχνότερα Quantum Phase Gate) που αναστρέφει το πλάτος πιθανότητας της επιθυμητής κατάστασης. Η ελευθερία επιλογής του κατάλληλου μετασχηματισμού προκειμένου να επιτευχθεί η ισοδύναμη διεργασία στον αλγόριθμο του Grover όπως τον γράψαμε στη σχέση 2.16, μας προτείνει ότι μπορούμε να βρούμε μια έκφραση που να μπορεί να υλοποιηθεί στο cavity QED με τη χρήση απλών περιστροφών (με τη βοήθεια των ζωνών Ramsey) και εξωτερικών πηγών μικροκυμάτων. Τα qubits που χρησιμοποιούνται σε αυτή τη διαδικασία είναι δύο άτομα σε κυκλικές καταστάσεις Rydberg A_1 και A_2 που προετοιμάζονται σε κατάλληλη διάταξη και εξέρχονται από έναν φούρνο που τους δίνει τη δυνατότητα να έχουν συγκεκριμένες ταχύτητες, συνεπώς να ελεγχθεί ο χρόνος αλληλεπίδρασης που θα έχουν με την κοιλότητα, ενώ είναι προετοιμασμένα στην θεμελιώδη κατάσταση τους. Για να χειριστούμε κάθε άτομο χωριστά, χρειάζεται να ορίσουμε ποια φυσική κατάσταση των ατομών αντιστοιχεί στα «λογικά» $|0\rangle$ και $|1\rangle$.

Για το άτομο A_1 , η κατάσταση $|g\rangle$ ορίζεται ως $|0\rangle$ και η κατάσταση $|e\rangle$ ως $|1\rangle$. Καθώς οι παλμοί πρέπει να δράσουν ταυτόχρονα και στα δύο άτομα, οι καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ για το A_2 πρέπει να οριστούν με διαφορετικό τρόπο για να αποφευχθούν σφάλματα στον χειρισμό των ατόμων. Συνεπώς, η χρήση ενός χαμηλότερου ενεργειακού επιπέδου $|i\rangle$ για το λογικό $|1\rangle$ του A_2 και το $|g\rangle$ για το λογικό $|0\rangle$ αντιμετωπίζει αυτό το πρόβλημα. Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι η κατάσταση $|i\rangle$ δεν ορίζει ένα άτομο τριών επιπέδων αλλά πρόκειται για ένα επίπεδο εκτός συντονισμού με τη συχνότητα της ακτινοβολίας που συντηρεί η κοιλότητα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1. Η απλούστερη περίπτωση στην οποία ο αλγόριθμος μπορεί να διεξαχθεί, απαιτεί 2 qubits $n = 2$, συνεπώς αυτή η περίπτωση λύνει το παράδειγμα των τεσσάρων καρτών που είδαμε στην αντίστοιχη υποενότητα του προηγούμενου κεφαλαίου¹, δίνοντας τέσσερις καταστάσεις:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |2\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |3\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\perp \end{aligned} \tag{3.1}$$

Οι πύλες Hadamard είναι πύλες ενός qubit που μπορούν να υλοποιηθούν με τη χρήση παλμών $\pi/2$, οπότε θα ασχοληθούμε κυρίως με την υλοποίηση των τελεστών ανάκλασης (I_τ) και διάχυσης I_0 . Καθώς μπορούμε να χειριστούμε κάθε άτομο

¹Για $n = 2$ στην ουσία ο αλγόριθμος Grover είναι ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa



Σχήμα 3.1: Αντιστοιχία των λογικών καταστάσεων στα 2 άτομα για τον αλγόριθμο Grover.

ξεχωριστά, πρέπει να βρούμε ισοδύναμες εκφράσεις για τον τελεστή Q του Grover που θα κάνουν τις απαιτούμενες περιστροφές σε κάθε qubit. Η απαιτούμενη φωνία περιστροφής κάθε qubit εξαρτάται από τον «μάντη» που θέλουμε να κατασκευάσουμε, οπότε ορίζουμε τις γωνίες θ_1 και θ_2 κατά τις οποίες θα περιστρέφεται κάθε qubit ακολουθώντας την παρακάτω σύμβαση: Στη συνέχεια ορίζουμε τον τελεστή

Περιστροφές για :	θ_1	θ_2
$ 0\rangle$	π	π
$ 1\rangle$	0	π
$ 2\rangle$	π	0
$ 3\rangle$	0	0

Πίνακας 3.1: Ορισμός της γωνίας περιστροφής για την υλοποίηση των απαιτούμενων τελεστών-«μαντών».

$X_j(\theta)$ (όπου ο δείκτης j δηλώνει σε ποιο από τα δύο άτομα εφαρμόζεται ο τελεστής), με την κλειστή έκφραση :

$$X_j(\theta) : \begin{cases} |0_j\rangle \rightarrow \cos \frac{\theta}{2} |0_j\rangle + i \sin \frac{\theta}{2} |1_j\rangle \\ |1_j\rangle \rightarrow i \sin \frac{\theta}{2} |0_j\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |1_j\rangle \end{cases} \quad (3.2)$$

Η δράση της πύλης Hadamard πριν και μετά τη πράξη X_j μας δίνει το μετασχη-

ματισμό:

$$Z_i(\pm\theta) = H_i X_i(\mp\theta) H_i \quad (3.3)$$

Η ισοδύναμη έκφραση για τους τελεστές I_τ χρησιμοποιώντας τη σύμβαση γωνιών όπως την περιγράψαμε στον πίνακα 3.1 και η χρήση της Κβαντικής Πύλης Φάσης που ορίζεται από τον μοναδιαίο πίνακα,

$$I_{QPG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

μπορεί τώρα να γραφει στη μορφή:

$$I_\tau = I_{QPG} [Z_1(\theta_1) H_1] [Z_2(\theta_2) H_2] \quad (3.5)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η δράση του τελεστή της Κβαντικής Πύλης Φάσης (I_{QPG}) μπορεί να διεξαχθεί είτε μετά είτε πριν τις περιστροφές των ατόμων, ούτως ώστε:

$$I_{QPG} [Z_1(\theta_1)] [Z_2(\theta_2)] = [Z_1(\theta_1)] [Z_2(\theta_2)] I_{QPG} \quad (3.6)$$

Συνεπώς, ο τελεστής διάχυσης I_0 μπορεί να φραφτεί θέτοντας $\theta_1 = \pi$ και $\theta_2 = \pi$ ως:

$$[H_1 Z_1(\pi)] [H_2 Z_2(\pi)] I_{QPG} \quad (3.7)$$

Χρησιμοποιώντας τις συντομεύσεις:

$$S_i = X_i(-\pi) H_i \quad (3.8)$$

$$P_i(\theta) = H_i X_i(-\theta) \quad (3.9)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε τον τελεστή του Grover, Q ως:

$$Q = S I_{QPG} H I_{QPG} P \quad (3.10)$$

Η κλειστού τύπου εκφράσεις για τις συντομεύσεις S_j , P_j είναι:

$$S_j : \begin{cases} |0_j\rangle \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} (-|0_j\rangle - |1_j\rangle) \\ |1_j\rangle \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} (|0_j\rangle - |1_j\rangle) \end{cases} \quad (3.11)$$

$$P_j : \begin{cases} |0_j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} |0_j\rangle + e^{i\frac{\theta}{2}} |1_j\rangle \right) \\ |1_j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} |0_j\rangle - e^{i\frac{\theta}{2}} |1_j\rangle \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

Ο πίνακας του τελεστή «μάντη» (I_τ) έχει τη μορφή

$$I_\tau = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\theta_1-\theta_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{i}{2}(\theta_1-\theta_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα όλων των τελεστών όπως τους αναφέραμε πριν, μπορούμε να γράψουμε τον τελεστή Grover ως:

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} & -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & -e^{\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} \\ -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} & e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & -e^{\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} \\ -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} & -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & e^{\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} \\ -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} & -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & -e^{\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & -e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Ομολογουμένως, το πιο απαιτητικό κομμάτι της υλοποίησης έχει να κάνει με την υλοποίηση της Κβαντικής Πύλης Φάσης. Για να γίνει αυτός ο μετασχηματισμός, προτάθηκε η «σύγκρουση» των δύο ατόμων (ή ίσως πιο σωστά η ελεγχόμενη αλληλεπίδρασή τους) μέσω της αλληλεπίδρασης van der Waals που υποβοηθάται από την κοιλότητα όποτε αυτό απαιτείται. Για να καταλάβουμε πώς ακριβώς πραγματοποιείται η αλληλεπίδραση, θα μελετήσουμε την αλληλεπίδραση του συστήματος αναλυτικά. Η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης που περιγράφει την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο ατόμων με το πεδίο της κοιλότητας στην εικόνα αλληλεπίδρασης, είναι :

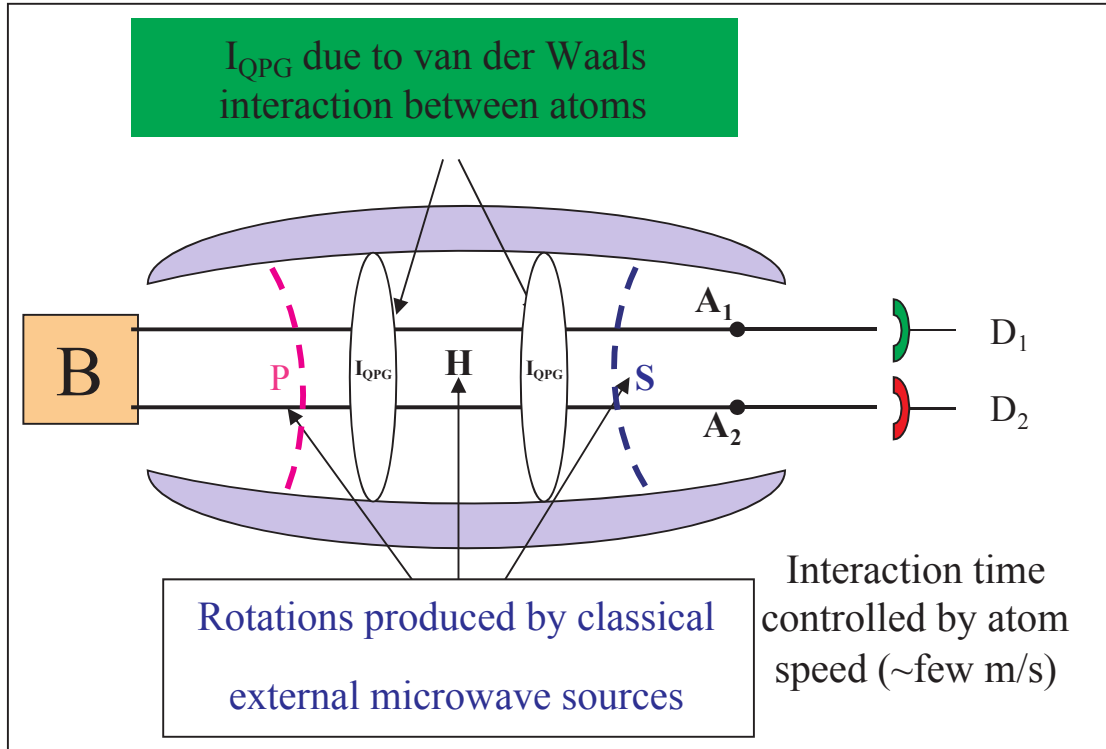
$$H_i = g \sum_{j=1,2} \left(e^{-i\delta t} \hat{a}^\dagger \hat{S}_j^- + e^{i\delta t} \hat{a} \hat{S}_j^+ \right) \quad (3.15)$$

όπου $\hat{S}_j^+ = |e_j\rangle\langle g_j|$ και $\hat{S}_j^- = |g_j\rangle\langle e_j|$ με $|g_j\rangle$ και $|e_j\rangle$, ($j = 1, 2$) οι θεμελιώδεις και διεγερμένες καταστάσεις του ατόμου j αντίστοιχα. Αν θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε στην περιοχή διασποράς, δηλαδή ότι $\delta \gg g$, δεν υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των ατόμων και της κοιλότητας, συνεπώς τα άτομα μπορούν να αλληλεπιδράσουν άμεσα μεταξύ τους. Η αποτελεσματική Χαμιλτονιανή που περιγράφει αυτή την αλληλεπίδραση δίδεται από τη σχέση[75]:

$$H_i = \lambda \left[\sum_{j=1,2} (|e_j\rangle\langle e_j| \hat{a} \hat{a}^\dagger - |g_j\rangle\langle g_j| \hat{a}^\dagger \hat{a}) + (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+) \right] \quad (3.16)$$

όπου $\lambda = g^2/\delta$. Οι πρώτοι δύο όροι περιγράφουν τις μετατοπίσεις *Stark* που επηρεάζονται τον αριθμό φωτονίων, ενώ οι δύο τελευταίοι όροι περιγράφουν την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ δύο ατόμων. Αν η κοιλότητα είναι αρχικά στην κατάσταση κενού, η Χαμιλτονιανή γίνεται (βλ Κεφ. 19 [14]):

$$H_{eff} = \lambda \left[\sum_{j=1,2} |e_j\rangle\langle e_j| + (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+) \right] \quad (3.17)$$



Σχήμα 3.2: Πειραματική διάταξη για την υλοποίηση του αλγορίθμου του Grover. Τα άτομα 1 και 2 διέρχονται από την κοιλότητα με τις ίδιες ταχύτητες, όμως σε διαφορετικές (κατακόρυφες) θέσεις και υπόκεινται στους μετασχηματισμούς S, P, H από εξωτερικές πηγές μικροκυμάτων, ενώ αλληλεπιδρούν δύο φορές μέσα στην κοιλότητα μέσω υποδοθούμενων αλληλεπιδράσεων van der Waals.

Σ' αυτή την έκφραση ο πρώτος όρος περιγράφει τη μετατόπιση Lamb ενώ ο δεύτερος όρος την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των δύο ατόμων που υποδοθάται από την κοιλότητα. Όταν ο χρόνος αλληλεπίδρασης (που όπως είπαμε καθορίζεται από τις ταχύτητες των ατόμων) επιλέγεται ούτως ώστε $\lambda t = \pi$, το σύστημα υφίσταται το μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned}
 |g_1\rangle|g_2\rangle &\rightarrow |g_1\rangle|g_2\rangle \\
 |g_1\rangle|i_2\rangle &\rightarrow |g_1\rangle|i_2\rangle \\
 |e_1\rangle|g_2\rangle &\rightarrow |e_1\rangle|g_2\rangle \\
 |e_1\rangle|i_2\rangle &\rightarrow -|e_1\rangle|i_2\rangle
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Η διαδικασία αυτή αντιστοιχεί στην υλοποίηση της Κβαντικής Πύλης Φάσης. Αναφέροντας μερικά από τα πειραματικά χαρακτηριστικά του πειράματος, πρέπει να τονίσουμε ξανά ότι η κοιλότητα βρίσκεται στην κατάσταση κενού, με τη θερμοκρασία της να είναι $T = 1.3K$, που σημαίνει ότι υπάρχει μέσος αριθμός θερμικών φωτονίων 0,7. Προκειμένου να ψυχθεί περαιτέρω η κοιλότητα, μια μέθοδος είναι

να σταλεί μια ακολουθία από άτομα στη θεμελιώδη κατάσταση για να απορροφήσει αυτά τα θερμικά φωτόνια και να έχει τελικά η κοιλότητα $\bar{n} = 0.12$ φωτόνια [76]. Ο συντελεστής ποιότητας της κοιλότητας στο εν λόγω πείραμα ήταν $Q = 3 \times 10^8$, με τη σταθερά σύζευξης ατόμου-πεδίου να είναι $\Omega/2\pi = 50\text{kHz}$ και $\delta/2\pi = 200\text{kHz}$, δηλαδή ικανοποιείται η απαίτηση της περιοχής διασποράς όπως αυτή περιγράφεται στην εξίσωση 3.17. Προκειμένου να υπάρχει ο απαραίτητος χρόνος ($2.5 \times 10^{-4}\text{s}$) για να δράσει δύο φορές η αλληλεπίδραση που υλοποιεί τη Κβαντική Πύλη Φάσης, θα πρέπει τα άτομα να έχουν ταχύτητες της τάξης των $\sim 40\text{m/s}$. Ο συνολικός χρόνος αλληλεπίδρασης με τον επιθυμητό τρόπο της κοιλότητας είναι $120\mu\text{s}$, δηλαδή πολύ μικρότερος από τον χρόνο ζωής ενός φωτονίου μέσα σε μια κοιλότητα με $Q = 3 \times 10^8$, που είναι περίπου 1ms .

3.1.1 Εναλλακτική υλοποίηση της κβαντικής πύλης φάσης

Η πρόκληση που θέτει η υλοποίηση της κβαντικής πύλης φάσης 2 qubits, έχει οδηγήσει σε διάφορες προτάσεις με αυτό το σκοπό. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η πρόταση που παρουσιάζεται στο [77], όπου οι συγγραφείς περιγράφουν μια διάταξη που πραγματοποιεί την πύλη και δίνουν ένα παράδειγμα με τον αλγόριθμο του Grover. Αν συμβολίσουμε το μετασχηματισμό που προκαλεί η κβαντική πύλη φάσης δύο qubit με Q_η , μπορούμε να τον γράψουμε στη μορφή:

$$Q_\eta |\alpha_1, \beta_2\rangle = \exp[i\eta\delta_{\alpha_1,1}\delta_{\beta_2,1}] |\alpha_1, \beta_2\rangle \quad (3.19)$$

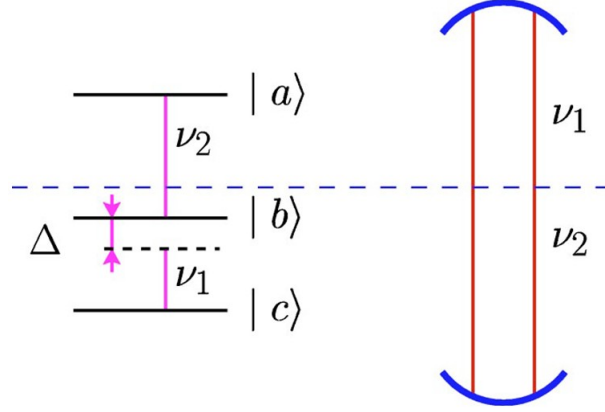
όπου τα $|\alpha_1\rangle$ και $|\beta_2\rangle$ συμβολίζουν τις καταστάσεις βάσης $|0\rangle$ ή $|1\rangle$ των qubits 1 και 2 αντίστοιχα. Η κλειστή μορφή του Q_η είναι:

$$Q_\eta = |0_1, 0_2\rangle\langle 0_1, 0_2| + |0_1, 1_2\rangle\langle 0_1, 1_2| + |1_1, 0_2\rangle\langle 1_1, 0_2| + e^{i\eta}|1_1, 1_2\rangle\langle 1_1, 1_2| \quad (3.20)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $|0\rangle\langle 0| = (1 + \sigma_z)/2$ και $|1\rangle\langle 1| = (1 - \sigma_z)/2$, η αναπαράσταση πίνακα του Q_η είναι:

$$Q_\eta = I_1 I_2 - \frac{1}{4} (1 - e^{i\eta}) (I_1 I_2 - I_1 \sigma_{z2} - \sigma_{z1} I_2 + \sigma_{z1} \sigma_{z2}) \quad (3.21)$$

Η περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι για $\eta = \pi$. Στο σχήμα 3.3, περιγράφεται η προτεινόμενη διάταξη. Μια κοιλότητα που υποστηρίζει δύο συχνότητες ν_1 και ν_2 , ενώ σε αυτή την περίπτωση η κατάσταση του πεδίου της κοιλότητας $|0\rangle$ και $|1\rangle$ αναπαριστά τα λογικά bits αντίστοιχα. Αν οι συχνότητες κενού Rabi που συνδέονται με τις συχνότητες που υποστηρίζονται από τις συχνότητες της κοιλότητας ν_1 και ν_2 είναι g_1 και g_2 και έχουμε αποσυντονισμό Δ τέτοιο ώστε $\omega_{ab} = \nu_2$ και $\omega_{bc} = \nu_2 + \Delta$, τότε η ζητούμενη πύλη μπορεί να υλοποιηθεί με ένα άτομο τριών επιπέδων αρχικά



Σχήμα 3.3: Σύστημα τριών επιπέδων για την εναλλακτική υλοποίηση της κβαντικής πύλης φάσης για δυο qubits[77].

στη θεμελιώδη του κατάσταση (εδώ $|c\rangle$) καθώς αυτό περνάει από την κοιλότητα, όταν: α) Ο αποσυντονισμός $\Delta = g_2$.

β) Ο χρόνος αλληλεπίδρασης ατόμου-κοιλότητας είναι τέτοιος ώστε: $g_1\tau = \sqrt{2}\pi$. Στην περίπτωση που η κοιλότητα έχει ένα φωτόνιο σε καθένα από τους δύο τρόπους της, η αποτελεσματική Χαμιλτονιανή για την αλληλεπίδραση με τις προσεγγίσεις διπόλου και στρεφόμενου κύματος είναι:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (3.22)$$

όπου

$$\mathcal{H}_0 = \hbar\nu_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\nu_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hbar\omega_{bc}|b\rangle\langle b| + \hbar\omega_{ac}|a\rangle\langle a| \quad (3.23)$$

και

$$\mathcal{H}_1 = \hbar g_1 \left(\hat{a}_1|b\rangle\langle c| + \hat{a}_1^\dagger|c\rangle\langle b| \right) + \hbar g_2 \left(\hat{a}_2|a\rangle\langle b| + \hat{a}_2^\dagger|b\rangle\langle a| \right) \quad (3.24)$$

Αν τις τροποποιήσουμε στην εικόνα αλληλεπίδρασης, παίρνουμε:

$$\mathcal{H}_I = e^{-\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} \mathcal{H}_1 e^{\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} = H_1 + H_2 \quad (3.25)$$

Εφόσον οι μόνες καταστάσεις που επιτρέπονται για το σύστημα ατόμου-πεδίου είναι αυτές που διατηρούν την ενέργεια και το συνολικό αριθμό διεγέρσεων του συστήματος, οι μόνες επιτρεπτές καταστάσεις είναι οι $|a, 0, 0\rangle, |b, 0, 1\rangle$ και $|c, 1, 1\rangle$, οπότε οι όροι H_1 και H_2 θα γίνουν:

$$\begin{aligned} H_1 &= \hbar g_1 \left(\hat{a}_1|b\rangle\langle c|e^{-i\Delta t} + \hat{a}_1^\dagger|c\rangle\langle b|e^{i\Delta t} \right) \\ &= \hbar g_1 \left(|b, 0, 1\rangle\langle c, 1, 1|e^{-i\Delta t} + |c, 1, 1\rangle\langle b, 0, 1|e^{i\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

και

$$\begin{aligned} H_2 &= \hbar g_2 \left(\hat{a}_2 |a\rangle \langle b| + \hat{a}_2^\dagger |b\rangle \langle a| \right) \\ &= \hbar g_2 (|a, 0, 0\rangle \langle b, 0, 1| + |b, 0, 1\rangle \langle a, 0, 0|) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Αν ορίσουμε τις ντυμένες καταστάσεις που αντιστοιχούν στον τρόπο της κοιλότητας που υποστηρίζει τη συχνότητα ν_2 , ως:

$$\begin{aligned} |+\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|a, 0, 0\rangle + |b, 0, 1\rangle) \\ |-\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|a, 0, 0\rangle - |b, 0, 1\rangle) \end{aligned} \quad (3.28)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την έκφραση για την H_2 ως:

$$H_2 = \hbar g_2 (|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|), \quad (3.29)$$

η οποία έχει ιδιοτιμές $\hbar g_2$ και $-\hbar g_2$. Γράφοντας τη Χαμιλτονιανή H_1 στην εικόνα αλληλεπίδρασης με την H_2 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} H_{1I} &= \frac{\hbar g_1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \langle c, 1, 1| e^{-i(\Delta+g_2)t} - |-\rangle \langle c, 1, 1| e^{-i(\Delta-g_2)t} \\ &\quad + |c, 1, 1\rangle \langle +| e^{i(\Delta+g_2)t} - |c, 1, 1\rangle \langle -| e^{i(\Delta-g_2)t}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Αν θέσουμε $g_2 = \Delta$ τότε η παραπάνω έκφραση απλοποιείται ως:

$$\begin{aligned} H_{1I} &= \frac{\hbar g_1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \langle c, 1, 1| e^{-i2\Delta t} - |-\rangle \langle c, 1, 1| \\ &\quad + |c, 1, 1\rangle \langle +| e^{-i2\Delta t} - |c, 1, 1\rangle \langle -|) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Υποθέτοντας ότι ο αποσυντονισμός είναι μεγάλος, μπορούμε από αυτή την έκφραση να αγνοήσουμε τους όρους που έχουν μεγάλη συχνότητα στο εκθετικό τους, οπότε

$$H_{1I} = -\frac{\hbar g_1}{\sqrt{2}} (|-\rangle \langle c, 1, 1| + |c, 1, 1\rangle \langle -|) \quad (3.32)$$

Η συχνότητα Rabi μεταξύ των επιπέδων $|-\rangle$ και $|c, 1, 1\rangle$ είναι $g_1/\sqrt{2}$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι αν επιλέξουμε την αλληλεπίδραση έτσι ώστε $g_1\tau = \sqrt{2}\pi$, θα πάρουμε το μετασχηματισμό:

$$|c, 1, 1\rangle \rightarrow -|-\rangle \quad (3.33)$$

Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω διαδικασία δίνει την κβαντική πύλη φάσης Q_π .

3.2 Υλοποίηση του Κβαντικού Μετασχηματισμού Fourier

Μια παρόμοια προσέγγιση όπως αυτή που αναλύσαμε για τον εναλλακτικό τρόπο υλοποίησης της κβαντικής πύλης φάσης, προτάθηκε από τους ίδιους συγγραφείς στο [34], προκειμένου να περιγράψουν μια διάταξη που να υλοποιεί την «καρδιά» του αλγορίθμου του Shor, δηλαδή τον Κβαντικό Μετασχηματισμό Fourier, ο οποίος όπως είδαμε είναι αρκετά πιο απαιτητικός όσον αφορά το πλήθος των qubits που απαιτεί. Υποθέτοντας ότι θέλουμε να δράσουμε τον Q.F.T. σε μια κατάσταση $|a\rangle$ για την οποία $2^q < a < 2^{q-12}$, τότε θα παίρναμε:

$$N_{QFT} = \frac{1}{\sqrt{2^q}} \sum_{c=0}^{2^q-1} e^{2\pi i ac/2^q} |c\rangle \quad (3.34)$$

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί ο αλγόριθμος είναι επαρκές να περιγράψουμε την λειτουργία της πύλης ενός qubit και την κβαντική πύλη φάσης για 2 qubits. Οι πύλες ενός qubit όπως είδαμε και πριν είναι πολύ εύκολο να υλοποιηθούν καθώς είναι περιστροφές που υλοποιούνται με μεγάλη ακρίβεια στις διατάξεις Cavity Q.E.D.

$$\hat{U}_{\theta,\phi} = \cos(\theta)\mathbf{I} - \cos(\phi)\sin(\theta)\hat{\sigma}_x - i\sin(\phi)\sin(\theta)\hat{\sigma}_y \quad (3.35)$$

Για δύο qubits j και k , η κβαντική πύλη φάσης για $\eta = \pi$ δίδεται με τον αντίστοιχο τρόπο της 3.20 ως:

$$Q_{\pi}^{j,k} = |0_j, 0_j\rangle\langle 0_j, 0_k| + |0_j, 1_k\rangle\langle 0_j, 1_k| + |1_j, 0_k\rangle\langle 1_j, 0_k| + e^{i\pi}|1_j, 1_k\rangle\langle 1_j, 1_k| \quad (3.36)$$

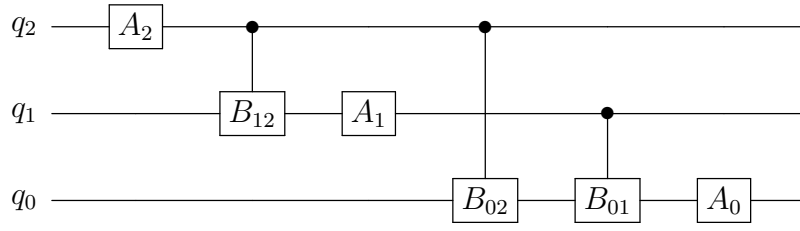
Προκειμένου να πραγματοποιηθεί ο Q.F.T. για $q = 3$, χρειάζεται να γίνουν οι μετασχηματισμοί:

$$A_0 B_{01} B_{02} A_1 B_{12} A_2, \quad (3.37)$$

όπου με $A_i \equiv U_{\pi/4, \pi/2}$ συμβολίζουμε τις πύλες ενός qubit και με $B_{jk} \equiv Q_{\pi/2^{k-j}}$ τις πύλες κβαντικής φάσης για 2 qubits. Η μοναδιαία πύλη για ένα qubit μπορεί να υλοποιηθεί εφαρμόζοντας ένα κλασσικό πεδίο σε ένα άτομο 2 επιπέδων, οδηγώντας στη Χαμιλτονιανή:

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2} (e^{-i\phi}|a\rangle\langle b| + e^{i\phi}|b\rangle\langle a|), \quad (3.38)$$

²Αν θέλαμε να απεικονίσουμε την κατάσταση $|9\rangle \equiv |1, 0, 0, 1\rangle$ θα χρειαζόμασταν 4 qubits, αφού $2^4 < 9 < 2^5$



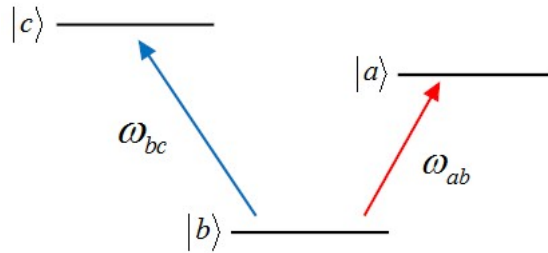
Σχήμα 3.4: Κβαντικό κύκλωμα που υλοποιεί τον QFT για $q = 3$. Με $A_i \equiv U_{\pi/4, \pi/2}$ αναπαριστούμε τις πύλες ενός qubit, ενώ με $B_{jk} \equiv Q_{\pi/2^{k-j}}$ αναπαριστούμε τις κβαντικές πύλες φάσης για 2 qubits.

Όπου $|a\rangle$ είναι η διεγερμένη κατάσταση και $|b\rangle$ η θεμελιώδης. Ο τελεστής χρονικής εξέλιξης του συστήματος είναι:

$$U_I(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H t\right] \quad (3.39)$$

$$= \cos(\Omega t/2) (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) - i \sin(\Omega t/2) (e^{-i\phi}|a\rangle\langle b| + e^{i\phi}|b\rangle\langle a|)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, ο μετασχηματισμός που περιγράφεται είναι μια πύλη ενός qubit με $\theta = \frac{\Omega t}{2}$. Θεωρώντας την κβαντική πύλη φάσης, καθώς είναι απαραίτητο να γίνουν παραπάνω από μία πύλες για την περίπτωση όπου $q = 3$, θα πρέπει να εξετάσουμε την περίπτωση της χρήσης ενός ατόμου τριών επιπέδων σε διάταξη V, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5. Η μετάβαση $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$ είναι εντελώς εκτός συντονισμού με το πεδίο της κοιλότητας, ενώ η $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ υποστηρίζεται με σύζευξη διασποράς. Η αποτελεσματική Χαμιλτονιανή του συστήματος δίδεται



Σχήμα 3.5: Άτομο σε διάταξη V. Η μετάβαση $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$ είναι εντελώς εκτός συντονισμού με την κοιλότητα, ενώ η $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ υποστηρίζεται με σύζευξη διασποράς.

από τη σχέση:

$$\mathcal{H}_{eff} = -\frac{\hbar g^2}{\Delta} (\hat{a}\hat{a}^\dagger|c\rangle\langle c| - \hat{a}^\dagger\hat{a}|b\rangle\langle b|) \quad (3.40)$$

όπου $\Delta = \omega_{cb} - \nu$ είναι ο αποσυντονισμός. Υποθέτοντας ως αρχική κατάσταση του συστήματος πεδίου-ατόμου την:

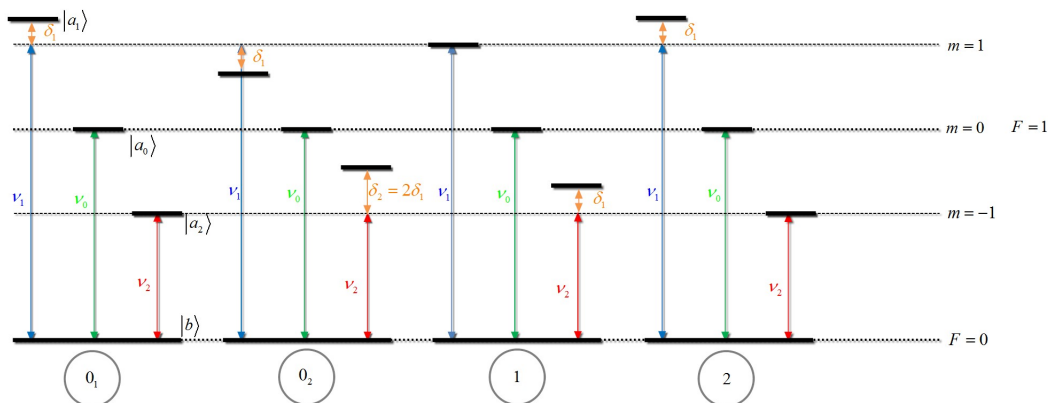
$$\frac{1}{2} (|0, a\rangle + |0, b\rangle + |1, a\rangle + |1, b\rangle), \quad (3.41)$$

τότε το πέρασμα του ατόμου μέσα σε μια κοιλότητα αντιστοιχεί σε αλλαγή φάσης $\eta = g^2\tau/\Delta$ του όρου $|1, b\rangle$, δηλαδή:

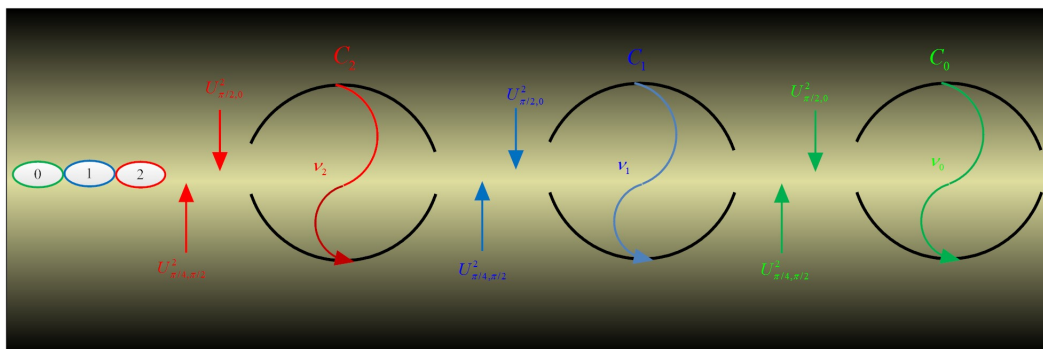
$$\frac{1}{2} (|0, a\rangle + |0, b\rangle + |1, a\rangle + e^{i\eta}|1, b\rangle) \quad (3.42)$$

Θέτοντας κατάλληλες τιμές για τον αποσυντονισμό Δ και το χρόνο αλληλεπίδρασης τ , μπορούμε να υλοποιήσουμε την ζητούμενη πύλη για $\eta = \pi$. Επιστρέφοντας στην υλοποίηση του αλγορίθμου για $q=3$, προκειμένου να υλοποιηθούν οι πύλες που απαιτούνται (B_{01}, B_{02}, B_{12}), κάποιος θα σκεφτόταν ότι απαιτούνται τρεις διαφορετικοί τύποι ατόμων. Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της χρήσης ατόμων Rydberg, είναι η ικανότητα να χρησιμοποιούμε τα ατομικά τους υποεπίπεδα εφαρμόζοντας ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, συνεπώς, αίροντας τον εκφυλισμό και δημιουργώντας τις κατάλληλες αποστάσεις μεταξύ των ατομικών επιπέδων, προκειμένου να έχουμε «3 διαφορετικά άτομα». Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, μπορούμε να επιτύχουμε το διάγραμμα ενεργειακών επιπέδων του σχήματος 3.6. Η θεμελιώδης κατάσταση $|b\rangle$ των ατόμων αντιστοιχεί στο $|1\rangle$ ενώ οι καταστάσεις $|a_i\rangle$ στο $|0\rangle$. Με αυτόν τον κομψό τρόπο μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι οι μεταβάσεις $|b\rangle \rightarrow |a_i\rangle$ είναι σε συντονισμό μόνο με την κοιλότητα i η οποία υποστηρίζει τη συχνότητα ν_i , ενώ οι πύλες ενός qubit $A_i \equiv U_{\pi/4, \pi/2}^i$ που πραγματοποιούνται από κλασσικά πεδία συχνότητας ν_i κάνουν τους αναγκαίους μετασχηματισμούς. Οι παλμοί $U_{\pi/2, 0}^i$ χρησιμοποιούνται για να «αναποδογυρίσουν» τις καταστάσεις $|a_i\rangle$ και $|b\rangle$ πριν το άτομο i εισέλθει στην κοιλότητα και είναι απαραίτητοι, καθώς οι καταστάσεις έχουν οριστεί να αντιστοιχούν οι μεν $|b\rangle$ στο $|1\rangle$, οι δε $|a_i\rangle$ στο $|0\rangle$. Το σχήμα απεικονίζεται στο 3.7.

Οι χρόνοι αλληλεπίδρασης τ , η σταθερά σύζευξης g και οι αποσυντονισμοί δ_i επιλέγονται ώστε $\frac{g^2\tau}{\delta_{j-k}} = \pi/2^{j-k}$. Ιδιαίτερα όσον αφορά το χρόνο αλληλεπίδρασης και τις σταθερές σύζευξης, επιλέγονται ώστε καθώς το άτομο i να περνάει μέσα από την κοιλότητα C_i , να μεταφέρει την καταστασή του στην κοιλότητα και να βγαίνει στη θεμελιώδη κατάσταση, ούτως ώστε η «πληροφορία» να μένει στις κοιλότητες. Η ανάγνωση της κατάστασης απαιτεί μια τριάδα ατόμων προετοιμασμένων στην θεμελιώδη κατάσταση και σε συντονισμό με την κάθε κοιλότητα, ούτως ώστε αν ένα άτομο εξέλθει στην θεμελιώδη κατάσταση το αποτέλεσμα να συμπεράνουμε ότι είναι 0, ενώ αν εξέλθει στη διεγερμένη κατάσταση να αντιστοιχεί στο 1. Αυτή η διάταξη μπορεί θεωρητικά να υλοποιηθεί για n qubits. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πώς μπορούμε να επεκτείνουμε τη χρήση των Κοιλοτήτων, φτιάχνοντας εξαιρετικά μοντέλα για άλλες εφαρμογές, συμπεριλαμβανομένης της Κβαντικής Προσωμείωσης.



Σχήμα 3.6: Ατομικά επίπεδα υπό την επίδραση του μαγνητικού πεδίου. Για κάθε άτομο η θεμελιώδης κατάσταση $|b\rangle$ αντιστοιχεί στο $|1\rangle$ και η $|a_i\rangle$ στο $|0\rangle$.



Σχήμα 3.7: Πρόταση πειραματικής διάταξης για τον αλγόριθμο του Κβαντικού Μετασχηματισμού Fourier για 3 qubits.

Κεφάλαιο 4

Υλοποίηση κβαντικών πυλών σε συστοιχίες συζευγμένων κοιλοτήτων

Στην περιγραφή της πειραματικής υλοποίησης του αλγορίθμου του Shor, συζητήσαμε το πώς ένα σύστημα τριών κοιλοτήτων θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να πραγματοποιηθούν οι απαραίτητες πύλες στην περίπτωση των δύο qubits. Οι φωτονικές κοιλοότητες υποστήριζαν διαφορετικές συχνότητες, προκειμένου να αλληλεπιδρούν με συγκεκριμένα άτομα κάθε φορά, για να γίνουν οι απαραίτητες πύλες στα qubits. Επιπλέον, δεν απαιτήσαμε να υπάρχει δυνατότητα μεταφοράς του πεδίου από τη μια κοιλότητα στην άλλη, αλλά απλά να επιτρέπεται η διέλευση των ατόμων καθώς και η ρύθμιση της ταχύτητας των ατόμων ώστε να επιτυγχάνεται η ακριβής υλοποίηση της επιθυμητής πύλης μέσω της αλληλεπίδρασής τους με το πεδίο της κοιλότητας.

Πέρα από την ιδέα των Κβαντικών Υπολογιστών, ο Feynman σε μια εργασία του το 1982 πρότεινε και την ιδέα των «Κβαντικών Προσομοιωτών»(Quantum Simulators) [21],[36],[78],[79], η οποία συνίσταται στο γεγονός ότι η συμπεριφορά πολύπλοκων κβαντικών συστημάτων για τα οποία είναι αδύνατη η προσομοίωση με κλασσικούς υπολογιστές, μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας άλλα κβαντικά συστήματα στα οποία έχουμε περισσότερο έλεγχο. Με αυτόν τον τρόπο έγινε εμφανές ότι είναι δυνατός ο προσδιορισμός της συμπεριφοράς διαφόρων φαινομένων που έχουν ελλιπή θεωρητική εξήγηση, όπως οι κβαντικές μεταβάσεις φάσης στη Φυσική Στερεάς Κατάστασης και το μοντέλο Hubbard. Πιο πρόσφατα, έγιναν προσπάθειες για την περιγραφή εξωτικών φυσικών θεωριών της Φυσικής Υψηλών Ενεργειών, όπως το μοντέλο Thirring που προβλέπει την επανακανονικοποίηση της μάζας [80, 81].

Για την υλοποίηση των Κβαντικών Προσομοιωτών έχουν χρησιμοποιηθεί οπτικά πλέγματα στα οποία είναι ενσωματωμένα ψυχρά άτομα (optical lattices trapping

cold atoms)[82, 83, 84, 85], παγίδες ιόντων [45, 86, 87, 88, 89] καθώς και διατάξεις Πυρηνικού Μαγνητικού Συντονισμού[90, 91]. Η ιδέα της χρήσης συζευγμένων κοιλοτήτων κάθε μία εκ των οποίων έχει ενσωματωμένο ένα σύστημα δύο επιπέδων ως Κβαντικό Προσομοιωτή, αρχικά προτάθηκε για τη μελέτη φαινομένων όπως οι μεταβάσεις Mott και μοντέλα spin XY [37]. Ακολούθησαν μελέτες των διαγραμμάτων φάσης του συστήματος και εφαρμογές που αφορούσαν την προσομείωση «εξωτικών» φαινομένων της Φυσικής Στερεάς Κατάστασης [92, 93, 94, 95, 96, 97, 98].

Τελευταία, μελέτες συστοιχιών Jaynes-Cummings με απώλειες έχουν εμφανιστεί, στις οποίες μελετάται το μοντέλο Jaynes-Cummings-Hubbard εκτός στατικής ισορροπίας, καθώς και η «επιβίωση» φαινομένων των αποτελεσμάτων από την κατάσταση ισορροπίας στην πραγματική κατάσταση του συστήματος [99, 100, 101, 102, 103, 104].

Αυτή η εκπληκτική καινούρια προοπτική διέγειρε έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον και οδήγησε στην πειραματική πρόοδο συγκεκριμένων διατάξεων, που μπορούν να έχουν και ως απώτερο σκοπό τον Κβαντικό Υπολογιστή. Η πιο συναρπαστική πρόοδος έχει επιτευχθεί κυρίως σε πειράματα circuit QED [105].

Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την απλή περίπτωση δύο συζευγμένων κοιλοτήτων και θα εξερευνήσουμε τη δυνατότητα υλοποίησης κβαντικών αλγορίθμων με τη χρήση αυτής της διάταξης.

4.1 Δυναμική στο μοντέλο δύο συζευγμένων κοιλοτήτων

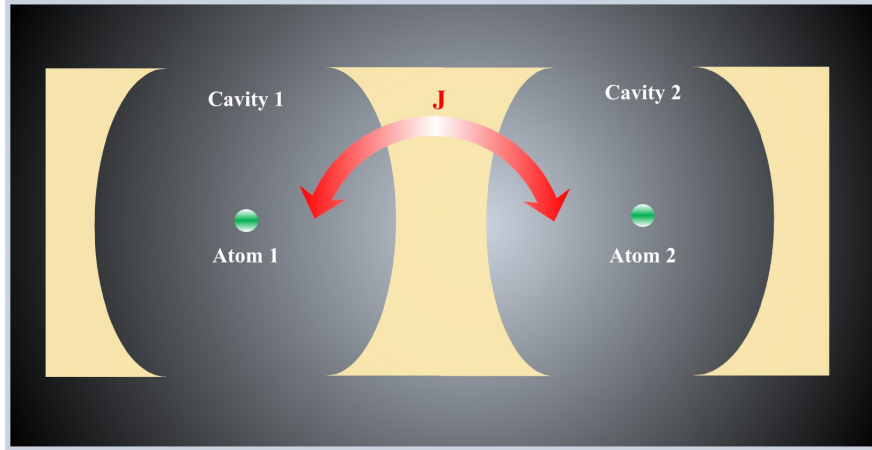
Το μοντέλο Jaynes-Cummings για την περιγραφή της αλληλεπίδρασης ενός ατόμου δύο επιπέδων με ένα μονοχρωματικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, είδαμε ότι περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή:

$$\hat{H}_{J-C} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \quad (4.1)$$

Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα δύο άδειων κοιλοτήτων, κάθε μία εκ των οποίων υποστηρίζει μια συχνότητα ω_i , οι οποίες έχουν συζευχθεί (πχ με το να φέρουμε τις κοιλότητες κοντά ούτως ώστε να επικαλύπτονται οι τρόποι ταλάντωσής τους) θα επιτρέπεται στο πεδίο της κοιλότητας C_1 να μεταφέρεται στη C_2 , με ρυθμό J , οπότε έχουμε μια Χαμιλτονιανή της μορφής:

$$\hat{H} = \hbar\omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + J (\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1) \quad (4.2)$$

Εδώ, συμβολίζουμε με \hat{a}_i , \hat{a}_i^\dagger τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής των φωτονίων και με J την παράμετρο (ή ρυθμό) μεταπήδησης του πεδίου από τη μια κοιλότητα στην άλλη. Αξίζει να αναφέρουμε ότι αυτή η παράμετρος μεταπήδησης



Σχήμα 4.1: Σύστημα δύο συζευγμένων κοιλοτήτων αλληλεπιδρώντων με άτομα.

που ως ρυθμός, έχει διαστάσεις συχνότητας [106],[107], ορίζεται ως η επικάλυψη των πεδίων των δύο κοιλοτήτων και είναι ανάλογος με την ποσότητα :

$$J \propto \int d\vec{r} \vec{u}_1(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{u}_2(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad (4.3)$$

Όπου $\vec{u}_i(\vec{r} - \vec{r}_i)$ είναι το διανυσματικό πεδίο της κατανομής του κάθε τρόπου, \vec{r} το διάνυσμα θέσης ενός σημείου μέσα στην κοιλότητα και \vec{r}_i είναι ένα σημείο αναφοράς μέσα σε κάθε κοιλότητα. Υποθέτοντας ότι $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ¹ μπορούμε να ορίσουμε τις ποσότητες :

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + \hat{a}_2) \\ \hat{A}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 - \hat{a}_2), \end{aligned} \quad (4.4)$$

οι οποίες μας οδηγούν στην εξίσωση :

$$\hat{\mathcal{H}}_{field} = \hbar\omega_{c1}\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1 + \hbar\omega_{c2}\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2 \quad (4.5)$$

Οι νέες συχνότητες $\omega_{c1,2} = \omega \pm J$ αντιστοιχούν στους αντίστοιχους τρόπους ταλάντωσης ενός μηχανικού συστήματος που αποτελείται από δύο συζευγμένα ελατήρια. Η γενική περίπτωση εξετάζεται αναλυτικά στο [106]. Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι αυτοί οι «απεντοπισμένοι» delocalised τρόποι ταλάντωσης του πεδίου,

¹Σε αυτή την εκφυλισμένη περίπτωση ο παράγοντας μεταπήδησης περιορίζεται θεωρητικά από την τιμή $|J| < \omega/2$

υπακούουν στις μεταθετικές σχέσεις μποζονικών τελεστών (όπως άλλωστε θα περιμένα κανείς), δηλαδή ότι:

$$[A_i, A_i^\dagger] = 1, i = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Υποθέτοντας ότι κάθε κοιλότητα τώρα έχει στο εσωτερικό της ένα σταθερό σύστημα δύο επιπέδων, η συνολική Χαμιλτονιανή του συστήματος θα δίνεται ως:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \hat{H}_{J-C,1} + \hat{H}_{J-C,2} + J \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \right) \Leftrightarrow \\ \hat{\mathcal{H}} &= \sum_{j=1,2} \left[\frac{\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_{j3}}{2} + \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + g \left(\hat{a}_j \hat{\sigma}_{j+} + \hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma}_{j-} \right) \right] + J \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Αυτή η Χαμιλτονιανή περιγράφει πλήρως την αλληλεπίδραση του συστήματος. Όπως είναι εμφανές, ο συνολικός αριθμός διεγέρσεων διατηρείται. Θα μελετήσουμε τη δυναμική του συστήματος για την περίπτωση της μίας διεγέρσης. Σ' αυτήν την περίπτωση θεωρούμε τη γενική κατάσταση του συστήματος:

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|g_1 g_2 10\rangle + b(t)|g_1 g_2 01\rangle + c(t)|e_1 g_2 00\rangle + d(t)|g_1 e_2 00\rangle \quad (4.8)$$

Οι πρώτοι δύο όροι σε κάθε *ket* περιγράφουν την κατάσταση των ατόμων 1 και 2 αντίστοιχα, ενώ οι τελευταίοι 2 έχουν την πληροφορία της κατάστασης των κοιλοτήτων 1 και 2. Η χρονική εξέλιξη αυτής της κατάστασης για μία διεγέρση με τη χρήση των απεντοπισμένων τρόπων ταλάντωσης, δίδεται από την εξίσωση Schrödinger με τη χρήση των απεντοπισμένων τρόπων ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \alpha_j(t) &= a(t) + (-1)^j b(t) \\ \beta_j(t) &= c(t) + (-1)^j d(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Η εξίσωση Schrödinger χρησιμοποιώντας τους παραπάνω απεντοπισμένους τρόπους δίνει:

$$\begin{aligned} \alpha_j(t) &= e^{-i(\omega_0 - \Omega_j/2)t} \left[\alpha_j(0) \cos(\nu_j t) + \frac{i}{\nu_j} \left(\frac{\Omega_j}{2} \alpha_j(0) - g \beta_j(0) \right) \sin(\nu_j t) \right] \\ \beta_j(t) &= e^{-i(\omega_0 - \Omega_j/2)t} \left[\beta_j(0) \cos(\nu_j t) - \frac{i}{\nu_j} \left(\frac{\Omega_j}{2} \beta_j(0) - g \alpha_j(0) \right) \sin(\nu_j t) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Όπου θέσαμε

$$\nu_j = \sqrt{\left(\frac{\Omega_j}{2} \right)^2 + g^2} \text{ και} \quad (4.11)$$

$$\Omega_{1,2} = \Delta \pm J \quad (4.12)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.4 κι ένα νέο σύνολο τελεστών για να περιγράψουμε τους ατομικούς συλλογικούς τρόπους, οι οποίοι ορίζονται με τη σχέση

$$\begin{aligned}\hat{S}_{1+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\sigma}_{1+} + \hat{\sigma}_{2+}) \\ \hat{S}_{2+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\sigma}_{1+} - \hat{\sigma}_{2+}),\end{aligned}\quad (4.13)$$

είμαστε σε θέση να ξαναγράψουμε την πλήρη Χαμιλτονιανή του συστήματος στη μορφή:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{j=1,2} \left[\omega_0 \hat{S}_{j+} \hat{S}_{j-} + \omega_{cj} \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j + g \left(\hat{A}_j \hat{S}_{j+} + \hat{A}_j^\dagger \hat{S}_{j-} \right) \right] \quad (4.14)$$

Προκειμένου να διερευνήσουμε την περιοχή παραμέτρων που μας επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί αυτή η διάταξη ώστε να υλοποιηθεί η επιθυμητή κβαντική πύλη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αναλυτικές μεθόδους και υπολογιστικές, οι οποίες παρουσιάζονται στα επόμενα.

4.2 Αναλυτική μέθοδος

Η μορφή της εξίσωσης 4.14, μοιάζει με τη μορφή της σχέσης 4.1. Πράγματι, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι αν θεωρήσουμε τη Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης

$$\hat{H}_I = \sum_{j=1,2} \left[g \left(\hat{A}_j \hat{S}_{j+} + \hat{A}_j^\dagger \hat{S}_{j-} \right) \right] \quad (4.15)$$

και γράψουμε τη μορφή της στην εικόνα αλληλεπίδρασης σε σχέση με τον όρο

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1,2} \left(\omega_0 \hat{S}_{j+} \hat{S}_{j-} + \Omega_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \right), \quad (4.16)$$

τότε έχουμε μια παρόμοια διαδικασία σαν αυτή που κάναμε για να περιγράψουμε την χρονική εξέλιξη μιας κατάστασης για το μοντέλο Jaynes-Cummings. Πράγματι, εφόσον $[\hat{H}_0, \hat{H}_I]$, η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης στην εικόνα αλληλεπίδρασης θα έχει τη μορφή:

$$\hat{\mathcal{H}}_I = g \left(\hat{A}_1^\dagger \hat{S}_{1-} e^{-i\Omega_1 t} + \hat{A}_2^\dagger \hat{S}_{2-} e^{-i\Omega_2 t} + \text{Hermitian Conjugate} \right) \quad (4.17)$$

Αυτή η μορφή μας δείχνει ότι κάθε όρος της Χαμιλτονιανής ταλαντώνεται στην αντίστοιχη συχνότητα Ω_i , ωστόσο, αυτή η μορφή δεν επιτρέπει την ξεκάθαρη παρατήρηση της μεταφοράς της κατάστασης μεταξύ των δύο ατόμων, που είναι και το βασικό χαρακτηριστικό για την επιθυμητή πύλη όπως είδαμε και στη συζήτηση

για τον αλγόριθμο Grover [75]. Προκειμένου να πάρουμε αυτή την έκφραση, στο [108] ακολουθείται η διαδικασία που προτείνεται από το [109] για την εξαγωγή της ενεργής Χαμιλτονιανής του συστήματος, που απλοποιεί τη Χαμιλτονιανή χωρίς να απαλείφει την αλληλεπίδραση ατόμου-πεδίου. Η «ενεργή» (effective) Χαμιλτονιανή ορίζεται από τη χρονική παράγωγο του μέσου (χρονικά) τελεστή χρονικής εξέλιξης:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \overline{\hat{U}(t)} = \hat{\mathcal{H}}_{eff} \overline{\hat{U}(t)} \quad (4.18)$$

Η χρονικά μέση τιμή ενός τελεστή $\hat{\mathcal{O}}$ ορίζεται ως:

$$\overline{\hat{\mathcal{O}}(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') \hat{\mathcal{O}}(t') dt' \quad (4.19)$$

Η συνάρτηση $f(t-t')$, εξυπηρετεί το σκοπό της απαλοιφής των γρήγορα ταλαντούμενων όρων που περιέχονται στους τελεστές, λειτουργώντας ως «βαθυπερατό φίλτρο» για τη διαδικασία της εύρεσης της χρονικά μέσης τιμής της Χαμιλτονιανής². Η σύγκριση με την εξίσωση Schrödinger $i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) = \hat{H}_I \hat{U}(t)$ για τον τελεστή εξέλιξης για τον οποίο δεν παίρνουμε τη μέση τιμή του, μας επιτρέπει να γράψουμε την ενεργή Χαμιλτονιανή ως μια σειρά των \hat{H}_I και \hat{U} . Απαλείφοντας τους όρους που είναι παραπάνω από δεύτερης τάξης για το \hat{H}_I σ' αυτό το ανάπτυγμα, παίρνουμε την έκφραση:

$$\hat{\mathcal{H}}_{eff} = \overline{\hat{\mathcal{H}}_I(t)} + \frac{1}{2} \left\{ \left[\overline{\hat{\mathcal{H}}_I(t)}, \overline{\hat{U}_1(t)} \right] - \left[\overline{\hat{\mathcal{H}}_I(t)}, \overline{\hat{U}_1(t)} \right] \right\} \quad (4.20)$$

Αντικαθιστώντας το $\hat{U}_1(t)$ από την έκφραση που προέρχεται από το ανάπτυγμα σε όρους του $\hat{\mathcal{H}}_I(t)$ για τον τελεστή χρονικής εξέλιξης $\hat{U}(t)$, παίρνουμε:

$$\hat{U}_1(t) = \frac{1}{i} \int_{t_0}^t \hat{\mathcal{H}}_I(t') dt' \quad (4.21)$$

Ο άμεσος υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος για τη Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης 4.17, μας οδηγεί στο μοναδιαίο τελεστή της μορφής:

$$\hat{V}(t) = g \left(\frac{\hat{A}_1^\dagger \hat{S}_1 e^{-i\Omega_1 t}}{\Omega_1} + \frac{\hat{A}_2^\dagger \hat{S}_2 e^{-i\Omega_2 t}}{\Omega_2} - \text{Herm. Conj.} \right) \quad (4.22)$$

²Δεν θα ορίσουμε κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση εδώ. Απλά θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες αυτής της συνάρτησης για την απαλοιφή των γρήγορα ταλαντούμενων όρων.

Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία προκειμένου να προκύψει η έκφραση για την ενεργή Χαμιλτονιανή, πρέπει να υπολογίσουμε το μεταθέτη: $[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{V}(t)]$:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{V}(t)] = & \frac{2g^2}{\Omega_1} [\hat{A}_1 \hat{S}_{1+}, \hat{A}_1^\dagger \hat{S}_{1-}] + \frac{2g^2}{\Omega_2} [\hat{A}_2 \hat{S}_{2+}, \hat{A}_2^\dagger \hat{S}_{2-}] + \\ & + g^2 e^{2iJt} \left(\frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2} \right) [\hat{A}_1 \hat{S}_{1+}, \hat{A}_2^\dagger \hat{S}_{2-}] + \\ & + g^2 e^{2iJt} \left(\frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2} \right) [\hat{A}_2 \hat{S}_{2+}, \hat{A}_1^\dagger \hat{S}_{1-}] \end{aligned} \quad (4.23)$$

Η μορφή της εξίσωσης 4.23 δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί αναλυτικά πλήρως, οπότε θα πρέπει να κάνουμε συγκεκριμένες προσεγγίσεις για την επίλυσή της.

4.2.1 Περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης

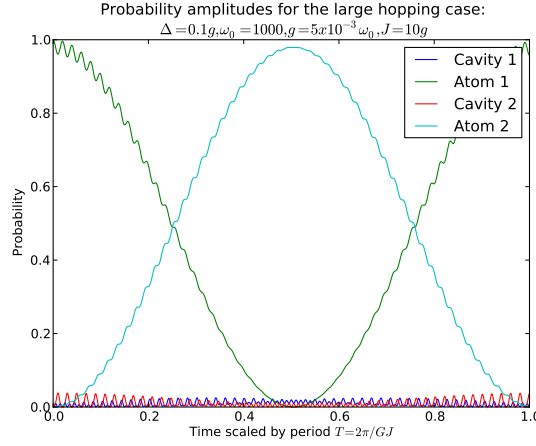
Αρχικά λοιπόν, ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου έχουμε έναν πολύ μεγάλο ρυθμό μεταπήδησης $J \gg \{\Delta, g\}$. Οι δυο τελευταίοι όροι ταλαντώνονται με συχνότητα $2J$. Όπως έγινε σε όλη τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για να πάρουμε αυτή τη σχέση, οι όροι που εμφανίζουν το Ω_i ή J έχουν μηδενική χρονική μέση τιμή, οπότε απαλείφονται. Συνεπώς, η έκφραση για την ενεργή Χαμιλτονιανή $\hat{\mathcal{H}}_{eff}$ θα δίδεται από τη σχέση:

$$\hat{\mathcal{H}}_{eff} = \frac{g^2}{\Omega_1} [\hat{A}_1 \hat{S}_{1+}, \hat{A}_1^\dagger \hat{S}_{1-}] + \frac{g^2}{\Omega_2} [\hat{A}_2 \hat{S}_{2+}, \hat{A}_2^\dagger \hat{S}_{2-}] \quad (4.24)$$

Αυτή η μορφή δεν περιγράφει απτά τον τρόπο με τον οποίο η διέγερση του συστήματος μεταπηδά απευθείας από το ένα άτομο στο άλλο. Η χρονική εξέλιξη του συστήματος μας επιβάλλει να χρησιμοποιήσουμε τη Χαμιλτονιανή στην εικόνα Schrödinger. Μετά από αρκετές πράξεις θα πάρουμε το αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}' = \hat{H}_0 + & \overbrace{\sum_{i,j=1}^2 \frac{g^2}{2\Omega_i} \left(\hat{A}_i \hat{A}_i^\dagger |e\rangle_j \langle e| - \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i |g\rangle_j \langle g| \right)}^{\text{αλληλεπίδραση αποσυντονισμού μεταξύ ατόμων και απεντοπισμένων τρόπων του πεδίου}} + \\ & \underbrace{\frac{g^2}{\Omega_1 \Omega_2} J (\hat{\sigma}_{1+} \hat{\sigma}_{2-} + \hat{\sigma}_{2+} \hat{\sigma}_{1-})}_{\text{μεταφορά κατάστασης χωρίς μεσολάβηση των πεδίων των κοιλοτήτων}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ο όρος \hat{H}_0 αντιστοιχεί στην ενέργεια των απεντοπισμένων τρόπων των ατόμων και των πεδίων και είναι ο όρος που γράψαμε στην εξίσωση 4.16. Ο δεύτερος όρος περιγράφει την αλληλεπίδραση αποσυντονισμού μεταξύ των ατόμων και των απεντοπισμένων τρόπων των πεδίων. Όπως συζητήσαμε σε προηγούμενες περιπτώσεις



Σχήμα 4.2: Πλάτη πιθανότητας που αντιστοιχούν στη διέγερση ενός συγκεκριμένου τρόπου ή ατόμου ως συνάρτηση του χρόνου για την περίπτωση μεγάλου ρυθμού μεταπήδησης, υποθέτοντας ότι το σύστημα ξεκίνησε από την κατάσταση $|eg00\rangle$. Εδώ, $J = 10g$, $\Delta = 0.1g$ και $\omega = 1000g$, ενώ ο χρόνος είναι σε μονάδες $\frac{gJ}{2\pi}$

αλληλεπιδράσεων αποσυντονισμού, δεν υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ ατόμων και πεδίων, όμως τα άτομα εμφανίζουν μετατόπιση Stark. Ο τελευταίος όρος είναι που περιγράφει την μεταφορά κατάστασης μεταξύ των ατόμων χωρίς διέγερση στα πεδία των κοιλοτήτων. Θέτοντας $G = g^2/\Omega_1\Omega_2$ και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης 4.9, 4.10, παίρνουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{-i(\omega-G\Delta)t} [a(0) \sin(Jt) - b(0) \cos(Jt)] \\ b(t) &= e^{-i(\omega-G\Delta)t} [-ia(0) \cos(Jt) + ib(0) \sin(Jt)] \\ c(t) &= e^{-i(\omega_0+G\Delta)t} [c(0) \cos(GJt) - id(0) \sin(GJt)] \\ d(t) &= e^{-i(\omega_0+G\Delta)t} [-ic(0) \sin(GJt) + d(0) \cos(GJt)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Όπως είναι εμφανές, η κατάσταση μεταφέρεται από το ένα άτομο στο άλλο με ρυθμό GJ , όπου

$$G = \frac{g^2}{\Omega_1\Omega_2} = \frac{g^2}{(\Delta + J)(\Delta - J)} \quad (4.27)$$

Μία κατάλληλη επιλογή παραμέτρων για αυτή την περίπτωση υψηλού ρυθμού μεταπήδησης είναι να θέσουμε $J = 10g, \Delta = 0.1g, g = 5 \cdot 10^{-3}\omega_0$. Θέτοντας την αρχική κατάσταση του συστήματος στην $|\psi(0)\rangle = |eg00\rangle$ και χρησιμοποιώντας την πλήρη μορφή της Χαμιλτονιανής για τη χρονική εξέλιξη του συστήματος, λαμβάνουμε τα πλάτη πιθανότητας για τη μετάβαση της διέγερσης από το Άτομο 1 στο Άτομο 2, καθώς και τα αντίστοιχα πλάτη πιθανότητας για τη μετάβαση της διέγερσης στους τρόπους ταλάντωσης του πεδίου. Αυτές οι πιθανότητες απεικονίζονται συναρτήσει του χρόνου στη γραφική παράσταση 4.2.

Η γραφική παράσταση δείχνει ξεκάθαρα ότι στην περίπτωση υψηλού ρυθμού μεταπήδησης φωτονίων, η διέγερση έχει πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα να βρεθεί σε ένα από τα άτομα, παρά στα πεδία των κοιλοτήτων. Η σημασία αυτού του γεγονότος θα φανεί ξεκάθαρα όταν θα έχουμε να μελετήσουμε μια μη ιδανική κοιλοότητα όπως θα δούμε αργότερα. Αυτή η αμοιβαία ανταλλαγή κατάστασης, συμβαίνει με συχνότητα GJ όπως προβλέπει η αναλυτική λύση 4.26.

Θέτοντας τις αριθμητικές τιμές για τις παραμέτρους αυτής της περίπτωσης στην έκφραση της ποσότητας GJ μπορούμε να υπολογίσουμε ότι η περίοδος μετάβασης της κατάστασης από το Άτομο 1 στο Άτομο 2 θα είναι:

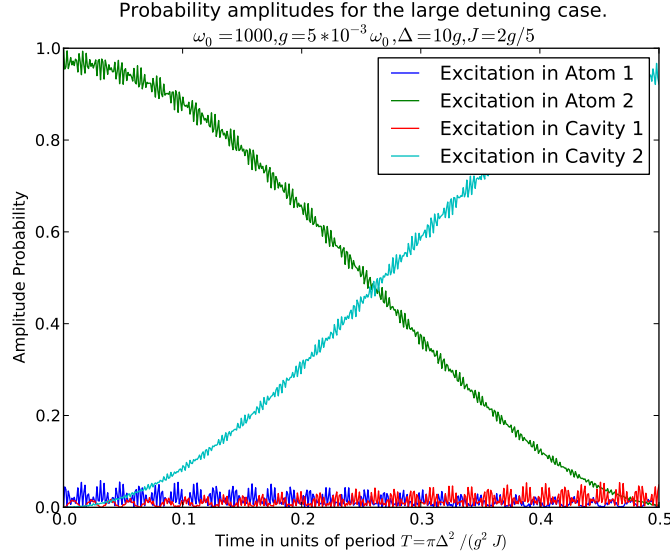
$$\begin{aligned} T_{LH} &= \frac{2\pi}{GJ} = \frac{2\pi}{\frac{g^2}{\Omega_1\Omega_2}J} = \frac{2\pi}{\frac{g^2}{(\Delta+J)(\Delta-J)}J} \\ &= \frac{2\pi(\Delta^2 - J^2)}{g^2J} \simeq \frac{2\pi J}{g^2}, \text{ αφού ισχύει ότι } \Delta \ll J \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.2.2 Περιοχή μεγάλου αποσυντονισμού

Η συμπεριφορά του μοντέλου Jaynes-Cummings στην περιοχή μεγάλου αποσυντονισμού μας οδηγεί στο να ελέγξουμε το κατά πόσον υπάρχει ενδιαφέρουσα φυσική και σε αυτή την περιοχή παραμέτρων. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και για την περίπτωση υψηλού ρυθμού μεταπήδησης, πρέπει και πάλι να υπολογίσουμε την ενεργή Χαμιλτονιανή. Λόγω του ότι θεωρούμε ότι ο αποσυντονισμός είναι πολύ μεγαλύτερος από τη σταθερά σύζευξης ατόμου-πεδίου και του ρυθμού μεταπήδησης, δηλαδή $\Delta \gg \{J, g\}$, οι όροι που ταλαντώνονται με ρυθμούς Ω_1 ή Ω_2 απαλείφονται στη διαδικασία υπολογισμού του χρονικού μέσου όρου. Συνεπώς η ενεργή Χαμιλτονιανή στην εικόνα Schrödinger γίνεται:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}' &= \hat{H}_0 + \sum_{j=1}^2 \frac{g^2\Delta}{\Omega_1\Omega_2} \left(\hat{a}_j\hat{a}_j^\dagger|e\rangle_j\langle e| - \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j|g\rangle_j\langle g| \right) + \frac{g^2J}{2\Omega_1\Omega_2} \left(\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2 - \hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1 \right) (\hat{\sigma}_{1z} + \hat{\sigma}_{2z}) + \\ &+ \frac{g^2J}{\Omega_1\Omega_2} (\hat{\sigma}_{1+}\hat{\sigma}_{2-} + \hat{\sigma}_{2+}\hat{\sigma}_{1-}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ο τελευταίος όρος αυτής της έκφρασης είναι ο ίδιος που υπολογίσαμε για την περίπτωση μεγάλου ρυθμού μεταπήδησης και περιγράφει την άμεση αλληλεπίδραση των ατόμων. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι οι όροι της μετατόπισης Stark είναι διαφορετικοί. Στην προηγούμενη περίπτωση κάθε άτομο μπορούσε να αλληλεπιδράσει με τους απεντιοπισμένους τρόπους του συνολικού πεδίου, όμως τώρα, καθώς βρισκόμαστε στην περιοχή αποσυντονισμού, η μετατόπιση χωρίζεται σε δύο όρους. Ο πρώτος όρος περιγράφει την αλληλεπίδραση κάθε ατόμου με την κοιλοότητα στην



Σχήμα 4.3: Πλάτη πιθανότητας που αντιστοιχούν στη διέγερση ενός συγκεκριμένου τρόπου των ατόμων ή των πεδίων ως συνάρτηση του χρόνου, για παραμέτρους στην περιοχή αποσυντονισμού, υποθέτοντας ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η $|eg00\rangle$. Οι παράμετροι είναι $\Delta = 10g$, $g = 5 \cdot 10^{-3} \omega_0$, $J = (2/5)g$, ενώ ο χρόνος είναι σε κλίμακα του $\frac{\pi \Delta^2}{g^2 J}$

οποία βρίσκεται, ενώ ο δεύτερος τη μετατόπιση λόγω του απεντοπισμένου πεδίου και είναι πολύ μικρότερος από τον πρώτο, οπότε για μεγάλες τιμές αποσυντονισμού μπορούμε να τον αγνοήσουμε. Όσον αφορά τις εξισώσεις κίνησης θα έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με τις 4.26. Συνεπώς μπορούμε να επαληθεύσουμε το γεγονός ότι δεν υπάρχει μεταφορά ενέργειας μεταξύ των τρόπων του πεδίου και των ατόμων καθώς και ότι μια διέγερση μεταφέρεται περιοδικά από το ένα άτομο στο άλλο με σταθερό ρυθμό, ίσο με GJ . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε για την εύρεση της περιόδου μεταφοράς της διέγερσης από το ένα άτομο στο άλλο στην περίπτωση υψηλού ρυθμού μεταπήδησης φωτονίων, αλλά πλέον με τις συνθήκες της περιοχής αποσυντονισμού, η βρίσκουμε ότι η περίοδος σ αυτήν την περιοχή θα είναι:

$$T_{disp} \simeq \frac{\pi \Delta^2}{g^2 J} \quad (4.30)$$

Οι απαιτήσεις της περιοχής αποσυντονισμού είναι $\Delta \gg \{J, g\}$, οπότε μια καλή επιλογή παραμέτρων θα είναι $g = 5 \times 10^{-3} \omega_0$, $\Delta = 10g$, $J = (2/5)g$. Στην εικόνα 4.3 παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για αυτήν την περίπτωση. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση, η πιθανότητα μετάβασης της κατάστασης στους τρόπους του πεδίου είναι πάρα πολύ μικρή, όπως και στην περίπτωση υψηλού ρυθμού μεταπήδησης.

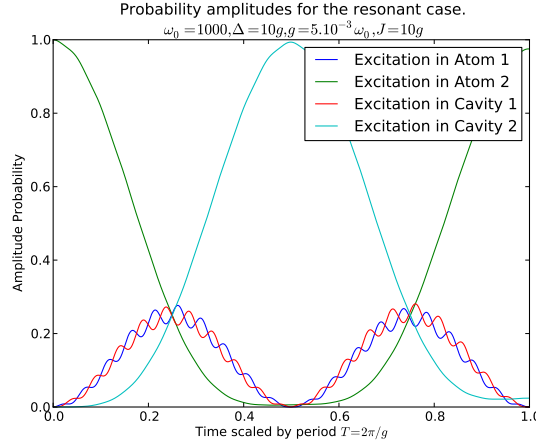
Ωστόσο ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει αυτή η μεταφορά κατάστασης από το άτομο 1 στο άτομο 2 είναι κατά πολύ αυξημένος, μειώνοντας την απόκριση του συστήματος. Παρατηρούμε ότι η περίοδος μετάβασης της κατάστασης από το ένα άτομο στο άλλο είναι $T = \frac{\pi \Delta^2}{g^2 J}$. Θέτοντας διαφορετικές τιμές για τις παραμέτρους, παρατηρήσαμε (χωρίς να το δείχνουμε εδώ) ότι για μικρές τιμές του Δ , όπως αναμένεται άλλωστε, υπάρχει μια μεγάλη πιθανότητα η κατάσταση να περάσει στους τρόπους του πεδίου, όμως καθώς αυξάνεται ο αποσυντονισμός (με τα g και J σταθερά), παρατηρήσαμε ότι ελαχιστοποιείται. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι η μεταφορά της κατάστασης από τους συλλογικούς ατομικούς τρόπους στους τρόπους του πεδίου, απαιτεί ένα σημαντικό ποσό ενέργειας, οπότε στην περίπτωση αποσυντονισμού σχεδόν εξαλείφεται.

4.2.3 Περίπτωση συντονισμού

Η τελευταία περιοχή που θα διερευνήσουμε είναι η περίπτωση που οι απεντοπισμένοι τρόποι του πεδίου είναι σε συντονισμό με τους απεντοπισμένους συλλογικούς ατομικούς τρόπους. Σ αυτή την περίπτωση τα άτομα ανταλλάσσουν ενέργεια όχι άμεσα μεταξύ τους, αλλά μέσω των απεντοπισμένων τρόπων του πεδίου, σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. Προκειμένου να υπολογίσουμε την ενεργή Χαμιλτονιανή στην εικόνα Schrödinger, τώρα απαλείφουμε τους όρους που περιέχουν συχνότητες $2J$ και Ω_1 . Η Χαμιλτονιανή για αυτή την περίπτωση, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}' = \hat{H}_0 + g \left(\hat{A}_2^\dagger \hat{S}_{2-} + \hat{A}_2 \hat{S}_{2+} \right) + \frac{g^2}{2\Omega_1} \left[\hat{A}_1 \hat{A}_1^\dagger (|e\rangle_1 \langle e| + |e\rangle_2 \langle e|) - \right. \\ \left. - \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 (|g\rangle_1 \langle g| + |g\rangle_2 \langle g|) - (\hat{\sigma}_{1+} \hat{\sigma}_{2-} + \hat{\sigma}_{2+} \hat{\sigma}_{1-}) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ο δεύτερος όρος περιγράφει την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των συντονισμένων, απεντοπισμένων τρόπων των ατόμων και των πεδίων \hat{S}_2 και \hat{A}_2 . Ο τρίτος όρος περιγράφει την αλληλεπίδραση αποσυντονισμού μεταξύ των τρόπων \hat{S}_1 και \hat{A}_1 καθώς είναι πολύ αποσυντονισμένοι. Επιπλέον παρατηρούμε μια μετατόπιση Stark των ατόμων, η οποία εξαρτάται τώρα από την κατάσταση του \hat{A}_1 , ενώ ο τελευταίος όρος περιγράφει την άμεση μεταφορά ενέργειας μεταξύ των ατόμων, χωρίς τη μεσολάβηση του πεδίου. Για αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις κίνησης θα δώσουν την ακριβή συμπεριφορά του συστήματος. Καθώς η αλληλεπίδραση αποσυντονισμού μπορεί να αγνοηθεί $\left(\frac{g^2}{2\Omega_1} \ll g \right)$ για χρόνους μικρότερους από Ω_1/g^2 , αναμένουμε μια συμπεριφορά παρόμοια με την περίπτωση ενός ατόμου συζευγμένου σε μια κοιλότητα. Η διαφορά εδώ είναι πλέον ότι το ρόλο του πεδίου (της παλιάς περίπτωσης), πλέον τον έχει το απεντοπισμένο πεδίο \hat{A}_2 , ενώ το αντίστοιχο ισχύει και για τα άτομα με τον \hat{S}_2 . Αν θεωρήσουμε ότι οι τρόποι του πεδίου για $t = 0$ δεν περιέχουν



Σχήμα 4.4: Πλήρη πιθανότητα που αντιστοιχούν στη διέγερση ενός συγκεκριμένου τρόπου των ατόμων ή των πεδίων ως συνάρτηση του χρόνου, για παραμέτρους στην περιοχή συντονισμού, υποθέτοντας ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η $|eg00\rangle$. Σε αυτή την περίπτωση, $g = 5 \cdot 10^{-3} \omega_0$, $\Delta = 10g$, $J = 10g$, ενώ ο χρόνος εκφράζεται συναρτήσει της περιόδου $\frac{2\pi}{g}$

διέγερση ($\alpha_j(0) = 0$), τότε η εξέλιξη των ατομικών τρόπων θα είναι:

$$\begin{aligned}\beta_1(t) &= e^{-i(\omega_0 + g^2/\Omega_1)t} \beta_1(0) \\ \beta_2(t) &= e^{-i(\omega_0 + g^2/\Omega_2)t} \beta_2(0) \cos \left[\left(g + \frac{\Omega_2^2}{8g} \right) t \right]\end{aligned}\quad (4.32)$$

Η συζευξη του τρόπου \hat{S}_1 , με αποσυντονισμό, στο πεδίο κρατάει τον πληθυσμό του σταθερό, ενώ ο ατομικός τρόπος \hat{S}_2 ταλαντώνεται με ρυθμό περίπου g (καθώς ο όρος $\frac{\Omega_2^2}{8g}$ είναι αμελητέος) λόγω της μεταφοράς της διέγερσης μεταξύ των \hat{A}_2 και \hat{S}_2 . Η διαφορά φάσης μεταξύ τους είναι:

$$\delta = \frac{\Omega_2}{2} + \frac{g^2}{\Omega_1} \quad (4.33)$$

Αν έχουμε συντονισμό, ούτως ώστε $\Omega_2 = 0$ και $g^2/\Omega_1 \ll 1$ αυτή η διαφορά φάσης είναι σχεδόν μηδέν, συνεπώς οι δύο απεντιοπισμένοι τρόποι ταλαντώνονται με σχεδόν ίσες συχνότητες. Θέτοντας τις αρχικές συνθήκες $a(0) = 0, b(0) = 0, d(0) = 0$

βρίσκουμε ότι :

$$\begin{aligned} a(t) &= b(t) = -\frac{ic(0)}{2}e^{-i\omega_0 t} \sin(gt) \\ c(t) &= c(0)e^{-i\omega_0 t} \cos^2\left(\frac{gt}{2}\right) \\ d(t) &= c(0)e^{-i\omega_0 t} \sin^2\left(\frac{gt}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Συνεπώς η μεταφορά της διέγερσης από το ένα άτομο στο άλλο μέσω αυτού του μηχανισμού, είναι πολύ πιο γρήγορη σε σχέση με τις άλλες δύο περιπτώσεις, καθώς η περίοδος του φαινομένου είναι πλέον $T_R = 2\pi/g$. Ωστόσο αυτή η σημαντική αύξηση στην «απόκριση» του συστήματος έρχεται με το κόστος της έκθεσής του στην αποσυμφωνία (decoherence) που επιβάλλει το περιβάλλον σε μη ιδανικές κοιλοότητες.

Για τις αριθμητικές προσομοιώσεις, χρησιμοποιήσαμε για τις παραμέτρους του προβλήματος τις τιμές: $g = 5 \cdot 10^{-3}\omega_0$, $\Delta = 10g$, $J = 10g$. Αυτό το σύνολο τιμών καλύπτει τις απαιτήσεις αυτή της περίπτωσης και όπως είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς και από τις αναλυτικές λύσεις, το φαινόμενο έχει περίοδο $T_R = 2\pi/g$. Επιβεβαιώνεται επίσης με τη γραφική παράσταση 4.4 το γεγονός ότι αυξάνεται η πιθανότητα η διέγερση να μεταφερθεί από τα άτομα στο πεδίο των κοιλοτήτων σε αντίθεση με τις προηγούμενες τιμές παραμέτρων. Αυτό εξηγείται αν λάβουμε υπόψιν ότι πλέον οι συλλογικοί τρόποι των ατόμων αλληλεπιδρούν με τους απεντοπισμένους τρόπους των κοιλοτήτων.

4.3 Δυναμική του συστήματος δύο συζευγμένων κοιλοτήτων παρουσία απωλειών.

Επιστρέφοντας σε ρεαλιστικές συνθήκες, όπως έγινε σαφές και στο αντίστοιχο μέρος του πρώτου κεφαλαίου, δεν είμαστε σε θέση να αγνοήσουμε πλήρως το αποτέλεσμα των απωλειών του συστήματος. Έχουμε αναφέρει νωρίτερα το γεγονός ότι αν θέλουμε να πραγματοποιήσουμε αυτήν την πειραματική διάταξη θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε είτε την περιοχή μεγάλου ρυθμού μεταπήδησης, είτε την περιοχή μεγάλου αποσυντονισμού προκειμένου να αποφύγουμε το να μεταβεί η διέγερση από τα άτομα στα πεδία, ούτως ώστε να αποφευχθεί ή έστω να μειωθεί η επίδραση της αναπόφευκτης διαδικασίας της αποσυμφωνίας του συστήματος λόγω των απωλειών του.

Η master equation για αυτό το σύστημα, πλέον θα πρέπει να εμπεριέχει τελεστές που θα περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο οι κοιλοότητες χάνουν φωτόνια καθώς

αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον τους. Θα πρέπει συνεπώς να έχει τη μορφή :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -i[H, \rho] + \frac{\kappa}{2} (\mathcal{L}[\hat{a}_1] + \mathcal{L}[\hat{a}_2]) = \\ &= -i[H, \rho] + \frac{\kappa}{2} \left[\left(2\hat{a}_1\rho\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_1\rho - \rho\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 \right) + \left(2\hat{a}_2\rho\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2\hat{a}_2\rho - \rho\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Για τις αριθμητικές προσομοιώσεις μας χρησιμοποιήσαμε το σύνολο τελεστών κατάρρευσης

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= \hat{a}_1\sqrt{2\kappa} \\ \hat{C}_2 &= \hat{a}_2\sqrt{2\kappa} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις για τις περιόδους του φαινομένου μεταφοράς της ατομικής κατάστασης T_{LH} με τον T_R (για την περίπτωση υψηλού ρυθμού μεταπήδησης και συντονισμού αντίστοιχα) μπορούμε να βρούμε εκφράζοντάς τους συναρτήσει της σταθεράς σύζευξης ατόμου-πεδίου g ως :

$$\frac{T_{LH}}{T_R} \simeq \frac{J_{LH}}{g} \gg 1 \text{ για την περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης} \quad (4.37)$$

Αυτό σημαίνει ότι η αλληλεπίδραση σ' αυτή την περιοχή απαιτεί χρόνο περίπου $J \times T_R$. Όσον αφορά την περιοχή αποσυντονισμού, αν συγκρίνουμε την περίοδο μεταφοράς της διέγερσης με αυτήν της περιοχής υψηλού ρυθμού μεταπήδησης, θα βρούμε ότι είναι :

$$\frac{T_{disp}}{T_R} = \frac{\Delta_{disp}^2}{gJ_{disp}} \quad (4.38)$$

Χρησιμοποιώντας τα ίδια σύνολα παραμέτρων για τις τρεις περιοχές με αυτά που χρησιμοποιήσαμε στην ιδανική περίπτωση, έχουμε :

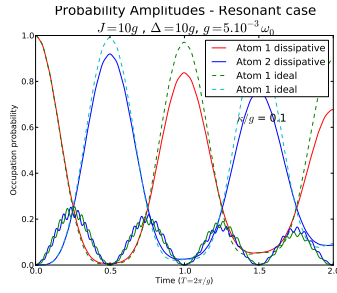
- Περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης (LH): $g = 5 \times 10^{-3}\omega_0$, $J = 10g$, $\Delta = 0.1g$, $T_{LH} = 2\pi J/(g^2)$
- Περιοχή υψηλού αποσυντονισμού (disp): $g = 5.10^{-3}\omega_0$, $J = 2/5g$, $\Delta = 10g$, $T_{disp} = 2\pi\Delta^2/g^2J$
- Περιοχή συντονισμού (R): $g = 5.10^{-3}\omega_0$, $J = 2/5g$, $\Delta = 10g$, $T_R = 2\pi/g$

Αυτό σημαίνει ότι για τις αριθμητικές τιμές που επιλέξαμε, αν εκφράσουμε τις περιόδους των τριών περιοχών συναρτήσει της περιόδου της περιοχής συντονισμού T_R , θα έχουμε :

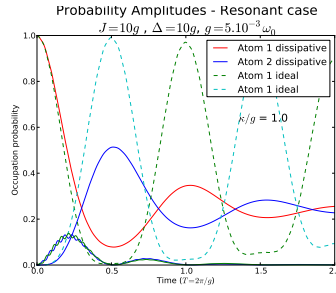
$$\begin{aligned} T_{LH} &\simeq 10 \times T_R \\ T_{disp} &\simeq 100 \times T_R \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.3 Δυναμική του συστήματος δύο συζευγμένων κοιλοτήτων παρουσία απωλειών.

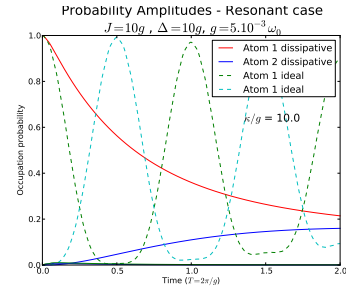
85



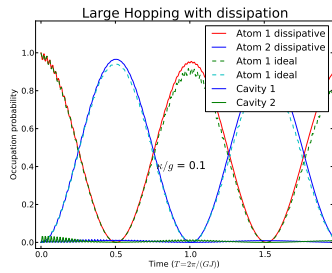
Σχήμα 4.5: Περιοχή συντονισμού με $\kappa = 0.1g$



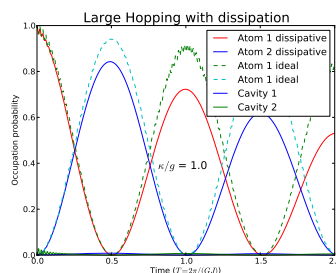
Σχήμα 4.6: Περιοχή συντονισμού με $\kappa = g$



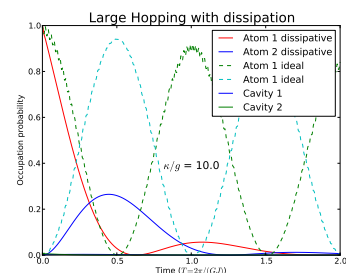
Σχήμα 4.7: Περιοχή συντονισμού με $\kappa = 10g$



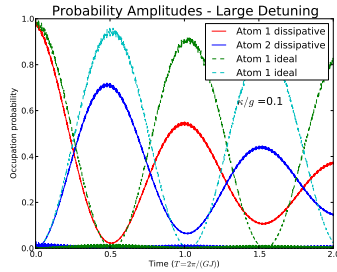
Σχήμα 4.8: Περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης με $\kappa = 0.1g$



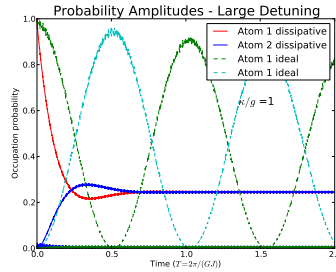
Σχήμα 4.9: Περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης με $\kappa = 1g$



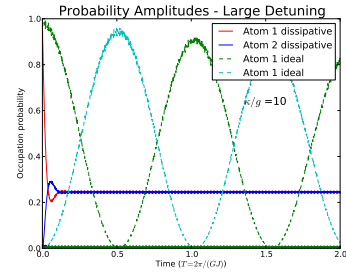
Σχήμα 4.10: Περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης με $\kappa = 10g$



Σχήμα 4.11: Περιοχή αποσυντονισμού με $\kappa = 0.1g$



Σχήμα 4.12: Περιοχή αποσυντονισμού με $\kappa = 1g$



Σχήμα 4.13: Περιοχή αποσυντονισμού με $\kappa = 10g$

Αυτή η σύγκριση μας δείχνει ξεκάθαρα πλέον ότι η περιοχή συντονισμού έχει τη μικρότερη περίοδο. Η μικρή αυτή περίοδος της, της επιτρέπει μεν να συντηρεί αρχικά περισσότερες ταλαντώσεις, ωστόσο, καθώς η διέγερση μεταβαίνει στα πεδία, μειώνεται η πιθανότητα να μεταφερθεί η διέγερση από ένα άτομο σε άλλο, καθώς εξελίσσεται ο χρόνος. Στη συνέχεια κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των πλατών πιθανότητας μετάβασης των διεγέρσεων, δείχνοντας τη συμπεριφορά του ιδανικού

συστήματος και του συστήματος με απώλειες. Από τις γραφικές παραστάσεις 4.5-4.7, παρατηρούμε ότι το σύστημα στην περίπτωση συντονισμού είναι ευάλωτο στην αποσυμφωνία που προκαλεί το περιβάλλον, όπως προβλέπει και η θεωρία, καθώς η διέγερση μεταβαίνει στους τρόπους του πεδίου.

Οι αριθμητικές προσομοιώσεις για την περίπτωση υψηλού ρυθμού μεταπήδησης μας δίνουν τις γραφικές παραστάσεις 4.8-4.10. Σε αυτές φαίνεται ότι το σύστημα επιδεικνύει καλύτερη απόκριση καθώς αυξάνεται ο ρυθμός απωλειών. Όπως αναμενόταν, υπάρχει σημαντική πιθανότητα να περάσει η διέγερση από το ένα άτομο στο άλλο, ακόμα και για $\kappa = 1$, παρά το γεγονός ότι είναι σημαντικά πιο «αργή» διαδικασία σε σχέση με την περίπτωση συντονισμού.

Όσον αφορά την περιοχή αποσυντονισμού, από τις γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν για αυτή από τις αριθμητικές προσομοιώσεις και εμφανίζονται στις εικόνες 4.11-4.13, παρατηρούμε το αποτέλεσμα που έχει η μεγάλη χρονική κλίμακα του φαινομένου. Συγκεκριμένα, το γεγονός ότι η γραφική παράσταση της 4.9 για την περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης με $\kappa = 1$ μοιάζει με τη γραφική παράσταση της περιοχής αποσυντονισμού 4.11 για $\kappa = 0.1$, μας υποδεικνύει ότι η περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης αποκρίνεται εμφανώς καλύτερα σε συστήματα με απώλειες, καθώς είναι πιο γρήγορη διαδικασία και το σύστημα εκτίθεται για λιγότερο χρόνο στο περιβάλλον.

Στην επόμενη ενότητα θα υπολογίσουμε ακριβώς ποιο είναι το αποτέλεσμα των απωλειών σε μία διάταξη που υλοποιεί την απαραίτητη μη-τοπική πύλη εναγκαλισμού (πύλη 2 qubits) μέσω αυτού του μηχανισμού. Αυτό θα γίνει στο πλαίσιο της περιγραφής της υλοποίησης του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa.

4.4 Πρόταση για την υλοποίηση του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa σε ένα σύστημα δύο συζευγμένων κοιλοτήτων.

Στα προηγούμενα αποδείξαμε αναλυτικά και αριθμητικά τη δυναμική του συστήματος δύο συζευγμένων κοιλοτήτων καθώς αλληλεπιδρούν με σταθερά άτομα και στην ιδανική περίπτωση αλλά και στην περίπτωση απωλειών. Αξίζει να αναφέρουμε ότι αυτή η συγκεκριμένη διάταξη θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί με τη χρήση φωτονικών κρυστάλλων που περιέχουν τεχνητά άτομα (quantum dots), καθώς και με διατάξεις circuit QED [105, 110]

Προκειμένου να εξετάσουμε πόσο αποδοτικά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αυτός ο μηχανισμός για την υλοποίηση μια πύλης CNOT, που εν γένει απαιτεί μη τοπικές αλληλεπιδράσεις όπως αυτές που μελετάμε εδώ, θα εκτιμήσουμε τον δείκτη πιστότητας του συστήματος [16] για κάθε μια από τις τρεις περιπτώσεις, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει αυθόρμητη εκπομπή του ατόμου στο σύστημά μας

($\gamma = 0$):

$$F(\rho_{ideal}, \rho_{dissipative}) = Tr \left[\sqrt{\sqrt{\rho_{id}} \rho_{dis} \sqrt{\rho_{id}}} \right] \quad (4.40)$$

Από την προηγούμενη ανάλυσή μας γνωρίζουμε ότι το σύστημα μπορεί να υλοποιήσει μια πύλη $SWAP$, η οποία ωστόσο δεν είναι καθολική πύλη. Αντίθετα η πύλη \sqrt{SWAP} που στο σύστημά μας υλοποιείται για χρόνους $T/4$ είναι μια καθολική πύλη [111], υπό την έννοια ότι με τη χρήση αυτής και ενός μηχανισμού που να δίνει πύλες ενός qubit, έχουμε τη δυνατότητα να πάρουμε όποιο κβαντικό κύκλωμα επιθυμούμε.

Για την υλοποίηση λοιπόν ενός αλγορίθμου θα χρειαστούμε και μια πύλη ενός qubit. Στις διατάξεις cavity QED είναι εύκολο να υλοποιηθεί η πύλη X με τη χρήση παλμών π , ενώ η πύλη H υλοποιείται με τη χρήση παλμών $\pi/2$ από εξωτερικές κλασσικές πηγές σε συντονισμό με τις ιδιοσυχνότητες των ατόμων. Ο μετασχηματισμός της πύλης \sqrt{SWAP} στην πύλη $CNOT$ που απαιτεί ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa απεικονίζεται στην εικόνα 4.14. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση πίνακα της \sqrt{SWAP}

$$\sqrt{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

καθώς και τις αναπαραστάσεις των πυλών H, Q

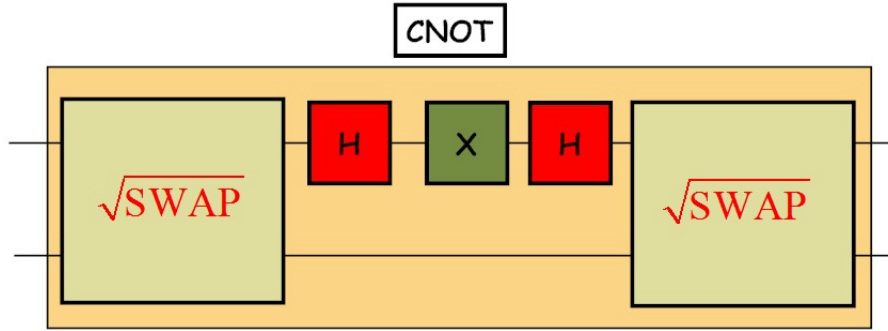
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

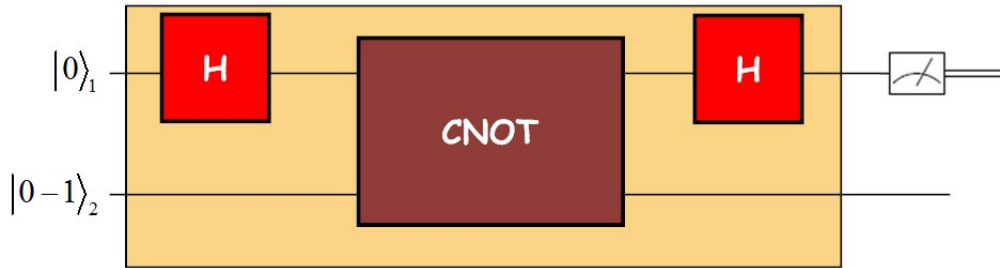
μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι όντως το κύκλωμα της 4.14, είναι ισοδύναμο με την πύλη $CNOT$. Συνεπώς το κύκλωμα που υλοποιεί τον αλγόριθμο θα είναι αυτό της εικόνας 4.15. Όσον αφορά την ανάγνωση των αποτελεσμάτων μπορούμε να ακολουθήσουμε την τεχνική shelving που δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα[69].

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα, στην περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης και υψηλού αποσυντονισμού το σύστημα παραμένει σύμφωνο για μεγάλους χρόνους, ακόμα και όταν υπάρχει μεγάλος ρυθμός απωλειών ($\kappa \simeq g$). Συνεπώς, είναι δυνατόν κάποιος να υλοποιήσει την απαραίτητη μη-τοπική πύλη τουλάχιστον μερικές φορές πριν την πλήρη αποσυμφωνία του συστήματος.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον δείκτη πιστότητας της πύλης \sqrt{SWAP} για κάθε περιοχή, θα πρέπει να ορίσουμε το επιθυμητό χρονικό διάστημα που θα πρέπει να αφήσουμε το σύστημα να αλληλεπιδρά, δηλαδή το $1/4$ της περιόδου της



Σχήμα 4.14: Κβαντικό κύκλωμα που απεικονίζει τους μετασχηματισμούς που απαιτούνται για την υλοποίηση της πύλης $CNOT$ χρησιμοποιώντας τις πύλες \sqrt{SWAP} , X , H .



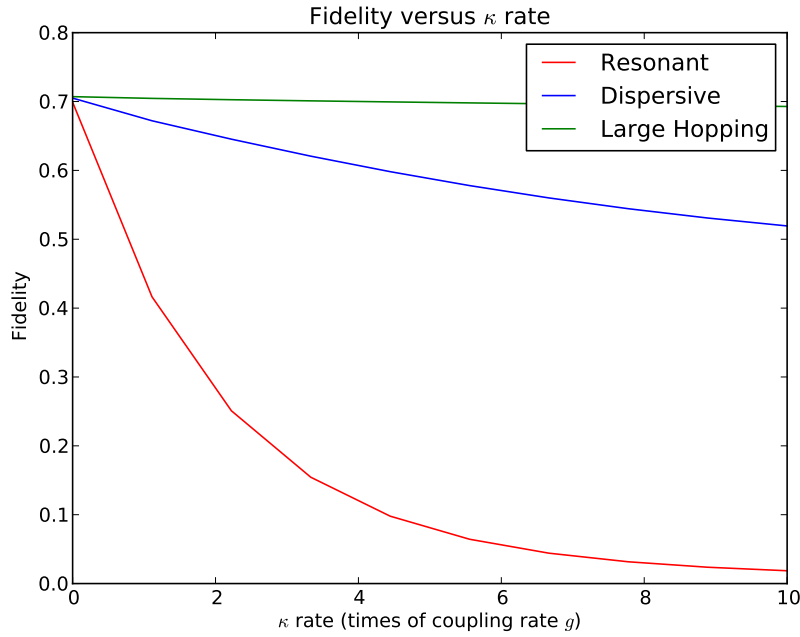
Σχήμα 4.15: Απεικόνιση του κβαντικού κυκλώματος του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa.

αλληλεπίδρασης σε κάθε περίπτωση και να εξελίξουμε στοχαστικά την περίπτωση απωλειών για να λάβουμε τον πίνακα πυκνότητάς του εκείνη τη στιγμή, ο οποίος θα είναι $\rho_{dissipative}(T/4)$, χρησιμοποιώντας την Master Equation της εξίσωσης 4.35.

Η ιδανική περίπτωση θα μας δώσει έναν πίνακα πυκνότητας $\rho_{ideal}(T/4)$, ο οποίος στην περιπτώσή μας θα είναι ο πίνακας πυκνότητας της μέγιστα εναγκαλισμένης κατάστασης $\frac{|eg00\rangle - |ge00\rangle}{\sqrt{2}}$. Συνεπώς, οι απαιτούμενες χρονικές στιγμές που πρέπει να επιλέξουμε για τις παραμέτρους μας σε κάθε περιοχή που αναφέραμε, θα είναι:

$$\begin{aligned} T_{LH}/4 &= \pi J/2(g^2) \\ T_{disp}/4 &= \pi \Delta^2/2g^2 J \\ T_R/4 &= \pi/2g \end{aligned} \quad (4.43)$$

Οι αριθμητικές προσομοιώσεις, μας δίνουν την πιστότητα της πύλης \sqrt{SWAP} , την εξάρτηση της οποίας συναρτήσει του ρυθμού απωλειών κ απεικονίζουμε στη γραφική παράσταση 4.16. Παρατηρούμε ότι η πιστότητα στην περίπτωση συντονισμού πέφτει ραγδαία καθώς αυξάνεται το κ , το οποίο αιτιολογείται από την υψηλή αποσυμφωνία του συστήματος στην περιοχή συντονισμού, λόγω της μεσολάβησης των πεδίων των κοιλοτήτων στη διαδικασία της μεταφοράς της ατομικής κατάστασης από το ένα άτομο στο άλλο.



Σχήμα 4.16: Πιστότητα της πύλης \sqrt{SWAP} συναρτήσει του κ , με το κ εκπεφρασμένο σε σχέση με το ρυθμό σύζευξης g των κοιλοτήτων για την περιοχή υψηλού αποσυντονισμού (μπλε γραμμή, $g = 5 \cdot 10^{-3} \omega_0$, $J = 2/5g$, $\Delta = 10g$, $T_{disp}/4 = \pi \Delta^2 / 2g^2 J$), την περιοχή συντονισμού (κόκκινη γραμμή, $g = 5 \cdot 10^{-3} \omega_0$, $J = 10g$, $\Delta = 10g$, $T_R/4 = \pi / 2g$) και την περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης (πράσινη γραμμή, $g = 5 \times 10^{-3} \omega_0$, $J = 10g$, $\Delta = 0.1g$, $T_{LH}/4 = \pi J / (2g^2)$).

Θα αναμέναμε την περιοχή υψηλού αποσυντονισμού να δίνει υψηλότερες τιμές πιστότητας, ωστόσο με μια πιο προσεκτική ματιά παρατηρούμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για την υλοποίηση της πύλης \sqrt{SWAP} σε αυτή την περίπτωση, είναι πολύ μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο χρόνο στην περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης φωτονίων ($T_{disp} \simeq 10T_{LH}$). Αυτό σημαίνει ότι στην περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης φωτονίων, το σύστημα είναι εκτεθειμένο στην αποσυμφωνία που επιβάλλει το περιβάλλον για μικρότερους χρόνους, οπότε δίνει με διαφορά τις υψηλότερες τιμές για το συντελεστή πιστότητας.

Κεφάλαιο 5

Επίλογος

Σε αυτή τη μεταπτυχιακή διατριβή κάναμε μια ανασκόπηση των πιο σημαντικών θεωρητικών πτυχών της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής σε φωτονικές κοιλότητες, εστιάζοντας κυρίως στις Κοιλότητες Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής που λειτουργούν στην περιοχή των μικροκυμάτων. Όπως είδαμε, είναι δυνατόν χρησιμοποιώντας τις βασικές αρχές που εφαρμόζονται στο cavity QED να επεκτείνουμε τη χρήση τους και σε άλλες διατάξεις, συμπεριλαμβανομένων και των Συστοιχειών Συζευγμένων Κοιλοτήτων.

Αρχικά αναλύσαμε πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν συστήματα ανεξάρτητων Κοιλοτήτων με διαφορετικούς τρόπους ώστε να υλοποιηθούν Αλγόριθμοι της Κβαντικής Πληροφορίας.

Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με την αναλυτική και αριθμητική επίλυση του μοντέλου δύο συζευγμένων κοιλοτήτων, τόσο για την ιδανική περίπτωση ($k = 0, \gamma = 0$), όσο και για την περίπτωση με απώλειες της κοιλότητας ($\kappa \neq 0$) και δείξαμε πώς μπορεί αυτό το σύστημα να χρησιμοποιηθεί για την υλοποίηση της πύλης *CNOT*, ενώ δώσαμε και την περιγραφή του τρόπου υλοποίησης του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa.

Οι αρχές της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής σε Κοιλότητες έχουν πρόσφατα επεκταθεί και σε άλλες πειραματικές εκδοχές, όπως το circuit QED, το οποίο σκοπεύουμε να εξερευνήσουμε λεπτομερώς στο μέλλον.

Θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι οι αριθμητικές προσομοιώσεις των Ανοικτών Κβαντικών Συστημάτων ήταν μία από τις σημαντικότερες πτυχές αυτής της διατριβής και θα αποτελέσει τη βάση για οποιαδήποτε μελλοντική εργασία που θα αφορά τη μελέτη πιο περίπλοκων συστημάτων που θα βρίσκουν εφαρμογές στην υλοποίηση Κβαντικών Αλγορίθμων. Επίσης θα μελετήσουμε διαφορετικές πειραματικές πλατφόρμες, συμπεριλαμβανομένων των Συστοιχιών Κυματοδηγών (waveguide arrays) και συγκεκριμένες υλοποιήσεις του circuit QED.

Παράρτημα Α. Υπολογιστικές Τεχνικές Κβαντικής Οπτικής

1 Υπολογιστικά πακέτα για την Κβαντική Οπτική

Μία από τις πιο σημαντικές πτυχές στην παρούσα διατριβή ήταν η εκτενής ενασχόληση με αριθμητικές προσωμειώσεις. Υπολογιστικά πακέτα όπως η Mathematica μπορούν σε πολύ μεγάλο βαθμό να ικανοποιήσουν τις περισσότερες ανάγκες, όμως καθόσον προκειται για μια «αργή» γλώσσα προγραμματισμού, επιστρατεύτηκε η Γλώσσα Ανοικτού Κώδικα Python η οποία τα τελευταία χρόνια έχει καθιερωθεί στους κύκλους των προγραμματιστών για αριθμητικές προσωμειώσεις και για πολλές άλλες εφαρμογές, καθώς είναι αρκετά ευέλικτη και έχουν αναπτυχθεί πολλά πακέτα που την κάνουν εφάμιλλη με εμπορικά πακέτα όπως η MatLab.

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε ένα αξιόπιστο και αξιολογημένο πακέτο, ανατρέξαμε στο πακέτο **QuTiP**[112] το οποίο είναι μια συλλογή από ρουτίνες που χρησιμοποιούνται συχνά στην Κβαντική Οπτική. Θα παρουσιάσουμε ένα μέρος των προγραμμάτων που συντάξαμε με τη χρήση του εν λόγω πακέτου, προκειμένου να αναδείξουμε την απλότητα του κώδικα, καθώς και μερικές όχι και τόσο τετριμμένες λεπτομέρειες για το πώς χρησιμοποιήθηκε η Mathematica.

2 Λεπτομέρειες για τον κώδικα της Mathematica

Η ικανότητα διάφορων υπολογιστικών πακέτων να διεξάγουν αποτελεσματικά αριθμητικούς υπολογισμούς, σε συνδυασμό με τον καθιερωμένο τρόπο χρήσης πινάκων στην Κβαντομηχανική για την έκφραση τελεστών και καταστάσεων, καθιστά αρκετά εύκολη τη διερεύνηση χαρακτηριστικών για πολύπλοκα συστήματα. Η Mathematica έχει ορισμένα προβλήματα να χειριστεί μεγάλους πίνακες όταν αυτοί περιέχουν αρκετά μηδενικά και έχουν μεγάλες διαστάσεις όπως πχ. οι τελεστές δημιουργίας-καταστροφής για πολλά φωτόνια.

Αρχικά, χρειάζεται να ορίσουμε όμως μια βάση των διανυσμάτων στα οποία θα δράσουμε τους τελεστές που θα χρησιμοποιηθούν. Σε αυτή τη διαδικασία

Θα δείξουμε ένα γενικό σενάριο για την περίπτωση των δύο κοιλοτήτων όπως το δουλέψαμε αρχικά για να το επαληθεύσουμε με άλλα υπολογιστικά πακέτα.

$$\begin{aligned}
 \text{Basis}[n_ , i_] &:= \text{Normal}[\text{SparseArray}[\{i + 1, 1\} \rightarrow 1, \{n, 1\}]]; \\
 e &= \text{Basis}[2, 1]; g = \text{Basis}[2, 0]; \\
 f[n_] &:= \text{Basis}[N_e + 1, n - 1]; \\
 \text{sigmap} &= e.g^T; \text{sigmam} = g.e^T; \text{sigmaz} = e.e^T - g.g^T; \\
 \text{Destroy}[n_] &:= \text{SparseArray}[\{\text{Band}[\{1, 2\}] \rightarrow \text{Sqrt}[\text{Range}[n - 1]]\}, \{n, n\}] \\
 \text{Id}[n_] &:= \text{IdentityMatrix}[n];
 \end{aligned} \tag{1}$$

Σε αυτές τις γραμμές ορίσαμε μια συνάρτηση $\text{Basis}[n_ , i_]$, η οποία δημιουργεί τα διανύσματα βάσης για έναν χώρο n διαστάσεων. Χρησιμοποιώντας αυτή τη συνάρτηση ορίσαμε τις καταστάσεις $|e\rangle$ και $|g\rangle$. Αυτός ο άμεσος τρόπος ορισμού των καταστασιακών διανυσμάτων για άτομα δύο επιπέδων, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περίπτωση που υπάρχουν πολλές διεγέρσεις (N_e) στο σύστημα, οπότε ορίσαμε με έναν διαφορετικό τρόπο τις καταστάσεις της κοιλότητας, με τη χρήση δηλαδή της $f[n_]$, για να μπορούμε να γενικεύσουμε αν το επιθυμούμε στη συνέχεια. Ο ορισμός των ατομικών τελεστών $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$ και $\hat{\sigma}_3$, ακολουθείται από τον ορισμό του τελεστή καταστροφής \hat{a} , ενώ χρησιμοποιήσαμε και μια συντόμευση για το μοναδιαίο πίνακα. Για να ορίσουμε το τανυστικό γινόμενο χρησιμοποιούμε την εντολή **KroneckerProduct** ώστε να χειριστούμε τους 4 χώρους που ορίζονται από το σύστημα υπό έλεγχο. Για παράδειγμα, η κατάσταση $|gg10\rangle$ θα γράφεται ως:

$$gg10 = \text{KroneckerProduct}[g, g, f[2], f[1]];$$

Ο τελεστής $\hat{\sigma}_{+,2}$ δηλώνεται ως:

$$sp2 = \text{KroneckerProduct}[\text{Id}[2], \text{sigmap}, \text{Id}[N_e + 1], \text{Id}[N_e + 1]];$$

το οποίο δηλώνει ξεκάθαρα ότι η δράση του τελεστή περιορίζεται στον υπόχωρο του **ατόμου 2**. Κρατώντας αυτές τις βασικές αρχές κατά νου, μπορούμε να ορίσουμε τη Χαμιλτονιανή και μετά, ορίζοντας μια αρχική κατάσταση του συστήματος, να χρησιμοποιήσουμε την εντολή **Expn[...]** για να μελετήσουμε τη χρονική εξέλιξη του συστήματος εφαρμόζοντας το μοναδιαίο τελεστή χρονικής εξέλιξης.

3 Κώδικας της Python

Η μελέτη της δυναμικής του συστήματος που εξετάσαμε, έγινε αρχικά στη Mathematica και στη συνέχεια με τη χρήση της Python. Στις ακόλουθες σελίδες παρουσιάζουμε μερικά προγράμματα που δίνουν ορισμένες από τις γραφικές παραστάσεις αυτής της διατριβής.

Jaynes Cummings model with dissipation using master equation or quantum trajectories

```
# -*- coding: utf-8 -*-

#
# Vacuum Rabi oscillations in the Jaynes-Cummings model with dissipation
#
from qutip import *
from pylab import *

def run():

    # Configure parameters
    wc = 10000 # cavity frequency
    wa = 10000 # atom frequency
    g = 0.001*wc # coupling strength
    kappa = 0.2*g # cavity dissipation rate
    gamma = 0 # atom dissipation rate
    N = 2 # for two possible states of the field
    use_rwa = True

    # initial state for the system cavity-atom
    psi0 = tensor(basis(N,0), basis(2,1)) # start with an excited atom

    # Hamiltonian operators
    a = tensor(destroy(N), qeye(2))
    sm = tensor(qeye(N), destroy(2))

    if use_rwa:
        # use the rotating wave approximation
        H = wc * a.dag() * a + wa * sm.dag() * sm + g * (a.dag() * sm + a * sm.dag())
    else:
        H = wc * a.dag() * a + wa * sm.dag() * sm + g * (a.dag() + a) * (sm + sm.dag())

    # collapse operators for non-unitary dynamics
    c_op_list = []

    n_th_a = 0.0 # zero temperature
    rate = kappa * (1 + n_th_a)
    if rate > 0.0:
        c_op_list.append(sqrt(rate) * a)

    rate = kappa * n_th_a
    if rate > 0.0:
        c_op_list.append(sqrt(rate) * a.dag())

    rate = gamma
    if rate > 0.0:
        c_op_list.append(sqrt(rate) * sm)

    # evolve and calculate expectation values
    tlist = linspace(0,5*pi/g,1000)
```

```
output = mesolve(H, psi0, tlist, c_op_list, [a.dag() * a, sm.dag() * sm])

# plot the results
plot(tlist/(g*pi), output.expect[0])
plot(tlist/(g*pi), output.expect[1])
legend(("Cavity", "Atom_excited_state"))
xlabel('Time')
ylabel('Occupation_probability')
title('Vacuum_Rabi_oscillations_for_a_damped_cavity_using_master_equation')
show()

if __name__=='__main__':
    run()
```

Two coupled cavities without dissipation for large hopping case.

```

from qutip import *
from pylab import *

def run():

    # Define constants
    G = 5
    omega_atom = 1000
    detuning = 0.1*G
    omega_field = omega_atom + detuning
    J = 10*G
    N = 2 # number of possible states for cavity 1
    timestep=2000

    # Define basis. In total we have 4 Hilbert space dimensions to describe the system.
    #
    # choose an order for composite system: A1-A2-C1-C2
    # then compute the operators for the full Hilbert space and use them to
    # construct the hamiltonian.
    #

    # cavity operators in full hilbert space
    a1 = tensor([qeye(2), qeye(2), destroy(N), qeye(N)])
    a2 = tensor([qeye(2), qeye(2), qeye(N), destroy(N)])

    # atomic operators in full hilbert space C1-A1-C2-A2
    e=basis(2,0)
    g=basis(2,1)
    f1=basis(N,0)
    f2=basis(N,1)

    ele = tensor([e*dag(e), qeye(2), qeye(N), qeye(N)])
    e2e = tensor([qeye(2), e*dag(e), qeye(N), qeye(N)])
    sp1 = tensor([sigmap(), qeye(2), qeye(N), qeye(N)])
    sm1 = tensor([sigmam(), qeye(2), qeye(N), qeye(N)])
    sp2 = tensor([qeye(2), sigmap(), qeye(N), qeye(N)])
    sm2 = tensor([qeye(2), sigmam(), qeye(N), qeye(N)])

    # Write the Hamiltonians in 4 seperate terms to avoid mistakes.
    H1 = omega_atom * (ele + e2e)
    H2 = omega_field * (a1.dag()*a1 + a2.dag()*a2)
    H3 = G * (a1 * sp1 + a1.dag() * sm1) + G * (a2 * sp2 + a2.dag() * sm2)
    H4 = J * (a1.dag() * a2 + a1 * a2.dag())

    H = H1 + H2 + H3 + H4

    #Time evolution of the system
    gg01 = tensor([g, g, f1, f2])
    gg10 = tensor([g, g, f2, f1])
    eg00 = tensor([e, g, f1, f1])
    ge00 = tensor([g, e, f1, f1])

    psi0=eg00 #initially excitation in atom 1

    # evolve and calculate expectation values
    Gkap=abs(G**2/((detuning + J)*(detuning - J)))
    T=pi/(Gkap*J)
    tlist = linspace(0,T,timestep)
    output = mesolve(H, psi0, tlist, [], [])

```

```

# plot the results
plot(tlist/T, expect(a1.dag()*a1, output.states))
plot(tlist/T, expect(sm1.dag() * sm1, output.states))
plot(tlist/T, expect(a2.dag()*a2, output.states))
plot(tlist/T, expect(sm2.dag() * sm2, output.states))

legend(("Cavity_1", "Atom_1", "Cavity_2", "Atom_2"))
xlabel('Time_scaled_by_period_$T=2\pi_/G_J$')
ylabel('Probability')
title('Probability_amplitudes_for_the_large_hopping_case:_n_$\Delta=0.1g,\omega_0$
      =1000,_g=5x10^{-3}\omega_0,_J=10g$')
show()

if __name__=='__main__':
    run()

```

Fidelity versus κ for large hopping

```

# Calculate the fidelity of a system of two coupled cavities under dissipation
from qutip import *
from pylab import *

#collapse operators for non-unitary dynamics

def rho_compute(Ham,psi0,tlist,kappa_max,kappalist, cav1, cav2,rho_ideal):

    #fid_list=zeros((len(kappalist)))
    rho_dis_list= []
    index=0
    for kappa in kappalist:
        c_op_list = []
        c_op_list.append(sqrt(kappa) * cav1)
        c_op_list.append(sqrt(kappa) * cav2)
        dissipative = mesolve(Ham, psi0, tlist, c_op_list, [])
        rho_dissipative = dissipative.states
        rho_dissipative_final=rho_dissipative[-1]
        rho_dis_list.append(rho_dissipative_final)
        index +=1
    return rho_dis_list

# Define constants
G=5
omega_atom = 1000
detuning = 0.1*G
omega_field = omega_atom - detuning
J = 10*G
kappa_max = 10*G # cavity dissipation rate
kappalist = linspace(0,kappa_max,10)
gamma = 0.0 # atom dissipation rate

N = 1 # number of excitations

# cavity operators in full hilbert space
a1 = tensor([qeye(2), qeye(2), destroy(N+1), qeye(N+1)])
a2 = tensor([qeye(2), qeye(2), qeye(N+1), destroy(N+1)])

# atomic operators in full hilbert space C1-A1-C2-A2
e=basis(2,0)
g=basis(2,1)
f1=basis(N+1,0)
#f2=basis(N+1,1)
eg00=tensor(e,g,f1,f1)
ge00=tensor(g,e,f1,f1)

ele = tensor([e*dag(e), qeye(2), qeye(N+1), qeye(N+1)])
e2e = tensor([qeye(2), e*dag(e), qeye(N+1), qeye(N+1)])
glg = tensor([g*dag(g), qeye(2), qeye(N+1), qeye(N+1)])
g2g = tensor([qeye(2), g*dag(g), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sp1 = tensor([sigmap(), qeye(2), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sm1 = tensor([sigmam(), qeye(2), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sp2 = tensor([qeye(2), sigmap(), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sm2 = tensor([qeye(2), sigmam(), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sz1 = tensor([sigmaz(), qeye(2), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sz2 = tensor([qeye(2), sigmaz(), qeye(N+1), qeye(N+1)])

```

```

# Define the Hamiltonian terms
H1 = omega_atom * (e1e + e2e)
H2 = omega_field * (a1.dag()*a1 + a2.dag()*a2)
H3 = G * (a1 * sp1 + a1.dag() * sm1) + G * (a2 * sp2 + a2.dag() * sm2)
H4 = J * (a1.dag() * a2 + a1 * a2.dag())
H = H1 + H2 + H3 + H4

psi0 = tensor([e, g, f1, f1])

#Set the time interval for the evolution of the system
Gkap=abs(G**2/((detuning + J)*(detuning - J)))
T=pi/(Gkap*J)
tlist = linspace(0,T/4,500)

#Calculate the density matrix for the ideal case
ideal=(eg00-ge00)/sqrt(2)
#psi_ideal_list = ideal.states
#psi_ideal=psi_ideal_list[-1]
rho_ideal = ket2dm(ideal)
#n1_ideal= expect(sm1.dag() * sm1,ideal.states)
#n2_ideal= expect(sm2.dag() * sm2,ideal.states)
#pf1_ideal = expect(a1.dag() * a1, ideal.states)
#pf2_ideal = expect(a2.dag() * a2, ideal.states)

#Use the rho_compute function to calculate the density operators at t=T
rho_list=rho_compute(H,psi0,tlist,kappa_max,kappalist,a1,a2,rho_ideal)
flist=[]
for i in range (0,10):
    flist.append(fidelity(rho_ideal,rho_list[i]))
output_data = vstack((kappalist/G, flist))
file_data_store('large_hopping.dat', output_data.T, numtype="real")

plot(kappalist,flist)
show()

```


Παράρτημα Β. Θεωρητικά εργαλεία Κβαντικής Οπτικής

1 Αρμονικός ταλαντωτής με φορμαλισμό Dirac

Στην κλασσική μηχανική ένα σωματίδιο μάζας m κινούμενο μέσα σε δυναμικό της μορφής $V(x) = \kappa x^2$, θα ταλαντώνεται με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$, όπου κ η σταθερά της δύναμης επαναφοράς. Η χαμιλτονιανή αυτού του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, αποτελείται από δύο διακριτούς όρους ενέργειας, για την κινητική και τη δυναμική ενέργεια, οπότε γράφουμε:

$$H = T + V = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (1)$$

όπου η ορμή του σωματιδίου (στον άξονα των x (p_x)) ορίζεται από τη σχέση $m \frac{dx}{dt}$. Στην κβαντομηχανική, η κλασσική ορμή αντικαθίσταται από τον τελεστή $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, οπότε η Χαμιλτονιανή θα γίνει:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \quad (2)$$

Από καθαρά αλγεβρικής άποψης, παρατηρούμε ότι σ' αυτή την εξίσωση έχουμε δύο τελεστές να εμφανίζονται με το τετράγωνό τους, πράγμα το οποίο μας οδηγεί στο να παραγοντοποιήσουμε την εξίσωση, ώστε να είναι γραμμική ως προς \hat{p}_x και \hat{x} . Έχοντας αυτό κατά νου, ορίζουμε δύο νέους τελεστές:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}_x}{m\omega} \right) \quad (3)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}_x}{m\omega} \right) \quad (4)$$

Το σύνολο των εξισώσεων 3 και 4 περιγράφει τους τελεστές «αναβίβασης» και «καταβίβασης» ή πιο δραματικά, «δημιουργίας» και «καταστροφής» των καταστάσεων του αρμονικού ταλαντωτή. Το ζευγάρι εξισώσεων που κάνει την αντίστροφη διαδικασία

για την έκφραση της ορμής και της θέσης συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας-καταστροφής, εκφράζεται ως:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (5)$$

$$\hat{p}_x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (6)$$

$$(7)$$

Η Χαμιλτονιανή της εξίσωσης 2 που εκφράζεται με τη χρήση των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, θα είναι πλέον

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (8)$$

Είναι αρκετά απλό να δείξει κανείς ότι η μεταθετική σχέση μεταξύ των τελεστών είναι $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, όπου χρησιμοποιήσαμε τη μεταθετική σχέση $[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar$. Με τη χρήση της μεταθετικής σχέσης των τελεστών, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση 8 στη μορφή:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\hbar\omega}{2} (1 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (9)$$

Είναι αρκετά σημαντικό σε αυτό το σημείο να δείξουμε ακριβώς τη δράση τους όταν είναι σε μορφή πινάκων, καθώς είναι μια πολύ χρήσιμη διαδικασία σε αριθμητικές εφαρμογές: Πρώτα απ' όλα χρειάζεται να ξεκαθαρίσουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις του ταλαντωτή $\psi_n = |n\rangle$, είναι ορθοκανονικές, πράγμα που δηλώνει η σχέση:

$$\langle n' | n \rangle = \delta_{n',n} \quad (10)$$

Σε αυτό το συμβολισμό, η ποσότητα $\langle n' | \hat{a}^\dagger | n \rangle$ είναι ένα μητροστοιχείο. Μπορούμε να δείξουμε ότι αυτά τα μητροστοιχεία είναι μη-μηδενικά όταν αφορούν καταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή που διαφέρουν κατά ένα επίπεδο, ούτως ώστε:

$$\langle n' | \hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{n'=n+1} \quad (11)$$

$$\langle n' | \hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} \delta_{n'=n-1} \quad (12)$$

Αν γράψουμε όλα τα μητροστοιχεία για τις διαφορετικές καταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή (αν υποθέσουμε ότι έχει N καταστάσεις), θα πάρουμε έναν πίνακα

της μορφής:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \sqrt{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \sqrt{2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{N-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Όπως περιμέναμε, οι αναπαραστάσεις σε πίνακες των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής είναι ανάστροφοι πίνακες, το οποίο μας διευκολύνει στα αριθμητικά προβλήματα, καθώς μπορούμε να ορίσουμε μόνο έναν από αυτούς. Αν κάποιος ήθελε να ορίσει τον πίνακα του τελεστή καταστροφής στη Mathematica, θα έγραφε:

```
Destroy[n_]:=SparseArray[{Band[{1,2}]→Sqrt[Range[n-1]]},{n,n}]
```

Στην πραγματικότητα, αυτός ο τρόπος ορισμού πινάκων στη Mathematica είναι και ο πιο αποτελεσματικός όταν πρόκειται για πίνακες με πολλά μηδενικά στοιχεία[113].

Επιστρέφοντας στη μεταθετική άλγεβρα του αρμονικού ταλαντωτή, θα πρέπει να τονίσουμε την ανάγκη να οριστεί άλλος ένας τελεστής που εμφανίζεται συνεχώς στα προβλήματα που εμπίπτουν στη «δικαιοδοσία» του αρμονικού ταλαντωτή. Αναφερόμαστε στον τελεστή αρίθμησης, τον οποίο ορίζουμε με τη σχέση:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (15)$$

Για τον τελεστή αρίθμησης, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι οι μεταθετικές σχέσεις των \hat{a} και \hat{a}^\dagger δίδονται από τις εκφράσεις:

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad (16)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (17)$$

Το πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή έχει μόνο έναν προφανή περιορισμό. Αυτός ο περιορισμός αφορά το γεγονός ότι υπάρχει μόνο μία θεμελιώδης κατάσταση ενέργειας, με μια κυματοσυνάρτηση που την περιγράφει. Θα περιγράψουμε τη διαδικασία υπολογισμού αυτής της ενέργειας της θεμελιώδους κατάστασης και της αντίστοιχης κυματοσυνάρτησης, προκειμένου να εξηγήσουμε ακριβώς σε τι μας χρησιμεύει ο φορμαλισμός του αρμονικού ταλαντωτή.

Για να εξάγουμε την κυματοσυνάρτηση και την τιμή της ενέργειας του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, ξεκινάμε από την εξίσωση Schrödinger.

$$\hat{H}\psi_n = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \psi_n = E_n \psi_n \quad (18)$$

Δρώντας από αριστερά τον \hat{a} , παίρνουμε:

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{a}}{2} \right) \psi_n = E_n \hat{a} \psi_n, \quad (19)$$

ενώ λαμβάνοντας υπόψιν τις μεταθετικές σχέσεις,

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 1 \Leftrightarrow \hat{a} \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \quad (20)$$

παίρνουμε την εξίσωση

$$\hbar\omega \left((1 + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \hat{a} + \frac{\hat{a}}{2} \right) \psi_n = E_n \hat{a} \psi_n \quad (21)$$

Παραγοντοποιώντας τον όρο $\hat{a} \psi_n$ στο πρώτο μέλος της προηγούμενης σχέσης βρίσκουμε ότι

$$\hbar\omega \left((1 + \hat{a} \hat{a}^\dagger) + \frac{1}{2} \right) (\hat{a} \psi_n) = E_n (\hat{a} \psi_n) \quad (22)$$

Ο όρος $\hbar\omega \hat{a} \psi_n$ μπορεί να αφαιρεθεί κι από τα δύο μέλη, επιτρέποντάς μας να γράψουμε τις εξισώσεις:

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (\hat{a} \psi_n) = (E_n - \hbar\omega) (\hat{a} \psi_n) \quad (23)$$

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \psi_{n-1} = E_{n-1} \psi_{n-1} \quad (24)$$

Αυτή η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι η $\psi_{n-1} = \hat{a} \psi_n$ είναι μια νέα ιδιοσυνάρτηση, με ιδιοτιμή ενέργειας $(E_n - \hbar\omega)$. Με παρόμοιο τρόπο, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο τελεστής \hat{a}^\dagger δρώντας στην ιδιοσυνάρτηση ψ_n δημιουργεί μια νέα ιδιοσυνάρτηση ψ_{n+1} με ιδιοενέργεια $(E_n + \hbar\omega)$. Στη βιβλιογραφία, είναι συχνό να αναφερόμαστε στη «σκάλα» του αρμονικού ταλαντωτή για να εξηγήσουμε τη χρήση των όρων «τελεστής αναβίβασης» και «τελεστής καταβίβασης».

Έως τώρα πρέπει να είναι σαφές το γεγονός ότι ο τελεστής καταστροφής \hat{a} μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μειώσει την ενεργειακή ιδιοτιμή μιας ιδιοκατάστασης. Υποθέτουμε την ύπαρξη μιας *θεμελιώδους κατάστασης* στην οποία έχουμε τη χαμηλότερη ενεργειακή τιμή. Αυτό μας υποχρεώνει να δηλώσουμε ότι ο τελεστής καταστροφής, δρώντας σ' αυτήν την κατάσταση, μας δίνει

$$\hat{a} \psi_0 = 0 \quad (25)$$

Είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε την κυματοσυνάρτηση για τη θεμελιώδη κατάσταση. Εφόσον

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}_x}{m\omega} \right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (26)$$

ο ορισμός μας για το $\hat{a}\psi_0 = 0$ απαιτεί

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_0 = 0 \quad (27)$$

Η λύση για αυτήν την κυματοσυνάρτηση είναι Γκαουσιανής μορφής:

$$\psi_0 = A_0 e^{-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}} \quad (28)$$

όπου η σταθερά κανονικοποίησης A_0 βρίσκεται από την απαίτηση κανονικοποίησης $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$ ότι είναι:

$$A_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \quad (29)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την ιδιοενέργεια για την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους κατάστασης ψ_0 , το μόνο πράγμα που απομένει να γίνει είναι το να βάλουμε την εξίσωση 28 στην εξίσωση Schrödinger 18 για τον μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή. Η εξίσωση εξίσωση Schrödinger μας δίνει ότι:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi_0 = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} + 4x^2 \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^2 \right) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi_0 \quad (30)$$

$$\left(\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi_0 = E_0 \psi_0 \quad (31)$$

Συνεπώς, η τιμή της ενέργειας της θεμελιώδους καταστασης E_0 είναι:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (32)$$

Οι μη θεμελιώδεις καταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή, ονομάζονται *διεγερμένες καταστάσεις*. Ξεκινώντας από τη θεμελιώδη κατάσταση, μπορούμε να «φτιάξουμε» τις διεγερμένες καταστάσεις, δρώντας στη θεμελιώδη τον τελεστή δημιουργίας. Για την πρώτη διεγερμένη κατάσταση, δρούμε στη θεμελιώδη κατάσταση τον τελεστή δημιουργίας \hat{a}^\dagger στην εξίσωση εξίσωση Schrödinger :

$$\hat{a}^\dagger \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \psi_n = \hat{a}^\dagger E_n \psi_n = \hat{a}^\dagger \hat{H} \psi_n \quad (33)$$

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{a}^\dagger}{2} \right) \psi_n = E_n \hat{a}^\dagger \psi_n = \hat{a}^\dagger \hat{H} \psi_n \quad (34)$$

Με τη χρήση της μεταθετικής σχέσης $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, και λίγες πράξεις, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1) + \frac{\hat{a}^\dagger}{2} \right) \psi_n = \left(\hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger) + \frac{\hat{a}^\dagger}{2} \right) \psi_n = E_n \hat{a}^\dagger \psi_n \quad (35)$$

$$\hbar\omega \left((\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1) \hat{a}^\dagger + \frac{\hat{a}^\dagger}{2} \right) \psi_n = \left(\hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1) + \frac{1}{2} \right) \hat{a}^\dagger \psi_n = E_n \hat{a}^\dagger \psi_n \quad (36)$$

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (\hat{a}^\dagger \psi_n) = (E_n + \hbar\omega) (\hat{a}^\dagger \psi_n) \quad (37)$$

Είναι ξεκάθαρο τώρα ότι η ιδιοενέργεια της n -οστής κατάστασης του ταλαντωτή δίδεται από τη σχέση:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (38)$$

όπου είναι προφανές ότι έχουμε χρησιμοποιήσει τον τελεστή αρίθμησης προκειμένου να πάρουμε τις ιδιοτιμές του όρου $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{N}$ και συνεπώς την ιδιοενέργεια του n -οστού επιπέδου. Έως τώρα έχουμε δείξει ότι οι τελεστές \hat{a} και \hat{a}^{dag} δρουν πάντως στην κατάσταση ψ_n , με τρόπο τέτοιο ώστε:

$$\hat{a}\psi_n = A_{n+1}\psi_{n+1} \quad (39)$$

$$\hat{a}^\dagger\psi_n = A_{n-1}\psi_{n-1} \quad (40)$$

Οι σταθερές κανονικοποίησης υπολογίζονται θέτοντας την απαίτηση $\langle n|n \rangle = \langle n-1|n-1 \rangle = 1$ και $[\hat{a}, \hat{a}^{dag}] = 1$. Εφόσον η κατάσταση $\hat{a}\psi_n = |n+1\rangle$ επίσης απαιτείται να είναι κανονικοποιημένη, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$|A_{n+1}|^2 \langle \hat{a}^\dagger n | \hat{a}^\dagger n \rangle = 1 \quad (41)$$

Η εξίσωση 41 μπορεί να γραφτεί ως:

$$|A_{n+1}|^2 \langle \hat{a} | \hat{a}^\dagger \rangle = |A_{n+1}|^2 \langle n | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) | n \rangle = |A_{n+1}|^2 (n+1) \langle n | n \rangle = 1 \quad (42)$$

Συνεπώς, εφόσον απαιτούμε το A_{n+1} να είναι πραγματικός αριθμός, η κανονικοποίηση μας δίνει το αποτέλεσμα:

$$A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (43)$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} |\hat{a}^\dagger n\rangle \leftrightarrow |\hat{a}^\dagger n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (44)$$

Με παρόμοιο τρόπο, αποδεικνύεται ότι:

$$|\hat{a}n\rangle = \sqrt{n}|n\rangle \quad (45)$$

Είναι αρκετά χρήσιμο να βγάλουμε μια σχέση που να μας δίνει τη n -οστή κατάσταση χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη κατάσταση $|0\rangle$:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{(n!)}}|0\rangle \quad (46)$$

και

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n+1}}{\sqrt{n!}}|0\rangle = \frac{\sqrt{n+1}(\hat{a}^\dagger)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}|0\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1\rangle \quad (47)$$

Όσον αφορά τη μορφή της κυματοσυνάρτησης n -οστού επιπέδου του ταλαντωτή, θα ακολουθήσουμε παρόμοια διαδικασία, δρώντας τον τελεστή δημιουργίας \hat{a} στην κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης ψ_0 που αποδείξαμε στην 28. Προκειμένου να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, θα χρησιμοποιήσουμε μια νέα χωρική μεταβλητή, η οποία θα είναι:

$$\xi = \sqrt[4]{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)}x \quad (48)$$

Με τη χρήση αυτής της νέας χωρικής μεταβλητής ξ , μπορούμε να ξαναγράψουμε την έκφραση για τον τελεστή δημιουργίας, ως:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)}x - \sqrt{\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)}\frac{\partial}{\partial x} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad (49)$$

Έτσι, η έκφραση της εξίσωσης 28, θα γίνει:

$$\psi_0(\xi) = A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (50)$$

όπου η σταθερά κανονικοποίησης έχει τώρα γίνει

$$A_0 = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{\pi}\right)} \quad (51)$$

Ξεκινώντας από τη θεμελιώδη κατάσταση και χρησιμοποιώντας την εξίσωση 46 για να εξασφαλίσουμε ότι το αποτέλεσμα μας είναι κανονικοποιημένο, παίρνουμε την ακολουθία κυματοσυναρτήσεων:

$$\psi_0 \quad (52)$$

$$\psi_1 = \hat{a}^\dagger \psi_0 \quad (53)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}^\dagger \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger)^2 \psi_0 \quad (54)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}^\dagger \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} (\hat{a}^\dagger)^3 \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3!}} (\hat{a}^\dagger)^3 \psi_0 \quad (55)$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0 \quad (56)$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την έκφραση για την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους κατάστασης με τη χρήση της μεταβλητής ξ 50, θα γράψουμε την έκφραση για τις πρώτες 5 καταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

$$\psi_0 = A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (57)$$

$$\psi_1 = \hat{a}^\dagger \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{1!}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\xi A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\xi \psi_0 \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = \hat{a}^\dagger \psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2!}} (\hat{a}^\dagger)^2 \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2!}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} 2A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4}} (4\xi^2 - 2) \psi_0 \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = \hat{a}^\dagger \psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{3!}} (\hat{a}^\dagger)^3 \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3!}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{1}{2} (4\xi^2 - 2) \psi_0 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{8}} (8\xi^3 - 12) \psi_0 \end{aligned} \quad (60)$$

$$\psi_4 = \hat{a}^\dagger \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4!}} (\hat{a}^\dagger)^4 \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{24}} \frac{1}{\sqrt{16}} (16\xi^4 - 48\xi^2 + 12) \psi_0 \quad (61)$$

$$\psi_5 = \hat{a}^\dagger \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{5!}} (\hat{a}^\dagger)^5 \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{120}} \frac{1}{\sqrt{32}} (32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi) \psi_0 \quad (62)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι οι συναρτήσεις είναι εναλλάξ άρτιες και περιττές, ενώ η μορφή των κυματοσυναρτήσεων μπορεί να εκφραστεί με τη βρήση των πολυωνύμων **Hermite** $H_n(\xi)$ έτσι ώστε:

$$\psi_n(\xi) = \hat{a}^\dagger \psi_{n-1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) \psi_0(\xi) \quad (63)$$

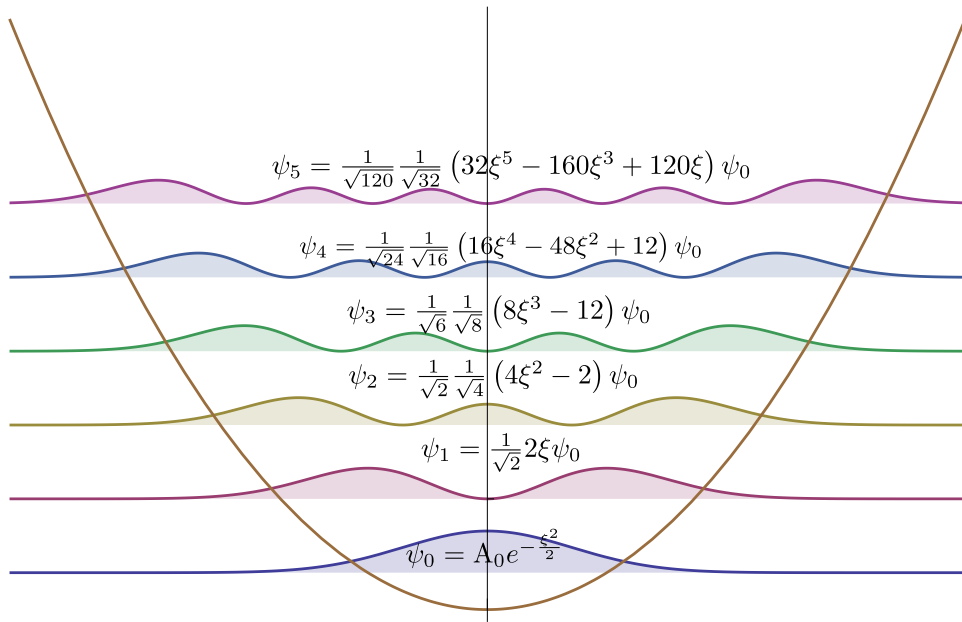
ενώ η δηλωτική έκφραση των πολυωνύμων Hermite είναι

$$H_n(\xi) = \left(\frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \right)_{\xi=0} = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (64)$$

Αν θέλαμε να γράψουμε την έκφραση για την κυματοσυνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το ξ από τη σχέση 48στη σχέση 50 για να πάρουμε τη σχέση:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \quad (65)$$

Χρησιμοποιώντας τη Mathematica, παίρνουμε το σχήμα 1, στο οποίο φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις για τις 5 πρώτες κυματοσυναρτήσεις του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, καθώς και το δυναμικό $V = \frac{\xi^2}{2}$



Σχήμα 1: Οι πέντε πρώτες κυματοσυναρτήσεις το μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή και το δυναμικό $V = \frac{\xi^2}{2}$.

2 Η εικόνα Schrödinger

Είναι ευκολο να αποδείξουμε ότι οι μέση τιμή ενός μετρήσιμου μεγέθους \hat{O} δεν αλλάζει όταν εφαρμόζεται σε αυτό ένας μοναδιαίος μετασχηματισμός \hat{U} που αλλάζει την βάση του συστήματος

$$\hat{O} \rightarrow \hat{O}' = \hat{U} \hat{O} \hat{U}^\dagger, \quad (66)$$

ενώ τα διανύσματα βάσης γίνονται:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\rightarrow |\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle \\ \langle\psi| &\rightarrow \langle\psi'| = \hat{U}^\dagger\langle\psi| \end{aligned} \quad (67)$$

Η αλλαγή βάσης από αυτή που ορίζει το διάνυσμα $|\psi\rangle$ σ' αυτή του διανύσματος $|\psi'\rangle$, γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{O}\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle = \langle\psi'|\hat{O}'|\psi'\rangle \quad (68)$$

Συνήθως, όταν εξελίσσουμε χρονικά μια κατάσταση δεν ακολουθούμε κατά γράμμα αυτή τη διαδικασία. Η χρονική εξέλιξη του αρχικού διανύσματος $|\psi(0)\rangle$ γράφεται ως:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle \quad (69)$$

Αυτό είναι άμεσο αποτέλεσμα της εξίσωσης Schrödinger και τα μετρήσιμα μεγέθη δεν αλλάζουν στο χρόνο. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν για το μετρήσιμο μέγεθος \hat{x} θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή σε χρόνο t , πρέπει να υπολογίσουμε την ποσότητα:

$$\overline{\hat{x}(t)} = \langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle \quad (70)$$

Θα πρέπει λοιπόν να πάρουμε το \hat{x} ως δεδομένο και να χρησιμοποιήσουμε τις καταστάσεις στο χρόνο t . Αυτή η διαδικασία υπολογισμού των μέσων τιμών ενός μεγέθους είναι που δίδεται από την εικόνα *Schrödinger picture*. Δεν είναι δυνατόν να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία για το μοναδιαίο μετασχηματισμό $\hat{U}(t)$ της χρονικής εξέλιξης. Αν ακολουθούσαμε τη διαδικασία των εξισώσεων 66,67, θα παίρναμε το αποτέλεσμα:

$$\overline{\hat{x}(t)} = \overline{\hat{x}(0)}, \quad (71)$$

που δηλώνει ότι η μέση τιμή της μετρήσιμης ποσότητας δεν αλλάζει καθώς εξελίσσεται ο χρόνος, σαν το σύστημα να έμενε στάσιμο. Συνήθως συμβολίζουμε τις ποσότητες που είναι εκπεφρασμένες στην εικόνα Schrödinger με τον δείκτη S , π.χ. $|\psi_S(t)\rangle$, που σημαίνει ότι αυτή είναι μια κατάσταση στην εικόνα Schrödinger, όπου οι καταστάσεις εξελίσσονται αλλά οι μετρήσιμες ποσότητες όχι.

3 Εικόνα Heisenberg

Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχει χρονική εξέλιξη όχι μόνο στην κατάσταση αλλά και στις μετρούμενες ποσότητες, αλλά με τέτοιο τρόπο ώστε να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα που θα παίρναμε και στην εικόνα Schrödinger, θα χρειαστούμε την εικόνα Heisenberg. Ας συμβολίσουμε μια κατάσταση στην εικόνα Heisenberg ως $|\psi_H(t)\rangle$. Για να την υπολογίσουμε αν η κατάστασή μας αρχικά ήταν στην εικόνα Schrödinger, πρέπει να τη μετασχηματίσουμε σύμφωνα με τη σχέση:

$$|\psi_H(t)\rangle = \hat{S}^\dagger|\psi_S(t)\rangle \quad (72)$$

όπου

$$\hat{S}^\dagger = e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \quad (73)$$

Αυτή η έκφραση είναι παρόμοια με τη χρονική εξέλιξη μιας κατάστασης στην εικόνα Schrödinger.

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} |\psi_S(0)\rangle \quad (74)$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση του $|\psi_H(t)\rangle$ θα πάρουμε τη σχέση

$$|\psi_H(t)\rangle = \hat{S}^\dagger |\psi_S(t)\rangle = e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} |\psi_S(t)\rangle = e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} |\psi_S(0)\rangle = |\psi_S(0)\rangle \quad (75)$$

Συνεπώς, οι καταστάσεις στην εικόνα Heisenberg σε οποιαδήποτε στιγμή t , είναι ίσες με τις καταστάσεις στην εικόνα Schrödinger για $t = 0$. Υποθέτοντας τώρα ότι θέλουμε να μετασχηματίσουμε ένα μετρήσιμο μέγεθος \hat{O}_S από την εικόνα Schrödinger στο ίδιο μέγεθος της εικόνας Heisenberg \hat{O}_H , θα το κάναμε χρησιμοποιώντας τον μοναδιαίο τελεστή \hat{S}^\dagger σύμφωνα με τα παρακάτω.

$$\hat{O}_H = \hat{S}^\dagger \hat{O}_S \hat{S} = e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \hat{O}_S e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \quad (76)$$

Με αυτόν τον τρόπο, είναι ξεκάθαρο ότι πλέον, ότι ακόμα κι αν το \hat{O}_S δεν εξαρτάται δηλωτικά από το χρόνο, το \hat{O}_H εξαρτάται από το χρόνο, συνεπώς συνήθως το γράφουμε ως $\hat{O}_H(t)$. Προκειμένου να μελετήσουμε τη χρονική εξέλιξη του $\hat{O}_H(t)$, υπολογίζουμε την χρονική του παράγωγο:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[e^{i\hat{H}t/\hbar} \right] \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} + e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S \frac{d}{dt} \left[e^{-i\hat{H}t/\hbar} \right] = \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{H} e^{i\hat{H}t/\hbar} + e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \right) e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{O}_H(t) - e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \right) = \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{O}_H(t) - \frac{i}{\hbar} \hat{O}_H(t) \hat{H} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}_H(t)] \Leftrightarrow \\ \frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}_H(t)] \end{aligned} \quad (77)$$

Μια ιδιαίτερη εξαίρεση τελεστών που είναι ίδιοι και στην εικόνα Heisenberg και στην εικόνα Schrödinger, είναι οι Χαμιλτονιανές. Όπως είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς

$$\hat{H}_H(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{H}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{i\hat{H}t/\hbar} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{H}_S = \hat{H}_S \quad (78)$$

Όσον αφορά τη μέση τιμή μεγεθών σε αυτές τις δύο εικόνες, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \langle \psi_H(t) | \hat{O}_H(t) | \psi_H(t) \rangle &= \langle \psi_S(t) | e^{-i\hat{H}t/\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar} | \psi_S(t) \rangle = \\ &= \langle \psi_S(t) | \hat{O}_S | \psi_S(t) \rangle \end{aligned} \quad (79)$$

Η παραπάνω έκφραση δείχνει ότι η μέση τιμή ενός μετρήσιμου μεγέθους, είναι ίδια και στις δύο εικόνες. Μια χρήσιμη διαδικασία στην περίπτωση χρονοεξαρτημένων Χαμιλτονιανών, είναι ο υπολογισμός της χρονικής εξέλιξης της μέσης τιμής ενός μεγέθους. Υποθέτοντας ότι εξετάζουμε το μέγεθος \hat{O} και θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή του στην εικόνα Schrödinger, θα γράψουμε:

$$\overline{\hat{O}(t)} = \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle \quad (80)$$

Υπολογίζοντας τη χρονική παράγωγο παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\hat{O}(t)} &= \frac{d}{dt} \left[\langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle \right] = \\ &= \frac{d\langle \psi(t) |}{dt} \hat{O} | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \hat{O} \frac{d| \psi(t) \rangle}{dt} \end{aligned} \quad (81)$$

Τώρα, ξαναγράφοντας τη χρονοεξαρτημένη Schrödinger ως:

$$\frac{d| \psi(t) \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} | \psi(t) \rangle \Leftrightarrow \frac{d\langle \psi(t) |}{dt} = \langle \psi(t) | \hat{H} \frac{i}{\hbar} \quad (82)$$

Επιστρέφοντας στην έκφραση για τη χρονική παράγωγο, 79, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\hat{O}(t)} &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H} \hat{O} | \psi(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{O} \hat{H} | \psi(t) \rangle = \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | [\hat{H}, \hat{O}] | \psi(t) \rangle = \\ &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}] \end{aligned} \quad (83)$$

4 Εικόνα Αλληλεπίδρασης

Η εικόνα αλληλεπίδρασης είναι μια ενδιάμεση εικόνα, υπό την έννοια ότι η χρονική εξέλιξη των καταστάσεων, μεταφέρεται «μερικώς» στα μετρούμενα μεγέθη.

Γενικά, προκειμένου να μεταφερθούμε στην εικόνα αλληλεπίδρασης, πρέπει να διαχωρισουμε τη Χαμιλτονιανή που μελετάμε, σε δύο μέρη: Το ελεύθερο μέρος $\hat{H}_S^{(0)}$ που είναι το ακριβώς επιλύσιμο μέρος της Χαμιλτονιανής και το μέρος της αλληλεπίδρασης \hat{V}_S , όπως ακριβώς αντιμετωπίζονται τα προβλήματα με τη θεωρία διαταραχών. Συνεπώς, η Χαμιλτονιανή μπορεί να διαχωριστεί ως:

$$\hat{H}_S = \hat{H}_S^{(0)} + \hat{V}_S \quad (84)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε το μοναδιαίο τελεστή

$$\hat{S}_0^\dagger = e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \quad (85)$$

Δρώντας αυτόν τον τελεστή, ορίζεται η εικόνα αλληλεπίδρασης και θα χρησιμοποιήσουμε τον δείκτη I (Interaction), σύμφωνα με τους κανόνες:

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{S}_0^\dagger |\psi_S(t)\rangle = e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} |\psi_S(t)\rangle \quad (86)$$

$$\hat{O}_I(t) = \hat{S}_0^\dagger \hat{O}_S \hat{S}_0 = e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \quad (87)$$

Ξεκινώντας από τον ορισμό του $\psi_I(t)$ και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, θα πάρουμε μια έκφραση για τη χρονική του εξέλιξη:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S^{(0)} |\psi_S(t)\rangle + e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S^{(0)} |\psi_I(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \left[\hat{H}_S^{(0)} + \hat{V}_S \right] |\psi_S(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{V}_S |\psi_S(t)\rangle = \\ &= -\frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{V}_S e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} |\psi_S(t)\rangle \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \hat{V}_I(t) |\psi_I(t)\rangle \Leftrightarrow \\ i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= \hat{V}_I(t) |\psi_I(t)\rangle \end{aligned} \quad (88)$$

Αυτή η έκφραση είναι ανάλογη με την εξίσωση Schrödinger, όμως στην εικόνα αλληλεπίδρασης, που μας επιτρέπει όπως είδαμε επανειλημμένα στο κείμενό μας να αντιμετωπίζουμε χρονοεξαρτώμενα προβλήματα.

Σε ότι αφορά τη χρονική εξέλιξη ενός τελεστή στην εικόνα αλληλεπίδρασης, ξεκινάμε από τη σχέση:

$$\hat{O}_I(t) = e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \quad (89)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο και στα δύο μέλη, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{O}_I(t) &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S^{(0)} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{H}_S^{(0)} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S^{(0)} \hat{O}_I - \frac{i}{\hbar} \hat{O}_I \hat{H}_S^{(0)} \\ &= \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S^{(0)}, \hat{O}_I \right] \end{aligned} \quad (90)$$

Στην εικόνα αλληλεπίδρασης η Χαμιλτονιανή $\hat{H}_S^{(0)}$ γίνεται:

$$\hat{H}_I^{(0)} = e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{H}_S^{(0)} e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} = \hat{H}_S^{(0)} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} = \hat{H}_S^{(0)} \quad (91)$$

Συνεπώς, η $\hat{H}_I^{(0)}$ είναι ίδια με την $\hat{H}_S^{(0)}$ και η αντικατάσταση στη σχέση 90θα μας δώσει:

$$\frac{d}{dt}\hat{O}_I = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_I^{(0)}, \hat{O}_I] \quad (92)$$

Συνοψίζοντας, θα πρέπει να τονίσουμε ότι στην εικόνα αλληλεπίδρασης, η χρονική εξέλιξη των καταστάσεων κυβερνάται από τον όρο \hat{V} της συνολικής Χαμιλτονιανής, ενώ η χρονική εξέλιξη των μεγεθών από τον όρο $\hat{H}^{(0)}$.

5 Διαδικασίες με απώλειες σε cavity QED

Το μοντέλο Jaynes-Cummings κάνει μια σιωπηρή αλλά πολύ σημαντική υπόθεση· ότι η κοιλότητα είναι τέλεια απομονωμένη από το περιβάλλον της (δηλαδή $\kappa = 0$), δεν υπάρχουν θερμικές καταστάσεις μέσα στην κοιλότητα ($\bar{n}_t \hbar = 0$) καθώς και ότι δεν υπάρχει καθόλου αυθόρμητη εκπομπή ($\gamma = 0$)

Αυτά τα όρια, φυσικά και είναι χρήσιμα για να αποδείξουμε τους νόμους που διέπουν αυτές τις φυσικές διαδικασίες που συμβαίνουν μέσα στο απλό αυτό σύστημα, ωστόσο η Φύση έχει νόμους που μας απαγορεύουν ακόμα και να φανταστούμε ότι θα μπορούσαμε να επιτύχουμε αυτές τις ιδανικές τιμές σε ένα πείραμα.

Οι θεωρητικές προσεγγίσεις για την επίλυση του προβλήματος ενός *Ανοικτού συστήματος* περιγράφονται εξάισια από τους Carmichael[25], [26] και Scully[14]. Δεν είναι σκοπός αυτής της διατριβής να μελετηθεί στην πλήρη έκτασή της η διαδικασία απόδειξης των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στις παραπάνω αναφορές, ωστόσο θα δούμε τις βασικές πτυχές των μεθόδων για να γίνει κατανοητός ο σημαντικός ρολός της αλληλεπίδρασης του περιβάλλοντος στο μοντέλο μας.

Ο κύριος λόγος για την καθιέρωση αυτού του σχετικά νέου πεδίου που περιγράφεται με τον τίτλο *Ανοικτά Κβαντικά Συστήματα* (Open Quantum Systems) είναι το γεγονός ότι όταν λαμβάνουμε υπόψιν ένα σύστημα που αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του, ο χώρος Hilbert που περιέχει όλη την απαιτούμενη πληροφορία για την περιγραφή του συστήματος έχει τόσες πολλές διαστάσεις που θα ήταν ανθρωπίνως αδύνατο να μελετηθεί η συμπεριφορά συστημάτων που δεν βρίσκονται παρά σε ένα πάρα πολύ περιορισμένο υποσύνολο ρεαλιστικών σεναρίων, όπως για παράδειγμα ο «Συντονισμένος Φθορισμός» (Resonance Fluorescence) που περιγράφεται στο [14]. Επιπλέον, η περιγραφή των φαινομένων που συμβαίνουν δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη χρήση κυματοσυναρτήσεων που όπως ξέρουμε περιγράφουν καθαρές καταστάσεις, αλλά θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη χρονική εξέλιξη των πινάκων πυκνότητας για να παρατηρήσουμε την υποβάθμιση ενός Ανοικτού Συστήματος. Ο λόγος είναι ότι σε αντίθεση με όσα έχουμε δει έως τώρα, η χρονική εξέλιξη του συστήματος προσδιορίζεται από μη αναστρέψιμες διαδικασίες, ή με άλλα λόγια διαδικασίες που συμπεριλαμβάνουν μη-μοναδιαίους τελεστές, που μας απαγορεύουν να χρησιμοποιήσουμε αναλυτικές μεθόδους. Τα οφε-

λη της ανάπτυξης αυτού του φορμαλισμού, είναι ξεκάθαρα αν σκεφτεί κανείς ότι τα σημερινά υπολογιστικά συστήματα μας επιτρέπουν να κάνουμε προσομοιώσεις κάνοντας χρήση αυτού του φορμαλισμού, που εισαγάγει την έννοια των «Υπεριελεστών» (Superoperators), δηλαδή τελεστών που δρουν σε τελεστές και των «τελεστών κατάρρευσης» που περιγράφουν την καταστροφική επιρροή του περιβάλλοντος σε ένα κλειστό σύστημα. Στα ακόλουθα θα δώσουμε μια «συμπιεσμένη» περιγραφή της προσέγγισης της «Master Equation» ή ελληνιστί «Άρχουσας Εξίσωσης» καθώς και της «Μεθόδου των Κβαντικών Τροχιών» (Quantum Trajectories Method) και θα συμπεριλάβουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για μερικά απλά παραδείγματα που προέκυψαν με τη χρήση του πακέτου ανοικτού λογισμικού QuTiP[112], που δουλεύει με τη γλώσσα προγραμματισμού Python. Οδηγούς σε αυτή τη διαδικασία αποτέλεσαν οι διαλέξεις του καθηγητή Carmichael στο Singapore School of Physics τον Ιούνιο του 2012, καθώς και τα [25],[26].

51 Η Lindblad Master Equation

Ο πίνακας πυκνότητας ενός συστήματος περιέχει όλη τη χρήσιμη πληροφορία όσον αφορά τη στατιστική κατανομή ενός συστήματος (καθαρή ή μεικτή κατάσταση) και ορίζεται ως:

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (93)$$

όπου p_n είναι η κλασσική πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi_n\rangle$. Η βασική μέθοδος για να γράψει κανείς τις εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος S που αλληλεπιδρά με μια δεξαμενή θερμότητας (όπως είναι το περιβάλλον) R είναι το να επεκτείνει την έννοια του όρου «Σύστημα», ούτως ώστε να συμπεριλάβει το κλειστό σύστημα, το περιβάλλον και την αλληλεπίδρασή τους. Αυτό το συνδυασμένο σύστημα που μπορεί να θεωρηθεί κλειστό καθώς και η χρονική του εξέλιξη μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \quad (94)$$

όπου τώρα η Χαμιλτονιανή H , περιέχει τις πληροφορίες για το αρχικό σύστημα (την κοιλότητα), το περιβάλλον και την αλληλεπίδρασή τους, υποθέτοντας ότι ορισμένοι από τους άπειρους τρόπους ταλάντωσης που επιζούν μέσα στη δεξαμενή θερμότητας που ορίζει το περιβάλλον, μπορούν να συζευχθούν με τους τρόπους ταλάντωσης που υποστηρίζει η κοιλότητα, με τη μεσολάβηση του ρυθμού κ της κοιλότητας. Έχοντας αυτές τις έννοιες κατά νου, μπορούμε να γράψουμε την Χαμιλτονιανή H στη μορφή:

$$H = H_S + H_R + H_{SR} \quad (95)$$

Οι όροι H_S και H_R είναι οι Χαμιλτονιανές του συστήματος και του περιβάλλοντος αντίστοιχα (**S**ystem, **R**eservoir), ενώ ο όρος H_{SR} περιέχει την αλληλεπίδραση

μεταξύ τους. Αν ο πίνακας πυκνότητας $\rho(t)$ περιγράφει την εξέλιξη του κλειστού συστήματος αλλά και του περιβάλλοντος, στον χώρο *Hilbert* ($S \oplus R$) μπορούμε να πάρουμε τον «ανηγμένο πίνακα πυκνότητας» του συστήματος $\rho_S(t)$, υπολογίζοντας το μερικό ίχνος του πίνακα πυκνότητας του συνολικού συστήματος, πάνω στις καταστάσεις του περιβάλλοντος.

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_R \rho(t) \quad (96)$$

Αν μετατρέψουμε την εξίσωση Schrödinger στην εικόνα αλληλεπίδρασης, για να ξεφορτωθούμε τους γρήγορα περιστρεφόμενους όρους, ο τροποποιημένος πίνακας πυκνότητας γίνεται:

$$\tilde{\rho}(t) = e^{i/\hbar(H_S+H_R)t} \rho(t) e^{-i/\hbar(H_S+H_R)t} \quad (97)$$

Γενικά, η αλληλεπίδραση μεταξύ συστήματος και περιβάλλοντος περιγράφεται από μια χρονοεξαρτημένη Χαμιλτονιανή $\tilde{H}_{SR}(t)$, η οποία δίδεται από τη σχέση:

$$\tilde{H}_{SR}(t) = e^{i/\hbar(H_S+H_R)t} H_{SR} e^{-i/\hbar(H_S+H_R)t} \quad (98)$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση Schrödinger ως:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\rho}(t)] \quad (99)$$

Ολοκληρώνοντας αυτή την εξίσωση, έχουμε μποροστά μας μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση η οποία μπορεί να υπολογιστεί επαναληπτικά, δίνοντας κάθε φορά υψηλότερης τάξης προσεγγίσεις.

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')] dt' \quad (100)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση του $\tilde{\rho}(t)$ προκειμένου να κάνουμε μία φορά τη διαδικασία αυτής της εξίσωσης, παίρνουμε:

$$\tilde{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\rho}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')]] dt' \quad (101)$$

Αυτή η έκφραση μας παρέχει μια πλήρη έκφραση που περιγράφει το σύστημα αν υπολογισθεί πολλές φορές, καθώς δεν έχει γίνει κάποια προσέγγιση. Ωστόσο, μπορούμε να κάνουμε κάποιες προσεγγίσεις για να την απλοποιήσουμε: Πρώτα απ' όλα πρέπει να υποθέσουμε ότι για $t = 0$ (δηλαδή όταν «ανοίγουμε» την αλληλεπίδραση), δεν υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στο σύστημα και το περιβάλλον. Δηλαδή, ότι ο συνδυασμένος πίνακας πυκνότητας μπορεί να γραφτεί ως:

$$\rho(0) = \rho_S(0) R_0 \quad (102)$$

όπου R_0 είναι ο αρχικός πίνακας πυκνότητας του περιβάλλοντος. Υπολογίζοντας το ίχνος του πάνω από το περιβάλλον, έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{tr}_R(\dot{\tilde{\rho}}(t)) = & -\frac{i}{\hbar} \text{tr}_R\left(\left[\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\rho}(0)\right]\right) - \\ & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_R\left(\left[\tilde{H}_{SR}(t), \left[\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')\right]\right]\right) dt' \end{aligned} \quad (103)$$

Θέτοντας τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος ούτως ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε τον πρώτο όρο αυτής της έκφρασης, γράφουμε:

$$\dot{\tilde{\rho}}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_R\left(\left[\tilde{H}_{SR}(t), \left[\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')\right]\right]\right) dt' \quad (104)$$

Η πρώτη προσέγγιση που κάναμε σ' αυτό το πρόβλημα, ήταν το γεγονός ότι το σύστημα και το περιβάλλον δεν έχουν συσχέτιση αρχικά (δεν είναι «εναγκαλισμένα»). Γενικά, καθώς περνά ο χρόνος, θα αρχίσουν να έχουν εναγκαλισμό μεταξύ τους, ωστόσο στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτή η συσχέτιση μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντος είναι πάρα πολύ ασθενής και ο συνδυασμένος πίνακας πυκνότητας μπορεί να γραφτεί ως:

$$\rho(t) = \rho_S(t)R_0 + O(H_{SR}) \quad (105)$$

Τώρα είναι η στιγμή για να κάνουμε την πρώτη «σοβαρή» προσέγγιση στο πρόβλημά μας, στην οποία θα αναφερόμαστε ως «**προσέγγιση Born**». Το περιβάλλον μπορεί να θεωρηθεί πολύ μεγαλύτερο από το σύστημα, ούτως ώστε οι αλλαγές του συστήματος δεν θα επηρεάσουν το περιβάλλον, κι έτσι το περιβάλλον θα μείνει στην ίδια αρχική κατάσταση. Η δεύτερη υπόθεση της προσέγγισης Born απαιτεί από το σύστημα και το περιβάλλον να παραμείνουν διαχωρισμένα σε όλη τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής τους η οποία δικαιολογείται από την υπόθεση της «ασθενούς αλληλεπίδρασής» τους. Συνοψίζοντας την προσέγγιση Born μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\rho(t) \simeq \rho(t) \otimes \rho_R \quad (106)$$

Η επόμενη σημαντική προσέγγιση αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως «**προσέγγιση Markov**» και θεωρεί ότι η χρονική κλίμακα της φυγής ενός φωτονίου στο περιβάλλον (ας την ονομάσουμε τ_R), είναι πολύ μικρότερη από την μικροτερη χρονική κλίμακα της δυναμικής του συστήματος, η οποία συνοψίζεται ως:

$$\tau_S \gg \tau_R \quad (107)$$

Η προσέγγιση Markov σε πρώτη ματιά φαίνεται αρκετά χονδροειδής. Ωστόσο, δηλώνει ένα πάρα πολύ σημαντικό γεγονός: *Παρά το γεγονός ότι η παρελθούσα*

εξέλιξη του συστήματος αποτυπώνεται στο περιβάλλον μέσω της σύζευξής τους, επηρεάζοντας και τη μελλοντική εξέλιξή του, αν το θεωρήσουμε πολύ μεγάλο, οι αλληλαγές του περιβάλλοντος λόγω του συστήματος δεν «επιζούν» για πολύ, το οποίο αφαιρεί το χαρακτηριστικό της «μνήμης» από το περιβάλλον. Για να κατανοήσουμε το πώς η προσέγγιση Markov επηρεάζει την μέθοδο που ακολουθούμε, θα γράψουμε τη Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης ως:

$$H_{SR} = \hbar \sum_i s_i R_i \quad (108)$$

όπου s_i και R_i είναι οι τελεστές του χώρου Hilbert για το σύστημα και το περιβάλλον αντίστοιχα. Γράφοντας το σύστημα στην εικόνα αλληλεπίδρασης και εκτελώντας την προσέγγιση Born προκύπτει:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = - \sum_{i,j} \int_0^t Tr_R \left(\left[\tilde{s}_i(t) \tilde{R}_i(t), \left[\tilde{s}_j(t') \tilde{R}_j(t'), \tilde{\rho}_S(t') R_0 \right] \right] \right) dt' \quad (109)$$

Συνεπώς, αυτή η εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως:

$$\dot{\tilde{\rho}}_S(t) = - \sum_{i,j} \int_0^t \left(A \langle \tilde{R}_i(t) \tilde{R}_j(t') \rangle_R + B \langle \tilde{R}_j(t') \tilde{R}_i(t) \rangle_R \right) dt' \quad (110)$$

όπου τα A και B δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} A &= \tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}_S(t') - \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}_S(t') \tilde{s}_i(t) \\ B &= \tilde{\rho}_S(t') \tilde{s}_j(t') \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}_S(t') \tilde{s}_j(t') \end{aligned} \quad (111)$$

Το αποτέλεσμα του περιβάλλοντος είναι εμφανές στους όρους:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}_i(t) \tilde{R}_j(t') \rangle_R &= Tr_R \left(R_0 \tilde{R}_i(t) \tilde{R}_j(t') \right) \\ \langle \tilde{R}_j(t') \tilde{R}_i(t) \rangle_R &= Tr_R \left(R_0 \tilde{R}_j(t') \tilde{R}_i(t) \right) \end{aligned} \quad (112)$$

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Αναπαράσταση μιας κατάστασης αρίθμησης στο χώρο των φάσεων . .	7
1.2	Αναπαράσταση στο χώρο των φάσεων για μια σύμφωνη κατάσταση. .	9
1.3	Ενεργειακά επίπεδα του ατόμου μετά τον ορισμό του μέσου της διαφοράς των E_g και E_e ως σημείο μηδενικής ενέργειας. Η ιδιοσυχνότητα μετάβασης του ατόμου έχει συμβολιστεί με ω_0	13
1.4	Ατομική αναστροφή για καταστάσεις αρίθμησης με διαφορετικό αριθμό n φωτονίων.	17
1.5	Ατομική αναστροφή για $\bar{n} = 10$	18
1.6	Ατομική αναστροφή για $\bar{n} = 5$	19
1.7	Διαχωρισμός των ενεργειακών επιπέδων των γυμνών καταστάσεων (αριστερά) λόγω της αλληλεπίδρασης με το πεδίο και οι «ντυμένες» καταστάσεις (δεξιά).	23
1.8	Ενέργειες των ντυμένων καταστάσεων $ 1, \pm\rangle$, $ 2, \pm\rangle$ και $ 3, \pm\rangle$, συναρτήσει του αποσυντονισμού.	23
1.9	Φωτογραφία της κοιλότητας που χρησιμοποιήθηκε στο [61] πριν την τοποθέτηση του πάνω κατόπτρου. Απεικονίζεται η πορεία της δέσμης των ατόμων με το βέλος, ενώ οι τέσσερις υποδοχές χρησιμοποιούνται για την εγκατάσταση του πάνω κατόπτρου.	28
1.10	Αναπαράσταση των κύριων παραμέτρων μιας διάταξης <i>cavity QED</i> .	28
1.11	Απώλειες μιας κοιλότητας που περιέχει την κατάσταση αρίθμησης $ 15\rangle$ με $\kappa = 10$ και μέσο αριθμό θερμικών φωτονίων $\bar{n}_{th} = 0$, χρησιμοποιώντας την μέθοδο αριθμητικής επίλυσης της Master Equation (πράσινη γραμμή) και των κβαντικών τροχιών (μπλε γραμμή).	31
1.12	Το μοντέλο Jaynes-Cummings σε μια κοιλότητα με απώλειες χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των Κβαντικών Τροχιών για $n_{traj} = 1000$ $\omega_0 = \omega = 1000$, $g = 100$, $\kappa = 10$	34

2.1	Αναπαράσταση ενός qubit στην κατάσταση $ 0\rangle$ (κόκκινη γραμμή), με χρήση της σφαίρας Bloch. Οι μοναδιαίοι μετασχηματισμοί μετακινούν την κόκκινη γραμμή σε διαφορετικά σημεία στην επιφάνεια της σφαίρας χωρίς να αλλοιώνουν το μήκος της. Η εικόνα έγινε με τη χρήση του Qubits on the Bloch Sphere	39
2.2	Αλγόριθμος Deutsch-Jozsa	44
2.3	Βελτιωμένη έκδοση του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa[23]	45
2.4	Γεωμετρική απόδειξη του αλγορίθμου του Grover	47
2.5	Πλάτη πιθανότητας για τις τέσσερις καταστάσεις σε υπέρθεση.	49
2.6	Πλάτη πιθανότητας μετά την εφαρμογή του τελεστή αναστροφής	49
2.7	Πλάτη πιθανότητας μετά την εφαρμογή του τελεστή διάχυσης	49
2.8	Αναπαράσταση του Κβαντικού Αλγορίθμου που απεικονίζει τον Κβαντικό Μετασχηματισμό Fourier για n qubits	54
3.1	Αντιστοιχία των λογικών καταστάσεων στα 2 άτομα για τον αλγόριθμο Grover.	59
3.2	Πειραματική διάταξη για την υλοποίηση του αλγορίθμου του Grover. Τα άτομα 1 και 2 διέρχονται από την κοιλότητα με τις ίδιες ταχύτητες, όμως σε διαφορετικές (κατακόρυφες) θέσεις και υπόκεινται στους μετασχηματισμούς S, P, H από εξωτερικές πηγές μικροκυμάτων, ενώ αλληλεπιδρούν δύο φορές μέσα στην κοιλότητα μέσω υποδοθηδμένων αλληλεπιδράσεων van der Waals.	62
3.3	Σύστημα τριών επιπέδων για την εναλλακτική υλοποίηση της κβαντικής πύλης φάσης για δυο qubits[77].	64
3.4	Κβαντικό κύκλωμα που υλοποιεί τον QFT για $q = 3$. Με $A_i \equiv U_{\pi/4, \pi/2}$ αναπαριστούμε τις πύλες ενός qubit, ενώ με $B_{jk} \equiv Q_{\pi/2^{k-j}}$ αναπαριστούμε τις κβαντικές πύλες φάσης για 2 qubits.	67
3.5	Άτομο σε διάταξη V . Η μετάβαση $ b\rangle \rightarrow a\rangle$ είναι εντελώς εκτός συντονισμού με την κοιλότητα, ενώ η $ b\rangle \rightarrow c\rangle$ υποστηρίζεται με σύζευξη διασποράς.	67
3.6	Ατομικά επίπεδα υπό την επίδραση του μαγνητικού πεδίου. Για κάθε άτομο η θεμελιώδης κατάσταση $ b\rangle$ αντιστοιχεί στο $ 1\rangle$ και η $ a_i\rangle$ στο $ 0\rangle$	69
3.7	Πρόταση πειραματικής διάταξης για τον αλγόριθμο του Κβαντικού Μετασχηματισμού Fourier για 3 qubits.	69
4.1	Σύστημα δύο συζευγμένων κοιλοτήτων αλληλεπιδρώντων με άτομα.	73

- 4.2 Πλάτη πιθανότητας που αντιστοιχούν στη διέγερση ενός συγκεκριμένου τρόπου ή ατόμου ως συνάρτηση του χρόνου για την περίπτωση μεγάλου ρυθμού μεταπήδησης, υποθέτοντας ότι το σύστημα ξεκίνησε από την κατάσταση $|eg00\rangle$. Εδώ, $J = 10g$, $\Delta = 0.1g$ και $\omega = 1000g$, ενώ ο χρόνος είναι σε μονάδες $\frac{gJ}{2\pi}$ 78
- 4.3 Πλάτη πιθανότητας που αντιστοιχούν στη διέγερση ενός συγκεκριμένου τρόπου των ατόμων ή των πεδίων ως συνάρτηση του χρόνου, για παραμέτρους στην περιοχή αποσυντονισμού, υποθέτοντας ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η $|eg00\rangle$. Οι παράμετροι είναι $\Delta = 10g$, $g = 5 \cdot 10^{-3}\omega_0$, $J = (2/5)g$, ενώ ο χρόνος είναι σε κλίμακα του $\frac{\pi \Delta^2}{2g^2J}$ 80
- 4.4 Πλάτη πιθανότητας που αντιστοιχούν στη διέγερση ενός συγκεκριμένου τρόπου των ατόμων ή των πεδίων ως συνάρτηση του χρόνου, για παραμέτρους στην περιοχή συντονισμού, υποθέτοντας ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η $|eg00\rangle$. Σε αυτή την περίπτωση, $g = 5 \cdot 10^{-3}\omega_0$, $\Delta = 10g$, $J = 10g$, ενώ ο χρόνος εκφράζεται συναρτήσει της περιόδου $\frac{2\pi}{g}$ 82
- 4.5 Περιοχή συντονισμού με $\kappa = 0.1g$ 85
- 4.6 Περιοχή συντονισμού με $\kappa = g$ 85
- 4.7 Περιοχή συντονισμού με $\kappa = 10g$ 85
- 4.8 Περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης με $\kappa = 0.1g$ 85
- 4.9 Περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης με $\kappa = 1g$ 85
- 4.10 Περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης με $\kappa = 10g$ 85
- 4.11 Περιοχή αποσυντονισμού με $\kappa = 0.1g$ 85
- 4.12 Περιοχή αποσυντονισμού με $\kappa = 1g$ 85
- 4.13 Περιοχή αποσυντονισμού με $\kappa = 10g$ 85
- 4.14 Κβαντικό κύκλωμα που απαικονίζει τους μετασχηματισμούς που απαιτούνται για την υλοποίηση της πύλης $CNOT$ χρησιμοποιώντας τις πύλες \sqrt{SWAP} , X , H 88
- 4.15 Απεικόνιση του κβαντικού κυκλώματος του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa. 88
- 4.16 Πιστότητα της πύλης \sqrt{SWAP} συναρτήσει του κ , με το κ εκπεφρασμένο σε σχέση με το ρυθμό σύζευξης g των κοιλοτήτων για την περιοχή υψηλού αποσυντονισμού (μπλε γραμμή, $g = 5 \cdot 10^{-3}\omega_0$, $J = 2/5g$, $\Delta = 10g$, $T_{disp}/4 = \pi\Delta^2/2g^2J$), την περιοχή συντονισμού (κόκκινη γραμμή, $g = 5 \cdot 10^{-3}\omega_0$, $J = 10g$, $\Delta = 10g$, $T_R/4 = \pi/2g$) και την περιοχή υψηλού ρυθμού μεταπήδησης (πράσινη γραμμή, $g = 5 \times 10^{-3}\omega_0$, $J = 10g$, $\Delta = 0.1g$, $T_{LH}/4 = \pi J/(2g^2)$). 89
- 1 Οι πέντε πρώτες κυματοσυναρτήσεις το μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή και το δυναμικό $V = \frac{\xi^2}{2}$ 109

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Κβαντικές πύλες που δρουν σε ένα qubit	40
2.2	Πύλες με δύο qubits	42
2.3	Πύλες τριών qubits	43
3.1	Ορισμός της γωνίας περιστροφής για την υλοποίηση των απαιτούμε- νων τελεστών-«μαντών».	59

ΑΝΑΦΟΡΕΣ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Cohen-Tannoudji, C., B. Diu, and F. Laloë: *Quantum mechanics*. Quantum Mechanics. Wiley, 1977, ISBN 9782705658342. <http://books.google.gr/books?id=CnkfAQAAMAAJ>.
- [2] Harris, E.G.: *Introduction to Modern Theoretical Physics: Quantum theory and statistical physics*. Number τ . 2 in *Introduction to Modern Theoretical Physics: Quantum Theory and Statistical Physics*. Wiley, 1975, ISBN 9780471353263. <http://books.google.gr/books?id=Qf8oAQAAMAAJ>.
- [3] Levi, A.F.J.: *Applied Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2006, ISBN 9780521860963. <http://books.google.gr/books?id=40rRzNbuhpAC>.
- [4] Miller, David A. B.: *Quantum Mechanics for Scientists and Engineers*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2008, ISBN 0521897831, 9780521897839. <http://books.google.gr/books?id=pwrBp3ZGaUYC>.
- [5] Trachanas, Stephanos: *Quantum Mechanics II*. Crete University Press, Heraklio, Crete, Grece, 2008, ISBN 978-960-524-267-1. <http://www.cup.gr/ViewShopProduct.aspx?ProductId=273160&LangId=1>.
- [6] Raimond, J. M., M. Brune, and S. Haroche: *Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity*. Rev. Mod. Phys., 73:565-582, Aug 2001. <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.565>.
- [7] Haroche, S. and J.M. Raimond: *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons: Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford graduate texts in mathematics. OUP Oxford, 2006, ISBN 9780198509141. <http://books.google.gr/books?id=QY6YuU-Qi-AC>.

- [8] E. M. Purcell, H. C. Torrey and R. V. Pound: *Proceedings of the american physical society*. Phys. Rev., 69:674–674, Jun 1946. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.69.674.2>.
- [9] Goy, P., J. M. Raimond, M. Gross, and S. Haroche: *Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission*. Phys. Rev. Lett., 50:1903–1906, Jun 1983. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.50.1903>.
- [10] Boi, L.: *The Quantum Vacuum: A Scientific and Philosophical Concept, from Electrodynamics to String Theory and the Geometry of the Microscopic World*. The Quantum Vacuum. Johns Hopkins University Press, 2011, ISBN 9781421402475. http://books.google.gr/books?id=rAEVOLae_FoC.
- [11] Gerry, C. and P. Knight: *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2004, ISBN 9780521527354. <http://books.google.gr/books?id=CgByyoBJJwgC>.
- [12] Lambropoulos, P. and D. Petrosyan: *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*. Springer, 2006, ISBN 9783540345718. <http://books.google.gr/books?id=53bpU-41U8gC>.
- [13] Milonni, P.W.: *The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. Academic Press, 1994, ISBN 9780124980808. <http://books.google.gr/books?id=P83vAAAAMAAJ>.
- [14] Scully, M.O. and S. Zubairy: *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997, ISBN 9780521435956. <http://books.google.gr/books?id=20ISsQCKKmQC>.
- [15] Walls, D.F. and G.J. Milburn: *Quantum Optics*. Springer, 2008, ISBN 9783540285731. <http://books.google.gr/books?id=LiWsc3Nlf0kC>.
- [16] Nielsen, M.A. and I.L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010, ISBN 9781107002173. <http://books.google.gr/books?id=-s4DEy7o-a0C>.
- [17] Mermin, N.D.: *Quantum Computer Science: An Introduction*. Cambridge University Press, 2007, ISBN 9780521876582. <http://books.google.gr/books?id=q2S9APxFdUQC>.

- [18] Williams, C.P.: *Explorations in Quantum Computing*. Texts in Computer Science. Springer, 2011, ISBN 9781846288869. <http://books.google.gr/books?id=QE8S--WjIFwC>.
- [19] McMahon, D.: *Quantum Computing Explained*. Wiley, 2007, ISBN 9780470181362. <http://books.google.gr/books?id=bDXwFHJNKFAC>.
- [20] Benioff, Paul: *The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical hamiltonian model of computers as represented by turing machines*. Journal of Statistical Physics, 22:563-591, 1980, ISSN 0022-4715. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01011339>, 10.1007/BF01011339.
- [21] Feynman, R. P.: *Simulating physics with computers*. International Journal of Theoretical Physics, 21:467-488, June 1982. <http://www.cs.berkeley.edu/~christos/classics/Feynman.pdf>.
- [22] Deutsch, D.: *Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer*. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 400(1818):97-117, July 1985. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1985.0070>.
- [23] Cleve, R., A. Ekert, C. Macchiavello, and M. Mosca: *Quantum algorithms revisited*. Phil.Trans.Roy.Soc.Lond.A, 1997. <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/9708016>.
- [24] Brown, J. and D. Deutsch: *Quest for the Quantum Computer*. Touchstone Book. Simon & Schuster, 2001, ISBN 9780684870045. <http://books.google.gr/books?id=ECWm59h2pLAC>.
- [25] Carmichael, H.J.: *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*. Texts & Monographs in Physics. Springer, 2003, ISBN 9783540548829. <http://books.google.gr/books?id=ocgRgM-yJacC>.
- [26] Carmichael, H.J.: *Statistical Methods in Quantum Optics 2: Non-Classical Fields*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, 2007, ISBN 9783540713197. <http://books.google.gr/books?id=xgxOYkxW8JoC>.
- [27] Carmichael, H.: *An Open Systems Approach to Quantum Optics: Lectures Presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991*. Lecture notes in physics: Monographs. Springer-Verlag,

- 1993, ISBN 9783540566342. <http://books.google.gr/books?id=E15gxgxWhpgC>.
- [28] Deutsch, D. and R. Jozsa: *Rapid solution of problems by quantum computation*. Royal Society of London Proceedings Series A, 439:553-558, December 1992. <http://www.qudev.ethz.ch/phys4/studentspresentations/djalgo/DeutschJozsa.pdf>.
- [29] Grover, Lov K.: *Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack*. Phys. Rev. Lett., 79:325-328, Jul 1997. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.325>.
- [30] Grover, Lov K.: *Complex quantum queries*. 1997. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9706005>.
- [31] Grover, Lov K.: *Quantum computers can search rapidly by using almost any transformation*. Phys. Rev. Lett., 80:4329-4332, May 1998. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.4329>.
- [32] Jozsa, Richard: *Searching in grover's algorithm*. 1999. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9901021>.
- [33] Shor, P. W.: *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*. eprint arXiv:quant-ph/9508027, August 1995. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9508027v2>.
- [34] Scully, M. O. and M. S. Zubairy: *Cavity qed implementation of the discrete quantum fourier transform*. Physical Review A, 65(5):052324, May 2002. <http://pra.aps.org/abstract/PRA/v65/i5/e052324>.
- [35] Yamaguchi, F., P. Milman, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Quantum search with two-atom collisions in cavity qed*. Physical Review A, 66(1):010302, July 2002. <http://pra.aps.org/abstract/PRA/v66/i1/e010302>.
- [36] Lloyd, S.: *Universal quantum simulators*. Science, 273:1073-1078, August 1996. <http://research.physics.illinois.edu/demarco/lloyd%2096%20paper.pdf>.
- [37] Angelakis, Dimitris G., Marcelo Franca Santos, and Sougato Bose: *Photon-blockade-induced mott transitions and xy spin models in coupled cavity arrays*. Phys. Rev. A, 76:031805, Sep 2007. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.031805>.

- [38] Hood, C. J., M. S. Chapman, T. W. Lynn, and H. J. Kimble: *Real-time cavity qed with single atoms*. Phys. Rev. Lett., 80:4157–4160, May 1998. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.4157>.
- [39] Boca, A., R. Miller, K. M. Birnbaum, A. D. Boozer, J. McKeever, and H. J. Kimble: *Observation of the vacuum rabi spectrum for one trapped atom*. Phys. Rev. Lett., 93:233603, Dec 2004. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.233603>.
- [40] Duan, L. M., B. Wang, and H. J. Kimble: *Robust quantum gates on neutral atoms with cavity-assisted photon scattering*. Phys. Rev. A, 72:032333, Sep 2005. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.032333>.
- [41] Boozer, A. D., A. Boca, R. Miller, T. E. Northup, and H. J. Kimble: *Reversible state transfer between light and a single trapped atom*. Phys. Rev. Lett., 98:193601, May 2007. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.193601>.
- [42] Khudaverdyan, M., W. Alt, I. Dotsenko, L. FG?rster, S. Kuhr, D. Meschede, Y. Miroshnychenko, D. Schrader, and A. Rauschenbeutel: *Adiabatic quantum state manipulation of single trapped atoms*. Phys. Rev. A, 71:031404, 2005. <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0411120>.
- [43] Miroshnychenko, Y., W. Alt, I. Dotsenko, L. FG?rster, M. Khudaverdyan, D. Meschede, D. Schrader, and A. Rauschenbeutel: *An atom-sorting machine*. Nature, 442:151, 2006. <http://www.nature.com/nature/journal/v442/n7099/full/442151a.html>.
- [44] Brakhane, S., W. Alt, T. Kampschulte, M. Martinez-Dorantes, R. Reimann, S. Yoon, A. Widera, and D. Meschede: *Bayesian feedback control of a two-atom spin-state in an atom-cavity system*. Phys. Rev. Lett., 109:173601, 2012. <http://arxiv.org/abs/1206.3184>.
- [45] Cirac, J. I. and P. Zoller: *Quantum computations with cold trapped ions*. Phys. Rev. Lett., 74:4091–4094, May 1995. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.4091>.
- [46] Leibfried, D., R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland: *Quantum dynamics of single trapped ions*. Rev. Mod. Phys., 75:281–324, Mar 2003. <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.281>.
- [47] Monroe, C., D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland: *Demonstration of a fundamental quantum logic gate*. Phys. Rev. Lett.,

- 75:4714–4717, Dec 1995. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4714>.
- [48] L.M.K., Vandersypen, Steffen M., G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, and I. L. Chuang: *Experimental realization of shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*. Nature, 414:883–887, December 2001. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0112176>.
- [49] Blais, Alexandre, Ren Shou Huang, Andreas Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf: *Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation*. Phys. Rev. A, 69:062320, Jun 2004. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.062320>.
- [50] Devoret, M. H., A. Wallraff, and J. M. Martinis: *Superconducting qubits: A short review*. eprint arXiv:cond-mat/0411174, November 2004. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0411174>.
- [51] Dicarlo, L., J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf: *Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor*. Nature, 460:240–244, July 2009. <http://www.nature.com/nature/journal/v460/n7252/full/nature08121.html>.
- [52] Glauber, Roy J.: *Coherent and incoherent states of the radiation field*. Phys. Rev., 131:2766–2788, Sep 1963. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.2766>.
- [53] Sudarshan, E. C. G.: *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams*. Phys. Rev. Lett., 10:277–279, Apr 1963. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.277>.
- [54] Jaynes E.T., Cummings F.W.: *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*. Proceedings of the IEEE, 51:89–109, Jan 1963. <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=1443594>.
- [55] Shore, Bruce W. and Peter L. Knight: *The jaynes-cummings model*. Journal of Modern Optics, 40(7):1195–1238, 1993. <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500349314551321>.

- [56] Walther, H., B. T. H. Varcoe, B. G. Englert, and T. Becker: *Cavity quantum electrodynamics*. Reports on Progress in Physics, 69:1325–1382, May 2006. <http://iopscience.iop.org/0034-4885/69/5/R02>.
- [57] Heinichs, Todd: *Cavity qed approaches to quantum information and quantum computing*. A Quantum Information Science and Technology Roadmap, 2004. http://qist.lanl.gov/qcomp_map.shtml.
- [58] Heinzen, D. J., J. J. Childs, J. E. Thomas, and M. S. Feld: *Enhanced and inhibited visible spontaneous emission by atoms in a confocal resonator*. Phys. Rev. Lett., 58:1320–1323, Mar 1987. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1320>.
- [59] Heinzen, D. J. and M. S. Feld: *Vacuum radiative level shift and spontaneous-emission linewidth of an atom in an optical resonator*. Phys. Rev. Lett., 59:2623–2626, Dec 1987. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.2623>.
- [60] Casimir, H. B. G. and D. Polder: *The influence of retardation on the london-van der waals forces*. Phys. Rev., 73:360–372, Feb 1948. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.360>.
- [61] Kuhr, S., S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, and B. Visentin: *Ultrahigh finesse fabry-pérot superconducting resonator*. Applied Physics Letters, 90(16):164101, 2007. <http://link.aip.org/link/?APL/90/164101/1>.
- [62] Brune, M., F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Quantum rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity*. Phys. Rev. Lett., 76:1800–1803, Mar 1996. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.1800>.
- [63] Wiseman, H. M. and G. J. Milburn: *Quantum theory of field-quadrature measurements*. Phys. Rev. A, 47:642–662, Jan 1993. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.47.642>.
- [64] Barenco, Adriano, Charles H. Bennett, Richard Cleve, David P. DiVincenzo, Norman Margolus, *et al.*: *Elementary gates for quantum computation*. Phys. Rev. A, 52:3457, 1995. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9503016>.

- [65] Cormen, T.H., C.E. Leiserson, R.L. Rivest, and C. Stein: *Introduction to Algorithms, Third Edition*. MIT Press, 2009, ISBN 9780262533058. <http://books.google.gr/books?id=h2xRPgAACAAJ>.
- [66] Ettinger, M., P. Hoyer, and E. Knill: *The quantum query complexity of the hidden subgroup problem is polynomial*. arXiv:quant-ph/0401083, January 2004. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0401083>.
- [67] Regev, O.: *Quantum computation and lattice problems*. eprint arXiv:cs/0304005, April 2003. <http://arxiv.org/abs/cs/0304005>.
- [68] Paul, W.: *Electromagnetic traps for charged and neutral particles*. Reviews of Modern Physics, 62:531–540, July 1990. <http://www.qudev.phys.ethz.ch/content/courses/phys4/studentspresentations/iontraps/RMP.pdf>.
- [69] Wineland, D.J., C. Monroe, W.M. Itano, D. Leibfried, B.E. King, et al.: *Experimental issues in coherent quantum state manipulation of trapped atomic ions*. J.Res.Natl.Inst.Stand.Tech., 103:259, 1998. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9710025>.
- [70] Lu, C. Y., D. E. Browne, T. Yang, and J. W. Pan: *Demonstration of a compiled version of shor's quantum factoring algorithm using photonic qubits*. Physical Review Letters, 99(25):250504, December 2007. <http://prl.aps.org/abstract/PRL/v99/i25/e250504>.
- [71] Lanyon, B. P., T. J. Weinhold, N. K. Langford, M. Barbieri, D. F. V. James, A. Gilchrist, and A. G. White: *Experimental demonstration of a compiled version of shor's algorithm with quantum entanglement*. Physical Review Letters, 99(25):250505, December 2007. <http://arxiv.org/abs/0705.1684>.
- [72] Rauschenbeutel, A., P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Controlled entanglement of two field modes in a cavity quantum electrodynamics experiment*. Physical Review A, 64(5):050301, November 2001. <http://pra.aps.org/abstract/PRA/v64/i5/e050301>.
- [73] Brune, M., S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raimond, and N. Zagury: *Quantum nondemolition measurement of small photon numbers by rydberg-atom phase-sensitive detection*. Phys. Rev. Lett., 65:976–979, Aug 1990. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.976>.

- [74] Nogues, G., A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Seeing a single photon without destroying it*. Nature, 400(6741):239–242, July 1999, ISSN 0028-0836. <http://dx.doi.org/10.1038/22275>.
- [75] Zheng, Shi Biao and Guang Can Guo: *Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity qed*. Phys. Rev. Lett., 85:2392–2395, Sep 2000. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.2392>.
- [76] Brune, M., F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Quantum rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity*. Phys. Rev. Lett., 76:1800–1803, Mar 1996. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.1800>.
- [77] Zubairy, M. Suhail, Moochan Kim, and Marlan O. Scully: *Cavity-qed-based quantum phase gate*. Phys. Rev. A, 68:033820, Sep 2003. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.033820>.
- [78] Zoller, P., Th. Beth, D. Binosi, R. Blatt, H. Briegel, D. Bruss, T. Calarco, J. I. Cirac, D. Deutsch, J. Eisert, A. Ekert, C. Fabre, N. Gisin, P. Grangiere, M. Grassl, S. Haroche, A. Imamoglu, A. Karlson, J. Kempe, L. Kouwenhoven, S. Kröll, G. Leuchs, M. Lewenstein, D. Loss, N. Lütkenhaus, S. Massar, J. E. Mooij, M. B. Plenio, E. Polzik, S. Popescu, G. Rempe, A. Sergienko, D. Suter, J. Twamley, G. Wendin, R. Werner, A. Winter, J. Wrachtrup, and A. Zeilinger: *Quantum information processing and communication*. The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics, 36:203–228, 2005, ISSN 1434-6060. <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2005-00251-1>.
- [79] Hauke, Philipp, Fernando M Cucchietti, Luca Tagliacozzo, Ivan Deutsch, and Maciej Lewenstein: *Can one trust quantum simulators?* Reports on Progress in Physics, 75(8):082401, 2012. <http://stacks.iop.org/0034-4885/75/i=8/a=082401>.
- [80] Cirac, J. Ignacio, Paolo Maraner, and Jiannis K. Pachos: *Cold atom simulation of interacting relativistic quantum field theories*. Phys. Rev. Lett., 105:190403, Nov 2010. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.190403>.
- [81] Angelakis, D. G., M. Huo, D. Chang, L. C. Kwek, and V. Korepin: *Mimicking interacting relativistic theories with stationary pulses of light*. ArXiv e-prints, July 2012.

- [82] Jaksch, D., C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller: *Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices*. Physical Review Letters, 81:3108–3111, October 1998. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9805329>.
- [83] Lewenstein, M., A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen, and U. Sen: *Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond*. Advances in Physics, 56:243–379, March 2007. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0606771>.
- [84] Jaksch, D. and P. Zoller: *The cold atom hubbard toolbox*. Annals of Physics, 315(1):52 – 79, 2005, ISSN 0003-4916. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491604001782>, <ce:title>Special Issue</ce:title>.
- [85] Bloch, I., J. Dalibard, and S. Nascimbène: *Quantum simulations with ultracold quantum gases*. Nature Physics, 8:267–276, April 2012. <http://www.nature.com/nphys/journal/v8/n4/full/nphys2259.html>.
- [86] Lanyon, B. P., C. Hempel, D. Nigg, M. Müller, R. Gerritsma, F. Zähringer, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Rambach, G. Kirchmair, M. Hennrich, P. Zoller, R. Blatt, and C. F. Roos: *Universal digital quantum simulation with trapped ions*. Science, 334:57–, October 2011. <http://www.sciencemag.org/content/334/6052/57.abstract>.
- [87] Deng, X. L., D. Porras, and J. I. Cirac: *Effective spin quantum phases in systems of trapped ions*. Phys. Rev. A, 72:063407, Dec 2005. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.063407>.
- [88] Hennessy, K., A. Badolato, M. Winger, D. Gerace, M. Atatüre, S. Gulde, S. Fält, E. L. Hu, and A. Imamoglu: *Quantum nature of a strongly coupled single quantum dot-cavity system*. Nature, 445:896–899, February 2007. <http://www.nature.com/nature/journal/v445/n7130/full/nature05586.html>.
- [89] Blatt, R. and C. F. Roos: *Quantum simulations with trapped ions*. Nature Physics, 8:277–284, April 2012. <http://www.nature.com/nphys/journal/v8/n4/full/nphys2252.html>.
- [90] Somaroo, S., C. H. Tseng, T. F. Havel, R. Laflamme, and D. G. Cory: *Quantum simulations on a quantum computer*. Phys. Rev. Lett., 82:5381–5384, Jun 1999. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.5381>.

- [91] Britton, J. W., B. C. Sawyer, A. C. Keith, C. C. J. Wang, J. K. Freericks, H. Uys, M. J. Biercuk, and J. J. Bollinger: *Engineered two-dimensional ising interactions in a trapped-ion quantum simulator with hundreds of spins*. "Nature", 484:489–492, April 2012. <http://www.nature.com/nature/journal/v484/n7395/full/nature10981.html>.
- [92] Hartmann, M. J., F. G. S. L. Brandao, and M. B. Plenio: *Quantum many-body phenomena in coupled cavity arrays*. ArXiv e-prints, August 2008. <http://arxiv.org/abs/0808.2557>.
- [93] Greentree, A. D., C. Tahan, J. H. Cole, and L. C. L. Hollenberg: *Quantum phase transitions of light*. Nature Physics, 2:856–861, December 2006. <http://www.nature.com/nphys/journal/v2/n12/abs/nphys466.html>.
- [94] Kay, A. and D. G. Angelakis: *Reproducing spin lattice models in strongly coupled atom-cavity systems*. EPL (Europhysics Letters), 84:20001, October 2008. <http://arxiv.org/abs/0802.0488>.
- [95] Cho, Jaeyoon, Dimitris G. Angelakis, and Sougato Bose: *Simulation of high-spin heisenberg models in coupled cavities*. Phys. Rev. A, 78:062338, Dec 2008. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.062338>.
- [96] Carusotto, I., D. Gerace, H. E. Tureci, S. De Liberato, C. Ciuti, and A. Imamoglu: *Fermionized photons in an array of driven dissipative nonlinear cavities*. Phys. Rev. Lett., 103:033601, Jul 2009. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.033601>.
- [97] Tomadin, A., V. Giovannetti, R. Fazio, D. Gerace, I. Carusotto, H. E. Türeci, and A. Imamoglu: *Signatures of the superfluid-insulator phase transition in laser-driven dissipative nonlinear cavity arrays*. Phys. Rev. A, 81:061801, Jun 2010. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.061801>.
- [98] Angelakis, D. G., S. Bose, and S. Mancini: *Steady-state entanglement between hybrid light-matter qubits*. EPL (Europhysics Letters), 85:20007, January 2009. <http://arxiv.org/abs/0711.1830>.
- [99] Angelakis, D. G., L. Dai, and L. C. Kwek: *Coherent control of long-distance steady-state entanglement in lossy resonator arrays*. EPL (Europhysics Letters), 91:10003, July 2010. <http://arxiv.org/abs/0906.2168>.

- [100] Knap, Michael, Enrico Arrigoni, Wolfgang von der Linden, and Jared H. Cole: *Emission characteristics of laser-driven dissipative coupled-cavity systems*. Phys. Rev. A, 83:023821, Feb 2011. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.023821>.
- [101] Nissen, Felix, Sebastian Schmidt, Matteo Biondi, Gianni Blatter, Hakan E. Türeci, and Jonathan Keeling: *Nonequilibrium dynamics of coupled qubit-cavity arrays*. Phys. Rev. Lett., 108:233603, Jun 2012. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.233603>.
- [102] Nunnenkamp, A., J. Koch, and S. M. Girvin: *Synthetic gauge fields and homodyne transmission in Jaynes-Cummings lattices*. New Journal of Physics, 13(9):095008, September 2011. <http://arxiv.org/abs/1105.1817>.
- [103] Umucalilar, R. O. and I. Carusotto: *Artificial gauge field for photons in coupled cavity arrays*. Phys. Rev. A, 84:043804, Oct 2011. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.043804>.
- [104] Grujic, T, S R Clark, D Jaksch, and D G Angelakis: *Non-equilibrium many-body effects in driven nonlinear resonator arrays*. New Journal of Physics, 14(10):103025, 2012. <http://stacks.iop.org/1367-2630/14/i=10/a=103025>.
- [105] Houck, A. A., H. E. Türeci, and J. Koch: *On-chip quantum simulation with superconducting circuits*. Nature Physics, 8:292-299, April 2012. <http://www.nature.com/nphys/journal/v8/n4/full/nphys2251.html>.
- [106] Zoubi, Hashem, Meir Orenstien, and Amiram Ron: *Coupled microcavities with dissipation*. Phys. Rev. A, 62:033801, Aug 2000. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.033801>.
- [107] Haus, H. A., W. P. Huang, and A. W. Snyder: *Coupled-mode formulations*. Opt. Lett., 14(21):1222-1224, Nov 1989. <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-14-21-1222>.
- [108] Ogden, C. D., E. K. Irish, and M. S. Kim: *Dynamics in a coupled-cavity array*. Phys. Rev. A, 78:063805, Dec 2008. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.063805>.
- [109] James, D F and J Jerke: *Effective hamiltonian theory and its applications in quantum information*. Canadian Journal of Physics, 85(6):625-632, 2007. <http://www.nrcresearchpress.com/doi/abs/10.1139/p07-060>.

- [110] Bamba, Motoaki, Atac Imamoglu, Iacopo Carusotto, and Cristiano Ciuti: *Origin of strong photon antibunching in weakly nonlinear photonic molecules*. Phys. Rev. A, 83:021802, Feb 2011. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.021802>.
- [111] Loss, Daniel and David P. DiVincenzo: *Quantum computation with quantum dots*. Phys. Rev. A, 57:120–126, Jan 1998. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.57.120>.
- [112] Johansson, J.R., P.D. Nation, and Franco Nori: *Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems*. Computer Physics Communications, 183(8):1760 – 1772, 2012, ISSN 0010-4655. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465512000835>.
- [113] Mangano, S.: *Mathematica Cookbook*. Oreilly Cookbooks. O'Reilly Media, Incorporated, 2010, ISBN 9780596520991. http://books.google.gr/books?id=BkDxC_OlWisC.

Ευχαριστίες

Στη διάρκεια της ζωής μας γνωρίζουμε πολλούς ανθρώπους. Προσωπικά, ακολουθώ την εξής ομαδοποίηση: τους ανθρώπους που μας ενθαρρύνουν να πάμε «ένα βήμα πιο πέρα» και τους ανθρώπους που προσπαθούν να σταματήσουν οποιαδήποτε πρόοδο βλέπουν να συμβαίνει. Από τον Οκτώβριο του 2010, που εγγράφηκα στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών του Γενικού Τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης, είχα τη δυνατότητα να γνωρίσω ανθρώπους που ανήκουν και στις δύο αυτές κατηγορίες, ωστόσο θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα αυτούς που με ενθάρρυναν να κάνω ένα βήμα παραπάνω αντί να θέτουν εμπόδια. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντά μου *Επικ. Καθ. Δρ. Δημήτρη Αγγελιάκη* για την ψυχραιμία που κατάφερε να εμπνεύσει στη διάρκεια κάποιων ομολογουμένως ατυχών καταστάσεων καθώς για την ευκαιρία που έδωσε σε έναν απλό μεταπτυχιακό φοιτητή να δει τη «*Μεγάλη Εικόνα*» και να αγνοήσει τις τοπικές διαταραχές στην ακαδημαϊκή του πορεία.

Η ενασχόληση με το πεδίο της Κβαντικής Οπτικής και των Κβαντικών Υπολογιστών ήταν κάτι που δεν περίμενα όταν ήρθα στο Πολυτεχνείο Κρήτης, ενώ το να επισκεφθώ το Κέντρο Κβαντικών Τεχνολογιών της Σιγκαπούρης ήταν πέρα από οποιαδήποτε φιλοδοξία μου. Οι τρεις μήνες που πέρασα εκεί απερίσπαστος από τις άσχημες καταστάσεις που βιώνει η Ελλάδα, ήταν ίσως από τους πιο καθοριστικούς παράγοντες για την ολοκλήρωση αυτής της διατριβής στον προγραμματισμένο χρόνο, αλλά και ευκαιρία να γνωρίσω εξέχοντες νέους επιστήμονες όπως τους: *Dr. Changsuk Noh, Dr. Su-Yong Lee, Dr. Amit Rai, Dr. Priyam Das* και τους συγκατοίκους μου *Adriana Marais, Felix Binder* και *Tom Grujic* που βοήθησαν στο να είναι αυτοί οι τρεις μήνες παραγωγικοί και αξέχαστοι.

Θα πρέπει να ευχαριστήσω επίσης τους συναδέλφους μου στο Πολυτεχνείο Κρήτης, *N. Σχετάκη, A. Μπλαζάκη και K. Κουκουτσάκη* για τον ωραίο χρόνο που περάσαμε στη διάρκεια των μαθημάτων του μεταπτυχιακού καθώς και τον *Αναπ. Καθ. Δρ. Σ. Μουσταϊζή*, για την υποστήριξη που παρείχε σε όλους μας όποτε αυτό απαιτήθηκε. Η απόφαση να εγγραφώ στο μεταπτυχιακό του Γενικού Τμήματος, δεν θα είχε γίνει πράξη χωρίς την υποκίνηση των γονιών μου και ιδιαίτερα της μητέρας μου, σε μια ομολογουμένως πολύ δύσκολη περίοδο για την οικογένειά μας. Ήταν αρκετά δύσκολο να μείνω συγκεντρωμένος και ήταν υπομονετικοί μαζί μου όταν

εξαντλούταν η υπομονή μου. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τον πατέρα μου για την έμπνευση που παρείχε (άθελά του) όσον αφορά το πώς να εξηγήσει κανείς Φυσική σε παιδιά και κατ' επέκτασιν σε Φυσικούς που τα έχουν παρατήσει...

Τέλος, θέλω από καρδιάς να ευχαριστήσω τη σύντροφό μου, Ανέτα, για όλη την άνευ όρων στοργή που συνεχίζει να προσφέρει μετά από όλα αυτά τα χρόνια και την ευχάριστη διάθεση που συνεχίζει να έχει ακόμα κι όταν τα πράγματα παίρνουν άσχημη τροπή. Χωρίς την υποστήριξη και ενθάρρυνσή της, αυτή η διατριβή ούτε καν θα είχε αρχίσει.

Μιχάλης Ν. Καλογεράκης

Δεκέμβριος 2012

Implementation of Quantum Search Algorithms in Cavity QED

Michael N. Kalogerakis

Chania, 2013

Implementation of Quantum Search Algorithms in Cavity QED

**Master thesis for the MSc. of Applied and Technological
Physics and Laser Technology, Science Department,
Technical University of Crete**

Chania, Crete 2013

Examining Committee:

Prof. D. Ellinas	Science Department, Technical University of Crete
Assistant Prof. I. Kominis	Physics Department, University of Crete
Assistant Prof. D.G. Angelakis	Science Department, Technical University of Crete (Supervisor)

Copyright ©2013 by Michael N. Kalogerakis

Author email: neo24483 [at] gmail . com

To teachers and students who never lost their persistence

Abstract

Cavity QED systems have been proved to be excellent platforms for the implementation of quantum information processing algorithms. In this thesis we review the major results in this field and conclude by proposing how to implement the Deutsch-Jozsa in a system of two evanescently coupled cavities. In the first part we review the physics of both the ideal and dissipative cases of a two-level-atom coupled to an optical cavity mode. We analyze in detail the corresponding Jaynes-Cummings model and derive the dynamics of the system in the presence of dissipation using both the Master Equation and the Quantum Trajectories approach. We then proceed with a presentation of the Deutsch-Jozsa, Grover and Shor search algorithms and review in detail some early results regarding their implementation using flying Rydberg atoms in open microwave cavities. We extend our study to novel systems by analyzing the quantum dynamics of a system of two evanescently coupled optical cavities, each interacting with atomic emitters. This is done for different regimes of interactions (dispersive, resonant and strongly coupled) using both the Schrödinger and the Master equation approach. We conclude with a proposal for the implementation of Deutsch-Jozsa algorithm in the presence of significant cavity losses and analyze the robustness for different regimes by calculating the fidelity of the basic entangling gate of the algorithm.

Περίληψη

Έχει γίνει αποδεκτό ότι τα συστήματα κοιλοτήτων Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής αποτελούν πολύ καλές πλατφόρμες για την υλοποίηση αλγορίθμων κβαντικής πληροφορίας. Σε αυτή τη διπλωματική διατριβή κάνουμε ανασκόπηση των σημαντικότερων αποτελεσμάτων σε αυτό το ερευνητικό πεδίο και καταλήγουμε προτείνοντας μια μέθοδο υλοποίησης του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa σε ένα σύστημα δύο συζευγμένων κοιλοτήτων. Στο πρώτο μέρος κάνουμε ανασκόπηση της ιδανικής περίπτωσης καθώς και της περίπτωσης με απώλειες για ένα σύστημα ενός ατόμου δύο επιπέδων συζευγμένου με έναν τρόπο ταλάντωσης της οπτικής κοιλοτήτας. Αναλύουμε λεπτομερώς το μοντέλο Jaynes-Cummings και βρίσκουμε τις εξισώσεις της δυναμικής του συστήματος παρουσία απωλειών χρησιμοποιώντας την Master Equation, αλλά και τη Μέθοδο Κβαντικών Τροχιών. Συνεχίζουμε μετέπειτα με την παρουσίαση των κβαντικών αλγορίθμων αναζήτησης Deutsch-Jozsa, Grover και Shor και παρουσιάζουμε αναλυτικά δύο από τις αρχικές προτάσεις που αφορούν την υλοποίησή τους χρησιμοποιώντας ιπτάμενα άτομα Rydberg σε ανοικτές κοιλοτήτες μικροκυμάτων. Επεκτείνουμε τη μελέτη μας αναλύοντας τη δυναμική συμπεριφορά ενός νέου συστήματος δύο συζευγμένων κοιλοτήτων, κάθε μία εκ των οποίων αλληλεπιδρά με άτομα ξεχωριστά. Αυτή η μελέτη γίνεται για διάφορες περιοχές αλληλεπίδρασης (περιοχή αποσυντονισμού, συντονισμού και ισχυρής σύζευξης), χρησιμοποιώντας και την εξίσωση Schrödinger και την Master Equation. Καταλήγουμε, παρουσιάζοντας μια καινούργια πρόταση υλοποίησης του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa και αναλύουμε την αποτελεσματικότητα της υλοποίησής του, παρουσία σημαντικών απωλειών, υπολογίζοντας την πιστότητα (fidelity) της βασικής πύλης εναγκαλισμού του αλγορίθμου.

Contents

Contents	iii
Introduction - Motivation	v
1 Introduction to Cavity Q.E.D.	1
1.1 Quantization of the electromagnetic field	1
1.2 Quantum states of the electromagnetic Field	4
1.2.1 Fock States	5
1.2.2 Coherent States	7
1.2.3 Thermal states	9
1.3 The Jaynes-Cummings model	10
1.3.1 Photon-atom interaction	11
1.3.2 Dressed states approach	20
1.4 Cavity QED experiments	23
1.4.1 Tailoring spontaneous emission rates and atomic energies in confined space	24
1.4.2 Microwave cavities and the strong coupling regime	24
1.5 Cavity QED with lossy cavities	27
1.5.1 The empty cavity case	27
1.5.2 Monte Carlo - Quantum Trajectory method	28
2 Quantum Computation and Algorithms	35
2.1 Quantum Bits and Gates	36
2.1.1 One qubit operations	38
2.1.2 Two qubit operations	39
2.1.3 Three qubit operations	39
2.2 Deutsch-Jozsa algorithm	40
2.3 Grover's search algorithm	43
2.4 Shor's Algorithm	47
2.4.1 The Quantum Fourier Transform	49
2.4.2 Finding the period of a function using QFT	50

3	Implementation of quantum algorithms on cavity QED systems	53
3.1	Grover's search algorithm	54
3.1.1	An alternative realization of the quantum phase gate	58
3.2	Implementation of the quantum Fourier transform	61
4	Implementing quantum gates in coupled cavity arrays	67
4.1	Quantum dynamics in the two coupled cavities model	68
4.2	Analytical treatment	70
4.2.1	Case A: Large intercavity hopping regime	72
4.2.2	Case B: Large Detuning regime	75
4.2.3	Case C: Resonant interaction regime	77
4.3	Quantum Dynamics in a two cavity system with dissipation	79
4.4	A proposal for Deutsch-Jozsa algorithm in a two cavity system . .	81
5	Conclusions and Future work	85
	Appendix A	87
1	Usefull packages for Quantum Optics	87
2	Details on Mathematica code	87
3	Python code used for plots.	89
	Appendix B. Theoretical tools for cavity QED	95
1	Review of the harmonic oscillator	95
2	Schrödinger picture	103
3	Heisenberg picture	104
4	Interaction Picture	106
5	Dissipative processes in cavity QED	108
	References - Bibliography	113
	Acknowledgements	127
	List of Figures	129
	List of Tables	133

Introduction - Motivation

Indisputably, one of the most important scientific fields developed during the 20th century, was the field of Quantum Mechanics [1, 2, 3, 4, 5]. We are endowed with a set of the basic rules that govern our Universe and we have actually managed to teach ourselves how to use these rules in different fields of Science and Technology to construct many of the modern devices of our everyday life; these include the electronical systems of our cars and our mobile phones, to the state-of-the-art super-clusters of computers.

In the early days of Quantum Mechanics, the term "*Gedankenexperimenten*" (thought experiments) was established, in order to describe an idealised situation that could help us understand the problems that emerged. Probably the most famous case of this sort of examples, is the famous "**Schrödinger's cat**".¹ Another famous *Gedanken experiment* regarding the situation of having a **photon in a box**, was used in the famous public correspondence between Niels Bohr and Albert Einstein. In their correspondence, the main argument regards the violation of energy-time uncertainty principle, in the case when a photon that is trapped in a box with a shutter, is allowed to exit the shutter, at a specific time instant.

Interestingly, it was the idea of the photon in a box that gave rise to the modern *Cavity Quantum Electrodynamics (Cavity QED)* [6, 7], which in twist of fate later allowed the first experimental realization of the Schrödinger's cat. It all started by Purcell in 1946[8], in the study of one of the most mysterious effects that came along with the photoelectric effect. The study of the factors that affect the spontaneous emission rate and the quantization of the electromagnetic field [9], opened the road for lasers, masers and a whole new era in Modern Physics, enriching the field of Quantum Optics [10, 11, 12, 13, 14, 15] and offering a solid testbed for the emerging field of Quantum Information and Quantum Computation [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

The primary objective of the current thesis is to give a short introduction on

¹Actually Schrödinger being "shocked" about the possibility of a system being in a superposition of states, trying to reject this scenario, used the example of the cat as "reductio ad absurdum" ie. stating that it is ridiculous to suppose a physical system could be in such a state.

aspects of Cavity QED and demonstrate how those systems can be used in order to implement certain Quantum Algorithms.

In Chapter 1, we describe the quantization of the electromagnetic field and the Jaynes-Cummings model [25, 26], that describes the simplest, ideal, case of light-matter interaction when both the atom and the field are fully quantized. We continue by giving a short description of cavity QED systems following mainly [7] and discussing the primary features of lossy cavity QED system as laid out in [27], [28, 29]. In Chapter 2 we will give the outline of the notion of *Quantum Computation* and describe the class of *search algorithms*, namely Deutsch-Jozsa algorithm [22, 30, 23], Grover's search algorithm [31, 32, 33, 34] and Shor's factoring algorithm [35]. In Chapter 3, we present in detail the implementation of Grover's search algorithm and Shor's factoring algorithm, following the approach of two early papers from M.O. Scully [36] and the Haroche group [37].

In Chapter 4, we briefly touch the novel field of *Coupled Cavity Arrays for quantum information and simulation applications* [21, 38, 39]. After briefly introducing the field, we propose a new protocol on implementing quantum computation in small scale arrays comprised of pairs of coupled resonators. We specifically discuss a case to implement the Deutsch-Jozsa algorithm and study the robustness of the implementation against experimental errors due to the finite lifetime of the photonic excitations in the arrays. This is done using both numerical and analytical techniques.

The present thesis primarily focuses on aspects of microwave QED and its applications on Quantum Information Processing as explored by the Haroche group in ENS in Paris. Equivalently important and thorough work has been performed by other experimental groups working on optical QED, among which, the groups of J. Kimble [40], [41], [42, 43] and D. Meschede [44], [45], [46]. Apart from optical and cavity QED, there have been great advancements regarding the implementation of Quantum Computation in other experimental platforms supplied by ion traps [47, 48, 49], Nuclear Magnetic Resonance [50] and last but not least, from the superconducting circuit community and the Yale and E.T.H. groups, regarding a new kind of experimental demonstration of Jaynes Cummings model, which has led to the establishment of the field of circuit QED [51], [52], [53]. In future work we would like to explore this novel direction.

We would like to add that, during the writing of this thesis, which took place in the period between August 2012 - December 2012, it was announced that *"The Nobel Prize in Physics 2012 is awarded jointly to Serge Haroche and David J. Wineland "for ground-breaking experimental methods that enable measuring and manipulation of individual quantum systems"*.

Chapter 1

Introduction to Cavity Q.E.D.

1.1 Quantization of the electromagnetic field

1

In the simple case of the harmonic oscillator, we describe ideally the case of a particle of mass m moving under action of an harmonic potential in a 1D confined space. Starting from the notion of electromagnetic fields as waves, we will derive the equivalent expression that includes the correspondent quantities in their quantum mechanical form, which is the reason that we refer to this process as the *quantization of the electromagnetic field*. The equations of electromagnetism in free space, read:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.1}$$

where $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, μ_0 and ϵ_0 are the magnetic permeability and electric permittivity of free space and $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$.

Maxwell's equations have the characteristic of *gauge invariance* when no sources are present. This actually enables us to choose a suitable gauge which depends on the field we wish to study. A convenient choice of gauge for problems in quantum optics is the *Coulomb gauge*, in which we substitute both the electric

¹The derivation for the quantization of the EM field, is virtually described in any textbook of quantum mechanics, though we consider the treatments described in [2], [4] and [12] to be quite extensive and didactic.

\vec{E} and magnetic \vec{B} fields by expressions derived from a new vector potential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ as follows:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.3)$$

with the Coulomb gauge condition

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.4)$$

Substituting the expression for \vec{B} from 1.2 into the set of equations 1.1 we find that $\vec{A}(\vec{r}, t)$ satisfies the wave equation :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

Since wave-equation holds, we are able to separate the vector potential into two complex terms:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) + \vec{A}^{(-)}(\vec{r}, t) \quad (1.6)$$

where $\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t)$ contains all amplitudes which vary as $e^{-i\omega t}$ for $\omega > 0$, $\vec{A}^{(-)}(\vec{r}, t)$ contains all amplitudes which vary as $e^{i\omega t}$ and $\vec{A}^{(-)} = \left(\vec{A}^{(+)}\right)^*$

Now, we choose to restrict our discussion to a discrete set of variables rather than the whole continuum, namely, describe the electromagnetic field restricted to a certain definite volume of space and expand the vector potential in terms of a discrete set of orthogonal mode functions:

$$\vec{A}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_k c_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} \quad (1.7)$$

where the Fourier coefficients c_k are constant for a free field. The set of vector mode functions $\vec{u}_k(\vec{r})$ which correspond to the frequency ω_k will satisfy the equation

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2}\right) \vec{u}_k(\vec{r}) = 0 \quad (1.8)$$

provided the volume contains no refracting material. The mode functions are also required to satisfy the transversality condition

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_k(\vec{r}) = 0 \quad (1.9)$$

The mode functions form a complete orthonormal set, which is stated by the expression

$$\int_V \vec{u}_k^*(\vec{r}) \vec{u}_{k'}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{kk'} \quad (1.10)$$

Those mode functions are defined by the boundary conditions of the physical volume under consideration, which will prove to be of crucial importance in what follows. If we consider the plane wave mode functions appropriate to a cubical volume of side L , we may write them as:

$$\vec{u}_k(\vec{r}) = L^{-\frac{3}{2}} \hat{e}^{(\lambda)} \exp \left[i \vec{k} \cdot \vec{r} \right] \quad (1.11)$$

where $\hat{e}^{(\lambda)}$ is the unit polarization vector. The mode index k describes several discrete variables, the polarization index ($\lambda = 1, 2$) and the three Cartesian components of the propagation vector \vec{k} take the values

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.12)$$

Regarding the transversality condition 1.9, the polarization vector $\hat{e}^{(\lambda)}$ is required to be perpendicular to \vec{k} , so we may rewrite the vector potential in the form:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0}} \left[a_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t} \right] \quad (1.13)$$

The corresponding form for the electric field now becomes:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0}} \left[a_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t} \right] \quad (1.14)$$

In classical electromagnetic theory these Fourier amplitudes are complex numbers. Since photons are bosons, i.e. they are ruled by the commutator relations that are described in the 1D harmonic oscillator, it is easy to choose \hat{a}_k and \hat{a}_k^\dagger to be mutually adjoint operators.

The dynamical behaviour of the electric-field amplitudes may then be described by an ensemble of independent harmonic oscillators obeying the boson commutation relations:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (1.15)$$

The quantum states of each mode may now be discussed independently of one another. The state in each mode may be described by a state vector $|\Psi\rangle_k$ of the Hilbert state appropriate to that mode. The states of the entire field are then defined as the tensor product space of the Hilbert spaces for all the modes.

The Hamiltonian for the electromagnetic field is given by [15]

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2 \right) d\vec{r} \quad (1.16)$$

Using the expression 1.14 for \vec{E} and the equivalent expression for \vec{H} and making use of the transversality and orthonormality conditions, the Hamiltonian can be reduced to the form

$$H = \sum_k \hbar \omega_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \frac{1}{2} \right) \quad (1.17)$$

Therefore we have argued that the energy of the electromagnetic field is nothing more than the sum of the number of photons in each mode, plus $\frac{1}{2} \hbar \omega_k$, representing the energy of the vacuum fluctuations in each mode.

Before getting an insight into the applications of the above procedure, it is useful to give the relations for the so-called *field quadratures*. As it is quite easy to show, the canonical variables \hat{X}_1 and \hat{X}_2 represent the canonical position and momentum respectively.

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{X}_2 &= i\sqrt{2\hbar\omega} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Using the quadratures and considering a single mode plane wave we may write the expression for the electric field as:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} \varepsilon_k \left[\hat{X}_1 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - \hat{X}_2 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \right] \quad (1.19)$$

The canonical variables \hat{X}_1 and \hat{X}_2 are the amplitudes of the quadratures into which the EM field can be decomposed.

1.2 Quantum states of the electromagnetic Field

The quantization of the electromagnetic field, namely the explicit expression of the Hamiltonian of the field in terms of operators, gives rise to the exploration of the eigenvalues of the Hamiltonian, regarding the energy levels and the respective wave functions.

1.2.1 Fock States

The Hamiltonian 1.17 has the eigenvalues $\hbar\omega_k (n_k + \frac{1}{2})$ where n_k is a natural number. The eigenstates are written as $|n_k\rangle$ and are known as *number or Fock states*. They are eigenstates of the number operator $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |n_k\rangle = n_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |n_k\rangle \quad (1.20)$$

The ground state of the harmonic oscillator in which we usually refer to as *vacuum state* is defined by

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0 = |0\rangle \hat{a}_k^\dagger \quad (1.21)$$

which means that the expectation values of creation and annihilation operators vanish at this state.

Acting the Hamiltonian that we previously derived on the vacuum state, we obtain the relation:

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k \quad (1.22)$$

The above equation is quite intriguing. There is no explicit upper bound to the frequencies in the sum over the electromagnetic field modes, therefore the energy of the ground state is infinite. This infinite value of the zero-point energy (ZPE) is not the only case of "*peculiar*" infinities in quantum electrodynamics. The renormalization procedure manages to deal with most of these cases. In fact, the vacuum energy and fluctuations is responsible for a big variety of observable effects, like *Casimir effect* and *Lamb shift*. In modern gauge field theory, the notion of "*Fermi-sea*", describing the vacuum as an entity which is everything than empty, with millions of particles being created and annihilated at the same time, describes exactly the point made out by equation 1.22. Another important detail that should be noted is the fact that the vacuum state, like all stationary states of the field, is an eigenstate of the Hamiltonian but not the electric and magnetic field operators. In the vacuum state therefore the electric and magnetic fields do not have definite values. We may easily calculate the mean value for electric and magnetic field for the vacuum state to be zero, but they do not have a definite value. Actually, they fluctuate about their mean values of zero for the case of a single mode of the field. Extensive discussion on the issues arising from the strange properties of the vacuum state may be found in the books [13] and [10]. Regarding the names we used for operators \hat{a} and \hat{a}^\dagger now it is clear that given a Fock state $|n\rangle$ with n photons, creation operator "adds" a photon leading to the state $|n+1\rangle$, while annihilation operator "removes" a photon, leading to

the state $|n - 1\rangle$, with the respective normalization constants:

$$\hat{a}_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle, \quad \hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle \quad (1.23)$$

Starting from the vacuum state, it is obvious that in order to get the system into the state $|n_k\rangle$, we should act the creation operator n times, therefore:

$$|n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle, \quad n_k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

The Fock states are orthonormal and complete, which is stated by the relations:

$$\langle n_k | m_k \rangle = \delta_{nm} \quad (1.25)$$

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle \langle n_k| = 1 \quad (1.26)$$

While the number states form a useful representation for high-energy photons, e.g. γ -rays where the number of photons is very small, they are not the most suitable representation for optical fields where the total number of photons is large. Moreover, though they can be produced experimentally, e.g. when an atom interacts with an electromagnetic field in a high quality optical resonator (cavity) and emits a single photon, it is not possible to create many photons in the very same cavity. We usually say that *Fock states are the states in which the quantum character manifests more than in every other representation of light*.

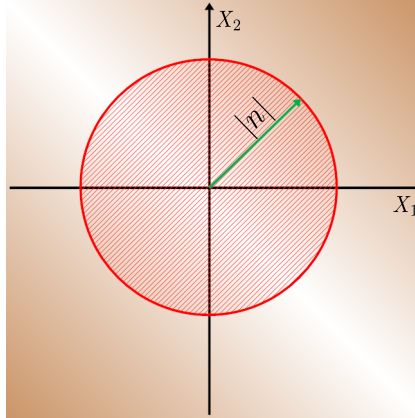


Figure 1.1: Optical phase space representation for a Fock state.

In the optical phase space representation, using as axes the canonical coordinates in natural units, we are able to visualize the properties of the Fock

states. Since canonical coordinates, as they were defined in equations 1.18 do not commute, we say that the system *is not well localized in optical phase space*. Moreover, one is possible to verify that the Fock states maximize the phase uncertainty, so that $\Delta\phi = 2\pi$.

1.2.2 Coherent States

Coherent states are superpositions of Fock states $|n\rangle$. They are denoted by $|\alpha\rangle$ and we need to be careful when dealing with the action of creation and annihilation operators on them. One could consider different possible superpositions but the coherent state is of particular importance in practical applications. Coherent states describe with great accuracy, states of CW monochromatic lasers above threshold and wave packets formed by coherent states describe very well states of pulsed lasers.

Probably the most practical way of introducing coherent states is the one deduced by Glauber in [54] and Sudarshan in [55] which also justifies the fact that they are also called *Glauber-Sudarshan states*. We will consider a single mode, so that we will get rid of index k . First of all, we need to define the *displacement operator*:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})} \quad (1.27)$$

The *Baker-Hausdorff formula* for two operators \hat{A} and \hat{B} such that $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, reads:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} \quad (1.28)$$

Using the above formula for the expression we introduced for the displacement operator, we obtain:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}} \quad (1.29)$$

The proof of the Baker-Hausdorff formula employs the following identity, valid for arbitrary operators:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = B + \frac{[\hat{A}, B]}{1!} + \frac{[\hat{A}, [\hat{A}, B]]}{2!} + \dots \quad (1.30)$$

Using the above identity we derive:

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) &= \hat{a} + \alpha \\ \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) &= \hat{a}^\dagger + \alpha^* \end{aligned} \quad (1.31)$$

The above expressions explain why $\hat{D}(\alpha)$ is called displacement operator. We are now in position to define *coherent state* $|\alpha\rangle$, as displaced vacuum state $|0\rangle$.

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad (1.32)$$

Another approach on defining the coherent states relies on the following property:

$$\begin{aligned}
 \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} |\alpha\rangle &= \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) |0\rangle \\
 &= \alpha |0\rangle \\
 &= \alpha \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\alpha) |0\rangle \\
 &= \alpha \hat{D}^\dagger(\alpha) |\alpha\rangle
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

We thus, conclude the equations:

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \tag{1.34}$$

$$\langle\alpha| \hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha| \tag{1.35}$$

The above equations mean that coherent states are eigenstates of the annihilation operator. Since operator \hat{a} is not hermitian, *its eigenvalues are complex*. Contrary to the Fock states that contain finite and fixed number of photons, coherent states are superpositions of Fock states with arbitrary photon numbers. To prove this property, we will make use of the fact that $|n\rangle \hat{a} = \sqrt{n+1} \langle n+1|\alpha\rangle = \alpha \langle n|\alpha\rangle$ and equation 1.34, which leads us to:

$$\begin{aligned}
 \langle n|\hat{a}|\alpha\rangle &= \sqrt{n+1} \langle n+1|\alpha\rangle = \alpha \langle n|\alpha\rangle \Rightarrow \\
 \langle n|\alpha\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \langle n-1|\alpha\rangle \Rightarrow \\
 \langle n|\alpha\rangle &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Using the equation 1.29, the expansion of the exponential and the property $\hat{a}|0\rangle = 0$, we get the relation:

$$\langle 0|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \tag{1.37}$$

Therefore the coherent states have the following Fock-states representation:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{1.38}$$

Supposing we want to calculate the probability of having n photons, it is easy to show that this probability follows the poissonian distribution:

$$p_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \exp[-|\alpha|^2] \tag{1.39}$$

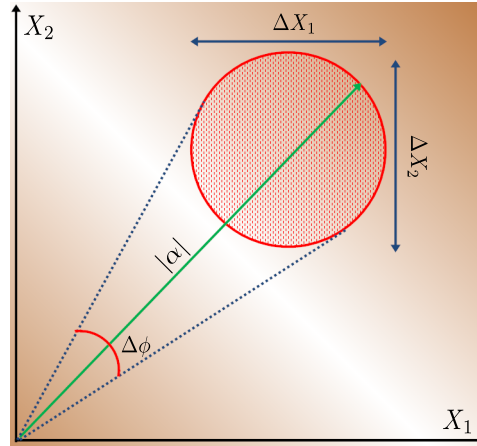


Figure 1.2: Optical phase space representation for a coherent state.

In order to obtain the mean number of photons we may use the number operator, therefore we obtain:

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha^* \langle \alpha | \alpha | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha \langle \alpha | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (1.40)$$

Regarding the orthogonality of coherent states, let's suppose we have two coherent states, namely α and β . Their scalar product is

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle 0 | \hat{D}^\dagger(\beta) \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha \beta^* \right] \quad (1.41)$$

This means that coherent states are not orthogonal, therefore we may calculate that the state overlap is:

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = \exp [-|\alpha - \beta|^2] \quad (1.42)$$

1.2.3 Thermal states

Fock states and coherent states are pure states, in the sense that they are adequately described by their state vectors and their density matrix ρ which is defined by the equation:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.43)$$

has the property that $\rho^2 = \rho$, which denotes that they are indeed pure states. A statistical mixture can be represented only by its *density matrix*. The typical example of a *mixed state* is the case of the so-called *thermal states*. Introducing the notion of thermal states, which correspond very well to the states of radiating

black body, one is able to describe adequately thermal light, i.e. the light that is unavoidably present due to the black-body radiation. Recalling the partition function Z from statistical physics and defining $\beta = \frac{1}{k_B T}$, we may write:

$$\rho \equiv \frac{e^{-\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}}}{Z} = (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) e^{-\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}} \quad (1.44)$$

The mean number of photons in such state is defined by

$$\bar{n} = (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta \hbar \omega n} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \quad (1.45)$$

therefore, we are able to rewrite ρ as:

$$\rho = \frac{1}{\bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \quad (1.46)$$

The photon number distribution for a thermal state is given by the relation

$$p_n = \frac{1}{\bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n \quad (1.47)$$

which means that their distribution is geometric. Another important characteristic of thermal states, that makes clear the fact that they are chaotic, is the order of the variance of the number of photons, which signifies the fluctuation of the number of photons in a thermal state.

$$(\Delta n)^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2 \quad (1.48)$$

The calculation for $\overline{n^2}$ gives us:

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2 \bar{n}^2}{\bar{n} + 1} \right)^{n+1} = \frac{1}{(\bar{n} + 1)} x \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big|_{x=\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}} = 2\bar{n}^2 + \bar{n} \quad (1.49)$$

Therefore we find that indeed the variance of the number of photons in a thermal state is of the order of the mean value, which signifies very strong fluctuations, since

$$(\Delta n) = \bar{n}^2 + \bar{n} \quad (1.50)$$

1.3 The Jaynes-Cummings model

The simplest case of light-matter interaction is the case of a two-level atom interacting with a single mode of the quantized field. In the following, we discuss the basic mathematical techniques that are used to derive the fully quantized version of the field-matter interaction model, the Jaynes-Cummings model.

1.3.1 Photon-atom interaction

The fully quantized version of the Rabi model, which may be found analytically presented in [11], considers a two-level atom with states $|g\rangle$ for the ground state and $|e\rangle$ for the excited state, interacting with a single mode field of the form:

$$\hat{E} = \vec{e} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \cdot (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \quad (1.51)$$

With \vec{e} we denote the arbitrary directioned polarization vector. Denoting with \hat{d} the dipole moment operator, the atom-field Hamiltonian may be written as:

$$\hat{H} = -\hat{d} \cdot \hat{E} \quad (1.52)$$

Setting $g = -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \cdot \sin(kz)$, then the Hamiltonian may be written in the form:

$$\hat{H}^{(I)} = \hat{d}g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (1.53)$$

It should be pointed out that g is a number, while $|g\rangle$ is a state of the system! It will prove useful for what follows to define at this point the operators describing the atomic transitions. Since we are talking for a two-level atom there should be an operator describing the transition of the atom from state $|g\rangle$ to state $|e\rangle$, which we denote as $\hat{\sigma}_+$ and from state $|e\rangle$ to $|g\rangle$, which will be denoted as $\hat{\sigma}_-$. Therefore we set:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_+ &= |e\rangle \langle g| \\ \hat{\sigma}_- &= |g\rangle \langle e| \\ \hat{\sigma}_3 &= |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| \end{aligned} \quad (1.54)$$

Operator $\hat{\sigma}_3$ is called *atomic inversion operator* and its average value measures the atomic population inversion $W(t)$ as its name implies. The operators described in 1.54 obey the rules of Pauli matrices algebra, therefore the following commutation relations hold and this can be easily verified setting $|g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

and $|e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ or by just using their definition as it is described in 1.54.

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] &= \hat{\sigma}_3 \\ [\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_\pm] &= 2\hat{\sigma}_\pm \end{aligned} \quad (1.55)$$

The only non-zero elements of the dipole moment operator are non-zero, since $\langle e | \hat{d} | e \rangle = \langle g | \hat{d} | g \rangle = 0$, therefore we can show that

$$\hat{d} = d |g\rangle \langle e| + d^* |e\rangle \langle g| = d\hat{\sigma}_- + d^*\hat{\sigma}_+ = d(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+) \quad (1.56)$$

where we have set $\langle e|\hat{d}|g\rangle = d$ and we supposed that d is a real number. Thus, setting $\lambda = \frac{dg}{\hbar}$, the Hamiltonian may be written in the form:

$$\hat{H}^{(I)} = \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (1.57)$$

If we define as a zero-energy level the middle between the energy levels as in figure 1.3 then the Hamiltonian of the free atom may be written as:

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}(E_e - E_g)\hat{\sigma}_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 \quad (1.58)$$

where ω_0 denotes the atomic transition frequency (also denoted with ω_{eg} in many textbooks). The Hamiltonian of the free field after changing the energy zero point

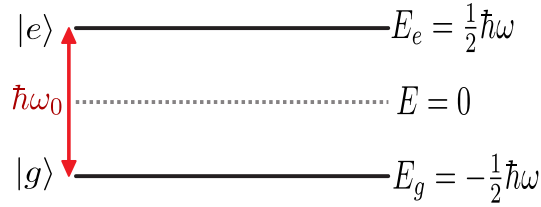


Figure 1.3: Atom energy levels after setting the zero energy level in the middle of the two levels E_g and E_e . The atomic transition frequency is denoted with ω_0

level, may be written as:

$$\hat{H}_F = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (1.59)$$

The total Hamiltonian that describes the interaction of the two-level atom with the single mode electromagnetic field, takes the form:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}^{(I)} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (1.60)$$

In the case of the free field, as it is known, the time evolution of the creation and annihilation operators is described by the relations

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t} \quad (1.61)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t} \quad (1.62)$$

The time evolution for the raising and lowering operators of the atom are:

$$\hat{\sigma}_\pm(t) = \hat{\sigma}_\pm(0)e^{\pm i\omega_0 t} \quad (1.63)$$

Considering the time evolution of the total Hamiltonian 1.60 of the system, we need to take under consideration the following proportions:

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_+ \hat{a} &\sim e^{i(\omega_0 - \omega)t} \\
 \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger &\sim e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \\
 \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger &\sim e^{i(\omega_0 + \omega)t} \\
 \hat{\sigma}_- \hat{a} &\sim e^{-i(\omega_0 + \omega)t}
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

Supposing that $\omega_0 \simeq \omega$ which in fact means that the frequency of the single-mode field is almost equal to the eigen-frequency of the atom, the last two terms do not conserve energy! The term $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ corresponds to the emission of a photon while an atom raises from its ground state to the excited, while the term $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ describes the absorption of a photon while the atom transits from its excited state to the ground state. Taking under consideration the Rotating Wave Approximation, the quantities that are proportionate to the terms $\omega_0 + \omega$ are equal to 0 since they oscillate much faster than the terms with the quantity $\omega_0 - \omega$, therefore the Hamiltonian takes the form:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_3 + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \tag{1.65}$$

In literature, the equation 1.65 is referred to as *Jaynes-Cummings model*. The original paper was published in 1963 [25], while an exquisite topical review may be found in [26]. Having obtained the Hamiltonian, what remains to be done is to study the dynamics of the system. First of all, we will define two constants of motion, \hat{P}_e which in fact counts the electrons that are involved in the process of the interaction and \hat{N}_e which is the number of excitations. Those constants are defined by the relation:

$$\hat{P}_E = |e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g| = 1, \quad [H, P_E] = 0 \tag{1.66}$$

$$\hat{N}_e = \hat{a}^\dagger \hat{a} + |e\rangle \langle e|, \quad [\hat{H}, \hat{N}_e] = 0 \tag{1.67}$$

Looking into equation 1.65 we observe that we can split the Hamiltonian \hat{H} it into two commuting parts,

$$\hat{H}_I = \hbar \omega \hat{N}_e + \hbar \left(\frac{\omega_0}{2} - \omega \right) \hat{P}_e \tag{1.68}$$

$$\hat{H}_{II} = -\hbar \Delta + \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \tag{1.69}$$

so that the for the two terms holds the relation $[\hat{H}_I, \hat{H}_{II}] = 0$. The first term contributes only some phase terms, while the second terms contains the dynamics of the problem. The quantity $\Delta = \omega_0 - \omega$ is called *detuning* and obviously signifies the difference between the frequency of the single mode field and the eigenfrequency of the two-level atom.

Jaynes Cummings model in the resonant case

Supposing we have a system having initially the atom in its excited state $|e\rangle$ and the field in the state $|n\rangle$, so this initial state may be written as $|i\rangle = |e\rangle|n\rangle$ and the initial energy is $E_i = \frac{1}{2}\hbar\omega + n\hbar\omega$. State $|i\rangle$ is coupled to the state $|f\rangle = |g\rangle|n+1\rangle$, since we supposed there are only two atomic levels. The final state $|f\rangle$ has energy $E_f = -\frac{1}{2}\hbar\omega + (n+1)\hbar\omega$ and it is obvious (as it was expected) that the two states have equal energies. We want to obtain an equation describing explicitly the time-dependence of this system, so we will write down the state vector and solve the Schrödinger equation. The state vector $|\psi(t)\rangle$ is

$$|\psi(t)\rangle = C_i(t)|i\rangle + C_f(t)|f\rangle \quad (1.70)$$

where $C_i(0) = 1$ since the atom at $t = 0$ is in the initial state and $C_f(0) = 0$. The use of the \hat{H}_{II} term of the Hamiltonian 1.69 in the Schrödinger equation reads:

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_{II} |\psi(t)\rangle \Leftrightarrow \quad (1.71)$$

Therefore we end up with the system of differential equations

$$\begin{aligned} \dot{C}_i &= -i\lambda\sqrt{n+1}C_f \\ \dot{C}_f &= -i\lambda\sqrt{n+1}C_i \end{aligned} \quad (1.72)$$

If we eliminate C_f we obtain the equation:

$$\ddot{C}_i + \lambda^2(n+1)C_i = 0 \quad (1.73)$$

and by substitution in the system of differential equations we find that

$$C_f(t) = -i \sin(\lambda t \sqrt{n+1}) \quad (1.74)$$

Therefore the solution of the problem is:

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) |e\rangle |n\rangle - i \sin(\lambda t \sqrt{n+1}) |g\rangle |n+1\rangle \quad (1.75)$$

Therefore, the probability of finding our system in state $|i\rangle$ is:

$$P_i(t) = |C_i(t)|^2 = \cos^2(\lambda t \sqrt{n+1}) \quad (1.76)$$

while the probability of finding the system in state $|f\rangle$ is:

$$P_f(t) = |C_f(t)|^2 = \sin^2(\lambda t \sqrt{n+1}) \quad (1.77)$$

The atomic inversion is calculated as

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_3 | \psi(t) \rangle \\
 &= P_i(t) - P_f(t) \\
 &= \cos(2\lambda t \sqrt{n+1})
 \end{aligned} \tag{1.78}$$

We are in position to define the quantum electrodynamic analogue of Rabi frequency, as $\Omega(n) = 2\lambda\sqrt{n+1}$, thus the atomic inversion may be written in the form:

$$W(t) = \cos[\Omega(n)t] \tag{1.79}$$

As it is clear from both equation 1.79 and figure 1.4, the atomic inversion for a

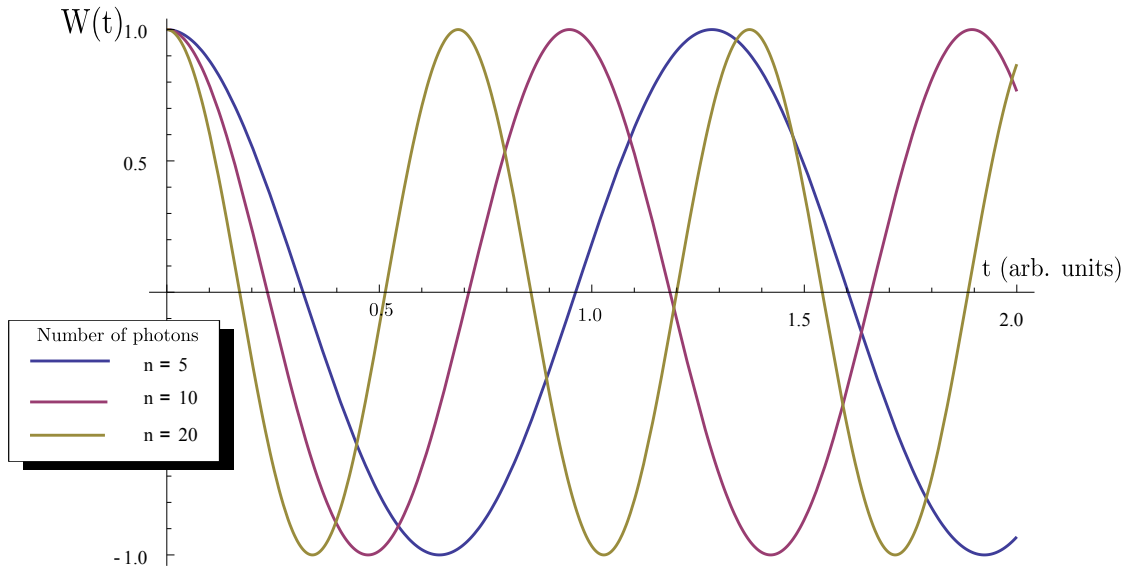


Figure 1.4: Atomic inversion for number states with different number of n

field that is initially in a number state is periodical, just like in the semiclassical case of Rabi model. Though, there are some striking differences. In the quantum electrodynamic case, there are Rabi oscillations even for the case when $n = 0$ is the vacuum state. Those are called vacuum Rabi oscillations and do not have a classical analogue. They are arising from the spontaneous absorption and re-emission of a photon, an effect that originates from the Purcell effect [8] and may be observed in high Q cavities sustaining those fields as we will see later. It may be counter-intuitive the fact that number states, the more quantum states of light manifestate this almost classical behaviour. In fact we would expect this kind of periodicity to be present when having initially a coherent field. Examining this case, let's suppose that the atom is initially in a superposition of its ground

and excited state, thus:

$$|\psi(0)\rangle_{atom} = C_g |g\rangle + C_e |e\rangle \quad (1.80)$$

If the field is in a superposition of number states

$$|\psi(0)\rangle_{field} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (1.81)$$

then we may write down the initial state of the system as:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle_{atom} \otimes |\psi(0)\rangle_{field} \quad (1.82)$$

The solution of Schrödinger equation in this case yields:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \{ & [C_e C_n \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) - i C_g C_{n+1} \sin(\lambda t \sqrt{n+1})] |e\rangle + \\ & + [-i C_e C_{n-1} \sin(\lambda t \sqrt{n}) + C_g C_n (\cos \lambda t \sqrt{n})] |g\rangle \} |n\rangle \end{aligned} \quad (1.83)$$

In general, this is an entangled state. For the case that the atom is initially in the excited state where $C_e = 1$ and $C_g = 0$ we may write down the solution as:

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_g(t)\rangle |g\rangle + |\psi_e(t)\rangle |e\rangle \quad (1.84)$$

where $|\psi_g(t)\rangle$ and $|\psi_e(t)\rangle$ are the field components that are given by the relations:

$$\begin{aligned} |\psi_g(t)\rangle &= -i \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(\lambda t \sqrt{n+1}) |n+1\rangle, \\ |\psi_e(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) |n\rangle \end{aligned} \quad (1.85)$$

Now, the atomic inversion is

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_3 | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \psi_e(t) | \psi_e(t) \rangle - \langle \psi_g(t) | \psi_g(t) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}) \end{aligned} \quad (1.86)$$

and supposing we have a *coherent state*, so that $C_n = e^{-\frac{|a|^2}{2}} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$, the inversion finally becomes

$$W(t) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}) \quad (1.87)$$

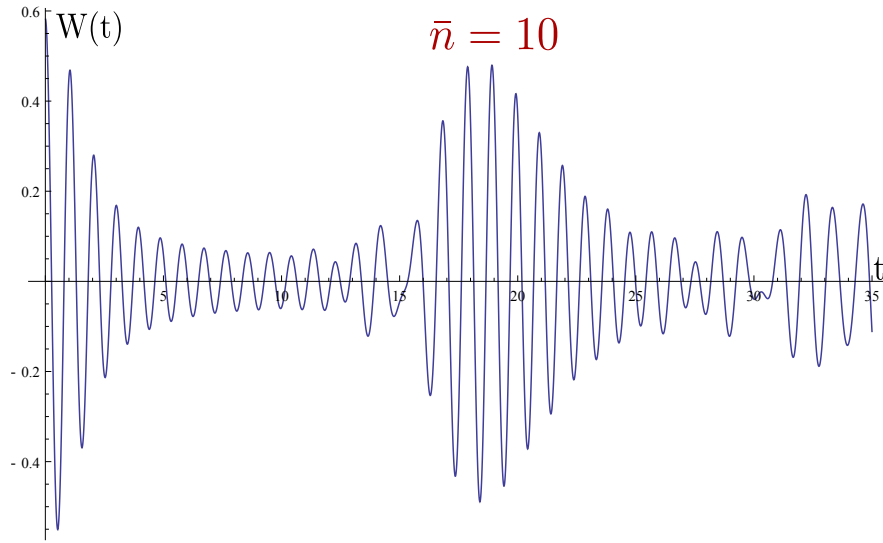


Figure 1.5: Atomic inversion for $\bar{n} = 10$

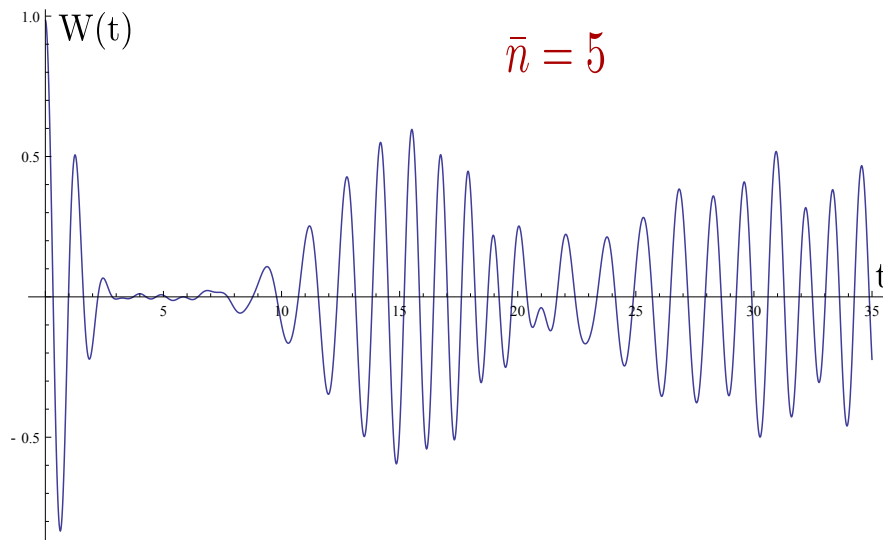


Figure 1.6: Atomic inversion for $\bar{n} = 5$

The difference from 1.79 becomes obvious if we plot 1.87, which is done in figures 1.5 and 1.6. First of all we observe that Rabi oscillations are collapsing and reviving, though they do not fully recover to the initial amplitude. Using bigger time intervals it is possible to observe this sequence of collapses and revivals, with the revivals becoming more and more indistinguishable as time increases. This is probably the main difference of the Jaynes-Cummings model with the semiclassical Rabi model. In order to explain this difference we should find an

expression for the collapse. The average number of photons is $\bar{n} = |\alpha|^2$, thus the dominant Rabi frequency is

$$\Omega(\bar{n}) = 2\lambda\sqrt{\bar{n} + 1} \approx 2\lambda\sqrt{\bar{n}}, \quad \bar{n} \gg 1 \quad (1.88)$$

Though, there will be a spectrum of secondary frequencies as a result of the width of probabilities $|C_n|^2$ around \bar{n} , in the region $\bar{n} + \Delta n$, for example the frequencies in the region from $\Omega(\bar{n} - \Delta n)$ to $\Omega(\bar{n} + \Delta n)$. The collapse time t_c may be approximated by the energy-time uncertainty relation:

$$t_c[\Omega(\bar{n} + \Delta n) - \Omega(\bar{n} - \Delta n)] \simeq 1 \quad (1.89)$$

where the width of frequencies is responsible for the phase difference in Rabi oscillations. For a coherent state we know that $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$, therefore:

$$\begin{aligned} \Omega(\bar{n} \pm \sqrt{\bar{n}}) &\simeq 2\lambda\sqrt{\bar{n} \pm \sqrt{\bar{n}}} \\ &= 2\lambda\sqrt{\bar{n}} \left(1 \pm \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}\right) \\ &= 2\lambda\sqrt{\bar{n}} \pm \lambda \end{aligned} \quad (1.90)$$

So, we may obtain that $t_c = \frac{1}{2\lambda}$, which is a quantity that doesn't depend on the average photon number. A more rigorous estimation [11] of the collapse time gives us the expression

$$t_c = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \quad (1.91)$$

Regarding the revival time, with a similar procedure we find it to be

$$t_R \simeq k\sqrt{\frac{2\pi\bar{n}}{\lambda}} \quad (1.92)$$

How to create a Schrödinger cat: The dispersive regime.

We define the dispersive regime as the set of cavity frequencies that satisfy the requirement:

$$\Delta = (\omega - \omega_0), \quad \hbar|\Delta| \gg \lambda \quad (1.93)$$

When the detuning is very large compared to the coupling constant, the coupling between the atom and the field cannot induce transitions, but still the coupling will renormalize the energies of the system. Doing perturbation theory in the parameter λ/Δ we can verify that the effective dispersive Hamiltonian is:

$$\hat{H}_{disp} = -\frac{1}{2} \left(\hbar\omega_0 + \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta} \right) \hat{\sigma}_z + \left(\hbar\omega - \frac{\lambda^2}{\hbar\Delta} \hat{\sigma}_z \right) \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.94)$$

This expression points out the fact that the effective cavity frequency now depends on the atom state and equivalently the atomic energy splitting depends on the number of photons inside the cavity. The term proportional to $(\hat{\sigma}_z \hat{a}^\dagger \hat{a})$ is referred to in literature as **ac Stark shift**, while the vacuum shift of the atomic energy splitting $(\hat{\sigma}_z \lambda^2 / \hbar \Delta)$ is called the Lamb shift.

Another approach on dealing with the dispersive regime, is returning to the term of relation 1.69 that contains the dynamics of the problem and take the effective Hamiltonian.

$$\hat{H}_{eff} = \hbar \chi (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \quad (1.95)$$

where $\chi = \frac{\lambda^2}{\Delta}$. Supposing the initial state of the system is a Fock state,

$$|\psi(0)\rangle = |g\rangle|n\rangle \quad (1.96)$$

the time-evolution of the system leads us to the equation

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iH_{eff}t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = e^{i\chi nt} |g\rangle|n\rangle \quad (1.97)$$

We therefore obtain a phase factor that cannot be measured or give us any more information. Supposing that instead of a Fock state we have a coherent state $|\alpha\rangle$, the time evolution of the system will lead to the equation

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\chi t} |e\rangle |\alpha e^{-i\chi t}\rangle \quad (1.98)$$

We see that in the case of the field being a coherent state, we have the amplitude of the system state rotated in the phase space by the angle χt , while the direction of the state vector depends on the atom state $|e\rangle$. Supposing now that our atom is prepared in a superposition of states $|g\rangle$ and $|e\rangle$, so that

$$|\psi_{atom}\rangle = \frac{|g\rangle + e^{i\phi}|e\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.99)$$

the initial state of the atom becomes

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_{atom}\rangle |\alpha\rangle \quad (1.100)$$

The time evolution of this version of the system yields:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{H_{eff}t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle |\alpha e^{i\chi t}\rangle + e^{-i(\chi t - \phi)} |e\rangle |\alpha e^{-i\chi t}\rangle) \quad (1.101)$$

The above equation clearly states that the time evolution in the far off-resonant case leads to an entanglement between the atom and the field. Choosing time to be $\chi t = \frac{\pi}{2}$ (in which we usually refer to as a $\frac{\pi}{2}$ pulse) we find that:

$$\left| \psi \left(\frac{\pi}{2\chi} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle |i\alpha\rangle - ie^{i\phi} |e\rangle |-i\alpha\rangle) \quad (1.102)$$

The states $|g\rangle|i\alpha\rangle$ and $|-i\alpha\rangle$ are separated by 180° in the phase space and they are called *maximally distinguishable states*. The magnitude of $|\alpha|$ defines whether they are macroscopically or mesoscopically distinguishable. The above process is used to prepare *Schrödinger cat states*. Another configuration that is widely used in experiments involves another energy level of the atom that is *far* from the levels $|e\rangle$ and $|g\rangle$, so that $E_f \ll E_g$, which let us suppose it is $|f\rangle$ and that the transition $|f\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ is not supported in the experimental setup. This property doesn't allow the time evolution of the state $|f\rangle|\alpha\rangle$, so if we prepare the atom in a superposition of $|f\rangle$ and $|g\rangle$, this will lead to the time-evolution of the term containing the term $|g\rangle$ and will just contribute a phase factor ϕ . The analytical time evolution of this configuration yields:

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_{\text{atom}}\rangle|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{time evolution}} |\Psi(t)\rangle = (|g\rangle|\alpha e^{i\chi t}\rangle + e^{i\phi}|f\rangle|\alpha\rangle) \quad (1.103)$$

Setting the interaction time to be such that $\chi t = \frac{\pi}{2}$ we obtain:

$$\left| \psi \left(\frac{\pi}{2\chi} \right) \right\rangle = \frac{1}{2} (|g\rangle|-\alpha\rangle + e^{i\phi}|f\rangle|\alpha\rangle) \quad (1.104)$$

which is another way to obtain a *Schrödinger cat state*.

1.3.2 Dressed states approach

There is a wide variety of ways to obtain the solution of the Jaynes-Cummings model and getting an insight on its importance to light-matter interaction. Solving the time-dependent Schrödinger equation is not the only one. As we previously discussed, during the interaction of a two-level atom with a single-mode field there are two possible states of the system, ie. $|g\rangle|n+1\rangle$ and $|e\rangle|n\rangle$. We may use these states, also called *bare states* since they don't include an explicit limitation on the photon number as a *basis* to solve the dynamics of the problem in a more subtle manner. The fact that we are talking about states of an atom coupled to a field through the Jaynes-Cummings Hamiltonian, led to the term *dressed states of the atom or Jaynes-Cummings doublet*. The reason for introducing a new basis is the fact that through this process we obtain an expression that contains in simple terms, the eigenstates of the system. We start from the bare states of the system:

$$\begin{aligned} |\psi_{1n}\rangle &= |e\rangle|n\rangle \\ |\psi_{2n}\rangle &= |g\rangle|n+1\rangle \end{aligned} \quad (1.105)$$

Those states are orthogonal and writing down the Hamiltonian 1.65 matrix elements $\hat{H}_{ij}^{(n)} = \langle \psi_{in} | \hat{H} | \psi_{jn} \rangle$, we obtain:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{11}^{(n)} &= \hbar \left[n\omega + \frac{1}{2}\omega_0 \right] \\ \hat{H}_{22}^{(n)} &= \hbar \left[(n+1)\omega - \frac{1}{2}\omega_0 \right] \\ \hat{H}_{12}^{(n)} &= \hbar\lambda\sqrt{n+1} = \hat{H}_{21}^{(n)}\end{aligned}\tag{1.106}$$

which leads us to a Hamiltonian of the form

$$H^{(n)} = \begin{bmatrix} n\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 & \hbar\lambda\sqrt{n+1} \\ \hbar\lambda\sqrt{n+1} & (n+1)\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \end{bmatrix}\tag{1.107}$$

In figure 1.7 we show the energy split between the bare states $|\psi_{1n}\rangle, |\psi_{2n}\rangle$ and

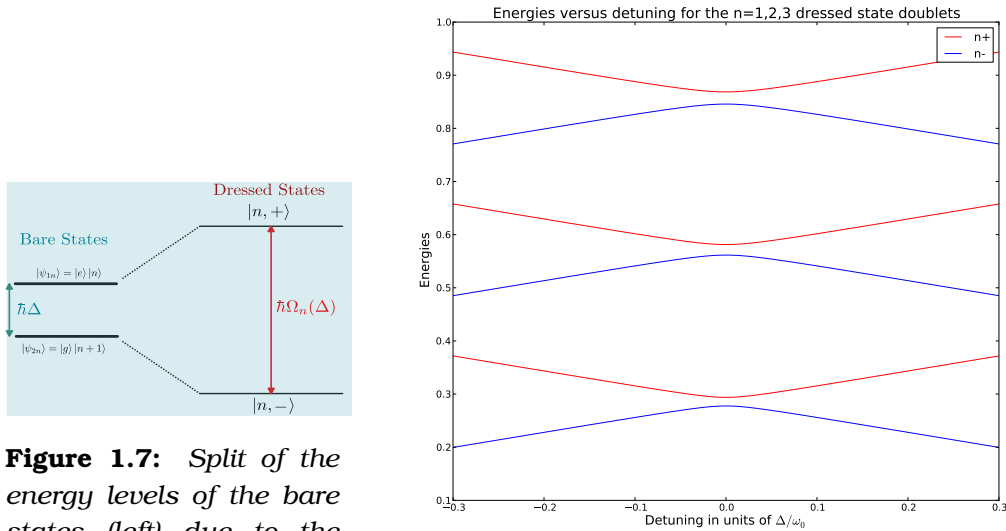


Figure 1.7: Split of the energy levels of the bare states (left) due to the interaction with a quantized field and the dressed states energy levels (right)

Figure 1.8: Dressed states energies versus detuning for the dressed states $|1, \pm\rangle, |2, \pm\rangle$ and $|3, \pm\rangle$.

the dressed states $|n, +\rangle, |n, -\rangle$ due to the interaction of the atom with the field, which is often referred to as *the Jaynes-Cummings splitting*. The expression of the the Hamiltonian involves only states that have a difference by ± 1 in the photon number, thus for a given n its eigenvalues become:

$$E_{\pm}(n) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \pm \hbar\Omega_n(\Delta)\tag{1.108}$$

where

$$\Omega_n(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)}, \quad (\Delta = \omega_0 - \omega) \quad (1.109)$$

is the Rabi frequency which now includes the detuning. In figure 1.8 we show the dependence of the dressed-states energy level with the detuning, for three different doublets. This expression for the Rabi frequency, enables us to write down a more general expression to describe the system, the *dressed states*:

$$\begin{aligned} |n, +\rangle &= \cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |\psi_{1n}\rangle + \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |\psi_{2n}\rangle \\ |n, -\rangle &= -\sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |\psi_{1n}\rangle + \cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |\psi_{2n}\rangle \end{aligned} \quad (1.110)$$

where Φ_n is the mixture angle that intuitively describes the contribution of each of the basis vectors to the superposition of states and are defined as:

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Delta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\Omega_n(0)}{\Delta}\right) \\ \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) - \Delta}{2 \cdot \Omega_n(\Delta)}} \\ \cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\Omega_n(\Delta) + \Delta}{2 \cdot \Omega_n(\Delta)}} \end{aligned} \quad (1.111)$$

Dressed states enable us to describe the dynamics of the system, for any initial state of it. Supposing we have a field in an initial state that is a superposition of other states, interacting with a two-level atom prepared in its excited state, the initial state of the atom-field system may be written as:

$$\begin{aligned} |\psi_{af}(0)\rangle &= |\psi_f(0)\rangle |e\rangle \\ &= \sum_n C_n |n\rangle |e\rangle \\ &= \sum_n C_n |\psi_{1n}\rangle \end{aligned} \quad (1.112)$$

Using equation 1.110 to express $|\psi_{1n}\rangle$ in terms of dressed states $|n, \pm\rangle$ we obtain:

$$|\psi_{1n}\rangle = \cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, +\rangle - \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, -\rangle \quad (1.113)$$

Therefore the atom-field system state, is expressed by the wave function:

$$|\psi_{af}(0)\rangle = \sum_n C_n \left[\cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, +\rangle - \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, -\rangle \right] \quad (1.114)$$

and the evolution of this system is described by the equation:

$$\begin{aligned}
 |\psi_{af}(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \cdot |\psi_{af}(0)\rangle = \\
 &= \sum_n C_n \left[\cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, +\rangle \cdot e^{-\frac{iE_+(n)t}{\hbar}} - \sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right) |n, -\rangle e^{-\frac{iE_-(n)t}{\hbar}} \right]
 \end{aligned}
 \tag{1.115}$$

1.4 Cavity QED experiments

So far we have discussed the theoretical model that describes the simplest light-matter interaction scenario, ie a two level atom interacting with a single mode quantized field. Like in most cases, theory predicts a lot of interesting results that have to be disproved or verified in the laboratory, in order to adopt, modify or completely reject a certain theoretical model.

Cavities or microcavities are the devices with the help of which we have managed to verify a plethora of phenomena of Quantum Physics.² The simplicity of the system, being not much different than a "photon box" combined with the detailed and remarkable work made from experimental groups around the world leaded by *S. Haroche, J. Kimble, D. Meschede, G. Rempe and H. Walther* [56],[57] and others, has added to the know-how of *preparing, controlling and manipulating* atoms in such states that we can use them as *qubits* in order to implement quantum algorithms using these setups.

Of course Cavity QED is not the sole candidate for the implementation of full scale algorithms. In fact, as we will see in the following chapters, there are lots of factors that restrict those systems from being ideal for quantum algorithms. The most prominent of those factors is decoherence, due to the interaction of a cavity-like setup with the environment [29]. In the last decade there has been a new generation of nanostructures where the predictions of Cavity QED could be tested in very different conditions in a solid state environment. These include *Photonic crystals* embeded with *Quantum Dots* and more recently *Circuit QED*. The latter technology exhibiting very low loss rates, is one of the most promising techniques regarding achieving the goal of creating a Quantum Computer.

²This remarkable work has led to the recognition of the founders of the field with the Nobelprize in Physics in 2012.

1.4.1 Tailoring spontaneous emission rates and atomic energies in confined space

Purcell's formula [8] for the spontaneous emission rate modification of a dipole in a cavity versus the case in free space, reads:

$$\frac{\Gamma_{\text{cavity}}}{\Gamma_{\text{free}}} = \frac{\rho_c(\omega_0)}{\rho_f(\omega_0)} = \frac{2\pi Q}{V_c \omega_0^3} = Q \frac{\lambda_0^3}{4\pi^2 V_c} \quad (1.116)$$

where $\Gamma_{\text{cavity}}, \Gamma_{\text{free}}$ are the spontaneous emission rates inside the cavity and in free space respectively, $\rho_c(\omega_0), \rho_f(\omega_0)$ are the densities of states for the cavity and the free space for the frequency ω_0 , Q is the cavity quality factor, λ_0 is the wavelength of the radiation in free space and V_c is the volume of the cavity.

Initially, cavities had been used in order to observe the modification of the spontaneous emission rate. For $V \simeq \lambda_0^3$, the spontaneous emission rate is increased by a factor almost equal to Q . Though, if the cavity is detuned, the decay-rate will decrease. The first observation of enhanced atomic spontaneous emission in a resonant cavity was published by Goy *et al* in 1983 [9], in whose experiment Rydberg atoms of sodium excited in the 23s state were injected in a niobium superconducting cavity resonant in 340 GHz. The cooling of the cavity had the advantage of suppressing the thermal field inside the cavity. Regarding optical transitions, in which the thermal-field is totally suppressed, the first experiments were conducted by Feld and collaborators in 1987 [58],[59] and in those was demonstrated the enhancement of spontaneous transitions in optical cavities.

As far as atomic energy shifts are concerned, the polarization of the atom by the non-resonant parts of the broadband electromagnetic field causes energy shifts, the Lamb shift being the most prominent one. Lamb shift may be described as being the result of the emission and re-absorption of virtual photons, so taking under consideration the fact that the real emission rate may be modified in confined space, the same should apply for those "virtual" photons, whereas the radiation energy shift results from vacuum fluctuations and is analogous to the result of *Casimir effect* [60].

1.4.2 Microwave cavities and the strong coupling regime

Selecting the appropriate region in which the phenomena under investigation are to be explored, gives two prominent candidates, ie. microwave frequencies and optical frequencies. In what follows we will deal mainly with microwave frequencies, though a very good review regarding optical cavity QED. may be found by *Englert et al*[56] Cavities should be imagined as a very small laser tube, with high reflectivity mirrors and dimensions such that the spontaneous

emission rate is modified for the desired frequencies. At microwave frequencies and low temperatures, the main technique of cavity QED involves high reflecting superconducting mirrors (niobium) able to impose to a single photon to bounce roughly 10^{10} times back and forth inside the cavity, before eventually getting out of it. Microwave photons are particularly difficult to detect, so the detection of the cavity field state is deduced from the resulting interaction on probe atoms. In optical QED configuration, the inverse process can also be used, namely the state of the field is used to deduce the atomic state.

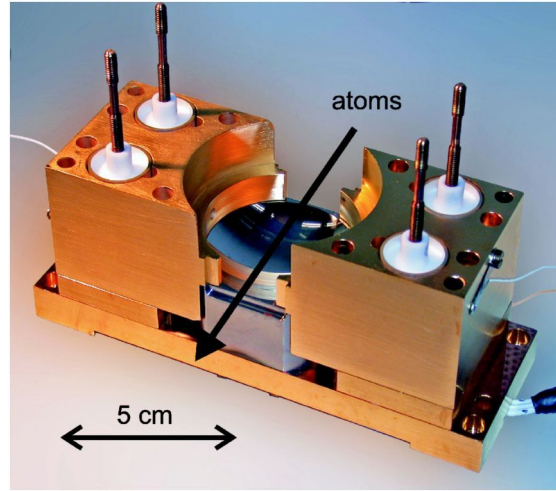


Figure 1.9: Photograph of the cavity assembly used in [61] with the top mirror removed. The atomic beam path is visualized by the arrow. The four posts are used to mount the upper mirror.

The flux of the atoms is controlled mainly by selecting their velocities or by using a chopping the atom beam using shutters.

In order to observe the effects described earlier, the atom field coupling constant g , must be larger than the atom and cavity relaxation rates T_a^{-1} and T_c^{-1} and much larger than the reciprocal of the atom-cavity interaction time. These conditions summarize the idea of the *strong coupling regime*. The *strong coupling* between the cavity and the atom implies that even a single photon inside the cavity is able to induce strong non-linear effects to the atom, as well as that a single atom in a cavity, is enough to sustain a laser oscillation. A parameter used to characterize the atom-cavity coupling is the *cooperativity*, which is defined as:

$$C = \frac{g^2}{\kappa\gamma} \quad (1.117)$$

where g is the atom-cavity coupling parameter, κ is the dissipation rate and γ is the spontaneous emission rate, as it is shown in figure 1.10.

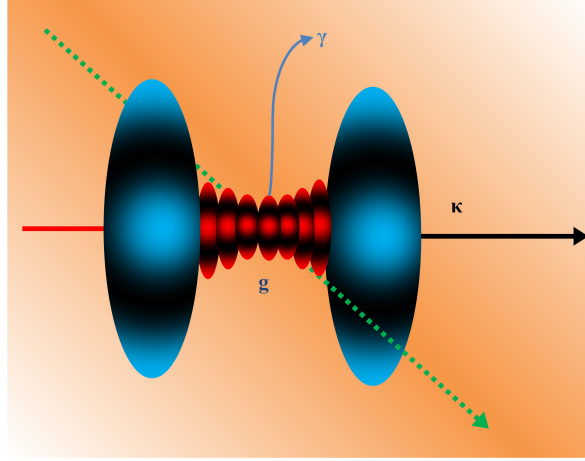


Figure 1.10: Representation of a the main characteristics of cavity QED configuration

In [61] the fabrication of a state of the art superconducting cavity is described in detail. In this cavity the quality factor for the desired frequency (51.1 GHz) is $Q = 4.2 \times 10^{10}$, allowing photon storage time $T_c = 130ms$. For this setup, using the relation $Q = \frac{\omega_{cav}}{\kappa}$ we can calculate the rate of loss κ of the cavity to be $\kappa = 1,26Hz$. Previous experimental setups for the microwave region, were using cavities with a quality factor of the order of $Q = 3 \cdot 10^8$ for the same frequency (51.1 GHz)[62].

Regarding the enhancement of the spontaneous emission rate when the atomic transition is resonant with the cavity, we can calculate using *Fermi's golden rule* (see for example [1]) that

$$\Gamma_{cav}^{resonant} = \Gamma_{free} \frac{3Q}{4\pi^2} \left(\frac{\lambda_0^3}{V} \right) \text{ with } \lambda_0 = 2\pi \frac{c}{\omega} \quad (1.118)$$

while for an atom off-resonant with the cavity

$$\Gamma_{cav}^{off\ resonant} = \Gamma_{free} \frac{3}{16Q\pi^2} \left(\frac{\lambda_0^3}{V} \right) \text{ with } \lambda_0 = 2\pi \frac{c}{\omega} \quad (1.119)$$

These relations resemble to Purcell's initial formula 1.116 for the enhancement of spontaneous emission rate. In order to have a reference of what are some typical values for the set of (g, κ, γ) we refer to [62] and [40], where we find:

$$\begin{aligned} (g, \kappa, \gamma) / 2\pi &= (120, 40, 5.2) \text{ MHz with } C = 69 \text{ for optical} \\ (g, \kappa, \gamma) / 2\pi &= (25, 0.36, 0.005) \text{ kHz with } C = 3.4 \times 10^5 \text{ for microwave} \end{aligned} \quad (1.120)$$

1.5 Cavity QED with lossy cavities

1.5.1 The empty cavity case

Using the techniques developed in Appendix B. Theoretical tools for cavity QED, we consider a cavity sustaining a frequency ω_c , while its field is ruled by the action of creation and annihilation operators, \hat{a}^\dagger and \hat{a} . Its environment (the reservoir) is a collection of harmonic oscillators with frequencies ω_j , while each mode of it is controlled by operators \hat{r}_j^\dagger and \hat{r}_j . Supposing that the cavity mode couples to the j^{th} reservoir oscillating mode via a coupling strength of κ_j , the Hamiltonians in the rotating wave approximation, neglecting the contribution of vacuum fluctuations will be:

$$\begin{aligned}\hat{H}_S &= \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ \hat{H}_R &= \sum_j \hbar\omega_j\hat{r}_j^\dagger\hat{r}_j \\ \hat{H}_{SR} &= \sum_j \hbar\left(\kappa_j^*\hat{a}\hat{r}_j^\dagger + h.c\right) = \hbar\left(\hat{a}\hat{\Gamma}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\Gamma}\right)\end{aligned}\tag{1.121}$$

Using the general derivation of the master equation, we can identify the terms for the specific problem to be:

$$\begin{aligned}s_1 &= \hat{a} \\ s_2 &= \hat{a}^\dagger \\ R_1 &= \hat{\Gamma}^\dagger \\ R_2 &= \hat{\Gamma}\end{aligned}\tag{1.122}$$

Moving to the interaction picture, the expressions for the above operators, become:

$$\begin{aligned}\tilde{s}_1 &= \tilde{a}e^{-i\omega_c t} \\ \tilde{s}_2 &= \tilde{a}^\dagger e^{i\omega_c t} \\ \tilde{R}_1 &= \tilde{\Gamma}^\dagger e^{i\omega_c t} \\ \tilde{R}_2 &= \tilde{\Gamma} e^{-i\omega_c t}\end{aligned}\tag{1.123}$$

The reservoir correlation functions, under the Markov approximation are given by the relations:

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}(t)\rangle &= 0 \\ \langle\tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t)\rangle &= 0 \\ \langle\tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}(t)\rangle &= \kappa\bar{n}\delta(t-t') \\ \langle\tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t)\rangle &= \kappa(\bar{n}+1)\delta(t-t')\end{aligned}\tag{1.124}$$

In the above expressions, $\bar{n} = \left(e^{\frac{\hbar\omega_c}{kT}} - 1\right)^{-1}$, κ is the decay rate of the cavity, k is the Boltzmann constant and T is the so-called *bath temperature*. In this specific case, the temperature T used, is the temperature of the environment of the cavity.

Using these correlation functions we obtain the master equation for the density matrix in the interaction picture as:

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\kappa\bar{n}(\hat{a}\hat{a}^\dagger\tilde{\rho} - \hat{a}^\dagger\tilde{\rho}\hat{a}) - \kappa(\bar{n} + 1)(\hat{a}^\dagger\hat{a}\tilde{\rho} - \hat{a}\tilde{\rho}\hat{a}^\dagger) + \text{h.c.} \quad (1.125)$$

Further manipulation of this equation can allow us to separate terms containing the term \bar{n} , so the master equation becomes:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\kappa(\hat{a}^\dagger\hat{a}\tilde{\rho} + \tilde{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - 2\hat{a}\tilde{\rho}\hat{a}^\dagger) - 2\kappa\bar{n}(\hat{a}\hat{a}^\dagger\tilde{\rho} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\tilde{\rho} - \hat{a}^\dagger\tilde{\rho}\hat{a} - \hat{a}\tilde{\rho}\hat{a}^\dagger) \quad (1.126)$$

At the limit of zero temperature, $\bar{n} = 0$, the equation becomes:

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\kappa(\hat{a}^\dagger\hat{a}\tilde{\rho} + \tilde{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - 2\hat{a}\tilde{\rho}\hat{a}^\dagger) \quad (1.127)$$

Essentially, numerical simulations that calculate the time evolution of a dissipating system using the master equation approach, converge to solving a system of differential equations with dimensions that depend mainly on the number of fock states that initially exist in the cavity.

Following the set of values as it was presented in 1.120, we can plot the time evolution of a state that consists of one excitation in a cavity, setting the values to be: $(g, \kappa, \gamma) = (1000, 10, 1)$, therefore keeping the requirements of the *strong coupling regime*.

1.5.2 Monte Carlo - Quantum Trajectory method

Another method of dealing numerically with the problem of a lossy cavity, is stochastically evolving the system in time and perform Monte Carlo simulation. In the case of a lossy cavity, we will describe an example to give the outline of the method, supposing a cavity with loss rate κ is coupled to a reservoir at $T = 0$. We begin writing down the master equation of the system, is given by:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}\rho = -\frac{i}{\hbar} + \frac{\kappa}{2}(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (1.128)$$

Manipulating this expression in order to separate the reversible coherent part of the dynamics from the total dynamics, we obtain:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}_0\rho + \kappa(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (1.129)$$

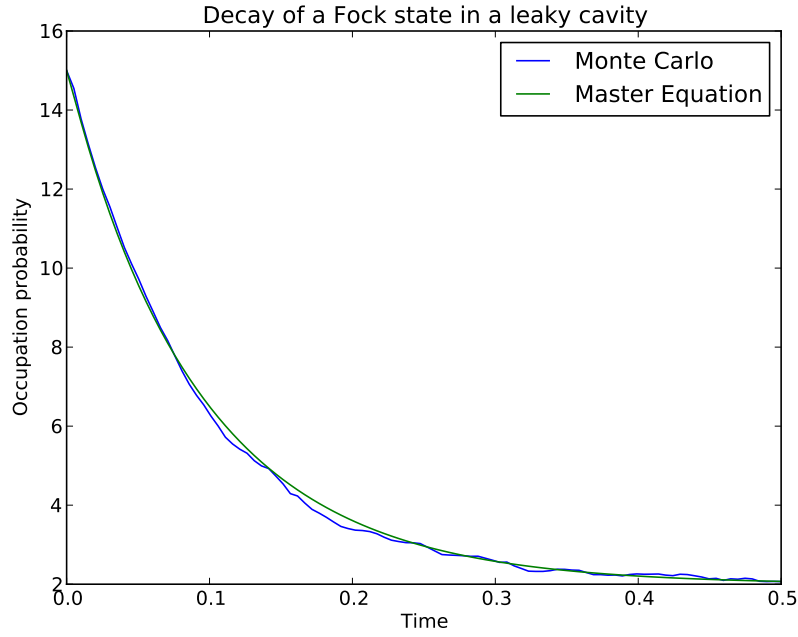


Figure 1.11: Decay of the Fock state $|15\rangle$ in a leaky cavity with $\kappa = 10$, using the master equation approach (green line) and quantum trajectories (blue line).

The formal solution of the Master equation is given by

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t} \rho(0) \quad (1.130)$$

We can rewrite the Lindblad superoperator \mathcal{L} as

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} + (\mathcal{L} - \mathcal{T}) \quad (1.131)$$

where the effect of the super-operator \mathcal{T} on density matrix is given by:

$$\mathcal{T} = \hat{C} \rho \hat{C}^\dagger \quad (1.132)$$

Operator \hat{C} is referred to as the *collapse operator* [29, 63]. Essentially it describes how the environment destroys the coherence within the cavity, leading the cavity field to collapse irreversibly. Its use, provides us with a non-unitary operation that gradually destroys the cavity field. It is proportional to the cavity annihilation operator and is given by the relation:

$$\hat{C} = \sqrt{2\kappa} \hat{a} \quad (1.133)$$

Now, we can use an identity for the super-operators

$$e^{(\mathcal{L}+a\mathcal{S})x} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \int_0^x dx_k \int_0^{x_k} dx_{k-1} \cdots \int_0^{x_2} (e^{\mathcal{L}(x-x_k)} \mathcal{S} e^{\mathcal{L}(x_k-x_{k-1})} \mathcal{S} \cdots \mathcal{S} e^{\mathcal{L}x_1}) dx_1 \quad (1.134)$$

in order to find an expression for the density matrix at a time t

$$\begin{aligned} \rho(t) &= e^{\mathcal{L}t} \rho(0) = e^{[\mathcal{T}+(\mathcal{L}-\mathcal{T})]t} \rho(0) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} [\mathcal{S}(t-t_m) \mathcal{T} \mathcal{S}(t_m-t_{m-1}) \cdots \mathcal{T} \mathcal{S}(t_1) \rho(0)] dt_1 \end{aligned} \quad (1.135)$$

where we have defined \mathcal{S} as $\mathcal{S} = e^{(\mathcal{L}-\mathcal{T})t}$. The above expansion is valid for every \mathcal{T} . However, for this particular choice of $\mathcal{T} = \hat{C}\rho\hat{C}^\dagger$, the terms in the expansion of $\rho(T)$ have a unique physical significance. Probability for a perfect photo-detector installed in such a way so that it will detect all the photons that *leak out* from the cavity during a time interval $[0, t]$ to record exactly m events, one in each of the infinitesimal time interval times $[t_m, t_m + dt_m] \in [0, t]$ is given by:

$$p_m(t_1, t_2, \dots, t_m; [0, t]) = \text{Tr} [\mathcal{S}(t-t_m) \mathcal{T} \mathcal{S}(t_m-t_{m-1}) \cdots \mathcal{T} \mathcal{S}(t_1) \rho(0)] \quad (1.136)$$

In the above equation, $\rho(0)$ is the initial state of the cavity mode. We can define a non-normalized, conditional density matrix $\tilde{\rho}_c(t)$ of the system, conditioned on the measurement record defined above, by:

$$\tilde{\rho}_c(t) = \mathcal{S}(t-t_m) \mathcal{T} \mathcal{S}(t_m-t_{m-1}) \cdots \mathcal{T} \mathcal{S}(t_1) \rho(0) \quad (1.137)$$

This definition enables us to write down that

$$p_m(t_1, t_2, \dots, t_m; [0, t]) = \text{Tr} [\tilde{\rho}_c(t)] \quad (1.138)$$

If we have a normalized, conditional density matrix $\rho_c(t)$ of the system, it is related to the non-normalized density matrix by the relation:

$$\rho_c(t) = \frac{\tilde{\rho}_c(t)}{\text{Tr} [\tilde{\rho}_c(t)]} \quad (1.139)$$

Using these relations one can write the unconditioned density matrix $\rho(t)$ as:

$$\rho(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 p_m(t_1, t_2, \dots, t_m; [0, t]) \rho_c(t) \quad (1.140)$$

After this mathematical discussion, we should point out the physical meaning. The conditional density operator $\rho_c(t)$ can be interpreted as the actual state of the system, if we know the photo-detection history exactly. To obtain the unconditional density matrix $\rho(t)$, we need to perform an ensemble average of these conditional density matrix weighted by the probabilities of recording the corresponding history of detection. The way to find the dynamics is to perform numerical simulation, which is referred to as **Quantum Trajectory Simulation**. To perform the numerical simulation with a finite time step Δt , one generates a random number r on the unit interval. The probability to detect a photon, which essentially is given by the expectation value of the collapse operator in this interval $[t, t + dt]$, while keeping track of the previous detection history, is:

$$p_c = \text{Tr} [\mathcal{T} \rho_c(t)] \quad (1.141)$$

The density matrix is then evolved forward deciding on the outcome of the comparison of a random number (let's say r) with the product $p_c \Delta t$. For the case $r \leq p_c \Delta t$, a photo detection occurred and the resulting state will be given by:

$$\tilde{\rho}_c(t + \Delta t) = \mathcal{T} \rho_c(t) \Delta t \quad (1.142)$$

In the opposite case, no photon was detected, thus the resulting state is given by:

$$\tilde{\rho}_c(t + \Delta t) = \mathcal{S}(\Delta t) \rho_c(t) \quad (1.143)$$

The meaning of the term "*trajectory*" should be now obvious. It states the *random outcome* of an event. After repeating this process for a series of random numbers r , we sum over them to get the output from the cavity and then normalize the result so that the trace of the normalised density matrix is equal to 1. This way of evolving stochastically a density matrix is also called stochastic master equation.

However, for an N-dimensional system, the density matrix contains N^2 elements, which makes it a demanding computational task. An easier way of obtaining the dynamics of the system is to solve the stochastic Schrödinger equation, which of course does not give the exact correct result, though it is a good approximation of the process. From the discussion of stochastic master equation, we know that we can write $\mathcal{S} = e^{(\mathcal{L} - \mathcal{T})t}$. To find the effect of this super-operator on a density matrix ρ , we first find:

$$\begin{aligned} [(\mathcal{L} - \mathcal{T})t] \rho &= (\mathcal{L}\rho)t - (\mathcal{T}\rho)t \\ &= -\frac{it}{\hbar} [H_0, \rho] + \kappa t (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) - t(\mathcal{T}\rho) \\ &= -\frac{it}{\hbar} [H_0, \rho] + \kappa t (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) - t(\mathcal{T}\rho) - t(\mathcal{T}\rho) \\ &= \left[\left(\frac{H_0}{i\hbar} - \kappa\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) t, \rho \right] \end{aligned} \quad (1.144)$$

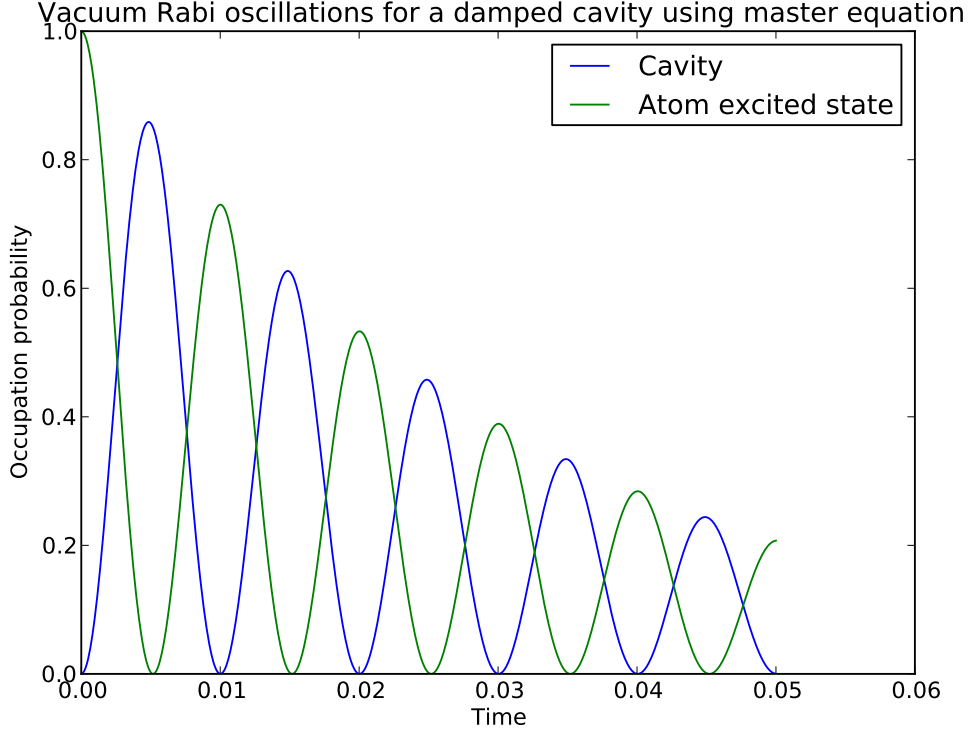


Figure 1.12: Jaynes Cummings model in a leaky cavity using the master equation. The parameters used here, are: $\omega_0 = \omega = 10000$, $g = 10^{-4}\omega_0$, $\kappa = 0.2g$.

Therefore, the effect of the super-operator can be written as:

$$\mathcal{S}(t)\rho = \hat{N}(t)\rho\hat{N}^\dagger(t) \quad (1.145)$$

where the operator $\hat{N}(t)$ is given by:

$$N(t) = \exp \left[\left(\frac{H_0}{i\hbar} - \kappa \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) t \right] \quad (1.146)$$

Using the definition of the density matrix for a pure state, and the above relation we can write:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \hat{N}\rho(0)\hat{N}(t) = \hat{N}(t)|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|\hat{N}^\dagger(t) \quad (1.147)$$

Therefore, we can also write the time evolution of $|\psi(t)\rangle$ as:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{N}(t)|\psi(0)\rangle = \exp \left[\left(\frac{H_0}{i\hbar} - \kappa \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) t \right] |\psi(0)\rangle \quad (1.148)$$

Denoting the effective Hamiltonian as

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{eff} &= \hat{H}_0 - \frac{i\hbar}{2}\hat{C}^\dagger\hat{C} \\ &= \hat{H}_0 - i\hbar\kappa\hat{a}^\dagger\hat{a}\end{aligned}\tag{1.149}$$

we can finally write

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[\frac{\hat{\mathcal{H}}_{eff}t}{i\hbar}\right] |\psi(0)\rangle\tag{1.150}$$

In first sight, this may seem like a really hard way of deriving the Schrödinger equation. Though, since the Hamiltonian $\hat{\mathcal{H}}_{eff}$ contains non-unitary dynamics, this is not the same case. To numerically solve the stochastic Schrödinger equation we need a random number generator to obtain a number r and perform the comparison that will yield the trajectory, evolving the state in two different ways. Therefore the complexity is of order $O(N)$, in contrast to $O(N^2)$ for the evolution of the stochastic Master equation. The photo-detection probability and the rules for evolving the state, in terms of the conditional state $|\psi(t)\rangle$ are given by the following equations:

$$p_c = \langle\psi_c(t)|\hat{C}^\dagger\hat{C}|\psi_c(t)\rangle\tag{1.151}$$

Next we compare the product $p_c\Delta t$ with r . For $r \leq p_c\Delta t$, then there is a photo-detection, therefore the state is evolved as:

$$|\tilde{\psi}_c(t + \Delta t)\rangle = \hat{C}|\psi_c(t)\rangle\sqrt{\Delta t}\tag{1.152}$$

If $r > p_c\Delta t$, then there is no photo-detection, thus the state is evolved as:

$$|\tilde{\psi}_c(t + \Delta t)\rangle = \hat{N}(\Delta t)|\psi_c(t)\rangle\tag{1.153}$$

Chapter 2

Quantum Computation and Algorithms

In the last three decades, computers have changed our everyday lives. The main characteristic that established them in our everyday routines, was the power to perform repetitive tasks in a very small amount of time, therefore they were initially used to perform tasks as Signal Processing, Signal Encryption and thus Code Breaking, process of all kinds of data; from experimental data and numerical simulations to geo-informational data and military applications. One would say that Physics and Computer Science walk in parallel, hand by hand, and evolve almost simultaneously taking advantage of the new breakthroughs that come up every now and then in each field.

The first introduction of the notion of field of "Quantum Computation" is usually attributed to Richard Feynman in his 1982 paper [21], where he attempted to simulate quantum mechanics on classical machines. Actually, David Deutsch had circulated a preprint of his paper proposing a test of the many-universes interpretation in 1978 which was not published until 1985 [22], while Benioff in 1980 [20] published the first model for a computer based on quantum mechanical components. Unlike Feynmann, Benioff did the exact opposite: he tried to use quantum physics to simulate a classical computer.

The central idea behind "Quantum Computation" was to replace the 0's and 1's that are used in semiconductor devices stating a circuit's state regarding whether it is "on" or "off", by the superposition or entangled states of $|0\rangle$'s and $|1\rangle$'s which emerge in Quantum Mechanics.

After this statement that focused the attention of the scientific community to this emerging field, there have been splendid papers describing the abstract notion and functionality of a quantum computer. References for those may be found in the classical textbook of Nielsen and Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* [16], as well as in [24].

In the following we will briefly describe the main gates that are used in order to make use of the new resources that arise with the application of Quantum Mechanics to Computer Science, ie. the *Quantum Gates* which exhibit the principles that are used in order to perform Quantum Computational tasks, regardless of the system that is to be used for implementation.

Later we will describe three quantum algorithms that are of fundamental importance. *Deutsch-Jozsa algorithm* describes the process that is performed in a quantum system in order to specify whether a coin that is tossed, is biased or unbiased. It is of practical as well as of historical value to refer to it, since it was the first algorithm that made use of the new resources introduced in the begin of Quantum Computation Field. Grover's search algorithm is used in order to perform reverse search in a database, replacing the resource demanding classical algorithms and making computation times remarkably shorter. The wide variety of its applications makes it of fundamental importance in Encryption and Code Breaking applications. Shor's algorithm is probably dealing with one of the fundamental problems of number theory; search of the prime factors of a number. It is of a milestone importance since the problem of finding the prime factors of a number, is considered to be an index to the level of advancement of our civilization and the need for an efficient and fast algorithm has been of active mathematical interest for almost 2,000 years and is used in a variety of applications.

2.1 Quantum Bits and Gates

Creating quantum algorithms requires first specifying which is going to be the elementary piece of information that is going to be processed. In classical computation, this quantity is defined by the state of the circuit ie. whether the circuit is on (1) or off (0), enabling us to have a straightforward basis of communication with the circuit and thus command it to perform certain operations that are defined using **classical gates**.

In quantum computation, things are a little counter-intuitive. Having lots of physical systems that have many different quantum states, we need to define in each system what is going to be our $|0\rangle$ or $|1\rangle$, which frivolously guides us to the logical assumption that we need a **two state system**. This is a good start and the frivolity of this deduction, will not become a hardle until later on this discussion.

In Chapter 1 (Introduction to Cavity Q.E.D) we discussed what happens in the simple case of light-matter interaction and went through the two-level system model. Since the first steps of quantum computation, cavity QED seemed a to be a splendid candidate for creating quantum gates, involving two level systems

and the possibility to perform measurements and deduce the state of the system. Thus, in cavity QED we can make use of the $|e\rangle$ state to symbolize $|1\rangle$ and $|g\rangle$ to symbolize $|0\rangle$.

Having a new physical resource that comes with the heritage of its quantum nature, we are able to make use of it and perform various operations, much different than in Classical Computation, which in Computer Science language we call **gates**. We should point out the fact that a qubit can be visualised with the notion of the Bloch-sphere. Bloch-sphere is a sphere that represents the evolution of a state under unitary operations.

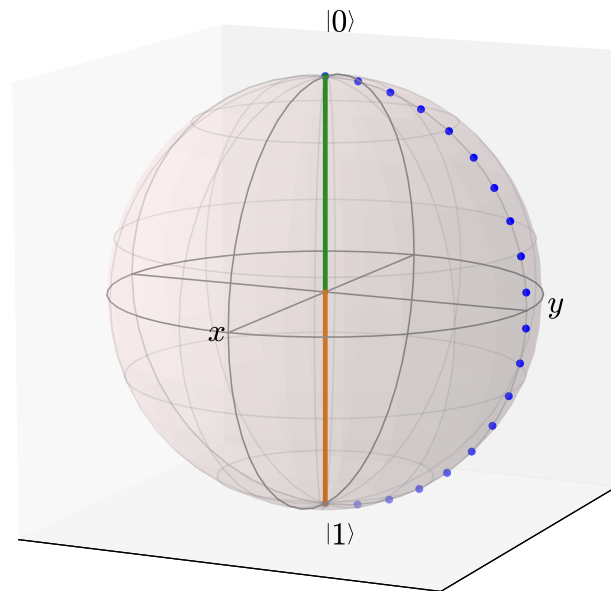


Figure 2.1: Bloch-sphere representation of the operation performed by Pauli X gate. A ket $|0\rangle$ (green line) is rotated by π over the x axis without modification of its length.

Reviewing the basic operations involved during the various stages of a quantum computation algorithm and describing their main features, is what follows. We will present them regarding the number of qubits involved and will briefly discuss the operations those gates represent in physical terms.

2.1.1 One qubit operations

In order to build a quantum algorithm, the qubits should undergo unitary transformations. Single qubit operations essentially perform rotations of the state vector on the surface of the Bloch sphere.

Gate	Name	Matrix
$\text{---}\boxed{X}\text{---}$	Pauli X	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\text{---}\boxed{Y}\text{---}$	Pauli Y	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
$\text{---}\boxed{Z}\text{---}$	Pauli Z	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\text{---}\boxed{H}\text{---}$	Hadamard	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
$\text{---}\boxed{S}\text{---}$	Phase	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\text{---}\boxed{T}\text{---}$	$\frac{\pi}{8}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix}$

Table 2.1: One qubit gates

Pauli-X gate performs a rotation over the x axis by π . Essentially, it is the quantum NOT gate, since it maps $|0\rangle$ to $|1\rangle$ and vice versa. Its operation is visualized in figure 2.1.

Pauli Y gate, performs a rotation over the y axis by π , mapping eg. $|0\rangle$ to $i|1\rangle$ and $|1\rangle$ to $-i|0\rangle$.

Pauli Z gate, represents a rotation over the z axis by π . Rotations performed around z-axis, change the *phase* of the qubit, ie. the angle θ on the Bloch sphere. Pauli Z gate, leaves the basis state $|0\rangle$ unchanged and maps $|1\rangle$ to $-|1\rangle$. Hadamard gate is one of the most important gates. In terms of Bloch-sphere representation, it performs a rotation over the x and z axes by π . This actually means that the basis state $|0\rangle$ is mapped to the state $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ and ket1 to the state $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$, creating the *maximally entangled states*. Phase gate S, leaves $|0\rangle$ unchanged and changes the **phase** of $|1\rangle$ to $e^{\frac{i\pi}{2}}|1\rangle$. It belongs to the family of the **phase shift gates**, that leave the basis state $|0\rangle$ unaltered and map $|1\rangle$ to $e^{i\theta}|1\rangle$, which doesn't alter the probability of measuring $|0\rangle$ or $|1\rangle$, but essentially is equivalent to tracing a horizontal circle on the Bloch sphere for θ radians. For the phase gate (S) it is $\theta = \frac{\pi}{2}$. Note, that Pauli-Z gate, is the case for phase shift gate, for $\theta = \pi$. One more usual case for the phase shift gate is the $\frac{\pi}{8}$ gate, where $\theta = \frac{\pi}{4}$. It leaves $|0\rangle$ unchanged and changes the phase of $|1\rangle$ to $e^{\frac{i\pi}{4}}|1\rangle$. In

Table 2.1 we present the symbols, names and matrix representations of the most important single-qubit operations.

2.1.2 Two qubit operations

Two qubit operations are fundamental for the functionality of any algorithm. In classical computation, we use certain gates in order to state for example “If A is true, then do B ”. In quantum computation, things are a little more complicated, since there are certain limitations regarding the processes that are involved in quantum algorithms in order to avoid **destroying** the quantum information. More details on those limitations may be found in the classical textbook of Nielsen and Chuang [16] and in John Preskill’s lecture notes. It will suffice to say that copying a quantum state is prohibited (also known as the *no-cloning theorem*), thus we should create reversible operations that do not destroy the quantum states involved in the operations. Thankfully, reversible computing had been a matter of debate long before the rise of quantum computation and it proved to help overcome what seemed to be an insurmountable obstacle. Another feature that is not allowed, is loops over the circuit, so we say that quantum algorithms are *acyclic*.

The first two qubit gate we will present is the *control-NOT gate*, also referred to as C-NOT gate. It involves two input qubits, which perform certain roles as control and target qubits respectively. The operation performed by CNOT gate is $|c\rangle|t\rangle \rightarrow |c\rangle|t \oplus c\rangle$, where of course $|c\rangle$ is the control qubit and $|t\rangle$ is the target qubit. The \oplus symbol states modulo 2, which means that *if the control qubit is $|1\rangle$, the target qubit is flipped, otherwise it is left alone*.

SWAP gate, performs the operation explicitly stated by its name; it swaps two qubits. This may seem quite simple, though it will prove later that it is quite useful. Controlled Z gate, is similar to CNOT gate, though instead of performing the NOT operation, it performs a Z operation on the target qubit if it is found on state $|1\rangle$, else it leaves it the same. Generalising we may construct any *Controlled-U* gate, where U is any unitary transformation. One more example is the Controlled-Phase gate, that works exactly the same way as CNOT, and C-U gates, but it performs a phase operation on the target qubit should it be in state $|1\rangle$, taking it to $i|1\rangle$, thus changing its phase by $\frac{\pi}{2}$.

2.1.3 Three qubit operations

The requirement for reversible processes demands the replacement of the classical logical gates which in general are irreversible, from reversible quantum gates as it was stated earlier as well.



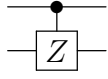
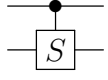
Gate	Name	Matrix
	Control NOT	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
	SWAP	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	Controlled Z	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
	Controlled -Phase	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$

Table 2.2: Two qubit gates

A logic gate \mathbf{L} is *reversible* if, for any output y , there is a unique input x such that applying $L(x) = y$. If a gate L is reversible, there is an inverse gate L' which maps y to x for which $L'(y) = x$. From common logic gates, NOT is reversible. The common AND gate for instance, is not reversible. However there is a way to compute an arbitrary function. Two outstanding examples are the Toffoli gate and the Fredkin gate which are described below.

Toffoli gate, also CCNOT gate, was suggested by Tommaso Toffoli in 1980 and is a universal reversible logic gate, which means that any arbitrary function may be built using only Toffoli gates. It uses three input qubits (let's say $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$) and it maps them to $|a\rangle, |b\rangle$ and $|c\rangle XOR (|a\rangle AND |b\rangle)$. As it was shown later, a Toffoli gate may be constructed using 5 two-qubit quantum gates [64].

Fredkin gate, is another universal reversible logic gate. As it is shown in Table 2.3, it swaps the last two qubits if the control qubit is $|1\rangle$.

2.2 Deutsch-Jozsa algorithm

Having described and defined the basic elements of a quantum algorithm, it is time to describe the first quantum algorithm that we will deal with in this thesis. We refer to Deutsch-Jozsa algorithm. The problem it solves is not a really intriguing problem, though through it, the power of quantum computation was


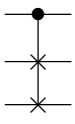
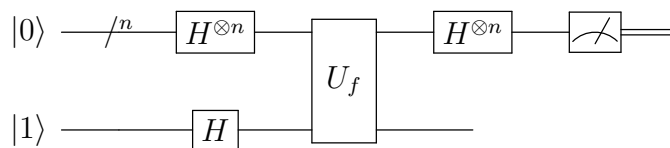
Gate	Name	Matrix
	Toffoli Gate	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	Fredkin (Control Swap)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Table 2.3: Three qubit gates

made clear.

The problem: Supposing we have a function $f(x)$ taking as an input $x = 0$ or $x = 1$ and maps it to 0, 1, we want to know if f has a constant value or not.

A simple example to get grip on the problem is to imagine having a coin and we want to know if it is false ie. it has on both sides heads or tails. The original publication by Deutsch [22] described a non-deterministic algorithm, which gave the correct answer with a $\frac{1}{2}$ chance. Deutsch's algorithm improvement came in 1992 in what we now know as "*Deutsch-Jozsa algorithm*"[30]. Later, it was improved by Artur Ekert, Richard Cleve and Michele Mosca [23]

**Figure 2.2:** Deutsch-Jozsa algorithm

The algorithm begins taking as input the $n + 1$ state $|0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$. That is, the first n qubits are each in the state $|0\rangle$ and the final qubit is $|1\rangle$. A Hadamard gate

is applied to each qubit to obtain the state

$$\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \quad (2.1)$$

The U_f gate, is the heart of the system. It maps the state $|x\rangle|y\rangle$ to $|x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$. Applying U_f gives the state

$$\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle(|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle) \quad (2.2)$$

For each x , $f(x) = 0$ or 1 , thus we may write

$$\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \quad (2.3)$$

At this point, the auxiliary qubit initially prepared in state $|1\rangle$ may be ignored. Applying a Hadamard transformation to each qubit we obtain

$$\frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{y=0}^{2^n-1} \left[\sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} (-1)^{x \cdot y} \right] |y\rangle \quad (2.4)$$

where $x \cdot y = x_0 y_0 \oplus x_1 y_1 \oplus \dots \oplus x_{n-1} y_{n-1}$ is the sum of the bitwise product. Finally we examine the probability of measuring $|0\rangle^{\otimes n}$

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \right|^2 \quad (2.5)$$

which evaluates to 1 if $f(x)$ is **constant** and 0 if $f(x)$ is **balanced**.

It's worth mentioning that even for the simple case we have one qubit, we also need the auxiliary qubit. This is the cost of reversible computation, that requires extra input in order to perform the computational task.

The improvement of Deutsch-Jozsa algorithm that was contributed by Ekert et al [23], used as an auxiliary qubit the state $|0\rangle - |1\rangle$ and removed the need for the Hadamard transformation on it.

The preparation of the input qubits into the superposition, is that enables us to make use of the feature of quantum computation called *quantum parallelism*. In this given example, the algorithm iterates just once to give the outcome, since the use of the Hadamard gate creates a superposition of states $|0\rangle$ and $|1\rangle$, thus enabling us to simultaneously treat the input qubits and obtain the outcome of the unitary operation. Deutsch-Jozsa algorithm was the first example where the feature of quantum parallelism was used and it was made clear that this feature would change the classical way of designing algorithms.

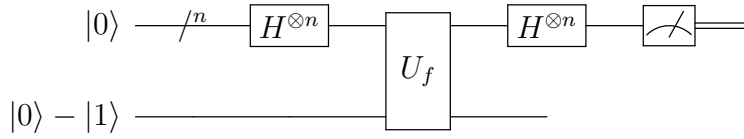


Figure 2.3: Improved version of Deutsch-Jozsa algorithm [23]

2.3 Grover's search algorithm

Deutsch's algorithm gave birth to new perspectives regarding the possible problems that were able to be solved using quantum algorithms. In previous section we used a unitary transformation U_f in order to **place the enquiry** of whether our function was balanced or constant. The same idea, for a purpose of advanced complexity was used in one of the most promising quantum algorithms; Grover's search algorithm.

The problem: Given an unsorted database of size $N = 2^n$, find the item labeled with i .

A practical example is the reverse telephone registry search ie. if one knows the telephone number and wishes to find using the telephone registry, to which individual it corresponds. This is a demanding computational task. Classically, if we examine k records in the registry, then we have a probability $\frac{k}{N}$ to find the item labeled with i . The best classical algorithm requires on average $O(n/2)$ iterations in order to locate the desired item.

Grover's algorithm [31],[32] is essentially an extension to Deutsch-Jozsa algorithm. The basic idea is creating a function that will operate as an "**oracle**", that points out the desired object. Thus, for each object we need a different function, in order to complete the algorithm successfully. Grover's algorithm is also deterministic, which means that will always give the correct result, while the number of the repeats required, as we will see is significantly less than that of the classical algorithms, which makes it one of the most interesting algorithms in the field of Quantum Computation.

We should first discuss certain properties of the *oracle* operation that is performed in Grover's algorithm. A good intuitive interpretation of the function of the algorithm was given in 1999 by Jozsa [34]. This function is unitary, as every function that is involved during quantum computation algorithms. It is defined by the relation:

$$I_{x_0} |x\rangle = \begin{cases} |x\rangle & \text{if } x \neq x_0 \\ -|x_0\rangle & \text{if } x = x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

For simplicity we will use the symbolism I_τ to identify the oracle that locates the element τ from the database. As it may be seen from its definition, the operator

I_τ , inverts the element $|\tau\rangle$. We may prove that

$$U \cdot I_{|\tau\rangle} \cdot U^{-1} = I_{U|\tau\rangle} \quad (2.7)$$

and also

$$-I_v = I_{v^\perp} \quad (2.8)$$

One more usefull form of the oracle operator is:

$$I_\tau = I_n - 2|\tau\rangle\langle\tau| \quad (2.9)$$

where I_n is the identity matrix with dimesnions n . If we use $|0\rangle$ in the above expression we obtain:

$$I_0 = I_n - 2|0\rangle\langle 0| \quad (2.10)$$

which is called **diffusion operator**.

The steps of the algorithm for locating an item are as follows:

1. Create a superposition of all the items in the list
2. Apply the oracle operator in order to identify the desired object by inverting its amplitude.
3. Apply the diffusion operator in order to amplify the probability amplitude of the desired state.

The geometrical proof of the functionality of the Grover algorithm will give us insight on how the algorithm works and why the operators I_τ and I_0 have the above form [18].

Consider the plane spanned by $|s'\rangle$ and $|\omega\rangle$, where $|s'\rangle$ is a ket in the subspace perpendicular to $|\omega\rangle$. We will consider the first iteration, acting on the initial ket $|s\rangle$. Since $|\omega\rangle$ is one of the basis vectors in $|s\rangle$ the overlap is

$$|s'\rangle = \sqrt{\frac{N-1}{N}}$$

In geometric terms, the angle $\theta/2$ between $|s\rangle$ and $|s'\rangle$ is given by:

$$\sin \theta/2 = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

The operator U_ω is a reflection at the hyperplane orthogonal to $|\omega\rangle$ for vectors in the plane spanned by $|s'\rangle$ and $|\omega\rangle$; i.e. it acts as a reflection across $|s'\rangle$. The operator U_s is a reflection through $|s\rangle$. Therefore, the state vector remains in the plane spanned by $|s'\rangle$ and $|\omega\rangle$ after each application of the operators U_s and U_ω .

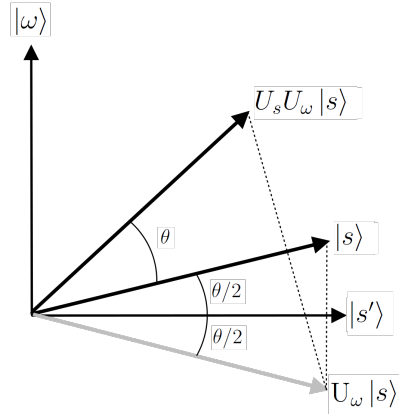


Figure 2.4: Geometric Proof of the function of Grover's algorithm

and it is straightforward to check that the operator $U_s U_\omega$ of each Grover iteration step rotates the state vector by an angle of $\theta = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{N}}$.

We need to stop when the state vector passes close to $|\omega\rangle$; after this, subsequent iterations rotate the state vector "away" from $|\omega\rangle$, reducing the probability of obtaining the correct answer. The exact probability of measuring the correct answer is:

$$\sin^2 \left(\left(r + \frac{1}{2} \right) \theta \right)$$

where "r" is the (integer) number of Grover iterations. The earliest time that we get a near-optimal measurement is therefore $r \approx \frac{\pi\sqrt{N}}{4}$.

After describing how the oracle leads us to the desired result, we are ready to describe the process which allows us to obtain the desired result. First of all, we need to prepare our system in a superposition of all possible states which should be described in an appropriate basis. On this superposition of states, we act the oracle for element τ i.e. I_τ which inverts the amplitude of the desired state. The operation of the algorithm makes use of quantum parallelism feature, which demands entanglement. In order to entangle two (or more qubits) we use a Hadamard gate. The following step is to apply the diffusion operator $I_0 = I - 2|0\rangle\langle 0|$, in order to amplify the state that was inverted by operator I_τ and finally apply one more Hadamard gate in order to read the outcome of the algorithm.

Therefore, Grover's algorithm is essentially a repetition of the unitary transformation

$$Q = -H I_0 H I_\tau \quad (2.11)$$

where $I_0 = I - 2|0\rangle\langle 0|$, $I_\tau = I - 2|\tau\rangle\langle \tau|$ and $H = \prod_{i=1}^n H_i$ is the product of Hadamard gates acting on the i -th qubit. This expression of Grover's

algorithm[34] transformation is equivalent to the original form [31],[32]

$$Q^{GR} = -I_0 H I_\tau H \quad (2.12)$$

The explicit expression of the transformation performed by a Hadamard gate is

$$H_i = \begin{cases} |0\rangle_i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_i + |1\rangle_i) \\ |1\rangle_i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_i - |1\rangle_i) \end{cases} \quad (2.13)$$

In fact, Grover's algorithm can make use of any unitary transformation instead of Hadamard gate, which in the worst case causes a constant slowdown in the number of iterations the algorithm needs to converge to the wanted state [33], thus it may be expressed in the general form

$$Q = -U I_0 U^{-1} I_\tau \quad (2.14)$$

The simplest case of use of Grover's algorithm:

Let's imagine the simple problem where we have four coloured cards (Red, Green, Blue and Yellow) that are hidden and we want to locate the green card for example.

Classically this problem requires on average 2.25 trials in order to locate the wanted card, though Grover's algorithm promises that we can locate it in one step.

First of all we need to define a suitable basis for our problem. This basis can be expressed as:

$$\begin{aligned} |Y\rangle = |0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |G\rangle = |1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |B\rangle = |2\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |R\rangle = |3\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\perp \end{aligned} \quad (2.15)$$

After defining the basis we need to create a superposition $|\Psi\rangle$ of all the states of the basis, as:

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{4}} \quad (2.16)$$

Since we want to find the green card, we define the respective oracle as

$$I_G = I_4 - 2|G\rangle\langle G| \quad (2.17)$$

whereas the diffusion operator I_0 is defined as

$$I_0 = I_4 - 2|\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (2.18)$$

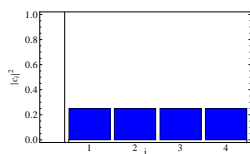


Figure 2.5: Probability amplitudes of the four states in the superposition after applying the initialization operator

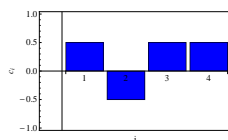


Figure 2.6: Probability amplitudes of the four states after applying the initialization operator

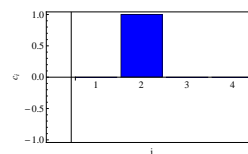


Figure 2.7: Probability amplitudes of the four states after applying the diffusion operator.

2.4 Shor's Algorithm

Encryption and decryption has been as old as the need for protecting sensitive information. During World War II, it was made quite clear that in order to gain advantage in a certain period, intelligence efficiency and the ability of monitoring enemy communications would be crucial for the outcome of the War. Encrypting information and making sure that only the desired target will be able to decipher the message is of grave importance today as well. The RSA algorithm (see for extra details [65]), on which modern encryption methods are based upon, uses three steps: **Key generation, encryption and decryption**. The process of generating the keys, encrypting and decrypting a message let's say **M**, between two individuals (let's say **Alice** and **Bob**) is as follows:

1. Choose two distinct prime numbers **p** and **q**. For security purposes the integers **p** and **q** should be chosen at random and should be of similar bit-length.
2. Compute $n = pq$
3. Compute $\phi(n) = (p - 1)(q - 1)$ where ϕ is *Euler's totient function*
4. Choose an integer e such that $1 < e < \phi(n)$ and greatest common divisor of $(e, \phi(n)) = 1$ (coprimes). **e is released as the public key exponent**
5. Determine d as: $d = e^{-1}(\text{mod } \phi(n))$. d is kept as the private key exponent. During the **encryption** the following procedure happens:
6. **Alice** transmits her public key **(n,e)** to **Bob** and keeps the private key secret.
7. **Bob** then wishes to send a message **M** to **Alice**, so he first turns message **M** into an integer **m**, such that $0 < m < n$ by using an agreed protocol, and then computes the ciphertext **c** corresponding to $c = m^e(\text{mod } n)$

8. Having decrypted the message, **Bob** transmits the message c to **Alice**. Alice can recover m from c via computing $m = c^d \pmod{n}$ and using the agreed protocol to convert it to **M**.

It is clear that the power of RSA algorithm is based on the fact that *there are no classical algorithms efficient enough to factorize large prime numbers*, since the best classical algorithm for a b -bit number n (larger than 100 digits) is for the *general number field sieve* algorithm, $O\left(\exp\left(\left(\frac{64}{9}b\right)^{1/3}(\log b)^{2/3}\right)\right)$ (sub-exponential). Shor's algorithm takes only $O(b^3)$ time (polynomial) and $O(b)$ space on b -bit number inputs. The efficiency of Shor's algorithm is due to the efficiency of the *Quantum Fourier Transform* as we will shortly discuss.

Number Theory provides us with a shortcut for factorizing large numbers. It involves the *period of a certain function*. We will give a simple example, to see how this method works.

Let's say that we want to factorize 15.

1. Find a coprime of 15 (let's say 11).
2. Divide 11 by 15 to get 0 with a remainder of 11
3. Square the remainder, getting 121.
4. Divide 121 by 15 to get 8 with a remainder of 1.
5. Cube 11 to get 1331.
6. Divide 1331 by 15, to get 88 with a remainder of 11.
 - We observe that the remainders 11 and 1 alternate with a period 2. So, we say that *the period of 11 with respect to being divided by 15 is 2*
7. Knowing the period (2) we raise 11 to the power given by its period to obtain $11^2 = 121$.
8. Take the square root of $\sqrt{121} = 11$.
9. Subtract and add 1 to get the pair of numbers 10 and 12.
10. Find the greatest common divisor of pairs $(10, 15) = 5$ and $(12, 15) = 3$ (using Euclidean algorithm).

This process is quite long for the given example, though, for very large numbers, the power of *Quantum Fourier Transform* for period finding makes the difference. Before describing this sub-routine of Shor's algorithm let's give the

general form of the algorithm. **The problem:** Given an odd (even numbers have the trivial divisor of two), composite number N , find an integer d strictly between 1 and N that divides N . **The solution:**

1. Run a primality test in order to verify that N is indeed a composite number and not a prime number.
2. Pick a random number $a < N$
3. Compute $\gcd(a, N)$ using Euclidean algorithm
4. If $\gcd(a, N) \neq 1$ then there is a nontrivial factor of N , so we are done.
5. Otherwise, use the *period finding sub-routine* to find r , the period of the following function:

$$f(x) = a^x \bmod N$$

ie. the order r of a in $(\mathbb{Z}_N)^\times$, which is the smallest positive integer r for which $f(x+r) = f(x)$ or $f(x+r) = a^{x+r} \bmod N = a^x \bmod N$.

6. If r is odd, go back to step 1.
7. If $\sqrt{a} \equiv -1 \pmod{N}$ go back to step 1.
8. $\gcd(\sqrt{a} \pm 1, N)$ is a nontrivial factor if N and we are done.

2.4.1 The Quantum Fourier Transform

The importance of Quantum Fourier Transform in quantum computation, makes it enough to define a whole set of problems that can be solved by using it. Such problems, apart from Shor's algorithm, are the quantum phase estimation algorithm that allows the estimation of the eigenvalues of a unitary operator and the hidden subgroup problem[66],[67].

Quantum Fourier Transform is the quantum analog of Discrete Fourier Transform. Classical DFT takes acts on a vector in \mathbb{C}^N , $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ and maps it to a vector $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1})$ according to the formula:

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega^{jk} \quad (2.19)$$

Remembering Euler's identity $e^{i\pi} + 1 = 0$ we set ω to be the primitive N -th root of unity, ie: $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$

Similarly, QFT transforms a vector

$$|\psi\rangle = a_0|\psi\rangle + a_1|\psi\rangle + \dots a_{N-1}|\psi\rangle$$

by applying a DFT on its amplitudes, giving us:

$$|\psi\rangle = \beta_0|\psi\rangle + \beta_1|\psi\rangle + \dots\beta_{N-1}|\psi\rangle \quad (2.20)$$

Given a random state vector $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} a_x|x\rangle \quad (2.21)$$

where n is the number of qubits, $QFT|\psi\rangle$ is defined as:

$$|\psi'\rangle = QFT|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} \frac{a_x e^{\frac{2\pi i}{2^n} xy}}{\sqrt{2^n}} |y\rangle \quad (2.22)$$

Rewriting the previous summation setting $M_{xy} = e^{2\pi i xy/2^n}$ we find that

$$\sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} \frac{a_x e^{\frac{2\pi i}{2^n} xy}}{\sqrt{2^n}} |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} \left(\sum_{y=0}^{2^n-1} M_{xy} a_x \right) |\psi\rangle \quad (2.23)$$

Thus the QFT transformation matrix is composed from the elements M_{xy} and we can calculate it to be:

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

A circuit implementing QFT is presented in 2.8.

2.4.2 Finding the period of a function using QFT

The implementation of Shor's algorithm, as it is stated by the problem itself, requires customized circuits for each problem. In the general case for a number N and the random a , we require two registers (input and output) consisting of L qubits, so that $N^2 \leq 2^L \leq 2N^2$. This requirement ensures that there are at least N different x , which produce the same $f(y)$, even as the period r approaches $N/2$. The procedure for finding the period is as follows:

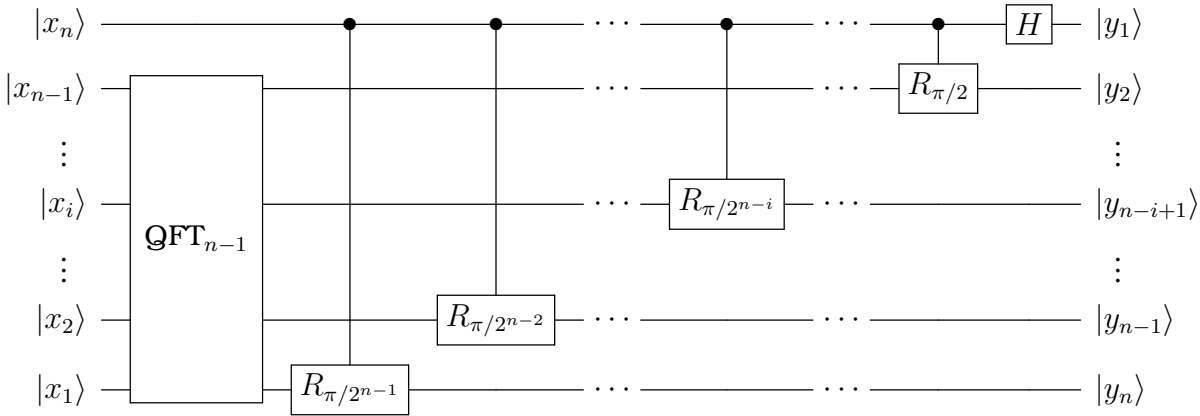


Figure 2.8: Quantum circuit representing the Quantum Fourier Transform for n qubits. Image rebuilt using Qcircuit from Wikipedia

1. Prepare 2 L -qubit registries in the initial state

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{x=0}^{2^L-1} |x\rangle \right) |0\rangle \quad (2.25)$$

2. Apply the unitary transformation U_f that defines $f_{a,N}(x) = a^x \bmod N$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{x=0}^{2^L-1} |x\rangle \right) |0\rangle \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{x=0}^{2^L-1} |x\rangle \right) |f_{a,N}(x)\rangle \quad (2.26)$$

3. Apply the QFT to the first register:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{x=0}^{2^L-1} |x\rangle \right) |f_{a,N}(x)\rangle \rightarrow \frac{1}{2^L} \sum_{y=0}^{2^L-1} \left(\sum_{x=0}^{2^L-1} e^{2\pi i xy/2^L} |y\rangle \right) |f(x)\rangle \quad (2.27)$$

4. Make a measurement on the first register obtaining y .
5. Find the period of the function r by constructing continued fractions for $\frac{y}{2^L}$. In case this step fails return to step 1.

Chapter 3

Implementation of quantum algorithms on cavity QED systems

The discussed quantum circuits required for quantum algorithms are essentially guidelines that explain which transformations are required to be performed on a set of qubits in order to obtain a running algorithm. The versatility of quantum systems, allows a great variety of possible experimental set-ups that implement those algorithms. In the past few years there has been intense activity on designing and developing systems that allow the manipulation of qubits, which is the key to creating devices that will perform with high fidelity quantum algorithms.

Those set-ups include ion traps ([68, 47]), Nuclear Magnetic Resonance systems (NMR) [50], photonic systems ([69],[70]), the promising circuit QED platform [51],[52],[53] and of course microwave cavity QED. In what follows we will discuss how the search algorithms that were presented in the previous chapter are implemented on cavity QED, following the papers of Serge Haroche [37] on Grover's algorithm and Marlan O. Scully on Shor's algorithm [36].

The first thing we need to mention in order to proceed forward, is the fact that on cavity QED systems we have the freedom of choosing between atomic levels or cavity states when it comes to defining "what the qubit is". This fact allows cavity QED systems to be versatile and adjustable to many modifications as long as those adjustments are allowed by the limitations of the experimental setup.

There is a big heritage of techniques that have been developed in cavity QED setups that allow us to precisely create entangled states on demand [71], perform Quantum Non-Demolition (QND) measurements [72], [73] and precisely manipulate the state of both atoms and cavity-fields using techniques that are described in detail in [6].

3.1 Grover's search algorithm

The challenge regarding the implementation of Grover's algorithm is setting up a series of pulses that will perform the oracle operator which is essentially a conditional phase gate operation that inverts the amplitude of the desired state.

The freedom in the choice of appropriate unitary transformations in order to perform the equivalent process in Grover's algorithm as it was expressed in equation 2.14, suggests that we may search for an expression which can be implemented in cavity QED systems using simple rotations that can be performed with high accuracy using Ramsey zones and external microwave sources. The qubits that are used in this process are two circular Rydberg atoms A_1 and A_2 that are prepared by an oven. They come out with specific velocities, that define the interaction time with every subsystem of the setup and they are both initially in their ground states.

In order to handle every atom separately, we need to define in which state of the two atoms correspond the states $|0\rangle$ and $|1\rangle$.

For A_1 , state $|g\rangle$ is defined as $|0\rangle$ and state $|e\rangle$ as $|1\rangle$. Since the pulses have to act at the same time on both atoms, states $|0\rangle$ and $|1\rangle$ for A_2 need to be defined in a different way to avoid errors on the manipulation of each atom. Thus, the use of the lower energy level $|i\rangle$ to encode $|1\rangle$ for A_2 and $|g\rangle$ for $|0\rangle$ resolves this issue.

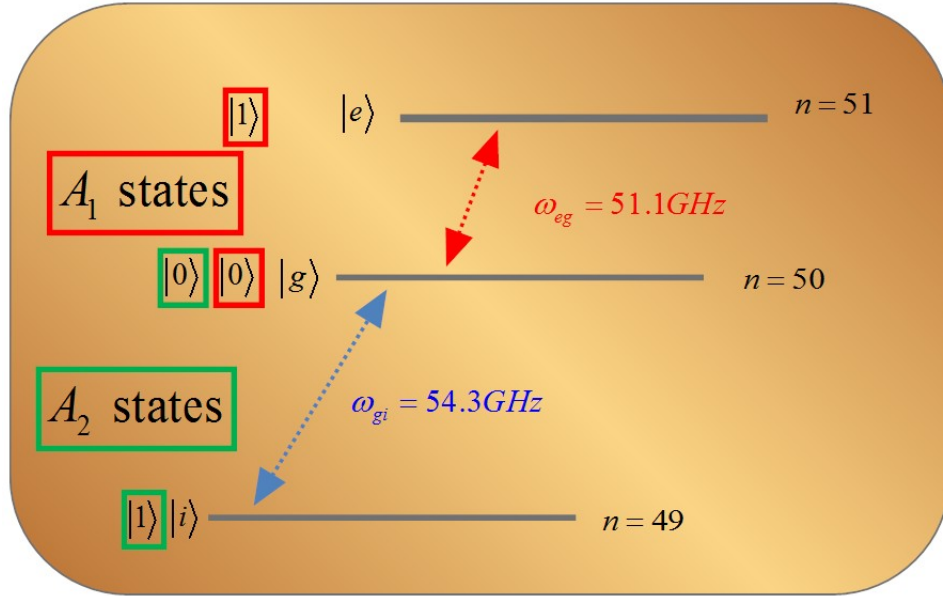


Figure 3.1: Qubit definition for Grover's algorithm.

The simplest case in which the algorithm can be performed, involves 2 qubits

($n=2$), thus this case corresponds to the example we discussed in the previous chapter, giving us four states:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |2\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\perp \\ |3\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\perp \end{aligned} \quad (3.1)$$

Hadamard gates are single-qubit gates that can be performed using $\pi/2$ pulses, thus we concentrate on the realization of the I_τ inversion and diffusion I_0 operations. Since we can handle every atom separately, we have to find equivalent expressions for the Grover operation Q , that will perform rotations in every single qubit. The required angle of rotation for each qubit will depend on the kind of oracle that is realized, thus we define the angles θ_1 and θ_2 by which each one of the atoms (qubits) is rotated, using the following convention:

Rotations for:	θ_1	θ_2
$ 0\rangle$	π	π
$ 1\rangle$	0	π
$ 2\rangle$	π	0
$ 3\rangle$	0	0

Table 3.1: Definition of the angle of rotation for the realization of the oracles.

Next, the operation $X_j(\theta)$ is defined (index j declares on which qubit it is performed), by the explicit expression:

$$X_j(\theta) : \begin{cases} |0_j\rangle \rightarrow \cos \frac{\theta}{2} |0_j\rangle + i \sin \frac{\theta}{2} |1_j\rangle \\ |1_j\rangle \rightarrow i \sin \frac{\theta}{2} |0_j\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |1_j\rangle \end{cases} \quad (3.2)$$

The action of one Hadamard operation before and after the operation X_j , leads to the operation:

$$Z_i(\pm\theta) = H_i X_i(\mp\theta) H_i \quad (3.3)$$

The equivalent expression for the operators I_τ regarding the convention of 3.1 and the use of the quantum phase gate that is defined by the unitary matrix

$$I_{QPG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

may now be written as:

$$I_\tau = I_{QPG}[Z_1(\theta_1)H_1][Z_2(\theta_2)H_2] \quad (3.5)$$

It is easy to show that the operation of the quantum phase gate (I_{QPG}) can be performed either after or before the rotations of the atoms, so that:

$$I_{QPG}[Z_1(\theta_1)][Z_2(\theta_2)] = [Z_1(\theta_1)][Z_2(\theta_2)]I_{QPG} \quad (3.6)$$

Thus, the I_0 operator of Grover's algorithm may be written setting $\theta_1 = \pi$ and $\theta_2 = \pi$ as:

$$[H_1 Z_1(\pi)][H_2 Z_2(\pi)] I_{QPG} \quad (3.7)$$

Using the abbreviations

$$S_i = X_i(-\pi)H_i \quad (3.8)$$

$$P_i(\theta) = H_i X_i(-\theta) \quad (3.9)$$

we may rewrite the Grover operation (Q) as:

$$Q = S I_{QPG} H I_{QPG} P \quad (3.10)$$

The explicit expression for the abbreviations S_j and P_j are:

$$S_j : \begin{cases} |0_j\rangle \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} (-|0_j\rangle - |1_j\rangle) \\ |1_j\rangle \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} (|0_j\rangle - |1_j\rangle) \end{cases} \quad (3.11)$$

$$P_j : \begin{cases} |0_j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} |0_j\rangle + e^{i\frac{\theta}{2}} |1_j\rangle \right) \\ |1_j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} |0_j\rangle - e^{i\frac{\theta}{2}} |1_j\rangle \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

The matrix form of the oracle operator I_τ is:

$$I_\tau = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\theta_1-\theta_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{i}{2}(\theta_1-\theta_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Using the matrix form of all the operators as we discussed previously we may write the Grover operation as:

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} & -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & -e^{\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} \\ -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} & e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & -e^{\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} \\ -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} & -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & e^{\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} \\ -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} & -e^{-\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & -e^{\frac{1}{2}i(\theta_1-\theta_2)} & -e^{\frac{1}{2}i(\theta_1+\theta_2)} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Admittedly, the most intriguing part of the proposed experiment is the realization of the Quantum Phase Gate. In order to perform this operation, the team of Haroche made use of the van der Waals interaction of the two Rydberg atoms, which is assisted by the cavity. A detailed description of this specific experiment may be found in [74].

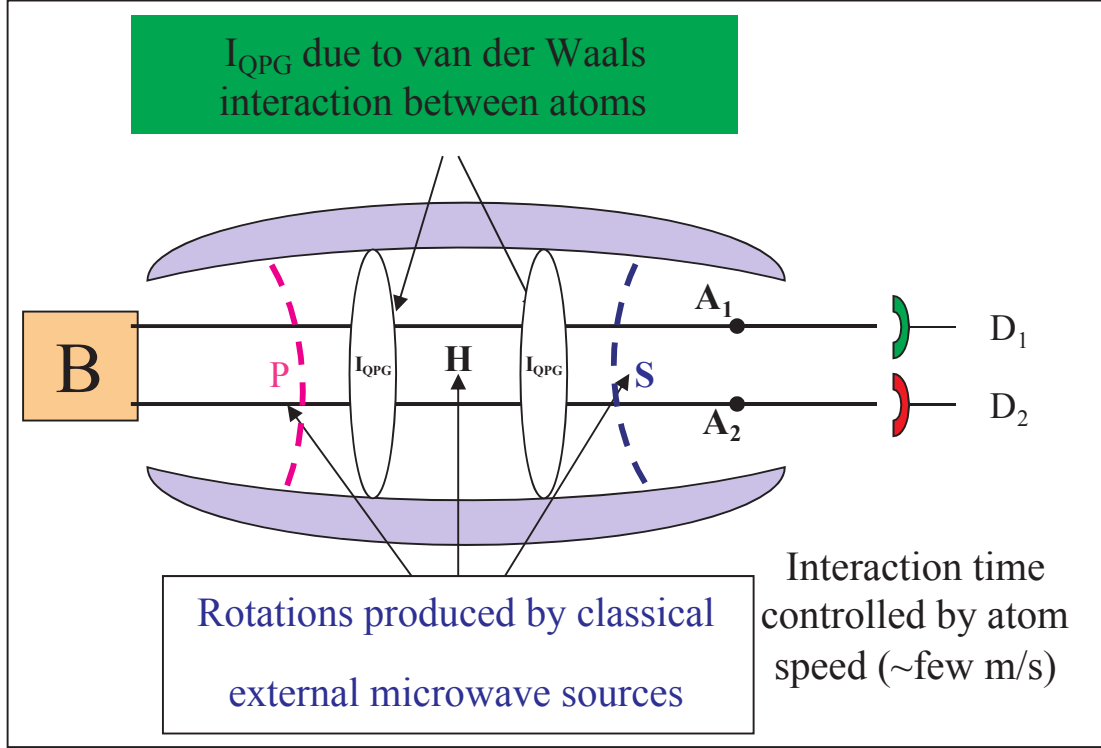


Figure 3.2: Experimental setup for the realization of Grover algorithm in cavity QED. Atoms 1 and 2 cross the cavity with the same velocities but on different positions and undergo pulses S, H, P from external microwave sources and interact together twice inside the cavity via assisted van der Waals interactions.

The interaction Hamiltonian describing the interaction of two atoms with the cavity field, in the interaction picture is

$$H_i = g \sum_{j=1,2} \left(e^{-i\delta t} \hat{a}^\dagger \hat{S}_j^- + e^{i\delta t} \hat{a} \hat{S}_j^+ \right) \quad (3.15)$$

where $\hat{S}_j^+ = |e_j\rangle\langle g_j|$ and $\hat{S}_j^- = |g_j\rangle\langle e_j|$ with $|g_j\rangle$ and $|e_j\rangle$ ($j=1,2$) being the ground and excited states respectively of atoms j . In the case $\delta \gg g$ (dispersive regime), there is no energy exchange between the atoms and the cavity, thus the atoms may interact with each other.

The effective Hamiltonian of this interaction is given by

$$H_i = \lambda \left[\sum_{j=1,2} (|e_j\rangle\langle e_j| \hat{a} \hat{a}^\dagger - |g_j\rangle\langle g_j| \hat{a}^\dagger \hat{a}) + (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+) \right] \quad (3.16)$$

where $\lambda = g^2/\delta$. The first two terms describe the photon number dependent Stark shifts, while the last two terms describe the energy exchange between the two atoms.

If the cavity is initially in the vacuum state the Hamiltonian becomes (see for example Chapter 19 of [14] and [75]):

$$H_{eff} = \lambda \left[\sum_{j=1,2} |e_j\rangle\langle e_j| + (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+) \right] \quad (3.17)$$

In this expression the first term describes the Lamb shift, whereas the second term the energy exchange between the two atoms assisted by the cavity. When the interaction time is chosen so that $\lambda t = \pi$, the system undergoes the transition:

$$\begin{aligned} |g_1\rangle|g_2\rangle &\rightarrow |g_1\rangle|g_2\rangle \\ |g_1\rangle|i_2\rangle &\rightarrow |g_1\rangle|i_2\rangle \\ |e_1\rangle|g_2\rangle &\rightarrow |e_1\rangle|g_2\rangle \\ |e_1\rangle|i_2\rangle &\rightarrow -|e_1\rangle|i_2\rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

The process described corresponds to the realization of the quantum phase gate.

Describing the details of the experiment, we have to note that the cavity is initially in the vacuum state, its temperature is dropped to 1.3K with the mean number of thermal photons to 0.7. In order to further cool it, a series of atoms in ground state $|g\rangle$ absorb the residual thermal field, thus providing $\bar{n} = 0.12$ [76]. In state of the art systems an average thermal photon number of 0.05 is achieved. The cavity is constructed by superconducting niobium mirrors allowing high Q values ($Q = 3 \times 10^8$), while values of Q in the order of 10^{10} have been achieved [61]. The coupling of the atoms to the cavity field is $\Omega/2\pi = 50kHz$, whereas the detuning $\delta/2\pi = 200kHz$ which satisfies the requirements of the dispersive regime and the H_{eff} as it is described in equation 3.17.

In order to obtain sufficient time for two quantum phase gates (atom-cavity interaction time 2.5×10^{-4}) the atoms crossing the cavity should have velocities $\sim 40m/s$. The total interaction time with the mode is $120\mu s$, short compared to the photon lifetime which is 1ms for a cavity with $Q = 3 \times 10^8$.

3.1.1 An alternative realization of the quantum phase gate

The challenge for the realization of a two qubit quantum phase gate, has led to various proposed experiments. Of special interest is the setup proposed in [77],

where the authors describe a setup that will realize the quantum phase gate and give an example of how it may be used for the implementation of Grover's algorithm.

The transformation performed by a 2-qubit quantum phase gate, may be written in the form:

$$Q_\eta |\alpha_1, \beta_2\rangle = \exp[i\eta \delta_{\alpha_1,1} \delta_{\beta_2,1}] |\alpha_1, \beta_2\rangle \quad (3.19)$$

where $|\alpha_1\rangle$ and $|\beta_2\rangle$ stands for the the basis states $|0\rangle$ or $|1\rangle$ of the qubits 1 and 2 respectively. The explicit form of Q_η is:

$$Q_\eta = |0_1, 0_2\rangle\langle 0_1, 0_2| + |0_1, 1_2\rangle\langle 0_1, 1_2| + |1_1, 0_2\rangle\langle 1_1, 0_2| + e^{i\eta} |1_1, 1_2\rangle\langle 1_1, 1_2| \quad (3.20)$$

Using the relations $|0\rangle\langle 0| = (1 + \sigma_z)/2$ and $|1\rangle\langle 1| = (1 - \sigma_z)/2$, the matrix representation of Q_η is:

$$Q_\eta = I_1 I_2 - \frac{1}{4} (1 - e^{i\eta}) (I_1 I_2 - I_1 \sigma_{z2} - \sigma_{z1} I_2 + \sigma_{z1} \sigma_{z2}) \quad (3.21)$$

The case we are interested in, is for $\eta = \pi$.

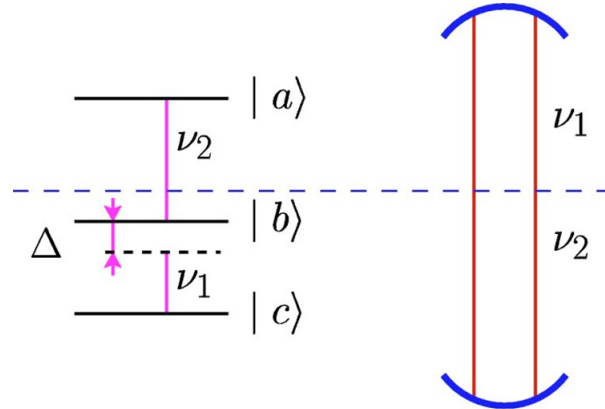


Figure 3.3: Three level system

Figure 3.3 describes the proposed setup. A cavity supporting two resonant frequencies ν_1 and ν_2 and in this case the photon number states of the cavity $|0\rangle$ and $|1\rangle$ represent logic 0 and 1 respectively.

If the vacuum Rabi frequencies associated with the frequencies supported by the cavity modes ν_1 and ν_2 are g_1 and g_2 and we have a detuning Δ such that $\omega_{ab} = \nu_2$ and $\omega_{bc} = \nu_2 + \Delta$, then a quantum phase gate may be realized when a three level atom initially in its ground state $|c\rangle$ passes through the cavity so that:

a) The detuning $\Delta = g_2$.

b) The interaction time of the atom with the cavity is such that $g_1\tau = \sqrt{2}\pi$.

In the case where the cavity has one photon in each of its modes, the effective Hamiltonian for the interaction in the dipole and rotating wave approximation is:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (3.22)$$

where

$$\mathcal{H}_0 = \hbar\nu_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\nu_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hbar\omega_{bc}|b\rangle\langle b| + \hbar\omega_{ac}|a\rangle\langle a| \quad (3.23)$$

$$\mathcal{H}_1 = \hbar g_1 \left(\hat{a}_1|b\rangle\langle c| + \hat{a}_1^\dagger|c\rangle\langle b| \right) + \hbar g_2 \left(\hat{a}_2|a\rangle\langle b| + \hat{a}_2^\dagger|b\rangle\langle a| \right) \quad (3.24)$$

Moving to the interaction picture we obtain:

$$\mathcal{H}_I = e^{-\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} \mathcal{H}_1 e^{\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} = H_1 + H_2 \quad (3.25)$$

Since the only allowed states for the atom-cavity system are those that preserve the energy and the total number of excitations, the only allowed states are $|a, 0, 0\rangle, |b, 0, 1\rangle$ and $|c, 1, 1\rangle$, so the terms H_1 and H_2 are:

$$\begin{aligned} H_1 &= \hbar g_1 \left(\hat{a}_1|b\rangle\langle c|e^{-i\Delta t} + \hat{a}_1^\dagger|c\rangle\langle b|e^{i\Delta t} \right) \\ &= \hbar g_1 \left(|b, 0, 1\rangle\langle c, 1, 1|e^{-i\Delta t} + |c, 1, 1\rangle\langle b, 0, 1|e^{i\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

and

$$\begin{aligned} H_2 &= \hbar g_2 \left(\hat{a}_2|a\rangle\langle b| + \hat{a}_2^\dagger|b\rangle\langle a| \right) \\ &= \hbar g_2 \left(|a, 0, 0\rangle\langle b, 0, 1| + |b, 0, 1\rangle\langle a, 0, 0| \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

If we define the dressed states that correspond to the field mode supporting the frequency ν_2 , as:

$$\begin{aligned} |+\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|a, 0, 0\rangle + |b, 0, 1\rangle) \\ |-\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|a, 0, 0\rangle - |b, 0, 1\rangle) \end{aligned} \quad (3.28)$$

we may rewrite the expression for H_2 as:

$$H_2 = \hbar g_2 (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) \quad (3.29)$$

with eigenvalues $\hbar g_2$ and $-\hbar g_2$. Writing down the Hamiltonian H_1 in the interaction picture of H_2 yields:

$$H_{1I} = \frac{\hbar g_1}{\sqrt{2}} (|+\rangle\langle c, 1, 1| e^{-i(\Delta+g_2)t} - |-\rangle\langle c, 1, 1| e^{-i(\Delta-g_2)t} + |c, 1, 1\rangle\langle +| e^{i(\Delta+g_2)t} - |c, 1, 1\rangle\langle -| e^{i(\Delta-g_2)t}) \quad (3.30)$$

If we set $g_2 = \Delta$, then the above expression simplifies to:

$$H_{1I} = \frac{\hbar g_1}{\sqrt{2}} (|+\rangle\langle c, 1, 1| e^{-i2\Delta t} - |-\rangle\langle c, 1, 1| + |c, 1, 1\rangle\langle +| e^{-i2\Delta t} - |c, 1, 1\rangle\langle -|) \quad (3.31)$$

If the detuning is large, we can ignore the oscillating terms, thus

$$H_{1I} = -\frac{\hbar g_1}{\sqrt{2}} (|-\rangle\langle c, 1, 1| + |c, 1, 1\rangle\langle -|) \quad (3.32)$$

The Rabi frequency between the levels $|-\rangle$ and $|c, 1, 1\rangle$ is $g_1/\sqrt{2}$, which means that selecting the interaction time so that $g_1\tau = \sqrt{2}\pi$, gives the transformation

$$|c, 1, 1\rangle \rightarrow -|c, 1, 1\rangle \quad (3.33)$$

This means that the above process yields the quantum phase gate Q_π .

3.2 Implementation of the quantum Fourier transform

A similar approach to the alternative described previously for Grover's algorithm, was described in [36] in order to describe a setup able to realize the heart of Shor's algorithm, ie. the Quantum Fourier Transform. The QFT is in general more demanding when one considers the number of qubits involved.

Supposing we want to act the quantum Fourier transform operation on a state $|a\rangle$ for which $2^q < a < 2^{q+1}$, we would obtain:

$$N_{QFT} = \frac{1}{\sqrt{2^q}} \sum_{c=0}^{2^q-1} e^{2\pi i ac/2^q} |c\rangle \quad (3.34)$$

In order to realize the algorithm it is enough to describe the operation of a one-qubit gate and a quantum phase gate.

¹If we wanted to map $|9\rangle \equiv |1, 0, 0, 1\rangle$ we would require 4 qubits, since $2^4 < 9 < 2^5$

One qubit gates are easily realizable in cavity QED setups since they are rotations precisely performed by Ramsey zones. In terms of Pauli spin matrices it is written as:

$$\hat{U}_{\theta,\phi} = \cos(\theta)\mathbf{I} - \cos(\phi)\sin(\theta)\hat{\sigma}_x - i\sin(\phi)\sin(\theta)\hat{\sigma}_y \quad (3.35)$$

For two qubits j and k , the quantum phase gate for $\eta = \pi$ is given similar to equation 3.20 as:

$$Q_{\pi}^{j,k} = |0_j, 0_k\rangle\langle 0_j, 0_k| + |0_j, 1_k\rangle\langle 0_j, 1_k| + |1_j, 0_k\rangle\langle 1_j, 0_k| + e^{i\pi}|1_j, 1_k\rangle\langle 1_j, 1_k| \quad (3.36)$$

In order to obtain the QFT for $q=3$, we need to perform the transformations

$$A_0 B_{01} B_{02} A_1 B_{12} A_2 \quad (3.37)$$

where $A_i \equiv U_{\pi/4, \pi/2}$ represent the one bit gates and $B_{jk} \equiv Q_{\pi/2^{k-j}}$ represent the two-qubit quantum phase gates.

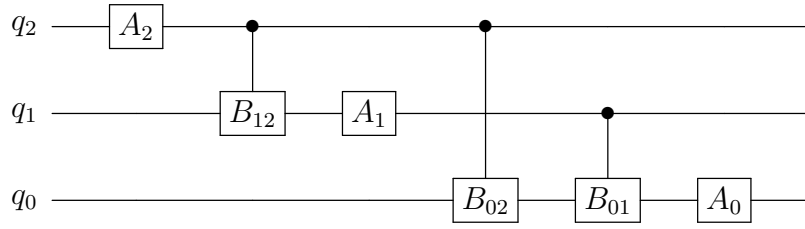


Figure 3.4: Quantum circuit realizing the quantum Fourier transform for $q=3$. $A_i \equiv U_{\pi/4, \pi/2}$ represent the one bit gates and $B_{jk} \equiv Q_{\pi/2^{k-j}}$ represent the two-qubit quantum phase gates.

The unitary one-bit gate can be implemented by applying a classical field to a two-level atom, which results to a Hamiltonian given by:

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2} (e^{-i\phi}|a\rangle\langle b| + e^{i\phi}|b\rangle\langle a|) \quad (3.38)$$

where $|a\rangle$ is the excited state and $|b\rangle$ the ground state. The time evolution operator of this system is:

$$\begin{aligned} U_I(t) &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}Ht\right] \\ &= \cos(\Omega t/2) (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) - i\sin(\Omega t/2) (e^{-i\phi}|a\rangle\langle b| + e^{i\phi}|b\rangle\langle a|) \end{aligned} \quad (3.39)$$

In the above equation, the transformation described is an one-bit unitary gate with $\theta = \frac{\Omega t}{2}$.

Regarding the quantum phase gate, since it is necessary to perform more than one specific gates for the case of $q = 3$, one may consider the case of a three level atom in V configuration as it shown in 3.5. Transition $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$ is completely off resonant with the cavity field, while $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ is dispersively coupled to the cavity.

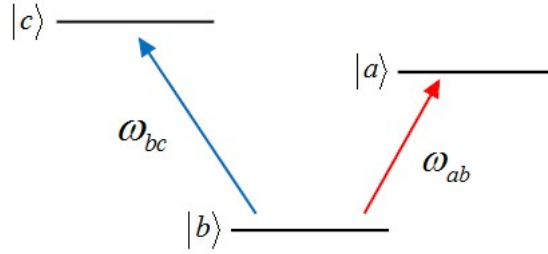


Figure 3.5: Atom in V configuration. Transition $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$ is completely off resonant with the cavity field, while $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ is dispersively coupled to the cavity.

The effective Hamiltonian of the system is given by:

$$\mathcal{H}_{eff} = -\frac{\hbar g^2}{\Delta} (\hat{a}\hat{a}^\dagger|c\rangle\langle c| - \hat{a}^\dagger\hat{a}|b\rangle\langle b|) \quad (3.40)$$

where $\Delta = \omega_{cb} - \nu$ is the detuning. Supposing an initial state of the atom-field system described by

$$\frac{1}{2} (|0, a\rangle + |0, b\rangle + |1, a\rangle + |1, b\rangle) \quad (3.41)$$

the passage of the atom through the cavity results in a phase change $\eta = g^2\tau/\Delta$ of the term $|1, b\rangle$, ie:

$$\frac{1}{2} (|0, a\rangle + |0, b\rangle + |1, a\rangle + e^{i\eta}|1, b\rangle) \quad (3.42)$$

Setting appropriate values for detuning Δ and interaction time τ allows the realization of the quantum phase gate for $\eta = \pi$.

Returning to the realization of Shor's algorithm for the case of $q = 3$, in order to realize the phase gates that are required (B_{01}, B_{02}, B_{12}) one would suggest that three different types of atoms are required. One of the main advantages of manipulating Rydberg atoms is the capability of making use of their atomic sublevels by applying an external magnetic field, thus lifting the degeneracy and allowing the proper level spacings between the atomic levels. For example, using an external magnetic field we can achieve the atomic level diagram of figure 3.6. The ground state $|b\rangle$ of the atoms corresponds to $|1\rangle$ and states $|a_i\rangle$ to $|0\rangle$. In this way we can ensure that the transitions $|b\rangle \rightarrow |a_i\rangle$ are resonant only in cavity i

which supports the frequency ν_i , while the one-bit gates $A_i \equiv U_{\pi/4, \pi/2}^i$ realized by classical fields of frequency ν_i perform the necessary transformations. Pulses $U_{\pi/2, 0}^i$ are used to flip the states $|a_i\rangle$ and $|b\rangle$ before atom i enters the cavity and are essential, since states $|b\rangle$ were defined as $|1\rangle$ and $|a_i\rangle$ as $|0\rangle$. The setup is presented in figure 3.7.

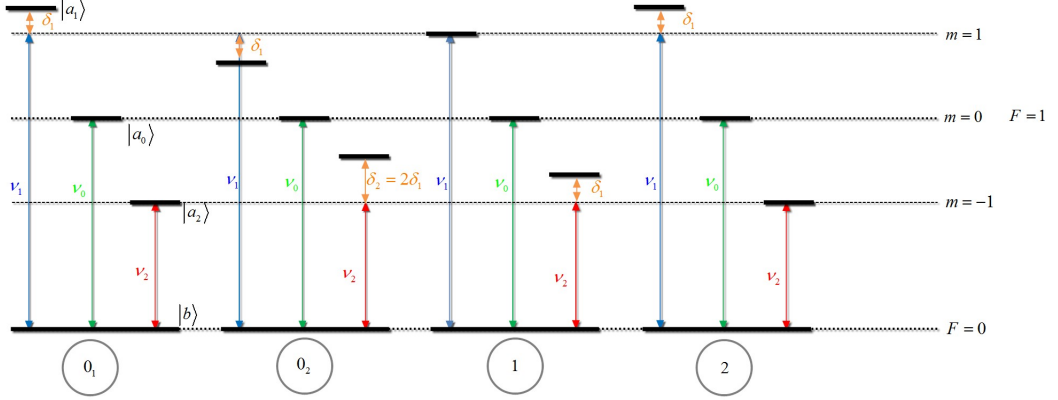


Figure 3.6: Atomic levels under the influence of the magnetic field. For each atom the ground state $|b\rangle$ corresponds to $|1\rangle$ and $|a_i\rangle$ to $|0\rangle$.

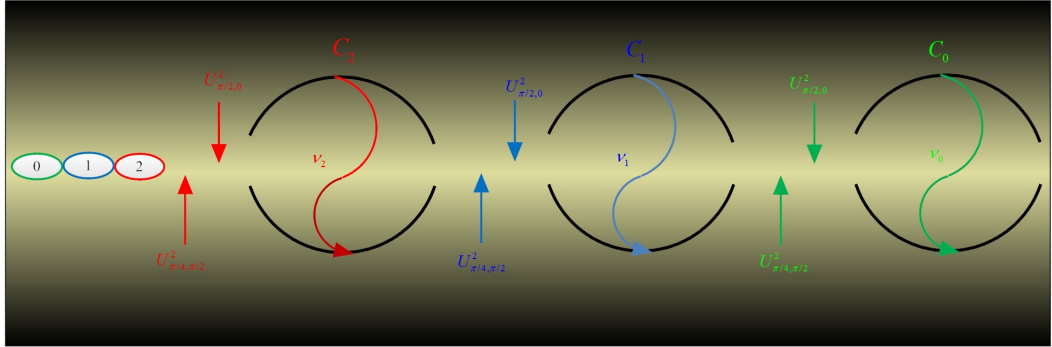


Figure 3.7: Experimental setup for the realization of QFT for 3 qubits.

The interaction times τ , the coupling constant g and the detunings δ_i are chosen so that $\frac{g^2\tau}{\delta_{j-k}} = \pi/2^{j-k}$. Especially, regarding the interaction time and coupling constants they are chosen so that when atom i passes through cavity C_i , will transfer its coherence to the cavity and leave in the ground state, so that the QFT is stored in the cavities.

The readout requires a triplet of atoms prepared in the ground state and resonant to each cavity, in order to measure the field inside the cavity. If one

atom comes in the ground state the output is 0, whereas if it comes in an excited state it will correspond to 1.

This scheme can be theoretically generalized for any number n of qubits. In the next chapter, we will discuss how extended cavity QED setups, where on top of the atom-cavity interaction, the cavities are allowed to interact directly through photon hopping, can be exceptional models for other applications, including quantum simulations.

Chapter 4

Implementing quantum gates in coupled cavity arrays

Describing an experimental setup for the realization of Shor's algorithm, we discussed how a system of three separate cavities could be used in order to perform the required two qubit transformations. In that setup, the cavities were supporting different frequencies, thus interacting with specific atoms each time, to perform the necessary operations on qubits. Moreover, we didn't require any field transfer from one cavity to the other, but required that the cavities allowed the passage of the atoms, as well as that the atoms had the appropriate velocities to achieve the desirable interaction time with the cavity they would interact.

In parallel to the developments of implementing QIP with quantum optical systems, the idea of using quantum systems for quantum simulation attracted a lot of attention. *Quantum Simulations* [21],[38],[78],[79],[80], is the use of specifically engineered systems with controllable local interactions, in order to simulate complex physical phenomena where both classical computers modelling and experimental attempts fail.

In this way it was shown that is possible, to determine the behaviour of a lot of phenomena lacking full theoretical explanation, like phase transitions in solid state physics and quantum magnetism. More recently, there have been efforts in describing exotic physical theories from high energy physics, like the Thirring model and the renormalization of mass [81, 82].

The platforms for quantum simulation initially included optical lattices with cold atoms [83, 84, 85, 86] , ion traps [47, 87, 88, 89, 90], and NMR setups [91, 92]. The idea of using coupled cavities each containing one two-level-system (TLS) as a quantum simulator was initially proposed for the study of phenomena like Mott transitions and XY spin models [39]. This was followed by studies of the phase diagram of the system and applications in simulating exotic effects in condensed matter physics have been developed [93, 94, 95, 96, 97, 98, 99] .

Lately, studies of driven dissipative Jaynes-Cummings arrays have emerged analyzing the Jaynes-Cummings-Hubbard model out of equilibrium and the signatures of the underlying many body effects, in the steady states of the system [100, 101, 102, 103, 104, 105].

This fascinating new perspective has stimulated works that encouraged the experimental progress on specific structures, also for the purpose of performing quantum computation. The most spectacular development was definately in Circuit QED platforms [106].

In this final chapter of the present thesis we will study the simple and easier to experimentally implement case, of a system of two coupled cavities and discuss a scheme for implementing the quantum phase gate there.

4.1 Quantum dynamics in the two coupled cavities model

The Jaynes-Cummings model for the description of the interaction of a two-level atom with a single mode electromagnetic field, is described by the Hamiltonian

$$\hat{H}_{J-C} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \quad (4.1)$$

If we consider a system of two empty cavities, each one of them supporting a frequency ω_i , evanescently coupled, this allows the photons from C_1 to hop to C_2 and vice versa, then we have a Hamiltonian of the form:

$$\hat{H} = \hbar\omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + J (\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1) \quad (4.2)$$

where \hat{a}_i , \hat{a}_i^\dagger are the annihilation and creation operators for the field modes and J is the "hopping" parameter that describes how a field state from C_1 can move to C_2 and vice versa. It's worth mentioning that the coupling parameter between the cavities has frequency dimensions [107],[108], is defined as the overlap between the two fields that are sustained in the cavities and is proportional to the quantity

$$J \propto \int d\vec{r} \vec{u}_1(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{u}_2(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad (4.3)$$

where $\vec{u}_i(\vec{r} - \vec{r}_i)$ is the vector field distribution of the mode, \vec{r} is a position vector in the cavity and \vec{r}_i is a reference position within each cavity. Supposing

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ¹ we may define the quantities:

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + \hat{a}_2) \\ \hat{A}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)\end{aligned}\tag{4.4}$$

leading to the equation

$$\hat{\mathcal{H}}_{field} = \hbar\omega_{c1}\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1 + \hbar\omega_{c2}\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2\tag{4.5}$$

The new frequencies $\omega_{c1,2} = \omega \pm J$ correspond to the two normal modes of a mechanical system of two 1D coupled oscillators. The general case is treated in [107]. One may easily verify that those delocalised field modes, obey the bosonic operators commutation relations

$$[A_i, A_i^\dagger] = 1, i = 1, 2, \dots\tag{4.6}$$

Supposing each cavity now contains a fixed two-level atom, the total hamiltonian of the system is given by:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \hat{H}_{J-C,1} + \hat{H}_{J-C,2} + J (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) \Leftrightarrow \\ \hat{\mathcal{H}} &= \sum_{j=1,2} \left[\frac{\hbar\omega_0\hat{\sigma}_{j3}}{2} + \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + g (\hat{a}_j \hat{\sigma}_{j+} + \hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma}_{j-}) \right] + J (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1)\end{aligned}\tag{4.7}$$

This Hamiltonian describes fully the interaction in the two cavities system. As it is clearly seen, the total number of excitations is conserved. In this case, we will study the dynamics of the one excitation case for simplicity. In this case we consider a general state:

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|g_1g_210\rangle + b(t)|g_1g_201\rangle + c(t)|e_1g_200\rangle + d(t)|g_1e_200\rangle\tag{4.8}$$

The first two terms in each ket represent the state of atoms 1 and 2 respectively, whereas the last two represent the cavity field states in cavities 1 and 2. The time evolution of this one-excitation state is given by the Schrödinger equation with the use of the delocalised modes ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned}\alpha_j(t) &= a(t) + (-1)^j b(t) \\ \beta_j(t) &= c(t) + (-1)^j d(t)\end{aligned}\tag{4.9}$$

¹In this degenerate case the coupling parameter is limited by $|J| < \omega/2$

The Schrödinger equation, using the above delocalised modes gives

$$\begin{aligned}\alpha_j(t) &= e^{-i(\omega_0 - \Omega_j/2)t} \left[\alpha_j(0) \cos(\nu_j t) + \frac{i}{\nu_j} \left(\frac{\Omega_j}{2} \alpha_j(0) - g\beta_j(0) \right) \sin(\nu_j t) \right] \\ \beta_j(t) &= e^{-i(\omega_0 - \Omega_j/2)t} \left[\beta_j(0) \cos(\nu_j t) - \frac{i}{\nu_j} \left(\frac{\Omega_j}{2} \beta_j(0) - g\alpha_j(0) \right) \sin(\nu_j t) \right]\end{aligned}\quad (4.10)$$

where

$$\nu_j = \sqrt{\left(\frac{\Omega_j}{2}\right)^2 + g^2} \quad (4.11)$$

and we have set

$$\Omega_{1,2} = \Delta \pm J \quad (4.12)$$

Using the relation 4.4 and a new set of operators that describe the atomic modes defined as:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{1+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\sigma}_{1+} + \hat{\sigma}_{2+}) \\ \hat{S}_{2+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\sigma}_{1+} - \hat{\sigma}_{2+})\end{aligned}\quad (4.13)$$

we may rewrite the total Hamiltonian of the system in the form:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{j=1,2} \left[\omega_0 \hat{S}_{j+} \hat{S}_{j-} + \omega_{cj} \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j + g \left(\hat{A}_j \hat{S}_{j+} + \hat{A}_j^\dagger \hat{S}_{j-} \right) \right] \quad (4.14)$$

In order to investigate the region of parameters that will allow us to use the two coupled cavities setup as a quantum phase gate, we resort to analytical calculations and numerical simulations, that are presented in the following.

4.2 Analytical treatment

The form of the equation 4.14 resembles to the form of 4.1. Indeed, some algebra can verify that if we consider the interaction Hamiltonian

$$\hat{H}_I = \sum_{j=1,2} \left[g \left(\hat{A}_j \hat{S}_{j+} + \hat{A}_j^\dagger \hat{S}_{j-} \right) \right] \quad (4.15)$$

and move to the interaction picture in respect to the term,

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1,2} \left(\omega_0 \hat{S}_{j+} \hat{S}_{j-} + \Omega_j \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \right) \quad (4.16)$$

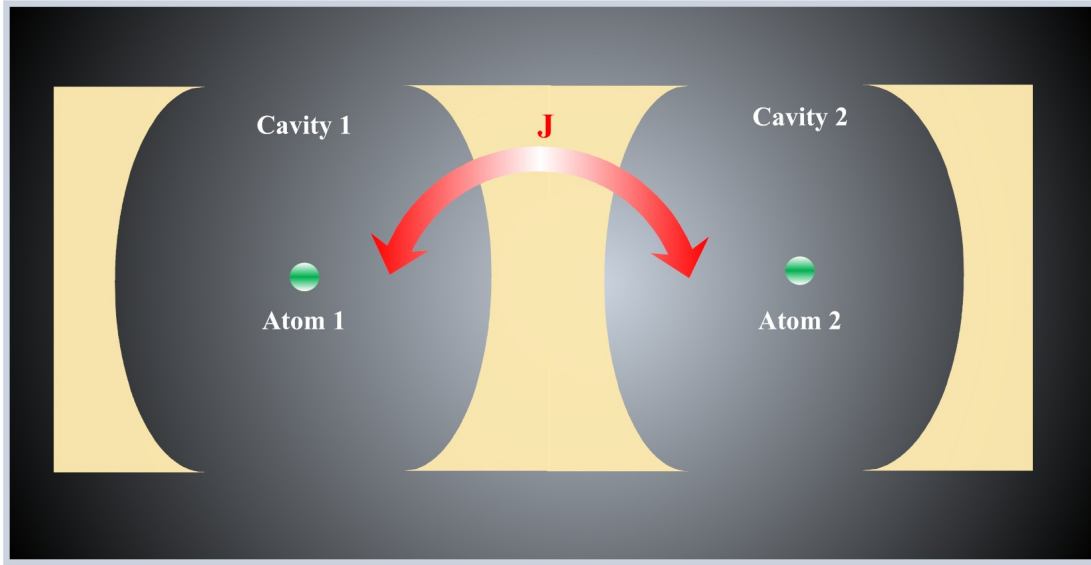


Figure 4.1: Two coupled cavities interacting with fixed atoms.

then, we have a similar procedure like the one we did in order to derive the state evolution for the Jaynes-Cummings model. Indeed, since $[\hat{H}_0, \hat{H}_I] = 0$, the interaction Hamiltonian in the interaction picture takes the form:

$$\hat{\mathcal{H}}_I = g \left(\hat{A}_1^\dagger \hat{S}_1 e^{-i\Omega_1 t} + \hat{A}_2^\dagger \hat{S}_2 e^{-i\Omega_2 t} + \text{Hermitian Conjugate} \right) \quad (4.17)$$

This form shows that each term of the interaction Hamiltonian oscillates at the respective frequency Ω_i , though, this form does not allow a clear overview of the state transfer between the atoms, which is the basic feature that could allow the operation of a quantum phase gate. In order to obtain this expression in [109] Ogden et al follow the process described in [110] to derive the effective Hamiltonian of the system, which simplifies the Hamiltonian but doesn't eliminate the atom-field interaction terms. The effective Hamiltonian is defined from the time derivative of the time-averaged evolution operator.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \overline{\hat{U}(t)} = \hat{\mathcal{H}}_{eff} \overline{\hat{U}(t)} \quad (4.18)$$

The time average of an operator $\hat{\mathcal{O}}$ is defined as:

$$\overline{\hat{\mathcal{O}}(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t') \hat{\mathcal{O}}(t') dt' \quad (4.19)$$

The function $f(t - t')$ is real valued and serves the purpose of eliminating the fast oscillating terms, acting as a (low-pass filter). We need to specify that we

use only its generic properties in order to exclude high-frequency terms in this time-averaging process, therefore we do not need to explicitly specify its form. Comparison with the Schrödinger equation $i\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t) = \hat{H}_I\hat{U}(t)$ for the non-time-averaged evolution operator allows us to write down the effective Hamiltonian as a series of \hat{H}_I and \hat{U} . Discarding the terms of this expansion beyond second order in respect to \hat{H}_I gives the expression:

$$\hat{\mathcal{H}}_{eff} = \overline{\hat{\mathcal{H}}_I(t)} + \frac{1}{2} \left\{ \overline{[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{U}_1(t)]} - [\overline{\hat{\mathcal{H}}_I(t)}, \overline{\hat{U}_1(t)}] \right\} \quad (4.20)$$

Replacing $\hat{U}_1(t)$ by the expression deriving from the expansion in terms of $\hat{\mathcal{H}}_I(t)$ of the time evolution operator $\hat{U}(t)$ yields:

$$\hat{U}_1(t) = \frac{1}{i} \int_{t_0}^t \hat{\mathcal{H}}_I(t') dt' \quad (4.21)$$

Directly calculating this integral for the interaction Hamiltonian of equation 4.17 leads us to a unitary operator of the form

$$\hat{V}(t) = g \left(\frac{\hat{A}_1^\dagger \hat{S}_{1-} e^{-i\Omega_1 t}}{\Omega_1} + \frac{\hat{A}_2^\dagger \hat{S}_{2-} e^{-i\Omega_2 t}}{\Omega_2} - \text{Herm. Conj.} \right) \quad (4.22)$$

Following the above process, in order to obtain the expression for the effective Hamiltonian we need to calculate the commutator $[\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{V}(t)]$:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{H}}_I(t), \hat{V}(t)] = & \frac{2g^2}{\Omega_1} [\hat{A}_1 \hat{S}_{1+}, \hat{A}_1^\dagger \hat{S}_{1-}] + \frac{2g^2}{\Omega_2} [\hat{A}_2 \hat{S}_{2+}, \hat{A}_2^\dagger \hat{S}_{2-}] + \\ & + g^2 e^{2iJt} \left(\frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2} \right) [\hat{A}_1 \hat{S}_{1+}, \hat{A}_2^\dagger \hat{S}_{2-}] + \\ & + g^2 e^{2iJt} \left(\frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2} \right) [\hat{A}_2 \hat{S}_{2+}, \hat{A}_1^\dagger \hat{S}_{1-}] \end{aligned} \quad (4.23)$$

The form of the commutator of equation 4.23 cannot be totally treated analytically, thus we need to make certain approximations.

4.2.1 Case A: Large intercavity hopping regime

First we consider the case for which $J \gg \{\Delta, g\}$. The last two terms of the above expression both oscillate at a frequency of $2J$. As it was done throughout the derivation of the above expression terms rotating at frequencies proportional to Ω_i or J have a zero time average since they oscillate too fast, thus we will keep only the first two terms.

Consequently, under the above approximation, the expression obtained for $\hat{\mathcal{H}}_{eff}$ is given by

$$\hat{\mathcal{H}}_{eff} = \frac{g^2}{\Omega_1} [\hat{A}_1 \hat{S}_{1+}, \hat{A}_1^\dagger \hat{S}_{1-}] + \frac{g^2}{\Omega_2} [\hat{A}_2 \hat{S}_{2+}, \hat{A}_2^\dagger \hat{S}_{2-}] \quad (4.24)$$

Yet this form of the Hamiltonian is not useful for studying the system's quantum dynamics. The evolution of the system imposes the use of the Hamiltonian in the Schrödinger picture. After some tedious algebra we obtain

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}' = \hat{H}_0 + & \overbrace{\sum_{i,j=1}^2 \frac{g^2}{2\Omega_i} \left(\hat{A}_i \hat{A}_i^\dagger |e\rangle_j \langle e| - \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i |g\rangle_j \langle g| \right)}^{\text{dispersive interaction between atoms and delocalized field modes}} + \\ & \underbrace{\frac{g^2}{\Omega_1 \Omega_2} J (\hat{\sigma}_{1+} \hat{\sigma}_{2-} + \hat{\sigma}_{2+} \hat{\sigma}_{1-})}_{\text{transfer of states between atoms without excitation of the field modes}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

The term \hat{H}_0 corresponds to the energy of the bare atomic and delocalized field modes and is the term we derived in equation 4.16. The second term describes the dispersive interaction between atoms and the delocalized field modes. As we discussed in previous cases where we were studying dispersive interactions between cavities and single field modes, there is no energy transfer, though the atoms experience a Stark shift. The final term is the one that describes the transfer of energy between atoms without excitation of the field modes.

Setting $G = g^2/\Omega_1\Omega_2$ and using the equations of motion 4.9 and 4.10 we obtain:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{-i(\omega-G\Delta)t} [a(0) \sin(Jt) - b(0) \cos(Jt)] \\ b(t) &= e^{-i(\omega-G\Delta)t} [-ia(0) \cos(Jt) + ib(0) \sin(Jt)] \\ c(t) &= e^{-i(\omega_0+G\Delta)t} [c(0) \cos(GJt) - id(0) \sin(GJt)] \\ d(t) &= e^{-i(\omega_0+G\Delta)t} [-ic(0) \sin(GJt) + d(0) \cos(GJt)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Therefore, we expect the probability amplitudes to oscillate with a period $T = \frac{2\pi}{GJ}$, where

$$G = \frac{g^2}{\Omega_1\Omega_2} = \frac{g^2}{(\Delta + J)(\Delta - J)} \quad (4.27)$$

A valid choice of parameters for this large intercavity hopping regime is $J = 10g, \Delta = 0.1g, g = 5 \cdot 10^{-3} \omega_0$. Setting the initial state of the system to $|\psi(0)\rangle = |eg00\rangle$ and using the full Hamiltonian for the time evolution of the system, we obtain the probabilities for the excitation to pass from Atom 1 to

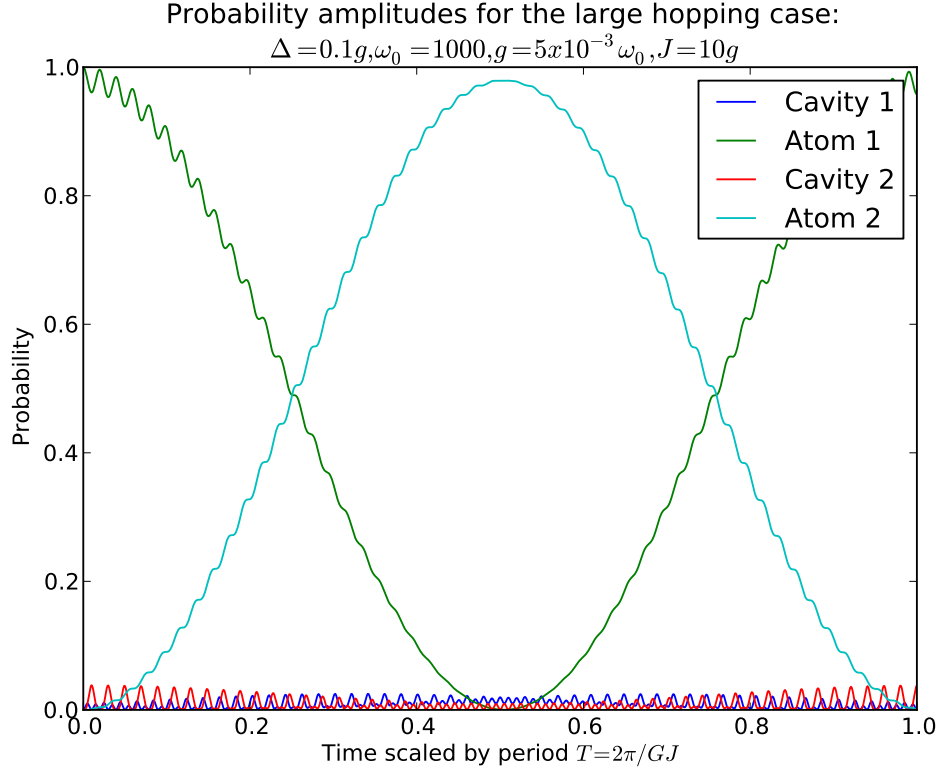


Figure 4.2: Probability amplitudes corresponding to exciting a specific cavity mode or a specific atom as a function of time, for the case of large hopping assuming the system started from the state $|eg00\rangle$. Here, $J = 10g$, $\Delta = 0.1g$ and $\omega = 1000g$, while the time is scaled by period $T = \frac{2\pi}{GJ}$

Atom 2 and the probability for the excitation to pass to the field modes. Those probabilities are plotted versus time, in figure 4.2.

The plot clearly shows that in this large hopping case, the excitation has much higher probability to be found in one of the atoms, than transferring to the cavity field. The latter will be important for the case where the cavity is lossy and photons leak to the environment (we study this case later). This atom-atom excitation exchange happens with a frequency GJ as predicted by the analytical solution 4.26.

Setting the values for this case of parameters in the quantity GJ we can calculate that the period of the oscillation for the probability amplitudes regarding

the excitation transfer from atom 1 to atom 2, to be:

$$\begin{aligned} T_{LH} &= \frac{2\pi}{GJ} = \frac{2\pi}{\frac{g^2}{\Omega_1\Omega_2}J} = \frac{2\pi}{\frac{g^2}{(\Delta+J)(\Delta-J)}J} \\ &= \frac{2\pi(\Delta^2 - J^2)}{g^2J} \simeq \frac{2\pi J}{g^2}, \text{ since } \Delta \ll J \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.2.2 Case B: Large Detuning regime

Following the same procedure as in the case of large hopping, we come again facing the problem of defining the effective Hamiltonian. Since we consider the detuning to be much bigger than the coupling strength between atom-cavity and the cavities (ie. $\Delta \gg \{J, g\}$), terms rotating at rates Ω_1 or Ω_2 need to be eliminated from the time averaging process. Thus, the effective Hamiltonian in the Schrödinger picture becomes:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}' &= \hat{H}_0 + \sum_{j=1}^2 \frac{g^2\Delta}{\Omega_1\Omega_2} \left(\hat{a}_j \hat{a}_j^\dagger |e\rangle_j \langle e| - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j |g\rangle_j \langle g| \right) + \frac{g^2J}{2\Omega_1\Omega_2} \left(\hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 - \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \right) (\hat{\sigma}_{1z} + \hat{\sigma}_{2z}) + \\ &+ \frac{g^2J}{\Omega_1\Omega_2} (\hat{\sigma}_{1+}\hat{\sigma}_{2-} + \hat{\sigma}_{2+}\hat{\sigma}_{1-}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

The last term of this expression is the same as the one we obtained for the large hopping case and describes the atom-atom interaction. Though, we observe that the Stark shift terms are altered. In the previous case, each atom would interact with the delocalised field modes, but now, since the atom-cavity detuning is much larger than the coupling strength between the cavities the shift splits into two terms.

The first one describes the interaction of each atom with its cavity field and the second one describes the interaction of each atom with the delocalised field modes and is much smaller than the local field effect.

This second term vanishes for large values of detuning. Regarding the equations of motion, they will have exactly the same form as 4.26. Therefore, we can verify the fact that there is no state transfer exchange between the field modes and the atoms and the excitation oscillates between the atoms at a constant rate.

Setting the limits for this case, in order to calculate the period of the probability amplitudes oscillations, we find that the period is $T = \frac{2\pi}{GJ}$.

Following the same procedure as in the large hopping case, but taking this case's approximation, we find the period to be:

$$T_{disp} \simeq \frac{\pi\Delta^2}{g^2J} \quad (4.30)$$

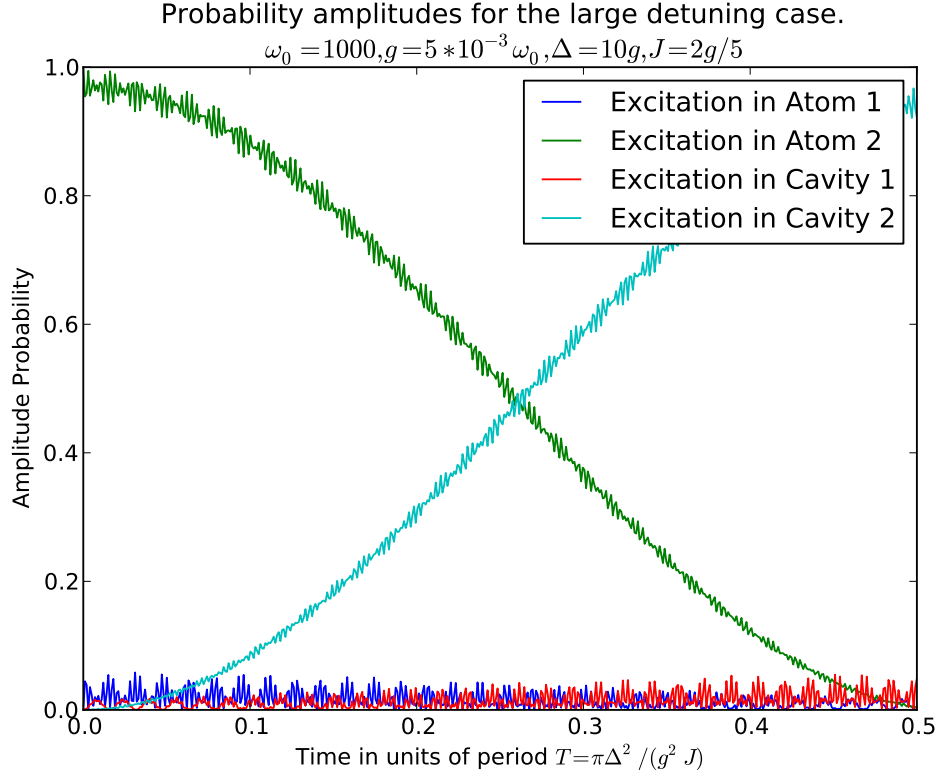


Figure 4.3: Probability amplitudes corresponding to exciting a specific cavity mode or a specific atom as a function of time, for the case of large detuning, assuming the system started from the state $|eg00\rangle$. Here we chose $\Delta = 10g$, $g = 5 \times 10^{-3}\omega_0$, $J = 2g/5$, while the time is scaled by period $T = \frac{\pi \Delta^2}{g^2 J}$

The requirements for the dispersive regime are $\Delta \gg \{J, g\}$, thus a valid choice of parameters that fulfils this requirement and is experimentally viable, is $\Delta = 50 \times 10^{-2}\omega_0$, $g = 5 \times 10^{-3}\omega_0$, $J = 2 \times 10^{-3}\omega_0$ with $\omega_0 = 10^3$. In figure 4.3 we present the numerical results for this case. We can verify that there is very small probability for the excitation to pass to the field modes, just like in the large hopping case.

However, the time required for the excitation to transfer from atom 1 to atom 2 is greatly increased, thus compromising the response of the system. We observe that the period of the state transfer is $T = \frac{\pi \Delta^2}{g^2 J}$. Setting different values for the parameters, we observed (not shown here), that for small values of Δ , as it is expected, there is a considerable probability for the excitation to pass to the field modes, though as detuning increases (with g and J being stable), we observed that even this probability diminishes. This is explained by the fact that the energy transfer from atomic modes to field modes requires a considerable amount of

energy, therefore it is greatly suppressed.

4.2.3 Case C: Resonant interaction regime

The last case we need to investigate is the resonant case, for which we need to suppose that $J = \Delta$. The main reason that guides us on this selection is the fact that with this choice of parameters the terms Ω_i of equation 4.14 become zero, which allows only in the last term of this expression to affect the state evolution. Another reason to expect this behaviour is the fact that for $J = \Delta$, there is resonance between the cavity field and the collective field modes, thus allowing energy transfer between atom and field states, in contrast to the previous two cases where the direct exchange of energy between the atoms was the dominant procedure. In order to derive the effective Hamiltonian in the Schrödinger picture, now we eliminate the terms that contain frequencies $2J$ and Ω_1 . The Hamiltonian for this case is proved to be

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}' = \hat{H}_0 + g \left(\hat{A}_2^\dagger \hat{S}_{2-} + \hat{A}_2 \hat{S}_{2+} \right) + \frac{g^2}{2\Omega_1} \left[\hat{A}_1 \hat{A}_1^\dagger (|e\rangle_1 \langle e| + |e\rangle_2 \langle e|) - \right. \\ \left. - \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 (|g\rangle_1 \langle g| + |g\rangle_2 \langle g|) - (\hat{\sigma}_{1+} \hat{\sigma}_{2-} + \hat{\sigma}_{2+} \hat{\sigma}_{1-}) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

The second term describes the energy exchange between the resonant delocalised atomic and field modes \hat{S}_2 and \hat{A}_2 . The third term describes dispersive interaction between modes \hat{S}_1 and \hat{A}_1 since they are highly detuned. We also observe a Stark shift of the atoms dependent on the population of \hat{A}_1 , whereas the final term describes the direct transfer of energy between the atoms, without the mediation of the cavity field. For this case, the equations of motion will give the exact behaviour of the system. Since the dispersive interaction may be neglected $\left(\frac{g^2}{2\Omega_1} \ll g \right)$ for times smaller than Ω_1/g^2 , we expect a behaviour similar to the case of one atom coupled to one cavity. The difference here is that the role of the single mode field is assigned to the delocalised field mode (\hat{A}_2 and the role of the atom to the delocalised atom mode (\hat{S}_2). If the field modes contain at $t = 0$ no excitation ($\alpha_j(0) = 0$) the evolution of the atomic modes is:

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= e^{-i(\omega_0 + g^2/\Omega_1)t} \beta_1(0) \\ \beta_2(t) &= e^{-i(\omega_0 + g^2/\Omega_2)t} \beta_2(0) \cos \left[\left(g + \frac{\Omega_2^2}{8g} \right) t \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

The dispersive coupling of mode \hat{S}_1 to the field keeps its population constant, while atomic mode \hat{S}_2 oscillates at rate almost g (since the term $\frac{\Omega_2^2}{8g}$ is negligible) due to the excitation transfer between \hat{A}_2 and \hat{S}_2 . The phase difference between

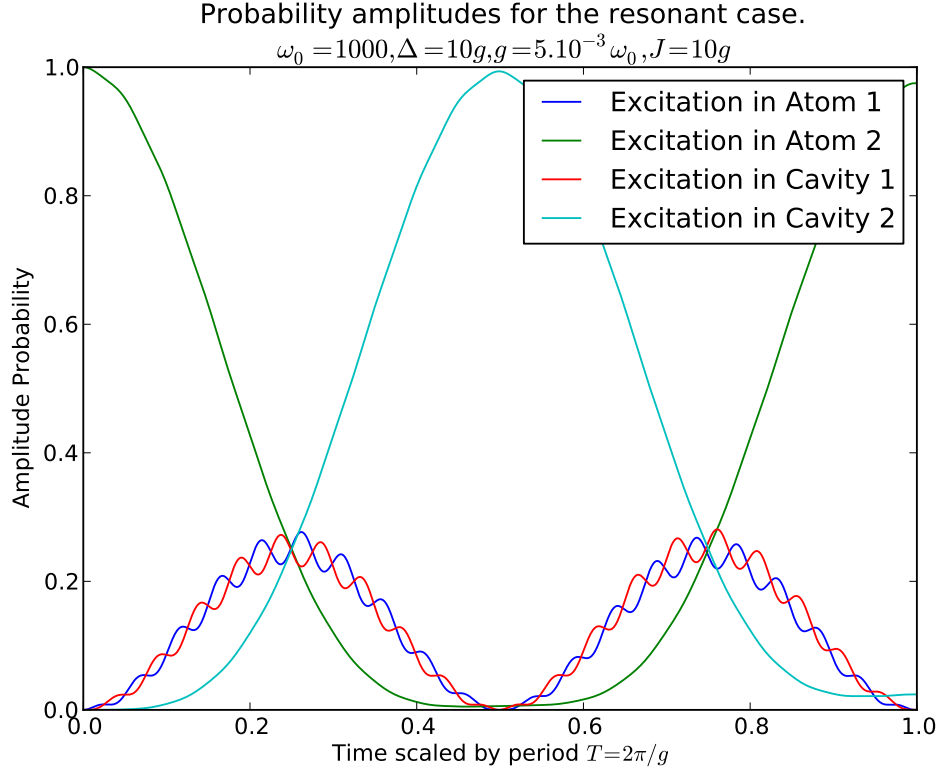


Figure 4.4: Probability amplitudes corresponding to exciting a specific cavity mode or a specific atom as a function of time, for the resonant case, assuming the system started from the state $|eg00\rangle$. In this case, $\Delta = 10g$, $g = 10^{-3}\omega_0$, $J = 10g$, while the time is scaled by period $T = \frac{2\pi}{g}$

them is

$$\delta = \frac{\Omega_2}{2} + \frac{g^2}{\Omega_1} \quad (4.33)$$

Taking the exact resonance case so that $\Omega_2 = 0$ and $g^2/\Omega_1 \ll 1$ this phase difference is almost zero, therefore the two delocalised modes oscillate with approximately same frequencies. Taking the initial conditions $a(0) = 0, b(0) = 0, d(0) = 0$ we find that:

$$\begin{aligned} a(t) &= b(t) = -\frac{ic(0)}{2} e^{-i\omega_0 t} \sin(gt) \\ c(t) &= c(0) e^{-i\omega_0 t} \cos^2\left(\frac{gt}{2}\right) \\ d(t) &= c(0) e^{-i\omega_0 t} \sin^2\left(\frac{gt}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

The transfer of the atomic state between the atoms through this mechanism is much faster than any of the two cases we previously described, having a period $T = \frac{2\pi}{g}$. Though, this significant increase of responsiveness comes with the cost of exposing the system to decoherence via cavity loss, since the cavity modes mediate this process. For the numerical simulations we have chosen the set of parameters: $\Delta = 10g$, $g = 5 \cdot 10^{-3} \omega_0$, $J = 10g$. This set of values apply to the condition of $J = \Delta$ and as it can be seen by figure 4.4, the period of the probability amplitudes regarding the atoms is as predicted by the analytical results $T = \frac{2\pi}{g}$. Moreover, we observe that the probability for the excitation to pass to the field modes, is greatly increased compared to the dispersive and large hopping case, which is expected if we consider that in this case, the cavity field is resonant *with the collective cavity field modes*.

4.3 Quantum Dynamics in a two cavity system with dissipation

Returning to realistic situations, as it was made clear in the discussion we made in the final section of **Chapter 1**, we are not able to ignore the effect of the dissipation on our system. We have mentioned earlier the fact that if we want to realize this experimental setup we will have to make sure that we use the dispersive regime or the large hopping regime of parameters, in order to avoid, or at least, reduce the effects of the unavoidable process of decoherence.

The master equation for this system, now has to take under consideration the fact that both cavities can lose photons via their exchange with the environment. It will have the form:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -i[H, \rho] + \frac{\kappa}{2} (\mathcal{L}[\hat{a}_1] + \mathcal{L}[\hat{a}_2]) = \\ &= -i[H, \rho] + \frac{\kappa}{2} \left[\left(2\hat{a}_1\rho\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1\hat{a}_1\rho - \rho\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 \right) + \left(2\hat{a}_2\rho\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2\hat{a}_2\rho - \rho\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

For our numerical simulations we have used the set of collapse operators

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= \hat{a}_1\sqrt{2\kappa} \\ \hat{C}_2 &= \hat{a}_2\sqrt{2\kappa} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Comparing the expressions for T_{LH} with T_R , and substituting all the parameters but g , one may find that:

$$\frac{T_{LH}}{T_R} \simeq \frac{J_{LH}}{g} \gg 1 \text{ for the large hopping regime} \quad (4.37)$$

This means that the large hopping interaction requires almost $J \times T_R$ time. Regarding the dispersive case, if we compare its period to the large hopping case, we find it is:

$$\frac{T_{disp}}{T_R} = \frac{\Delta_{disp}^2}{gJ_{disp}} \quad (4.38)$$

Using the sets of parameters for the three regions as in the non-dissipative case, we have:

1. Large Hopping regime: $g = 5 \times 10^{-3}\omega_0$, $J = 10g$, $\Delta = 0.1g$, $T_{LH} = 2\pi J/(g^2)$
2. Dispersive regime: $g = 5.10^{-3}\omega_0$, $J = 2/5g$, $\Delta = 10g$, $T_{disp} = 2\pi\Delta^2/g^2J$
3. Resonant regime: $g = 5.10^{-3}\omega_0$, $J = 2/5g$, $\Delta = 10g$, $T_R = 2\pi/g$

This means that for our numerical values the periods, expressed via T_R , are:

$$\begin{aligned} T_{LH} &\simeq 10 \times T_R \\ T_{disp} &\simeq 100 \times T_R \end{aligned} \quad (4.39)$$

Comparing the periods of the three regimes we find that the resonant case has the smallest period. It's small period, allows to sustain more oscillations initially, though since the excitation passes to the field modes there is a very small probability over time for the excitation to pass from one atom to the other. In the following we plot the amplitudes of the probabilities showing the ideal case and the dispersive case. From figures 4.5-4.7, we observe that the system in the resonant case is susceptible to decoherence, as it is predicted by theory, since the cavity field modes mediate the process.

The numerical simulation for the large hopping case in figures 4.8-4.10, shows that this case has better dynamical behaviour when dissipation is taken under account. As expected, there is significant probability for the excitation to pass from one atom to another, even for $\kappa = g$, despite the fact that it is a slower process than the resonant case.

Regarding the dispersive case, from figures 4.11-4.13, we observe the effect the greater time scale has on the system. Specifically, the fact that figure 4.9 for the large hopping case with $\kappa = 1$ resembles to figure 4.11 for the dispersive case for $\kappa = 0.1$, implies that the large hopping regime yields better behaviour in lossy systems, since it involves faster dynamics.

In the next section we will calculate exactly what is the effect of losses on implementing the required entangling non-local gates through this mechanism. This will be done within the description of the implementation of Deutsch-Josza algorithm in this system.

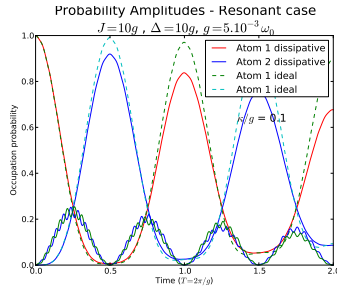


Figure 4.5: Resonant case with $\kappa = 0.1g$

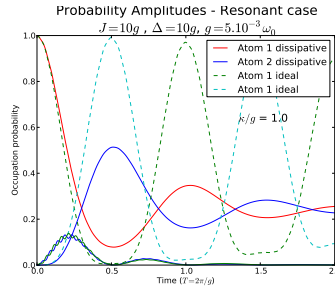


Figure 4.6: Resonant case with $\kappa = g$

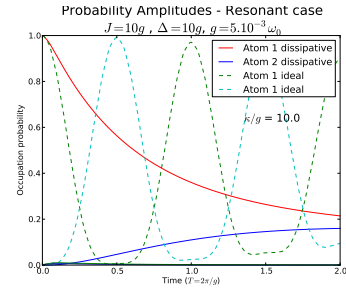


Figure 4.7: Resonant case with $\kappa = 10g$

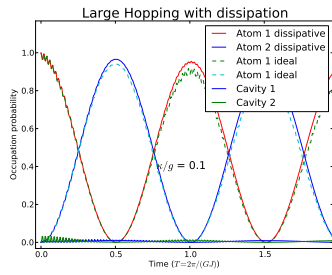


Figure 4.8: Large hopping case with $\kappa = 0.1g$

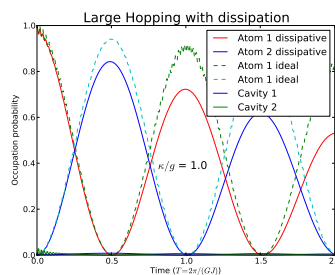


Figure 4.9: Large hopping case with $\kappa = 1g$

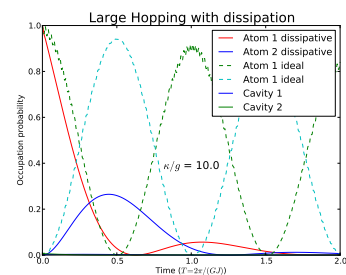


Figure 4.10: Large hopping case with $\kappa = 10g$

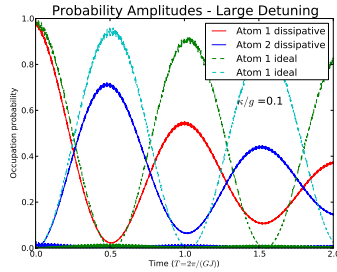


Figure 4.11: Dispersive case with $\kappa = 0.1g$

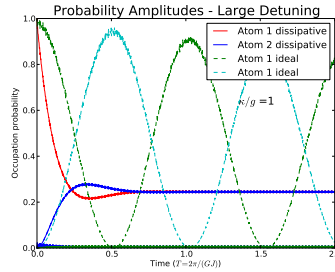


Figure 4.12: Dispersive case with $\kappa = 1g$

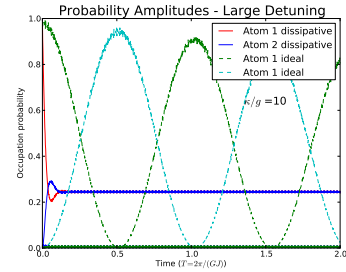


Figure 4.13: Dispersive case with $\kappa = 10g$

4.4 A proposal for Deutsch-Jozsa algorithm in a two cavity system

In the previous section we derived both analytically and numerically the quantum dynamics of a system of coupled cavities interacting with fixed atoms both in the dissipative and in the ideal case. It's worth mentioning, that this specific setup could be realized using photonic crystals doped with quantum dots and circuit

QED[106, 111].

In order to examine how efficiently this mechanism could be used in order to realize a CNOT gate, which is performed by non-local interactions like the one of our case, we will estimate the fidelity of the system [16], for each of the cases, supposing there is no spontaneous emission rate in our system:

$$F(\rho_{ideal}, \rho_{dissipative}) = \text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\rho_{id}} \rho_{dis} \sqrt{\rho_{id}}} \right] \quad (4.40)$$

From our previous discussion, we know that our system can implement a \sqrt{SWAP} gate. Though, \sqrt{SWAP} gate which is realized when we choose the time to be equal to $T/4$ is a universal two qubit gate[112]. In figure 4.14, we show how the CNOT gate can be obtained using \sqrt{SWAP} gates and local pulses. In order to implement the algorithm we also need a single qubit gate, realizable in the present setup. In order to implement the X gate, we choose a π pulse from an external classical source tuned with the atom frequency ω_0 , while for the Hadamard gate we use a $\pi/2$ pulse from a classical source. In the following we assume those operations can be perfectly performed, since they are fast local operations realized by controlled external sources tuned to the desirable Rabi frequencies.

The transformation of \sqrt{SWAP} gate to CNOT that allows the algorithm, is shown in figure 4.14 Using the matrix representation of \sqrt{SWAP}

$$\sqrt{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

as well as the ones for the X,H, gates

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

We can verify that the circuit of 4.14, is indeed equivalent to a CNOT gate. Therefore, the circuit that implements the algorithm is the one in 4.15. Regarding the readout of the process, it can be experimentally realised using the shelving technique [113] that provides reliable readouts. As we saw in the previous section, in the large hopping and dispersive cases, the system remains coherent for relatively longer times which indicates that even in the presence of strong dissipation (equal to the coupling rate), one could implement the required non-local gate at least a few times before the system eventually decoheres.

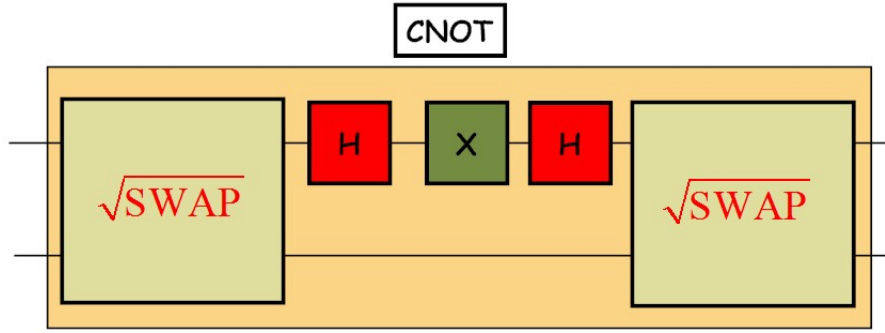


Figure 4.14: Quantum circuit representing the operations required in order to obtain the $CNOT$ gate using \sqrt{SWAP} gate.

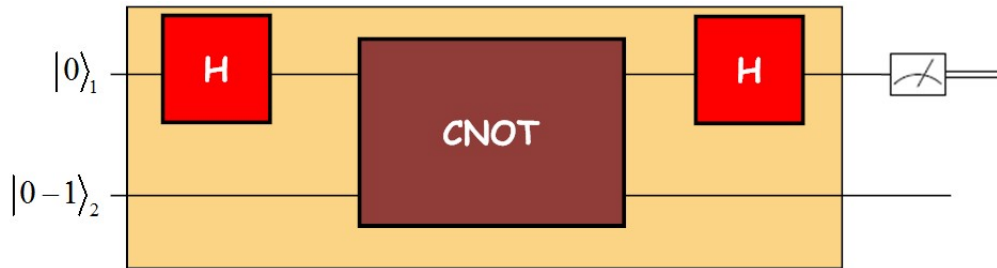


Figure 4.15: Representation of the quantum circuit for the Deutsch-Jozsa algorithm.

In order to calculate the fidelity of the \sqrt{SWAP} for each regime, we will have to define the desirable time interval that the interaction is on, ie. the $1/4$ of the period of each case and evolve the lossy case in order to obtain $\rho_{dissipative}(T/4)$ using the Master Equation of equation 4.35. The ideal case will yield a density matrix $\rho_{ideal}(T/4)$, which in our case is the density matrix of the maximally entangled state $\frac{|eg00\rangle - |ge00\rangle}{\sqrt{2}}$. Therefore the required times in the parameter regimes we are assuming, are:

$$\begin{aligned} T_{LH}/4 &= \pi J/2(g^2) \\ T_{disp}/4 &= \pi \Delta^2/2g^2 J \\ T_R/4 &= \pi/2g \end{aligned} \tag{4.43}$$

The numerical calculations for the fidelity of the \sqrt{SWAP} gate using the appropriate times, allow us to plot the dependence of the fidelity versus κ rate, which is plotted in 4.16.

We observe that the fidelity in the resonant case falls rapidly as κ increases, which is justified by the stronger dissipation occurring in the resonant regime due to the existence of population in the cavity modes. We would expect the dispersive case to sustain higher fidelity values, though, watching closer we see

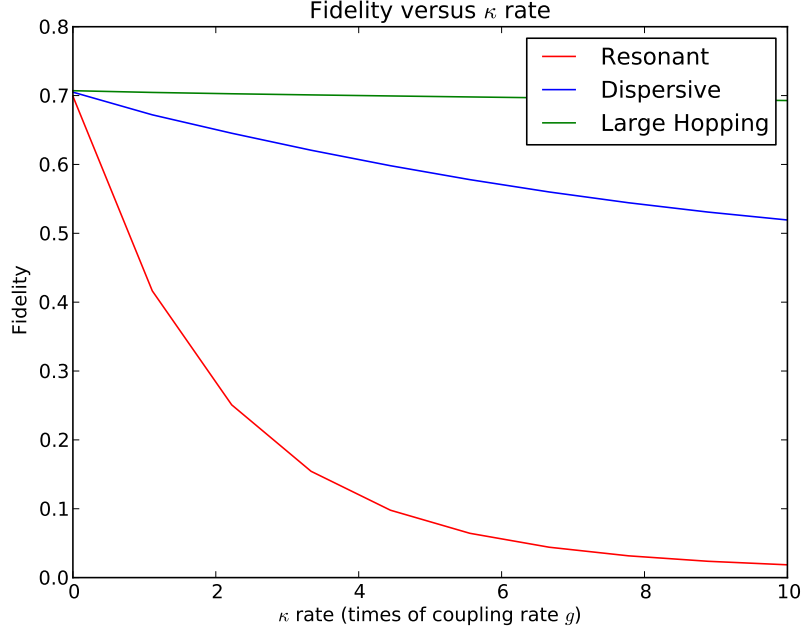


Figure 4.16: Fidelity of \sqrt{SWAP} gate versus κ , with κ expressed using coupling rate g of the cavities for the dispersive case (blue line $g = 5 \cdot 10^{-3} \omega_0$, $J = 2/5g$, $\Delta = 10g$, $T_{disp}/4 = \pi \Delta^2 / (2g^2 J)$), resonant case (red line, $g = 5 \cdot 10^{-3} \omega_0$, $J = 10g$, $\Delta = 10g$, $T_R/4 = \pi / (2g)$) and large hopping case (green line $g = 5 \times 10^{-3} \omega_0$, $J = 10g$, $\Delta = 0.1g$, $T_{LH}/4 = \pi J / (2(g^2))$).

that the time required for the \sqrt{SWAP} gate in the dispersive case is much larger than the large hopping case ($T_{disp} \simeq 10T_{LH}$). This means that the system in the latter case is exposed to environment for smaller times, thus the highest fidelity values.

Chapter 5

Conclusions and Future work

In this thesis we made a detailed overview of the most important theoretical aspects of cavity QED focusing on the region of microwave QED. As we have seen throughout the text, it is possible using the basic principles that apply on single Cavity QED, to extend our discussion on other setups involving arrays of coupled resonators.

We initially discussed analytically how single cavity systems can be used in different ways in the implementation of Quantum Information Algorithms and and reviewed some of the early results in the field.

We then dealt analytically and numerically with the model of two identical coupled cavities both in the ideal case of zero κ, γ and in the dissipative case. We proved that this configuration can be used in order to implement a Quantum Phase Gate, while we gave an outline of how Deutsch-Jozsa algorithm could be performed.

Cavity QED ideas have recently been extended in other experimental realizations, such as Circuit QED. The latter we plan to explore in more detail in future studies.

We would like to note that numerical simulations of Open Quantum Systems, an important aspect of this thesis, will provide the background for our future work in the direction of modelling specific experimental setups. We would like to study how constant driving the atoms or the field, effects the steady state observables and explore the possibility for robust QIP there. We will also explore different platforms including waveguide arrays and specific Circuit QED implementations.

Appendix A

1 Usefull packages for Quantum Optics

One of the most important aspects of this thesis, was gaining a more extensive and thorough approach regarding numerical tasks. It might be easier to use programs like Mathematica and indeed Mathematica was really useful throughout all this thesis.

During the past few years, there has been a magnificent progress in programming and the way the new generation of programmers work, thus giving rise to *Open Source Software*. Apart from commercial packages like *Mathematica* or *MatLab* there has been developed a variety of open source tools that are widely used. In order to use a reliable and tested package that is focused in Quantum Optics, we used **QuTiP**[114] which is a *toolbox* of frequently used routines that uses *Python* programming language. In what follows we will give some programming details that we consider worth mentioning.

2 Details on Mathematica code

The ability of various mathematical packages to efficiently perform numerical calculations, combined with the flexibility of Quantum Mechanics to express operators and vector states in matrix expressions, makes it quite easy for one to investigate complex setups, like coupled cavity arrays. We will describe the more important steps of the process we followed, defining numerically the physical system of two coupled cavities with fixed atoms, which may prove really time consuming if someone has not an insight on the internal doings of various packages.

Mathematica has difficulty handling matrices that are defined as normal arrays and contain lots of zeros. Thus, we will use the following commands to define the basis vectors and one of creation/annihilation operators.

First of all, we need to set a basis of vectors on which we are going to perform our operations. In this procedure we performed a general case scenario, rather

than just restricting ourselves to the one-excitation case, in order to have a more versatile form for future work:

```

Basis[n_, i_] := Normal[SparseArray[{i + 1, 1} → 1, {n, 1}]];
e = Basis[2, 1]; g = Basis[2, 0];
f[n_] := Basis[Ne + 1, n - 1];
sigmap = e.gT; sigmam = g.eT; sigmaz = e.eT - g.gT;
Destroy[n_] := SparseArray[{Band[{1, 2}] → Sqrt[Range[n - 1]]}, {n, n}]
Id[n_] := IdentityMatrix[n];

```

(1)

In those lines we defined a function $Basis[n_, i_]$ that will be able to create the basis vectors for an n dimensional space. Making use of it we defined the atom states $|e\rangle$ and $|g\rangle$. This direct way of defining vector states for two level atoms, cannot be kept for the cavity states for higher values of the excitation number (N_e), so we defined with another way ($f[n_]$) the cavity state vectors to keep things more general. The definition of the $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$ and $\hat{\sigma}_3$ atomic operators is followed by the annihilation operator \hat{a} , whereas we used a shorter way for the *Identity Matrix* command of *Mathematica*.

This is all we need to numerically investigate the problem. In order to define all operators and states, we make use of the command **KroneckerProduct** which is the way of handling the four different spaces involved in this procedure. For example the state $|gg10\rangle$ will be written as

$$gg10 = \text{KroneckerProduct}[g, g, f[2], f[1]];$$

The operator $\hat{\sigma}_{+,2}$ will be declared as:

$$sp2 = \text{KroneckerProduct}[\text{Id}[2], \text{sigmap}, \text{Id}[\text{Ne} + 1], \text{Id}[\text{Ne} + 1]];$$

which clearly states that the action of the operator is confined on the subspace of **Atom 2**.

Keeping in mind those basic principles, we are able to set up a Hamiltonian and then defining some initial state, use the **Expn[...]** command to study the time evolution of the system by applying the unitary operator.

3 Python code used for plots.

The dynamical study of the systems discussed throughout the text, was initially done in Mathematica and later was verified using the Python programming language. In the following pages, we present some of the scripts used during this thesis.

Jaynes Cummings model with dissipation using master equation or quantum trajectories

```
# -*- coding: utf-8 -*-

#
# Vacuum Rabi oscillations in the Jaynes-Cummings model with dissipation
#
from qutip import *
from pylab import *

def run():

    # Configure parameters
    wc = 10000 # cavity frequency
    wa = 10000 # atom frequency
    g = 0.001*wc # coupling strength
    kappa = 0.2*g # cavity dissipation rate
    gamma = 0 # atom dissipation rate
    N = 2 # for two possible states of the field
    use_rwa = True

    # initial state for the system cavity-atom
    psi0 = tensor(basis(N,0), basis(2,1)) # start with an excited atom

    # Hamiltonian operators
    a = tensor(destroy(N), qeye(2))
    sm = tensor(qeye(N), destroy(2))

    if use_rwa:
        # use the rotating wave approximation
        H = wc * a.dag() * a + wa * sm.dag() * sm + g * (a.dag() * sm + a * sm.dag())
    else:
        H = wc * a.dag() * a + wa * sm.dag() * sm + g * (a.dag() + a) * (sm + sm.dag())

    # collapse operators for non-unitary dynamics
    c_op_list = []

    n_th_a = 0.0 # zero temperature
    rate = kappa * (1 + n_th_a)
    if rate > 0.0:
        c_op_list.append(sqrt(rate) * a)

    rate = kappa * n_th_a
    if rate > 0.0:
        c_op_list.append(sqrt(rate) * a.dag())

    rate = gamma
    if rate > 0.0:
        c_op_list.append(sqrt(rate) * sm)

    # evolve and calculate expectation values
    tlist = linspace(0, 5*pi/g, 1000)
```

```
output = mesolve(H, psi0, tlist, c_op_list, [a.dag() * a, sm.dag() * sm])

# plot the results
plot(tlist/(g*pi), output.expect[0])
plot(tlist/(g*pi), output.expect[1])
legend(("Cavity", "Atom_excited_state"))
xlabel('Time')
ylabel('Occupation_probability')
title('Vacuum_Rabi_Oscillations_for_a_damped_cavity_using_master_equation')
show()

if __name__ == '__main__':
    run()
```

Two coupled cavities without dissipation for large hopping case.

```

from qutip import *
from pylab import *

def run():

    # Define constants
    G = 5
    omega_atom = 1000
    detuning = 0.1*G
    omega_field = omega_atom + detuning
    J = 10*G
    N = 2 # number of possible states for cavity 1

    # Define basis. In total we have 4 Hilbert space dimensions to describe the system.
    #
    # choose an order for composite system: A1-A2-C1-C2
    # then compute the operators for the full Hilbert space and use them to
    # construct the hamiltonian.
    #

    # cavity operators in full hilbert space
    a1 = tensor([qeye(2), qeye(2), destroy(N), qeye(N)])
    a2 = tensor([qeye(2), qeye(2), qeye(N), destroy(N)])

    # atomic operators in full hilbert space C1-A1-C2-A2
    e=basis(2,0)
    g=basis(2,1)
    f1=basis(N,0)
    f2=basis(N,1)

    ele = tensor([e*dag(e), qeye(2), qeye(N), qeye(N)])
    e2e = tensor([qeye(2), e*dag(e), qeye(N), qeye(N)])
    sp1 = tensor([sigmap(), qeye(2), qeye(N), qeye(N)])
    sm1 = tensor([sigmam(), qeye(2), qeye(N), qeye(N)])
    sp2 = tensor([qeye(2), sigmap(), qeye(N), qeye(N)])
    sm2 = tensor([qeye(2), sigmam(), qeye(N), qeye(N)])

    # Write the Hamiltonians in 4 seperate terms to avoid mistakes.
    H1 = omega_atom * (ele + e2e)
    H2 = omega_field * (a1.dag()*a1 + a2.dag()*a2)
    H3 = G * (a1 * sp1 + a1.dag() * sm1) + G * (a2 * sp2 + a2.dag() * sm2)
    H4 = J * (a1.dag() * a2 + a1 * a2.dag())

    H = H1 + H2 + H3 + H4

    #Time evolution of the system
    gg01 = tensor([g, g, f1, f2])
    gg10 = tensor([g, g, f2, f1])
    eg00 = tensor([e, g, f1, f1])
    ge00 = tensor([g, e, f1, f1])

    psi0=eg00 #initially excitation in atom 1

    # evolve and calculate expectation values
    Gkap=abs(G**2/((detuning + J)*(detuning - J)))
    T=pi/(Gkap*J)
    tlist = linspace(0,T,1000)
    output = mesolve(H, psi0, tlist, [], [])

```

```

# plot the results
plot(tlist/T, expect(a1.dag()*a1, output.states))
plot(tlist/T, expect(sm1.dag() * sm1, output.states))
plot(tlist/T, expect(a2.dag()*a2, output.states))
plot(tlist/T, expect(sm2.dag() * sm2, output.states))

legend(("Cavity_1", "Atom_1", "Cavity_2", "Atom_2"))
xlabel('Time_scaled_by_period_$T=2\pi/G_J$')
ylabel('Probability')
title('Probability_amplitudes_for_the_large_hopping_case: \n_$\Delta=0.1g, \omega_0$
      =1000, $g=5\times 10^{-3}\omega_0, J=10g$')
show()

if __name__=='__main__':
    run()

```

Fidelity versus κ for large hopping

```

# Calculate the fidelity of a system of two coupled cavities under dissipation
from qutip import *
from pylab import *

#collapse operators for non-unitary dynamics

def rho_compute(Ham,psi0,tlist,kappa_max,kappalist, cav1, cav2,rho_ideal):

    #fid_list=zeros((len(kappalist)))
    rho_dis_list= []
    index=0
    for kappa in kappalist:
        c_op_list = []
        c_op_list.append(sqrt(kappa) * cav1)
        c_op_list.append(sqrt(kappa) * cav2)
        dissipative = mesolve(Ham, psi0, tlist, c_op_list, [])
        rho_dissipative = dissipative.states
        rho_dissipative_final=rho_dissipative[-1]
        rho_dis_list.append(rho_dissipative_final)
        index +=1
    return rho_dis_list

# Define constants
G=5
omega_atom = 1000
detuning = 0.1*G
omega_field = omega_atom - detuning
J = 10*G
kappa_max = 10*G # cavity dissipation rate
kappalist = linspace(0,kappa_max,10)
gamma = 0.0 # atom dissipation rate

N = 1 # number of excitations

# cavity operators in full hilbert space
a1 = tensor([qeye(2), qeye(2), destroy(N+1), qeye(N+1)])
a2 = tensor([qeye(2), qeye(2), qeye(N+1), destroy(N+1)])

# atomic operators in full hilbert space C1-A1-C2-A2
e=basis(2,0)
g=basis(2,1)
f1=basis(N+1,0)
#f2=basis(N+1,1)
eg00=tensor(e,g,f1,f1)
ge00=tensor(g,e,f1,f1)

ele = tensor([e*dag(e), qeye(2), qeye(N+1), qeye(N+1)])
e2e = tensor([qeye(2), e*dag(e), qeye(N+1), qeye(N+1)])
glg = tensor([g*dag(g), qeye(2), qeye(N+1), qeye(N+1)])
g2g = tensor([qeye(2), g*dag(g), qeye(N+1), qeye(N+1)])
spl = tensor([sigmap(), qeye(2), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sm1 = tensor([sigmam(), qeye(2), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sp2 = tensor([qeye(2), sigmap(), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sm2 = tensor([qeye(2), sigmam(), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sz1 = tensor([sigmaz(), qeye(2), qeye(N+1), qeye(N+1)])
sz2 = tensor([qeye(2), sigmaz(), qeye(N+1), qeye(N+1)])

```

```

# Define the Hamiltonian terms
H1 = omega_atom * (e1e + e2e)
H2 = omega_field * (a1.dag()*a1 + a2.dag()*a2)
H3 = G * (a1 * sp1 + a1.dag() * sm1) + G * (a2 * sp2 + a2.dag() * sm2)
H4 = J * (a1.dag() * a2 + a1 * a2.dag())
H = H1 + H2 + H3 + H4

psi0 = tensor([e, g, f1, f1])

#Set the time interval for the evolution of the system
Gkap=abs(G**2/((detuning + J)*(detuning - J)))
T=pi/(Gkap*J)
tlist = linspace(0,T/4,500)

#Calculate the density matrix for the ideal case
ideal=(eg00-ge00)/sqrt(2)
#psi_ideal_list = ideal.states
#psi_ideal=psi_ideal_list[-1]
rho_ideal = ket2dm(ideal)
#n1_ideal= expect(sm1.dag() * sm1,ideal.states)
#n2_ideal= expect(sm2.dag() * sm2,ideal.states)
#pf1_ideal = expect(a1.dag() * a1, ideal.states)
#pf2_ideal = expect(a2.dag() * a2, ideal.states)

#Use the rho_compute function to calculate the density operators at t=T
rho_list=rho_compute(H,psi0,tlist,kappa_max,kappalist,a1,a2,rho_ideal)
flist=[]
for i in range (0,10):
    flist.append(fidelity(rho_ideal,rho_list[i]))
output_data = vstack((kappalist/G, flist))
file_data_store('large_hopping.dat', output_data.T, numtype="real")

plot(kappalist,flist)
show()

```


Appendix B. Theoretical tools for cavity QED

1 Review of the harmonic oscillator

In the following pages we review the basic notions of quantum harmonic oscillator and build on it according to [3],[4], [5], presenting the main techniques used throughout the text and refer to quantum harmonic oscillator.

In classical mechanics, a particle of mass m moving in the potential $V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2$ oscillates at a frequency $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$, where κ is the force constant. The Hamiltonian for this one-dimensional harmonic oscillator consists of two discrete terms referring to kinetic and potential energy, therefore we can write

$$H = T + V = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (1)$$

where the x-directed particle momentum p_x is defined by the relation $m\frac{dx}{dt}$. In quantum mechanics, the classical momentum is replaced by the operator $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, therefore the Hamiltonian becomes

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \quad (2)$$

From a pure algebraic point of view one may observe that in this equation we have the two operators appearing as simple squares, which suggests that we may factor the equation so that it is linear in terms of \hat{p}_x and \hat{x} . With this in mind, we define two new operators:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}_x}{m\omega} \right) \quad (3)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}_x}{m\omega} \right) \quad (4)$$

The set of equations 3 and 4 describes the so-called *creation and annihilation* operators of the harmonic oscillator. The inverse set of relations expressing the position \hat{x} and momentum \hat{p}_x operators in terms of the creation and annihilation operators can be expressed as

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (5)$$

$$\hat{p}_x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (6)$$

$$(7)$$

The Hamiltonian described by Equation 2 expressed using the creation and annihilation operators is

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (8)$$

and it is straight-forward to show that the commutation relation between the creation and annihilation operators is $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. where we use the commutation relation $[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar$. Using this commutation relation we are capable of rewriting the equation 8 as

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\hbar\omega}{2} (1 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (9)$$

It is important at this point to write explicitly how the creation and annihilation operators can be used in terms of matrices, since this is a very important procedure when one needs to perform numerical simulations using programming languages.

First of all we need to specify that the eigenstates $\psi_n = |n\rangle$ of the harmonic oscillator are orthonormal, which is expressed by the relation

$$\langle n' | n \rangle = \delta_{n',n} \quad (10)$$

In this notation $\langle n' | \hat{a}^\dagger | n \rangle$ is a matrix element. One may show that these matrix elements are non-zero when they involve adjacent states of the harmonic oscillator, so that

$$\langle n' | \hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{n'=n+1} \quad (11)$$

$$\langle n' | \hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} \delta_{n'=n-1} \quad (12)$$

If we write all the matrix elements for the different states of the harmonic oscillator with N states, we obtain a matrix of the form

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \sqrt{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \sqrt{2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{N-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

As it was expected, the matrix representations of creation and annihilation operators are transpose, which actually allows us to define only one of those matrices in our numerical applications. For example if we would like to define the annihilation matrix in *Mathematica* we can use the command:

```
Destroy[n_]:=SparseArray[{Band[{1,2}]→Sqrt[Range[n-1]]},{n,n}]
```

In fact, this way of defining matrices with lots of zeros in *Mathematica*, is the most effective in terms of computational resources as suggested in [115].

Returning to the commutator algebra of the harmonic oscillator, we should point out the need to define one more operator that appears in the whole spectrum of the problems that are dealt in this context. Of course, we refer to the *number operator*, which is defined by the relation

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (15)$$

For the number operator, we can easily show the commutation relations for \hat{a} and \hat{a}^\dagger

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad (16)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (17)$$

The problem of the harmonic oscillator has only one obvious limitation. This limitation concerns the fact that there is one ground state of energy with a wavefunction that describes it. We will describe the procedure of calculating this ground state energy and the corresponding wave-function, in order to explain what exactly the creation and annihilation operators help us with.

To derive the ground state wave-function and energy of the one-dimensional quantum harmonic oscillator, we should start using the Schrödinger equation:

$$\hat{H}\psi_n = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \psi_n = E_n \psi_n \quad (18)$$

Multiplying from the left by \hat{a} we obtain

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \psi_n = E_n \hat{a} \psi_n \quad (19)$$

and taking under consideration the commutation relation

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 1 \Leftrightarrow \hat{a} \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 \quad (20)$$

we obtain the equation

$$\hbar\omega \left((1 + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \hat{a} + \frac{\hat{a}}{2} \right) \psi_n = E_n \hat{a} \psi_n \quad (21)$$

Factoring out the term $\hat{a} \psi_n$ on the left-hand side of the previous equation we find that

$$\hbar\omega \left((1 + \hat{a} \hat{a}^\dagger) + \frac{1}{2} \right) (\hat{a} \psi_n) = E_n (\hat{a} \psi_n) \quad (22)$$

The term $\hbar\omega \hat{a} \psi_n$ can be subtracted from both sides, allowing us to write the equations:

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (\hat{a} \psi_n) = (E_n - \hbar\omega) (\hat{a} \psi_n) \quad (23)$$

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \psi_{n-1} = E_{n-1} \psi_{n-1} \quad (24)$$

This last equation shows that $\psi_{n-1} = \hat{a} \psi_n$ is a new eigenfunction with energy eigenvalue $(E_n - \hbar\omega)$. In a similar way it may be proved that the operator \hat{a}^\dagger acting on eigenfunction ψ_n creates a new eigenfunction ψ_{n+1} with eigenenergy $(E_n + \hbar\omega)$. In bibliography it is quite common to refer to creation and annihilation operators as "raising" and "lowering" operators, since as it is obvious the harmonic oscillator eigenfunctions and eigenenergies could be visualised by a *ladder* in which those operators decide whether we should move higher or lower gaining the respective eigenfunctions and eigenenergies.

It must be clear up to this point that the lowering (annihilation) operator, \hat{a} can only be used to reduce the energy eigenvalue of any eigenstate. We assume

the existence of a "ground state" in which we have the lower possible energy. This obliges as to state that the *lowering operator* acting on this state gives

$$\hat{a}\psi_0 = 0 \quad (25)$$

At this point we know everything we need to calculate the wave-function for the ground state. Since

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}_x}{m\omega} \right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (26)$$

our definition of $\hat{a}\psi_0 = 0$ requires

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_0 = 0 \quad (27)$$

The solution for the wave function is of Gaussian form

$$\psi_0 = A_0 e^{-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}} \quad (28)$$

where the normalization constant A_0 is found by the normalization requirement $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$ to be

$$A_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \quad (29)$$

In order to calculate the eigenenergy for the ground state wave function ψ_0 the only thing that remains to be done is inserting the equation 28 into the Schrödinger equation 18 for the 1-D harmonic oscillator. Schrödinger equation reads:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi_0 = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} + 4x^2 \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^2 \right) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi_0 \quad (30)$$

$$\left(\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi_0 = E_0 \psi_0 \quad (31)$$

so that the value of the ground state energy, E_0 is

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (32)$$

The non-ground states of the harmonic oscillator are called *excited states*. Starting from the ground state, we can construct the excited states by acting on the the ground state the creation operator. For the first excited state we multiply the ground state of the harmonic oscillator by \hat{a}^\dagger in the Schrödinger equation:

$$\hat{a}^\dagger \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \psi_n = \hat{a}^\dagger E_n \psi_n = \hat{a}^\dagger \hat{H} \psi_n \quad (33)$$

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{a}^\dagger}{2} \right) \psi_n = E_n \hat{a}^\dagger \psi_n = \hat{a}^\dagger \hat{H} \psi_n \quad (34)$$

With the use of the commutation relation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, and some algebra we show that:

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1) + \frac{\hat{a}^\dagger}{2} \right) \psi_n = \left(\hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger) + \frac{\hat{a}^\dagger}{2} \right) \psi_n = E_n \hat{a}^\dagger \psi_n \quad (35)$$

$$\hbar\omega \left((\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1) \hat{a}^\dagger + \frac{\hat{a}^\dagger}{2} \right) \psi_n = \left(\hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1) + \frac{1}{2} \right) \hat{a}^\dagger \psi_n = E_n \hat{a}^\dagger \psi_n \quad (36)$$

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (\hat{a}^\dagger \psi_n) = (E_n + \hbar\omega) (\hat{a}^\dagger \psi_n) \quad (37)$$

It is clear now that the eigenenergy of the n-th state of the 1-D harmonic oscillator is given by the equation

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (38)$$

where it is obvious that we have used the number operator in order to obtain the eigenvalues of the term $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{N}$ and therefore the eigenenergy of the n-th level. So far we have showed that the operators \hat{a} and \hat{a}^{dag} act upon the state ψ_n , in such a way that:

$$\hat{a} \psi_n = A_{n+1} \psi_{n+1} \quad (39)$$

$$\hat{a}^\dagger \psi_n = A_{n-1} \psi_{n-1} \quad (40)$$

The normalization constants are calculated by using the statements that $\langle n|n \rangle = \langle n-1|n-1 \rangle = 1$ and $[\hat{a}, \hat{a}^{dag}] = 1$. Since the state $\hat{a} \psi_n = |n+1\rangle$ is also required to be normalized, we may write:

$$|A_{n+1}|^2 \langle \hat{a}^\dagger n | \hat{a}^\dagger n \rangle = 1 \quad (41)$$

Equation 41 may be written as:

$$|A_{n+1}|^2 \langle \hat{a} | \hat{a}^\dagger \rangle = |A_{n+1}|^2 \langle n | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) | n \rangle = |A_{n+1}|^2 (n+1) \langle n | n \rangle = 1 \quad (42)$$

Therefore, since we require A_{n+1} to be a real number, the normalization gives us the result

$$A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (43)$$

Therefore we may write that:

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}|\hat{a}^\dagger n\rangle \leftrightarrow |\hat{a}^\dagger n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (44)$$

In the same way we can prove that

$$|\hat{a}n\rangle = \sqrt{n}|n\rangle \quad (45)$$

It is quite useful to derive an expression such that we may obtain the n -th state $|n\rangle$ using the ground state $|0\rangle$:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{(n!)}}|0\rangle \quad (46)$$

and

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n+1}}{\sqrt{n!}}|0\rangle = \frac{\sqrt{n+1}(\hat{a}^\dagger)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}|0\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1\rangle \quad (47)$$

Regarding the form of the wave functions of the n -th level of the harmonic oscillator, we will follow a similar treatment, acting the creation operator \hat{a} on the ψ_0 wave-function of the ground state that was obtained in 28. In order to simplify the notation, we will introduce a new spatial variable,

$$\xi = \sqrt[4]{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)}x \quad (48)$$

With the use of this new spatial variable we can rewrite the expression for the creation operator in terms of ξ as:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)}x - \sqrt{\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)}\frac{\partial}{\partial x} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad (49)$$

so, the expression of equation 28, becomes:

$$\psi_0(\xi) = A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (50)$$

where the normalization constant now has become:

$$A_0 = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{\pi}\right)} \quad (51)$$

Starting from the ground state and using the equation 46 to ensure that our result is normalized, we obtain a sequence of wave-functions:

$$\psi_0 \quad (52)$$

$$\psi_1 = \hat{a}^\dagger \psi_0 \quad (53)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}^\dagger \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger)^2 \psi_0 \quad (54)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}^\dagger \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} (\hat{a}^\dagger)^2 \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3!}} (\hat{a}^\dagger)^3 \psi_0 \quad (55)$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0 \quad (56)$$

Now, using the expression of the ground state wave function using the spatial variable ξ 50, we will write the explicit expression of the first five states of the harmonic oscillator.

$$\psi_0 = A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (57)$$

$$\psi_1 = \hat{a}^\dagger \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{1!}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\xi A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\xi \psi_0 \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = \hat{a}^\dagger \psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2!}} (\hat{a}^\dagger)^2 \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2!}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} 2\xi A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4}} (4\xi^2 - 2) \psi_0 \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = \hat{a}^\dagger \psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{3!}} (\hat{a}^\dagger)^3 \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{3!}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{1}{2} (4\xi^2 - 2) \psi_0 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{8}} (8\xi^3 - 12) \psi_0 \end{aligned} \quad (60)$$

$$\psi_4 = \hat{a}^\dagger \psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4!}} (\hat{a}^\dagger)^4 \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{24}} \frac{1}{\sqrt{16}} (16\xi^4 - 48\xi^2 + 12) \psi_0 \quad (61)$$

$$\psi_5 = \hat{a}^\dagger \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{5!}} (\hat{a}^\dagger)^5 \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{120}} \frac{1}{\sqrt{32}} (32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi) \psi_0 \quad (62)$$

One may easily observe the fact that the functions are alternately even and odd functions, whereas the form of the wavefunctions can be expressed as a function of Hermite polynomials $H_n(\xi)$ so that

$$\psi_n(\xi) = \hat{a}^\dagger \psi_{n-1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) \psi_0(\xi) \quad (63)$$

while the explicit expression for Hermite polynomials is

$$H_n(\xi) = \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2 + 2t\xi} \right)_{t=0} = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{\xi^2} \quad (64)$$

If wish to write the expression for the wave function of the harmonic oscillator in the original coordinate system, we substitute ξ from equation 48 in equation 50 to obtain:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \quad (65)$$

Using *Mathematica* we obtain figure 1, in which we plot the first five wavefunctions of the 1D harmonic oscillator and the potential $V = \frac{\xi^2}{2}$

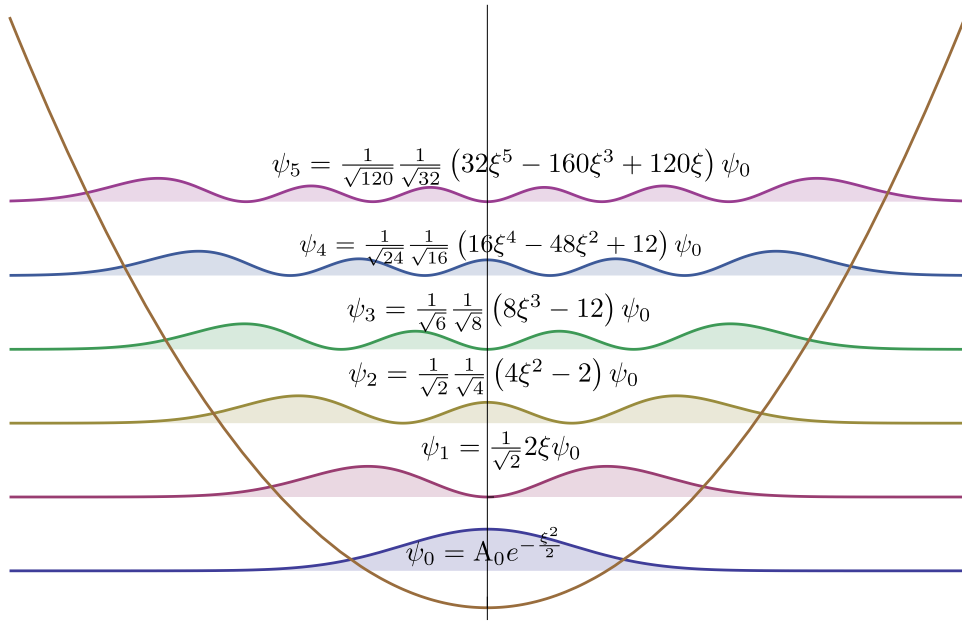


Figure 1: The ten first wave functions of the 1D harmonic oscillator and the potential $V = \frac{\xi^2}{2}$ in the dimensionless units.

2 Schrödinger picture

It is easy to prove that the mean values of an observable \hat{O} do not change under a unitary transformation \hat{U} which changes the basis of the system:

$$\hat{O} \rightarrow \hat{O}' = \hat{U} \hat{O} \hat{U}^\dagger \quad (66)$$

whereas state vectors change as:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\rightarrow |\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle \\ \langle\psi| &\rightarrow \langle\psi'| = \hat{U}^\dagger\langle\psi| \end{aligned} \quad (67)$$

Moving to the basis of vector $|psi\rangle$ to the basis of $|psi'\rangle$, is done on the following way:

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{O}\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle = \langle\psi'|\hat{O}'|\psi'\rangle \quad (68)$$

Usually, when we evolve a state we don't follow this very same process. The time evolution of an initial state $|psi(0)\rangle$ in time is written as:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle \quad (69)$$

This is a direct result of the Schrödinger equation and the observables do not change in time. This actually means, that if for the observable \hat{x} we want to compute the mean value at time t , we need to calculate the quantity:

$$\overline{\hat{x}(t)} = \langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle \quad (70)$$

This means that we take \hat{x} as given and use the states at time t and this way of calculating the mean values of the observables is what is included in the *Schrödinger picture*.

We are not able to follow the same process to the unitary transformation $\hat{U}(t)$ that represents time evolution. If we follow the steps described in equations 66,67, we would have got the result

$$\overline{\hat{x}(t)} = \overline{\hat{x}(0)} \quad (71)$$

The above equation states that the mean value of the observable does not change in time, as if the system hasn't evolved at all in time. We usually denote quantities in the Schrödinger picture with the label S , eg $|\psi_S(t)\rangle$, meaning that this is a state in Schrödinger picture where the states, but not the observables evolve in time.

3 Heisenberg picture

Supposing now that there is time evolution not only in the state, but also in the observables, though, in such a way that we get the same result as the one we obtained in *Schrödinger picture* we need to make use of *Heisenberg picture*. Let's denote a state in the Heisenberg picture as $|\psi_H(t)\rangle$. In order to obtain them from a state initially described in Heisenberg picture, we transform it like:

$$|\psi_H(t)\rangle = \hat{S}^\dagger|\psi_S(t)\rangle \quad (72)$$

where

$$\hat{S}^\dagger = e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \quad (73)$$

This expression looks similar to the time-evolution of a state in Schrödinger picture

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}|\psi_S(0)\rangle \quad (74)$$

Substituting in the expression for $|\psi_H(t)\rangle$ we obtain:

$$|\psi_H(t)\rangle = \hat{S}^\dagger |\psi_S(t)\rangle = e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} |\psi_S(t)\rangle = e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} |\psi_S(0)\rangle = |\psi_S(0)\rangle \quad (75)$$

Therefore, the states in the Heisenberg picture at any time t are equal to the states in the Schrödinger picture at initial time $t = 0$.

Supposing now we want to transform an observable \hat{O}_S from the Schrödinger picture to the same one \hat{O}_H in the Heisenberg picture, we would do it using the unitary operator \hat{S}^\dagger as follows:

$$\hat{O}_H = \hat{S}^\dagger \hat{O}_S \hat{S} = e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \hat{O}_S e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \quad (76)$$

In this way, it is clear that now, even if \hat{O}_S doesn't depend explicitly on time, \hat{O}_H is time-dependent, thus we usually denote it as $\hat{O}_H(t)$.

In order to study the time evolution of $\hat{O}_H(t)$, we calculate its time derivative:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[e^{i\hat{H}t/\hbar} \right] \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} + e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S \frac{d}{dt} \left[e^{-i\hat{H}t/\hbar} \right] = \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{H} e^{i\hat{H}t/\hbar} + e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \right) e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{O}_H(t) - e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \right) = \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{O}_H(t) - \frac{i}{\hbar} \hat{O}_H(t) \hat{H} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}_H(t)] \Leftrightarrow \\ \frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}_H(t)] \end{aligned} \quad (77)$$

An outstanding exception of operators that are the same in both Heisenberg and Schrödinger pictures, is the Hamiltonian operator \hat{H} . To make this clear, we write:

$$\hat{H}_H(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{H}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} = e^{i\hat{H}t/\hbar} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{H}_S = \hat{H}_S \quad (78)$$

Regarding the expectation values of the observables in those two pictures, we may write:

$$\begin{aligned} \langle \psi_H(t) | \hat{O}_H(t) | \psi_H(t) \rangle &= \langle \psi_S(t) | e^{-i\hat{H}t/\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar} | \psi_S(t) \rangle = \\ &= \langle \psi_S(t) | \hat{O}_S | \psi_S(t) \rangle \end{aligned} \quad (79)$$

The above expression shows that the expectation values of any observable, are the same in both pictures. A useful process when dealing with time dependent Hamiltonians, is the calculation of the time evolution of the expectation value of an observable.

Supposing we examine the observable \hat{O} and we need to calculate its expectation value, while working in the Schrödinger picture:

$$\overline{\hat{O}(t)} = \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle \quad (80)$$

Taking the time derivative we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\hat{O}(t)} &= \frac{d}{dt} \left[\langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle \right] = \\ &= \frac{d\langle \psi(t) |}{dt} \hat{O} | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \hat{O} \frac{d| \psi(t) \rangle}{dt} \end{aligned} \quad (81)$$

Now, rewriting the time dependent Schrödinger equation as:

$$\frac{d| \psi(t) \rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} | \psi(t) \rangle \Leftrightarrow \frac{d\langle \psi(t) |}{dt} = \langle \psi(t) | \hat{H} \frac{i}{\hbar} \quad (82)$$

Returning to the expression for the time derivative, 79, we may write:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\hat{O}(t)} &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H} \hat{O} | \psi(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{O} \hat{H} | \psi(t) \rangle = \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \left[\hat{H}, \hat{O} \right] | \psi(t) \rangle = \\ &= \frac{i}{\hbar} \overline{\left[\hat{H}, \hat{O} \right]} \end{aligned} \quad (83)$$

4 Interaction Picture

Interaction picture is an "*intermediate*" picture, meaning that the time dependence of the states is only partially moved on the observables.

In general, in order to move to the interaction picture, we need to split the Hamiltonian under consideration into two parts: the free part $\hat{H}_S^{(0)}$ which is the exactly solvable part of the Hamiltonian and the interacting part \hat{V}_S , just like when dealing with a perturbation theory problem. Therefore, the Hamiltonian may be broken like:

$$\hat{H}_S = \hat{H}_S^{(0)} + \hat{V}_S \quad (84)$$

Next, we introduce the following unitary operator:

$$\hat{S}_0^\dagger = e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \quad (85)$$

By acting with this operators, we define the interaction picture and we will use "I" as a label, following the rules:

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{S}_0^\dagger |\psi_S(t)\rangle = e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} |\psi_S(t)\rangle \quad (86)$$

$$\hat{O}_I(t) = \hat{S}_0^\dagger \hat{O}_S \hat{S}_0 = e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \quad (87)$$

Starting from the definition of $|\psi_I(t)\rangle$ and taking the time derivative, will lead us to an expression for its time evolution:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S^{(0)} |\psi_S(t)\rangle + e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S^{(0)} |\psi_I(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \left[\hat{H}_S^{(0)} + \hat{V}_S \right] |\psi_S(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{V}_S |\psi_S(t)\rangle = \\ &= -\frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{V}_S e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} |\psi_S(t)\rangle \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \hat{V}_I(t) |\psi_I(t)\rangle \Leftrightarrow \\ i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= \hat{V}_I(t) |\psi_I(t)\rangle \end{aligned} \quad (88)$$

The last expression is analogous to the Schrödinger equation, but in the interaction picture, which allows us as we've seen throughout the text to tackle with time-dependent perturbation problems.

Regarding the time evolution of an operator in the interaction picture, we start from:

$$\hat{O}_I(t) = e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \quad (89)$$

Taking the time derivative of both sides, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{O}_I(t) &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S^{(0)} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{H}_S^{(0)} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S^{(0)} \hat{O}_I - \frac{i}{\hbar} \hat{O}_I \hat{H}_S^{(0)} \\ &= \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S^{(0)}, \hat{O}_I \right] \end{aligned} \quad (90)$$

In the interaction picture, $\hat{H}_S^{(0)}$ becomes:

$$\hat{H}_I^{(0)} = e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} \hat{H}_S^{(0)} e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} = \hat{H}_S^{(0)} e^{i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} e^{-i\hat{H}_S^{(0)}t/\hbar} = \hat{H}_S^{(0)} \quad (91)$$

Therefore $\hat{H}_I^{(0)}$ is the same as $\hat{H}_S^{(0)}$ and substitution in 90 yields:

$$\frac{d}{dt} \hat{O}_I = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_I^{(0)}, \hat{O}_I \right] \quad (92)$$

Summarizing we should point out that in the interaction picture the evolution of the states is controlled by \hat{V} , while the evolution of the observables is ruled by $\hat{H}^{(0)}$.

5 Dissipative processes in cavity QED

So far, we have analytically treated all of the systems under consideration making a silent but quite important hypothesis; that the cavity is perfectly isolated from the environment $\kappa = 0$, there are no thermal states in the cavity $\bar{n}_t h = 0$ and that there is no spontaneous emission inside the cavity ($\gamma = 0$).

Those limits of course are helpful in order to derive the physical processes that take place in such system, though Nature has laws that would never allow one to achieve these *ideal values* in an experiment.

Theoretical work on dissipative processes is formidably described in [27], [28] and [14]. It is not the purpose of the current thesis to extensively describe the derivation of the methods discussed in these works, instead we will use their results to briefly discuss the important role of environment interaction in our model.

The main reason for the foundation of this relatively new field described by the title "*Open Quantum Systems*" is the fact that when taking under consideration a system interacting with its environment, the Hilbert space that includes all the necessary information for the description of the model becomes so large, that analytical description of the differential equations involved is feasible for a very small subset of realistic situations, for example the *Resonant Fluorescence* [14]. Moreover, the description of the phenomena taking place cannot be expressed in terms of wavefunctions (which essentially describe pure states); instead, the **density matrix** evolution is what will allow us to keep track of the degradation of the open system. The reason is that, in contrast to what we have discussed so far, the evolution of the system is ruled by non-unitary (non-reversible) operations, which block us from using analytical methods.

The benefits of developing this sort of formalism are quite clear if we consider the fact that contemporary computational systems allow us to perform simulations making use of this formalism, which introduces the notion of *Super-operators* (operators that act on operators) and *collapse operators* that describe the dissipative influence of a closed system coupled to its environment.

In what follows, we will give a "compressed" description of the *Master Equation Approach* and the *Quantum Trajectory method* and include the numerical results derived using the Python open-source package *QuTip* [114]. In what follows, we will discuss the main steps of the derivation of the master equation following [27] and [28] and personal notes from the series of lectures Prof. Carmichael gave in

Singapore School of Physics on June 2012.

Lindblad Master Equation Approach

The density matrix of a system that contains all the necessary information regarding the statistical distribution of the system (either pure state, or mixed state) is defined by the relation:

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (93)$$

where p_n is the classical probability that the system is in the quantum state $|\psi_n\rangle$. The standard approach for obtaining the equations of motion of a system S interacting with a heat reservoir (which is essentially the environment) R , is to extend the notion of the "System", so that it includes the closed system, the reservoir and their interaction. This combined quantum system can be then considered closed and its time evolution is then described by the equation:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \quad (94)$$

where now the Hamiltonian H , contains the information for the initial closed system (the cavity), the heat reservoir (the environment) and their interaction, assuming that some of the infinite modes of the environment can be coupled to the cavity modes with the mediation of the cavity dissipation rate κ . Under those considerations, the Hamiltonian H may be written in the form:

$$H = H_S + H_R + H_{SR} \quad (95)$$

The terms H_S and H_R are the Hamiltonians of the system and the reservoir respectively, and H_{SR} carries the interaction between them. If the density matrix $\rho(t)$ describes the evolution of both the closed system and the reservoir in the Hilbert space $(S \oplus R)$, we can obtain the *reduced density matrix* of the system $\rho_S(t)$ by calculating the partial trace of the total system density matrix, over the reservoir states:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_R \rho(t) \quad (96)$$

If we transform the Schrödinger equation into the interaction picture in order to damp the fast oscillating terms, the modified density matrix becomes:

$$\tilde{\rho}(t) = e^{i/\hbar(H_S+H_R)t} \rho(t) e^{-i/\hbar(H_S+H_R)t} \quad (97)$$

In general, the interaction between the system and the reservoir is described by a time-dependent Hamiltonian $\tilde{H}_{SR}(t)$, which is given by the relation:

$$\tilde{H}_{SR}(t) = e^{i/\hbar(H_S+H_R)t} H_{SR} e^{-i/\hbar(H_S+H_R)t} \quad (98)$$

Therefore, we can write the Schrödinger equation as:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\rho}(t) \right] \quad (99)$$

Integration of this equation will provide us with an integral-differential equation, which can be iterated repeatedly, giving each time higher order approximations.

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \left[\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t') \right] dt' \quad (100)$$

Substituting this expression of $\tilde{\rho}(t)$ in order to iterate once this equation, we obtain:

$$\tilde{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\rho}(0) \right] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \left[\tilde{H}_{SR}(t), \left[\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t') \right] \right] dt' \quad (101)$$

This expression can provide us with a full expression that describes the system if it is iterated many times, since there is no approximation made. However, we can make certain approximations in order to simplify it. First of all, we must assume that at $t = 0$ (when the interaction is turned on), there is no correlation between the system and the reservoir. Therefore, the combined density matrix may be written as

$$\rho(0) = \rho_S(0) R_0 \quad (102)$$

where R_0 is the initial reservoir density operator. Tracing over the reservoir leads us to:

$$\begin{aligned} tr_R(\dot{\tilde{\rho}}(t)) &= -\frac{i}{\hbar} tr_R \left(\left[\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\rho}(0) \right] \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t tr_R \left(\left[\tilde{H}_{SR}(t), \left[\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t') \right] \right] \right) dt' \end{aligned} \quad (103)$$

Setting the initial conditions so that we may discard the first term of this expression, we have:

$$\dot{\tilde{\rho}}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t tr_R \left(\left[\tilde{H}_{SR}(t), \left[\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t') \right] \right] \right) dt' \quad (104)$$

Our first approximation regarding the problem, has been the fact that the system and the reservoir (ie. the cavity and its environment) are uncorrelated (not entangled) initially. In general, as time passes by they will start having entanglement, though in most cases, this correlation between the system and the reservoir, is very weak and the combined density matrix can be written as:

$$\rho(t) = \rho_S(t) R_0 + O(H_{SR}) \quad (105)$$

Now it is time to state the first "important" approximation in our problem, which is referred to as **Born approximation**. The reservoir can be considered much larger than the system, so that changes in system will not affect the reservoir, thus the reservoir will stay in the same, initial condition. The second assumption of Born approximation requires that the system and the environment remain separable throughout the evolution which is justified by the "weak-interaction" assumption. In summary, Born approximation declares that:

$$\rho(t) \simeq \rho(t) \otimes \rho_R \quad (106)$$

The next important approximation is referred to as **Markov approximation** and it assumes that the time-scale of the decay for the environment (let's say τ_R) is much shorter than the smallest time-scale of the system dynamics, which summarizes in:

$$\tau_S \gg \tau_R \quad (107)$$

Markov-approximation may seem crude with a first glance. Though, it states an important fact: *Despite the fact that the past history of the system is imprinted in the reservoir through the coupling, thus affecting future states of the system again, if we consider it very large, the changes in the reservoir caused by the system do not survive for very long, which deprives the reservoir from having "memory".* To understand how Markov approximation affects the treatment of our analysis, we will denote the interaction Hamiltonian as:

$$H_{SR} = \hbar \sum_i s_i R_i \quad (108)$$

where s_i and R_i are the operators in the Hilbert space of the system and the reservoir respectively. Moving to the interaction picture and performing Born approximation yields:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = - \sum_{i,j} \int_0^t Tr_R \left(\left[\tilde{s}_i(t) \tilde{R}_i(t), \left[\tilde{s}_j(t') \tilde{R}_j(t'), \tilde{\rho}_S(t') R_0 \right] \right] \right) dt' \quad (109)$$

Hence, this equation can be written as:

$$\dot{\tilde{\rho}}_S(t) = - \sum_{i,j} \int_0^t \left(A \langle \tilde{R}_i(t) \tilde{R}_j(t') \rangle_R + B \langle \tilde{R}_j(t') \tilde{R}_i(t) \rangle_R \right) dt' \quad (110)$$

where A and B are given by the relations:

$$\begin{aligned} A &= \tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}_S(t') - \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}_S(t') \tilde{s}_i(t) \\ B &= \tilde{\rho}_S(t') \tilde{s}_j(t') \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}_S(t') \tilde{s}_j(t') \end{aligned} \quad (111)$$

The effect of the environment is evident in the terms:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{R}_i(t) \tilde{R}_j(t') \rangle_R &= Tr_R \left(R_0 \tilde{R}_i(t) \tilde{R}_j(t') \right) \\ \langle \tilde{R}_j(t') \tilde{R}_i(t) \rangle_R &= Tr_R \left(R_0 \tilde{R}_j(t') \tilde{R}_i(t) \right)\end{aligned}\tag{112}$$

References - Bibliography

- [1] Cohen-Tannoudji, C., B. Diu, and F. Laloë: *Quantum mechanics*. Quantum Mechanics. Wiley, 1977, ISBN 9782705658342. <http://books.google.gr/books?id=CnkfAQAAMAAJ>.
- [2] Harris, E.G.: *Introduction to Modern Theoretical Physics: Quantum theory and statistical physics*. Number τ . 2 in *Introduction to Modern Theoretical Physics: Quantum Theory and Statistical Physics*. Wiley, 1975, ISBN 9780471353263. <http://books.google.gr/books?id=Qf8oAQAAMAAJ>.
- [3] Levi, A.F.J.: *Applied Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2006, ISBN 9780521860963. <http://books.google.gr/books?id=40rRzNbuhpAC>.
- [4] Miller, David A. B.: *Quantum Mechanics for Scientists and Engineers*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2008, ISBN 0521897831, 9780521897839. <http://books.google.gr/books?id=pwrBp3ZGaUYC>.
- [5] Trachanas, Stephanos: *Quantum Mechanics II*. Crete University Press, Heraklio, Crete, Grece, 2008, ISBN 978-960-524-267-1. <http://www.cup.gr/ViewShopProduct.aspx?ProductId=273160&LangId=1>.
- [6] Raimond, J. M., M. Brune, and S. Haroche: *Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity*. Rev. Mod. Phys., 73:565-582, Aug 2001. <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.565>.
- [7] Haroche, S. and J.M. Raimond: *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons: Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford graduate texts in mathematics. OUP Oxford, 2006, ISBN 9780198509141. <http://books.google.gr/books?id=QY6YuU-Qi-AC>.

- [8] E. M. Purcell, H. C. Torrey and R. V. Pound: *Proceedings of the american physical society*. Phys. Rev., 69:674-674, Jun 1946. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.69.674.2>.
- [9] Goy, P., J. M. Raimond, M. Gross, and S. Haroche: *Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission*. Phys. Rev. Lett., 50:1903-1906, Jun 1983. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.50.1903>.
- [10] Boi, L.: *The Quantum Vacuum: A Scientific and Philosophical Concept, from Electrodynamics to String Theory and the Geometry of the Microscopic World*. The Quantum Vacuum. Johns Hopkins University Press, 2011, ISBN 9781421402475. http://books.google.gr/books?id=rAEVOLae_FoC.
- [11] Gerry, C. and P. Knight: *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2004, ISBN 9780521527354. <http://books.google.gr/books?id=CgByyoBJJwgC>.
- [12] Lambropoulos, P. and D. Petrosyan: *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*. Springer, 2006, ISBN 9783540345718. <http://books.google.gr/books?id=53bpU-41U8gC>.
- [13] Milonni, P.W.: *The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. Academic Press, 1994, ISBN 9780124980808. <http://books.google.gr/books?id=P83vAAAAMAAJ>.
- [14] Scully, M.O. and S. Zubairy: *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997, ISBN 9780521435956. <http://books.google.gr/books?id=20ISsQCKKmQC>.
- [15] Walls, D.F. and G.J. Milburn: *Quantum Optics*. Springer, 2008, ISBN 9783540285731. <http://books.google.gr/books?id=LiWsc3Nlf0kC>.
- [16] Nielsen, M.A. and I.L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010, ISBN 9781107002173. <http://books.google.gr/books?id=-s4DEy7o-a0C>.
- [17] Mermin, N.D.: *Quantum Computer Science: An Introduction*. Cambridge University Press, 2007, ISBN 9780521876582. <http://books.google.gr/books?id=q2S9APxFdUQC>.

- [18] Williams, C.P.: *Explorations in Quantum Computing*. Texts in Computer Science. Springer, 2011, ISBN 9781846288869. <http://books.google.gr/books?id=QE8S--WjIFwC>.
- [19] McMahon, D.: *Quantum Computing Explained*. Wiley, 2007, ISBN 9780470181362. <http://books.google.gr/books?id=bDXwFHJNKFAC>.
- [20] Benioff, Paul: *The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical hamiltonian model of computers as represented by turing machines*. Journal of Statistical Physics, 22:563-591, 1980, ISSN 0022-4715. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01011339>, 10.1007/BF01011339.
- [21] Feynman, R. P.: *Simulating physics with computers*. International Journal of Theoretical Physics, 21:467-488, June 1982. <http://www.cs.berkeley.edu/~christos/classics/Feynman.pdf>.
- [22] Deutsch, D.: *Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer*. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 400(1818):97-117, July 1985. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1985.0070>.
- [23] Cleve, R., A. Ekert, C. Macchiavello, and M. Mosca: *Quantum algorithms revisited*. Phil.Trans.Roy.Soc.Lond.A, 1997. <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/9708016>.
- [24] Brown, J. and D. Deutsch: *Quest for the Quantum Computer*. Touchstone Book. Simon & Schuster, 2001, ISBN 9780684870045. <http://books.google.gr/books?id=ECWm59h2pLAC>.
- [25] Jaynes E.T., Cummings F.W.: *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*. Proceedings of the IEEE, 51:89-109, Jan 1963. <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=1443594>.
- [26] Shore, Bruce W. and Peter L. Knight: *The jaynes-cummings model*. Journal of Modern Optics, 40(7):1195-1238, 1993. <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500349314551321>.
- [27] Carmichael, H.J.: *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*. Texts & Monographs in Physics. Springer, 2003, ISBN 9783540548829. <http://books.google.gr/books?id=ocgRgM-yJacC>.

- [28] Carmichael, H.J.: *Statistical Methods in Quantum Optics 2: Non-Classical Fields*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, 2007, ISBN 9783540713197. <http://books.google.gr/books?id=xgxOYkxW8JoC>.
- [29] Carmichael, H.: *An Open Systems Approach to Quantum Optics: Lectures Presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991*. Lecture notes in physics: Monographs. Springer-Verlag, 1993, ISBN 9783540566342. <http://books.google.gr/books?id=E15gxgxWhpgC>.
- [30] Deutsch, D. and R. Jozsa: *Rapid solution of problems by quantum computation*. Royal Society of London Proceedings Series A, 439:553-558, December 1992. <http://www.qudev.ethz.ch/phys4/studentspresentations/djalgo/DeutschJozsa.pdf>.
- [31] Grover, Lov K.: *Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack*. Phys. Rev. Lett., 79:325-328, Jul 1997. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.325>.
- [32] Grover, Lov K.: *Complex quantum queries*. 1997. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9706005>.
- [33] Grover, Lov K.: *Quantum computers can search rapidly by using almost any transformation*. Phys. Rev. Lett., 80:4329-4332, May 1998. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.4329>.
- [34] Jozsa, Richard: *Searching in grover's algorithm*. 1999. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9901021>.
- [35] Shor, P. W.: *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*. eprint arXiv:quant-ph/9508027, August 1995. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9508027v2>.
- [36] Scully, M. O. and M. S. Zubairy: *Cavity qed implementation of the discrete quantum fourier transform*. Physical Review A, 65(5):052324, May 2002. <http://pra.aps.org/abstract/PRA/v65/i5/e052324>.
- [37] Yamaguchi, F., P. Milman, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Quantum search with two-atom collisions in cavity qed*. Physical Review A, 66(1):010302, July 2002. <http://pra.aps.org/abstract/PRA/v66/i1/e010302>.

- [38] Lloyd, S.: *Universal quantum simulators*. Science, 273:1073–1078, August 1996. <http://research.physics.illinois.edu/demarco/lloyd%2096%20paper.pdf>.
- [39] Angelakis, Dimitris G., Marcelo Franca Santos, and Sougato Bose: *Photon-blockade-induced mott transitions and xy spin models in coupled cavity arrays*. Phys. Rev. A, 76:031805, Sep 2007. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.031805>.
- [40] Hood, C. J., M. S. Chapman, T. W. Lynn, and H. J. Kimble: *Real-time cavity qed with single atoms*. Phys. Rev. Lett., 80:4157–4160, May 1998. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.4157>.
- [41] Boca, A., R. Miller, K. M. Birnbaum, A. D. Boozer, J. McKeever, and H. J. Kimble: *Observation of the vacuum rabi spectrum for one trapped atom*. Phys. Rev. Lett., 93:233603, Dec 2004. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.233603>.
- [42] Duan, L. M., B. Wang, and H. J. Kimble: *Robust quantum gates on neutral atoms with cavity-assisted photon scattering*. Phys. Rev. A, 72:032333, Sep 2005. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.032333>.
- [43] Boozer, A. D., A. Boca, R. Miller, T. E. Northup, and H. J. Kimble: *Reversible state transfer between light and a single trapped atom*. Phys. Rev. Lett., 98:193601, May 2007. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.193601>.
- [44] Khudaverdyan, M., W. Alt, I. Dotsenko, L. FG?rster, S. Kuhr, D. Meschede, Y. Miroshnychenko, D. Schrader, and A. Rauschenbeutel: *Adiabatic quantum state manipulation of single trapped atoms*. Phys. Rev. A, 71:031404, 2005. <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0411120>.
- [45] Miroshnychenko, Y., W. Alt, I. Dotsenko, L. FG?rster, M. Khudaverdyan, D. Meschede, D. Schrader, and A. Rauschenbeutel: *An atom-sorting machine*. Nature, 442:151, 2006. <http://www.nature.com/nature/journal/v442/n7099/full/442151a.html>.
- [46] Brakhane, S., W. Alt, T. Kampschulte, M. Martinez-Dorantes, R. Reimann, S. Yoon, A. Widera, and D. Meschede: *Bayesian feedback control of a two-atom spin-state in an atom-cavity system*. Phys. Rev. Lett., 109:173601, 2012. <http://arxiv.org/abs/1206.3184>.

- [47] Cirac, J. I. and P. Zoller: *Quantum computations with cold trapped ions*. Phys. Rev. Lett., 74:4091-4094, May 1995. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.4091>.
- [48] Leibfried, D., R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland: *Quantum dynamics of single trapped ions*. Rev. Mod. Phys., 75:281-324, Mar 2003. <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.281>.
- [49] Monroe, C., D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland: *Demonstration of a fundamental quantum logic gate*. Phys. Rev. Lett., 75:4714-4717, Dec 1995. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4714>.
- [50] L.M.K., Vandersypen, Steffen M., G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, and I. L. Chuang: *Experimental realization of shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*. Nature, 414:883-887, December 2001. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0112176>.
- [51] Blais, Alexandre, Ren Shou Huang, Andreas Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf: *Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation*. Phys. Rev. A, 69:062320, Jun 2004. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.062320>.
- [52] Devoret, M. H., A. Wallraff, and J. M. Martinis: *Superconducting qubits: A short review*. eprint arXiv:cond-mat/0411174, November 2004. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0411174>.
- [53] Dicarlo, L., J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf: *Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor*. Nature, 460:240-244, July 2009. <http://www.nature.com/nature/journal/v460/n7252/full/nature08121.html>.
- [54] Glauber, Roy J.: *Coherent and incoherent states of the radiation field*. Phys. Rev., 131:2766-2788, Sep 1963. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.2766>.
- [55] Sudarshan, E. C. G.: *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams*. Phys. Rev. Lett., 10:277-279, Apr 1963. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.277>.

- [56] Walther, H., B. T. H. Varcoe, B. G. Englert, and T. Becker: *Cavity quantum electrodynamics*. Reports on Progress in Physics, 69:1325–1382, May 2006. <http://iopscience.iop.org/0034-4885/69/5/R02>.
- [57] Heinichs, Todd: *Cavity qed approaches to quantum information and quantum computing*. A Quantum Information Science and Technology Roadmap, 2004. http://qist.lanl.gov/qcomp_map.shtml.
- [58] Heinzen, D. J., J. J. Childs, J. E. Thomas, and M. S. Feld: *Enhanced and inhibited visible spontaneous emission by atoms in a confocal resonator*. Phys. Rev. Lett., 58:1320–1323, Mar 1987. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1320>.
- [59] Heinzen, D. J. and M. S. Feld: *Vacuum radiative level shift and spontaneous-emission linewidth of an atom in an optical resonator*. Phys. Rev. Lett., 59:2623–2626, Dec 1987. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.2623>.
- [60] Casimir, H. B. G. and D. Polder: *The influence of retardation on the london-van der waals forces*. Phys. Rev., 73:360–372, Feb 1948. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.360>.
- [61] Kuhr, S., S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, and B. Visentin: *Ultrahigh finesse fabry-pérot superconducting resonator*. Applied Physics Letters, 90(16):164101, 2007. <http://link.aip.org/link/?APL/90/164101/1>.
- [62] Brune, M., F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Quantum rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity*. Phys. Rev. Lett., 76:1800–1803, Mar 1996. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.1800>.
- [63] Wiseman, H. M. and G. J. Milburn: *Quantum theory of field-quadrature measurements*. Phys. Rev. A, 47:642–662, Jan 1993. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.47.642>.
- [64] Barenco, Adriano, Charles H. Bennett, Richard Cleve, David P. DiVincenzo, Norman Margolus, *et al.*: *Elementary gates for quantum computation*. Phys. Rev., A52:3457, 1995. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9503016>.

- [65] Cormen, T.H., C.E. Leiserson, R.L. Rivest, and C. Stein: *Introduction to Algorithms, Third Edition*. MIT Press, 2009, ISBN 9780262533058. <http://books.google.gr/books?id=h2xRPgAACAAJ>.
- [66] Ettinger, M., P. Hoyer, and E. Knill: *The quantum query complexity of the hidden subgroup problem is polynomial*. arXiv:quant-ph/0401083, January 2004. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0401083>.
- [67] Regev, O.: *Quantum computation and lattice problems*. eprint arXiv:cs/0304005, April 2003. <http://arxiv.org/abs/cs/0304005>.
- [68] Paul, W.: *Electromagnetic traps for charged and neutral particles*. Reviews of Modern Physics, 62:531–540, July 1990. <http://www.qudev.phys.ethz.ch/content/courses/phys4/studentspresentations/iontraps/RMP.pdf>.
- [69] Lu, C. Y., D. E. Browne, T. Yang, and J. W. Pan: *Demonstration of a compiled version of shor's quantum factoring algorithm using photonic qubits*. Physical Review Letters, 99(25):250504, December 2007. <http://prl.aps.org/abstract/PRL/v99/i25/e250504>.
- [70] Lanyon, B. P., T. J. Weinhold, N. K. Langford, M. Barbieri, D. F. V. James, A. Gilchrist, and A. G. White: *Experimental demonstration of a compiled version of shor's algorithm with quantum entanglement*. Physical Review Letters, 99(25):250505, December 2007. <http://arxiv.org/abs/0705.1684>.
- [71] Rauschenbeutel, A., P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Controlled entanglement of two field modes in a cavity quantum electrodynamics experiment*. Physical Review A, 64(5):050301, November 2001. <http://pra.aps.org/abstract/PRA/v64/i5/e050301>.
- [72] Brune, M., S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raimond, and N. Zagury: *Quantum nondemolition measurement of small photon numbers by rydberg-atom phase-sensitive detection*. Phys. Rev. Lett., 65:976–979, Aug 1990. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.976>.
- [73] Nogues, G., A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Seeing a single photon without destroying it*. Nature, 400(6741):239–242, July 1999, ISSN 0028-0836. <http://dx.doi.org/10.1038/22275>.

- [74] Osnaghi, S., P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Coherent control of an atomic collision in a cavity*. Phys. Rev. Lett., 87:037902, Jun 2001. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.037902>.
- [75] Zheng, Shi Biao and Guang Can Guo: *Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity qed*. Phys. Rev. Lett., 85:2392–2395, Sep 2000. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.2392>.
- [76] Brune, M., F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, and S. Haroche: *Quantum rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity*. Phys. Rev. Lett., 76:1800–1803, Mar 1996. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.1800>.
- [77] Zubairy, M. Suhail, Mochan Kim, and Marlan O. Scully: *Cavity-qed-based quantum phase gate*. Phys. Rev. A, 68:033820, Sep 2003. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.033820>.
- [78] Zoller, P., Th. Beth, D. Binosi, R. Blatt, H. Briegel, D. Bruss, T. Calarco, J. I. Cirac, D. Deutsch, J. Eisert, A. Ekert, C. Fabre, N. Gisin, P. Grangiere, M. Grassl, S. Haroche, A. Imamoglu, A. Karlson, J. Kempe, L. Kouwenhoven, S. Kröll, G. Leuchs, M. Lewenstein, D. Loss, N. Lütkenhaus, S. Massar, J. E. Mooij, M. B. Plenio, E. Polzik, S. Popescu, G. Rempe, A. Sergienko, D. Suter, J. Twamley, G. Wendin, R. Werner, A. Winter, J. Wrachtrup, and A. Zeilinger: *Quantum information processing and communication*. The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics, 36:203–228, 2005, ISSN 1434-6060. <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2005-00251-1>.
- [79] Hauke, Philipp, Fernando M Cucchietti, Luca Tagliacozzo, Ivan Deutsch, and Maciej Lewenstein: *Can one trust quantum simulators?* Reports on Progress in Physics, 75(8):082401, 2012. <http://stacks.iop.org/0034-4885/75/i=8/a=082401>.
- [80] Brown, Katherine L., William J. Munro, and Vivien M. Kendon: *Using quantum computers for quantum simulation*. Entropy, 12(11):2268–2307, 2010, ISSN 1099-4300. <http://www.mdpi.com/1099-4300/12/11/2268>.
- [81] Cirac, J. Ignacio, Paolo Maraner, and Jiannis K. Pachos: *Cold atom simulation of interacting relativistic quantum field theories*. Phys. Rev.

- Lett., 105:190403, Nov 2010. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.190403>.
- [82] Angelakis, D. G., M. Huo, D. Chang, L. C. Kwek, and V. Korepin: *Mimicking interacting relativistic theories with stationary pulses of light*. ArXiv e-prints, July 2012.
- [83] Jaksch, D., C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller: *Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices*. Physical Review Letters, 81:3108–3111, October 1998. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9805329>.
- [84] Lewenstein, M., A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen, and U. Sen: *Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond*. Advances in Physics, 56:243–379, March 2007. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0606771>.
- [85] Jaksch, D. and P. Zoller: *The cold atom hubbard toolbox*. Annals of Physics, 315(1):52 – 79, 2005, ISSN 0003-4916. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491604001782>, <ce:title>Special Issue</ce:title>.
- [86] Bloch, I., J. Dalibard, and S. Nascimbène: *Quantum simulations with ultracold quantum gases*. Nature Physics, 8:267–276, April 2012. <http://www.nature.com/nphys/journal/v8/n4/full/nphys2259.html>.
- [87] Lanyon, B. P., C. Hempel, D. Nigg, M. Müller, R. Gerritsma, F. Zähringer, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Rambach, G. Kirchmair, M. Hennrich, P. Zoller, R. Blatt, and C. F. Roos: *Universal digital quantum simulation with trapped ions*. Science, 334:57–, October 2011. <http://www.sciencemag.org/content/334/6052/57.abstract>.
- [88] Deng, X. L., D. Porras, and J. I. Cirac: *Effective spin quantum phases in systems of trapped ions*. Phys. Rev. A, 72:063407, Dec 2005. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.063407>.
- [89] Hennessy, K., A. Badolato, M. Winger, D. Gerace, M. Atatüre, S. Gulde, S. Fält, E. L. Hu, and A. Imamoglu: *Quantum nature of a strongly coupled single quantum dot-cavity system*. Nature, 445:896–899, February 2007. <http://www.nature.com/nature/journal/v445/n7130/full/nature05586.html>.
- [90] Blatt, R. and C. F. Roos: *Quantum simulations with trapped ions*. Nature Physics, 8:277–284, April 2012. <http://www.nature.com/nphys/journal/v8/n4/full/nphys2252.html>.

- [91] Somaroo, S., C. H. Tseng, T. F. Havel, R. Laflamme, and D. G. Cory: *Quantum simulations on a quantum computer*. Phys. Rev. Lett., 82:5381–5384, Jun 1999. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.5381>.
- [92] Britton, J. W., B. C. Sawyer, A. C. Keith, C. C. J. Wang, J. K. Freericks, H. Uys, M. J. Biercuk, and J. J. Bollinger: *Engineered two-dimensional ising interactions in a trapped-ion quantum simulator with hundreds of spins*. "Nature", 484:489–492, April 2012. <http://www.nature.com/nature/journal/v484/n7395/full/nature10981.html>.
- [93] Hartmann, M. J., F. G. S. L. Brandao, and M. B. Plenio: *Quantum many-body phenomena in coupled cavity arrays*. ArXiv e-prints, August 2008. <http://arxiv.org/abs/0808.2557>.
- [94] Greentree, A. D., C. Tahan, J. H. Cole, and L. C. L. Hollenberg: *Quantum phase transitions of light*. Nature Physics, 2:856–861, December 2006. <http://www.nature.com/nphys/journal/v2/n12/abs/nphys466.html>.
- [95] Kay, A. and D. G. Angelakis: *Reproducing spin lattice models in strongly coupled atom-cavity systems*. EPL (Europhysics Letters), 84:20001, October 2008. <http://arxiv.org/abs/0802.0488>.
- [96] Cho, Jaeyoon, Dimitris G. Angelakis, and Sougato Bose: *Simulation of high-spin heisenberg models in coupled cavities*. Phys. Rev. A, 78:062338, Dec 2008. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.062338>.
- [97] Carusotto, I., D. Gerace, H. E. Türeci, S. De Liberato, C. Ciuti, and A. Imamoglu: *Fermionized photons in an array of driven dissipative nonlinear cavities*. Phys. Rev. Lett., 103:033601, Jul 2009. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.033601>.
- [98] Tomadin, A., V. Giovannetti, R. Fazio, D. Gerace, I. Carusotto, H. E. Türeci, and A. Imamoglu: *Signatures of the superfluid-insulator phase transition in laser-driven dissipative nonlinear cavity arrays*. Phys. Rev. A, 81:061801, Jun 2010. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.061801>.
- [99] Angelakis, D. G., S. Bose, and S. Mancini: *Steady-state entanglement between hybrid light-matter qubits*. EPL (Europhysics Letters), 85:20007, January 2009. <http://arxiv.org/abs/0711.1830>.

- [100] Angelakis, D. G., L. Dai, and L. C. Kwek: *Coherent control of long-distance steady-state entanglement in lossy resonator arrays*. EPL (Europhysics Letters), 91:10003, July 2010. <http://arxiv.org/abs/0906.2168>.
- [101] Knap, Michael, Enrico Arrigoni, Wolfgang von der Linden, and Jared H. Cole: *Emission characteristics of laser-driven dissipative coupled-cavity systems*. Phys. Rev. A, 83:023821, Feb 2011. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.023821>.
- [102] Nissen, Felix, Sebastian Schmidt, Matteo Biondi, Gianni Blatter, Hakan E. Türeci, and Jonathan Keeling: *Nonequilibrium dynamics of coupled qubit-cavity arrays*. Phys. Rev. Lett., 108:233603, Jun 2012. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.233603>.
- [103] Nunnenkamp, A., J. Koch, and S. M. Girvin: *Synthetic gauge fields and homodyne transmission in Jaynes-Cummings lattices*. New Journal of Physics, 13(9):095008, September 2011. <http://arxiv.org/abs/1105.1817>.
- [104] Umucalilar, R. O. and I. Carusotto: *Artificial gauge field for photons in coupled cavity arrays*. Phys. Rev. A, 84:043804, Oct 2011. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.043804>.
- [105] Grujic, T, S R Clark, D Jaksch, and D G Angelakis: *Non-equilibrium many-body effects in driven nonlinear resonator arrays*. New Journal of Physics, 14(10):103025, 2012. <http://stacks.iop.org/1367-2630/14/i=10/a=103025>.
- [106] Houck, A. A., H. E. Türeci, and J. Koch: *On-chip quantum simulation with superconducting circuits*. Nature Physics, 8:292-299, April 2012. <http://www.nature.com/nphys/journal/v8/n4/full/nphys2251.html>.
- [107] Zoubi, Hashem, Meir Orenstien, and Amiram Ron: *Coupled microcavities with dissipation*. Phys. Rev. A, 62:033801, Aug 2000. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.033801>.
- [108] Haus, H. A., W. P. Huang, and A. W. Snyder: *Coupled-mode formulations*. Opt. Lett., 14(21):1222-1224, Nov 1989. <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-14-21-1222>.
- [109] Ogden, C. D., E. K. Irish, and M. S. Kim: *Dynamics in a coupled-cavity array*. Phys. Rev. A, 78:063805, Dec 2008. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.063805>.

- [110] James, D F and J Jerke: *Effective hamiltonian theory and its applications in quantum information*. Canadian Journal of Physics, 85(6):625-632, 2007. <http://www.nrcresearchpress.com/doi/abs/10.1139/p07-060>.
- [111] Bamba, Motoaki, Atac Imamoglu, Iacopo Carusotto, and Cristiano Ciuti: *Origin of strong photon antibunching in weakly nonlinear photonic molecules*. Phys. Rev. A, 83:021802, Feb 2011. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.021802>.
- [112] Loss, Daniel and David P. DiVincenzo: *Quantum computation with quantum dots*. Phys. Rev. A, 57:120-126, Jan 1998. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.57.120>.
- [113] Wineland, D.J., C. Monroe, W.M. Itano, D. Leibfried, B.E. King, *et al.*: *Experimental issues in coherent quantum state manipulation of trapped atomic ions*. J.Res.Natl.Inst.Stand.Tech., 103:259, 1998. <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9710025>.
- [114] Johansson, J.R., P.D. Nation, and Franco Nori: *Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems*. Computer Physics Communications, 183(8):1760 - 1772, 2012, ISSN 0010-4655. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465512000835>.
- [115] Mangano, S.: *Mathematica Cookbook*. Oreilly Cookbooks. O'Reilly Media, Incorporated, 2010, ISBN 9780596520991. http://books.google.gr/books?id=BkDxC_OlWisC.

Acknowledgements

During our lives we get to know many people. Personally, I consider two large classifications: there are people that encourage us to do "one more step" and others that try to stop any progress under way. Since my enrolment in the Master of T.U.C, I had the opportunity to meet people that belong to both those categories, though I would like to thank especially those who urged me to go one step further in anything I was achieving, rather than putting obstacles. Especially, I would like to thank my supervisor *Dr. D. Angelakis* for the composure he managed to inspire during some admittedly difficult situations as well as for giving to a Master's student the opportunity to see the "Big Picture" and skip local "perturbations" in his academic course.

Getting involved with the field of Quantum Optics and Quantum Computation was something I didn't expect when I was enrolling to the Master of the Science Department of T.U.C. and especially being hosted by *Centre of Quantum Technologies, Singapore* was beyond my greatest expectations. The three months spent there, undistracted from the tough situations in Greece were probably the reason for successfully finishing this thesis on schedule, as well as the chance for me to meet wonderful people, like: *Dr. Changsuk Noh, Dr. Su-Yong Lee, Dr. Amit Rai, Dr. Priyam Das* and my room-mates *Adriana Marais, Felix Binder* and *Tom Grujic* who did their best to make those three months productive and unforgettable. I also need to thank my fellow colleagues in T.U.C., *N. Schetakis, A. Blazaki and K. Koukoutsakis* for all the great moments we had during our classes in those two years, as well as *Dr. S. Moustazis* for the support he supplied to all of us when it was required.

The decision of enrolling to the Master of T.U.C. in the first place, wouldn't have been made without the incitement from my parents and especially my mother, during a very difficult period for our family. It was very hard to stay on the course and they were patient with me when my patience ran out, especially during writing the thesis. I also want to thank my father, for the inspiration he provided regarding how to explain Physics to students and eventually to other physicists.

Finally, I need to thank my companion, *Aneta*, for all the unconditional

affection she keeps providing after so many years and the positive mood she keeps sustaining even when things turn out bad, helping me to go over them. Without her support, understanding and encouragement, I am afraid this thesis wouldn't have been even started.

List of Figures

1.1	Optical phase space representation for a Fock state.	6
1.2	Optical phase space representation for a coherent state.	9
1.3	Atom energy levels after setting the zero energy level in the middle of the two levels E_g and E_e . The atomic transition frequency is denoted with ω_0	12
1.4	Atomic inversion for number states with different number of n . . .	15
1.5	Atomic inversion for $\bar{n} = 10$	17
1.6	Atomic inversion for $\bar{n} = 5$	17
1.7	Split of the energy levels of the bare states (left) due to the interaction with a quantized field and the dressed states energy levels (right) .	21
1.8	Dressed states energies versus detuning for the dressed states $ 1, \pm\rangle$, $ 2, \pm\rangle$ and $ 3, \pm\rangle$	21
1.9	Photograph of the cavity assembly used in [61] with the top mirror removed. The atomic beam path is visualized by the arrow. The four posts are used to mount the upper mirror.	25
1.10	Representation of a the main characteristics of cavity QED configuration	26
1.11	Decay of the Fock state $ 15\rangle$ in a leaky cavity with $\kappa = 10$, using the master equation approach (green line) and quantum trajectories (blue line).	29
1.12	Jaynes Cummings model in a leaky cavity using the master equation. The parameters used here, are: $\omega_0 = \omega = 10000$, $g = 10^{-4}\omega_0$, $\kappa = 0.2g$. 32	
2.1	Bloch-sphere representation of the operation performed by Pauli X gate. A ket $ 0\rangle$ (green line) is rotated by π over the x axis without modification of its length.	37
2.2	Deutsch-Jozsa algorithm	41
2.3	Improved version of Deutsch-Jozsa algorithm [23]	43
2.4	Geometric Proof of the function of Grover's algorithm	45
2.5	Probability amplitudes of the four states in the superposition . . .	47
2.6	Probability amplitudes after applying the inversion operator	47

2.7	Probability amplitudes after applying the diffusion operator.	47
2.8	Quantum circuit representing the Quantum Fourier Transform for n qubits. Image rebuilt using Qcircuit from Wikipedia	51
3.1	Qubit definition for Grover's algorithm.	54
3.2	Experimental setup for the realization of Grover algorithm in cavity QED. Atoms 1 and 2 cross the cavity with the same velocities but on different positions and undergo pulses S,H,P from external microwave sources and interact together twice inside the cavity via assisted van der Waals interactions.	57
3.3	Three level system	59
3.4	Quantum circuit realizing the quantum Fourier transform for q=3. $A_i \equiv U_{\pi/4, \pi/2}$ represent the one bit gates and $B_{jk} \equiv Q_{\pi/2^{k-j}}$ represent the two-qubit quantum phase gates.	62
3.5	Atom in V configuration. Transition $ b\rangle \rightarrow a\rangle$ is completely off resonant with the cavity field, while $ b\rangle \rightarrow c\rangle$ is dispersively coupled to the cavity.	63
3.6	Atomic levels under the influence of the magnetic field. For each atom the ground state $ b\rangle$ corresponds to $ 1\rangle$ and $ a_i\rangle$ to $ 0\rangle$	64
3.7	Experimental setup for the realization of QFT for 3 qubits.	64
4.1	Two coupled cavities interacting with fixed atoms.	71
4.2	Probability amplitudes corresponding to exciting a specific cavity mode or a specific atom as a function of time, for the case of large hopping assuming the system started from the state $ eg00\rangle$. Here, $J = 10g$, $\Delta = 0.1g$ and $\omega = 1000g$, while the time is scaled by period $T = \frac{2\pi}{GJ}$	74
4.3	Probability amplitudes corresponding to exciting a specific cavity mode or a specific atom as a function of time, for the case of large detuning, assuming the system started from the state $ eg00\rangle$. Here we chose $\Delta = 10g$, $g = 5 \times 10^{-3}\omega_0$, $J = 2g/5$, while the time is scaled by period $T = \frac{\pi\Delta^2}{g^2J}$	76
4.4	Probability amplitudes corresponding to exciting a specific cavity mode or a specific atom as a function of time, for the resonant case, assuming the system started from the state $ eg00\rangle$. In this case, $\Delta = 10g$, $g = 10^{-3}\omega_0$, $J = 10g$, while the time is scaled by period $T = \frac{2\pi}{g}$	78
4.5	Resonant case with $\kappa = 0.1g$	81
4.6	Resonant case with $\kappa = g$	81
4.7	Resonant case with $\kappa = 10g$	81
4.8	Large hopping case with $\kappa = 0.1g$	81

4.9	Large hopping case with $\kappa = 1g$	81
4.10	Large hopping case with $\kappa = 10g$	81
4.11	Dispersive case with $\kappa = 0.1g$	81
4.12	Dispersive case with $\kappa = 1g$	81
4.13	Dispersive case with $\kappa = 10g$	81
4.14	Quantum circuit representing the operations required in order to obtain the $CNOT$ gate using \sqrt{SWAP} gate.	83
4.15	Representation of the quantum circuit for the Deutsch-Jozsa algo- rithm.	83
4.16	Fidelity of \sqrt{SWAP} gate versus κ , with κ expressed using coupling rate g of the cavities for the dispersive case (blue line $g = 5 \cdot 10^{-3}\omega_0$, $J = 2/5g$, $\Delta = 10g$, $T_{disp}/4 = \pi\Delta^2/2g^2J$), resonant case (red line, $g = 5 \cdot 10^{-3}\omega_0$, $J = 10g$, $\Delta = 10g$, $T_R/4 = \pi/2g$) and large hopping case (green line $g = 5 \times 10^{-3}\omega_0$, $J = 10g$, $\Delta = 0.1g$, $T_{LH}/4 =$ $\pi J/2(g^2)$).	84
1	The ten first wave functions of the 1D harmonic oscillator and the potential $V = \frac{\xi^2}{2}$ in the dimensionless units.	103

List of Tables

2.1	One qubit gates	38
2.2	Two qubit gates	40
2.3	Three qubit gates	41
3.1	Definition of the angle of rotation for the realization of the oracles.	55